

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
УКРАИНЫ**

**Таврический национальный университет
им. В. И.Вернадского**

Т.Я. АЗИЗОВ, Н.Д. КОПАЧЕВСКИЙ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПРОСТРАНСТВ КРЕЙНА

**Специальный курс лекций
для студентов-магистрантов специальности "Математика"**

Симферополь – 2010

ББК 22.162

A35

УДК 517.98

*Рекомендовано к печати научно-методической комиссией
факультета математики и информатики ТНУ
(протокол № 2 от 15.11.2009 г.)*

Рецензент :

Орлов И.А. – д. ф.-м. н., профессор, зав. кафедрой алгебры и функционального анализа Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

A35 Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д. Введение в теорию пространств Крейна: Специальный курс лекций. – Симферополь: ООО "ФОРМА", 2010 – 112 с. – На русском языке.

В курсе лекций излагаются основы теории пространств с индефинитной метрикой, обобщающих пространства Понтрягина на случай, когда ранг индефинитности равен бесконечности, а также спектральный подход к исследованию гидродинамического пучка С.Г. Крейна.

Изложение сопровождается примерами и упражнениями, что позволяет использовать пособие как для аудиторных занятий, так и самостоятельного изучения.

Для студентов-магистрантов, аспирантов и специалистов, специализирующихся в области математики.

© Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., 2010

© ООО "ФОРМА", 2010

Содержание

1	Введение	4
2	Геометрия пространства Крейна. Приложения	12
2.1	Определения	12
2.2	Метод угловых операторов	15
2.3	Расширение линеалов и подпространств	17
2.4	Дуальные пары	31
2.5	Диссипативные операторы	33
3	Основные классы операторов	37
3.1	Основные определения	37
3.2	Об инвариантных подпространствах диссипативных операторов в пространстве Крейна	39
3.3	Самосопряженные операторы в пространстве Крейна .	43
3.4	Несжимающие операторы	45
3.5	Равномерно растягивающие операторы	53
3.6	Унитарные операторы.	58
3.7	Теоремы Филлипса для унитарных операторов и следствия из них	63
3.8	Преобразование Крейна–Шмудляна и его свойства . . .	69
3.9	Теоремы Крейна для бинесжимающих операторов . . .	74
4	Спектральные проблемы	82
4.1	Операторы класса (H) и $\mathcal{K}(H)$	82
4.2	О нерешённых проблемах существования инвариантных подпространств у произвольного оператора. . . .	95
4.3	О полноте и базисности системы корневых элементов операторов, действующих в пространстве Крейна . . .	100
4.4	Приложение основной спектральной теоремы к операторному пучку С.Г. Крейна	109

В этом учебном пособии излагаются основы теории пространств с индефинитной метрикой, обобщающих пространства Понтрягина (см. [5]) на случай, когда ранг индефинитности квадратичной формы, задающей индефинитную метрику, равен бесконечности. Выдающийся вклад в развитие теории таких пространств и операторов, действующих в них, внес М.Г. Крейн и потому такие пространства названы его именем.

В основу пособия положены спецкурсы, которые читались в Воронежском государственном университете (Россия) и Таврическом национальном университете (Симферополь, Украина), монографии М.Г. Крейна, Г. Лангера, И.С. Иохвидова [8] и других, а также исследования авторов, их коллег и учеников. Они отражены, в частности, в монографии Т.Я. Азизова и И.С. Иохвидова [1] и в их обзорах.

1 Введение

Здесь даются некоторые предварительные определения и понятия, связанные с пространством Крейна.

Пусть $\mathcal{E}$ — линейал, т.е. линейное множество объектов произвольной природы (элементов, векторов), для которых введены операции сложения элементов и умножения элементов на (комплексные) числа. Зададим на $\mathcal{E}$ квадратичную (полуторалинейную) форму

$$[\cdot, \cdot] : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Определение 1.1. Будем говорить, что на $\mathcal{E}$ задана индефинитная метрика, если форма $[\cdot, \cdot]$ обладает свойствами:

- 1° $[x, x] \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{E};$
- 2° $[x, y] = \overline{[y, x]}, \quad \forall x, y \in \mathcal{E};$
- 3° $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z], \quad \forall x, y, z \in \mathcal{E}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$

□

Линейал $\mathcal{E}$ вместе с введенной на нем формой $[\cdot, \cdot]$ назовем индефинитным пространством и будем обозначать $\{\mathcal{E}, [\cdot, \cdot]\}$.

Отметим, что требования 1°–3° те же, что были сформулированы ранее для индефинитной формы в пространстве Понтрягина (см. [5]).

Далее будем использовать те же понятия и обозначения, которые уже встречались при изложении теории пространств Понтрягина: понятие ортогональности (относительно формы $[\cdot, \cdot]$) элементов из $\mathcal{E}$, определения знака линейалов и другие.

Определение 1.2. Будем говорить, что задано пространство Крейна, если выполнены следующие условия.

1° Имеет место ортогональное (относительно формы $[\cdot, \cdot]$) разложение $\mathcal{E}$ на подпространства $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ [+] \mathcal{E}^-;$$

2° В этом разложении

$$\{\mathcal{E}^+, [x, y]\}, \quad \{\mathcal{E}^-, -[x, y]\}$$

— гильбертовы пространства со скалярными произведениями

$$[x_+, y_+], \quad x_+, y_+ \in \mathcal{E}^+; \quad -[x_-, y_-], \quad x_-, y_- \in \mathcal{E}^-,$$

и соответствующими нормами:

$$([x_+, x_+])^{1/2}, \quad x_+ \in \mathcal{E}^+, \quad (-[x_-, x_-])^{1/2}, \quad x_- \in \mathcal{E}^-.$$

□

Далее пространство Крейна будем обозначать символом $\mathcal{K}$, а ортогональное разложение 1° из определения 1.2 использовать в форме

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ [+] \mathcal{K}^-, \tag{1.1}$$

которую назовем *канонической*. При этом будем предполагать, что $\mathcal{K}^\pm$ — *сепарабельные* пространства.

Если

$$\min \{ \dim \mathcal{K}^+; \dim \mathcal{K}^- \} = \varkappa < \infty,$$

то пространство Крейна является пространством Понтрягина $\Pi_\varkappa$.

Введем в $\mathcal{K}$ *каноническое скалярное произведение*

$$\begin{aligned} (x, y) &:= [x_+, y_+] - [x_-, y_-], \\ x &= x_+ + x_-, \quad y = y_+ + y_-, \quad x_\pm, y_\pm \in \mathcal{K}^\pm, \end{aligned} \tag{1.2}$$

отвечающее разложению (1.1), а также *канонические проекторы*

$$P^\pm : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}^\pm, \quad P^+ + P^- = I,$$

отвечающие этому разложению, и каноническую симметрию

$$J := P^+ - P^-.$$

Тогда, как в пространстве $\Pi_{\mathcal{K}}$,

$$(x, y) = [Jx, y], \quad [x, y] = (Jx, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{K},$$

и имеет место неравенство типа Коши – Буняковского:

$$|[x, y]| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{K}.$$

Эти формулы показывают, что пространство Крейна $\mathcal{K}$ с введенным скалярным произведением (1.2) является полным гильбертовым пространством $\{\mathcal{K}, [\cdot, \cdot], (\cdot, \cdot)\}$, т.е. по индефинитной форме $[\cdot, \cdot]$ построено гильбертово пространство $\mathcal{K} =: \mathcal{H}$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$.

Часто встречается ситуация, когда задано гильбертово пространства $\mathcal{H}$ со скалярным произведением (x, y) и ортогональным разложением

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-, \quad P^{\pm} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^{\pm}, \quad (1.3)$$

по которым вводят оператор $J = P^+ - P^-$ и индефинитное скалярное произведение $[x, y] = (Jx, y)$. Тогда возникает каноническое разложение (1.1) при $\mathcal{K}^{\pm} = \mathcal{H}^{\pm}$, соответствующее разложению (1.3):

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^-.$$

Здесь подпространства $\mathcal{K}^{\pm} = \mathcal{H}^{\pm}$ ортогональны одновременно по дефинитному и индефинитному скалярным произведениям.

Рассмотрим теперь вопрос о взаимоотношении норм, порожденных различными каноническими разложениями пространства Крейна.

Пусть имеется два канонических разложения пространства $\mathcal{K}$,

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+[\oplus]\mathcal{K}_1^- = \mathcal{K}_2^+[\oplus]\mathcal{K}_2^-,$$

а также соответствующие канонические проекторы $P_1^{\pm}, P_2^{\pm}$, канонические симметрии J_1 и J_2 и скалярные произведения $(x, y)_1$ и $(x, y)_2$.

Теорема 1.1 (об эквивалентности канонических норм). Канонические нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, порожденные каноническими скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_1$ и $(\cdot, \cdot)_2$, эквивалентны, т.е. найдутся положительные константы $c_1 \leq c_2$ такие, что

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \iff c_2^{-1}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_1^{-1}\|x\|_2.$$

Доказательство. Поскольку для случая пространства Понтрягина эта теорема доказана в [5], то будем рассматривать случай, когда пространства

$$\{\mathcal{K}_1^\pm, \pm[x, y]_1\}, \quad \{\mathcal{K}_2^\pm, \pm[x, y]_2\}$$

гильбертовы, причем

$$\dim \mathcal{K}_1^\pm = \dim \mathcal{K}_2^\pm = \infty.$$

Так как по предположению эти пространства сепарабельны, то в них существуют счетные ортонормированные базисы

$$\{e_{1k}^\pm\}_{k=1}^\infty, \quad \{e_{2j}^\pm\}_{j=1}^\infty.$$

Введем на элементах базисов $\{e_{1,k}^\pm\}$ отображение U по закону

$$Ue_{1,k}^\pm = e_{2,k}^\pm,$$

и продолжим это отображение по линейности на $\mathcal{K}_1^+, \mathcal{K}_1^-$, а затем на все $\mathcal{K}$. По построению оператор U , рассматриваемый как оператор из $\{\mathcal{K}, (\cdot, \cdot)_1\}$ в $\{\mathcal{K}, (\cdot, \cdot)_2\}$, является унитарным:

$$(Ux, Uy)_2 = (x, y)_1, \quad \forall x, y \in \mathcal{K}, \quad U\mathcal{K} = \mathcal{K},$$

и унитарным как оператор из $\{\mathcal{K}, [\cdot, \cdot]\} \rightarrow \{\mathcal{K}, [\cdot, \cdot]\}$:

$$[Ux, Uy] = [x, y]. \tag{1.4}$$

Так как $[x, y] = (J_k x, y)_k$, $k = 1, 2$, то из (1.4) следует, что

$$U^{-1} = J_k U^{(*)k} J_k,$$

где знак $(*)^k$ означает сопряжение в $\{\mathcal{K}, (\cdot, \cdot)_k\}$, $k = 1, 2$. Замкнутость оператора $U^{(*)k}$ и непрерывная обратимость непрерывного оператора J_k влекут замкнутость всюду определенного оператора U^{-1} . По известной теореме Банаха оператор U^{-1} , а с ним и U ограничены, как операторы в $\{\mathcal{K}, (\cdot, \cdot)_k\}$; обозначим через $\|U^{-1}\|_k$ и $\|U\|_k$ нормы этих операторов в $\{\mathcal{K}, (\cdot, \cdot)_k\}$. Теперь утверждение об эквивалентности канонических норм вытекает из неравенств:

$$\|U^{-1}\|_2^{-1} \|x\|_2 \leq \|Ux\|_2 = \|x\|_1 \leq \|U\|_2 \cdot \|x\|_2.$$

□

Рассмотрим теперь более общую, чем выше, ситуацию, когда в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ индефинитная форма $[x, y]$ задается самосопряженным непрерывным оператором W :

$$[x, y] := (Wx, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}. \quad (1.5)$$

Такую форму называют W -метрикой.

Так как

$$|[x, y]| \leq \|W\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|,$$

то форма $[x, y]$ непрерывна по переменным x и y . Обратно, непрерывная форма $[x, y]$ представима в виде (1.5) с непрерывным оператором $W = W^*$.

Поскольку $W = W^*$, то пространство $\mathcal{H}$ допускает ортогональное разложение

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^0 \oplus \mathcal{H}^-, \quad (1.6)$$

причем

$$W\mathcal{H}^\pm \subset \mathcal{H}^\pm, \quad W\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}^0,$$

т.е. подпространства (1.6) инвариантны относительно W . Кроме того, сужения оператора W на эти подпространства обладают свойствами

$$W_+ := W|_{\mathcal{H}^+} > 0, \quad W_- := W|_{\mathcal{H}^-} < 0, \quad W_0 := W|_{\mathcal{H}^0} = 0,$$

а матричное представление W в ортогональном разложении (1.6) имеет вид

$$W = \text{diag}(W_+; 0; W_-).$$

Упражнение 1.1. Доказать, что пространство с W -метрикой (1.5) является пространством Крейна тогда и только тогда, когда

$$\{0 \in \rho(W)\} \iff \{\mathcal{H}_0 = \{0\}, \quad W_+ \gg 0, \quad W_- \ll 0\}, \quad (1.7)$$

т.е. 0 является регулярной точкой оператора W , а операторы W_+ и W_- соответственно равномерно положительный (положительно определенный) и равномерно отрицательный (отрицательно определенный). $\square$

Таким образом, условия (1.7) накладывают те требования на свойства оператора W , которые обеспечивают введение индефинитной метрики в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и превращение его в пространство Крейна $\mathcal{K}$.

Пусть теперь $\{\mathcal{K}_1, [\cdot, \cdot]_1\}$ и $\{\mathcal{K}_2, [\cdot, \cdot]_2\}$ — пространства Крейна, возможно, различные.

Определение 1.3. Оператор $T : \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$, действующий из $\mathcal{K}_1$ в $\mathcal{K}_2$, называется *несжимающим*, если

$$[Tx, Ty]_2 \geq [x, y]_1, \quad \forall x, y \in \mathcal{K}_1. \quad \square$$

Определение 1.4. Оператор $T : \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ называется *би-несжимающим*, если он несжимающий и сопряженный оператор $T^c : \mathcal{K}_2 \longrightarrow \mathcal{K}_1$ (относительно форм в $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$), т.е. такой, что

$$[Tx, y]_2 = [x, T^c y]_1, \quad \forall x \in \mathcal{K}_1, \quad \forall y \in \mathcal{K}_2,$$

также является несжимающим. $\square$

Прежде чем познакомиться со свойствами би-несжимающих операторов, рассмотрим некоторые факты из теории чисел, матриц и операторов, действующих в гильбертовом пространстве.

Если $0 < a < b$, то, очевидно, $a^{-1} > b^{-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Если A_n и B_n — матрицы размером $n \times n$, то из условий

$$0 < (A_n x, x) \leq (B_n x, x), \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, \quad x \neq 0,$$

следует свойство $A_n^{-1} \geq B_n^{-1}$, т.е.

$$(A_n^{-1} x, x) \geq (B_n^{-1} x, x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, \quad x \neq 0.$$

Аналогичное утверждение имеет место и для положительно определенных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$: если выполнены условия $0 \ll A \leq B$, то $A^{-1} \geq B^{-1} \gg 0$.

Если $a < b$, то условие $a^{-1} > b^{-1}$ выполнено не всегда. Для матриц A_n и B_n можно доказать следующий факт, который предлагается установить самостоятельно.

Упражнение 1.2. Из условия $A_n \leq B_n$ свойство $A_n^{-1} \geq B_n^{-1}$ следует тогда и только тогда, когда сигнатуры матриц A_n и B_n , т.е. разности между числом положительных и числом отрицательных собственных значений (с учетом их кратностей) этих матриц, совпадают. $\square$

Заметим, что если сигнатуры A_n и B_n совпадают и для матрицы C_n справедливо неравенство $A_n \leq C_n \leq B_n$, то $A_n^{-1} \geq C_n^{-1} \geq B_n^{-1}$.

Пусть теперь A и B — самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Тогда (см. упражнение 1.1) имеют место ортогональные разложения

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A^+ \oplus \mathcal{H}_A^- = \mathcal{H}_B^+ \oplus \mathcal{H}_B^-,$$

в которых матричные представления операторов A и B таковы:

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(A_+; A_-), \quad A_+ \gg 0, A_- \ll 0, \\ B &= \text{diag}(B_+; B_-), \quad B_+ \gg 0, B_- \ll 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Оказывается, что если $\dim \mathcal{H}_A^- = \varkappa < \infty$, то условие $A^{-1} \geq B^{-1}$ следует из условия $A \leq B$ тогда и только тогда, когда $\dim \mathcal{H}_B^- = \varkappa$.

Если же все размерности подпространств $\mathcal{H}_A^\pm, \mathcal{H}_B^\pm$ бесконечны, то выяснение того, что из условия $A \leq B$ следует условие $A^{-1} \geq B^{-1}$, является непростой проблемой.

Пусть операторы A и B , действующие в $\mathcal{H}$, удовлетворяют условиям (1.8). Образует по этим операторам билинейные формы

$$[x, y]_A := (Ax, y), \quad [x, y]_B := (Bx, y),$$

и введем в рассмотрение соответствующие пространства Крейна $\mathcal{K}_A$ и $\mathcal{K}_B$. Введем далее, оператор $T : \mathcal{K}_A \rightarrow \mathcal{K}_B$, действующий по закону $Tx := x$ (оператор вложения $\mathcal{K}_A$ в $\mathcal{K}_B$).

Если выполнено условие $A \leq B$, то оператор T несжимающий. В самом деле,

$$[Tx, Tx]_B = [x, x]_B = (Bx, x) \geq (Ax, x) = [x, x]_A. \quad (1.9)$$

Теорема 1.2. (Ю.Л. Шмультян). Из условия $A \leq B$ условие $A^{-1} \geq B^{-1}$ следует тогда и только тогда, когда оператор $T : \mathcal{K}_A \rightarrow \mathcal{K}_B$ бинесжимающий.

□

Пусть T — произвольный бинесжимающий оператор, действующий в пространстве Крейна $\mathcal{K}$.

Определение 1.5. Оператор T называется *равномерно бинесжимающим*, если существует такое $k > 0$, что

$$[Tx, Tx] \geq [x, x] + k(x, x). \quad \square$$

Пусть задан оператор V , действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Выясним, когда все точки $\lambda \in \mathbb{C}$ с $|\lambda| = 1$ являются регулярными точками для V .

Теорема 1.3. (Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн). Указанное свойство регулярности точек оператора V на единичной окружности в $\mathbb{C}$ имеет место тогда и только тогда, когда в пространстве $\mathcal{H}$ можно

ввести структуру пространства Крейна $\mathcal{K}$ с формой (1.5) так, что $0 \in \rho(W)$, а оператор V является равномерно бинесжимающим относительно этой W -метрики.

□

Сведения, изложенные выше, понадобятся далее при изучении свойств пространства Крейна. Как и для пространств Понтрягина, здесь изложение всего материала разбивается на следующие четыре раздела.

- a)* Геометрия пространств Крейна. Приложения.
- b)* Основные классы операторов, их свойства и некоторые приложения.
- c)* Инвариантные подпространства.
- d)* Спектральные проблемы.

2 Геометрия пространства Крейна. Приложения

2.1 Определения

Напомним некоторые определения и понятия, известные из теории пространств Понтрягина и переносимые без изменений на случай пространств Крейна $\mathcal{K}$.

Это — положительные ($x > 0 := [x, x] \geq 0$), отрицательные ($x < 0 := [x, x] \leq 0$) и нейтральные ($[x, x] = 0$) элементы, а также соответствующие линеалы: $\mathcal{L} \geq 0$, $\mathcal{L} \leq 0$, нейтральный линеал. Линеал $\mathcal{L}$ называется *индефинитным*, если существуют такие элементы y и z из $\mathcal{L}$, что $[y, y] > 0$, $[z, z] < 0$.

Линеал $\mathcal{L}$ положителен, если $[x, x] > 0$ для всех ненулевых $x \in \mathcal{L}$; аналогично определяется отрицательный линеал. Далее, *ортогональное дополнение* $\mathcal{L}^{[\perp]}$ к линеалу $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$, по определению, есть следующее множество

$$\mathcal{L}^{[\perp]} := \{y \in \mathcal{K} : [x, y] = 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}\}. \quad (2.1)$$

Напомним еще, что *изотропной частью* $\mathcal{L}^0$ линеала $\mathcal{L}$ называется линеал

$$\mathcal{L}^0 := \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]} = \{x \in \mathcal{L} : [x, y] = 0, \quad \forall y \in \mathcal{L}\}.$$

Если $\mathcal{L}^0 = \{0\}$, то $\mathcal{L}$ называют *невырожденным линеалом*, в противном случае — *вырожденным*.

Определение 2.1. Неотрицательное подпространство $\mathcal{L}$ называют *максимальным неотрицательным* подпространством, если не существует такого $\tilde{\mathcal{L}} \geq 0$, что $\mathcal{L} \subset \tilde{\mathcal{L}}$, $\mathcal{L} \neq \tilde{\mathcal{L}}$. $\square$

Аналогично определяют максимальные неположительные и нейтральные подпространства.

Определение 2.2. Подпространство (линеал) $\mathcal{L}$ называется *равномерно положительным*, $\mathcal{L} \gg 0$, если найдется $\alpha > 0$ такое, что

$$[x, x] \geq \alpha \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{L}. \quad (2.2)$$

Соответственно $\mathcal{L}$ равномерно отрицательно, $\mathcal{L} \ll 0$, если найдется $\beta > 0$ такое, что

$$-[y, y] \geq \beta \|y\|^2, \quad \forall y \in \mathcal{L}. \quad (2.3)$$

$\square$

Отметим, что максимальное нейтральное подпространство является либо максимальным неотрицательным, либо максимальным неположительным, либо тем и другим одновременно. В последнем случае подпространство называется *гипермаксимальным*.

Множество всех неотрицательных элементов обозначают символом $\mathfrak{P}^+$, неположительных — символом $\mathfrak{P}^-$, а нейтральных — символом $\mathfrak{P}^0$. Соответственно совокупность всех максимальных неотрицательных подпространств обозначают через $\mathfrak{M}^+$, а максимальных неположительных — через $\mathfrak{M}^-$. В этих обозначениях линейал $\mathcal{L} \geq 0$, если $\mathcal{L} \subset \mathfrak{P}^+$; $\mathcal{L}$ гипермаксимален, если $\mathcal{L} \subset \mathfrak{P}^0$ и $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+ \cap \mathfrak{M}^-$.

Семидефинитными линейалами называют линейалы, содержащие элементы одного знака, а *дефинитными* — семидефинитные линейалы, не содержащие ненулевые нейтральные векторы.

Упражнение 2.1. Доказать, что линейал является дефинитным тогда и только тогда, когда он не содержит ненулевых нейтральных элементов. $\square$

Проведем сопоставление некоторых геометрических свойств пространств Понтрягина и Крейна. Пусть $\mathcal{L}$ — подпространство. Если оно невырождено, то

$$\Pi_{\mathcal{K}} = \mathcal{L}[+] \mathcal{L}^{[\perp]}, \quad (2.4)$$

причем невырожденность $\mathcal{L}$ является необходимым и достаточным условием свойства (2.4). В пространстве Крейна это не так, т.е. из свойств невырожденности $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$ может не следовать факт ортогонального разложения

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}[+] \mathcal{L}^{[\perp]}. \quad (2.5)$$

Определение 2.3. Будем говорить, что подпространство $\mathcal{L}$ *проекционно полное*, если справедливо разложение (2.5). $\square$

Замечание 2.1. Отметим, что если $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$ и невырождено, то

$$\mathcal{K} = \overline{\mathcal{L}[+] \mathcal{L}^{[\perp]}}. \quad (2.6)$$

$\square$

Пусть $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$ — произвольное подпространство. Поскольку

$$|[x, y]| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{L},$$

т.е. сужение индефинитной формы $[\cdot, \cdot]$ на $\mathcal{L}$ является ограниченным полутора-линейным функционалом, то по известной теореме Рисса

существует оператор G (оператор Грама подпространства $\mathcal{L}$) такой, что

$$[x, y] = (Gx, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{L}, \quad G : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}. \quad (2.7)$$

Определение 2.4. Если в (2.7) оператор $G : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ непрерывно обратим, то $\mathcal{L}$ называют *регулярным* (или *правильным*) подпространством. $\square$

Упражнение 2.2. Пусть $\mathcal{K}$ — пространство Крейна и $\mathcal{L}$ — его подпространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1° $\mathcal{L}$ — проекционно полно;

2° $\mathcal{L}$ — регулярно;

3° $\mathcal{L}$ является пространством Крейна. $\square$

Отметим, что эквивалентность первых двух утверждений была доказана независимо А.В. Кужелем и рядом других авторов.

Пример 2.1. Пусть $\mathcal{K}$ является J -пространством, т.е.

$$[x, y] = (Jx, y), \quad J = J^* = J^{-1}. \quad (2.8)$$

Пусть $\mathcal{L}$ — подпространство в $\mathcal{K}$, а P — ортопроектор на $\mathcal{L}$. Выразим оператор Грама G подпространства $\mathcal{L}$ через операторы J и P .

По определению оператора Грама для любых $x, y \in \mathcal{L}$ имеем тождество (2.7). С другой стороны, из (2.8) получаем

$$[x, y] = (Jx, y) = (JPx, Py) = (PJP, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{L}. \quad (2.9)$$

Отсюда следует, что

$$G = PJP|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}. \quad (2.10)$$

$\square$

Рассмотрим теперь вопрос о том, когда подпространство $\mathcal{L}$ вырождено либо невырождено. Ответ в терминах свойств оператора Грама содержится в следующих утверждениях.

1° Подпространство $\mathcal{L}$ вырождено тогда и только тогда, когда оператор Грама G этого подпространства имеет нетривиальное ядро: $\text{Ker } G \neq \{0\}$.

2° Подпространство $\mathcal{L}$ невырождено тогда и только тогда, когда $\text{Ker } G = \{0\}$.

Если $\mathcal{L} \geq 0$, то его изотропная часть $\mathcal{L}^0$ совпадает с совокупностью нейтральных векторов, содержащихся в $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}^0 = \{x \in \mathcal{L} : [x, x] = 0\}, \quad \mathcal{L} \geq 0,$$

т.е.

$$\mathcal{L}^0 = \mathfrak{P}^0 \cap \mathcal{L}, \quad \text{если} \quad \mathcal{L} \geq 0.$$

Упражнение 2.3. Пусть $\mathcal{L}$ — индефинитное подпространство. Тогда $\mathcal{L}^0 \subset \mathfrak{P}^0 \cap \mathcal{L}$. Доказать, что $\mathcal{L}$ семидефинитно в том и только в том случае, когда

$$\mathcal{L}^0 = \mathfrak{P}^0 \cap \mathcal{L}. \quad \square$$

Одной из важных и интересных проблем является вопрос о том, когда сумма подпространств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ замкнута, т.е. является подпространством. Известно, что это имеет место, если выполнено одно из следующих условий (проверьте!):

- 1° подпространства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ ортогональны относительно гильбертова скалярного произведения.
- 2° хотя бы одно из подпространств $\mathcal{L}$ или $\mathcal{M}$ конечномерно, в частности, если $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — семидефинитные подпространства разного знака в пространстве Понтрягина.
- 3° $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — семидефинитные подпространства пространства Крейна, причем хотя бы одно из них регулярно.

Заметим, что замкнутость суммы подпространств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ в условиях, когда оба являются регулярными разного знака, доказана И.С. Иохвидовым и В.А. Сендеровым.

2.2 Метод угловых операторов

Рассмотрим, как и в пространстве Π_{∞} , свойства семидефинитных подпространств и их угловых операторов.

Пусть

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-, \quad J = P^+ - P^-, \quad [x, y] = (Jx, y).$$

Тогда $\mathcal{L} \subset \mathfrak{P}^+$ в том и только том случае, когда найдется (угловой) оператор $K = K(\mathcal{L}) : \mathcal{K}^+ \longrightarrow \mathcal{K}^-$, $\|K\| \leq 1$, такой что

$$\mathcal{L} = \{x_+ + Kx_+ : x_+ \in P^+\mathcal{L}, \quad K = P^-(P^+|_{\mathcal{L}})^{-1}\}.$$

При этом (проверьте!)

$$\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}} \iff P^+\mathcal{L} = \overline{P^+\mathcal{L}}$$

и

$$\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+ \iff P^+\mathcal{L} = \mathcal{K}^+.$$

Аналогичные факты имеют место и для неположительных подпространств. А именно, $\mathcal{L} \subset \mathfrak{P}^-$ тогда и только тогда, когда найдется (угловой) оператор $Q : \mathcal{K}^- \longrightarrow \mathcal{K}^+$, $\|Q\| \leq 1$, такой, что

$$\mathcal{L} = \{Qx_- + x_-, \quad x_- \in P^-\mathcal{L}, \quad Q = P^+(P^-|_{\mathcal{L}})^{-1}\}.$$

Заметим, что

$$\mathcal{L} > 0 \iff \|Kx_+\| < \|x_+\|, \quad x = x_+ + Kx_+ \neq 0, \quad (2.11)$$

$$\mathcal{L} < 0 \iff \|Qx_-\| < \|x_-\|, \quad x = Qx_- + x_- \neq 0. \quad (2.12)$$

Неравенство (2.11) следует из формулы

$$[x, x] = \|x_+\|^2 - \|Kx_+\|^2 > 0, \quad \forall x \in \mathcal{L} > 0, \quad x \neq 0,$$

а неравенство (2.12) — из аналогичной для $\mathcal{L} < 0$.

Лемма 2.1. *Неотрицательное подпространство $\mathcal{L}$ пространства Крейна $\mathcal{K}$ является равномерно положительным тогда и только тогда, когда для его углового оператора K выполнено условие $\|K\| < 1$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}$ равномерно положительно, т.е. существует $\alpha > 0$ такое, что $[x, x] \geq \alpha \|x\|^2$ для всех $x \in \mathcal{L}$. Поскольку здесь всегда $\alpha \leq 1$ (почему?), то будем без ограничения общности считать $\alpha < 1$.

Для любых $x \in \mathcal{L}$ имеем

$$[x, x] = \|x_+\|^2 - \|Kx_+\|^2 \geq \alpha [\|x_+\|^2 + \|Kx_+\|^2],$$

откуда следует, что

$$(1 - \alpha)\|x_+\|^2 \geq (1 + \alpha)\|Kx_+\|^2,$$

и потому

$$\|Kx_+\|^2 \leq \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \|x_+\|^2 \implies \|K\| \leq \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right)^{1/2} < 1. \quad (2.13)$$

Обратно, если $\|K\| < 1$, то найдется такое α , $0 < \alpha < 1$, что выполнено неравенство (2.13), и обратный ход рассуждений показывает, что подпространство $\mathcal{L}$ с угловым оператором K равномерно положительно. $\square$

2.3 Расширение линеалов и подпространств

Этот вопрос так же важен в пространстве Крейна, как и в пространстве Понтрягина.

Определение 2.5. Подпространство $\tilde{\mathcal{L}}$ называется расширением подпространства $\mathcal{L}$, если $\tilde{\mathcal{L}} \supset \mathcal{L}$. $\square$

Аналогично определяется расширение углового оператора K , отвечающего подпространству $\mathcal{L} \subset \mathfrak{P}^+$, а именно:

Определение 2.6. Пусть $K : \mathcal{K}^+ \longrightarrow \mathcal{K}^-$, $\tilde{K} : \mathcal{K}^+ \longrightarrow \mathcal{K}^-$, $\|K\| \leq 1$, $\|\tilde{K}\| \leq 1$. Оператор $\tilde{K}$ называется расширением оператора K , $\tilde{K} \supset K$, если $\text{dom } K \subset \text{dom } \tilde{K}$ и $\tilde{K}x = Kx$ для любого $x \in \text{dom } K$. $\square$

Для неотрицательных подпространств и отвечающих им угловых операторов справедливо следующее утверждение (продумайте это!): если неотрицательным подпространствам $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$ отвечают угловые операторы K и $\tilde{K}$ соответственно, то

$$\{\mathcal{L} \subset \tilde{\mathcal{L}}\} \iff \{K \subset \tilde{K}\}. \quad (2.14)$$

Теорема 2.1 (о расширении семидефинитных подпространств до максимальных). Справедливы следующие утверждения:

- 1° Каждое семидефинитное подпространство допускает расширение до максимального семидефинитного подпространства того же знака.

2° Каждое дефинитное (равномерно дефинитное) подпространство допускает расширение до максимального дефинитного (максимального равномерно дефинитного) подпространства того же знака.

3° Каждое нейтральное подпространство $\mathcal{L}$ допускает расширение до максимального нейтрального подпространства $\tilde{\mathcal{L}}$, при этом $\tilde{\mathcal{L}}$ либо максимальное неотрицательное, либо максимальное неположительное.

4° Нейтральное подпространство $\mathcal{L}$ допускает расширение до гипермаксимального нейтрального тогда и только тогда, когда

$$\dim((P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+) = \dim((P^-\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^-). \quad (2.15)$$

Доказательство.

1°–2°. Эти утверждения мы докажем одновременно. Пусть $\mathcal{L} \geq 0$, тогда

$$\mathcal{L} = \{x_+ + Kx_+ \mid x_+ \in P^+\mathcal{L}\}.$$

Так как $\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}}$, то $P^+\mathcal{L}$ — замкнутое подпространство в $\mathcal{K}^+$. Поэтому

$$\mathcal{K}^+ = ((P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+) \oplus (P^+\mathcal{L}). \quad (2.16)$$

Значит,

$$\mathcal{K} = ((P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+) \oplus (P^+\mathcal{L}) \oplus \mathcal{K}^-, \quad (2.17)$$

причем

$$\mathcal{L} \subset (P^+\mathcal{L}) \oplus \mathcal{K}^-. \quad (2.18)$$

Присоединим к $\mathcal{L}$ положительные элементы, входящие в подпространство $(P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+$, и образуем линейал

$$\tilde{\mathcal{L}} := ((P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+) [\oplus] \mathcal{L} \geq 0. \quad (2.19)$$

Докажем, что $\tilde{\mathcal{L}}$ — максимальное подпространство. В самом деле, это немедленно следует из того, что по построению $P^+\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{K}^+$:

$$P^+\tilde{\mathcal{L}} = ((P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+) \oplus (P^+\mathcal{L}) = \mathcal{K}^+.$$

Заметим, что множество $(P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+$ называют *дефектным подпространством* для $\mathcal{L}$, именно его и добавили к $\mathcal{L}$ при расширении $\mathcal{L}$ до максимального подпространства $\tilde{\mathcal{L}}$ (см. (2.19)).

Если $\mathcal{L} \leq 0$, то следует провести аналогичное расширение, добавив отрицательные элементы, составляющие множество $(P^-\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^-$.

Итак, доказано, что если $\mathcal{L} \geq 0$, то $\tilde{\mathcal{L}}$ — максимальное неотрицательное подпространство. Так как расширение происходило за счет добавления положительных элементов, то если исходное подпространство $\mathcal{L}$ было положительным, $\mathcal{L} > 0$, то его расширение $\tilde{\mathcal{L}}$ также является положительным подпространством.

Предположим теперь, что подпространство $\mathcal{L}$ равномерно положительно. Докажем, что при проведенном расширении максимальное подпространство $\tilde{\mathcal{L}}$ также равномерно положительно.

В самом деле, для любого $x \in \tilde{\mathcal{L}}$ имеем

$$x = x_+ + y, \quad x_+ \in (P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+, \quad y \in \mathcal{L}.$$

Тогда, с учетом свойства $x_+[\perp]y$, см. (2.19), получим

$$\begin{aligned} [x, x] &= [x_+, x_+] + [y, y] = \|x_+\|^2 + [y, y] \geq \|x_+\|^2 + \alpha\|y\|^2 \geq \\ &\geq \alpha(\|x_+\|^2 + \|y\|^2) = \alpha\|x\|^2, \end{aligned}$$

так как $\alpha \leq 1$ (для элементов равномерно положительного подпространства $\mathcal{L}$). Итак, утверждения 1° и 2° доказаны.

3°. Воспользуемся следующим разложением пространства Крейна:

$$\mathcal{K} = ((P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+) [\oplus] (P^+\mathcal{L} \oplus P^-\mathcal{L}) [\oplus] ((P^-\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^-).$$

Здесь, очевидно,

$$\begin{aligned} ((P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+) [\oplus] P^+\mathcal{L} &= \mathcal{K}^+, \\ P^-\mathcal{L} [\oplus] ((P^-\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^-) &= \mathcal{K}^-, \end{aligned} \tag{2.20}$$

причем для нейтрального $\mathcal{L}$ имеем

$$(P^+\mathcal{L}) \oplus (P^-\mathcal{L}) = \mathcal{L}.$$

Рассмотрим далее для определенности случай, когда

$$n_+ := \dim((P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+) \leq \dim((P^-\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^-) =: n_-. \tag{2.21}$$

(В другом варианте можно провести симметричные рассуждения.)

Так как пространство Крейна сепарабельно, то в каждом из подпространств $(P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+$ и $(P^-\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^-$ существуют ортонормированные базисы $\{e_k^+\}_{k=1}^{n_+}$ и $\{e_j^-\}_{j=1}^{n_-}$ соответственно, причем $n_+ \leq n_- \leq \infty$. Введем на элементах $x = \sum_{k=1}^{n_+} \alpha_k e_k^+$ оператор K_1 по закону

$$K_1 \left(\sum_{j=1}^{n_+} \alpha_j e_j^+ \right) := \sum_{j=1}^{n_+} \alpha_j e_j^-. \quad (2.22)$$

Тогда

$$(K_1 x_+, K_1 x_+) = (x_+, x_+), \quad \forall x_+ \in (P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+, \quad (2.23)$$

так как

$$\left\| \sum_{j=1}^{n_+} \alpha_j e_j^\pm \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n_+} |\alpha_j|^2 < \infty. \quad (2.24)$$

Подпространство

$$\mathcal{L}_1 := \{x_+ + K_1 x_+ \mid x_+ \in (P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+\} \quad (2.25)$$

является нейтральным, поскольку

$$\begin{aligned} [x_+ + x_-, x_+ + x_-] &= [x_+ + K_1 x_+, x_+ + K_1 x_+] = \\ &= \|x_+\|^2 - \|x_-\|^2 = \|x_+\|^2 - \|K_1 x_+\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Введем подпространство

$$\tilde{\mathcal{L}} := \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}, \quad (2.26)$$

являющееся ортогональной суммой двух нейтральных подпространств. Как и в п.п. 1° – 2°, можно проверить, что оно является максимальным. В самом деле, в силу первой формулы (2.20) и (2.25):

$$P^+ \tilde{\mathcal{L}} = P^+ \mathcal{L}_1 \oplus P^+ \mathcal{L} = ((P^+ \mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+) \oplus P^+ \mathcal{L} = \mathcal{K}^+, \quad (2.27)$$

и тем самым третье утверждение теоремы доказано.

4°. Пусть теперь выполнено условие (2.15). Тогда в прежних обозначениях вместо (2.21) выполнено условие $n_+ = n_- =: n$. Введем аналогично (2.22) оператор K_1 , а по нему, как и выше, подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\tilde{\mathcal{L}}$. Тогда, с одной стороны, $\tilde{\mathcal{L}} \in \mathfrak{M}^+$, как это установлено в части 3° теоремы, а с другой, аналогично рассуждая, $\tilde{\mathcal{L}} \in \mathfrak{M}^-$. Таким образом, $\tilde{\mathcal{L}} \in \mathfrak{M}^+ \cap \mathfrak{M}^-$, т.е. $\mathcal{L}$ является гипермаксимальным нейтральным подпространством.

Теорема доказана. $\square$

Упражнение 2.4. Установить, что условие (2.15) является и необходимым для справедливости утверждения 4°. $\square$

Упражнение 2.5. Пусть пространство Крейна $\mathcal{K}$ имеет прямое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{L} \dot{+} \mathcal{M}$, где $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — подпространства, $\mathcal{L} \geq 0$, $\mathcal{M} \leq 0$. Доказать, что:

$$1^\circ \mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \{0\};$$

2° $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — максимальные семидефинитные подпространства.

Решение упражнения 2.5.

1°. Пусть $x_0 \in \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$. Тогда $[x_0, x_0] \geq 0$, $[x_0, x_0] \leq 0$, т.е. $[x_0, x_0] = 0$ и потому x_0 — нейтральный элемент. Так как $x_0 \in \mathcal{L} \geq 0$, то x_0 — изотропный элемент подпространства $\mathcal{L}$, поскольку

$$|[x_0, x]|^2 \leq [x_0, x_0] \cdot [x, x] = 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}.$$

Аналогично устанавливаем, что x_0 — изотропный элемент подпространства $\mathcal{M}$, а потому и всего пространства $\mathcal{K}$. Следовательно, $x_0 = 0$, так как $[x_0, Jx_0] = (x_0, x_0) = 0$.

2°. Проведем доказательство от противного. Пусть $\mathcal{L}$ не является максимальным подпространством. Тогда по теореме 2.1 его можно расширить до максимального неотрицательного подпространства $\tilde{\mathcal{L}} \supset \mathcal{L}$, и будем иметь

$$\mathcal{K} = \mathcal{L} + \mathcal{M} \subset \tilde{\mathcal{L}} + \mathcal{M} \subset \mathcal{K}.$$

Поэтому $\tilde{\mathcal{L}} + \mathcal{M} = \mathcal{K}$ и, согласно доказанному в п. 1°, $\tilde{\mathcal{L}} \cap \mathcal{M} = \{0\}$. Значит, $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$. $\square$

Рассмотрим далее некоторые другие факты, связанные с расширениями семидефинитных подпространств. Напомним, что между множеством $\mathfrak{M}^+$ всех неотрицательных максимальных подпространств и единичным операторным шаром

$$\mathfrak{K}_1^+ := \{K : \mathcal{K}^+ \longrightarrow \mathcal{K}^-, \quad \|K\| \leq 1\},$$

имеется взаимно однозначное соответствие. Кроме того, по теореме Тихонова $\mathfrak{K}_1^+$ является компактом в слабой операторной топологии (см. теорему 3.13 в [5], с. 60).

Пусть $\mathcal{L}_0 \geq 0$ — произвольное неотрицательное подпространство в $\mathcal{K}$. Введем обозначение

$$\mathfrak{M}^+(\mathcal{L}_0) := \{\tilde{\mathcal{L}} \in \mathfrak{M}^+ \mid \mathcal{L}_0 \subset \tilde{\mathcal{L}}\}. \quad (2.28)$$

Так как

$$\mathcal{L}_0 = \{x_+ + K_0 x_0 \mid x_0 \in P^+ \mathcal{L}_0\},$$

то аналогично (2.28) введем обозначение:

$$\mathfrak{K}_1^+(K_0) := \{K \in \mathfrak{K}_1^+ \mid K_0 \subset K\}. \quad (2.29)$$

Упражнение 2.6. Доказать, что между множествами $\mathfrak{M}^+(\mathcal{L}_0)$ и $\mathfrak{K}_1^+(K_0)$, где K_0 — угловой оператор неотрицательного подпространства $\mathcal{L}_0$, имеется взаимно однозначное соответствие. $\square$

Упражнение 2.7. Доказать, что множество $\mathfrak{K}_1^+(K_0)$ выпукло и компактно в слабой операторной топологии.

Указания к доказательству упражнения 2.7. Для установления выпуклости нужно проверить, что если $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}_1^+(K_0)$, то $\alpha K_1 + (1 - \alpha)K_2 \in \mathfrak{K}_1^+(K_0)$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Далее, так как $\mathfrak{K}_1^+(K_0) \subset \mathfrak{K}_1^+$, а $\mathfrak{K}_1^+$ компактно (в слабой операторной топологии) по теореме Тихонова, то $\mathfrak{K}_1^+(K_0)$ компактно (в слабой операторной топологии) тогда и только тогда, когда оно замкнуто (в слабой операторной топологии). Поэтому достаточно убедиться в замкнутости $\mathfrak{K}_1^+(K_0)$. $\square$

Лемма 2.2. Пусть $\mathcal{L} \geq 0$. Тогда

$$\{\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+\} \iff \{\mathcal{L}^{[\perp]} \in \mathfrak{M}^-\}. \quad (2.30)$$

При этом, если K — угловой оператор для $\mathcal{L}$, то K^* — угловой оператор для $\mathcal{L}^{[\perp]}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{L} \geq 0$ и $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$. Рассмотрим $\mathcal{L}^{[\perp]}$ и докажем, что оно является неположительным подпространством.

В самом деле, если $\mathcal{L}^{[\perp]}$ этим свойством не обладает, то найдется $y_0 \in \mathcal{L}^{[\perp]}$ такой, что $[y_0, y_0] > 0$ и $y_0[\perp]\mathcal{L}$. Отсюда следует, что подпространство

$$\tilde{\mathcal{L}} := \mathcal{L} + \text{л.о.}\{y_0\}, \quad y_0 \neq 0,$$

неотрицательно и является расширением максимального неотрицательного подпространства $\mathcal{L}$ — противоречие. Отсюда следует, что $\mathcal{L}^{[\perp]} \leq 0$.

Рассмотрим подпространство

$$\mathcal{M} := \{K^*x_- + x_- : x_- \in \mathcal{K}^-\}.$$

По определению это подпространство является максимальным неположительным. Пусть теперь $x \in \mathcal{L}$ и $y \in \mathcal{M}$ — произвольные элементы. Тогда они представимы в виде

$$x = x_+ + Kx_+, \quad y = K^*y_- + y_-,$$

и потому взаимно ортогональны:

$$[x, y] = (x_+, K^*y_-) - (Kx_+, y_-) = 0.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}^{[\perp]}$. Так как $\mathcal{M}$ — максимальное неположительное подпространство, а $\mathcal{L}^{[\perp]} \leq 0$, то $\mathcal{M} = \mathcal{L}^{[\perp]}$.

Поскольку (проверьте!) $(\mathcal{L}^{[\perp]})^{[\perp]} = \mathcal{L}$, то тем самым свойство (2.30) доказано в обе стороны. $\square$

Упражнение 2.8. Доказать, что в условиях леммы 2.2

$$\{\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+\} \iff \{\mathcal{L}^\perp \in \mathfrak{M}^-\},$$

где символом $\mathcal{L}^\perp$ обозначено ортогональное дополнение к $\mathcal{L}$ относительно канонического скалярного произведения. $\square$

В качестве следствия установленных фактов приведем еще в виде упражнения такое утверждение.

Упражнение 2.9. Если $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$, то

$$\{\mathcal{L} > 0 \quad (\mathcal{L} \gg 0)\} \iff \{\mathcal{L}^{[\perp]} < 0 \quad (\mathcal{L}^{[\perp]} \ll 0)\},$$

где в скобках использованы обозначения равномерно положительного и равномерно отрицательного подпространств. $\square$

Напомним (докажите!) теперь некоторые простые факты из теории линейных операторов, действующих из одного гильбертова пространства в другое. Пусть $A : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ и $B : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ — непрерывные операторы. Тогда, очевидно, $AB : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ и $BA : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ — также непрерывные операторы, но действующие уже в одном пространстве.

Ниже нам понадобится следующая известная теорема.

Теорема 2.2. Точка $\lambda \neq 0$ является регулярной для оператора AB , $\lambda \in \rho(AB)$, тогда и только тогда, когда $\lambda \in \rho(BA)$, т.е.

$$\begin{aligned}\{\rho(AB) \setminus \{0\}\} &\iff \{\rho(BA) \setminus \{0\}\}, \\ \{\sigma(AB) \setminus \{0\}\} &\iff \{\sigma(BA) \setminus \{0\}\}.\end{aligned}$$

□

Следствием теоремы 2.2 являются такие свойства.

$$1^\circ \{1 \in \rho(AB)\} \iff \{1 \in \rho(BA)\};$$

$$2^\circ \sigma_p(AB) \setminus \{0\} = \sigma_p(BA) \setminus \{0\}.$$

$$3^\circ \sigma_c(AB) \setminus \{0\} = \sigma_c(BA) \setminus \{0\};$$

$$4^\circ \sigma_r(AB) \setminus \{0\} = \sigma_r(BA) \setminus \{0\}.$$

Далее понадобится еще один важный факт.

Лемма 2.3. Если $\|A\| \leq 1$, $\|B\| \leq 1$, то $1 \notin \sigma_r(AB)$.

□

Это утверждение, в свою очередь, вытекает из следующего более общего результата.

Лемма 2.4. Пусть $K : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, $\|K\| \leq 1$. Тогда $1 \notin \sigma_r(K)$.

Доказательство. Предположим противное: $1 \in \sigma_r(K)$. Тогда, как известно, $1 \in \sigma_p(K^*)$, т.е. существует ненулевой элемент $x_0 \in \mathcal{H}$ такой, что $K^*x_0 = x_0$. Проверим, что $Kx_0 = x_0$ и тем самым получим противоречие с предположением.

Для доказательства равенства $Kx_0 = x_0$ рассмотрим билинейную форму

$$\langle x, y \rangle := (x, y) - (K^*x, K^*y). \quad (2.31)$$

Так как по условию $\|K^*\| = \|K\| \leq 1$, то форма (2.31) неотрицательна, т.е. $\langle x, x \rangle \geq 0$ для любого $x \in \mathcal{H}$. Поэтому для нее имеет место неравенство Коши–Буняковского:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle. \quad (2.32)$$

Пусть $x = x_0$, а y — любой элемент из $\mathcal{H}$. Так как $K^*x_0 = x_0$, то $\langle x_0, x_0 \rangle = 0$ и потому согласно (2.32) имеем $\langle x_0, y \rangle = 0$, т.е.

$$(x_0, y) - (K^*x_0, K^*y) = 0.$$

Отсюда получаем

$$(x_0 - KK^*x_0, y) = 0, \quad \forall y \in \mathcal{H},$$

т.е. $x_0 = K(K^*x_0) = Kx_0$.

□

Опираясь на приведенные выше сведения, докажем одно из важных утверждений из геометрии семидефинитных подпространств в пространстве Крейна.

Теорема 2.3 (о сумме максимальных семидефинитных подпространств). Пусть

$$\mathcal{L} = \{x_+ + Kx_+ \mid x_+ \in \mathcal{K}^+\} \in \mathfrak{M}^+, \quad (2.33)$$

$$\mathcal{M} = \{Qx_- + x_- : x_- \in \mathcal{K}^-\} \in \mathfrak{M}^-. \quad (2.34)$$

Тогда:

$$1^\circ \quad \{\overline{\mathcal{L} + \mathcal{M}} \neq \mathcal{K}\} \iff \{1 \in \sigma_p(KQ)\} \iff \{1 \in \sigma_p(QK)\};$$

$$2^\circ \quad \{\overline{\mathcal{L} + \mathcal{M}} = \mathcal{K}\} \iff \{1 \in \sigma_c(KQ) \cup \rho(KQ)\} \iff \\ \iff \{1 \in \sigma_c(QK) \cup \rho(QK)\};$$

$$3^\circ \quad \{\mathcal{L} + \mathcal{M} = \mathcal{K}\} \iff \{1 \in \rho(KQ)\} \iff \{1 \in \rho(QK)\}.$$

Доказательство. Проверим свойства 1° и 3° , из которых свойство 2° вытекает автоматически.

1° . Пусть $\mathcal{L} + \mathcal{M} \neq \mathcal{K}$. Обозначим $\mathcal{N} =: (\overline{\mathcal{L} + \mathcal{M}})^{[\perp]}$. Тогда $\mathcal{N}$ — нейтральное подпространство, совпадающее с $\mathcal{N} = \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$. Действительно, пусть $x_0 \in \mathcal{N}$ и x_0 не является нейтральным элементом, т.е. $[x_0, x_0] \neq 0$, например, $[x_0, x_0] > 0$. Тогда л.о. $\{x_0, \mathcal{L}\} \geq 0$ и содержит $\mathcal{L}$, что невозможно, поскольку $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$. Аналогично устанавливаем, что $\mathcal{N}$ не может содержать отрицательных векторов. Следовательно, подпространство $\mathcal{N}$ нейтрально. Более того, из тех же соображений, что и выше, $\mathcal{N}$ не может содержать и нейтральные векторы, не принадлежащие как $\mathcal{L}$, так и $\mathcal{M}$, т.е. $\mathcal{N} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$.

Так как $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — семидефинитные подпространства разных знаков, то $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$ — нейтральное подпространство, причем J — ортогональное как $\mathcal{L}$, так и $\mathcal{M}$, т.е. $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Таким образом, $\mathcal{N} = \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$.

Далее, пусть $x_0 \in \mathcal{N} = \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$. Тогда $x_0 \in \mathcal{L}$ и $x_0 \in \mathcal{M}$, потому существуют x_+^0 и x_-^0 такие, что

$$x_0 = x_+^0 + Kx_+^0, \quad x_+^0 \in \mathcal{K}^+, \quad x_0 = Qx_-^0 + x_-^0, \quad x_-^0 \in \mathcal{K}^-.$$

Отсюда следует, что

$$x_+^0 = Qx_-^0, \quad x_-^0 = Kx_+^0 \implies x_+^0 = QKx_+^0 \implies 1 \in \sigma_p(KQ).$$

Докажем теперь утверждение 1^0 в обратную сторону, т.е. установим, что из свойства $1 \in \sigma_p(QK)$ следует, что $\overline{\mathcal{L} + \mathcal{M}} \neq \mathcal{K}$.

Пусть $1 \in \sigma_p(QK)$. Тогда существует ненулевой элемент x_+^0 такой, что $x_+^0 = QKx_+^0 \in \mathcal{K}^+$. Введем элемент $x_-^0 := Kx_+^0 \in \mathcal{K}^-$, и из предыдущего равенства будем иметь соотношения

$$x_0 := x_+^0 + Kx_+^0 = Q(Kx_+^0) + x_-^0 = Qx_-^0 + x_-^0.$$

Из этих двух представлений элемента x_0 следует, в силу (2.33) и (2.34), что $x_0 \in \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$, а потому x_0 — нейтральный элемент. Тогда $x_0[\perp]\mathcal{L}$ и $x_0[\perp]\mathcal{M}$, т.е. $x_0[\perp](\mathcal{L} + \mathcal{M})$. Значит, $\overline{\mathcal{L} + \mathcal{M}} \neq \mathcal{K}$, так как $x_0 \neq 0$.

3^0 . Докажем теперь третье утверждение теоремы. Пусть $\mathcal{L} + \mathcal{M} = \mathcal{K}$. Тогда для любого $z \in \mathcal{K}$ найдутся элементы $x \in \mathcal{L}$ и $y \in \mathcal{M}$ такие, что $z = x + y$.

Возьмем $z \in \mathcal{K}^+$. Тогда, используя представления, $x = x_+ + Kx_+$, $y = Qy_- + y_-$, имеем

$$z = (x_+ + Qy_-) + (Kx_+ + y_-).$$

Так как здесь $z \in \mathcal{K}^+$, $x_+ + Qy_- \in \mathcal{K}^+$, $Kx_+ + y_- \in \mathcal{K}^-$, то

$$x_+ + Qy_- = z, \quad Kx_+ + y_- = 0.$$

Поэтому $y_- = -Kx_+$ и $z = (I - QK)x_+$, $\forall z \in \mathcal{K}^+$.

Последнее уравнение разрешимо для любого $z \in \mathcal{K}^+$. Действительно, если $\text{Ker}(I - QK) \neq \{0\}$, то найдется элемент $z_0 \in \mathcal{K}^+$, $z_0 \neq 0$, такой, что $QKz_0 = z_0$. Тогда

$$(z_0, (I - QK)^*u) = ((I - QK)z_0, u) = 0, \quad \forall u \in \mathcal{K}^+.$$

Это означает, что $1 \in \sigma_r((QK)^*)$. Однако $(QK)^*$ — сжатие (почему?), и эта ситуация невозможна (см. лемму 2.4). Значит, $\text{Ker}(I - QK) = \{0\}$.

В обратную сторону утверждение доказывается аналогично. Наконец, случай $z \in \mathcal{K}^-$ также рассматривается аналогично. Отсюда следует, что разложение $z = x + y$, $x \in \mathcal{L}$ и $y \in \mathcal{M}$, справедливо для любого $z \in \mathcal{K}$ и потому утверждение 3^0 , а вместе с ним и вся теорема, в частности, и свойство 2^0 , доказаны. $\square$

Приведем некоторые следствия из теоремы 2.3.

Следствие 2.1. Пусть $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$, $\mathcal{M} := \mathcal{L}^{[\perp]} \in \mathfrak{M}^-$. Тогда

$$\left\{ \mathcal{L}[+] \mathcal{L}^{[\perp]} = \mathcal{K} \right\} \iff \mathcal{L} \gg 0 \iff \mathcal{M} \ll 0. \quad \square$$

Доказательство. В самом деле, если $\mathcal{L}[+] \mathcal{L}^{[\perp]} = \mathcal{K}$, то, согласно утверждению 3° теоремы 2.3, $1 \in \rho(QK) = \rho(K^*K)$. Так как K^*K — самосопряженный неотрицательный оператор, то отсюда следует, что $\|K^*K\| = \|K\|^2 < 1$, т.е. $\|K\| < 1$. Поэтому, согласно лемме 2.1, получаем, что $\mathcal{L}$ — равномерно положительное подпространство. $\square$

Следствие 2.2.

$$\left\{ \overline{\mathcal{L}[+] \mathcal{L}^{[\perp]}} \neq \mathcal{K} \right\} \iff \left\{ \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]} \neq \{0\} \right\} \iff \{1 \in \sigma_p(K^*K)\}. \quad \square$$

Следствие 2.3.

$$\left\{ \mathcal{L}[+] \mathcal{L}^{[\perp]} \neq \overline{\mathcal{L}[+] \mathcal{L}^{[\perp]}} = \mathcal{K} \right\} \iff \{1 \in \sigma_c(K^*K)\}. \quad \square$$

Следствие 2.4. Пусть $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$, $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}^-$. Если хотя бы одно из подпространств $\mathcal{L}$ либо $\mathcal{M}$ — равномерно дефинитное подпространство, то $\mathcal{L} + \mathcal{M} = \mathcal{K}$.

Доказательство. Действительно, если $\mathcal{L} \gg 0$, то по лемме 2.1 угловой оператор K этого подпространства имеет норму $\|K\| < 1$. Поэтому $\|KQ\| \leq \|K\| \cdot \|Q\| < 1$ и, значит, $1 \in \rho(KQ)$. Отсюда и из утверждения 3° теоремы 2.3 получаем данное следствие, так как случай $\mathcal{M} \ll 0$ рассматривается аналогично. $\square$

Определение 2.7. Будем говорить, что неотрицательное/неположительное подпространство $\mathcal{L}$ принадлежит классу h^+/h^- , $\mathcal{L} \in h^+/h^-$, если оно допускает представление:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^0 + \mathcal{L}_1, \quad \dim \mathcal{L}^0 < \infty, \quad \mathcal{L}_1 \gg 0 / \ll 0,$$

где $\mathcal{L}^0$ — изотропная часть $\mathcal{L}$, а $\mathcal{L}_1$ — равномерно положительное/отрицательное подпространство. $\square$

Следствие 2.5. Если $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+ \cap h^+$ и $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}^-$, то

$$\{\mathcal{L} + \mathcal{M} = \mathcal{K}\} \iff \{\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \{0\}\}. \quad (2.35)$$

Соотношение (2.35) остается верным и в симметричном случае: если $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$ и $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}^- \cap h^-$.

Доказательство. Приведем рассуждения для первого случая, для второго, симметричного, доказательство аналогично.

Если $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+ \cap h^+$ и K — его угловой оператор, то согласно определению это подпространство и его составляющие можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \{x_+ + Kx_+ \mid x_+ \in \mathcal{K}^+\}, \\ \mathcal{L}_1 &= \{x_+ + Kx_+ \mid x_+ \in P^+\mathcal{L}_1\}, \\ \mathcal{L}^0 &= \{x_+ + Kx_+ \mid x_+ \in P^+\mathcal{L}_0 = (P^+\mathcal{L}_1)^\perp \cap \mathcal{K}^+\}.\end{aligned}$$

Проверим, что K можно представить в виде суммы равномерного сжатия и конечномерного оператора. В самом деле, так как $\mathcal{L}_1 \gg 0$, то $K_1 := K|_{P^+\mathcal{L}_1}$ по лемме 2.1 является равномерным сжатием, $\|K_1\| < 1$. Согласно утверждению 2° теоремы 2.1 существует равномерное сжатие $\tilde{K}$, заданное на всем $\mathcal{K}^+$ и являющееся расширением оператора K_1 . Так как по условию $\dim \mathcal{L}^0 < \infty$, то коразмерность подпространства $P^+\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{K}^+$ равна $\dim P^+\mathcal{L}^0 < \infty$. Следовательно, оператор $S := K - \tilde{K}$ является конечномерным, а потому $K = \tilde{K} + S$ — сумма равномерного сжатия ($\tilde{K}$) и конечномерного оператора (S).

Пусть теперь Q — угловой оператор подпространства $\mathcal{M}$. Отсюда $KQ = \tilde{K}Q + SQ$ — сумма равномерного сжатия ($\tilde{K}Q$) и конечномерного оператора (SQ). Так как $1 \in \rho(\tilde{K}Q)$, то согласно альтернативы Фредгольма либо $1 \in \sigma_p(\tilde{K}Q)$, либо $1 \in \rho(\tilde{K}Q)$. Для завершения доказательства следствия остается сравнить полученное с утверждениями 1° и 3° теоремы 2.3. $\square$

Рассмотрим теперь вопрос о связи различных канонических разложений пространства Крейна.

Пусть

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[+]\mathcal{K}^-, \quad J := P^+ - P^-, \quad (2.36)$$

где $P^\pm$ — ортопроекторы на $\mathcal{K}^\pm$, соответственно. Относительно разложения (2.36) эти проекторы и оператор J имеют следующие матричные представления:

$$P^+ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим другое каноническое разложение:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+[+]\mathcal{K}_1^-, \quad J_1 := P_1^+ - P_1^-,$$

где $P_1^\pm$ — проекторы на $\mathcal{K}_1^\pm$, соответственно. В силу следствия 2.1 имеем $\mathcal{K}_1^\pm \in \mathfrak{M}^\pm$, $\mathcal{K}_1^+ \gg 0$, $\mathcal{K}_1^- \ll 0$. Поэтому существует такое равномерное сжатие $K : \mathcal{K}^+ \rightarrow \mathcal{K}^-$, что

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1^+ &= \{x = x_+ + Kx_+ \mid x_+ \in \mathcal{K}^+\}, \\ \mathcal{K}_1^- &= \{x = K^*x_- + x_- \mid x_- \in \mathcal{K}^-\}.\end{aligned}$$

Следующее упражнение дает ответ на вопрос о матричном представлении канонических проекторов $P_1^\pm$ через угловой оператор K подпространства $\mathcal{K}_1^\pm$.

Упражнение 2.10. Доказать, что в разложении (2.36)

$$\begin{aligned}P_1^+ &= \begin{pmatrix} (I - K^*K)^{-1} & -(I - K^*K)^{-1}K^* \\ K(I - K^*K)^{-1} & -K(I - K^*K)^{-1}K^* \end{pmatrix}, \\ P_1^- &= \begin{pmatrix} -K^*(I - KK^*)^{-1}K & K^*(I - KK^*)^{-1} \\ -(I - KK^*)^{-1}K & (I - KK^*)^{-1} \end{pmatrix}. \quad \square\end{aligned}$$

Рассмотрим ситуацию более общую, нежели пространство Крейна, и в качестве упражнения решим вопрос об описании неположительных линеалов. Результатом этого упражнения мы воспользуемся в дальнейших рассмотрениях.

Упражнение 2.11. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-, \quad W := \text{diag}(W_+; -W_-), \quad W_\pm \geq 0, \quad W_+ \gg 0. \quad (2.37)$$

Введем билинейную форму

$$[x, y] := (Wx, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}. \quad (2.38)$$

Доказать, что линеал $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ неположителен по форме (2.38) тогда и только тогда, когда найдется оператор $Q : \mathcal{H}_- \rightarrow \mathcal{H}_+$, $\|Q\| \leq 1$, такой, что

$$\mathcal{L} = \left\{ W_+^{-1/2} Q W_-^{1/2} x_- + x_- : x_- \in P_- \mathcal{L} \right\}. \quad (2.39)$$

Если Q задан на всем $\mathcal{H}_-$, то $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^-$. □

Указание к решению упражнения 2.11. Проверить, что неотрицательность вектора $x = x_+ + x_-$ равносильна условию:

$$(W_+x_+, x_+) \leq (W_-x_-, x_-), \quad x = x_+ + x_- \in \mathcal{L},$$

или, что эквивалентно, условию

$$(W_+^{1/2}x_+, W_+^{1/2}x_+) \leq (W_-^{1/2}x_-, W_-^{1/2}x_-).$$

Теперь остается определить оператор Q . □

Приведем пример ситуации, встретившейся в упражнении 2.11. Пусть $\mathcal{L}$ — неотрицательное подпространство в пространстве Крейна $\mathcal{K}$. Найдем $\mathcal{L}^{[\perp]}$. Очевидно, $\mathcal{K}$ допускает представление

$$\mathcal{K} = \left[(P^+\mathcal{L})^\perp \mathcal{K}^+ \right] [\oplus] [P^+\mathcal{L} \oplus \mathcal{K}^-]. \quad (2.40)$$

Так как $\mathcal{L} \geq 0$, то

$$\mathcal{L} = \{x_+ + Kx_+ : x_+ \in P^+\mathcal{L}, \quad \|K\| \leq 1\}, \quad (2.41)$$

где $K = K_{\mathcal{L}}$ — угловой оператор подпространства $\mathcal{L}$. Отсюда следует, что

$$\mathcal{L} \subset P^+\mathcal{L} \oplus \mathcal{K}^-. \quad (2.42)$$

Если $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$, т.е. $\mathcal{L}$ — максимальное неотрицательное подпространство, то по лемме 2.2 $\mathcal{L}^{[\perp]} \in \mathfrak{M}^-$. Поэтому $P^-\mathcal{L}^{[\perp]} = \mathcal{K}^-$ и имеет место представление

$$\mathcal{L}^{[\perp]} = \left[(P^+\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+ \right] [\oplus] \left[\mathcal{L}^{[\perp]} \cap (P^+\mathcal{L} \oplus \mathcal{K}^-) \right]. \quad (2.43)$$

Здесь первое слагаемое в квадратных скобках, очевидно, есть подмножество $\mathcal{K}^+$, а второе слагаемое — подмножество из $\mathcal{L}^{[\perp]}$, т.е. неотрицательное подпространство.

Введем оператор W , имеющий в ортогональном разложении $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ [\oplus] \mathcal{K}^-$ матричное представление

$$W := \text{diag}(I; G) =: \text{diag}(W_+; -W_-), \quad (2.44)$$

где G — оператор Грама подпространства $\mathcal{L}^{[\perp]} \cap (P^+\mathcal{L} \oplus \mathcal{K}^-)$. Тогда в силу (2.43) W — оператор Грама подпространства $\mathcal{L}^{[\perp]}$.

Нетрудно видеть, что формула (2.44) для W есть частный случай формулы (2.37), когда

$$W_+ = I, \quad W_- = -G, \quad W_\pm \geq 0, \quad W_+ \gg 0. \quad (2.45)$$

Таким образом, ситуация, описанная в упражнении 2.11, является естественной в пространстве Крейна.

2.4 Дуальные пары

Введем важное для дальнейшего понятие дуальных пар подпространств пространства Крейна. В пространстве Понтрягина это понятие уже встречалось ранее.

Определение 2.8. Пара подпространств $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ называется дуальной, если

$$\mathcal{L}_+ \subset \mathfrak{P}^+, \quad \mathcal{L}_- \subset \mathfrak{P}^-, \quad \mathcal{L}_+[\perp]\mathcal{L}_-,$$

т.е.

$$[x, y] = 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}_+, \quad \forall y \in \mathcal{L}_-. \quad \square$$

Определение 2.9. Дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ называется максимальной, если $\mathcal{L}_\pm$ — максимальные подпространства, т.е. $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$. $\square$

Приведем важный результат Р.С. Филлипса, связанный с возможностью расширения дуальных пар.

Теорема 2.4. (о расширении дуальных пар). Каждую дуальную пару $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ можно расширить до максимальной дуальной пары $\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\}$:

$$\mathcal{L}_\pm \subset \tilde{\mathcal{L}}_\pm, \quad \tilde{\mathcal{L}}_+[\perp]\tilde{\mathcal{L}}_-, \quad \tilde{\mathcal{L}}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm. \quad (2.46)$$

Доказательство. Приведем сначала схему доказательства этой теоремы. Рассмотрим подпространство $\mathcal{M} := (\mathcal{L}_+)^{[\perp]}$, которое, очевидно, содержит $\mathcal{L}_-$. Расширим $\mathcal{L}_-$ до максимально возможного подпространства $\tilde{\mathcal{L}}_- \subset \mathcal{M}$. Тогда окажется, что $\tilde{\mathcal{L}}_-$ — максимальное неотрицательное подпространство в пространстве $\mathcal{K}$. Далее введем $\tilde{\mathcal{L}}_+ := (\tilde{\mathcal{L}}_-)^{[\perp]}$.

Реализуя эту схему, введем $\mathcal{M} := (\mathcal{L}_+)^{[\perp]}$. Как было установлено выше (см. упражнение 2.11 и пример после него), множество $\mathcal{M}$ является W -пространством с W -метрикой, задаваемой формулой (2.38) с $W = \text{diag}(I; -W_-)$ в ортогональном разложении

$$\mathcal{M} = \left[(P^+ \mathcal{L}_+)^{\perp} \cap \mathcal{K}^+ \right] \oplus \left[\mathcal{L}_+^{[\perp]} \cap (P^+ \mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{K}^-) \right], \quad (2.47)$$

где $-W_-$ — определитель Грама подпространства $\mathcal{L}_+^{[\perp]} \cap (P^+ \mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{K}^-)$.

Очевидно, по определению $\mathcal{M}$, имеем $\mathcal{L}_- \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{L}_- \leq 0$. Поэтому, согласно утверждению упражнения 2.11 и формулам (2.45),

$$\mathcal{L}_- = \left\{ QW_-^{-1/2}x_- + x_- : x_- \in P\mathcal{L}_- \right\}, \quad (2.48)$$

где P — проектор на подпространство $\mathcal{L}_+^{[\perp]} \cap (P^+\mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{K}^-)$, а $\|Q\| \leq 1$.

Возьмем расширение $\tilde{\mathcal{L}}_-$ подпространства $\mathcal{L}_-$ по формуле

$$\tilde{\mathcal{L}}_- := \left\{ \tilde{Q}W_-^{-1/2}x_- + x_- : x_- \in \mathcal{L}_+^{[\perp]} \cap (P^+\mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{K}^-) \right\}, \quad (2.49)$$

где $\tilde{Q}$ — расширение оператора Q на все подпространство $\mathcal{L}_+^{[\perp]} \cap (P^+\mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{K}^-) \supset P\mathcal{L}_-$, причем $\|\tilde{Q}\| \leq 1$. Это можно сделать согласно свойству (2.14). Тогда

$$P\tilde{\mathcal{L}}_- = \mathcal{L}_+^{[\perp]} \cap (P^+\mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{K}^-). \quad (2.50)$$

Возникает вопрос, справедливо ли свойство $P^-\tilde{\mathcal{L}}_- = \mathcal{K}^-$, т.е. является ли расширение $\tilde{\mathcal{L}}_-$ максимальным.

Действительно, имеем

$$P^-\tilde{\mathcal{L}}_- = P^-(P\tilde{\mathcal{L}}_-) = P^-\left[\mathcal{L}_+^{[\perp]} \cap (P^+\mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{K}^-)\right], \quad (2.51)$$

причем здесь, как и в формуле (2.43), имеет место свойство максимальнойности правой части в $\mathcal{K}^-$, т.е. $P^-\tilde{\mathcal{L}}_- = \mathcal{K}^-$.

Наконец, $\tilde{\mathcal{L}}_+ := \left(\tilde{\mathcal{L}}_-\right)^{[\perp]}$ также является максимальным неотрицательным подпространством (лемма 2.2) и $\tilde{\mathcal{L}}_+ \supset \mathcal{L}_+$. Поэтому $\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\}$ — максимальная дуальная пара. $\square$

Замечание 2.2. Если дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ обладает свойствами $\mathcal{L}_+ \gg 0$, $\mathcal{L}_- \ll 0$, то можно найти такое расширение $\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\}$ этой пары, $\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\} \supset \{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, что $\tilde{\mathcal{L}}_+ \gg 0$, $\tilde{\mathcal{L}}_- \ll 0$ (использовать утверждение 2⁰ теоремы 2.1). $\square$

Замечание 2.3. Пусть дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ дефинитна, т.е. $\mathcal{L}_+ > 0$, $\mathcal{L}_- < 0$. Всегда ли расширение $\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\}$ этой пары тоже дефинитно? Оказывается, не всегда. Так будет в том и только том случае, когда подпространство $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ невырождено. $\square$

2.5 Диссипативные операторы

Опираясь на предыдущие факты, перейдем к изучению свойств диссипативных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Определение 2.10. Пусть $A : \text{dom } A \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ — линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\overline{\text{dom } A} = \mathcal{H}$. Оператор A называют диссипативным, если

$$\text{Im}(Ax, x) \geq 0, \quad \forall x \in \text{dom } A,$$

и максимальным диссипативным, если его нельзя расширить с сохранением свойства диссипативности. $\square$

В проблеме расширения диссипативных операторов важную роль играет следующее утверждение Р.С. Филлипса.

Теорема 2.5. (о расширении диссипативных операторов).

1⁰. Каждый замкнутый диссипативный оператор A с $\overline{\text{dom } A} = \mathcal{H}$ допускает расширение до максимального диссипативного оператора $\tilde{A}$, которое замкнуто автоматически.

2⁰. Диссипативный оператор A является максимальным диссипативным тогда и только тогда, когда все точки λ с $\text{Im } \lambda < 0$ являются регулярными для A .

3⁰. Если операторы A и B диссипативны, замкнуты и плотно заданы, т.е. $\overline{\text{dom } A} = \overline{\text{dom } B} = \mathcal{H}$, и

$$(Ax, y) = (x, -By), \quad \forall x \in \text{dom } A, \quad \forall y \in \text{dom } B,$$

то существует такое максимальное расширение $\tilde{A}$ оператора A , что $\tilde{A}$ — максимальный диссипативный оператор и $-\tilde{A}^* \supset B$.

Доказательство.

1⁰. Введем пространство Крейна $\mathcal{K} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, у которого

$$[x, y] := (Jx, y), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}, \quad Jx = J \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\tilde{y} \\ i\tilde{x} \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Тогда

$$\left(J \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right) = -i(\tilde{y}, \tilde{x}) + i(\tilde{x}, \tilde{y}) = -2\text{Im}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 2\text{Im}(\tilde{y}, \tilde{x}).$$

Введем линеал

$$\mathcal{L} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} : x \in \operatorname{dom} A \right\} = \Gamma_A = \overline{\Gamma}_A, \quad (2.53)$$

являющийся графиком оператора A и потому замкнутым подпространством. Так как

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} \right] = 2 \operatorname{Im} (Ax, x) \geq 0,$$

то $\mathcal{L}$ — неотрицательный линеал в $\mathcal{K}$. По теореме 2.1 его можно расширить до максимального неотрицательного подпространства $\tilde{\mathcal{L}} \in \mathfrak{M}^+$. Если $\tilde{\mathcal{L}}$ является графиком некоторого максимального диссипативного оператора $\tilde{A}$, то свойство 1⁰ будет доказано. С этой целью проверим, что в $\tilde{\mathcal{L}}$ нет элементов вида $u := (0; \tilde{u})^t$ с $\tilde{u} \neq 0$. Пусть, напротив, элемент $u = (0; \tilde{u})^t \in \tilde{\mathcal{L}}$. Так как для такого элемента выполнено свойство $(Ju, u) = 0$, то u — нейтральный элемент, а так как $\tilde{\mathcal{L}} \geq 0$, то он изотропен (почему?). Возьмем элемент $(x; Ax)^t \in \mathcal{L} = \Gamma_A$. Тогда

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} \right] = -i(\tilde{u}, x) = 0, \quad \forall x \in \operatorname{dom} A, \quad \overline{\operatorname{dom} A} = \mathcal{H}.$$

Отсюда следует, что $\tilde{u} = 0$ и потому $\tilde{\mathcal{L}} = \Gamma_{\tilde{A}}$, т.е. является графиком некоторого оператора $\tilde{A} \supset A$, который по построению максимальный диссипативный.

2⁰. Пусть A — максимальный диссипативный оператор, действующий в $\mathcal{H}$. Введем, как и выше, пространство Крейна $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, оператор J из (2.52) и соответствующее скалярное произведение $[x, y]$. Так как $J = P^+ - P^-$, $I = P^+ + P^-$, то

$$P^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -iI \\ iI & I \end{pmatrix}, \quad P^- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & iI \\ -iI & I \end{pmatrix},$$

$$K^+ = P^+ \mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} : x \in \mathcal{H} \right\}, \quad K^- = P^- \mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix} : x \in \mathcal{H} \right\}.$$

Введем, далее, неотрицательное подпространство $\mathcal{L} = \Gamma_A$, см. (2.53). Докажем, что A является максимальным диссипативным оператором тогда и только тогда, когда $\Gamma_A \in \mathfrak{M}^+$ либо, что равносильно, $P^+ \Gamma_A = K^+$.

Имеем

$$\begin{aligned} \left\{ 2P^+ \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} : x \in \operatorname{dom} A \right\} &= \left\{ \begin{pmatrix} I & -iI \\ iI & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} : x \in \operatorname{dom} A \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x - iAx \\ ix + Ax \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{K}^+ \iff \{ix + Ax : x \in \operatorname{dom} A\} = \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Последнее свойство равносильно тому, что для любого $y \in \mathcal{H}$ найдется $x \in \operatorname{dom} A$ такой, что $(A + iI)x = y$. Проверим сначала, что $\operatorname{Ker}(A + iI) = \{0\}$. Предположив противное, считаем, что найдется $x_0 \in \operatorname{dom} A$, $x_0 \neq 0$, такой, что $x_0 \in \operatorname{Ker}(A + iI)$. Тогда $(Ax_0, x_0) + i(x_0, x_0) = 0$, откуда следует, что $\operatorname{Im}(Ax_0, x_0) = -(x_0, x_0) < 0$. Возникло противоречие со свойством диссипативности оператора A .

Итак, $\operatorname{Ker}(A + iI) = \{0\}$ и потому существует обратный оператор $(A + iI)^{-1}$, который должен быть задан при любом $y \in \mathcal{H}$, т.е. на всем пространстве. Тогда этот оператор ограничен (почему?) и, следовательно, $-i \in \rho(A)$. Эти рассуждения обратимы, и потому оператор A является максимальным диссипативным тогда и только тогда, когда $-i \in \rho(A)$.

Теперь для доказательства утверждения 2⁰ теоремы достаточно заметить, что все операторы вида $aA + bI$ с $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$ являются максимальными диссипативными вместе с A . Отсюда следует, что любое λ с $\operatorname{Im} \lambda < 0$ принадлежит $\rho(A)$.

3⁰. Для доказательства утверждения 3⁰ данной теоремы приведем следующие общие соображения. Рассмотрим подпространства Γ_A и Γ_{-B} ; первое, очевидно, неотрицательно, а второе — неположительно. Так как $(Ax, y) = (x, -By)$, $x \in \operatorname{dom} A$, $y \in \operatorname{dom} B$, то легко проверить, что $\Gamma_A \perp \Gamma_{-B}$. Отсюда следует, что $\{\Gamma_A, \Gamma_{-B}\}$ — дуальная пара подпространств пространства $\mathcal{K}$. Тогда по теореме 2.4 эту пару можно расширить до максимальной дуальной пары $\{\Gamma_{\tilde{A}}, \Gamma_{\tilde{-B}}\}$, $A \subset \tilde{A}$, $B \subset \tilde{B}$. Осталось лишь проверить, что $-\tilde{B} = \tilde{A}^*$. Предоставляем читателю выяснить этот факт самостоятельно. □

Обобщая предыдущие рассмотрения, познакомимся со следующей проблемой Филлипса. Пусть U — группа коммутирующих унитарных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а операторы A и B обладают прежними свойствами. Кроме того, выполнены свойства $UA = AU$, $UB = BU$, $\forall U$. Возникает вопрос, можно ли расширить пару операторов $\{A, B\}$ до максимальной диссипативной пары $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$ таким образом, чтобы снова выполнялись

свойства $U\tilde{A} = \tilde{A}U$, $U\tilde{B} = \tilde{B}U$, $\forall U$. Это непростая задача, и ответ является положительным. Соответствующее утверждение — весьма серьезный результат Р.С. Филлипса.

Определение 2.11. Оператор $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, $\overline{\text{dom } A} = \mathcal{H}$, называется симметрическим, если

$$(Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in \text{dom } A.$$

Оператор A называется самосопряженным, если $A = A^*$, т.е.

$$Ax = A^*x, \quad \forall x \in \text{dom } A = \text{dom } A^*. \quad \square$$

Поставим вопрос: когда симметрический оператор A можно расширить до самосопряженного? Как известно из учебников по функциональному анализу, это можно сделать тогда и только тогда, когда

$$\dim \text{Ker } (A^* + iI) = \dim \text{Ker } (A^* - iI).$$

Возвращаясь к введенному выше пространству Крейна $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, рассмотрим снова

$$\Gamma_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} : x \in \text{dom } A \right\}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, если $A = A^*$, то Γ_A — нейтральное подпространство.

Упражнение 2.12. Доказать, что симметричный оператор A , действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, допускает самосопряженное расширение тогда и только тогда, когда Γ_A допускает гипермаксимальное нейтральное расширение. $\square$

3 Основные классы операторов

В этой части пособия будут рассмотрены основные классы линейных операторов, действующих в пространстве Крейна: диссипативные, самосопряженные и другие.

3.1 Основные определения

Будем считать, если не оговорено противное, что T — непрерывный оператор, определенный на всем пространстве Крейна $\mathcal{K}$, $\text{dom } T = \mathcal{K}$.

Пусть $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ — пространства Крейна с индефинитными формами $[\cdot, \cdot]_1 = (W_1 \cdot, \cdot)_1$, $[\cdot, \cdot]_2 = (W_2 \cdot, \cdot)_2$ соответственно. (Возможен вариант, что $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$ как множества, но заданные на них формы $[\cdot, \cdot]_1$ и $[\cdot, \cdot]_2$ могут быть разными.) Пусть $T : \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$.

Рассмотрим при любых $x \in \mathcal{K}_1$ и $y \in \mathcal{K}_2$ билинейную форму

$$\begin{aligned} [Tx, y]_2 &= (W_2 Tx, y)_2 = (x, T^* W_2 y)_1 = \\ &= (W_1 x, W_1^{-1} T^* W_2 y)_1 = [x, T^c y]_1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Определение 3.1. Оператор

$$T^c := W_1^{-1} T^* W_2 \quad (3.2)$$

называется сопряженным к оператору T относительно форм $[\cdot, \cdot]_1$ и $[\cdot, \cdot]_2$. $\square$

Если, в частности, $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$, $W_1 = W_2 =: W$, то

$$T^c = W^{-1} T^* W, \quad (3.3)$$

а если $W = J$ (каноническая симметрия), то

$$T^c = J T^* J, \quad (3.4)$$

т.е. T^c и T^* — подобные операторы.

Пусть $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}$, $W_1 = W_2$. Тогда так же, как в $\Pi_{\mathcal{K}}$, имеем следующие свойства спектра для любого T с $\text{dom } T = \mathcal{K}$:

- 1⁰. $\sigma(T^c) = \sigma(T^*)$;
- 2⁰. $\{\lambda \in \rho(T)\} \iff \{\bar{\lambda} \in \rho(T^c)\}$;
- 3⁰. $\{\lambda \in \sigma(T)\} \iff \{\bar{\lambda} \in \sigma(T^c)\}$;
- 4⁰. $\{\lambda \in \sigma_c(T)\} \iff \{\bar{\lambda} \in \sigma_c(T^c)\}$;

5⁰.

$$\left\{ \lambda \in \sigma_p(T), \overline{\operatorname{ran}(T - \lambda I)} \neq \mathcal{K} \right\} \iff \left\{ \bar{\lambda} \in \sigma_p(T^c), \overline{\operatorname{ran}(T^c - \bar{\lambda} I)} \neq \mathcal{K} \right\};$$

$$6^0. \quad \left\{ \lambda \in \sigma_r(T) \right\} \iff \left\{ \bar{\lambda} \in \sigma_p(T^c), \overline{\operatorname{ran}(T - \bar{\lambda} I)} = \mathcal{K} \right\}.$$

Отметим еще одно важное свойство.

Лемма 3.1. Пусть $T : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$, а $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — инвариантные подпространства для T и T^c соответственно: $T\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$, $T^c\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. Пусть, далее,

$$\sigma^*(T|_{\mathcal{L}}) \cap \sigma(T^c|_{\mathcal{M}}) = \emptyset. \quad (3.5)$$

Тогда $\mathcal{L}[\perp]\mathcal{M}$. В частности, $\mathcal{L}_\lambda(T)[\perp]\mathcal{L}_\mu(T)$, если $\lambda \neq \bar{\mu}$. $\square$

(Доказательство этого утверждения такое же, как в $\Pi_{\mathcal{K}}$.)

Снова рассмотрим пространство Крейна $\mathcal{K}$ с формой $[\cdot, \cdot] = (W\cdot, \cdot)$.

Определение 3.2. Оператор $A : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ называется диссипативным по отношению к форме $[\cdot, \cdot]$ (W -диссипативным), если

$$\operatorname{Im}[Ax, x] \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{K}. \quad (3.6)$$

$\square$

Из (3.6) следует, что

$$\operatorname{Im}(W Ax, x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{H} = \mathcal{K}, \quad (3.7)$$

т.е. A является W -диссипативным тогда и только тогда, когда WA диссипативен, т.е. диссипативен в $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$.

Докажем некоторые свойства спектра W -диссипативных операторов. Они устанавливаются с помощью интеграла Рисса так же, как в пространстве Понтрягина.

Лемма 3.2. Если σ — изолированная часть спектра $\sigma(A)$ W -диссипативного оператора A , $\sigma \subset \mathbb{C}^+(\mathbb{C}^-)$ ($\mathbb{C}^+$ и $\mathbb{C}^-$ — верхняя и нижняя комплексные полуплоскости), то инвариантное подпространство $\mathcal{L}$, отвечающее этому σ , неотрицательно (соответственно неположительно). $\square$

Доказательство. Если $\sigma \in \mathbb{C}^+$, то можно построить около σ жорданов контур Γ_σ , содержащий внутри себя σ и такой, что $\sigma(A) \setminus \sigma$ находится вне Γ_σ . Кроме того, весь Γ_σ расположен в $\mathbb{C}^+$.

Введем проектор Рисса

$$P_\sigma := -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\sigma} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda, \quad (3.8)$$

а также подпространство $\mathcal{L} = P_\sigma \mathcal{K}$, инвариантное относительно A : $A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. Тогда $\sigma(A|_{\mathcal{L}}) = \sigma$.

Осталось лишь теперь убедиться, что $\{\sigma \subset \mathbb{C}^+\} \implies \{\mathcal{L} \geq 0\}$. Этот факт доказывается так же, как в $\Pi_{\mathcal{K}}$.

Аналогично рассматривается случай $\sigma \subset \mathbb{C}^-$. $\square$

Определение 3.3. Оператор $A : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ называется равномерно диссипативным, если найдется $\alpha > 0$ такое, что

$$\operatorname{Im} [Ax, x] \geq \alpha \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{K}. \quad (3.9)$$

$\square$

Приведем без доказательства некоторые свойства равномерно диссипативных операторов.

1⁰. Если A равномерно диссипативен, то $\mathbb{R} \subset \rho(A)$ (как и в $\Pi_{\mathcal{K}}$!).

2⁰. Пусть $\sigma = \sigma(A) \cap \mathbb{C}^+$ — изолированная часть спектра равномерно диссипативного оператора A , расположенная в верхней полуплоскости, а P_σ — соответствующий проектор Рисса (3.8). Тогда подпространство $\mathcal{L}_+ := P_\sigma \mathcal{K}$, инвариантное для A , является равномерно положительным. Если $\sigma \subset \mathbb{C}^-$, то соответствующее этой части спектра σ инвариантное подпространство $\mathcal{L}_-$ равномерно отрицательно. При этом имеем также

$$\mathcal{L}_+ [+] \mathcal{L}_- = \mathcal{K}, \quad \mathcal{L}_\pm \in \mathcal{M}^\pm, \quad (3.10)$$

если $\sigma \in \mathbb{C}^+$, $\sigma(A) \setminus \sigma \in \mathbb{C}^-$.

Напомним, что в пространстве Понтрягина у любого диссипативного оператора существует максимальное неотрицательное инвариантное подпространство. В пространстве Крейна аналогичная общая проблема не решена до сих пор.

3.2 Об инвариантных подпространствах диссипативных операторов в пространстве Крейна

Пусть $\{\mathcal{K}, [\cdot, \cdot]\}$ — пространство Крейна, а A — диссипативный непрерывный оператор, действующий в $\mathcal{K}$.

Теорема 3.1. (о существовании инвариантного подпространства для диссипативного оператора). Если найдется такое каноническое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$ пространства Крейна, что выполнено условие

$$P^+AP^- \in \mathfrak{S}_\infty, \quad (3.11)$$

то у оператора A существует неотрицательное инвариантное подпространство. $\square$

Замечание 3.1. Может оказаться, что в данном каноническом разложении условие (3.11) не выполнено, однако в другом каноническом разложении оно может быть выполнено, и тогда инвариантное неотрицательное подпространство для оператора A существует. $\square$

Прежде чем доказывать теорему 3.1, остановимся кратко на истории вопроса, связанного с доказательством этой важной теоремы, и перечислим основные этапы.

1⁰. В пространстве $\Pi_\varkappa$ для самосопряженных операторов первое доказательство в 1944 г. было дано Понтрягиным Л.С. (для $\varkappa = 1$ в 1943 г. — С.Л. Соболевым).

2⁰. В $\Pi_\varkappa$ для унитарных операторов соответствующее утверждение доказал И.С. Иохвидов.

3⁰. Для диссипативных операторов, действующих в $\Pi_\varkappa$, результат получили Т.Я. Азизов, а также М.Г. Крейн и Г. Лангер.

4⁰. В $\Pi_\varkappa$ для несжимающих операторов результат принадлежит Бродскому М.Л., Бонсаллу Ф.Ф. и Крейну М.Г.

5⁰. Для самосопряженных операторов в пространстве Крейна теорему доказал Г. Лангер.

6⁰. Для унитарных операторов в $\mathcal{K}$ результат принадлежит Крейну М.Г.

7⁰. Для несжимающих операторов в $\mathcal{K}$ теорема доказана Крейном М.Г., Иохвидовым И.С., Хацкевичем В.А.

8⁰. Наконец, для диссипативных операторов, действующих в $\mathcal{K}$, результат получили Азизов Т.Я., Иохвидов Е.И. и другие. В последние годы интересные результаты для этого случая получены в работах А.А. Шкаликова.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 3.1. Оно проводится по той же схеме, как и в пространстве Понтрягина.

Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ [\oplus] \mathcal{K}^-$, $P^+AP^- \in \mathfrak{S}_\infty$. Тогда в этом ортогональном

разложении

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{12} = P^+ A P^- \in \mathfrak{S}_\infty, \quad J = P^+ - P^-. \quad (3.12)$$

Рассмотрим последовательность операторов

$$A_n := A + \frac{1}{n} iJ, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.13)$$

которые, как нетрудно проверить, являются равномерно диссипативными, так как диссипативен A . Пусть

$$\sigma_{+,n} := \sigma(A_n) \cap \mathbb{C}^+, \quad \mathcal{L}_n^+ := P_{\sigma_{+,n}} \mathcal{K} \in \mathfrak{M}^+. \quad (3.14)$$

Здесь $\mathcal{L}_n^+$ — равномерно положительное инвариантное относительно A_n подпространство (см. свойство 2^0 после определения 3.3), и оно имеет вид

$$\mathcal{L}_n^+ = \{x_+ + K_n x_+ : x_+ \in \mathcal{K}^+\}, \quad (3.15)$$

где K_n — угловой оператор $\mathcal{L}_n^+$, $\|K_n\| \leq 1$.

Так как единичный операторный шар

$$B_1 = \{K : \mathcal{K}^+ \longrightarrow \mathcal{K}^- : \|K\| \leq 1\} \quad (3.16)$$

компактен в слабой операторной топологии, а последовательность $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ угловых операторов принадлежит B_1 , то из нее можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность. Для простоты будем считать, что $K_n \longrightarrow K$ (в слабой операторной топологии), $\|K\| \leq 1$.

Тогда подпространство

$$\mathcal{L} := \{x_+ + K x_+ : x_+ \in \mathcal{K}^+\} \quad (3.17)$$

является искомым. Оно, очевидно, является максимальным, так как $x_+ \in \mathcal{K}^+$ — произвольный вектор. Докажем, что оно инвариантно для A : $A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. Как и в пространстве Понтрягина, для этого достаточно убедиться, что предельный оператор K является решением операторного уравнения

$$A_{21} + A_{22}K = KA_{11} + KA_{12}K \quad (3.18)$$

в шаре B_1 . Это условие является и необходимым для существования у A инвариантного максимального неотрицательного подпространства $\mathcal{L}$.

Рассмотрим последовательность $\mathcal{L}_n^+$ инвариантных подпространств для последовательности операторов A_n . Тогда, очевидно, $A_n \mathcal{L}_n^+ \subset \mathcal{L}_n^+$ и потому

$$A_{21} + \left\{ A_{22} - \frac{1}{n} iI \right\} K_n = K_n \left(A_{11} + \frac{1}{n} iI \right) + K_n A_{12} K_n, \quad (3.19)$$

так как

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{11} + \frac{1}{n} iI & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \frac{1}{n} iI \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим пределы, к которым сходятся слагаемые в (3.19) при $n \rightarrow \infty$.

1⁰. Очевидно, $A_{21} \rightarrow A_{21}$ ($n \rightarrow \infty$).

2⁰. Далее

$$\left\{ A_{22} - \frac{1}{n} iI \right\} K_n = A_{22} K_n - \frac{1}{n} i K_n \rightarrow A_{22} K_n \quad \text{слабо,}$$

так как $\|K_n\| \leq 1$, и потому второе слагаемое равномерно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, а оператор A_{22} непрерывен.

3⁰. Аналогично устанавливаем, что

$$K_n \left\{ A_{11} + \frac{1}{n} iI \right\} \rightarrow K A_{11} \quad \text{слабо.}$$

4⁰. Здесь $K_n A_{12} K_n \rightarrow K A_{12} K$ слабо.

Действительно, так как $K_n \rightarrow K$ (слабо), а по условию A_{12} компактен, то $A_{12} K_n \rightarrow A_{12} K$ (сильно) и потому $K_n A_{12} K_n \rightarrow K A_{12} K$ (слабо).

Таким образом, в пределе при $n \rightarrow \infty$ уравнение (3.19) переходит в уравнение (3.18), т.е. существует решение $K = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n$ (слабый предел) уравнения (3.18) в операторном шаре (3.16). □

Замечание 3.2. Напомним еще раз, как выводится уравнение (3.18) для углового оператора K , отвечающего неотрицательному инвариантному подпространству $\mathcal{L}$ оператора A .

Так как $A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ и

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ Kx \end{pmatrix} : x \in \mathcal{K}^+, \quad \|K\| \leq 1 \right\},$$

то

$$A\mathcal{L} = \left\{ A \begin{pmatrix} x \\ Kx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ Ky \end{pmatrix} : x \in \mathcal{K}^+ \right\}.$$

Поэтому

$$A_{11}x + A_{12}Kx = y, \quad A_{21}x + A_{22}Kx = Ky.$$

Отсюда имеем

$$KA_{11}x + KA_{12}Kx = A_{21}x + A_{22}Kx, \quad \forall x \in \mathcal{K}^+,$$

откуда и следует операторное уравнение (3.18). $\square$

3.3 Самосопряженные операторы в пространстве Крейна

Пусть $\mathcal{K}$ — пространство Крейна с формой $[\cdot, \cdot]$.

Определение 3.4. Оператор $A : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ называется самосопряженным в $\mathcal{K}$, $A = A^c$, если

$$[Ax, y] = [x, Ay], \quad \forall x, y \in \mathcal{K}. \quad (3.20)$$

$\square$

Аналогично определяются операторы, самосопряженные по W -форме $[\cdot, \cdot] = (W\cdot, \cdot)$. Тогда, в силу 3.3

$$A^c = W^{-1}A^*W = A \iff A^*W = WA = (WA)^*. \quad (3.21)$$

Отсюда видно, что W -самосопряженный оператор A подобен оператору A^* .

Рассмотрим свойства спектра операторов, самосопряженных в пространстве Крейна. Они следуют, в частности, из свойств $1^0 - 6^0$ спектра взаимно сопряженных операторов, которые сформулированы выше перед леммой 3.1.

$$1^0 \quad \sigma(A) = \sigma^*(A);$$

$$2^0 \quad \rho(A) = \rho^*(A);$$

$$3^0 \quad \sigma_c(A) = \sigma_c^*(A);$$

$$4^0 \quad \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) = \sigma_p^*(A) \cup \sigma_r^*(A).$$

В качестве иллюстрации особенностей структуры спектра у самосопряженных операторов, действующих в пространстве Крейна, рассмотрим следующий пример. Напомним предварительно, что в

пространстве Понтрягина самосопряженный оператор не имеет остаточного спектра.

Пусть теперь $A = A^c : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$. Может ли такой оператор иметь непустой остаточный спектр? Оказывается, может. Пусть, например,

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \text{diag}(T; T^*),$$

где оператор $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ таков, что $\sigma_r(T) \neq \emptyset$. Легко проверить, что $A = A^c$ в $\mathcal{K}$. С другой стороны, такой оператор A будет иметь непустой $\sigma_r(A)$ вместе с T .

Далее, пусть $A = A^* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, тогда $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Если оператор $A = A^c$ действует в $\Pi_{\mathcal{K}}$, то, за исключением не более конечного числа конечнократных пар взаимно сопряженных собственных значений, спектр оператора $A = A^c$ вещественный:

$$\sigma(A) \setminus \{\lambda_1, \bar{\lambda}_1; \dots; \lambda_s, \bar{\lambda}_s\} \subset \mathbb{R}.$$

В пространстве Крейна ситуация сложнее. Пусть, например, $A = A^c$ — неограниченный оператор, действующий в $\mathcal{K}$. Можно ли утверждать, что $\rho(A) \neq \emptyset$. Оказывается, нет. Действительно, если взять оператор T из приведенного выше примера таким, что $\rho(T) = \emptyset$, получим оператор $A = A^c$ с пустым регулярным множеством.

Упражнение 3.1. Установить, для каких классов операторов, действующих в пространстве Крейна, справедливы утверждения

$$\begin{aligned} \{[Ax, y] = [x, Ay], \forall x, y \in \mathcal{K}\} &\iff \{[Ax, x] = [x, Ax], \forall x \in \mathcal{K}\} \iff \\ &\iff \{\text{Im}[Ax, x] = 0, \forall x \in \mathcal{K}\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

□

Заметим теперь, что если $A = A^c : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$, то этот оператор диссипативен. Поэтому для него справедлива теорема 3.1. Более того, так как

$$\{A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}\} \iff \{A^c \mathcal{L}^{[\perp]} \subset \mathcal{L}^{[\perp]}\},$$

то самосопряженный оператор, действующий в пространстве Крейна и удовлетворяющий условию (3.11) теоремы 3.1, обладает свойствами

$$\{A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}\} \iff \{A\mathcal{L}^{[\perp]} \subset \mathcal{L}^{[\perp]}\}. \quad (3.23)$$

Поэтому если $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$, $A\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$, то $\mathcal{L}_- := \mathcal{L}_+^{[\perp]} \in \mathfrak{M}^-$, $A\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$.

Таким образом, у самосопряженного оператора A , действующего в $\mathcal{K}$ и удовлетворяющего условию (3.11), существует максимальная дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ инвариантных относительно A подпространств.

3.4 Несжимающие операторы

Пусть $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_1^+ [+] \mathcal{K}_1^-$ и $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2^+ [+] \mathcal{K}_2^-$ — пространства Крейна с индефинитными скалярными произведениями $[\cdot, \cdot]_1$ и $[\cdot, \cdot]_2$ соответственно.

Введем проекторы $P_j^\pm$ и канонические симметрии $J_j = P_j^+ - P_j^-$, $j = 1, 2$.

Пусть $V : \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ — непрерывный оператор. Напомним, что он называется несжимающим, если

$$[Vx, Vx]_2 \geq [x, x]_1, \quad \forall x \in \mathcal{K}_1. \quad (3.24)$$

Напомним еще, что для произвольного оператора $X : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ точка 0 является точкой регулярного типа, $0 \in r(X)$, если

$$\|Xu\| \geq k\|u\|, \quad k > 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}. \quad (3.25)$$

Заметим теперь, что оператор $V = P^+ : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ является несжимающим. В самом деле,

$$\begin{aligned} [P^+x, P^+x] &= (JP^+x, P^+x) = \\ &= (P^+x, P^+x) \geq (P^+x, P^+x) - (P^-x, P^-x) = [x, x]. \end{aligned}$$

(Здесь в первом переходе использовано свойство $JP^+x = P^+x$.) Нетрудно видеть, что $\text{Ker } V = \text{Ker } P^+ = \mathcal{K}^-$. Поэтому для P^+ точка 0 не может быть точкой регулярного типа, т.е. неравенство вида (3.25) для этого оператора невозможно.

Однако здесь имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Пусть $V : \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ — несжимающий оператор. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что*

$$\|Vx\|_2 \geq \delta\|x\|_1, \quad \forall x \geq 0. \quad (3.26)$$

Доказательство. Введем билинейную форму

$$\langle x, y \rangle := [Vx, Vy]_2 - [x, y]_1 = [(V^cV - I)x, y]_1. \quad (3.27)$$

Из свойства несжимаемости оператора V , очевидно, следует, что $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in \mathcal{K}_1$. Тогда, согласно неравенству Коши-Буняковского,

$$\begin{aligned} |[(V^cV - I)x, y]_1|^2 &\leq [(V^cV - I)x, x]_1 \cdot [(V^cV - I)y, y]_1 \leq \\ &\leq (\|V\|^2 + 1) \|Vx\|_2^2 \quad (\|x\| = \|y\| = 1). \end{aligned} \quad (3.28)$$

В самом деле, при $\|y\| = 1$ имеем

$$[(V^cV - I)y, y]_1 \leq \|(V^cV - I)y\| \|y\| \leq (\|V^cV\| + 1) \leq \|V^c\| \cdot \|V\| + 1.$$

Так как $V^c = JV^*J$, то $\|V^c\| \leq \|V\|$, и тогда справа имеем $\|V\|^2 + 1$. Далее, при $x \geq 0$

$$[(V^cV - I)x, x]_1 = [Vx, Vx]_2 - [x, x]_1 \leq \|Vx\|_2^2.$$

и неравенство (3.28) доказано.

Убедимся теперь, что отсюда следует неравенство

$$\|(V^cV - I)x\|_1^2 \leq (\|V\|^2 + 1) \|Vx\|_2^2. \quad (3.29)$$

Действительно, если $(V^cV - I)x = 0$, то неравенство тривиально выполнено. Если $(V^cV - I)x \neq 0$, то возьмем

$$y = J_1 (V^cV - I)x / \|(V^cV - I)x\|_1, \quad \|y\| = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \left[(V^cV - I)x, \frac{J_1 (V^cV - I)x}{\|(V^cV - I)x\|_1} \right]_1 \right|^2 &\leq \\ &\leq \|(V^cV - I)x\|_1^2 \leq (\|V\|^2 + 1) \|Vx\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

В последнем переходе использовано неравенство (3.28). Однако левая часть (3.30), очевидно, равна левой части (3.29), и неравенство (3.29) доказано.

Опираясь на установленные факты, проведем при $\|x\| = 1$, $x \geq 0$, оценку снизу:

$$\|(V^c V - I)x\|_1 \geq 1 - \|V\| \cdot \|Vx\|_2.$$

Отсюда и из (3.29)

$$1 - \|V\| \cdot \|Vx\|_2 \leq \sqrt{\|V\|^2 + 1} \cdot \|Vx\|_2,$$

откуда следует, что

$$\|Vx\|_2 \geq \frac{1}{\|V\| + \sqrt{\|V\|^2 + 1}} \|x\|_1 =: \delta \|x\|_1, \quad x \geq 0, \quad 0 < \delta < 1. \quad \square$$

Приведем ряд следствий из этой леммы.

Следствие 3.1. *Имеет место неравенство*

$$\|P_2^+ Vx\|_2 \geq \frac{\delta}{\sqrt{2}} \|x\|_1, \quad x \geq 0. \quad (3.31)$$

Доказательство. Имеем

$$\|Vx\|_2^2 = \|P_2^+ Vx\|_2^2 + \|P_2^- Vx\|_2^2 \geq \delta^2 \|x\|_1.$$

Однако, если $x \geq 0$, то в силу несжимаемости (см. (3.24)) будет также $Vx \geq 0$ и потому

$$\|P_2^- Vx\|_2^2 \leq \|P_2^+ Vx\|_2^2.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует (3.31). □

Следствие 3.2. *Пусть $V : \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ — несжимающий оператор. Тогда образ $V\mathcal{L}$ неотрицательного подпространства $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}_1$ — снова неотрицательное подпространство (в $\mathcal{K}_2$), образ положительного подпространства — положительное подпространство, а образ равномерно положительного подпространства — равномерно положительное подпространство.*

Доказательство. (Первое утверждение уже было упомянуто в следствии 3.1). Если $\mathcal{L} \geq 0$ (в $\mathcal{K}_1$), то $[x, x]_1 \geq 0$ и потому для элементов

$$V\mathcal{L} := \{Vx : x \in \mathcal{L}\}$$

имеем

$$[Vx, Vx]_2 \geq [x, x]_1 \geq 0. \quad (3.32)$$

Если $x \neq 0$, $x \in \mathcal{L} > 0$, то отсюда следует, что Vx — положительное подпространство. Наконец, если $\mathcal{L}$ — равномерно положительное подпространство ($\mathcal{L} \gg 0$), то

$$[x, x]_1 \geq k\|x\|^2, \quad k > 0,$$

и потому

$$[Vx, Vx]_2 \geq [x, x]_1 \geq k\|x\|_1^2 \geq \frac{k}{\|V\|^2} \|Vx\|_2^2, \quad (3.33)$$

т.е. $V\mathcal{L} \gg 0$.

Докажем еще, что если $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$, то $V\mathcal{L} = \overline{V\mathcal{L}}$, т.е. $V\mathcal{L}$ — подпространство. Имеем для любого $x \in \mathcal{P}^+$, т.е. для $x \geq 0$:

$$\|V\| \cdot \|x\|_1 \geq \|Vx\|_2 \geq \delta\|x\|_1. \quad (3.34)$$

Из этих неравенств следует, что из свойства $x_n \rightarrow x$ (в $\mathcal{L}$) вытекает, что $Vx_n \rightarrow Vx$, т.е. $V\mathcal{L}$ замкнуто. □

Упражнение 3.2. Доказать, что ядро $\text{Ker } V$ несжимающего оператора V , если оно нетривиально, является отрицательным.

Доказательство. Если $0 \neq x_0 \in \text{Ker } V$, то $Vx_0 = 0$. В силу (3.34) свойство $[x_0, x_0] \geq 0$ невозможно, поэтому $[x_0, x_0] < 0$. □

Упражнение 3.3. Доказать, что это ядро даже равномерно отрицательно. □

Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ [+] \mathcal{K}^-$ — пространство Крейна и $\mathcal{L}$ — неотрицательное подпространство в $\mathcal{K}$.

Определение 3.5. Назовем дефектом неотрицательного подпространства $\mathcal{L}$ размерность дефектного подпространства:

$$\text{def}_{\mathcal{K}^+} \mathcal{L} := \dim \left[(P^+ \mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}^+ \right]. \quad (3.35)$$

□

Напомним, что неотрицательное $\mathcal{L}$ является максимальным подпространством, если $P^+ \mathcal{L} = \mathcal{K}^+$. Поэтому дефект $\text{def}_{\mathcal{K}^+} \mathcal{L}$ равен размерности дополнительного подпространства, которое необходимо присоединить к $\mathcal{L}$ для того, чтобы объединение этих подпространств стало максимальным.

Теорема 3.2. Пусть $V : \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ — несжимающий оператор. Тогда для любого $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K}_1)$ дефект подпространства $V\mathcal{L}$ постоянен и не зависит от выбора $\mathcal{L}$, т.е.

$$\dim \left[(P_2^+ V \mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{K}_2^+ \right] = \text{const} . \quad (3.36)$$

□

Доказательство этого утверждения основано на теореме Крейна-Красносельского о сохранении индекса. Здесь оно не приводится.

Рассмотрим пример несжимающего оператора в пространстве Крейна. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ [+] \mathcal{K}^-$, а оператор V в этом ортогональном разложении имеет матричное представление

$$V = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $U : \mathcal{K}^+ \longrightarrow \mathcal{K}^+$ — оператор сдвига по ортонормированному базису: если $\{e_j^+\}_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис в $\mathcal{K}^+$, то $Ue_j^+ = e_{j+1}^+$ и

$$U \sum_{j=1}^\infty \alpha_j e_j^+ = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j e_{j+1}^+.$$

Нетрудно проверить, что оператор V — несжимающий. Заметим, что если

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$

— произвольный оператор, действующий в $\mathcal{K}$, то

$$T^c = \begin{pmatrix} T_{11}^* & -T_{21}^* \\ -T_{12}^* & T_{22}^* \end{pmatrix}.$$

Поэтому для введенного оператора V имеем

$$V^c = V^* = \begin{pmatrix} U^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $U^* e_1^+ = 0$ (проверьте!), то V^c не является несжимающим. Таким образом, этот пример показывает, что при переходе от V к V^c свойство сжимаемости может не сохраниться.

Напомним, что оператор V называется бинесжимающим, если V и V^c — несжимающие операторы.

Заметим, что если V и V^c несжимающие, то V^* — тоже несжимающий. Более точно, операторы V и V^c несжимающие тогда и только тогда, когда операторы V и V^* являются несжимающими.

Теорема 3.3 (критерий бинесжимаемости). Пусть $V : \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ — несжимающий оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:

- а) V — бинесжимающий;
- б) существует подпространство $\mathcal{L}_0 \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K}_1)$ такое, что $V\mathcal{L}_0 \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K}_2)$;
- в) для всякого $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K}_1)$ подпространство $V\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K}_2)$;
- г) существует угловой оператор $K_0 \in \{K : \mathcal{K}_1^+ \longrightarrow \mathcal{K}_1^-; \|K\| \leq 1\} =: \mathcal{B}_1$ такой, что $(V_{11} + V_{12}K_0)^{-1}$ задан на всем $\mathcal{K}_2^+$;
- д) для любого $K \in \mathcal{B}_1$ оператор $(V_{11} + V_{12}K)^{-1}$ задан на всем $\mathcal{K}_2^+$.

Доказательство. Заметим сначала, что утверждения (б) и (в) эквивалентны в силу теоремы 3.2.

Пусть $\mathcal{L} = \{x_+ + Kx_+ : \|K\| \leq 1, \forall x_+ \in \mathcal{K}_1^+\}$ — неотрицательное максимальное подпространство в $\mathcal{K}_1$. Тогда

$$V\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} V_{11}x_+ + V_{12}Kx_+ \\ V_{21}x_+ + V_{22}Kx_+ \end{pmatrix} \right\}.$$

Так как $V\mathcal{L}$ максимальное вместе с $\mathcal{L}$, то $P^+V\mathcal{L} = \mathcal{K}_2^+$. С другой стороны, $P^+V\mathcal{L} = \text{ran}(V_{11} + V_{12}K)$, т.е. области значений оператора $V_{11} + V_{12}K$.

Эти выкладки показывают, что если выполнено свойство б), т.е. существует подпространство $\mathcal{L}_0 \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K}_1)$ со свойством $V\mathcal{L}_0 \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K}_2)$ и угловым оператором K_0 , то $\text{ran}(V_{11} + V_{12}K_0) = \mathcal{K}_2^+$ и потому существует обратный оператор $(V_{11} + V_{12}K_0)^{-1}$, заданный на всем пространстве $\mathcal{K}_2^+$ (теорема Банаха об обратном операторе). Действительно, согласно (3.31)

$$\|P^+Vx\|_2 \geq c\|x\|_1, \quad \forall x \geq 0,$$

т.е. $\|(V_{11} + V_{12}K_0)x_+\|_2 \geq c\|x\|_1 \geq c\|x_+\|_1$. Отсюда следует, что $\text{Ker}(V_{11} + V_{12}K_0) = \{0\}$ и

$$\|(V_{11} + V_{12}K_0)^{-1}\| \leq c^{-1}. \quad (3.37)$$

Таким образом, утверждение б) $\implies$ г) доказано. Аналогично доказывается импликация в) $\implies$ д). Так как здесь все рассуждения обратимы, то имеем утверждения б) $\iff$ в) $\iff$ г) $\iff$ д). Осталось лишь установить, что из утверждения а) следует любое другое, а также в обратную сторону.

Докажем теперь, что из свойства а) следует свойство г), в частности, докажем, что оно выполнено для $\mathcal{L}_0 \in \mathcal{K}_1^+$, для которого угловой оператор $K_0 = 0$.

Действительно, операторы

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}, \quad V^c = \begin{pmatrix} V_{11}^* & -V_{21}^* \\ -V_{12}^* & V_{22}^* \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

являются несжимающими согласно условию а). Тогда из (3.37) при $K_0 = 0$ следует, что существует, ограничен и задан на всем пространстве $\mathcal{K}_2^+$ оператор V_{11}^{-1} , причем $\|V_{11}^{-1}\| \leq c$. Аналогично, применяя те же рассуждения к V^c , приходим к выводу, что оператор $(V_{11}^*)^{-1}$ существует и обладает теми же свойствами. Значит, можно взять $K_0 = 0$ и $\mathcal{L}_0 = \mathcal{K}_1^+$, и свойство г) доказано. Отметим, что на этом этапе доказательства свойство несжимаемости V^c не необходимо, так как $(V_{11}^*)^{-1} = (V_{11}^{-1})^*$ и потому достаточно иметь свойство несжимаемости для V .

Докажем, наконец, что из свойства г) следует а), т.е. из условий несжимаемости V и непрерывности V_{11}^{-1} на всем $\mathcal{K}_2^+$ следует свойство бизнесжимаемости V .

С этой целью воспользуемся преобразованием Потапова-Гинзбурга. Пусть $V : \mathcal{K}_1^+[+]\mathcal{K}_1^- \longrightarrow \mathcal{K}_2^+[+]\mathcal{K}_2^-$ является несжимающим оператором и V_{11}^{-1} непрерывен. Введем отображение (преобразование Потапова-Гинзбурга)

$$T : \mathcal{K}_2^+[\oplus]\mathcal{K}_1^- \longrightarrow \mathcal{K}_1^+[\oplus]\mathcal{K}_2^-$$

по закону

$$\begin{aligned} T = \delta(V) &:= (P_1^+ + P_2^- V) (P_1^- + P_2^+ V)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} V_{11}^{-1} & -V_{11}^{-1}V_{12} \\ V_{21}V_{11}^{-1} & V_{22} - V_{21}V_{11}^{-1}V_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Как показывает подсчет (см. (3.38)), имеет место свойство

$$\delta(V^c) = (\delta(V))^*. \quad (3.40)$$

Однако V — несжимающий оператор тогда и только тогда, когда $\delta(V)$ является гильбертовым сжатием (этот факт отмечался ранее в пространстве Понтрягина). Поэтому $\|\delta(V)\| \leq 1$, и тогда $\|(\delta(V))^*\| \leq 1$, т.е. $\|\delta(V^c)\| \leq 1$. Это возможно лишь тогда, когда V^c — несжимающий оператор.

□

Приведем еще некоторые факты, необходимые для дальнейшего. Здесь будет приведено доказательство теоремы 1.2.

Теорема 3.4. (Ю.Л. Шмультян). Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство и $A = A^*$, $B = B^*$ — непрерывные операторы, причем

$$0 \in \rho(A) \cap \rho(B), \quad A \leq B. \quad (3.41)$$

Рассмотрим пространство Крейна $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$, в которых на элементах из $\mathcal{H}$ билинейные формы определены по законам $[\cdot, \cdot]_A := (A\cdot, \cdot)$ и $[\cdot, \cdot]_B := (B\cdot, \cdot)$ соответственно.

Введем отображение $T : \mathcal{H}_A \longrightarrow \mathcal{H}_B$ согласно правилу $Tx := x$. Тогда имеет место свойство

$$\{A^{-1} \geq B^{-1}\} \iff \{T - \text{бинесжимающий}\}. \quad (3.42)$$

Доказательство. Напомним, что T — бинесжимающий, если T и T^c — несжимающие. Однако T — действительно несжимающий, так как (см. (1.9))

$$[Tx, Tx]_B := [x, x]_B = (Bx, x) \geq (Ax, x) = [x, x]_A. \quad (3.43)$$

Далее, из первого условия (3.41) следует, что операторы A и B ограничено обратимы на всем $\mathcal{H}$. Опираясь на это, найдем выражение для оператора $T^c : \mathcal{H}_B \longrightarrow \mathcal{H}_A$. Имеем при любых x и y из $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} [Tx, y]_B &= (BTx, y) = (Bx, y) = \\ &= (x, By) = (Ax, A^{-1}By) = [x, A^{-1}By]_A. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Отсюда следует, что

$$T^c = A^{-1}B. \quad (3.45)$$

Убедимся, что если этот оператор несжимающий, то $A^{-1} \geq B^{-1}$. Действительно, если

$$[T^c x, T^c x]_A = [A^{-1}Bx, A^{-1}Bx]_A \geq [x, x]_B,$$

то

$$(A^{-1}Bx, Bx) \geq (Bx, x) = (B^{-1}(Bx), Bx).$$

Полагая здесь $y = Bx$, $y \in \mathcal{H}$, имеем

$$(A^{-1}y, y) \geq (B^{-1}y, y), \quad \forall y \in \mathcal{H},$$

т.е. $A^{-1} \geq B^{-1}$. Эти рассуждения можно обратить, и теорема доказана. □

Следствие 3.3. Пусть операторы A и B удовлетворяют условиям теоремы 3.4. Пусть, далее, спектр $\sigma(A) \cap (0, \infty)$ имеет кратность $\varkappa_A^+ < \infty$. Тогда свойство $A^{-1} \geq B^{-1}$ выполнено, если и только если $\sigma(B) \cap (0, \infty)$ конечен и $\varkappa_A^+ = \varkappa_B^+$.

Доказательство. Если $\varkappa_A^+ < \infty$, то $\mathcal{H}_A = \Pi_{\varkappa_A^+}$, т.е. является пространством Понтрягина. Поэтому любое максимальное неотрицательное подпространство в $\mathcal{H}_A$ имеет размерность $\varkappa_A^+$. Для оператора B имеем те же утверждения, если спектр $\sigma(B) \cap (0, \infty)$ конечен.

Пусть $A^{-1} \geq B^{-1}$. По теореме Ю.Л.Шмульяна это возможно тогда и только тогда, когда T — бинесжимающий оператор, т.е. тогда и только тогда, когда из условия $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{H}_A)$ следует условие $B\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{H}_B)$.

Заметим теперь, что оператор T ограниченно обратим. В самом деле, если $Tx_0 = 0$, $x_0 \in \mathcal{L}$, то в силу неравенства $\|Tx\| \geq \delta\|x\|$ (см. (3.26)) получаем, что $x_0 = 0$, т.е. T обратим и $\|T^{-1}\| \leq \delta^{-1}$. Отсюда следует, что

$$\{\dim(T\mathcal{L}) = \dim \mathcal{L}\} \iff \{\varkappa_A^+ = \varkappa_B^+\}. \quad \square$$

Следствие 3.4. Пусть A, B — матрицы размером $n \times n$, $A = A^*$, $B = B^*$, $A \leq B$. Тогда

$$\{A \leq B\} \iff \{s(A) = s(B)\} \iff \{\pi(A) = \pi(B)\},$$

$s(A) := \pi(A) - \nu(A)$, $\pi(A)$ — количество положительных (с учетом кратностей) собственных значений, а $\nu(A)$ — количество отрицательных. Здесь $\pi(A) + \nu(A) = \pi(B) + \nu(B) = n$. $\square$

3.5 Равномерно растягивающие операторы

Напомним (см. определение 1.5), что оператор $T : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ называется равномерно растягивающим, или равномерно бинесжимающим, если найдется $\alpha > 0$ такое, что

$$[Tx, Tx] \geq [x, x] + \alpha\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{K}. \quad (3.46)$$

Определение 3.6. Равномерно растягивающий оператор T называется равномерно бирастягивающим, если T^c — также равномерно растягивающий (быть может, с другой константой $\alpha > 0$). $\square$

Напомним, что множество точек регулярного типа оператора A , по определению, это

$$r(A) := \rho(A) \cup \{\lambda \in \sigma_r(A) : \operatorname{ran}(A - \lambda I) = \overline{\operatorname{ran}(A - \lambda I)}\}$$

и

$$\{\lambda \in r(A) \setminus \rho(A)\} \iff \{\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*), \operatorname{ran}(A^* - \bar{\lambda} I) = \mathcal{K}\}. \quad (3.47)$$

Лемма 3.4. *Если $T : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ — равномерно растягивающий оператор, то весь единичный круг*

$$\mathbb{T} := \{\lambda : |\lambda| = 1\}$$

состоит из точек регулярного типа для T .

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно, т.е. существует λ с $|\lambda| = 1$ такое, что $\lambda \notin r(T)$. Тогда существует последовательность элементов x_n с $\|x_n\| = 1$ такая, что $(T - \lambda I)x_n \longrightarrow 0$ ($n \longrightarrow \infty$). Поэтому для $y_n := (T - \lambda I)x_n$ имеем

$$Tx_n = \lambda x_n + y_n, \quad y_n \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Так как оператор T равномерно растягивающий, то

$$[Tx_n, Tx_n] \geq [x_n, x_n] + \alpha \|x_n\|^2 = [x_n, x_n] + \alpha.$$

Поэтому

$$[\lambda x_n + y_n, \lambda x_n + y_n] - [x_n, x_n] \geq \alpha > 0, \quad |\lambda| = 1,$$

т.е.

$$\lambda[x_n, y_n] + \bar{\lambda}[y_n, x_n] + [y_n, y_n] \geq \alpha > 0.$$

Поскольку $y_n \longrightarrow 0$ ($n \longrightarrow \infty$) и $|\lambda| = 1$, то возникло противоречие, и лемма доказана. $\square$

Лемма 3.5. *Если T — равномерно растягивающий, то T — равномерно бирастягивающий тогда и только тогда, когда*

$$\mathbb{T} \subset \rho(T). \quad (3.48)$$

Доказательство.

а) Если T — равномерно бирастягивающий, то по лемме 3.4

$$\mathbb{T} \subset r(T) \cap r(T^c). \quad (3.49)$$

В силу (3.47) точка λ из $\mathbb{T}$ принадлежит $r(T) \setminus \rho(T)$ тогда и только тогда, когда $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$, т.е. $\lambda \in \sigma_p(T)$. Аналогично из (3.49) получаем, что $\lambda \in \sigma_p(T^c)$. Однако это невозможно (см. свойства спектра после формулы (3.4)), и потому $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(T^c)$, т.е.

$$\mathbb{T} \subset \rho(T) \cap \rho(T^c). \quad (3.50)$$

б) Докажем теперь, что если выполнено условие (3.48) и T равномерно растягивающий, то T — равномерно бирастягивающий. С этой целью воспользуемся следующей формулой

$$(BA - I) = (B - I)(A - I)^{-1}(AB - I)(B - I)^{-1}(A - I), \quad (3.51)$$

где все операторы и сомножители непрерывны (докажите это тождество!). Возьмем в этом тождестве $A = T^c$, $B = T$. Тогда

$$(TT^c - I) = (T - I)(T^c - I)^{-1}(T^cT - I)(T - I)^{-1}(T^c - I). \quad (3.52)$$

Если обозначить

$$S := (T - I)^{-1}(T^c - I), \quad (3.53)$$

то

$$(T - I)(T^c - I)^{-1} = S^c, \quad (3.54)$$

$$0 \in \rho(S) \text{ и } (TT^c - I) = S^c(T^cT - I)S. \quad (3.55)$$

Из свойства равномерной растягиваемости оператора T имеем (проверьте!)

$$[(TT^c - I)x, x] \geq \alpha \|x\|^2. \quad (3.56)$$

Для оператора T^c тогда будем иметь

$$\begin{aligned} [(TT^c - I)x, x] &= [S^c(T^cT - I)Sx, x] = [(T^cT - I)Sx, Sx] \geq \\ &\geq \alpha \|Sx\|^2 \geq \frac{\alpha}{\|S^{-1}\|^2} \|x\|^2, \end{aligned} \quad (3.57)$$

откуда следует свойство равномерной растягиваемости оператора T^c . □

Вернемся еще раз к теореме 1.3, доказанной Ю.Л. Далецким и М.Г. Крейном, напомним ее формулировку и скажем несколько слов о доказательстве.

Теорема 3.5 (Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн). Пусть оператор T непрерывен в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Единичная окружность $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$ состоит из регулярных точек оператора T , т.е. $\mathbb{T} \subset \rho(T)$, тогда и только тогда, когда существует непрерывный оператор $W = W^*$, $0 \in \rho(W)$, такой, что T является равномерно бирастягивающим относительно формы $[x, y] := (Wx, y)$.

Доказательство. Если оператор T бирастягивающий в пространстве Крейна с W -формой, то, согласно лемме 3.5, $\mathbb{T} \subset \rho(T)$. В другую сторону утверждение теоремы доказано Ю.Л. Далецким и М.Г. Крейном. $\square$

Следствие 3.5. В условиях теоремы 3.5

$$\{\sigma(T) \subset \{\lambda : |\lambda| < 1\}\} \iff \{\exists(-W) \gg 0\}. \quad (3.58)$$

$\square$

Рассмотрим теперь проблему, которая в общей ситуации еще не нашла своего решения. Это — проблема существования инвариантного подпространства у бинесжимающего оператора.

Теорема 3.6. Пусть $V : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ — бинесжимающий оператор, у которого элемент V_{12} матричного представления V в ортогональном разложении $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$ является компактным оператором. Тогда существует $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K})$ такое, что $V\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+$, т.е. оператор V имеет максимальное инвариантное подпространство, которое он отображает на себя.

Доказательство. Введем операторы

$$V_n := V I_n, I_n := \text{diag} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) I; \left(1 - \frac{1}{n}\right) I \right) = I + \frac{1}{n} J, \quad (3.59)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Можно проверить (проделайте это самостоятельно!), что I_n — бирастягивающий оператор при любом $n \in \mathbb{N}$. Тогда V_n — также бирастягивающий. Имеем

$$[V_n x, x] = [V I_n x, V I_n x] \geq [I_n x, I_n x] \geq [x, x] + \frac{1}{n} \|x\|^2. \quad (3.60)$$

Кроме того, $V_n \longrightarrow V$ при $n \longrightarrow \infty$ (равномерно).

В матричном представлении

$$V_n = \begin{pmatrix} V_{11} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{n} \\ 1 + \frac{1}{n} \end{pmatrix} & V_{12} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} \\ V_{21} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{n} \\ 1 + \frac{1}{n} \end{pmatrix} & V_{22} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

причем $(V_n)_{ij} \rightarrow V_{ij}$ при $n \rightarrow \infty$ (равномерно), $i, j = 1, 2$. Далее доказательство можно продолжить по одному из следующих путей.

Первый путь: если докажем, что при любом n существует $\mathcal{L}_n^+ \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K})$ такое, что $V_n \mathcal{L}_n^+ = \mathcal{L}_n^+$, то затем можно устремить $n \rightarrow \infty$ и в пределе получить $\mathcal{L}_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_n^+$, $V \mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+$, $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K})$. Осталось лишь проверить, что у оператора V_n существует $\mathcal{L}_n^+ \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K})$ при каждом n . Оказывается, это можно установить с использованием интеграла Рисса.

Второй путь доказательства — использование преобразования Кэли-Неймана. Введем операторы

$$A_n := (\lambda V_n - \bar{\lambda} I) (V_n - I)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^+, \quad (\text{т.е. } \operatorname{Im} \lambda > 0). \quad (3.61)$$

Эти операторы равномерно диссипативны; этот факт доказывается так же, как в пространстве Понтрягина. Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$ найдется подпространство $\mathcal{L}_n^+$, инвариантное для A_n , т.е. $A_n \mathcal{L}_n^+ \subset \mathcal{L}_n^+$. Оказывается, это возможно тогда и только тогда, когда $V_n \mathcal{L}_n^+ = \mathcal{L}_n^+$ (поскольку V — бинесжимающий оператор.)

Этими общими комментариями без подробных преобразований завершаем доказательство теоремы. $\square$

Следствие 3.6. *Если для оператора V в условиях теоремы 3.6 вместо условия $V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$ выполнено условие $V_{21} \in \mathfrak{S}_\infty$, то существует подпространство $\mathcal{L}_- \in \mathfrak{M}^-(\mathcal{K})$ такое, что $V \mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$.*

Доказательство. Достаточно провести аналогичное рассуждение для сопряженного оператора

$$V^c = \begin{pmatrix} V_{11}^* & -V_{21}^* \\ -V_{12}^* & V_{22}^* \end{pmatrix},$$

установить для него существование $\mathcal{L}_n^+ \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K})$, а затем взять $\mathcal{L}_- := \mathcal{L}_+^{[\perp]}$. Тогда $V \mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$. $\square$

Приведем в заключение этого раздела без доказательства следующие факты. Установленный выше результат существования максимального инвариантного подпространства $\mathcal{L}_+$ справедлив не только

для несжимающих операторов, но также и для диссипативных операторов, самосопряженных операторов. Далее, если оператор V равномерно растягивающий, то упомянутое инвариантное подпространство всегда существует. Действительно, в этом случае $\mathbb{T} \subset \rho(V)$ и, значит, спектр T расположен вне единичной окружности $\mathbb{T}$, а также внутри ее, но не на ней.

3.6 Унитарные операторы.

Пусть $\mathcal{K}$ — пространство Крейна, $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^-$, $J = P^+ - P^-$, $[x, y] = (Jx, y)$.

Определение 3.7. Оператор U называется унитарным в $\mathcal{K}$ (J -унитарным), если $UK = \mathcal{K}$ и

$$\{[Ux, Uy] = [x, y]\} \iff \{U^c = U^{-1} = JUJ\}. \quad (3.62)$$

Приведем основные свойства спектра J -унитарных операторов.

$$1^0 \quad \sigma^*(U) = \sigma^{-1}(U) := \{\lambda \in \sigma(U) \iff \bar{\lambda}^{-1} \in \sigma(U)\};$$

$$2^0 \quad \rho^*(U) = \rho^{-1}(U) := \{\lambda \in \rho(U) \iff \bar{\lambda}^{-1} \in \rho(U)\};$$

$$3^0 \quad \sigma_c^*(U) = \sigma_c^{-1}(U) := \{\lambda \in \sigma_c(U) \iff \bar{\lambda}^{-1} \in \sigma_c(U)\};$$

$$4^0 \quad \sigma_p^*(U) \cap \sigma_r^*(U) = \sigma_p^{-1}(U) \cap \sigma_r^{-1}(U) := \\ := \{\lambda \in \sigma_p(U) \cup \sigma_r(U) \iff \bar{\lambda}^{-1} \in \sigma_p(U) \cup \sigma_r(U)\}.$$

Так как при отображении $U : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ билинейная форма $[\cdot, \cdot]$ сохраняется, т.е. $[Ux, Uy] = [x, y]$, то для множества неотрицательных, положительных, нейтральных и т.д. элементов имеет свойства $UP^+ = P^+$, $UP^0 = P^0$,

Отсюда же следует, что унитарный оператор является несжимающим, а так как $[U^{-1}Ux, U^{-1}Ux] = [x, x] = [Ux, Ux]$, то и обратный оператор U^{-1} — также несжимающий. Так как $U^c = U^{-1}$, то U^c — тоже несжимающий и поэтому U — бинесжимающий оператор. Отсюда следует такое утверждение:

$$\{U\mathcal{L}^\pm \in \mathfrak{M}^\pm\} \iff \{\mathcal{L}^\pm \in \mathfrak{M}^\pm\}. \quad (3.63)$$

Из определения унитарного оператора U получаем также, что

$$\{\mathcal{L}[\perp]M\} \iff \{U\mathcal{L}[\perp]UM\}. \quad (3.64)$$

Можно легко проверить, что $\mathcal{L}^\pm$ — равномерно дефинитны тогда и только тогда, когда $U\mathcal{L}^\pm$ равномерно дефинитны.

Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^-$. Тогда

$$\mathcal{K} = U\mathcal{K} = U\mathcal{K}^+[\oplus]U\mathcal{K}^- \quad (3.65)$$

— новое каноническое разложение пространства $\mathcal{K}$. Оказывается, с помощью формулы (3.65) можно описать все канонические разложения $\mathcal{K}$. В самом деле, пусть

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^- = \mathcal{K}_1^+[\oplus]\mathcal{K}_1^- \quad (3.66)$$

— два канонических разложения пространства $\mathcal{K}$. Здесь $\mathcal{K}^\pm, \mathcal{K}_1^\pm$ — гильбертовы пространства. Возьмем в $\mathcal{K}^+$ и $\mathcal{K}_1^+$ ортонормированные базисы, $\{e_n^+\} \subset \mathcal{K}^+, \{e_{1n}^+\} \subset \mathcal{K}_1^+$, и зададим оператор U соотношением

$$U \sum_j \alpha_j e_j^+ := \sum_j \alpha_j e_{1j}^+.$$

Тогда, очевидно,

$$[Ux, Uy] = [x, y] = \sum_j \alpha_j \bar{\beta}_j, \quad x = \sum_j \alpha_j e_j^+ \in \mathcal{K}^+, y = \sum_j \beta_j e_j^+ \in \mathcal{K}^+.$$

Аналогично определяем оператор U для $x, y \in \mathcal{K}^-$. Тогда если $z = x + y, x \in \mathcal{K}^+, y \in \mathcal{K}^-$, то полагаем по линейности

$$Uz = Ux + Uy, \quad z \in \mathcal{K}.$$

Напомним теперь, что в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$ была установлена связь между унитарными и самосопряженными операторами: если U — унитарный оператор в $\Pi_\varkappa$, $1 \neq \sigma_p(U)$, то

$$A = (\bar{\lambda}U - \lambda I)(U - I)^{-1} = A^c, \quad (3.67)$$

и обратно, если $A = A^c, \lambda \in \rho(A)$ то

$$U = (A - \bar{\lambda}I)(A - \lambda I)^{-1}, \quad 1 \neq \sigma_p(U), \quad (3.68)$$

— унитарный оператор. Оказывается, аналогичные связи имеются и в пространстве Крейна (см. ниже).

Перейдем теперь к вопросу о существовании инвариантных подпространств для унитарных операторов в пространстве Крейна. Пусть U — унитарный оператор. Тогда он является бинесжимающим. Представим его в матричном виде

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.69)$$

отвечающем каноническому разложению $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^-$.

Теорема 3.7 (об инвариантном подпространстве унитарного оператора). Если для унитарного оператора U из (3.69) выполнено условие

$$U_{12} \in \mathfrak{S}_\infty, \quad (3.70)$$

то существует пара максимальных инвариантных подпространств $\mathcal{L}^\pm \in \mathfrak{M}^\pm$, таких, что

$$U\mathcal{L}^\pm = \mathcal{L}^\pm. \quad (3.71)$$

Доказательство. Дадим лишь краткие пояснения. Так как унитарный оператор U является бинесжимающим, то в силу условия (3.70) по теореме 3.5 оператор U имеет максимальное инвариантное подпространство $\mathcal{L}^+ \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K})$, причем $U\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}^+$. Заметим, теперь, что для самосопряженных и унитарных в $\mathcal{K}$ операторов из (3.70) следует свойство $U_{21} \in \mathfrak{S}_\infty$. Тогда существует наряду с $\mathcal{L}^+$ максимальное инвариантное подпространство $\mathcal{L}^- \in \mathfrak{M}^-(\mathcal{K})$, $U\mathcal{L}^- = \mathcal{L}^-$, $\mathcal{L}^- = (\mathcal{L}^+)^{[\perp]}$. □

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса об описании (представлении, параметризации) унитарных операторов в пространстве Крейна. Напомним, что если $A = A^c$, то

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.72)$$

$$A_{11} = A_{11}^*, A_{12} = -A_{21}^*, A_{21} = -A_{12}^*, A_{22} = A_{22}^*.$$

Для матричного представления (3.69) унитарного оператора U имеет место следующий важный результат.

Теорема 3.8 (о параметризации унитарного оператора). Пусть

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^-, J = P^+ - P^-, \quad [x, y] = (Jx, y).$$

Тогда между всеми тройками

$$\{\Gamma; U_+, U_-\}, \quad \Gamma: \mathcal{K}^+ \longrightarrow \mathcal{K}^-, \quad \|\Gamma\| < 1, \quad (3.73)$$

где $U_\pm$ — гильбертовы унитарные операторы в $\mathcal{K}^\pm$, и всеми J — унитарными операторами в $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^-$ существует взаимно однозначное соответствие:

$$U_{11} = (I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2}U_+, \quad U_{21} = \Gamma(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2}U_+, \quad (3.74)$$

$$U_{12} = \Gamma^*(I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2}U_-, \quad U_{22} = (I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2}U_-. \quad (3.75)$$

Обратно, если задан унитарный оператор U в виде (3.69), то

$$\begin{aligned} \Gamma &= U_{12}U_{11}^{-1}, \\ U_+ &= (I - \Gamma^*\Gamma)^{1/2}U_{11}, \quad U_- = (I - \Gamma\Gamma^*)^{1/2}U_{22}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Доказательство.

а) Введем оператор

$$U(\Gamma) := \begin{pmatrix} (I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2} & \Gamma^*(I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2} \\ \Gamma(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2} & (I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad \|\Gamma\| < 1. \quad (3.77)$$

(Можно проверить, что $U(\Gamma) \gg 0$ в $\mathcal{H} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$, однако это свойство далее не понадобится.)

Убедимся, что $U(\Gamma)$ является унитарным оператором в $\mathcal{K}$, т.е. $(U(\Gamma))^c = (U(\Gamma))^{-1}$. Имеем

$$(U(\Gamma))^c = \begin{pmatrix} (I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2} & -(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2}\Gamma^* \\ -(I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2}\Gamma & (I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2} \end{pmatrix}. \quad (3.78)$$

Используя (3.77) и (3.78), непосредственно проверяем, что

$$(U(\Gamma))^c U(\Gamma) = U(\Gamma)(U(\Gamma))^c = I. \quad (3.79)$$

Введем также оператор

$$V := \begin{pmatrix} U_+ & 0 \\ 0 & U_- \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

Так как $U_{\pm}$ — гильбертовы унитарные операторы в $\mathcal{K}^{\pm}$, то $U_{\pm}^* = (U_{\pm})^{-1}$ и потому

$$V^c := \begin{pmatrix} U_+^{-1} & 0 \\ 0 & U_-^{-1} \end{pmatrix} = V^{-1} = V^*. \quad (3.81)$$

Этот оператор является унитарным одновременно в $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$.

Из свойств $U(\Gamma)$ и V следует, что оператор $U(\Gamma)V$ является унитарным в $\mathcal{K}$. Действительно,

$$[U(\Gamma)Vx, U(\Gamma)Vy] = [Vx, Vy] = [x, y].$$

Таким образом, установлено, что тройке операторов $\{\Gamma; U_+, U_-\}$ отвечает унитарный оператор $U(\Gamma)V$, матричные элементы которого выражаются формулами (3.74), (3.75).

б) Пусть теперь задан унитарный оператор $U : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ своим матричным представлением (3.69).

Согласно (3.63) имеем $UK^+ \in \mathfrak{M}^+$. Заметим теперь, что подпространство UK^+ является равномерно положительным, так как

$$[Ux_+, Ux_+] = [x_+, x_+] = \|x_+\|^2 \geq \frac{1}{\|U\|^2} \|Ux_+\|^2, \quad \forall x_+ \in \mathcal{K}^+.$$

Следовательно, угловой оператор Γ подпространства UK^+

$$U \begin{pmatrix} x_+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}x_+ \\ U_{21}x_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}x_+ \\ (U_{21}U_{11}^{-1})U_{11}x_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}x_+ \\ \Gamma U_{11}x_+ \end{pmatrix}, \quad (3.82)$$

$$\forall x_+ \in \mathcal{K}^+.$$

имеет норму меньше единицы (лемма 2.1) и справедливо равенство:

$$\Gamma := U_{21}U_{11}^{-1}. \quad (3.83)$$

Введем теперь оператор $U(\Gamma)$ согласно формуле (3.77), а по нему оператор

$$V := (U(\Gamma))^{-1}U. \quad (3.84)$$

Это можно сделать, так как $U(\Gamma)$ — унитарный оператор (см. часть а) доказательства) и потому $(U(\Gamma))^{-1} = (U(\Gamma))^c$ непрерывен. Очевидно, оператор V является унитарным в $\mathcal{K}$, так как он равен произведению унитарных операторов $(U(\Gamma))^{-1}$ и U .

Введем подпространство

$$\mathcal{L}_\Gamma := U(\Gamma)\mathcal{K}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} \widetilde{x_+} \\ \widetilde{\Gamma x_+} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} (I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2}x_+ \\ \Gamma(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2}x_+ \end{pmatrix} \right\}, \quad (3.85)$$

$$x_+ \in \mathcal{K}^+.$$

Так как $(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2}\mathcal{K}^+ = \mathcal{K}^+$ и $U_{11}\mathcal{K}^+ = \mathcal{K}^+$, то из (3.85) и (3.82) следует, что

$$U(\Gamma)\mathcal{K}^+ = UK^+ \quad (3.86)$$

и потому

$$V\mathcal{K}^+ = (U(\Gamma))^{-1}UK^+ = \mathcal{K}^+. \quad (3.87)$$

Аналогично можно убедиться, что

$$V\mathcal{K}^- = \mathcal{K}^-. \quad (3.88)$$

Из (3.87) и (3.88) следует, что матрица V имеет диагональный вид:

$$V := \begin{pmatrix} U_+ & 0 \\ 0 & U_- \end{pmatrix}, \quad (3.89)$$

и так как $V^c = V^{-1} = V^*$, то $U_\pm^* = U_\pm^{-1}$, т.е. $U_\pm$ — гильбертовы унитарные операторы в $\mathcal{K}^\pm$. $\square$

3.7 Теоремы Филлипса для унитарных операторов и следствия из них

Большой вклад в теорию пространств Крейна внес Р.С. Филлипс. Сейчас будут изложены некоторые его результаты по теории унитарных операторов.

Определение 3.8. Унитарный оператор U называется устойчивым, если все его натуральные степени ограничены:

$$\|U^n\| \leq c < \infty, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.90)$$

$\square$

Так как

$$\|U^{-n}\| = \|(U^*)^n\| \leq c, \quad (3.91)$$

то можно считать, что в (3.90) $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 3.9. Унитарный оператор U называется нормально разложимым, если найдется такое каноническое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+ [\oplus] \mathcal{K}_1^-$, что $U\mathcal{K}_1^\pm = \mathcal{K}_1^\pm$. $\square$

Теорема 3.9 (Филлипс). Унитарный оператор U нормально разложим тогда и только тогда, когда он устойчив. $\square$

Этот результат здесь приведен без доказательства.

Упражнение 3.4. Доказать, что J -унитарный оператор U является гильбертово унитарным тогда и только тогда, когда $\|U\| = 1$. $\square$

Теорема 3.10 (Филлипс). Пусть $\{U\}$ — группа J -унитарных операторов, коммутирующих друг с другом. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1⁰. Существует константа $c < \infty$ такая, что $\|U\| \leq c$ для любого U .

2⁰. Существует каноническое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+ [\oplus] \mathcal{K}_1^-$ такое, что $U\mathcal{K}_1^\pm = \mathcal{K}_1^\pm$ для всех U из семейства. $\square$

Эта теорема также дается здесь без доказательства.

Замечание 3.3. В теореме 3.9 нет информации об элементе U_{12} матричного оператора $U = (U_{ij})_{i,j=1}^2$, однако U нормально разложим. Поэтому $U\mathcal{K}_1^\pm = \mathcal{K}_1^\pm$ и, следовательно, $U_{12} = 0$. $\square$

Пусть U — унитарный оператор.

Определение 3.10. Унитарный оператор U называется сильно устойчивым, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что любой унитарный оператор V , удовлетворяющий условию $\|U - V\| < \varepsilon$, является устойчивым. $\square$

Если оператор U устойчив, то (теорема 3.9) он нормально разложим, $U\mathcal{K}^\pm = \mathcal{K}^\pm$, и потому он имеет диагональный вид:

$$U = \text{diag}(U_+; U_-). \quad (3.92)$$

В этом случае он является гильбертово унитарным в $\mathcal{H} = \mathcal{K}^+[+]\mathcal{K}^-$. Следовательно,

$$\sigma(U) \subset \mathbb{T} = \{\lambda : |\lambda| = 1\}. \quad (3.93)$$

Теорема 3.11 (М. Крейн, Филлипс). Унитарный оператор U является сильно устойчивым тогда и только тогда, когда существует каноническое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[+]\mathcal{K}^-$ такое, что

$$U\mathcal{K}^\pm = \mathcal{K}^\pm, \quad \sigma(U|_{\mathcal{K}^+}) \cap \sigma(U|_{\mathcal{K}^-}) = \emptyset. \quad (3.94)$$

В этом случае U имеет единственную инвариантную максимальную дуальную пару $\{\mathcal{K}^+, \mathcal{K}^-\}$. $\square$

Теорема 3.12 (М. Крейн, Филлипс). Пусть $\{U\}$ — семейство унитарных коммутирующих операторов в пространстве $\mathcal{K}$ и любой конечный набор операторов $\{U_{k_1}, \dots, U_{k_n}\}$ порождает ограниченную группу. Тогда если $U_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$ для каждого U , то существуют подпространства $\mathcal{L}^\pm \in \mathfrak{M}^\pm$, $\mathcal{L}^+ = (\mathcal{L}^-)^{[\perp]}$, такие, что $U\mathcal{L}^\pm = \mathcal{L}^\pm$ для любого U из семейства. $\square$

Замечание 3.4. В условиях теоремы 3.12 пара коммутирующих унитарных операторов имеет общее максимальное неотрицательное инвариантное подпространство. В общем же случае, для любых унитарных операторов U, V в $\mathcal{K}$, $U_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$, $V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$, проблема существования общих инвариантных максимальных неотрицательных подпространств является нерешенной. $\square$

Продолжим рассмотрение свойств семейств операторов. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\mathcal{A} = \{U\}$ — группа операторов, $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$.

Определение 3.11. Группа $\mathcal{A}$ называется аменабельной, если на ней существует инвариантное среднее f_* , т.е. линейный непрерывный функционал, заданный на множестве $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ ограниченных функций φ на $\mathcal{A}$, $\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$, $\varphi(U) \in \mathbb{C}$, такой, что выполнены условия:

- 1⁰. $f_*(1) = 1$;
- 2⁰. $f_*(\varphi) \geq 0$, если $\varphi \geq 0$ ($\varphi(U) \geq 0$, $\forall U$);
- 3⁰. $f_*(\varphi) = f_*(\varphi(\cdot U)) = f_*(\varphi(U) \cdot)$, $\forall U \in \mathcal{A}$;

$$(\varphi(\cdot U)V) := \varphi(VU).$$

□

Функционал f_* называют функционалом Маркова. Примерами аменабельных групп являются:

- 1⁰. Коммутативные группы.
- 2⁰. Разрешимые группы (они далее не понадобятся).
- 3⁰. Компактные группы (в равномерной операторной топологии).
- 4⁰. Ограниченные группы матриц.

Теорема 3.13 (Б.С. Надь). Аменабельная группа операторов подобна группе унитарных операторов тогда и только тогда, когда она ограничена.

Доказательство. (в одну сторону утверждение очевидно).

а) Пусть аменабельная группа подобна группе унитарных операторов. Тогда для любого U из группы найдется непрерывный и непрерывно обратимый оператор S такой, что $S^{-1}US = T$, где T — унитарный оператор. Тогда $U = STS^{-1}$ и потому

$$\|U\| \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|S^{-1}\| \leq \|S\| \|S^{-1}\| < \infty \quad (\|T\| = 1).$$

б) Здесь доказательство гораздо сложнее. Пусть $\mathcal{A}$ — аменабельная группа (по умножению), ограниченная, т.е. существует $c > 0$ такое, что $\|U\| \leq c$ для всякого $U \in \mathcal{A}$. Для обратного оператора $U^{-1} \in \mathcal{A}$ имеем ту же оценку: $\|U^{-1}\| \leq c$.

Пусть f_* — инвариантное среднее (см. определение 3.11). Если φ — вещественная функция, то

$$\inf \{ \varphi(U) : U \in \mathcal{A} \} \leq f_* \leq \sup \{ \varphi(U) : U \in \mathcal{A} \} =: M. \quad (3.95)$$

Докажем правое неравенство. Имеем $\varphi(\cdot) = (\varphi(\cdot) - M) + M$. Так как f_* — линейный функционал, то

$$f_*(\varphi) = -f_*(M - \varphi(\cdot)) + f_*(M).$$

Поскольку $M - \varphi(\cdot) \geq 0$, то по свойству 2^0 (определение 3.11) имеем $f_*(M - \varphi(\cdot)) \geq 0$; кроме того, $f_*(M) = Mf_*(1) = M$. Отсюда следует, что $f_*(\varphi) \leq M$.

Рассмотрим функции

$$\varphi_{x,y} = \varphi_{x,y}(U) := (Ux, Uy), \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Они ограничены, так как

$$|\varphi_{x,y}(U)| = |(Ux, Uy)| \leq \|U\|^2 \|x\| \cdot \|y\| \leq c^2 \|x\| \cdot \|y\|.$$

Тогда определена величина

$$f_*(\varphi_{x,y}) =: (x, y)_1 \in \mathbb{C}. \quad (3.96)$$

Докажем, что (3.96) определяет скалярное произведение в $\mathcal{H}$, эквивалентное исходному. Нужно убедиться сначала, что имеют место свойства, определяющие скалярное произведение, т.е.

- 1^0 . $(x, x)_1 \geq 0$, $(x, x)_1 = 0 \iff x = 0$;
- 2^0 . $(\alpha x + \beta y, z)_1 = \alpha(x, z)_1 + \beta(y, z)_1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
- 3^0 . $(x, y)_1 = \overline{(y, x)_1}$.

Проверим, что справедливы свойства 2^0 и 3^0 . Имеем

$$f_*(\varphi_{\alpha x + \beta y, z}) = (\alpha x + \beta y, z)_1 = |\text{линейность } f_*| = \alpha(x, z)_1 + \beta(y, z)_1,$$

по пути было использовано также свойство

$$\varphi_{\alpha x + \beta y, z}(U) = \alpha \varphi_{x, z}(U) + \beta \varphi_{y, z}(U).$$

Докажем теперь свойство 1^0 . Имеем, в силу (3.95),

$$\inf \{ \varphi_{x, x}(U) \} \leq f_*(\varphi_{x, x}) = (x, x)_1 \leq \sup \{ \varphi_{x, x}(U) \}.$$

Однако

$$c^{-2} \|x\|^2 \leq \varphi_{x, x}(U) = (Ux, Ux) \leq c^2 \|x\|^2,$$

и тогда из этих неравенств следует, что нормы $\|x\|_1 := \sqrt{(x, x)_1}$ и $\|x\|$ эквивалентны.

Для любого $V \in \mathcal{A}$ преобразуем выражение $(Vx, Vy)_1$. Имеем

$$(Vx, Vy)_1 = f_*(\varphi_{Vx, Vy})(U) = f_*(\varphi_{x, y}(\cdot V)) = f_*(\varphi_{x, y}) = (x, y)_1, \quad (3.97)$$

так как $(UVx, UVy) = \varphi_{x, y}(\cdot V)(U)$.

Свойство (3.97) означает, что оператор V является унитарным в новой норме $\|\cdot\|_1$. Тогда, учитывая эквивалентности норм $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$, имеем

$$(x, y)_1 = (Wx, y), \quad W = W^* \gg 0, \quad (3.98)$$

и из (3.97) и (3.98) получаем, что операторы $W^{1/2}VW^{-1/2}$ унитарны в исходном скалярном произведении. Поэтому каждый элемент $V \in \mathcal{A}$ подобен унитарному оператору. $\square$

Теорема 3.13 позволяет достаточно просто проверить справедливость следующей ниже теоремы 3.14, которая в столь общей форме рассмотрена Т.Я. Азизовым и В.С. Шульманом, однако доказательство при этом в существенном не отличалось от данного Р.С. Филлипсом для коммутативных групп.

Теорема 3.14. Аменабельная группа $\mathcal{A} = \{U\}$ J -унитарных операторов ограничена тогда и только тогда, когда существует каноническое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+ [+] \mathcal{K}_1^-$, такое, что $U\mathcal{K}_1^\pm = \mathcal{K}_1^\pm$ для любого $U \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ [\oplus] \mathcal{K}^-$, $J = P^+ - P^-$, $(x, y) = [Jx, y]$, $[x, y] = (Jx, y)$ отвечает исходному каноническому разложению.

а) Предположим, что существует каноническое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+ [+] \mathcal{K}_1^-$, $U\mathcal{K}_1^\pm = \mathcal{K}_1^\pm$. Так как $\{\mathcal{K}_1^\pm, \pm[x, y]\}$ — гильбертовы пространства, то, как следует из теоремы 3.13 (Б.С. Надя), операторы $U|_{\{\mathcal{K}_1^\pm, \pm[x, y]\}}$ являются гильбертово унитарными в $\mathcal{K}_1^\pm$.

Введем в $\mathcal{K}$ новую норму, порожденную скалярным произведением

$$\begin{aligned} (x, y)_1 &:= [x_+^{(1)}, y_+^{(1)}] - [x_-^{(1)}, y_-^{(1)}], \\ x &= x_+^{(1)} + x_-^{(1)}, \quad y = y_+^{(1)} + y_-^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Тогда в новой норме операторы $U \in \mathcal{A}$ подобны унитарным (см. конец доказательства теоремы 3.13) и, значит, аменабельная группа $\mathcal{A}$ ограничена.

б) прежде чем доказывать обратное утверждение, рассмотрим следующую ситуацию. Пусть $A = A^*$ — оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и $0 \in \rho(A)$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-, \quad A\mathcal{H}^\pm = \mathcal{H}^\pm, \\ A &= \text{diag}(A^+; A^-), \quad A^+ \gg 0, \quad A^- \ll 0.\end{aligned}\tag{3.100}$$

Если B коммутирует с A , $BA = AB$, то $B\mathcal{H}^\pm \subset \mathcal{H}^\pm$, $B = \text{diag}(B^+; B^-)$, где $B^\pm$ — произвольные (вообще говоря) операторы.

Будем теперь считать, что аменабельная группа $\mathcal{A} = \{U\}$ J -унитарных операторов U ограничена. Докажем, что существует каноническое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+ [+] \mathcal{K}_1^-$ такое, что $U\mathcal{K}_1^\pm = \mathcal{K}_1^\pm$ для любого $U \in \mathcal{A}$.

Возьмем оператор $A := W^{-1/2}JW^{-1/2} = A^*$, где W — оператор, определенный формулой (3.98). Так как $0 \in \rho(J)$, а $W^{1/2}$, $W^{-1/2}$ равномерно положительны, то $0 \in \rho(A)$, и потому пространство $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ можно разложить на подпространства согласно (3.100). Введем теперь оператор $B := W^{1/2}UW^{-1/2}$, $U \in \mathcal{A}$. Проверим, что операторы A и B коммутируют.

Если это так, то

$$\begin{aligned}AB &= BA \iff \left(W^{-1/2}JW^{-1/2}\right) \left(W^{1/2}UW^{-1/2}\right) = \\ &= \left(W^{1/2}UW^{-1/2}\right) \left(W^{-1/2}JW^{-1/2}\right) \iff \\ &W^{-1/2}(JU) = W^{1/2}UW^{-1}J \iff (JUJ)W = WU.\end{aligned}\tag{3.101}$$

В то же время

$$JUJ = (U^*)^{-1}.\tag{3.102}$$

Действительно, так как оператор U является J -унитарным, то

$$[Ux, Uy] = (JUx, Uy) = [x, y] = (Jx, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H} = \mathcal{K}.$$

Отсюда имеем

$$(JUJ\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}, U^{-1}\tilde{y}), \quad \tilde{x} = Jx, \quad \tilde{y} = Uy,$$

откуда и следует (3.102).

С учетом (3.102) соотношение (3.101) дает связь

$$W = U^*WU.\tag{3.103}$$

Эта формула верна, так как, согласно (3.97), (3.98),

$$(Ux, Uy)_1 = (WUx, Uy)_1 = (U^*WUx, y)_1 = (x, y)_1 = (Wx, y).$$

Отсюда следует, после возвращения по всем выкладкам к (3.101), что операторы A и B коммутируют. Тогда, согласно сказанному в начале доказательства части б), имеем свойства

$$\begin{aligned} B\mathcal{H}^\pm \subset \mathcal{H}^\pm &\iff W^{-1/2}UW^{-1/2}\mathcal{H}^\pm \subset \mathcal{H}^\pm \iff \\ UW^{-1/2}\mathcal{H}^\pm &\subset W^{-1/2}\mathcal{H}^\pm. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Докажем теперь, что:

- 1⁰. $W^{-1/2}\mathcal{H}^+[\perp]W^{-1/2}\mathcal{H}^-$;
- 2⁰. $W^{-1/2}\mathcal{H}^+ \geq 0$ (в $\mathcal{K}$), $W^{-1/2}\mathcal{H}^- \leq 0$ (в $\mathcal{K}$);
- 3⁰. $\mathcal{H} = (W^{-1/2}\mathcal{H}^+)[\perp](W^{-1/2}\mathcal{H}^-)$.

Если эти свойства имеют место, то, так как $W^{-1/2}\mathcal{H}^+$ и $W^{-1/2}\mathcal{H}^-$ в сумме дают все $\mathcal{K} = \mathcal{H}$, то эти подпространства максимальны, т.е.

$$W^{-1/2}\mathcal{H}^\pm \in \mathfrak{M}^\pm. \quad (3.105)$$

Кроме того, они равномерно дефинитны, так как $\mathcal{H} = \mathcal{K} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$.

Отсюда следует, что в качестве подпространств $\mathcal{K}_1^\pm$, дающих требуемое каноническое разложение пространства $\mathcal{K}$, можно взять подпространства

$$\mathcal{K}_1^\pm := W^{-1/2}\mathcal{H}^\pm. \quad (3.106)$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы осталось лишь проверить свойства 1⁰ — 3⁰.

- 1⁰. Пусть $x_\pm \in \mathcal{H}^\pm$. Тогда $W^{-1/2}x_\pm \in \mathcal{K}_1^\pm$ и

$$[W^{-1/2}x_+, W^{-1/2}x_-] = (W^{-1/2}JW^{-1/2}x_+, x_-) = 0,$$

так как $Ax_+ = W^{-1/2}JW^{-1/2}x_+ \in \mathcal{H}^+$, $x_- \in \mathcal{H}^-$.

- 2⁰. $[W^{-1/2}x_+, W^{-1/2}x_+] = (JW^{-1/2}x_+, W^{-1/2}x_+) =$
 $= (W^{-1/2}JW^{-1/2}x_+, x_+) = (Ax_+, x_+) \geq 0$, так как $A|_{\mathcal{H}^+} = A^+ \gg 0$.
 Аналогично проверяем, что $W^{-1/2}\mathcal{H}^- \ll 0$.

- 3⁰. Третье свойство следует из (3.105). □

3.8 Преобразование Крейна–Шмульяна и его свойства

Возвращаясь к изучению свойств бинесжимающих операторов, снова рассмотрим пространство Крейна $\mathcal{K}$, его каноническое разложение

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^-, \quad J = P^+ - P^-,$$

и будем считать, что $V : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ — бизнесжимающий оператор,

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} B^+ &:= \{K : \mathcal{K}^+ \longrightarrow \mathcal{K}^-, \quad \|K\| \leq 1\}, \\ B^- &:= \{Q : \mathcal{K}^- \longrightarrow \mathcal{K}^+, \quad \|Q\| \leq 1\} \end{aligned} \quad (3.107)$$

— единичные операторные шары, отвечающие совокупностям угловых операторов неотрицательных и соответственно неположительных подпространств из $\mathcal{K}$.

Рассмотрим произвольный $K \in B^+$ и отвечающее ему подпространство

$$\mathcal{L}_+ = \{x_+ + Kx_+ : \forall x_+ \in \mathcal{K}^+\} \in \mathfrak{M}^+.$$

Так как V — бизнесжимающий, то $V\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$ (следствия 3.1, 3.2),

$$V\mathcal{L}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} (V_{11} + V_{12}K)x_+ \\ (V_{21} + V_{22}K)x_+ \end{pmatrix} \right\}.$$

Поскольку для бизнесжимающего оператора V имеет место свойство $0 \in \rho(V_{11} + V_{12}K)$ (теорема 3.3), то

$$\begin{aligned} V\mathcal{L}_+ &= \left\{ \begin{pmatrix} y_+ \\ (V_{21} + V_{22}K)(V_{11} + V_{12}K)^{-1}y_+ \end{pmatrix} \right\}, \\ y_+ &:= (V_{11} + V_{12}K)x_+. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Отсюда следует, что оператор

$$F_V(K) := (V_{21} + V_{22}K)(V_{11} + V_{12}K)^{-1} \quad (3.109)$$

является угловым оператором для подпространства $V\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$. Отображение (3.109) является дробно-линейным отображением операторного шара B^+ и называется преобразованием Крейна–Шмюльяна.

Заметим теперь, что свойство $V\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+$ имеет место тогда и только тогда, когда у неотрицательных подпространств $\mathcal{L}_+$ и $V\mathcal{L}_+$ их угловые операторы совпадают, т.е.

$$F_V(K) = K. \quad (3.110)$$

Это означает, что K является неподвижной точкой отображения Крейна–Шмюльяна $F_V(K)$.

Замечание 3.5. Если оператор V бизнесжимающий, то $\|V_{11}^{-1}V_{12}\| < 1$. Поэтому $V_{11} + V_{12}K$ является непрерывным отображением при любом K , $\|K\| \leq 1$. Так как V_{11} ограниченно обратим (см. (3.37) при $K = 0$), то отсюда следует, что оператор $I + TK$, $T := V_{11}^{-1}K$, ограниченно обратим при любом K , $\|K\| \leq 1$. Предлагаем доказать самостоятельно, что $\|T\| < 1$ (даже в рефлексивном банаховом пространстве). Здесь это свойство можно проверить непосредственно. $\square$

Рассмотрим основные свойства преобразования Крейна–Шмульяна.

Свойство 1°. Пусть V, W — бизнесжимающие отображения. Тогда

$$F_{VW}(K) = F_V(F_W(K)). \quad (3.111)$$

Доказательство. Как ясно из предыдущего, $F_W(K)$ является угловым оператором для пространства $W\mathcal{L}_+$, $\mathcal{L}_+ = \{x_+ + Kx_+ : x_+ \in \mathcal{K}^+\}$. Аналогично $F_V(F_W(K))$ есть угловой оператор для подпространства $VW\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$, однако для этого подпространства угловой оператор равен $F_{VW}(K)$, и (3.111) доказано.

Свойство 2°. Если V является J -унитарным оператором в $\mathcal{K}$, то

$$F_V(B^+) = B^+, \quad (3.112)$$

т.е. преобразование Крейна–Шмульяна отображает шар B^+ на себя.

Доказательство. Так как V является J -унитарным оператором, то, очевидно, $F_V(B^+) \subset B^+$. Далее, так как V^{-1} также J -унитарен, то аналогично $F_{V^{-1}}(B^+) \subset B^+$. Отсюда следует, что

$$(F_V)^{-1} = F_{V^{-1}}. \quad (3.113)$$

Свойство 3°.

Теорема 3.15 (Хацкевича–Шульмана). Пусть V — бизнесжимающий оператор. Тогда $F_V(B^+)$ — выпуклое замкнутое в слабой операторной топологии множество.

Доказательство отличается от оригинального доказательства авторов.

Напомним, что выпуклость образа $F_V(B^+)$ означает, что для бизнесжимающего оператора V необходимо доказать следующее свойство:

$$\begin{aligned} \alpha F_V(K_1) + (1 - \alpha) F_V(K_2) &= F_V(K_3), \\ 0 \leq \alpha \leq 1, \quad K_1, K_2, K_3 &\in B^+, \end{aligned} \quad (3.114)$$

т.е. по любым $K_1, K_2 \in B^+$ и любому $\alpha \in [0, 1]$ нужно найти $K_3 \in B^+$ такой, что выполнено свойство (3.114).

Воспользуемся установленными выше свойствами 1° и 2°. Представим оператор V в виде $V = WU$, где U является J -унитарным, а W — бизнесжимающим оператором вида

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & 0 \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.115)$$

Это можно сделать следующим образом. Введем оператор $\Gamma := -(V_{11}^{-1}V_{12})^*$. Так как для бизнесжимающего оператора V имеем $\|V_{11}^{-1}V_{12}\| < 1$ (см. выше), то $\|\Gamma\| < 1$. Поэтому по оператору Γ можно ввести оператор $U(\Gamma)$ по формуле (3.77):

$$U(\Gamma) = \begin{pmatrix} (I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2} & \Gamma^*(I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2} \\ \Gamma(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2} & (I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2} \end{pmatrix}. \quad (3.116)$$

Как выяснено при доказательстве теоремы 3.10, оператор $U(\Gamma)$ является J -унитарным, т.е. $U(\Gamma)^c = U(\Gamma)^{-1}$.

Прямо проверяется, что при выбранном Γ произведение $VU(\Gamma)$ является матрицей вида (3.115), т.е. можно положить $W = VU(\Gamma)$. Так как $U(\Gamma)$ является J -унитарным, а V — бизнесжимающим, то оператор W также бизнесжимающий. Отсюда следует, что оператор V допускает факторизацию вида

$$V = W \cdot U, \quad (3.117)$$

где W — бизнесжимающий, а $U = U(\Gamma)^{-1} = U(\Gamma)^c$ — унитарный оператор в $\mathcal{K}$.

Согласно свойствам 1° и 2°,

$$\begin{aligned} F_V(B^+) &= F_{WU}(B^+) = F_W(F_U(B^+)) = \\ &= F_W(B^+) = \{(W_{21} + W_{22}K)W_{11}^{-1} : \|K\| \leq 1\}. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Отсюда выпуклость (см. (3.114)) и замкнутость $F_V(B^+)$ (в слабой операторной топологии) следуют непосредственно. $\square$

Замечание 3.6. Если $W_{22} \in \mathfrak{S}_\infty$, то $F_V(B^+)$ — компакт в сильной операторной топологии. $\square$

Продолжим изучение свойств преобразования Крейна–Шмульяна.

Свойство 4°. Если $V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$, то $F_V(K) : B^+ \longrightarrow B^+$ является непрерывной функцией переменной K в слабой операторной топологии.

Доказательство (аналогичная схема уже использовалась ранее при доказательстве теоремы 3.1). Итак, докажем, что для отображения

$$F_V(K) := (V_{21} + V_{22}K)(V_{11} + V_{12}K)^{-1}$$

из свойства $K_n \longrightarrow K_0$ (слабо) следует свойство $F_V(K_n) \longrightarrow F_V(K_0)$ (слабо).

а) Так как $\|V_{11}^{-1}V_{12}\| =: \alpha < 1$, то нормы

$$\|(V_{11} + V_{12}K)^{-1}\|, \quad \|K\| \leq 1,$$

равномерно ограничены. Действительно,

$$\begin{aligned} \|(V_{11} + V_{12}K)^{-1}\| &= \|(I + V_{11}^{-1}V_{12}K)^{-1}V_{11}^{-1}\| \leq \\ &\leq \|(I + V_{11}^{-1}V_{12}K)^{-1}\| \cdot \|V_{11}^{-1}\| \leq \frac{\|V_{11}^{-1}\|}{1 - \|V_{11}^{-1}V_{12}K\|} \leq \frac{\|V_{11}^{-1}\|}{1 - \alpha}. \end{aligned} \quad (3.119)$$

б) Так как $V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$, то

$$(V_{11} + V_{12}K_n)^{-1} \longrightarrow (V_{11} + V_{12}K_0)^{-1} \quad (n \longrightarrow \infty)$$

сильно. В самом деле,

$$\begin{aligned} \|(V_{11} + V_{12}K_n)^{-1}x - (V_{11} + V_{12}K_0)^{-1}x\| &= \\ &= \|(V_{11} + V_{12}K_n)^{-1}\{V_{12}(K_0 - K_n)\}(V_{11} + V_{12}K_0)^{-1}x\| \leq \\ &\leq \|(V_{11} + V_{12}K_n)^{-1}\| \cdot \|\{V_{12}(K_0 - K_n)\}(V_{11} + V_{12}K_0)^{-1}x\|. \end{aligned}$$

Здесь первый сомножитель ограничен в силу (3.119), а второй стремится по норме к нулю при $n \longrightarrow \infty$, так как $V_{12}(K_0 - K_n) \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$ в сильной операторной топологии.

в) Поскольку $V_{21} + V_{22}K_n \longrightarrow V_{21} + V_{22}K_0$ в слабой операторной топологии, а $(V_{11} + V_{12}K_n)^{-1} \longrightarrow (V_{11} + V_{12}K_0)^{-1}$ сильно, то отсюда следует, что $F_V(K_n) \longrightarrow F_V(K_0)$ в слабой операторной топологии. $\square$

3.9 Теоремы Крейна для бинесжимающих операторов

Далее понадобится следующий известный топологический результат.

Теорема 3.16 (Шаудер). Пусть Ω является выпуклым компактом в локально выпуклом топологическом пространстве, а функция $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ непрерывна. Тогда найдется такая точка $x_0 \in \Omega$, что $f(x_0) = x_0$. $\square$

С использованием свойств преобразования Крейна–Шмульяна и теоремы Шаудера получаем следующий результат.

Теорема 3.17 (Крейн). У бинесжимающего оператора V с $V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$ существует максимальное неотрицательное инвариантное подпространство, т.е. существует такое $\mathcal{L}_0^+ \in \mathfrak{M}^+$, что $V\mathcal{L}_0^+ = \mathcal{L}_0^+$.

Более того, любое неотрицательное инвариантное подпространство оператора V допускает расширение до максимального неотрицательного подпространства, инвариантного относительно V , т.е. если $\mathcal{L}_+ \geq 0$, $V\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+$, то существует $\mathcal{L}^+ \in \mathfrak{M}^+$, $\mathcal{L}^+ \supset \mathcal{L}_+$, $V\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}^+$. $\square$

Доказательство.

а) Так как согласно теореме Тихонова операторный шар B^+ компактен в слабой операторной топологии, а по свойству 4° преобразование Крейна–Шмульяна $F_V(K) : B^+ \longrightarrow B^+$ непрерывно в слабой операторной топологии, то из теоремы Шаудера, примененной к $\Omega = B^+$ и $f : K \longrightarrow F_V(K)$, получаем, что существует $K_0 \in B^+$ такой, что $F_V(K_0) = K_0$. Этот оператор, как следует из предыдущего, является угловым оператором подпространства $\mathcal{L}_0 \in \mathfrak{M}^+$,

$$\mathcal{L}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_+ \\ K_0 x_+ \end{pmatrix} : x_+ \in \mathcal{K}^+ \right\},$$

которое и будет искомым максимальным неотрицательным инвариантным подпространством.

б) Докажем второе утверждение теоремы. Пусть K'_0 — угловой оператор неотрицательного подпространства $\mathcal{L}_+$. Возьмем

$$\Omega = B^+(K'_0) := \{K \in B^+ : K'_0 \subset K\}.$$

Так как $B^+(K'_0)$ — выпуклое замкнутое в слабой операторной топологии множество и функция

$$F_V(K'_0) : B^+(K'_0) \longrightarrow B^+(K'_0)$$

непрерывна (в слабой операторной топологии), то по теореме Шаудера найдется $K_0 \in B^+(K'_0)$ такой, что $F_V(K_0) = K_0$. Очевидно, этому оператору отвечает подпространство

$$\mathcal{L}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x_+ \\ K_0 x_+ \end{pmatrix} : x_+ \in \mathcal{K}^+ \right\} \supset \mathcal{L}_+,$$

так как $K_0 \supset K'_0$. □

Замечание 3.7. В развитие теоремы 3.17 отметим, что если имеется дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ такая, что $V\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+$, $V^c\mathcal{L}_- = \mathcal{L}_-$, то найдется максимальная дуальная пара $\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\}$, для которой $\tilde{\mathcal{L}}_\pm \supset \mathcal{L}_\pm$, $V\tilde{\mathcal{L}}_+ = \tilde{\mathcal{L}}_+$, $V^c\tilde{\mathcal{L}}_- = \tilde{\mathcal{L}}_-$.

Здесь при использовании схемы, примененной в теореме 3.17, следует взять множество

$$\Omega := \{K \in B^+(K'_0) : \mathcal{L}_+(K) = \left\{ \begin{pmatrix} x_+ \\ K_0 x_+ \end{pmatrix} : x_+ \in \mathcal{K}^+ \right\} [\perp] \mathcal{L}_-\},$$

которое является выпуклым и замкнутым в слабой операторной топологии. Тогда $F_V(\cdot) : \Omega \longrightarrow \Omega$ является непрерывной функцией K в слабой операторной топологии, и снова работает теорема Шаудера. □

В качестве следствия из теоремы 3.17 и замечания 3.7 приведем следующий факт.

Теорема 3.18 (теорема М.Г. Крейна для унитарных операторов). Пусть U — унитарный оператор в $\mathcal{K}$, а $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — дуальная пара инвариантных относительно U подпространств,

$$U\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm, \quad U_{12} \in \mathfrak{S}_\infty.$$

Тогда найдется максимальная дуальная пара

$$\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\}, \quad \tilde{\mathcal{L}}_\pm \supset \mathcal{L}_\pm, \quad U\tilde{\mathcal{L}}_\pm = \tilde{\mathcal{L}}_\pm. \quad (3.120)$$

Доказательство. Приведем лишь схему доказательства этого утверждения.

Имеем $U\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$. Согласно теоремам 2.4 и 3.17 имеется расширение $\{\mathcal{L}_{1,+}, \mathcal{L}_{1,-}\}$ дуальной пары $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ такое, что

$$\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\} \subset \{\mathcal{L}_{1,+}, \mathcal{L}_{1,-}\}, \quad U\mathcal{L}_{1,+} = \mathcal{L}_{1,+}.$$

С другой стороны, из свойства $U\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$ и унитарности U и U^{-1} следует, что

$$U^{-1}\mathcal{L}_+ \subset U^{-2}\mathcal{L}_+ \subset \dots \subset U^{-n}\mathcal{L}_+ \subset \dots$$

Здесь все линеалы $U^{-n}\mathcal{L}_+ \geq 0$ и они вложены один в другой.

Возьмем линеал

$$\mathcal{L}'_{1,+} := \cup_{n=0}^{\infty} U^{-n}\mathcal{L}_+, \quad (3.121)$$

который, очевидно, является неотрицательным. Для него имеем свойство

$$U\mathcal{L}'_{1,+} = \mathcal{L}'_{1,+},$$

так как объединение в (3.121) можно проводить, начиная с любого номера. Тогда

$$\overline{U\mathcal{L}'_{1,+}} = \overline{U\mathcal{L}'_{1,+}} = \overline{\mathcal{L}'_{1,+}} =: \tilde{\mathcal{L}}_+.$$

Для линеала $\tilde{\mathcal{L}}_-$ рассуждения аналогичные. $\square$

Замечание 3.8. Вернемся к теореме 3.15 Хацкевича–Шульмана. Как было установлено в ходе доказательства этой теоремы (см. (3.118)),

$$F_V(B^+) = F_W(B^+) = \{(W_{21} + W_{22}K)W_{11}^{-1} : \|K\| \leq 1\},$$

причем (см. замечание 3.6) $F_W(B^+)$ является компактом в сильной операторной топологии, если $W_{22} \in \mathfrak{S}_{\infty}$. Тогда отображение $F_V : \Omega := F_V(B^+) \rightarrow \Omega$ всегда сильно непрерывная функция K , и по теореме Шаудера существует неподвижная точка $F_V(K)$, независимо от того, выполнено ли свойство компактности V_{12} или нет. Отсюда следует, что операторы вида WU , где U — унитарный, а W — бинесжимающий оператор вида (3.115) с $W_{22} \in \mathfrak{S}_{\infty}$, имеют инвариантное подпространство $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$. $\square$

Замечание 3.9. Для непрерывных диссипативных либо самосопряженных в $\mathcal{K}$ операторов верны полные аналоги доказанных выше утверждений для бинесжимающих и унитарных операторов. В частности, если A — диссипативный оператор, $A_{12} \in \mathfrak{S}_{\infty}$, то существует $\mathcal{L}^+ \in \mathfrak{M}^+$, $A\mathcal{L}^+ \subset \mathcal{L}^+$; если $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — дуальная пара, где $\mathcal{L}_+$ инвариантно относительно A , а $\mathcal{L}_-$ — относительно A^c , то существует максимальная дуальная пара $\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\}$:

$$A\tilde{\mathcal{L}}_+ \subset \tilde{\mathcal{L}}_+, \quad A^c\tilde{\mathcal{L}}_- \subset \tilde{\mathcal{L}}_-, \quad \tilde{\mathcal{L}}_{\pm} \supset \mathcal{L}_{\pm}.$$

То же справедливо для $A = A^c$.

Доказательство основано на том, что по оператору A строится бинесжимающий либо унитарный (в $\mathcal{K}$) оператор (преобразование Кэли оператора A)

$$V := (A - \bar{\lambda}I)(A - \lambda I)^{-1}, \quad (3.122)$$

причем

$$\{V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty\} \iff \{A_{12} \in \mathfrak{S}_\infty\}. \quad \square$$

Эти идеи сейчас будут использованы при формулировке и доказательстве соответствующих утверждений.

Теорема 3.19. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\oplus]\mathcal{K}^-$ — пространство Крейна, $J = P^+ - P^-$, а оператор A является ограниченным J -диссипативным оператором, представленным матрицей

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{12} \in \mathfrak{S}_\infty. \quad (3.123)$$

Тогда какова бы ни была дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, инвариантная относительно A , $A\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$, $A^c\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$, найдется максимальная дуальная пара $\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\}$, инвариантная относительно A , т.е. $A\tilde{\mathcal{L}}_+ \subset \tilde{\mathcal{L}}_+$, $A^c\tilde{\mathcal{L}}_- \subset \tilde{\mathcal{L}}_-$.

Доказательство. Сначала наметим еще раз идею доказательства, эта идея уже упоминалась в замечании 3.9.

Возьмем $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и рассмотрим оператор $V := (A - \bar{\lambda}I)(A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$. Тогда V — бинесжимающий оператор и $V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$. Далее выберем λ так, чтобы $V\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+$ и $V^c\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$. Как ранее было установлено, можно рассмотреть дуальную пару $\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\} \supset \{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, $V\tilde{\mathcal{L}}_+ = \tilde{\mathcal{L}}_+$, $V^c\tilde{\mathcal{L}}_- \subset \tilde{\mathcal{L}}_-$. Затем выразим A через V , $A = (\lambda V - \bar{\lambda}I)(V - I)^{-1}$, и докажем, что

$$(V - I)^{-1}\tilde{\mathcal{L}}_+ \subset \tilde{\mathcal{L}}_+, \quad (\lambda V - \bar{\lambda}I)(V - I)^{-1}\tilde{\mathcal{L}}_+ \subset \tilde{\mathcal{L}}_+, \quad (V^c - I)\tilde{\mathcal{L}}_- \subset \tilde{\mathcal{L}}_-.$$

1°. Возьмем $\lambda \in \mathbb{C}$ с $|\lambda| > \|A\|$ и $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и рассмотрим преобразование Кэли оператора A :

$$V := (A - \bar{\lambda}I)(A - \lambda I)^{-1}, \quad V^c = (A^c - \lambda I)(A^c - \bar{\lambda}I)^{-1}. \quad (3.124)$$

Оказывается, оператор V (при фиксированном выбранном λ) является бинесжимающим, причем $0 \in \rho(V)$ и $0 \in \rho(V^c)$, так как в (3.124) все сомножители обратимы.

Докажем, что для оператора V выполнены свойства

$$V\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+, \quad V^c\mathcal{L}_- = \mathcal{L}_-. \quad (3.125)$$

Согласно условиям теоремы, $A\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$. Рассмотрим оператор $B := A|_{\mathcal{L}_+}$, т.е. сужение оператора A на инвариантное подпространство $\mathcal{L}_+$. Очевидно, $\|B\| \leq \|A\| < |\lambda|$ и потому

$$(A - \lambda I)\mathcal{L}_+ = (B - \lambda I)\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+, \quad (3.126)$$

так как λ для B является регулярной точкой. Таким образом, $\mathcal{L}_+ = (A - \lambda I)^{-1}\mathcal{L}_+$, откуда следует, что

$$V\mathcal{L}_+ = (A - \bar{\lambda}I)(A - \lambda I)^{-1}\mathcal{L}_+ = (A - \bar{\lambda}I)\mathcal{L}_+ = (B - \bar{\lambda}I)\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+.$$

Аналогично доказывается второе свойство (3.125).

2°. Докажем теперь, что

$$\{A_{12} \in \mathfrak{S}_\infty\} \implies \{V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty\}. \quad (3.127)$$

По определению оператора V имеем $V(A - \lambda I) = A - \bar{\lambda}I$. Запишем это соотношение в матричной форме, отвечающей каноническому разложению. Имеем

$$\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} - \lambda I & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} - \bar{\lambda}I & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \bar{\lambda}I \end{pmatrix}.$$

Приравнивая операторные элементы в верхнем правом углу, получим

$$V_{11}A_{12} + V_{12}(A_{22} - \lambda I) = A_{12}.$$

Отсюда следует, что

$$V_{12} = -(V_{11} - I)A_{12}(A_{22} - \lambda I)^{-1}. \quad (3.128)$$

Так как здесь $V_{11} - I$ и $(A_{22} - \lambda I)^{-1}$ — непрерывные операторы, а $A_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$, то $V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$.

3°. Поскольку оператор V бинесжимающий, $V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$ и выполнены свойства (3.125), то по теореме Крейна (см. теорему 3.17 и замечание 3.7) существует максимальная дуальная пара

$$\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\} \supset \{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}, \quad V\tilde{\mathcal{L}}_+ = \tilde{\mathcal{L}}_+, \quad V^c\tilde{\mathcal{L}}_- \subset \tilde{\mathcal{L}}_-. \quad (3.129)$$

4°. Докажем теперь, что

$$(V - I)\tilde{\mathcal{L}}_+ = \tilde{\mathcal{L}}_+ \in \mathfrak{M}^+. \quad (3.130)$$

Напомним, что для канонического разложения пространства $\mathcal{K}$ и любого $\tilde{\mathcal{L}}_+ \in \mathfrak{M}^+$ имеют место свойства $P^+\tilde{\mathcal{L}}_+ = \mathcal{K}^+$ и непрерывность операторов $(P^+|\tilde{\mathcal{L}}_+)$ и $(P^+|\tilde{\mathcal{L}}_+)^{-1}$. При этом

$$(P^+|\tilde{\mathcal{L}}_+)^{-1} : \mathcal{K}^+ \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_+.$$

Поэтому свойство (3.130) равносильно свойству

$$(P^+|\tilde{\mathcal{L}}_+)(V - I)(P^+|\tilde{\mathcal{L}}_+)^{-1} \mathcal{K}^+ = \mathcal{K}^+, \quad (3.131)$$

т.е. оператор $(V - I)|\tilde{\mathcal{L}}_+$ подобен оператору

$$(P^+|\tilde{\mathcal{L}}_+)(V - I)(P^+|\tilde{\mathcal{L}}_+)^{-1}.$$

Пусть $\tilde{K}$ — угловой оператор подпространства $\tilde{\mathcal{L}}_+$. Тогда

$$(P^+|\tilde{\mathcal{L}}_+)^{-1} x_+ = \begin{pmatrix} x_+ \\ \tilde{K}x_+ \end{pmatrix}$$

и потому

$$(V - I)(P^+|\tilde{\mathcal{L}}_+)^{-1} x_+ = (V - I) \begin{pmatrix} x_+ \\ \tilde{K}x_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (V_{11} - I + V_{12}\tilde{K})x_+ \\ * \end{pmatrix},$$

где звездочкой здесь и далее будем обозначать выражения, несущественные для доказательства. Значит,

$$\begin{aligned} & (P^+|\tilde{\mathcal{L}}_+)^{-1} (V - I)(P^+|\tilde{\mathcal{L}}_+)^{-1} x_+ = \\ & = (P^+|\tilde{\mathcal{L}}_+)^{-1} \begin{pmatrix} (V_{11} - I + V_{12}\tilde{K})x_+ \\ * \end{pmatrix} = (V_{12} - I + V_{12}\tilde{K})x_+. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оператор $(V - I)|\tilde{\mathcal{L}}_+$ подобен оператору $V_{11} - I + V_{12}\tilde{K}$. Таким образом, свойство (3.130) равносильно условию

$$1 \in \rho(V_{11} + V_{12}\tilde{K}). \quad (3.132)$$

В силу (3.122) $V - I = (\lambda - \bar{\lambda})(A - \lambda)^{-1}$ и потому является ограничено обратимым оператором, т.е. $1 \in \rho(V)$ и потому $1 \notin \sigma_p(V|\tilde{\mathcal{L}}_+)$. В виду подобия операторов $(V - I)\tilde{\mathcal{L}}_+$ и $V_{11} + V_{12}\tilde{K} - I$ получаем

$$1 \notin \sigma_p(V_{11} + V_{12}\tilde{K}). \quad (3.133)$$

Докажем, что $1 \in \rho(V_{11})$. Тогда, в силу компактности $V_{12}\tilde{K}$ и теоремы Фредгольма, будем иметь

$$1 \in \rho(V_{11} + V_{12}\tilde{K}) \cup \sigma_p(V_{11} + V_{12}\tilde{K}). \quad (3.134)$$

Так как выполнено свойство (3.133), то тогда получим, что

$$1 \in \rho(V_{11} + V_{12}\tilde{K}).$$

Для доказательства свойства $1 \in \rho(V_{11})$ рассмотрим, согласно определению (3.124), соотношение

$$\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} - \lambda I & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} - \bar{\lambda} I & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \bar{\lambda} I \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем $V_{11}(A_{11} - \lambda I) + V_{12}A_{21} = A_{11} - \bar{\lambda} I$. Тогда

$$\begin{aligned} V_{11} &= (A_{11} - \bar{\lambda} I)(A_{11} - \lambda I)^{-1} - V_{12}A_{21}(A_{11} - \lambda I)^{-1} = \\ &= I + (\lambda - \bar{\lambda})(A_{11} - \lambda I)^{-1} - V_{12}A_{21}(A_{11} - \lambda I)^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$V_{11} - I = (\lambda - \bar{\lambda})(A_{11} - \lambda I)^{-1} - V_{12}A_{21}(A_{11} - \lambda I)^{-1} =: X + Y.$$

Здесь, очевидно, $0 \in \rho(X)$, $Y \in \mathfrak{S}_\infty$. Значит, согласно теореме Фредгольма,

$$0 \in \rho(X + Y) \cup \sigma_p(X + Y).$$

Если $0 \in \rho(X + Y)$, то $1 \in \rho(V_{11})$. Покажем, что $0 \notin \sigma_p(V_{11} - I)$.

Предположим противное, т.е. $0 \in \sigma_p(V_{11} - I)$. Тогда существует ненулевой элемент $x_+^0 \in \mathcal{K}^+$ такой, что $V_{11}x_+^0 = x_+^0$. Имеем для этого элемента

$$\begin{aligned} [Vx_+^0, Vx_+^0] &= (V_{11}x_+^0, V_{11}x_+^0) - (V_{21}x_+^0, V_{21}x_+^0) = \\ &= (x_+^0, x_+^0) - (V_{21}x_+^0, x_+^0) \geq [x_+^0, x_+^0] = (x_+^0, x_+^0), \end{aligned}$$

где использовано свойство несжимаемости оператора V . отсюда следует, что $-(V_{21}x_+^0, V_{21}x_+^0) \geq 0$, т.е. $V_{21}x_+^0 = 0$. Но тогда $(V - I)x_+^0 = 0$, т.е. $1 \in \sigma_p(V)$, в противоречии со свойством $1 \in \rho(V)$, о котором упоминалось выше. Значит, $1 \in \rho(V_{11})$.

5°. Проведенные рассуждения показали, что имеет место свойство (3.132), а потому, как установлено в части 4°, имеет место свойство (3.130).

Отсюда следует с учетом свойства $V\tilde{\mathcal{L}}_+ = \tilde{\mathcal{L}}_+$ (см. (3.129)), что

$$A\tilde{\mathcal{L}}_+ = (\lambda V - \bar{\lambda}I)(V - I)^{-1}\tilde{\mathcal{L}}_+ = (\lambda V - \bar{\lambda}I)\tilde{\mathcal{L}}_+ \subset \tilde{\mathcal{L}}_+.$$

Поскольку $A\tilde{\mathcal{L}}_+ \subset \tilde{\mathcal{L}}_+$ тогда и только тогда, когда $A^c\tilde{\mathcal{L}}_- \subset \tilde{\mathcal{L}}_- = \tilde{\mathcal{L}}_+^{[\perp]}$, то $\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\}$ — максимальная дуальная пара, о которой шла речь в формулировке теоремы. $\square$

4 Спектральные проблемы

В этом разделе будут получены теоремы о структуре спектра, о полноте и базисности системы корневых элементов основных классов операторов, действующих в пространстве Крейна.

4.1 Операторы класса (H) и $\mathcal{K}(H)$

Начнем изучение этого вопроса с некоторых простых фактов. Далее для простоты будем считать, если не оговорено противное, все операторы ограниченными.

Лемма 4.1. *Пусть A — самосопряженный оператор в пространстве Крейна, $A = A^c$. Если подпространство $\mathcal{L}$ инвариантно относительно A , т.е. $A\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$, то*

$$A(\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}) \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}. \quad (4.1)$$

Доказательство. В силу (3.23) имеем $A\mathcal{L}^{[\perp]} \subset \mathcal{L}^{[\perp]}$. Остается воспользоваться тем, что пересечение инвариантных подпространств является инвариантным подпространством. $\square$

Замечание 4.1. Если оператор U унитарен в $\mathcal{K}$ и $U\mathcal{L} = \mathcal{L}$, то

$$U(\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}) \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}. \quad (4.2)$$

$\square$

Упражнение 4.1. Выяснить, имеют ли место свойства (4.1) и (4.2) для диссипативного и J -бинесжимающего оператора A , соответственно. $\square$

Пусть $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{K}$ — нейтральное подпространство. Тогда

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{M} \oplus J\mathcal{L}_0, \quad (4.3)$$

где

$$\mathcal{M} = \mathcal{L}_0^{[\perp]} \cap \mathcal{L}_0^\perp. \quad (4.4)$$

Заметим, что в (4.3) – (4.4)

$$\mathcal{L}_0^{[\perp]} = \mathcal{L}_0[\oplus]\mathcal{M}, \quad \mathcal{L}_0^\perp = \mathcal{M}[\oplus]J\mathcal{L}_0. \quad (4.5)$$

Поэтому

$$\mathcal{K} = (\mathcal{L}_0 \oplus J\mathcal{L}_0) [\oplus] \mathcal{M}. \quad (4.6)$$

Здесь подпространство $\mathfrak{M}$ проекционно полное или, что то же, регулярное, т.е. является пространством Крейна. Тогда

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^+ [+] \mathcal{M}^-. \quad (4.7)$$

Далее, сумма $\mathcal{L}_0 \oplus J\mathcal{L}_0$ допускает каноническое разложение

$$\mathcal{L}_0 \oplus J\mathcal{L}_0 = P^+ \mathcal{L}_0 [\oplus] P^- \mathcal{L}_0, \quad (4.8)$$

где $P^\pm$ — исходные канонические проекторы.

В итоге имеем

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+ [+] \mathcal{K}_1^-, \quad \mathcal{K}_1^\pm = P^\pm \mathcal{L}_0 [\oplus] \mathcal{M}^\pm. \quad (4.9)$$

В разложении (4.3) оператор J приобретает вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & V \\ 0 & J_1 & 0 \\ V^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

и условие $J^2 = I$ даёт соотношения

$$V^*V = I, \quad VV^* = I, \quad (4.11)$$

откуда следует, что V — унитарный оператор, $V^* = V^{-1}$.

Если нейтральное подпространство $\mathcal{L}_0$ является инвариантным относительно оператора $A = A^c$, т.е. $A\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0$, то по лемме 4.1 $A\mathcal{L}_0^{[\perp]} \subset \mathcal{L}_0^{[\perp]}$, и тогда в разложении (4.3)

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & * & * \\ 0 & A_1 & * \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix} = A^c. \quad (4.12)$$

Свойство $(JA)^* = JA$ приводит к связям

$$A_1 = A_1^c, \quad A_2 = V^* A_0^* V, \quad (4.13)$$

(проверьте эти формулы!). Так как $V^* = V^{-1}$, то $A_2 = V^{-1} A_0^* V$ и потому

$$\sigma(V^{-1} A_0^* V) = \sigma(A_0^*). \quad (4.14)$$

В этих построениях оператор A_0 может быть совершенно произвольным. В самом деле, если в исходном каноническом разложении

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^* \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

где B — произвольный оператор, то $(JA)^* = JA$, т.е. $A = A^c$.

Пусть найдётся каноническое разложение

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^+[\oplus]\mathcal{M}^- \quad (4.16)$$

такое, что

$$A_1\mathcal{M}^\pm \subset \mathcal{M}^\pm, \quad (4.17)$$

где A_1 — элемент матрицы (4.12). Тогда вместо (4.10) и (4.12) имеем

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & V \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ V^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_0 & * & * & * \\ 0 & A_+ & * & * \\ 0 & 0 & A_- & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Перейдем теперь, после предварительных замечаний, к основным определениям.

Определение 4.1. Будем говорить, что неотрицательное подпространство $\mathcal{L}_+$ принадлежит классу $\mathfrak{h}^+$, если

$$\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+^0 \oplus \mathcal{L}_1^+, \quad \dim \mathcal{L}_+^0 < \infty, \quad \mathcal{L}_1^+ \gg 0. \quad (4.19)$$

□

Определение 4.2. Неположительное подпространство $\mathcal{L}_-$ принадлежит классу $\mathfrak{h}^-$, если

$$\mathcal{L}_- = \mathcal{L}_-^0 \oplus \mathcal{L}_1^-, \quad \dim \mathcal{L}_-^0 < \infty, \quad \mathcal{L}_1^- \ll 0. \quad (4.20)$$

□

Определение 4.3. Будем говорить, что $A = A^c$ принадлежит классу (H) , если у оператора A существует максимальная дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$, $A\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm$, и всякая дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ для оператора A обладает свойствами $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{h}^\pm$. □

Упражнение 4.2. Установить, что

$$\{\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+ \cap \mathfrak{h}^+\} \iff \{\mathcal{L}_+^{[\perp]} \in \mathfrak{M}^- \cap \mathfrak{h}^-\}. \quad (4.21)$$

Напомним, что

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_+ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix} : \forall x_+ \in \mathcal{K}^+, \|K\| \leq 1 \right\}, \\ \mathcal{L}_+^{[\perp]} &= \left\{ \begin{pmatrix} K^*x_- \\ x_- \end{pmatrix} : \forall x_- \in \mathcal{K}^- \right\}.\end{aligned}\tag{4.22}$$

□

Пример 4.1 (подпространств класса h^+). Пусть $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$ и его угловой оператор $K = K(\mathcal{L}_+) \in \mathfrak{S}_\infty$. Тогда $\mathcal{L}_+ \in h^+$. □

Обратное утверждение неверно.

Упражнение 4.3. Пусть известно, что $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+ \cap h^+$. Доказать, что существует такое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[+]\mathcal{K}^-$, что угловой оператор K подпространства $\mathcal{L}$ является конечномерным.

Рассмотрим подробно решение этого упражнения. Пусть $\mathcal{L}_+ \geq 0$; выделим изотропную часть $\mathcal{L}_+$, т.е.

$$\mathcal{L}_+^0 := \{x \in \mathcal{L}_+ : [x, x] = 0\}.\tag{4.23}$$

Для элементов $x \in \mathcal{L}_+^0$ имеем

$$[x, x] = (x_+, x_+) - (Kx_+, Kx_+) = ((I - K^*K)x_+, x_+) = 0.\tag{4.24}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского для элементов x_+ и y_+ из $\mathcal{K}^+$, имеем

$$((I - K^*K)x_+, y_+) = 0, \quad \forall y_+ \in \mathcal{K}^+.\tag{4.25}$$

Поэтому

$$(I - K^*K)x_+ = 0, \quad x_+ = P^+x, \quad x \in \mathcal{L}_+^0.\tag{4.26}$$

Так как $\mathcal{L}_+ \in h^+$, то $\dim \mathcal{L}_+^0 < \infty$ и потому $\dim \text{Ker}(I - K^*K) < \infty$. Введём подпространство $\mathcal{L}_+^1$ согласно формуле

$$\mathcal{L}_+^1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix} : x_+ \in \text{ran}(I - K^*K) \right\}\tag{4.27}$$

и обозначим

$$K|_{\text{ran}(I - K^*K)} = K_1.\tag{4.28}$$

Поскольку по условию $K \in \mathfrak{S}_\infty$, то $K_1 \in \mathfrak{S}_\infty$.

Для элементов из $\mathcal{L}_+^1$ имеем $[x, x] > 0$, $x \neq 0$. Тогда $[x, x] = (x_+, x_+) - (K_1 x_+, K_1 x_+) > 0$, $x_+ \neq 0$. Так как $K_1 \in \mathfrak{S}_\infty$, то найдётся элемент $x_+^0 \in \mathcal{K}^+$ такой, что $\|K\| = \|Kx_+^0\|$, $\|x_+^0\| = 1$. Тогда на этом элементе $(x_+^0, x_+^0) - (K_1 x_+^0, K_1 x_+^0) = 1 - \|K_1\| > 0$, т.е. $\|K_1\| < 1$. Последнее эквивалентно равномерной положительности подпространства $\mathcal{L}_+^1$ (лемма 2.1). Этим утверждение из примера 4.1 доказано. $\square$

Пример 4.2 (оператора $A = A^c \in (H)$). Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$, а оператор $A = A^c$ в этом разложении имеет вид

$$A = A_0 + D = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{12} & D_{21} \\ D_{21} & D_{12} \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

$$D \in \mathfrak{S}_\infty, \quad \sigma(B) \cap \sigma(C) = \emptyset.$$

Докажем, что $A \in (H)$, т.е. существует максимальная дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$, $A\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm$, инвариантная для A , и всякая дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ для A обладает свойствами $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{h}^\pm$.

Доказательство.

Запишем оператор A в виде

$$A = \begin{pmatrix} B + D_{12} & D_{12} \\ D_{21} & C + D_{21} \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Так как $D_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$, то по теореме 3.19 существует максимальная дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ для оператора A , причём (см. пример 4.1) $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{h}^+$, так как угловой оператор K подпространства $\mathcal{L}_+$ является компактным. Докажем последнее утверждение, т.е. компактность K .

Имеем,

$$\mathcal{L}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix} : x_+ \in \mathcal{K}^+ \right\}, \quad A\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+. \quad (4.31)$$

Отсюда, как в ранее встретившихся подобных случаях, можно вывести, что для оператора A уравнение для углового оператора K имеет вид

$$K(B + D_{12}) + KD_{12}K = D_{21} + (C + D_{21})K. \quad (4.32)$$

Поэтому

$$KB - CK = T(K) := D_{21} + D_{21}K - KD_{12} - KD_{12}K. \quad (4.33)$$

Так как спектры операторов B и C , согласно условию (4.29), не пересекаются, то их можно окружить жордановыми контурами Γ_B и Γ_C соответственно, которые отстоят на положительном расстоянии один от другого. Воспользуемся формулой для решения уравнения (4.33):

$$K = \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_B} \oint_{\Gamma_C} \frac{(B - \lambda I)^{-1} T(K) (C - \mu I)^{-1}}{\lambda - \mu} d\lambda d\mu. \quad (4.34)$$

Поскольку $T(K)$ компактен в силу компактности D_1, D_2, D_{12} и D_{21} , то оператор K , выраженный формулой (4.34), также компактен, и утверждение доказано. Заметим, что (4.34) есть уравнение для K , эквивалентное уравнению (4.33). □

Возникает вопрос: если оператор $A \in (H)$, всегда ли его можно записать в форме (4.29)? Оказывается, не всегда. Действительно, пусть

$$A = A_0 = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \in \mathfrak{S}_\infty, \quad 0 \notin \sigma_p(B). \quad (4.35)$$

В этом случае, по сравнению с (4.29), имеем $C = 0$, $D = 0$, причём $\sigma(B) \cap \sigma(C) \neq \emptyset$. Тем не менее оператор $A = A_0 \in (H)$.

В самом деле, очевидно, что $AK^+ \subset K^+$, $AK^- \subset K^-$, и так как K^+ и K^- — равномерно дефинитные подпространства, то $K^\pm \in \mathfrak{h}^\pm$. Докажем, что других инвариантных подпространств нет. Действительно, здесь уравнение (4.33) для углового оператора K принимает вид $KB = 0$, и так как $0 \notin \sigma_p(B)$, то существует обратный (неограниченный) оператор B^{-1} . Поэтому $K = 0$ и ему отвечает лишь неотрицательное подпространство $\mathcal{L}_+ = K^+$. Аналогично рассуждение для K^- .

Замечание 4.2. Класс (H) определён не только для самосопряжённых операторов, действующих в пространстве Крейна, но также для унитарных, диссипативных и даже нормальных операторов. В этом случае требования к паре подпространств $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ таковы: $T\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$, $T^c\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$. Остальные требования сохраняются.

Определение 4.4. Будем говорить, что оператор T принадлежит классу операторов $\mathcal{K}(H, A)$, если $A \in (H)$ и T коммутирует с A .

Если оператор $A \in (H)$ не играет роли, то вместо $T \in \mathcal{K}(H, A)$ пишут $T \in \mathcal{K}(H)$.

Теорема 4.1. Пусть для операторов $\{A_j\}_{j=1}^n$, $A_j = A_j^c$, выполнены условия $A_j A_k = A_k A_j$. Тогда найдётся оператор $A \in (H)$ такой, что $A_j \in \mathcal{K}(H, A)$ для всех j в том и только в том случае, когда найдётся подпространство $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+ \cap \mathfrak{h}^+$ такое, что $A_j \mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$ для всех j .

□

Этот факт здесь приведен без доказательства.

Отметим, что класс (H) ввел Дж. У. Хелтон, что отразилось в обозначении этого класса. Класс $\mathcal{K}(H)$ ввел и исследовал Т.Я. Азизов. В теоретических работах эти классы использовал В.А. Штраус, а в приложениях — Н.Д. Копачевский и его ученики.

Продолжим рассмотрение свойств операторов класса (H) и $\mathcal{K}(H)$.

Теорема 4.2. Если $A = A^c \in (H)$, то найдётся каноническое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+ [\oplus] \mathcal{K}_1^-$ пространства Крейна такое, что

$$A_{12}, A_{21} \in \mathfrak{S}_\infty. \quad (4.36)$$

Доказательство. Пусть $A = A^c \in (H)$. Тогда, согласно определению класса (H) , найдётся такая максимальная дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, что $A\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm$. Обозначим $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_-$. Так как $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{h}^\pm$, то $\mathcal{L}_\pm = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1^\pm$, $\dim \mathcal{L}_0 < \infty$, а $\mathcal{L}_\pm$ — равномерно дефинитны. Поэтому

$$\mathcal{L}_0^{[\perp]} = \mathcal{L}_0 [\oplus] (\mathcal{L}_1^+ [+] \mathcal{L}_1^-). \quad (4.37)$$

Следовательно,

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}_0 \oplus (\mathcal{L}_1^+ [\oplus] \mathcal{L}_1^-) \oplus J\mathcal{L}_0, \quad (4.38)$$

и в этом разложении (см. (4.18))

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & V \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ V^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_0 & * & * & * \\ 0 & A_1^+ & * & * \\ 0 & 0 & A_1^- & * \\ 0 & 0 & 0 & V^{-1}A_0^*V \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

где V — унитарный оператор. Здесь

$$\begin{pmatrix} A_0 & * \\ 0 & A_1^+ \end{pmatrix} = A|_{\mathcal{L}_+}, \quad \begin{pmatrix} A_0 & * \\ 0 & A_1^- \end{pmatrix} = A|_{\mathcal{L}_-}. \quad (4.40)$$

Вычислим

$$\begin{aligned}
4P^+AP^- &= 4A_{12} = (I + J)A(I - J) = \\
&= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & V \\ 0 & 2I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ V^* & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 & * & * & * \\ 0 & A_1^+ & 0 & * \\ 0 & 0 & A_1^- & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & -V \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2I & 0 \\ -V^* & 0 & 0 & I \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}. \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Здесь все операторы, обозначенные звёздочкой $*$, являются конечномерными, и потому компактными. Значит, $A_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$. Аналогично проверяется, что и $A_{21} \in \mathfrak{S}_\infty$. Следовательно, в качестве искомого канонического разложения можно взять следующее:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+[+]\mathcal{K}_1^-, \quad \mathcal{K}_1^\pm = P^\pm \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1^\pm. \quad \square$$

Из этой теоремы вытекает такой факт.

Следствие 4.1. Пусть $A = A^c \in (H)$, $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — дуальная пара, $A\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm$. Тогда существует такая максимальная дуальная пара $\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\}$, что $\tilde{\mathcal{L}}_\pm \supset \mathcal{L}_\pm$, $A\tilde{\mathcal{L}}_\pm \subset \tilde{\mathcal{L}}_\pm$, и потому исходная пара обладает свойствами $\mathcal{L}_\pm \in h^\pm$.

Доказательство. Возьмём, согласно теореме 4.2, такое каноническое разложение пространства $\mathcal{K}$, в котором $A_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$. Тогда найдётся максимальная дуальная пара $\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\}$ такая, что $A\tilde{\mathcal{L}}_\pm \subset \tilde{\mathcal{L}}_\pm$, $\tilde{\mathcal{L}}_\pm \supset \mathcal{L}_\pm$. Так как $A \in (H)$, то $\tilde{\mathcal{L}}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm \cap h^\pm$ (см. определение 4.3), а так как $\mathcal{L}_\pm \subset \tilde{\mathcal{L}}_\pm$, то $\mathcal{L}^\pm \in h^\pm$. $\square$

Следующий результат является одним из центральных для выяснения свойств операторов класса (H) и $\mathcal{K}(H)$.

Теорема 4.3. Пусть $A = A^c \in (H)$. Тогда найдётся $\varkappa_A \in \mathbb{N}$ такое, что размерность любого нейтрального инвариантного подпространства оператора A не превышает $\varkappa_A$, т.е. если $\mathcal{L}_0 \subset \mathfrak{P}^0$, $A\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0$, то $\dim \mathcal{L}_0 \leq \varkappa_A$.

(Это утверждение верно и для унитарных операторов.)

Доказательство. Пусть сформулированное утверждение неверно, т.е. не существует указанной константы $\varkappa_A$. Тогда найдётся последовательность $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_n, \dots$ нейтральных инвариантных относительно A подпространств таких, что $\dim \mathcal{L}_j < \dim \mathcal{L}_{j+1}$, $\dim \mathcal{L}_j \rightarrow \infty$ ($j \rightarrow \infty$), $A\mathcal{L}_j \subset \mathcal{L}_j$ для любого j .

Построим новые нейтральные инвариантные относительно A подпространства $\mathcal{M}_j$ следующим образом: $\mathcal{M}_1 = \mathcal{L}_1$, $\mathcal{M}_{k+1} := \text{л.о.} \left\{ \mathcal{M}_k, \mathcal{M}_k^{[\perp]} \cap \mathcal{L}_{k+1} \right\}$. Тогда будем иметь

$$\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \dots \subset \mathcal{M}_k \subset \dots, \quad \dim \mathcal{M}_k \longrightarrow \infty \quad (k \longrightarrow \infty). \quad (4.42)$$

Рассмотрим теперь $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$. Нетрудно видеть, используя индукцию, что $A\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_k$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} A \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k \right) &\subset \overline{\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k \right)} =: \mathcal{L}_+, \\ \mathcal{L}_+ &\subset \mathfrak{P}^0, \quad \dim \mathcal{L}_+ = \infty, \quad A\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Возникло противоречие, так как $A \in (H)$, и потому для любого $\mathcal{L}_+ \subset \mathfrak{P}^0$ должно быть $\dim \mathcal{L}_+ < \infty$. □

Изучим теперь некоторые спектральные свойства операторов класса (H) .

Теорема 4.4. Пусть $A = A^c \in (H)$. Тогда

1. $\dim \text{л.о.} \left\{ \mathcal{L}_\lambda(A) : \lambda \neq \bar{\lambda} \right\} \leq 2\kappa_A$.
2. Если $\lambda = \bar{\lambda}$, то

$$\text{Ker}(A - \lambda I) =: \mathcal{M} = \mathcal{M}^+[\oplus]\mathcal{M}^0[\oplus]\mathcal{M}^-, \quad (4.44)$$

$$\min \left\{ \dim (\mathcal{M}^+ + \mathcal{M}^0), \dim (\mathcal{M}^0 + \mathcal{M}^-) \right\} \leq \kappa_A, \quad (4.45)$$

где $\mathcal{M}^+$, $\mathcal{M}^0$ и $\mathcal{M}^-$ — положительное, нейтральное и отрицательное подпространства соответственно.

3. Для $\lambda \in \mathbb{R}$ имеется разложение

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda(A) &= \mathfrak{N}_\lambda[+] \mathfrak{M}_\lambda, \quad A\mathfrak{M}_\lambda \subset \mathfrak{N}_\lambda, \\ A\mathfrak{M}_\lambda &\subset \mathfrak{M}_\lambda \subset \text{Ker}(A - \lambda I), \quad \dim \mathfrak{N}_\lambda \leq 2\kappa_A + 1, \end{aligned} \quad (4.46)$$

причём $\mathfrak{M}_\lambda$ — регулярное подпространство.

4. Существует не более κ_A вещественных собственных значений оператора A таких, что в $\text{Ker}(A - \lambda I)$ имеются нейтральные элементы.

Доказательство. Заметим сначала, что так как для оператора A класса (H) его матричный элемент $A_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$ (теорема 4.2) в некотором каноническом разложении, то $\sigma_{\text{нев}}(A)$, т.е. не вещественный спектр оператора A , состоит из нормальных собственных значений.

1. Пусть $\lambda \neq \bar{\lambda}$ — нормальное собственное значение оператора A . Докажем, что таких собственных значений может быть не более конечного числа.

Пусть $\mathcal{L} := \text{л.о.} \{ \mathcal{L}_\lambda(A) : \text{Im} \lambda > 0 \}$. Здесь все подпространства $\mathcal{L}_\lambda(A)$ нейтральны, $\mathcal{L}_\lambda(A) \subset \mathcal{P}^0$, и ортогональны между собой:

$$\mathcal{L}_{\lambda_1}(A)[\perp] \mathcal{L}_{\lambda_2}(A), \quad \text{Im} \lambda_1 > 0, \quad \text{Im} \lambda_2 > 0. \quad (4.47)$$

Тогда, согласно теореме 4.3, $\dim \mathcal{L} \leq \varkappa_A$. Аналогичная ситуация для линейной оболочки, отвечающей собственным значениям λ с $\text{Im} \lambda < 0$. Поэтому имеет место свойство 1.

2. В этом случае имеем свойства $AM^\pm \subset \mathcal{M}^\pm$, $AM^0 \subset \mathcal{M}^0$, и так как $\mathcal{M}^0$ состоит из нейтральных элементов, то $\dim \mathcal{M}^0 \leq \varkappa_A$. В то же время подпространства $\mathcal{M}^\pm$ равномерно дефинитны. Поэтому $\mathcal{K}_1 := \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^-$ является пространством Крейна. Значит, в $\mathcal{K}_1$ найдётся подпространство $\mathcal{M}_0 \subset \mathfrak{P}^0$, причём $\dim \mathcal{M}_0 = \min \{ \dim \mathcal{M}^+, \dim \mathcal{M}^- \}$. Так как $AM_0 \subset \mathcal{M}_0$ и $\mathcal{M}_0$ — нейтральное подпространство, то снова по теореме 4.3 имеем $\dim \mathcal{M}_0 \leq \varkappa_A$.

Возьмём теперь подпространство $\mathcal{M}^0 + \mathcal{M}_0$. Тогда $A(\mathcal{M}^0 + \mathcal{M}_0) \subset \mathcal{M}^0 + \mathcal{M}_0$ и потому $\dim (\mathcal{M}^0 + \mathcal{M}_0) \leq \varkappa_A$. Однако, согласно построению $\mathcal{M}_0$,

$$\dim (\mathcal{M}^0 + \mathcal{M}_0) = \min \{ \dim (\mathcal{M}^+ + \mathcal{M}^0), \dim (\mathcal{M}^0 + \mathcal{M}^-) \},$$

и потому утверждение 2 доказано.

3. Доказательство этого свойства — то же, что и в пространстве Понтрягина (см. [5]). Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{M} = \text{Ker} (A - \lambda I) = \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^0 \oplus \mathcal{M}^-. \quad (4.48)$$

Так как $\mathcal{M}^+$ и $\mathcal{M}^-$ — равномерно дефинитные подпространства, то $\mathcal{M}_\lambda := \mathcal{M}^+[\oplus] \mathcal{M}^-$ — регулярное подпространство и потому $\mathcal{L}_\lambda(A) = \mathcal{M}_\lambda[\oplus] \mathfrak{N}_\lambda$, т.е. $\mathcal{M}_\lambda$ — дополняемо. Поскольку $AM_\lambda \subset \mathcal{M}_\lambda$ и $A\mathcal{L}_\lambda \subset \mathcal{L}_\lambda$, то $A\mathfrak{N}_\lambda \subset \mathfrak{N}_\lambda$.

Заметим теперь, что возможные цепочки из собственных и присоединенных элементов $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ обладают тем свойством, что обязательно $x_0 \in \mathcal{M}^0$ (как и в $\Pi_{\varkappa}$), а так как $\dim \mathcal{M}^0 < \infty$, то количество таких цепочек конечно. Кроме того, в силу соотношений $(A - \lambda I)x_n = x_{n-1}$ присоединенные элементы также находятся в подпространстве $\mathcal{M}^0$. Поэтому, как и в $\Pi_{\varkappa}$, доказываем, что $\dim \mathfrak{N}_{\lambda} \leq 2\varkappa_A + 1$.

4. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ — вещественные собственные значения оператора A , и пусть $\{x_k\}_{k=1}^s$ — собственные элементы оператора A , которые являются нейтральными, т.е. $[x_k, x_k] = 0$, $k = 1, \dots, s$.

Так как $\text{Ker}(A - \lambda_k I) \perp \text{Ker}(A - \lambda_j I)$ при $\lambda_k \neq \lambda_j$, то л.о. $\{x_k\}_{k=1}^s \subset \mathcal{P}^0$, причём A л.о. $\{x_k\}_{k=1}^s \subset \text{л.о.}\{x_k\}_{k=1}^s$. Отсюда по теореме 4.3 получаем, что $s \leq \varkappa_A$.

□

Из доказанных утверждений следует такой результат.

Теорема 4.5. Если $A = A^c \in (H)$ и у A нет нейтральных собственных элементов (в частности, если $\sigma_p(A) = \emptyset$), то у оператора A существует единственная максимальная дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, $\mathcal{L}_{\pm} \in \mathfrak{M}^{\pm}$, $A\mathcal{L}_{\pm} \subset \mathcal{L}_{\pm}$, где $\mathcal{L}_{\pm}$ — равномерно дефинитные подпространства.

Доказательство. Так как $A = A^c \in (H)$, то существует максимальная дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, $\mathcal{L}_{\pm} \in h^{\pm}$, инвариантная относительно оператора A . Возьмём

$$\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_- = \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_+^{[\perp]} = \mathcal{L}_- \cap \mathcal{L}_-^{[\perp]}, \quad A\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0. \quad (4.49)$$

Так как здесь $\mathcal{L}_0$ — конечномерное подпространство, то при $\dim \mathcal{L}_0 > 0$ существует собственное значение $\lambda \in \sigma_p(A)$ и собственный элемент x_{λ} оператора A , т.е. $Ax_{\lambda} = \lambda x_{\lambda}$. Получено противоречие с тем, что у оператора A нет нейтральных собственных элементов. Значит, $\mathcal{L}_0 = \{0\}$ и потому $\mathcal{L}_+ \gg 0$, $\mathcal{L}_- \ll 0$ и они максимальны. Тогда

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[+] \mathcal{K}^- := \mathcal{L}_+[+] \mathcal{L}_-, \quad (4.50)$$

а оператор A в этом разложении имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

Докажем, что полученное каноническое разложение единственно. Пусть существует ещё одна дуальная пара $\{\mathcal{L}_1^+, \mathcal{L}_1^-\}$, $\mathcal{L}_1^\pm \in \mathfrak{M}^\pm \cap \mathfrak{h}^\pm$, $A\mathcal{L}_1^\pm \subset \mathcal{L}_1^\pm$, $\mathcal{L}_1^+ \gg 0$, $\mathcal{L}_1^- \ll 0$. Пусть K — угловой оператор подпространства $\mathcal{L}_1^+$, $K: \mathcal{L}_+ \rightarrow \mathcal{L}_-$. Тогда

$$\mathcal{L}_1^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x_+ \\ Kx_+ \end{pmatrix} : x_+ \in \mathcal{L}_+ \right\}. \quad (4.52)$$

Отсюда получаем, что свойство $A\mathcal{L}_1^\pm \subset \mathcal{L}_1^\pm$ выполнено тогда и только тогда, когда $(tK)A_+ = A_-(tK)$ для любого t . (Этот факт следует из уравнения для углового оператора K , которое здесь принимает вид $KA_+ - A_-K = 0$.) Значит, все подпространства вида

$$\mathcal{L}_t^+ := \left\{ \begin{pmatrix} x_+ \\ tKx_+ \end{pmatrix} : x_+ \in \mathcal{L}_+, 0 < t \leq 1/\|K\| \right\} \quad (4.53)$$

также являются неотрицательными инвариантными подпространствами для A , т.е. $A\mathcal{L}_t^+ \subset \mathcal{L}_t^+$. В частности, при $t = 1/\|K\|$ имеем $K_1 = K/\|K\|$ и потому $\|K_1\| = 1$. Отсюда следует, что подпространство $\mathcal{L}^+(K_1) = \mathcal{L}_t^+|_{t=1/\|K\|}$ не является равномерно положительным, т.е. не выполнено условие $\mathcal{L}_1^+ \gg 0$. (Напомним, что для свойства равномерной положительности необходимо и достаточно, чтобы норма углового оператора инвариантного подпространства была меньше 1).

Полученное противоречие доказывает, что второй максимальной дуальной пары для A с равномерно дефинитными $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ не существует. (Если у оператора A нет собственных значений, то нет и нейтральных собственных элементов.) $\square$

Теорема 4.6. Если $A = A^c \in (H)$, $A\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$, $\mathcal{L}_+ \gg 0$, то $A_1 := A|_{\mathcal{L}_+^{[\perp]}} \in (H)$ в $\mathcal{K}_1 := \mathcal{L}_+^{[\perp]}$, т.е. существует дуальная пара $\{\mathcal{L}_1^+, \mathcal{L}_1^-\}$, $\mathcal{L}_1^\pm \in \mathfrak{M}^\pm(\mathcal{K}_1)$, $A_1\mathcal{L}_1^\pm \subset \mathcal{L}_1^\pm$, и любая дуальная пара $\{\mathcal{L}_1^+, \mathcal{L}_1^-\}$ в $\mathcal{K}_1$ обладает свойствами $\mathcal{L}_1^\pm \in \mathfrak{h}^\pm$. Аналогичное утверждение имеет место и для унитарного оператора.

Доказательство. Согласно определению подпространства $\mathcal{K}_1$ имеем разложение $\mathcal{K} = \mathcal{L}_+ + \mathcal{K}_1$. Так как оператор A самосопряжён в $\mathcal{K}$, то он имеет в этом разложении диагональную структуру

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = A|_{\mathcal{L}_+}. \quad (4.54)$$

Поскольку $A \in (H)$, то по теореме существует такое каноническое разложение пространства $\mathcal{K}$, что в этом разложении $A_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$

и потому существует расширение $\tilde{\mathcal{L}}_+ \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K})$ подпространства $\mathcal{L}_+$, $A\tilde{\mathcal{L}}_+ \subset \tilde{\mathcal{L}}_+$. При этом

$$\tilde{\mathcal{L}}_+ = \mathcal{L}_+[+] \mathcal{L}_1^+, \quad \mathcal{L}_1^+ := \tilde{\mathcal{L}}_+ \cap \mathcal{K}_1, \quad A_1 \mathcal{L}_1^+ \subset \mathcal{L}_1^+, \quad (4.55)$$

причём $\mathcal{L}_1^+$ максимально в $\mathcal{K}_1$, т.е. $\mathcal{L}_1^+ \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K}_1)$. Поэтому искомой дуальной парой, о которой говорится в теореме, является пара

$$\left\{ \tilde{\mathcal{L}}_+, \mathcal{L}_-^1 \right\}, \quad \mathcal{L}_-^1 := \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{K}_1. \quad (4.56)$$

Докажем теперь, что любая дуальная пара $\{\mathcal{L}_1^+, \mathcal{L}_1^-\}$ в $\mathcal{K}_1$ обладает свойствами $\mathcal{L}_1^\pm \in \mathfrak{h}^\pm$. Возьмём любую пару $\{\mathcal{L}_1^+, \mathcal{L}_1^-\}$ для $\mathcal{K}_1$. Тогда $\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_1^+ \in \mathfrak{M}^+(\mathcal{K})$ и $A(\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_1^+) \subset \mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_1^+$. Так как $A \in (H)$, то $\mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_1^+ \in \mathfrak{h}^+$, откуда следует, что $\mathcal{L}_1^+ \in \mathfrak{h}^+$ (в $\mathcal{K}_1$).

Для $\mathcal{L}_1^-$ доказательство аналогично. $\square$

Установим ещё один полезный факт.

Лемма 4.2. Пусть $A = A^c \in (H)$, $\mathcal{L}_0$ — нейтральное инвариантное подпространство, $A\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0$. Тогда

$$\mathcal{L}_0^{[\perp]} = \mathcal{L}_0[\oplus] \left(\mathcal{L}_0^{[\perp]} \cap \mathcal{L}^1 \right) =: \mathcal{L}_0[\oplus] \mathfrak{M}, \quad \mathcal{L}^1 := \mathcal{K} \ominus \mathcal{L}_0, \quad (4.57)$$

и если P — проектор из $\mathcal{L}_0^{[\perp]}$ на $\mathfrak{M}$, то $A_1 = PA|_{\mathfrak{M}} \in (H)$ в $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Так как A — самосопряжённый оператор в $\mathcal{K}$ и $A\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0$, то $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_0^{[\perp]}$ являются инвариантными подпространствами относительно A и в ортогональном разложении $\mathcal{K}_1 = \mathcal{L}_0^{[\perp]} = \mathcal{L}_0[\oplus] \mathfrak{M}$ оператор $A_1 = A|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}}$ имеет треугольную матричную структуру:

$$A_1|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}} = \begin{pmatrix} A_0 & A_{01} \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

Пусть $\tilde{\mathcal{L}}_0 \in \mathfrak{M}^+$, $\tilde{\mathcal{L}}_0 \geq 0$, $\tilde{\mathcal{L}}_0 \supset \mathcal{L}_0$, $A\tilde{\mathcal{L}}_0 \subset \tilde{\mathcal{L}}_0$, т.е. $\tilde{\mathcal{L}}_0$ является максимальным расширением $\mathcal{L}_0$; такие расширения существуют согласно теореме 3.19 с учетом упражнения 4.3. Тогда

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 = \mathcal{L}_0 \oplus \left(\tilde{\mathcal{L}}_0 \cap \mathfrak{M} \right), \quad (4.59)$$

откуда следует, что $\tilde{\mathcal{L}}_0 \cap \mathfrak{M} \in \mathfrak{M}^+(\mathfrak{M})$ и

$$A_1 \left(\tilde{\mathcal{L}}_0 \cap \mathfrak{M} \right) \subset \tilde{\mathcal{L}}_0 \cap \mathfrak{M}. \quad (4.60)$$

Значит, $\mathcal{L}_1^+ := \tilde{\mathcal{L}}_0 \cap \mathfrak{M}$ и $\mathcal{L}_1^- := \mathcal{L}_1^{[\perp]} \cap \mathfrak{M}$ образуют максимальную дуальную пару $\{\mathcal{L}_1^+, \mathcal{L}_1^-\}$ для A_1 , и потому $A_1 \in (H)$, так как $\mathcal{L}_1^\pm \in \mathfrak{h}^\pm$.

Пусть теперь $\{\mathcal{L}_1^+, \mathcal{L}_1^-\}$ — любая максимальная дуальная пара для A_1 . Тогда пара $\{\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1^+, \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1^-\}$ будет максимальной дуальной парой для A , так как $A(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1^\pm) \subset \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1^\pm$, $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1^\pm \in \mathfrak{h}^\pm$, т.е. $A_1 \in (H)$. $\square$

Замечание 4.3. Утверждение, аналогичное лемме 4.2, справедливо и для J -унитарных операторов. Соответствующие утверждения получаются из леммы 4.2, если воспользоваться преобразованием Кэли–Неймана. $\square$

4.2 О нерешённых проблемах существования инвариантных подпространств у произвольного оператора.

Пусть $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — произвольный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Возникает естественный вопрос: имеется ли у любого такого оператора нетривиальное, т.е. отличное от нуля и всего пространства, инвариантное подпространство? Очевидно, если $\sigma_p(A) \neq \emptyset$, то ответ положительный. Однако, в общем случае этот вопрос не решён. Тем более он не решён в случае произвольного семейства $\{A\}$ операторов, действующих в $\mathcal{H}$.

Приведём теперь классы операторов, для которых обсуждаемая проблема имеет положительное решение.

Прежде всего, если $A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty$, то, очевидно, справедлива теорема Гильберта–Шмидта, т.е. в этом случае решение положительно. Далее, если $A \in \mathfrak{S}_\infty$ или $\{A\}$ — семейство коммутирующих компактных операторов, то положительное решение установил Дж. фон-Нейман. Затем в 1973 г. В. Ломоносов доказал, что если $\{A\}$ — семейство всех (непрерывных) операторов, коммутирующих с оператором $B \in \mathfrak{S}_\infty$, то существует нетривиальное подпространство $\mathcal{L}$, инвариантное относительно любого оператора A из семейства.

Перейдём теперь к операторам, действующим в пространстве Крейна $\mathcal{K}$. Здесь имеют место следующие факты.

Пусть $A = A^c \in (H)$ и имеется семейство операторов $\{B\}$, коммутирующих с A , т.е. $BA = AB$ для любого $B \in \{B\}$. Тогда существует нетривиальное подпространство $\mathcal{L}$, инвариантное относительно A и любого оператора B из семейства.

Приведём общие соображения, связанные с доказательством сформулированного утверждения. Если у оператора A есть собственное значение $\lambda \in \sigma_p(A)$, то $B\text{Ker}(A - \lambda I) \subset \text{Ker}(A - \lambda I)$, и утверждение установлено. Если же $\sigma_p(A) = \emptyset$, то, как доказано выше (см. теорему 4.5), существует единственная максимальная дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, инвариантная относительно A . Поскольку из условия $BA = AB$ следует, что $B^c A = AB^c$, то в силу связи

$$B = \frac{B + B^c}{2} + i \frac{B - B^c}{2i} \quad (4.61)$$

можно считать, что все операторы B являются J -самосопряженными. Далее можно доказать, что $B\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{L}_\pm$, $B = B^c$.

Для унитарных операторов класса (H) аналогичное утверждение доказывается на основе взаимосвязи их с самосопряженными с помощью преобразования Кэли–Неймана. Если $A \mapsto U$, $B \mapsto V$, то $U\mathcal{L}_\pm = \mathcal{L}_\pm$, и так как $UV\mathcal{L}_\pm = VU\mathcal{L}_\pm = V\mathcal{L}_\pm$, то $V\mathcal{L}_\pm = \mathcal{L}_\pm$ является искомым инвариантным подпространством, причём оно единственное.

Что касается общих непрерывных операторов, действующих в $\mathcal{K}$, то проблема существования нетривиального инвариантного подпространства, как и в гильбертовом пространстве, ещё не нашла своего решения.

Приведём ещё некоторые утверждения, полученные на этом пути. Напомним, что если $A \in (H)$, то по определению $B \in \mathcal{K}(H, A)$, если $AB = BA$. В частности, если найдётся $A \in (H)$ такой, что $BA = AB$, то говорят, что $B \in \mathcal{K}(H)$. Как установлено выше, если семейство операторов $\{B\} \subset \mathcal{K}(H)$, то найдётся нетривиальное подпространство $\mathcal{L}$: $B\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$.

Упражнение 4.4. Доказать, что если $\{B\}$ — семейство коммутирующих операторов, $B = B^c \in \mathcal{K}(H)$, то существует неотрицательное нетривиальное подпространство $\mathcal{L}$: $B\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. $\square$

Теорема 4.7. Пусть $U \in (H)$ — унитарный оператор, а $\{V\}$ — семейство коммутирующих операторов класса $\mathcal{K}(H, U)$. Тогда, какова бы ни была дуальная пара $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$, $U\mathcal{L}_\pm = \mathcal{L}_\pm$, $V\mathcal{L}_\pm = \mathcal{L}_\pm$, существует максимальная дуальная пара $\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\}$, $\tilde{\mathcal{L}}_\pm \supset \mathcal{L}_\pm$, $\tilde{\mathcal{L}}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$ такая, что $U\tilde{\mathcal{L}}_\pm = \tilde{\mathcal{L}}_\pm$, $V\tilde{\mathcal{L}}_\pm = \tilde{\mathcal{L}}_\pm$.

Аналогичное утверждение имеет место и для самосопряженных, бизнесжимающих и диссипативных операторов, действующих в $\mathcal{K}$.

Доказательство. Обозначим через $\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\}$ максимальную по вложению дуальную пару, $\tilde{\mathcal{L}}_{\pm} \supset \mathcal{L}_{\pm}$, такую, что $U\tilde{\mathcal{L}}_{\pm} = \tilde{\mathcal{L}}_{\pm}$, $V\tilde{\mathcal{L}}_{\pm} = \tilde{\mathcal{L}}_{\pm}$. Такая пара существует согласно лемме Цорна. Установим, что $\tilde{\mathcal{L}}_{\pm} \in \mathfrak{M}^{\pm}$, и утверждение теоремы будет доказано.

Имеем

$$\mathcal{L}_+^0 = \tilde{\mathcal{L}}_+ \cap \tilde{\mathcal{L}}_+^{[\perp]} = \tilde{\mathcal{L}}_- \cap \tilde{\mathcal{L}}_-^{[\perp]} = \mathcal{L}_-^0 = \tilde{\mathcal{L}}_+ \cap \tilde{\mathcal{L}}_- =: \mathcal{L}_0. \quad (4.62)$$

Действительно, если бы это соотношение не было выполнено, то $\tilde{\mathcal{L}}_+$ и $\tilde{\mathcal{L}}_-$ можно было бы расширить с сохранением необходимых свойств, и таким расширением была бы пара $\{\mathcal{L}_-^0 + \tilde{\mathcal{L}}_+, \mathcal{L}_-^0 + \tilde{\mathcal{L}}_-\}$.

Рассмотрим разложение $\mathcal{L}_0^{[\perp]} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{M}$. Тогда, как и для самосопряжённых в $\mathcal{K}$ операторов (см. лемму 4.2), имеем для операторов V и U разложения

$$V|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}} = \begin{pmatrix} V_0 & V_{01} \\ 0 & V_1 \end{pmatrix}, \quad U|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}} = \begin{pmatrix} U_0 & U_{01} \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}, \quad (4.63)$$

где U_1 и V_1 — коммутирующие унитарные операторы, причем $U_1 \in (H)$. При этом

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\pm} = \mathcal{L}_0 \oplus \tilde{\mathcal{L}}_1^{\pm}, \quad \mathcal{L}_1^{\pm} = \tilde{\mathcal{L}}_{\pm} \cap \mathcal{M}, \quad (4.64)$$

и так как

$$V\tilde{\mathcal{L}}_{\pm} = \tilde{\mathcal{L}}_{\pm}, \quad U\tilde{\mathcal{L}}_{\pm} = \tilde{\mathcal{L}}_{\pm}, \quad (4.65)$$

то $V\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0$, $U\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0$. Далее, поскольку $U_1 \in (H)$, $U\mathcal{L}_1^{\pm} = \mathcal{L}_1^{\pm}$, $V\mathcal{L}_1^{\pm} = \mathcal{L}_1^{\pm}$, то $\mathcal{L}_1^{\pm}$ — равномерно дефинитные подпространства. Следовательно, $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1^+ [+] \mathcal{L}_1^-$ — регулярное подпространство.

Учитывая сказанное, можно в исходном разложении, не ограничивая общности, считать, что пара $\{\tilde{\mathcal{L}}_+, \tilde{\mathcal{L}}_-\}$ состоит из равномерно дефинитных подпространств, т.е. $\mathcal{L}_0 = \{0\}$ и потому $\mathcal{L}_0^{[\perp]} = \mathcal{M} = \mathcal{K}$. Отсюда будет следовать, что

$$\mathcal{K} = \tilde{\mathcal{L}}_+ [+] \tilde{\mathcal{L}}_- [+] \mathfrak{N}, \quad (4.66)$$

причём здесь все подпространства инвариантны относительно V и U . Тогда в этом разложении операторы U и V имеют диагональный

вид:

$$U = \begin{pmatrix} U_+ & 0 & 0 \\ 0 & U_- & 0 \\ 0 & 0 & U_1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V_+ & 0 & 0 \\ 0 & V_- & 0 \\ 0 & 0 & V_1 \end{pmatrix}. \quad (4.67)$$

Так как $U \in (H)$, то $\tilde{\mathcal{L}}_+ \gg 0$ и потому, согласно теореме 4.6,

$$\begin{pmatrix} U_- & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} \in (H). \quad (4.68)$$

Поэтому и $U_1 \in (H)$ (по той же причине). Кроме того, из условия $UV = VU$ следует, что $U_1 V_1 = V_1 U_1$.

Итак, оператор $U_1 \in (H)$, семейство $\{V_1\} \in \mathcal{K}(H, U_1)$, и у операторов $\{V_1\}$ нет общего неотрицательного инвариантного подпространства; в противном случае исходная максимальная по вложению инвариантная дуальная пара не была бы максимальной. Наша задача — показать, что в этом случае $\mathfrak{N} = \{0\}$, что и докажет утверждение. Предположим противное: $\mathfrak{N} \neq \{0\}$, и рассмотрим все возможные варианты.

1. Пусть у U_1 имеется вырожденное ядро $\text{Ker}(U_1 - \lambda I)$ с некоторым λ . Тогда $\text{Ker}(U_1 - \lambda I) \cap (\text{Ker}(U_1 - \lambda I))^{[\perp]}$ является инвариантным подпространством для семейства $\{V_1\}$, а это невозможно по предположению.
2. У оператора U_1 имеется собственное значение λ , причём ядро $\text{Ker}(U_1 - \lambda I)$ невырождено и является пространством Понтрягина $\Pi_\varkappa$ с некоторым $\varkappa > 0$. В этом случае из теории пространств Понтрягина следует, что у семейства операторов $\{V_1|_{\Pi_\varkappa}\}$ имеется по крайней мере один общий неотрицательный собственный вектор, что вновь противоречит предположению.
3. У оператора U_1 нет собственных значений, которым отвечали бы либо вырожденные ядра, либо являющиеся пространствами Понтрягина. Тогда в подпространстве $\mathfrak{N}$ по теореме 4.5 найдётся, причем единственная, дуальная пара $\{\mathfrak{N}_+, \mathfrak{N}_-\}$, инвариантная относительно операторов V_1 , а это снова, как и выше, приводит к противоречию.

Таким образом, $\mathfrak{N} = \{0\}$, $\mathcal{K} = \tilde{\mathcal{L}}_+[+]\tilde{\mathcal{L}}_-$, и теорема доказана полностью. $\square$

Приведём теперь некоторые следствия из доказанного утверждения.

Следствие 4.2. Если $\{V\} \subset \mathcal{K}(H, U)$, то найдётся такое разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ [+] \mathcal{K}^-$, что в этом разложении $V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$, более того, этот оператор является конечномерным. $\square$

Замечание 4.4. Аналогичное утверждение имеет место не только для унитарных операторов, но и для самосопряжённых. Этот факт доказывается с помощью преобразования Кэли. $\square$

Учитывая эти факты, далее будем говорить лишь о самосопряжённых операторах, действующих в пространстве Крейна.

Упражнение 4.5. Пусть $A \in (H)$, $B \in \mathcal{K}(H, A)$. Доказать, что в этом случае $\sigma_{\text{нев}}(B)$, т.е. не вещественный спектр оператора B , состоит из не более чем $2\kappa_A$ нормальных собственных значений. $\square$

Лемма 4.3. Пусть $B \in \mathcal{K}(H, A)$, $\lambda = \bar{\lambda} \in \sigma_p(B)$. Тогда:

1. $\text{Ker}(B - \lambda I) = \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^0 \oplus \mathcal{M}^-$, где $\mathcal{M}^\pm$ — равномерно дефинитные подпространства, а $\dim \mathcal{M}^0 \leq \kappa_A$.
2. $\mathcal{L}_\lambda(B) = \mathcal{N}_\lambda(B) [+] \mathcal{M}_\lambda$, где $\mathcal{M}_\lambda$ — регулярное подпространство, $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^- \subset \text{Ker}(B - \lambda I)$, $\dim \mathcal{M}_\lambda < \infty$, $B\mathcal{N}_\lambda \subset \mathcal{N}_\lambda$.
3. У оператора A в подпространстве $\text{Ker}(B - \lambda I)$ имеется максимальная инвариантная дуальная пара подпространств.

$\square$

Лемма 4.4. У оператора $B \in \mathcal{K}(H, A)$, $A = A^c \in (H)$, имеется не более κ_A вырожденных ядер $\text{Ker}(B - \lambda I)$ с $\lambda = \bar{\lambda}$.

$\square$

Таким образом, кроме, быть может, не более κ_A вырожденных ядер, остальные ядра $\text{Ker}(B - \lambda I)$ невырождены, т.е. они сами являются пространствами типа $\mathcal{K}$.

Доказательство леммы 4.3 вытекает из свойства $A \text{Ker}(B - \lambda I) \subset \text{Ker}(B - \lambda I)$, откуда следует, что $A\mathcal{M}^0 \subset \mathcal{M}^0$.

Заметим к доказательству леммы 4.4, что если собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ (из $\mathbb{R}$) отвечают вырожденные подпространства $\mathcal{M}_1^0, \mathcal{M}_2^0, \dots$, то $\mathcal{M}_0 := \text{л.о.} \{ \mathcal{M}_1^0, \mathcal{M}_2^0, \dots \}$ является нейтральным инвариантным подпространством по отношению к A , т.е. $A\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_0$. Поэтому $\dim \mathcal{M}_0 \leq \kappa_A < \infty$.

Приведём еще один факт, необходимый для дальнейшего.

Лемма 4.5. Пусть A — самосопряжённый оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть $\sigma(A)$ счётен (с учётом кратностей собственных значений), $\dim \mathcal{H} = \infty$ и $\mathcal{H}$ — сепарабельно. Тогда в $\mathcal{H}$ существует счётный ортонормированный базис, составленный из собственных элементов оператора A .

Перед доказательством этого утверждения напомним, что если λ — изолированная точка спектра оператора $A = A^* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, то λ — собственное значение оператора A . Далее, напомним ещё, что если произвольное множество точек счётное и замкнутое, то найдётся изолированная точка этого множества.

Переходя к доказательству леммы 4.5, рассмотрим ядра $\text{Ker}(A - \lambda I)$ и ортонормированные базисы $\{e_{ij}^{(\lambda)}\}$ в них. Введём ортонормированную систему элементов $\bigcup_{\lambda \in \sigma_p(A)} \{e_{ij}^{(\lambda)}\}$, которая, очевидно, является ортонормированным базисом в подпространстве

$$\mathcal{E}_0(A) := \text{з.л.о.} \left\{ \bigcup_{\lambda} \text{Ker}(A - \lambda I) \right\}_{\lambda \in \sigma_p(A)} \subset \mathcal{H}. \quad (4.69)$$

Докажем, что $\mathcal{E}_0(A) = \mathcal{H}$.

Предположим, что это не так. Тогда

$$\mathcal{H} = \mathcal{E}_0(A) \oplus (\mathcal{E}_0(A))^\perp, \quad (4.70)$$

и у $A|_{(\mathcal{E}_0(A))^\perp}$ нет собственных значений. Поскольку спектр $\sigma(A|_{(\mathcal{E}_0(A))^\perp}) \subset \sigma(A)$ не более чем счётен и образует замкнутое множество, а $\dim (\mathcal{E}_0(A))^\perp > 0$, то в этом спектре найдётся изолированная точка, которая является изолированным собственным значением оператора A . Это противоречит тому, что $\mathcal{E}_0(A)$ является замыканием линейной оболочки собственных элементов оператора A , отвечающих всем его собственным значениям, и лемма доказана. $\square$

4.3 О полноте и базисности системы корневых элементов операторов, действующих в пространстве Крейна

Пусть $A = A^c \in (H)$, $B \in \mathcal{K}(H, A)$, т.е. $BA = BA$.

Тогда, согласно утверждению 2 леммы 4.3, $\mathcal{L}_\lambda(B) = \mathcal{N}_\lambda[+] \mathcal{M}_\lambda$, $\dim \mathcal{M}_\lambda < \infty$, $B \mathcal{N}_\lambda \subset \mathcal{N}_\lambda$, $\mathcal{M}_\lambda \subset \text{Ker}(B - \lambda I)$

и $\mathcal{M}_\lambda$ — регулярное подпространство. Далее, как следует из предыдущих рассмотрений (см. теорему 4.4, собственных значений λ , отвечающих вырожденным подпространствам $\text{Ker}(B - \lambda I)$), не более $\varkappa_A$. Остальные ядра $\text{Ker}(B - \lambda I) = \mathcal{L}_\lambda(B) = \mathcal{M}_\lambda$ регулярны.

Рассмотрим сужение $A|_{\text{Ker}(B - \lambda I)}$ оператора A на регулярное подпространство $\text{Ker}(B - \lambda I)$. У этого оператора существует максимальная дуальная пара $\{\mathcal{L}_\lambda^+, \mathcal{L}_\lambda^-\}$ в $\text{Ker}(B - \lambda I)$, $A\mathcal{L}_\lambda^\pm \subset \mathcal{L}_\lambda^\pm$.

Лемма 4.6. *Существует не более $\varkappa_A$ собственных значений оператора B таких, что $\text{Ker}(B - \lambda I)$ невырождено, а пара $\{\mathcal{L}_\lambda^+, \mathcal{L}_\lambda^-\}$ — вырожденная, т.е. $\mathcal{L}_\lambda^0 := \mathcal{L}_\lambda^+ \cap \mathcal{L}_\lambda^- \neq \{0\}$.*

Доказательство. Для каждого $\mathcal{L}_\lambda^0$ имеем $A\mathcal{L}_\lambda^0 \subset \mathcal{L}_\lambda^0$, причём в силу свойства $A \in (H)$ будет $\dim \mathcal{L}_\lambda^0 < \infty$. Поэтому $A|_{\mathcal{L}_\lambda^0}$ имеет по крайней мере один собственный элемент x_λ , т.е. $Ax_\lambda = \alpha x_\lambda$, $x_\lambda \in \mathcal{L}_\lambda^0$. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ — такие собственные значения, отвечающие собственным элементам $x_1, \dots, x_p$, то $[x_k, x_j] = 0$ и линейная оболочка л.о. $\{x_k\}_{k=1}^p$ имеет размерность $p \leq \varkappa_A$. □

Заметим, что для других собственных значений λ ядра $\text{Ker}(B - \lambda I)$ регулярны и потому их можно разложить в ортогональную сумму дефинитных инвариантных подпространств $\mathcal{L}_\lambda^+ [+] \mathcal{L}_\lambda^-$.

Определение 4.5. Будем обозначать через $s(B)$ величину

$$s(B) := \{\lambda \in \sigma_p(B) : \lambda = \bar{\lambda}, \text{Ker}(B - \lambda I) \text{ — вырождено}\}. \quad (4.71)$$

□

Определение 4.6. Через $s_1(B, A)$ будем обозначать величину

$$s_1(B, A) :=$$

$$\{\lambda \in \sigma_p(B) : \lambda = \bar{\lambda}, \text{Ker}(B - \lambda I) \text{ — невырождено}, \mathcal{L}_\lambda^0 = \mathcal{L}_\lambda^+ \cap \mathcal{L}_\lambda^- \neq \{0\}\}.$$

□

Из этих определений следует, что если $\lambda \notin s(B) \cap s_1(B, A)$, то $\mathcal{L}_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I) = \mathcal{L}_\lambda^+ [+] \mathcal{L}_\lambda^-$, $A\mathcal{L}_\lambda^\pm \subset \mathcal{L}_\lambda^\pm$, причём $\mathcal{L}_\lambda^\pm$ — равномерно дефинитные подпространства. В этом случае подпространство $\text{Ker}(B - \lambda I)$ регулярно.

Напомним теперь определения некоторых видов базисов и J -ортонормированных систем.

Определение 4.7. Система элементов $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ называется J -ортонормированной, если $[e_j, e_k] = \pm \delta_{jk}$. $\square$

Определение 4.8. Система элементов $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ называется почти J -ортонормированной, если ее можно представить в виде

$$\{e_j\} = \{e'_{j_k}\}_{k=1}^m \cup \{f_j\}, \quad (4.72)$$

где $\{f_j\}$ является J -ортонормированной, а $[e'_{j_k}, f_l] = 0$ для любых k и l . $\square$

Определение 4.9. Система элементов $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ называется базисом Рисса в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, если

$$g_j = G e_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (4.73)$$

где $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, а G — ограниченный и ограниченно обратимый оператор. $\square$

Определение 4.10. Базис Рисса $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ называется p -базисом, $1 \leq p < \infty$, если $G = I + T$, $T \in \mathfrak{S}_p$. $\square$

Из этих определений следует, что если имеется базис Рисса $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, то он будет p -базисом тогда и только тогда, когда $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \setminus \{e_{j_k}\}_{k=1}^m$ является p -базисом в своей замкнутой линейной оболочке. Поэтому если $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ является почти J -ортонормированным базисом, то любую конечную его часть можно заменить на другую с новыми условиями нормировки. Это утверждение справедливо и для свойства p -базисности.

Определение 4.11. Коразмерностью линеала $\mathcal{L}$ в $\mathfrak{M}$ называется величина

$$\begin{aligned} \operatorname{codim}_{\mathfrak{M}} \mathcal{L} &:= \dim \mathcal{L}^{\perp} \cap \mathfrak{M} \iff \mathfrak{M} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}_1, \\ \dim \mathcal{L}_1 &= \dim (\mathfrak{M} \ominus \mathcal{L}), \quad \operatorname{codim}_{\mathfrak{M}} \mathcal{L} = \dim \mathcal{L}_1. \end{aligned} \quad (4.74)$$

$\square$

Пусть $B \in \mathcal{K}(H, A)$, $A = A^c \in (H)$. Рассмотрим вопросы полноты и базисности системы корневых элементов таких операторов.

Заметим сразу же, что незначительный спектр оператора B и отвечающие ему корневые элементы не влияют на свойство полноты и базисности системы всех корневых элементов этого оператора.

В самом деле, такой не вещественный спектр имеет суммарную конечную алгебраическую кратность, так как все корневые линейалы конечномерны.

Пусть $\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ — не вещественные собственные значения оператора B , которым отвечают корневые линейалы $\mathcal{L}_{\mu_k}$, $k = 1, \dots, m$. Тогда

$$\mathcal{K} = \text{л.о.} \{ \mathcal{L}_{\mu_k}(B) \}_{k=1}^m [+]\mathcal{K}_1, \quad \sigma(B|_{\mathcal{K}_1}) \subset \mathbb{R}. \quad (4.75)$$

Здесь размерность первого подпространства конечна и не превышает, как следует из предыдущих рассмотрений, величины $2\kappa_A$. Далее, так как

$$B \text{ л.о. } \{ \mathcal{L}_{\mu_k}(B) \}_{k=1}^m \subset \text{л.о. } \{ \mathcal{L}_{\mu_k}(B) \}_{k=1}^m, \quad BA = AB, \quad (4.76)$$

то

$$A|_{\mathcal{K}_1} \in (H) \iff A \in (H). \quad (4.77)$$

Поэтому достаточно далее проводить все рассуждения не в $\mathcal{K}$, а в $\mathcal{K}_1$. Тогда $\sigma(B) \subset \mathbb{R}$.

Введём обозначения:

$$\mathcal{E}_0(B) := \text{з.л.о.} \{ \text{Ker}(B - \lambda I) \}, \quad \mathcal{E}(B) := \text{з.л.о.} \{ \mathcal{L}_\lambda(B) \}. \quad (4.78)$$

Возникает естественный вопрос, когда эти подпространства невырождены и регулярны. Ответ на это дают последовательно следующие утверждения.

Лемма 4.7. $\mathcal{E}_0(B)$ невырождено тогда и только тогда, когда $s(B) = \emptyset$. (Равносильное утверждение: $\mathcal{E}_0(B)$ вырождено тогда и только тогда, когда $s(B) \neq \emptyset$.)

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}_0(B)$ вырождено и $\mathcal{L}_0 := \mathcal{E}_0(B) \cap (\mathcal{E}_0(B))^{\perp} \neq \{0\}$. Так как $B \in \mathcal{K}(\mathcal{H}, A)$, $A\mathcal{E}_0(B) \subset \mathcal{E}_0(B)$ и $A = A^c \in (H)$, то $A\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0$, $\dim \mathcal{L}_0 < \infty$.

Аналогично имеем $B\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0$ и потому (в силу конечномерности $\mathcal{L}_0$) существует собственное значение $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ оператора $B|_{\mathcal{L}_0}$, отвечающее собственному элементу x_0 , т.е. $Bx_0 = \lambda_0 x_0$. Этот элемент x_0 ортогонален (в $\mathcal{K}$) элементам всех ядер $\text{Ker}(B - \lambda I)$, а потому $x_0 \perp \mathcal{E}_0(B)$. Отсюда, в силу определения 4.5, следует, что $\lambda_0 \in s(B) \neq \emptyset$.

В обратную сторону: пусть $s(B) \neq \emptyset$. Тогда существует $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, являющееся собственным значением оператора B и отвечающее собственному элементу x_0 . При этом $x_0 \perp \text{Ker}(B - \lambda_0 I)$ и x_0 ортогонален

всем остальным ядрам $\text{Ker}(B - \lambda I)$, т.е. $\mathcal{E}_0(B)$. Значит, $\mathcal{E}_0(B)$ вырождено. □

Лемма 4.8. $\mathcal{E}(B)$ вырождено тогда и только тогда, когда хотя бы одно из корневых подпространств $\mathcal{L}_\lambda(B)$, $\lambda \in s(B)$, вырождено.

Доказательство. Пусть подпространство $\mathcal{L}_{\lambda_0}(B)$, $\lambda_0 \in s(B)$, вырождено. Тогда в этом подпространстве существует изотропный вектор $x_0[\perp]\mathcal{L}_{\lambda_0}(B)$. Так как $x_0[\perp]\mathcal{L}_\lambda(B)$ при $\lambda \neq \lambda_0$, то $x_0[\perp]\mathcal{E}(B)$ и $x_0 \in \mathcal{E}(B)$, т.е. $\mathcal{E}(B)$ вырождено.

В обратную сторону: если $\mathcal{L}_0 := \mathcal{E}(B) \cap \mathcal{E}(B)^{[\perp]} \neq \{0\}$, то $A\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0$, $\dim \mathcal{L}_0 < \infty$, и потому существует λ_0 и x_0 такие, что $Bx_0 = \lambda_0 x_0$, $x_0 \in \mathcal{L}_0$. Тогда, по определению, $\lambda_0 \in s(B)$. □

Лемма 4.9. $\mathcal{E}(B)$ невырождено тогда и только тогда, когда

$$\text{з.л.о. } \{\mathcal{L}_\lambda(B) : \lambda \notin s(B) \cup s_1(B, A)\} \quad (4.79)$$

невырождено. □

Лемма 4.10. Если $\mathcal{E}_0(B)$ и $\mathcal{E}(B)$ невырождены, то они регулярны, и тогда

$$\mathcal{K} = \mathcal{E}_0(B)[+] (\mathcal{E}_0(B))^{[\perp]}, \quad \mathcal{K} = \mathcal{E}(B)[+] (\mathcal{E}(B))^{[\perp]}. \quad (4.80)$$

□

В качестве замечания отметим, что если выполнено условие $\dim (\mathcal{E}_0(B))^{[\perp]} < \infty$, то $(\mathcal{E}_0(B))^{[\perp]} = \{0\}$, поскольку в этом конечномерном подпространстве у оператора B (или A) должны быть собственные значения, а их нет, все собственные значения учтены при образовании $\mathcal{E}_0(B)$. Значит, $(\mathcal{E}_0(B))^{[\perp]} = \{0\}$.

Итогом предыдущих рассмотрений вопросов полноты и базисности корневых элементов операторов, действующих в пространстве Крейна, является следующее утверждение.

Теорема 4.8. Пусть $B \in \mathcal{K}(H, A)$, $A = A^c \in (H)$, и $\sigma(B)$ имеет не более счётного множества точек сгущения. Тогда:

1. $\text{codim}_{\mathcal{K}} \mathcal{E}(B) \leq \text{codim}_{\mathcal{K}} \mathcal{E}_0(B) < \infty$.
2. $\mathcal{E}_0(B) = \mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда $s(B) = \emptyset$.

3. $\mathcal{E}(B) = \mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда линейная оболочка подпространств $\mathcal{L}_\lambda(B)$ с $\lambda \in s(B)$ является невырожденным подпространством.
4. Если $\mathcal{E}_0(B) = \mathcal{K}$ (соответственно $\mathcal{E}(B) = \mathcal{K}$), то в $\mathcal{K}$ существует (почти) J -ортонормированный базис Рисса, составленный из собственных (соответственно корневых) элементов оператора B .
5. Указанный базис можно выбрать p -базисом тогда и только тогда, когда у оператора B существует инвариантное подпространство $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+$, $B\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$, с угловым оператором $K \in \mathfrak{S}_p$.

Доказательство.

1. Так как $\text{codim}_{\mathcal{E}(B)} \mathcal{E}_0(B) < \infty$ (см. теоремы 4.3, 4.4) и $\mathcal{E}_0(B) \subset \mathcal{E}(B)$, то для доказательства утверждения 1 достаточно установить, что

$$\text{codim}_{\mathcal{K}} \mathcal{E}(B) < \infty. \quad (4.81)$$

Пусть $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — максимальная дуальная пара инвариантных подпространств для A и B (см. теорему 4.7 применительно не к унитарному оператору U , а самосопряжённому $A = A^c \in (H)$). Здесь $\mathcal{L}_\pm \in h^\pm \cap \mathfrak{M}^\pm$. Пусть $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_-$, $\dim \mathcal{L}_0 < \infty$. Тогда

$$\text{codim}_{\mathcal{K}} \mathcal{L}_0^{[\perp]} = \dim J\mathcal{L}_0 = \dim \mathcal{L}_0 < \infty. \quad (4.82)$$

Рассмотрим разложение пространства $\mathcal{K}$ в форме

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}_0 \oplus \left\{ \mathcal{L}_0^{[\perp]} \cap \mathcal{L}_0^\perp \right\} \oplus J\mathcal{L}_0 \quad (4.83)$$

и докажем, что

$$\text{codim}_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}} \left(\mathcal{E}(B) \cap \mathcal{L}_0^{[\perp]} \right) < \infty. \quad (4.84)$$

Пусть

$$\mathcal{L}_0^{[\perp]} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{M}. \quad (4.85)$$

Представим $\mathcal{M}$ в каноническом виде

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^-, \quad \mathcal{M}^\pm = \mathcal{L}^\pm \cap \mathcal{M}. \quad (4.86)$$

Тогда оператор $B|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}}$ в разложении $\mathcal{L}_0^{[\perp]} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^-$ представляется в виде матрицы

$$B|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}} = \begin{pmatrix} B_0 & B_{01} & B_{02} \\ 0 & B_+ & 0 \\ 0 & 0 & B_- \end{pmatrix}. \quad (4.87)$$

Поскольку $\sigma(B)$ счётен, то $\sigma(B_{\pm})$ не более чем счётен, так как $\sigma(B_{\pm}) \subset \sigma(B)$, что следует из треугольного вида матрицы $B|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}}$.

Заметим теперь, что оператор $B_+|_{\mathcal{L}_+}$ является обычным самосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве $\{\mathcal{L}_+, [\cdot, \cdot]\}$, а $B_-|_{\mathcal{L}_-}$ — такой же оператор в гильбертовом пространстве $\{\mathcal{L}_-, -[\cdot, \cdot]\}$. Так как спектры этих операторов не более чем счётны, то, согласно лемме 4.5, в каждом из этих пространств имеется ортонормированный базис, состоящий из собственных элементов операторов $B_+|_{\mathcal{L}_+}$ и $B_-|_{\mathcal{L}_-}$ соответственно, т.е. в $\mathcal{M} = \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^-$ имеется базис из собственных элементов оператора

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_+ & 0 \\ 0 & B_- \end{pmatrix}. \quad (4.88)$$

Итак, в силу свойства $\text{codim}_{\mathcal{K}} \mathcal{L}_0^{[\perp]} < \infty$ для доказательства свойства $\text{codim}_{\mathcal{K}} \mathcal{E}(B) < \infty$ достаточно доказать, что

$$\text{codim}_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}} \left(\mathcal{L}_0^{[\perp]} \cap \mathcal{E}(B) \right) < \infty. \quad (4.89)$$

Установим этот факт. Для оператора B_1 имеем $\text{Ker}(B_1 - \lambda I) \subset \mathcal{E}(B) \cap \mathcal{L}_0^{[\perp]}$, т.е. $\mathcal{E}_0(B_1) \subset \mathcal{E}(B) \cap \mathcal{L}_0^{[\perp]}$. Пусть $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} = \sigma(B|_{\mathcal{L}_0}) = \sigma(B_0)$, а $k_1, \dots, k_p$ — кратности собственных значений λ_k , $k = 1, \dots, p$. Тогда, как следует из вида матрицы $B|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}}$, $\sigma(B|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}}) = \sigma(B_0) \cup \sigma(B_1)$.

Пусть $\lambda \in \sigma_p(B|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}})$ и $x_{\lambda} \in \mathcal{L}_{\lambda}(B|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}})$ — соответствующий корневой элемент. Тогда, как следует из треугольного вида матрицы $B|_{\mathcal{L}_0^{[\perp]}}$, будем иметь

$$(B - \lambda_1 I)^{k_1} (B - \lambda_2 I)^{k_2} \dots (B - \lambda_p I)^{k_p} (B - \lambda I) x_{\lambda} = 0. \quad (4.90)$$

Отсюда следует, что если $x_{\lambda} \in \text{Ker}(B_1 - \lambda I)$, то $x_{\lambda} \in \text{л.о.} \{ \cup_{k=1}^p \mathcal{L}_{\lambda_k}(B), \mathcal{L}_{\lambda}(B) \}$.

2-3. Докажем теперь утверждения 2 и 3. Пусть $\mathcal{E}_0(B)$ и $\mathcal{E}(B)$ невырождены. Тогда

$$\mathcal{K} = \mathcal{E}_0(B)[+](\mathcal{E}_0(B))^{[\perp]}, \quad \mathcal{K} = \mathcal{E}(B)[+](\mathcal{E}(B))^{[\perp]}. \quad (4.91)$$

Так как $(\mathcal{E}_0(B))^{[\perp]}$ и $(\mathcal{E}(B))^{[\perp]}$ — конечномерные подпространства, то оператор B имеет в этих подпространствах собственные элементы. Однако такие элементы, согласно определению, находятся в $\mathcal{E}_0(B)$ и соответственно в $\mathcal{E}(B)$. Значит, $(\mathcal{E}_0(B))^{[\perp]}$ (соответственно, $(\mathcal{E}(B))^{[\perp]}$) — тривиальные подпространства, $\mathcal{E}_0(B) = \{0\}$ ($\mathcal{E}(B) = \{0\}$), и потому $\mathcal{K} = \mathcal{E}_0(B)$ (соответственно $\mathcal{K} = \mathcal{E}(B)$).

Доказательство в другую сторону аналогично.

4. Пусть $\mathcal{E}_0(B) = \mathcal{K}$, т.е. $\mathcal{E}_0(B)$ невырождено. Тогда, согласно лемме 4.7, $s(B) = \emptyset$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = \mathcal{E}_0(B) &= \sum [+](\mathcal{L}_\lambda^+ [+]\mathcal{L}_\lambda^-) \big|_{\lambda \notin s_1(B, A)} [+]\quad \\ &\left(\sum [+]\text{Ker}(B - \lambda I) \right) \big|_{\lambda \in s_1(B, A)}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Здесь в первой сумме подпространств, как следует из доказательства в части 1, имеется базис Рисса в своей замкнутой оболочке, являющийся J -ортонормированным базисом в ней, а вторая сумма представляет собой подпространство конечной размерности и потому в $\mathcal{K}$ существует почти J -ортонормированный базис, составленный из собственных элементов оператора B и базиса второй суммы подпространств. Если, в частности, эта вторая сумма подпространств тривиальна, то в $\mathcal{K}$ имеется J -ортонормированный базис, составленный из собственных элементов оператора B .

Пусть теперь $\mathcal{E}(B) = \mathcal{K}$, т.е. $\mathcal{E}(B)$ невырождено. Тогда, согласно лемме 4.9, любое подпространство $\mathcal{L}_\lambda(B)$ обладает свойством $\lambda \notin s(B) \cup s_1(B, A)$. В этом случае

$$\mathcal{L}_\lambda(B) = (\mathcal{L}_\lambda^+ [+]\mathcal{L}_\lambda^-) [+]\mathfrak{M}_\lambda [+]\mathfrak{N}_\lambda, \quad (4.93)$$

причём в $(\mathcal{L}_\lambda^+ [+]\mathcal{L}_\lambda^-) [+]\mathfrak{M}_\lambda$ имеется J -ортонормированный базис, а $\mathfrak{N}_\lambda$ конечномерно и количество таких подпространств не более чем конечно. Отсюда следует, что в $\mathcal{K}$ существует почти J -ортонормированный базис, составленный из собственных (либо корневых) элементов оператора B .

5. Пусть $\{e_j^\pm\}$ является J -ортонормированным базисом и p -базисом в $\mathcal{K}$, т.е. имеется ортонормированный базис $\{g_j^\pm\}$ такой, что

$$e_j^\pm = (I + T)g_j^\pm, \quad T \in \mathfrak{S}_p, \quad (4.94)$$

причём $I + T$ обратим.

Введём подпространства

$$\mathcal{L}^\pm := \text{з.л.о.} \{e_j^\pm\}. \quad (4.95)$$

Тогда, очевидно,

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}^+ [+] \mathcal{L}^-, \quad (4.96)$$

где $\mathcal{L}^\pm$ — равномерно дефинитные максимальные подпространства в $\mathcal{K}$.

Пусть K — угловой оператор неотрицательного подпространства $\mathcal{L}^+$. Тогда, согласно лемме 2.1, $\|K\| < 1$. Рассмотрим элементы

$$f_j^\pm = U^{-1}(K)e_j^\pm, \quad (4.97)$$

где

$$U(K) = \begin{pmatrix} (I - K^*K)^{1/2} & * \\ * & * \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

— унитарный оператор, представленный матрицей в построенном каноническом разложении пространства $\mathcal{K}$. Здесь элементы $\{f_j^\pm\}$ образуют (в силу унитарности $U(K)$) J -ортонормированный базис, причём $\{f_j^+\}$ и $\{f_j^-\}$ образуют гильбертово ортонормированные системы. Имеем

$$f_j^\pm = U^{-1}(K)(I + T)g_j^\pm, \quad (4.99)$$

и потому $U^{-1}(K)(I + T)$ — гильбертово унитарный оператор. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} (I + T)^* U^{-2}(K)(I + T) &= I, \\ U^{-1}(K)(I + T) &= (I + T)^* U^{-1}(K). \end{aligned} \quad (4.100)$$

Из этих соотношений приходим к выводу, что

$$(I + T)(I + T)^* = U^2(K), \quad (4.101)$$

и потому

$$(I + T)(I + T)^* - I = U^2(K) - I. \quad (4.102)$$

Отсюда следует, что

$$U^2(K) - I = T + T^* + TT^* \in \mathfrak{S}_p, \quad (4.103)$$

так как $T \in \mathfrak{S}_p$. Далее, поскольку $U(K) \gg 0$ (лемма ??), то существует непрерывный обратный оператор $(I + U(K))^{-1}$ и, значит, ???

$$\begin{aligned} U(K) - I &= (U(K) + I)^{-1}(U^2(K) - I) = \\ &= \begin{pmatrix} (I - K^*K)^{-1/2} - I & K^*(I - KK^*)^{-1/2} \\ K(I - K^*K)^{-1/2} & (I - KK^*)^{-1/2} - I \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_p, \end{aligned} \quad (4.104)$$

т.к. каждый элемент матрицы принадлежит $\mathfrak{S}_p$. В частности,

$$K = \left(K(I - K^*K)^{-1/2} \right) (I - KK^*)^{1/2} \in \mathfrak{S}_p, \quad (4.105)$$

поскольку первый сомножитель класса $\mathfrak{S}_p$, а второй ограничен.

В обратную сторону можно провести аналогичные рассуждения, предполагая, что $K \in \mathfrak{S}_p$ и учитывая свойство $U(K) = I + T(K)$, $T(K) \in \mathfrak{S}_p$. $\square$

4.4 Приложение основной спектральной теоремы к операторному пучку С.Г. Крейна

Рассмотрим операторный пучок С.Г. Крейна в предположениях более общих, чем те, которые имели место в задаче о нормальных колебаниях тяжёлой вязкой жидкости в открытом сосуде.

Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, и в нём рассматривается спектральная задача

$$L(\lambda)\varphi := (\lambda G + \lambda^{-1}H - I)\varphi = 0, \quad \lambda \neq 0, \quad (4.106)$$

где оператор G положителен ($G > 0$ и потому самосопряжён) и компактен, а H — самосопряжённый оператор, спектр $\sigma(H)$ которого является счётным. Покажем, что эту задачу можно привести к задаче на собственные значения для J -самосопряжённого оператора в некотором пространстве Крейна.

Осуществим в задаче (4.106) замену спектрального параметра по формуле

$$\lambda = \mu^{-1} - a, \quad a > 0, \quad \mu \neq a^{-1}. \quad (4.107)$$

Тогда вместо (4.106) придём к спектральной проблеме

$$L_1(\mu)\varphi := \{\mu^2(aI + a^2G + H) - \mu(I + 2aG) + G\}\varphi = 0. \quad (4.108)$$

Выберем теперь $a > 0$ таким образом, чтобы выполнялось условие

$$F_a := aI + a^2G + H \gg 0. \quad (4.109)$$

Так как $G > 0$, то для этого достаточно, чтобы

$$a > \|H\|. \quad (4.110)$$

Осуществим затем в (4.108) замену искомого элемента по формуле

$$F_a^{1/2}\varphi =: \psi \quad (4.111)$$

и применим слева (ограниченный и ограниченно обратимый) оператор $F_a^{-1/2}$. Тогда вместо (4.108) придём к спектральной задаче для квадратичного по μ операторного пучка

$$L_2(\mu)\psi := (\mu^2I - \mu B_a + C_a)\psi = 0, \quad (4.112)$$

$$\begin{aligned} B_a &:= F_a^{-1/2}(I + 2aG)F_a^{-1/2} = B_a^* \gg 0, \\ C_a &:= F_a^{-1/2}GF_a^{-1/2} = C_a^* > 0. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Эта задача равносильна исходной задаче (4.106), а цепочки из собственных и присоединённых элементов задач (4.106) и (4.112) однозначно выражаются известным образом одни через другие.

Проведём теперь в (4.112) так называемую глобальную линейаризацию по параметру μ , введя новый искомый элемент η по формуле

$$C_a^{1/2}\psi = \mu\eta. \quad (4.114)$$

Тогда (4.112) и (4.114) приводят к системе уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 & C_a^{1/2} \\ -C_a^{1/2} & B_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix}, \quad (4.115)$$

то есть к задаче на собственные значения для оператора

$$\mathcal{A}_a := \begin{pmatrix} 0 & C_a^{1/2} \\ -C_a^{1/2} & B_a \end{pmatrix} : \mathcal{H}^2 \longrightarrow \mathcal{H}^2. \quad (4.116)$$

Нетрудно видеть, что оператор $\mathcal{A}_a$ является J -самосопряжённым, если ввести каноническую симметрию

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (4.117)$$

и индефинитное скалярное произведение

$$[u, v] = (Ju, v)_{\mathcal{H}^2}, \quad u = \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix}. \quad (4.118)$$

Оператор $\mathcal{A}_a$ называют линеаризатором задачи (4.112).

Выясним, какими дополнительными свойствами обладает линеаризатор $\mathcal{A}_a$. Прежде всего, из второй формулы (4.113) следует, что $C_a \in \mathfrak{S}_p$ тогда и только тогда, когда $G \in \mathfrak{S}_p$, поскольку $F_a^{-1/2}$ ограничен и ограниченно обратим. Поэтому $C_a^{1/2} \in \mathfrak{S}_p \iff G \in \mathfrak{S}_{p/2}$. Далее, спектр оператора $\mathcal{A}_a$ счётен, так как $C_a^{1/2} \in \mathfrak{S}_\infty$, а спектр оператора H счётен и потому спектр B_a также счётен.

Отсюда следует, что оператор $\mathcal{A}_a$ при условии $G \in \mathfrak{S}_p$ удовлетворяет условиям основной спектральной теоремы 4.8. В самом деле, так как $(\mathcal{A}_a)_{12} = C_a^{1/2}$ — компактный оператор, а $B_a \gg 0$, то оператор $\mathcal{A}_a$ является частным случаем матричного оператора, рассмотренного в примере 4.2. Поэтому $\mathcal{A}_a = \mathcal{A}_a^c \in (H)$ и спектр оператора $\mathcal{A}_a$ счётен. Значит, для него справедливы все утверждения теоремы 4.8. В частности, если собственные элементы $\mathcal{A}_a$ образуют J -ортонормированный базис, то этот базис является p -базисом в $\mathcal{H}^2$ тогда и только тогда, когда $G \in \mathfrak{S}_{p/2}$, т.е. при условии, что угловой оператор K максимального неотрицательного инвариантного подпространства $\mathcal{L}_+$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$. Последнее утверждение для оператора $\mathcal{A}_a$ прямо следует из уравнения для углового оператора, которое в данном случае имеет вид

$$KC_a^{1/2}K = -C_a^{1/2} + B_aK \implies K = B_a^{-1}(KC_a^{1/2}K + C_a^{1/2}). \quad (4.119)$$

Здесь B_a^{-1} непрерывен, а $C_a^{1/2} \in \mathfrak{S}_p$, если $G \in \mathfrak{S}_{p/2}$, и потому $K \in \mathfrak{S}_p$.

Возвращаясь по приведенным выкладкам от задачи (4.112) к исходной задаче (4.106) для обобщённого пучка Крейна, приходим к выводу, что эта задача имеет решения, обладающие свойством базисности и p -базисности.

Список литературы

- [1] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой*. — М.: Наука, 1986.
- [2] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. *Линейные операторы в пространстве с индефинитной метрикой*. Математический анализ // Итоги науки и техники, ВИНТИ. Математический анализ, т. 17, — М.: Наука, 1979.
- [3] Гинзбург, Иохвидов И.С. *Исследования по геометрии бесконечномерных пространств*. // УМН, т. 17, № 4, 1962.
- [4] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. *Линейные операторы в гильбертовом пространстве с G – метрикой*. // УМН, т. 26, № 4, 1971.
- [5] Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д. *Введение в теорию пространств Понтрягина: специальный курс лекций*. — Симферополь: ООО "ФОРМА", 2008. — 112 с.
- [6] Крейн М.Г. *Введение в геометрию индефинитных J –пространств и теорию операторов в этих пространствах*. Пятая математическая школа, т.1, Киев, 1965.
- [7] Иохвидов И.С., Крейн М.Г. *Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой*. Труды ММО, I, 1956, т.5; II, 1959, т.8.
- [8] Iohvidov I.S., Krein M.G., Langer H. *Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric*. Akademie-Verlag, Berlin, 1982.

Введение в теорию пространств Крейна

Специальный курс лекций
для студентов-магистрантов специальности "Математика"

Авторы:
Азизов Томас Яковлевич,
Копачевский Николай Дмитриевич

Корректурa и верстка: Газиев Э.Л.

Подписано к печати 01.02.2010г. Формат 60x84/16.
Бумага тип. ОП. Объем 5,6 п.л. Тираж 100. Заказ –

95000, г. Симферополь, ул. Сергеева-Ценского 5, оф. 6.
ООО "ФОРМА".