

Е. Н. АКСЕНОВА

ОБЩАЯ ФИЗИКА. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ (ГЛАВЫ КУРСА)

Учебное пособие

Издание второе, исправленное



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2018

Аксенова Е. Н.

А 42 Общая физика. Колебания и волны (главы курса): Учебное пособие. — 2-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2018. — 72 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-2910-3

Этот курс лекций по общей физике является результатом многолетней преподавательской деятельности доцента, кандидата физико-математических наук Е. Н. Аксеновой при работе со студентами МИФИ. Он создан по просьбе и при технической поддержке самих студентов. Отличительной особенностью этого курса является его интерактивный характер, заключающийся в том, что материал каждой темы в процессе его изложения содержит четко сформулированные качественные вопросы. Они помогают понять физические нюансы изучаемого материала и выработать личное суждение по данному вопросу, а затем сравнить его с приведенным далее правильным ответом. Кроме того, курс ставит своей целью научить читателя пользоваться изложенным материалом применительно к решению задач, построив мостик между «узнал, понял» и «могу использовать, решать». Поэтому каждый раздел содержит параграф, посвященный методике решения задач с последовательным изложением программы практических действий.

Пособие предназначено для студентов вузов всех форм обучения и направлений подготовки, входящих в УГС: «Физика и астрономия», «Электроника, радиотехника и системы связи», «Электро- и теплотехника», «Физико-технические науки и технологии», «Машиностроение», «Технологии материалов», «Авиационная и ракетно-космическая техника», и других физико-математических и инженерно-технических направлений. Книга также будет полезна учителям общеобразовательных школ и учащимся физико-математических классов.

ББК 22.213я73

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

© Издательство «Лань», 2018
© Е. Н. Аксенова, текст,
макет, иллюстрации, 2018
© Издательство «Лань»,
обложка, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. КОЛЕБАНИЯ

1. Классификация колебаний.....	5
2. Гармонические колебания.....	5
3. Получение динамического уравнения гармонического осциллятора из закона сохранения энергии.....	8
4. Конкретные задачи нахождения собственных частот ω_0 гармонических осцилляторов.....	9
5. Решение динамической задачи гармонического осциллятора.....	11
6. Энергия гармонического осциллятора.....	13
7. Векторная диаграмма.....	14
8. Биения.....	15
9. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.....	15
10. Экскурс в математику: комплексные числа.....	17
11. Экскурс в математику: линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.....	17
12. Затухающие колебания (общее решение).....	18
13. Аперидический процесс.....	21
14. Логарифмический декремент затухания.....	23
15. Задачи.....	23
16. Энергия системы, совершающей свободные затухающие колебания.....	24
17. Добротность колебательной системы.....	25
18. Вынужденные колебания.....	26
19. Энергия системы, совершающей установившиеся вынужденные колебания.....	30
20. Задачи на вынужденные колебания.....	31

II. ВОЛНЫ

Введение. Классификация волн.....	33
-----------------------------------	----

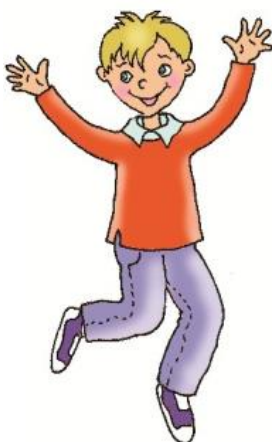
II.1. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

1. Определения и постановка задачи.....	34
2. Плоские волны в однородной среде.....	36
3. Сферические волны.....	37
4. Цилиндрические волны.....	37
5. Затухающие волны.....	37
6. Волновое уравнение.....	38
7. Связь фазовой скорости и скорости распространения волн.....	40
8. Энергия упругой волны.....	40
9. Поток энергии упругой волны. Вектор Умова. Интенсивность волны.....	42
10. Стоячие волны.....	43
11. Пример сравнения бегущей и стоячей волн.....	46
12. Распределение энергии в стоячей волне.....	47
13. Эффект Доплера для упругих волн.....	49
14. Ударные волны.....	51
15. Связь интенсивности с приращением давления.....	52
16. Субъективные оценки для звуковых волн.....	53

II.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

1. Общие понятия и предыстория.....	54
2. Волновое уравнение для электромагнитных волн.....	56
3. Плотность энергии электромагнитных волн. Вектор Пойнтинга.....	59

4. Поток импульса электромагнитного поля. Давление электромагнитной волны на преграду.....	62
5. Излучение элементарного диполя. Мощность излучения (формула Лармора).....	63
6. Типы поляризации.....	65
7. Отражение и преломление плоской волны на границе двух диэлектриков. Законы отражения и преломления света. Явление полного внутреннего отражения.....	66
8. Поляризация при отражении от поверхности диэлектрика. Угол Брюстера.....	67
9. Коэффициент отражения и пропускания плоской электромагнитной волны на границе раздела двух диэлектриков.....	69



I. Колебания

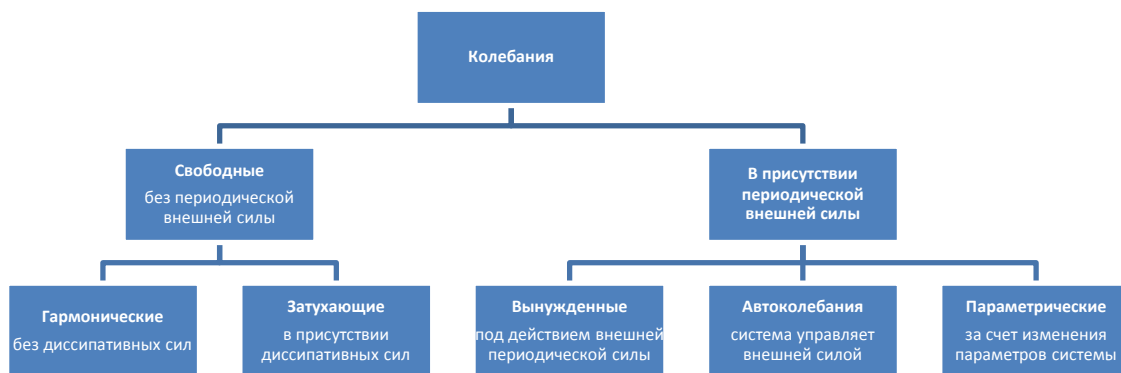
1. Классификация колебаний

Опред. Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости.

В зависимости от природы повторяющегося процесса различают: механические, электромагнитные, электромеханические колебания.

Рассмотрим сначала механические колебания.

В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему колебания различают следующим образом:



Опред. Свободными или собственными колебаниями называются такие колебания системы, которые существуют в системе, предоставленной самой себе, после того как она была каким-либо образом выведена из положения равновесия.

Вынужденными называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы.

Автоколебаниями называются колебания, при которых система сама управляет внешним воздействием (например, часы).

Параметрические колебания – колебания, при которых за счёт внешнего воздействия происходит периодическое изменение параметров колеблющейся системы. Примерами таких систем являются: маятник на нитке, длина которой изменяется в такт с колебаниями ($l_{\min}$ – в нижнем положении и $l_{\max}$ – в крайних положениях), а также раскачивание на качелях, которое обсуждалось при изучении закона сохранения момента импульса системы.



2. Гармонические колебания

Гармонические колебания относятся к свободным, а в определении свободных колебаний есть слова «система предоставлена самой себе».

Вопрос. Что это значит?

Ответ. Это не значит, что на систему не действуют никакие силы, так как свободная частица, которую толкнули, не будет совершать колебания.



Вопрос. Что она будет делать?

Ответ. Она будет двигаться прямолинейно и равномерно.

Слова «предоставлена самой себе» означают в данном случае, что частица не подвержена воздействию внешней периодической силы.

В определении свободных колебаний говорится, что система выведена из положения равновесия $\Rightarrow$ у системы существует положение равновесия. $\Rightarrow$

Вспоминаем условия равновесия системы с одной степенью свободы:

$$\begin{cases} U' = 0 - \text{наличие положения равновесия} \\ U'' > 0 - \text{устойчивость положения равновесия} \end{cases} \Rightarrow$$



Условия существования свободных колебаний в системе:

1. Существует возвращающая – квазиупругая сила $\Rightarrow$ наличие квазиупругих свойств системы.
2. Существуют инертные свойства системы – инерционность системы.

Наша задача – выяснить, какова природа квазиупругих сил (от *лат.* *quasi* – нечто вроде, как бы) в различных системах, которые способны совершать свободные колебания.

Рассмотрим различные колебательные системы.

1) Груз на пружинке.

Дано: m, k .

Найти: динамическое уравнение.

Решение.

Выберем начало координат в положении равновесия и запишем II закон Ньютона, спроецированный на ось x .

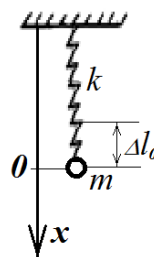
$$\text{В положении равновесия: } 0 = mg - k\Delta l_0 \rightarrow \Delta l_0 = \frac{mg}{k}.$$

В процессе движения шарика его динамическое уравнение в проекции на ось x имеет вид

$$m\ddot{x} = mg - k(\Delta l_0 + x).$$

Уравнение динамики данной системы преобразуется к виду: $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$.

Роль возвращающей – квазиупругой силы играет упругая сила.



2) Математический и физический маятник.

Опред. Маятник (физический) – твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной оси или точки (квазиупругая сила – сила тяжести).

Математический маятник – идеализированная система, состоящая из невесомой нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке.

а) Физический маятник.

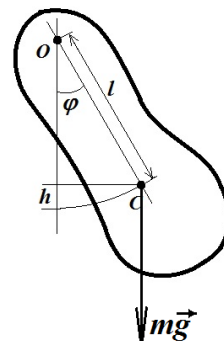
Дано: l – расстояние от точки подвеса до центра масс, m – масса, I – момент инерции маятника.

Найти: динамическое уравнение.

Решение.

$$I\ddot{\beta} = [\vec{l}, m\vec{g}].$$

$I\ddot{\beta} = -mgl \sin \varphi$ $\leftarrow$ знак «минус» означает, что в данном случае момент силы $m\vec{g}$ направлен от нас. Будем обозначать это направление так $\otimes$. Напомним, что положительное направление оси вращения на нас $\bullet$. Оно соответствует повороту на угол φ против часовой стрелки, именно это направление поворота считается положительным, а момент силы тяжести на рисунке вращает маятник по часовой стрелке.



$$\begin{cases} \beta = \ddot{\varphi} \\ \sin \varphi \approx \varphi \text{ для } \varphi < 6^\circ \end{cases} \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I} \varphi = 0.$$

б) Для математического маятника $I = ml^2 \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$.

В данном случае квазиупругие свойства системы определяются моментом силы тяжести относительно оси вращения маятника.

3) Крутильный маятник.

Дано: m – масса, R – радиус диска, k – жесткость нити.

Найти: уравнение динамики.

Решение:

$$I\ddot{\varphi} = -k\varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{k}{I}\varphi = 0.$$

Квазиупругая сила – сила упругости нити.

4) Шарик в потенциальной яме.

Дано: m – масса, U – потенциальная энергия шарика, $\hat{y}(\hat{x})$ – вид возможной траектории движения шарика.

Найти: уравнение динамики шарика вблизи положения устойчивого равновесия.

Решение.

$$U = mgy = \frac{amgx^2}{2} = \frac{kx^2}{2};$$

$$y = \frac{ax^2}{2};$$

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{2mgax}{2} \cdot \vec{e}_x = -mgax \cdot \vec{e}_x;$$

$$m\ddot{x} = -mgax \Rightarrow \ddot{x} + agx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

В данном случае квазиупругая сила – консервативная сила, определяемая $m\vec{g}$ и профилем потенциальной ямы.

Вывод: для всех рассмотренных систем динамическое уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

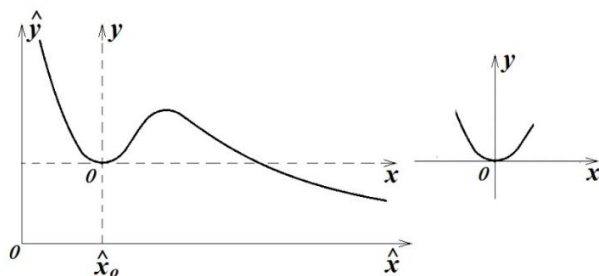
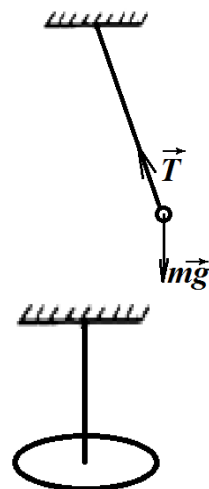
Здесь q – обобщенная координата, обозначающая периодически изменяющийся параметр системы (в рассмотренных случаях x или φ), ω_0^2 – положительный коэффициент.

ω_0 – частота гармонического осциллятора (от лат. *oscillo* – качаюсь).

$$\omega_0^2 = \left(\frac{k}{m}; \frac{g}{l}; \frac{mgl}{I}; \frac{k}{I}; ag \right).$$

Вопрос. Почему этот положительный коэффициент так называется?

Ответ. Потому что решением этого динамического уравнения, как будет показано впоследствии, является суперпозиция гармонических функций $\sin \omega_0 t$, $\cos \omega_0 t$. Поэтому и свободные колебания, которые совершает система, не подверженная действию диссипативных сил, называются гармоническими.



Следует отметить, что множество физических процессов происходит по закону $\sin$ или $\cos$ (что то же самое) и, вообще, периодические процессы любой формы могут быть представлены как наложение нескольких гармонических колебаний.

Проанализируем структуру второго слагаемого $\omega_0^2 q$:

$$\omega_0^2 q = \frac{| \text{квазиупругая сила (или ее момент)} |}{\text{масса (или момент)}} =$$

$$= \begin{cases} \omega_0^2 x = \frac{| \text{квазиупругая сила} |}{\text{масса}} \leftarrow \text{поступательное движение} \\ \omega_0^2 \varphi = \frac{| \text{момент квазиупругой силы} |}{\text{момент инерции относительно оси}} \leftarrow \text{вращательное движение} \end{cases}$$



$$\omega_0 - \text{статическая характеристика системы} = \begin{cases} \sqrt{\frac{k}{m}} \leftarrow \text{пружина + потенциальная яма} \\ \sqrt{\frac{mgl}{I}} \leftarrow \text{физический маятник} \\ \sqrt{\frac{g}{l}} \leftarrow \text{математический маятник} \\ \sqrt{\frac{k}{I}} \leftarrow \text{крутильный маятник} \end{cases}$$

Анализ ω_0 :

- 1) $\omega_0 \sim \sqrt{k}$, то есть чем больше квазиупругая сила, тем чаще будет колебаться система;
- 2) $\omega_0 \sim \frac{1}{\sqrt{m}}$, чем более инертная система, тем более редкие (более размеренные, спокойные) колебания она совершает;
- 3) $\omega_0 \sim \frac{1}{\sqrt{l}}$, чем длиннее нить маятника, тем реже (спокойнее) колебания.

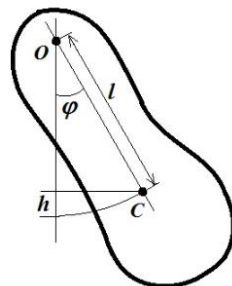
3. Получение динамического уравнения гармонического осциллятора из закона сохранения энергии

Если нет диссипативных (неконсервативных) сил $\Rightarrow$ полная энергия системы $E = \text{const}$.
Для всех рассмотренных систем:

$$E = E_K + U;$$

$$E_K = \begin{cases} \frac{m\dot{x}^2}{2} \\ \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} \end{cases} = \begin{cases} \frac{m}{2}\dot{q}^2 \\ \frac{I}{2}\dot{q}^2 \end{cases};$$

$$U = \begin{cases} \frac{kx^2}{2} \\ \frac{mgl\varphi^2}{2} \leftarrow \text{для физ. маятника} \end{cases} = \begin{cases} \frac{m}{2}\omega_0^2 q^2 \\ \frac{I}{2}\omega_0^2 q^2 \end{cases}.$$



Действительно, для физического маятника:

$$U = mgh = mg(l - l \cos \varphi) = mgl 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \approx \frac{mgl \varphi^2}{2}.$$

Полная механическая энергия:

$$E = \begin{cases} \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2) \\ \frac{I}{2}(\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2) \end{cases} = \xi(\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2), \text{ где } \xi = \begin{cases} \frac{m}{2} \\ \frac{I}{2} \end{cases}.$$

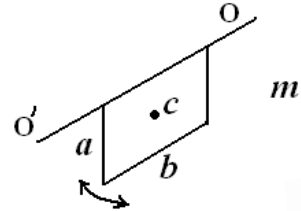
Так как $E = \text{const} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 = \xi \cdot (2\dot{q}\ddot{q} + \omega_0^2 2q\dot{q}) = 2\xi \cdot \dot{q} \cdot (\ddot{q} + \omega_0^2 q) = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$, что и требовалось доказать.

4. Конкретные задачи нахождения собственных частот ω_0 гармонических осцилляторов

I. В простейших случаях:

$$q\omega_0^2 = \frac{\text{квазиупр. сила (момент квазиупр. силы)}}{\text{масса (момент инерции относительно оси)}}.$$

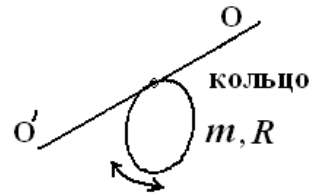
а) Прямоугольник: $\omega_0^2 = \frac{mg \frac{a}{2}}{\frac{ma^2}{3}} = \frac{3g}{2a} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2a}};$



б) $\omega_0^2 = \frac{mRg}{2mR^2} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2R}};$



в) $\omega_0^2 = \frac{mgR}{\frac{mR^2}{2} + mR^2} = \frac{2g}{3R} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3R}}.$



II. Написание динамического уравнения + нахождение ω_0 .

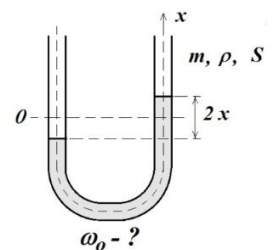
1) Жидкость в U-образной трубке.

$$m = \rho S l;$$

$$\rho S l \ddot{x} = -\rho S g 2x \text{ (знак «минус», так как сила возвращающая);}$$

$$\ddot{x} + \frac{2g}{l} x = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

Квазиупругая сила – сила тяжести.





Общие рекомендации:

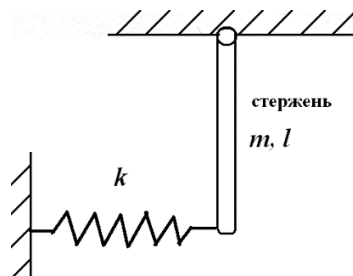
- если система совершает чисто вращательное или чисто поступательное движение, то можно сразу попытаться написать динамическое уравнение;
- если движение более сложное, проще получить динамическое уравнение через энергию системы.

$$2) \quad I\ddot{\varphi} = -mg\frac{l}{2}\varphi - kl^2\varphi;$$

$$I = \frac{ml^2}{3};$$

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{3mgl}{2ml^2} + \frac{3kl^2}{ml^2} \right) \varphi = 0;$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3mgl}{2ml^2} + \frac{3kl^2}{ml^2}} = \sqrt{\frac{3(mg + 2kl)}{2ml}} = \sqrt{\frac{3g}{2l} + \frac{3k}{m}}.$$



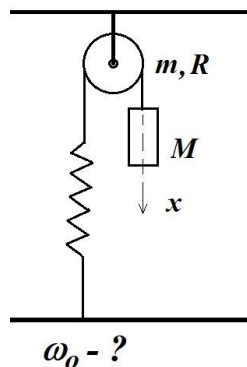
3) Эта задача содержит тело M ,двигающееся поступательно, и вращающийся блок m , поэтому проще решать с помощью закона сохранения энергии системы:

$$E = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{mR^2}{2 \cdot 2} \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2 + \frac{kx^2}{2} - Mgx;$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 = \left(M + \frac{m}{2} \right) \dot{x}\ddot{x} + \frac{\dot{x}2kx}{2} - \dot{x}Mg = 0;$$

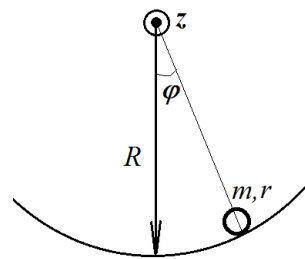
$$\left(M + \frac{m}{2} \right) \ddot{x} + kx - Mg = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{m}{2}}} \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{M + \frac{m}{2}} x = \frac{M}{M + \frac{m}{2}} g.$$



4) Шар m , r катается по шаровой полости радиуса R .

Движение шара будем рассматривать как суперпозицию вращения вокруг оси, проходящей через его центр масс, которое определяется углом поворота φ_1 , и вращения вокруг оси z , определяемое углом поворота φ .



$$\begin{cases} E = \text{const} = \frac{2}{5}mr^2 \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{mV_C^2}{2} + \frac{mg(R-r)\varphi^2}{2}; \\ V_C = (R-r)\dot{\varphi} \leftarrow \text{т. к. центр масс движется по окружности радиуса } (R-r); \\ \dot{\varphi}R = \dot{\varphi}_1 r \Rightarrow \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi} \frac{R}{r}; \end{cases}$$

$$E = \frac{mr^2}{5} \dot{\varphi}^2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 + \frac{m(R-r)^2 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mg(R-r)\varphi^2}{2} = m\dot{\varphi}^2 \left[\frac{R^2}{5} + \frac{(R-r)^2}{2} \right] + \frac{mg(R-r)\varphi^2}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 = 2m\dot{\phi} \left\{ \dot{\phi} \left[\frac{7R^2}{10} - Rr + \frac{r^2}{2} \right] + \frac{g(R-r)}{2} \phi \right\} \Rightarrow$$

$$\dot{\phi} \left[\frac{7R^2}{10} - Rr + \frac{r^2}{2} \right] + \frac{g(R-r)}{2} \phi = 0 \Rightarrow$$

Если $R \gg r$, то $\omega_0 \approx \sqrt{\frac{5g}{7R}}$.

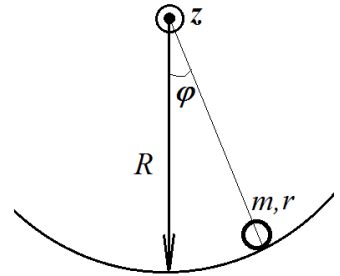
5) Цилиндр катается по цилиндрической полости радиуса R :

$$\begin{cases} E = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{I\dot{\phi}_1^2}{2} + \frac{mg(R-r)\phi^2}{2} \\ R\phi = r\phi_1 \\ I = \frac{mr^2}{2} \\ V_C = \dot{\phi}(R-r) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m(R-r)^2}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{mr^2}{4} \frac{R^2}{r^2} \dot{\phi}^2 + \frac{mg(R-r)}{2} \phi^2 \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{\phi} \left((R-r)^2 \ddot{\phi} + \frac{R^2}{2} \ddot{\phi} + g(R-r)\phi \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g(R-r)}{\frac{3R^2}{2} - 2Rr + r^2}} \approx \sqrt{\frac{2g}{3R}}.$$



5. Решение динамической задачи гармонического осциллятора

Наша задача – исследовать общее решение динамического уравнения гармонического осциллятора:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Общее решение этого уравнения, как будет показано в дальнейшем, представляет собой сумму двух линейно независимых гармонических функций $\sin \omega_0 t$ и $\cos \omega_0 t$:

$$q = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t = C_3 \sin(\omega_0 t + \alpha_1) = C_4 \cos(\omega_0 t + \alpha_2).$$

Это 3 равноценные записи одного и того же общего решения.

Проверим первое решение, подставив его в уравнение:

$$\dot{q} = C_1 \omega_0 \cos \omega_0 t - C_2 \omega_0 \sin \omega_0 t;$$

$$\ddot{q} = -C_1 \omega_0^2 \sin \omega_0 t - C_2 \omega_0^2 \cos \omega_0 t;$$

$$-C_1 \omega_0^2 \sin \omega_0 t - C_2 \omega_0^2 \cos \omega_0 t + \omega_0^2 C_1 \sin \omega_0 t + \omega_0^2 C_2 \cos \omega_0 t = 0.$$

Естественно, что вполне аналогично удовлетворяют уравнению формы решения $C_3 \sin(\omega_0 t + \alpha_1)$ и $C_4 \cos(\omega_0 t + \alpha_2)$.

Вопрос. Когда и какая форма решения предпочтительнее?

Ответ. Это зависит от начальных условий задачи. Написанные нами динамические уравнения говорят о том, что если вывести систему из состояния равновесия, то она будет колебаться с частотой ω_0 . Но зависимость $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ определяется тем, каким образом мы выведем систему из состояния покоя. Любая форма решения содержит две константы, следовательно, нам нужно два начальных условия для их определения.



$\begin{cases} \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \\ q(0) = q_0 \end{cases}$, то есть в зависимости от вида движения системы (поступательного или вращательного) q и $\dot{q}$ представляют собой:

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0 \\ \varphi(0) = \varphi_0 \end{cases}.$$



Рассмотрим шарик на пружине.

1) Шарик оттянули вниз на x_0 и отпустили.

Начальные условия: $\begin{cases} \dot{x}(0) = 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}.$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t;$$

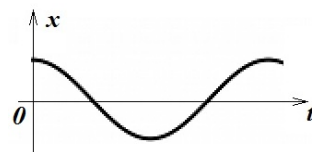
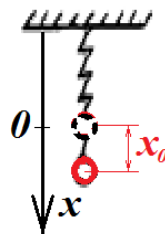
$$\dot{x} = -C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t.$$

Подставляем начальные условия в полученное решение:

$$\dot{x}(0) = -C_1 \cdot 0 + C_2 \omega_0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0;$$

$$x = C_1 \cos \omega_0 t; \quad x(0) = C_1 \cdot 1 = x_0 \Rightarrow C_1 = x_0.$$

В этом случае уравнение движения шарика $x = x_0 \cos \omega_0 t$.



2) По покоившемуся в положении равновесия шарiku стукнули снизу, сообщив ему скорость v_0 .

Начальные условия: $\begin{cases} \dot{x}(0) = -v_0 \\ x(0) = 0 \end{cases}.$

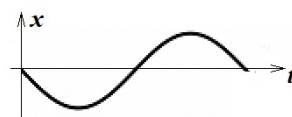
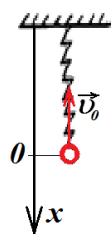
$$x(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0;$$

$$x = C_2 \sin \omega_0 t;$$

$$\dot{x} = \omega_0 C_2 \cos \omega_0 t;$$

$$\dot{x}(0) = \omega_0 C_2 \underbrace{(\cos 0)}_{=1} = -v_0 \Rightarrow C_2 = -\frac{v_0}{\omega_0}.$$

Уравнение движения шарика $x = -\frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$.

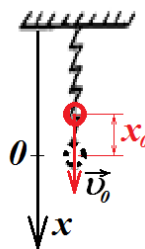


3) Шарик приподняли на x_0 и дернули вниз, придав скорость v_0 .

$$x = C \cos(\omega_0 t + \alpha);$$

$$\begin{cases} x(0) = C \cos \alpha = -x_0 \\ \dot{x}(0) = -C \omega_0 \sin(\omega_0 \cdot 0 + \alpha) = v_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0}{\omega_0 x_0} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{v_0}{\omega_0 x_0};$$

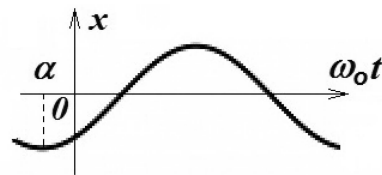


$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2 x_0^2}}};$$

$$C \cdot \cos \alpha = -x_0 \rightarrow C \cdot \frac{\omega_0 x_0}{\sqrt{\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2}} = -x_0;$$

$$C = -\frac{\sqrt{\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2}}{\omega_0} = -\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} - \text{амплитуда колебаний.}$$

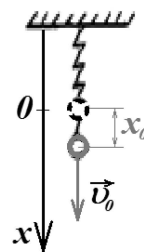
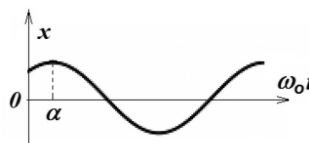
$$x = -\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \cos(\omega_0 t + \alpha) - \text{уравнение движения шарика.}$$



4) Если шарик оттянули вниз и дёрнули в ту же сторону, то график будет такой, как показано на рисунке.

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} - \text{начальные условия;}$$

$$\alpha = -\arctg \frac{v_0}{\omega_0 x_0} - \text{начальная фаза.}$$



$\psi = (\omega_0 t + \alpha)$ – фаза гармонического осциллятора,

α – начальная фаза,

C – амплитуда гармонического осциллятора

} – это динамические характеристики системы;

ω_0 – частота гармонического осциллятора – свойство системы, не зависящее от того, движется система или покоится. Это – статическая характеристика системы, определяемая квазиупругими свойствами осциллятора.



6. Энергия гармонического осциллятора

Выясним, как изменяется во времени кинетическая и потенциальная энергия гармонического осциллятора:

$$E = U + E_k;$$

$$U = \begin{cases} \frac{kx^2}{2} \\ \frac{mgl\varphi^2}{2} \end{cases}; \quad E_k = \begin{cases} \frac{m\dot{x}^2}{2} \\ \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$E = \begin{cases} \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \frac{k}{m}x^2) \\ \frac{I}{2}(\dot{\varphi}^2 + \frac{mgl}{I}\varphi^2) \end{cases} = \begin{cases} \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) \\ \frac{I}{2}(\dot{\varphi}^2 + \omega_0^2 \varphi^2) \end{cases}.$$

Свободные гармонические колебания возникают в системе только в отсутствие диссипативных сил, при этом полная энергия гармонического осциллятора сохраняется $E = \text{const}$, следовательно, в процессе колебаний происходит переход кинетической энергии в потенциальную и обратно.

Пусть наш маятник колеблется по закону $x = a \cdot \sin \omega_0 t$.

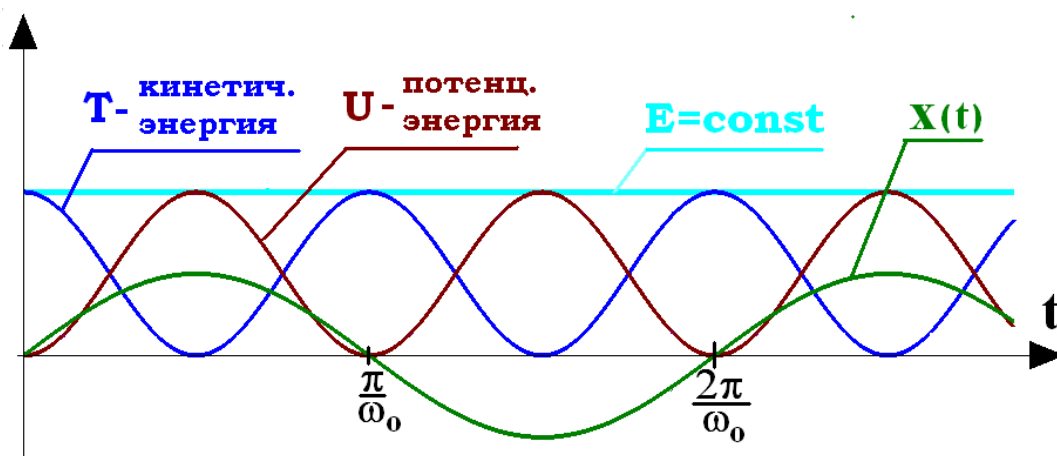
Вопрос. Что надо сделать, чтобы он колебался именно по такому закону?

Ответ. В начальный момент надо придать ему скорость $v_0 = \omega_0 \cdot a$.

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t}{2}; \quad U = \frac{kx^2}{2} = \frac{ka^2}{2} \sin^2 \omega_0 t = \frac{\omega_0^2 \cdot ma^2}{2} \sin^2 \omega_0 t;$$

$$E_k = \frac{ma^2\omega_0^2}{4} (1 + \cos 2\omega_0 t); \quad U = \frac{\omega_0^2 \cdot ma^2}{4} (1 - \cos 2\omega_0 t) \Rightarrow$$

$$E = E_k + U = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} = \frac{ka^2}{2} = \text{const} = U_{\text{max}} = E_{k_{\text{max}}}.$$



7. Векторная диаграмма

Гармоническое колебание может быть задано с помощью вращающегося вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью x угол, равный начальной фазе. Пусть вектор $\vec{a}$ вращается с угловой скоростью ω_0 . Тогда его проекция на ось x совершает гармонические колебания:

$$x = a \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

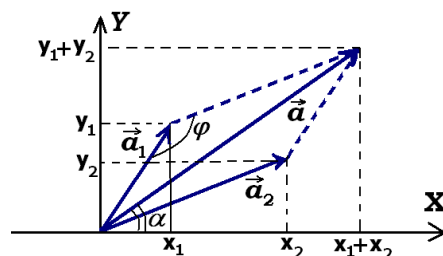
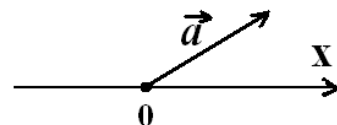
Сложение колебаний одного направления, отличающихся начальной фазой и амплитудой, удобно производить с помощью векторной диаграммы. Сложим два колебания:

$$x_1 = a_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \quad x_2 = a_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2).$$

В соответствии с векторной диаграммой результирующее колебание будет соответствовать проекции на ось x вектора $\vec{a}$, вращающегося с угловой скоростью ω_0 и имеющего начальную ориентацию под углом α относительно оси x .

$$\tan \alpha = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2};$$

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \varphi = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$



8. Биения

Биения – результат сложения одинаково направленных колебаний с равными амплитудами и близкими частотами.

Условия возникновения биений при сложении двух колебаний:

1) направления колебаний параллельны $x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1)$, $x_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$;

2) $a_1 = a_2$;

3) $\omega_1 = \omega_2 \pm \Delta\omega$, $\Delta\omega \ll \omega_1$.

Сложим два однонаправленных колебания с близкими частотами и равными амплитудами:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 [\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \cos(\omega_2 t + \alpha_2)].$$

Учтем, что $\omega_1 \approx \omega_2$, и введем обозначения:

$$\omega_1 = \omega + \Delta\omega, \quad \omega_2 = \omega,$$

$$a_1 = a.$$

Получим

$$x = 2a \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \cos \left(\omega t + \frac{\Delta\omega t}{2} \right) = 2a \cos \frac{\Delta\omega \cdot t}{2} \cos \omega t.$$

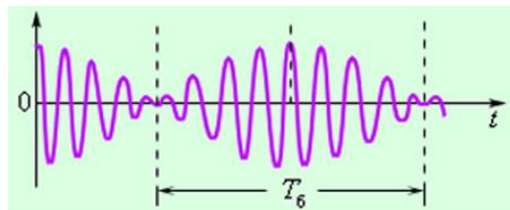
$$A = 2a \cos \frac{\Delta\omega \cdot t}{2} - \text{осциллирующая амплитуда колебаний.}$$

$$T_6 = \frac{2}{2} \cdot \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} - \text{период биений.}$$

$$N_1 = f = \frac{\omega}{2\pi} - \text{число колебаний в единицу времени.}$$

Вопрос. Сколько колебаний N совершает система за один период колебаний?

$$\underline{\text{Ответ.}} \quad N = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{\omega}{\Delta\omega}.$$



9. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

1) Рассмотрим параметрическое задание траектории, по которой движется тело, участвующее в колебаниях по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Его координаты изменяются по гармоническому закону:

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = b \cos(\omega t + \alpha) \end{cases}$$

Получим уравнение траектории движения тела в явном виде:

$$\cos \omega t = \frac{x}{a} \Rightarrow \sin \omega t = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}};$$

$$\frac{y}{b} = \cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cdot \cos \alpha - \sin \omega t \cdot \sin \alpha = \frac{x}{a} \cos \alpha \mp \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \sin \alpha \Rightarrow$$

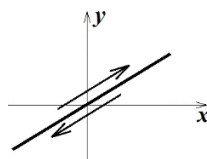
$$\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a} \cos \alpha \right)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \sin^2 \alpha \Rightarrow \left(\frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{x}{a} \right)^2 \cos^2 \alpha - 2 \frac{xy}{ab} \cos \alpha = \sin^2 \alpha - \frac{x^2}{a^2} \sin^2 \alpha.$$

Уравнение траектории движения:

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{2xy}{ab} \cos \alpha = \sin^2 \alpha \text{ — это уравнение эллипса.}$$

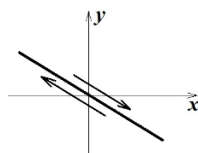
$$a) \alpha = 2\pi n \rightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0 \rightarrow y = \frac{b}{a}x,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$



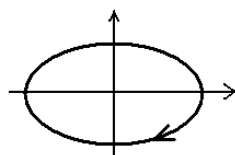
$$б) \alpha = \pi(2n+1) \rightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0 \rightarrow y = -\frac{b}{a}x,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

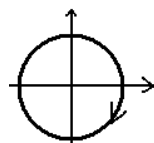


$$в) \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

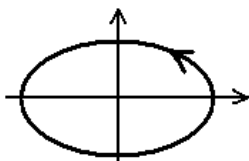


если $a = b$, то

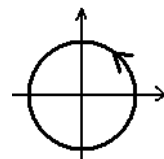


$$г) \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

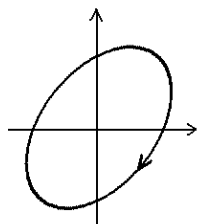


если $a = b$, то



$$д) \alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



2) Если $\omega_1 \neq \omega_2$, но $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{q}{p}$, где q, p — целые числа, то возникают замкнутые фигуры,

называемые *фигурами Лиссажу*.

При этом число касаний данной фигуры Лиссажу с осями x и y прямо пропорционально частоте колебаний в соответствующем направлении

$$\frac{n_y}{n_x} = \frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{p}{q}.$$

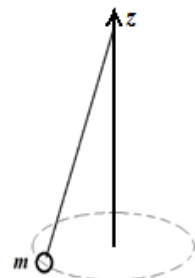
Пример.

Конец маятника описывает траекторию $\begin{cases} x = a \cos(\omega t + \alpha_1) \\ y = a \cos(\omega t + \alpha_2) \end{cases}$.

При этом:

$$x\dot{y} - \dot{x}y = \text{const} = -\omega a^2 [\cos(\omega t + \alpha_1) \sin(\omega t + \alpha_2) - \sin(\omega t + \alpha_1) \cdot \cos(\omega t + \alpha_2)] =$$

$$= -\omega a^2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \text{const.} \Rightarrow$$



Вопрос. Какая величина сохраняется?

Ответ. Это момент импульса маятника относительно оси z , деленный на массу шарика.

10. Экскурс в математику: комплексные числа

Комплексные числа z – совокупные числа, состоящие из вещественной или действительной $\text{Re } z$ части и мнимой $\text{Im } z$ части.

Мнимые или софистические числа $\text{Im } z$ были введены Кордано в середине XVI в. в связи с изучением корней уравнений.

Мнимая единица $i = \sqrt{-1}$.

$z \equiv x + iy$, где $x = \text{Re } z$, $y = \text{Im } z$.

Существуют три эквивалентные записи комплексного числа:

$$z = x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}.$$

Формулы Эйлера:

$$\begin{cases} e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \\ e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{cases};$$

$$\begin{cases} ch \varphi = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ sh \varphi = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}.$$

Если $z = i \Rightarrow z = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$z^* \equiv x - iy = \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi) = \rho e^{-i\varphi} \leftarrow$ комплексно сопряженное число числу z .

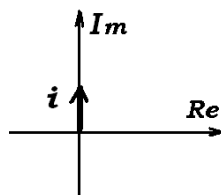
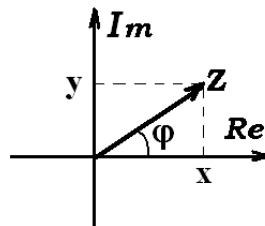
Действия над комплексными числами.

Разные действия удобно производить в разной форме:

1. Сложение: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

2. Умножение, деление: $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

3. Перемножение сопряженных чисел: $z \cdot z^* = \rho^2$.



11. Экскурс в математику: линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t)$.

Это *линейное* уравнение, так как оно содержит неизвестные только в первой степени.

Это *дифференциальное уравнение второго порядка*, так как наивысшая производная – вторая.

Это уравнение с *постоянными коэффициентами*, так как a, b не зависят от времени.

Метод решения: решение ищется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$x_{\text{общ.}} = x_{\text{общ. однород.}} + x_{\text{частн. неоднор.}} = x_1 + x_2.$$

Уравнение однородное, если свободный член $f(t) = 0$.

Общее решение однородного уравнения будем искать в виде $x_1 = Ce^{\lambda t}$.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= Ce^{\lambda t} \\ \dot{x}_1 &= \lambda Ce^{\lambda t} \\ \ddot{x}_1 &= \lambda^2 Ce^{\lambda t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda^2 Ce^{\lambda t} + a\lambda Ce^{\lambda t} + bCe^{\lambda t} = 0 \Rightarrow$$

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ – характеристическое уравнение, решением которого являются:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Нас интересует случай $b > 0$, который является физически интерпретируемым, так как b пропорционально коэффициенту упругости.

Если $a = 0$, то $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{b} = \pm i\omega_0$, так как при этом исходное уравнение приобретает вид $\ddot{x} + bx = 0$, а это при $b > 0$ динамическое уравнение гармонического осциллятора.

$$x_1 = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} = C_1 (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + C_2 (\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t) \Rightarrow$$

берем действительную часть полученного решения и получаем:

$x_1 = C_3 \cos \omega_0 t + C_4 \sin \omega_0 t$ ← это уже известное нам решение для гармонического осциллятора, теперь мы его получили строго математически.

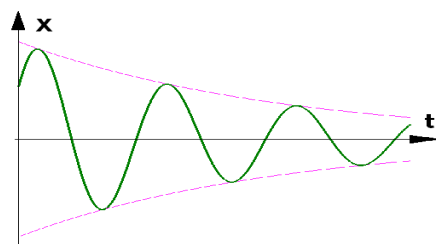
Если $a \neq 0$, то

$$x_1 = e^{\frac{-at}{2}} [C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t], \text{ где } \omega = \frac{\sqrt{-a^2 + 4b}}{2},$$

или в других записях:

$$x_1 = Ae^{\frac{-at}{2}} \cos(\omega t + \alpha_1);$$

$$x_1 = Ae^{\frac{-at}{2}} \sin(\omega t + \alpha_2).$$



Замечание.

Если полученные значения $\lambda_1 = \lambda_2$, то общее решение однородного уравнения следует искать в виде $x_1 = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}$.

12. Затухающие колебания (общее решение)

Обратимся к физике реальных колебательных процессов.

а) Уравнение гармонического осциллятора:

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0;$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \omega_0^2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \Rightarrow$$

$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$ является общим решением соответствующего дифференциального уравнения.



б) Если существует сила сопротивления, пропорциональная скорости $\dot{x}$, то динамическое уравнение примет вид:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}, \text{ где } r - \text{коэффициент сопротивления} \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

$$\text{Здесь } \frac{r}{m} \geq 0, \frac{k}{m} > 0, \text{ поэтому нас интересует случай } \begin{cases} a \geq 0 \\ b > 0 \end{cases}.$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad - \text{динамическое уравнение свободных затухающих колебаний,}$$

где $\beta = \frac{r}{2m}$ – коэффициент затухания системы, т.к. именно β определяет собой уменьшение амплитуды колебаний со временем.

Как видим, полученное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка, общее решение которого было найдено в предыдущем параграфе. Необходимо только заменить обозначения коэффициентов:

$$a = 2\beta; \quad b = \omega_0^2.$$

Общее решение, описывающее свободные затухающие колебания системы, имеет вид:

$$x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота свободных затухающих колебаний.

Собственная частота гармонических колебаний $\omega_0 > \omega$.

$Ae^{-\beta t}$ – амплитуда колебаний (амплитуда убывает со временем);

α – начальная фаза.

A и α определяются из начальных условий.

$$\text{Смысл } \beta: \quad \beta = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \beta \cdot \tau = 1.$$

τ – время релаксации, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} - \text{период затухающих колебаний.}$$

Рассмотрим поведение колебательной системы в зависимости от начальных условий.

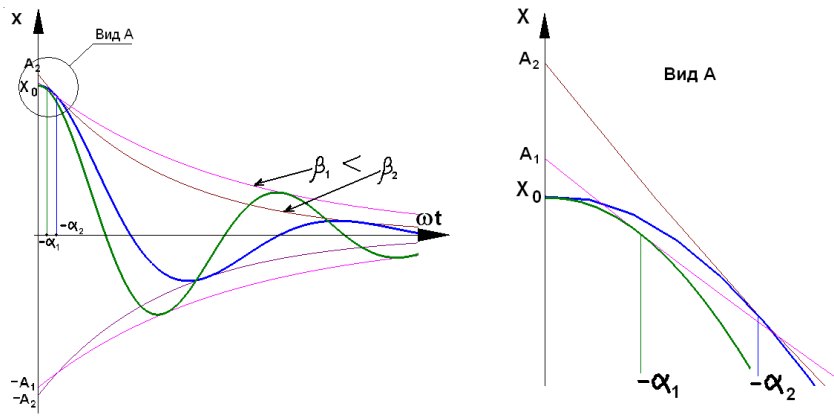
1. Пусть систему в начальный момент времени отклонили на x_0 и отпустили. Изобразим зависимость $x(t)$ на графике и на векторной диаграмме.

$$\text{Начальные условия: } \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{решение лучше искать в виде: } x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha).$$

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = A[-\beta \cos \alpha - \omega \sin \alpha] = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\beta}{\omega} \\ A \cos \alpha = x_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{\beta^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\beta^2}{\omega_0^2 - \beta^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \beta^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$





$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2 - \beta^2}{\omega_0^2}}$ – это соотношение определяет собой начальную фазу α . Знак выбирается исходя из физического смысла начальных условий.

$$A_0 = x_0 \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{x_0 \omega_0}{\omega} - \text{начальная амплитуда колебаний.}$$

Последовательность графического изображения $x(t)$:

1) на вертикальной оси нанести x_0 ;

2) на вертикальной оси нанести $\pm A_0 = \pm \frac{x_0 \omega_0}{\omega}$;

3) пунктиром изобразить графики $A(t) = \pm A e^{-\beta t}$;

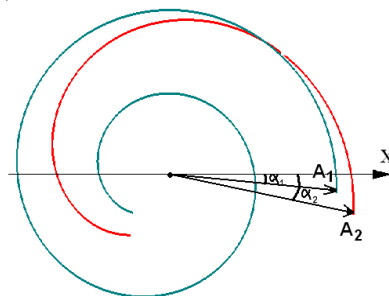
4) изобразить само колебание $x(t)$, заключенное между $\pm A e^{-\beta t}$, с учётом начальной фазы α . Особое внимание обратить на то, что с уменьшением амплитуды колебаний период колебаний не изменяется.

Вопрос. Как отражается увеличение коэффициента затухания на других параметрах процесса?



Ответ. Увеличение ($\uparrow$) $\beta \rightarrow$ приводит к $\begin{cases} \downarrow \tau \\ \uparrow A_0 \\ \uparrow T \end{cases}$.

Вот как это выглядит на векторной диаграмме для $\beta_2 = 2\beta_1$.



2. Изменим начальные условия. Пусть первоначально систему отвели на x_0 и толкнули в ту же сторону, придав ей скорость v_0 .

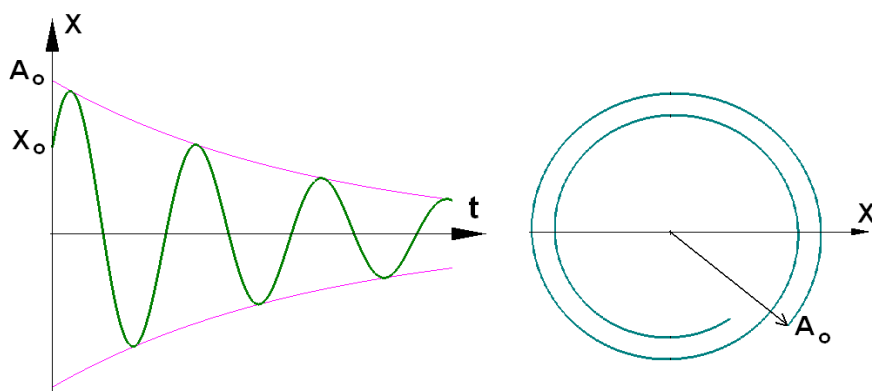
Из начальных условий
$$\begin{cases} v_0 = -A(\beta \cos \alpha + \omega \sin \alpha) \\ x_0 = A \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{v_0}{x_0} = -\beta - \omega \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\omega} \cdot \left[\beta + \frac{v_0}{x_0} \right] \Rightarrow \alpha = -\operatorname{arctg} \left(\frac{\beta}{\omega} + \frac{v_0}{x_0 \omega} \right) \Rightarrow$$

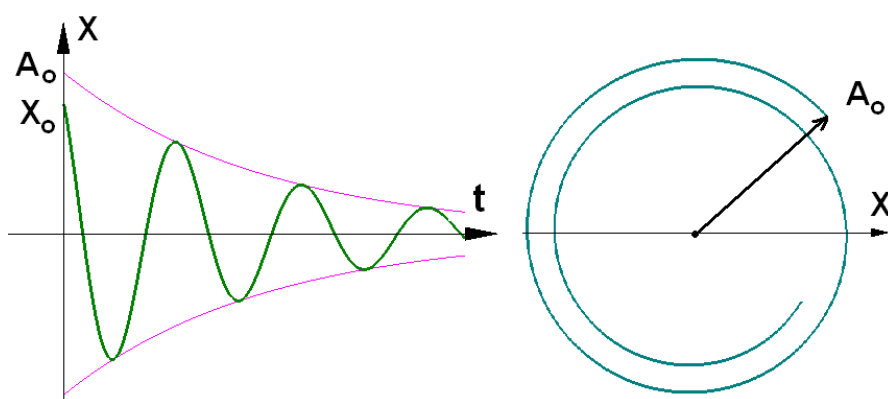
$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\omega} + \frac{v_0}{x_0 \omega} \right)^2}}.$$

$$A_0 = x_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\omega} + \frac{v_0}{x_0 \omega} \right)^2} \leftarrow \text{это верно, так как в предельном случае при } \beta=0 \text{ полученное}$$

выражение для амплитуды совпадает с амплитудой гармонических колебаний.



3. Отвели на x_0 и толкнули к положению равновесия со скоростью v_0 .



13. Аперiodический процесс

Вопрос. Может ли быть $\beta \geq \omega_0$ и что тогда будет?

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

$$1) \beta = \omega_0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1 = -\beta.$$

Надо иметь две линейно независимые функции $\Rightarrow x = (C_1 + C_2 t) \cdot e^{-\beta t} \leftarrow$ нет колебаний.



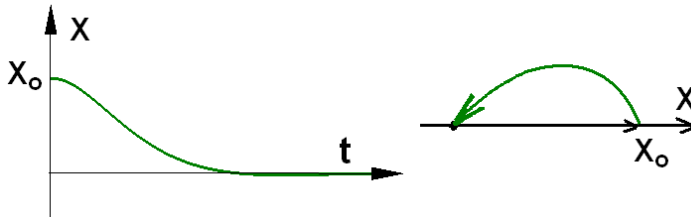
Рассмотрим разные начальные условия.

а) Отвели на x_0 и отпустили:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = x_0;$$

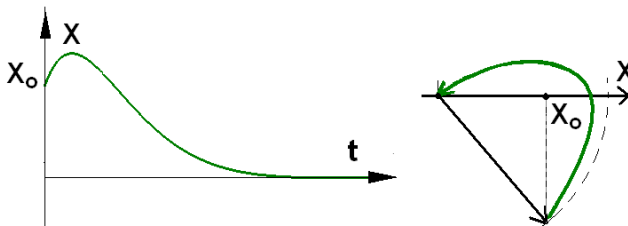
$$\dot{x} = -\beta C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = \beta x_0.$$

В этом случае аperiодический процесс описывается функцией $x = x_0(1 + \beta t)e^{-\beta t}$.



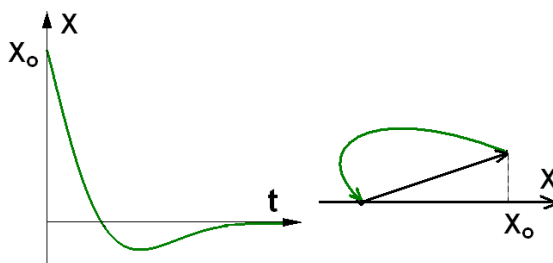
б) Отвели на x_0 и толкнули в ту же сторону с начальной скоростью $v_0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = x_0, C_2 = \beta \cdot x_0 + v_0 \Rightarrow x = [x_0 + (\beta \cdot x_0 + v_0)t] \cdot e^{-\beta t}.$$



в) Отвели на x_0 и толкнули в противоположную сторону со скоростью $v_0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = -v_0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}.$$



Это все аperiодические процессы, связанные с большой силой сопротивления.

2) При $\beta > \omega_0$ процесс будет тем более аperiодическим, так как диссипативные силы будут доминировать над инерционностью системы и решение будет иметь вид

$$x = \left[C_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right] \cdot e^{-\beta t}.$$



14. Логарифмический декремент затухания

$$\frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\beta T} - \text{декремент затухания.}$$

$$\lambda \equiv \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T - \text{логарифмический декремент затухания.}$$

$$a(t) = a_0 e^{-\beta t} = a_0 e^{-\lambda t / T}.$$

Выясним физический смысл λ :

$$\beta = \frac{1}{\tau} = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = \frac{T}{\tau}, \text{ где } T - \text{ время одного колебания, а } \tau - \text{ время, за которое амплитуда}$$

колебания уменьшается в e раз.

$$N_e = \frac{\tau}{T} - \text{число колебаний, которое успевает совершить система до момента уменьшения}$$

амплитуды колебаний в e раз.

Чем больше N_e , тем слабее затухания в системе.

$$\lambda = \frac{1}{N_e}, \text{ таким образом, чем больше } \lambda, \text{ тем быстрее затухают колебания в системе.}$$

15. Задачи

1) Сравнить, какие колебания затухают быстрее.

Дано: $T_1 = 10^{-8} \text{ с}; \beta_1 = 10^5 \text{ с}^{-1};$

$T_2 = 10^{-3} \text{ с}; \beta_2 = 10^2 \text{ с}^{-1}.$

Найти: $\lambda_1 \vee \lambda_2.$

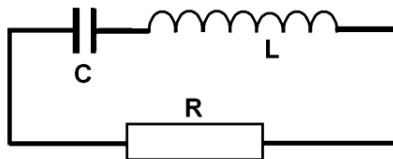
Решение: $N_e = \frac{1}{\beta T} \Rightarrow N_{e1} = 10^3, N_{e2} = 10 \Rightarrow$

$N_{e1} > N_{e2} \Rightarrow \text{вторая система затухает быстрее, так как } \lambda_2 = 10^{-1} > \lambda_1 = 10^{-5}.$



2) Проведем аналогию между механическими и электромагнитными колебаниями.

Рассмотрим RLC колебательный контур.



Процесс колебания заряда на обкладках конденсатора описывается уравнением:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0;$$

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{1}{C} q = 0.$$

Вопрос. Что в данном случае является аналогами: массы, коэффициента квазиупругой силы и сил сопротивления?

Ответ. Аналог массы – индуктивность L , аналог коэффициента квазиупругой силы – величина, обратная емкости C^{-1} , аналог сил сопротивления – сопротивление контура R .

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \beta = \frac{R}{2L}; \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$



Вопрос. Что надо сделать с параметрами схемы, чтобы уменьшить затухание в контуре?

Ответ. а) Уменьшить R ;

б) увеличить L .

Ответы а) и б) очевидны, но что надо сделать с емкостью C ?

$$\text{в) } N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} \approx \frac{\omega_0}{2\pi\beta} = \frac{1 \cdot 2L}{\sqrt{LC} 2\pi R} = \frac{1}{\pi R} \sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow N_e \uparrow \rightarrow C \downarrow, \quad \text{то есть}$$

емкость надо уменьшить (физически это связано с рассеянием энергии контура в конденсаторе за счёт электромагнитного излучения).

16. Энергия системы, совершающей свободные затухающие колебания

Рассмотрим зависимость энергии затухающих колебаний от времени. Все выкладки будем производить для поступательно движущейся системы, имея в виду, что полученные зависимости будут справедливы и при вращательном движении системы.

Полная механическая энергия равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

$$E = E_k + U;$$

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2}; \quad U = \frac{kx^2}{2}.$$

$$\text{При } x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

$$\dot{x} = Ae^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha)], \text{ где } \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2.$$

$$\text{Введем обозначение } \varphi = \omega t + \alpha \text{ и учтем, что } m = \frac{k}{\omega_0^2}.$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2} A^2 e^{-2\beta t} [\beta \cos \varphi + \omega \sin \varphi]^2 + \frac{k}{2} A^2 e^{-2\beta t} \cos^2 \varphi = \\ &= \frac{k}{2} A^2 e^{-2\beta t} \left\{ \frac{1}{\omega_0^2} [\beta^2 \cos^2 \varphi + \beta \omega \sin 2\varphi + \omega^2 \sin^2 \varphi] + \cos^2 \varphi \right\}. \end{aligned}$$

$$\text{Обозначив } A_1 = \frac{k}{2} A^2 e^{-2\beta t} \text{ и заменив } \sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi, \text{ получим}$$

$$E = \frac{A_1}{\omega_0^2} \{ \beta \omega \sin 2\varphi + [\beta^2 - \omega^2 + \omega_0^2] \cos^2 \varphi + \omega^2 \}$$

Учтем, что $[\beta^2 - \omega^2 + \omega_0^2] \cos^2 \varphi = 2\beta^2 \cos^2 \varphi = \beta^2 (1 + \cos 2\varphi)$, и заменим $(\beta^2 + \omega^2)$ на ω_0^2 , тогда

$$E = \frac{A_1}{\omega_0^2} \{ \beta \omega \sin 2\varphi + \omega_0^2 + \beta^2 \cos 2\varphi \} = A_1 \left\{ 1 + \frac{\beta}{\omega_0^2} [\omega \sin 2\varphi + \beta \cos 2\varphi] \right\} = A_1 \left\{ 1 + \frac{\beta}{\omega_0} \sin(2\varphi + \psi) \right\}.$$

Данное выражение получено с учетом преобразования:

$$\beta \cos 2\varphi + \omega \sin 2\varphi = \sqrt{\beta^2 + \omega^2} \left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}} \cos 2\varphi + \frac{\omega}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}} \sin 2\varphi \right) = \omega_0 \sin(2\varphi + \psi),$$

$$\text{где } \sin \psi = \frac{\beta}{\omega_0}, \quad \frac{\omega}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}} = \cos \psi.$$

$$\text{Итак, } E = \frac{k}{2} A^2 e^{-2\beta t} \left\{ 1 + \frac{\beta}{\omega_0} \sin(2\omega t + 2\alpha + \psi) \right\},$$

где $\psi = \arcsin \frac{\beta}{\omega_0}$.

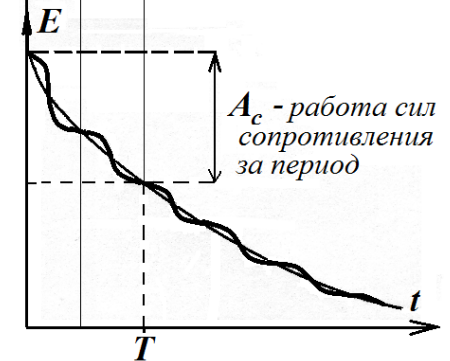
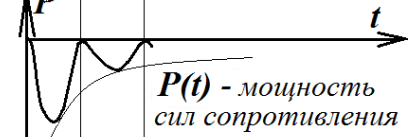
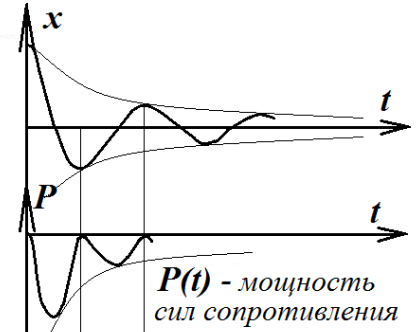
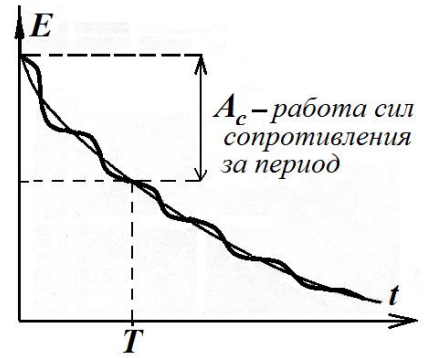
A_c – работа сил сопротивления за период.

Мощность сил сопротивления:

$$P = -r\dot{x}^2 = \frac{dE}{dt} = -2\beta mA^2 e^{-2\beta t} [\beta \cos \varphi + \omega \sin \varphi]^2.$$

$P = 0$ в тех точках, где $\dot{x} = 0$, в этих точках касательная к графику $E(t)$ параллельна оси t , то есть это точка перегиба.

Если в начальный момент систему отклонили на x_0 и без толчка отпустили, то зависимости от времени мощности и работы сил сопротивления будут выглядеть так, как представлено на рисунке



При $\beta \ll \omega_0$ затухание слабое и можно считать $E \approx E_0 e^{-2\beta t}$, где $E_0 = E_{\max_0} = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$.

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E \text{ – скорость убывания энергии.}$$

17. Добротность колебательной системы

$$\text{Добротность колебательной системы } Q \equiv \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e.$$

Чем больше Q , тем слабее затухание.

Получим другие выражения для добротности системы:

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi \omega}{\beta 2\pi} = \frac{\omega}{2\beta} \approx \frac{\omega_0}{2\beta}, \text{ если } \beta \ll \omega_0.$$

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E \text{ – скорость убывания энергии.}$$

Если энергия за период изменяется слабо, то:

$$\Delta E \approx -2\beta E T \Rightarrow \beta T = \lambda \approx -\frac{\Delta E}{2E} \Rightarrow Q \approx \frac{2\pi E}{(-\Delta E)}.$$

Здесь E – энергия, запасенная в системе, $(-\Delta E)$ – убыль энергии за период. Иногда эта формула очень удобна, она верна при $Q \gg 1$!

Колебательная система, в которой процесс пополнения энергии управляется самой системой, называется автоколебательной (например, часы).

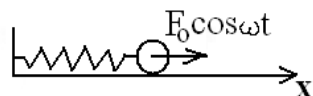


18. Вынужденные колебания

Опред. Вынужденными колебаниями системы называются колебания, совершаемые системой в присутствии периодически изменяющейся внешней силы.

Рассмотрим простейшую механическую систему, подверженную воздействию гармонически изменяющейся силы, представленную на рисунке. Динамическое уравнение этой системы будет иметь следующий вид:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$



$F_0 \cos \omega t$ обеспечивает гармоническое изменение $x(t)$.

Здесь ω – частота вынуждающей силы.

$$\ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

Введем уже привычные обозначения $\beta = \frac{r}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

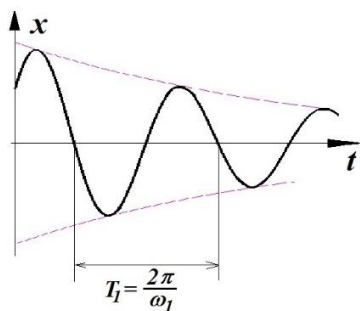
$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \text{ где } f_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Общее решение такого дифференциального уравнения ищется в виде суммы общего решения однородного уравнения x_1 и частного решения неоднородного уравнения x_2 .

$$x = x_1 \text{ общ. однород} + x_2 \text{ частн. неоднород};$$

$$x_1 = x_{\text{затух. колеб}} = A_1 e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t + \alpha_1);$$

$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота свободных колебаний системы в отсутствие вынуждающей силы.



Затухающие колебания мы уже изучили. Теперь надо научиться находить частное решение неоднородного уравнения x_2 . Так как x_1 является затухающим во времени колебанием, то очевидно, что с некоторого момента времени в общем решении $x_{\text{общ}} = x_1 + x_2 = A_1 e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + x_2$ начнёт доминировать x_2 .

$F_{\text{вын}} = F_0 \cos \omega t$ – гармоническая функция, поэтому будем искать решение x_2 в виде $x_2 = A_2 \cos(\omega t - \varphi_2)$, где ω – частота вынуждающей силы. Наша задача: проверить, правильно ли мы угадали функцию и чему равны A_2 , φ_2 . Физический смысл: A_2 –

амплитуда, до которой вынуждающая сила раскачивает систему, φ_2 – сдвиг фаз между отклонением системы и вынуждающей силой. Отклонение отстаёт на φ_2 от вынуждающей силы, поэтому в предполагаемом решении перед φ_2 стоит знак «минус».

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= -A_2 \omega \sin(\omega t - \varphi_2) \\ \ddot{x}(t) &= -A_2 \omega^2 \cos(\omega t - \varphi_2) \end{aligned} \right\} \text{ подставляем в уравнение:}$$

$$-A_2 \omega^2 \cos(\omega t - \varphi_2) + 2\beta(-A_2 \omega) \sin(\omega t - \varphi_2) + \omega_0^2 A_2 \cos(\omega t - \varphi_2) = f_0 \cos \omega t.$$

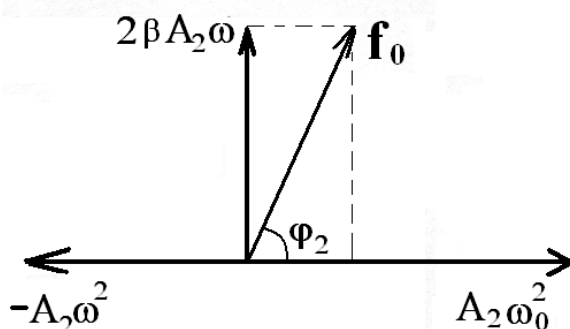
$$\text{Преобразуем } -\sin(\omega t - \varphi_2) = \sin(\varphi_2 - \omega t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2 + \omega t\right) = \cos\left(\omega t - \varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Перепишем динамическое уравнение в следующем виде:

$$-A_2 \omega^2 \cos(\omega t - \varphi_2) + 2\beta \omega A_2 \cos\left(\omega t - \varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) + \omega_0^2 A_2 \cos(\omega t - \varphi_2) = f_0 \cos \omega t.$$

Изобразим левую часть уравнения на векторной диаграмме для момента времени $t_0 = \frac{\varphi_2}{\omega}$.

Сумма этих векторов, отражающих собой левую часть уравнения, должна равняться $\vec{f}_0$.



$$f_0^2 = 4\beta^2\omega^2 A_2^2 + A_2^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \Rightarrow$$

$$A_2 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Здесь ω – частота вынуждающей силы, а не свободных затухающих колебаний.

$tg\varphi_2 = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ ← знак $tg\varphi_2$ может быть отрицательным, если $\omega_0 < \omega$ и, следовательно, в

этом случае сдвиг фаз между вынуждающей силой и смещением $\varphi_2 > \frac{\pi}{2}$.

Вывод. $x_2 = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t - \varphi_2)$ – это решение

соответствует установившемуся процессу вынужденных колебаний.



Исследуем полученное решение.

1) Вынужденные колебания, в отличие от свободных, может совершать и система, не обладающая упругими свойствами, то есть система с $\omega_0 = 0$:

$$\omega_0 = 0 \rightarrow x_2 = x = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega\sqrt{\omega^2 + 4\beta^2}} \cos(\omega t - \varphi_2); \quad tg\varphi_2 = \frac{-2\beta}{\omega}.$$

Общим решением однородного уравнения в данном случае является $x_1 = C_1 e^{-2\beta t} + C_2$.

2) Если система обладает упругими свойствами, но колебания происходят в отсутствие диссипативных сил, коэффициент затухания системы $\beta = 0$.

Если $\beta = 0$, то $x = A_1 \sin(\omega_0 t + \alpha_1) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$.

Проанализируем полученное общее решение в установившемся режиме:

- а) первое слагаемое не затухает;
- б) сдвиг фаз между f_0 и x_2 обусловлен только наличием сил сопротивления и в данном случае равен нулю при $\omega_0 > \omega$ и равен π при $\omega > \omega_0$;
- в) A_1 и α_1 определяются из начальных условий;
- г) очень опасно иметь $\omega_0 = \omega$, так как при $\beta = 0$ амплитуда второго слагаемого A_2 , а значит, и колебания системы в целом стремятся к ∞ .

3) Исследуем, как зависит $A_2(\omega)$.

$$A_2 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}};$$

$A_{2\max}$, когда минимален знаменатель $\xi = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \leftarrow \min$.

$$(\xi^2)' = 2(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot (-2\omega) + 8\beta^2\omega = -4\omega_0^2\omega + 4\omega^3 + 8\beta^2\omega = 0.$$

Если $\omega = 0$, то на систему действует не гармоническая, а постоянно действующая сила. Другой корень этого уравнения дает выражение для резонансной частоты:

$$\omega_{\text{рез}}^2 + 2\beta^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow$$

$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \leftarrow$ резонансная частота – частота, при которой сила с амплитудой F_0 может возбудить колебания с максимальной амплитудой.

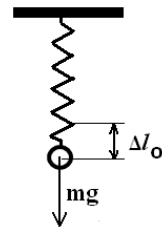
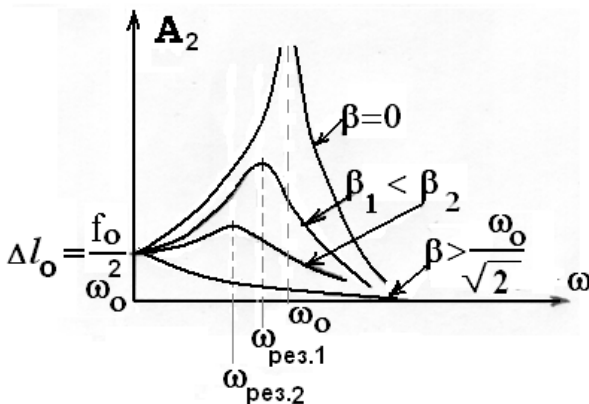
Резонансная амплитуда $A_{2\max} = A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{m \cdot 2\beta\sqrt{\beta^2 + \omega^2}} \approx \frac{F_0}{2m\beta\omega_0}$ при $\beta \ll \omega_0$, так как

$$\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} = \sqrt{4\beta^4 + 4\beta^2\omega^2} = 2\beta\sqrt{\beta^2 + \omega^2} = 2\beta\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2 - 2\beta^2} = 2\beta\omega_{\text{своб}} \approx 2\beta\omega_0.$$

а) $\beta \rightarrow 0 \Rightarrow A_{\text{рез}} \rightarrow \infty$.

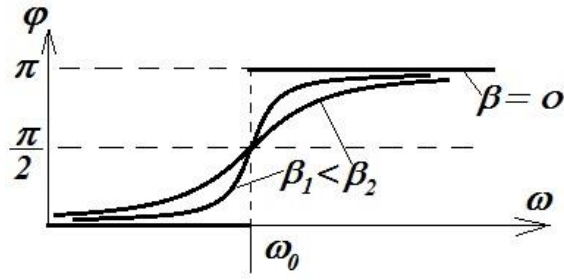
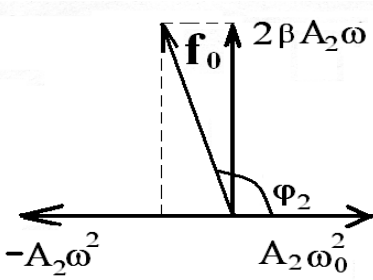
б) $\beta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \rightarrow$ резонанс отсутствует.

в) При $\omega = 0$ действует постоянная сила $\Rightarrow A_2 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$ (идентично действию $m\vec{g}$).



Полученный результат можно интерпретировать следующим образом: чем ближе частота вынуждающей силы к резонансной, тем легче этой силе раскачать систему.

4) Как зависит сдвиг фаз $\varphi_2(\omega)$ от частоты вынуждающей силы.



а) Если $\beta = 0$, то колебания происходят либо в фазе с вынуждающей силой при $\omega < \omega_0$, либо в противофазе с вынуждающей силой при $\omega > \omega_0$.

б) Если $\omega = \omega_0$, то смещение всегда отстаёт на $\frac{\pi}{2}$ от вынуждающей силы.

в) Чем меньше β , тем ближе к нулю или к π сдвиг фаз между смещением и силой.

5) Резонанс скоростей.

Найдем частоту вынуждающей силы, при которой система движется с максимальной скоростью. Для этого определим функциональную зависимость $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x} = \frac{-\omega f_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}.$$

Чтобы найти $\dot{x}_{\max}$, продифференцируем квадрат амплитуды скорости $\dot{x}$ по частоте вынуждающей силы ω :

$$(\dot{x}^2)'_{\omega} = 0 = \left[\frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} \right]' = \frac{2\omega[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2] - \omega^2[2(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot (-2\omega) + 8\beta^2 \omega]}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]^2} \Rightarrow$$

$$2\omega \cdot \{\omega_0^4 - 2\omega_0^2 \omega^2 + \omega^4 + 4\beta^2 \omega^2 + 2\omega^2 \omega_0^2 - 2\omega^4 - 4\beta^2 \omega^2\} = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_0^4 - \omega^4 = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0, \text{ то есть при } \omega = \omega_0 \text{ наблюдается резонанс скоростей.}$$

6) Добротность системы, выраженная через резонансные характеристики.

Пусть собственная частота $\omega_0 \approx \omega_{\text{св}}$ – частоте свободных затухающих колебаний.

$$Q = \frac{\omega_{\text{св}}}{2\beta} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{A_{\text{рез}} \omega_0^2}{f_0}, \text{ так как } A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta \omega_0} \rightarrow \frac{1}{2\beta} = \frac{A_{\text{рез}} \omega_0}{f_0}.$$

$$\text{Но } \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0 m}{mk} = x_0 - \text{смещение под действием постоянной силы } F_0 \Rightarrow$$

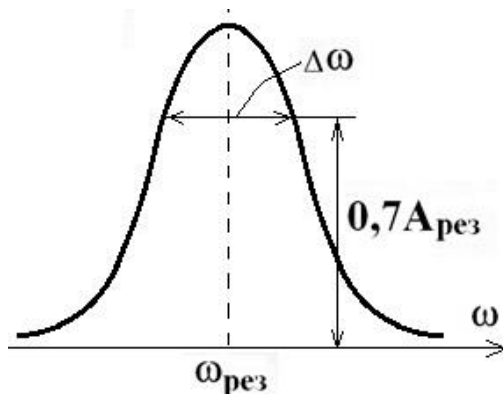
$$Q \approx \frac{A_{\text{рез}}}{x_0} \Rightarrow \text{Добротность системы показывает, во сколько раз}$$

амплитуда резонансного колебания больше смещения системы под действием постоянной силы той же величины.



Для $Q \gg 1$ верна также следующая формула для определения Q по экспериментальным резонансным кривым:

$Q = \frac{\omega_{рез}}{\Delta\omega}$, здесь $\Delta\omega$ – ширина резонансной линии, взятая на уровне $0,7A_{рез}$, как показано на рисунке.



7) Резонанс в колебательном контуре.

Проводя параллель между механическим резонансом и резонансом в колебательном контуре RLC , заметим, что в колебательном контуре различают:

а) резонанс напряжений на емкости – он соответствует резонансу амплитуды механических колебаний, так как напряжение на емкости пропорционально заряду и соответственно

$$\omega_{C\,рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}};$$

б) резонанс токов – он соответствует резонансу напряжений на сопротивлении и по аналогии резонансу скоростей механической системы $\Rightarrow \omega_{I\,рез} = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}};$

в) резонанс напряжений на индуктивности – он соответствует резонансу ускорений механической системы, так как напряжение на индуктивности пропорционально второй

производной заряда по времени $\Rightarrow \omega_{L\,рез} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC - \frac{R^2 C^2}{2}}}.$

Выражение $\omega_{L\,рез}$ предлагается проверить самостоятельно, предварительно найдя резонансную частоту ускорений механической системы аналогично тому, как это было сделано при определении резонанса скоростей.

Заметим, что $\omega_{C\,рез} < \omega_{I\,рез} < \omega_{L\,рез}.$

19. Энергия системы, совершающей установившиеся вынужденные колебания

Пусть тело массой m , прикрепленное к пружинке жесткостью k , совершает установившиеся вынужденные колебания.

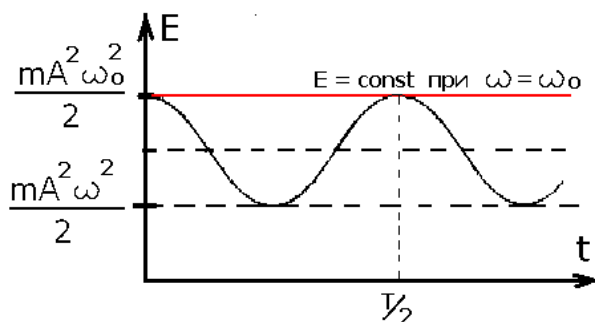
$$x(t) = A(\omega) \cos[\alpha t - \phi(\omega)];$$

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}; \quad \alpha = \omega t - \phi(\omega).$$

Необходимо изобразить графики зависимости механической энергии тела от времени.

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2 \sin^2 \alpha}{2} + \frac{kA^2 \cos^2 \alpha}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \left[\sin^2 \alpha + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cos^2 \alpha \right] = \\
 &= \frac{mA^2\omega^2}{2} \left[\sin^2 \alpha + \frac{\omega_0^2 + \omega^2 - \omega^2}{\omega^2} \cos^2 \alpha \right] = \frac{mA^2}{2} \omega^2 \left[1 + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2} \cos^2 \alpha \right] = \\
 &= \frac{mA^2}{2} \omega^2 \left[1 + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega^2} + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega^2} \cos 2\alpha \right] = \frac{mA^2}{2} \left[\frac{\omega_0^2 + \omega^2}{2} + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2} \cos 2\alpha \right],
 \end{aligned}$$

то есть энергия установившихся вынужденных колебаний системы осциллирует на уровне $\left(\frac{mA^2}{2} \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{2}\right)$ с амплитудой $\frac{mA^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2} = \Delta E$ и частотой 2ω , равной удвоенной частоте вынуждающей силы.



При $\omega = \omega_0 \rightarrow E = \text{const}$.

Вопрос. Как это понимать?

Ответ. Вынуждающая сила в любой момент времени компенсирует силу сопротивления, и система совершает гармонические колебания.



20. Задачи на вынужденные колебания

I. Задачи, в которых необходимо найти параметры системы, исходя из закона движения системы под действием вынуждающей силы.

1) Осциллятор массы m движется по закону $x = a \sin \omega t$ под действием вынуждающей силы $F_x = F_0 \cos \omega t$. Найти коэффициент затухания β .

Решение.

Напишем динамическое уравнение системы: $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$.

а) Решаем простой подстановкой $\ddot{x}$, $\dot{x}$, x в уравнение и получаем

$$-a\omega^2 \sin \omega t + 2\beta\omega a \cos \omega t + \omega_0^2 a \sin \omega t = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \Rightarrow \omega = \omega_0, \beta = \frac{F_0}{2m\omega a}.$$

б) Из векторной диаграммы:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ — сдвиг фаз между смещением } x \text{ и вынуждающей силой } F \Rightarrow \omega = \omega_0, 2\beta\omega a = \frac{F_0}{m} \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{F_0}{2\omega m a}.$$

2) Найти выражение для вынуждающей силы, под действием которой осциллятор с массой m и коэффициентом затухания β совершает гармонические колебания по закону $x = a \sin(\omega_0 t - \varphi)$.

Решение.

Из векторной диаграммы из условия равенства частот $\omega = \omega_0$ следует параллельность и равенство векторов вынуждающей и диссипативной сил, таким образом:

$$F_0 = 2\beta\omega_0 am \Rightarrow F(t) = 2\beta\omega_0 am \cos(\omega_0 t - \varphi).$$

II. Задачи на нахождение уравнения движения.

Шарик может совершать незатухающие гармонические колебания с соответствующей частотой ω_0 . В момент $t=0$, когда шарик покоился в положении равновесия, к нему приложили вынуждающую силу $\vec{F}_x = F_0 \cos \omega t \cdot \vec{e}_x$. Найти закон вынужденных колебаний шарика $x(t)$.

Решение.

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t; \\ x = x_1 + x_2; \\ x_1 = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t - \text{общее решение однородного уравнения } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0; \\ x_2 = A \cos \omega t - \text{частное решение неоднородного уравнения.} \end{cases}$$

Подстановка x_2 в исходное уравнение дает $A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$.

Коэффициенты A_1, A_2 находим из начальных условий:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = A_1 + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = 0 \Rightarrow A_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \Rightarrow \\ \dot{x}(0) \rightarrow A_2 = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} [\cos \omega t - \cos \omega_0 t]$$

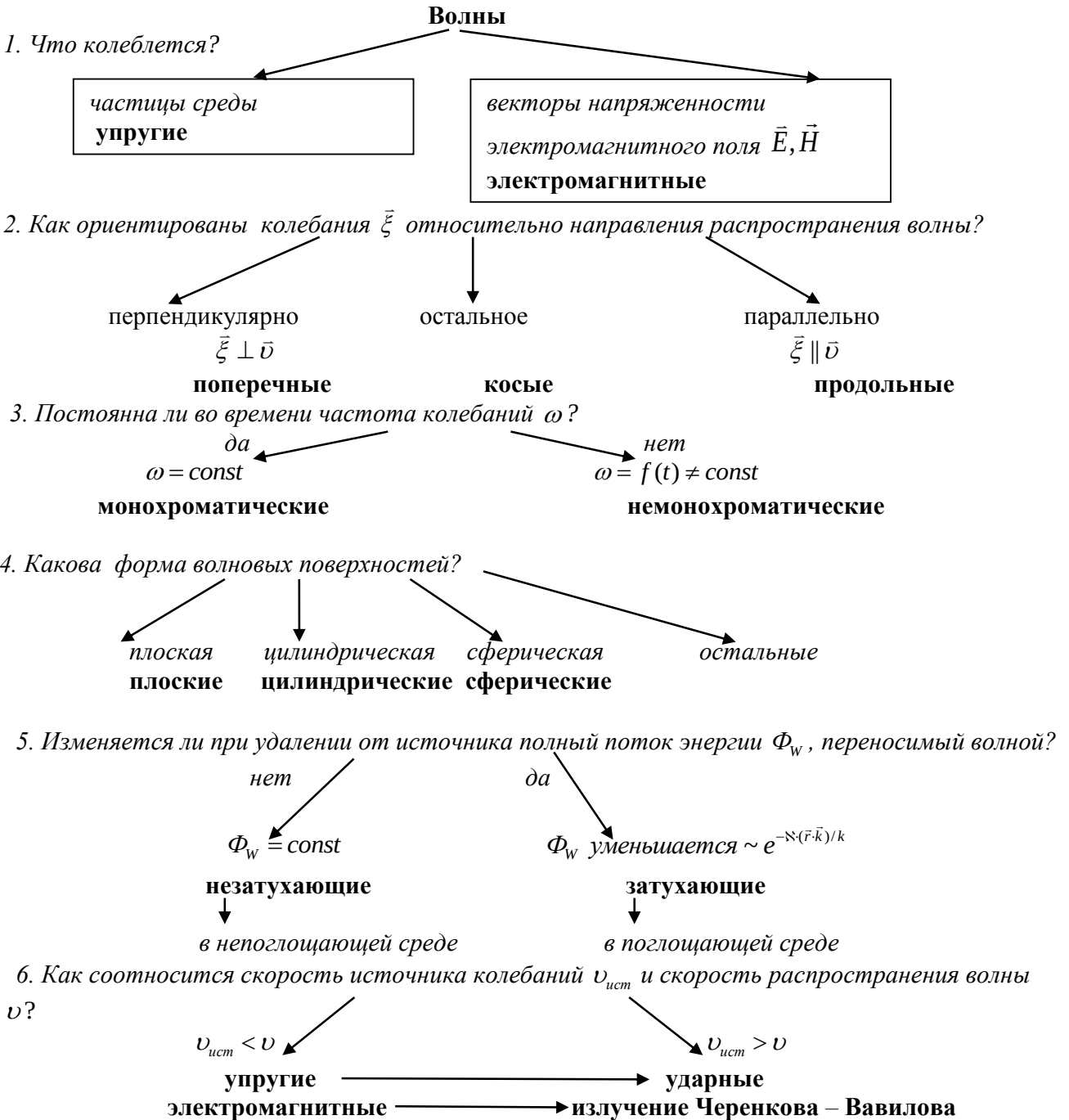


II. ВОЛНЫ

Введение. Классификация волн

Опред. Волна – процесс распространения колебаний в пространстве.

Классификация волн может быть проведена в соответствии с ответами на следующие вопросы:



Мы начнем с изучения упругих волн, а значит, с распространяющихся в пространстве колебаний частиц среды.



II.1. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

1. Определения и постановка задачи



Опред. Упругая волна – процесс распространения колебаний частиц среды в пространстве.

Частица среды – макроскопический объект, размеры которого $(\Delta V)^{1/3}$ велики по сравнению с межатомным расстоянием a , но много меньше минимального характерного размера задачи $l_{\min}$:

$$a \ll (\Delta V)^{1/3} \ll l_{\min}.$$

Будем обозначать смещение частицы среды, находящейся в точке $\vec{r}$ в момент времени t , $\vec{\xi}$. Таким образом, смещение $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ является векторной функцией четырех переменных.

Если на смещенную частицу действует сила $\vec{F} \sim -\vec{\xi}$, то мы имеем дело с упругой средой.

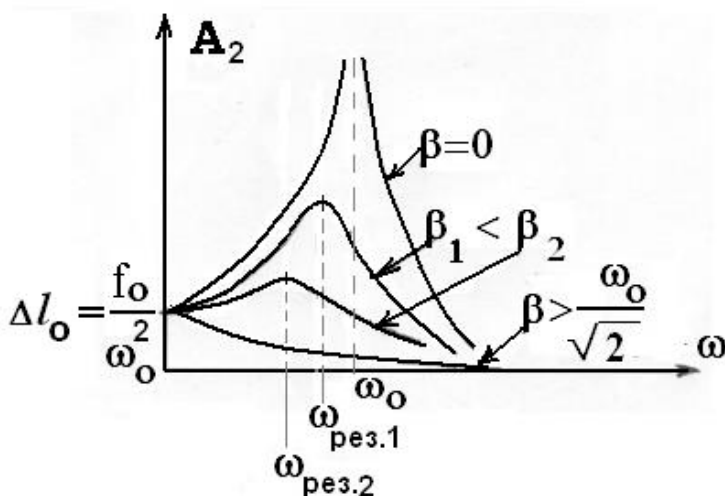
Вспомним, что упругие колебания в отсутствие диссипативных сил совершаются в соответствии с динамическим уравнением

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

по гармоническому закону $x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha)$, где ω_0 – собственная частота гармонических колебаний системы.

Если к системе, способной совершать свободные колебания, приложена внешняя изменяющаяся с частотой ω сила $F_x = F_0 \cos(\omega t)$, то установившиеся вынужденные колебания (при наличии диссипативных сил, определяющих собой коэффициент затухания β) система будет совершать с частотой вынуждающей силы. Амплитуда A_2 этих колебаний зависит от соотношения собственной частоты колебаний ω_0 и частоты вынуждающей силы ω .

Следовательно, если речь идет о волновом процессе, то очевидно, что частота упругой бегущей волны определяется частотой источника.



Уравнение волны – выражение, которое дает смещение колеблющейся частицы как функцию её координат $\vec{r}$ и времени t :

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{e}(\vec{r}, t) \cdot a(\vec{r}, t) \cos(\omega t - \alpha(\vec{r})).$$

1) $\vec{e}(\vec{r}, t)$ – единичный вектор поляризации волны. Он показывает направление, в котором происходят колебания.

Если вектор поляризации изменяется во времени $\vec{e} = \vec{f}(t)$, то поляризация нелинейная.

Для упругих волн будем иметь дело только с линейной поляризацией продольных или поперечных волн, то есть $\vec{e} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z$, причем $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$.

Для электромагнитных волн может быть поляризация по кругу $\vec{e} = \vec{e}_x \sin \omega t + \vec{e}_y \cos \omega t$.

2) $a(\vec{r}, t)$ – амплитуда колебаний.

Если амплитуда колебаний не зависит от времени, то волна – монохроматическая.

Запишем уравнение упругой монохроматической волны:

$$\xi(\vec{r}, t) = \vec{e}(\vec{r}) \cdot a(\vec{r}) \cos(\omega t - \alpha(\vec{r})).$$

3) $\phi(\vec{r}, t) = \omega t - \alpha(\vec{r})$ – фаза волны;

$\alpha(\vec{r})$ – начальная фаза в точке $\vec{r}$.

Опред. Поверхность постоянной фазы (фазовая поверхность) – поверхность, во всех точках которой фаза постоянна, то есть $\omega t - \alpha(\vec{r}) = \text{const}$. Двигается.

Опред. Волновая поверхность – поверхность, во всех точках которой фаза одинакова $\alpha(\vec{r}) = \text{const}$. Покоится.

Г.м.т., до которого доходят колебания к моменту времени t , называется фронтом волны.

Фронт волны разделяет пространство на две области: в которой существуют колебания и в которой их нет.

Форма волновых поверхностей определяет собой классификацию волн по форме.

Простейшие из них: плоскости, цилиндры, сферы.

Пусть $\phi(\vec{r}, t) = \text{const} \Rightarrow d\phi = 0$;

$$0 = d\phi = \nabla \phi \cdot d\vec{r} + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt \Rightarrow \nabla \phi \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega = 0;$$

$\nabla \phi = -\nabla \alpha = -\vec{k}$ – волновой вектор;

$\nabla \alpha = \vec{k} \Rightarrow -\vec{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega = 0$, где $\nabla \alpha$ – направление максимального роста начальной фазы,

то есть направление распространения волны в изотропной среде.

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_\phi$ – фазовая скорость – скорость, с которой движется точка на поверхности постоянной фазы. Это скорость не физического, а математического объекта (так как это скорость перемещения фазы), поэтому она может быть больше скорости света.

Закон дисперсии: $\omega = \vec{k} \cdot \vec{v}_\phi$.

В изотропной среде нет выделенных направлений, кроме направления распространения волны, поэтому $\vec{k} \parallel \vec{v}_\phi \Rightarrow \omega = k \cdot v_\phi \leftarrow$ только в изотропной среде (в данном случае $v_\phi = v$ – скорость распространения волны).

Расстояние, на которое распространится волна за время, равное периоду колебаний частиц, называется длиной волны λ .

$$\lambda = v \cdot T; \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{T \cdot v} = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ – волновое число} = |\vec{k}|.$$

Если $\vec{k} \parallel \vec{\xi}$, то волна продольная; если $\vec{k} \perp \vec{\xi}$, то волна поперечная.



2. Плоские волны в однородной среде

Волновые поверхности – плоскости.

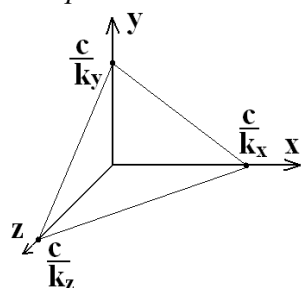
$\vec{k} \cdot \vec{r} = C = \text{const}$ ← поверхность одинаковой фазы или волновая поверхность. Запишем уравнение этой плоскости в отрезках:

$$\begin{cases} \vec{k} = k_x \cdot \vec{e}_x + k_y \cdot \vec{e}_y + k_z \cdot \vec{e}_z, \text{ так как волна плоская.} \\ \vec{r} = r_x \cdot \vec{e}_x + r_y \cdot \vec{e}_y + r_z \cdot \vec{e}_z \Rightarrow \end{cases}$$

$$k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z = C;$$

$$\frac{\frac{x}{C}}{\frac{k_x}{k_y}} + \frac{\frac{y}{C}}{\frac{k_y}{k_z}} + \frac{\frac{z}{C}}{\frac{k_z}{k_x}} = 1 \quad \text{— это уравнение плоскости в отрезках} \equiv \text{уравнение волновой}$$

поверхности.



Вектор $\vec{k}$ перпендикулярен этой плоскости и определяет собой направление распространения волны.

Действительно, уравнение постоянной фазы в этом случае имеет вид

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = -C \Rightarrow k_x x + k_y y + k_z z = C + \omega t.$$

$$\frac{\frac{x}{C + \omega t}}{\frac{k_x}{k_y}} + \frac{\frac{y}{C + \omega t}}{\frac{k_y}{k_z}} + \frac{\frac{z}{C + \omega t}}{\frac{k_z}{k_x}} = 1 \quad \leftarrow \text{это уравнение движения}$$

найденной нами плоскости, или, иначе, это *уравнение поверхности постоянной фазы*, которая движется в направлении $\vec{k}$ со скоростью $v = \frac{\omega}{k}$.

Замечание: скорости движения точек пересечения поверхности постоянной фазы с осями не равны фазовой скорости v_ϕ .

Примеры.

1. Написать уравнение плоской монохроматической волны с частотой ω , которая распространяется вдоль оси x со скоростью v .

а) Уравнение продольной волны:

$$k = \frac{\omega}{v};$$

$\xi = \vec{e}_x \cdot A(x) \cdot \cos(\omega t \mp kx + \alpha_0)$ ← знак “–” соответствует распространению по направлению оси x , а знак “+” свидетельствует о распространении волны против оси x .

Если среда поглощает энергию, то из опыта $\Rightarrow$

$$\xi = \vec{e}_x \cdot A(0) \cdot e^{-\gamma x} \cos(\omega t \mp kx + \alpha_0).$$

б) Уравнение поперечной волны:

$$\xi = \begin{Bmatrix} \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{Bmatrix} \cdot A(x) \cdot \cos(\omega t \mp kx + \alpha_0).$$

2. Определить волновое число и волновой вектор для волны с волновой поверхностью: $ax + by + cz = 1$.

$$k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2};$$

$$\vec{k} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z.$$

3. Сферические волны

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{r} = C = const \\ \vec{k} = k \cdot \vec{e}_r, \text{ так как волна сферическая, } \Rightarrow \\ \vec{r} = r \cdot \vec{e}_r \end{cases}$$

$\alpha = k \cdot r = C$, если $C > 0$ – волна расходящаяся, если $C < 0$ – волна схлопывающаяся.

$r = \frac{C}{k} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{C}{k}\right)^2$ – сферическая поверхность с центром в начале координат $\equiv$ волновая поверхность.

Определим уравнение фазовых поверхностей: $\omega t - kr = -C \Rightarrow$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{C + \omega t}{k}\right)^2.$$

Волновые поверхности – сферы, площадь которых S пропорциональна квадрату радиуса сферы $S \sim r^2 \Rightarrow$ если среда не поглощает энергию, то, так как поток энергии, переносимый волной через любую волновую поверхность с одинаковой фазой, постоянен и пропорционален площади этой поверхности и квадрату амплитуды смещений $\Phi \sim S \cdot a^2$, то амплитуда $a \sim \frac{1}{r}$ в сферической волне.

Уравнение сферической волны в непоглощающей среде:

а) продольной

$$\xi = \vec{e}_r \cdot \frac{a_0 \cdot r_0}{r} \cos(\omega t \mp kr + \alpha_0);$$

б) поперечной

$$\xi = \vec{e}_\perp(\vec{r}) \cdot \frac{a_0 \cdot r_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha_0), \text{ где } \vec{e}_\perp(\vec{r}) \cdot \vec{e}_r = 0.$$



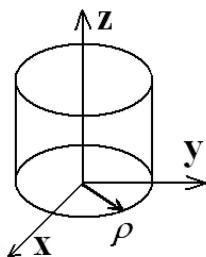
4. Цилиндрические волны

$x^2 + y^2 = \rho^2$ – уравнение цилиндрической поверхности.

$x^2 + y^2 = C^2$ – уравнение цилиндрических волновых поверхностей.

$$\xi \cong \vec{e} \cdot \frac{a_0 \sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho}} \cos(\omega t - k\rho + \alpha) \quad \text{– уравнение цилиндрической упругой}$$

разбегающейся волны в непоглощающей среде на больших расстояниях от источника.



5. Затухающие волны

Пусть плоская волна с частотой ω распространяется в направлении $\vec{k} = k_x \cdot \vec{e}_x$ в поглощающей среде с коэффициентом затухания γ .

Если среда поглощает энергию, то из опыта $\xi = \vec{e} \cdot A(0) \cdot e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx + \alpha_0)$.

Выясним физический смысл коэффициента затухания γ .

В главе «Колебания» коэффициент затухания обозначался β , физический смысл его сводился к существованию сил сопротивления среды $\vec{F} = -r\vec{v}$, где $\vec{v}$ – скорость движения

колеблющейся частицы, r – коэффициент сопротивления. Вспоминаем динамическое уравнение свободных затухающих колебаний:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \text{ где } \frac{r}{m} = 2\beta, \frac{k}{m} = \omega_0^2.$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0 - \text{динамическое уравнение свободных затухающих колебаний.}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $x = a_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \alpha)$.

γ^{-1} – расстояние, на котором амплитуда волны убывает в e раз. Это расстояние волна проходит за время $t = x/v \Rightarrow$ коэффициент затухания упругой волны $\gamma = \frac{\beta}{v} = \frac{r}{2mv}$.

Коэффициент поглощения упругой волны $\aleph = 2\gamma$. $\aleph^{-1}$ – расстояние, на котором энергия волны убывает в e раз.

а) Плоская волна

$\bar{\xi} = \bar{e} \cdot a_0 \cdot e^{-\gamma(\bar{r}-\bar{r}_0) \cdot \bar{k}/k} \cdot \cos(\omega t - \bar{k}\bar{r} + \alpha)$, если $\bar{e} \parallel \bar{k}$, то волна – продольная, если $\bar{e} \perp \bar{k}$, волна – поперечная.

б) Сферическая волна

$$\bar{\xi} = \bar{e} \cdot \frac{a_0 r_0}{r} \cdot e^{-\gamma(r-r_0)} \cdot \cos(\omega t - kr + \alpha).$$

в) Цилиндрическая волна (на больших расстояниях от источника)

$$\bar{\xi} \cong \bar{e} \cdot \frac{a_0 \sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho}} \cdot e^{-\gamma(\rho-\rho_0)} \cdot \cos(\omega t - k\rho + \alpha) \text{ при } \rho \gg \rho_0.$$

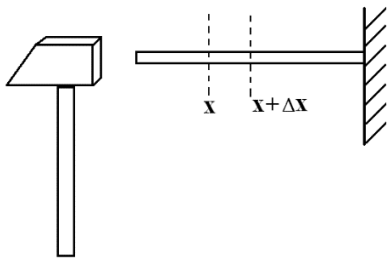


6. Волновое уравнение

Уравнение волны является решением дифференциального уравнения, которое для упругой среды является математическим выражением II закона Ньютона в локальной форме, то есть уравнением динамики для точечной массы, расположенной в точке $\bar{r}$.

Это уравнение называется волновым. Получим волновое уравнение для частного случая. Волновое уравнение – дифференциальное уравнение, выражающее законы взаимодействия в упругой среде, решением которого является уравнение волны.

Продольные колебания стержня.



Тонкий стержень с диаметром $2R \ll L$ длины.

$$\delta(mg) \ll F_{\text{упр}}.$$

Пусть элемент стержня, соответствующий участку стержня $(x, x + \Delta x)$, имеет размеры S и Δx , массу $S\rho_0\Delta x$.

В результате удара по торцу стержня в нём начинается распространяться волна смещения и деформаций.

Пусть конец x имеет в момент времени t смещение $\xi(x, t)$, а конец $(x + \Delta x)$ в тот же момент t имеет смещение $\xi(x + \Delta x, t)$.

Тогда удлинение этого участка стержня равно $\Delta l = \xi(x + \Delta x, t) - \xi(x, t)$, а относительное удлинение или деформация $\varepsilon = \frac{\Delta l}{\Delta x} = \frac{\xi(x + \Delta x, t) - \xi(x, t)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial \xi}{\partial x}$. Тогда в сечении стержня будет действовать упругая сила, которая в соответствии с законом Гука равна $E \cdot S \cdot \varepsilon$ – это сила, с которой одна часть стержня $x < x_0$ будет действовать на часть стержня $x > x_0$.

Запишем II закон Ньютона для элемента dx в окрестности точки x :

$$F_{\Sigma} = F(x + dx) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx = E \cdot S \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho_0 \cdot dx \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \left(\sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \right)^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 - \text{волновое уравнение.}$$

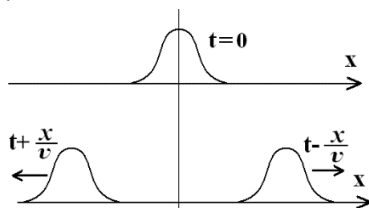
Решение этого уравнения должно соответствовать уравнению волны. Решение легко найти, введя переменную $u = t \pm \frac{x}{v}$, заключающую в себе комбинацию координаты x и времени t :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{du};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du} \cdot \left(\pm \frac{1}{v} \right).$$

Подстановка $\xi(x, t) = f(u)$ в волновое уравнение дает $f'' - \frac{E}{\rho_0} \cdot \frac{1}{v^2} f'' = 0$. Теперь при

$v = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$ любая функция $f\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$, в частности $f(u) = A \cdot e^{-\alpha u^2}$, обращает волновое уравнение в тождество.



← побежали волны в обе стороны.



Общее решение $\xi = C_1 f(u_+) + C_2 f(u_-)$.

Здесь v – скорость распространения волны $\equiv$ скорость фронта.

Все написанные нами волны, распространяющиеся в непоглощающей среде: плоские, сферические и цилиндрические – соответственно являются решениями обобщенного волнового уравнения, которое в трёхмерном виде выглядит так:

$\Delta \bar{\xi} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial t^2} = 0 \leftarrow$ это дифференциальное уравнение гиперболического типа второго порядка с постоянными коэффициентами.

К этому уравнению приводят следующие задачи:

Процесс	Скорость волны
Продольные упругие волны в твердом теле	$\sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$, E – модуль Юнга, ρ_0 – плотность среды
Поперечные упругие волны в твердом теле	$\sqrt{\frac{G}{\rho_0}}$, G – модуль сдвига, ρ_0 – плотность среды
Продольные волны в газах	$\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{\gamma kT}{m}}$ в адиабатическом приближении
Поперечные и продольные поверхностные волны	–
Ударные волны	$> \sqrt{\frac{\gamma kT}{m}}$

При рассмотрении продольных звуковых волн в газе правомерно адиабатическое приближение, так как $16 \text{ Гц} < \nu_{\text{зв}} < 20 \text{ кГц} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \ll \tau$ – время теплообмена.

Скорости звука при нормальных условиях:

воздух $\sim 0,34 \text{ км/с}$; вода $\sim 1,5 \text{ км/с}$; металл $\sim 5 \text{ км/с}$.

7. Связь фазовой скорости и скорости распространения волн

Пусть существует плоская монохроматическая продольная волна, распространяющаяся вдоль стержня. Её уравнение $\xi_x = a \cdot \cos(\omega t - kx)$ должно удовлетворять волновому уравнению:

$$\xi'' - \frac{1}{v^2} \ddot{\xi} = 0.$$

Проверим это:

$$-ak^2 + a\omega^2 \frac{1}{v^2} = 0 \Rightarrow v = \frac{\omega}{k} \leftarrow \text{то есть в однородной изотропной среде фазовая скорость}$$

монохроматической волны совпадает со скоростью распространения волны, равной скорости переноса энергии.



Вопрос 1. Где используется условие однородности среды?

Ответ. $k \neq f(x)$.

Вопрос 2. Где используется условие изотропии среды?

Ответ. $\vec{k} \parallel \vec{v}_\phi \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{v}_\phi = k \cdot v_\phi = \omega$.

Вывод. Имеем для бегущей волны:

$$\left. \begin{array}{l} \omega - \text{характеристика источника} \\ v - \text{характеристика среды} \end{array} \right\} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} - \text{характеристика источника} + \text{среды} \Rightarrow$$

источник излучает в среду волну, и её длина получается, как следствие свойств среды и частоты

$$\text{источника, } \lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = vT.$$

8. Энергия упругой волны

Пусть в изотропной однородной среде распространяется плоская продольная волна вдоль оси x :

$$\xi = a \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha_0).$$

Выделим в среде элемент объема ΔV такой малый, чтобы считать скорость и деформацию во всех точках объема одинаковыми. Тогда кинетическая ΔW_k , потенциальная ΔW_n и полная энергия ΔW этого элемента объема будут иметь вид:

$$\Delta W_k = \frac{\rho_0 \Delta V}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2; \quad \Delta W_n = \frac{E \varepsilon^2}{2} \Delta V = \frac{E}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V;$$

$$\Delta W = \frac{\Delta V}{2} \left\{ \rho_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + E \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right\} = \Delta V \frac{\rho_0}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{E}{\rho_0} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right\}.$$

Здесь E – модуль Юнга среды, ρ_0 – плотность недеформированной среды, $\frac{E}{\rho_0} = v^2$.

Разделив выражение для энергии на объем ΔV , получим выражение для плотности энергии в бегущей упругой волне:

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{\rho_0}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right\} - \text{плотность энергии в бегущей волне.}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= ak \cdot \sin(\omega t - kx + \alpha_0) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= -a\omega \cdot \sin(\omega t - kx + \alpha_0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

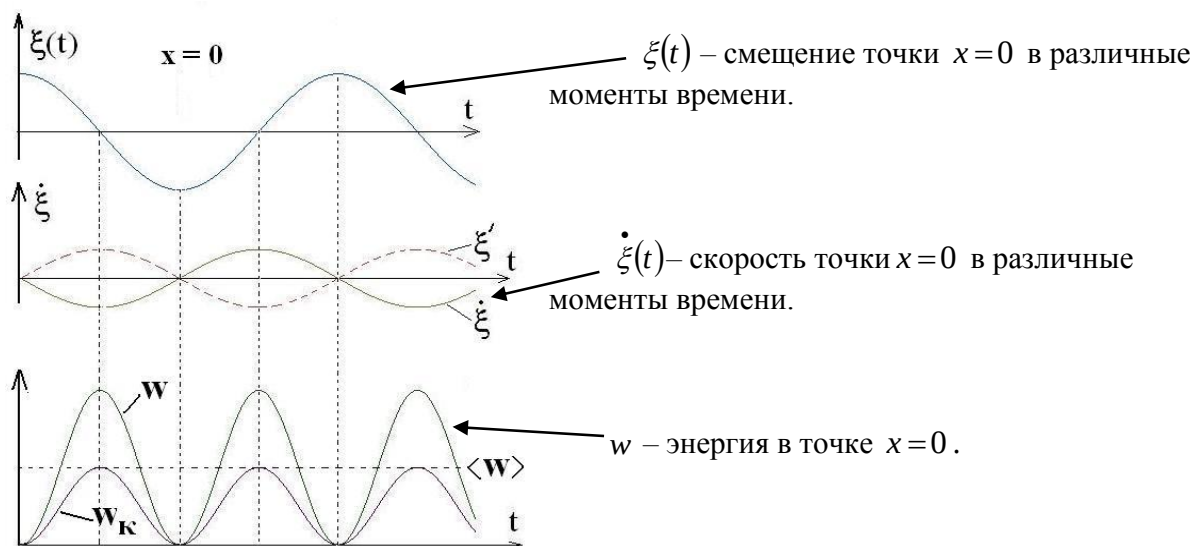
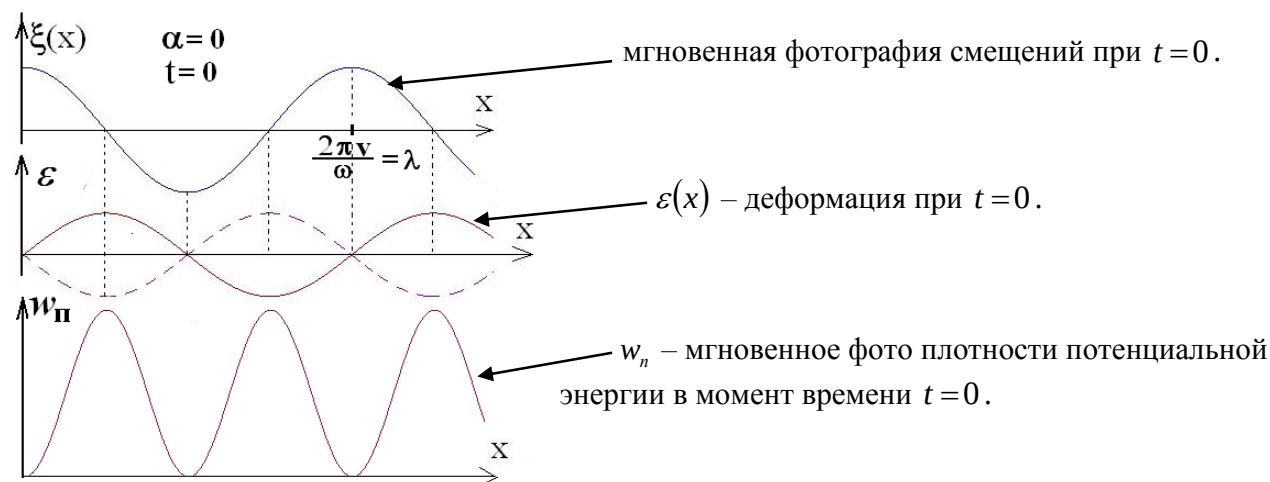
в бегущей волне в любой точке плотности кинетической w_k и потенциальной w_n энергий совпадают по фазе!

Плотность полной энергии в бегущей волне изменяется по гармоническому закону с вдвое меньшим периодом, чем у самой волны:

$$w = \frac{\rho_0 a^2}{2} \omega^2 \cdot 2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha_0) = \frac{\rho_0 a^2 \omega^2}{2} [1 - \cos 2(\omega t - kx + \alpha_0)].$$

$$\langle w \rangle = \frac{\rho_0 a^2 \omega^2}{2} - \text{усредненная по времени } t=T \text{ плотность энергии в любой точке}$$

пространства. Половину её составляет $\langle w_k \rangle = \langle w_n \rangle = \frac{1}{4} \rho_0 a^2 \omega^2$.



Максимальной энергией в бегущей волне обладают частицы, которые находятся в положении равновесия, так как они имеют максимальную скорость $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ и максимальную деформацию $\frac{\partial \xi}{\partial x}$. Эта энергия $w_{\max} = \rho_0 a^2 \omega^2$.

Минимальной энергией, равной 0, обладают максимально смещенные из положения равновесия частицы, так как в этих положениях их скорости $\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$ и деформация $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$.

Полученная зависимость $\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 a^2 \omega^2$ верна:

- 1) для любой формы волны,
- 2) для поглощающей среды.

9. Поток энергии упругой волны. Вектор Умова. Интенсивность волны

Отличительной особенностью волновых процессов является перенос энергии без переноса вещества.

Итак, среда, в которой распространяется волна, обладает дополнительным запасом энергии. Эта энергия доставляется от источника в различные точки среды самой волной, следовательно, волна переносит энергию.

Опред. Количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется потоком энергии Φ через эту поверхность.

$\Phi = \frac{dW}{dt} \leftarrow$ энергия, переносимая через поверхность в единицу времени.

$$[\Phi] = Bm = \frac{Дж}{с}.$$

Если поток энергии берется через замкнутую поверхность, то по теореме Гаусса он равен суммарной мощности источников, заключенных внутри этой поверхности.

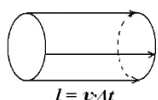
Средняя плотность потока энергии называется интенсивностью, или

интенсивность – это средняя по времени энергия, переносимая волной через единичную площадь, перпендикулярную к направлению распространения волны, в единицу времени t .

$$\left\langle \frac{d\Phi}{dS_{\perp}} \right\rangle_t = I.$$

Интенсивность – скалярная величина.

Пусть через площадку ΔS , перпендикулярную к направлению распространения волны $\vec{k}$, за время Δt переносится энергия ΔW .



– размеры цилиндра настолько малы, что можно считать w во всех точках этого цилиндра одинаковой.

Тогда плотность потока энергии $\vec{j}$ равна

$$\vec{j} = \frac{\Delta W}{\Delta t \cdot \Delta S_{\perp}} \cdot \frac{\vec{v}_{\phi}}{v_{\phi}} = w \cdot \vec{v}_{\phi}, \text{ так как } \Delta W = w \cdot \Delta S_{\perp} \cdot v_{\phi} \cdot \Delta t, \text{ где } \Delta S_{\perp} \cdot v_{\phi} \cdot \Delta t = \Delta V.$$



Вектор плотности потока энергии упругой волны $\vec{j} = w \cdot \vec{v}_\phi$ называется вектором Умова.

$$\langle \vec{j} \rangle = \langle w \rangle \cdot \vec{v}_\phi = \frac{1}{2} \rho_0 a^2 \omega^2 \vec{v}_\phi \leftarrow \text{для бегущей волны!}$$

$I = \left| \langle \vec{j} \rangle_{\text{усред. по времени}} \right| = \frac{1}{2} \rho_0 a^2 \omega^2 v_\phi$ – среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой волной.

Направление $\vec{j}$ соответствует направлению распространения волны и переноса энергии.

Если в среде нет поглощения, то:

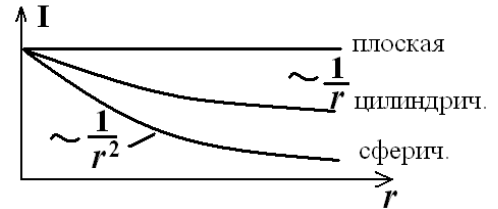
1) для плоской волны $I_{пл} = \text{const} = \frac{\Phi}{S}$;

2) для цилиндрической волны

$$I_{цил} = \frac{\Phi}{2\pi r h} = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 v_\phi a^2 \sim \frac{1}{r} \Rightarrow a^2 \sim \frac{1}{r};$$

3) для сферической волны

$$I_{сф} = \frac{\Phi}{4\pi r^2} \sim \frac{1}{r^2} \Rightarrow a^2 \sim \frac{1}{r^2}.$$



Так как поток Φ равен мощности источников $= \text{const}$ в непоглощающей среде, то амплитуда:

1) плоской волны $a_{пл} = \text{const}(r)$;

2) цилиндрической волны $a_{ци} = \frac{a_0 \sqrt{r_0}}{\sqrt{r}}$;

3) сферической волны $a_{сф} = \frac{a_0 r_0}{r}$.



10. Стоячие волны

Если в среде распространяется несколько волн, то колебания любой частицы среды представляют собой геометрическую сумму колебаний, которые совершила бы эта частица при распространении каждой волны в отдельности, следовательно, волны просто накладываются друг на друга, не возмущая друг друга. Это утверждение называется принципом суперпозиции (наложения) волн.

Особый интерес представляет наложение двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой.

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} \xi_1 &= a \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha_1) \\ \xi_2 &= a \cdot \cos(\omega t + kx + \alpha_2) \end{aligned} \right\} \rightarrow \xi_1 + \xi_2 = a [\cos(\omega t - kx + \alpha_1) + \cos(\omega t + kx + \alpha_2)] = \\ &= 2a \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right) = 2a \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(x + \frac{\alpha \lambda}{4\pi}\right)\right] \cos\left[\omega \left(t + \frac{\alpha}{2\omega}\right)\right]. \end{aligned}$$

Избавимся от $\frac{\alpha}{2}$ за счет сдвига начальной координаты и начала отсчета времени:

$$\xi_\Sigma = \xi_1 + \xi_2 = 2a \cdot \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t.$$

Теперь вернемся к привычным координатам x, t :

$$\xi_\Sigma = 2a \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \omega t - \text{уравнение стоячей волны.}$$

Отличие стоячей волны от бегущей:

с математической точки зрения в стоячей волне пространственная и временная переменные разделены; физически это приводит к тому, что если в бегущей волне все точки находятся в одинаковом положении (вопрос состоял только в том, раньше или позже до них дойдут колебания в зависимости от их расположения), то в стоячей волне каждая частица колеблется со своей собственной амплитудой $2a \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)$, зависящей от положения частицы в пространстве. Разные частицы имеют различные амплитуды колебаний, и существуют такие частицы, которые вообще не колеблются, – это узлы стоячей волны.

Места, в которых частицы колеблются с максимальной амплитудой, называются пучностями.

Найдем координаты узлов:

$$\cos\left(kx_{\text{узел}} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) = 0 \Rightarrow kx_{\text{узел}} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$\begin{cases} x_{\text{узел}} = \frac{\pi(2n+1)}{2k} - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2k} \\ k = \frac{2\pi}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_{\text{узел}} = \frac{\lambda}{4}(2n+1) - \frac{\lambda}{4} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Найдем координаты пучностей:

$$kx_{\text{пучн}} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = \pi n \Rightarrow$$

$$x_{\text{пучн}} = \frac{\lambda}{2}n - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Стоячие волны возникают в тех случаях, когда падающая волна отражается от границы среды, в которой она распространяется, то есть существует граница среды – это первое условие. И если при этом отраженная волна приходит к источнику с такой фазой, что при отражении от него фаза этой волны совпадает с фазой волны, излучаемой источником, то возникает стоячая волна. Указанное совпадение фаз может быть только в том случае, если длина λ волны согласуется с длиной объекта, в котором распространяются волны.

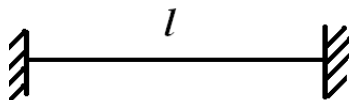
Местоположения узлов и пучностей любой конкретной стоячей волны задаются граничными условиями, обуславливающими возникновение этой стоячей волны.

При этом граничные условия могут быть всего лишь трех типов. Рассмотрим их на примере упругого стержня.

1. Концы стержня движутся по заданному закону. Это граничные условия первого типа:

$$\left. \begin{aligned} \xi(0, t) &= \varphi(t) \\ \xi(l, t) &= \psi(t) \end{aligned} \right\} \text{дают условие на смещение концов.}$$

Частный случай этого условия – концы жестко закреплены $\xi(0, t) = 0 = \xi(l, t)$.



Пример: гитарная струна.

В этом случае координатная часть уравнения волны должна описываться функцией $\sin \frac{2\pi x}{\lambda}$, тогда стоячая волна будет иметь вид $\xi = A \cdot \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \cos(\omega t + \alpha)$.



Но даже и эта функция не для всех λ будет удовлетворять граничным условиям, а только для следующих λ_n :

$$\frac{2\pi \cdot l}{\lambda_n} = \pi n \Rightarrow \lambda_n = \frac{2l}{n}.$$

Этому набору длин волн будут соответствовать следующие стоячие волны:



Так как $v = \text{const}$ для данного материала, то возникает условие на частоту стоячей волны:

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{2\pi \cdot n}{2l} = \frac{\omega_n}{v} \Rightarrow \omega_n = 2\pi \frac{v}{2l} n = \frac{\pi v}{l} \cdot n - \text{набор собственных частот.}$$

Итак, порядок рассмотрения стоячей волны (для любого граничного условия):

1) Изобразить графически возможные профили колебаний $\Rightarrow$ записать условие связи $\lambda_n = f(n, l)$.

2) Зная скорость v , как характеристику материала, определить спектр собственных частот $\omega_n = k_n \cdot v = \frac{2\pi}{\lambda_n} \cdot v$.

3) Записать уравнение волны, удовлетворяя граничным условиям и начальным условиям, если последние заданы.

2. Граничные условия второго типа: концы свободны $\Rightarrow$ деформация концов равна нулю

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \xi}{\partial x}(l, t) = 0.$$

В этом случае на концах будут находиться пучности волны смещений и узлы волны деформации и давления. Чтобы удовлетворить граничным условиям этого типа, стоячая волна должна иметь следующий вид:

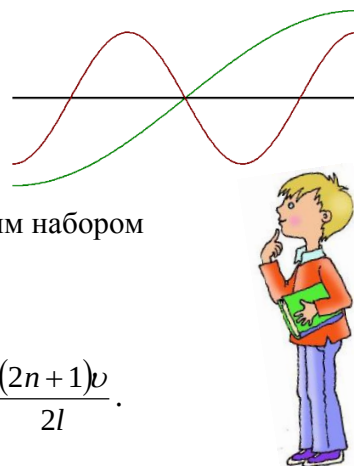
$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = A_1 \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cos(\omega t + \alpha) \Rightarrow \xi = A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos(\omega t + \alpha).$$

Начальная фаза α зависит от того, как была возбуждена стоячая волна, то есть от начальных условий.

Если стержень со свободными концами закреплен в центре, то в нем могут установиться стоячие волны со следующим набором длин волн, подчиняющихся условию

$$\frac{l}{2} = \frac{\lambda_n}{4} (2n+1) \Rightarrow \lambda_n = \frac{2l}{2n+1}.$$

При этом реализуется следующий спектр частот: $\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{(2n+1)v}{2l}.$

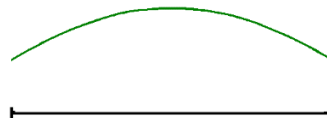


3. Граничные условия третьего типа соответствуют концам, закрепленным упруго:

$$\xi'_x(0, t) - h \cdot \xi(0, t) = \xi'_x(l, t) - h \cdot \xi(l, t) = 0,$$

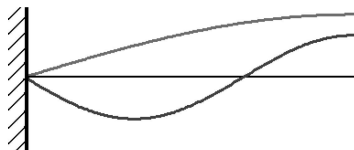
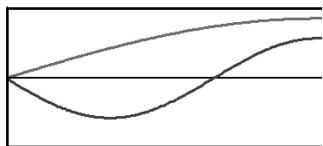
здесь $h = \frac{k}{ES}$ – коэффициент упругости крепежа.

При этом λ может быть больше чем $2l$.



Примеры.

1. На практике может также возникнуть комбинация разных типов условий. Например, колебания воздуха в трубе с одним открытым концом или колебания стержня с одним закрепленным концом.



$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 4l \\ \lambda_2 &= \frac{\lambda_1}{3} = \frac{4l}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\lambda_n = \frac{4l}{(2n-1)} \quad \text{для } n=1,2,\dots \Rightarrow$$

$$v_n = \frac{(2n-1)}{4l} \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}};$$

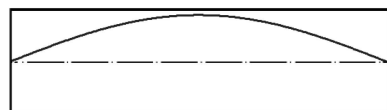
$$v_n = \frac{2n-1}{4l} \sqrt{\frac{G}{\rho_0}};$$

$$\omega_n = 2\pi \cdot v_n;$$

$$\xi_n = A \sin \frac{\pi}{2l} (2n-1)x \sin(\omega_n t + \alpha_n).$$



2. В закрытой с двух торцов трубе:



$$\xi_n = A_n \sin \frac{2\pi x}{\lambda_n} \cos(\omega_n t + \alpha) = A_n \sin \frac{\pi n x}{l} \cos\left(\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} \frac{\pi n}{l} t + \alpha\right).$$

Выводы.

Для бегущей волны определяющими факторами являются частота источника ω и скорость распространения волны v ; эти параметры определяют собой длину волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega}.$$

Для стоячей волны определяющими факторами являются геометрические размеры системы и граничные условия; эти факторы определяют собой возможный набор длин стоячих волн $\lambda_n \Rightarrow$ условия на возможные частоты стоячей волны.

$$\text{Бегущие волны: } \left. \begin{aligned} \omega \\ v \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi v}{\omega}.$$

$$\text{Стоячие волны: } \left. \begin{aligned} \text{гр. усл.} \\ l \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda_n + v \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi v}{\lambda_n}.$$



11. Пример сравнения бегущей и стоячей волн

Пусть $\xi = A \cos kx \cos \omega t$ – стоячая волна и $\xi = A \cos(\omega t - kx)$ – бегущая волна. Тогда:

$$\dot{\xi} = -A\omega \cos kx \sin \omega t;$$

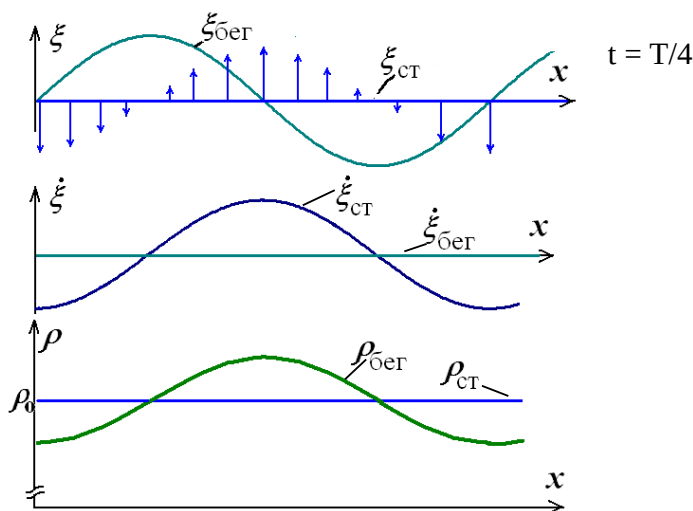
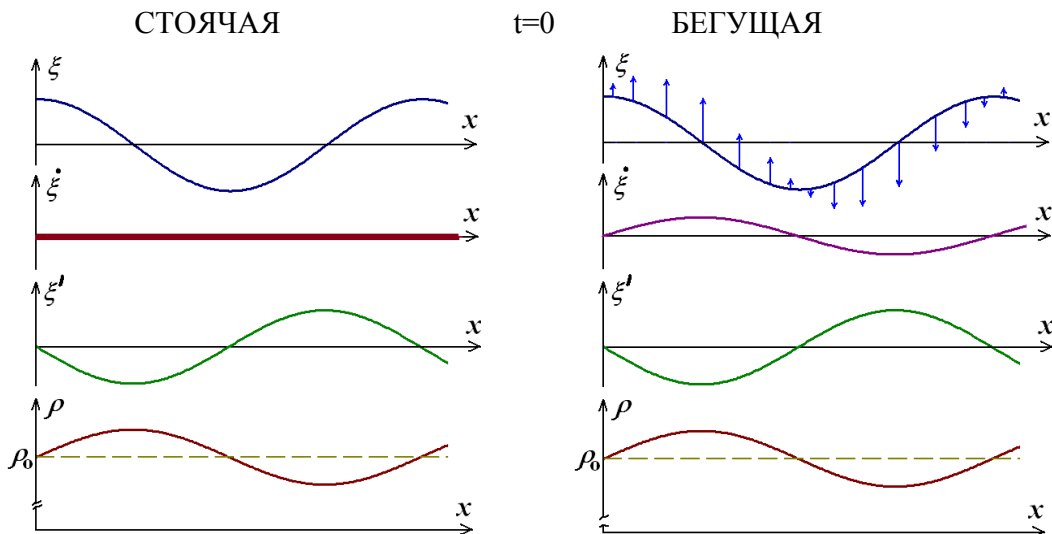
$$\dot{\xi} = -\omega A \sin(\omega t - kx);$$

$$\xi' = -Ak \sin kx \cos \omega t;$$

$$\xi' = Ak \sin(\omega t - kx).$$

Сравним поведение частиц в бегущей и стоячей волне, изобразив графики мгновенных отклонений ξ , скоростей $\dot{\xi}$ и деформаций $\varepsilon = \xi'$, а также плотности среды ρ для моментов времени $t = 0$ и $t = T/4$.

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \varepsilon} \cong \rho_0(1 - \varepsilon) = \rho_0(1 - \xi').$$



(На графиках стрелками показаны скорости частиц в поперечной волне.)

В бегущей волне, как и в стоячей, деформация ε_{max} максимальна в узлах волны, но в бегущей волне эти узлы перемещаются в пространстве, а в стоячей деформация в любой точке меняется во времени по гармоническому закону.

12. Распределение энергии в стоячей волне

Рассмотрим стоячую волну $\xi = a \sin kx \cos \omega t$.

Плотность кинетической энергии:

$$w_k = \frac{\rho_0 \dot{\xi}^2}{2} = \frac{\rho_0 a^2 \omega^2 \sin^2 kx \sin^2 \omega t}{2} = \frac{\rho_0 a^2 \omega^2}{2} \sin^2 \omega t \frac{1 - \cos 2kx}{2}.$$

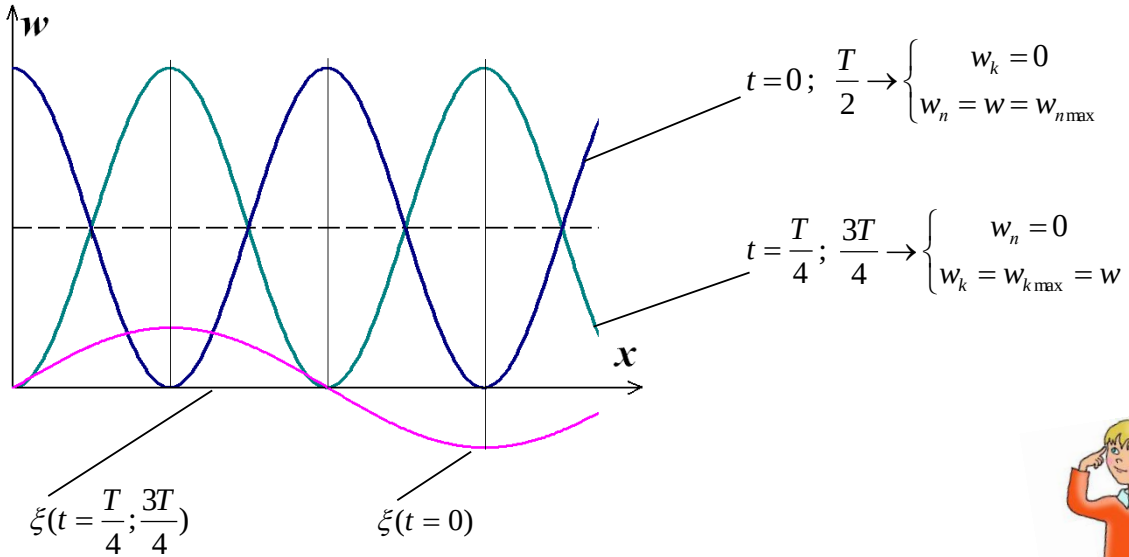
Плотность потенциальной энергии:

$$w_n = \frac{E \xi'^2}{2} = \frac{E}{2} k^2 a^2 \cos^2 kx \cos^2 \omega t = \frac{\rho_0}{2} \omega^2 a^2 \cos^2 kx \cos^2 \omega t.$$

Плотность полной энергии:

$$w = \frac{\rho_0 a^2 \omega^2}{2} \left[\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2kx}{2} + \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2kx}{2} \right] =$$

$$= \frac{\rho_0 a^2 \omega^2}{2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t \cos 2kx) = \frac{\rho_0 a^2 \omega^2}{4} [1 + \cos 2\omega t \cos 2kx].$$



В стоячей волне плотности потенциальной и кинетической энергии находятся в противофазе, и два раза за период энергия стоячей волны превращается то полностью в потенциальную (при максимальной деформации), то полностью в кинетическую (когда все частицы находятся в положении равновесия).



При этом в пучностях деформация и w_n всегда равны нулю, а в узлах всегда $w_k = 0$.

Вопрос. $\langle w_{cm} \rangle = \frac{1}{4} \rho_0 a^2 \omega^2$ в то время, как $\langle w_{bez} \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 a^2 \omega^2$. Почему $2\langle w_{cm} \rangle = \langle w_{bez} \rangle$?

Ответ + вопрос. Это только кажется. На самом деле $a_{cm} = 2a_{bez} \Rightarrow \langle w_{cm} \rangle = 2\langle w_{bez} \rangle$. А это почему?

Ответ. Потому что стоячая волна состоит из двух бегущих.

Вопрос. Что можно сказать о векторе Умова в стоячей волне?

Ответ. $\vec{v}_\phi = 0$ в стоячей волне, так как в стоячей волне фаза колебания закреплена за каждой точкой.

Следовательно, $\vec{j} = w \cdot \vec{v}_\phi$ верно только для бегущей волны.

Для стоячей волны вектор Умова $\vec{j}$ следует искать по-другому.

Источником потока энергии является её убыль в единицу времени в данной точке,

то есть $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$.

Используя это соотношение для одномерного случая, найдем вектор Умова:

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho_0}{2} \dot{\xi}^2 + \frac{E}{2} \xi'^2 \right] = -\frac{\rho_0}{2} \ddot{\xi} \xi - \frac{\rho_0 v^2}{2} \cdot 2 \xi' \cdot \dot{\xi}' = -\rho_0 v^2 \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial x} \right\} =$$

$$= -\rho_0 v^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] = \frac{\partial j_x}{\partial x} \Rightarrow \vec{j} = -\rho_0 v^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \vec{e}_x = -E \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \vec{e}_x.$$

$$\vec{j} = -\rho_0 v^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \vec{e}_x - \text{общее выражение вектора Умова для стоячей и бегущей волны.}$$

Переходим к следующему вопросу при рассмотрении упругих волн, начать можно с житейского примера для упрощения процесса восприятия и большей убедительности. Допустим, вы отправляетесь в Париж и решаете проехать в поезде через всю Европу. Ваша девушка, оставаясь в Москве, настаивает, чтобы вы посылали ей каждые два часа с дороги по письму. Вы, разумеется, соглашаетесь и, сев в поезд, абсолютно пунктуально выполняете обещание. Почта работает идеально. Каждые два часа к окну вашего вагона подлетает самолет, забирает письмо и, долетев до Москвы, бросает его в форточку девушки. Скорость поезда 100 км/ч, скорость самолета 1000 км/ч. Таким образом, уже через 2 часа 12 минут после отправления поезда девушка получает первое письмо. Однако, начиная со второго письма, на вас начнёт копиться обида. Так как каждое следующее письмо приходят не через 2 часа, а через 2 часа 12 минут после предыдущего. Пятое письмо девушка получит не через 10, как надеялась, а через 11 часов после отправления поезда. Ее терпению приходит конец, и вас обвиняют в необязательности, забывчивости, легкомыслии и т.д. и т.п.



Вопрос. Кто виноват в сложившейся ситуации?

Ответ на этот вопрос заключен в эффекте, который носит имя австрийского физика XIX в. Кристиана Доплера. Справедливости ради следует отметить, что, сохранив наглядность, этот пример, родом из XX в., утратил свою актуальность в XXI в. благодаря внедрению сотовой связи.

13. Эффект Доплера для упругих волн

Если источник и/или приемник движутся относительно среды, в которой распространяются волны, то частота волн, воспринимаемых приемником, может быть отлична от частоты источника. Это эффект Доплера. Доплер открыл свой эффект для акустических волн в 1842 г.

Физика эффекта простая – изменение числа (длин) волн, укладываемых между источником и приемником на пути распространения волны. При сохранении длины волны, испускаемой источником, движение источника (приемника) приводит к изменению числа волн, достигающих приемника в единицу времени, то есть изменению частоты воспринимаемых колебаний.

Рассмотрим наглядные примеры.

1. Пловец создает вокруг себя поверхностные волны.

Пусть v – скорость волн, $v_{пл}$ – скорость пловца.

Вопрос. В какую сторону движется пловец?

Ответ. К приемнику В.

Вопрос. Одинаковы ли длины волн, воспринимаемые приемниками А и В, с одинаковой ли частотой приходят волны?

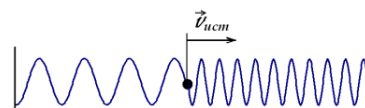
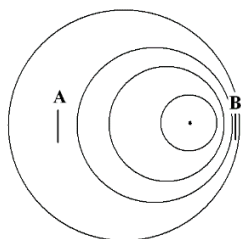
Ответ. $\lambda_A = \lambda_0 + \Delta\lambda = vT + v_{пл}T$,

где $\Delta\lambda$ – расстояние, на которое пловец уплыл за время T . $\Rightarrow$

$$\lambda_A = \lambda_0 \left(1 + \frac{v_{пл}}{v} \right) \leftarrow \text{удаление источника от приемника,}$$

$$\lambda_B = \lambda_0 - \Delta\lambda = \lambda_0 \left(1 - \frac{v_{пл}}{v} \right) \leftarrow \text{приближение источника к}$$

приемнику.



$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega} \Rightarrow \omega_A = \frac{2\pi v}{\lambda_0} \frac{1}{1 + \frac{v_{nl}}{v}} = \frac{\omega_0}{1 + \frac{v_{nl}}{v}} \leftarrow \text{удаление источника от приемника.}$$

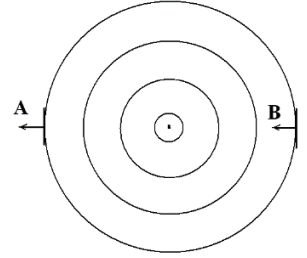
Заменяв v_{nl} на v_{ucm} , получим $\omega_B = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v_{ucm}}{v}} \leftarrow \text{приближение источника к приемнику.}$

2. Теперь пусть пловец барахтается на месте, а приемник к нему приближается или удаляется.

Тогда приемник В будет воспринимать гребни волны через время t_1 такое, что

$$t_1 v_B + t_1 v = \lambda_0 \Rightarrow T_{npB} = t_1 = \frac{\lambda_0}{v_B + v} \Rightarrow$$

$$\omega_B = \frac{2\pi}{T} = \omega_0 \left(1 + \frac{v_{np}}{v} \right) \leftarrow \text{приближение приемника к источнику.}$$

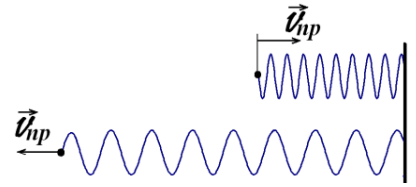


Если приемник А удаляется, то он будет воспринимать гребни волн через время $t_2 = T_{npA}$ такое, что

$$t_2 v - t_2 v_{npA} = \lambda_0,$$

где $t_2 v$ – то расстояние, которое пройдет волна за время между получениями приемником А максимумов сигналов, $\Rightarrow$

$$\omega_A = \frac{2\pi}{T} = \omega_0 \left(1 - \frac{v_{np}}{v} \right) \leftarrow \text{удаление приемника от источника.}$$



Если источник и приемник движутся не вдоль одной прямой, проходящей через их местоположение, то надо брать проекции скоростей на прямую, проходящую через координаты источника и приемника.

Чтобы не думать каждый раз о сближении-удалении, гораздо удобнее пользоваться следующей формулой:

$$\omega_{np} = \omega_0 \frac{1 - \frac{\vec{n} \vec{v}_{np}}{v}}{1 - \frac{\vec{n} \vec{v}_{ucm}}{v}}, \text{ где } \vec{n} = \frac{\vec{k}}{k} - \text{направление распространения упругой волны,}$$

v – скорость волны относительно неподвижной среды.



Вывод из полученной формулы:

Для звуковых волн нет поперечного эффекта Доплера.

Проверим, совпадает ли предлагаемая формула с ранее полученными.

Пусть источник и приемник движутся в одну сторону, тогда

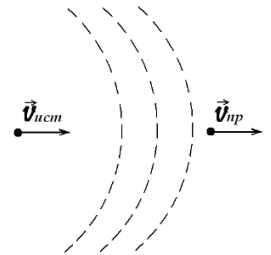
$$\omega_{np} = \omega_0 \frac{1 - \frac{v_{np}}{v}}{1 - \frac{v_{ucm}}{v}} - \text{получилось два знака “-”, так как источник}$$

стремится сблизиться, а это дает знак “-” в знаменателе, а приемник стремится удалиться, а это дает знак “-” в числителе, что и требовалось доказать.

Полученная формула верна при следующих условиях:

1. Волны – плоские, то есть все расстояния $\gg$ длины волны λ , размеров источника и приемника.

Другими словами, полученная формула верна в волновой зоне.



Опред. Волновая зона – область пространства, где волну можно считать плоской.

2. Все скорости $v, v_{\text{ист}}, v_{\text{пр}} \ll c$.

3. $v_{\text{ист}}, v_{\text{пр}} \ll v$.

4. Все скорости берутся относительно покоящейся среды.

14. Ударные волны

Вопрос. Что будет, если скорость источника больше скорости распространения волны $v_{\text{ист}} \geq v$? Может ли вообще такое быть?

Ответ. Да, может, например:

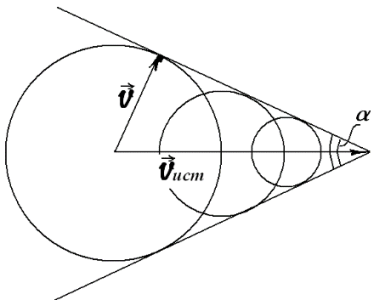
1) катера мчатся по реке с $v_{\text{кат}} \geq v_{\text{пов.волн}}$;

2) сверхзвуковой самолет.

Если предмет движется быстрее звука, то он сам производит звук без дополнительных вибраций. При этом объект создает конические волны (конус Маха), которые:

а) для упругих волн называются ударными (их нельзя услышать, пока не почувствуешь),

б) для световых волн носят название черенковского излучения.



$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{v}{v_{\text{ист}}} \text{ при } v_{\text{ф}} < v_{\text{ч-цы}}.$$

$$(\text{Для света } v_{\text{ф}} = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.)$$

Движущийся предмет сдвигает частицы среды со своего пути, вызывая в тонкой переходной области увеличение плотности вещества и, следовательно, резкое повышение давления. Кроме того, увеличение плотности влечет за собой рост скорости распространения волны в уплотненной среде.

Рассмотрим уравнение ударной адиабаты (адиабаты Гюгонио) для ударных волн в идеальном газе (двухатомном) с постоянной теплоемкостью, вытекающее из законов сохранения массы, импульса и энергии:

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{(\gamma+1)V_0 - (\gamma-1)V_1}{(\gamma+1)V_1 - (\gamma-1)V_0} \Rightarrow$$

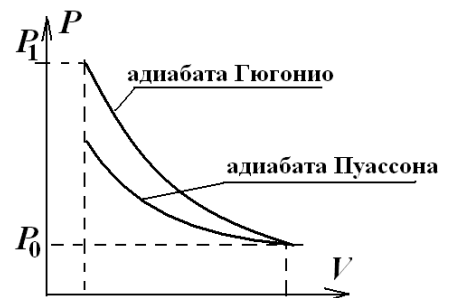
$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1},$$

здесь v – скорость за фронтом волны, v_0 – скорость звука в невозмущенном веществе.

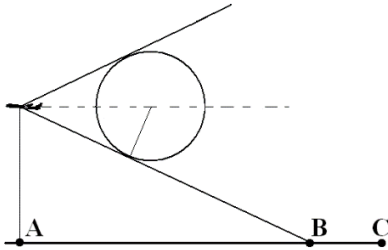
$$\gamma = \frac{7}{5} \leftarrow \text{для двухатомного газа.}$$

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{7}{6} \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 - \frac{1}{6};$$

$$\left(\frac{v}{v_0} \right)^2 = \frac{6 \frac{P_1}{P_0} + 1}{7} \xrightarrow{P_1=2 \text{ атм}} \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 = \frac{13}{7} \Rightarrow v = v_0 \sqrt{\frac{13}{7}}.$$



При этом ударная волна в двухатомном идеальном газе не может его сжать сильнее, чем в $\frac{\rho_1}{\rho_0} = \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right)$ раз, то есть для воздуха предел сжатия 6 раз. (Соотнесите это с повышением давления звука речи $\Delta P \approx 10^{-6} \text{ атм.}$) Так как повышение давления (например, на 1 атм) увеличивает скорость распространения волны (соответственно на 20%), то скорость ударной волны всегда выше скорости звука в газе перед фронтом $\Rightarrow$ *предугадать приход ударной волны по звуку невозможно*. Звук появляется, когда в результате распыливания ударная волна будет ослаблена до такой степени, что перепад давления станет $\Delta P \ll P_{\text{атм}}$. В результате, когда фронт достигнет наших ушей, услышим хлопок или выстрел, затем звук.



Вопрос. Если в небе летит сверхзвуковой самолет, то что слышат наблюдатели А, В, С?

Ответ. А – ничего, В – хлопок, С – звук мотора.

Вопрос. Чему равна скорость самолета?

Ответ. $v_c = v_{\text{зв}} \cdot \frac{AB}{h} \approx 2,5 \cdot 340 \approx 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Вопрос. Слышит ли пилот сверхзвукового

самолета рёв моторов, находящихся на крыльях?

Ответ. Да, слышит, так как:

1) звук распространяется не только по воздуху, но и по обшивке самолета, а скорость звука в металле $v \approx 5 \frac{\text{км}}{\text{с}}$;

2) воздух внутри самолета сам движется со сверхзвуковой скоростью и ничего не знает о движении мотора и пилота.



15. Связь интенсивности с приращением давления

Выясним, как изменяется давление в среде при распространении в ней упругой звуковой волны с интенсивностью I .

Частота звука, который воспринимает человеческое ухо, $16 \text{ Гц} < \nu_{\text{зв}} < 20 \text{ кГц}$.

При этом период колебания частиц лежит в пределах $5 \cdot 10^{-5} < T_{\text{зв}} < 7 \cdot 10^{-2} \text{ с}$. Если это время меньше характерного времени теплообмена τ , то волновой процесс можно считать адиабатическим.

При адиабатическом процессе $PV^\gamma = \text{const} = \alpha$.

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{m}{\rho_0} (1 + \varepsilon) = V_0 (1 + \varepsilon), \text{ так как } \rho = \frac{\rho_0}{1 + \varepsilon}.$$

$$(P_0 + \Delta P) \cdot V^\gamma = \alpha \Rightarrow (P_0 + \Delta P) V_0^\gamma (1 + \varepsilon)^\gamma = \alpha \Rightarrow P_0 V_0^\gamma (1 + \varepsilon)^\gamma + \frac{\Delta P}{P_0} \cdot P_0 V_0^\gamma (1 + \varepsilon)^\gamma = \alpha.$$

Упростим полученное выражение, подставив $P_0 V_0^\gamma = \alpha$ и используя приближение $(1 + \varepsilon)^\gamma \approx 1 + \gamma \varepsilon$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \varepsilon)^\gamma \left(1 + \frac{\Delta P}{P_0} \right) = 1 \\ (1 + \varepsilon)^\gamma \approx 1 + \gamma \varepsilon \end{array} \right. \Rightarrow 1 + \gamma \varepsilon + \gamma \varepsilon \frac{\Delta P}{P_0} + \frac{\Delta P}{P_0} = 1 \Rightarrow \frac{\Delta P}{P_0} \approx -\gamma \varepsilon \Rightarrow \Delta P_{\text{max}} = \frac{a \omega}{v} P_0$$

– максимальное повышение давления в упругой звуковой волне $\Delta P = -\gamma P_0 \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$.

Выразим полученное приращение давления $\Delta P_{\max}$ через интенсивность волны I , учитывая взаимосвязь давления $P_0 = \frac{m}{\mu V} RT = \frac{\rho_0 RT}{\mu}$ и скорости $v = \sqrt{\frac{RT\gamma}{\mu}} = \sqrt{\frac{P_0\gamma}{\rho_0}}$ с температурой T :

$$\Delta P_{\max} = \frac{a\omega}{v} \cdot \gamma \cdot \frac{\rho_0 RT}{\mu} \underset{v = \sqrt{\frac{RT\gamma}{\mu}} = \sqrt{\frac{P_0\gamma}{\rho_0}}}{=} \frac{a \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \rho_0 \cdot RT \cdot \sqrt{\mu}}{\mu \cdot \sqrt{RT \cdot \gamma}} = \rho_0 a \omega \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = a \omega \rho_0 v \Rightarrow$$

$$I = \langle w \rangle \cdot v = \frac{\rho_0 a^2 \omega^2}{2} \cdot v = \frac{\rho_0 \omega^2 v}{2} \cdot \frac{(\Delta P_{\max})^2}{\omega^2 \rho_0^2 v^2} = \frac{(\Delta P_{\max})^2}{2 \rho_0 v} \Rightarrow$$

$\Delta P_{\max} = \sqrt{2 \rho_0 v I}$ – максимальное повышение давления в упругой звуковой волне с интенсивностью I .

16. Субъективные оценки для звуковых волн

В заключении рассмотрения звуковых волн полезно привести некоторые *характеристики собственно звуковых волн, воспринимаемых человеком.*

$16 \text{ Гц} < \nu_{\text{зв}} < 20\,000 \text{ Гц}$ – звук, который воспринимает человеческое ухо.

Уровень громкости $L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$ измеряется в децибелах [дБ].

Мы воспринимаем плотность потока энергии, то есть интенсивность I .

Если $I_{0\min} = 10^{-12} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ при $\nu = 1000 \text{ Гц}$, это соответствует колебаниям барабанной перепонки с амплитудой $a = \frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{\frac{2I}{\rho_0 v}} \sim 0,2 \text{ \AA}$, при этом приращение давления $\Delta P = \sqrt{2 \rho_0 I v} \sim 3 \cdot 10^{-5} \text{ Па}$.

Если $I_{\max} = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ при $\nu = 500 \text{ Гц}$, это соответствует колебаниям барабанной перепонки с амплитудой $a_{\max} = \frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{\frac{2I}{\rho_0 v}} \cong 90 \text{ мкм} \approx 0,1 \text{ мм}$; при этом приращение давления в звуковой волне $\Delta P = \sqrt{2 \rho_0 I v} \sim 2 \cdot 10^2 \text{ Па}$, что на три порядка ниже нормального атмосферного давления.

Приведенные оценки убедительно свидетельствуют о том, что слуховой аппарат человека является исключительно тонким прибором с широким диапазоном измерений, требующим бережного отношения.



II.2. Электромагнитные волны

1. Общие понятия и предыстория



Опред. Распространение в пространстве переменного электромагнитного поля называется электромагнитной волной. В электромагнитной волне изменяются во времени и в пространстве напряженности электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей, то есть колеблются векторы $\vec{E}, \vec{H}$.

Так как фотохимические, физиологические, фотоэлектрические воздействия электрических полей сильнее воздействий магнитного поля, то под поляризацией электромагнитной волны понимается ориентация вектора $\vec{E}$.

Предыстория.

1832 г. – М. Фарадей высказал предположение о возможности существования электромагнитных волн.

1865 г. – Дж. Максвелл создал теорию электромагнетизма, в основе которой лежит система уравнений. Одним из следствий системы уравнений Максвелла, наиболее поразивших воображение современников, явилось утверждение о существовании и распространении со скоростью света электромагнитных волн ($\Rightarrow$ сам свет – суть электромагнитная волна).

1888 г. – Г. Герц получил на вибраторе электромагнитные волны с длиной волны $\lambda = 0,6 \text{ м} \div 10 \text{ м}$.

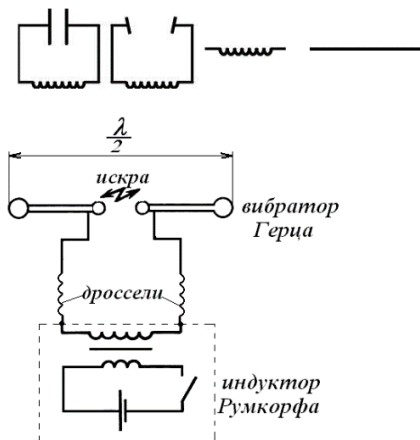
По мнению современника Г. Герца Дж. Томсона (1856–1940), работы Герца представляют собой изумительный триумф экспериментального мастерства, изобретательности и вместе с тем образец осторожности в выводе заключений. Вот на каких принципах основана работа изобретенного Герцем вибратора:

- 1) излучать электромагнитную волну может только ускоренно движущийся заряд;
- 2) интенсивность электромагнитной волны, излученной колеблющимся зарядом, пропорциональна четвертой степени частоты колебаний;
- 3) наиболее доступным является ускоренное движение зарядов в колебательном контуре, то есть можно использовать переходные процессы для излучения электромагнитных волн, но надо сделать так, чтобы частота колебаний зарядов стала как можно выше;
- 4) частота свободных затухающих колебаний контура с малым активным сопротивлением

$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. Чтобы уменьшить емкость C , надо увеличить расстояние между пластинами (раздвигать их, делать контур открытым) и уменьшать площадь пластин. Чтобы уменьшить индуктивность L , надо уменьшать число витков. В результате этих преобразований получим просто кусок провода или *открытый колебательный контур (ОКК)*, как показано на рисунке.

Схема установки Герца представлена на том же рисунке.

Вибратор Герца представляет собой 2 стержня, разделенных искровым промежутком. При подаче на вибратор высокого напряжения от индукционной катушки в промежутке проскакивает искра, она закорачивает стержни, в которых возникают затухающие колебания. За время горения искры успевает произойти много колебаний, в результате которых излучаются электромагнитные волны. Дроссели нужны для того, чтобы высокочастотный ток не ответвлялся в обмотку индуктора.

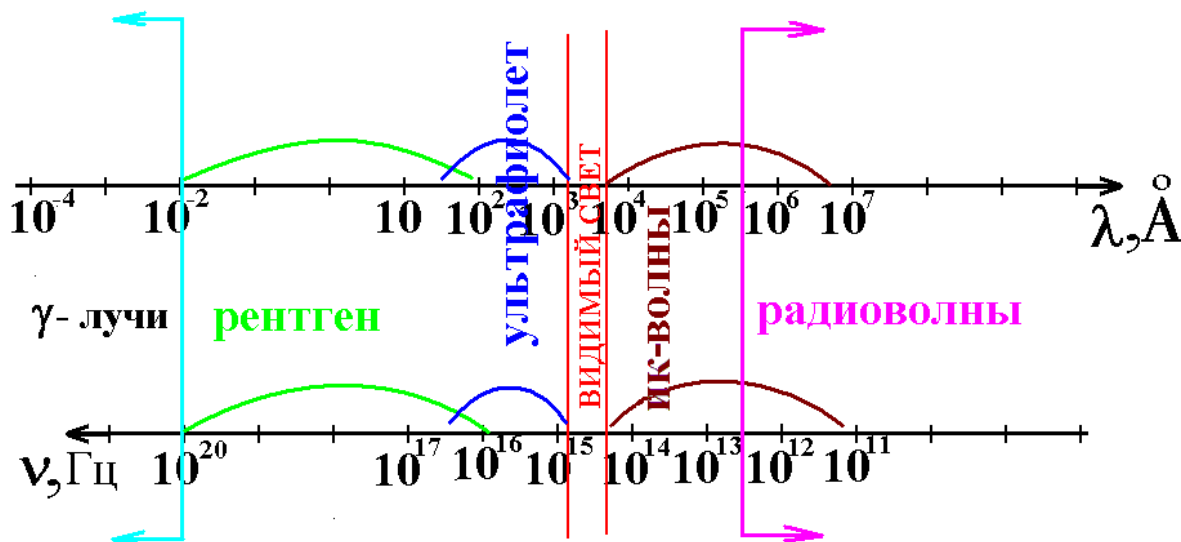


1894 г. – П. Н. Лебедев получил волны с $\lambda = 6$ мм и исследовал двойное лучепреломление.

1896 г. – А.С. Попов, основоположник радиотехники, передал слова “Генрих Герц” на расстояние 250 м.

В зависимости от частоты или длины волны электромагнитные волны, которые представляют собой распространение переменного электромагнитного поля в пространстве, делятся на следующие группы:

	γ -лучи $\rightarrow \lambda < 10^{-1} \text{ \AA}$
	рентген $\rightarrow 10^{-2} \text{ \AA} < \lambda < 10^2 \text{ \AA}$
свет $\Rightarrow$ оптика	ультрафиолет $\rightarrow 10 \text{ \AA} < \lambda < 4 \cdot 10^3 \text{ \AA}$
	видимый свет $\rightarrow 4000 \text{ \AA} < \lambda < 7600 \text{ \AA}$
	инфракрасн. $\rightarrow 7600 \text{ \AA} < \lambda < 10^6 \text{ \AA}$
радиоволны	СВЧ $\rightarrow 10^6 \text{ \AA} < \lambda < 10^{10} \text{ \AA}$
	ультракороткие $\rightarrow 10^{10} \text{ \AA} < \lambda < 10^{11} \text{ \AA}$
	короткие $\rightarrow 10^{11} \text{ \AA} < \lambda < 10^{12} \text{ \AA}$
	средние $\rightarrow 10^{12} \text{ \AA} < \lambda < 10^{13} \text{ \AA}$
	длинные $\rightarrow 10^{13} \text{ \AA} < \lambda < 10^{14} \text{ \AA}$
	сверхдлинные $\rightarrow 10^{14} \text{ \AA} < \lambda < 10^{15} \text{ \AA}$



$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi \cdot v}{\omega} = \frac{2\pi \cdot c}{\omega} = \frac{1,88 \cdot 10^9}{\omega} = \frac{c}{\nu};$$

$$\omega = \frac{1,88 \cdot 10^9}{\lambda} \Rightarrow \nu = \frac{3 \cdot 10^8}{\lambda}.$$

Видимый свет $\lambda = 4000 \div 7600 \text{ \AA}$, $\nu = (0,39 \div 0,75) \cdot 10^{15} \text{ Гц}$.



Для радиоволн, так как $\lambda \gg a$ – атомного размера, не сказываются квантовые свойства излучения. В оптической области проявляются и квантовые, и волновые свойства излучения. В области рентгеновского и γ -излучений основную роль играют квантовые свойства.

2. Волновое уравнение для электромагнитных волн

Распределение электромагнитного поля в пространстве определяется решением системы уравнений Максвелла применительно к конкретной среде.

$$\text{Уравнения Максвелла:} \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho_0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}.$$

Посмотрим, как изменится общая система уравнений при рассмотрении интересных нас сред. Будем последовательно накладывать условия на среду распространения волн и отслеживать изменения в системе уравнений Максвелла.

Условия на среду:

1. Изотропная среда $\Rightarrow \vec{D} \parallel \vec{E}; \vec{B} \parallel \vec{H} \Rightarrow \varepsilon, \mu$ – скалярные величины $\Rightarrow$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}; \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H}) \\ \varepsilon_0 \operatorname{div} (\varepsilon \vec{E}) = \rho_0 \\ \operatorname{div} (\mu \vec{H}) = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_0 + \varepsilon_0 \frac{\partial (\varepsilon \vec{E})}{\partial t} \end{cases}.$$

2. Однородная среда $\Rightarrow \varepsilon, \mu = \operatorname{const}(\vec{r}) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H}) \\ \varepsilon_0 \varepsilon \cdot \operatorname{div} \vec{E} = \rho_0 \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_0 + \varepsilon_0 \frac{\partial (\varepsilon \vec{E})}{\partial t} \end{cases}.$$

3. Несегнетоэлектрическая среда $\Rightarrow \varepsilon = \operatorname{const} \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \vec{E}) = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

4. Неферромагнитная среда $\Rightarrow \mu = \operatorname{const} :$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H}) = \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

5. Незаряженная среда $\Rightarrow \rho_0 = 0 \Rightarrow$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0.$$

6. Непроводящая среда $\Rightarrow$ проводимость $\sigma = 0 \Rightarrow \vec{j}_0 = \sigma \vec{E} = 0 \Rightarrow$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$



В результате имеем:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & (1) \\ \text{div} \vec{E} = 0 & (2) \\ \text{div} \vec{H} = 0 & (3) \\ \text{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (4) \end{cases}$$

– именно эту систему уравнений мы будем исследовать.

Наша задача – получить волновое уравнение. Применим оператор rot к уравнению (1):

$$\text{rot}[\text{rot} \vec{E}] = [\vec{\nabla}_a [\vec{\nabla}_b, \vec{E}_c]] = \nabla(\nabla \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\Delta \vec{E}, \text{ так как } \nabla \vec{E} = 0 \text{ – уравнение (2) системы.}$$

$$-\Delta \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{H}) = -\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta \vec{E} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Если бы мы применили оператор rot к (4) уравнению, то получили бы аналогичное уравнение для напряженности магнитного поля:

$$\Delta \vec{H} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

В соответствии с размерностью коэффициента обозначим его $\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon = \frac{1}{v^2}$; как выясним в дальнейшем, v представляет собой скорость электромагнитных волн в среде.

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\varepsilon \mu}} \\ \Delta \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}, \text{ где } v \text{ – скорость электромагнитных волн в среде.}$$

В вакууме $\varepsilon = \mu = 1$, $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \pm 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ← современный уровень точности измерения скорости света.

Будем искать решение волновых уравнений в виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha)} = \vec{E}_0 [\cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha) + i \cdot \sin(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha)];$$

$$\text{Re } \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha);$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \beta)}.$$

Вывясним, удовлетворяет ли уравнениям Максвелла указанный вид волн $\vec{E}$, $\vec{H}$ и как соотносятся их амплитуды и фазы.

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_{0x} e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha)} & E_{0y} e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha)} & E_{0z} e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha)} \end{vmatrix} =$$

$$= -i \{ \vec{e}_x (k_y E_{0z} - k_z E_{0y}) - \vec{e}_y (k_x E_{0z} - k_z E_{0x}) + \vec{e}_z (k_x E_{0y} - k_y E_{0x}) \} e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha)} = i \cdot [\vec{E}, \vec{k}];$$



$$E_x = E_{0x} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)};$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -E_{0x} \cdot (i) \cdot k_y e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)} = -ik_y E_x$$

$$\left. \begin{aligned} i \cdot [\vec{E}, \vec{k}] &= \text{rot} \vec{E} \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= i \cdot \omega \vec{H} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$[\vec{E}, \vec{k}] = -\omega \mu_0 \mu \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = -[\vec{E}_0, \vec{n}] \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} [\vec{E}, \vec{n}].$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{n}, \text{ где } \vec{n} - \text{единичный вектор в направлении распространения волны.}$$

Таким образом, для бегущей электромагнитной волны, распространяющейся в однородной изотропной незаряженной и непроводящей среде, справедливы соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \vec{H} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} [\vec{n}, \vec{E}] \\ \vec{E} &= \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} [\vec{H}, \vec{n}] \end{aligned} \right\}, \text{ то есть } \vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{n} \Rightarrow \text{электромагнитная волна поперечная.}$$

Поперечность электромагнитной волны получается также из уравнений:

$$\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow (\vec{k}, \vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E};$$

$$\text{div} \vec{H} = 0 \Rightarrow (\vec{k}, \vec{H}) = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{H}.$$

Замечание. Не следует думать, что электромагнитные волны всегда и везде являются поперечными. Например, в плазме электромагнитные волны могут быть продольными, а в анизотропных кристаллах волны могут быть косыми. Поперечными электромагнитные волны являются именно в тех средах, для которых справедливы наложенные нами условия.

В бегущей волне, распространяющейся в непроводящей среде, $\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H$ (в проводящей среде фазы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ не совпадают).

В стоячей электромагнитной волне $\vec{E}$ и $\vec{H}$ по фазе не совпадают.

Рассмотрим стоячую электромагнитную волну. Пусть $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x \cdot \cos ky \cdot \cos \omega t$.

В этом случае $\vec{H}$ надо искать из уравнения Максвелла $\text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$.

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_0 \cos ky \cdot \cos \omega t & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z \cdot E_0 k \sin ky \cdot \cos \omega t = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t};$$

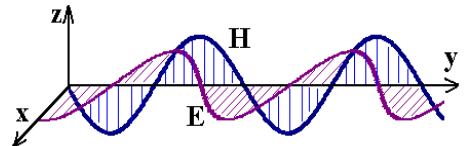
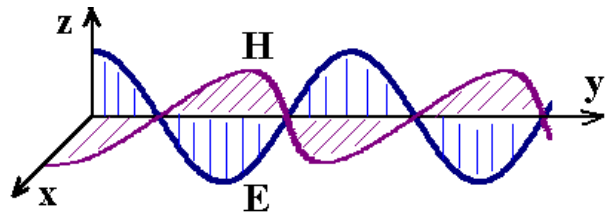
$$\vec{H} = -\frac{E_0 k}{\mu_0 \mu \omega} \sin ky \cdot \sin \omega t \cdot \vec{e}_z = -E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} \sin ky \cdot \sin \omega t \cdot \vec{e}_z.$$

Рассмотрим стоячую волну в момент времени

$$t = \frac{T}{8} = \frac{2\pi}{\omega \cdot 8} = \frac{\pi}{4\omega} \rightarrow \sin \omega t = \cos \omega t = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\vec{E}$ и $\vec{H}$ сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$ в стоячей волне ($\vec{E}$ на $\frac{\pi}{2}$ опережает $\vec{H}$).

Если задано $\vec{H} = \vec{H}_0 \cos \omega t \cdot \cos kx$, то $\vec{E}$ надо искать из уравнения $\text{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.



3. Плотность энергии электромагнитных волн. Вектор Пойнтинга

Определим плотность энергии, которую несет электромагнитная волна.

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\vec{H}[\nabla \vec{E}] - \vec{E}[\nabla \vec{H}] = \text{div}[\vec{E}\vec{H}] = -\mu_0 \mu \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\mu_0 \mu \frac{\vec{H}^2}{2} + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\vec{E}^2}{2} \right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mu_0 \mu H^2}{2} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} \right].$$

Опред. $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ – вектор Пойнтинга определяет собой плотность потока энергии электромагнитного поля.

$$w = \frac{\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2 + \mu_0 \mu H^2}{2} \text{ – плотность энергии электромагнитного поля.}$$

$w = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2 \leftarrow$ это верно только для бегущей электромагнитной волны, распространяющейся в непроводящей среде, $\Rightarrow \langle w \rangle = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_0^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu H_0^2}{2}$.

Для упругой бегущей волны было $\vec{j} = w \cdot \vec{v}_\phi$, $\langle \vec{j} \rangle = \langle w \rangle \cdot \vec{v}_\phi$.

Аналогично для электромагнитной волны:

$$\vec{S} = E \cdot H \cdot \vec{e}_k = E^2 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} \cdot \vec{e}_k = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 \cdot \frac{\vec{e}_k}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = w \cdot \vec{v} = \frac{w \cdot c}{n} \vec{e}_k, \text{ так как } H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E.$$

Опред. $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$ – показатель преломления среды.

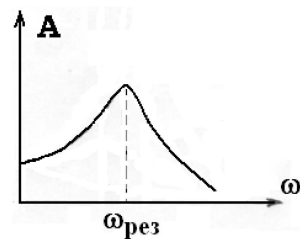
$$\vec{S} = \frac{w \cdot c}{n} \vec{e}_k \Rightarrow w = \frac{[\vec{E}, \vec{H}]}{v} = \frac{EH}{v} \text{ – ещё одна формула для плотности энергии.}$$

В отсутствие ферромагнетика $|1 - \mu| \ll 1 \Rightarrow n \approx \sqrt{\varepsilon}$, так как μ диа- и парамагнетиков мало отличается от единицы. Для статического поля $\varepsilon_{H_2O} = 81$, а для видимого света с частотой $\omega \sim 10^{15} \frac{1}{c}$ $n_{H_2O} \approx 1,33$, то есть $\varepsilon_{H_2O} = 1,8$.

Для рентгена $\omega = 10^{15} \div 10^{20} \frac{1}{c} \rightarrow \varepsilon \approx 1$ для любой среды.

Причина в том, что электроны e среды колеблются под действием электрического поля волны и сами излучают, что соответственно изменяет поле. При высоких частотах e не успевают провзаимодействовать с волной, поэтому падающая волна проходит без искажения, то есть среда прозрачна для рентгена $n \approx 1$.

$$v = \frac{c}{n} \approx \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ – скорость электромагнитной волны в среде.}$$



$$\langle \vec{S} \rangle = I = \langle \vec{E} \cdot \vec{H} \rangle = \langle w \rangle \cdot v = \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} = \frac{1}{2} H_0^2 \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}}, \text{ где } I - \text{интенсивность} - \text{средняя}$$

плотность потока энергии.

Направление $\vec{S}$ соответствует направлению переноса энергии, поэтому, зная направление одного из полей и направление переноса энергии, можно определить направление другого поля.

Формула для плотности потока энергии $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ может быть обобщена для случая стационарных электрических и магнитных полей. Сам факт существования потоков энергии в постоянных электрических и магнитных полях, на первый взгляд, выглядит очень странно, но это не приводит к каким-либо парадоксам; более того, такие потоки обнаруживаются в эксперименте.

Рассмотрим две очень, на первый взгляд, похожие задачи.

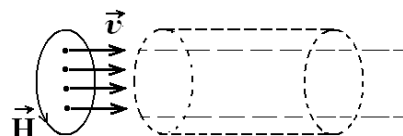
1) Пусть летит пучок протонов p с плотностью частиц ρ и скоростью $v \ll c$. Радиус пучка R_0 . Найти $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{S}$.

Решение.

Пучок летящих протонов эквивалентен току $I = v \cdot \lambda$, где λ – линейная плотность заряда единицы длины пучка, $\lambda = \rho \cdot e \cdot \pi R_0^2$, ток $I = \rho e \pi R_0^2 \cdot v$.

Магнитное поле прямого тока вычислим по теореме Стокса:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi = \frac{\rho e R_0^2 v}{2r} \vec{e}_\varphi.$$



С точки зрения электрического поля пучок представляет собой заряженный цилиндр. Напряженность электрического поля в пространстве найдем по теореме Гаусса:

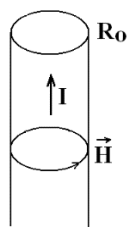
$$E \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{e \rho \cdot \pi R_0^2 \cdot h}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{e \rho R_0^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r.$$

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}] = \left(\frac{\rho e R_0^2}{2r} \right)^2 \frac{v}{\epsilon_0} \vec{e}_z = \left(\frac{\rho e R_0^2}{2r} \right)^2 \frac{\vec{v}}{\epsilon_0} - \text{направление } \vec{S} \text{ вдоль пучка, так как, естественно,}$$

энергия переносится туда, куда летят частицы.

$$\text{Проверим размерность: } [S] = \left(\frac{Кл \cdot м^2}{м^3 \cdot м} \right)^2 \frac{м}{с \cdot [E_0]} = \frac{H \cdot м}{м^3} \cdot \frac{м}{с} = \frac{Дж}{м^3} \cdot \frac{м}{с} = [w] \cdot [v], \text{ что и}$$

требовалось доказать.



2) Бесконечный прямой провод с удельным сопротивлением ρ радиуса R_0 несёт ток I , распределенный равномерно по его сечению.

Найти $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{S}$.

Решение.

$$\text{Плотность тока } \vec{j} = \frac{I}{\pi R_0^2} \vec{e}_z.$$

$\vec{H}$ находим по теореме Стокса:

$$\vec{H}_i = \frac{j r}{2} \vec{e}_\varphi - \text{поле внутри;}$$

$$\vec{H}_e = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi - \text{поле вне проводника.}$$

$$\text{Напряженность электрического поля внутри провода: } \vec{E}_i = \vec{j} \rho = \frac{I \rho}{\pi R_0^2} \vec{e}_z.$$



На поверхности провода:

$$\vec{S} = \frac{I\rho}{\pi R_0^2} \cdot \frac{IR_0}{\pi R_0^2 2} [\vec{e}_z, \vec{e}_\varphi] = -\frac{I^2 \rho}{2\pi^2 R_0^3} \vec{e}_r \quad - \text{плотность потока электромагнитной энергии,}$$

проникающего через поверхность внутрь проводника.

Вычислим поток энергии, который попадает в проводник и приходится на (единицу его длины) длину l :

$$\Phi_{\vec{S}} = |\vec{S}| \cdot \zeta = \frac{I^2 \rho}{2\pi^2 R_0^3} \cdot 2\pi R_0 \cdot l = \frac{I^2 \rho}{\pi R_0^2} \cdot l = I^2 \mathfrak{R}, \quad \text{где } \zeta \text{ — площадь боковой поверхности,}$$

$$\frac{\rho l}{\pi R_0^2} = \mathfrak{R} \text{ — сопротивление проводника длиной } l.$$

Это джоулево тепло, которое выделяется в единицу времени в проводнике длиной l , по которому течет ток I , а поступает эта энергия извне через боковую поверхность. Посмотрите, как разумно всё устроено: имеющему сопротивление проводнику, чтобы переносить ток, приходится расходовать энергию, её нужно откуда-то брать, и ему отпускается требуемое количество энергии.



Вопрос. Откуда эта энергия берется?

Ответ. Если на участке цепи действуют сторонние силы, а они необходимы для поддержания постоянного тока, то на этих участках энергия будет не втекать, а вытекать из цепи в окружающее пространство. В результате можно заключить, что в замкнутой цепи постоянного тока энергия от участков, где действуют сторонние силы, передается другим участкам цепи не вдоль проводника, а через окружающее пространство в виде потока электромагнитной энергии, характеризуемого вектором Пойнтинга $\vec{S}$.

Казалось бы, эти две задачи очень похожи: в обоих случаях по очень длинному цилиндру течет ток, а результаты получаются разные.

Вопрос. Почему?

Ответ. 1. В одном случае объект, несущий ток, заряжен, а во втором случае — нет.

2. Частицам уже сообщили энергию, и они несут ток без сопротивления, а проводнику необходимо пополнять энергию, так как она рассеивается на сопротивление, переходя в джоулево тепло.

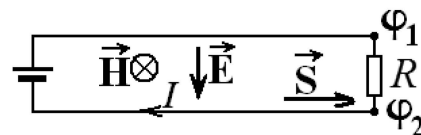
3. Наконец, для пучка мы можем определить $\vec{S}$ везде, а для провода только внутри, так как направление поля снаружи вообще неизвестно, но ясно, что этот поток энергии приходит от источника, который создает поле $\vec{E}$ внутри провода $\vec{E} = \rho \cdot \vec{j}$.

В конкретных случаях, определив направление вектора Пойнтинга, можно сделать заключение о том, как друг относительно друга расположены источник и нагрузка.

1) Пусть дана двухпроводная линия с заданным направлением тока I , $\varphi_1 > \varphi_2$. Спрашивается, на каком конце линии находится нагрузка и на каком источник.

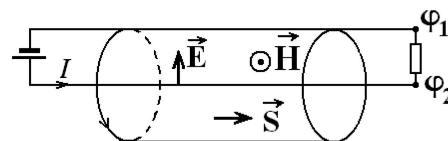
$$\varphi_1 > \varphi_2 \downarrow \vec{E} \otimes \vec{H},$$

$\vec{S}$ направлен так $\rightarrow$ следовательно, источник находится слева, а нагрузка — справа, как показано на рисунке. R — сопротивление нагрузки, и к ней поступает энергия от источника.

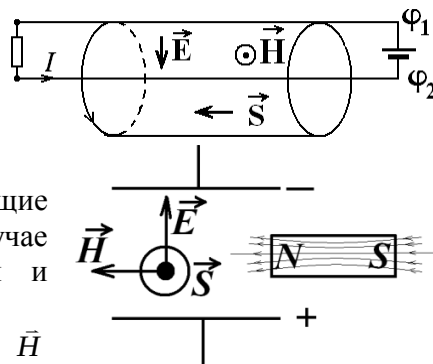


2) Если дан коаксиальный кабель, в котором известно направление тока, текущего по центральной жиле, то:

а) если $\varphi_2 > \varphi_1$, то нагрузка расположена справа, как показано на рисунке;



б) если $\varphi_1 > \varphi_2$, то нагрузка должна быть слева, а источник – справа.



Замечания.

1. Вектор Пойнтинга $\vec{S}$ не определяет собой плотность потока энергии, если электрическая и магнитная составляющие поля имеют разные источники, как, например, в случае стационарного поля, созданного постоянным магнитом и заряженным конденсатором.

2. Так как уравнения Максвелла линейны, то для $\vec{E}$ и $\vec{H}$ выполняется принцип суперпозиции.

$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ – квадратичен по полю, поэтому принцип суперпозиции для $\vec{S}$ не выполняется.

Если имеем суперпозицию электромагнитных полей $\vec{E}_1, \vec{H}_1$ и $\vec{E}_2, \vec{H}_2$, то

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad \vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 \Rightarrow$$

$$\vec{S} = [\vec{E}_1 + \vec{E}_2, \vec{H}_1 + \vec{H}_2] = [\vec{E}_1, \vec{H}_1] + [\vec{E}_2, \vec{H}_2] + [\vec{E}_1, \vec{H}_2] + [\vec{E}_2, \vec{H}_1].$$

Здесь $[\vec{E}_1, \vec{H}_2] + [\vec{E}_2, \vec{H}_1]$ – интерференционный член.

Опред. Линия, вдоль которой распространяется световая энергия, называется лучом. Усредненный вектор Пойнтинга $\langle \vec{S} \rangle$ направлен в каждой точке по касательной к лучу.

В изотропных средах направление $\vec{S}$ совпадает с нормалью к волновой поверхности, то есть $\vec{S}$ сонаправлен с $\vec{k} \Rightarrow$ лучи перпендикулярны волновым поверхностям. В анизотропных средах $\vec{k}$ может не совпадать по направлению с $\vec{S}$, в этом случае лучи не перпендикулярны волновым поверхностям.



4. Поток импульса электромагнитного поля. Давление электромагнитной волны на преграду

Как мы знаем, упругая волна переносит не только энергию, но и импульс. При этом плотность потока импульса равна плотности импульса, умноженной на $\vec{v}_\phi$:

$$\vec{j}_{имп} = \rho \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \vec{v}_\phi.$$

Сила – это поток импульса $\Rightarrow$ давление – это плотность потока импульса.

В этом параграфе будем обозначать импульс p , а давление – P .

$$\Delta P_{\max} = \rho \cdot a \cdot \omega \cdot v = \sqrt{\frac{2\rho^2 \cdot a^2 \cdot \omega^2 \cdot v \cdot v}{2}} = \sqrt{2I \cdot \rho \cdot v} \text{ – в упругой волне.}$$

Для электромагнитной волны аналогично:

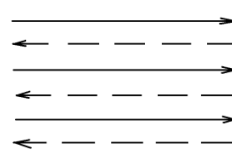
$$\langle j_{имп} \rangle = \langle \rho_{имп} \rangle \cdot c \leftarrow \text{в вакууме.}$$

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}, \text{ где } m \text{ – масса покоя.}$$

$$\text{У фотонов } m = 0 \Rightarrow E = pc \Rightarrow \langle \rho_{имп} \rangle c = \langle w \rangle.$$

$$P = \langle j_{имп} \rangle = \langle \rho_{имп} \rangle c = \langle w \rangle \stackrel{I = \langle w \rangle c}{=} \frac{I}{c} \text{ – это давление в волне без учета свойств преграды.}$$

$$\text{Если стенка отражает } P = 2\langle w \rangle.$$



$r = \frac{I_{\text{отп}}}{I_{\text{пад}}}$ – коэффициент отражения.

В общем случае давление $P = (1+r)\langle w \rangle$, при этом:

$r = 0$ – абсолютно поглощающая поверхность (проводимость $\sigma = 0$),

$r = 1$ – абсолютно отражающая поверхность (идеальный проводник $\sigma = \infty$).



Вопрос. Каков механизм давления электромагнитной волны (в том числе световой)?

Ответ. Пусть плоская электромагнитная волна падает на перпендикулярную к ней слабо проводящую поверхность $\Rightarrow$ в среде возникает электромагнитное поле такое, что $E_{1r} = E_{2r} \Rightarrow$ в среде возникает ток плотностью $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, текущий параллельно поверхности. Этот ток взаимодействует с магнитным полем волны с силой $\delta \vec{F} = \mu_0 \mu [\sigma \vec{E}, \vec{H}] dx \cdot dy \cdot dz$. Следовательно, приповерхностному слою площадью $dydz$ и толщиной dx сообщается импульс с плотностью $\rho_{\text{умп}} = \mu_0 \mu \sigma \cdot EH$.

При этом плотность энергии, рассеиваемой на джоулево тепло, $w_{\text{дж}} = jE = \sigma E^2$, и эта энергия, как мы знаем, сообщается падающей волной.

Тогда $\frac{\rho_{\text{умп}}}{w} = \frac{\mu_0 \mu \sigma EH}{\sigma E^2} = \frac{\mu_0 \mu H}{E} = \frac{\mu_0 \mu}{E} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} \cdot E = \frac{1}{v}$, так как

$\frac{H}{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} \Rightarrow$ таким образом, получили $\frac{\langle \rho_{\text{умп}} \rangle}{\langle w \rangle} = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} = \frac{1}{v}$ – это именно та формула, которой мы пользовались как следствием СТО для частиц с нулевой массой.

$$\langle \rho_{\text{умп}} \rangle = \frac{\langle w \rangle}{v} \rightarrow \langle j_{\text{умп}} \rangle = \langle w \rangle \Rightarrow \vec{j}_{\text{умп}} = w \cdot \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{S}}{v}.$$

Если $\sigma = 0$, то среда поглощающая (так как она не проводит ток), и из-за взаимодействия волны со стенкой дополнительное давление на среду не возникает $\Rightarrow r = 0 \Rightarrow P = \langle w \rangle$.

При $\sigma = \infty$ идеально проводящий материал испытывает дополнительное давление, равное средней плотности энергии падающей волны. $r = 1$ соответствует идеально отражающей поверхности $\Rightarrow P = 2\langle w \rangle$.

П.Н. Лебедев измерил световое давление в 1900 г. – на твердое тело, в 1910 г. – на газы.

Вывод. Давление электромагнитной волны есть результат взаимодействия магнитного поля волны с электрическими токами, возбуждаемыми электрическим полем этой электромагнитной волны.

5. Излучение элементарного диполя.

Мощность излучения (формула Лармора)

1. Свободный заряд излучать не может, так как это противоречит законам сохранения.

Допустим, что покоившийся первоначально в некоторой системе электрон испустил гамма-

квант с частотой ω , энергией $E = \hbar\omega$ и импульсом $\vec{p} = \frac{E}{c} \vec{n}$ (здесь и в дальнейшем в этом параграфе $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении распространения волны). Запишем законы сохранения энергии и импульса для этого процесса $e \rightarrow e + \gamma$:

$$\begin{cases} mc^2 = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} + \hbar \omega \leftarrow \text{может выполняться только при } \omega = 0 \\ 0 = \vec{p} + \frac{\hbar \omega}{c} \vec{n} \end{cases}.$$

Таким образом, свободный заряд не излучает.



2. Для излучения необходимо взаимодействие, а значит, движение с ускорением $\vec{w} = \ddot{\vec{r}}$.

Излучение характеризуется мощностью.

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2q^2 w^2}{3c^3} - \text{мощность излучения заряда, движущегося с ускорением } \vec{w}.$$

Пусть $q \cdot \ddot{\vec{r}} = (q\ddot{\vec{r}}) = \ddot{(\vec{p})}$ – дипольный момент, дважды продифференцированный по времени. Тогда мощность излучения диполя:

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2(\ddot{\vec{p}})^2}{3c^3} - \text{это формула Лармора.}$$

Этот вопрос представляет особый интерес, так как взаимодействие излучения с веществом удается описать на основе рассмотрения электронов, колеблющихся около ядер, и излучения ими вторичных электромагнитных волн.

3. Пусть система зарядов имеет дипольный момент $\vec{p}$.

$$\text{Тогда поле диполя } \vec{E} = -\nabla\varphi = -\nabla\left(\frac{\vec{p} \cdot \cos\theta}{r^2}\right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\cos\theta \cdot \vec{e}_r + \sin\theta \cdot \vec{e}_\theta}{r^3} \quad \text{направлено}$$

по меридианам сферических поверхностей, окружающих диполь, на большом расстоянии от него при $\pi > \theta > 0$.

Если диполь колеблется, то существует $\ddot{\vec{p}}$ и возникает излучение, при этом в однородной среде излучаемая волна будет сферической для $r \gg l$, то есть в волновой зоне. Так как поток энергии Φ через замкнутую поверхность равен мощности

$$\text{источника, находящегося внутри, то } P = \Phi = 4\pi r^2 \left[\vec{E}, \vec{H} \right] = \text{const} \Rightarrow$$

$$E \sim \frac{1}{r}, \quad H \sim \frac{1}{r} - \text{в силу сферичности волны.}$$

$$\text{При этом } \vec{H} \sim \frac{[\ddot{\vec{p}}, \vec{n}]}{r}, \quad \vec{E} \sim [\vec{H}, \vec{n}] \Rightarrow I = \frac{dP}{d\Omega \cdot r^2} = \langle |\vec{S}| \rangle \sim \frac{\sin^2 \theta}{r^2}.$$

Таким образом, имеем в волновой зоне следующую картину:

$$E \sim \frac{\sin \theta}{r} \text{ направлено по меридианам, } H \sim \frac{\sin \theta}{r} \text{ направлено по параллелям.}$$

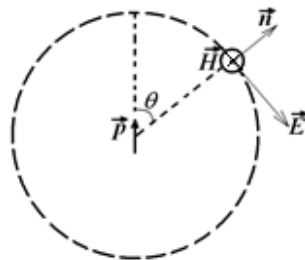
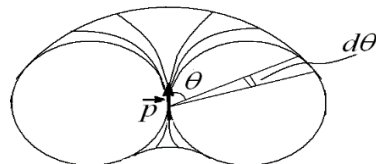


Диаграмма распределения мощности излучения диполя по углам (диаграмма направленности дипольного излучения) имеет вид, показанный на рисунке, и описывается следующим выражением:



$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi c^3} |\ddot{\vec{p}}|^2 \sin^2 \theta - \text{дифференциальная мощность излучения.}$$

Интегрирование дифференциальной мощности по телесному углу $d\Omega = \sin \theta \cdot d\varphi \cdot d\theta$ дает

формулу Лармора для мощности излучения
$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} \sin \theta \cdot d\varphi \cdot d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2|\ddot{\vec{p}}|^2}{3c^3}.$$

4. Давайте выясним, как направлены вторичные векторные поля $\vec{E}_{\text{втор}}$ и $\vec{H}_{\text{втор}}$ относительно $\vec{E}_{\text{над}}$ и $\vec{H}_{\text{над}}$.

Плоская волна $\vec{H}_{\text{над}} \otimes \vec{E}_{\text{над}}$ вызовет $\uparrow \ddot{\vec{p}}$ (так как “+” будет двигаться вверх, а “-” вниз) $\Rightarrow$

$\uparrow \ddot{\vec{p}}$ будет излучать $\downarrow \vec{E}_{\text{втор}}$, так как

$$\vec{H} \sim [\ddot{\vec{p}}, \vec{n}] \Rightarrow \begin{cases} \uparrow \ddot{\vec{p}}, \rightarrow \vec{n} \Rightarrow \otimes \vec{H}_{\text{втор}} - \text{проходящая}; \\ \uparrow \ddot{\vec{p}}, \leftarrow \vec{n} \Rightarrow \circ \vec{H}_{\text{втор}} - \text{отраженная}. \end{cases}$$

$$\vec{E}_{\text{втор}} \sim [\vec{H}, \vec{n}] \Rightarrow \begin{cases} \vec{H}_{\text{втор}} \otimes \rightarrow \vec{n} \Rightarrow \downarrow \vec{E}_{\text{втор}} - \text{проходящая}; \\ \circ \vec{H}_{\text{втор}} \leftarrow \vec{n} \Rightarrow \downarrow \vec{E}_{\text{втор}} - \text{отраженная}. \end{cases}$$



Получим этот же результат аналитически:

$$\vec{E}_{\text{втор}} \sim [[\ddot{\vec{p}}, \vec{n}], \vec{n}] = -[[\vec{n}, \ddot{\vec{p}}] \vec{n}] = -\ddot{\vec{p}}(\vec{n}, \vec{n}) + \vec{n}(\ddot{\vec{p}}, \vec{n}) = -\ddot{\vec{p}}, \text{ если } \vec{n} \perp \ddot{\vec{p}}.$$

Вывод.

Проходящая волна ослабляется, а в отраженной $\vec{E}$ переворачивается, то есть при отражении электромагнитной волны в отраженной волне $\vec{E}$ сдвигается по фазе на π , а $\vec{H}$ не изменяется: $\uparrow \vec{E}_{\text{над}} \rightarrow \uparrow \ddot{\vec{p}} \rightarrow \downarrow \vec{E}_{\text{втор}}; \circ \rightarrow \uparrow \ddot{\vec{p}} \rightarrow \otimes \rightarrow \vec{H}_{\text{втор}}; \leftarrow \circ \vec{H}_{\text{отраж}}$.

Если электромагнитная волна с частотой ω падает на вещество, состоящее из упруго-связанных заряженных частиц, то при частотах ω , далеких от собственной частоты колебаний частиц ω_0 , вторичного излучения не возникает, а если $\omega \approx \omega_0$, то возникает интенсивное вторичное излучение. На этом принципе основана работа поляризаторов.

Поляризатор – устройство, позволяющее получать поляризованные волны, в частности световые.

6. Типы поляризации

Поляризованной называется волна, в которой поведение $\vec{E}$ как-то упорядочено.

Рассмотрим электромагнитную волну:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\alpha t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = \vec{e}(\vec{r}, t) \cdot E_0 \cos(\alpha t - \vec{k}\vec{r} + \alpha).$$

Если волна плоская, то вектор ее поляризации $\vec{e}(\vec{r}, t)$ не зависит от $\vec{r}$, то есть для плоской волны вектор поляризации может зависеть только от времени $\vec{e}(t)$, при этом он принадлежит плоскости, перпендикулярной волновому вектору $\vec{k}$. (Для электромагнитных волн, распространяющихся в изотропной, незаряженной и непроводящей среде, существуют два направления поляризации, а не три, как для упругих волн, так как электромагнитная волна поперечна.)

Тогда в общем случае электрическое поле $\vec{E}$ волны, распространяющейся вдоль оси z , можно представить в виде суммы двух его компонент:

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y = E_{01} \vec{e}_x \cos(\omega t - kz + \alpha) + E_{02} \vec{e}_y \cos(\omega t - kz + \beta).$$

В зависимости от сдвига фаз компонент $(\alpha - \beta)$ и соотношения их амплитудных значений E_{01} / E_{02} будут наблюдаться различные поляризации волны.

1. Простейший случай: если $\alpha - \beta = \pi$, то волна линейно поляризована. В этом случае независимо от соотношения E_{01} / E_{02} вектор $\vec{E}$ колеблется вдоль одного направления, то есть $\vec{e} = \text{const}$ – линейная поляризация $\equiv$ плоская поляризация.

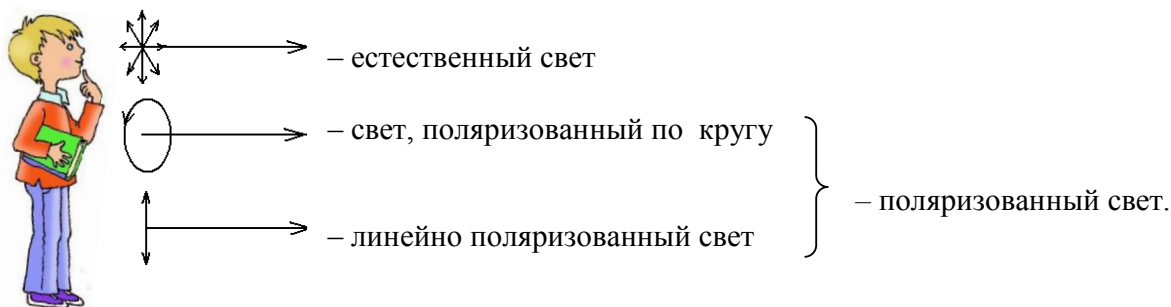
В плоскополяризованной (линейно поляризованной) волне вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ совершает гармонические колебания вдоль одного направления $\vec{e}$.

$$2. \text{ Если } \left. \begin{array}{l} \alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ E_{01} = E_{02} \end{array} \right\} - \text{ волна поляризована по кругу.}$$

3. В общем случае: если $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} \cdot n$, то

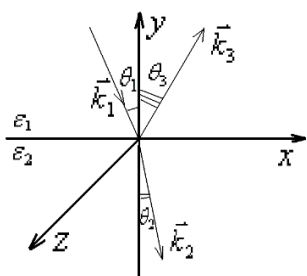
$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}_1 = E_{01} \vec{e}_x \cos(\omega t - kz + \alpha) \\ \vec{E}_2 = E_{02} \vec{e}_y \cos(\omega t - kz + \beta) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \text{ дает эллиптически поляризованную волну.}$$

Естественный свет – неполяризованный свет, так как он возникает в результате излучения различных атомов, время излучения которых $\sim 10^{-8} \text{ с}$. За это время испускается цуг волн длиной $\sim 3 \text{ м}$. Так как излучение различных атомов не согласовано, то в результате получается равномерное распределение векторов $\vec{E}_i$ по всем направлениям.



7. Отражение и преломление плоской волны на границе двух диэлектриков. Законы отражения и преломления света. Явление полного внутреннего отражения

Рассмотрим плоскую волну, падающую на плоскую границу раздела двух немагнитных диэлектриков $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$, $n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$.



θ_1 – угол падения

θ_2 – угол преломления

θ_3 – угол отражения

Опред. Плоскость, в которой лежат векторы $\vec{k}$ и нормали к поверхности раздела сред, называется плоскостью падения волны.

Так как плоская волна падает на плоскую поверхность, получаются плоские волны: отраженная и преломленная.

Идея получения законов отражения: $\vec{E}_1$; $\vec{E}_2$; $\vec{E}_3$ подчиняются граничным условиям, которые выполняются в каждой точке поверхности раздела в любой момент времени. $(\vec{E}_1 + \vec{E}_3)_x = \vec{E}_{2x} \leftarrow$ выполняется в любой точке в любой момент времени.

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{\text{пад}} = \vec{E}_{1m} e^{i(\omega_1 t - k_{1x} \cdot x - k_{1y} \cdot y - k_{1z} \cdot z)};$$

$$\vec{E}_3 = \vec{E}_{\text{отр}} = \vec{E}_{3m} e^{i(\omega_3 t - k_{3x} \cdot x - k_{3y} \cdot y - k_{3z} \cdot z)};$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{\text{прелом}} = \vec{E}_{2m} e^{i(\omega_2 t - k_{2x} \cdot x - k_{2y} \cdot y - k_{2z} \cdot z)}.$$

Граничные условия для x -компонент напряженности электрического поля дают:

$$(\vec{E}_{1m} \cdot \cos \theta_1 \cdot e^{i(\omega_1 t - k_{1x} \cdot x - k_{1y} \cdot y - k_{1z} \cdot z)} + \vec{E}_{3m} \cdot \cos \theta_3 \cdot e^{i(\omega_3 t - k_{3x} \cdot x - k_{3y} \cdot y - k_{3z} \cdot z)})_x = (\vec{E}_{2m} \cdot \cos \theta_2 \cdot e^{i(\omega_2 t - k_{2x} \cdot x - k_{2y} \cdot y - k_{2z} \cdot z)})_x.$$

Из тождества по времени $\Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega_3$.

Из тождества по $z \Rightarrow k_{1z} = k_{2z} = k_{3z}$.

Следовательно, можно выбирать систему координат так, чтобы $k_{1z} = 0 = k_{2z} = k_{3z}$, то есть развернуть систему координат так, чтобы все $\vec{k}$ лежали в одной плоскости (x, y).

Из тождества по $x \Rightarrow k_{1x} = k_{2x} = k_{3x} \Rightarrow$

$$k_{1x} = k_1 \sin \theta_1 = \frac{\omega \cdot n_1}{c} \sin \theta_1 = k_3 \sin \theta_3 \underset{n_1 = n_3 - \text{одна среда}}{=} = \frac{\omega \cdot n_1}{c} \sin \theta_3 = k_2 \sin \theta_2 = \frac{\omega \cdot n_2}{c} \sin \theta_2 \Rightarrow \text{законы}$$

отражения и преломления.

$\theta_1 = \theta_3$ – закон отражения.

$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ – закон преломления.

Если $n_1 > n_2$, то, так как $\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \leq 1$, следовательно, существует

предельный угол θ_1^* такой, что при $\theta_1 > \theta_1^*$ свет (электромагнитная волна) не выходит из среды.

$\sin \theta_1^* = \frac{n_2}{n_1}$ – угол полного внутреннего отражения при движении волны

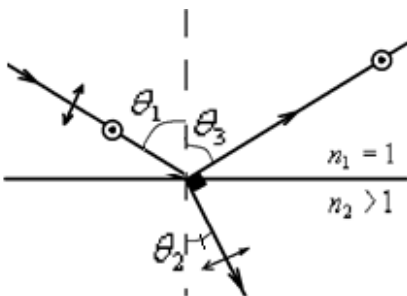
из более плотной среды в менее плотную.

При $\theta_1 > \theta_1^*$ волна проникает во вторую среду на расстояние $\sim \lambda$.

Это явление называется полным внутренним отражением и существует только при движении волны из более плотной среды в менее плотную.



8. Поляризация при отражении от поверхности диэлектрика. Угол Брюстера



Пусть на плоскую поверхность, разделяющую два диэлектрика, падает плоская волна и угол падения θ_1 такой, что сумма углов отражения и преломления $\theta_3 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

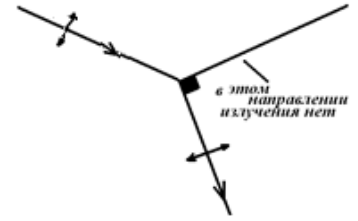
Тогда $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) = n_2 \cos \theta_1 \Rightarrow$

$$\text{tg} \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \theta_{\text{БП}} = \arctg \frac{n_2}{n_1} - \text{угол Брюстера.}$$

Вопрос. Чем замечателен угол Брюстера?

Ответ. Как мы знаем, отраженная волна есть результат излучения атомов под действием переменного поля падающей волны.

$\vec{E}_{пад} \uparrow \uparrow \ddot{\vec{p}} \downarrow \uparrow \vec{E}_{излуч}$, причем в силу анизотропии направленности дипольного излучения в направлении колебаний диполь не излучает.



Следовательно, в отраженном под углом Брюстера свете (волне) будет присутствовать только поляризация, перпендикулярная плоскости падения волны. Таким образом, *отраженный под углом Брюстера свет является линейно поляризованным, причем $\vec{E}$ перпендикулярен плоскости падения.*

Если линейно поляризованная волна с поляризацией $\vec{E} \uparrow$, параллельной плоскости падения, падает на границу раздела под углом Брюстера, то отраженного луча нет.

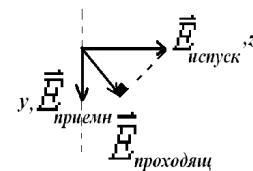
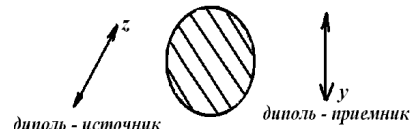
Опред. Луч с поляризацией $\bullet \vec{E}$, перпендикулярной плоскости падения, называется *обыкновенным*.

Луч с поляризацией $\updownarrow \vec{E}$, параллельной плоскости падения, называется *необыкновенным*.

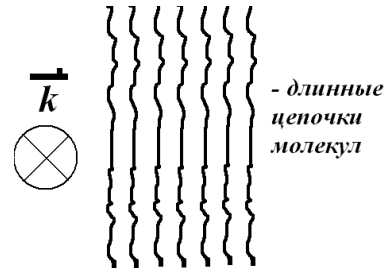
Рассмотрим экран, состоящий из параллельных проволок, расположенных на расстоянии $d \leq 1$ см друг от друга. Для радиоволн дециметрового диапазона с длинами волн $\lambda > d$ такой экран является поляризатором. Так как проволоки являются хорошими проводниками, то волна с параллельной им поляризацией $\updownarrow \vec{E}$ отражается от экрана, поэтому при таком $\updownarrow$ расположении излучающего диполя сигнал не проходит, и при любом расположении приемного диполя соединенная с ним лампочка не горит.

Если диполь $\leftrightarrow$ расположен перпендикулярно проволокам экрана, то есть излучает волны с перпендикулярной к проволокам поляризацией, то волны проходят, не замечая экрана (так как $\vec{E}$ в излучающей волне перпендикулярен проволокам, проводимость экрана $\sigma = 0$ в этом направлении $\Rightarrow$ тока нет, и электромагнитные волны проходят без искажений).

Поляризатор может улучшить условие приема:



Аналогично устроены поляризаторы для световых волн – поляроиды. Это пластинки, толщиной $0,05 \div 0,1$ мм = $50 \div 100$ мкм, имеющие анизотропную структуру, следовательно, существенно различные в разных направлениях собственные резонансные частоты. Структура поляроидов представляет собой параллельные цепочки молекул. Примером является обычный целлофан.

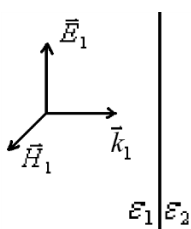


$\uparrow \vec{E}_{пад} \Rightarrow \uparrow \ddot{\vec{p}} \Rightarrow \downarrow \vec{E}_{втор} \Rightarrow \uparrow_{пад} + \downarrow_{втор} = 0$, то есть поляризатор не пропускает волну с $\vec{E} \updownarrow$. С таким $\leftrightarrow$ направлением $\vec{E}$ волна проходит, так как вторичная волна слабая.

Если на поляризатор будет падать естественный свет, то на выходе будет свет линейно поляризованный. Естественно, что поляризаторы (поляроиды) избирательны по частотным диапазонам волн, так как эффект возникает только на частотах, близких к собственным частотам молекул.

9. Коэффициент отражения и пропускания плоской электромагнитной волны на границе раздела двух диэлектриков

Получим коэффициенты отражения и пропускания плоской электромагнитной волны на границе двух диэлектриков, рассмотрев частный случай перпендикулярного падения волны на границу раздела диэлектриков.



Пусть линейно поляризованная плоская волна падает перпендикулярно поверхности раздела диэлектриков:

$$\varepsilon_1; \varepsilon_2; \mu_1 = \mu_2 = 1 \Rightarrow n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}, n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}; \varepsilon_1 < \varepsilon_2.$$

$\vec{E}_1, \vec{H}_1$ – падающая волна, $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ – проходящая волна, $\vec{E}_3, \vec{H}_3$ – отраженная волна.

Используем граничные условия сохранения касательных составляющих $\vec{E}, \vec{H}$:
 $E_\tau, H_\tau = \text{const}$ в данном случае.

Тогда:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_3 = \vec{E}_2;$$

$$\vec{H}_1 + \vec{H}_3 = \vec{H}_2.$$

При этом:

$(\vec{E}_1 + \vec{E}_3)$ и $(\vec{H}_1 + \vec{H}_3)$ – суммарное поле в среде 1;

$\vec{E}_2$ и $\vec{H}_2$ – суммарное поле в среде 2.

Модули $\vec{E}$ и $\vec{H}$ для волны связаны следующим образом:

$$E\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon} = E\sqrt{\varepsilon_0} \cdot n = \sqrt{\mu_0}H \text{ – если среда слабо проводящая.}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} E_i = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{H_i}{n_i} \rightarrow H_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n_i E_i \\ E_1 - E_3 = E_2 \leftarrow \text{т.к. в отраженной волне фаза } \vec{E} \text{ изменяется на } \pi \text{ при отражении} \\ \text{от оптически более плотной среды.} \\ H_1 + H_3 = H_2 \leftarrow \text{т.к. в отраженной волне фаза } \vec{H} \text{ не меняется.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 - E_3 = E_2 \\ (n_1 E_1 + n_1 E_3) \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = n_2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_2 \Rightarrow n_1 (E_1 + E_3) = n_2 (E_1 - E_3) \Rightarrow (n_2 - n_1) E_1 = (n_2 + n_1) E_3 \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} E_{отр} = E_3 = E_1 \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} = E_{над} \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \\ E_{прош} = E_2 = E_1 \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = E_{над} \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \end{cases}.$$

Коэффициент отражения $r = \frac{I_{отр}}{I_{над}} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$.

Коэффициент пропускания $\tau = \frac{I_{прош}}{I_{над}} = \frac{E_{прош}^2}{E_{над}^2} \cdot \frac{n_2}{n_1} = \frac{4n_2n_1}{(n_2 + n_1)^2}$.

В любом случае $r + \tau = 1$, причем чем больше отличаются (диэлектрические) свойства граничащих сред, тем больше света отражается и тем меньше проходит на просвет.

Если $n_1 = 1$, то $r = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2$, $\tau = \frac{4n}{(n+1)^2}$, то есть для стекла с показателем преломления $n = 1,5$ имеем $r = 0,04$. Таким образом, любая поверхность стекла отражает 4% упавшей на неё световой энергии.

Рассмотрев основные особенности электромагнитных волн в целом, теперь можно перейти к более детальному их изучению на примере эффектов, наблюдаемых в видимом диапазоне электромагнитных волн, то есть световых явлений. Этот раздел называется Оптика.



Елена Николаевна АКСЕНОВА
ОБЩАЯ ФИЗИКА. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ (ГЛАВЫ КУРСА)

Учебное пособие
Издание второе, исправленное

Зав. редакцией
естественнонаучной литературы *М. В. Рудкевич*
Ответственный редактор *С. В. Макаров*
Автор художественных образов *Е. А. Румянцева*
Корректор *Т. А. Кошелева*
Выпускающий *Т. С. Симонова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.10.07.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 23.01.18.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 60×90^{1/8}.
Печать офсетная. Усл. п. л. 9,00. Тираж 100 экз.

Заказ № 078-18.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в АО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.