Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебное пособие

Под редакцией доктора педагогических наук Г.Г. Хамова

Допущено Учебно-методическим объединением по направлениям педагогического образования Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению 540200 «Физико-математическое образование»

Санкт-Петербург

Издательство РГПУ им. А.И. Герцена

2006

Печатается по рекомендации кафедры прикладной математики и решению Президиума редакционно-издательского совета РГПУ им. А.И. Герцена

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, проф. А.П. Шабко,

канд. физ.-мат. наук, доцент М.Ю. Чурилова

Авторы: Е.Б. Александрова, Т.А. Свенцицкая, Л.Н. Тимофеева

В учебном пособии рассмотрены основополагающие понятия теории функций комплексного переменного. В нем уделено внимание вопросам дифференцирования и интегрирования функций комплексного переменного, разложения в ряды Тейлора и Лорана.

Для студентов, обучающихся по направлению 540200 «Физико-математическое образование»

М 33 теория функций комплексного переменного: Учебное пособие / Под редакцией Г.Г. Хамова. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2006 – 168 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Первое упоминание о «мнимых» числах как о квадратных корнях из отрицательных чисел относится еще к XVI веку.

В 1545 году итальянский ученый Джироламо Кардано (1501-1576) опубликовал работу, в которой, пытаясь решить уравнение

$$x^3 - 12x + 16 = 0,$$

он пришел к выражению $\sqrt{-243}$. Через это выражение представлялись действительные корни уравнения: $x_1 = x_2 = 2$, $x_3 = -4$.

Таким образом, в работе Кардано мнимые числа появились как промежуточные члены в вычислениях. Несомненная заслуга Кардано состояла в том, что он допустил существование «несуществующего» числа $\sqrt{-1}$, постулировав правило умножения:

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1,$$

все остальное стало делом техники.

Однако еще три столетия математики привыкали к этим новым «мнимым» числам, время от времени пытаясь совершенно от них избавиться, «закрыть» их. Только с XIX века, после выхода в свет работ Карла Фридриха Гаусса (1777-1855), посвященных доказательству основной теоремы алгебры, комплексные[1] числа совершенно прижились в науке.

Замечательным свойством комплексных чисел явился тот факт, что основные математические операции над ними не выводят из области комплексных чисел (так называемое свойство замкнутости).

В дальнейшем изучение комплексных чисел стало стремительно развиваться, что привело к возникновению теории функций комплексного переменного. Она представляет собой логически стройное и гармонически связное здание, и знакомство с основными вопросами этой теории, бесспорно, является необходимым элементом математического образования.

---

[1] complexuc (лат.) – связь, сочетание.

Данное пособие посвящено изложению основ теории функций комплексного переменного. В нем изучаются важнейшие понятия этого курса: предел, производная, интеграл от функций комплексного переменного, разложение этих функций в степенные ряды, различные отображения, осуществляемые функциями. Выясняются основные свойства дифференцируемых функций комплексного переменного, называемых аналитическими. Этот класс функций находится в тесной связи с решением уравнения Лапласа, к которому приводятся многие задачи механики и физики.

В работе приводится большое количество примеров с разобранными решениями. В конце пособия помещены индивидуальные задания по всем разделам курса.

Для более подробного изучения курса теории функций комплексного переменного авторы предлагают использовать следующую литературу:

1. И.И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, изд.12, М., «Наука», 1977.
2. А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов, Теория функций комплексной переменной, М., «Наука», 1970.
3. А.И Поволоцкий, Л.М. Лихтарников, Теория аналитических функций, Ленинград, 1988.

Авторы глубоко признательны старшему преподавателю Р.А. Мыркиной за большое число ценных советов и замечаний, учтенных при подготовке настоящего пособия.

В заключение приведем несколько вспомогательных понятий, известных из математического анализа, которые потребуются в дальнейшем.

Пусть рассматривается множество D точек на плоскости.

1. Точка P называется *внутренней* точкой множества D, если существует круг с центром в точке P, все точки которого принадлежат множеству D.

Например, рассматривая все точки, заключенные между двумя концентрическими окружностями (рис.1), мы получаем множество, состоящее из одних внутренних точек. Присоединяя к этому множеству точки, лежащие на окружностях (на одной или обеих), мы получим, что точки окружности не будут внутренними для рассматриваемого множества (см. рис.2).

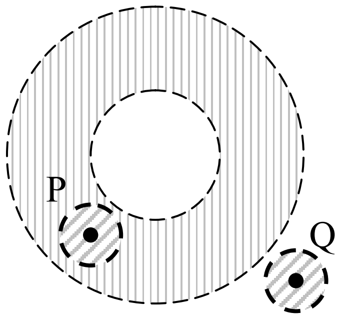

Рис. 1

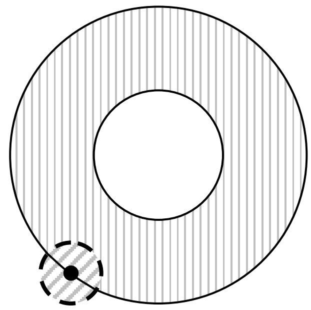

Рис. 2

2. Множество D называется *областью*, если выполнены условия:

а) каждая точка множества D – внутренняя;

б) любые две точки множества D можно соединить ломаной, все точки которой принадлежат D.

Так на рисунке 1 изображено множество, которое является областью, а на рисунке 2 – нет.

3. Точка Q называется *внешней* точкой области D, если существует круг с центром в точке Q, все точки, которого не принадлежат D (см. рис.1)

Отметим, что не всегда существуют внешние точки области. Так, например, совокупность всех точек плоскости, не лежащих на отрезке $[-1;1]$ оси абсцисс, представляет область, не имеющую внешних точек.

4. Точка M называется *граничной* точкой области D, если в любом, сколь угодно малом круге с центром в точке M содержатся как точки, принадлежащие области D, так и не принадлежащие этой области (см. рис.3).

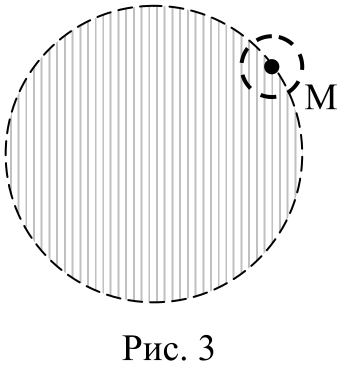

Рис. 3

5. Совокупность всех граничных точек области называют ее *границей*.

Простейшим примером границы области, очевидно, является кривая. Однако, граница области может состоять и из дискретного множества точек.

Например, вся плоскость с выколотой точкой $O(0;0)$ является областью с границей, состоящей из этой точки.

6. Множество, состоящее из области D и ее границы, называется *замкнутой* областью и обозначается $\overline{D}$.

7. Область, обладающая свойством: какую бы замкнутую непрерывную кривую, лежащую в этой области, мы не взяли, множество точек, ограниченных этой кривой, также принадлежит данной области, называется *односвязной* (см. рис.4).

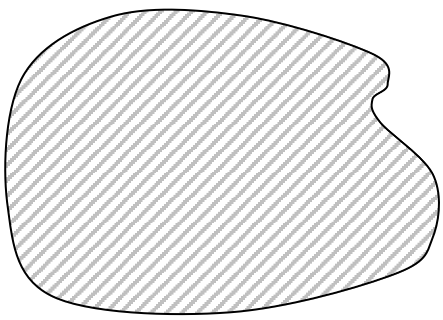

Рис. 4

8. Области, не обладающие этим свойством, *называются многосвязными* (см. рис.5).

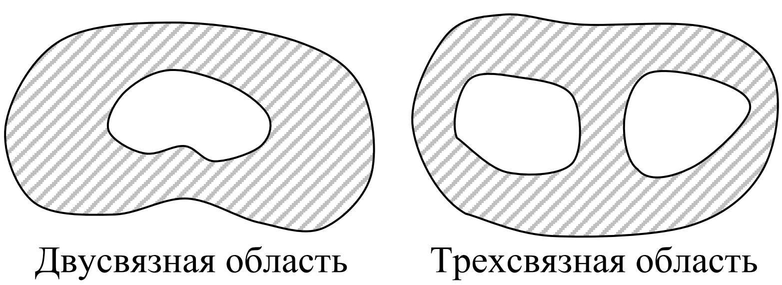

Рис. 5

9. Если область D целиком лежит внутри некоторого круга конечного радиуса, то она называется *ограниченной*. В противном случае - *неограниченной*.

ГЛАВА I. Комплексные числа и действия с ними

§1. Определение комплексного числа. Арифметические действия с комплексными числами

Определение 1. *Комплексным числом* z называется составная величина вида

$$z = x + iy,$$

где x, y - действительные числа, символ i - так называемая мнимая единица, для которого $i^2 = -1$.

Назовем число x - *действительной* или *вещественной частью* комплексного числа z, число y - *мнимой частью*, и обозначим:

$$x = \mathrm{Re}\, z;\; y = \mathrm{Im}\, z.$$

Если мнимая часть $y = 0$, комплексные числа $z = x + i \cdot 0 = x$ являются вещественными, следовательно, множество всех вещественных чисел является подмножеством множества комплексных чисел. При $x = 0, y \neq 0$ получаются числа вида $z = iy$, которые называются чисто мнимыми.

Так как любое комплексное число однозначно определяется заданием упорядоченной пары чисел (x, y), то комплексным числом можно назвать эту упорядоченную пару. Множество вещественных чисел тогда будет задаваться парами вида $(x, 0)$, множество чисто мнимых чисел парами вида $(0, y)$.

При установлении основных арифметических операций над комплексными числами потребуем, чтобы они удовлетворяли аксиомам арифметики вещественных (действительных) чисел, тогда комплексные числа будут иметь универсальное применение в вопросах математического анализа.

1). Будем считать, что два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда равны их вещественные и мнимые части, то есть

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2,\; y_1 = y_2.$$

2). Сложение чисел z_1 и z_2 определим равенством

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Для сложения имеют место:

а) коммутативность

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$

б) ассоциативность

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3);$$

в) $z + 0 = z$ для любого z.

3). Вычитание определим как действие, обратное сложению. Это означает, что разностью двух комплексных чисел z_1 и z_2 назовем такое число z ($z = z_1 - z_2$), которое удовлетворяет равенству:

$$z + z_2 = z_1.$$

Таким образом,

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

4). Умножение чисел z_1 и z_2 определим равенством

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Для умножения имеют место:

а) коммутативность

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1;$$

б) ассоциативность

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3);$$

в) дистрибутивность

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3;$$

г) $1 \cdot z = z$ для любого z.

Определение 2. Число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* к числу $z = x + iy$.

***Замечание* 1.** Для комплексно сопряженных чисел имеют место соотношения

$$z + \bar{z} = 2x; \qquad z - \bar{z} = i2y;$$

$$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2.$$

Замечание **2.** Комплексные числа не обладают свойством упорядоченности.

5). Деление определим, как действие обратное к умножению. Это означает, что для двух чисел z_1 и z_2, $z_2 \neq 0$, существует и при том только одно число z ($z=\frac{z_1}{z_2}$), удовлетворяющее равенству:

$$z\cdot z_2=z_1.$$

Для нахождения частного комплексных чисел используется следующий прием:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}}.$$

Пример 1. Найти значение выражения $(z_1+2z_2)\cdot z_3$, если $z_1=2+3i$, $z_2=3+2i$, $z_3=5-2i$.

Решение. $2z_2=6+4i$,

$z_1+2z_2=(2+6)+(3+4)i=8+7i$,

$(z_1+2z_2)\cdot z_3=(8+7i)(5-2i)=(40+14)+(-16+35)i=54+19i$.

Ответ. $54+19i$.

Пример 2. Найти значение выражения $\frac{z_1(z_2+z_3)}{z_2}$, где $z_1=4+5i$, $z_2=1+i$, $z_3=7-9i$.

Решение. $z_2+z_3=(1+i)+(7-9i)=(7+1)+(1-9)i=8-8i$,

$z_1(z_2+z_3)=(4+5i)\cdot(8-8i)=(32+40)+i(-32+40)=72+8i$,

$$\frac{z_1(z_2+z_3)}{z_2}=\frac{72+8i}{1+i}=\frac{(72+8i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{(72+8)+i(-72+8)}{1+1}=$$

$$=\frac{80-64i}{2}=40-32i.$$

Ответ. $40-32i$.

§2. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Так как любое комплексное число $z = x + iy$ можно определить, как упорядоченную пару чисел (x, y), то его изображают точкой на координатной плоскости с соответствующими координатами. При этом ось Ox будем называть *действительной осью*, а ось Oy - *мнимой* (см. рис.1), а координатную плоскость – *комплексной плоскостью*.

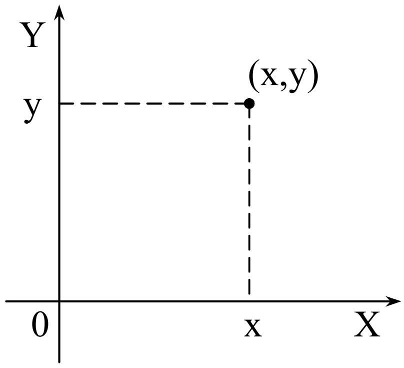

Рис. 1

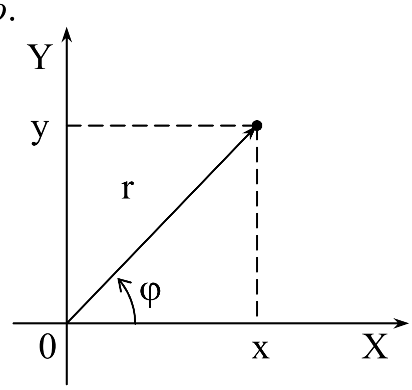

Рис. 2

Числа, изображаемые точками оси Ox, являются вещественными $(y = 0)$, а числа, изображаемые точками оси Oy являются чисто мнимыми $(x = 0)$.

Упорядоченная пара чисел определяет на координатной плоскости единственным образом радиус-вектор, имеющий начало в точке $(0,0)$, а конец в точке (x, y). Поэтому комплексное число можно представить в виде радиус-вектора точки (x, y). Длину радиус-вектора называют *модулем* комплексного числа

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2};$$

угол, который вектор образует с положительным направлением оси Ox - *аргументом* комплексного числа. Аргумент числа 0 не определен. Аргумент числа $z = (x, y)$ определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π. Значение аргумента из промежутка $(-\pi; \pi]$ называют *главным значением аргумента*, обозначают

$$\varphi = \arg z$$

и вычисляют по формуле

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \textit{если} \quad x > 0 \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \textit{если} \quad x < 0, y > 0 \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & \textit{если} \quad x < 0, y < 0 \end{cases}.$$

Очевидны равенства:

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{z\bar{z}}; \qquad \arg z = -\arg \bar{z}.$$

Ясно, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (см. рис. 2).

Тогда само число z можно записать следующим образом:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Это так называемая *тригонометрическая форма* комплексного числа.

Свойства модуля и аргумента комплексного числа (проверьте сами):

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

2. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$,

$\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$.

3. $|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

Определим ε-окрестность точки z_0 как множество точек, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \varepsilon$. Пусть $z = x + iy$; $z_0 = x_0 + iy_0$, тогда

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon$$

или $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$.

Множество точек, удовлетворяющих последнему неравенству, есть открытый круг с центром в точке (x_0, y_0) радиуса ε (см. рис. 3). Точки окружности, ограничивающей круг, удовлетворяют уравнению $|z - z_0| = \varepsilon$.

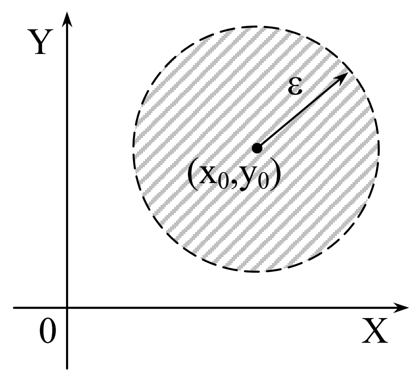

Рис. 3

Пример 1. Представить в тригонометрической форме числа и изобразить их на комплексной плоскости:

а) $z_1 = 2 - 2i$; б) $z_2 = -1 + i$; в) $z_3 = -i$; г) $z_4 = -4$.

Р е ш е н и е. Изобразим числа векторами на координатной плоскости.

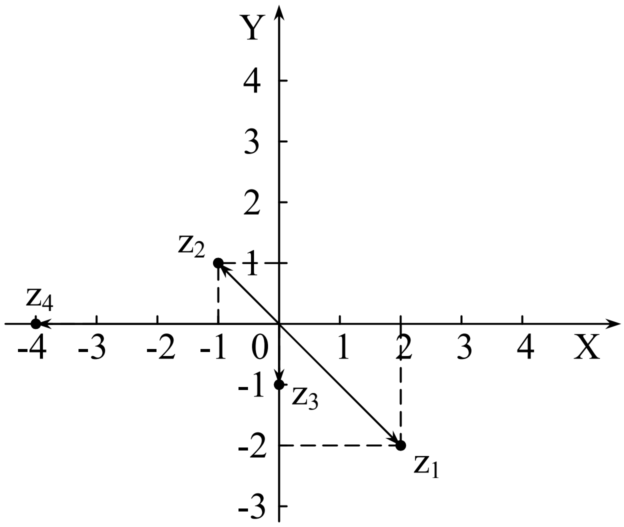

Рис. 4

а) $z_1 = 2 - 2i$. Следовательно, $x_1 = 2$, $y_1 = -2$ и

$|z_1| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;

$\arg z_1 = \operatorname{arctg}\frac{(-2)}{2} = -\frac{\pi}{4}$.

Отсюда z_1 в тригонометрической форме имеет вид:

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

б) $z_2 = -1 + i$. Здесь $x_2 = -1$, $y_2 = 1$ и $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\arg z_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{(-1)} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.

Таким образом,

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

в) $z_3 = -i$. В данном случае $x_3 = 0$, $y_3 = -1$

$|z_3| = \sqrt{0 + (-1)^2} = 1$, так как точка $(0;-1)$ лежит на отрицательной части оси Oy, то $\arg z_3 = -\frac{\pi}{2}$ и

$$z_3 = 1\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

г) $z_4 = -4$. $x_4 = -4, y_4 = 0$ $|z_4| = 4$, так как точка $(-4;0)$ лежит на отрицательной части оси Ox, то $\arg z_4 = \pi$ и

$$z_4 = 4\cdot(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Пример 2. На координатной плоскости изобразить множество точек $z = x + iy$, удовлетворяющих указанным условиям:

1) $|z - z_1| < 4$ и $z_1 = 3 - 5i$; 2) $\operatorname{Im}(iz) < 2$; 3) $\frac{\pi}{4} < \arg z \le \frac{\pi}{2}$.

Решение. 1) $|z - z_1| < 4$, где $z_1 = 3 - 5i$. Вычислим

$z - z_1 = (x - 3) + i(y + 5)$. Тогда $|z - z_1| = \sqrt{(x-3)^2 + (y+5)^2}$. Подставим это выражение в исходное неравенство и возведем неравенство в квадрат, получим

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 < 4^2.$$

Множество точек, удовлетворяющих этому неравенству, есть открытый круг радиуса 4 с центром в точке $(3;-5)$ (см. рис.5).

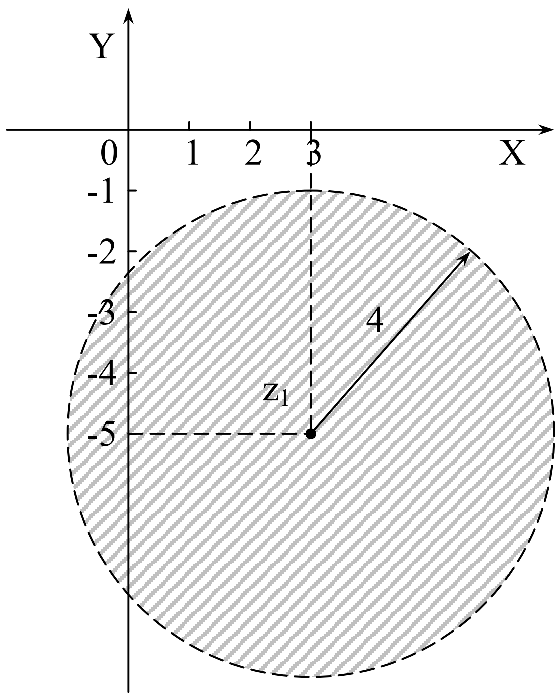

Рис. 5

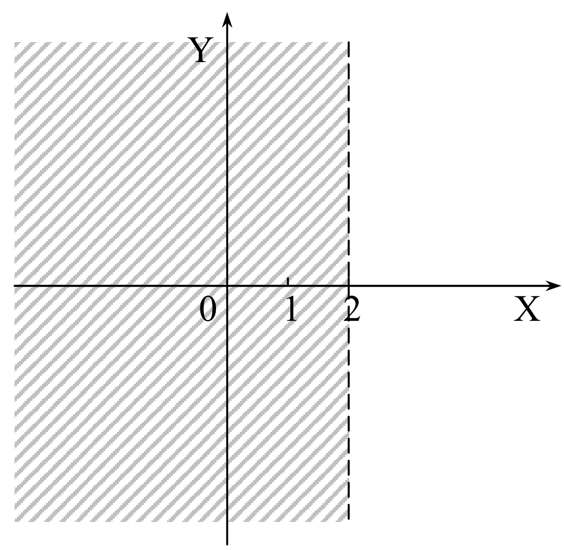

Рис. 6

2) $\operatorname{Im}(iz) < 2$.

$zi = (x + iy)i = -y + ix$. $\operatorname{Im}(iz) = x$. Значит, исходное неравенство примет вид $x < 2$. Множество точек, удовлетворяющих этому неравенству, изображено на рис. 6.

3) $\frac{\pi}{4} < \arg z \le \frac{\pi}{2}$.

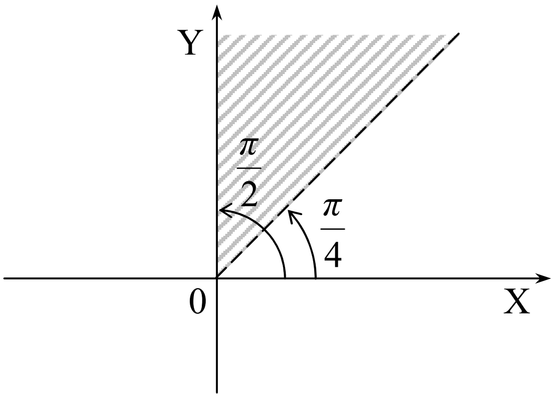

Рис. 7

$\arg z = \frac{\pi}{2}$ имеют точки, расположенные на положительной полуоси Oy, ее уравнение $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\arg z = \frac{\pi}{4}$ имеют точки биссектрисы первого координатного угла $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Все остальные точки, удовлетворяющие данному неравенству, лежат на лучах между $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (см. рис.7).

Для исходного неравенства можно записать эквивалентную систему неравенств $\begin{cases} x \ge 0 \\ y > x \end{cases}$.

§3. Возведение комплексных чисел в натуральную степень. Извлечение корня из комплексных чисел

Для выполнения операций умножения и деления удобно использовать тригонометрическую форму комплексных чисел.

На основании свойств модуля и аргумента (см. свойство 1), имеем

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad (1)$$

то есть модуль произведения равен произведению модулей, а аргумент произведения – сумме аргументов сомножителей.

В случае деления комплексных чисел при $r_2 \ne 0$ аналогично можно получить $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ (2)

Пример 1. Найти произведение и частное комплексных чисел z_1 и z_2,

если $z_1 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4} \right)$, $z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$.

Р е ш е н и е. По формулам (1) и (2) получаем

$$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) =$$

$$= 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2} + i3\sqrt{2}.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,i.$$

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда из формулы (1) следует, что при натуральном n справедливо соотношение

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)), \tag{3}$$

которое называется формулой Муавра.

Пример 2. Вычислить $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}$.

Р е ш е н и е. Представим число $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ в тригонометрической форме. Получим $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Далее, по формуле Муавра вычисляем

$$\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10} = 1^{10}\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Определение 1. Комплексное число w называется *корнем* n*-ой степени* из комплексного числа z, если $z = w^n$.

При этом пишут $w = \sqrt[n]{z}$.

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$.

Имеем $z = w^n$, следовательно, на основании формулы Муавра

$r=\rho^n$, $n\psi=\varphi+2\pi k$, где k - целое число.

Отсюда, $\rho=\sqrt[n]{r}$, $\psi=\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}$, k - целое число.

Тогда

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k \text{ - целое число.} \qquad (4)$$

В силу периодичности функций синус и косинус число различных значений корня n-ой степени из комплексного числа z равно n, поэтому для их вычисления в формуле (4) достаточно использовать n значений k: $k=0,1,2,\ldots,n-1$. Модули этих чисел равны $\sqrt[n]{r}$ - *арифметический корень* n-ой степени из *вещественного* числа r, а аргументы различаются на число, кратное $\dfrac{2\pi}{n}$.

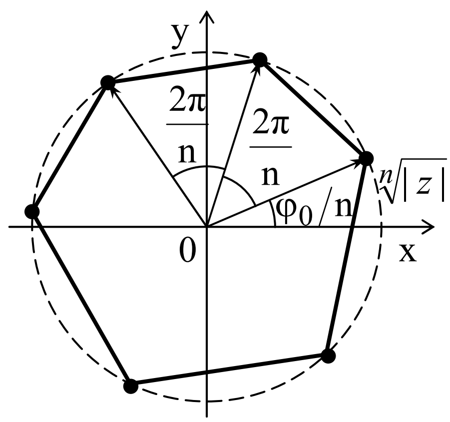

Рис. 8

Все корни изображаются на комплексной плоскости – вершинами правильного n - угольника (см. рис. 8), вписанного в окружность с центром в точке $z=0$ и радиусом $\sqrt[n]{|z|}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$z^6=1.$$

Р е ш е н и е. Решениями уравнения являются все корни $w=\sqrt[6]{1}$. Представим число 1 в тригонометрической форме

$$1=1(\cos 0+i\sin 0).$$

Тогда по формуле (4) получим

$$w=\sqrt[6]{1}=\underbrace{\sqrt[6]{1}}_{\substack{\textit{корень из}\\ \textit{комплекс –}\\ \textit{ного числа}}}=\underbrace{\sqrt[6]{1}}_{\substack{\textit{арифметический}\\ \textit{корень из вещест –}\\ \textit{венного числа}}}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{6}+i\sin\frac{0+2\pi k}{6}\right).$$

Будем придавать k значения от 0 до 5 и вычислим 6 корней w_1, …, w_6:

$k=0,\ w_1=1(\cos 0+i\sin 0)=1;$

$k=1,\ w_2=1\left(\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$

$k=2,\ w_3=1\left(\cos\frac{4\pi}{6}+i\sin\frac{4\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$

$k=3,\ w_4=1\left(\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}\right)=-1;$

$k=4,\ w_5=1\left(\cos\frac{8\pi}{6}+i\sin\frac{8\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};$

$k=5,\ w_6=1\left(\cos\frac{10\pi}{6}+i\sin\frac{10\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Пример 4. Решить уравнение

$$z^2=\sqrt{3}-i.$$

Решение. Представим число $\sqrt{3}-i$ в тригонометрической форме

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

$$w=\sqrt{\sqrt{3}-i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{2}\right).$$

Положим $k=0$, тогда $w_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

Положим $k=1$, тогда $w_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}+\pi\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{12}+\pi\right)\right)$.

Вычислим:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4};$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}.$$

Окончательно получаем:

$$w_1=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}-i\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

$$w_2=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

§4. Последовательности комплексных чисел. Бесконечно удаленная точка. Расширенная комплексная плоскость

Определение 1. *Последовательностью* $\{z_n\}$ *комплексных чисел* будем называть функцию натурального аргумента n, принимающую комплексные значения: $z_n=f(n)$, $n\in N$.

Аналогично последовательности $\{x_n\}$ действительных чисел, последовательность $\{z_n\}$ будет задана, если известно правило f, которое позволяет найти любой ее элемент z_n по номеру n.

Пример 1. Найти четыре первых члена последовательностей:

а) $z_n=\dfrac{i^n}{2n}$; б) $z_n=(-i)^n$.

Решение. а) $z_n=\dfrac{i^n}{2n}$. Выбирая $n=1,2,3,4$, получим

$$z_1=\frac{i^1}{2\cdot 1}=\frac{i}{2};\ z_2=\frac{i^2}{2\cdot 2}=-\frac{1}{4};\ z_3=\frac{i^3}{2\cdot 3}=-\frac{i}{6};\ z_4=\frac{i^4}{2\cdot 4}=\frac{1}{8}.$$

б) $z_n=(-i)^n$. Подставляя $n=1,2,3,4$, имеем

$$z_1=(-i)^1=-i,\ z_2=(-i)^2=-1,\ z_3=(-i)^3=i,\ z_4=(-i)^4=1.$$

Определение 2. Комплексное число a называют *пределом последовательности* комплексных чисел $\{z_n\}$, если для любого $\varepsilon>0$ существует номер N_0, такой, что для всех $n>N_0$ выполняется неравенство $|z_n-a|<\varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ или $z_n \to a$ при $n \to \infty$.

Тогда определение можно записать так:

$$\left(\lim_{n\to\infty} z_n = a\right) \iff \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 = N_0(\varepsilon) : \forall\, n > N_0 \ \Rightarrow \ |z_n - a| < \varepsilon\right).$$

Геометрический смысл предела последовательности комплексных чисел заключается в том, что все точки z_n, начиная с некоторого номера N_0, лежат в круге сколь угодно малого радиуса ε и центром в точке a, то есть в ε-окрестности точки a.

Пусть $z_n = x_n + iy_n$, $a = \alpha + i\beta$.

$\{x_n\}$ - последовательность действительных частей,

$\{y_n\}$ - последовательность мнимых частей.

Справедливо следующее

Утверждение (необходимое и достаточное условие сходимости последовательности комплексных чисел).

Пределом последовательности $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ является число $a = \alpha + i\beta$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta$.

Определение 3. Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется *сходящейся к числу* a, если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Приведенное выше утверждение позволяет перенести свойства сходящихся последовательностей действительных чисел на сходящиеся последовательности комплексных чисел:

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \pm w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \pm \lim_{n\to\infty} w_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} w_n}, \text{ если } \lim_{n\to\infty} w_n \neq 0.$$

Определение 4. Последовательность комплексных чисел называется *ограниченной*, если существует такое вещественное число $M > 0$, что для всех членов последовательности выполняется неравенство $|z_n| \le M$ (т.е. все числа z_n расположены в круге радиуса M и центром в нуле).

Очевидно, что всякая сходящаяся последовательность комплексных чисел ограничена (обратное не верно).

Частным случаем сходящейся последовательности является бесконечно малая последовательность.

Определение 5. Последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_0 = N_0(\varepsilon) : \forall \; n > N_0 \;\; \Rightarrow \;\; |z_n| < \varepsilon .$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$ (то есть последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел является бесконечно малой в том и только в том случае, когда бесконечно малой является последовательность $\{|z_n|\}$ действительных чисел).

Определение 6. Если последовательность $\{z_n\}$ не имеет конечного предела, то она называется *расходящейся*.

Выделим отдельно бесконечный предел последовательности комплексных чисел.

Определение 7. Последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел называется *бесконечно большой*, если $\forall E > 0 \;\; \exists N_0 = N_0(E): \; n > N_0 \;\; \Rightarrow \;\; |z_n| > E$. При этом записывают $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

Следовательно, все точки z_n, начиная с некоторого номера N_0, будут располагаться вне круга сколь угодно большого радиуса E и центром в начале координат.

Пример 2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-i)^n}{n^2} = 0$.

Р е ш е н и е. По определению 4 имеем $\left|\frac{(-i)^n}{n^2}\right| = \left|\frac{i^n}{n^2}\right| = \frac{\left|i^n\right|}{n^2} = \frac{|i|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$.

Найдем номер N_0, начиная, с которого данное неравенство будет выполняться. Таким номером для произвольного положительного ε станет $N_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$, то есть в качестве N_0 возьмем целую часть числа $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Пример 3. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^n = \infty$.

Р е ш е н и е. По определению 6 имеем $\left|\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^n\right| = \left|1+\sqrt{3}\,i\right|^n = 2^n > E$.

Тогда для любого сколь угодно большого числа E, данное неравенство будет выполняться, начиная с номера $N_0 = \left[\log_2 E\right]$.

Можно сказать про последовательность, стремящуюся к бесконечности, что она имеет своим пределом точку $z = \infty$.

Расширим комплексную плоскость Z, добавив к ней новый элемент $z = \infty$, который назовем *бесконечно удаленной точкой*. Объединяя комплексную плоскость с бесконечно удаленной точкой получим *расширенную комплексную плоскость*.

§5. Стереографическая проекция

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $O\xi\eta\zeta$ и сферу S радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$. Плоскость $\xi O\eta$ совместим с комплексной плоскостью Z.

Уравнение сферы S имеет вид $\xi^2+\eta^2+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Будем считать, что на сфере выбраны географические координаты, для которых 0 является южным полюсом. Точку N, диаметрально противоположную точке 0, назовем северным полюсом сферы (рис. 1).

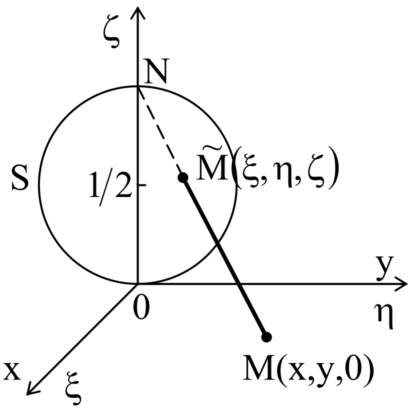

Рис. 1

Поставим в соответствие каждой точке M плоскости Z точку $\widetilde{M}$ пересечения луча NM и сферы. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и сферы, проколотой в северном полюсе (точке N не соответствует ни одна точка плоскости).

Построенное соответствие между точками проколотой сферы и плоскости Z:

$$\varphi : Z \to S \setminus \{N\},$$

называют *стереографической проекцией* сферы на плоскость.

Точка $\widetilde{M}$ - сферическое изображение комплексного числа z называется *стереографической проекцией* точки M на сферу S.

Если точка $\widetilde{M}$ сферы пробегает меридиан, то точка M пересечения луча $N\widetilde{M}$ с плоскостью Z пробегает луч, проходящий через точку 0; а если точка $\widetilde{M}$ описывает параллель, то точка M описывает окружность с центром 0. Отсюда следует, что сетка географических координат на сфере переходит при стереографической проекции в сетку полярных координат на плоскости Z. При этом как меридианы и параллели на сфере, так и координатные линии полярных координат на плоскости пересекаются друг с другом под прямыми углами, то есть углы при проектировании не изменяются.

При таком изображении комплексному числу $z = 0$ ставится в соответствие точка $O(0;0;0)$ сферы S; комплексным числам с одинаковыми аргументами (лучам плоскости Z, исходящим из начала координат) – «меридианы», а комплексным числам с одинаковыми значениями модуля $|z|$ (окружностям плоскости Z с центром в начале координат) – «параллели».

При стереографической проекции северному полюсу N не соответствует ни одна точка плоскости Z. Чтобы восстановить взаимную однозначность отображения, дополним плоскость бесконечно удаленной точкой. Чтобы и она получила комплексную координату, пополним множество комплексных чисел еще одним элементом, который обозначим ∞. Таким образом, ∞ - комплексная координата бесконечно удаленной точки.

Условимся считать, что полюс N соответствует бесконечно удаленной точке $z=\infty$.

Окрестностями бесконечно удаленной точки являются внешние области окружностей с центром в 0. Наглядно можно убедиться в этом, проектируя на плоскость Z окрестности северного полюса.

Теперь можно говорить о взаимно однозначном соответствии между *сферой* S и *расширенной комплексной плоскостью* $\overline{C}$. Сфера S называется *сферой комплексных чисел* или *сферой Римана*.

Установим связь между декартовыми координатами x и y точки M, изображающей комплексное число $z=x+iy$ и координатами ξ, η, ζ ее сферического изображения $\widetilde{M}$

Учитывая условие принадлежности точек $M(x,y,0)$, $\widetilde{M}(\xi,\eta,\zeta)$ и $N(0,0,1)$ одной прямой имеем:

$$\frac{\xi-0}{x-0}=\frac{\eta-0}{y-0}=\frac{\zeta-0}{0-1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{\xi}{1-\zeta} \\ y=\dfrac{\eta}{1-\zeta} \end{cases}, \tag{1}$$

$$x^2+y^2=\frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)^2}. \tag{2}$$

Используя условие принадлежности точки $\widetilde{M}$ сфере S:

$$\xi^2+\eta^2+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

$$\xi^2+\eta^2=\zeta-\zeta^2.$$

Подставляя значение $\xi^2+\eta^2$ из (2) имеем

$$\left(x^2+y^2\right)(1-\zeta)^2=\zeta-\zeta^2,$$

$$x^2+y^2=\frac{\zeta(1-\zeta)}{(1-\zeta)^2},$$

$$x^2+y^2=\frac{\zeta}{1-\zeta}.$$

Отсюда

$$\zeta=\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), получим

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{x}{1+x^2+y^2}\\ \eta=\dfrac{y}{1+x^2+y^2}\end{cases}. \tag{4}$$

Окончательно имеем

$$\xi=\frac{x}{1+|z|^2};\quad \eta=\frac{y}{1+|z|^2};\quad \zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}. \tag{5}$$

Формулы (5) называются *формулами стереографической проекции* и позволяют найти координаты точки $\widetilde{M}$ сферы S, зная координаты точки M, изображающей комплексное число $z=x+iy$.

Пример 1. Найти и построить стереографическую проекцию точки $z=1+\sqrt{3}\,i$.

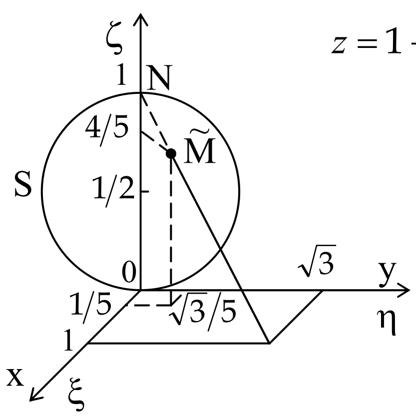

Рис. 2

Решение. $z=1+\sqrt{3}\,i$, $x=1$, $y=\sqrt{3}$. Тогда $|z|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$. Используя формулы (5) получим: $\xi=\frac{1}{5}$, $\eta=\frac{\sqrt{3}}{5}$, $\zeta=\frac{4}{5}$.

$\widetilde{M}\left(\frac{1}{5},\frac{\sqrt{3}}{5},\frac{4}{5}\right)$ (см. рис.2).

Замечание. Равенства (1) являются формулами обратного преобразования.

Стереографическое проектирование обладает важным свойством: при этом отображении окружности на комплексной плоскости переходят в окружности на сфере Римана и, наоборот, окружностям на сфере Римана, не проходящим через полюс N, соответствуют окружности на комплексной плоскости. Докажем это для окружности на плоскости z с центром в начале координат и радиусом R: $x^2+y^2=R^2$.

Доказательство. $x^2+y^2=R^2$. Отсюда $|z|^2=R^2$, $|z|=R$.

$x^2=\xi^2\left(1+R^2\right)^2$, $y^2=\eta^2\left(1+R^2\right)^2$. Тогда

$\xi^2+\eta^2=\dfrac{R^2}{\left(1+R^2\right)^2}$; $\zeta=\dfrac{R^2}{1+R^2}$. Таким образом, искомое множество – кривая пересечения сферы Римана и плоскости параллельной плоскости Z.

Особым случаем является окружность, проходящая через полюс N. Эта окружность – сечение сферы Римана плоскостью $A\xi+B\eta+C\zeta+D=0$, где $C+D=0$, то есть

$$\begin{cases} A\xi+B\eta+C\zeta+D=0 \\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2=\zeta \end{cases}, \text{ где } C+D=0.$$

Используя формулы (5) получим:

$A\dfrac{x}{1+|z|^2}+B\dfrac{y}{1+|z|^2}+C\dfrac{|z|^2}{1+|z|^2}+D=0$. Умножим на $1+|z|^2$:

$Ax+By+(C+D)|z|^2+D=0$. Так как $C+D=0$, то $Ax+By+D=0$ - уравнение прямой комплексной плоскости. Таким образом, окружности сферы Римана, проходящей через полюс N соответствует прямая комплексной плоскости.

И обратно, любой прямой $Ax+By+D=0$ комплексной плоскости соответствует окружность на сфере Римана, проходящая через полюс N.

Пример 2. Найти и построить стереографическую проекцию множества точек комплексной плоскости, заданного неравенством $|z|>3$.

Рассмотрим сначала стереографическую проекцию окружности $|z|=3$. Это будет окружность $\xi^2+\eta^2=\dfrac{9}{100}$ $(r=0{,}3)$, получающаяся при пересечении сферы плоскостью $\zeta = \dfrac{9}{10}$. Следовательно, проекцией области $|z| > 3$ будет заштрихованная область сферы Римана (см. рис. 3).

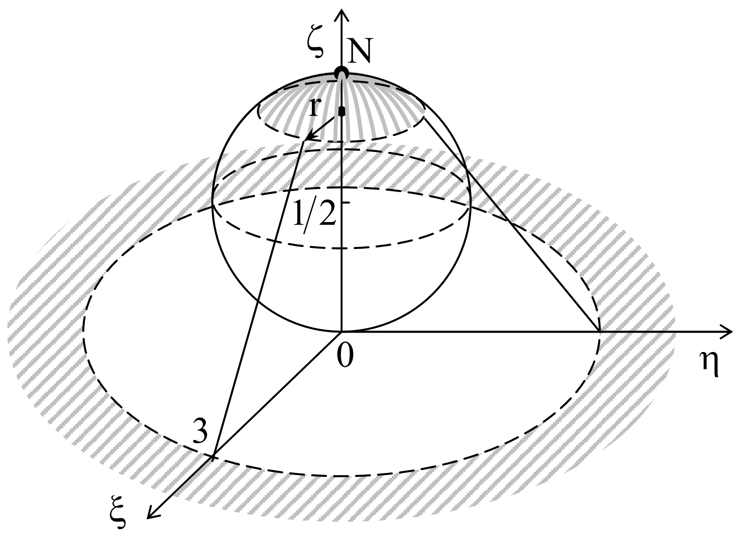

Рис. 3

§6. Числовые ряды с комплексными членами

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1}$$

где u_n - комплексные числа, называется числовым рядом с комплексными членами.

Числовые ряды с комплексными членами обладают свойствами аналогичными многим свойствам числовых рядов с действительными членами.

Частичные суммы ряда (1):

$$S_1 = u_1;\ S_2 = u_1 + u_2;\ \ldots;\ S_n = u_1 + \ldots + u_n;\ \ldots$$

образуют числовую комплексную последовательность $\{S_n\}$.

Определение 1. Ряд (1) называется *сходящимся*, если соответствующая ему последовательность $\{S_n\}$ сходится, то есть существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S\ . \tag{2}$$

Число S называется *суммой* данного ряда. Если предел (2) не существует или бесконечен, то ряд (1) называют *расходящимся*.

Сходящиеся ряды можно почленно складывать и умножать на комплексное число, при этом полученные ряды тоже сходятся.

На основании понятия предела комплексной числовой последовательности легко убедиться в справедливости следующей теоремы:

Теорема 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с комплексными членами сходится тогда и только тогда, когда сходятся два ряда с вещественными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} u_n$.

Ряд $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ называется n-м остатком ряда (1) и обозначают $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$.

Тогда для сходящегося ряда можно записать $S = S_n + r_n$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно определить такой номер N, что $|r_n| < \varepsilon$ при $n \geq N$.

Теорема 2. (*необходимый признак сходимости*)

Если ряд (1) сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы для случая числового ряда с вещественными членами.

Из теоремы 2 следует, что если общий член ряда (1) не стремится к нулю, то ряд расходится.

Наряду с рядом (1) рассмотрим ряд, составленный из модулей его членов

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots. \tag{3}$$

Ряд (3) является числовым рядом с вещественными членами.

Теорема 3. Если сходится ряд (3), то сходится и ряд (1), который в этом случае называется *абсолютно сходящимся*.

Обратное утверждение неверно, так как существуют ряды сходящиеся, но не абсолютно. Такие ряды называют *условно сходящимися*.

***Замечание* 1.** Если ряд сходится абсолютно, то при любой перестановке его членов новый ряд так же будет абсолютно сходящимся, причем к той же сумме.

***Замечание* 2.** Исследование сходимости ряда (3) как положительного числового ряда можно проводить с помощью известных достаточных признаков, в частности, признаков Д'Аламбера и Коши.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2i)^n}$.

Решение. Составим ряд из модулей членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n}{(2i)^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}.$$

Исследуем полученный положительный числовой ряд на сходимость с помощью признака Д'Аламбера. Для этого рассмотрим предел отношения $(n+1)$-ого члена ряда к n-ому члену ряда при $n\to\infty$. В данном случае имеем предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$.

По признаку Д'Аламбера ряд сходится, если предел меньше 1, что имеет место. Тогда исходный ряд сходится, причем абсолютно (по теореме 3).

ГЛАВА 2 Функции комплексного переменного

§1. Основные определения

Понятие функции комплексного переменного определяется подобно тому, как это делается в случае действительного переменного.

Определение 1. *Функцией комплексного переменного* называется отображение f некоторого комплексного числового множества D в комплексное числовое множество G.

Если каждому значению $z \in D$ соответствует лишь одно значение $w \in G$, то функция называется *однозначной*, если же некоторым z соответствует более чем одно значение w, то функция называется *многозначной*.

Для обозначения функции пользуются обозначением: $w = f(z)$.

Множество D называется *областью определения* функции $f(z)$, а совокупность соответствующих значений $f(z)$ называется *множеством значений* функции.

Обозначим $z = x + iy$, а $w = u + iv$, где x, y, u, v - действительные числа, тогда

$$w = u + iv = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{1}$$

Вещественная и мнимая части функции комплексного переменного представляют собой функции вещественной и мнимой частей независимого переменного z: $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$.

Пример 1. Пусть $w = z^2$ и $z = x + iy$. Найти $u(x, y)$ и $v(x, y)$

Решение. $w = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$. Отсюда $u(x, y) = \operatorname{Re} w = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = \operatorname{Im} w = 2xy$.

Функции $w = f(z)$ соответствуют две функции от двух вещественных переменных. Обратно, если заданы функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, то им соответствует функция комплексного переменного, определяемая равенством (1).

Пример 2. Найти функцию комплексного переменного, которая задается следующими функциями двух вещественных переменных:

$$u(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2},\quad v(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Решение. Так как $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$, $x^2+y^2=z\cdot\bar{z}$, то имеем:

$$w=u(x,y)+iv(x,y)=\frac{y+xi}{x^2+y^2}=\frac{\frac{z-\bar{z}}{2i}+\frac{z+\bar{z}}{2}i}{z\bar{z}}=-\frac{2\bar{z}}{2iz\bar{z}}=\frac{i}{z}.$$

Комплексная переменная z может быть изображена движущейся точкой на комплексной плоскости XOY. Для изображения комплексной переменной $w=f(z)$ воспользуемся другим экземпляром комплексной плоскости UOV; будем откладывать на оси OU вещественную часть функции $f(z)$, а на оси OV - мнимую часть этой функции.

Таким образом, будем иметь две комплексные плоскости XOY и UOV. Если функция $f(z)$ - однозначная, то каждой точке $z_0\in D\subset XOY$ соответствует определенная точка $w_0\in G\subset UOV$ (рис. 1).

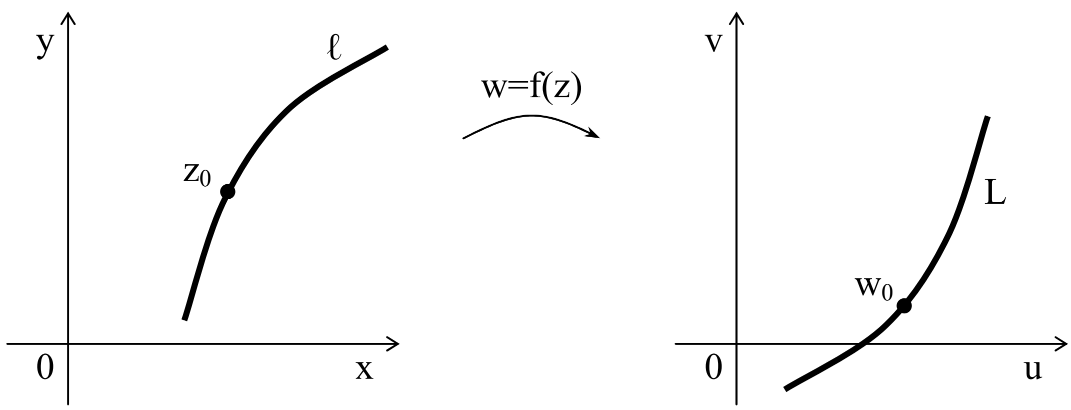

Рис. 1

Точку w_0 называют *образом* точки z_0 на плоскости UOV, а z_0 - *прообразом* w_0.

Когда комплексная переменная z описывает кривую ℓ, проходящую через z_0, а переменная w описывает кривую L, проходящую через w_0, то кривую L называют образом кривой ℓ в плоскости UOV, а кривую ℓ - прообразом кривой L.

Пример 3. Найти образ линии $x = 2$ на плоскости UOV при отображении $w = z^2$.

Решение. Из примера 1 для $z = x + iy$ имеем: $w = \left(x^2 - y^2\right) + i2xy$.

Откуда $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$. Точки на линии $x = 2$ имеют вид $z = 2 + iy$, поэтому:

$\begin{cases} u = 4 - y^2 \\ v = 4y \end{cases}$. Для $z_0 = x_0 + i \cdot 0 = 2 + i \cdot 0$ будет $w_0 = w(z_0) = 4$.

Исключим параметр y из уравнений для u и v, и получим

$$\begin{cases} u = 4 - \left(\dfrac{v}{4}\right)^2 \\ y = \dfrac{v}{4} \end{cases}.$$

Отсюда: $u = -\dfrac{1}{16}v^2 + 4$. Эта кривая – парабола в плоскости UOV.

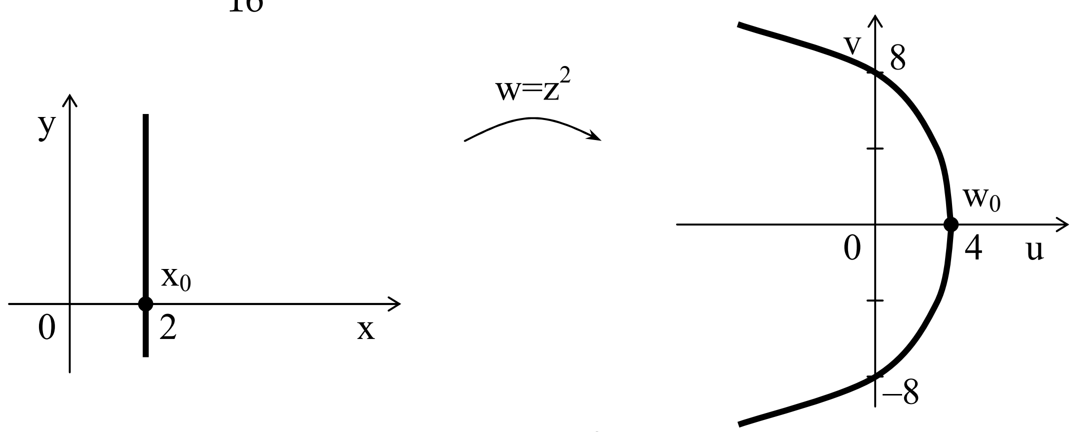

Рис. 2

Определение 2. Число A называется *пределом* функции $w = f(z)$ в точке z_0, если для любого наперед заданного положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех z из проколотой δ-окрестности точки z_0 $\left(0 < |z - z_0| < \delta\right)$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$. При этом пишут

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A. \qquad (2)$$

Понятие предела функции комплексного переменного сводится к понятию предела функции двух вещественных переменных.

Справедливо следующее утверждение:

Пусть $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $A = a + bi$ и $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Тогда равенство (2) имеет место тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = a, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = b.$$

На пределы функции комплексного переменного переносятся известные свойства предела функции двух переменных.

Если функции $w_1 = f(z)$ и $w_2 = g(z)$ имеют пределы в точке z_0, то имеют пределы алгебраическая сумма и произведение этих функций, причем справедливы равенства:

$$\lim_{z \to z_0}(f(z) \pm g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} g(z);$$

$$\lim_{z \to z_0}(f(z) \cdot g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z).$$

Если $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) \neq 0$, то $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)}.$$

Обобщим теперь понятие предела на случай, когда z или $f(z)$ стремятся к бесконечности. В этом случае надо заменить окрестности обыкновенных точек окрестностями бесконечно удаленной точки.

Определение 3. Число A называется *пределом* функции $f(z)$ при $z \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется проколотая окрестность бесконечно удаленной точки, в которой выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = A. \tag{3}$$

Очевидно, что равенство (3) верно в том и только в том случае, если

$$\lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = A.$$

Определение 4. Предел функции $f(z)$ равен ∞ при $z \to z_0$, если для любого $N > 0$ найдется проколотая окрестность точки z_0, в которой выполняется неравенство $|f(z)| > N$.

Очевидно, что $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ в том и только в том случае, если $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$.

Определение 5. Предел функции $f(z)$ равен ∞ при $z \to \infty$, если для любого $N > 0$ найдется проколотая окрестность точки ∞, в которой выполняется неравенство $|f(z)| > N$.

Очевидно, что $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$ в том и только в том случае, если $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = 0$.

Определение 6. Функция $w = f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0, если она определена в точке z_0 и некоторой ее окрестности и, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Непрерывность в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ равносильна непрерывности функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ непрерывны в точке z_0, тогда их алгебраическая сумма, произведение, частное $(g(z_0) \neq 0)$ есть функции непрерывные в z_0. Суперпозиция непрерывных функций в точке z_0 также функция непрерывная в этой точке.

Очевидно, что если функция $f(z)$ непрерывна в каждой точке некоторой области *D*, то ее можно назвать *непрерывной в области D*.

Пример 4. Функция $w = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ является непрерывной на всей комплексной плоскости, так как для любого z_0

$$\lim_{z \to z_0} |z| = |z_0|.$$

Определение непрерывности функции можно сформулировать через приращения функции и аргумента (сравните с определением непрерывности в точке функции действительного переменного).

Определение 7. Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции в этой точке.

§2. Производная функции комплексной переменной. Условие Коши-Римана

Пусть $w = f(z)$ является однозначной функцией комплексного переменного.

Определение 1. *Производной* функции $f(z)$ в точке z_0 называется конечный предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной величины, когда последнее стремится к нулю произвольным образом, то есть

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to o} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Функция $w = f(z)$, имеющая в точке z_0 производную, называется *моногенной* в этой точке.

Функция называется *аналитической* в области, если она в каждой точке этой области имеет конечную производную.

О каждой отдельной точке такой области говорят, что в ней данная функция аналитическая. Но тогда, если функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0, то, по определению, она должна быть аналитической в некоторой окрестности точки z_0.

Сумма, произведение, частное (за исключением тех точек, где знаменатель обращается в нуль) и суперпозиция аналитических функций являются функциями аналитическими.

Производная аналитической функции есть функция аналитическая. Это означает, что у аналитической функции существуют производные любого порядка.

Правила дифференцирования произведения, суммы и частного функций, сложной и обратной функции действительного переменного остаются в силе и для функций комплексного переменного. Справедливо и определение дифференцируемости.

Теорема 1. Для того, чтобы функция комплексного переменного $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируемой в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке (x_0, y_0), и чтобы в этой точке выполнялись равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Условия (1) называются *условиями Коши-Римана* или *Д'Аламбера-Эйлера*.

Доказательство. 1) Необходимость.

Пусть $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$. Так как функция $f(z)$ имеет производную в точке z_0, то Δf представимо в виде

$$\Delta f = (A + Bi)\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z, \tag{2}$$

где $A + Bi = f'(z_0)$, $\alpha(\Delta z)$ - бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δz. Обозначим: $\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)$$

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y,$$

тогда $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$ или

$$\Delta f = (A + Bi)(\Delta x + i\Delta y) + \alpha(\Delta z)\Delta z = A\Delta x + Ai\Delta y + Bi\Delta x - B\Delta y + \alpha(\Delta z)\Delta z.$$

Это означает, что справедливы равенства:

$$\Delta u = A\Delta x - B\Delta y + \operatorname{Re}(\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z) \tag{3}$$

$$\Delta v = B\Delta x + A\Delta y + \operatorname{Im}(\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z). \tag{3*}$$

Из (3) и (3*) следует, что функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемые в точке (x_0,y_0). Причем в этой точке

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=A, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-B. \tag{4}$$

2) Достаточность.

Пусть функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в точке (x_0,y_0) дифференцируемы и справедливы равенства (1). Покажем, что $w=f(z)$ дифференцируема в точке z_0.

Так как функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ - дифференцируемые в точке (x_0,y_0), то справедливы равенства

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\operatorname{Re}(\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z), \tag{5}$$

$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\operatorname{Im}(\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z). \tag{5*}$$

Обозначим $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=A$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=B$ (учитываем условия (1)). Тогда равенства (5) и (5*) примут вид:

$$\Delta u=A\Delta x-B\Delta y+\operatorname{Re}(\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z),$$

$$\Delta v=B\Delta x+A\Delta y+\operatorname{Im}(\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z).$$

Но тогда

$$\Delta f=\Delta u+i\Delta v=(A\Delta x-B\Delta y)+i(B\Delta x+A\Delta y)+\operatorname{Re}(\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z)+$$
$$+i\operatorname{Im}(\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z)=(A+Bi)(\Delta x+i\Delta y)+\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z=(A+Bi)\Delta z+\alpha(z)\cdot\Delta z$$

А это означает, что функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0=x_0+iy_0$, то есть имеет производную.

Условия Коши-Римана позволяют выразить производную функции $w=f(z)$ через частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$. В равенстве (2) $f'(z_0)=A+iB$, где A и B выражаются формулами (4). Тогда получаем, что

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}i=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}i.$$

Пример 1. Доказать, что функция $w=|z|^{2}$ дифференцируема лишь в точке $z_0=0$ и найти $w'(0)$.

Решение. Поскольку $w=|z|^2=x^2+y^2$, то $u(x,y)=x^2+y^2$, $v(x,y)=0$. Эти функции имеют частные производные в любой точке. Но $\frac{\partial u}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2y$, $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$ и поэтому условия Коши-Римана выполняются лишь в одной точке $z_0=0$. Сама производная $w'(0)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=0$.

Пример 2. Проверить выполнение условий Коши-Римана для функции

$$w=\frac{1}{z-1}.$$

Где эта функция является дифференцируемой?

Решение. Пусть $z=x+iy$ любое комплексное число, кроме $z=1$, тогда

$$w=\frac{1}{(x-1)+iy}=\frac{(x-1)-iy}{(x-1)^2+y^2}=\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}+i\frac{(-y)}{(x-1)^2+y^2},$$

$$u(x,y)=\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2},\quad v(x,y)=-\frac{y}{(x-1)^2+y^2}.$$

Найдем частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-(x-1)^2}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y^2-(x-1)^2}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2y(x-1)}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2y(x-1)}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}.$$

Отсюда видно, что условие Коши-Римана выполнено во всех точках области определения функции w $(z\neq 1)$, то есть во всех этих точках функция $w=\frac{1}{z-1}$ является дифференцируемой.

Пусть функция $w=f(z)$ дважды непрерывно дифференцируема в области *D*. В силу условий Коши-Римана функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ тоже дважды непрерывно дифференцируемы, причем для них выполняются равенства (1). Дифференцируя обе части первого равенства (1) по *x*, а второго – по *y*, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}, \qquad\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.$$

Но так как в области *D* непрерывны частные производные $\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$, то в ней выполняется равенство $\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$, а отсюда получаем: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. Аналогично доказывается, что $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$.

Итак, доказана следующая

Теорема 2. Для того, чтобы функция $u(x,y)$ (соответственно $v(x,y)$) была действительной (соответственно мнимой) частью функции комплексного переменного $w=f(z)$, имеющей непрерывную вторую производную в области *D*, необходимо, чтобы в этой области функция $u(x,y)$ (соответственно $v(x,y)$) имела непрерывные частные производные второго порядка, удовлетворяющие условию:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{6}$$

(соответственно $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$).

Равенство (6) является дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка, его называют *уравнением Лапласа*. Функцию двух переменных, удовлетворяющую уравнению Лапласа называют *гармонической*.

Пример 3. Доказать, что функция $\varphi(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ является гармонической на всей плоскости, кроме точки $(0;0)$.

Решение.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{2x^3-6xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3},\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{-2x^3+6xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3},\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=\frac{6x^2y-2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}.$$

Эти функции непрерывны всюду, кроме точки $(0;0)$, причем

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.$$

Значит, $\varphi(x,y)$ - гармоническая всюду, кроме точки $(0;0)$.

Оказывается, что в случае, когда область D – односвязна, установленные в теореме 2 условия являются не только необходимыми, но и достаточными для того чтобы $u(x,y)$ была действительной частью (соответственно $v(x,y)$ - мнимой) дважды дифференцируемой функции комплексного переменного.

Из теоремы 2 вытекает, что $u(x,y)$ и $v(x,y)$ аналитической функции являются гармоническими функциями.

Если взять за $u(x,y)$ и $v(x,y)$ две произвольные гармонические функции, то функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, вообще говоря, не будет аналитической в области.

В случае, если $f(z)$ - аналитическая функция, то $u(x,y)$ и $v(x,y)$ называются *сопряженными* или *сопряженными гармоническими* функциями.

Зная одну из гармонических сопряженных функций можно восстановить другую. Для того чтобы получить алгоритм восстановления функции $v(x,y)$ по заданной функции $u(x,y)$ напомним утверждение, доказанное в теории функций многих переменных:

Если в односвязной области D выполняется равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, причем частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в D, то в D существует такая функция $v(x,y)$, что $\frac{\partial v}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial v}{\partial y} = Q(x,y)$.

Это означает, что алгоритм нахождения функции по ее полному дифференциалу и алгоритм восстановления функции $v(x,y)$ по известной функции $u(x,y)$ совпадает. Покажем это на примере.

Пример 4. Найти аналитическую функцию $f(z)$, действительная часть $u(x,y)$ которой равна $x^3 - 3xy^2$.

Р е ш е н и е. Из условий Коши-Римана имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Теперь можно восстановить $v(x,y)$ с точностью до постоянной

$$v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int \left(3x^2 - 3y^2\right) dy = 3xy^2 - y^3 + \varphi(x) + C$$

$$v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int 6xy dx = 3xy^2 + \psi(y) + C.$$

Сравнивая полученные выражения получим, что $\varphi(x) = 0$, $\psi(y) = -y^3$. Окончательно имеем: $v(x,y) = 3xy^2 - y^3 + C$.

Тогда $f(z)$ будет иметь вид:

$f(z) = \left(x^3 - 3xy^2\right) + i\left(3xy^2 - y^3 + C\right)$, $C \in R$.

Заменяя в этом выражении $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ и выполняя необходимые упрощения, окончательно получаем:

$$f(z) = z^3 + Ci.$$

Отыскание функции $f(z)$ по ее мнимой части $v(x,y)$ проводится аналогично. Функция $v(x,y)$ является действительной частью для функции $-if(z)$.

§3. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Определение 1. Отображение $f: R^2 \to R^2$ в данной точке называется *конформным* (сохраняющим форму), если оно в данной точке сохраняет величину углов и обладает свойством постоянства растяжения (или сжатия) окрестности точки.

Отображение называется *конформным в области*, если оно конформно в каждой точке этой области.

Если сохраняется не только величина углов, но и ориентация, то отображение называется *конформным первого рода*; если ориентация меняется на противоположную, то – *конформным второго рода*.

Покажем, что отображение, осуществляемое аналитической функцией в точках, где производная отлична от нуля, является конформным первого рода.

Пусть $w = f(z)$ - аналитическая в области G. Выберем какую-либо внутреннюю точку z_0 и проведем через нее гладкую кривую $\ell_1 \in G$.

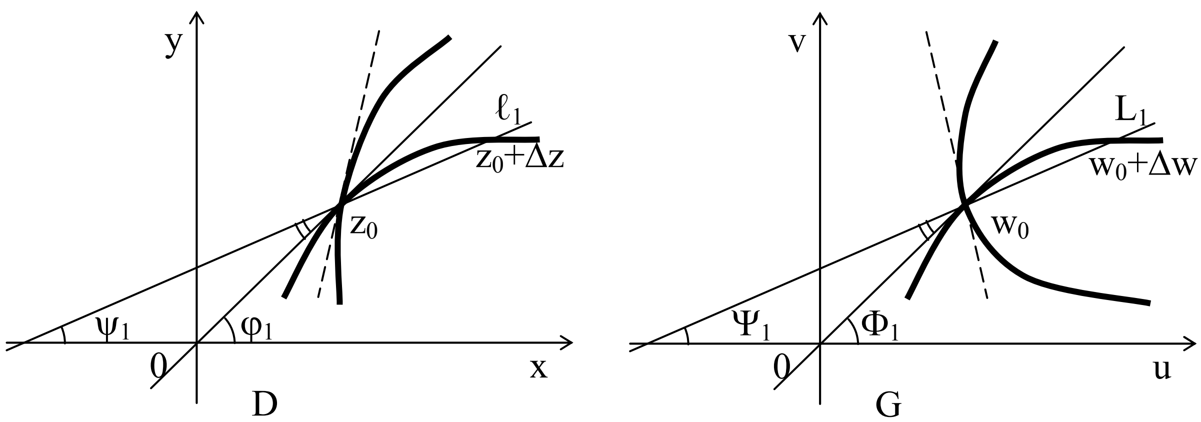

Рис. 3

Функция f отображает область $D \subset R^2$ в некоторую область $G \subset R^2 = W$. При этом z_0 отображается в $w_0 = f(z_0)$, а кривая ℓ_1 в кривую L_1.

Предположим, что $f'(z_0) \neq 0$. $k = |f'(z_0)|$, $\alpha = \arg f'(z_0)$.

Зададим переменной z_0 приращение Δz такое, чтобы точка $z = z_0 + \Delta z \in \ell_1$. Тогда соответствующая точка $w = w_0 + \Delta w$

будет лежать на гладкой кривой L_1. Пусть $\psi_1 = \arg \Delta z$, $\Psi_1 = \arg \Delta w$.

При $\Delta z \to 0$ будет $\Delta w \to 0$. Тогда углы наклона хорд будут стремиться к углам наклона касательных, то есть $\varphi_1 = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \psi_1$; $\Phi_1 = \lim\limits_{\Delta w \to 0} \Psi_1$.

Так как $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$, и $\arg \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \arg \Delta w - \arg \Delta z$, то получим $\alpha = \lim\limits_{\Delta z \to 0} (\Psi_1 - \psi_1 + 2m_1\pi) = \Phi_1 - \varphi_1 + 2m_1\pi$, m_1 - целое, то есть α - есть разность углов наклона касательных к L_1 в точке w_0 и к ℓ_1 в точке z_0. Иначе говоря, α - угол поворота при переходе от ℓ_1 к L_1 в результате отображения. В этом состоит геометрический смысл аргумента производной.

Так как кривая ℓ_1 взята произвольным образом, то, применяя проведенные рассуждения для другой гладкой кривой ℓ_2, проходящей через z_0, и ее образа L_2, проходящего через w_0, получим

$$\alpha = \Phi_2 - \varphi_2 + 2m_2\pi.$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_1 - \varphi_1 = \Phi_2 - \varphi_2.$$

Иначе говоря, угол между кривыми L_1 и L_2 равен углу между кривыми ℓ_1 и ℓ_2. Итак, при отображении осуществляемом аналитической функцией углы между гладкими кривыми и их образами сохраняются (сохраняются их величина и ориентация).

Далее рассмотрим модуль производной

$$k = |f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|.$$

Тогда

$$\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = k + \beta(|\Delta z|),$$

$$|\Delta w| = k \cdot |\Delta z| + \beta(|\Delta z|) \cdot |\Delta z|.$$

Так как k одно и то же для любых приращений Δz, то это означает, что «малая окрестность z_0» при отображении f преобразуется подобно в «малую окрестность w_0». Число k является при этом коэффициентом подобия – это и есть геометрический смысл модуля производной. Если $k > 1$ - в результате отображения происходит растяжение, если $k < 1$, то сжатие.

То есть мы показали, что отображение, осуществляемое аналитической функцией, является конформным первого рода.

Из доказанного следует, что $\arg f(z_0)$ есть угол поворота касательной в любой кривой, проведенной через точку z_0, при ее отображении при помощи $w = f(z)$ на плоскости UOV.

Модуль $f'(z_0)$ показывает, во сколько раз $|\Delta z|$ меньше или больше соответствующего $|\Delta w|$, то есть $|f'(z_0)|$ можно рассматривать как величину масштаба в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

Если $|f'(z_0)| > 1$, то происходит растяжение бесконечно малого элемента, выходящего из точки z_0; если $|f'(z_0)| < 1$, то происходит сжатие; если $|f'(z_0)| = 1$, то масштаб не меняется.

Величину $|f'(z_0)|$ называют *коэффициентом растяжения*.

Пример 5. Найти угол поворота и коэффициент растяжения для отображения $w = z^3$ в точке $z_0 = 1 + i$.

Решение. Так как $f'(z) = 3z^2$, то $f'(z_0) = 3(1+i)^2 = 6i$, $|f'(z_0)| = 6$,

$$\arg f'(z_0) = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому угол поворота равен $\frac{\pi}{2}$, а коэффициент растяжения равен 6.

Если взять весьма малый отрезок M_0M, выходящий из точки $M_0(1+i)$, то его образ при отображении $w = z^3$ будет почти совпадать с отрезком N_0N, выходящим из точки $N_0\left((1+i)^3\right) = N_0(-2+2i)$, причем отрезок

N_0N приближенно в 6 раз длиннее отрезка M_0M и образует с ним прямой угол.

§4. Ряды функций комплексного переменного

Рассмотрим ряд вида

$$f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots, \qquad (1)$$

где $f_n(z)$, n=1, 2, … - функции комплексного переменного z, определенные в некоторой области D.

Ряд (1) называется *функциональным рядом*.

При фиксированном значении $z=z_0$ ряд (1) превращается в числовой ряд вида

$$f_1(z_0)+f_2(z_0)+\ldots+f_n(z_0)+\ldots \qquad (2)$$

Определение 1. Функциональный ряд (1) называется *сходящимся в точке* $z_0 \in D$, если сходится соответствующий ему числовой ряд (2). Точка z_0 называется *точкой сходимости* ряда (1). В противном случае ряд (1) называется *расходящимся в точке* z_0.

Предположим, что ряд (1) сходится во всех точках некоторой области G, $G \subset D$. Тогда говорят, что ряд (1) *сходится в области* G, а сама область G называется *областью сходимости* ряда (1).

Каждой точке $z \in G$ соответствует определенное значение суммы ряда (1), то есть в области G определена функция $S(z)$, которая называется *суммой ряда* (1).

Рассмотрим частичные суммы ряда (1)

$$S_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z),\ n=1,2,\ldots,$$

которые образуют функциональную последовательность $\{S_n(z)\}$. Сходимость ряда (1) в области G означает существование предела

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z)=S(z) \qquad (3)$$

Равенство (3) означает, что:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon, z): \quad n > N \Rightarrow |S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$.

Заметим, что в общем случае N зависит и от ε и от z.

Определение 2. Функциональный ряд (1) называется *равномерно* сходящимся в области G, если последовательность его частичных сумм сходится в G равномерно, то есть если

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall\, n > N \Rightarrow |S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$ для всех z из области G.

В случае равномерной сходимости удается подобрать номер $N(\varepsilon)$, общий для всех z из G.

Теорема *(признак Вейерштрасса равномерной сходимости)*

Если все члены ряда (1) в области D удовлетворяют условию

$$|f_n(z)| \le a_n,$$

где a_n - вещественные положительные числа, и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то данный ряд (1) сходится равномерно (и при этом абсолютно) в области D.

Доказательство. По условию имеем

$$|f_n(z)| \le a_n,\ \forall z \in D,\ n = 1,2,\ldots$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда для всех $z \in D$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$, а, значит сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$. Причем справедлива оценка

$|S_n(z) - S(z)| = |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots| \le |f_{n+1}(z)| + |f_{n+2}(z)| + \ldots \le a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots < \varepsilon$

при $\forall\, n \ge N(\varepsilon)$ для всех $z \in D$.

Равномерно сходящиеся ряды обладают весьма важными свойствами:

1). Если члены функционального ряда (1) непрерывны в некоторой области D и ряд равномерно сходится в этой области к функции $S(z)$, то $S(z)$ также непрерывна в D.

2). Если функции $f_n(z)$ являются аналитическими в некоторой области D, а ряд (1) равномерно сходится в любой замкнутой подобласти $\overline{G}$ области D к функции $S(z)$, то $S(z)$ является аналитической функцией в области D, при этом

$$f_1^{(k)}(z)+f_2^{(k)}(z)+\ldots=S^{(k)}(z),$$

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ сходится равномерно в $\overline{G}$.

§5. Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$c_0+c_1(z-z_0)+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots, \qquad (1)$$

где z_0, c_0, c_1, … - постоянные комплексные числа.

Очевидно, что степенной ряд (1) всегда сходится в точке z_0.

Для определения области сходимости степенного ряда важную роль играет следующая теорема:

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится и в любой точке z, удовлетворяющей условию $|z-z_0|<|z_1-z_0|$, причем в круге $|z-z_0|\le\rho$, $\rho<|z_1-z_0|$ ряд (1) сходится равномерно (см. рис.1)

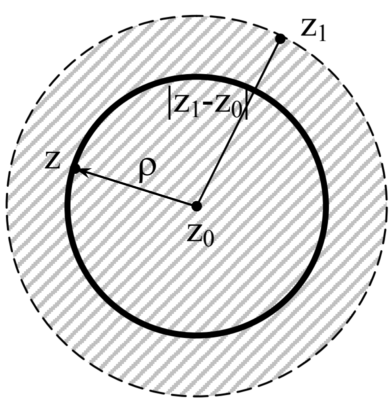

Рис. 1

Доказательство. Выберем произвольную точку z, удовлетворяющую условию $|z-z_0|<|z_1-z_0|$, то есть z лежит внутри круга с центром в точке z_0 и радиусом $|z_1-z_0|$ и рассмотрим в этой точке ряд (1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n .$$

Обозначим $|z-z_0|=q|z_1-z_0|$, $q<1$.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z_1-z_0)^n$ сходится по условию теоремы, следовательно, в силу необходимого условия сходимости:

$$c_n(z_1-z_0)^n \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Тогда существует такая постоянная M , что

$$|c_n| \cdot |z_1 - z_0|^n \le M ,$$

откуда получаем оценку

$$|c_n| \le \frac{M}{|z_1 - z_0|^n}.$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |z - z_0|^n \le M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^n}{|z_1 - z_0|^n} = M \sum_{n=0}^{\infty} q^n .$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q < 1$ есть сходящийся ряд геометрической прогрессии, следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |z - z_0|^n$ - сходится, а тогда исходный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится абсолютно.

Покажем равномерную сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ в круге $|z - z_0| \le \rho$, $\rho < |z_1 - z_0|$.

Рассмотрим ряд $M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{|z_1 - z_0|^n}$. Он мажорирует исходный ряд и сходится как ряд прогрессии со знаменателем, меньшим единицы. Тогда по признаку Вейерштрасса степенной ряд (1) равномерно сходится в круге $|z - z_0| \le \rho$.

***Следствие* 1.** Если степенной ряд (1) расходится в некоторой точке z_1, то он расходится и во всех точках z , удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| > |z_1 - z_0| \text{ (см. рис. 2).}$$

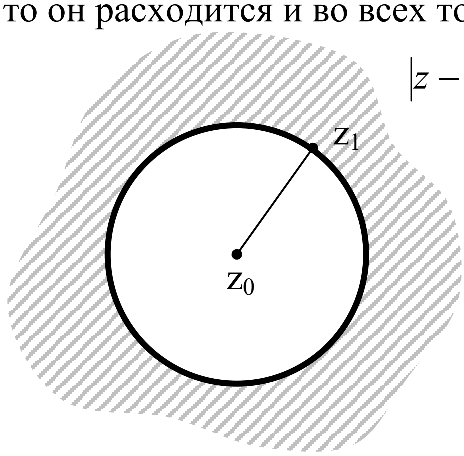

Рис. 2

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предполагая противное, получим, что по теореме Абеля ряд должен сходится в любом круге радиуса $r < |z_1 - z_0|$, в частности и в точке z_1, что противоречит условию.

Рассмотрим точную верхнюю грань R расстояний $|z-z_0|$ от точки z_0 до точек z, в которых сходится ряд (1).

Тогда внутри круга $|z-z_0|<R$ ряд (1) будет сходиться (и при том абсолютно), вне этого круга – расходиться. В точках границы $|z-z_0|=R$ ряд (1) может как сходиться так и расходиться.

Если ряд (1) сходится лишь в точке z_0, то положим $R=0$.

Если ряд (1) сходится на всей комплексной плоскости, то положим $R=\infty$.

Таким образом, область сходимости степенного ряда (1) представляет собой круг

$$|z-z_0|<R,\ 0\le R\le\infty, \tag{2}$$

который называется *кругом сходимости*, а число R - *радиусом сходимости*.

***Следствие* 2.** Внутри круга сходимости степенной ряд сходится к непрерывной аналитической функции. В круге сходимости ряд (1) можно дифференцировать любое число раз, в результате будем получать степенные ряды с тем же радиусом сходимости.

Радиус сходимости степенного ряда (1) можно определить, применяя признаки Д'Аламбера и Коши к абсолютному ряду для ряда (1).

Пусть, например, все коэффициенты ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ отличны от нуля и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=D\neq 0$. Тогда, применяя признак Д'Аламбера к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|c_n(z-z_0)^n\right|$, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}\right|}{\left|c_n(z-z_0)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}|z-z_0|=D\cdot|z-z_0|.$$

Отсюда следует, что ряд (1) сходится (абсолютно!) при таких z, для которых $D\cdot|z-z_0|<1$, то есть $|z-z_0|<\dfrac{1}{D}$, и расходится при таких z, для которых $\left|z-z_0\right|>\dfrac{1}{D}$ (в этом случае нарушится необходимое условие сходимости ряда (1)). Значит, $R=\dfrac{1}{D}$, откуда имеем

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|c_n\right|}{\left|c_{n+1}\right|}. \tag{3}$$

Если $D=0$, то это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|c_{n+1}\left(z-z_0\right)^{n+1}\right|}{\left|c_n\left(z-z_0\right)^n\right|}=0$ для любого z, то есть ряд (1) сходится на всей комплексной плоскости и $R=\infty$. Если же $D=\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|c_{n+1}\left(z-z_0\right)^{n+1}\right|}{\left|c_n\left(z-z_0\right)^n\right|}=\infty$ при всяком $z\neq z_0$, то есть ряд (1) расходится при $z\neq z_0$, и поэтому $R=0$.

Заметим, что последние два случая вполне согласуются с формулой (3).

Замечание. Аналогично, применяя к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|c_n\left(z-z_0\right)^n\right|$ признак Коши, может быть получена формула

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|c_n\right|}}, \tag{4}$$

которая называется формулой Коши-Адамара.

Пример 1. Найти радиус и круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}$.

Решение. Найдем R по формуле (3).

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|c_n\right|}{\left|c_{n+1}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2(1+i)^{n+1}}{n^2(1+i)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\left|1+i\right|=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\sqrt{2}.$$

Тогда $R=\sqrt{2}$, а круг сходимости $\left|z-i\right|<\sqrt{2}$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n(z-1)^n$.

Решение. Применим для нахождения R формулу (4).

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|c_n\right|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Следовательно, $R=0$ и данный ряд сходится в единственной точке $z=1$.

Пример 3. Разложить в степенной ряд по степеням $z+2i$ функцию $f(z)=\frac{1}{z}$ и указать область сходимости полученного ряда.

Решение. Преобразуем функцию $f(z)=\frac{1}{z}$ следующим образом:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z+2i-2i}=-\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+2i}{2i}}.$$

Дробь $\frac{1}{1-\frac{z+2i}{2i}}$ развернем в сходящийся ряд геометрической прогрессии с первым членом равным 1 и знаменателем $\frac{z+2i}{2i}$, при условии, что $\left|\frac{z+2i}{2i}\right|<1$. Получим $\frac{1}{1-\frac{z+2i}{2i}}=1+\frac{1}{2i}(z+2i)+\frac{1}{(2i)^2}(z+2i)^2+\ldots$.

Тогда функция $f(z)$ представима рядом

$$\frac{1}{z}=-\frac{1}{2i}-\frac{1}{(2i)^2}(z+2i)-\frac{1}{(2i)^3}(z+2i)^2+\ldots=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2i)^{n+1}}(z+2i)^n,$$

причем полученный ряд будет абсолютно сходится для всех z, для которых выполняется неравенство $\left|\frac{z+2i}{2i}\right|<1$ или $|z+2i|<2$ и расходится для всех z, для которых $|z+2i|>2$. Значит, кругом сходимости полученного ряда будет круг: $|z+2i|<2$.

§6. Определение функций e^z, $\sin z$, $\cos z$. Формулы Эйлера

Среди элементарных функций действительного аргумента важную роль играют функции e^x, $\sin x$, $\cos x$. Как известно, эти функции могут быть представлены своими разложениями в ряды Тейлора:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

причем эти ряды равномерно сходятся при любом x.

Рассмотрим на комплексной плоскости степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \tag{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}. \tag{3}$$

Нетрудно получить, что областью сходимости рядов (1) – (3) является вся комплексная плоскость, то есть ряды (1) – (3) сходятся на всей комплексной плоскости к некоторым аналитическим функциям (см. следствие 2 §12). Условимся эти функции обозначать e^z, $\sin z$ и $\cos z$ соответственно.

Имеем:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots; \tag{4}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots; \tag{5}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \ldots. \tag{6}$$

Получим важнейшие соотношения, связывающие между собой эти функции.

1. Заменим в ряде для e^z переменную z на iz, тогда

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \ldots = 1 + \frac{z}{1!}i - \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!}i + \frac{z^4}{4!} +$$

$$+\frac{z^5}{5!}i-\ldots=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right).$$

Заметив, что ряд, стоящий в первых скобках определяет $\cos z$, а ряд, стоящий в скобках при i определяет $\sin z$, получаем тождество

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z, \tag{7}$$

которое называется *тождеством Эйлера*.

2. Поскольку ряд для $\cos z$ содержит лишь четные степени z, а ряд $\sin z$ - лишь нечетные степени z, имеем

$$\cos(-z)=\cos z;\ \sin(-z)=-\sin z.$$

Заменим в тождестве Эйлера z на $-z$, получим

$$e^{-iz}=\cos z-i\sin z. \tag{8}$$

Складывая и вычитая тождества (7) и (8), имеем:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}; \tag{9}$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{10}$$

Формулы (9) и (10) так же носят имя Эйлера.

Пример 1. Вычислить значения функций: а) $e^{\frac{\pi}{2}i}$; б) $\cos(i)$.

Решение. а) по формуле (7) получаем

$$e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=i.$$

б) по формуле (9) имеем

$$\cos i=\frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2}=\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}=\mathrm{ch}1.$$

***Замечание* 1.** Легко убедиться, что $|\cos i|=\dfrac{e^{-1}+e^{1}}{2}=\dfrac{e}{2}+\dfrac{1}{2e}>1$, то есть в области комплексных чисел нарушаются известные для вещественного случая неравенства:

$$|\cos z|\le 1;\ |\sin z|\le 1.$$

***Замечание* 2.** С помощью формулы Эйлера (7) можно получить так называемую *показательную форму* записи комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}. \qquad (11)$$

§7. Линейная функция

Определение 1. *Линейной функцией* называется функция вида:

$$w = kz + b, \qquad (1)$$

где k и b - некоторые постоянные комплексные числа ($k \neq 0$).

Очевидно, что отображение (1) будет конформным во всей плоскости комплексного переменного z и притом взаимно однозначным.

Рассмотрим сначала три частных случая, причем для простоты z и w будем изображать точками одной плоскости.

1). $w = z + b$.

Это отображение есть сложение векторов, а, фактически, параллельный перенос точек плоскости на вектор b (рис. 4).

2). $w = kz$, $b = 0$.

Пусть $k = e^{i\alpha}$, тогда $w = e^{i\alpha}z$. В этом случае имеем:

$$|w| = |z|,\ \arg w = \arg z + \alpha,\ \alpha = \arg k,$$

то есть точка z переходит в точку w при помощи поворота вектора z около нулевой точки на угол α. Значит, это отображение есть поворот вокруг начала координат на угол α (рис. 5).

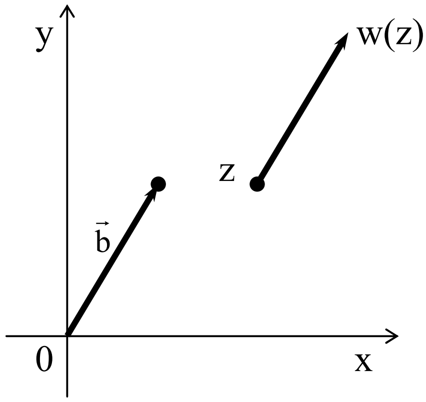

Рис. 4

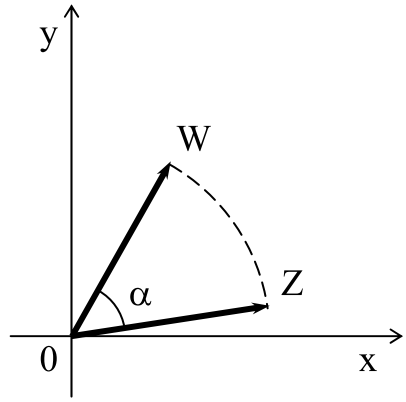

Рис. 5

3). $w = kz$, $k \neq 0$, k - постоянное комплексное число (если $k = 0$, то все точки комплексной плоскости перейдут в нулевую точку).

Запишем числа k, z в показательной форме, тогда получим

$k = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) = \rho\, e^{i\psi}$, $\rho = |k|$, $\psi = \arg k$;

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$;

$w = kz = \rho\, r \cdot e^{i(\varphi+\psi)}$.

Это означает, что длина вектора z меняется в ρ раз (то есть ρ - коэффициент подобия) и к аргументу z прибавляется угол ψ (поворот вокруг начала координат на угол ψ).

Окончательно, получим, что отображение, осуществляемое функцией $w = kz + b$, есть комбинация преобразований точек плоскости:

1. поворот вокруг начала координат на угол равный аргументу числа k;
2. подобие с центром в начале координат и коэффициентом подобия ρ равным модулю числа k;
3. параллельный перенос на вектор b, при котором начало координат переходит в точку $A(b)$.

Функция $w = kz + b$ является аналитической.

Пример 1. Найти угол поворота и коэффициент подобия при отображении $w = (\sqrt{3} - i)z + 3 - 2i$.

Решение. $k = \sqrt{3} - i$, $|k| = \sqrt{3+1} = 2 = \rho$, $\arg k = -\dfrac{\pi}{6}$. Коэффициент подобия равен 2, угол поворота равен $\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$, а точка $O(0;0)$ переходит в точку $(3;-2)$.

Пример 2. Найти образ квадрата $ABCD$ при отображении $w = (\sqrt{3} - i)z$, если $D(5;0)$, $A(2;0)$, $B(2;3)$, $C(5;3)$.

Решение. Найдем сначала точки, в которые переходят вершины квадрата

$A_1 = w(A) = \left(\sqrt{3} - i\right)\cdot 2 = 2\sqrt{3} - 2i$;

$B_1 = w(B) = \left(\sqrt{3} - i\right)\cdot(2 + 3i) = \left(2\sqrt{3} + 3\right) + \left(3\sqrt{3} - 2\right)i$;

$C_1 = w(C) = \left(\sqrt{3} - i\right)\cdot(5 + 3i) = \left(5\sqrt{3} + 3\right) + \left(3\sqrt{3} - 5\right)i$;

$D_1 = w(D) = \left(\sqrt{3} - i\right)\cdot 5 = 5\sqrt{3} - 5i$.

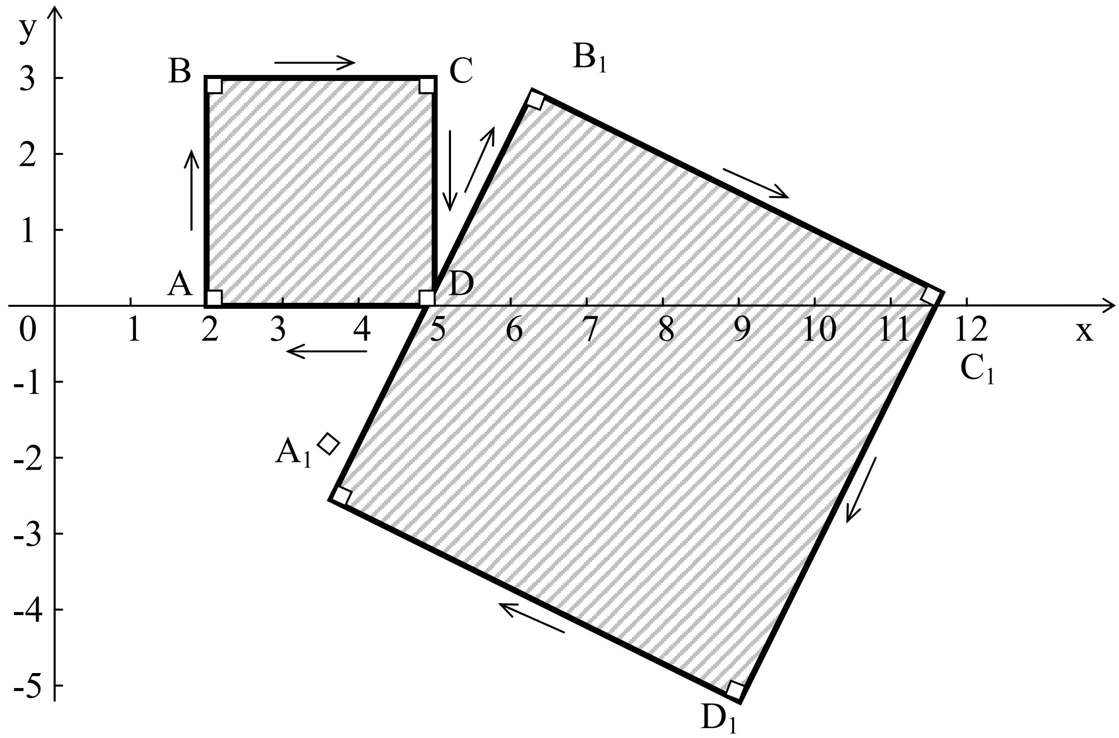

Рис.6

Область ограниченная квадратом $ABCD$ переходит в область, ограниченную квадратом $A_1B_1C_1D_1$ (имеет место сохранение ориентации и углов между прямыми, так как отображение конформное) (рис. 6).

При отображении, осуществляемом с помощью линейной функции, фигуры переходят в подобные им фигуры.

Свойством сохранения формы обладает и преобразование

$$w = k\bar{z} + b,$$

которое называется *антилинейным*; оно сохраняет форму, но меняет ориентацию обхода границы фигуры на противоположную (на рис. 7 это показано для функции $w = \bar{z}$).

Отсюда вытекает, что любое преобразование подобия задается линейной или антилинейной функцией, причем, если ориентация сохраняется,

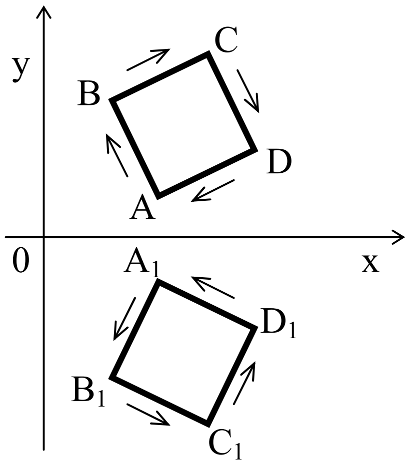

Рис. 7

то оно задается линейной функцией.

Поскольку линейная функция $w = kz + b$ определяется двумя параметрами k и b, то для ее задания нужны два условия. Например, можно указать образы w_1 и w_2 любых двух точек z_1 и z_2 $(z_1 \neq z_2)$. Если известно, что

$$w_1 = kz_1 + b, \quad w_2 = kz_2 + b,$$

то отсюда находим: $w_2 - w_1 = k(z_2 - z_1)$ или

$$k = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}. (2)$$

Так как точка z имеет образом точку $w = kz + b$, то можно получить $w - w_1 = k(z - z_1)$. Подставим в это равенство выражение для k из формулы (2):

$$w - w_1 = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}(z - z_1)$$

или

$$\frac{w - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (3)$$

Пример 3. Найти линейную функцию такую, что точку $1 - i$ переводит в точку $2 + 3i$, а точку $2 + 4i$ - в точку $1 - 6i$.

Решение. Воспользуемся формулой (3), положив $z_1 = 1 - i$, $w_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 2 + 4i$, $w_2 = 1 - 6i$, тогда имеем:

$$\frac{w - 2 - 3i}{1 - 6i - 2 - 3i} = \frac{z - 1 + i}{2 + 4i - 1 + i}.$$

Совершим алгебраические преобразования и окончательно получим:

$$w = \left(-\frac{23}{13} - \frac{2}{13}i\right)z + \left(\frac{77}{26} - \frac{49}{26}\right)i.$$

§8. Функция $w=\dfrac{1}{z}$

Функция $w=\dfrac{1}{z}$ определена во всех точках комплексной плоскости, кроме $z=0$. Полагая $w=\infty$ при $z=0$ и $w=0$ при $z=\infty$ распространим эту функцию на всю расширенную комплексную плоскость. Так как из $z_1 \neq z_2$ следует, что $\dfrac{1}{z_1}\neq\dfrac{1}{z_2}$, то функция $\dfrac{1}{z}$ взаимно однозначно отображает расширенную комплексную плоскость на себя.

Выделим вещественную и мнимую части функции $w=\dfrac{1}{z}$ и найдем область аналитичности этой функции:

$$w=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{(-y)}{x^2+y^2} \qquad (1)$$

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\quad v(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Проверим выполнение условий Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Очевидно, что условия Коши-Римана выполнены во всех точках комплексной плоскости, кроме точки $(0;0)$. Если считать, что угол между кривыми L_1 и L_2 в точке ∞ равен взятому с обратным знаком углу в точке 0 между их образами при преобразовании $\dfrac{1}{z}$, то конформность отображения $w=\dfrac{1}{z}$ сохраняется и в точке $z=0$. В самом деле, лучи $\arg z=\alpha$ и $\arg z=\beta$ переходят при этом преобразовании в лучи $\arg w=-\alpha$ и $\arg w=-\beta$,и при этом угол между лучами не изменяется.

Запись функции w в виде (1) недостаточно наглядна. Представим w и z в показательной форме: $w = R\,e^{i\psi}$, $z = r\,e^{i\varphi}$, тогда получим:

$$R\,e^{i\psi} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}. \qquad (2)$$

Так как два комплексных числа равны в том и только в том случае, когда их модули одинаковы, а аргументы отличаются на число, кратное 2π, то из равенства (2) имеем, что

$$R = \frac{1}{r},\ \ \psi = -\varphi + 2\pi k\ ,\ \ k \text{ - целое.} \qquad (3)$$

Отображение $M(r,\varphi) \to N\left(\frac{1}{r},-\varphi\right)$ разбивается на два. Сначала точка $M(r,\varphi)$ переходит в точку $P\left(\frac{1}{r},\varphi\right)$. Так как при этом обе точки M и P лежат на одном луче, выходящем из начала координат, а их модули связаны соотношением $r\cdot\frac{1}{r} = 1$, то данное преобразование является инверсией относительно окружности с центром в нуле и радиусом 1. Последующее преобразование, переводящее точку $P\left(\frac{1}{r},\varphi\right)$ в $N\left(\frac{1}{r},-\varphi\right)$, является симметрией относительно действительной оси.

Построим геометрически точку $w = \frac{1}{z}$, зная точку z. Рассмотрим три случая:

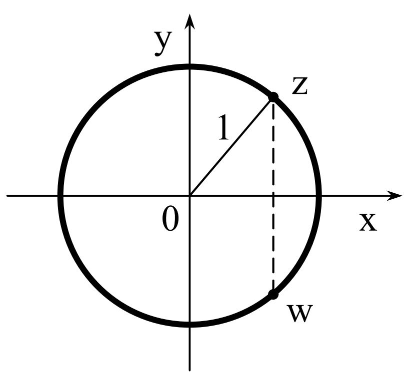

Рис. 8

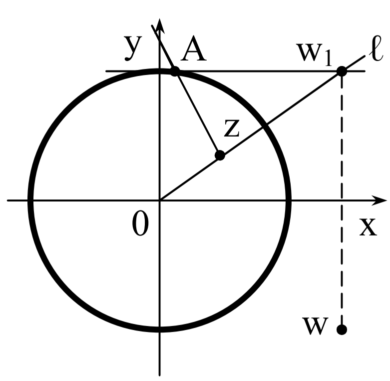

Рис. 9

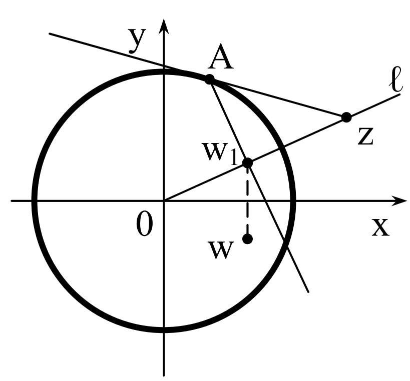

Рис. 10

1). z лежит на окружности (рис. 8). Точки окружности переходят в точки этой же окружности w, симметричные z относительно оси OX.

2). z лежит внутри окружности (рис. 9).

Проведем луч через ноль и z. Восстановим перпендикуляр из точки z к лучу ℓ до пересечения с окружностью – точка A. В точке A проведем касательную к окружности и продолжим ее до пересечения с лучом ℓ - получим точку W_1. Отобразим ее симметрично относительно оси OX - W.

3) z лежит вне окружности (рис. 10).

Проведем луч ℓ через ноль и z. Из точки z построим касательную к окружности - A - точка касания. Из A опустим перпендикуляр на луч ℓ - получим точку W_1. Отобразим ее симметрично относительно оси OX - W.

Итак, преобразование $w=\dfrac{1}{z}$ сводится к преобразованиям:

1. Инверсия относительно единичной окружности с центром в начале координат;
2. Симметрия относительно действительной оси.

Справедливо утверждение:

Отображение $w=\dfrac{1}{z}$ переводит:

1). окружности, не проходящие через 0, в окружности, не проходящие через 0,

2). окружности, проходящие через 0, в прямые, не проходящие через 0,

3). прямые, не проходящие через 0, в окружности, проходящие через 0,

4). прямые, проходящие через 0, в прямые, проходящие через 0.

Пример 1. Найти образ прямой $y=x+4$ при отображении $w=\dfrac{1}{z}$.

Решение. Заменяя в уравнении прямой $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ и $y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, получим:

$$\frac{z+\bar{z}}{2}-\frac{z-\bar{z}}{2i}+4=0, \text{ то есть } (z+\bar{z})+i(z-\bar{z})+8=0,$$

$$(1+i)z+(1-i)\bar{z}+8=0.$$

Так как $z=\dfrac{1}{w}$, $\bar{z}=\dfrac{1}{\bar{w}}$, таким образом уравнение образа имеет вид:

$$\frac{1+i}{w}+\frac{1-i}{\bar{w}}+8=0, \text{ то есть } 8w\bar{w}+(1+i)\bar{w}+(1-i)w=0.$$

Поскольку $w=u+iv$, $\bar{w}=u-iv$, $w\bar{w}=u^2+v^2$, то имеем:

$$8\left(u^2+v^2\right)+2u+2v=0.$$

Это уравнение окружности $\left(u+\dfrac{1}{8}\right)^2+\left(v+\dfrac{1}{8}\right)^2=\left(\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2$.

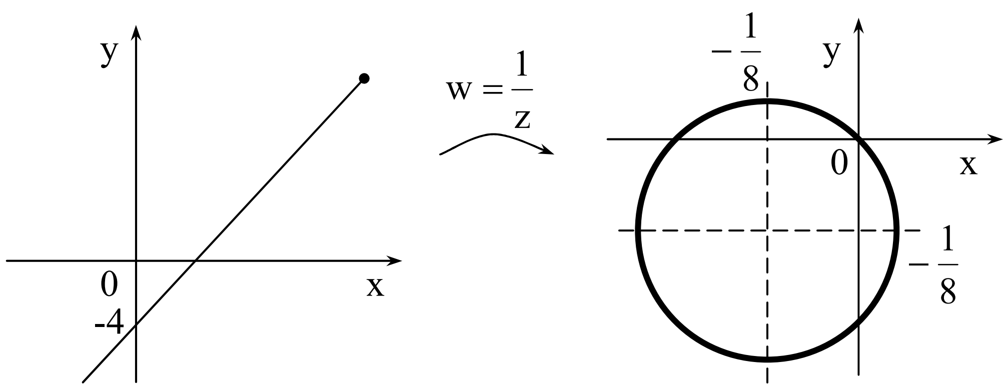

Рис. 11

Заметим, что образом прямой $y=x+4$, не проходящей через точку 0 является окружность, проходящая через точку 0.

Пример 2. Найти образ области $ABCD$ при отображении $w=\dfrac{1}{z}$, если $A(2;0)$, $B(2;2)$, $C(4;2)$, $D(4;0)$.

Р е ш е н и е. Найдем образы точек $A,\ B,\ C,\ D$:

$A_1=w(A)=\dfrac{1}{2}$; $\qquad B_1=w(B)=\dfrac{1}{2+2i}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}i$;

$C_1=w(C)=\dfrac{1}{4+2i}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{10}i$; $\qquad D_1=w(D)=\dfrac{1}{4}$.

Теперь найдем образы прямых AB , BC , CD , AD при отображении $\frac{1}{z}$ аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере:

AD : $y=0$ $\to$ положительная полуось OU .

AB : $x=2$ $\to$ окружность $\left(u-\frac{1}{4}\right)^2+v^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$.

BC : $y=2$ $\to$ окружность $u^2+\left(v+\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$

CD : $x=4$ $\to$ окружность $\left(u-\frac{1}{8}\right)^2+v^2=\left(\frac{1}{8}\right)^2$.

Так как ориентация сохраняется, то получаем, что область $ABCD$ переходит в область $A_1B_1C_1D_1$ плоскости UOV .

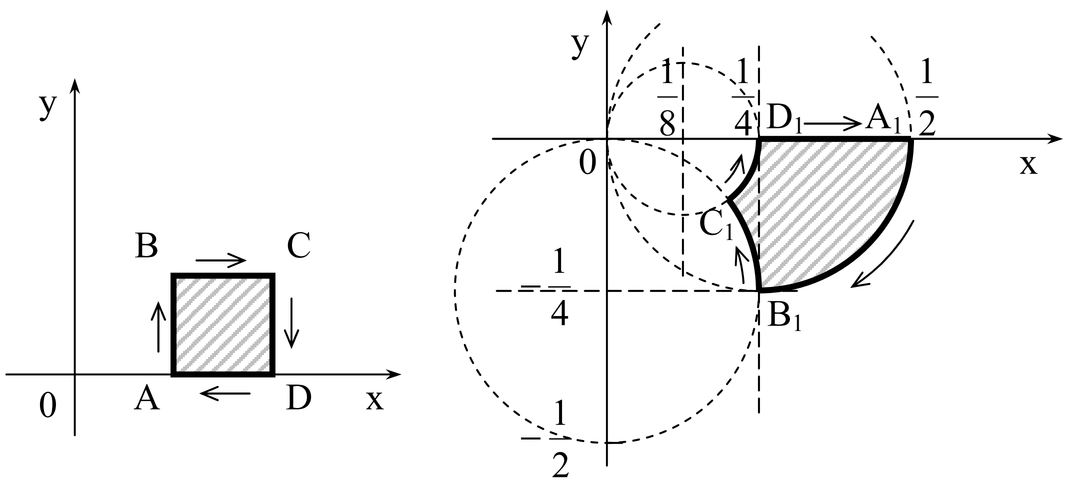

Рис. 12

§9. Дробно-рациональная функция

Линейная функция и функция $\frac{1}{z}$ являются частными случаями функции вида

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{1}$$

где a,b,c,d - комплексные числа, причем $bc-ad\neq 0, c\neq 0$. Функции вида (1) называются *дробно-рациональными*.

Выделим из дроби целую часть:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{c(az+b)+ad-ad}{c(cz+d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}.$$

Отображение (1) сводится к композиции трех отображений: 1) $t = cz + d$, 2) $q = \frac{1}{t}$, 3) $w = kq + l$, где $k = \frac{bc-ad}{c}$, $l = \frac{a}{c}$. Первое и третье из них являются линейными отображениями, а второе – отображение, изученное в предыдущем параграфе.

Дробно-линейную функцию можно распространить на всю расширенную комплексную плоскость. Так как

$$\lim_{z\to\infty}\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}, \quad \lim_{z\to -\frac{d}{c}}\frac{az+b}{cz+d} = \infty,$$

то точка ∞ переходит при этом отображении в $\frac{a}{c}$, а точка $-\frac{d}{c}$ в ∞.

Если считать прямую окружностью бесконечно большого радиуса, то получаем, как и линейное отображение, так и отображение $w = \frac{1}{z}$ переводят в себя совокупность прямых и окружностей на плоскости. Отсюда вытекает, что при любом дробно-рациональном преобразовании совокупность прямых и окружностей на плоскости переходит в себя.

Дробно-рациональная функция преображает всякую окружность в окружность. Это так называемое *круговое свойство*.

Внутренняя область отображаемой окружности переходит либо во внутреннюю область образа, либо во внешнюю область образа.

Функция w, определяемая из уравнения

$$\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\cdot\frac{z_2-z_3}{z-z_3} = \frac{w-w_1}{w_2-w_1}\cdot\frac{w_2-w_3}{w-w_3} \tag{2}$$

отображает окружность, проходящую через точки z_1, z_2, z_3 плоскости XOY, в окружность, проходящую через точки w_1, w_2, w_3 плоскости UOV.

Пример 1. Найти дробно-рациональную функцию, переводящую точку 1 в точку –1, точку i в точку 0 и точку ∞ в точку 1.

Р е ш е н и е. $z_1=1 \quad \to \quad w_1=-1$;

$z_2=i \quad \to \quad w_2=0$;

$z_3=\infty \quad \to \quad w_3=1$.

В левой части равенства (2) для второго сомножителя справедливо: $\lim\limits_{z_3\to\infty}\dfrac{z_2-z_3}{z-z_3}=1$, поэтому заменим его на 1 и получим:

$$\frac{z-1}{i-1}=\frac{w+1}{0+1}\cdot\frac{0-1}{w-1},$$

$$(z-1)(w-1)=-(w+1)(i-1),$$

$$w=\frac{z+i-2}{z-i}.$$

Пример 2. Найти образ круга $|z|\le 1$ при отображении $w=\dfrac{1-z}{z}$.

Р е ш е н и е. Найдем сначала образ окружности $|z|=1$ или $x^2+y^2=1$. Для этого выделим вещественную и мнимую части функции w:

$$w=\frac{x-y^2-x^2}{x^2+y^2}+i\frac{(-y)}{x^2+y^2}.$$

$$\begin{cases} u(x,y)=-1+\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$, поскольку $x^2+y^2=1$, то имеем

$$\begin{cases} u=-1+x \\ v=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u+1=x \\ -v=y \end{cases} \Rightarrow (u+1)^2+v^2=x^2+y^2=1.$$

Окончательно получим, что образом окружности $|z|=1$ является окружность $|w-1|=1$.

В какую область перейдет круг, ограниченный окружностью $|z|=1$? Возьмем внутреннюю точку $z=0$, ее образом будет ∞. Это означает, что образом точек круга $|z|<1$ будет внешность окружности $|w-1|>1$.

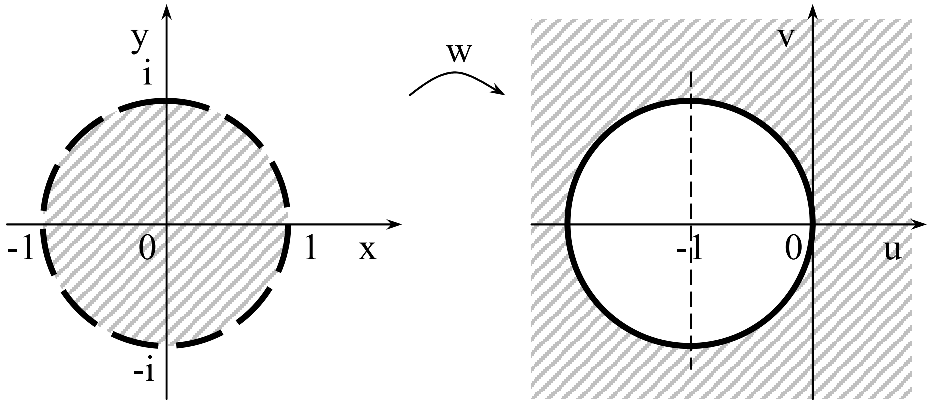

Рис. 1

§10. Степенная функция

Определение 1. Функция

$$w = z^n, \qquad (1)$$

где n - натуральное число, называется *степенной* функцией.

Областью определения функции является вся комплексная плоскость.

Если $n > 1$, то степенная функция не является взаимно однозначной, то есть обратимой. Действительно, если $z = re^{i\varphi}$, по формуле Муавра:

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Отсюда вытекает, что при $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = R(\cos\psi + i\sin\psi)$ равенство (1) имеет место в том и только в том случае, если

$$R = r^n,\ \psi = n\varphi + 2\pi k,\ k \text{ - целое.}$$

Получаем, что луч $\varphi = \alpha$ переходит при отображении (1) в луч $\psi = n\alpha$ (рис 2). Видно, что при $n > 1$ в точке $z = 0$ нарушается конформность отображения (1).

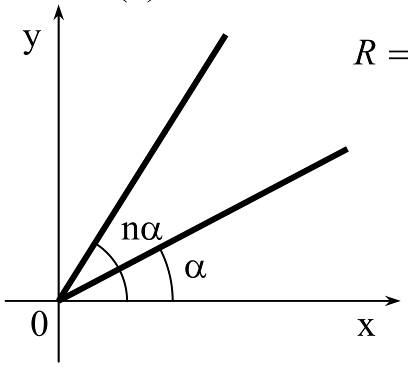

Рис. 2

Рассмотрим более подробно отображение $w = z^2$. Так как при этом отображении аргументы z удваиваются, то верхняя полуплоскость $\mathrm{Im}\, z \geq 0$ переходит во всю плоскость UOV .

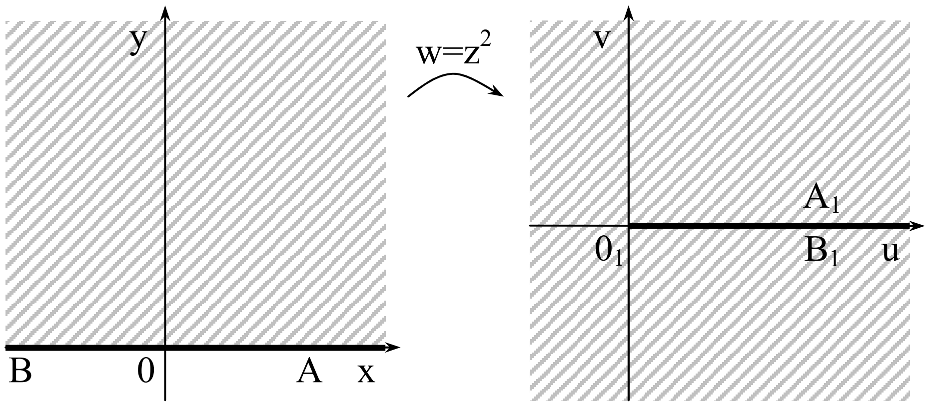

Рис. 3

При этом лучи OA и OB на рис. 3 переходят в один и тот же луч плоскости UOV, идущий в положительном направлении оси OU. Поскольку удобнее иметь дело с взаимно однозначными соответствиями, условились разрезать плоскость вдоль положительной действительной полуоси и считать, что луч OA плоскости XOY переходит в верхний берег O_1A_1 этого разреза, а луч OB - в нижний берег O_1B_1.

Точно также нижняя полуплоскость $\operatorname{Im} z \le 0$ переходит в разрезанную плоскость UOV, причем луч OB переходит в верхний берег, а OA - в нижний берег. Чтобы сохранить однозначность отображения, удобно считать эти две разрезанные плоскости двумя различными листами. Надо склеить берега: OA переходит в верхний берег первой плоскости и в нижний берег второй плоскости. Точно так же надо склеить нижний берег разреза первой плоскости с верхним берегом разреза второй плоскости – оба эти берега являются образами одного и того же луча OB.

Полученную двухлистную поверхность называют *римановой поверхностью* для функции $w = z^2$. Эта функция задает взаимно однозначное отображение комплексной плоскости на построенную риманову поверхность.

Аналогично обстоит дело для функции $w = z^n$. Разница лишь в том, что получается n-листная риманова поверхность. Она состоит из n листов разрезанной вдоль положительного действительного луча плоскости UOV. При этом нижний берег каждого листа, кроме последнего, склеивается с верхним берегом следующего за ним листа, а нижний берег последнего листа – с верхним берегом первого.

Функция $w = z^n$ задает взаимно однозначное отображение плоскости XOY на риманову поверхность. При этом отображении угол

$$0 \le \arg z \le \frac{2\pi}{n}$$

плоскости XOY отображается на весь первый лист. Точно так же угол

$$\frac{2\pi}{n} \le \arg z \le \frac{4\pi}{n}$$

отображается на второй лист и т. д. вплоть до угла

$$-\frac{2\pi}{n} \le \arg z \le 0,$$

который отображается на n-ный лист поверхности. Лучи, разделяющие эти углы, отображаются в линии, по которым склеиваются листы поверхности, а сами углы являются областями однолистности функции z^n.

Функцию, обратную функции $w = z^n$, обозначают

$$w = \sqrt[n]{z}.$$

Из формулы Муавра следует, что каждому значению z соответствует n значений $\sqrt[n]{z}$. Поэтому $w = \sqrt[n]{z}$, рассматриваемая на комплексной плоскости, многозначна. Чтобы сделать ее однозначной, ее рассматривают на описанной выше римановой поверхности для функции $w = z^n$.

Пример 1. Найти образ области ограниченной треугольником ABC; $A(-1;0)$; $B(0;1)$, $C(1;0)$ при отображении $w = z^2$.

Решение. $w = z^2 = \left(x^2 - y^2\right) + ixy$.

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}.$$

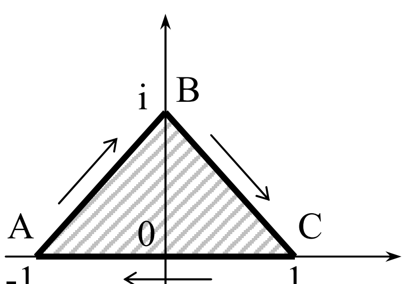

Рис. 4

Выберем направление обхода области (рис.4). Найдем образы точек A, B, C и прямых AB, BC, AC:

$$A = (-1;0) \quad \to \quad A_1 = w(A) = 1$$

$$B=(0;1) \quad \to \quad B_1=w(B)=-1$$

$$C=(1;0) \quad \to \quad C_1=w(C)=1.$$

AB : $y=1+x$. Подставим в выражение для функций u и v:

$$\begin{cases} u=x^2-(1+x)^2=-1-2x \\ v=2x(1+x)=2x+2x^2 \end{cases}.$$

Из первого уравнения выразим x и подставим во второе уравнение (то есть исключим x).

$$\begin{cases} x=\dfrac{u+1}{-2} \\ v=-(u+1)+\dfrac{(u+1)^2}{2}=-u-1+\dfrac{u^2}{2}+u+\dfrac{1}{2}=\dfrac{u^2}{2}-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$y=1+x \quad \to \quad v=\frac{u^2}{2}-\frac{1}{2}.$$

Аналогично, получим образ BC : $y=-x+1$; это будет парабола $v=-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}$. Прямая CA : $y=0$ перейдет в положительную полуось OU .

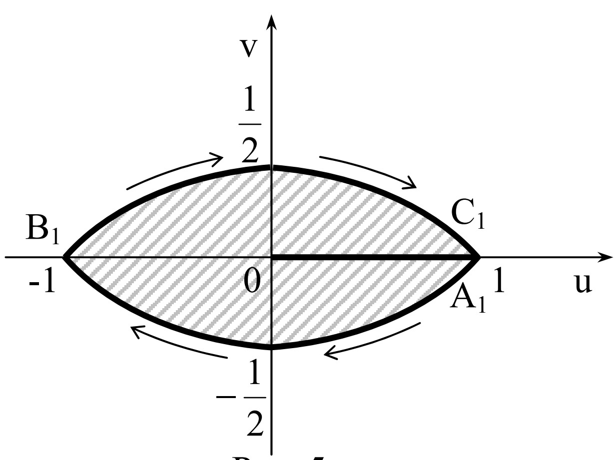

Рис. 5

Но так как и OC и OA имеют один образ, то разрежем по этому отрезку положительную полуось OU . Построим образы A_1, B_1, C_1. Сохранение направления обхода области позволяет найти образ самой области (см. рис. 5).

§11. Функция Жуковского

Определение 1. Функция

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{1}$$

называется *функцией Жуковского*.

Эта функция была введена в рассмотрение русским ученым Н.Е. Жуковским в теории крыла самолета и имела важные приложения, поэтому носит его имя.

Функция $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ определена во всех точках комплексной плоскости, кроме точки $z = 0$, в которой она обращается в ∞.

Производная функции Жуковского равна

$$w' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$$

существует при всех $z \neq 0$ и равна нулю в точках $z = -1$ и $z = 1$.

Выделим области, в которых функция (1) обратима, то есть области *однолистности* этой функции.

Так как

$$w_2 - w_1 = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) - \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{2}(z_2 - z_1)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right),$$

то равенство $w_1 = w_2$ может иметь место, если $z_1 = z_2$ или $z_1 \cdot z_2 = 1$. Поскольку равенство $z_1 \cdot z_2 = 1$ не может выполняться в области, где $|z| < 1$, то эту область можно взять за область однолистности функции Жуковского. По тем же соображениям областями однолистности этой функции являются:

– множество точек, для которых $|z| > 1$;

– верхняя полуплоскость;

– нижняя полуплоскость.

Представим $z = re^{i\varphi}$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, и найдем образ z при преобразовании (1):

$$w=\frac{1}{2}\left(re^{i\varphi}+\frac{1}{re^{i\varphi}}\right)=\frac{1}{2}\left(re^{i\varphi}+\frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right).$$

Применим формулы Эйлера и отделим вещественную и мнимую части:

$$\begin{cases} u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi \\ v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi \end{cases}. \qquad (2)$$

Найдем образ полярной сетки координат на плоскости XOY , то есть сетки, состоящей из линий $|z|=R$, $\arg z=\alpha$.

Образ окружности $|z|=R$ при отображении (1) имеет параметрические уравнения:

$$\begin{cases} u=\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\varphi \\ v=\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\varphi \end{cases}, \ \varphi\in[0;2\pi]. \qquad (3)$$

Исключая из этих уравнений φ, и полагая для краткости записи $a=\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)$, $b=\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)$, получаем:

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1.$$

Если $R\neq 1$, то образом окружности $|z|=R$ является эллипс. Найдем фокусы этого эллипса:

$$a^2-b^2=\frac{1}{4}\left[\left(R+\frac{1}{R}\right)^2-\left(R-\frac{1}{R}\right)^2\right]=1,$$

то есть фокусы лежат в точках 1 и –1. Этот же эллипс будет и образом окружности $|z|=\frac{1}{R}$.

При $R=1$ эллипс вырождается в дважды пробегаемый отрезок действительной оси с концами –1 и 1.

Найдем образ луча $\arg z = \alpha$. При $z = re^{i\alpha}$ получаем из уравнений (2):

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos\alpha \\ v = \dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right)\sin\alpha \end{cases}, \ 0 < r < +\infty. \qquad (4)$$

Если $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ или $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$, то $\cos\alpha > 0$ и поэтому $u > 0$; а если $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$ или $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $\cos\alpha < 0$ и потому $u < 0$.

Исключим из уравнений (4) параметр r, заметив, что

$$\frac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = 1,$$

получим:

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1.$$

Это уравнение задает гиперболу с полуосями $|\cos\alpha|$ и $|\sin\alpha|$. При $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ лучи $\arg z = \alpha$ и $\arg z = -\alpha$ отображаются на правую ветвь этой гиперболы $(u > 0)$; а лучи $\arg z = \pi - \alpha$ и $\arg z = \pi + \alpha$ - на ее левую ветвь.

В результате доказали, что образом полярной сетки координат при отображении (1) является сетка на плоскости UOV, состоящая из эллипсов и гипербол с фокусами в точках –1 и 1 действительной оси (рис. 6).

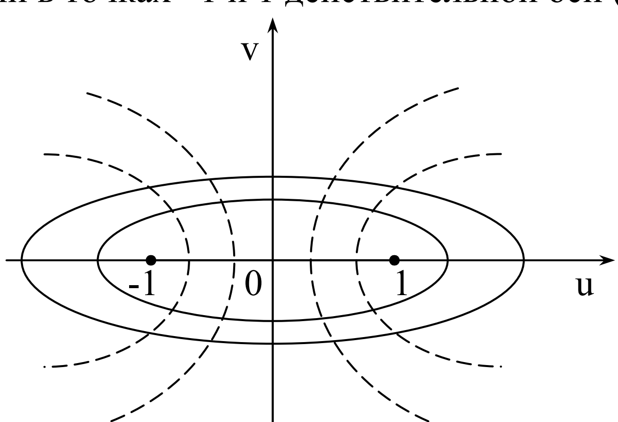

Рис. 6

Из всего сказанного вытекает, что круг $|z|<1$ взаимно однозначно отображается на плоскость UOV, разрезанную вдоль отрезка $[-1;1]$ действительной оси. На ту же плоскость отображается и внешняя область $|z|>1$ этого круга. Получаем два листа, разрезанные вдоль отрезка $[-1;1]$. Склеивая верхний берег первой плоскости с нижним берегом второй, а нижний берег первой полуплоскости с верхним берегом второй, получаем риманову поверхность для функции Жуковского.

Рассмотрим окружность, проходящую через точки 1 и –1 и еще одну окружность, касающиеся внутренним образом в точке 1. При отображении с помощью функции на область, заключенную между этими окружностями получим:

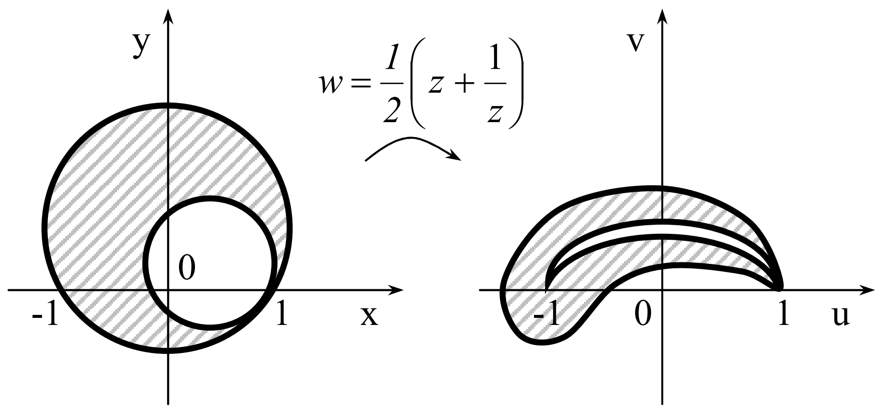

Рис. 7

Полученная область близка к профилю крыла самолета (рис. 7). В частности, если исходная окружность имеет центр в начале координат, то получаем симметричную фигуру, так называемый «руль Жуковского» (рис 8).

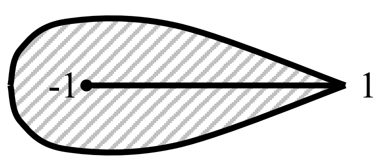

Рис. 8

§12. Функция e^z

В предыдущей главе функция e^z была определена как сумма степенного ряда

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots.$$

Функция определена для любого комплексного числа. Отметим некоторые свойства этой функции:

1. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$.

$$e^{z1} \cdot e^{z2} = \left(1 + z_1 + \frac{z_1^{\,2}}{2!} + \frac{z_1^{\,3}}{3!} + \ldots + \frac{z_1^{\,n}}{n!} + \ldots\right)\left(1 + z_2 + \frac{z_2^{\,2}}{2!} + \frac{z_2^{\,3}}{3!} + \ldots + \frac{z_2^{\,n}}{n!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + (z_1 + z_2) + \frac{(z_1 + z_2)^2}{2!} + \frac{(z_1 + z_2)^3}{3!} + \ldots + \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} + \ldots = e^{z_1 + z_2}.$$

2. $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$.

Вытекает из свойства 1.

3. Воспользовавшись формулами Эйлера и свойством (1) получим:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

4. Функция является аналитической на всей комплексной плоскости (как сумма степенного ряда), при этом:

$$\left(e^z\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

$$\left(e^z\right)' = e^z.$$

5. Функция e^z является периодической. Для любого z справедливо равенство:

$$e^z = e^{z + 2\pi ik}, \ k \text{ - целое, число } 2\pi i \text{ - основной период.}$$

Действительно, в силу свойства (1) и формул Эйлера имеем:

$$e^{z + 2\pi ik} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

Из периодичности следует, что отображение $w = e^z$ не является взаимно однозначным – все точки плоскости XOY, отличающиеся друг от друга слагаемым, кратным $2\pi i$, переходят в одну и ту же точку плоскости UOV.

Возьмем на плоскости XOY горизонтальные полосы вида:
A_n: $(2n-1)\pi < \mathrm{Im}\, z \le (2n+1)\pi$, n - целое.

Так как в каждой из них нет точек, разность мнимых частей которых кратна $2\pi i$, то при отображении $w = e^z$ никакие две точки полосы A_n не переходят в одну и ту же точку плоскости UOV, то есть полоса является областью однолистности для функции e^z.

Покажем, что для любого числа $w_0 \ne 0$, найдется число $z_0 \in A_n$, что $e^{z_0} = w_0$.

Пусть $w_0 = R\, e^{i\varphi}$, $R \ne 0$, $\varphi \in (-\pi;\pi]$. Положим $z_0 = \ln R + (\varphi + 2\pi n)i$. Очевидно, что $z_0 \in A_n$, причем $e^{z_0} = e^{\ln R} \cdot e^{\varphi i} \cdot e^{2n\pi i} = R\, e^{i\varphi} = w_0$.

Итак, $w = e^z$ является при любом n взаимно однозначным отображением полосы A_n на комплексную плоскость, проколотую в точке 0.

Найдем образ прямой $\mathrm{Im}\, z = (2n+1)\pi$, имеющей параметрическое задание: $z = t + (2n+1)\pi i$, $t \in R$;

$$w = e^{t+(2n+1)\pi i} = e^t \cdot e^{2n\pi i} \cdot e^{\pi i} = -e^t,\ t \in R.$$

Так как при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ значение e^t меняется от 0 до $+\infty$, то образом прямой $\mathrm{Im}\, z = (2n+1)\pi$ является отрицательная действительная полуось OU. Значит, для получения взаимно однозначного отображения полосы A_n с присоединенной к ней нижней границей нужно разрезать плоскость UOV вдоль этой полуоси. Тогда одна из границ полосы перейдет в нижний берег разреза, а вторая – в верхний.

Из сказанного вытекает, что риманова поверхность для функции e^z состоит из бесконечного множества листов плоскости UOV, разрезанных вдоль отрицательной действительной полуоси (каждая плоскость соответствует своей полосе A_n). Верхний берег разреза каждого листа склеивается с нижним берегом разреза следующего за ним листа. При этом получается винтообразная поверхность, состоящая из бесконечного в обе стороны множества листов, склеенных указанным образом. Функция e^z задает взаимно однозначное отображение комплексной плоскости на эту риманову поверхность.

Выясним, во что переходит декартова сетка координат (прямые $y=b$, $x=a$) при отображении $w=e^z$.

Прямая $y=b$ имеет параметрическое задание $z=t+bi$, $t\in(-\infty;+\infty)$. Она переходит в линию на плоскости UOV, заданную уравнением

$$w=e^{t+bi}=e^t(\cos b+i\sin b),\ t\in(-\infty;+\infty).$$

Это значит, что $b\in \operatorname{Arg} w$. Так как $0<e^t<+\infty$, то получаем множество точек, имеющих один и тот же аргумент b, причем модуль меняется от 0 до $+\infty$, то есть луч, выходящий из начала координат и наклоненный к действительной оси под углом b.

Прямая $x=a$ имеет параметрическое задание $z=a+ti$, $t\in(-\infty;+\infty)$. Ее образ:

$$w=e^{a+ti}=e^a(\cos t+i\sin t),\ t\in(-\infty;+\infty).$$

Так как $|w|=e^a$, то получаем, что образом прямой $x=a$ служит окружность радиуса e^a с центром в начале координат.

Итак, при отображении $w=e^z$ декартова сетка координат на комплексной плоскости XOY переходит в полярную сетку координат на плоскости UOV.

Пример 1. Найти образ отрезка $y=x$, $-\pi\le x\le\pi$ при отображении $w=e^z$.

Решение. Любая точка отрезка имеет комплексную координату $z=x+ix$, $-\pi\le x\le\pi$.

Поэтому ее образом служит линия, заданная параметрическими уравнениями (по формулам (1)):

$$u = e^x \cos x\,,\ v = e^x \sin x\,.$$

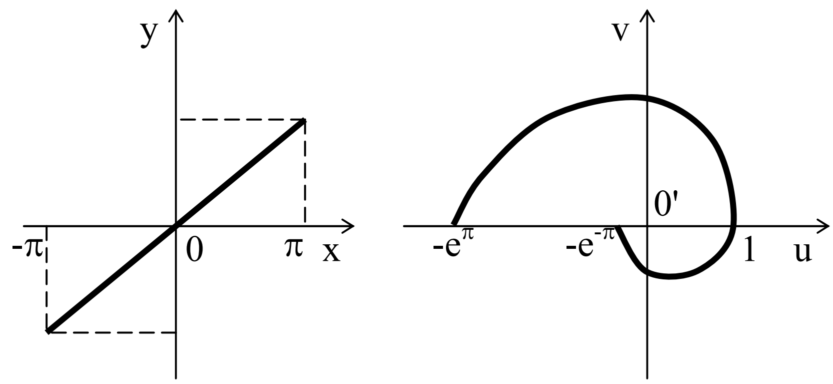

Рис. 9

Это дуга логарифмической спирали (см. рис. 9).

Пример 2. Вычислить значение $w = e^z$, при $z = 3 - \frac{\pi}{4} i$.

Р е ш е н и е. По формулам Эйлера и свойству 1) функции e^z получаем:

$$e^{3-\frac{\pi}{4}i} = e^3 \cdot e^{-\frac{\pi}{4}i} = e^3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{e^3\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

§13. Тригонометрические и гиперболические функции

Функции комплексного переменного $\sin z$ и $\cos z$ могут быть вычислены с помощью следующих формул:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right); \qquad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right). \qquad (1)$$

А гиперболические функции и остальные тригонометрические функции определяют формулы:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}; \qquad \sec z = \frac{1}{\cos z}; \qquad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z};$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right); \qquad \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right).$$

Известные соотношения между тригонометрическими функциями действительного аргумента сохраняются и в комплексной области. В частности,

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2;$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2.$$

Отметим некоторые свойства функций:

1. Отображения, осуществляемые с помощью функций $\sin z$ и $\cos z$, являются конформными на всей плоскости.
2. Положив $z = x + iy$ можно вывести следующие формулы:

$$\cos z = \cos x \cdot \operatorname{ch} y - i \sin x \cdot \operatorname{sh} y;$$

$$\sin z = \sin x \cdot \operatorname{ch} y + i \cos x \cdot \operatorname{sh} y; \qquad (2)$$

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cdot \cos y + i \operatorname{sh} x \cdot \sin y;$$

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cdot \cos y + i \operatorname{ch} x \cdot \sin y,$$

с помощью которых легко вычисляются значения функций в различных точках комплексной плоскости.

Пример 1. Вычислить $\sin(4-3i)$; $\cos(4-3i)$.

Решение. Воспользуемся формулами (1), (2) и получим:

$$\sin(4-3i) = \sin 4 \cdot \operatorname{ch}(-3) + i \cos 4 \cdot \operatorname{sh}(-3) =$$

$$= \sin 4 \cdot \frac{1}{2}\left(e^{-3} + e^{3}\right) + i \cos 4 \cdot \frac{1}{2}\left(e^{-3} - e^{3}\right);$$

$$\cos(4-3i) = \cos 4 \cdot \operatorname{ch}(-3) - i \sin 4 \cdot \operatorname{sh}(-3) =$$

$$= \cos 4 \cdot \frac{1}{2}\left(e^{-3} + e^{3}\right) - i \sin 4 \cdot \frac{1}{2}\left(e^{-3} - e^{3}\right).$$

3. Формулы дифференцирования $\sin z$ и $\cos z$ выводятся путем почленного дифференцирования степенных рядов.

$\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, отсюда

$$(\sin z)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos z.$$

Аналогично $(\cos z)' = -\sin z$.

4. Разложения функций $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ в степенные ряды получаются из формул разложения показательной функции e^z. Они имеют вид:

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Эти ряды сходятся на всей комплексной плоскости, а потому функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ всюду аналитичны.

Можно установить связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями в комплексной области:

$$\sin iz = \frac{e^{i^2 z} - e^{-i^2 z}}{2i} = -\frac{i}{2}\left(e^{-z} - e^z\right) = i \operatorname{sh} z;$$

$$\cos iz = \frac{e^{i^2 z} + e^{-i^2 z}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{-z} + e^z\right) = \operatorname{ch} z.$$

Отсюда имеем:

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z, \qquad \operatorname{sh} iz = i \sin z,$$

$$\cos iz = \operatorname{ch} z, \qquad \operatorname{ch} iz = \cos z. \tag{3}$$

Пример 2. Найти $\sin i$, $\cos i$.

Р е ш е н и е. По формулам (3) имеем:

$$\sin i = i \operatorname{sh} 1, \qquad \cos i = \operatorname{ch} 1.$$

§14. Логарифмы комплексных чисел

Определение 1. Число w называется (натуральным) *логарифмом комплексного числа* z, если $e^w = z$.

Поскольку показательная функция не принимает нулевого значения ни при каком комплексном значении показателя степени, нуль не имеет логарифмов и в комплексной плоскости.

Если же $z \neq 0$, то в каждой полосе вида

$$(2n-1)\pi < \operatorname{Im} z \le (2n+1)\pi$$

найдется одно и только одно число w, такое, что $e^w = z$ (см. §9). При этом в §9 было показано, что число w задается формулой

$$w = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi n).$$

В результате получаем, что любое отличное от нуля комплексное число z имеет бесконечное множество логарифмов.

Это множество обозначают $\mathrm{Ln}\, z$, то есть

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi n),\ n \text{ - целое.} \qquad (1)$$

Здесь $\ln|z|$ - единственный действительный логарифм положительного числа $|z|$. В частности, в комплексной области имеют логарифмы и отрицательные числа.

Пример 1. Найти $\mathrm{Ln}(-1)$.

Решение. Так как $|-1| = 1$, $\arg(-1) = \pi$, то по формуле (1) имеем:

$\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi n) = \pi i(2n+1)$, n - целое.

Таким образом, получили, что все логарифмы числа (-1) - мнимые числа.

Равенство $w = \mathrm{Ln}\, z$ определяет при каждом отличном от нуля значении z бесконечное множество значений w, а потому не задает однозначную функцию комплексного переменного. Чтобы получить однозначную функцию, надо выбрать определенное значение аргумента $\mathrm{Arg}\, z$ при фиксированном n, например, $\arg z$ при $n = 0$. Тогда получим функцию от z, обозначаемую $\ln z$. Она определяется равенством:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \qquad (2)$$

это так называемое главное значение логарифма.

Поскольку функция $\ln z$ является обратной для показательной функции, то по правилу дифференцирования обратной функции получаем:

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}.$$

Эта формула верна всюду, где функция $\ln z$ непрерывна, то есть всюду, кроме отрицательной полуоси.

Пример 2. Вычислить значения $\ln(-1)$, $\ln(2-2i)$.

Р е ш е н и е. Из примера 1 получим, полагая $n=0$, $\ln(-1)=i\pi$.

$$\ln(2-2i)=\ln 2\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}i.$$

Если b - действительное число, $a>0$ и $a\neq 1$. То имеет место равенство

$$a^b=e^{b\ln a}.$$

В комплексном анализе пользуются аналогичной формулой, но она уже будет выполнять роль определения.

Определение 2. $a^b=e^{b\,\mathrm{Ln}\,a}$, где a и b - комплексные числа. (3)

Пример 3. Найти значение 1^i.

Р е ш е н и е. По формуле (3) имеем:

$1^i=e^{i\,\mathrm{Ln}\,1}=e^{i(\ln 1+i(\arg 1+2k\pi))}=e^{-2k\pi}$, k - целое.

Очевидно, что выражение 1^i имеет бесконечно много различных значений. Главное значение равно 1.

Так как $\ln\left(re^{i\varphi}\right)=\ln r+i\varphi$, $-\pi<\varphi\leq\pi$, то при отображении, задаваемом логарифмической функцией $w=\ln z$, комплексная плоскость, разрезанная вдоль отрицательной действительной полуоси, отображается в полосу $-\pi<\mathrm{Im}\,w\leq\pi$.

Пример 4. Найти образ фигуры $1\leq r\leq e$, $-\dfrac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2}$ при отображении $w=\ln z$.

Р е ш е н и е. Так как $\ln\left(re^{i\varphi}\right)=\ln r+i\varphi$, то данная область отображается на прямоугольник, определяемый неравенствами $\ln 1\leq u\leq\ln e$, $-\dfrac{\pi}{4}\leq v\leq\dfrac{\pi}{2}$ (см. рис. 10).

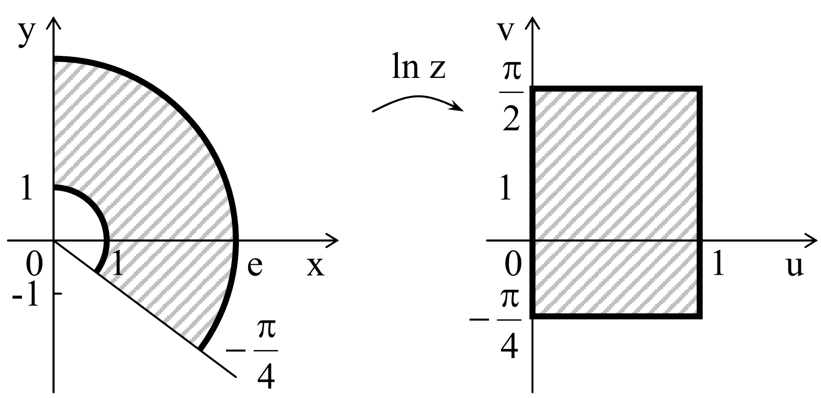

Рис. 10

ГЛАВА III. Интегрирование функций комплексного переменного

§ 1. Интеграл комплекснозначной функции вещественного аргумента по отрезку

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана функция вещественного аргумента, принимающая комплексные значения:

$$w = f(t) = u(t) + iv(t),$$

причем функции $u(t)$ и $v(t)$ непрерывны на этом отрезке. Определим интеграл функции $f(t)$ на этом отрезке $[a;b]$ формулой:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt.$$

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\,dt.$$

Решение. По формуле Эйлера имеем $e^{it} = \cos t + i\sin t$, тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - i\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + i.$$

Очевидно, что при таком определении сохраняются свойства определенных интегралов:

1) $\int_a^b [f(t) \pm g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt \pm \int_a^b g(t)dt$;

2) $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda\int_a^b f(t)dt$, $\lambda - const$;

3) $\int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^c f(t)dt + \int\limits_c^b f(t)dt$, где c - любое число, а интегралы, стоящие в правой части равенства существуют;

4) $\int\limits_a^a f(t)dt = 0$;

5) $\int\limits_a^b f(t)dt = -\int\limits_b^a f(t)dt$;

6) $\left|\int\limits_a^b f(t)dt\right| \le \int\limits_a^b |f(t)|dt$.

Остается верной и формула подстановки:

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(q)]\varphi'(q)dq,$$

если $t = \varphi(q)$, значения q между α и β, $\varphi(q)$ монотонная, дифференцируемая функция и $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

§2. Интегрирование функции комплексного переменного по кривой

Определение 1. Кривая на плоскости называется *гладкой*, если она имеет непрерывно изменяющуюся касательную; и называется *кусочно-гладкой*, если она состоит из конечного числа гладких дуг.

Пусть $w = f(z)$ - непрерывная функция комплексного аргумента z, определенная в некоторой области D комплексной плоскости. Возьмем произвольную гладкую кривую L, лежащую в этой области, с началом в точке $A(z_0)$ и концом в точке $B(z_n)$. Разобьем дугу AB (рис.1) на n частичных дуг с помощью произвольно выбранных точек $A = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = B$, но расположенных последовательно в указанном по-

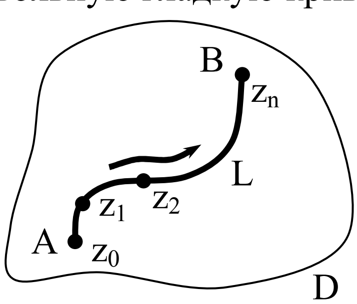

Рис. 1

ложительном направлении вдоль кривой L. Обозначим $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, $k = 0, 2, \ldots, n-1$.

Составим сумму произведений вида

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)\Delta z_k . \qquad (1)$$

Назовем величину $\lambda = \max\{\Delta z_k\}$ рангом разбиения кривой L. Введем обозначения:

$z_k = x_k + iy_k$, $f(z_k) = u(x_k, y_k) + iv(x_k, y_k) = u_k + v_k i$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$.

Подставим в сумму (1) и получим:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)\Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1}(u_k + v_k i)(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) +$$

$$+ i\sum_{k=0}^{n-1}(v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k). \qquad (2)$$

Устремим $\lambda \to 0$. Тогда обе суммы правой части последнего равенства (2) стремятся соответственно к пределам:

$$\int_L udx - vdy \qquad \text{и} \qquad \int_L vdx + udy ,$$

следовательно, левая часть равенства (2) стремится к определенному конечному пределу, когда длины всех частичных дуг по произвольному закону стремятся к нулю. Этот предел и назовем *интегралом от функции* $f(z)$ *по кривой* L и обозначим $\int_L f(z)dz$.

Итак, имеем

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy , \qquad (3)$$

эта формула дает выражение интеграла по комплексному переменному через два действительных криволинейных интеграла II рода.

Что касается фактического вычисления интеграла по комплексному переменному, то, предполагая уравнение кривой L, заданным в виде $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, имеем:

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta (u[z(t)]x'(t) - v[z(t)]y'(t))dt + i\int_\alpha^\beta (v[z(t)]x'(t) + u[z(t)]y'(t))dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt,$$

или

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta R(t)dt + i\int_\alpha^\beta I(t)dt, \qquad (4)$$

где $R(t)$ и $I(t)$ - действительная и мнимая части выражения $f(z(t))z'(t)$. На основании формулы (4) вопрос вычисления интеграла по комплексному переменному приводится к вычислению обыкновенных определенных интегралов.

Отметим простейшие свойства интеграла, вытекающие непосредственно из его определения:

1. Зависимость от направления обхода кривой: $\int\limits_{AB} f(z)dz = -\int\limits_{BA} f(z)dz$;
2. Однородность: $\int\limits_L \lambda f(z)dz = \lambda \int\limits_L f(z)dz, \quad \lambda - const$;
3. Аддитивность по дуге:

Пусть L - кусочно-гладкая кривая, то есть $L = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_k$. Тогда верно

$$\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz + \ldots + \int_{L_k} f(z)dz.$$

4. Аддитивность по функции:

$$\int_L (f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_k(z))dz = \int_L f_1(z)dz + \int_L f_2(z)dz + \ldots + \int_L f_k(z)dz.$$

5. Оценка модуля интеграла:

$$\left|\int_L f(z)\,dz\right| \le M \cdot \ell, \tag{5}$$

где M : $|f(z)| \le M$, $\forall z \in L$; ℓ - длина кривой L .

Из неравенства (5) можно получить более точное неравенство:

$$\left|\int_L f(z)\,dz\right| \le \int_L |f(z)|\,dz.$$

Пример 1. Вычислить $\int_L z^2\,dz$, где L - нижняя половина окружности $\{z: \ |z| = 2\}$ (направление обхода указано на рис.2).

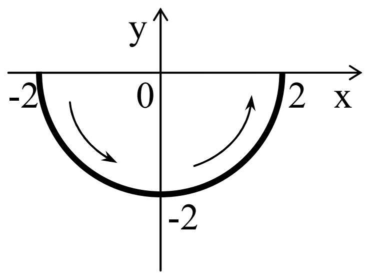

Рис. 2

Решение. Дугу L можно задать уравнением $z = 2e^{it}$, $t \in [\pi, 2\pi]$. Тогда $z' = 2ie^{it}$ и потому имеем:

$$\int_L z^2\,dz = \int_\pi^{2\pi} \left(2e^{it}\right)^2 \cdot 2ie^{it}\,dt = 8i\int_\pi^{2\pi} e^{3ti}\,dt =$$

$$= \int_\pi^{2\pi} (\cos 3t + i\sin 3t)\,dt = \frac{8}{3} i \sin 3t\Big|_\pi^{2\pi} + \frac{8}{3} i^2 (-\cos 3t)\Big|_\pi^{2\pi} = \frac{8}{3} i(\sin 6\pi - \sin 3\pi) +$$

$$+ \frac{8}{3}(\cos 6\pi - \cos 3\pi) = 0 + \frac{8}{3}(1 - (-1)) = \frac{16}{3}.$$

Пример 2. Вычислить $\int_L \frac{dz}{z-a}$, где L - окружность с центром в точке a, радиуса R, пробегаемая против часовой стрелки.

Решение. Окружность L можно задать уравнением: $z = a + R\,e^{it}$, где $t \in [0, 2\pi]$. Тогда $z' = iR\,e^{it}$, и потому:

$$\int_L \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{iR\,e^{it}}{R\,e^{it}}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi\, i.$$

Аналогично можно показать, что $\int\limits_L (z-a)^n dz$, $n \neq -1$, всегда равен 0. Итак, получили:

$$\int\limits_L (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=-1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}. \qquad (6).$$

§3. Теорема Коши для односвязной области и ее обобщение на многосвязную область

Пусть $f(z)$ - аналитическая в односвязной области D функция.

Теорема (Коши). Интеграл от аналитической функции $f(z)$ в односвязной области по любому замкнутому контуру, лежащему внутри этой области, равен 0, то есть

$$\int\limits_{L^+} f(z)dz = 0. \qquad (1)$$

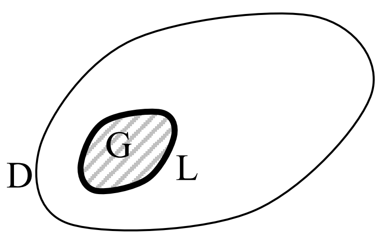

Рис. 3

Доказательство. Обозначим через G область, границей которой является замкнутый контур L, целиком лежащий в односвязной области D. По формуле (3) §2 данной главы имеем:

$$\int\limits_{L^+} f(z)dz = \int\limits_{L^+} udx - vdy + i\int\limits_{L^+} vdx + udy .$$

К каждому из криволинейных интегралов, стоящих в правой части этого равенства, применим формулу Грина, тогда получим:

$$\int\limits_{L^+} f(z)dz = \iint\limits_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint\limits_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy .$$

Так как $f(z)$ является аналитической в области D, то для ее мнимой и вещественной частей выполнены условия Коши-Римана, тот есть

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

значит, двойные интегралы равны 0, а, соответственно, $\int\limits_{L^+} f(z)\,dz = 0$. Теорема доказана.

Замечание. Роль контура L может исполнять и граница самой области D, если $f(z)$ непрерывна на L,

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_L \frac{dz}{z^2-1}$ по окружности

$$L: \quad |z-2i| = 1.$$

Решение. Функция $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ является аналитической во всех

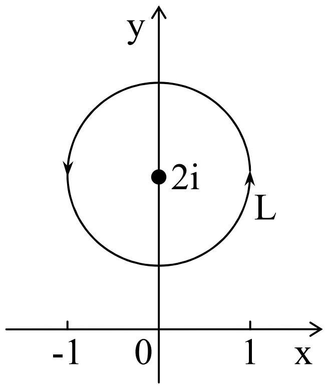

Рис. 4

точках комплексной плоскости, кроме точек $z_1 = 1$, $z_2 = -1$. Так как эти точки лежат вне окружности L, то подынтегральная функция $f(z)$ является аналитической в области, ограниченной контуром L, а в силу теоремы Коши, интеграл от нее по контуру L равен 0.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_L \bar{z}\,dz$, где L - окружность с центром в 0, радиуса 2.

Решение. Контур L имеет уравнение $z = 2e^{it}$, $t \in [0; 2\pi]$. Поэтому $\bar{z} = 2e^{-it}$, $z' = 2ie^{it}$ и получим:

$$\int\limits_L \bar{z}\,dz = \int\limits_0^{2\pi} 2e^{-it} \cdot 2ie^{it} dt = 4i \int\limits_0^{2\pi} dt = 8\pi i.$$

Интеграл отличен от 0. Это не противоречит теореме Коши, так как $f(z) = \bar{z}$ не является аналитической функцией.

Следствие. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области D и L_1 и L_2 - кривые, лежащие в этой области и имеющие общие концы (рис. 5). Тогда интегралы по этим кривым равны:

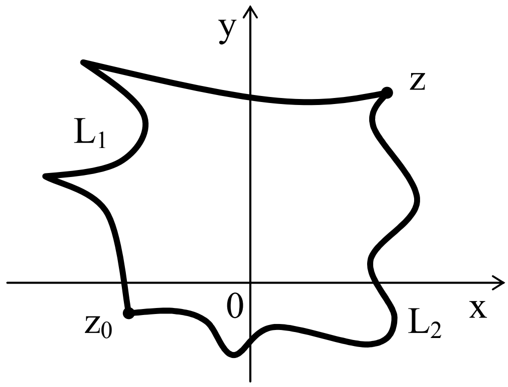

Рис. 5

$$\int\limits_{L_1^+} f(z)dz = \int\limits_{L_2^+} f(z)dz .$$

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы Коши.

Теорема. Пусть D - многосвязная область, граница L которой состоит из внешнего контура L_0 и внутренних контуров ℓ_1, ℓ_2, …, ℓ_n (см. рис. 6). Справедлива формула:

$$\int\limits_{L_0^+} f(z)dz = \int\limits_{\ell_n^+} f(z)dz + \ldots + \int\limits_{\ell_n^+} f(z)dz . \qquad (2)$$

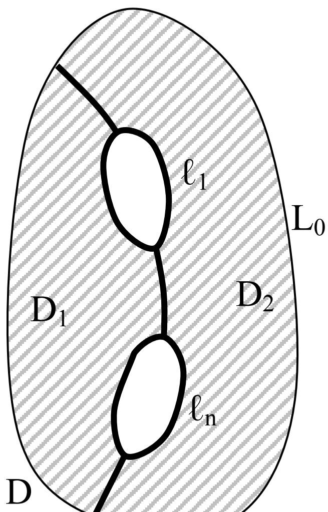

Рис. 6

В этом заключается обобщение теоремы Коши на случай многосвязной области.

Доказательство. Соединим все контуры L_0, ℓ_1, …, ℓ_n гладкими непересекающимися кривыми m_1, m_2, …, m_{n+1}. Тогда область D разобьется на две области D_1 и D_2, являющиеся односвязными и для них справедлива теорема Коши для функции $f(z)$:

$$\int\limits_{гр.\,D_1^+} f(z)dz + \int\limits_{гр.\,D_2^+} f(z)dz = 0 .$$

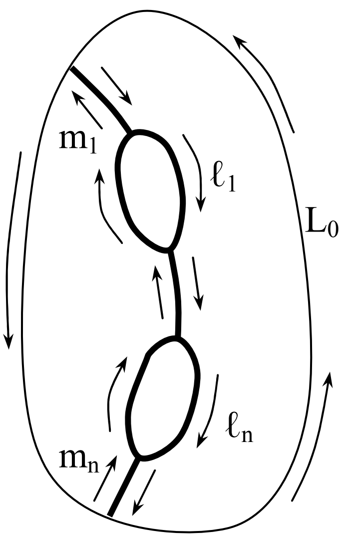

Рис. 7

Выберем направление обхода внешней границы L_0, а затем с сохранением направления укажем обход границы областей D_1 и D_2. Заметим, что гладкие пути m_1, m_2, …, m_{n+1} будут обходится дважды в противоположных направлениях и интегралы по ним будут отличаться знаком (см. рис.7). Воспользуемся свойством аддитивности интегралов по дуге и получим из равенства (3):

$$\int\limits_{L_0^+} f(z)dz + \int\limits_{\ell_1^+} f(z)dz + \int\limits_{\ell_2^+} f(z)dz + \ldots + \int\limits_{\ell_n^+} f(z)dz = 0$$

или

$$\int\limits_{L_0^+} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\ell_k^+} f(z)dz \, .$$

Следствие. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в области D и L, ℓ - лежащие в этой области контуры, ограничивающие кольцеобразную область D (см. рис. 8). Тогда интегралы по контурам L и ℓ равны:

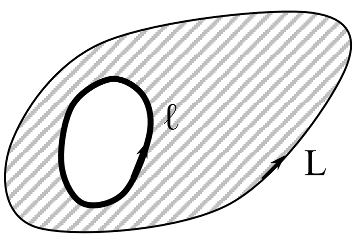

Рис. 8

$$\int\limits_{L^+} f(z)dz = \int\limits_{\ell^+} f(z)dz \tag{4}$$

Пример 3. В примере 2 §2 данной главы доказано, что для контура L, заданного уравнением $|z-a| = R$, выполняется равенство

$$\int\limits_{L} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \, .$$

Из следствия вытекает, что это равенство верно для любого контура, один раз охватывающего точку a, например, и для такого, как на рисунке 9.

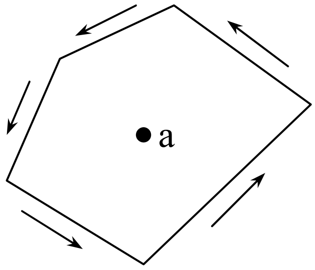

Рис. 9

§4. Первообразная функция

Пусть функция $f(z)$ задана в области D.

Определение 1. Функцию $F(z)$, заданную в области D, *назовем первообразной* для функции $f(z)$, если для всех $z \in D$ выполняется равенство

$$F'(z) = f(z).$$

Из теоремы Коши вытекает следующая важная теорема.

Теорема. Пусть функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема в односвязной области D. Тогда в этой области существует первообразная $F(z)$ для функции $f(z)$.

Доказательство. Функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема, а значит аналитическая в области D. Тогда интеграл от $f(z)$ не зависит от пути интегрирования, а зависит от начальной и конечной точек пути. Зафиксируем точку z_0, выбранную произвольным образом в области D и рассмотрим функцию

$$F(z) = \int_L f(z)dz = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta, \tag{1}$$

где ζ - промежуточный аргумент, L - любая кривая, соединяющая точку z_0 с точкой z, и лежащая в области D. В силу следствия из теоремы Коши функция $F(z)$ однозначно определена.

Покажем, что функция $F(z)$, определенная формулой (1) и есть первообразная для функции $f(z)$.

Возьмем приращение Δz достаточно малым, чтобы $z + \Delta z \in D$. Так как интеграл не зависит от пути, то соединим точки z и $z + \Delta z$ отрезком прямой.

Найдем приращение функции $F(z)$, соответствующее Δz:

$$\Delta F = F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta .$$

Оценим величину:

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta-f(z)\right|,$$

для чего запишем $f(z)$ в виде:

$$f(z)=\frac{1}{\Delta z}\cdot\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta \text{, так как } \int_{z}^{z+\Delta z} d\zeta=\Delta z,$$

тогда получим по свойству (5) оценки модуля интеграла (см. §2 данной главы):

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}(f(\zeta)-f(z))d\zeta\right|\leq\frac{1}{|\Delta z|}\cdot\max_{\zeta\in L}|f(\zeta)-f(z)|\cdot|\Delta z|.$$

По условию теоремы функция $f(z)$ непрерывна, это означает, что при $\Delta z\to 0$ $f(\zeta)\to f(z)$, то есть величина $\max\limits_{\zeta\in L}|f(\zeta)-f(z)|\to 0$. А это и означает, что $F'(z)=f(z)$.

Отсюда следует и еще один факт, что существует неопределенный интеграл от комплексной функции, как совокупность всех первообразных и обозначаемый $\int f(z)dz = F(z)+C$, где C - любая константа.

Пример 1. Какие из функций имеют первообразные:

а) z^4+2i; б) $\cos 7z$; в) $|z|$.

Р е ш е н и е. а) Функция z^4+2i непрерывно дифференцируема и потому имеет первообразную $\frac{z^5}{5}+2iz$;

б) Аналогично для функции $\cos 7z$ – первообразной будет функция – $\left(-\frac{\sin 7z}{7}\right)$.

в) Функция $|z|$ не удовлетворяет условиям Коши-Римана (покажите) и потому не является дифференцируемой. Она не имеет первообразной.

Для аналитической функции комплексного переменного справедлив аналог формулы Ньютона-Лейбница, которая позволяет вычислить комплексный интеграл от непрерывно дифференцируемой функции в односвязной области, если известна ее первообразная:

$$\int_{z_0}^{z} f(t)dt = F(z) - F(z_0).$$

Пример 2. Вычислить $\int_{\frac{\pi}{2}}^{i} \sin z\, dz$.

Р е ш е н и е. $f(z) = \sin z$. Первообразная этой функции $(-\cos z)$, тогда, применяя формулу Ньютона-Лейбница, получим:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{i} \sin z\, dz = (-\cos z)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{i} = -\cos i + \cos\frac{\pi}{2} = -\frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} + 0 = \frac{e + e^{-1}}{2}.$$

§5. Формула Коши

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области D с границей L. Это значит, что функция $f(z)$ имеет определенную конечную производную в каждой точке области D. Формула Коши, которая будет доказана, позволяет выразить значения функции $f(z)$ во всякой внутренней точке области D через значения этой функции на контуре L. Отсюда вытекает, что значения аналитической функции тесно связаны между собой, так как ее значения вдоль замкнутого контура L вполне определяют ее значения внутри L. Эта формула имеет вид:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \qquad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \qquad (2)$$

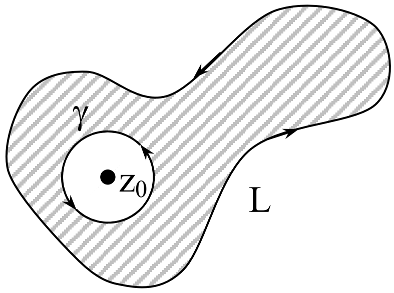

Рис. 10

Эта функция является аналитической во всех точках области D, кроме точки $z = z_0$. Опишем около точки z_0, как центра, окружность γ произвольно малого радиуса ρ, целиком лежащую в области D (рис. 10). Функция $\varphi(z)$ будет аналитической во всех точках, лежащих между контурами L и γ, включая и сами контуры. Следовательно, на основании теоремы Коши (см. §3) имеем:

$$\int_{L^+} \varphi(z)\,dz = \int_{\gamma^+} \varphi(z)\,dz. \tag{3}$$

Это равенство показывает, что значение $\int_{\gamma^+} \varphi(z)\,dz$ не зависит от радиуса ρ вспомогательной окружности γ, будучи постоянным числом, равным значению $\int_{L^+} \varphi(z)\,dz$. Чтобы определить это постоянное значение, заметим, что функция $\varphi(z)$ стремится к определенному конечному пределу, когда точка z стремится к точке z_0.

Действительно, из равенства (2) следует:

$$\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \lim_{\zeta \to 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Следовательно, если принять $f'(z_0)$ за значение функции $\varphi(z)$ в точке $z = z_0$, то $\varphi(z)$ становится непрерывной функцией всюду в замкнутой области $\overline{D}$. Значит, $\varphi(z)$ ограничена, то есть $|\varphi(z)| < M$, где M - некоторая постоянная величина, какова бы ни была точка z области D. Оценим последний интеграл из равенства (3):

$$\left| \int_{\gamma^+} \varphi(z)\,dz \right| < M \cdot 2\pi\,\rho,$$

отсюда следует, что $\int\limits_{\gamma^+} \varphi(z)\,dz = 0$, так как ρ можно принять сколь угодно малым, а значение интеграла есть постоянное число.

Иначе из равенства (3) получим:

$$\int\limits_{L^+} \varphi(z)\,dz = 0.$$

Заменяя $\varphi(z)$ по формуле (2) имеем:

$$\int\limits_{L^+} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz = 0$$

или

$$\int\limits_{L^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - f(z_0) \int\limits_{L^+} \frac{dz}{z - z_0} = 0. \qquad (4)$$

Так как в силу примера 2 §2 данной главы $\int\limits_{L^+} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$, то формула (4) примет вид:

$$\int\limits_{L^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0) \cdot 2\pi i,$$

или

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{L^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz,$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_{L^+} \frac{\cos z}{z}\,dz$, где L - окружность:

а) $|z| = 1$; б) $|z - 2| = 1$.

Решение. Запишем формулу Коши (1) так, чтобы выражен был сам интеграл:

$$\int_{L^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0) \tag{5}$$

а) $f(z) = \cos z$, $z_0 = 0$. Контур $|z| = 1$ охватывает точку 0, поэтому

$$\int_{L^+} \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i \cdot \cos 0 = 2\pi i.$$

б) Контур $|z - 2| = 1$ точку 0 не охватывает, следовательно, функция $\frac{\cos z}{z}$ является аналитической в области с границей L, тогда в силу теоремы Коши интеграл от нее равен 0.

$$\int_{L^+} \frac{\cos z}{z} dz = 0.$$

Заметим, что интеграл $\int \frac{\cos x}{x} dx$, где x - действительная переменная, является неберущимся.

Для действительной функции действительного переменного из существования конечной производной не следует непрерывность этой производной. В случае же функции комплексного переменного имеет место следующее важное утверждение.

Утверждение. Если однозначная функция $f(z)$ комплексного переменного имеет всюду в области D первую производную, то она имеет в этой области и производные всех высших порядков.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть z_0 - произвольная точка области D и L - кусочно-гладкий замкнутый контур, окружающий точку z_0, лежащий со всеми своими внутренними точками в области D. Применяя формулу Коши, имеем:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

С другой стороны, формальное дифференцирование по параметру z_0 в интеграле типа Коши (1) показывает, что существует производная любого порядка:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^+} f(z)\left(\frac{1}{z-z_0}\right)'_{z_0} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz\,,$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\int_{L^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz\,,\ f'''(z_0) = \frac{3!}{2\pi i}\int_{L^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^4}\,dz \text{ и т.д.}$$

Здесь мы опускаем обоснование возможности дифференцирования по параметру z_0 под знаком интеграла.

Итак, получили

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{L^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\,,\ n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

или

$$\int_{L^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}\cdot f^{(n)}(z_0). \tag{7}$$

Замечание. В параграфе «Степенные ряды» этот факт был уже установлен. Формулы (6) и (7) играют важную роль в приложениях.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_{L^+} \frac{z-2\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}\,dz$ по контуру $L:\ \ |z-1| = 2$.

Решение. В данном случае $z_0 = \frac{\pi}{2}$, и контур $|z-1| = 2$ охватывает точку $\frac{\pi}{2}$, поэтому применим формулу (7) и получим:

$$\int_{L^+} \frac{z-2\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}(z-2\sin z)''\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi i}{2}\cdot 2 = 2\pi i\,.$$

Итальянский математик Морера доказал, что верно утверждение, обратное теореме Коши.

Теорема. Если функция $f(z)$, непрерывная в односвязной области D, удовлетворяет равенству $\int\limits_{L^+} f(z)\,dz = 0$ для всякого кусочно-гладкого замкнутого контура L, лежащего в этой области, то $f(z)$ является аналитической в области D.

Доказательство. Действительно, мы видим (§4 данной главы), что при условиях этой теоремы интеграл $\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ не зависит от пути, соединяющего точки z_0 и z в области D, и определяет функцию $F(z)$, аналитическую в области D, причем $F'(z)=f(z)$. Так как функция $F'(z)$ как производная функции, аналитической в области D, есть функция, аналитическая в этой области D, то $f(z)=F'(z)$ есть функция, аналитическая в области D. Теорема доказана.

ГЛАВА IV. Ряды Тейлора и Лорана. Вычеты и их применение

§1. Ряд Тейлора

В §5 главы II было показано, что сумма степенного ряда является аналитической функцией внутри круга сходимости. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема. Функция $f(z)$, аналитическая внутри круга $|z-z_0|<R$, является в этом круге суммой степенного ряда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть D - круг: $|z-z_0|<R$. Рассмотрим произвольную точку $z\in D$. Проведем окружность C_ρ с центром z_0 и радиусом ρ, причем ρ выберем так, чтобы выполнялось условие $|z-z_0|<\rho<R$ (см. рис.1).

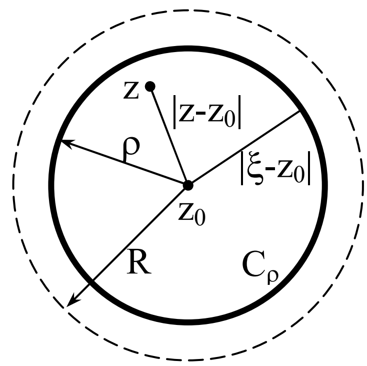

Рис. 1

Ясно, что $C_\rho\subset D$. Значение функции в точке z вычисляется по формуле Коши (см. гл. 2, §5).

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho^+}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi . \tag{1}$$

Преобразуем дробь $\dfrac{1}{\xi-z}$ следующим образом

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}}.$$

Поскольку $\left|\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|<1$ для $\xi\in C_\rho$ (см. рис.1), выражение $\dfrac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}}$ можно рассматривать как сумму ряда геометрической прогрессии со знаменателем по модулю меньшим единицы. Тогда

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n ,$$

причем написанный ряд равномерно сходится на C_ρ, так как мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^n}{\rho^{n+1}}$. Подставляя представление для дроби $\frac{1}{\xi - z}$ в формулу (1), получим:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho^+} \left[\frac{f(\xi)}{\xi - z_0} + \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2}(z - z_0) + \ldots + \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}(z - z_0)^n + \ldots \right] d\xi .$$

Очевидно, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}(z - z_0)^n$, также сходится равномерно по ξ, а, следовательно, его можно почленно проинтегрировать вдоль C_ρ (см). Тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi \cdot (z - z_0) + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \cdot (z - z_0)^n .$$

Мы получим:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n , \qquad (2)$$

где $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$ (3)

Значит, $f(z)$ представима в виде степенного ряда.

***Замечание* 1.** В силу теоремы Коши, в формуле (3) окружность C_ρ можно заменить любым замкнутым контуром C, лежащим в D и содержащим точку z_0 внутри.

***Замечание* 2.** Можно доказать, что степенной ряд, представляющий аналитическую в некотором круге функцию, определен однозначно.

Получим еще одно выражение для коэффициентов c_n. Положим $z = z_0$ в формуле (2), получим $f(z_0) = c_0$.

Продифференцируем ряд (2) почленно:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n(z - z_0)^{n-1}$$

и в полученном равенстве положим $z = z_0$, тогда $f'(z_0) = c_1$.

Аналогично, положив $z = z_0$ в выражении для производной k-го порядка. Имеем:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \cdot n(n-1)\ldots(n-k+1)(z - z_0)^{n-k},$$

получим $f^{(k)}(z_0) = c_k \cdot k!$. Откуда

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \tag{4}$$

Тогда ряд (2) примет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n. \tag{5}$$

Ряд (5) называется *рядом Тейлора*.

Сравнивая выражения (3) и (4) для коэффициентов c_n, имеем

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Отсюда получаем интегральное представление для производных любого порядка аналитической функции.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{C^+} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \tag{6}$$

где C - любой замкнутый контур, лежащий в области аналитичности и содержащий внутри точку z_0 (формула (6) была ранее получена в гл. II §5).

Пример 1. Разложить функцию $f(z)=\ln z$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=1$.

Решение. Функция $f(z)=\ln z=\int\limits_1^z \frac{d\xi}{\xi}$ была рассмотрена в §10 главы 2. Ее производные:

$$f'(z)=\frac{1}{z};\; f''(z)=-\frac{1}{z^2};\; f'''(z)=\frac{2}{z^3};\; \ldots;\; f^{(n)}(z)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{z^n}.$$

Вычислим коэффициенты c_n по формуле (4):

$$c_n=\frac{1}{n!}(-1)^{n-1}\left.\frac{(n-1)!}{z^n}\right|_{z=1}=\frac{(-1)^{n-1}}{n},\; n=1,2,\ldots,\; c_0=\ln 1=0.$$

Тогда

$$\ln z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n. \tag{7}$$

С помощью признака Д'Аламбера, применяемого к ряду, составленному из модулей членов ряда (7), легко убедиться, что кругом сходимости ряда (7) является круг $|z-1|<1$.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{C^+}\frac{e^z\,dz}{(z-i)^4}$,

где C - окружность $|z-1|=2$.

Решение. Так как точка $z_0=i$ лежит внутри окружности $|z-1|=2$, а функция $f(z)=e^z$ - аналитическая на всей комплексной плоскости, то для вычисления интеграла удобно применить формулу (6), считая в ней: $n=3$, $z_0=i$. Имеем

$$\int\limits_{C^+} \frac{e^z dz}{(z-i)^4} = \frac{2\pi i}{3!}\left(e^z\right)^{(3)}\Big|_{z=i} = \frac{2\pi i}{6} e^i = \frac{\pi i}{3}(\cos 1 + i \sin 1) = \frac{\pi}{3}(-\sin 1 + i \cos 1)$$

.

Обратимся к формулам (3) для коэффициентов степенного ряда:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Обозначим

$$M(z_0; \rho) = \max_{z \in C_\rho} |f(z)|.$$

Число $M(z_0;\rho)$ существует, поскольку по теореме Вейерштрасса, непрерывная функция двух вещественных аргументов

$$|f(z)| = \sqrt{u^2(x;y) + v^2(x;y)}$$

на замкнутом ограниченном множестве C_ρ достигает своего наибольшего значения.

Поскольку, на C_ρ выполняется равенство $|\xi - z_0| = \rho$, то получаем оценку

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right| \le \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M(z_0;\rho)}{\rho^{n+1}} \int\limits_{C_\rho^+} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{M(z_0;\rho)}{\rho^{n+1}} 2\pi \rho = \frac{M(z_0;\rho)}{\rho^n}.$$

Таким образом, мы доказали неравенства

$$|c_n| \le \frac{M(z_0;\rho)}{\rho^n}, \; n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (8)$$

которые называются *неравенствами Коши для коэффициентов степенного ряда*.

Теорема Лиувилля. Если функция $f(z)$ является аналитической на всей комплексной плоскости, а ее модуль равномерно ограничен, то она тождественно равна постоянной.

Доказательство. В условиях теоремы:

$M(z_0;\rho)=M$, для любых z_0 и ρ, причем ρ может быть сколь угодно большим. Пользуясь неравенствами Коши, имеем

$$|c_n| \le \frac{M}{\rho^n}, \quad n=0,1,2,\ldots.$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при $\rho \to \infty$, получим $c_n=0$ для $n \ge 1$. Следовательно

$$f(z) \equiv c_0.$$

Определение. Функция $f(z)$ называется *целой*, если она является аналитической на всей комплексной плоскости C .

§2. Нули аналитической функции

Определение 1. Точка z_0, в которой $f(z_0)=0$, называется *нулем* функции $f(z)$.

Пусть $f(z)$ - аналитическая в области D функция, а ее нуль – точка $z_0 \in D$. Тогда в окрестности точки z_0 функция $f(z)$ представима степенным рядом (см. §1).

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n .$$

Поскольку $f(z_0)=0$, то $c_0=0$. Если не только коэффициент c_0, но и коэффициенты c_1, c_2, …, c_{k-1} равны нулю, а коэффициент c_k отличен от нуля, то точка z_0 называется *нулем порядка* k . В этом случае $f(z)$ представима в виде

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_k (z-z_0)^k + c_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \ldots =$$

$= (z - z_0)^k \left[c_k + c_{k+1}(z - z_0) + \ldots\right]$.

Функция $\varphi(z) = c_k + c_{k+1}(z - z_0) + \ldots$ является аналитической в окрестности точки z_0, причем $\varphi(z_0) \neq 0$.

Тогда $f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z)$.

В силу непрерывности функции $\varphi(z)$ существует окрестность точки z_0, в которой $\varphi(z) \neq 0$. Следовательно, в этой окрестности функция $f(z)$ обратится в нуль только в точке z_0. Это свойство называется свойством *изолированности нулей аналитической функции*. На основании этого свойства можно доказать теорему [1].

Теорема 1. Если функция $f(z)$ - аналитическая в области D и ее нули образуют последовательность $\{z_n\}$, сходящуюся к z_0, причем $z_0, z_n \in D$, $n = 1, 2, \ldots$, то функция $f(z)$ тождественно равна нулю в D.

Из теоремы 1 вытекает весьма важная в теории функций комплексного переменного теорема, так называемая *теорема единственности*:

Теорема 2. Пусть функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ являются аналитическими в области D. Если в D существует сходящаяся к некоторой точке $z_0 \in D$ последовательность $\{z_n\}$, причем $f(z_n) = \varphi(z_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, то $f(z) \equiv \varphi(z)$ в D.

Для доказательства теоремы 2 достаточно установить, что функция

$$f(z) - \varphi(z) \equiv 0 \text{ в } D.$$

***Следствие* 1.** Если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$, аналитические в области D, совпадают на некоторой кривой ℓ, принадлежащей данной области , то $f(z) \equiv \varphi(z)$ в D.

***Следствие* 2.** Если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, аналитические в областях D_1 и D_2 соответственно, причем $D_1 \cap D_2 = D$, а $f_1(z) = f_2(z)$ в D, то существует единственная аналитическая функция $F(z)$ такая, что

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \\ f_2(z), & z \in D_2 \end{cases}.$$

§3. Ряд Лорана

Рассмотрим круговое кольцо K, ограниченное двумя окружностями с общим центром z_0. $K: R_1 < |z - z_0| < R_2$, $R_1 < R_2$ (см. рис. 1).

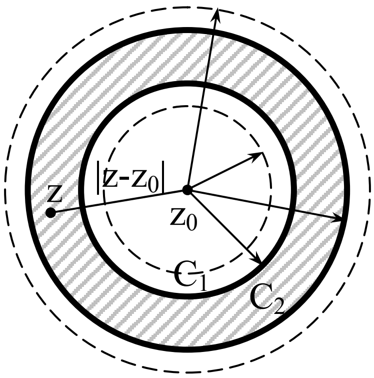

Рис. 1

Пусть функция $f(z)$ - аналитическая в кольце K. Покажем, что в этом случае функция $f(z)$ есть сумма особого ряда (по положительным и отрицательным степеням $z - z_0$), называемого *рядом Лорана*.

Рассмотрим произвольную точку $z \in K$. Построим окружности C_1 и C_2 с центром в точке z_0 и радиусами r_1 и r_2, удовлетворяющими условию $R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$ (см. рис. 1) (окружности C_1 и C_2 лежат в кольце K, а точка z находится внутри кольца, образованного этими окружностями).

Функция $f(z)$ будет аналитической в кольце между C_1 и C_2, включая сами окружности. Применяя формулу Коши для двусвязной области, получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \qquad (1)$$

Преобразуем каждое слагаемое формулы (1).

1) В первом интеграле формулы (1) ξ обозначает точку окружности C_2, следовательно выполняется неравенство

$$\left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{r_2} < 1.$$

Тогда

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}},$$

причем полученный ряд сходится (в силу признака Вейерштрасса) равномерно для всех точек $\xi \in C_2$. Отсюда получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}(z - z_0)^n\,d\xi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2^+}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi\cdot(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z - z_0)^n\,, \tag{2}$$

где $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_2^+}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi\,.$ (3)

2) Во втором интеграле формулы (1) $\xi \in C_1$, следовательно выполняется неравенство

$$\left|\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{r_1}{|z - z_0|} < 1\,.$$

Тогда

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{-1}{(z - z_0)\left(1 - \dfrac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)} = \frac{-1}{z - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}\,,$$

а полученный ряд равномерно сходится на C_1. Тогда

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}f(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}\,d\xi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1^+}\frac{f(\xi)(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}\,d\xi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}\,, \tag{4}$$

где $c_{-n} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1^+}f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1}\,d\xi\,.$ (5)

Подставляя выражения (2) и (4) в формулу (1), получаем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z - z_0)^{-n}\,, \tag{6}$$

где c_n и c_{-n} определяются формулами (3) и (5) соответственно.

Подынтегральные функции в формулах (3) и (5) являются аналитическими всюду в K, поэтому, согласно теореме Коши, интегралы не изменятся, если вместо C_1 и C_2 взять любую окружность в K с центром в точке z_0 (или любой замкнутый контур в K, охватывающий точку z_0!).

Тогда формулы (3) и (5) можно объединить:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{7}$$

Отсюда получаем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (z - z_0)^n . \tag{8}$$

Так как z - произвольная точка кольца K, то ряд (8) сходится к функции $f(z)$ всюду в K. Этот ряд называется *рядом Лорана.*

Часть ряда Лорана, содержащая неотрицательные степени $(z - z_0)$, то есть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n ,$$

называется его *правильной частью*, а та часть, которая содержит отрицательные степени $(z - z_0)$, то есть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

– *главной частью*.

Сходимость ряда Лорана – это одновременная сходимость его правильной и главной частей.

Рассмотрим теперь произвольный ряд Лорана:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

и выясним, какова его область сходимости.

Правильная часть – степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ - будет, очевидно, абсолютно сходиться в круге $|z - z_0| < R_2$, R_2 - радиус сходимости (а в концентрическом круге меньшего радиуса сходимость будет равномерной).

Главную часть, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$, можно так же рассматривать как обыкновенный степенной ряд, если положить

$$\frac{1}{z - z_0} = z'.$$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z'^n$.

Если радиус сходимости последнего (степенного) ряда обозначить $\frac{1}{R_1}$, то его круг сходимости: $|z'| < \frac{1}{R_1}$, откуда $\left| \frac{1}{z - z_0} \right| < \frac{1}{R_1}$, или $|z - z_0| > R_1$. Это и будет область сходимости главной части.

– Если $R_1 < R_2$, то область сходимости ряда Лорана – кольцо $R_1 < |z - z_0| < R_2$, причем внутри кольца сходимость равномерная.
– Если $R_1 = R_2$, то ряд Лорана может сходиться лишь в точках окружности.
– Если $R_1 > R_2$, то ряд Лорана всюду расходится.

***Замечание* 1.** Подобно разложению Тейлора, разложение в ряд Лорана для данной функции $f(z)$ в данном кольце единственно.

***Замечание* 2.** Как и для ряда Тейлора имеют место аналогичные оценки коэффициентов ряда Лорана:

$$|c_n| \le \frac{M(z_0; \rho)}{\rho^n}, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

где $M(z_0 ;. \rho) = \max\limits_{\xi \in C} |f(\xi)|$.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}.$$

Получая корни знаменателя, представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

В точках $z = 1$ и $z = 2$ функция $f(z)$ не определена.

Пусть требуется разложить данную функцию в ряд Лорана по степеням z (то есть в окрестности точки $z_0 = 0$) в областях:

1) $|z| < 1$;

2) $1 < |z| < 2$;

3) $|z| > 2$ (см. рис. 2).

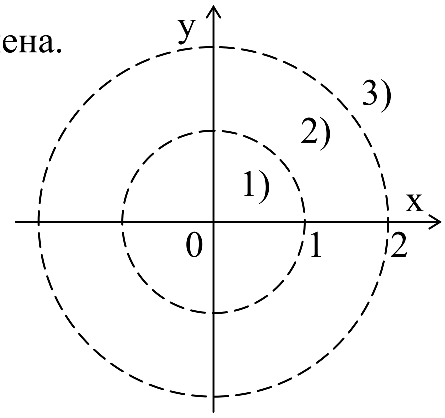

Рис. 2

Заметим, что каждую из этих областей можно считать кольцом, а $f(z)$ - аналитическая в каждой области.

Р е ш е н и е. 1) $|z| < 1$ - кольцо с $R_1 = 0$ и $R_2 = 1$.

Будем преобразовывать каждую дробь в представлении функции $f(z)$ так, чтобы привести ее к виду суммы бесконечно убывающей по модулю геометрической прогрессии. Имеем

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{z}{2}}.$$

Так как $|z| < 1$ и, очевидно, $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, то обе дроби можно разложить в ряд. Тогда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

В полученном для $f(z)$ ряде Лорана содержится лишь правильная часть, следовательно, этот ряд совпадает с рядом Тейлора для $f(z)$.

2) $1<|z|<2$ - кольцо с $R_1=1$ и $R_2=2$.

Тогда выполняются неравенства $\left|\frac{z}{2}\right|<1$ и $\frac{1}{|z|}<1$. Имеем:

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}.$$

Дроби $\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ и $\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ являются суммами сходящихся рядов бесконечно убывающих (по модулю) прогрессий. Тогда

$$f(z)=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Получим «полноценный» ряд Лорана, содержащий и правильную и главную части.

3) $|z|>2$ - кольцо с $R_1=2$ и $R_2=\infty$. Имеем $\frac{2}{|z|}<1$. Следовательно,

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}.$$

Заметим, что верно неравенство $\frac{1}{|z|}<1$, так как $\frac{1}{|z|}<\frac{2}{|z|}<1$.

Получаем

$$f(z)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2^n-1\right)}{z^{n+1}}.$$

Данное разложение содержит лишь главную часть ряда Лорана.

Замечание. Можно раскладывать данную функцию $f(z)$ в ряд Лорана и в окрестности других точек.

§4. Изолированные особые точки аналитической функции

Мы называли функцию $f(z)$ аналитической в точке z_0, если она аналитическая в некоторой окрестности z_0, то есть внутри круга с центром в точке z_0. Такая точка z_0 называется *правильной* точкой, а всякая неправильная точка называется *особой*.

Например, для функции

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2},$$

точки $z_1=i$ и $z_2=-i$ являются особыми, а все точки $z:\quad z^2\neq -1$ – правильными.

Так как степенной ряд внутри круга сходимости представляет собой аналитическую функцию, то все точки внутри круга сходимости являются правильными для функции $f(z)$, представимой этим рядом. Что же касается границы круга сходимости, то справедлива теорема:

Теорема 1. На границе круга сходимости степенного ряда лежит хотя бы одна особая точка аналитической функции $f(z)$, к которой сходится данный ряд.

С доказательством этой теоремы можно ознакомиться в работе [1].

Таким образом, если точка z_0 - правильная точка функции $f(z)$, то эта функция раскладывается в степенной ряд по степеням $(z-z_0)$, причем окружность круга сходимости имеет центр в точке z_0 и проходит через ближайшую к z_0 особую точку. Основываясь на этом выборе, можно легко получать круг сходимости степенного ряда, представляющего функцию $f(z)$.

Пример 1. Пусть дана функция

$$f(z)=\frac{\sqrt{1+z^2}-2}{z}.$$

Так как ее производная имеет вид

$$f'(z)=\frac{2\sqrt{1+z^2}-1}{z^2\sqrt{1+z^2}},$$

то особыми точками этой функции являются точки

$$z_1 = 0,\ z_2 = i,\ z_3 = -i.$$

Пусть требуется разложить данную функцию в ряд Тейлора по степеням $(z-1-i)$, то есть $z_0 = 1+i$. В этом случае кругом сходимости будет круг, состоящий из правильных точек функции, а на границе этого круга будет находиться ближайшая к z_0 особая точка. Этой точкой является точка $z_2 = i$ (см. рис. 1).

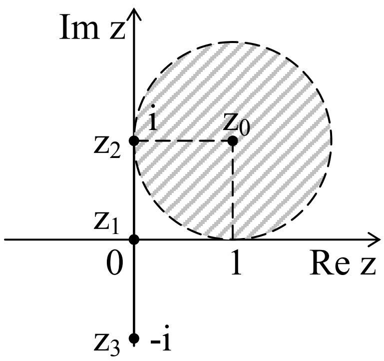

Рис. 1

Следовательно, кругом сходимости указанного ряда будет круг

$$|z-1-i| < 1.$$

Следствие. В § 3 установлено, что областью сходимости ряда Лорана является кольцо

$$R_1 < |z-z_0| < R_2.$$

Из теоремы 1 следует, что на каждой окружности, ограничивающей кольцо, имеется, по крайней мере, по одной особой точке функции, являющейся суммой ряда Лорана.

Пример 2. Пусть функцию $f(z) = \dfrac{\sqrt{1+z^2}-2}{z}$ (рассмотренную в примере 1) требуется разложить в ряд Лорана по степеням $z-1-i$. Тогда вся комплексная плоскость будет разбита на кольца так, чтобы на границах этих колец находилась особая точка:

$$|z-1-i| < 1,$$

$$1 < |z-1-i| < \sqrt{2},$$

$$\sqrt{2} < |z-1-i| < \sqrt{5},$$

$$|z-1-i| > \sqrt{5}\ \text{(см. рис.2).}$$

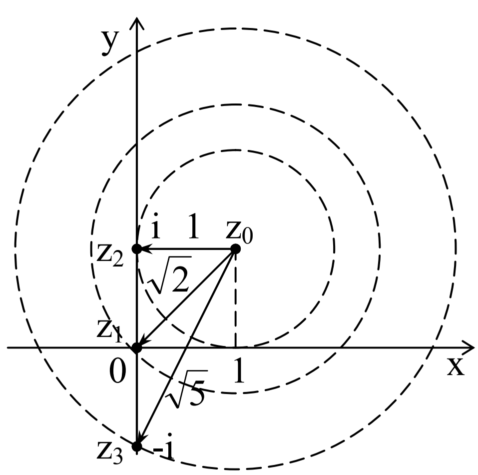

Рис. 2

В каждом из этих колец функция $f(z)$ может быть разложена в ряд Лорана.

Замечание. В примерах 1 и 2 мы не приводим сами разложения функции $f(z)$ в степенные ряды, а лишь рассматриваем области, где возможны различные разложения.

Определение. Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если $f(z)$ - аналитическая в некотором круге $0<|z-z_0|<R$ (круг с выколотым центром), а в самой точке либо не определена, либо не дифференцируема.

Пример 3. а) для функции $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ точка $z=1$ является изолированной особой точкой;

б) для функции $f(z)=\dfrac{1}{1-|z|}$ особые точки – точки окружности $|z|=1$, причем никакая из них не является изолированной (не существует окрестности особой точки, в которой $f(z)$ была бы аналитической).

Пусть точка z_0 - изолированная особая точка функции $f(z)$, то есть существует круг $0<|z-z_0|<R$, в котором $f(z)$ - аналитическая. Так как указанный круг можно считать кольцом с нулевым внутренним радиусом $K: 0<|z-z_0|<R$, то функция $f(z)$ в этом круге может быть разложена в ряд Лорана. В зависимости от получающегося разложения вводится следующая классификация изолированных точек:

1. Точка z_0 называется *устранимой* особой точкой функции $f(z)$, если ряд Лорана для $f(z)$ в кольце K не содержит главной части (все $c_n=0$).

2. Точка z_0 называется *полюсом*, если главная часть ряда Лорана для $f(z)$ в кольце K содержит конечное число отличных от нуля коэффициентов. При этом, наибольшее n, при котором $c_{-n} \neq 0$ называется *порядком полюса*. При $n = 1$ полюс называется *простым*.
3. Точка z_0 называется *существенно особой*, если главная часть ряда Лорана для $f(z)$ в кольце K содержит бесконечное число отличных от нуля членов.

Пример 4. а) для функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ точка $z_0 = 0$ является изолированной особой. Разложение данной функции в ряд Лорана в окрестности z_0 имеет вид

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \ldots.$$

В разложении отсутствует главная часть. Следовательно, $z_0 = 0$ - устранимая особая точка.

б) рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^6}$.

Имеем

$$\frac{\sin z}{z^6} = \frac{1}{z^6}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right) = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^3 \cdot 3!} + \frac{1}{z \cdot 5!} - \frac{1}{7!} + \ldots.$$

Значит, изолированная особая точка $z_0 = 0$ для данной функции является полюсом пятого порядка.

в) разложение функции $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$ в окрестности $z_0 = 0$ имеет вид

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3 \cdot 3!} + \frac{1}{z^5 \cdot 5!} - \frac{1}{z^7 7!} + \ldots,$$

откуда вытекает, что z_0 - существенно особая точка.

Укажем для каждого вида изолированной особой точки необходимый и достаточный признак существования (критерий).

Теорема 2. (критерий устранимой особой точки)

Для того чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была устранимой необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий:

а) существует конечный предел

$$\lim_{z \to z_0} f(z); \tag{1}$$

б) функция $f(z)$ ограничена по модулю в проколотой окрестности точки z_0, то есть

$$|f(z)| < M \text{ при } 0 < |z - z_0| < R_1. \tag{2}$$

Доказательство. Покажем, что из устранимости особой точки следует условие а); из условия а) следует условие б); а из условия б) следует, что z_0 - устранимая особая точка.

1) Пусть z_0 - устранимая особая точка функции $f(z)$. Тогда в кольце K разложение $f(z)$ в ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots.$$

Переходя к пределу при $z \to z_0$, получаем $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$, то есть выполнено условие а).

2) Если существует конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$, то из этого, очевидно, следует ограниченность по модулю функции $f(z)$ в окрестности точки z_0. Следовательно, выполнено условие б).

3) Пусть $|f(z)| < M$ в проколотой окрестности точки z_0: $0 < |z - z_0| < R_1$. Воспользуемся неравенством Коши для коэффициентов ряда Лорана с отрицательными номерами

$$|c_{-n}| < \frac{M}{\rho^{-n}};\ |c_{-n}| < M\rho^n,\ n \in N,$$

где ρ можем выбирать так чтобы окружность $c: |z - z_0| = \rho$ лежала в кольце $0 < |z - z_0| < R_1$, то есть $\rho < R_1$. Так как c_{-n} не зависит от ρ, то устремляя ρ

к нулю, получаем, что $c_{-n} = 0$ для всех $n \in N$. Следовательно, z_0 – устранимая особая точка.

Теорема полностью доказана.

Замечание. Если доопределить функцию $f(z)$ в точке z_0, полагая $f(z_0) = c_0$, то получим функцию, аналитическую в круге $|z - z_0| < R$. Тем самым устранена особенность в точке z_0 (отсюда название особой точки – устранимая).

Теорема 3. (критерий полюса)

Для того, чтобы изолированная особая точка z_0 была полюсом, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty. \tag{3}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть z_0 - полюс порядка n функции $f(z)$. Следовательно, разложение этой функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots,$$

где $c_{-n} \neq 0$. Далее вынося за скобки множитель $\frac{1}{(z - z_0)^n}$, получим представление

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} \cdot \varphi(z),$$

где $\varphi(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z - z_0) + c_{-n+2}(z - z_0) + \ldots$, причем $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z) = c_{-n} \neq 0$.

Тогда $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n} = \infty$.

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, тогда для любого числа $A > 0$ можно указать такую проколотую ε-окрестность точки z_0, в которой $|f(z)| > A$. Рассмотрим функцию

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}.$$

В указанной ε-окрестности точки z_0 эта функция является аналитической и ограниченной по модулю:

$$|g(z)|<\frac{1}{A},$$

причем $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=0$.

Значит, по теореме 2 точка z_0 является устранимой особой точкой для функции $g(z)$. Доопределим функцию $g(z)$ в точке z_0, полагая $g(z_0)=0$, тогда функция $g(z)$ - аналитическая в круге $|z-z_0|<\varepsilon$, а точка z_0 является ее нулем. Пусть z_0 - это нуль порядка n, тогда

$g(z)=c_n^*(z-z_0)^n+c_{n+1}^*(z-z_0)^{n+1}+\ldots=(z-z_0)^n\left[c_n^*+c_{n+1}^*(z-z_0)+\cdots\right]$, то есть

$g(z)=(z-z_0)^n\psi(z)$, $\psi(z)=c_n^*+c_{n+1}^*(z-z_0)+\cdots$, $c_n^*\neq 0$.

Тогда функция $\varphi(z)=\dfrac{1}{\psi(z)}$ - аналитическая в окрестности точки z_0, следовательно, представима рядом Тейлора:

$$\varphi(z)=c_0+c_1(z-z_0)+\ldots,$$

причем $\varphi(z_0)=\dfrac{1}{\psi(z_0)}=\dfrac{1}{c_n^*}=c_0\neq 0$.

И значит, справедливо равенство:

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^n\cdot\psi(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^n}\cdot\varphi(z)=$$

$$=\frac{1}{(z-z_0)^n}\left[c_0+c_1(z-z_0)+\ldots\right].$$

Следовательно,

$$f(z)=\frac{c_0}{(z-z_0)^n}+\frac{c_1}{(z-z_0)^{n-1}}+\ldots.$$

Это означает, что z_0 - полюс порядка n.

Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы получается важный вывод о связи между нулями и полюсами аналитических функций:

Если точка z_0 является нулем порядка n для аналитической функции $g(z)$, то она будет полюсом того же порядка для функции $f(z)=\dfrac{1}{g(z)}$, и наоборот.

Теорема 4. (теорема Сохоцкого).

Для того, чтобы изолированная точка z_0 была существенно особой, необходимо и достаточно, чтобы для любого (конечного или бесконечного) комплексного числа A нашлась последовательность $\{z_n\}$, сходящаяся к z_0, такая, что

$$\lim_{z_n\to z_0} f(z_n)=A. \tag{4}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть z_0 - существенно особая точка функции $f(z)$. Рассмотрим два случая:

1. $A=\infty$. Функция $f(z)$ не ограничена по модулю в окрестности точки z_0 (в противном случае z_0 была бы устранимой особой точкой). Следовательно, в указанной окрестности найдется точка z_1, для которой $|f(z_1)|>1$ и $0<|z_1-z_0|<1$.

Аналогично, найдется точка z_2, для которой $|f(z_2)|>2$ и $0<|z_2-z_0|<\dfrac{1}{2}$.

И так далее. В результате построена последовательность $\{z_n\}$, $\{z_n\}\to z_0$, такая, что $\lim\limits_{z_n\to z_0} f(z_n)=\infty$.

2. Пусть $A\neq\infty$.

Если сколь угодно близко к z_0 существует точка z такая, что имеем $f(z)=A$, то существует последовательность $\{z_n\}$ такая, что условие (4) выполнено.

Если в достаточно малой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ не равна A, тогда функция $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}-A$ - аналитическая в этой окрестности точки z_0, кроме самой точки z_0. Точка z_0 для функции $\varphi(z)$ является изолированной особой точкой, причем она не может быть ни устранимой точкой, ни полюсом (в противном случае, $\varphi(z)$ в точке z_0 имела бы конечный или бесконечный предел, следовательно, $f(z)=A+\dfrac{1}{\varphi(z)}$ также имела бы конечный или бесконечный предел. Следовательно, z_0 не была бы для $f(z)$ существенно особой).

Итак, точка z_0 - существенно особая для $\varphi(z)$, тогда на основании доказанного существует последовательность $\{z_n\}\to z_0$ такая, что

$$\lim_{z_n\to z_0}\varphi(z_n)=\infty,$$

следовательно, $\lim\limits_{z_n\to z_0} f(z_n)=A$.

Достаточность. Пусть выполнено (4). Это означает, что в точке z_0 функция $f(z)$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела. Поэтому z_0 не может быть ни устранимой точкой, ни полюсом. Значит, z_0 - существенно особая точка.

Пример 5. Найти особые точки функций и указать их тип:

а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z-\pi}$; б) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{(z^2+1)(z^2-1)^2}$; в) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z+i}$.

Решение. а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z-\pi}$. Так как функция $\sin z$ - аналитическая на всей комплексной плоскости, то функция $f(z)$ будет иметь одну особую точку $z=\pi$. Рассмотрим

$$\lim_{z\to\pi}\frac{\sin z}{z-\pi}=\lim_{z\to\pi}\frac{-\sin(z-\pi)}{z-\pi}=-1.$$

Применяя теорему 2, получаем, что точка $z=\pi$ является устранимой особой точкой для данной функции.

б) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{(z^2+1)(z^2-1)^2}$. Разложим знаменатель на множители. Получим

$$f(z)=\frac{e^z-1}{(z+i)(z-i)(z-1)^2(z+1)^2}.$$

Точки $z_1=i$, $z_2=-i$, $z_3=1$, $z_4=-1$ являются изолированными особыми точками для данной функции. Поскольку числитель в этих точках отличен от нуля, то предел рассматриваемой функции, когда z стремится к каждой из этих точек, равен ∞. Следовательно, все точки являются полюсами. Для определения порядков этих полюсов рассмотрим функцию $\dfrac{1}{f(z)}$.

Имеем

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{(z+i)(z-i)(z-1)^2(z+1)^2}{e^z-1}.$$

Для рассмотрения характера точки $z_1=i$ представим $\dfrac{1}{f(z)}$ в виде

$$\frac{1}{f(z)}=(z-i)\cdot\frac{(z+i)(z-1)^2(z+1)^2}{e^z-1}.$$

Поскольку сомножитель $\dfrac{(z+i)(z-1)^2(z+1)^2}{e^z-1}$ в точке $z_1=i$ не обращается в нуль (проверьте), точка $z_1=i$ является нулем первого порядка для функции $\dfrac{1}{f(z)}$, а значит, простым полюсом для функции $f(z)$.

Аналогично рассуждая, получим $z_2 = -i$ - простой полюс;

$z_3 = 1$ - полюс второго порядка;

$z_4 = -1$ - полюс второго порядка.

в) $f(z) = \cos\frac{1}{z+i}$.

Имеем $z = -i$ - изолированная особая точка. Поскольку при $z \to -i$ величина $\frac{1}{z+i}$ стремится к бесконечности, а функция $\cos z$ является 2π - периодической, то не существует ни конечного, ни бесконечного предела $\lim\limits_{z\to -i}\cos\frac{1}{z+i}$. Тогда по теореме Сохоцкого точка $z = -i$ является существенно особой.

§5. Поведение аналитической функции в окрестности бесконечно удаленной точки

До сих пор, исследуя поведение аналитической функции в окрестности изолированной особой точки, мы предполагали, что эта тоска не является бесконечно удаленной. В этом случае ее называют конечной.

Окрестностью изолированной конечной особой точки z_0 мы называли множество всех точек z, для которых $0 < |z - z_0| < R$.

Определение 1. Бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является изолированной особой точкой аналитической функции $f(z)$, если можно указать такое значение R, что вне круга $|z| > R$ функция $f(z)$ не имеет особых точек, находящихся на конечном расстоянии от точки $z = 0$.

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в окрестности бесконечно удаленной точки, то есть при $|z| > R$. Полагая $z = \frac{1}{w}$, получаем, что функция $f(z) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \varphi(w)$ является аналитической в кольце $0 < |w| < \frac{1}{R}$.

Определение 2. Назовем точку $z=\infty$ для функции $f(z)$ устранимой особой, полюсом или существенно особой, если таковой является точка $w=0$ для функции $\varphi(w)$.

Пример 1. Определить характер особой точки $z=\infty$ для функции

$$f(z)=\frac{1+z^2}{e^z}.$$

Решение. Точка $z=\infty$ является изолированной особой точкой данной функции, так как у нее нет других особых точек, а значит, для любого положительного числа R в круге $|z|>R$ никаких особых точек этой функции не содержится.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{1+\frac{1}{w^2}}{e^{\frac{1}{w}}}=\frac{w^2+1}{w^2e^{\frac{1}{w}}}.$$

Раскладывая функцию $\varphi(w)$ в степенной ряд в окрестности точки $w=0$, получим:

$$\varphi(w)=\left(1+\frac{1}{w^2}\right)e^{-\frac{1}{w}}=e^{-\frac{1}{w}}+\frac{1}{w^2}e^{-\frac{1}{w}}=\left[1-\frac{1}{w}+\frac{1}{2!\,w^2}-\ldots\right]+$$

$$+\frac{1}{w^2}\left[1-\frac{1}{w}+\frac{1}{2!\,w^2}-\ldots\right].$$

Из полученного разложения следует, что точка $w=0$ является существенно особой точкой для $\varphi(w)$. Следовательно, точка $z=\infty$ является существенно особой точкой функции $f(z)$.

Пример 2. Найти все особые точки функции $f(z)=\dfrac{z^5}{(1-z)^3}$ и указать их характер.

Решение. Изолированными особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z=1$ и $z=\infty$.

Рассмотрим сначала точку $z=1$. Так как эта точка является нулем третьего порядка для функции $\frac{1}{f(z)}=\frac{(1-z)^3}{z^5}=(1-z)^3\cdot\frac{1}{z^5}$, то она будет полюсом третьего порядка для данной функции $f(z)$.

Для установления характера точки $z=\infty$ рассмотрим функцию

$$\varphi(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{\frac{1}{w^5}}{\left(1-\frac{1}{w}\right)^3}=\frac{w^3}{w^5(w-1)^3}=\frac{1}{w^2(w-1)^3}.$$

Точка $w=0$ является полюсом второго порядка для функции $\varphi(w)$ (так как она – нуль второго порядка для функции $\frac{1}{\varphi(w)}=w^2(w-1)^3$). Следовательно, для функции $f(z)=\frac{z^5}{(1-z)^3}$ точка $z=\infty$ является полюсом второго порядка.

§6. Вычеты и их приложения

Пусть точка z_0 является изолированной особой точкой аналитической функции $f(z)$. Тогда в проколотой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ раскладывается в ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n, \tag{1}$$

$$\text{где } c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi. \tag{2}$$

Определение. *Вычетом* функции $f(z)$ в точке z_0 называется коэффициент c_{-1} (то есть при $(z-z_0)^{-1}$) в разложении этой функции в ряд Лорана.

Обозначение: $\operatorname*{Res}_{z_0} f(z)$, $\operatorname*{res}_{z_0} f(z)$, Выч$[f(z),z_0]$.

Из формулы (2) следует

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} f(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} f(z)\, dz, \tag{3}$$

где C - любой замкнутый контур (в частности – окружность), содержащий внутри себя точку z_0, обходимый так, что область, ограниченная этим контуром, остается слева (против часовой стрелки).

Пример 1. Найти вычет функции

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-i)^4}$$

в точке $z_0 = i$.

Решение. Точка $z_0 = i$ является изолированной особой точкой. В силу того, что $e^i \neq 0$, эта точка – полюс четвертого порядка. По формуле (3) имеем

$$\operatorname*{Res}_{i} \frac{e^z}{(z-i)^4} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{e^z}{(z-i)^4}\, dz,$$

где в качестве C можно взять, например, окружность $|z - i| = 1$. Для вычисления интеграла воспользуемся формулой Коши:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{e^z}{(z-i)^4}\, dz = \frac{1}{3!} (e^z)''' \Big|_{z=i} = \frac{1}{6} e^i.$$

Следовательно, $\operatorname*{Res}_{i} \dfrac{e^z}{(z-i)^4} = \dfrac{1}{6} e^i = \dfrac{1}{6}(\cos 1 + i \sin 1)$.

Замечание. Вычет функции $f(z)$ в точке z_0 может быть отличным от нуля только в том случае, если z_0 - полюс или существенно особая точка.

В случае, когда z_0 - полюс функции $f(z)$, вычет может быть найден не интегрированием по формуле (3), а более простым способом.

1. ***Вычисление вычета в простом полюсе.***

Пусть точка z_0 - полюс первого порядка функции $f(z)$ (простой полюс).

Тогда ряд Лорана в окрестности этой точки имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\dots.$$

Умножим обе части последнего равенства на $z-z_0$, получим

$$f(z)(z-z_0)=c_{-1}+c_0(z-z_0)+c_1(z-z_0)^2+c_2(z-z_0)^3+\dots.$$

Перейдем к пределу при $z\to z_0$. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z)=c_{-1}=\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0). \qquad (4)$$

Пример 2. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ в ее конечных особых точках.

Р е ш е н и е. Представляя функцию $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{(z+i)(z-i)},$$

получаем, что изолированными особыми точками данной функции являются точки $z_1=i$ и $z_2=-i$, причем обе эти точки представляют собой простые полюсы. Тогда по формуле (4) находим

$$\operatorname*{Res}_{i}\frac{1}{z^2+1}=\lim_{z\to i}\frac{1}{z^2+1}(z-i)=\lim_{z\to i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2};$$

$$\operatorname*{Res}_{-i}\frac{1}{z^2+1}=\lim_{z\to -i}\frac{1}{z^2+1}(z+i)=\lim_{z\to -i}\frac{1}{z-i}=-\frac{1}{2i}=\frac{i}{2}.$$

Можно получить еще одну формулу для вычисления вычета в простом полюсе. В этом случае функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ - аналитические функции, $\varphi(z_0)\neq 0$, а для функции $\psi(z)$ точка z_0 является нулем первого порядка. Тогда из равенства (4) имеем:

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Таким образом, получили формулу

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{5}$$

Пример 3. Найти вычет функции $f(z) = \operatorname{ctg} z$ в точке $z_0 = 0$.

Р е ш е н и е. Данная функция имеет вид $f(z) = \dfrac{\cos z}{\sin z}$. Так как $\cos 0 = 1 \neq 0$, а для функции $\sin z$ точка $z_0 = 0$ является простым нулем (действительно, $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \ldots = z\left(1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dfrac{z^4}{5!} - \ldots\right)$), то z_0 - простой полюс для $\operatorname{ctg} z$. Применим формулу (5) и получим:

$$\operatorname*{Res}_{0} \operatorname{ctg} z = \frac{\cos 0}{(\sin z)'\big|_{z=0}} = \frac{\cos 0}{\cos 0} = 1.$$

2. ***Вычисление вычета в кратном полюсе.***

Пусть точка z_0 - полюс функции $f(z)$ порядка n. Тогда ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots.$$

Умножив обе части этого равенства на $(z - z_0)^n$, получим

$$f(z) \cdot (z - z_0)^n = c_{-n} + c_{-n+1}(z - z_0) + \ldots + c_{-1}(z - z_0)^{n-1} + c_0(z - z_0)^n + \ldots$$

.

Продифференцировав последнее равенство $n - 1$ раз, будем в правой части иметь обыкновенный степенной ряд, свободный член которого: $c_{-1}(n-1)!$.

Переходя к пределу при $z \to z_0$, получаем

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[f(z)(z - z_0)^n \right] = c_{-1}(n-1)!.$$

Отсюда находим:

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[f(z)(z - z_0)^n \right]. \tag{6}$$

Пример 4. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ в точке $z_0=-i$.

Решение. Точка $z_0=-i$ является полюсом третьего порядка функции $f(z)$ (обоснуйте самостоятельно), то есть $n=3$. По формуле (6) находим:

$$c_{-1}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -i}\left[\frac{1}{(z^2+1)^3}\cdot(z+i)^3\right]''=\frac{1}{2}\lim_{z\to -i}\left[\frac{1}{(z-i)^3}\right]''=\frac{1}{2}\lim_{z\to -i}\left[\frac{-3}{(z-i)^4}\right]'=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to -i}\frac{12}{(z-i)^5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{(-2i)^5}=\frac{3}{16}i.$$

Теорема о вычетах (*основная теорема теории вычетов*). Пусть функция $f(z)$ является аналитической всюду в замкнутой области $\overline{D}$ за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k, $k=1,2,\ldots,N$, лежащих внутри области D. Тогда

$$\int_{\gamma^+} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z_k} f(z), \tag{7}$$

где γ^+ - граница области D, проходимая в положительном направлении (область D остается слева)

Доказательство. Окружим каждую точку z_k, $k=1,2,\ldots,N$ окружностью c_k настолько малого радиуса, чтобы ограниченные ими замкнутые круги лежали внутри D и попарно не пересекались (см. рис.1).

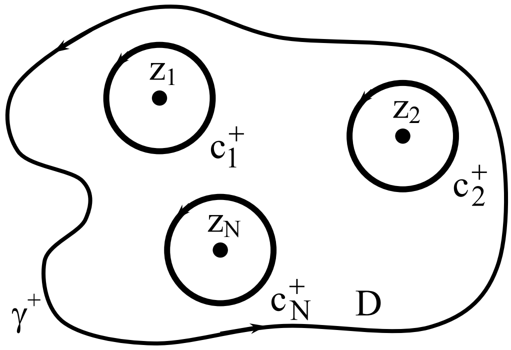

Рис. 1

Тогда по теореме Коши для многосвязной области имеем

$$\int_{\gamma^+} f(z)dz=\sum_{k=1}^{N}\int_{c_k^+} f(z)dz,$$

где c_k^+ - окружности c_k, обходимые против часовой стрелки. В силу формулы (3) получаем утверждение теоремы

$$\int\limits_{\gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z_k} f(z).$$

Доказанная теорема о вычетах имеет большое практическое значение. Во многих случаях оказывается проще вычислить вычеты функции $f(z)$ в особых точках, лежащих внутри контура интегрирования, чем непосредственно вычислить интеграл, стоящий в левой части формулы (7).

Пример 5. Вычислить интеграл $\int\limits_{C^+} \frac{dz}{z^4-1}$,

где C - окружность $|z-i-1| = \sqrt{2}$, проходимая в положительном направлении.

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде

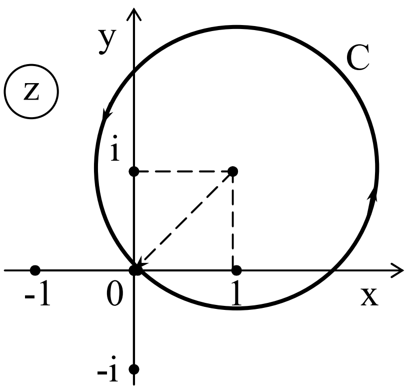

Рис. 2

$$f(z) = \frac{1}{z^4-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}.$$

Особые точки этой функции, $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = i$, $z_4 = -i$, являются простыми полюсами, причем внутри контура интегрирования содержатся лишь две из них: z_1 и z_3 (см. рис.2). тогда по теореме о вычетах находим.

$$\int\limits_{C^+} \frac{dz}{z^4-1} = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{1} \frac{1}{z^4-1} + \operatorname*{Res}_{i} \frac{1}{z^4-1} \right).$$

Вычислим вычеты функции $f(z)$ в точках z_1 и z_3.

$$\operatorname*{Res}_{1} \frac{1}{z^4-1} = \lim_{z\to 1} \left(\frac{1}{z^4-1} \cdot (z-1) \right) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{(z+1)(z-i)(z+i)} = \frac{1}{4}.$$

$$\operatorname*{Res}_{i} \frac{1}{z^4-1} = \lim_{z\to i} \left(\frac{1}{z^4-1} \cdot (z-i) \right) = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z-1)(z+1)(z+i)} = -\frac{1}{4i} = \frac{i}{4}.$$

Следовательно, $\int\limits_{C^+} \frac{dz}{z^4-1} = 2\pi i \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} i \right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} i$.

Понятие вычета можно распространить на случай бесконечно удаленной точки. Предположим, что $z=\infty$ является изолированной особой точкой функции $f(z)$ и обозначим через C произвольный замкнутый контур, лежащий целиком в окрестности этой точки, например, за C можно взять окружность достаточно большого радиуса.

По-прежнему, условимся называть вычетом функции $f(z)$ относительно бесконечно удаленной точки значение интеграла:

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)\,dz, \tag{8}$$

с той лишь разницей, что интегрирование совершается теперь по контуру C в отрицательном направлении, так как контур C нужно проходить по часовой стрелке, чтобы точка $z=\infty$ оставалась слева.

Тогда

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)\,dz=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(z)\,dz=-c_{-1}, \tag{9}$$

то есть вычет функции в бесконечно удаленной точке равен коэффициенту при первой отрицательной степени разложения Лорана в окрестности этой точки, взятому с противоположным знаком.

Из теоремы о вычетах и формулы (9) получаем

$$2\pi i\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z_k} f(z)=\int_{\gamma^+} f(z)\,dz=-2\pi i\operatorname*{Res}_{\infty} f(z).$$

Следовательно,

$$2\pi i\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z_k} f(z)+2\pi i\operatorname*{Res}_{\infty} f(z)=0.$$

Таким образом, справедлива

Теорема. Пусть функция $f(z)$ является аналитической на комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k $(k=1,2,\ldots,N+1)$, включая точку $z_{N+1}=\infty$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{N+1} \operatorname*{Res}_{z_k} f(z) = 0.$$

Вычеты позволяют вычислять не только интегралы от функций комплексного переменного, но и интегралы от функций вещественного аргумента.

В качестве примеров рассмотрим два вида интегралов.

I. Интегралы вида

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi;\sin\varphi)\,d\varphi, \tag{10}$$

где R - рациональная функция, вычисляются с помощью замены

$$z = e^{i\varphi}. \tag{11}$$

В этом случае:

$$dz = ie^{i\varphi}d\varphi;\ d\varphi = \frac{dz}{iz};\ \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2};$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z - z^{-1}}{2i}. \tag{12}$$

Тогда интеграл (10) примет вид

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi;\sin\varphi)\,d\varphi = \int_{C^+} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2};\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{ie^{i\varphi}}, \tag{13}$$

где C^+ - окружность $|z| = 1$, проходимая против часовой стрелки.

Интеграл, стоящий в правой части формулы (3) является интегралом от функции комплексной переменной, для вычисления которого и применяется теорема о вычетах.

Пример 6. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2\,d\varphi}{2 + \sqrt{3}\cos\varphi}$.

Решение. По формулам (11), (12) получаем:

$$\int_0^{2\pi}\frac{2\,d\varphi}{2+\sqrt{3}\cos\varphi}=\int_{C^+}\frac{2\cdot dz}{iz\left(2+\sqrt{3}\dfrac{z+z^{-1}}{2}\right)}=\int_{C^+}\frac{4\cdot dz}{iz\left(4+\sqrt{3}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\right)}=$$

$$=\frac{4}{i}\int_{C^+}\frac{dz}{z\left(4+\sqrt{3}z+\sqrt{3}\dfrac{1}{z}\right)}=\frac{4}{i}\int_{C^+}\frac{dz}{\sqrt{3}z^2+4z+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}i}\int_{C^+}\frac{dz}{z^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}z+1}=\frac{4}{\sqrt{3}i}\int_{C^+}\frac{dz}{\left(z+\sqrt{3}\right)\left(z+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}.$$

У подынтегральной функции две особые точки $z_1=-\sqrt{3}$ и $z_2=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, но только точка z_2 попадает в область, ограниченную контуром C (окружность $|z|=1$).

Следовательно,

$$\frac{4}{\sqrt{3}i}\int_{C^+}\frac{dz}{\left(z+\sqrt{3}\right)\left(z+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{4}{\sqrt{3}i}\cdot 2\pi i\cdot \operatorname*{Res}_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{\left(z+\sqrt{3}\right)\left(z+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}=$$

$$=\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\cdot\lim_{z\to-\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{\left(z+\sqrt{3}\right)\left(z+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}\left(z+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)}=\frac{8\pi}{-1+3}=4\pi.$$

II. Несобственный вещественный интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx \tag{13}$$

может быть найден с применением вычетов при выполнении некоторых условий, накладываемых на функцию $f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ такова, что после замены вещественного аргумента x на комплексный z, получившаяся функция $f(z)$ удовлетворяет условиям:

а) $f(z)$ - аналитическая в верхней полуплоскости, кроме конечного числа полюсов z_k, $k=1,\ldots,N$, лежащих выше вещественной оси Ox;

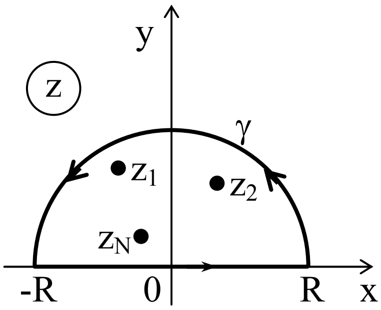

Рис. 3

б) $\lim\limits_{|z|\to\infty}|z\cdot f(z)|=0$.

Пусть D – область, ограниченная полуокружностью $|z|=R$, $\operatorname{Im}z\geq 0$ и отрезком $[-R;R]$, причем число R настолько велико, что все полюсы z_k, $k=1,\ldots,N$, содержатся внутри D (см. рис.3).

Тогда

$$\int\limits_{C^+} f(z)dz=\int\limits_{\gamma^+} f(z)dz+\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z_k} f(z), \qquad (14)$$

где C^+ - контур полукруга, а γ^+ - дуга полуокружности, проходимые против часовой стрелки.

Оценим $\int\limits_{\gamma^+} f(z)dz$ по модулю:

$$\left|\int\limits_{\gamma^+} f(z)dz\right|\leq \pi R\max_{|z|=R}|f(z)|=\pi\max_{|z|=R}|z\cdot f(z)|.$$

При $R\to\infty$ $|z|\to\infty$, а, следовательно, в силу условия б), имеем

$$\left|\int\limits_{\gamma^+} f(z)dz\right|\to 0.$$

Тогда, переходя к пределу при $R\to\infty$ в равенстве (14), получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z_k} f(z). \qquad (15)$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$.

Решение. В силу четности подынтегральной функции имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^3}$.

Точки $z_1 = i$ и $z_2 = -i$ являются полюсами третьего порядка этой функции, причем в верхней полуплоскости лежит лишь точка z_1. Далее вычислим предел:

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ (|z|\to\infty)}} z\cdot f(z) = \lim_{\substack{z\to\infty \\ (|z|\to\infty)}} \frac{z}{\left(z^2+1\right)^3} = 0.$$

Следовательно, выполнены условия а) и б), накладываемые на функцию $f(z)$. Тогда по формуле (15):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{i} \frac{1}{\left(z^2+1\right)^3} = \frac{2\pi i}{2!} \lim_{z\to i} \left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)'' = \pi i \lim_{z\to i} \left(\frac{-3}{(z+i)^4}\right)' =$$

$$= \pi i \lim_{z\to i} \frac{12}{(z+i)^5} = \frac{12\pi i}{(2i)^5} = \frac{12\pi}{32} = \frac{3\pi}{8}.$$

Следовательно, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{3\pi}{16}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Индивидуальная работа №1

Задание 1. По заданным z_1 и z_2 выполнить:

а) найти значение выражения;

б) вычислить значения корня и изобразить их на комплексной плоскости;

в) записать число в тригонометрической и показательной форме;

г) на комплексной плоскости изобразить множество точек z, удовлетворяющих заданным соотношениям.

Задание 2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Задание 3. Найти и построить стереографические проекции:

а) точки z; б) указанной области.

Варианты заданий

1 вариант

1. $z_1 = 1-\sqrt{3}i$, $z_2 = 3-2i$:

а) ${z_1}^4 + \dfrac{iz_2}{{z_1}^2} + 8z_1z_2$; б) $\sqrt[3]{z_1}$; в) z_2; г) $|z_1+z_2|<2$; $\operatorname{Re}\left(z^2-z\right) = 2+\operatorname{Im} z$.

2. $z_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n} + \ln\dfrac{n}{n+1}i$.

3. а) z_1; б) $2<|z|\le 3$.

2 вариант

1. $z_1 = 3+\sqrt{3}i$, $z_2 = 2+i$:

а) ${z_1}^6 + 8iz_1z_2^2 - \dfrac{5z_2}{z_1}$; б) $\sqrt[4]{z_1}$; в) z_2;

г) $2\le|z_1+z_2|<4$; $\operatorname{Re} z + 2 = \operatorname{Im}^2\left(\overline{z-z_2}\right)$.

2. $z_n = \dfrac{n}{2-n} + \left(\dfrac{3-2n}{5+2n}\right)^n i$.

3. а) z_2; б) $1<|z|\le 5$.

3 вариант

1. $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -2 + 2i$:

а) $z_1^{\,3} + \dfrac{z_2}{z_1^{\,2}} + 3iz_1$; б) $\sqrt[4]{z_1}$; в) z_2;

г) $0 < \mathrm{Im}(zi) < \mathrm{Re}^2 z$; $|z - z_2| = |z - z_1|$.

2. $z_n = \dfrac{(n+1)! + n!}{(n+1)! - n!} + \dfrac{1}{3^n} i$.

3. а) z_2; б) $5 > |z| > 3$.

4 вариант

1. $z_1 = 8 + 8i$, $z_2 = 2 + 3i$:

а) $z_1^{\,3} + z_2^{\,3} + \dfrac{z_1}{2iz_2}$; б) $\sqrt[4]{z_1}$; в) z_2;

г) $5 < |z_1 - z_2| < 7$; $\mathrm{Im}\, z_1 + \mathrm{Im}\, z_2 = \mathrm{Re}^2 z_1 - \mathrm{Im}\, z_1$.

2. $z_n = \dfrac{3n^3 + 2n}{1 - 4n^3} + \left(\dfrac{1 - 3n}{1 + 3n}\right)^{6n} i$.

3. а) z_1; б) $|z| = 3$.

5 вариант

1. $z_1 = -2i$, $z_2 = 3 - 4i$:

а) $z_1^{\,10} + iz_1 \cdot z_2^{\,2} - \dfrac{8}{z_1}$; б) $\sqrt[4]{z_1}$; в) z_2;

г) $\mathrm{Re}(1 + z) = \mathrm{Re}\, z_2 \cdot |z|$; $4 > |z + 2i| > 2$.

2. $z_n = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{-n} + \dfrac{3n^2}{\sqrt{n^4 + 1}} i$.

3. а) z_2; б) $|z| < 7$.

6 вариант

1. $z_1 = \sqrt{2}(i - 1)$, $z_2 = \sqrt{2} + 4i$:

а) $z_2^{\,2} - 4i\dfrac{z_1}{z_2} + 5z_1 z_2$; б) $\sqrt[4]{z_1}$; в) z_2;

г) $\operatorname{Im}(z+z_2)=|z|\operatorname{Im} z_1$; $\qquad 0<|z+z_2|\le 3$.

2. $z_n=\dfrac{\sqrt{n^4+1}}{\sqrt{16n^4-1}}+\left(\dfrac{1-2n}{1+4n}\right)^n i$.

3. а) z_1; б) $|z|>7$.

7 вариант

1. $z_1=1+i$, $z_2=2-i\sqrt{2}$:

а) $iz_1{}^4+\dfrac{z_2}{i+z_1}+2z_1z_2$; б) $\sqrt[3]{z_2}$; в) z_1;

г) $|z-2|+|z+2|=5$; $\qquad \operatorname{Re} z_2\cdot\operatorname{Im}^2 z>\operatorname{Re} z\cdot\operatorname{Re} z_1$.

2. $z_n=\dfrac{\sqrt{2n^2-3}}{n+1}+n\sin\dfrac{1}{n}i$.

3. а) $z=-i-2$; б) $1\le|z|\le 2$.

8 вариант

1. $z_1=-1-i$, $z_2=3i$:

а) $3iz_1-\dfrac{z_2}{iz_1}+z_2{}^8$; б) $\sqrt[4]{z_2}$; в) z_1;

г) $\operatorname{Re}(z+z_2)^2\le 1+\operatorname{Im}^2 z$; $\qquad (\operatorname{Im} z)^{-1}\operatorname{Re} z=2$.

2. $z_n=\dfrac{n^2+1}{1-2n^2}+i\sin\dfrac{1}{2^n}$.

3. а) $z=4+i$; б) $|z|>8$.

9 вариант

1. $z_1=-2i$, $z_2=4+i$:

а) $3z_1{}^6+\dfrac{z_2}{z_1+z_2}-4z_1z_2$; б) $\sqrt[3]{z_1}$; в) z_2;

г) $\operatorname{Re}(z-z_1)=2\operatorname{Im}^2 z$; $\qquad \begin{cases}\dfrac{\pi}{2}<\arg z\le\pi\\ |z-z_1|>3\end{cases}$

2. $z_n=\dfrac{n^2-2}{3n^2+1}+\dfrac{\cos n}{n}i$.

3. а) $z = i + 7$;   б) $3 < |z| \le 5$.

10 вариант

1. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - 5i$:

а) $z_1^{10} + iz_2 - \dfrac{3}{z_1 + z_2}$; б) $\sqrt[3]{z_1}$;   в) z_2;

г) $\mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z = \mathrm{Im}z_2 + \mathrm{Re}z_1$; $\ln|z + 2i| < 1$

2. $z_n = \dfrac{1}{3^{-n} + 1} + \dfrac{2n - 1}{3n + 1} i$.

3. а) $z = 3 - 2i$;   б) $|z| = 5$.

11 вариант

1. $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = -8$:

а) $\dfrac{(3i + 1)z_2}{z_1} + z_1^4 - 3z_1(z_2 + 2i)$;   б) $\sqrt[3]{z_2}$;   в) z_1;

г) $|z - z_2 - z_1| > 3$; $\mathrm{Re}z - (\mathrm{Im}z)^2 = \mathrm{Re}z_1$.

2. $z_n = 5^n + \left(\sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1}\right)i$.

3. а) $z = 4i$;   б) $|z| > 5$.

12 вариант

1. $z_1 = 3i$, $z_2 = -1 + i$:

а) $2z_1^8 + z_1 z_2 - \dfrac{2iz_2}{z_1 + 4i - 6}$;   б) $\sqrt[4]{z_1}$;   в) z_2;

г) $\mathrm{Im}z - (\mathrm{Re}z)^2 = \mathrm{Im}z_1$; $|z - z_2| > |z - z_1|$.

2. $z_n = 3 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{5n + 4}{10n + 1} i$.

3. а) $z = 5 + i$;   б) $|z| > 4$.

13 вариант

1. $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 1 + 3i$:

а) $z_1^6 + \dfrac{iz_2}{z_1} - 3z_1 \cdot z_2^2$;   б) $\sqrt[3]{z_1}$;   в) z_2;

г) $|z+3i+1|=2$; $\quad \operatorname{Im} z_2-\operatorname{Im} z_1+\operatorname{Im} z \le \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2-\operatorname{Re} z$.

2. $z_n=3^n-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\dfrac{i}{\sqrt{n^2-3}}$.

3. а) z_2; б) $|z|=3$.

14 вариант

1. $z_1=4-4i$, $z_2=2-i\sqrt{2}$:

а) $z_1{}^6-3iz_1\cdot z_2-\dfrac{6z_1}{z_2}$; б) $\sqrt[4]{z_1}$; в) z_2;

г) $1<|z-z_1|<2$; $\quad \operatorname{Im}\left(\overline{z^2-z}\right)=2-\operatorname{Im} z$.

2. $z_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+\dfrac{n}{2-n}i$.

3. а) $z=-2i+1$; б) $1<|z|<\dfrac{1}{4}$.

15 вариант

1. $z_1=-2i$, $z_2=4+i$:

а) $3z_1{}^6+\dfrac{z_2}{1+z_1}-2z_1z_2$; б) $\sqrt[3]{z_1}$; в) z_2;

г) $\operatorname{Re}(z-z_1)\ge 2$; $\quad |z-1-2i|=4$.

2. $z_n=\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)+\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}i$.

3. а) z_2; б) $|z|>\dfrac{1}{8}$.

16 вариант

1. $z_1=3i$, $z_2=1+i$:

а) $2z_1+z_1z_2-\dfrac{3iz_2}{i+z_1}$; б) $\sqrt[3]{z_1}$; в) z_2;

г) $\arg z_2<\arg z\le\arg z_1$; $\quad \operatorname{Re} z_1-\operatorname{Re}(z_2-z)=\operatorname{Im}^2 z$.

2. $z_n=\dfrac{\sqrt{3n^2-1}}{2n+1}+\dfrac{50n^3-3}{1-n^3}i$.

г) $\operatorname{Im}(z - z_2) > 4$; $\quad |z + 2 - i| = 1$.

2. $z_n = \dfrac{2^n + 3^n}{3^n} + \dfrac{n+1}{n+2} i$.

3. а) $z = -1 - i$; б) $|z| = 6$.

Индивидуальная работа №2

Задание 1. Выделить вещественную и мнимую части данной функции. Найти значение функции в заданной точке.

Задание 2. Найти точки, в которых функция дифференцируема. Вычислить производную в заданной точке.

Задание 3. Восстановить аналитическую функцию по заданным условиям.

Задание 4. Найти круг сходимости степенного ряда.

Варианты заданий

1 вариант

1. $f(z) = (i + z)^2 + \dfrac{1}{z}$; $f(3 + 2i)$.

2. $w = \dfrac{2}{1+z}$; $w'(i)$.

3. $v(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - 2y$, $f(1) = 0$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z - 2i - 3)^n}{1 - 3in}$.

2 вариант

1. $w = \dfrac{1}{z} + \dfrac{2i}{z-1}$; $w(2)$.

2. $w = z^2 + i|z|^2$; $w'(1 + i)$.

3. $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! z^n$.

3 вариант

1. $w = \dfrac{3}{(z - i)^2} + 4$; $w(1 - i)$.

2. $w = \dfrac{(3i + z)^2}{\bar{z}}$; $w'(1)$.

3. $u(x, y) = 3x^2 y - y^3 + x + 5$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z + i)^n}{1 + in}$.

4 вариант

1. $f(z) = 3\bar{z} + \dfrac{2}{z}$; $f(4 + 3i)$.

2. $w = (z + 3i - 1)^2$; $w'(1 - i)$.

3. $u(x, y) = 2^x \cos(y \ln 2)$, $f(0) = 2$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z - 2i)^n}{1 + 2in}$.

5 вариант

1. $f(z)=z^3+\dfrac{i}{z}-1$; $f(1-2i)$.

2. $w=2i(1+3z)-z^2$; $w'(i)$.

3. $u(x,y)=-3x^2y+y^3+x$,

$f(i)=1-i$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}(z-2i)^n$.

6 вариант

1. $w=\dfrac{(3i+z)^3}{\bar{z}}$; $w(2-i)$.

2. $w=\dfrac{2}{(z-1)^2}$; $w'(-3i)$.

3. $v(x,y)=e^x\cos y$, $f(i)=i\sin 1$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{in-1}$.

7 вариант

1. $w=3\bar{z}+\dfrac{1}{z+2}$; $w(4-2i)$.

2. $w=(i\bar{z})^2-(i-\bar{z})^2$; $w'(-1-7i)$.

3. $v(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f(\pi)=\dfrac{1}{\pi}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+2i+1)^n}{n^2(1+i)^n}$.

8 вариант

1. $f(z)=(z-2i)^2+\dfrac{1}{4i}$; $f(-7-i)$.

2. $w=(z+i)^3$; $w'(2i)$.

3. $v(x,y)=2(\operatorname{ch}x\sin y-xy)$,

$f(0)=0$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{in+2}$.

9 вариант

1. $w=(z+4i-1)^2+4i$; $w(-2-i)$.

2. $w=z\cdot|z|^2$; $w'(0)$.

3. $v(x,y)=2e^x\cos y+x^2y^2-\dfrac{x^4+y^4}{6}$

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n(z+i)^n}{5^n}$.

10 вариант

1. $f(z)=(z-i)^2+(z+i)^2$; $f(-1-i)$.

2. $w=(i-z)^3$; $w'(2i)$.

3. $v(x,y)=x^2-y^2-x$, $f(1+i)=0$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^nz^n}{n!}$.

11 вариант

1. $w=\bar{z}\left(3-2z^2\right)$; $w(3i)$.

2. $w=\bar{z}\operatorname{Im}z-(3i-z)^2$; $w'(1)$.

3. $v(x,y)=e^{-\frac{y}{2}}\cos\dfrac{x}{2}-\dfrac{y^3}{3}+x^2y$.

12 вариант

1. $f(z)=2z-3-3z^3$; $f(3-2i)$.

2. $f(z)=\dfrac{3i+1}{z-2}$; $f'(1-i)$.

3. $v(x,y)=\operatorname{ch}(3y)\sin(3x)-8xy+4y$.

4. $8+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{(n+1)(n+2)}(z-2)^n$.

13 вариант

1. $w=(3i-z)^2+\frac{4}{z}$; $f(3i-1)$.

2. $w=\frac{3}{1+z^2}$; $w'(i)$.

3. $v(x,y)=\operatorname{sh}\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}-8xy+4x$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2-3i)^n}{(n+2)!}$.

14 вариант

1. $f(z)=\frac{2i}{\bar{z}}+1-z^3$; $f(2i)$.

2. $w=8i(1+7z)-z^2$; $w'(1+i)$.

3. $v(x,y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3i)^{2n}}{n!}$.

15 вариант

1. $f(z)=\frac{i-z}{3-2\bar{z}}$; $f(5-2i)$.

2. $w=2z-(7z+i)^2$; $w'(-2-3i)$.

3. $v(x,y)=e^{-2y}\sin 2x-\frac{x^3}{3}+xy^2$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i+1)^n}{3^n\left(n^2+1\right)}$.

16 вариант

1. $f(z)=2z-\frac{3}{\bar{z}}$; $f\left(\sqrt{3}\,i\right)$.

2. $w=(3i+3-z)^2$; $w'(-1-i)$.

3. $v(x,y)=\operatorname{ch}(2y)\cos 2x+x^2-$

$-y^2-2y+1$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n^2+1}$.

17 вариант

1. $f(z)=\frac{1-\bar{z}}{1+z}+2i$; $f(-2)$.

2. $w=(1-i\bar{z})^2$; $w'(1+i)$.

3. $v(x,y)=e^{2y}\sin 2x+3xy^2-x^3$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{n^3+n}$.

18 вариант

1. $w=(z+i)^2-3\bar{z}$; $w(-3i)$.

2. $w=\frac{1}{z+i}+\frac{z}{2i}$; $w'(-3i)$.

3. $v(x,y)=x^2-y^2+5x+y-$

$-\frac{y}{x^2+y^2}$, $f(i)=3i-1$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(z-i)^n}{(n+1)!}$.

19 вариант

1. $f(z)=\dfrac{1}{3-z}+4z^2$; $f(-2+i)$.

2. $w=(i-z)^3-2z$; $w'(2+3i)$.

3. $v(x,y)=x^2-y^2-1$, $f(-1)=0$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+1+i)^n}{n\cdot 7^n}$.

20 вариант

1. $f(z)=z^3-(3i+\overline{z})^2$; $f(1-i)$.

2. $w=(2i-z)^2+\dfrac{1}{2i}$; $w'(-1+i)$.

3. $v(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)+$
$+2\sin x\,\mathrm{sh}\,y+x^3-3xy^2+y$,
$f(0)=0$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(z-1-i)^n}{3^n}$.

21 вариант

1. $f(z)=\dfrac{z+i}{2z-3}$; $f(5-2i)$.

2. $w=(3z-i)^2+2z$; $w'(2+3i)$.

3. $v(x,y)=\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$,
$f(-1+i)=1$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-2+3i)^n}{i^n(n+1)!}$.

22 вариант

1. $f(z)=\overline{z}\left(3-2z^2\right)$; $f(3i)$.

2. $w=e^x(\cos y+i\sin y)$; $w'(1)$.

3. $v(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f(2)=0$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n^2}$.

23 вариант

1. $w=(1+z)(i-\overline{z})+3i$; $w(1)$.

2. $w=\overline{z}\,\mathrm{Im}\,z$; $w'(i)$.

3. $v(x,y)=x^2-y^2+xy$, $f(0)=0$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!\cdot 3^n\cdot z^n}{n^n}$.

24 вариант

1. $f(z)=\dfrac{1+z}{1-\overline{z}}+i$; $f(-2-2i)$.

2. $w=(1+iz)^2$; $w'(1-i)$.

3. $v(x,y)=x^3-3xy^2$, $f(i)=i$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\cos in)z^n$.

25 вариант

1. $w=\dfrac{3i}{(z-1)^2}$; $w(0)$.

26 вариант

1. $f(z)=\dfrac{1}{3-\overline{z}}+\dfrac{3+z}{2i}$; $f(2i)$.

2. $w=\bar{z}+\dfrac{z}{|z|^2}+z^3$.

3. $v(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $f(1)=0$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n (z-2)^{2n}$.

2. $w=(2+3z)^2-i$; $w'(1+i)$.

3. $v(x,y)=x^2-y^2+5x+y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$

$f(1+i)=0$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-1)^{2n}}{3^n}$.

27 вариант

1. $f(z)=\dfrac{1}{z-2}-4z^2+i$; $f(-2-i)$.

2. $w=(2i+z)^3-2i$; $w'(3-2i)$.

3. $v(x,y)=-2\sin(2x)\operatorname{sh}(2y)+y$,

$f(0)=2$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-i)^n}{n+1} n^n$.

28 вариант

1. $f(z)=z^3-2z$; $f(1-2i)$.

2. $w=\dfrac{i-1}{2+z}$; $w'(1+3i)$.

3. $v(x,y)=e^x(y\cos y+x\sin y)+x+y$

$f(0)=1$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+3+2i)^n}{5^n n^2}$.

29 вариант

1. $f(z)=(\bar{z}-2i)^2-3z\bar{z}$; $f(8-2i)$.

2. $w=\bar{z}\operatorname{Re} z$; $w'(0)$.

3. $v(x,y)=\operatorname{ch}\dfrac{y}{2}\cos\dfrac{x}{2}-2xy-2x$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$.

30 вариант

1. $f(z)=\dfrac{1-2z+2z^2}{i+1}$; $f(3-i)$.

2. $w=|z|\cdot\bar{z}$; $w'(i)$.

3. $v(x,y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$,

$f(0)=0$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sin in) z^n$.

Индивидуальная работа №3

Задание 1. Вычислить значение функции в заданной точке.

Задание 2. Найти и построить образ кривой или образ области при заданном отображении.

Варианты заданий

1 вариант

1. $e^{-\frac{\pi}{4}i}$; $\sin(\pi + i)$.
2. $y = -x^2$; $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

2 вариант

1. $\ln(5+5i)$; $\operatorname{ch}\left(1 - \frac{2\pi}{3}i\right)$.
2. $y = -x - 7$; $w = \frac{1}{z}$.

3 вариант

1. $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 3i\right)$; $\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{3} + 3i\right)$.
2. $D: |z + 1 + i| = \sqrt{2}$; $w = \frac{z+1}{z-1}$.

4 вариант

1. $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2i\right)$; $\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{6} - 2i\right)$.
2. $y = 2x^2$; $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

5 вариант

1. $\ln(-ei)$; $\sin\left(2 + \frac{\pi}{3}i\right)$.
2. $y = 2x + 3$; $w = \frac{z+1}{z-1}$.

6 вариант

1. $e^{\frac{3\pi}{4}i}$; $\cos\left(2i + \frac{\pi}{3}\right)$.
2. $y = x + 7$; $w = \frac{1}{z}$.

7 вариант

1. $\ln\left(8 - 8\sqrt{2}i\right)$; $\operatorname{ch}\left(8i - \frac{\pi}{3}\right)$.
2. $y = x^2$; $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

8 вариант

1. i^i; $\operatorname{Ln}(1+i)$.
2. $y = x + 1$; $w = \frac{z+1}{z-1}$.

9 вариант

1. $\left(\frac{1+i}{2}\right)^{-i}$.
2. $y = x - 7$; $w = \frac{1}{z}$.

10 вариант

1. 1^i; $e^{\pi(1-i)}$.
2. $D: |z - 1 - i| = \sqrt{2}$; $w = \frac{z+1}{z-1}$.

11 вариант

1. $(1-i)^{i-1}$; $\sin 2i$.

2. $D:\begin{cases}0\le x<\infty\\0\le y\le\pi\end{cases}$; $w=e^z$.

12 вариант

1. $(1+i)^i$; $\mathrm{sh}(-3+i)$.

2. $D:0\le y\le 2\pi$; $w=e^z$.

13 вариант

1. $(-1)^i$; $\mathrm{ch}(-3+i)$.

2. $D:|z|\le 1$; $w=\frac{1}{2}|z-\bar{z}|$.

14 вариант

1. $\cos i$; $\ln(2-2i)$.

2. $D:|z|\le 1$; $w=\bar{z}+i$.

15 вариант

1. $\mathrm{sh}(4-i)$; $\mathrm{Ln}(\sqrt{3}+i)$.

2. $D:|z|\le 1$; $w=z-\bar{z}$.

16 вариант

1. $(1+i)^{1-i}$; $\mathrm{ch}(4-i)$.

2. $D:|z|\le 1$; $w=i\bar{z}$.

17 вариант

1. $\ln(1+i)$; 2^{3i}.

2. $D:|z|\le 1$; $w=|z|$.

18 вариант

1. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$; $\ln(ei)$.

2. $ABCD$ - квадрат: $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$; $w=iz-3$.

19 вариант

1. 5^{1+i}; $\cos\left(3+\frac{\pi}{3}i\right)$.

2. $D:|z|\le 1$; $w=\frac{2z-1}{z-2}$.

20 вариант

1. 10^{1-i}; $\mathrm{sh}(-5-2i)$.

2. $D:|z|\le 1$; $w=\frac{z-i}{z+i}$.

21 вариант

1. 2^{1+i}; $\mathrm{ch}(-3-i)$.

2. $D:x=0, y\ge 0$; $w=-\frac{1}{z}$.

22 вариант

1. 3^{3i}; $\sin(-3-i)$.

2. $D:y=0, 0\le x\le 2$; $w=-\frac{1}{z}$.

23 вариант

1. $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$; $\cos(-3-i)$.

2. $D:y\ge 0, x=2$; $w=-\frac{1}{z}$.

24 вариант

1. i^{-i}; $\ln(-3-3i)$.

2. $D:|z|\le 1$`; $w=\frac{1-z}{z}$.

25 вариант

1. $(-i)^i$; $\cos(2+7i)$.

2. $D: x^2+y^2=9$; $w=\dfrac{1}{z}$.

26 вариант

1. $(-i)^{\sqrt{2}}$; $\operatorname{sh}(4+4i)$.

2. $D: \operatorname{Im} z>1$; $w=\dfrac{z-i}{z}$.

27 вариант

1. 1^{-i}; $\operatorname{ch}(4+4i)$.

2. $x^2+y^2=1$; $w=2z+1$.

28 вариант

1. $1^{\sqrt{2}}$; $\cos(4+4i)$.

2. $D: |z|\le\dfrac{1}{2}$; $w=\dfrac{iz-2}{z+i}$.

29 вариант

1. $(3-4i)^{1+i}$; $\operatorname{tg} i$.

2. $D: |z|<1$; $w=i\dfrac{z-1}{z+i}$.

30 вариант

1. 4^i; $\sin(4+4i)$.

2. $D: 0<\varphi<\dfrac{\pi}{4}$; $w=\dfrac{z}{z-1}$.

Индивидуальная работа №4

Задание 1. Вычислить интеграл по кривой.

Задание 2. Вычислить интеграл по формуле Коши.

Варианты заданий

1 вариант

1. а) $\int\limits_L \operatorname{Im} z^2 \cdot z\,dz$, $L: |z|=1, -\pi\le \operatorname{arctg} z\le 0$,

б) $\int\limits_C ((y+1)-xi)\,dz$, отрезок $[z_1; z_2]$, $z_1=1$, $z_2=i$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \dfrac{3e^z-5}{\left(z^2+36\right)^2}\,dz$, $L: |z|\le 6$, б) $\int\limits_{L^+} \dfrac{5\cos z-3\sin 2z}{\left(z+\dfrac{\pi}{3}\right)^5}\,dz$, $L: \left|z+\dfrac{\pi}{3}\right|<\dfrac{1}{3}$.

2 вариант

1. а) $\int\limits_C ((3y-1)+4xi)\,dz$, C - отрезок от $z_1=i$ до $z_2=3$,

б) $\int\limits_C \operatorname{Re} z\,dz$, $C: |z-1|=1$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{z-6}{(z^2+1)(z-3)}dz$, $L: |z| \le 1.5$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{8\sin 8z}{\left(z-\frac{5\pi}{6}\right)^5}dz$, $L: \left|z-\frac{5\pi}{6}\right| < \frac{1}{4}$.

3 вариант

1. а) $\int\limits_{2-i}^{3+i} \frac{dz}{\sqrt{z}}$,

б) $\int\limits_{L^+} \operatorname{Re} z\, dz$, $L: |z-1| = 2$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{2e^z - 3e^{-z}}{(z+i)^7}dz$, $L: |z| < 1.5$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{4\sin z - 3\cos z}{(z+\pi)^2 z^2}dz$, $L: |z| \le \pi$.

4 вариант

1. а) $\int\limits_{2+i}^{3-2i} \frac{dz}{\sqrt{z}}$,

б) $\int\limits_{L} \operatorname{Im} z\, dz$, L - отрезок от $(0;0)$ до $(2;1)$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{e^{6z}-1}{(z-i)^6}dz$, $L: |z| < 2$; б) $\int\limits_{L^+} \frac{z^3+1}{z^2(z+2)(z-3)}dz$, $L: |z| < 4$.

5 вариант

1. а) $\int\limits_{i}^{1-i} \frac{dz}{\sqrt{z}}$,

б) $\int\limits_{L^+} \operatorname{Re} z\, dz$, $L: |z-1| = 1$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{2e^z - 3e^{-z}}{(z-4)^5}dz$, $L: |z-4| < 1$; б) $\int\limits_{L^+} \frac{\cos^6 z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^4}dz$, $L: \left|z-\frac{\pi}{3}\right| \le \frac{1}{2}$.

6 вариант

1. а) $\int\limits_{3i}^{3+i} \frac{dz}{\sqrt{z}}$,

б) $\int\limits_C \operatorname{Re} z\, dz$, $C: |z-1| = 1$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{\sin 7z}{\left(z^2 - (2\pi)^2\right)^3} dz$, $L: |z-\pi| < 3\pi$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{e^z + e^{-z}}{(z-1)^2(z-2)} dz$, $L: |z| \le 3$.

7 вариант

1. а) $\int\limits_C |z|^{-1}\, dz$, C - отрезок от $z_1 = 1$ до $z_2 = -i$,

б) $\int\limits_C z \operatorname{Im}\left(z^2\right) dz$, $C: |z| = 2$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{e^z + e^{-z}}{\left(z^2 + 25\right)^2} dz$, $L: |z| \le 5$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{3\sin z + 5\cos z}{\left(z + \frac{2\pi}{3}\right)^5} dz$, $L: \left|z + \frac{2\pi}{3}\right| < \frac{1}{4}$.

8 вариант

1. а) $\int\limits_{-i}^{i} z e^{z^2}\, dz$,

б) $\int\limits_C \bar{z}\, dz$, $C: |z| = 2$, $\operatorname{Im} z \le 0$, от точки $z_1 = -2$ до точки $z_2 = 2$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{dz}{z\left(z^2 - 1\right)}$, $L: |z+1| \le \frac{1}{2}$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{\cos z}{\left(z^2 - \pi^2\right)^2} dz$, $L:$ треугольник с вершинами в точках 4; $-4+i$; $-4-i$.

9 вариант

1. а) $\int\limits_{-2i}^{i} 3z^3 e^{z^2}\, dz$,

б) $\int\limits_C z|z|\, dz$, $C: |z| = 2$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{dz}{(z^2+2z+1)(z-3)}$, $L: |z| \le 3$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{\cos 4z}{\left(z+\frac{\pi}{6}\right)^6} dz$, $L: \left|z+\frac{\pi}{6}\right| < 1$.

10 вариант

1. а) $\int\limits_{L} |z|\, dz$, $L: [z_1, z_2]$ - отрезок от $z_1 = 1+i$ до $z_2 = 2i$,

б) $\int\limits_{C} z^3\, dz$, $C: |z| = 1$, $0 \le \arg z \le \frac{\pi}{3}$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{dz}{(z^2-5z+4)^2}$, $L: |z-1| = 20$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^7} dz$, $L: |z| \le 1$.

11 вариант

1. а) $\int\limits_{L} |z|\, dz$, $L: [z_1, z_2]$ - отрезок от $z_1 = 1+i$ до $z_2 = 2i$,

б) $\int\limits_{C} z^3\, dz$, $C: |z| = \frac{1}{2}$, $0 \le \arg z \le \frac{\pi}{6}$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{e^z\, dz}{(z-2)^2(z-3)}$, $L: |z-3| \le 1$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{dz}{z^2+4}$, $L:$ прямоугольник с вершинами в точках 1; $1+3i$; $-1+3i$; -1.

12 вариант

1. а) $\int\limits_{L} \operatorname{Im} z\, dz$, $L: \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{3}, \end{cases}$

б) $\int\limits_{C} z^3\, dz$, $C: |z| = 1$, $0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{(e^z - e^{-z})dz}{2(1-z)^3 z}$, $L: |z-1| \le 1$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{\sin^4 z}{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^3} dz$, $L: |z| = 2$.

13 вариант

1. а) $\int\limits_{2+i}^{2i}\left(z^{3}-z\right)e^{\frac{z^{2}}{2}}dz$,

б) $\int\limits_{C} z\bar{z}\,dz$, $C:|z|=1$.

2. а) $\int\limits_{L^{+}}\frac{e^{4z}dz}{(z+2)^{2}(z+3)}$, $L:|z|\le 3$, б) $\int\limits_{L^{+}}\frac{dz}{z^{2}+4}$, $L:|z|<3$.

14 вариант

1. а) $\int\limits_{C}\frac{dz}{z}$, $C:|z|=1$,

б) $\int\limits_{i}^{2i} ze^{\frac{z^{2}}{2}}dz$.

2. а) $\int\limits_{|z|=2^{+}}\frac{e^{z}}{(z-i)^{4}}dz$, б) $\int\limits_{L^{+}}\frac{z-1}{z^{2}(z+2)(z-3)}dz$, $L:|z|=3$.

15 вариант

1. а) $\int\limits_{L}\operatorname{Re} z\,dz$, $L:z=(2+i)t$, $0\le t\le 1$,

б) $\int\limits_{L} z\operatorname{Im} z\,dz$, $L:|z|=2$.

2. а) $\int\limits_{L^{+}}\frac{e^{z}dz}{z(1-z)^{3}}$, $L:|z|=2$, б) $\int\limits_{L^{+}}\frac{\sin z}{z^{2}+4}dz$, $L:x^{2}+y^{2}+6y=0$.

16 вариант

1. а) $\int\limits_{L} e^{|z|^{2}}\operatorname{Re} z\,dz$, $L:[z_{1},z_{2}]$ - отрезок от $z_{1}=0$ до $z_{2}=1+i$,

б) $\int\limits_{C} z^{3}dz$, $C:|z|=1$, $1\le\arg z\le\frac{\pi}{4}$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{z^2-1}{z(z+2)^2(z+3)}dz$, $L:|z|<4$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{e^{3z}}{(z-i)^5}dz$, $L:|z-i|<2$.

17 вариант

1. а) $\int\limits_L |z|\,dz$, $L:[z_1,z_2]$ - отрезок от $z_1=-1$ до $z_2=1$,

б) $\int\limits_C (2x-3iy)dz$, $C:|z|=4$, $\operatorname{Im} z \le 0$ от точки $z_1=-4$ до точки $z_2=4$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{z-3}{(z-8)^2(z+i)}dz$, $L:|z|\le 8$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{\sin 8z}{\left(z-\frac{5\pi}{6}\right)^5}dz$, $L:\left|z-\frac{5\pi}{6}\right|<\frac{1}{3}$.

18 вариант

1. а) $\int\limits_C (2x-3iy)dz$, $C:|z|=4$, $\operatorname{Im} z \le 0$ от точки $z_1=-4$ до точки $z_2=4$,

б) $\int\limits_C \operatorname{Re} z\,dz$, $C:|z-1|=1$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{z^3dz}{(z-2)(z+i)^3}$, $L:|z+i|\le 1$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{\sin 3z}{z\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}dz$, $L:|z|\le\pi$.

19 вариант

1. а) $\int\limits_L \operatorname{Re} z\,dz$, L : парабола AB: $A(2,4)$; $B(3,9)$ $(y=x^2)$

б) $\int\limits_L |z|\bar{z}\,dz$, $L:|z|=5$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{e^z dz}{(z+i)^3}$, $L:|z|=2$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)}dz$, $L:|z|=2$.

20 вариант

1. а) $\int\limits_L |z|\,dz$, $L:|z|=4$,

б) $\int\limits_C (z^3 - 1)dz$, $C: |z| = 1$, $\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \pi$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{\cos 7z}{\left(z + \frac{\pi}{3}\right)^6} dz$, $L: \left|z + \frac{\pi}{3}\right| < 0{,}5$; б) $\int\limits_{L^+} \frac{z^2 + 3z + 7}{(z - i)^3 z} dz$, $L: |z| \le 2$.

21 вариант

1. а) $\int\limits_L (y^2 + ix^2)dz$, $L:$ отрезок от $z_1 = 1 + i$ до $z_2 = 2 + 3i$,

б) $\int\limits_C z \operatorname{Im} z \, dz$, $C: |z| = 1$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{e^{5z} - 3}{z(z + 1)^3} dz$, $L: |z| \le 1$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{\cos 4z}{(z - \pi)^6} dz$, $L: |z - \pi| < 1$.

22 вариант

1. а) $\int\limits_C (x^2 + iy^2)dz$, C - отрезок AB: $A(1,1)$, $B(2,3)$,

б) $\int\limits_L z \operatorname{Re} z \, dz$, $L: |z| = 1$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{e^z + e^{-z}}{(z^2 + 9)^2} dz$, $L: |z - i| \le 10$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{2\sin z + 4\cos z}{\left(z + \frac{\pi}{6}\right)^4} dz$, $L: \left|z + \frac{\pi}{6}\right| \le 1$.

23 вариант

1. а) $\int\limits_C ((y + 1) - xi)dz$, $C: [z_1, z_2]$, $z_1 = 1$ до $z_2 = i$,

б) $\int\limits_C z^3 \, dz$, $C: |z| = 1$, $0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{\cos z}{\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^4} dz$, $L: |z| \le 2$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{z^2 + 5z - 4}{(1 - z)^3 z} dz$, $L: |z| \le 2$.

24 вариант

1. а) $\int\limits_{L} \operatorname{Re} z\, dz$, $L: |z| = 2$,

б) $\int\limits_{-i}^{C} |z| dz$, вдоль полуоси $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{z^2 + 5}{(z^2 + 9)(z - 5)} dz$, $L: |z - 5| \leq 100$,

б) $\int\limits_{L^+} \frac{3\cos z + \cos 7z}{\left(z + \frac{2\pi}{3}\right)^4} dz$, $L: \left|z + \frac{2\pi}{3}\right| < 1$.

25 вариант

1. а) $\int\limits_{C} \operatorname{Im} z\, dz$, C - отрезок AB: $A(1,0)$, $B(0,1)$,

б) $\int\limits_{C} z\bar{z}\, dz$, $C: |z| = 1$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{\cos 4z}{\left(z - \frac{5\pi}{6}\right)^6} dz$, $L: \left|z - \frac{5\pi}{6}\right| < 1$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{z^3 - 2z + 1}{(z - i)^2 (z + 2)^2} dz$, $L: |z| \leq 2$.

26 вариант

1. а) $\int\limits_{C} \bar{z}\, dz$, C :, отрезок от точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = i + 1$,

б) $\int\limits_{(\ell)} z|z|\, dz$, $(\ell): |z| = 2$, $\operatorname{Im} z \leq 0$ от точки $z_1 = -2$ до точки $z_2 = 2$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{z + 5}{(z^2 + 1)(z + 2)} dz$, $L: |z| \leq 2$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{7\cos 7z}{\left(z - \frac{2\pi}{3}\right)^5} dz$, $L: \left|z - \frac{2\pi}{3}\right| < \frac{1}{3}$.

27 вариант

1. а) $\int\limits_{0}^{i} (z - i) e^{-i} dz$,

б) $\int\limits_{L} z\,\mathrm{Im}\left(z^2\right)dz$, $L: |z| = 2$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{e^z + e^{-z}}{(z+1)^6}dz$, $L: |z+1| < 1$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{3\sin z - \sin 3z}{(z-\pi)^2 z^2}dz$, $L: |z| \le \pi$.

28 вариант

1. а) $\int\limits_{0}^{i} z\cos z\,dz$,

б) $\int\limits_{C} \frac{dz}{z}$, $C: |z| = 1$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{e^{4z}}{(z+i)^5}dz$, $L: |z| = 3$; б) $\int\limits_{L^+} \frac{z^4 - 1}{z^2(z+3)(z-2)}dz$, $L: |z| < 4$.

29 вариант

1. а) $\int\limits_{0}^{1+i} \sin z\cos z\,dz$,

б) $\int\limits_{C} |z|^{-1}dz$, $C:$ отрезок от точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = -i$,.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{\sin^5 z}{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3}dz$, $L: \left|z - \frac{\pi}{4}\right| \le 1$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{e^z - e^{-z}}{(z-1)^2(z+1)}dz$, $L: |z| \le 1$.

30 вариант

1. а) $\int\limits_{1}^{i} z\sin z\,dz$,

б) $\int\limits_{L} \frac{z}{\bar{z}}dz$, $L:$ граница области $1 < |z| < 2$.

2. а) $\int\limits_{L^+} \frac{\cos 5z}{\left(z^2 - \pi^2\right)^3}dz$, $L: |z - \pi| < 100\pi$, б) $\int\limits_{L^+} \frac{e^{4z}}{(z-9)^4}dz$, $L: |z-9| < 1$.

Индивидуальная работа №5

Задание 1. Разложить данную функцию в ряд Лорана в указанных областях.

Задание 2. Найти вычеты функции $f(z)$ в конечных особых точках.

Задание 3. С помощью вычетов вычислить интегралы.

Варианты заданий

1 вариант

1. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-9)(z^2-4)}$

а) $2<|z|<3$; б) $|z|<2$; в) $|z|>3$.

2. $f(z)=\dfrac{z^6}{(z-1)^4}$.

3. $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{d\varphi}{1-0.5\cos\varphi}$.

2 вариант

1. $f(z)=\dfrac{z^3}{(z-1)(z-2)}$

а) $0<|z-2|<1$; б) $|z-2|>2$; в) $|z-1|<1$.

2. $f(z)=\dfrac{z^5}{z^2-1}$.

3. $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{d\varphi}{1+0.3\cos\varphi}$.

3 вариант

1. $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$

а) $0<|z-1|<2$; б) $|z-1|>2$; в) $|z-3|>1$.

2. $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^3+z^5}$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^4}$.

4 вариант

1. $f(z)=\frac{1}{z^2+4}$

а) $|z|<2$; б) $0<|z+2i|<4$; в) $|z+2i|>4$.

2. $f(z)=\cos\frac{1}{z+i}$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+3\right)^2\left(x^2+1\right)}$.

5 вариант

1. $f(z)=\frac{z^4}{(z-2)^2}$

а) $|z-2|>0$; б) $|z|<2$; в) $|z-i|<\sqrt{5}$.

2. $f(z)=\frac{\cos z}{z^2+1}$.

3. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2dx}{\left(x^2+3\right)^2}$.

6 вариант

1. $f(z)=\frac{z}{z^2+1}$

а) $0<|z-i|<2$; б) $|z-i|>2$; в) $|z|<1$.

2. $f(z)=\frac{1}{z\left(z^2+4\right)^2}$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4dx}{1+x^6}$.

7 вариант

1. $f(z)=\frac{z}{\left(z^2+4\right)\left(z^2-1\right)}$

а) $|z|<1$; б) $1<|z|<2$; в) $|z|>1$.

2. $f(z)=\dfrac{\sin iz}{z^3}$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{(x^2+2)dx}{(x^2+1)^2}$.

8 вариант

1. $f(z)=\dfrac{7z-1}{z^2+z-2}$

а) $|z|<1$; б) $1<|z|<2$; в) $|z-1|>3$.

2. $f(z)=\dfrac{\cos(2iz)}{z+1}$.

3. $\int\limits_{0}^{+\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)^2}$.

9 вариант

1. $f(z)=\dfrac{3-z}{z^2-2iz+8}$

а) $0<|z-4i|<6$; б) $|z|<2$; в) $|z|>4$.

2. $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-\pi)^2}$.

3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{d\varphi}{3+\sin\varphi}$.

10 вариант

1. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3iz-2}$

а) $|z|<1$; б) $1<|z|<2$; в) $|z|>2$.

2. $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z^5}$.

3. $\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{x^2+i}{(x^2+4)^3}dx$.

11 вариант

1. $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)^2}$

а) $1<|z|<2$; б) $|z|>2$; в) $|z|<1$.

2. $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-2)^3}$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{(x^2+9)^3}$.

12 вариант

1. $f(z)=\dfrac{3-z}{z^2+2z-8}$

а) $0<|z-2|<6$; б) $|z-2|>6$; в) $2<|z|<4$.

2. $f(z)=\dfrac{z+i}{z-z^3}$.

3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{d\varphi}{1+0.1\sin\varphi}$.

13 вариант

1. $f(z)=\dfrac{2}{z^2-1}$

а) $|z-3i|<\sqrt{10}$; б) $|z|<1$; в) $|z+1|>2$.

2. $f(z)=\dfrac{z^4}{1+z^4}$.

3. . $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{d\varphi}{1+0.2\cos\varphi}$

14 вариант

1. $f(z)=\dfrac{4z}{4+z^2}$

а) $0<|z-2i|<4$; б) $|z-2i|>4$; в) $|z+2i|>4$.

2. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+i)^3}$.

3. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2x}{5-4\cos x} dx$.

15 вариант

1. $f(z)=\frac{1}{z^2+iz+12}$

а) $|z|<3$; б) $0<|z-3i|<7$; в) $|z-3i|>7$.

2. $f(z)=\frac{z^3+1}{(z+2)(z-3)}$.

3. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(5+4\cos\varphi)^2}$.

16 вариант

1. $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$

а) $0<|z-1|<1$; б) $|z-1|>1$; в) $|z|>1$.

2. $f(z)=\frac{1}{z^2-2z+5}$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+13)^2}$.

17 вариант

1. $f(z)=\frac{z}{(z^2-25)}$

а) $|z|<5$; б) $|z|>5$; в) $0<|z-5|<10$.

2. $f(z)=e^{\frac{z+1}{z}}$.

3. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

18 вариант

1. $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}$

а) $1<|z|<3$; б) $|z|>3$; в) $|z|<1$.

2. $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z+i)(z-3i)}$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+4\right)}$.

19 вариант

1. $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2-1\right)\left(z^2-9\right)}$

а) $|z|>3$; б) $1<|z|<3$; в) $|z|<1$.

2. $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2+4}$.

3. $\int\limits_{0}^{+\infty}\dfrac{x^2dx}{\left(x^2+4\right)^2}$.

20 вариант

1. $f(z)=\dfrac{z}{\left(z^2-4\right)\left(z^2-1\right)}$

а) $1<|z|<2$; б) $|z|>2$; в) $|z|<1$.

2. $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-3)}$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{xdx}{\left(x^2+4x+13\right)^2}$.

21 вариант

1. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$

а) $0<|z|<1$; б) $|z|>1$; в) $|z+1|>1$.

2. $f(z)=\dfrac{e^z+i}{z^2+4}$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{xdx}{x^4+1}$.

22 вариант

1. $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$

а) $1<|z|<2$; б) $|z|>2$; в) $|z|<1$.

2. $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z-1)^2}$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2dx}{1+x^4}$.

23 вариант

1. $f(z)=\dfrac{z^3}{z^2+1}$

а) $|z|<1$; б) $|z|>1$; в) $0<|z+i|<2$.

2. $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3(z+4)}$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^4+1}$.

24 вариант

1. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+iz+2}$

а) $0<|z-i|<3$; б) $|z-i|>3$; в) $1<|z|<2$.

2. $f(z)=e^{\frac{1}{z+2}}$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{(x^2+4)^2}$.

25 вариант

1. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3iz-2}$

а) $0<|z-i|<1$; б) $|z-i|>1$; в) $1<|z|<2$.

2. $f(z)=\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$.

3. $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$.

26 вариант

1. $f(z)=\dfrac{1}{1-z^2}$

а) $0<|z-1|<2$; б) $|z-1|>2$; в) $|z|>1$.

2. $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2\left(z^2+9\right)}$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

27 вариант

1. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2iz+3}$

а) $0<|z-i|<4$; б) $|z-i|>4$; в) $|z|<1$.

2. $f(z)=z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

28 вариант

1. $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)\left(z^2+1\right)}$

а) $1<|z|<2$; б) $|z|>2$; в) $|z|<1$.

2. $f(z)=e^{\frac{1}{z+i}}$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{\left(x^2+5\right)^2}$.

29 вариант

1. $f(z)=\dfrac{3z-2}{z^2-iz+6}$

а) $0<|z+2i|<5$; б) $|z+2i|>5$; в) $|z|<2$.

2. $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z^2)}$.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$.

30 вариант

1. $f(z)=\dfrac{4z-3}{z^2+3z+2}$

а) $0<|z+1|<1$; б) $0<|z+2|<1$; в) $|z+2|>1$.

2. $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^5}$.