

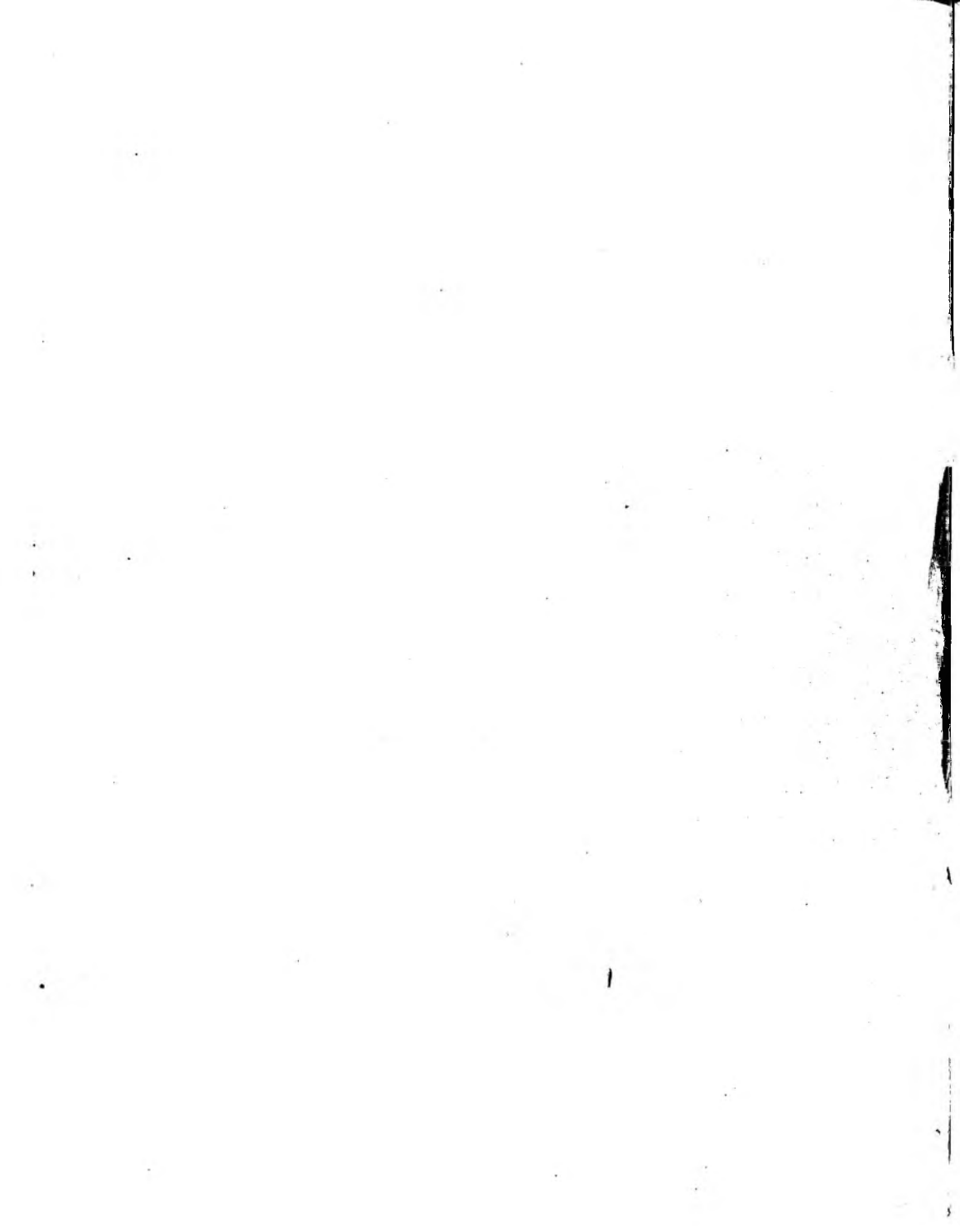
**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
КАЛИНИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

М. А. АКВИС, А. М. ШЕЛЕХОВ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ТРИ-ТКАНЕЙ



Калинин 1985



Министерство высшего и среднего специального
образования РСФСР
Калининский государственный университет

М.А.АКИВИС, А.М.ШЕЛЕХОВ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ТРИ-ТКАНЕЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Калинин 1985

А к и в и с М.А., Ш е л е х о в А.М. Введение в теорию три-тканей. Учебное пособие, - Калинин: КГУ, 1985. - 84 с.

Пособие является введением в теорию три-тканей, или геометрическую теорию квазигрупп и луп. Оно предназначено для студентов университета, в том числе и заочников, специализирующихся по геометрии или алгебре. Продолжением изложенного здесь материала является учебное пособие "Основы теории тканей" (Калинин, 1981), в котором уже используется специальный математический аппарат.

Пособие снабжено большим количеством задач различной трудности. Некоторые из них представляют собой легкие упражнения для закрепления изученного материала, другие требуют некоторых размышлений и связаны с преодолением определенных трудностей.

Рецензенты: кандидат физ.-мат.наук, доцент В.Ф.Кириченко;
кафедра математического анализа Университе-
та Дружбы Народов им. П.Лумумбы

Глава 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТРИ-ТКАНИ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Определение три-ткани

Под термином "кривая" всюду в дальнейшем мы будем подразумевать гладкую кривую. Последняя, как известно из курса дифференциальной геометрии, может быть задана на плоскости $\mathbb{R}^2$ уравнением

$$F(x, y) = 0, \quad (1)$$

причем функция $F(x, y)$ обладает непрерывными частными производными. Будем считать также, что в каждой точке кривой, заданной уравнением (1), выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0. \quad (2)$$

Условие (2) означает, что для каждой точки кривой существует окрестность, внутри которой эта кривая представляет собой график гладкой функции.

Рассмотрим линии уровня функции $F(x, y)$, определяемые уравнением

$$F(x, y) = u, \quad (3)$$

где параметр u принимает значения из некоторого действительного интервала I . Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит кривой, определяемой уравнением $F(x, y) = u_0, u_0 \in I$. Тогда уравнение (3) в некоторой окрестности точки M_0 определяет правильное семейство кривых, т.е. через каждую точку этой окрестности проходит одна кривая семейства (3).

Обозначим через $\mathcal{D}$ некоторое открытое множество на плоскости $\mathbb{R}^2$ и дадим следующее определение.

Определение 1. Пусть на множестве $\mathcal{D}$ заданы три семейства кривых $\lambda_\alpha, \alpha=1, 3$, такие, что для каждой точки M из множества $\mathcal{D}$ существует окрестность U_M , в которой:
а) каждое из семейств λ_α является правильным; б) никакие две линии из разных семейств не касаются и пересекаются не более чем в одной точке. Тогда говорят, что кривые семейств

λ_α образуют на множестве $\mathcal{D}$ три-ткань.

В дальнейшем вместо термина "множество $\mathcal{D}$ " будем пи-

сать "область $\mathcal{D}$ ", подразумевая под этим названием область определения три-ткани. Каждое из семейств λ_α может быть задано согласно (3) уравнением

$$F_\alpha(x, y) = u_\alpha, \quad u_\alpha \in I_\alpha. \quad (4)$$

При этом, в силу условия б) определения 1, в каждой точке M области $\mathcal{D}$ нормальные векторы $N_\alpha (\partial u_\alpha / \partial x|_M, \partial u_\alpha / \partial y|_M)$ к кривым семейств $\lambda_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$, проходящим через точку M , не коллинеарны, т.е. выполняются неравенства

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} & \frac{\partial F_\alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial F_\beta}{\partial x} & \frac{\partial F_\beta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \alpha \neq \beta. \quad (5)$$

С другой стороны, если в некоторой области $\mathcal{D}$ плоскости $\mathbb{R}^2$ заданы три семейства линий (4), причем функции F_α удовлетворяют условиям (5), то по теореме о неявной функции система уравнений $u_\alpha = F_\alpha(x, y), u_\beta = F_\beta(x, y)$ при $\alpha \neq \beta$ локально однозначно разрешима относительно переменных x и y . Таким образом, выполнены условия а) и б) определения 1, т.е. уравнения (4) определяют в области $\mathcal{D}$ три-ткань.

Три-ткань обозначается обычно через W .

Примеры

1. Пусть λ_α - три семейства параллельных прямых на плоскости:

$$\lambda_\alpha: A_\alpha x + B_\alpha y + C_\alpha = 0,$$

причем постоянные A_α и B_α удовлетворяют условию

$$\begin{vmatrix} A_\alpha & B_\alpha \\ A_\beta & B_\beta \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

Семейства λ_α образуют в области $\mathcal{D} \equiv \mathbb{R}^2$ три-ткань, которая называется параллельной и обозначается W_0 .

2. Рассмотрим на плоскости три пучка прямых, вершины которых не лежат на одной прямой. Тогда в области $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus S_1 S_2 \cup S_2 S_3 \cup S_3 S_1$, состоящей из семи связанных облас-

тей, эти пучки образуют три-ткань. Пусть $l_\alpha = 0$ - уравнение прямой $S_\beta S_\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$. Тогда уравнения пучков можно записать в виде:

где u_α - параметры пучков.
 $l_2 = u_1 l_3$, $l_3 = u_2 l_1$, $l_1 = u_3 l_2$,

3. Пусть K - круг радиуса r с центром в начале координат. Через каждую точку M , лежащую вне круга K , проходят 3 прямые: OM и две касательные к окружности $(0, r)$. Поэтому в области $D = \mathbb{R}^2 \setminus K$ возникает три-ткань: первое семейство $\mathcal{L}_1$ линий ткани - пучок прямых с вершиной в начале координат, а два других образованы касательными к окружности $(0, r)$. Уравнения этих семейств можно записать следующим образом:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0, \quad x \cos \beta + y \sin \beta - r = 0$$

Много интересных три-тканей образованы пучками окружностей.

Обозначим через S_1 и S_2 окружности, определяемые уравнениями $x^2 + y^2 + 2a_i x + 2b_i y + c_i = 0$, где $i = 1, 2$.

Пучком окружностей называется однопараметрическое семейство окружностей, определяемое уравнением

$$x^2 + y^2 + 2a_1 x + 2b_1 y + c_1 + u(x^2 + y^2 + 2a_2 x + 2b_2 y + c_2) = 0.$$

Действительное число u называется параметром пучка, окружности S_1 и S_2 называются базисными окружностями пучка.

Если окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B (они называются вершинами пучка), то через эти точки проходят все окружности пучка. Такой пучок называется эллиптическим и обозначается $S(A, B)$. Ясно, что центры всех окружностей пучка лежат на среднем перпендикуляре к отрезку AB .

Если базисные окружности S_1 и S_2 пучка касаются в точке O , то и все окружности пучка касаются друг друга в этой точке. Такой пучок называется параболическим, а точка O называется его вершиной.

Пусть S_1 и S_2 - две окружности нулевого радиуса, т.е. точки:

$$S_1: (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = 0; \quad S_2: (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = 0.$$

Пучок, определяемый такими окружностями, называется ги-

гиперболическим, а точки S_1 и S_2 — его вершинами. Никакие две окружности из гиперболического пучка не пересекаются — иначе он не мог бы содержать точки S_1 и S_2 .

Эллиптический и гиперболический пучки окружностей с общими вершинами называются сопряженными. Нетрудно доказать, что произвольная окружность эллиптического пучка ортогональна любой из окружностей сопряженного гиперболического пучка.

Задачи

4. а) Пусть A, B, C — три точки плоскости, лежащие на окружности S_0 . Докажите, что эллиптические пучки $S(AB)$, $S(BC)$ и $S(CA)$ образуют три-ткань в области $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus S_0$.

б) Решите ту же задачу для случая, когда точки A, B и C лежат на одной прямой. Найдите уравнения пучков, образующих ткань. Указание: возьмите прямую AB за ось x , а одну из данных точек — за начало координат.

5. Три-ткань W образована декартовой сетью (т.е. прямыми $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$) и эллиптическим пучком окружностей $S(A, B)$, где $A(1, 1), B(-1, -1)$. Запишите уравнения этого пучка. Найдите область определения $\mathcal{D}$ три-ткани W и уравнения кривых, ограничивающих связанные компоненты области $\mathcal{D}$.

6. Найдите область определения следующих три-тканей, образованных

а) декартовой сетью и семейством концентрических окружностей;

б) линиями $y = \text{const}$, пучком прямых, проходящих через начало координат O , и семейством концентрических окружностей с центром O ;

в) линиями $y = \text{const}$, пучком прямых, проходящих через точку O , и параболическим пучком окружностей с вершиной в O , линией центров которого служит ось y ;

г) пучком прямых с центром в точке O , семейством концентрических окружностей с центром в точке O и гиперболическим пучком окружностей с вершинами $(1, 0)$, $(-1, 0)$;

д) декартовой сетью и окружностями параболического пучка

ка с вершиной в O и линией центров - осью y .

7. Докажите, что если область определения ткани W , заданной уравнениями (4) состоит из нескольких связных компонент, то их границами служат линии, определяемые уравнениями

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} & \frac{\partial F_\alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial F_\beta}{\partial x} & \frac{\partial F_\beta}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

§ 2. Эквивалентные три-ткани

Какие свойства три-тканей мы будем изучать? Этот вопрос тесно связан с другим: какие три-ткани мы будем считать эквивалентными, т.е. обладающими одинаковыми свойствами? Чтобы ответить на эти вопросы, определим допустимые преобразования три-тканей - такие преобразования плоскости R^2 , при которых три-ткань переходит в ей эквивалентную.

Всякое отображение $\varphi: \mathcal{D} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}$, где $\mathcal{D}$ и $\tilde{\mathcal{D}}$ - области на плоскости, может быть задано уравнениями

$$\tilde{x} = \varphi_1(x, y), \quad \tilde{y} = \varphi_2(x, y), \quad (6)$$

где $M(x, y) \in \mathcal{D}$, $\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{\mathcal{D}}$, $\tilde{M} = \varphi(M)$.

Допустимое отображение φ должно обладать, по крайней мере, следующими двумя свойствами.

Во-первых, так как линиями ткани являются гладкие кривые, отображение φ должно быть гладким (т.е. функции φ_1 и φ_2 должны быть непрерывно дифференцируемыми).

Во-вторых, из определения три-ткани следует, что отображение φ должно быть локально биективным, т.е. для каждой точки M области $\mathcal{D}$ должна существовать окрестность $U(M)$, такая, что ограничение $\varphi|_M$ будет биекцией окрестности U на ее образ $\varphi(M)$.

Объединяя эти два условия, мы получим, что отображение φ должно быть локальным диффеоморфизмом X . Из курса

X Отображение φ называется диффеоморфизмом, если оно биективно, непрерывно дифференцируемо и если обратное отображение φ^{-1} также непрерывно дифференцируемо.

математического анализа известно, что гладкое отображение φ является локальным диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда в каждой точке области U якобиан отображения φ отличен от нуля, т.е.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (7)$$

Определение 2. Три-ткань W , определенная в области D , и три-ткань $\tilde{W}$, определенная в области $\tilde{D}$, называются эквивалентными, если существует локальный диффеоморфизм $\varphi: D \rightarrow \tilde{D}$, который отображает линии ткани W в линии ткани $\tilde{W}$.

Более подробно: если $\varphi(M) = \tilde{M}$ ($M \in D, \tilde{M} \in \tilde{D}$), то у точки M существует такая окрестность U , что отображение $\varphi|_U: U \rightarrow \varphi(U)$ переводит линии ткани W в линии ткани $\tilde{W}$.

Локальный диффеоморфизм φ не является, вообще говоря, диффеоморфизмом "в целом", так как условие (7) не гарантирует взаимной однозначности отображения φ на всей области D . Но локальный диффеоморфизм сохраняет свойства ткани "в малом". Поскольку нас будут интересовать именно локальные свойства три-тканей, то мы будем рассматривать их с точностью до локальных диффеоморфизмов, т.е. будем считать преобразования вида (6), удовлетворяющих соотношениям (7), допустимыми преобразованиями три-ткани W . Отношение эквивалентности для тканей будем обозначать знаком $\sim$.

ТЕОРЕМА 1. Всякая три-ткань (локально) эквивалентна три-ткани, два семейства линии которой образованы координатными прямыми $x = \text{const}, y = \text{const}$.

► Пусть три-ткань W задана уравнениями (4), для которых имеют место условия (5). Рассмотрим преобразование

$$\tilde{x} = F_1(x, y), \quad \tilde{y} = F_2(x, y). \quad (8)$$

В силу условия (5) это преобразование является локальным диффеоморфизмом и поэтому определяет в области U изменения переменных $\tilde{x}, \tilde{y}$ три-ткань $\tilde{W}$, эквивалентную ткани W .

При этом согласно (4) линии семейств, образующих ткань $\tilde{W}$, определяются уравнениями:

$$\begin{aligned}\tilde{L}_1: \tilde{x} &= u_1, u_1 \in I_1; \quad \tilde{L}_2: \tilde{y} = u_2, u_2 \in I_2; \\ \tilde{L}_3: f(\tilde{x}, \tilde{y}) &= u_3, u_3 \in I_3,\end{aligned}\quad (9)$$

где функция f получается из F в результате замены переменных по формулам (8). $\blacktriangleleft$

Замечание 1. Можно считать, что формулы (6) определяют преобразование координат в некоторой окрестности U области D . Тогда уравнения (8) имеют следующий смысл: они определяют в окрестности U переход к новым криволинейным координатам $\tilde{x}, \tilde{y}$, причем координатными линиями будут линии первых двух семейств ткани W .

Замечание 2. Два правильных семейства линий, заданных в области D и удовлетворяющих условиям а) и б) определения 1, образуют два-ткань или сеть. Из теоремы 1 следует, что всякая сеть локально эквивалентна (в смысле определения 2) декартовой сети $x = \text{const}, y = \text{const}$, свойства которой тривиальны. Поэтому представляет интерес изучение тканей, составленных из трех или более семейств линий.

В следующем параграфе мы укажем признак эквивалентности три-тканей.

§ 3. Функция ткани

Пусть три-ткань W задана уравнениями (4). Исключив из этих уравнений переменные x и y , получим уравнение

$$F(u_1, u_2, u_3) = 0, \quad (10)$$

которое связывает параметры линий ткани, проходящих через точку $M(x, y)$.

Определение 3. Уравнение (10) называется уравнением три-тканей W , а функция F — функцией ткани W .

В частности, если линии три-тканей заданы уравнениями (9), то уравнение ткани записывается так: $u_3 = f(u_1, u_2)$; но так как линии первых двух семейств ткани — координатные линии, то это уравнение привычнее записывать в виде

$$z = f(x, y). \quad (11)$$

При этом условия (5) принимают вид:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0. \quad (12)$$

Функция три-ткани W определяется не однозначно, т.е. ткани W соответствует много функций ткани. В самом деле, во-первых, уравнение (10) эквивалентно уравнениям:

а) $H(u_1, u_2, u_3) \cdot F(u_1, u_2, u_3) = 0$, где $H \neq 0$ в области $\mathcal{D}$;

б) $\Phi(F(u_1, u_2, u_3)) = 0$, где $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) \neq 0$.

При преобразовании а) функция ткани W принимает вид $\tilde{F} = H \cdot F$; при преобразовании б) — $\tilde{F} = \Phi \circ F$.

Во-вторых, мы можем по-другому параметризовать семейства линий λ_α , образующих три-ткань W . Замена параметров определяется уравнениями

$$u_\alpha = \Theta_\alpha(\tilde{u}_\alpha), \quad (13)$$

где Θ_α — диффеоморфизмы. При этом функция F три-ткани W изменится следующим образом:

$$F(\Theta_1(\tilde{u}_1), \Theta_2(\tilde{u}_2), \Theta_3(\tilde{u}_3)) \equiv \tilde{F}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3).$$

Итак, функция ткани $F(u_1, u_2, u_3)$ допускает три вида преобразований:

а) $\tilde{F} = H \cdot F$, где $H \neq 0$ в области $\mathcal{D}$;

б) $\tilde{F} = \Phi \circ F$, где $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) \neq 0$;

в) $\tilde{F} = F(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$, где Θ_α — диффеоморфизмы. (14)

Определение 4. Преобразования (14) называются допустимыми преобразованиями функции три-ткани. Функции, получающиеся одна из другой с помощью преобразований (14), называются эквивалентными.

ТЕОРЕМА 2. Пусть F и $\tilde{F}$ — функции тканей W и $\tilde{W}$ соответственно. Тогда $W \sim \tilde{W} \iff F \sim \tilde{F}$.

► Пусть $W \sim W'$, причем три-ткань W задана уравне-

ниями (4). Согласно определению 2, уравнения линий три-ткани $\tilde{W}$ получаются из уравнений (4) заменой переменных по формулам

$$x = \tilde{\varphi}_1(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad y = \tilde{\varphi}_2(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad (6')$$

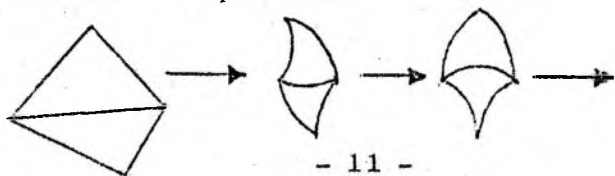
которые мы получили из (6), разрешив их относительно x и y . Поэтому линии три-ткани $\tilde{W}$ определяются уравнениями:

$$\tilde{\lambda}_\alpha: F_\alpha(\tilde{\varphi}_1(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{\varphi}_2(\tilde{x}, \tilde{y})) = u_\alpha. \quad (4')$$

Уравнение три-ткани W (т.е. $F=0$) мы получили, исключая из уравнений (4) переменные x и y , а уравнение три-ткани $\tilde{W}$ ($\tilde{F}=0$) — исключая из (4') переменные $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$. Но последнее преобразование можно провести в два этапа: сначала из уравнений (4') исключить $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ с помощью уравнений (6'), тогда получим уравнения (4), а затем из (4) исключить переменные x и y . Поэтому $F \sim \tilde{F}$.

Обратно, пусть теперь $F \sim \tilde{F}$. Вместо тканей W и $\tilde{W}$ рассмотрим им эквивалентные ткани $'W \sim W$ и $'\tilde{W} \sim \tilde{W}$, у которых первые два семейства линий параллельны осям координат (см. теорему 1). Пусть $'F$ и $'\tilde{F}$ — функции тканей $'W$ и $'\tilde{W}$. Из первой части теоремы следует, что $'F \sim F$, $'\tilde{F} \sim \tilde{F}$, поэтому $'F \sim '\tilde{F}$. Используя преобразования (14), добьемся того, чтобы $'F = '\tilde{F}$. Но тогда линии третьего семейства три-тканей $'W$ и $'\tilde{W}$ определяются одним и тем же уравнением: $'F \equiv '\tilde{F} = 0$. Поэтому три-ткань $'W$ переходит в три-ткань $'\tilde{W}$, если положить $'x = \tilde{x}$, $'y = \tilde{y}$. Эти уравнения определяют допустимое преобразование для тканей, поэтому $'W \sim '\tilde{W}$, а значит и $W \sim \tilde{W}$. $\triangleleft$

Отношение эквивалентности три-тканей имеет следующий геометрический смысл: допустимые преобразования тканей сохраняют линии ткани и их точки пересечения. Поэтому эти преобразования сохраняют фигуры, образованные линиями ткани и их точками пересечения:



Задачи и упражнения

1. Найдем функцию параллельной три-ткани W_0 , которая была определена в I, 1*. Так как $A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$, то согласно (9) можно положить

$$\tilde{x} = A_1 x + B_1 y, \quad \tilde{y} = A_2 x + B_2 y.$$

Это преобразование является допустимым и переводит данную три-ткань W_0 в ей эквивалентную $\tilde{W}_0$, семейства линий которой определяются уравнениями:

$$\tilde{x} = u_1, \quad \tilde{y} = u_2, \quad \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{y} = u_3,$$

где $\tilde{A} \neq 0, \tilde{B} \neq 0$. Исключая из этих уравнений $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$, найдем функцию ткани $\tilde{W}_0$: $F = u_3 - \tilde{A}u_1 - \tilde{B}u_2$. После допустимой замены $\tilde{A}u_1 = \tilde{u}_1, \tilde{B}u_2 = \tilde{u}_2, u_3 = \tilde{u}_3$ уравнение ткани примет вид:

$$\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3 = 0. \quad (15)$$

Таким образом, уравнение три-ткани W_0 всегда может быть приведено к виду (15).

2. Найдем функцию ткани 1,2. Чтобы исключить из уравнений семейства $\tilde{W}_0$ переменные $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$, перемножим эти уравнения. В результате получим $u_1 u_2 u_3 = 1$. Логарифмируя это соотношение и полагая $\ln u_i = \tilde{u}_i$, придем к уравнению $\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3 = 0$, которое в точности совпадает с уравнением (15). Поэтому по теореме 2 рассматриваемая три-ткань эквивалентна параллельной ткани W_0 .

Определение 5. Три-ткани, эквивалентные ткани W_0 , называются параллелизуемыми.

Таким образом, ткань, образованная тремя пучками прямых, является параллелизуемой.

3. Докажите, что ткань 1,3 - параллелизуемая.

4. Покажем, что три-ткань 1,4а также является параллелизуемой. Пусть M - произвольная точка внутри круга S_0 и S_1, S_2, S_3 - проходящие через M окружности пучков $S(BC), S(AC), S(AB)$ соответственно. Параметризуем пучки следующим образом: параметром окружности S_i в пучке $S(BC)$.

* I, 1 означает ссылку на упражнение 1 из § 1.

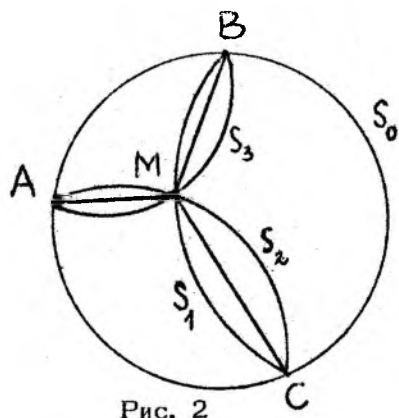


Рис. 2

будем считать $\angle BMC = \alpha$,
 параметром окружности S_3
 в пучке $S(AC) - \angle AMC = \beta$,
 параметром окружности S_2
 в пучке $S(AB) - \angle AMB = \gamma$.
 Углы α, β, γ связаны
 очевидным соотношением
 $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$. Это и будет
 уравнение рассматриваемой
 три-ткани. Полагая теперь
 $\tilde{u}_1 = \alpha - \frac{2}{3}\pi, u_2 = \beta - \frac{2}{3}\pi, u_3 = \gamma - \frac{2}{3}\pi$,
 приходим к уравнению (15).

Следовательно, рассматриваемая ткань эквивалентна ткани W_0 , т.е. является параллелизуемой.

Проведите аналогичное доказательство для ткани 1, 4б.

5. Найдите уравнения три-тканей 1,5 и 1,6а) - д). Докажите, что ткани 6а) - г) являются параллелизуемыми.

6. Докажите, что три-ткань, уравнение которой приводит-ся к виду

$$A u_1 u_2 u_3 + B_1 u_2 u_3 + B_2 u_1 u_3 + B_3 u_1 u_2 + C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3 + D = 0,$$

где $A, B_1, \dots, D$ - постоянные, параллелизуема. Указание: докажите предварительно, что данное уравнение можно записать в следующем виде:

$$(a_1 u_1 + b_1)(a_2 u_2 + b_2)(a_3 u_3 + b_3) + (a_4 u_1 + b_4)(a_5 u_2 + b_5)(a_6 u_3 + b_6) = 0.$$

Определение 6. Три-ткань, образованная тремя семействами прямых линий, называется прямолинейной тканью. Всякая три-ткань, эквивалентная прямолинейной, называется спрямляемой.

Ясно, что всякая параллелизуемая три-ткань является спрямляемой, но обратное, вообще говоря, неверно (это мы докажем ниже).

7. Найдите уравнение прямолинейной три-ткани.

Решение. Уравнения семейств λ_α прямых, образующих ткань, запишем в виде

$$\lambda_\alpha : a_\alpha(u_\alpha)x + b_\alpha(u_\alpha)y + c_\alpha(u_\alpha) = 0. \quad (16)$$

Здесь u_α - параметр прямой в семействе $\mathcal{L}_\alpha$. Исключив из (16) x и y , получим искомое уравнение прямолинейной три-ткани:

$$\begin{vmatrix} a_1(u_1) & b_1(u_1) & c_1(u_1) \\ a_2(u_2) & b_2(u_2) & c_2(u_2) \\ a_3(u_3) & b_3(u_3) & c_3(u_3) \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

§ 4. Шестиугольные три-ткани

Пусть M - произвольная точка области $\mathcal{D}$, в которой задана три-ткань W ; ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 - линии ткани W , проходящие через M , и A - достаточно близкая к M точка линии ℓ_1 . Проведем через точку A линии двух других семейств и обозначим через B и C точки их пересечения с линиями ℓ_2 и ℓ_3 (см. рис.3).

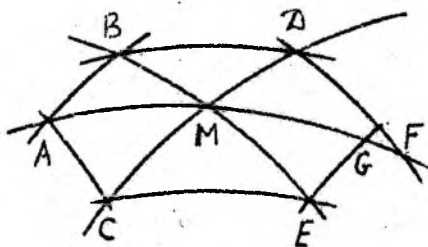


Рис.3

В и С линии первого семейства, получим на ℓ_2 и ℓ_3 точки D и E . Затем через D проведем линию второго семейства, а через E - линию третьего семейства, которые пересекут ℓ_1 в точках F и G . Если три-ткань W - произвольна, то точки F и G ,

вобщем говоря, не совпадут. Если же они совпадают, то говорят, что замыкается шестиугольная фигура H , образованная линиями три-ткани.

Определение 7. Три-ткань W называется **шестиугольной**, если на ней замыкаются все достаточно малые шестиугольные фигуры, образованные линиями ткани. В этом случае будем говорить, что на три-ткани выполняется условие замыкания (H).

Используя средства элементарной геометрии, нетрудно проверить, что параллельная три-ткань является шестиугольной. Отсюда вытекает, что всякая параллелизуемая три-ткань является шестиугольной. В самом деле, поскольку локальный диффеоморфизм Ψ , который переводит параллельную три-ткань в параллелизуемую, является биекцией, то он переводит замкнутые шестиугольники в замкнутые. Таким образом, ткани 1,2 - 1,4 и 1,6а являются шестиугольными.

Оказывается, имеет место и обратное утверждение, доказательство которого будет основным содержанием этого параграфа.

ТЕОРЕМА 3. Всякая шестиугольная три-ткань на плоскости является параллелизуемой.

► Начнем со следующего замечания. Рассмотрим треугольник PQR , образованный линиями ткани, и впишем в него ломаную $ABCD$, также составленную из линий ткани (см. рис.4).

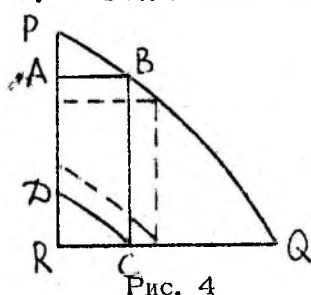


Рис. 4

Если точку A двигать по линии ткани в сторону точки R , то точка D будет двигаться в направлении точки P . В силу непрерывности функций, определяющих ткань, наступит момент, когда точки A и D совпадут. Таким образом, существует $\triangle ABC$, образованный линиями ткани, вписанный в треугольник PQR .

Пусть теперь W - шестиугольная три-ткань и $ABCDEF$ - произвольная шестиугольная фигура, образованная линиями этой ткани (см. рис.5). Припишем линиям BC, AD, EF первого семейства значения параметра $u_1 = 0, 1, 2$, линиям AF, BE, CD второго семейства - значения параметра $u_2 = 0, 1, 2$ соответственно. Договоримся каждой точке M приписывать координаты (u_1, u_2) , если M лежит на пересечении линии первого семейства с параметром u_1 и линии второго семейства с параметром u_2 . Тогда точки $O, A, B, C, D, E, F, P, Q$ получат целочисленные координаты, указанные на рис.5, причем точки, лежащие на фиксированной линии третьего семейства, имеют одну и ту же сумму координат:

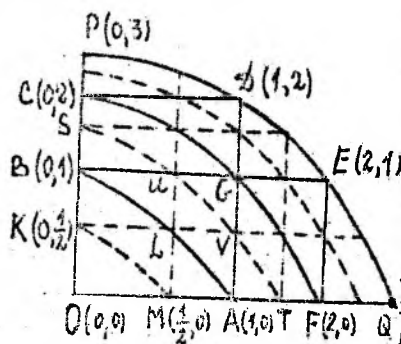


Рис. 5

Точки с целочисленными координатами мы сможем получить всюду в области определения ткани. Например, точка пересечения линий CD и EF имеет координаты $(2,2)$. Если через нее провести линию третьего семейства, то пересечение последней с линиями BC, AD, BE, AF даст новые точки с целочисленными координатами, и т.д. Ввиду шестиугольности ткани W все точки с целочисленными координатами, для которых $u_1 + u_2 = \text{const}$, будут лежать на одной и той же линии третьего семейства.

Впишем теперь в треугольник OAB треугольник KLM . Продолжив линии KL и ML , получим на AD и BE точки V и U . В силу шестиугольности ткани фигура $H = \{VAMKBV\}$ замыкается, т.е. точки V и U лежат на одной линии третьего семейства. Продолжая теперь стороны шестиугольника H и пользуясь снова шестиугольностью рассматриваемой ткани W , мы впишем новые треугольники во все уже имеющиеся (на рис. 5 новые треугольники обозначены пунктиром).

Припишем теперь линиям KL и ML параметр $\frac{1}{2}$, тогда точки V и U будут иметь следующие координаты: $V(1, \frac{1}{2}), U(\frac{1}{2}, 1)$. Эти координаты удовлетворяют уравнению $u_1 + u_2 = \frac{3}{2}$. Точно так же доказывается, что все новые точки имеют координаты вида $(m + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$, где m и n — целые числа, и для каждой из вновь проведенных линий третьего семейства сумма координат любой лежащей на ней точки есть величина постоянная: $u_1 + u_2 = l + \frac{1}{2}$.

Следующий этап доказательства состоит в том, что мы вписываем в $\triangle OKM$ еще один треугольник и с его помощью производим разбиение уже имеющихся треугольников на более мелкие. Последовательно получаем точки с координатами $(\frac{1}{4}m, \frac{1}{4}n), (\frac{1}{8}m, \frac{1}{8}n)$ и т.д., $(\frac{m}{2^k}, \frac{n}{2^k}) \dots$ и всегда для линий третьего семейства будет иметь место соотношение $u_1 + u_2 = \text{const}$. Так как ткань непрерывна и точки

$(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k})$ образуют на плоскости всюду плотное множество, то уравнению $u_1 + u_2 = \text{const}$ будет удовлетворять каждая линия третьего семейства ткани. Итак, для рассматриваемой три-ткани W линии первого семейства определяются уравнением $u_1 = \text{const}$, второго - $u_2 = \text{const}$, третьего - $u_3 = u_1 + u_2 = \text{const}$. Сравнивая это уравнение с (15), находим, что ткань W параллелизуема. $\triangleleft$

Докажем, что три-ткань W , заданная уравнением $z = f(x, y)$, будет шестиугольной тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\ln \frac{f_x}{f_y} \right) = 0, \quad f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

(В номографии это уравнение называется условием Сен-Робера).

Необходимость. Пусть три-ткань W , заданная уравнением $z = f(x, y)$, параллелизуема. Тогда это уравнение приводится к виду (15) после допустимой замены переменных: $x = x(u_1)$, $y = y(u_2)$, $z = z(u_3)$. Следовательно, обратная замена переменных по формулам $u_1 = u_1(x)$, $u_2 = u_2(y)$, $u_3 = u_3(z)$ переводит уравнение (15) в первоначальное уравнение, так что

$$u_1(x) + u_2(y) + u_3(z) = 0 \iff z = f(x, y).$$

Отсюда получаем, что функция f имеет вид: $f(x, y) = \varphi(u_1(x) + u_2(y))$. Дифференцируя, найдем, что

$$f_x = \varphi' u'_1(x), \quad f_y = \varphi' u'_2(y),$$

поэтому

$$f_x : f_y = u'_1(x) : u'_2(y) \quad \ln(f_x : f_y) = \ln u'_1(x) - \ln u'_2(y).$$

Дифференцируя теперь последнее равенство по x , а затем по y , получим уравнение Сен-Робера.

Для доказательства достаточности нужно провести все рассуждения в обратном порядке.

Определение 8. Фигура из линий ткани, изображенная на рис. 6, называется фигурой Томсена. Три-ткань W , на которой замыкаются все достаточно малые фигуры Томсена, называется тканью Томсена. В этом случае говорят, что на ткани W выполняется условие замыкания (Т).

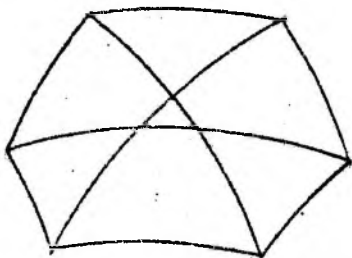


Рис.6

Шестиугольная фигура является частным случаем фигуры Томсена, поэтому, если на ткани W замыкаются все фигуры Томсена, то замыкаются и все шестиугольные фигуры. Обратно, пусть ткань является шестиугольной. Тогда по теореме 3 эта ткань эквивалентна параллельной три-ткани W_0 . Используя элементарные геометрические соображения, нетрудно доказать, что на ткани W_0 фигуры Томсена замыкаются. Так как допустимые пре-

образования сохраняют свойства фигур, образованных линиями ткани (см. пункт П), то три-ткань W , эквивалентная ткани W_0 , также будет тканью (Т). Мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Три-ткань W на плоскости тогда и только тогда является тканью Томсена, когда она является шестиугольной. Этот результат кратко будем записывать так:

$$(H) \iff (T)$$

Задачи и упражнения

1. Постройте шестиугольные фигуры для тканей 1,2; 1,3; 1,4; 1,6а) - г).
2. Докажите, что ткани 1,5 и 1,6д) не являются шестиугольными (а следовательно, и параллелизуемыми). Указание: постройте шестиугольные фигуры.

§ 5. Прямолинейные три-ткани

Прямолинейные три-ткани, которые мы определили в § 3, тесно связаны с номографией - разделом математики, в котором изучаются способы графического изображения функции

$z = f(x, y)$ с помощью так называемых номограмм.

Простейшую номограмму можно построить следующим обра-

зом. Проведем на плоскости достаточно много линий уровня функции f , определяемых уравнением $f(x, y) = z = \text{const}$, т.е. снабженных числовыми отметками. Получим номограмму, изображенную на рис.7. Эта номограмма называется "декартов абак". Она дает возможность по известным значениям двух из трех переменных x, y, z найти с определенной степенью точности значение третьего переменного.

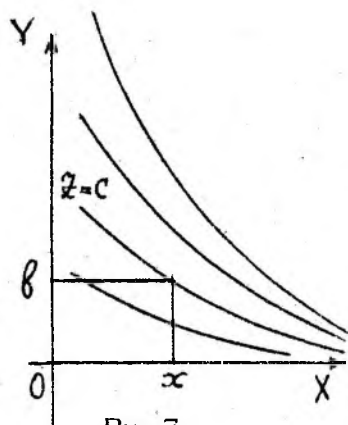


Рис.7

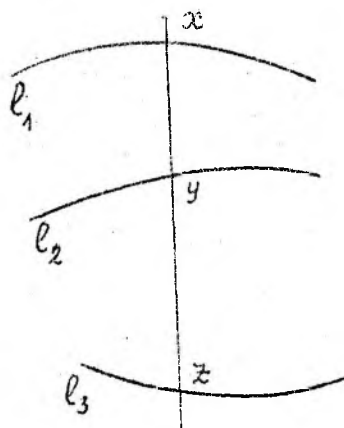


Рис.8

Функция $z = f(x, y)$ определяет целый класс эквивалентных три-тканей (см. § 2), поэтому для нее можно построить сколько угодно различных номограмм. В частности, преобразования вида (14): $x = \theta_1(\tilde{x})$, $y = \theta_2(\tilde{y})$, $z = \theta_3(\tilde{z})$ означают "замену шкал" на осях OX и OY и замену параметра в семействе линий уровня $z = \text{const}$.

Для многих задач номографии гораздо более удобной, чем "декартов абак", является так называемая "номограмма из выровненных точек", которая устроена следующим образом. Пусть ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 — три кривые, на которых нанесены значения переменных x, y и z соответственно. Положим $z = f(x, y)$, если точка z есть пересечение кривой ℓ_3 с прямой xy (см. рис.8).

Но номограмму из выровненных точек можно построить не

для всякой функции $z = f(x, y)$, а только для такой, которая определяет прямолинейную три-ткань, или ткань, эквивалентную прямолинейной. Для доказательства этого утверждения рассмотрим преобразование Ψ , которое каждой точке плоскости ставит в соответствие прямую этой плоскости, а каждой прямой — точку и, кроме того, сохраняет принадлежность точек прямой: если точки A и B лежат на прямой ℓ , то прямые $\Psi(A)$ и $\Psi(B)$ пересекаются в точке $\Psi(\ell)$. Такие преобразования называются корреляциями.

При корреляции Ψ кривые $\ell_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$ перейдут в три однопараметрических семейства прямых (обозначим их $\tilde{\ell}_\alpha$), причем точки $M_1(x), M_2(y), M_3(z)$, лежащие на одной прямой, перейдут в три прямые, пересекающиеся в одной точке. Поэтому семейства $\tilde{\ell}_\alpha$ образуют в некоторой области $\tilde{D}$ три-ткань $\tilde{W}$. Уравнение $z = f(x, y)$, определяющее три-ткань W , будет также и уравнением полученной прямолинейной три-ткани $\tilde{W}$, поэтому ткани W и $\tilde{W}$ эквивалентны.

Задача о спрямляемости ткани имеет важное практическое значение (в номографии эта задача называется "проблема анаморфозы"). Вопрос о спрямляемости три-ткани довольно сложен и его удалось решить лишь недавно.

Важный класс спрямляемых тканей образуют шестиугольные ткани. Следующая теорема дает необходимый и достаточный признак шестиугольности прямолинейной три-ткани.

ТЕОРЕМА 5. (Графа-Зауэра). Прямолинейная три-ткань является шестиугольной тогда и только тогда, когда она образована прямыми, принадлежащими кривой третьего класса.

Прежде чем доказать эту теорему, дадим несколько определений.

Тангенциальными координатами прямой $p_1x + p_2y + p_3 = 0$ называются числа p_1, p_2, p_3 . Семейство прямых, тангенциальные координаты которых связаны однородным уравнением степени K , называется кривой класса K .

Можно доказать, что через каждую точку плоскости, на которой задана кривая класса K , проходит K прямых (не обязательно действительных), принадлежащих этой кривой. Для $K=3$ это доказано в упражнении 3.

Пусть $\mathcal{L}$ — кривая третьего класса и M — некоторая точка плоскости, через которую проходят 3 действительные прямые, принадлежащие кривой $\mathcal{L}$. Тогда в подходящей окрестности U точки M определена прямолинейная три-танка, образованная прямыми этой кривой.

Доказательство теоремы 5 основывается на следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 6 (Шаля). Если кривая $\mathcal{L}$ третьего класса содержит восемь из девяти прямых, образующих фигуру Томсена, то она содержит и девятую прямую. При этом существует однопараметрическое семейство таких кривых $\mathcal{L}$.
 ▷ Уравнение произвольной кривой $\mathcal{L}$ третьего класса имеет вид:

$$A_{111}(p_1)^3 + A_{222}(p_2)^3 + A_{333}(p_3)^3 + 3A_{112}p_1^2p_2 + 3A_{122}p_1p_2^2 + \\ + 3A_{113}p_1^2p_3 + 3A_{133}p_1p_3^2 + 3A_{223}p_2^2p_3 + 3A_{233}p_2p_3^2 + 6A_{123}p_1p_2p_3 = 0, \quad (19)$$

где переменные p_α — тангенциальные координаты текущей прямой кривой $\mathcal{L}$. В этом однородном уравнении третьей степени общего вида десять однородных (или девять неоднородных) коэффициентов. Поэтому можно сказать, что множество всех кривых третьего класса зависит от девяти параметров.

Пусть ℓ_q , $q = \overline{1, 9}$ — девять каких-либо прямых на плоскости. Требуя, чтобы прямые ℓ_q принадлежали кривой $\mathcal{L}$, определяемой уравнением (19), мы получим девять линейных соотношений на коэффициенты $A_{\alpha\beta\gamma}$ ($\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, 2, 3}$). Если эти соотношения независимы, то из них величины $A_{\alpha\beta\gamma}$ определяются с точностью до общего множителя. Таким образом, существует единственная кривая третьего класса, содержащая девять заданных прямых общего положения.

Если потребовать, чтобы кривой $\mathcal{L}$ принадлежали восемь прямых общего положения, то мы получим на коэффициенты $A_{\alpha\beta\gamma}$ восемь соотношений (вообще говоря — независимых). Поэтому существует ∞^1 (пучок) кривых третьего класса, каждая из которых содержит восемь заданных прямых.

Рассмотрим теперь девять прямых, образующих фигуру Томсена T (см. рис.9). Обозначим вершины этой фигуры через

$M_i(x_i, y_i), i = \overline{1, 6}$, и докажем, что уравнение кривой $\mathcal{L}$, содержащей девять прямых фигуры T , можно записать в виде:

$$(P_1 x + P_2 y + P_3)(P_1 x_2 + P_2 y_2 + P_3)(P_1 x_3 + P_2 y_3 + P_3) + \\ + K(P_1 x_4 + P_2 y_4 + P_3)(P_1 x_5 + P_2 y_5 + P_3)(P_1 x_6 + P_2 y_6 + P_3) = 0. \quad (20)$$

В самом деле, уравнение (20) обращается в тождество, если положить, например,

$$P_1 x_1 + P_2 y_1 + P_3 = 0, \quad P_1 x_4 + P_2 y_4 + P_3 = 0.$$

Но эти равенства означают, что прямая, определяемая уравнением $P_1 x + P_2 y + P_3 = 0$, проходит через точки M_1 и M_4 . Ввиду этого уравнению (20) удовлетворяют все девять прямых фигуры T , каждая из которых проходит через одну из точек M_1, M_2, M_3 и одну из точек M_4, M_5, M_6 (см. рис.9).

Так как в уравнении (20) число K произвольно, то существует однопараметрическое семейство — пучок $\mathcal{L}(K)$ кривых третьего класса, содержащих девять прямых фигуры T . Но как было отмечено выше, пучок кривых третьего класса задается восемью независимыми соотношениями на коэффициенты $A_{\alpha\beta\gamma}$. Докажем, что эти восемь соотношений можно получить, требуя принадлежности кривой $\mathcal{L}$, определенной уравнением (19), каких-либо восьми из девяти прямых, образующих фигуру Томсена.

Предположим противное: пусть среди условий принадлежности кривой $\mathcal{L}$ восьми прямых фигуры T , изображенных на рис.10, не более семи независимых. Тогда существует дупараметрическое семейство кривых третьего класса, содержащих указанные восемь прямых. Потребуем теперь, чтобы кривые этого семейства содержали еще и некоторую прямую S , проходящую, например, через точку M_2 (рис.10). Таких кривых будет однопараметрическое семейство, которое обозначим через $\mathcal{A}$.

С другой стороны, поскольку через точку M_2 проходят четыре прямые, принадлежащие кривым из $\mathcal{A}$, то (см.

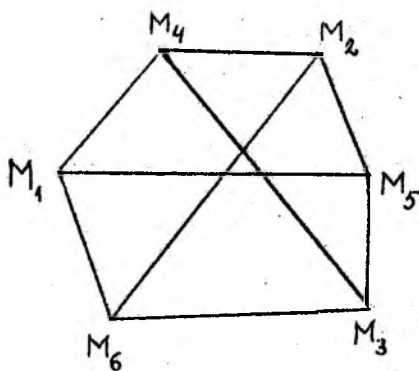


Рис.9

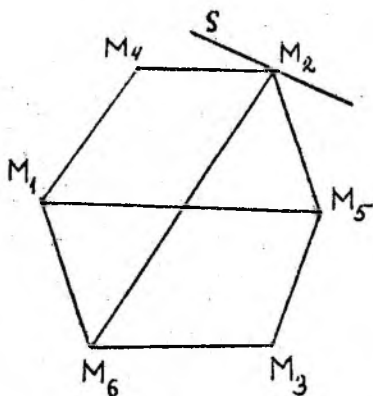


Рис.10

упражнение 5) последние распадаются на пучок прямых с вершиной M_2 (обозначим его (M_2)), и кривую второго класса Q , содержащую те пять из девяти прямых, изображенных на рис.10, которые не проходят через M_2 . При этом кривая Q определяется однозначно (см. упражнение 4), а значит, семейство $\mathcal{L}$ состоит из единственной кривой $\mathcal{L}$, $\mathcal{L} = (M_2) \cup Q$, а не представляет собой пучок (т.е. ∞^1 кривых), как было показано выше. Полученное противоречие и доказывает теорему. $\triangleleft$

Замечание. Если кривая третьего класса распадается на кривую второго класса и пучок прямых, то доказанная теорема Шаля переходит в известную теорему Бриансона, которую можно найти в любом учебнике по проективной геометрии.

Так как шестиугольная фигура является частным случаем фигуры Томсена, то доказанная теорема Шаля верна и для шестиугольных фигур. Этот факт мы сейчас и используем для доказательства сформулированной выше теоремы Графа-Зауэра.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть прямолинейная три-ткань W образована прямыми кривой $\mathcal{L}$ третьего класса. Рассмотрим восемь прямых ткани W , которые образуют незамкнутую шестиугольную фигуру. Тогда, по теореме Шаля, и девятая прямая, замыкающая эту фигуру, также принадлежит $\mathcal{L}$. Следовательно, три-ткань W является шестиугольной.

Необходимость. Пусть прямолинейная три-
ткань W является шестиугольной. Рассмотрим фигуры Φ_3
 Φ_4, Φ_5 и т.д., составленные из линий ткани W (см.
рис.11). Девять прямых, образующих шестиугольную фигуру

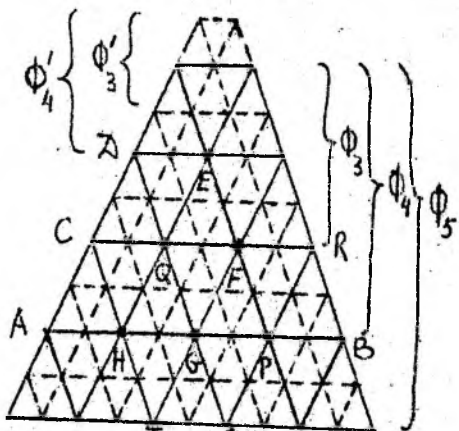


Рис.11

Φ_3 , принадле-
жат (по теореме
Шалля) кривым треть-
его класса некоторо-
го пучка $\mathcal{L}(K)$.

Выберем в этом
пучке такую кривую
 $\mathcal{L}$, которая содер-
жит прямую AB ,
принадлежащую фи-
гуре Φ_4 , и рассмот-
рим шестиугольную фи-
гуру $CHEFGH$, обра-
зованную прямыми
ткани W . Восемь из
деяти прямых этой
фигуры (кроме CH)
принадлежат кривой
 $\mathcal{L}$ - значит, по те-
ореме Шалля, ей при-

надлежит и девятая прямая CH . Так же доказываем, что
кривой $\mathcal{L}$ принадлежит и прямая RS , поэтому $\mathcal{L}$ содержит
все прямые фигуры Φ_4 . Далее, рассматривая фигуру
 $THQFPS$, выводим, что прямая TS и все остальные
прямые фигуры Φ_5 принадлежат кривой $\mathcal{L}$. Таким же
образом получаем, что кривой $\mathcal{L}$ принадлежат все
прямые фигур $\Phi_k, k=3,4,5,6,\dots$

Произведем разбиение фигур Φ_k линиями ткани на бо-
лее мелкие, так как это мы сделали при доказательстве тео-
ремы 3 (на рис.9 это разбиение показано пунктиром). Рассмот-
рим фигуры $\Phi'_3, \Phi'_4, \dots$, которые образованы пер-
воначальными и новыми (пунктирными)
линиями. Аналогично докажем, что все эти фигуры принадлежат
некоторой кривой $\mathcal{L}'$ третьего класса. Покажем, что $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$.

Для этого вспомним, что кривая $\mathcal{L}$ однозначно определялась девятью прямыми, принадлежащими фигуре Φ_γ . Но эти же девять прямых входят и в одну из новых фигур Φ'_κ поэтому они же однозначно определяют (согласно теореме Шаля) и кривую $\mathcal{L}'$. Отсюда следует, что $\mathcal{L}' \equiv \mathcal{L}$.

Продолжая разбиение фигур Φ'_κ на более мелкие, мы получим всюду плотное множество прямых ткани W , принадлежащих кривой $\mathcal{L}$. Следовательно, все линии ткани, проходящие через треугольник, образованный фигурой Φ_κ , принадлежат кривой $\mathcal{L}$.

Треугольник Φ_κ можно продолжить в разные стороны, пока не заполнится вся область определения ткани W . При этом все полученные линии будут принадлежать кривой $\mathcal{L}$. $\triangleleft$

В качестве примера рассмотрим ткани 1,1 – 1,3, которые являются прямолинейными и шестиугольными. Ткань 1,1 образована кривой третьего класса, которая распадается на три пучка параллельных прямых; кривая, порождающая ткань 1,2, распадается на три обычных пучка прямых; ткань 1,3 образована кривой третьего класса, которая распадается на пучок прямых и кривую второго класса – совокупность касательных к окружности.

Задачи и упражнения

1. Покажите, что пучок прямых есть кривая первого класса.
2. Докажите, что совокупность касательных к кривой второго порядка есть кривая второго класса.
3. Докажите, что через каждую точку плоскости проходят, вообще говоря, три (не обязательно действительные) прямые, принадлежащие кривой третьего класса.

Решение. Пусть кривая $\mathcal{L}$ третьего класса задана уравнением (19) и $M_0(x_0, y_0)$ – произвольная точка плоскости. Если прямая a принадлежит $\mathcal{L}$ и проходит через точку M_0 , то тангенциальные координаты этой прямой удовлетворяют уравнению (19) и линейному уравнению

$$P_1 x_0 + P_2 y_0 + P_3 = 0. \quad (21)$$

Исключая из этих уравнений, например, P_3 , получим однородное уравнение третьей степени $f(z) = 0$ относительно переменной $z = \frac{P_1}{P_2}$. Каждому корню этого уравнения со-

ответствует решение (p_1, p_2, p_3) , которое определяет прямую, проходящую через точку M_0 .

4. Докажите, что существует единственная кривая $\mathcal{L}$ второго класса, которая содержит пять заданных прямых. При этом, если три из них проходит через одну точку, то кривая $\mathcal{L}$ распадается на два пучка.

5. Докажите, что если через точку M_0 плоскости проходят более трех прямых, принадлежащих кривой $\mathcal{L}$ третьего класса, то эта кривая распадается на пучок с вершиной M_0 и кривую второго класса.

Решение. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$, такая, что через нее проходят более трех прямых, принадлежащих $\mathcal{L}$. Тогда кубическое уравнение $f(z) = 0$, о котором шла речь в задаче 3, имеет более трех корней. Однако это возможно в том и только в том случае, когда указанное уравнение тождественно обращается в нуль (т.е. все его коэффициенты - нули). Поэтому тангенциальные координаты прямых, проходящих через точку M_0 и принадлежащих $\mathcal{L}$, связаны только одним уравнением (21), которое и определяет пучок прямых с вершиной M_0 . Уравнение (18) кривой $\mathcal{L}$ в этом случае имеет вид:

$$(p_1 x_0 + p_2 y_0 + p_3) \cdot Q(p_1, p_2, p_3) = 0.$$

Так как слева стоит многочлен третьей степени, то $Q(p_1, p_2, p_3)$ - многочлен второй степени, и приравнивая его нулю, получим уравнение кривой класса 2 - второй из компонент, на которые распадается кривая $\mathcal{L}$.

6. Докажите, что трехконечная циклоида

$$x = a(2\cos t + \cos 2t), \quad y = a(2\sin t - \sin 2t)$$

является кривой четвертого порядка, а совокупность касательных к ней - кривой третьего класса.

Глава П. КВАЗИГРУППЫ И АБСТРАКТНЫЕ ТРИ-ТКАНИ

§ 6. Определение квазигруппы и лупы

Множество Q вместе с заданной на нем бинарной операцией $q: Q \times Q \rightarrow Q$ называется группой.

Определение 9. Группоид Q называется квази-группой, если выполняются следующие два условия:

- а) для любых двух элементов a и c из Q существует единственный элемент y , принадлежащий Q , такой, что $q(a, y) = c$;
- б) для любых двух элементов b и c из Q существует единственный элемент x , принадлежащий Q , такой, что $q(x, b) = c$.

Элемент $z = q(x, y)$ называется произведением элементов x и y и обозначается также через $x \cdot y$; квазигруппа (Q, q) обозначается также $Q(\cdot)$.

Условия а) и б) из определения 9 означают, что уравнения

$$a \cdot y = c, \quad x \cdot b = c \quad (22)$$

однозначно разрешимы в квазигруппе $Q(\cdot)$.

Может оказаться, что в квазигруппе существует элемент e , такой, что $\forall a \quad ea = a$. Тогда e называется левой единицей. Если $\forall a \quad ae' = a$, то элемент e' называется правой единицей. Если в квазигруппе есть правая и левая единицы, то они совпадают, так как $e \cdot e' = e = e'$. Тогда элемент e называется единицей.

Определение 10. Квазигруппа с единицей называется группой.

Примеры и упражнения

1. Пусть $Q = \{a, b, c\}$. Зададим операцию в Q таблицей умножения А):

А)	a	b	c
a	a	a	b
b	b	c	a
c	a	b	c

В)	a	b	c
a	a	c	b
b	b	a	c
c	a	b	c

С)	a	b	c
a	a	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

где в левом столбце стоит первый, а в верхней строке -

второй сомножители произведения. Например, $cb = b$, $cc = a$. Так как в каждой строке и в каждом столбце все элементы различны, то свойства а) и б) определения 9 выполняются, и таблица (A) определяет квазигруппу, состоящую из трех элементов. Эта квазигруппа обладает левой единицей $e = c$, но правой единицей элемент c не будет. Значит рассматриваемая квазигруппа не является лупой.

Напротив, бинарная операция, заданная таблицей (B), не определяет на множестве Q квазигруппу, так как $ab = a$, $bb = a$, т.е. существует два различных решения уравнения $xb = a$.

Пример лупы с единицей $e = c$ дает таблица (C).

Точно так же с помощью таблицы умножения можно задать квазигруппу (или лупу), состоящую из четырех, пяти и т.д. элементов. Такие таблицы называются таблицами Кэли.

Приведите пример квазигруппы пятого порядка с левой единицей; с правой единицей; с единицей.

2. Всякая группа является квазигруппой, так как уравнения (22) в группе однозначно разрешимы: $y = a^{-1}c$, $x = cb^{-1}$. Но в произвольной квазигруппе или даже в лупе не выполняется, вообще говоря, ассоциативный закон - $(xy)z = x(yz)$, поэтому лупа не является, вообще говоря, группой.

В то же время легко доказать следующее утверждение (см. например, [1]): ассоциативная квазигруппа есть группа.

Запишите таблицу Кэли для циклической группы четвертого порядка.

3. Пусть Q - множество точек прямой. Определим операцию q на Q так: $z = xy$, если y есть середина отрезка xz (т.е. точка z симметрична точке x относительно y). Покажите, что $Q(\cdot)$ - квазигруппа, но не лупа.

4. Пусть R^5 - пятимерное евклидово пространство. Определим операцию q в R^5 следующим образом: $z = q(x, y)$, где $x(x^i)$, $y(y^i)$, $z(z^i)$ - точки из R^5 ($i = \overline{1, 5}$), если

$$z^1 = x^1 + y^1, \quad z^2 = x^2 + y^2, \quad z^3 = x^3 + y^3,$$

$$z^4 = x^4 + y^4 + x^1 y^2 - x^2 y^1, \quad z^5 = x^5 + y^5 + x^3 y^4 - x^4 y^3$$

Так как эти уравнения однозначно разрешимы относительно переменных x^i и y^i , то они определяют квазигруппу. Докажите, что это лупа. Найдите координаты единицы лупы.

Нам понадобится следующее обобщение понятия квазигруппы.

Определение 11. Пусть X, Y, Z — три множества и отображение

$$q: X \times Y \rightarrow Z$$

обладает свойствами, аналогичными (22):

$$\forall x \in X, \forall z \in Z \exists! y \in Y: q(x, y) = z;$$

$$\forall y \in Y, \forall z \in Z \exists! x \in X: q(x, y) = z.$$

Тройка множеств X, Y, Z вместе с отображением q называется трехбазисной квазигруппой.

Из определения следует, что множества X, Y, Z равномощны (в частности, если они конечны, то состоят из одинакового числа элементов). В самом деле, положим $x = a$ в равенстве $q(x, y) = z$, где a — фиксированный элемент. Тогда $z = q(a, y)$ есть биекция $Y \rightarrow Z$. Аналогично, отображение $z = q(x, y)$ представляет собой биекцию $X \rightarrow Z$.

Если в определении 11 $X \equiv Y \equiv Z$, то трехбазисная квазигруппа превращается в обычную (однобазисную) квазигруппу.

Упражнения

5. Рассмотрим три-кань W_0 образованную тремя семействами λ_α параллельных прямых (см. пример 1.1). Определим операцию $q: \lambda_1 \times \lambda_2 \rightarrow \lambda_3$ следующим образом:

$q(x, y) = z$, где $x \in \lambda_1, y \in \lambda_2, z \in \lambda_3$, если прямая z проходит через точку пересечения прямых x и y . Докажите, что q — трехбазисная квазигруппа*. Она называется координатной квазигруппой.

* В соответствии с определением 11 надо было бы сказать: " $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, q$ — трехбазисная квазигруппа", но здесь и в дальнейшем мы для краткости будем обозначать трехбазисную квазигруппу просто через q .

параллельной ткани W_0 .

6. Определите аналогичным образом координатные квазигруппы три-каней, рассмотренных в примерах: а) 1,2 ; б) 1,3 ; в) 1,4.

7. Докажите, что уравнение $z = (x^2 + (y-1)^2)^{-1}$, где $x > 0, y > 1, z > 0$ определяет трехбазисную квазигруппу.

8. Докажите, что уравнения

$$z^1 = x^1 + y^1 + y^1 x^4, \quad z^2 = x^2 + y^2 + y^2 x^4,$$

$$z^3 = x^3 + y^3 + x^3 y^4 - x^1 y^2 + x^2 y^1, \quad z^4 = x^4 + y^4 + x^4 y^4,$$

где $X = \{R^1 | x^1 > -1\}$, $Y = \{R^4 | y^4 > -1\}$, $Z = \{R^1 | z^1 > -1\}$ - полупространства четырехмерного пространства R^4 , определяют трехбазисную квазигруппу.

§ 7. Изотопия квазигрупп и луп

Пусть $Q(\cdot)$ и $\tilde{Q}(\cdot)$ - группоиды, и пусть α, β, γ - биекции $Q \rightarrow \tilde{Q}$.

Определение 12. Тройка биекций (α, β, γ) называется изотопическим отображением группоида $Q(\cdot)$ на группоид $\tilde{Q}(\cdot)$, если для любых элементов x и y из Q выполняется равенство

$$\alpha(x) \circ \beta(y) = \gamma(xy). \quad (23)$$

В этом случае квазигруппы $Q(\cdot)$ и $\tilde{Q}(\cdot)$ называются изотопными.

Если $\alpha = \beta = \gamma$, изотопическое отображение называется изоморфизмом.

ТЕОРЕМА 7. Всякий группоид, изотопный квазигруппе, сам является квазигруппой.

► Пусть группоид $\tilde{Q}(\cdot)$ изотопен квазигруппе $Q(\cdot)$, т.е. существует изотопическое отображение (α, β, γ) квазигруппы $Q(\cdot)$ на группоид $\tilde{Q}(\cdot)$. Докажем, что в $\tilde{Q}(\cdot)$ разрешимы уравнения (22). Рассмотрим, например, второе из этих уравнений. Из схемы

$$\begin{array}{ccc} x \cdot b = c \\ \alpha \downarrow \quad \uparrow \beta^{-1} \quad \uparrow \gamma^{-1} \\ x \circ b' = c' \end{array}$$

видно, что если x - решение уравнения $x \cdot b = c$ в квазигруппе $Q(\cdot)$, то $x' = \alpha(x)$ будет единственным решением уравнения $x' \circ b' = c'$ в группоиде $\overline{Q}(\circ)$.

Для дальнейшего будут наиболее существенны те свойства квазигрупп, которые сохраняются при изотопических преобразованиях. Легко доказать, что изотопия является отношением эквивалентности на множестве квазигрупп. Поэтому две изотопные между собой квазигруппы мы будем считать эквивалентными.

Из курса алгебры известно (см. [1]), что для групп отношением эквивалентности является изоморфизм: две группы эквивалентны (обладают одинаковыми свойствами), если они изоморфны. "Взаимоотношение" между лупами и группами выясняет следующая теорема Альберта (доказательство см. в [2], с.69, или в [3]):

Если лупа изотопна группе, то она ей изоморфна, и, следовательно, является группой.

Из этой теоремы следует, что если две группы изотопны, то они изоморфны, и поэтому изотопия не нужна в теории групп.

Рассмотрим две квазигруппы $Q(\cdot)$ и $Q(\circ)$, определенные на одном и том же множестве Q , и пусть α и β - биекции $Q \rightarrow Q$.

Определение 13. Изотопия вида $(\alpha, \beta, id) \times$ квазигруппы $Q(\cdot)$ на квазигруппу $Q(\circ)$ называется главной изотопией.

Обоснованием для введения понятия главной изотопии служит следующее утверждение: всякая изотопия $Q(\cdot) \rightarrow Q(\circ)$ есть композиция главной изотопии и изоморфизма. В самом деле, $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha \cdot \gamma^{-1}, \beta \cdot \gamma^{-1}, id)(\gamma, \gamma, \gamma)$.

ТЕОРЕМА 8. Всякая квазигруппа главнoизотопна некоторой лупе.

* Id - тождественное отображение.

▷ Пусть R_β и L_α - биекции $Q(\cdot) \rightarrow Q(\cdot)$, заданные уравнениями

$$R_\beta(x) = x \cdot \beta, \quad L_\alpha(y) = \alpha y,$$

где α и β - два фиксированных элемента квазигруппы $Q(\cdot)$. Эти биекции называются, соответственно, правым и левым сдвигами.

Определим на множестве Q новую операцию $(\circ)$, полагая $u \circ v = x \cdot y$, где

$$x = R_\beta^{-1}(u), \quad y = L_\alpha^{-1}(v). \quad (24)$$

Построенная квазигруппа $Q(\circ)$ будет главным изотопом квазигруппы $Q(\cdot)$, причем, так как в силу (24) $u = x\beta$, $v = \alpha y$, то $\alpha = R_\beta$, $\beta = L_\alpha$, $\gamma = id$.

Докажем, что $Q(\circ)$ - луна с единицей $e = \alpha\beta$. В самом деле, положим в (24) $v = \alpha\beta$, тогда $y = \beta$ и $u \circ e = u \circ (\alpha\beta) = x \cdot \beta = u$. Точно так же, полагая $u = \alpha\beta$, из (24) найдем, что $x = \alpha$ и $e \circ v = (\alpha\beta) \circ v = x \cdot y = \alpha y = v$. Теорема доказана. ◀

Построенная в теореме 8 луна $Q(\circ)$ определяется парой элементов α и β из Q . Поэтому обозначим ее через $\ell(\alpha, \beta)$.

Упражнения

1. Постройте главный изотоп $\ell(c, d)$ квазигруппы $Q(\cdot)$, заданной следующей таблицей умножения:

	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	a	b	d	c
c	d	c	b	a
d	b	a	c	d

Решение. При главной изотопии первый сомножитель произведения xy (т.е. элемент первого столбца в таблице умножения) преобразуется сдвигом R_d :

$$R_d: \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \\ d \end{pmatrix}$$

Второй сомножитель произведения $x \cdot y$ (т.е. элемент первой строки таблицы) преобразуется левым сдвигом

$$L_c : (a, b, c, d) \longrightarrow (d, c, b, a)$$

В результате получится таблица (A):

A)	d	c	b	a
b	c	d	a	b
c	a	b	d	c
a	d	c	b	a
d	b	a	c	d

B)	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	b	a
d	d	c	a	b

Таблица (A) определяет луну $\ell(c, d)$ с единицей $e = c \cdot d = a$. Элементы во внутренних клетках таблицы (A) остались те же, что и в заданной таблице умножения, так как при главной изотопии произведения не меняются ($u \circ v = x \cdot y$).

Изменим порядок следования элементов в таблице (A), переставив единицу a на первое место. В результате получим таблицу (B).

2. Постройте главный изотоп $\ell(a, b)$ для квазигрупп 6.1 и 6.3.

3. Докажите, что: а) при изоморфизме луна переходит в луну; б) если изотопическое отображение (α, β, γ) луны $Q(\cdot)$ на луну $Q'(\cdot)$ обладает тем свойством, что $\alpha(e) = \beta(e) = e'$, то это отображение будет изоморфизмом.

Понятие изотопии имеет смысл и для трехбазисных квазигрупп. Пусть $q: X \times Y \rightarrow Z$ и $\tilde{q}: \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Z}$ — две трехбазисные квазигруппы. Тройка биекций (α, β, γ) , где $\alpha: X \rightarrow \tilde{X}$, $\beta: Y \rightarrow \tilde{Y}$, $\gamma: Z \rightarrow \tilde{Z}$, таких, что выполняется тождество $\tilde{q}(\alpha(x), \beta(y)) = \gamma(q(x, y))$ называется изотопическим отображением трехбазисной квазигруппы q на трехбазисную квазигруппу $\tilde{q}$.

Для трехбазисной квазигруппы q определяются левые и правые сдвиги по тем же формулам, что и для однобазисной квазигруппы:

$$L_a: Y \rightarrow Z, v = L_a(y) = ay; \quad R_b: X \rightarrow Z, u = R_b(x) = xb.$$

При этом, так как элементы u и v принадлежат множеству Z , то на нем с помощью формул (24) вводится

новая операция $(\circ)$, вместе с которой множество Z (согласно теореме 8) будет лулой. Таким образом, теорема 8 сохраняет свой смысл и для трехбазисных квазигрупп.

Примеры и задачи

4. Построим главный изотоп $\ell(a, b)$ координатной квазигруппы параллельной три-ткани W_0 (см. упр. 6.5). Пусть a и b — прямые семейств λ_1 и λ_2 , соответственно. Тогда произведение $w = u \circ v$ в луле $\ell(a, b)$ определяется так, как показано на рис.12 (u, v, w — линии третьего семейства λ_3):

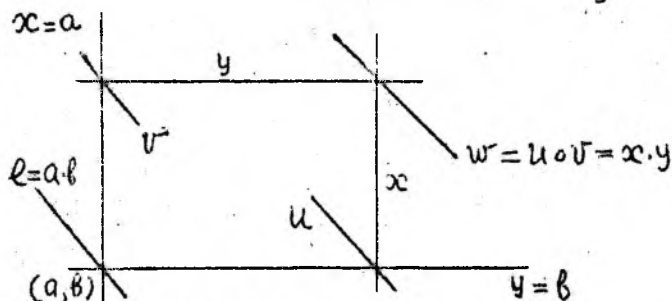


Рис.12

5. Постройте главный изотоп для квазигруппы 6.6.

6. Докажите, что лула 6.8 изоморфна луле

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 e^{-y^4} + y^1 e^{x^4}, & z^2 &= x^2 e^{-y^4} + y^2 e^{x^4}, \\ z^3 &= x^3 e^{y^4} + y^3 e^{-x^4} + x^2 y^1 - x^1 y^2, & z^4 &= x^4 + y^4. \end{aligned} \quad (25)$$

Решение. Положим

$$\begin{aligned} e^{x^4} &= \bar{x}^4, & e^{y^4} &= \bar{y}^4, & e^{z^4} &= \bar{z}^4 \\ x^i &= \bar{x}^i, & y^i &= \bar{y}^i, & z^i &= \bar{z}^i, \quad i=1,2,3. \end{aligned} \quad (26)$$

Уравнения (26) определяют изоморфизм φ_1 луны (25) на лулу

$$\begin{aligned} \bar{z}^1 &= \bar{x}^1 (\bar{y}^4)^{-1} + \bar{y}^1 \bar{x}^4, & \bar{z}^2 &= \bar{x}^2 (\bar{y}^4)^{-1} + \bar{y}^2 (\bar{x}^4), \\ \bar{z}^3 &= \bar{y}^4 \bar{x}^3 + \bar{y}^3 (\bar{x}^4)^{-1} + \bar{x}^2 \bar{y}^1 - \bar{x}^1 \bar{y}^2, & \bar{z}^4 &= \bar{x}^4 \bar{y}^4, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\bar{x}^Y > 0$, $\bar{y}^Y > 0$, $\bar{z}^Y > 0$.

Перепишем уравнения (27) в эквивалентной форме, умножив их на $\bar{z}^Y$:

$$\begin{aligned}\bar{x}^1 \bar{z}^Y &= \bar{x}^1 \bar{x}^Y + \bar{y}^1 \bar{y}^Y (\bar{x}^Y)^2, & \bar{x}^2 \bar{z}^Y &= \bar{x}^2 \bar{x}^Y + \bar{y}^2 \bar{y}^Y (\bar{x}^Y)^2, \\ \bar{x}^3 \bar{z}^Y &= \bar{x}^3 \bar{x}^Y (\bar{y}^Y)^2 + \bar{y}^3 \bar{y}^Y + \bar{x}^2 \bar{x}^Y \bar{y}^1 \bar{y}^Y - \bar{x}^1 \bar{x}^Y \bar{y}^2 \bar{y}^Y, & (\bar{x}^Y)^2 &= (\bar{x}^1)^2 (\bar{y}^Y)^2.\end{aligned}$$

Полагая в этих уравнениях

$$\begin{aligned}\bar{x}^1 \bar{x}^Y &= \tilde{x}^1, & \bar{x}^2 \bar{x}^Y &= \tilde{x}^2, & \bar{x}^3 \bar{x}^Y &= \tilde{x}^3, & (\bar{x}^Y)^2 &= \tilde{x}^Y, \\ \bar{y}^1 \bar{y}^Y &= \tilde{y}^1, & \bar{y}^2 \bar{y}^Y &= \tilde{y}^2, & \bar{y}^3 \bar{y}^Y &= \tilde{y}^3, & (\bar{y}^Y)^2 &= \tilde{y}^Y, \\ \bar{z}^1 \bar{z}^Y &= \tilde{z}^1, & \bar{z}^2 \bar{z}^Y &= \tilde{z}^2, & \bar{z}^3 \bar{z}^Y &= \tilde{z}^3, & (\bar{z}^Y)^2 &= \tilde{z}^Y.\end{aligned}$$

получим:

$$\begin{aligned}\tilde{x}^1 &= \tilde{x}^1 + \tilde{y}^1 \tilde{x}^Y, & \tilde{x}^2 &= \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \tilde{x}^Y, \\ \tilde{x}^3 &= \tilde{x}^3 \tilde{y}^Y + \tilde{y}^3 + \tilde{x}^2 \tilde{y}^1 - \tilde{x}^1 \tilde{y}^2, & \tilde{x}^Y &= \tilde{x}^Y \tilde{y}^Y, & \tilde{x}^Y > 0, & \tilde{y}^Y > 0, & \tilde{z}^Y > 0.\end{aligned}\tag{28}$$

Уравнения (28) определяют изоморфизм φ_2 луны (27) на луну (29). Положим теперь в уравнениях (29)

$$\begin{aligned}\tilde{x}^Y &= x^Y + 1, & \tilde{y}^Y &= y^Y + 1, & \tilde{z}^Y &= z^Y + 1, \\ \tilde{x}^i &= x^i, & \tilde{y}^i &= y^i, & \tilde{z}^i &= z^i.\end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}z^1 &= x^1 + y^1 + y^1 x^Y, & z^2 &= x^2 + y^2 + y^2 x^Y, \\ z^3 &= x^3 + y^3 + x^3 y^Y + x^2 y^1 - x^1 y^2, & z^Y &= x^Y + y^Y + x^Y y^Y,\end{aligned}\tag{31}$$

где $x^Y > -1$, $y^Y > -1$, $z^Y > -1$.

Уравнения (30) устанавливают изоморфизм φ_3 между лунами (29) и (31). Следовательно, изоморфизм $\varphi = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$

переводит данную лупу (25) в лупу (31). Так как уравнения (31) совпадают с уравнениями лупы в 6.8, то задача решена.

Следующая теорема показывает, почему мы использовали именно сдвиги для построения лупы $\ell(a, b)$, главноизотопной заданной квазигруппе $Q(\cdot)$.

ТЕОРЕМА 9. Любая главная изотопия квазигруппы $Q(\cdot)$ на лупу $Q(o)$ имеет вид (R_θ, L_a, id) , т.е. определяется сдвигами.

► Пусть (α, β, id) — главная изотопия $Q(\cdot) \rightarrow Q(o)$. Тогда, согласно определению 12, для любых x и y из $Q(\cdot)$ имеем равенство $\alpha(x) \circ \beta(y) = x \circ y$. Так как $Q(o)$ — лупа, то в ней существует единица e . Пусть $a = \alpha^{-1}(e)$. Тогда из равенств $\alpha(a) \circ \beta(y) = ay$ и $\alpha(a) = e$ находим, что $\beta(y) = ay = L_a(y)$. Следовательно, $\beta = L_a$. Точно так же доказывается, что $\alpha = R_\theta$, где $\theta = \beta^{-1}(e)$. ◀

§ 8. Квазигруппы и лупы с тождествами

Пусть $Q(\cdot)$ — квазигруппа. Словом длины m называется произведение m элементов квазигруппы $Q(\cdot)$, взятых в определенном порядке и при определенной расстановке скобок. Примеры слов: x , xy , $x(yz)$, $(xy)z$, $x^2 \cdot y$, $x(xy)$, $x^2 \cdot x$, $x \cdot x^2$, $x^2 \cdot yz$, $x^2 \cdot x^2$, и т.д.

Произвольное слово будем записывать в виде $S(x, y, \dots, z)$. Если элементы $x, y, \dots, z$ считать переменными, то слово $S(x, y, \dots, z)$ можно рассматривать как сложную функцию — композицию некоторого числа функций $(\cdot)$.

Пусть S_1 и S_2 — два слова от одних и тех же переменных $x, y, \dots, z$ на квазигруппе $Q(\cdot)$. Вообще говоря, $S_1(x, y, \dots, z) \neq S_2(x, y, \dots, z)$, например, $xy \neq yx$, $x(yz) \neq (xy)z$, $x^2 \cdot x \neq x \cdot x^2$ и т.д. Но, как известно, в группах равенство $(xy)z = x(yz)$ выполняется тождественно (т.е. для любых элементов x, y и z из группы). В коммутативных группах кроме тождества ассоциативности выполняется еще и тождество коммутативности $xy = yx$.

Мы будем рассматривать лупы, на которых выполняются какое-либо тождество. Вот наиболее известные из таких луп:

Название лупы	Тождество, выполняемое в лупе
1. Группа	$x(yz) = (xy)z$
2. Коммутативная	$xy = yx$
3. Моноассоциативная	$x^2 \cdot x = x \cdot x^2$
4. Правоальтернативная	$(xy)y = x(yy)$
5. Левоальтернативная	$(xx)y = x(xy)$
6. Эластичная	$(xy)x = x(yx)$
7. Лупа Муфанг	$(xy)(x^2x) = x(yx \cdot x)$
8. Левая лупа Боля	$(x \cdot yx)z = x(y \cdot xz)$
9. Правая лупа Боля	$z(x \cdot y \cdot x) = (zx \cdot y)x$

Если в лупе выполняются оба условия 4 и 5, то она называется **альтернативной**.

Задачи и упражнения

1. Проверьте, является ли ассоциативной квазигруппа, заданная следующей таблицей Кэли:

	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	c	b	a	d
c	a	d	c	b
d	d	c	b	a

2. Докажите, что а) правоальтернативная (левоальтернативная) лупа моноассоциативна; б) правая (левая) лупа Боля альтернативна справа (слева).

3. Докажите, что лупа Муфанг а) эластична; б) левоальтернативна; в) правоальтернативна.

Докажем, например, а) и б). Эластичность мы получим, полагая в тождестве Муфанг $z = e$. Затем, полагая в этом же тождестве $x = y$, получим: $x^2 \cdot zx = x(xz \cdot x)$.

В силу эластичности $xz \cdot x = x \cdot zx$, поэтому имеем:
 $x^2 \cdot zx = x(x \cdot zx)$. Обозначая $zx = t$, из последнего равенства находим $x^2 \cdot t = x(xt)$, что и требовалось.

4. Докажите, что для элементов x, y, yx в лупе Муфанг выполняется ассоциативность.

5. Докажите, что тождество Муфанг эквивалентно каждому из следующих:

$$x(y \cdot xz) = (xy \cdot x)z, (zx \cdot y)x = z(x \cdot yx)$$

(доказательство имеется в книге [3]).

6. Докажите, пользуясь предыдущей задачей, что лупа Муфанг является правой и левой лупой Боля.

7. Докажите, что эластичная левая (правая) лупа Боля есть лупа Муфанг.

8. Докажите, что правоальтернативная левая лупа Боля есть лупа Муфанг.

Доказательство. Пусть $Q(\cdot)$ — левая лупа Боля. Положим в соответствующем тождестве $z = x$, получим тождество $(x \cdot yx)x = x(y \cdot x^2)$. Так как по условию задачи лупа $Q(\cdot)$ правоальтернативна, последнее тождество можно переписать так: $(x \cdot yx)x = x(yx \cdot x)$. Положив теперь $yx = z$, имеем: $(x \cdot z)x = x(zx)$. Итак, рассматриваемая левая лупа Боля эластична, и следовательно, (см. задачу 6) является лупой Муфанг.

Докажите этот же факт для левоальтернативной правой лупы Боля.

9. Если лупа $Q(\cdot)$ является одновременно правой и левой лупой Боля, то она будет лупой Муфанг.

Пусть в лупе $Q(\cdot)$ $xy = e$. Тогда элемент y называется правым обратным для x и обозначается x^{-1} , а элемент x называется левым обратным для y и обозначается ^{-1}y .

10. Для лупы 6.4 а) найдите левый и правый обратные элементы для $x(x^i)$ и покажите, что они совпадают; б) выясните, является ли эта лупа коммутативной, эластичной, лево- или правоальтернативной, ассоциативной, лупой Муфанг, лупой Боля (левой или правой).

Решение. Легко видеть, что единица лупы имеет координаты $(0, 0, 0, 0, 0)$. Поэтому уравнения $(xy)^i = e^i$, из кото-

рых мы должны найти координаты элемента $y = x^{-1}$, имеют вид:

$$x^1 + y^1 = 0, \quad x^2 + y^2 = 0, \quad x^3 + y^3 = 0, \\ x^1 y^2 - x^2 y^1 + x^4 + y^4 = 0, \quad x^5 + y^5 - x^4 y^3 + x^3 y^4 = 0.$$

Отсюда находим, что $y^i = -x^i$, $i=1, 2, 3, 4, 5$.

Чтобы найти координаты элемента x^{-1} , рассмотрим систему $(yx)^i = e^i$, или

$$y^1 + x^1 = 0, \quad y^2 + x^2 = 0, \quad y^3 + x^3 = 0, \\ x^2 y^1 - x^1 y^2 + x^4 + y^4 = 0, \quad x^5 + y^5 - x^3 y^4 + x^4 y^3 = 0.$$

Отсюда находим, что $y^i = -x^i$. Мы видим, что координаты элементов x^{-1} и ^{-1}x совпадают, следовательно, $x^{-1} = ^{-1}x$.

Выясним, является ли рассматриваемая лупа левосильтернативной. Для этого найдем координаты элементов $x^2 \cdot y$ и $x(xy)$. Имеем:

$$(xx)^1 = 2x^1, (xx)^2 = 2x^2, \dots, (xx)^5 = 2x^5.$$

Вычислим координаты элемента $(xx)y$:

$$((xx)y)^1 = (xx)^1 + y^1 = 2x^1 + y^1, ((xx)y)^2 = 2x^2 + y^2, ((xx)y)^3 = \\ = 2x^3 + y^3, ((xx)y)^4 = (xx)^4 y^1 + (xx)^1 y^2 - (xx)^2 y^1 = 2x^4 y^1 + 2x^1 y^2 - 2x^2 y^1, \\ ((xx)y)^5 = (xx)^5 + y^5 + (xx)^3 y^4 - (xx)^4 y^3 = 2x^5 + y^5 + 2x^3 y^4 - 2x^4 y^3, \\ \text{и элемента } x(xy):$$

$$(x(xy))^1 = x^1 + (xy)^1 = 2x^1 + y^1, (x(xy))^2 = 2x^2 + y^2,$$

$$(x(xy))^3 = 2x^3 + y^3,$$

$$(x(xy))^4 = x^4 + (xy)^4 + x^1(xy)^2 - x^2(xy)^1 = \\ = x^4 + (x^4 + y^4 + x^1 y^2 - x^2 y^1) + x^1(x^2 + y^2) - x^2(x^1 + y^1) = \\ = 2x^4 + y^4 + 2x^1 y^2 - 2x^2 y^1,$$

$$(x(xy))^5 = x^5 + (xy)^5 + x^3(xy)^4 - x^4(xy)^3 =$$

$x^i (xx)^j$ есть i -тая координата элемента xx .

$$= x^5 + (x^5 + y^5 + x^3 y^2 - x^4 y^3) + x^3 (x^4 + y^4) + x^4 y^2 - x^2 y^4 - x^4 (x^3 + y^3) = 2x^5 + y^5 + 2x^3 y^4 - 2x^4 y^3 + x^4 x^3 y^2 - x^2 x^3 y^4.$$

Мы видим, что $((x x) y)^5 \neq (x (x y))^5$, значит, $x(x y) \neq (x x) y$. Поэтому рассматриваемая лупа не является левоальтернативной, а, следовательно, и лупой Боля (см. задачу 1), и тем более не является лупой Муфанг или группой.

Таким же образом можно выяснить, является ли данная лупа правсальтернативной или эластичной.

11. Решите такую же задачу для лупы 6.8.

12. Докажите, что на квазигруппе 6.3. выполняется тождество $xx = x$ (идемпотентность).

13. Докажите, что в лупе, построенной в 7.1, выполняются тождества $xy = yx$ и $x^{-1} = {}^{-1}x$.

14. Докажите, что лупа 6.8 является лупой Муфанг. Будет ли лупой Муфанг лупа, определенная равенствами (25)?

15. Умножение в алгебре кватернионов* определяется следующими равенствами:

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 - x^4 y^4, \\ z^2 &= x^1 y^2 + x^2 y^1 + x^3 y^4 - x^4 y^3, \\ z^3 &= x^1 y^3 - x^2 y^4 + x^3 y^1 + x^4 y^2, \\ z^4 &= x^1 y^4 + x^2 y^3 - x^3 y^2 + x^4 y^1. \end{aligned}$$

Докажите, что кватернионы относительно операции умножения образуют некоммутативную группу. Найдите единицу этой группы (ее координаты) и координаты элемента, обратного x .

16. Умножение в алгебре октав определяется следующими равенствами:

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 - x^4 y^4 - x^5 y^5 - x^6 y^6 - x^7 y^7 - x^8 y^8, \\ z^2 &= x^1 y^2 + x^2 y^1 + x^3 y^7 - x^7 y^3 + x^5 y^6 - x^6 y^5 - x^7 y^8 + x^8 y^7, \\ z^3 &= x^1 y^3 - x^2 y^7 + x^3 y^1 + x^4 y^2 + x^5 y^7 + x^6 y^8 - x^7 y^5 - x^8 y^6. \end{aligned}$$

* Определение алгебры кватернионов и октав можно найти в книге Б.А.Розенфельда: Многомерные пространства. М., 1966.

$$\begin{aligned}
z^4 &= x^1 y^4 + x^2 y^3 - x^3 y^2 + x^4 y^1 + x^5 y^8 - x^6 y^7 + x^7 y^6 - x^8 y^5, \\
z^5 &= x^1 y^5 - x^2 y^6 - x^3 y^7 - x^4 y^8 + x^5 y^1 + x^6 y^2 + x^7 y^3 + x^8 y^4, \\
z^6 &= x^1 y^6 + x^2 y^5 - x^3 y^8 + x^4 y^7 - x^5 y^2 + x^6 y^1 - x^7 y^4 + x^8 y^3, \\
z^7 &= x^1 y^7 + x^2 y^8 + x^3 y^5 - x^4 y^6 - x^5 y^3 + x^6 y^4 + x^7 y^1 - x^8 y^2, \\
z^8 &= x^1 y^2 - x^2 y^7 + x^3 y^8 + x^4 y^5 - x^5 y^4 - x^6 y^3 + x^7 y^2 + x^8 y^1.
\end{aligned}$$

Докажите, что относительно операции умножения октавы образуют альтернативную, но не ассоциативную лупу. Найдите единицу этой лупы.

§ 9. Абстрактные три-ткани и их координатные квазигруппы и лупы

Мы показали в упражнениях 6.5 и 6.6 как с помощью три-ткани W определить квазигруппу, которая была названа координатной квазигруппой этой ткани. Однако координатную квазигруппу можно определить не для всякой три-ткани. Рассмотрим, например, параллельную три-ткань, определенную не на всей плоскости, а на некотором круге K . Поскольку не всякие две линии разных семейств пересекаются внутри круга K , то для такой ткани нельзя определить квазигруппу так, как это сделано в упражнении 6.5. Сейчас мы определим три-ткань по-другому, так, что она всегда будет иметь координатную квазигруппу.

Пусть даны множество M , элементы которого будем называть точками, и множества X, Y, Z , элементы которых будем называть линиями первого, второго и третьего семейства, соответственно. Эти множества предполагаются не пустыми и не имеющими общих элементов.

Определение 14. Говорят, что множества M, X, Y, Z образуют абстрактную три-ткань, если элементы этих множеств связаны отношением инцидентности^{*}, которое определяется следующими аксиомами:

A1. Каждая точка множества M инцидентна в точности трем линиям, взятым по одной из семейств X, Y, Z .

^{*} Наряду с термином "инцидентность" употребляется термин "принадлежность".

A2. Каковы бы ни были две линии, взятые из разных семейств, существует единственная точка множества M инцидентная этим линиям.

Договоримся далее обозначать отношение инцидентности знаком $\in$. Если точка A инцидентна линиям x и y , то говорят, что линии x и y пересекаются в точке A , или проходят через точку A .

Определение 14 похоже на определение 1 три-ткани, образованной линиями на плоскости, которую, в отличие от абстрактной три-ткани, будем называть геометрической тканью. Для геометрических тканей не выполняется, вообще говоря, аксиома 2. Именно поэтому не всякая геометрическая три-ткань является абстрактной тканью.

С абстрактной три-тканью W можно связать бинарную операцию $q: X \times Y \rightarrow Z$ так, как мы это сделали в упражнении 6.5: $q(x, y) = z$, если линия z третьего семейства проходит через точку пересечения линий x и y , таких, что $x \in X, y \in Y$. Из определения 14 вытекает, что q — трехбазисная квазигруппа (см. определение 11). Эта квазигруппа называется координатной квазигруппой абстрактной три-ткани.

Так как через каждую точку множества M проходит в точности по одной линии из первых двух семейств линий ткани W , то этой точке ставится в соответствие пара (x, y) , где $x \in X, y \in Y$. Следовательно, множество M можно рассматривать как прямое произведение $X \times Y$, а линии ткани W — как множества точек. При этом линии первого семейства образованы точками вида (a, y) , где a — фиксированный элемент из X , а y пробегает все значения из Y . Линия b второго семейства есть множество всех пар вида (x, b) ; на линии $z = c$ третьего семейства лежат точки (x, y) , такие, что $xy = c$ (как и выше, мы обозначаем $q(x, y)$ через xy).

Из этих рассуждений видно, что по заданной квазигруппе $q: X \times Y \rightarrow Z$ можно построить абстрактную три-ткань на прямом произведении $X \times Y$. Действительно назовем "точками" пары (x, y) — элементы множества $X \times Y$; "линией первого семейства" — множество точек вида (a, y) .

где a – фиксированный элемент; "линией второго семейства" – множество точек (x, b) , где фиксировано b ; "линией третьего семейства" – множество точек (x, y) , таких, что $xy = c = \text{const}$. Так как в квазигруппе уравнение $x \cdot y = z$ однозначно разрешимо относительно x и y , то для построенных множеств будут выполняться аксиомы $A1$ и $A2$, и поэтому мы получим абстрактную три-ткань. Исходная квазигруппа q будет координатной квазигруппой этой ткани.

Итак, доказано, что со всякой абстрактной три-тканью W связана ее координатная трехбазисная квазигруппа q , и обратно: всякая трехбазисная квазигруппа q порождает абстрактную три-ткань, для которой q является координатной квазигруппой.

Если задана однобазисная квазигруппа Q , то абстрактную три-ткань можно построить на множестве $Q \times Q$ подобно тому, как мы сделали это только что на множестве $X \times Y$ для трехбазисной квазигруппы q . Рассмотрим, например, квазигруппу Q , заданную на множестве $\{a, b, c\}$ следующей таблицей умножения:

	a	b	c
a	c	a	b
b	b	c	a
c	a	b	c

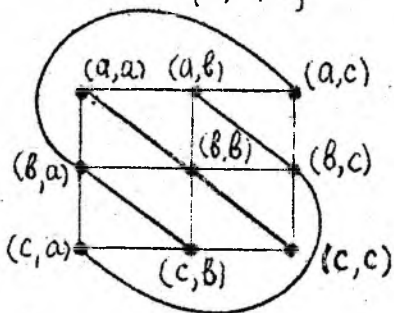


Рис.13

Три-ткань W на множестве $Q \times Q$ определяется так, как указано на рис.13. Ее линии содержат по три точки. Например, линия $x=a$ состоит из трех точек: (a, a) , (a, b) , (a, c) . Линии первого и второго семейства ткани W изображены горизонтальными и вертикальными отрезками, а линии третьего семейства – наклонными.

Так как все три семейства линий ткани W равноправны, то с ней, кроме квазигруппы q , можно связать еще пять

координатных квазигрупп, которые называются парастрофами квазигруппы Q . Если обозначить $q = q_{12}$, то парастрофы: $q_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, определяются следующим образом:

$q_{32}(z, y) = x$ и $q_{13}(x, z) = y$, если $q_{12}(x, y) = z$. Кроме того, $q_{\alpha\beta}(x, y) = q_{\beta\alpha}(y, x)$. Квазигруппы q_{13} и q_{32} называются, соответственно, правой и левой обратными квазигруппами для квазигруппы $q = q_{12}$ и обозначаются еще так: $q_{13} = q^{-1}$, $q_{32} = {}^{-1}q$. Операция в квазигруппе q^{-1} обозначается знаком $/$, а в квазигруппе ${}^{-1}q$ — знаком $\backslash$, так что $q_{13}(x, z) = x/z$, $q_{32}(z, y) = z \backslash y$.

Все шесть координатных квазигрупп $q_{\alpha\beta}$ три-ткани W равноправны, поэтому все сказанное выше о квазигруппе $q_{12} = q$ можно повторить и для любой из них. В дальнейшем мы будем рассматривать как правило только квазигруппу q .

Задачи и упражнения

1. Докажите, что: а) множества X, Y, Z линий абстрактной три-ткани равномощны; б) линии одного семейства абстрактной три-ткани устанавливают биекцию на каждой паре линий двух других семейств. Выведите отсюда, что множества точек на каждой линии ткани равномощны.

2. Докажите, что если одно из семейств конечной абстрактной три-ткани содержит n линий, то эта ткань содержит n^2 точек.

3. Постройте абстрактную три-ткань, координатная квазигруппа которой является циклической группой порядка 3 или 4.

4. Постройте абстрактную три-ткань, координатной квазигруппой которой будет квазигруппа, приведенная в упражнении 8.1.

Сравнивая определение координатной квазигруппы абстрактной три-ткани с определением 3 функции геометрической три-ткани, мы видим, что они совпадают, если для геометрической ткани W выполнены все аксиомы абстрактной ткани.

Пусть W и $\tilde{W}$ — эквивалентные геометрические ткани, обладающие этим свойством. По теореме 2 из § 3 функции f и $\tilde{f}$ таких тканей также эквивалентны, т.е. сущест-

вуют преобразования вида (1.4), при которых функция $\mathcal{F}$ переходит в $\mathcal{F}$. Но, с другой стороны, преобразования (14) определяют изотопическое отображение координатной квазигруппы q ткани W на координатную квазигруппу $\tilde{q}$ ткани $\tilde{W}$. Отсюда вытекает следующее важное утверждение: эквивалентным три-тканям соответствуют изотопные квазигруппы.

В § 7 мы показали, что с каждой трехбазисной квазигруппой $q: X \times Y \rightarrow Z$ связаны лупы $\ell(a, b)$, определенные на множестве Z , и главноизотопные квазигруппы q . Если q — координатная квазигруппа абстрактной три-ткани W , то главные изотопы квазигруппы q будем называть координатными лупами ткани W .

Рисунок 12, на котором изображено умножение в координатной лупе $\ell(a, b)$ параллельной ткани, можно рассматривать как схему умножения в координатной лупе для любой абстрактной ткани.

5. Постройте координатную лупу $\ell(c, b)$ для ткани, определенной в задаче 4 этого параграфа.

6. Постройте координатную лупу $\ell(a, a^2)$ для три-ткани, которая порождена циклической группой $\{a\}$ порядка 4.

7. Покажите, что координатные лупы абстрактной ткани можно также определить на множествах X и Y (напомним, что мы определили лупу $\ell(a, b)$ на множестве Z).

8. Обозначим операции в координатной лупе $\ell(a, b)$ ткани W через $\circ$, а обратные операции через $\oslash$ и $\oslash$, так что $w = u \oslash v$, если $u = w \circ v$ и $w = u \oslash v$, если $v = u \circ w$. Докажите, что элементы $u \oslash v$ и $u \oslash v$ изображаются на три-ткани W следующим образом:

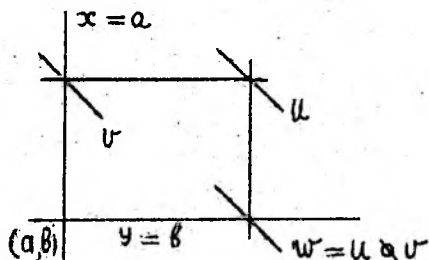


Рис.14

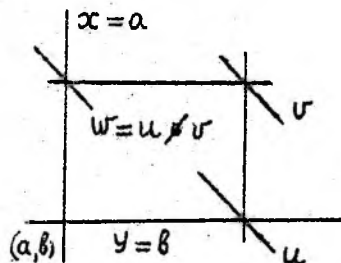


Рис.15

9. Пусть бинарная операция $q: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ задана следующими уравнениями:

$$A) \begin{cases} z^1 = x^1 e^{2\varepsilon(x^3+y^3)} + y^1 + 2\varepsilon x^3(x^2+y^2 e^{2\varepsilon(x^3+y^3)}), \\ z^2 = x^2 + y^2 e^{2\varepsilon(x^3+y^3)}, \\ z^3 = x^3 + y^3, \end{cases}, \quad \varepsilon = \pm 1;$$

или

$$B) \begin{cases} z^1 = x^1 + y^1 - (x^2 + y^2) x^3 y^3, \\ z^2 = x^2 + y^2, \\ z^3 = x^3 + y^3. \end{cases}$$

а) Докажите, что q является квазигруппой, но не лупой;

б) постройте главный изотоп квазигруппы q - лупу с единицей $e(0,0,0)$;

в) найдите левую и правую (${}^{-1}Q$ и Q^{-1}) обратные квазигруппы для лупы Q и проверьте, являются ли они лупами;

г) постройте лупы - главные изотопы квазигрупп ${}^{-1}Q$ и Q^{-1} и докажите, что они являются, соответственно, левой и правой лупами Боля.

10. Докажите, что все координатные лупы три-ткани W главноизотопны. Найдите изотопическое преобразование, переводящее координатную лупу $\ell(a,b)$ ткани W в координатную лупу $\ell(c,d)$ этой же ткани.

11. Докажите, что если e - единица лупы $Q(\cdot)$, то e будет левой единицей в квазигруппе Q^{-1} и правой единицей в квазигруппе ${}^{-1}Q$.

У того, кто внимательно прочел этот параграф, должно возникнуть некоторое чувство неудовлетворенности. Оно вызвано тем, что мы определили координатные квазигруппы и лупы не для всех геометрических тканей, а только для тех, которые являются абстрактными, т.е. удовлетворяют аксиомам $A1$ и $A2$ определения 14. Это "неравноправие" мы ликвидируем в § 12, введя определение локальной дифференцируемой квазигруппы.

§ 10. Фигуры замыкания на абстрактных три-тканях

На абстрактных три-тканях так же, как и на геометрических, можно рассматривать различные фигуры замыкания — шестиугольные фигуры, фигуры Томсена и др. Оказывается, что замыканию фигур определенного типа на ткани W соответствует некоторое тождество, выполняемое в координатных лупах этой ткани — главных изотонах координатной квазигруппы Q (см. § 9). В этом параграфе мы рассмотрим некоторые условия замыкания и определяемые ими типы квазигрупп и луп.

1. Шестиугольные три-ткани.

Так называются три-ткани, на которых замыкаются все шестиугольные фигуры (фигуры H), составленные из точек и линий ткани. В этом случае говорят, что на ткани выполняется условие замыкания (H) . Рассмотрим фигуру

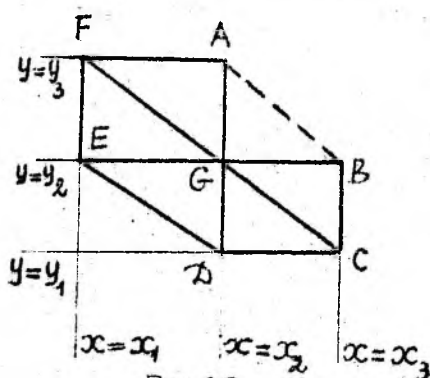


Рис.16

H , изображенную на рис.16.

Так как точки D и E лежат на линии третьего семейства, то в координатной квазигруппе Q рассматриваемой шестиугольной ткани имеет место равенство $x_1 y_2 = x_2 y_1$ (здесь, как и раньше, $x \cdot y = q(x, y)$). Из того, что точки C, G, F лежат на одной линии третьего семейства, следуют равенства $x_1 y_3 = x_2 y_2 = x_3 y_1$. Так как фигура H замыкает-

ся, то точки A и B лежат на одной линии третьего семейства, что дает соотношение $x_2 y_3 = x_3 y_2$. Поэтому условие замыкания рассматриваемой фигуры H можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_1 y_2 &= x_2 y_1 \\ x_1 y_3 &= x_2 y_2 = x_3 y_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_2 y_3 = x_3 y_2 \quad (32)$$

Поскольку на шестиугольной ткани W замыкаются все фигуры H , то запись (32) представляет собой следующее утверждение: если элементы $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ удовлетворяют

равенствам $x_1 y_1 = x_2 y_1$ и $x_1 y_3 = x_2 y_3$, то они удовлетворяют и равенству $x_2 y_3 = x_3 y_2$. Это утверждение называется условным тождеством. Итак, условию замыкания (H), выполняемому на три-ткани W , соответствует условное тождество (32), выполняемое в координатной квазигруппе q этой ткани.

2. Три-ткани T . Так называются три-ткани, на которых замыкаются все фигуры T (Томсена), т.е. выполняется условие замыкания (T) :

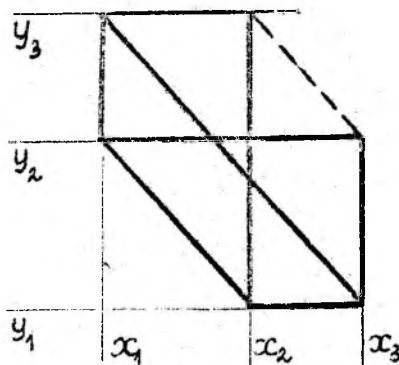


Рис.17

$$\left. \begin{aligned} x_2 y_1 &= x_1 y_2 \\ x_3 y_1 &= x_1 y_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_2 y_3 = x_3 y_2. \quad (33)$$

Здесь и далее справа от рисунка, изображающего фигуру, указывается условное тождество в квазигруппе q , соответствующее условию замыкания таких фигур на ткани W .

3. Три-ткани R . Так называются ткани, на которых замыкаются все фигуры R (Рейдемейстера):

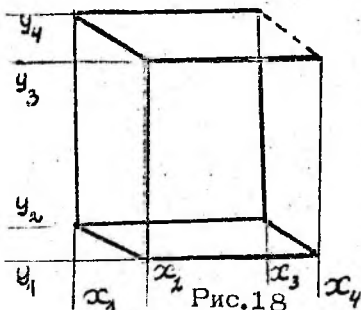


Рис.18

$$\left. \begin{aligned} x_2 y_1 &= x_1 y_2 \\ x_4 y_1 &= x_3 y_2 \\ x_1 y_4 &= x_2 y_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_3 y_4 = x_4 y_3. \quad (34)$$

4. Три-ткани B_e : на них замыкаются все фигуры B_e (левые фигуры Боля):

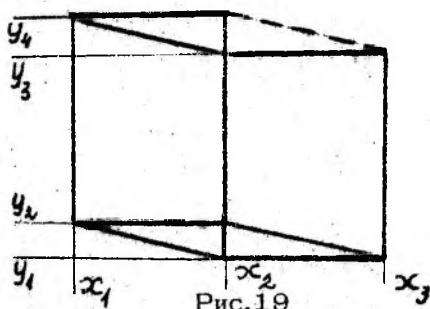


Рис.19

$$\left. \begin{aligned} x_1 y_2 &= x_2 y_1 \\ x_1 y_4 &= x_2 y_3 \\ x_2 y_2 &= x_3 y_1 \end{aligned} \right\} \rightarrow x_2 y_4 = x_3 y_3. \quad (35)$$

5. Три-ткани B_n : на них замыкаются все фигуры B_n (правые фигуры Боля):

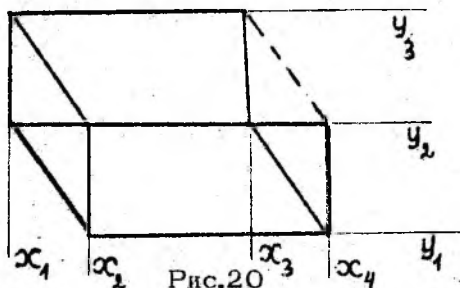


Рис.20

$$\left. \begin{aligned} x_1 y_2 &= x_2 y_1 \\ x_1 y_3 &= x_2 y_2 \\ x_3 y_2 &= x_4 y_1 \end{aligned} \right\} \rightarrow x_3 y_3 = x_4 y_2. \quad (36)$$

6. Три-ткани B_m : на них замыкаются все фигуры B_m (средние фигуры Боля):

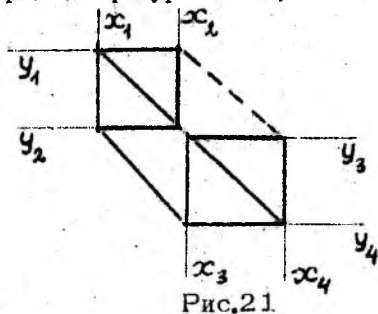


Рис.21

$$\left. \begin{aligned} x_1 y_2 &= x_3 y_4 \\ x_1 y_1 &= x_2 y_2 \\ &= x_3 y_3 = x_4 y_4 \end{aligned} \right\} \rightarrow x_1 y_1 = x_4 y_3. \quad (37)$$

Найдем теперь тождества, которые выполняются в координатных луках $\mathcal{L}(0, \delta)$ перечисленных тканей. При этом воспользуемся геометрическим изображением умножения $\odot$ в

луне $\ell(a,b)$ (см. рис.12).

ТЕОРЕМА 10. Координатные луны три-ткани R и только такой ткани являются группами.

▷ Пусть (a,b) — точка три-ткани R , которая координатизована с помощью квазигруппы q (см. § 9); $\ell(a,b)$ — координатная луна этой ткани, и u, v, w — произвольные элементы в $\ell(a,b)$ (т.е. линии третьего семейства ткани W). Построим в $\ell(a,b)$ последовательно произведения $u \circ v, (u \circ v) \circ w, v \circ w, u \circ (v \circ w)$ (см. рис.12). На рис.22 видно, что построенные линии образуют фигуру Рейдемейстера. Замыканию этой фигуры соответствует условие ассоциативности

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w) \quad (38)$$

в луно $\ell(a,b)$. Но как мы уже отметили в § 6, ассоциативная луна есть группа. Теорема доказана. ◁

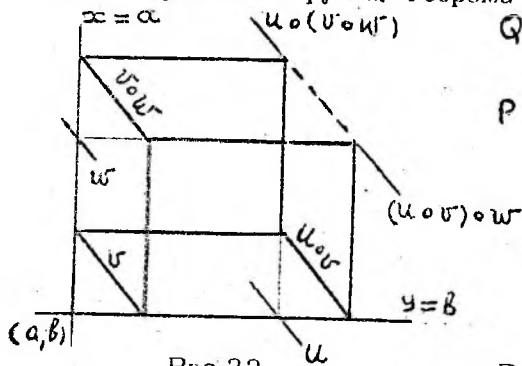


Рис.22

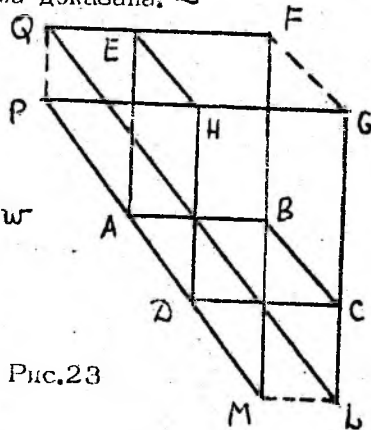


Рис.23

ТЕОРЕМА 11.

▷ Рассмотрим три-ткань T и на ней — произвольную фигуру Рейдемейстера $R = \{ABCDEFGH\}$ (рис.23), образованную линиями ткани. Докажем, что эта фигура замыкается, т.е. точки F и G лежат на одной линии третьего семейства. Построим точки P, Q, L, M так, как показано на рис.23. Так как мы рассматриваем ткань T , то на ней замыкаются фигуры $T_1 = \{OAPQEN\}$ и $T_2 = \{OBSCLMD\}$. Поэтому точки P и Q лежат на одной линии первого семейства, а точки L и M — на одной линии второго семейства (эти линии изображены пунктиром). Рассмотрим

теперь фигуру $T = \{LMPQFG\}$. Так как она должна замыкаться, то точки F и G лежат на одной линии третьего семейства, т.е. замыкается и фигура $R = \{ABCD EFGH\}$.

ТЕОРЕМА 12. Координатные лупы три-ткани T и только такой ткани являются абелевыми группами.

► Рассмотрим ткань T , и пусть $\ell(a, b)$ — ее координатная лупа. Построим в $\ell(a, b)$ произведения $u \circ v$ и $v \circ u$. Из рис.24 видно, что условие замыкания изображенной на нем фигуры эквивалентно равенству

$$u \circ v = v \circ u. \quad (39)$$

Так как на ткани замыкаются все фигуры T , то равенство (39) выполняется в лупе $\ell(a, b)$ тождественно.

По теореме 11 на рассматриваемой ткани замыкаются и фигуры R . Поэтому, в силу теоремы 10 и равенства (39) лупа $\ell(a, b)$ является абелевой группой. ◀

$x=a$

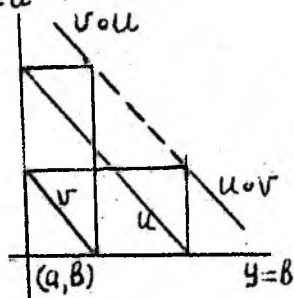


Рис.24

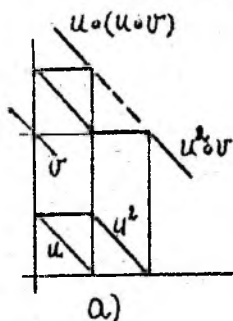
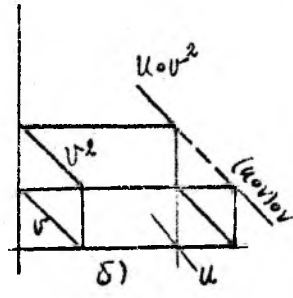


Рис.25



ТЕОРЕМА 13. Координатные лупы три-тканей B_e , и только таких тканей, являются левальтернативными лупами.

ТЕОРЕМА 14. Координатные лупы три-тканей B_r , и только таких тканей, являются правальтернативными лупами.

Доказательство этих теорем легко усмотреть из рисунков 25а и 25б.

ТЕОРЕМА 15. Координатные лупы шестиугольных тканей, и только таких тканей, моноассоциативны.

Доказательство ясно из рис.26.

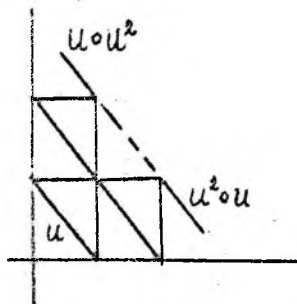


Рис.26

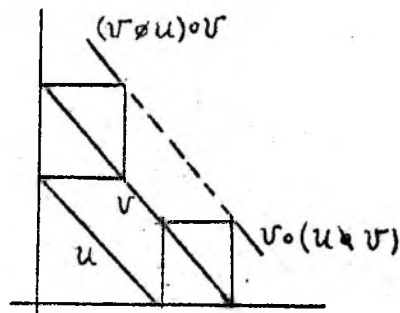


Рис.27

ТЕОРЕМА 16. В координатных лупах тканей B_m , и только таких тканей, выполняется тождество

$$(v \oslash u) \circ v = v \circ (u \& v) \quad (40)$$

► Пусть в координатных лупах ткани W выполняется тождество (40). Пользуясь рис.12, 14 и 15, построим последовательно элементы $v \oslash u$, $(v \oslash u) \circ v$, $u \& v$, $v \circ (u \& v)$. В результате получим фигуру B_m (рис.27), которая замыкается в силу условия (40). ◀

Геометрически условия замыкания B_u, B_e и B_m равноправны в следующем смысле.

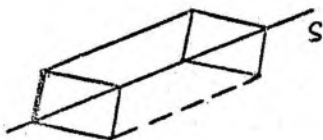


Рис.28 а

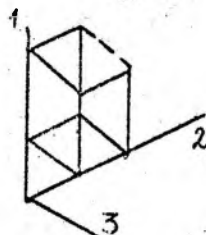


Рис.28б

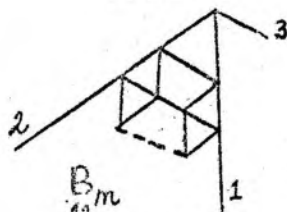


Рис.28в

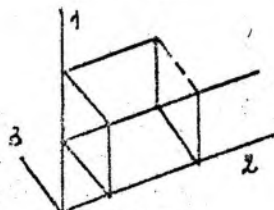


Рис.28г

Фигура Боля, изображенная на рис.28а, может быть по-разному расположена относительно линии ткани W - в зависимости от того, к какому из трех семейств линий, образующих ткань W , принадлежит ось S . Обозначения B_e , B_r и B_m для тканей Боля связаны с выбором координатной квазигруппы. Фигуры Боля, изображенные на рис.25а, б и рис.27, будут, соответственно, левой, правой и средней относительно квазигруппы Q_{12} , поэтому правильной было бы обозначать их через B_{12e} , B_{12r} , B_{12m} . На рис.29а изображена фигура B_{13r} - правая относительно квазигруппы Q_{13} , а на рис.29б - фигура B_{32e} , левая относительно квазигруппы Q_{32} .

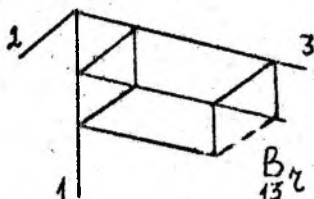


Рис.29а

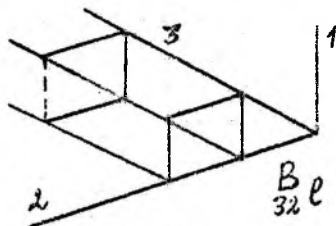


Рис.29б

Сравнивая рис.29а и 29б с рис.28б, на котором изображена фигура B_{12m} , находим следующую зависимость между условиями замыкания:

$$(B_{12m}) \iff (B_{32e}) \iff (B_{13r}) \quad (41)$$

Условия замыкания Боля (B_{13r}) , (B_{32e}) , (B_{12m}) не являются независимыми, а именно: из выполнения двух из них следует выполнение и третьего. Докажем, например, следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 17. $(B_{32e}) \wedge (B_{13r}) \implies (B_{12m})$.
(Здесь как и раньше (B_{32e}) , например, обозначает условие замыкания (B_{32e})).

► Предположим, что на ткани W замыкаются фигуры B_e и B_r . Рассмотрим фигуру $B_m = \{DEFQNUCL\}$ (см. рис.30), образованную линиями ткани W . Мы хотим доказать, что эта фигура замыкается, т.е. что точки E и U лежат на одной линии третьего семейства. Построим последовательно точки A, R, P, S, B, M . Точки P, Q, R, S, A, B, C, D образуют

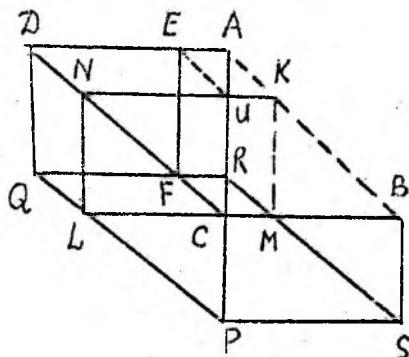


Рис.30

ется и фигура $B_m = \{DEFQNUCL\}$.

Определение 15. Три-ткани, на которых замыкаются фигуры Боля всех трех типов, называются тканями Муфанг.

Из теоремы 17 и упражнения 1 вытекает, что ткань W является тканью Муфанг, если на ней замыкаются фигуры Боля, по крайней мере, двух (из трех) типов.

Полученные в этом параграфе результаты объединим в следующей теореме

ТЕОРЕМА 18.

$$(T) \Rightarrow (R) \Rightarrow (M) \begin{cases} \Rightarrow (B_2) \\ \Rightarrow (B_m) \\ \Rightarrow (B_2) \end{cases} \Rightarrow (H) \quad (42)$$

► Первая импликация есть теорема 11. Далее, так как координатные лупы ткани R являются группами (теорема 10), то в них, в силу ассоциативности, выполняются правое и левое тождества Боля. Значит, эти лупы будут лупами Муфанг, а тогда, по теореме 18, ткань R является тканью Муфанг.

Импликации $(M) \Rightarrow (B_2)$, $(M) \Rightarrow (B_2)$ и $(M) \Rightarrow (B_m)$ следуют из определения 15. Утверждения $(B_2) \Rightarrow (H)$, $(B_2) \Rightarrow (H)$ и $(B_m) \Rightarrow (H)$ вытекают из того факта, что фигура H является частным случаем фигур B_2 , B_2 и B_m . $\triangle$

Важное замечание. Для геометрических абстрактных три-

фигуру B_2 , поэтому точки A и B лежат на одной линии третьего семейства. Обозначим пересечение этой линии с NU через K . Точки L, N, C, P, M, K, B, S образуют фигуру B_2 , поэтому K и M лежат на одной линии первого семейства. Далее, точки A, K, U, E, R, M, C, F образуют фигуру B_2 , поэтому U и E лежат на одной линии третьего семейства, а значит, замыка-

тканей все перечисленные в теореме условия замыкания эквивалентны. Это следует из того факта, что для геометрических тканей эквивалентны условия (H) и (T) (§ 4, теорема 4).

Задачи

1. Докажите: а) $(B_\ell) \S (B_m) \Rightarrow (B_\ell)$; б) $(B_\ell) \S (B_m) \Rightarrow (B_\ell)$
(Указание: см. доказательство теоремы 17).

2. Докажите, что координатные луны $\ell(a, b)$ ткани B_m обладают следующим свойством: если для некоторых элементов u, v, w из $\ell(a, b)$ имеет место соотношение $v \circ w = u \circ v$, то эта тройка элементов ассоциативна, т.е. $u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w$.

3. Постройте фигуру замыкания, соответствующую тождеству эластичности: $(xy)x = x(yx)$.

4. Постройте фигуру замыкания, соответствующую тождеству Муфанг: $(xy)(zx) = x(yz \cdot x)$.

5. Постройте фигуру замыкания для тождества^x

$$x(y(y(\dots(yx))\dots)) = y(y(\dots(yx))\dots).$$

6. Постройте фигуры замыкания, определяемые следующими тождествами: а) $x(x \cdot x^2) = x^2 \cdot x^2$; б) $x(x \cdot x^2) = (x^2 \cdot x)x$; в) $x(x^2 \cdot x) = x^2 \cdot x^2$; г) $x(x^2 \cdot x) = (x \cdot x^2)x$; д) $(x^2 \cdot x)x = x(x^2 \cdot x)$.

Докажите, что условия замыкания, определяемые этими тождествами вытекают из условия замыкания H .

7. Постройте фигуру, соответствующую тождеству ${}^{-1}x = x^{-1}$. Здесь через ${}^{-1}x$ и x^{-1} обозначены левый и правый обратные элементы для x , т.е. элементы, удовлетворяющие соотношениям ${}^{-1}xx = e$ и $xx^{-1} = e$ (см. задачу 8.9).

§ 11. Фигуры замыкания и универсальные тождества в лунах

Основной результат, полученный в § 10, состоит в том, что каждому условию замыкания на три-ткани соответствует тождество $S_1 = S_2$, выполняемое во всех

^x Это тождество, как и все, которые мы здесь рассматриваем, является уравновешенным, т.е. каждая переменная входит в правую и левую часть одинаковое число раз.

координатных лунах этой ткани. Поскольку все координатные луны ткани W между собой изотопны, то мы приходим к понятию тождества, сохраняющегося при изотопии.

Как отмечено в § 7, любое изотопическое преобразование можно представить в виде композиции главной изотопии и изоморфизма. А так как изоморфизм сохраняет любое тождество (задача 1 этого параграфа), то все дальнейшие рассуждения мы будем проводить "с точностью изоморфизма".

Определение 1.6. Множество всех лун, в которых выполняется тождество

$$S_1(u, v, \dots, w) = S_2(u, v, \dots, w), \quad (43)$$

называется **многообразием лун**, определяемым этим тождеством.

Для определенности будем считать (хотя это, вообще говоря, не обязательно), что все луны многообразия M определены на одном и том же множестве, которое мы будем, как и раньше, обозначать через Q .

Множество всех главных изотопов луны Q обозначим через $\mathcal{I}(Q)$ и назовем **орбитой луны Q** . Орбита $\mathcal{I}(Q)$ луны Q обладает тем очевидным свойством, что она будет орбитой для всех содержащихся в ней лун. Если луны Q и Q' не являются главноизотопными, то их орбиты не пересекаются. Можно сказать, что главная изотопия есть отношение эквивалентности на множестве всех лун (см. § 7), а орбита $\mathcal{I}(Q)$ — элементы фактормножества множества всех лун по этому отношению эквивалентности.

Так как координатные луны три-ткани главноизотопны (см. упр. 7.10), то орбиту $\mathcal{I}(Q)$ можно отождествить с некоторой три-тканью W , координатные луны которой суть элементы орбиты $\mathcal{I}(Q)$. При этом различным орбитам соответствуют три-ткани с неизотопными координатными квазигруппами, т.е. неэквивалентные три-ткани.

Пусть луна Q принадлежит многообразию M , определяемому тождеством (43). Тогда орбита $\mathcal{I}(Q)$ луны Q не лежит, вообще говоря, в M . На языке теории тканей это означает следующее: если на три-ткани W замыкаются фигуры, определяемые тождеством (43) в какой-либо одной из координатных лун этой ткани, то аналогичные фи-

гуры, связанные с другими координатными лупами ткани W , замыкаться, вообще говоря, не обязаны.

Например, главные изотопы коммутативной лупы не являются, вообще говоря, коммутативными лупами. Если лупа $\ell(a, b)$ коммутативна, т.е. в ней выполняется тождество

$u \circ v = v \circ u$, то на ткани W замыкаются лишь фигуры Томсена, примыкающие к линиям $x=a$ и $y=b$ этой ткани, см. рис.24. Такие фигуры будем называть координатными фигурами T лупы $\ell(a, b)$. Фигуры T , не примыкающие к указанным линиям ткани, замыкаться, вообще говоря, не будут, и координатные лупы ткани, отличные от $\ell(a, b)$, коммутативными не являются.

Если орбита $\mathcal{U}(Q)$ принадлежит многообразию M , то ей соответствует три-ткань W , в каждой координатной лупе которой выполняется тождество (43). Тогда говорят (см. § 10), что на ткани W выполняется условие замыкания, определяемое этим тождеством.

Определение 17. Тождество (43) называется универсальным, если определяемое им многообразие луп M инвариантно относительно главной изотопии, т.е. если орбита $\mathcal{U}(Q)$ каждой лупы Q многообразия M также лежит в M .

Далеко не всякое тождество универсально. Из девяти тождеств, приведенных в § 9, универсальными будут четыре: тождество ассоциативности, левое и правое тождества Боля, тождество Муфанг. Это мы докажем ниже геометрическим способом. Заметим также, что универсальность ассоциативности следует из теоремы Алберта, приведенной в § 7.

В связи с этим возникают две задачи: а) установить, является ли данное тождество $S_1 = S_2$ универсальным, и б) если тождество $S_1 = S_2$ универсальным не является, то найти такое универсальное тождество $\tilde{S}_1 = \tilde{S}_2$, из которого вытекает данное тождество. Другими словами: на многообразии, определяемом тождеством $S_1 = S_2$, требуется найти подмногообразие $\tilde{M}$, инвариантное по отношению к преобразованию изотопии.

Начнем со второй задачи. Мы опишем простой метод построения нужного универсального тождества. По теореме 9 из § 7 главная изотопия $q: Q(\cdot) \rightarrow Q(o)$ имеет вид:

$$u \circ v = R_b^{-1}(u) \cdot L_a^{-1}(v), \quad (44)$$

где a и b — некоторые фиксированные элементы множества Q . Поэтому, если в лупе $Q(\circ)$ выполняется тождество (43), то в лупе $Q(\cdot)$ выполняется тождество

$$\tilde{S}_1(a, b, u, v, \dots, w) = \tilde{S}_2(a, b, u, v, \dots, w), \quad (45)$$

которое получается из тождества (43) заменой каждого произведения $u \circ v$ по формуле (44). Например, тождество $u \circ (u \circ v) = u^2 \circ v$ перейдет в тождество

$$R_b^{-1}(u) L_a^{-1}(R_b^{-1}(u) \cdot L_a^{-1}(v)) = R_b^{-1}(R_b^{-1}(u) \cdot L_a^{-1}(u)) L_a^{-1}(v) \quad (46)$$

Определение 18. Тождество (45), справедливое относительно всех входящих в него переменных $a, b, u, \dots, w$, называется производным от тождества (43).

ТЕОРЕМА 19. Всякое производное тождество является универсальным.

Это утверждение непосредственно следует из определения производного тождества. Более детально — смысл теоремы разъясняется в выражениях 2-4.

Производное тождество (45) является решением второй задачи: во-первых, как мы только что отметили, оно универсально, а во-вторых, из него вытекает исходное тождество (43), если положить $a = b = e$.

Обратимся теперь к первой из сформулированных выше задач. Мы укажем сейчас геометрический способ доказательства универсальности тождества, вытекающий из вышесказанного: тождество $S_1 = S_2$ является универсальным тогда и только тогда, когда из замыкания соответствующих ему координатных фигур Φ в какой-либо одной координатной лупе три-ткани следует замыкание на ткани всех фигур Φ .

ТЕОРЕМА 20. Тождество ассоциативности $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$ является универсальным.

▷ Пусть в координатной лупе $\ell(a, b)$ ткани W выполняется тождество ассоциативности. Это значит, что на три-ткани W замыкаются все достаточно малые координатные фигуры R , связанные с лупой $\ell(a, b)$ (см. рис.22).

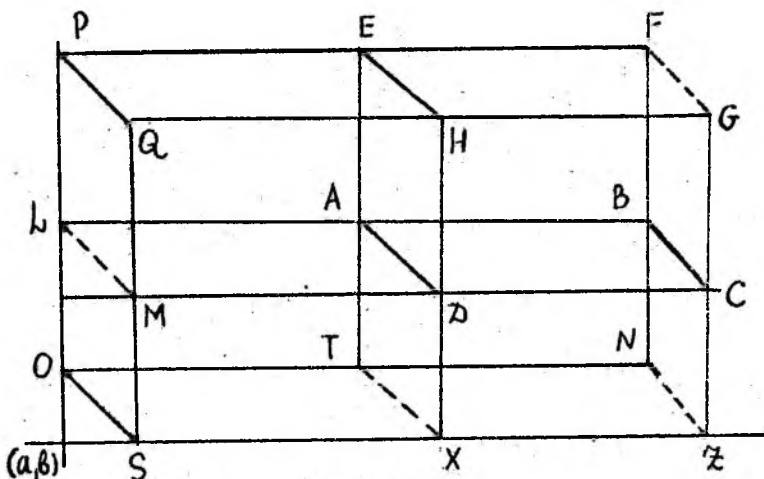


Рис.31

Рассмотрим теперь произвольную некоординатную фигуру $R = \{ABCDEF GH\}$, образованную линиями ткани W (рис.31). Докажем, что эта фигура замыкается, т.е. точки F и G лежат на одной линии третьего семейства.

Построим точки P, Q, S, T, X, L, M, N как показано на рис.31. Так как координатные фигуры R замыкаются, то будет замыкаться фигура $R_1 = \{OTXSPENQ\}$. Это означает, что точки T и X лежат на одной линии третьего семейства. Рассмотрим теперь координатную фигуру $R_2 = \{OTXSLAM\}$. Так как она тоже замыкается, то точки L и M также лежат на одной линии третьего семейства.

Из замыкания координатной фигуры $R_3 = \{ONZSLBCM\}$ следует, что на одной линии третьего семейства лежат точки N и Z . Наконец, из замыкания фигуры $R_4 = \{ONZSPFGQ\}$ получим, что точки F и G лежат на одной линии третьего семейства, а значит замыкается и фигура $R = \{ABCDEF GH\}$. $\triangleleft$

Рассмотрим далее тождество

$$u \circ (v \circ w) = v \circ (u \circ w). \quad (47)$$

ТЕОРЕМА 21. Луны, в которых выполняется тождество (47), и только такие луны, являются коммутативными группами.

► **Необходимость.** Пусть ℓ — абелева группа; тогда в ней выполняются тождества $u \circ v = v \circ u$ и $u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w$,

семейства лежат точки S_2 и N_2 .

Построив точку C_1 , мы получим еще одну полукоординатную фигуру $T_3 = \{Q_2, C_1, L_2, S_1, F\}$, откуда имеем, что точки N_1 и S_1 тоже лежат на одной линии третьего семейства.

Рассмотрим, наконец, полукоординатную фигуру $T_4 = \{S_2, B, C_1, L_2, S_1, F\}$. Из ее замыкания выводим, что точки B и E лежат на одной линии третьего семейства. Следовательно, фигура $T = \{A, B, C, D, E, F\}$ замыкается. $\triangleleft$

ТЕОРЕМА 23. Координатные лупы средней ткани Боя характеризуются одним из следующих универсальных тождеств:

$$w \circ ((u \circ v) \circ w) = (w \circ v) \circ (u \circ w), \quad (48)$$

$$(w \circ v) \circ (u \circ w) = (w \circ (u \circ v)) \circ w. \quad (49)$$

► Доказательство проведем для первого из этих тождеств, для второго все протекает аналогично.

Координатная фигура, соответствующая тождеству (48), изображена на рис.34, и представляет собой "полукоординатную" фигуру B_m .

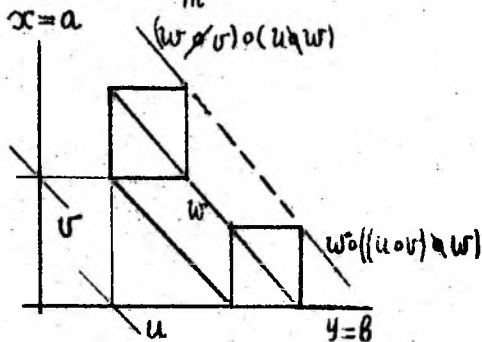


Рис.34

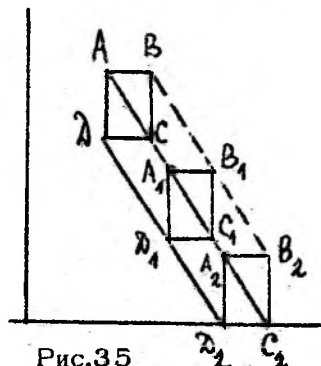


Рис.35

Рассмотрим теперь произвольную фигуру $B_m = \{A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2\}$, образованную линиями ткани W (см. рис.35), и докажем, что она замыкается, т.е. что точки B и B_1 лежат на одной линии третьего семейства.

Проведем построения, указанные на рис.35, и рассмотрим полукоординатную фигуру $B'_m = \{A, B, C, A_1, A_2, B_2, C_2\}$. Так как эта фигура замыкается, то точки B_1 и B_2 лежат на одной линии

третьего семейства. Такой же вывод получим и для точек B и B_2 , рассмотрев фигуру $B_m^2 = \{ABCD A_2 B_2 C_2\}$. Следовательно, все три точки B, B_1, B_2 лежат на одной линии третьего семейства, т.е. фигура $B_m = \{ABCD A_1 B_1 C_1\}$ замыкается.

ТЕОРЕМА 24. Координатные лупы левой ткани Боля характеризуются универсальным тождеством.

$$(v \circ (u \circ v)) \circ w = v \circ (u \circ (v \circ w)) \quad (50)$$

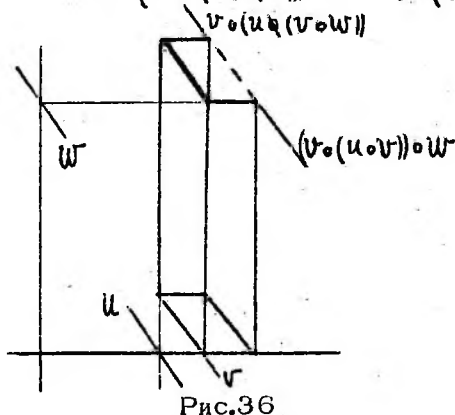


Рис.36

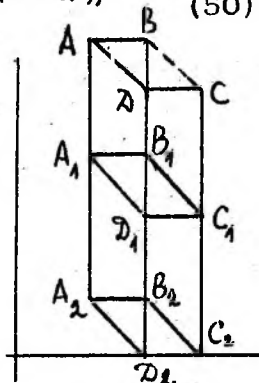


Рис.37

► На рис.36 изображена полукоординатная фигура B_2 , определенная тождеством (50). Доказательство теоремы протекает точно так же, как и предыдущей, это видно из сравнения рисунков 35 и 37. ◀

Аналогично доказывается и теорема 25.

ТЕОРЕМА 25. Координатные лупы правой ткани Боля характеризуются универсальным тождеством

$$((u \circ v) \circ w) \circ v = u \circ ((v \circ w) \circ v). \quad (51)$$

Универсальные тождества (50) и (51), характеризующие левые и правые ткани Боля, записываются с помощью трех операций: $\circ$, $\circledast$ и $\circledcirc$. Естественно поставить вопрос: не существует ли более простых универсальных тождеств, характеризующих ткани Боля, например, тождеств, содержащих только одну из указанных операций? Ответ будет положительным – ткани Боля потому так и называются, что их можно охарактеризовать с помощью тождеств Боля, приведенных в § 8.

► Пусть все координатные луны ткани W являются левыми лунами Боля, т.е. лунами с тождеством (см. § 8):

Так как левые дупы Боля левоальтернативны (см. упр.8.2), то, в силу теоремы 13, на этой ткани замыкаются все левые фигуры Боля.

Рис. 38

- 63 -

лежат на одной линии третьего семейства, что эквивалентно равенству (52). $\triangleleft$

Аналогично доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 27. Координатные лупы правых три-тканей Боля, и только таких тканей, являются правыми лупами Боля.

Известно, что левое и правое тождества Боля являются универсальными (это доказано, например, в книге [3]). Можно доказать универсальность тождеств Боля тем же методом, который мы применяем в этом параграфе: вывести замыкание произвольной фигуры Боля на ткани W из замыкания координатных фигур одной координатной лупы этой ткани (задача 8).

Поскольку оба универсальные тождества (50) и (52) определяют одно и то же многообразие луп — левых луп Боля, то они эквивалентны. Эквивалентность этих тождеств можно доказать и непосредственно как алгебраически, преобразовав путем введения новых переменных одно из тождеств в другое, так и геометрически, показав, что из замыкания координатных фигур, изображенных на рис.38, следует замыкание полукординатных фигур, изображенных на рис.36, и обратно (см. задачу 9). То же самое можно сказать о правом тождестве Боля и тождестве (51).

Как отмечено в § 10, ткань W является тканью Муфанг, если на ней выполняются условия замыкания B_L и B_R . Поэтому из теорем 26 и 27 следует, что в каждой координатной лупе ткани Муфанг выполняются левое и правое тождества Боля. Отсюда (см. задачу 8.9) получаем, что каждая координатная лупа ткани Муфанг является лупой Муфанг, т.е. в ней выполняются тождества Муфанг (см. задачу 8.5). При этом из универсальности левого и правого тождеств Боля легко вытекает, что каждое из тождеств Муфанг также является универсальным (упр.8).

Из результатов этого параграфа ясно, что производное тождество не обладает, вообще говоря, свойством минимальности, т.е. можно найти эквивалентное ему универсальное тождество, содержащее меньшее число переменных. Например, если построить тождество, производное от тождества левой альтернативности, характеризующее левые ткани Боля, то оно будет содержать четыре переменные; но, с другой стороны,

ны, левое тождество Боля, содержащее только три переменные, также характеризует эти ткани.

Задачи и упражнения

1. Докажите, что любое тождество сохраняется при изоморфизме.

2. Постройте фигуру замыкания, соответствующую произвольному тождеству (46), и докажите, что это тождество универсально.

Решение. Пусть лупа $Q(\cdot)$, в которой выполняется тождество (46), является координатной лупой $\ell(e, e)$ ткани W . Выберем произвольно элементы a, b, u, v и, пользуясь рисунками 12, 14, 15, построим последовательно элементы $x = R_b^{-1}(u)$, $y = L_a^{-1}(v)$, xy , $z = L_a^{-1}(xy)$, xz , затем $t = L_a^{-1}(u)$, xt , $R_b^{-1}(xt) = s$, sy , входящие в тождество (46) (см. рис.39):

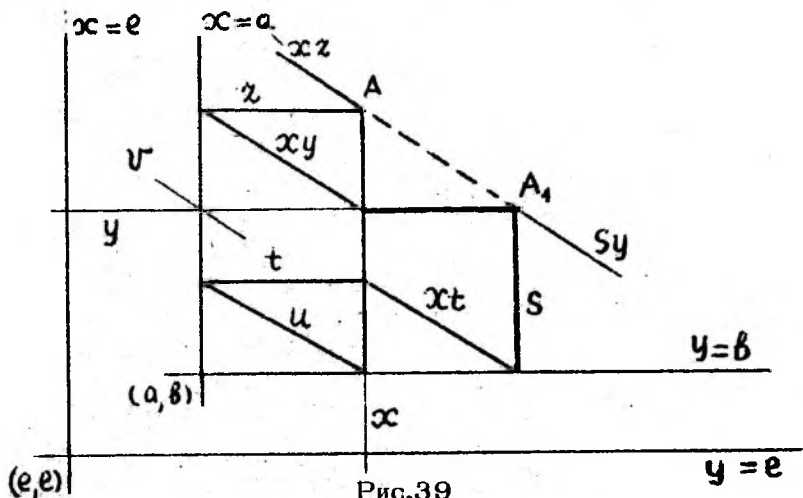


Рис.39

В силу тождества (46) точки A и A_1 лежат на одной линии третьего семейства, так что замыкается левая фигура Боля $B_e = \{ABCSAA_1A_1\}$, являющаяся координатной фигурой для лупы $\ell(a, b)$.

Если в тождестве (46) менять переменные u и v получим все координатные фигуры B_e для лупы $\ell(a, b)$.

Давая различные значения переменным a и b , мы получим все главные изотопы лупы $Q(\cdot)$. В частности, при $a=e$ и $b=e$ тождество (46) дает $(uu)v = u(uv)$.

Таким образом, на рассматриваемой ткани W замыкаются все фигуры B_e . Отсюда вытекает, что тождество (46) будет выполняться в каждой координатной лупе ткани W , т.е. является универсальным.

3. Найдите тождества, производные от тождеств коммутативности, ассоциативности, правой альтернативности, моноассоциативности. Постройте соответствующие фигуры замыкания.

4. Докажите, что: а) производному тождеству (45) соответствуют фигуры замыкания того же типа, что и исходному тождеству (43); б) если в производном тождестве (47) положить $a=b=e$, то получится исходное тождество (43).
Указание: см. задачи 2,3.

5. Докажите, что тождество универсально тогда и только тогда, когда оно эквивалентно производному от него тождеству.

6. Докажите, что тождество (49) и тождество $(yz)x = (yx)z$ универсальны. Какие фигуры замыкания определяют второе из них?

7. Сделайте рисунки, поясняющие доказательство теорем 26 и 28.

8. Докажите универсальность тождеств B_e и B_λ и тождеств Муфанг (см. задачу 8.5).

9. Докажите эквивалентность двух приведенных в § 11 условий замыкания Боля (B_e) (или (B_λ)).

10. Докажите, что если в координатной лупе $\ell(a,b)$ ткани W выполняется тождество $^{-1}u = u^{-1}$, то на ткани замыкаются все такие шестиугольные фигуры, центры которых находятся в точке (a,b) .

11. Докажите, что на три-ткани 1.5 замыкаются только те шестиугольные фигуры, центры которых расположены на прямой $yx + y = 0$. Выведите отсюда, имея в виду упражнение 4.2, что тождество $^{-1}u = u^{-1}$ не является универсальным.

12. Запишите тождество, производное от тождества $^{-1}u = u^{-1}$.

13. Проверьте, являются ли эквивалентными тождества, производные от тождеств $^{-1}u = u^{-1}$ и $u^2 \cdot u = u \cdot u^2$.

14. Докажите, что в левой (правой) лупе Боля выполня-

ется тождество $x(x^n y) = x^{n+1} y (xy \cdot y^n = xy^{n+1})$. Указание: постройте фигуру, соответствующую данному тождеству, и покажите, что она замыкается при любом n .

Глава III. ЛОКАЛЬНЫЕ ГЛАДКИЕ КВАЗИГРУППЫ И ЛУПЫ

§ 12. Локальные гладкие квазигруппы и лупы, определяемые геометрической три-тканью

В § 9 мы показали, как с абстрактной три-тканью W связана квазигруппа q -координатная квазигруппа этой ткани. Если ткань W является абстрактной геометрической тканью, то ее координатная квазигруппа q задается уравнением ткани, которое мы теперь будем записывать в виде

$$z = q(x, y). \quad (53)$$

Напомним, что уравнение (53) связывает параметры линий ткани $x = \text{const}, y = \text{const}$ и $z = \text{const}$, проходящих через одну точку. Например, параллельная три-ткань W_0 может быть задана уравнением $z = x + y$, которое, с другой стороны, определяет абелеву группу - координатную квазигруппу ткани W_0 . При этом в § 9 мы отметили, что геометрическая три-ткань может не удовлетворять всем аксиомам абстрактной ткани, и поэтому определить на ней координатную квазигруппу нельзя. Поясним это еще раз на следующем простейшем примере. Пусть W'_0 - параллельная три-ткань, рассматриваемая не на всей плоскости, а внутри круга K , заданного уравнением $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Уравнения семейств прямых, образующих ткань W'_0 , имеют вид (сравни с формулами (9)):

$$\lambda_1: x = c_1, c_1 \in (0, 2) \equiv X; \lambda_2: y = c_2, c_2 \in (-1, 1) \equiv Y;$$

$$\lambda_3: x + y = c_3, c_3 \in (\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1) \equiv Z.$$

Так как не всякие две линии $x = c_1$ и $y = c_2$ семейств λ_1 и λ_2 ткани W'_0 пересекаются внутри круга K , то функция $q(x, y) = x + y$ определена не для всех значений переменных x и y , где $x \in X, y \in Y$. Однако, если какие-либо три линии $x = a, y = b, z = c$ ткани W'_0 пересекаются в точке (a, b) , лежащей внутри круга K , то:

а) для любой окрестности $U_c, c \in U_c \subset Z$, существуют окрестности U_a и $U_b, a \in U_a \subset X, b \in U_b \subset Y$, такие, что

для любых значений x и y , где $x \in U_a, y \in U_b$, существует единственное значение $z (z \in U_c)$, удовлетворяющее уравнению $z = q(x, y)$;

б) для любой окрестности $U_a, a \in U_a \subset X$, существуют окрестности U_b и $U_c, b \in U_b \subset Y, c \in U_c \subset Z$, такие, что для любых значений y и z , где $y \in U_b, z \in U_c$, существует единственное значение $x (x \in U_a)$, удовлетворяющее уравнению $z = q(x, y)$;

в) для любой окрестности $U_b, b \in U_b \subset Y$, существуют окрестности U_a и $U_c, a \in U_a \subset X, c \in U_c \subset Z$, такие, что для любых значений x и z , где $x \in U_a, z \in U_c$, существует единственное значение $y (y \in U_b)$, удовлетворяющее уравнению $z = q(x, y)$.

Свойства а) - в) выполняются не только для параллельной ткани W'_0 , но и для любой геометрической ткани, заданной уравнением (53), где $q: X \times Y \rightarrow Z$ - гладкая функция, удовлетворяющая в каждой точке области определения условиям

$$\frac{\partial q}{\partial x} \neq 0, \quad \frac{\partial q}{\partial y} \neq 0. \quad (54)$$

(см. § 3, 12). Этот факт вытекает из известной теоремы о неявной функции.

Определение 19. Пусть X, Y, Z - открытые множества арифметического пространства R^2 и $q: X \times Y \rightarrow Z$ - гладкая функция, удовлетворяющая в каждой точке области определения условиям а) - в). Тогда q называется локальной гладкой трехбазисной квазигруппой размерности n .

Поэтому уравнение (53) определяет, с одной стороны, геометрическую три-ткань W , а с другой - локальную трехбазисную квазигруппу q размерности 1, которая называется координатной квазигруппой ткани W .

Каждая из окрестностей U_a, U_b, U_c , о которых шла речь выше, не совпадают, вообще говоря, со всей областью определения соответствующего переменного. Если же $U_a \equiv X, U_b \equiv Y, U_c \equiv Z$, то функция q удовлетворяет определению 9 из § 6, т.е. является квазигруппой, а для определяемой ею три-ткани W будут выполняться все аксиомы абстрактной три-ткани.

Если три семейства кривых на плоскости, образующие три-

ткань W , задаются уравнениями $\varphi_\alpha(x, y) = u_\alpha$ (см. § 3), то уравнение, связывающее параметры u_α линий ткани, проходящих через одну точку, имеет вид:

$$\mathcal{F}(u_1, u_2, u_3) = 0 \quad (55)$$

и называется уравнением ткани W . Выражая из этого уравнения одну из переменных через две другие, взятые в определенном порядке, мы найдем шесть парастрофных между собой локальных трехбазисных квазигрупп $q_{\alpha\beta}$ — локальных координатных квазигрупп ткани W (см. конец § 9). Уравнение (53) определяет один из парастрофов, а именно, $q = q_{12}$.

Отношение эквивалентности, введенное в § 3 для три-тканей, переносится и на их локальные координатные квазигруппы: локальные диффеоморфизмы

$$u_\alpha = \theta_\alpha(\tilde{u}_\alpha), \quad (56)$$

переводящие функцию $\mathcal{F}(u_1, u_2, u_3)$ ткани W в функцию $\tilde{\mathcal{F}}$, эквивалентной ей ткани $\tilde{W}$ (см. § 3), можно рассматривать как изотопическое отображение локальной координатной квазигруппы $q_{\alpha\beta}$ ткани W на локальную координатную квазигруппу $\tilde{q}_{\alpha\beta}$ ткани $\tilde{W}$.

В частности, если $\theta_3 = id$, то тройка отображений (θ_1, θ_2, id) определяет главную изотопию квазигруппы $q_{\alpha\beta}$ на квазигруппу $\tilde{q}_{\alpha\beta}$.

Если в определении 19 множества X , Y и $\tilde{X}$ совпадают, то говорят, что q — локальная гладкая квазигруппа, определенная на множестве X .

Определение 20. Пусть X — область в R^2 , в которой задана локальная гладкая квазигруппа q . Если в области X существует элемент e , такой, что при любых x , для которых определены значения $q(x, e)$ и $q(e, x)$, выполняется равенство $q(x, e) = q(e, x) = e$, то q называется гладкой локальной луной, а элемент e называется единицей.

Точно так же, как мы это делали в § 9 для произвольных квазигрупп, можно с помощью сдвигов строить главные изотопы локальных координатных квазигрупп ткани W , которые будут локальными лунами. Схема умножения в координатной луне $\ell(a, b)$ ткани W_0 , приведенная на рис. 12, годится и

для координатных луп $\ell(a, b)$ любой геометрической ткани; нужно только иметь в виду, что элементы u и v должны быть достаточно близкими к нейтральному элементу $e = q(a, b)$.

На локальных квазигруппах и лупах можно рассматривать различные тождества, в том числе и универсальные. Однако не всякое утверждение, справедливое для квазигрупп или луп, будет справедливо для локальных квазигрупп или луп. Например, ассоциативная локальная квазигруппа, или даже лупа, не является группой (см. задачу 6). Гладкая локальная ассоциативная лупа называется локальной группой Ли, или группускулой Ли.

В заключение найдем разложение в ряд уравнений одномерной локальной координатной лупы ткани W .

Пусть p — произвольная точка области D , в которой три-ткань W задана уравнением (53). Сделаем замену параметра вида (56) для каждого из семейств линий, определяющих ткань W , таким образом, чтобы линии этой ткани, проходящие через точку p , имели параметр, равный нулю. Тогда $q(0, 0) = 0$ и, следовательно (см. § 7), единица координатной лупы $\ell(0, 0)$, связанной с точкой p , будет иметь координату, также равную нулю.

Обозначим, как и в § 7, произведение в лупе $\ell(0, 0)$ через $u \circ v$, а координаты элементов u и v теми же буквами u и v . Пусть $q \in C^3$, т.е. функция q трижды непрерывно дифференцируема. Тогда координату w элемента $w = u \circ v$ можно разложить по формуле Тейлора по степеням переменных u и v :

$$w = a_0 + a_1 u + a_2 v + a_{11} u^2 + 2a_{12} uv + a_{22} v^2 + \\ + \frac{1}{2} (a_{111} u^3 + 3a_{112} u^2 v + 3a_{122} uv^2 + a_{222} v^3) + o(p^3),$$

где $o(p^3)$ — члены порядка малости выше трех относительно p , $p = \max(|u|, |v|)$. Но так как у нас в силу сделанного выбора параметров должны выполняться соотношения $w(u, 0) = u$, $w(0, v) = v$, то разложение функции w имеет следующий вид:

$$w = u + v + a uv + \frac{1}{2} (\lambda u^2 v + \mu uv^2) + o(p^3). \quad (57)$$

Специфика этого разложения заключается в том, что в нем отсутствуют слагаемые степени выше первой, содержащие только переменную u или только переменную v .

Упражнения и задачи

1. Используя задачу 3.5, найдите уравнение локальной координатной квазигруппы q_i и всех ее парастрофов для тканей 1.5, 1.6 а) - д).

2. Найдите локальные координатные квазигруппы $q_{\alpha\beta}$ для ткани 6.5. Найдите условия, при которых эти квазигруппы будут однобазисными.

3. Проверьте, выполняются ли аксиомы абстрактной три-ткани на геометрической ткани, заданной уравнением $z = x + y$, внутри квадрата $|x| < 1, |y| < 1$?

4. Постройте схемы умножения, аналогичные приведенной на рис.12, для координатных луп, связанных со всеми парастрофами координатной квазигруппы q_i .

5. Пусть $\ell(a, b)$ - координатная лупа ткани W . Используя приведенную на рис.12 схему умножения, решите в лупе $\ell(a, b)$ уравнение $x^2 = c$. Указание: см. рис.4.

6. Докажите, что уравнение $z = x + y$, где $x > 0, y > 0$, определяет гладкую локальную коммутативную и ассоциативную квазигруппу. Будет ли эта локальная квазигруппа локальной лупой? Ответьте на этот вопрос для локальной квазигруппы $z = x + y$, где $x > -1, y > -1$.

7. Найдите парастрофы локальной дифференцируемой квазигруппы 6.7. Докажите, что эта квазигруппа изотонна локальной лупе, рассмотренной в задаче 6.

8. Докажите, что в локальной группе Ли для каждого элемента x , близкого к единице e , существует обратный элемент x^{-1} , такой, что $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

9. Запишите члены четвертого порядка в разложении (57). Вычислите с точностью до членов пятого порядка координаты произведений $(xy)z$ и $x(yz)$.

10. Пользуясь разложением (57), покажите, что для локальной ассоциативной лупы (т.е. локальной группы Ли) $\lambda = \mu$.

11. Пусть $^{-1}uu = uu^{-1} = e$. Напишите первые три члена разложения в ряд координат элементов ^{-1}u и u^{-1} по степеням u .

§ 13. Многомерные локальные квазигруппы и луны

Рассмотрим γ -мерную локальную гладкую квазигруппу $q: X \times Y \rightarrow Z$. Пусть $x(x^i) \in X$, $y(y^i) \in Y$, $z(z^i) \in Z$, где $i, j, k = 1, \gamma$. Если $q(x, y) = z$, то координаты z^i точки z будут гладкими функциями от переменных x^i и y^i : $z^i = q^i(x^1, x^2, \dots, x^\gamma, y^1, y^2, \dots, y^\gamma)$. Эти равенства будем кратко записывать так:

$$z^i = q^i(x^j, y^k). \quad (58)$$

При этом для функций q^i в каждой точке области определения будут выполняться условия

$$J_1 \equiv \det\left(\frac{\partial q^i}{\partial x^j}\right) \neq 0, \quad J_2 \equiv \det\left(\frac{\partial q^i}{\partial y^k}\right) \neq 0, \quad (59)$$

в силу которых уравнения (58) локально разрешимы относительно переменных x^i и y^i .

Примеры многомерных гладких локальных квазигрупп и луп мы получим, ограничив области определения переменных x^i и y^i для квазигрупп и луп, приведенных в задачах 6.4, 6.8, 7.6, 8.15, 8.16, 9.9.

Запишем разложение в ряд уравнений многомерной локальной гладкой луны Q в окрестности ее единицы e . Пусть луна Q определяется уравнениями (58), причем единица e имеет нулевые координаты. Тогда, принимая во внимание те же соображения, которыми мы руководствовались при выводе формулы (57), получим следующие разложения для функций z^i :

$$z^i = x^i + y^i + \lambda_{j,k}^i x^j y^k + \frac{1}{2} (\mu_{j,k\ell}^i x^j x^k y^\ell + \nu_{j,k\ell}^i x^j y^k y^\ell) + o(p^3) \quad (60)$$

Здесь $o(p^3)$ — величина более высокого порядка малости, чем p^3 , $p = \max(|x^i|, |y^i|)$, и, как обычно, подразумевается, что по дважды повторяющимся индексам происходит суммирование, например: $\lambda_{j,k}^i x^j y^k = \sum_{j,k} \lambda_{j,k}^i x^j y^k$.

Разложение (57) получается из разложения (60) при $\gamma = 1$. Здесь, как и в разложении (57), отсутствуют слагаемые, содержащие только переменные x^i или только переменные y^i (начиная с членов второго порядка).

Совокупность слагаемых третьего порядка $M_{jke}^i x^j x^k y^e$ представляет собой квадратичную форму от переменных x^i , поэтому величины M_{jke}^i удовлетворяют условиям симметрии $M_{jke}^i = M_{kje}^i$. По этой же причине $V_{jke}^i = V_{jek}^i$.

Разложение (60) назовем полуканоническим разложением уравнений гладкой локальной луны Q .

Для многомерных локальных квазигрупп, как и для одномерных, вводится понятие изотопии. При этом, как и в § 7, изотопическое отображение квазигруппы $q: X \times Y \rightarrow Z$ на квазигруппу $\tilde{q}: \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Z}$ задается тремя локальными диффеоморфизмами α, β, γ , где $\alpha: X \rightarrow \tilde{X}$, $\beta: Y \rightarrow \tilde{Y}$, $\gamma: Z \rightarrow \tilde{Z}$.

При произвольном изотопическом преобразовании луны Q вид уравнений (60), вообще говоря, изменится. Назовем допустимыми преобразованиями такие изотопические преобразования, которые сохраняют вид разложения (60), т.е. переводят луну Q в луну, единица которой также имеет нулевые координаты. Как следует из задачи 7.3, такие преобразования будут изоморфизмами, и поэтому отображения α, β и γ совпадают между собой. При этом

$$\alpha^i(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^j} \right|_{x^i=0} = A_j^i, \quad \det(A_j^i) \neq 0. \quad (61)$$

Пользуясь допустимыми преобразованиями, можно добиться того, что величины λ_{jk}^i , входящие в уравнения (60), будут удовлетворять условию

$$\lambda_{jk}^i = -\lambda_{kj}^i. \quad (62)$$

Подробное доказательство этого факта имеется в пособии [4]. Там же показано, как "усовершенствовать" разложение (60) и получить так называемое каноническое разложение уравнений гладкой локальной луны.

Упражнения и задачи

1. Запишите члены четвертого порядка в разложении (60).
2. Докажите, что при преобразованиях

$$\tilde{x}^i = A_j^i x^j, \quad \tilde{y}^i = A_j^i y^j, \quad \tilde{z}^i = A_j^i z^j, \quad \det(A_j^i) \neq 0.$$

коэффициенты разложения (60) меняются по тензорному закону.

3. Покажите, что уравнения луп, рассмотренных в задачах 6.4, 6.8, 9.9А, представляют собой полуканонические разло-

жения. Найдите для каждого из них коэффициенты λ_{jk}^i , μ_{jke}^i , ν_{jke}^i .

4. Найдите полуканонические разложения для луп 7.6, 8.15, 8.16, 9.9В.

Найдем разложение для лупы 7.6, заданной уравнениями (25). Для этого запишем разложения (в окрестности нуля) функций e^{x^4} и e^{-y^4} и подставим их в уравнения (25). Имеем:

$$e^{x^4} = 1 + x^4 + \frac{1}{2}(x^4)^2 + \frac{1}{6}(x^4)^3 + o(p^3),$$

$$e^{-y^4} = 1 - y^4 + \frac{1}{2}(y^4)^2 - \frac{1}{6}(y^4)^3 + o(p^3),$$

$$z^1 = x^1 e^{-y^4} + y^1 e^{x^4} = x^1 + y^1 + y^1 x^4 - x^1 y^4 + \frac{1}{2}(x^4)^2 y^1 + \frac{1}{2} x^1 (y^4)^2 + \dots$$

Аналогично вычисляем z^2 и z^3 .

5. Найдите полуканоническое разложение для лупы Q, заданной уравнениями

$$z^1 = x^1 e^{y^4} + y^1, \quad z^2 = x^2 e^{y^4} + y^2, \quad (63)$$

$$z^3 = x^3 + y^3 e^{x^4} + x^1 y^2 - x^2 y^1, \quad z^4 = x^4 + y^4.$$

Докажите, что эта лупа является лупой Муфанг (см. § 8). Найдите все парастрофы этой лупы и проверьте, являются ли они лупами Муфанг (см. задачу 9.11).

§ 14. Основные тензоры локальной гладкой лупы

Пусть $Q(\cdot)$ — локальная гладкая лупа, вообще говоря не коммутативная и не ассоциативная, и x и y — два элемента из $Q(\cdot)$. Так как полуканоническое разложение уравнений лупы $Q(\cdot)$ имеет вид (60), то

$$(xy)^i = x^i + y^i + \lambda_{jk}^i x^j y^k + o(p^2),$$

$$(yx)^i = y^i + x^i + \lambda_{jk}^i y^j x^k + o(p^2).$$

Отсюда находим, что

$$(xy)^i - (yx)^i = 2\alpha_{jk}^i x^j y^k + o(p^2), \quad (64)$$

где введено обозначение

$$\alpha_{jk}^i = \lambda_{[jk]}^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\lambda_{jk}^i - \lambda_{kj}^i). \quad (65)$$

Если элементы x, y близки к единице $e(0, 0, \dots, 0)$ луны $Q(\cdot)$, то величины $|x^i|$ и $|y^i|$ достаточно малы, и поэтому билинейные формы $2\alpha_{jk}^i x^j y^k$ определяют главные части разложений (64).

Относительно допустимых преобразований вида (61) совокупность величин α_{jk}^i образует тензор (задача 14.9), который называется первым основным тензором или тензором кручения локальной гладкой луны $Q(\cdot)$. Из (65) видно, что тензор

α_{jk}^i кососимметричен по нижним индексам: $\alpha_{jk}^i = -\alpha_{kj}^i$.

Пусть луна $Q(\cdot)$ коммутативна, т.е. в ней выполняется тождество $xy = yx$. Тогда $(xy)^i = (yx)^i$ и из (64) имеем

$\alpha_{jk}^i x^j y^k = 0$. Так как эти равенства должны выполняться тождественно относительно величин x^i и y^i , то отсюда получаем, что $\alpha_{jk}^i = 0$. Таким образом, можно сказать, что тензор кручения луны $Q(\cdot)$ определяет главную часть отклонения от коммутативности в этой луне.

Используя полуканоническое разложение (60), вычислим координаты элементов $w = (xy)z$ и $w' = x(yz)$, $x, y, z \in Q$. В результате получим:^{*}

$$\begin{aligned} w^i &= x^i + y^i + z^i + \lambda_{jk}^i (x^j y^k + x^j z^k + y^j z^k) + (\lambda_{me}^i \lambda_{jk}^m + \mu_{jke}^i) x^j y^k z^e \\ &+ \frac{1}{2} \mu_{jke}^i (x^j x^k y^e + x^j x^k z^e + y^j y^k z^e) + \frac{1}{2} \nu_{jke}^i (x^j y^k y^e + x^j z^k z^e + y^j z^k z^e) + o(\rho^3); \\ w'^i &= x^i + y^i + z^i + \lambda_{jk}^i (x^j y^k + x^j z^k + y^j z^k) + (\lambda_{ke}^i \lambda_{jm}^k + \nu_{jke}^i) x^j y^k z^e \\ &+ \frac{1}{2} \mu_{jke}^i (y^j y^k z^e + x^j x^k y^e + x^j x^k z^e) + \frac{1}{2} \nu_{jke}^i (y^j z^k z^e + x^j y^k y^e + x^j z^k z^e) + o(\rho^3), \end{aligned}$$

где $\rho = \max(|x^i|, |y^i|)$. Отсюда находим, что

$$w^i - w'^i = \beta_{jke}^i x^j y^k z^e + o(\rho^3), \quad (66)$$

^{*} Выкладки мы опускаем, они имеются, например, в пособии [6].

где обозначено

$$\beta_{jke}^i = \mu_{jke}^i - \nu_{jke}^i + \lambda_{jk}^m \lambda_{me}^i - \lambda_{ke}^m \lambda_{jm}^i. \quad (67)$$

Совокупность величин β_{jke}^i также образует тензор, который называется вторым основным тензором или тензором кривизны локальной аналитической луны $Q(\cdot)$.

Выясним теперь алгебраический смысл тензора кривизны. Допустим, что луна $Q(\cdot)$ ассоциативна (т.е. является группой, см. § 7). Тогда $w = w' \Rightarrow w^i = w'^i$ и из (66) получаем, что $\beta_{jke}^i = 0$. Если же луна $Q(\cdot)$ не является ассоциативной, то тензор β_{jke}^i , вообще говоря, отличен от нуля. Из формул (66) следует, что тензор β_{jke}^i определяет главную часть отклонения от ассоциативности в луне $Q(\cdot)$.

Используя тензор кривизны, найдем условия, необходимые для выполнения некоторых тождеств в лунах.

Пусть луна $Q(\cdot)$ моноассоциативна, т.е. в ней выполняется тождество $x^2 \cdot x = x \cdot x^2$ (см. § 8). Тогда, полагая в (66) $x = y = z$, получаем:

$$(x^2 \cdot x)^i - (x \cdot x^2)^i = \beta_{jke}^i x^j x^k x^e + O(p^3). \quad (68)$$

Но сумму $\beta_{jke}^i x^j x^k x^e$ можно преобразовать следующим образом:

$$\beta_{jke}^i x^j x^k x^e = \frac{1}{6} (\beta_{jke}^i x^j x^k x^e + \beta_{kej}^i x^k x^e x^j + \beta_{ejk}^i x^e x^j x^k + \beta_{kje}^i x^k x^j x^e + \beta_{ekj}^i x^e x^k x^j + \beta_{jek}^i x^j x^e x^k) = \beta_{(jke)}^i x^j x^k x^e,$$

где обозначено

$$\beta_{(jke)}^i = \frac{1}{6} (\beta_{jke}^i + \beta_{kej}^i + \beta_{ejk}^i + \beta_{kje}^i + \beta_{ekj}^i + \beta_{jek}^i).$$

Поэтому из соотношений (68) следует, что $\beta_{(jke)}^i = 0$. Величины $\beta_{(jke)}^i$ образуют тензор, который называется симметричной частью тензора β_{jke}^i . Итак, мы получаем следующий вывод: если луна $Q(\cdot)$ моноассоциативна, то симметричная часть ее тензора кривизны равна нулю.

Пусть луна $Q(\cdot)$ левальтернативна, т.е. в ней выполня-

ется тождество $x(xy) = x^2 y$. Тогда из (66) получаем:

$$(x^2 y)^i - (x(xy))^i = \beta_{jke}^i x^j x^k y^e + O(\rho^3) \equiv 0. \quad (69)$$

Так как $\beta_{jke}^i x^j x^k y^e = \frac{1}{2}(\beta_{jke}^i x^j x^k y^e + \beta_{kje}^i x^k x^j y^e) = \beta_{(jke)}^i x^j x^k y^e$, то из (69) следует $\beta_{(jke)}^i = 0$ или $\beta_{jke}^i = -\beta_{kje}^i$.

Итак, если лупа левоальтернативна, то ее тензор кривизны кососимметричен по первым двум нижним индексам.

Аналогичные условия на тензор кривизны можно получить для правоальтернативных и эластичных луп. В итоге получается следующая таблица:

Таблица 1

Тождество в лупе	Условия на тензоры кручения и кривизны лупы
$xy = yx$	$\alpha_{jk}^i = 0$
$(xy)x = x(yx)$	$\beta_{jke}^i = 0$
$x(xy) = (xx)y$	$\beta_{(jke)}^i = 0$
$(xy)y = x(yx)$	$\beta_{j(ke)}^i = 0$
$(xy)x = x(yx)$	$\beta_{(j)k(l)e}^i = 0$
$(xx)x = x(xx)$	$\beta_{(jke)}^i = 0$

Докажем, что тензоры кривизны и кручения лупы Q не являются независимыми, а связаны между собой соотношениями

$$\beta_{[jke]}^i = -2 \alpha_{[jk}^m \alpha_{e]m}^i. \quad (70)$$

Здесь квадратные скобки означают альтернирование по индексам j, k, e :

$$\beta_{[jke]}^i = \frac{1}{6}(\beta_{jke}^i + \beta_{kje}^i + \beta_{ekj}^i - \beta_{jek}^i - \beta_{kje}^i - \beta_{ekj}^i).$$

Действительно, из формул (67) получаем:

$$\beta_{[jke]}^i = M_{[jke]}^i - \nu_{[jke]}^i + \lambda_{[jk}^m \lambda_{m|e]}^i - \lambda_{[ke]}^m \lambda_{jm]}^i.$$

Так как $M_{jke}^i = M_{kje}^i$, то $M_{[jke]}^i = 0$ (проверьте!). По той же причине $\nu_{[jke]}^i = 0$. Далее, так как $\lambda_{[ke]}^m \lambda_{jm]}^i = \lambda_{[jk}^m \lambda_{e]}^i$, то $\beta_{jke}^i = \lambda_{[jk}^m (\lambda_{m|e]}^i - \lambda_{e]m}^i)$. Пользуясь теперь обозначением (65), приходим к формуле (70).

Упражнения и задачи

1. Используя формулу (57), покажите, что тензор кручения одномерной луны равен нулю.

2. Докажите, что если $a_{jk}^i = -a_{kj}^i$, то $a_{jk}^i x^j x^k = 0$.

3. Вычислите координаты w^i и $'w^i$ элементов $W = (xy)x$ и $'W = x(yx)$.

4. Выведите соотношения, которым удовлетворяет тензор кривизны правоальтернативных и эластичных лун (см. табл. 1).

5. Найдите условия, которым удовлетворяют тензоры кручения и кривизны следующих лун с тождествами:

а) $(xy)x = x^2y$; б) $(xy)x = y \cdot x^2$; в) $x^2y = (yx)x$;
г) $(xy)x = (yx)x$; д) $x^2y = x(yx)$; е) $y \cdot x^2 = x(yx)$.
ж) $y \cdot x^2 = x(xy)$; з) $x(xy) = (yx)x$;

6. Докажите, что тензор кривизны всякой альтернативной луны (а значит, и луны Муфанг) выражается через ее тензор кручения:

$$\beta_{jke}^i = -2\alpha_{[jk}^m \cdot \alpha_{e]m}^i.$$

7. Используя результаты задач 13.3 - 13.5, найдите тензоры кривизны и кручения рассмотренных там лун.

8. Докажите, что если имеют место соотношения (62), то координаты элементов x^{-1} и $'x^{-1}$, где $^{-1}xx = e$ и $xx^{-1} = e$, выражаются следующим образом через координаты элемента x :
 $(^{-1}x)^i = -x^i - \frac{1}{2}\beta_{(jke)}^i x^j x^k x^e + \dots$; $(x^{-1})^i = -x^i + \frac{1}{2}\beta_{(jke)}^i x^j x^k x^e + \dots$
Найдите координаты элементов $(x^{-1})^{-1}$, $^{-1}(x^{-1})$, $^{-1}({^{-1}x})$, $^{-1}({^{-1}x})^{-1}$. Указание: см. задачу 12.11.

9. Докажите, что при допустимых преобразованиях (61) величины α_{jk}^i и β_{jke}^i меняются по тензорному закону.

§ 15. Понятие о многомерной три-ткань

Уравнение $\hat{z} = f(x, y)$, определяющее одномерную локаль-

ную гладкую квазигруппу q , имеет, как мы знаем, и геометрический смысл — оно определяет в некоторой области D плоскости R^2 три-ткань W . Точно также можно интерпретировать и уравнения (58) n -мерной локальной гладкой квазигруппы $q: X \times Y \rightarrow Z$, определив многомерную три-ткань. Так как X и Y — открытые множества в R^2 , то и прямое произведение $X \times Y = D$ представляет собой открытое множество пространства R^{2n} . Через каждую точку $M(x^i, y^j)$ множества D проходят три поверхности размерности n : координатные плоскости $V_1: x^i = u_1^i$, $V_2: y^j = u_2^j$ и поверхность V_3 , определяемая уравнением $f^i(x^i, y^j) = u_3^i$ (здесь u_1^i, u_2^j, u_3^i — постоянные).

Геометрический смысл условий (59), которым удовлетворяют функции f^i , заключается в том, что поверхность V_3 не касается в точке M координатных плоскостей V_1 и V_2 . Кроме того, в силу теоремы о неявной функции, из выполнения условий (59) вытекает также, что существует достаточно малая окрестность точки M , в которой семейство поверхностей V_3 , получающихся при различных значениях параметров u_3^i , является правильным (т.е. через каждую точку этой окрестности проходит одна и только одна поверхность семейства). Поскольку семейства координатных плоскостей V_1 и V_2 также являются правильными, то мы получаем следующий результат:

а) на множестве D имеется три семейства n -мерных поверхностей (обозначим их через $\lambda_\alpha, \alpha=1,2,3$), каждое из которых зависит от n параметров;

б) через произвольную точку M множества D проходит в точности три поверхности — по одной из каждого семейства, причем эти поверхности не касаются в точке M ;

в) для каждой точки M существует окрестность, внутри которой рассматриваемые три семейства являются правильными.

В этом случае говорят, что на множестве D задана многомерная три-ткань W . Локальная квазигруппа q , определяемая уравнениями (58), называется координатной квазигруппой ткани W . Эти уравнения связывают параметры поверхностей ткани W , проходящих через одну точку (x^i, y^j) .

Для многомерных тканей, как и для тканей из кривых на плоскости, можно ввести отношение эквивалентности, рассматривать условия замыкания и т.д. При этом будет справедлива

теорема 18, связывающая различные условия замыкания. Однако в то время как для плоских три-тканей все перечисленные в теореме 18 условия замыкания эквивалентны (см. наконец § 10), для многомерных три-тканей этого не будет. Это одна из основных причин, по которой изучение многомерных три-тканей представляет интерес.

Так же, как это было сделано в § 12 для три-ткани из кривых на плоскости, с каждой точкой $M(a^i, e^j)$ области $\mathcal{D}$ пространства R^{2r} , в которой задана многомерная три-ткань W , можно связать гладкую локальную лупу – координатную лупу $\ell(M)$. В предыдущем параграфе мы определили два тензора, связанные с гладкой локальной лупой – тензор кручения и тензор кривизны. Обозначим основные тензоры лупы $\ell(M)$ через $\alpha^i_{jk}(M)$ и $\beta^i_{jke}(M)$. Тогда в области $\mathcal{D}$ будут определены два тензорных поля, которые называются, соответственно, тензором кручения и тензором кривизны три-ткани W .

С помощью основных тензоров три-ткани W можно охарактеризовать условия замыкания, рассмотренные в § 10. Действительно, пусть на ткани W выполняется некоторое условие замыкания. Тогда (см. § 10) в каждой координатной лупе этой ткани выполняется соответствующее тождество. Пользуясь таблицей, приведенной на с. 77, получим те или иные соотношения на тензоры кривизны и кручения ткани W . Из этой таблицы и результатов, полученных в § 11, имеем:

Таблица 2

Условия замыкания на три-ткани	Условия на тензоры кручения и кривизны ткани
T	$\alpha^i_{jk} = 0, \beta^i_{jke} = 0$
R	$\beta^i_{jke} = 0$
H	$\beta^i_{(jke)} = 0$
B_e	$\beta^i_{(j)ke} = 0$
B_r	$\beta^i_{j(ke)} = 0$

Итак, мы показали, что условия замыкания ткани влекут соответствующие условия на ее основные тензоры. Гораздо труднее доказать обратное, а именно, что приведенные условия на тензоры достаточны для выполнения соответствующих условий замыкания. Доказательство этих теорем имеется в учебном пособии [6], где используется специальный аппарат, основанный на анализе дифференциальных уравнений три-ткани. Там же доказано, что условие замыкания (B_m) характеризуется следующим условием на тензор кривизны: $\beta^i_{(j|k|l)} = 0$.

Задачи

1. Докажите, что четырехмерная три-ткань W , определяемая уравнениями

$$z^1 = \frac{x^1 + y^1}{x^2 + y^2}, \quad z^2 = \frac{x^1 - y^1}{x^2 - y^2},$$

является тканью H , но не является тканью R . Указание: проверьте выполнение условий (32).

2. Докажите, что $2z$ -мерная три-ткань, определяемая уравнениями

$$z^i = (x^1 + y^1)(x^1 + x^2 + \dots + x^{\overline{z}})^{-1}, \quad i = 1, \overline{z},$$

является тканью R , но не является тканью T . Указание: воспользуйтесь уравнениями (34).

Пусть X, Y, Z — три гладкие поверхности в трехмерном проективном пространстве P^3 . Определим гладкую локальную квазигруппу q следующим образом. Рассмотрим прямую ℓ , пересекающую поверхности X, Y, Z в точках a, b, c , соответственно; тогда, если точка x поверхности X достаточно близка к точке a , а точка y поверхности Y достаточно близка к точке b , то прямая xy пересекает поверхность Z в точке z , близкой к точке c . Положим $z = q(x, y)$.

Обозначим через $G(1,3)$ множество прямых пространства P^3 . Это множество прямых зависит от четырех параметров и называется грассмановым многообразием. Определим четырехмерную три-ткань на грассмановом многообразии $G(1,3)$ следующим образом: поверхностями семейств $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ будем считать связки прямых с вершинами на поверхностях X, Y, Z .

При этом прямая ℓ , пересекающая поверхности X, Y, Z соответственно в точках x, y, z принадлежит трем связкам с вершинами x, y, z . Поэтому определенная выше квазигруппа q является координатной квазигруппой построенной грассмановой ткани.

3. Докажите, что всякая плоскость, проходящая через прямую ℓ , "высекает" на многообразии $G(1, 3)$ грассманову три-ткань размерности 2.

4. Пусть X, Y, Z — области на одной и той же кубической поверхности V . Докажите, используя приведенное в § 5 определение коррелятивного отображения и теорему Графа-Зауэра, что грассмановы ткани, высекаемые плоскостями на поверхности V (см. задачу 4), являются шестиугольными.

5. Пусть X, Y, Z — три плоскости в $\mathbb{P}^3$, проходящие через некоторую прямую. Докажите, что определяемая ими квазигруппа изотопна абелевой группе, а соответствующая грассманова три-ткань является параллелизуемой.

6. Пусть X, Y, Z — плоскости, не проходящие через одну прямую. Докажите, что определяемая ими квазигруппа q изотопна группе, а соответствующая грассманова три-ткань является тканью R .

7. Пусть X — плоскость, а Y и Z — области на одной и той же поверхности второго порядка. Докажите, что определяемая этими поверхностями грассманова три-ткань является тканью Боля.

8. Пусть $\ell(a, b)$ — координатная луна дифференцируемой три-ткани Боля. Докажите, что в луне $\ell(a, b)$ выполняется тождество $(xy)y^t = xy^{t+1}$, $t \in \mathbb{R}$. Указание: при натуральных t эта задача решена (см. 11.14); при $t = \frac{1}{2}$ она решается аналогично; при $t = \frac{1}{2m}$ доказательство проводится по индукции; далее нужно рассуждать так же, как при доказательстве теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

- 1 Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., 1968.
- 2 Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М., 1973.
- 3 Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп. М., 1967.

4 А к и в и с М.А., Ш е л е х о в А.М. Локальные аналитические квазигруппы и лупы. Калинин, 1980.

5 Ш е л е х о в А.М., Ш е с т а к о в а М.А. О геометрическом доказательстве универсальности некоторых тождеств в лупах. - В кн.: Ткани и квазигруппы. Калинин, 1984, с.118-124.

6 А к и в и с М.А., Ш е л е х о в А.М. Основы теории тканей. Калинин, 1981.

7 Б л я ш к е В. Введение в геометрию тканей. М., 1959.

Дополнительная литература

8 М а л ь ц е в А.И. Аналитические лупы. - Математический сборник, 1955, вып.36, с.569-576.

9 А к и в и с М.А. О канонических разложениях уравнений локальной аналитической квазигруппы. - ДАН СССР, 1969, 188, № 5, с.967-970.

10 А к и в и с М.А. Локальные дифференцируемые квазигруппы и три-ткани многомерных поверхностей. - В кн.: Исследования по теории квазигрупп и луп. Кишинев, 1973, с.3-12.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТРИ-ТКАНИ НА	
ПЛОСКОСТИ	3
§ 1. Определение три-ткани	3
§ 2. Эквивалентные три-ткани	7
§ 3. Функция ткани	9
§ 4. Шестиугольные три-ткани	14
§ 5. Прямолинейные три-ткани	18
Глава II. КВАЗИГРУППЫ И АБСТРАКТНЫЕ ТРИ-	
ТКАНИ	26
§ 6. Определение квазигруппы и лупы	26
§ 7. Изотопия квазигрупп и луп	30
§ 8. Квазигруппы и лупы с тождествами	36
§ 9. Абстрактные три-ткани и их координатные	
квазигруппы и лупы	41
§ 10. Фигуры замыкания на абстрактных три-тканях	
§ 11. Фигуры замыкания и универсальные тождества	
в лупах	55
Глава III. ЛОКАЛЬНЫЕ ГЛАДКИЕ КВАЗИГРУППЫ И	
ЛУПЫ	67
§ 12. Локальные гладкие квазигруппы и лупы, опре-	
деляемые геометрической три-тканью	67
§ 13. Многомерные локальные квазигруппы и лупы . .	72
§ 14. Основные тензоры локальной гладкой лупы . . .	74
§ 15. Понятие о многомерной три-ткани	78
ЛИТЕРАТУРА	82

МАКС АЙЗИКОВИЧ АКВИС,
АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ ШЕЛЕХОВ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ТРИ-ТКАНЕЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Редактор Л.Н.Новикова
Технический редактор М.А.Максимова
Доп.план Минвуза РСФСР 1985 г.

Подписано в печать 28.06.85.	ЕА-02473.
Формат 60х84 1/16.	Бумага писчая. Печать офсетная.
Физ.печ.л. 5,25.	Уч.-изд.л. 4,5.
Тираж 300 экз.	Заказ 616 Цена 20 коп.

Издано и отпечатано на ротапринте
Калининским государственным университетом.
170013, Калинин 13, Желябова, 33.