

А. А. Абрикосов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МЕТАЛЛОВ



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2010

УДК 22.37
ББК 539.21
А 16

Абрикосов А.А. **Основы теории металлов:** Учеб. пособие / Под ред. Л.А. Фальковского. — 2-е изд., доп. и испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 600 с. — ISBN 978-5-9221-1097-6.

Изложена современная теория нормальных и сверхпроводящих металлов без использования сложных математических методов. Помимо описания классических свойств, серьезное внимание уделено актуальным проблемам: квантовым интерференционным эффектам, локализации электронов случайным потенциалом, нелинейным явлениям, взаимному влиянию сверхпроводимости и магнетизма и др. Необходимо знакомство с квантовой механикой и статистикой.

Для студентов и аспирантов физических специальностей вузов, а также научно-технических работников в области физики твердого тела.

Илл. 155. Библиогр. 358 назв.

Рецензенты:

кафедра физики твердого тела Московского физико-технического
института, заведующий — академик РАН Ю.А. Осипьян,
академик РАН Ю.М. Каган

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
Предисловие ко второму изданию	11

Часть I. НОРМАЛЬНЫЕ МЕТАЛЛЫ

Глава 1. Электрон в периодической кристаллической решетке . . .	13
§ 1.1. Общие свойства	13
§ 1.2. Приближение сильной связи	19
§ 1.3. Модель слабосвязанных электронов	22
Глава 2. Электронная ферми-жидкость	27
§ 2.1. Концепция квазичастиц	27
§ 2.2. Квазичастицы в изотропной ферми-жидкости	29
§ 2.3. Анизотропная ферми-жидкость	34
§ 2.4. Электронная теплоемкость	38
Глава 3. Проводимость и теплопроводность	43
§ 3.1. Электрон как волновой пакет	43
§ 3.2. Кинетическое уравнение	45
§ 3.3. Проводимость	49
§ 3.4. Теплопроводность	50
§ 3.5. Концепция длины свободного пробега	53
§ 3.6. Проводимость и теплопроводность в газе свободных электронов . .	55
Глава 4. Процессы рассеяния	56
§ 4.1. Рассеяние на примесях	56
§ 4.2. Рассеяние электронов электронами	59
§ 4.3. Рассеяние на колебаниях решетки	59
§ 4.4. Процессы переброса Пайерлса	66
§ 4.5. «Изотопическое» рассеяние	73
§ 4.6. Эффект Кондо	76

Глава 5. Гальваномагнитные свойства металлов	84
§ 5.1. Кинетическое уравнение в присутствии магнитного поля	84
§ 5.2. Гальваномагнитные явления в слабом магнитном поле	89
§ 5.3. Гальваномагнитные явления в сильном магнитном поле. Замкнутые траектории	93
§ 5.4. Гальваномагнитные явления в сильном поле и топология открытых ферми-поверхностей	97
§ 5.5. Магнитосопротивление поликристаллов	102
 Глава 6. Термоэлектрические и термомагнитные явления	106
§ 6.1. Термоэлектрические явления	106
§ 6.2. Термомагнитные явления в слабом поле	112
§ 6.3. Теплопроводность и термоэлектрические эффекты в сильном магнитном поле	113
§ 6.4. Термо-э.д.с. и переходы Лифшица	118
 Глава 7. Металл в высокочастотном электромагнитном поле. Циклотронный резонанс	122
§ 7.1. Нормальный скин-эффект	122
§ 7.2. Аномальный скин-эффект. Концепция неэффективности	124
§ 7.3. Аномальный скин-эффект. Решение кинетического уравнения	126
§ 7.4. Циклотронный резонанс	136
§ 7.5. Нелинейные эффекты. Токовые состояния	147
 Глава 8. Размерные эффекты	152
§ 8.1. Отсечка циклотронных резонансных орбит	152
§ 8.2. Внутренние всплески высокочастотного поля при циклотронном резонансе	154
§ 8.3. Нерезонансный размерный эффект	157
§ 8.4. Нерезонансный размерный эффект в наклонном поле	159
§ 8.5. Эффект Зондхеймера	160
§ 8.6. Дрейфовая фокусировка высокочастотного поля	163
§ 8.7. Размерный эффект на открытых траекториях	165
 Глава 9. Распространение электромагнитных волн в присутствии магнитного поля	167
§ 9.1. Геликоны в металлах с неравными числами электронов и дырок	167
§ 9.2. Магнитоплазменные волны в металлах с равными числами электронов и дырок	169
§ 9.3. Экспериментальные исследования	172

Глава 10. Магнитная восприимчивость и эффект де Гааза–ван Альфена	176
§ 10.1. Спинный парамагнетизм Паули	176
§ 10.2. Квантование уровней свободного электрона в магнитном поле . . .	177
§ 10.3. Диамагнетизм Ландау	179
§ 10.4. Квазиклассическое квантование энергетических уровней для произвольного спектра	182
§ 10.5. Эффект де Гааза–ван Альфена	184
§ 10.6. Диамагнитные домены	193
§ 10.7. Магнитный пробой	198
 Глава 11. Квантовые эффекты в проводимости	202
§ 11.1. Эффект Шубникова–де Гааза	202
§ 11.2. Циклотронный резонанс на «скачущих» орбитах	206
§ 11.3. Интерференционная добавка к проводимости	210
§ 11.4. Интерференционные эффекты в магнитном поле	215
§ 11.5. Квантовая поправка к плотности состояний и проводимости, происходящая от взаимодействия электронов	219
§ 11.6. Андерсоновская локализация. Переход металл–диэлектрик	221
§ 11.7. Мезоскопика	229
 Глава 12. Поглощение звука в металлах	234
§ 12.1. Коэффициент поглощения в отсутствие магнитного поля (низкие частоты)	234
§ 12.2. Коэффициент поглощения в отсутствие магнитного поля (высокие частоты)	239
§ 12.3. Геометрический резонанс	241
§ 12.4. Магнитоакустические резонансные явления	242
§ 12.5. Количественная теория геометрического резонанса	244
§ 12.6. Количественная теория магнитоакустических резонансов	249
§ 12.7. Нелинейное поглощение звука. Влияние магнитного поля	253
§ 12.8. Гигантские осцилляции поглощения вследствие квантования уровней в магнитном поле	257
 Глава 13. Ферми-жидкостные эффекты	263
§ 13.1. Взаимодействие квазичастиц	263
§ 13.2. Функция f Ландау	265
§ 13.3. Роль взаимодействия квазичастиц в парамагнитной восприимчивости	269
§ 13.4. Квантование Ландау и квантовые осцилляции	272
§ 13.5. Нулевой (высокочастотный) звук	273

§ 13.6. Спиновые волны	276
§ 13.7. Эффект Кондо при низких температурах	284
Глава 14. Методы вычисления электронных спектров металлов . .	294
§ 14.1. Метод ортогонализированных плоских волн	294
§ 14.2. Метод псевдопотенциала	297
§ 14.3. Модель свободных электронов	304
§ 14.4. Приближение сильно сжатого вещества	308

Часть II. СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ МЕТАЛЛЫ

Глава 15. Макроскопическая теория сверхпроводимости	313
§ 15.1. Общие свойства сверхпроводников	313
§ 15.2. Термодинамика сверхпроводящего перехода	316
§ 15.3. Промежуточное состояние	317
§ 15.4. Разрушение сверхпроводимости током	323
§ 15.5. Уравнения Ф. Лондона и Г. Лондона	327
Глава 16. Основные идеи микроскопической теории	330
§ 16.1. Условие сверхтекучести	330
§ 16.2. Фононное притяжение	331
§ 16.3. Куперовские пары	334
§ 16.4. Энергетический спектр	337
§ 16.5. Температурная зависимость энергетической щели	343
§ 16.6. Термодинамика сверхпроводников	346
§ 16.7. Лондоновские и пиппардовские сверхпроводники (качественная теория)	351
§ 16.8. Эффект Мейснера при $T = 0$	354
§ 16.9. Связь между током и полем при конечных температурах (лондоновский предел)	360
§ 16.10. Сверхпроводящая корреляция и поверхностная энергия. Два рода сверхпроводников. Роль примесей	363
§ 16.11. Проблема высокотемпературной сверхпроводимости	368
Глава 17. Теория Гинзбурга и Ландау	380
§ 17.1. Вывод уравнений Гинзбурга и Ландау	380
§ 17.2. Поверхностная энергия на границе нормальной и сверхпроводящей фаз	388
§ 17.3. Критическое поле и намагниченность тонкой пленки. Переохлаждение и перегрев	390

§ 17.4. Критический ток тонкой проволоки с $\kappa \ll 1$	395
§ 17.5. Квантование магнитного потока	399
Глава 18. Сверхпроводимость второго рода	405
§ 18.1. Магнитные свойства сверхпроводников 2-го рода (качественная картина)	405
§ 18.2. Количественная теория для окрестности H_{c2}	409
§ 18.3. Магнитные свойства сверхпроводников 2-го рода в случае $\kappa \gg 1$	417
§ 18.4. Поверхностная сверхпроводимость	426
§ 18.5. Сверхпроводники 2-го рода при низких температурах	432
§ 18.6. Тонкая пленка сверхпроводника 2-го рода в магнитном поле	441
§ 18.7. Сверхпроводящие магниты. Пиннинг	448
Глава 19. Кинетика сверхпроводников	455
§ 19.1. Электронная теплопроводность	455
§ 19.2. Термоэлектрические явления	459
§ 19.3. Поведение сверхпроводников в слабом высокочастотном поле	464
§ 19.4. Поглощение ультразвука	466
§ 19.5. Стимуляция сверхпроводимости высокочастотным полем и звуком большой интенсивности	468
§ 19.6. Параводимость	472
Глава 20. Граница сверхпроводника с нормальным металлом	478
§ 20.1. Эффекты близости	478
§ 20.2. Андреевское отражение	484
§ 20.3. Низкотемпературная теплоемкость промежуточного состояния	487
Глава 21. Сверхпроводимость и магнетизм	490
§ 21.1. Сверхпроводники с магнитными примесями. Бесщелевая сверхпроводимость	490
§ 21.2. Неоднородное сверхпроводящее состояние	496
§ 21.3. Ферромагнитные сверхпроводники	502
§ 21.4. Сдвиг Найта	509
Глава 22. Туннельный контакт. Эффект Джозефсона	513
§ 22.1. Одночастичный туннельный ток	513
§ 22.2. Эффект Джозефсона	520
§ 22.3. Микроскопический вывод джозефсоновского тока	524
§ 22.4. Эффект Джозефсона в магнитном поле	530
§ 22.5. Переменный эффект Джозефсона	534
§ 22.6. Волны в джозефсоновском контакте	539

§ 22.7. Джозефсоновские контакты с прослойкой из нормального металла и полупроводника.	542
§ 22.8. Практические применения эффекта Джозефсона	546
§ 22.9. Динамическое резистивное состояние тонкого сверхпроводника при прохождении сверхкритического тока.	549
Приложение I. Модель ферромагнитного металла.	559
Приложение II. Фазовые переходы второго рода.	565
Приложение III. Термодинамика в магнитном поле.	577
Список литературы	581
Предметный указатель	595

Предисловие

Основой этой книги являются курсы лекций, прочитанных автором в МГУ, МФТИ и МИСиС, а также в университетах Дели (Индия) и Лозанны (Швейцария). Она рассчитана на студентов старших курсов университетов и технических вузов, имеющих физические специальности, а также аспирантов, научных работников и преподавателей. Книга требует знакомства с квантовой механикой и статистикой. Никаких специальных сведений о металлах, выходящих за рамки курса общей физики, не требуется.

Часть I, посвященная нормальным металлам, представляет собой значительную переработку книги автора «Введение в теорию нормальных металлов», изданной в СССР в 1972 г., а затем переведенной и изданной в США и в ГДР. Эта часть охватывает следующие темы: электронные спектры металлов, электро- и теплопроводность, гальваномагнитные и термоэлектрические явления, поведение металлов в высокочастотных полях, поглощение звука, ферми-жидкостные явления. Изложена современная концепция энергетических спектров электронов в металлах и методы, позволяющие изучить поведение металлов в постоянных и переменных полях. Показано, как с помощью результатов таких исследований можно восстановить энергетический спектр.

Вместе с тем большое внимание уделено новым результатам по теории металлов: квантовым интерференционным явлениям и проблеме локализации электронов случайным потенциалом, нелинейным эффектам при взаимодействии электронов с электромагнитным полем и звуком, эффекту Кондо и др.

В части II книги изложена теория сверхпроводимости. В настоящее время уже нельзя говорить о «явлении сверхпроводимости». В действительности это новая область физики твердого тела, к которой относятся большой круг различных явлений. Многие из них уже начинают применяться на практике, причем не только в физических приборах, а в энергетике, медицине, электронике, вычислительной математике, на транспорте. Физика сверхпроводников и, в частности, теория сверхпроводимости изложены во многих книгах. Большая часть их издана давно и во многом устарела. В то же время практически все эти книги написаны либо слишком специально, либо слишком популярно и поэтому не вполне подходят физикам и инженерам широкого профиля для изучения сверхпроводимости.

Изложить теорию сверхпроводимости, несомненно, труднее, чем теорию нормальных металлов. Дело в том, что она состоит из многих разделов, в которых используются свои специфические методы.

Последние, как правило, очень сложны и недоступны без специальной подготовки.

Для преодоления этих трудностей избран компромиссный вариант. В книге подробно изложены два основных метода: микроскопическая теория на основе метода Боголюбова и теория Гинзбурга и Ландау, позволяющая описать поведение сверхпроводников вблизи критической температуры. На основе этих методов удастся дать количественное описание многих важных свойств сверхпроводников: термодинамических характеристик, линейной электродинамики, некоторых вопросов кинетики, теории критических свойств тонких пленок, сверхпроводимости 2-го рода, парапроводимости, теории туннельного контакта, эффекта Джозефсона и т. п. Но есть и другие явления, которые требуют весьма изощренных методов и громоздких вычислений, в то же время они представляют существенный физический интерес. В этих случаях дано качественное описание, сопровождаемое простыми оценками. Автор надеется, что для тех читателей, которые захотят более детально ознакомиться с отдельными вопросами теории сверхпроводимости, эта книга будет полезна в качестве путеводителя.

Автор очень благодарен Ю. В. Шарвину, В. Ф. Гантмахеру, М. И. Каганову, А. И. Ларкину, Г. М. Элиашбергу, Ю. Н. Овчинникову, А. Г. Аронову, Б. Л. Альтшулеру, Д. Е. Хмельницкому, Л. А. Фальковскому, А. А. Слуцкину, В. Л. Гуревичу, В. В. Шмидту, Л. Н. Булаевскому, Б. И. Ивлеву, В. И. Козубу, Р. Н. Гуржи, А. М. Финкельштейну, Н. Б. Копнину, Ю. Х. Векилову, А. И. Буздину за обсуждение отдельных разделов книги и рекомендации по поводу наиболее рационального изложения сложных вопросов.

В заключение автор хотел бы с глубокой благодарностью отметить исключительную помощь, которую он получил во время работы над книгой со стороны профессора Льва Григорьевича Асламазова, чья трагическая гибель является тяжелой потерей для советской физики.

Профессор Л. Г. Асламазов был выдающимся специалистом по теории сверхпроводимости. Вместе с А. И. Ларкиным он открыл явление парапроводимости и исследовал эффект Джозефсона при заданном токе. Им создана теория джозефсоновских контактов с нормальной и полупроводниковой прослойками, высокочастотной стимуляции сверхпроводимости в мостиках и многое другое. Читатель неоднократно встретит фамилию Л. Г. Асламазова в части II книги.

Предисловие ко второму изданию

Со времени первого издания этой книги прошло двадцать лет, многие сегодняшние исследователи, работающие в области физики конденсированного состояния, изучали по ней теорию металлов и сверхпроводников. И хотя на последнюю четверть XX века пришлось бурное развитие именно этой области физики, книга, с которой выросли поколения студентов и научных работников, не устарела, стала библиографической редкостью. Она по-прежнему позволяет читателю не только понять физическую суть обсуждаемых явлений, но и проследить за выкладками, научиться методам теоретической физики, а главное — увидеть природу глазами выдающегося ученого и блестящего лектора. Основная черта этой книги — оригинальное, глубокое и всестороннее понимание физики конденсированного состояния. О многих проблемах читатель узнает из «первых рук». Так, Алексей Алексеевич Абрикосов построил теорию сверхпроводников второго рода, внес важный вклад в теорию полуметаллов и бесщелевых полупроводников, в предсказание и исследование резонанса Абрикосова–Сула в металлах с магнитными примесями, в изучение свойств квазиодномерных металлов и неупорядоченных систем. За эти работы он удостоился ряда наиболее престижных советских и международных наград, среди которых и высшая в научном сообществе — Нобелевская премия.

Книга была создана на основе лекций, которые академик Абрикосов читал на протяжении многих лет на физическом факультете МГУ, на факультете общей и прикладной физики МФТИ, а также на физико-химическом факультете Московского института стали и сплавов, где он с 1976 по 1990 годы заведовал кафедрой теоретической физики. В настоящее время А. А. Абрикосов является главным научным сотрудником (*distinguished scientist*) Национальной Аргоннской лаборатории (США), почетным профессором десятка престижных университетов Европы и Америки.

Настоящее издание полностью соответствует изданию 1987 года, исправлены лишь замеченные опечатки и даны ссылки на некоторые новые работы.

Л. А. Фальковский

Часть I

НОРМАЛЬНЫЕ МЕТАЛЛЫ

Глава 1

ЭЛЕКТРОН В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ ¹⁾

§ 1.1. Общие свойства

Хорошо известно, что металлы — хорошие проводники электрического тока. Причина этого заключается в том, что внешние электронные оболочки атомов, составляющих металл, в значительной степени перекрываются. Поэтому электроны этих оболочек (они называются валентными) легко перемещаются от одного атома к другому, так что даже нельзя сказать, какому атому они в действительности принадлежат. Такая коллективизация внешних электронов приводит к возникновению большой энергии связи металлов и объясняет их специфические механические свойства.

Что касается внутренних электронных оболочек, то, ввиду малости их перекрытия, их можно считать примерно такими же, как и в изолированных атомах.

Таким образом, металл представляет собой кристаллическую решетку из положительных ионов, в которую «налиты» коллективизированные электроны валентных оболочек. Они называются также электронами проводимости или «свободными» электронами. В действительности эти электроны сильно взаимодействуют между собой и с ионами решетки, причем потенциальная энергия этих взаимодействий порядка кинетической энергии электронов.

Построение теории такой системы кажется на первый взгляд совершенно невозможным. Однако на самом деле в настоящее время

¹⁾ Материал этой главы содержится практически во всех книгах, посвященных теории металлов, и можно было бы ограничиться просто ссылкой (например, [1]). Однако ввиду того, что эти представления являются основой всего дальнейшего, мы считаем полезным привести их здесь.

существует вполне строгое описание большинства интересных явлений в металлах. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, поведение системы сильно взаимодействующих между собой электронов (или электронной жидкости) во многом аналогично поведению системы не взаимодействующих между собой частиц (т. е. газа) в некотором внешнем поле, представляющем собой усредненное поле ионов решетки и остальных электронов. Во-вторых, хотя это поле и трудно точно вычислить, но уже очень многое следует из того факта, что усредненное поле обладает свойствами симметрии кристаллической решетки, в частности периодичностью. Мы начнем поэтому с изучения вспомогательной задачи о поведении электрона в периодическом поле.

Рассмотрим электрон, движущийся во внешнем поле с потенциальной энергией $U(\mathbf{r})$. Функция $U(\mathbf{r})$ обладает периодичностью, т. е.

$$U(\mathbf{r} + \mathbf{a}_n) = U(\mathbf{r}), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{a}_n$ — произвольный период решетки. Как известно, вектор $\mathbf{a}_n$ всегда может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов $\mathbf{a}_i$:

$$\mathbf{a}_n = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3, \quad (1.2)$$

где n_i — положительные или отрицательные целые числа или нули.

Уравнение Шредингера для электрона есть

$$-(\hbar^2/2m)\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = \varepsilon\psi(\mathbf{r}). \quad (1.3)$$

Нетрудно видеть, что $\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}_n)$ тоже является решением этого уравнения с тем же собственным значением ε . Поэтому если уровень энергии ε — невырожденный, то должно быть

$$\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}_n) = C\psi(\mathbf{r}), \quad (1.4)$$

где C — константа. Если же уровень ε — вырожденный, т. е. ему соответствует несколько собственных функций ψ_ν , мы можем написать

$$\psi_\mu(\mathbf{r} + \mathbf{a}_n) = \sum_\nu C_{\mu\nu}\psi_\nu(\mathbf{r}). \quad (1.5)$$

Так как функции ψ_μ образуют ортогональную и нормированную систему, т. е.

$$\int \psi_\mu^*(\mathbf{r})\psi_\nu(\mathbf{r}) dV = \delta_{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

то, смещая переменную интегрирования $\mathbf{r}$ на $\mathbf{a}_n$ и пользуясь формулой (1.5), получаем

$$\sum_\eta C_{\mu\eta}^* C_{\nu\eta} = \delta_{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

Следовательно, $C_{\mu\nu}$ — унитарная матрица, т. е.

$$C^+ = C^{-1}. \quad (1.8)$$

Но такую матрицу можно диагонализировать. Иными словами, определенные линейные комбинации функции ψ_{ν} обладают свойством (1.4). Условие нормировки при этом дает

$$|C|^2 = 1. \quad (1.9)$$

Таким образом, можем написать

$$C = e^{i\varphi(\mathbf{a}_n)}, \quad (1.10)$$

где φ — действительная функция смещения $\mathbf{a}_n$.

А теперь рассмотрим два последовательных смещения: $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$. При первом функция ψ умножится на $C(\mathbf{a})$, при втором — на $C(\mathbf{a}')$. В то же время два последовательных смещения эквивалентны одному смещению на $\mathbf{a} + \mathbf{a}'$. При этом функция ψ должна умножиться просто на $C(\mathbf{a} + \mathbf{a}')$. Следовательно,

$$C(\mathbf{a} + \mathbf{a}') = C(\mathbf{a})C(\mathbf{a}'). \quad (1.11)$$

Отсюда вытекает, что функция φ в формуле (1.10) должна быть линейной функцией $\mathbf{a}_n$:

$$\varphi(\mathbf{a}_n) = \mathbf{p} \mathbf{a}_n / \hbar, \quad (1.12)$$

где $\mathbf{p}$ — векторный коэффициент. Нетрудно видеть, что этот вектор определен неоднозначно. Именно: если к $\mathbf{p}$ добавить вектор $\hbar \mathbf{K}$, удовлетворяющий условию $\mathbf{K} \mathbf{a}_n = 2\pi m$ для любого периода решетки $\mathbf{a}_n$ (где m — целое число), то получим те же самые коэффициенты $C(\mathbf{a}_n)$. Уравнениям $\mathbf{K} \mathbf{a}_n = 2\pi m$ удовлетворяет бесконечная система векторов, которые все могут быть записаны в виде

$$\mathbf{K} = q_1 \mathbf{K}_1 + q_2 \mathbf{K}_2 + q_3 \mathbf{K}_3. \quad (1.13)$$

Здесь q_i — целые числа, а $\mathbf{K}_i$ — наименьшие некомпланарные векторы, обладающие свойством $\mathbf{K} \mathbf{a}_n = 2\pi m$. Из формулы (1.2) следует, что это условие должно быть выполнено для базисных векторов $\mathbf{a}_i$. Тогда оно будет выполнено для любого периода $\mathbf{a}_n$. Отсюда легко получить векторы $\mathbf{K}_i$:

$$\mathbf{K}_1 = \frac{2\pi[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3]}{(\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3])}, \quad \mathbf{K}_2 = \frac{2\pi[\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1]}{(\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3])}, \quad \mathbf{K}_3 = \frac{2\pi[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]}{(\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3])}. \quad (1.14)$$

Таким образом, мы видим, что векторы $\mathbf{K}_i$ равны произведению 2π на обратные высоты элементарной ячейки. Взяв $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ и $\mathbf{K}_3$ в качестве базисных векторов, мы можем построить так называемую обратную решетку. Итак, обратная решетка целиком определяется трансляционными свойствами рассматриваемого кристалла (векторами $\mathbf{a}_i$), т. е. его решеткой Бравэ, и имеет те же свойства симметрии. Но, как известно, могут быть разные решетки Бравэ с одной и той же симметрией. Соответственно решеткам Бравэ и обратной решетки таково: если решетка Бравэ — объемноцентрированная, то обратная решетка будет грани-

центрированной, и наоборот; решетке Бравэ с центрированными основаниями соответствует обратная решетка с центрированными основаниями.

Энергия электрона ε зависит от вектора $\mathbf{p}$. Так как $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p} + \hbar\mathbf{K}$ физически эквивалентны, то, очевидно, энергия $\varepsilon(\mathbf{p})$ должна быть периодической функцией с периодами $\hbar\mathbf{K}_i$. Каждому значению $\mathbf{p}$ может, вообще говоря, соответствовать несколько энергетических уровней $\varepsilon_i(\mathbf{p})$, и каждая из этих функций периодична в обратной решетке.

Волновая функция, описывающая движение электрона в периодическом поле и обладающая свойством

$$\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}_n) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{a}_n/\hbar} \psi(\mathbf{r}),$$

может быть представлена в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} u(\mathbf{r}), \quad (1.15)$$

где $u(\mathbf{r})$ — периодическая функция:

$$u(\mathbf{r} + \mathbf{a}_n) = u(\mathbf{r}).$$

Формула (1.15) называется теоремой Блоха. Волновая функция ψ в виде (1.15) похожа на плоскую волну, описывающую движение свободной частицы, но здесь волна модулирована периодической функцией. Поэтому вектор $\mathbf{p}$, аналогичный импульсу, не является в действительности импульсом частицы в обычном смысле слова. Он называется квазиимпульсом электрона.

Так как векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p} + \hbar\mathbf{K}$ физически эквивалентны, то для однозначности мы можем рассматривать только одну элементарную ячейку в пространстве обратной решетки. Объем области однозначного определения $\mathbf{p}$ равен

$$(2\pi\hbar/v)^3 ([\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3][[\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]]]) = (2\pi\hbar)^3/v,$$

где $v = (\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3])$ — объем элементарной ячейки основной решетки.

Для получения решения уравнения Шредингера надо задать граничные условия. Однако в бесконечно большом объеме последовательные состояния будут бесконечно близки друг к другу. Нас в действительности будет интересовать лишь вопрос о плотности состояний, т. е. о том, какое число состояний приходится на интервал энергий или заданный элемент объема в пространстве квазиимпульса. Плотность состояний не зависит от конкретного вида граничных условий, и поэтому легче всего определить ее, взяв самые простые условия.

Предполагая, что рассматриваемый образец металла имеет форму прямоугольного параллелепипеда, мы зададим периодические граничные условия:

$$\psi(x + L_1, y, z) = \psi(x, y + L_2, z) = \psi(x, y, z + L_3) = \psi(x, y, z). \quad (1.16)$$

Считая, что каждый из размеров L_1 , L_2 и L_3 содержит целое число периодов по своему направлению, мы получаем

$$e^{ip_x L_1/\hbar} = e^{ip_y L_2/\hbar} = e^{ip_z L_3/\hbar} = 1.$$

Отсюда следует

$$p_x = 2\pi\hbar n_x/L_1, \quad p_y = 2\pi\hbar n_y/L_2, \quad p_z = 2\pi\hbar n_z/L_3, \quad (1.17)$$

где n_x , n_y и n_z — целые числа.

Итак, вектор $\mathbf{p}$ оказывается дискретной переменной. Но если длины L_1 , L_2 и L_3 очень велики, то суммирование по состояниям может быть заменено интегрированием. Для этого надо знать число состояний в заданном объеме $\mathbf{p}$ -пространства. Из (1.17) находим

$$\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = L_1 L_2 L_3 \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z / (2\pi\hbar)^3,$$

так что число состояний в интервале $d^3\mathbf{p} = dp_x dp_y dp_z$ равно

$$V d^3\mathbf{p} / (2\pi\hbar)^3,$$

где $V = L_1 L_2 L_3$ — объем образца. Значит, плотность состояний в $\mathbf{p}$ -пространстве есть

$$V / (2\pi\hbar)^3. \quad (1.18)$$

Как уже указывалось, область однозначного определения $\mathbf{p}$ — это элементарная ячейка обратной решетки с объемом $(2\pi\hbar)^3/v$. Поэтому полное число различных значений $\mathbf{p}$ равно

$$[(2\pi\hbar)^3/v][V/(2\pi\hbar)^3] = N,$$

где N — число элементарных ячеек в рассматриваемом образце. Надо также принять во внимание, что у электрона есть спин $s = 1/2$, проекция которого на определенную ось может иметь два значения: $s_z = \pm 1/2$. Это удваивает число состояний. Итак, оказывается, что каждой функции $\varepsilon_l(\mathbf{p})$ соответствует $2N$ различных состояний.

Функции $\varepsilon_l(\mathbf{p})$ периодичны в обратной решетке и, естественно, колеблются между некоторыми максимальными и минимальными значениями. Следовательно, для каждого номера l мы получаем «зоны» разрешенных значений энергии. Эти зоны могут быть разделены «энергетическими щелями» (т.е. значениями энергии, недостижимыми для электронов), но могут и перекрываться.

Рассмотрим некоторые общие свойства функций $\varepsilon_l(\mathbf{p})$. Полное уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar \partial\psi/\partial t = H\psi.$$

Перейдем к комплексно-сопряженному уравнению и сделаем преобразование $t \rightarrow -t$. При этом получаем

$$i\hbar \partial\psi^*(-t, \mathbf{r})/\partial t = H^*\psi^*(-t, \mathbf{r}),$$

т. е. то же самое уравнение Шредингера с гамильтонианом H^* . Но H — самосопряженный оператор, т. е. собственные функции и собственные значения операторов H и H^* одинаковы. Отсюда следует, что если

$$\psi_{lp}(\mathbf{r}, t) = \exp[-i\varepsilon_l(\mathbf{p})t/\hbar] \psi_{lp}(\mathbf{r})$$

— собственная функция H , то таковой же является функция $\psi_{lp}^*(\mathbf{r}, -t)$. При смещении $\mathbf{r}$ на период $\mathbf{a}$ функция ψ_{lp} приобретает множитель $\exp(i\mathbf{p}\mathbf{a}/\hbar)$, а функция $\psi_{lp}^*(\mathbf{r}, -t)$ — множитель $\exp(-i\mathbf{p}\mathbf{a}/\hbar)$. Отсюда следует, что $\varepsilon_l(\mathbf{p}) = \varepsilon_l(-\mathbf{p})$ ¹⁾.

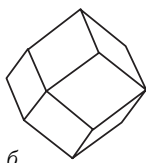
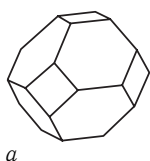


Рис. 1.1

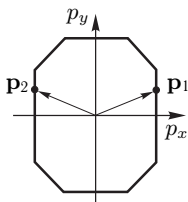


Рис. 1.2

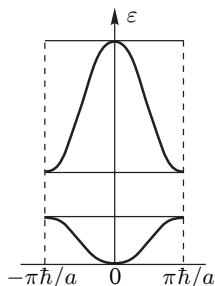


Рис. 1.3

До сих пор мы брали в качестве области однозначного определения квазиимпульса $\mathbf{p}$ элементарную ячейку обратной решетки. Но более удобно определить эту область иначе. Конечно, она должна иметь объем, равный объему элементарной ячейки обратной решетки, и, кроме того, не должна включать точек, отличающихся на период обратной решетки. Определим ее следующим образом. Проведем из какого-либо узла обратной решетки все $\mathbf{K}$ -векторы, соединяющие его с другими узлами. Затем проведем плоскости, перпендикулярные каждому из этих векторов и делящие их пополам. Эти плоскости вырежут определенный объем в пространстве обратной решетки, имеющий форму какого-то многогранника. Нетрудно видеть, что такой многогранник обладает всеми требуемыми свойствами и поэтому может быть взят в качестве области задания квазиимпульса $\mathbf{p}$. Она называется зоной Бриллюэна. На рис. 1.1 приведены примеры зон Бриллюэна для гранецентрированной (а) и объемноцентрированной (б) кубических решеток.

Как правило, кристаллические решетки металлов обладают большой симметрией. Это приводит к определенным свойствам функции $\varepsilon_l(\mathbf{p})$. Пусть, например, через точку $\mathbf{p} = 0$ проходит плоскость симметрии, перпендикулярная оси p_x . Если существуют грани зоны Бриллюэна, перпендикулярные оси p_x , то на них $\varepsilon_l(\mathbf{p})$ должны иметь экстремум как функции p_x . Действительно, выделим симметричные

¹⁾ Речь идет о металлах без магнитного порядка.

относительно плоскости симметрии точки на этих гранях $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ (рис. 1.2). Они отличаются на период обратной решетки (умноженный на $\hbar$). Поэтому в этих точках

$$\varepsilon_l(\mathbf{p}_1) = \varepsilon_l(\mathbf{p}_2), \quad \partial \varepsilon_l(\mathbf{p}_1)/\partial p_x = \partial \varepsilon_l(\mathbf{p}_2)/\partial p_x.$$

Но в силу симметрии относительно плоскости $p_x = 0$

$$\partial \varepsilon_l(\mathbf{p}_1)/\partial p_x = -\partial \varepsilon_l(\mathbf{p}_1)/\partial p_x;$$

следовательно,

$$\partial \varepsilon_l(\mathbf{p}_1)/\partial p_x = 0.$$

Аналогичным образом получаем в этом случае

$$(\partial \varepsilon_l/\partial p_x)_{p_x=0} = 0.$$

Итак, мы приходим к выводу, что для симметричных решеток экстремумы функций $\varepsilon_l(\mathbf{p})$ имеются, как правило, в центре зоны Бриллюэна или на ее границах.

Полученные заключения об энергии электронов как функции квазиимпульса проиллюстрированы на рис. 1.3, который относится к одномерному случаю. Очевидно, при этом зоной Бриллюэна будет отрезок $-\pi\hbar/a < p < \pi\hbar/a$, где a — период линейной цепочки.

§ 1.2. Приближение сильной связи

Для точного расчета функций $\varepsilon_l(\mathbf{p})$ используются довольно сложные методы (см. гл. 14). Ниже для иллюстрации общих свойств функций $\varepsilon_l(\mathbf{p})$ рассматриваются два наиболее простых метода, хотя они и не очень хороши для точного определения функций $\varepsilon_l(\mathbf{p})$ в реальных металлах.

Начнем с так называемого метода сильной связи и для простоты рассмотрим сначала одномерный металл, т. е. линейную цепочку атомов. Будем считать, что электронные оболочки мало перекрываются, и в качестве нулевого приближения примем, что каждый электрон принадлежит своему атому. Перекрывание оболочек будет рассматриваться как возмущение.

Потенциальная энергия электрона в поле всех ионов имеет вид

$$V(x) = \sum_n U(x - na), \quad (1.19)$$

и уравнение Шредингера есть

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \sum_n U(x - na) \psi(x) = \varepsilon \psi(x). \quad (1.20)$$

Пусть точными решениями уравнения (1.20) являются блоховские функции

$$\psi_p(x) = e^{ipx/\hbar} u_p(x)$$

и соответствующие собственные значения равны $\varepsilon(p)$. Образум из функций ψ_p так называемые функции Ванье:

$$w_n(x) = N^{-1/2} \sum_p e^{-ipna/\hbar} \psi_p(x), \quad (1.21)$$

где N — число атомов в цепочке и сумма по p ограничена одномерной зоной Бриллюэна: $-\pi\hbar/a \leq p \leq \pi\hbar/a$. Обратное преобразование имеет вид

$$\psi_p(x) = N^{-1/2} \sum_n e^{ipna/\hbar} w_n(x). \quad (1.22)$$

Действительно, подставляя сюда формулу (1.21), получаем

$$\psi_p(x) = N^{-1} \sum_{n, p'} e^{i(p-p')na/\hbar} \psi_{p'}(x) = \psi_p(x)$$

(так как p и p' находятся в зоне Бриллюэна). Функции $w_n(x)$ с разными n ортогональны. В самом деле

$$\begin{aligned} \int w_n^*(x) w_m(x) dx &= N^{-1} \sum_{p, p'} e^{i(pn-p'm)a/\hbar} \int \psi_p^*(x) \psi_{p'}(x) dx = \\ &= N^{-1} \sum_p e^{ip(n-m)a/\hbar} = N^{-1} \frac{L}{2\pi\hbar} \int_{-\pi\hbar/a}^{\pi\hbar/a} e^{ip(n-m)a/\hbar} dp = \\ &= \begin{cases} \sin[\pi(n-m)]/[\pi(n-m)] = 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} = \delta_{nm}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где $L = Na$ — длина цепочки.

Из определения (1.21) видно, что функция $w_n(x)$ отлична от нуля лишь вблизи n -го иона. Действительно, если бы блоховская функция была просто плоской волной без модуляции функцией $u_p(x)$, то w_n равнялось бы $\delta(x-na)$. Это свойство позволяет использовать малость перекрытия оболочек. Из определения (1.21) следует также, что, ввиду периодичности $u_p(x)$, все функции w_n есть, по сути дела, одна и та же функция $w_0(x) \equiv w(x)$ со сдвинутыми аргументами: $w_n(x) = w(x-na)$.

Поскольку ψ_p удовлетворяет уравнению Шредингера, то, подставляя в (1.20) выражение (1.22), имеем

$$\begin{aligned} \sum_n \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x-na) \right) e^{ipna/\hbar} w_n(x) + \\ + \sum_n h(x) e^{ipna/\hbar} w_n(x) = \varepsilon(p) \sum_n e^{ipna/\hbar} w_n(x), \end{aligned} \quad (1.24)$$

где $h(x) = V(x) - U(x - na)$. Член с $h(x)$, содержащий лишь произведения $U(x - ma) w_n(x)$ с $n \neq m$, мал, так как функция $w_n(x)$ отлична от нуля лишь вблизи $x = na$.

В нулевом приближении, пренебрегая этим членом, мы видим, что уравнению (1.24) удовлетворяет функция $w(x)$, равная волновой функции электрона в изолированном атоме, т. е.

$$w^{(0)} = \varphi(x). \quad (1.25)$$

При этом, очевидно,

$$\varepsilon^{(0)}(p) = \varepsilon_0,$$

где ε_0 — соответствующий уровень энергии изолированного атома.

Теперь рассмотрим следующее приближение. Полагая $w = w^{(0)} + w^{(1)}$, находим

$$\begin{aligned} \sum_n \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x - na) - \varepsilon(p) \right) w^{(1)} e^{ipna/\hbar} = \\ = (\varepsilon(p) - \varepsilon_0) \sum_n e^{ipna/\hbar} w_n^{(0)}(x) - \sum_n h(x) e^{ipna/\hbar} w_n^{(0)}(x). \end{aligned}$$

Это линейное неоднородное уравнение относительно $w^{(1)}$. Согласно общему правилу такое уравнение имеет решение лишь в том случае, если правая часть ортогональна решению соответствующего однородного уравнения с теми же граничными условиями. Эти условия заключаются в обращении w в нуль на $\pm\infty$. Отсюда следует, что соответствующим решением однородного уравнения является как раз $w(x)$ в нулевом приближении, т. е. $\varphi(x)$. Из условия ортогональности получим

$$\varepsilon(p) - \varepsilon_0 = \frac{\sum_n h(n) e^{ipna/\hbar}}{\sum_n I(n) e^{ipna/\hbar}}, \quad (1.26)$$

где

$$h(n) = \int \varphi^*(x) h(x) \varphi(x - na) dx, \quad (1.27)$$

$$I(n) = \int \varphi^*(x) \varphi(x - na) dx. \quad (1.28)$$

Атомную функцию φ можно выбрать действительной. При этом очевидно: $h(n) = h(-n)$ и $I(n) = I(-n)$.

Обе функции $h(n)$ и $I(n)$ убывают очень быстро с возрастанием n , так как перекрытие предполагается малым. Поэтому будем учитывать только первые члены. Величина $h(0)$ имеет порядок $U(a)$, $h(1)$ имеет порядок $U(a)\varphi(a)/\varphi(0)$, $I(0) = 1$, а $I(1)$ порядка $\varphi(a)/\varphi(0)$. Итак, получаем

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = h(0) + 2(h(1) - h(0)I(1)) \cos(pa/\hbar), \quad (1.29)$$

откуда следует, что ε — периодическая функция $\mathbf{p}$ с периодом $2\pi\hbar/a$, т. е. с периодом обратной цепочки.

Вычисления в трех измерениях более сложны. Дополнительные трудности возникают, если на одну элементарную ячейку приходится более одного атома, так что эти атомы симметричны относительно каких-то преобразований симметрии, отличных от переноса на период. Кроме того, атомное состояние может соответствовать отличному от нуля моменту и соответствующий уровень ε_0 будет вырожденным. В простейшем случае, когда на ячейку приходится один атом, содержащий только один s -электрон, находим

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{\sum_{\mathbf{n}} h(\mathbf{n}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{a}\mathbf{n}/\hbar}}{\sum_{\mathbf{n}} I(\mathbf{n}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{a}\mathbf{n}/\hbar}}. \quad (1.30)$$

Рассмотрим объемноцентрированную кубическую решетку. Если учесть только ближайших соседей, то

$$\mathbf{a}_{\mathbf{n}} = (\pm a/2, \pm a/2, \pm a/2),$$

где a — сторона куба. При этом

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = h(0) + 8(h(1) - h(0)I(1)) \cos\left(\frac{p_x a}{2\hbar}\right) \cos\left(\frac{p_y a}{2\hbar}\right) \cos\left(\frac{p_z a}{2\hbar}\right). \quad (1.31)$$

Коэффициент $8(h(1) - h(0)I(1))$ определяет ширину зоны.

Физический смысл полученных результатов заключается в том, что дискретные уровни изолированных атомов расширяются в узкие зоны, ширина которых зависит от степени перекрытия или, более точно, от матричного элемента, соответствующего переходу электрона к соседнему атому. Формулы, полученные этим методом, применимы, когда перекрытие атомных оболочек мало, т. е. для внутренних оболочек. Поэтому некоторые зоны переходных и редкоземельных металлов могут быть найдены таким способом.

Другое применение этих формул заключается в том, что соответствующие функции $\varepsilon_l(\mathbf{p})$ имеют правильные свойства симметрии и могут служить базой для эмпирических формул, представляющих экспериментальные данные по электронным спектрам даже в общем случае.

§ 1.3. Модель слабосвязанных электронов

Рассмотрим теперь противоположный случай, когда электроны в металле почти свободны и их взаимодействие с кристаллом мало, так что применима теория возмущений. Как и раньше, обсудим сначала одномерную модель.

Нормированная волновая функция свободного электрона имеет вид

$$L^{-1/2} e^{ipx/\hbar}, \quad (1.32)$$

где L — длина цепочки (удобно брать конечную цепочку и ставить периодическое граничное условие). Энергия такого электрона равна

$$\varepsilon^{(0)}(p) = p^2/2m. \quad (1.33)$$

На электрон действует потенциал $U(x)$. Ввиду того что потенциал периодичен, он может быть разложен в ряд Фурье:

$$U(x) = \sum_n U_n e^{2\pi i n x/a}. \quad (1.34)$$

Здесь $2\pi n/a$ — периоды обратной решетки для одномерного случая. Матричные элементы $U(x)$ относительно функций (1.32) равны

$$U(p, p') = L^{-1} \int U(x) e^{-i(p-p')x/\hbar} dx.$$

Они, очевидно, отличны от нуля, если

$$p - p' = 2\pi n\hbar/a, \quad (1.35)$$

при этом

$$U(p, p') = U_n. \quad (1.36)$$

Поправка первого порядка к энергии $\varepsilon^{(0)}(p)$ есть $\varepsilon^{(1)}(p) = U(p, p) = U_0$. Это константа, которая меняет лишь начало отсчета энергий. Поэтому мы рассмотрим поправку второго порядка:

$$\varepsilon^{(2)}(p) = \sum_{n \neq 0} \frac{|U_n|^2}{\varepsilon^{(0)}(p) - \varepsilon^{(0)}(p - 2\pi n\hbar/a)}. \quad (1.37)$$

Условием применимости теории возмущений является малость этой поправки по сравнению с U_0 . Но, очевидно, это требование не выполняется, когда знаменатель становится малым. Последнее действительно может иметь место. Если p приближается к $\pi\hbar/a$ с каким-то n , то в соответствующем члене суммы значение $p' = p - 2\pi n\hbar/a$ приближается к $-\pi n\hbar/a$ и, следовательно, $\varepsilon^{(0)}(p) \rightarrow \varepsilon^{(0)}(p')$. Итак, для таких значений p обычная теория возмущений неприменима. Это объясняется тем, что два состояния (p и p') имеют одинаковую энергию. Следовательно, этот уровень является вырожденным и надо применять теорию возмущений для вырожденных состояний.

Предположим искомую волновую функцию в виде

$$\psi = A_1\psi_1 + A_2\psi_2,$$

где ψ_1 соответствует первому, а ψ_2 — второму состоянию. Подставляя это выражение в уравнение Шредингера $H\psi = \varepsilon\psi$, находим

$$A_1(\varepsilon_1 - \varepsilon)\psi_1 + U(A_1\psi_1 + A_2\psi_2) + A_2(\varepsilon_2 - \varepsilon)\psi_2 = 0,$$

где $\varepsilon_1 = p^2/(2m)$, а $\varepsilon_2 = p'^2/(2m)$. Умножая на ψ_1^* , а потом на ψ_2^* , интегрируя и используя ортогональность ψ_1 и ψ_2 , получаем

$$A_1(\varepsilon_1 - \varepsilon + U_0) + U_n A_2 = 0, \quad U_n^* A_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon + U_0) A_2 = 0.$$

Собственные значения находятся из условия равенства нулю детерминанта этой однородной линейной системы (константу U_0 мы включаем в ε):

$$\varepsilon^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varepsilon + \varepsilon_1\varepsilon_2 - |U_n|^2 = 0.$$

Уравнение имеет два решения:

$$\varepsilon = (1/2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \pm \left[(1/4)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + |U_n|^2 \right]^{1/2}. \quad (1.38)$$

Выбор нужного решения определяется тем, что далеко от «опасного» значения импульса ε должно быть равно $\varepsilon^{(0)}$. Нетрудно видеть, что вблизи $p = \pi\hbar/a$ надо брать знак минус при $p < \pi\hbar/a$ и знак плюс со стороны $p > \pi\hbar/a$. Это значит, что при $p = \pi\hbar/a$ функция $\varepsilon(p)$ испытывает скачок, равный $2|U_n|$ (рис. 1.4).

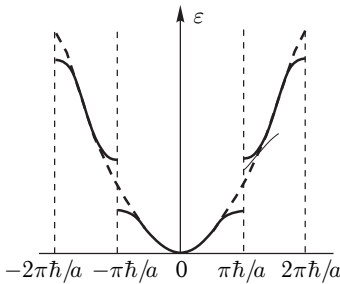


Рис. 1.4

а не от импульса. Итак, опять возникает картина энергетических зон, разделенных щелями.

В трехмерном случае периодичность потенциала $U(\mathbf{r})$ дает возможность представить его в виде трехмерного ряда Фурье:

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{K}} U_{\mathbf{K}} e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}}, \quad (1.39)$$

где $\mathbf{K}$ — периоды обратной решетки. Теория возмущений становится неприменимой для тех значений $\mathbf{p}$, для которых

$$\varepsilon^{(0)}(\mathbf{p}) = \varepsilon^{(0)}(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{K}). \quad (1.40)$$

Полагая $\varepsilon^{(0)} = p^2/2m$, получаем

$$\hbar\mathbf{K}\mathbf{p}/m = \hbar^2 K^2/2m,$$

или

$$p \cos \theta = \hbar K/2, \quad (1.41)$$

где θ — угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{K}$. Но это — уравнение плоскости в пространстве импульса, которая перпендикулярна вектору $\mathbf{K}$ и пересекает его на расстоянии $\hbar K/2$ от начала координат. Как и в одномерном случае, энергия испытывает скачок на этой плоскости. Если $\mathbf{K}$ — наименьший период в соответствующем направлении, то эта плоскость есть просто граница зоны Бриллюэна. То, что именно здесь происходит скачок энергии, есть одна из причин, по которым зона Бриллюэна является наиболее удобной областью определения квазиимпульса.

Если уравнение (1.40) выполняется лишь для одного периода $\mathbf{K}$, а не для двух или трех одновременно, т. е. нам не нужно рассматривать пересечение двух или трех плоскостей, даваемых соотношением (1.41), то энергия определяется аналогично одномерному случаю (1.38):

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = (1/2) \left[\varepsilon^{(0)}(\mathbf{p}) + \varepsilon^{(0)}(\mathbf{p} - \hbar \mathbf{K}) \right] \pm \left[(1/4) \left(\varepsilon^{(0)}(\mathbf{p}) - \varepsilon^{(0)}(\mathbf{p} - \hbar \mathbf{K}) \right)^2 + |U_{\mathbf{K}}|^2 \right]^{1/2}. \quad (1.42)$$

Выберем ось p_z вдоль $\hbar \mathbf{K}$ и введем новую переменную $p_{z1} = p_z - \hbar K/2$. Подставляя в (1.42) $\varepsilon^{(0)} = p^2/2m$ и пользуясь новыми переменными, находим

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \left[p_{\perp}^2 + p_{z1}^2 + (\hbar K/2)^2 \right] / (2m) \pm \left[(p_{z1} \hbar K/2m)^2 + |U_{\mathbf{K}}|^2 \right]^{1/2}. \quad (1.43)$$

Рассмотрим поверхности постоянной энергии в $\mathbf{p}$ -пространстве и выясним, как они пересекаются с плоскостью $p_{z1} = 0$. В точке $p_{z1} = 0$, $p_{\perp} = 0$ энергия равна

$$\varepsilon(0) = (\hbar K/2)^2/2m \pm |U_{\mathbf{K}}|.$$

Это те значения энергии, при которых поверхность $\varepsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ проходит через точку $p_{z1} = p_{\perp} = 0$. Отсюда мы можем заключить, что при значении

$$\varepsilon < (\hbar K/2)^2/2m - |U_{\mathbf{K}}|$$

поверхность $\varepsilon = \text{const}$ не пересекает границу и выглядит, как на рис. 1.5 а. В случае когда энергия лежит в интервале

$$(\hbar K/2)^2/2m - |U_{\mathbf{K}}| < \varepsilon < (\hbar K/2)^2/2m + |U_{\mathbf{K}}|,$$

поверхность $\varepsilon = \text{const}$ вблизи плоскости $p_{z1} = 0$ выглядит, как представлено на рис. 1.5 б. Наконец, при

$$\varepsilon > (\hbar K/2)^2/2m + |U_{\mathbf{K}}|$$

мы имеем ситуацию, изображенную на рис. 1.5 в.

Образование зон в случае слабой связи имеет следующий физический смысл. Подставим в (1.41) значения $p = 2\pi\hbar/\lambda$, где λ — длина волны де Бройля, $K = nK_{\min} = 2\pi n/d$, где $K_{\min}$ — наименьший период обратной решетки в соответствующем направлении, а $d = 2\pi/K_{\min}$ — расстояние между последовательными кристаллическими плоскостями.

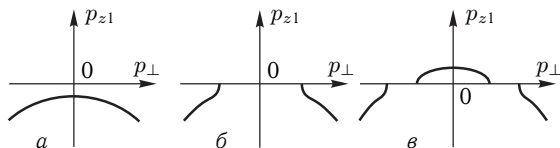


Рис. 1.5

При этом получим

$$2d \cos \theta = n\lambda.$$

Эта формула, называемая формулой Брэгга, в данном случае соответствует когерентному отражению плоской волны, описывающей движение электрона, от кристаллических плоскостей. Как только это условие выполняется, «свободный» электрон, движущийся в решетке, интенсивно отражается кристаллическими плоскостями и его волновая функция подвергается значительному изменению. Энергетический спектр в этом случае соответствует условию, что компонента скорости электрона $\mathbf{v} = \partial\epsilon/\partial\mathbf{p}$ (§ 3.1), перпендикулярная кристаллической плоскости, обращается в нуль.

Глава 2

ЭЛЕКТРОННАЯ ФЕРМИ-ЖИДКОСТЬ

§ 2.1. Концепция квазичастиц

До сих пор мы рассматривали поведение одного электрона в усредненном поле решетки и других электронов. Теперь мы рассмотрим реальную систему взаимодействующих электронов, или электронную жидкость. Поведение такой системы может быть понято на основе общей концепции *Ландау* (1941) [2] об энергетических спектрах конденсированных квантовых систем и его же теории ферми-жидкости.

Общий подход *Ландау* легче всего проиллюстрировать на примере колеблющейся кристаллической решетки. Если колебания малы, то потенциальная энергия взаимодействия атомов решетки может быть разложена по степеням смещений атомов $\mathbf{u}$. Член первого порядка по смещению отсутствует, так как равновесному положению отвечает минимум потенциальной энергии. Итак, ограничиваясь членами второго порядка, получаем

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{n}, \mathbf{n}' \\ j, j' \\ \alpha, \alpha'}} A_{\mathbf{n}j, \mathbf{n}'j'}^{\alpha, \alpha'} u_{\mathbf{n}j}^{\alpha} u_{\mathbf{n}'j'}^{\alpha'}. \quad (2.1)$$

Периоды решетки есть $\mathbf{a}_{\mathbf{n}}$. Индекс j означает номер атома в элементарной ячейке $\mathbf{n}$. Индекс α соответствует проекции вектора смещения $\mathbf{u}$, $A_{\mathbf{n}j, \mathbf{n}'j'}^{\alpha, \alpha'}$ — коэффициенты разложения. Выражение (2.1) представляет собой не что иное, как энергию системы связанных осцилляторов. Как известно, путем линейного преобразования координат осцилляторов, а в данном случае векторов $\mathbf{u}_{\mathbf{n}j}$, квадратичную форму (2.1) можно диагонализировать, после чего мы получим систему невзаимодействующих

линейных осцилляторов. Энергия в этом случае будет представлять собой сумму энергий отдельных осцилляторов.

Поскольку изучение колебаний решетки не входит в нашу программу ¹⁾, приведем лишь результаты такого подхода. Решение уравнений движения дает следующее выражение для смещений:

$$\mathbf{u}_{nj} = \sum_{\mathbf{k}, s} c(\mathbf{k}, s) e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}_n - i\omega(\mathbf{k}, s)t} \mathbf{e}_j(\mathbf{k}, s). \quad (2.2)$$

Каждый набор $\mathbf{k}, s$ соответствует независимому осциллятору. В то же время формула (2.2) представляет собой суперпозицию плоских волн, распространяющихся по кристаллу. Волновой вектор $\mathbf{k}$ имеет те же свойства, что и $\mathbf{p}/\hbar$ (где $\mathbf{p}$ — квазиимпульс). Индекс s обозначает тип волны, а единичный вектор поляризации $\mathbf{e}_j$ определяет, как колеблются разные атомы в одной ячейке. Если элементарная ячейка содержит z атомов, то индекс s принимает $3z$ разных значений. Частота колебаний ω зависит от $\mathbf{k}$ и s .

Формула (2.2) напоминает волновую функцию свободных частиц

$$e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar - i\epsilon t/\hbar}.$$

Роль импульса $\mathbf{p}$ играет $\hbar\mathbf{k}$, а роль энергии — $\hbar\omega$. Воспользовавшись этим, можем ввести новый физический образ. Обычно мы имеем реальные частицы, свободное движение которых описывается плоской волной. В данном случае будем рассматривать выражение (2.2) как волновую функцию некоторых фиктивных частиц, которые будем называть «квазичастицами». Поскольку этот образ является весьма универсальным, то те квазичастицы, которые соответствуют колебаниям решетки, носят специальное название — «фононы». Происхождение этого термина связано с тем, что рассмотренные квазичастицы находятся в таком же отношении к упругим волнам, распространяющимся в решетке (т. е. к звуку), как световые кванты — фотоны — к электромагнитным волнам. Итак, кратко можно сказать, что обычно в квантовой механике волны описывают движение частиц, а здесь частицы вводятся для описания волн.

Смысл описания с помощью квазичастиц становится более ясным, если рассмотреть энергию колеблющегося кристалла. Энергетические уровни выражаются формулой для системы невзаимодействующих осцилляторов:

$$E - U_0 = \sum_{\mathbf{k}, s} \hbar\omega(\mathbf{k}, s) (n(\mathbf{k}, s) + 1/2). \quad (2.3)$$

¹⁾ Более подробные сведения о колебаниях решетки можно найти в книгах *Пайерлса* и *Косевича* [1, 298].

Числа n либо равны нулю, либо положительные и целые. Запишем выражение (2.3) в виде суммы двух членов:

$$E - U_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, s} \hbar \omega(\mathbf{k}, s) + \sum_{\mathbf{k}, s} \hbar \omega(\mathbf{k}, s) n(\mathbf{k}, s). \quad (2.4)$$

Первый член соответствует наименьшему значению энергии и описывает основное состояние системы. Это энергия так называемых нулевых колебаний. То обстоятельство, что атомы кристаллической решетки даже в основном состоянии должны колебаться, связано с квантовым принципом неопределенности. Согласно этому принципу частица не может покоиться в положении равновесия, так как при этом она имела бы одновременно определенные координату и импульс.

В возбужденном состоянии числа $n(\mathbf{k}, s)$ отличны от нуля. Формула (2.4) соответствует в этом случае системе независимых частиц с энергиями $\hbar \omega(\mathbf{k}, s)$. Поскольку числа $n(\mathbf{k}, s)$ могут принимать любые целые положительные значения, то в одном и том же состоянии может находиться любое число фононов. Значит, они подчиняются статистике Бозе.

Концепция фононов годится до тех пор, пока амплитуда колебаний мала по сравнению с периодом решетки. В противном случае надо учитывать следующие члены разложения потенциальной энергии U по степеням смещений, и полная энергия уже не будет выражаться формулой (2.3). Однако это имеет место лишь вблизи точки плавления.

Согласно идее Ландау любая однородная система, состоящая из большого числа частиц, имеет низколежащие возбужденные состояния такого же типа, как колеблющаяся решетка. Именно, свойства любой системы могут быть описаны с помощью модели квазичастиц. Квазичастицы могут иметь целый $n\hbar$ или полуцелый $(n + 1/2)\hbar$ спин, т. е. могут быть либо бозе-частицами, либо ферми-частицами. Статистика квазичастиц не связана однозначно со статистикой частиц, составляющих систему. Например, как мы видели, фононы всегда подчиняются статистике Бозе, независимо от спина атомов, составляющих решетку. Энергия квазичастиц является функцией их импульса. Эта зависимость $\varepsilon(p)$ является главной характеристикой низколежащих возбужденных состояний.

§ 2.2. Квазичастицы в изотропной ферми-жидкости

Электроны обладают спином $\hbar/2$. Ввиду этого электронная жидкость является так называемой ферми-жидкостью. Каковы же свойства квазичастиц у такой жидкости? Согласно гипотезе Ландау (1956) [3] энергетический спектр такой жидкости очень похож на спектр идеального ферми-газа. Справедливость этой гипотезы была впоследствии строго доказана. Мы не приводим этого доказательства, ибо по своей сложности оно далеко превышает уровень этой книги.

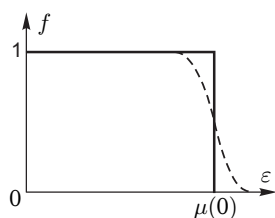


Рис. 2.1

Итак, начнем с идеального газа. Равновесная функция распределения есть известная функция Ферми ¹⁾

$$f = \left[e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1 \right]^{-1}.$$

Здесь $\varepsilon = p^2/2m$, μ — химический потенциал, зависящий от температуры. При $T = 0$ функция Ферми $f = 1$, если $\varepsilon < \mu(0)$, и $f = 0$, если $\varepsilon > \mu(0)$ (рис. 2.1, сплошная линия). Величина $\mu(0)$ называется уровнем Ферми. Вводя импульс Ферми p_0 , согласно формуле $\mu(0) = p_0^2/2m$, находим, что при температуре $T = 0$ все состояния, которым соответствует в импульсном пространстве внутренность сферы с радиусом $p = p_0$ (ферми-сфера), заполнены, а все внешние состояния свободны. Это следствие принципа Паули — в каждом состоянии может находиться лишь одна частица, и в данном случае при $T = 0$ заполнены нижние состояния. Заполненный объем в фазовом пространстве импульсов, координат и спинов, деленный на $(2\pi\hbar)^3$, должен быть равен числу частиц. Объем в импульсном пространстве — это объем ферми-сферы. Возможность двух значений проекции спина дает множитель 2. Ввиду этого получаем

$$N = 2(4\pi/3)p_0^3 V(2\pi\hbar)^{-3}, \text{ или } p_0 = \hbar(3\pi^2 N/V)^{1/3}. \quad (2.5)$$

Перейдем к температурам $T \neq 0$. Функция распределения в этом случае дается штриховой кривой на рис. 2.1. Ширина «размазанной» области порядка T . Это связано с тем, что некоторые из частиц, получив добавочную энергию порядка T , выходят за пределы сферы Ферми. Равновесное состояние при $T \neq 0$ и вообще любое возбужденное состояние может быть получено из состояния при $T = 0$ путем последовательного перемещения частиц изнутри ферми-сферы наружу. При каждом таком акте создается частица снаружи ферми-сферы и свободное место или «античастица» внутри. Эти частицы и античастицы представляют в данном случае квазичастицы возбужденного состояния ²⁾. Их энергию надо отсчитывать от уровня Ферми $\mu(0)$.

¹⁾ Здесь и ниже температура определяется в энергетических единицах. Для того чтобы перейти к градусам, надо разделить ее на константу Больцмана $k_B = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К.

²⁾ «Античастицы» представляют собой полную аналогию античастицам в теории элементарных частиц (например, позитрон). Часто употребляемое название «дырки» для этих квазичастиц является, с нашей точки зрения, неудачным, так как обычно этот термин служит для обозначения другого объекта — свободных мест в незаполненной зоне (§ 2.3).

Квазичастицы типа частиц имеют импульсы, большие p_0 , и их энергия равна

$$\xi_{\text{ч}}(p) = p^2/2m - p_0^2/2m.$$

Если $p - p_0 \ll p_0$, то

$$\xi_{\text{ч}} \approx v(p - p_0),$$

где $v = p_0/m$ — скорость на ферми-сфере. С другой стороны, античастицы имеют импульсы, меньшие чем p_0 , и их энергия должна отсчитываться в обратном направлении:

$$\xi_{\text{а}}(p) = p_0^2/2m - p^2/2m,$$

или

$$\xi_{\text{а}}(p) \approx v(p_0 - p),$$

если $p_0 - p \ll p_0$. Такой отсчет энергии объясняется тем, что создание античастиц в глубине ферми-распределения требует большей затраты энергии, чем у ферми-поверхности.

Согласно гипотезе Ландау спектр квазичастиц в изотропной ферми-жидкости с сильным взаимодействием между частицами построен по тому же типу, что и в идеальном газе. Это означает, что существует некоторое значение p_0 , которое, по теории Ландау, связано с плотностью частиц тем же соотношением, что и в идеальном газе (формула (2.5)). Есть два типа квазичастиц: «частицы» с $p > p_0$ и «античастицы» с $p < p_0$. Их энергии для случая $|p - p_0| \leq p_0$ соответственно равны

$$\xi_{\text{ч}}(p) \approx v(p - p_0), \quad \xi_{\text{а}}(p) \approx v(p_0 - p). \quad (2.6)$$

Однако в данном случае v — просто некоторый неизвестный коэффициент, имеющий размерность скорости. Вместо v можно ввести другой коэффициент с помощью соотношения

$$v = p_0/m^*. \quad (2.7)$$

Константа m^* с размерностью массы называется эффективной массой¹⁾.

Как уже говорилось, эти предположения о спектре в настоящее время доказаны строгим, но довольно сложным образом, однако можно привести некоторое более простое обоснование. Если состояние, соответствующее наличию квазичастицы, не является истинным стационарным состоянием ферми-жидкости, то оно должно затухать со временем благодаря переходам в другие состояния. Соответствующая волновая функция будет, следовательно, иметь вид

$$e^{-i\xi(p)t/\hbar - \gamma(p)t/\hbar}. \quad (2.8)$$

¹⁾ Эффективной массой в различных книгах и статьях называют довольно разнообразные величины с размерностью массы. Мы будем пользоваться этим термином лишь для изотропного спектра.

О квазичастицах имеет смысл говорить лишь в том случае, когда коэффициент затухания $\gamma \ll |\xi|$. Поэтому надо оценить γ . Очевидно, оно пропорционально вероятности перехода рассматриваемого состояния в другие.

Определим эту вероятность сначала для слабо взаимодействующего газа. Если имелась частица 1 вне ферми-распределения, то процесс первого порядка по взаимодействию будет следующим (рис. 2.2).

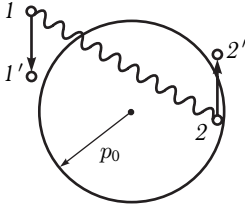


Рис. 2.2

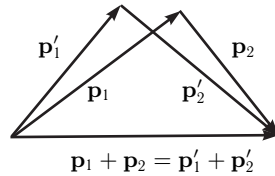


Рис. 2.3

Частица 1 взаимодействует с частицей 2 внутри ферми-сферы, и затем обе переходят в состояния 1' и 2' вне ферми-сферы. Из-за принципа Паули — это единственная возможность. Закон сохранения импульса требует:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2,$$

причем в соответствии со сказанным выше

$$p_1 > p_0, \quad p_2 < p_0, \quad p'_1 > p_0, \quad p'_2 > p_0.$$

Закон сохранения импульса представлен графически на рис. 2.3. Плоскости $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ и $(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$, вообще говоря, не совпадают, и на рис. 2.3 они просто совмещены с помощью поворота.

Вероятность рассеяния с точностью до константы есть

$$W \propto \int \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) d^3 \mathbf{p}_2 d^3 \mathbf{p}'_1.$$

Интегрирование идет лишь по $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}'_1$, так как $\mathbf{p}'_2$ определено законом сохранения импульса. Угол между векторами $\mathbf{p}'_1$ и $\mathbf{p}'_2$ фактически задан законом сохранения энергии. Интегрирование по этому углу устраняет δ -функцию. После этого остается лишь интегрирование по модулю векторов $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1$.

Предположим, что p_1 близко к p_0 . Тогда все остальные импульсы будут тоже по модулю близки к p_0 , а следовательно, на рис. 2.3 будут образовывать почти одинаковые углы с горизонтальной линией (с суммой $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$). Следовательно, из соотношения между проекциями на эту ось можем написать соотношение между абсолютными значениями: $p'_1 \approx p_1 + p_2 - p'_2$. Поскольку $p'_2 > p_0$, то имеем $p'_1 < p_1 + p_2 - p_0$.

Но в то же время $p'_1 > p_0$. Отсюда следует $p_1 + p_2 - p_0 > p_0$, или $p_2 > 2p_0 - p_1$. Верхний предел для p_2 есть p_0 . Итак, имеем

$$0 > p_2 - p_0 > p_0 - p_1, \quad 0 < p'_1 - p_0 < (p_1 - p_0) + (p_2 - p_0).$$

Интегрируя, получаем

$$\int dp_2 dp'_1 = \frac{(p_1 - p_0)^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\gamma \propto W \propto (p_1 - p_0)^2. \quad (2.9)$$

Полная формула для γ может быть получена из соображения размерности. Она должна быть пропорциональна квадрату константы взаимодействия и, согласно приведенному выше расчету, величине $(p_1 - p_0)^2$. После этого надо ввести еще множитель, составленный из p_0 , m и $\hbar$ таким образом, чтобы результат имел размерность энергии.

Перейдем к сильно взаимодействующей системе. По мере увеличения константы взаимодействия, в принципе, могут стать существенными и другие процессы с большим числом частиц, однако можно показать, что вероятности таких процессов будут содержать более высокие степени $p - p_0$. Следовательно, при $|p - p_0| \ll p_0$ рассмотренный процесс будет все-таки доминировать, т. е. по-прежнему будет иметь место $\gamma \propto (p - p_0)^2$. Что касается других множителей, то надо учесть, что в жидкости, объем которой определяется не стенками сосуда, а силами взаимодействия частиц, плотность всегда такова, что средняя кинетическая энергия частиц и потенциальная энергия их взаимодействия примерно одинаковы. Значит, есть лишь один масштаб энергий — энергия Ферми $\mu(0)$, или $p_0 v$. Отсюда следует, что величина с размерностью энергии, пропорциональная $(p - p_0)^2$, должна быть равна

$$\gamma = \alpha \xi^2 / \mu, \quad (2.10)$$

где $\alpha \sim 1$.

Как уже сказано, концепция квазичастиц справедлива при $\gamma \ll \ll |\xi|$. Такое положение действительно имеет место вблизи уровня Ферми, т. е. при $|\xi| \ll \mu$. Это оправдывает сделанное предположение о спектре в окрестности уровня Ферми, т. е. для квазичастиц с малыми энергиями ξ .

Если иметь в виду равновесную ферми-жидкость при $T \neq 0$, то в ней квазичастицы всегда имеют энергии $\xi \sim T$. Затухание γ будет порядка T^2/μ . Отсюда следует, что описание жидкости с помощью квазичастиц будет справедливо, лишь пока $T \ll \mu$.

Величину μ можно оценить с помощью газовой модели. Для электронов в металле величина $\hbar/p_0$ (длина волны де-Бройля) порядка межатомных расстояний, т. е. 10^{-8} см, а следовательно,

$p_0 \sim 10^{-19}$ г·см/с. Отсюда следует, что $p_0^2/(2m) \sim 1\text{--}10$ эВ; разделив на постоянную Больцмана, находим

$$T \ll T_0 \sim 10^4\text{--}10^5 \text{ К.} \quad (2.11)$$

Это условие показывает, что картина квазичастиц в действительности применима к твердым металлам при всех температурах, ибо T_0 , во всяком случае, заметно выше точки плавления.

Формулы (2.6) для энергетического спектра квазичастиц могут быть записаны единым образом в виде

$$\varepsilon_{\text{кв}} = |\xi|, \quad \xi = \varepsilon(\mathbf{p}) - \mu. \quad (2.6')$$

При этом надо помнить, что «античастицы» имеют заряд, противоположный заряду «частиц». Однако можно ввести и другой, более привычный образ. Представим себе идеальный ферми-газ плотностью N/V , состоящий из частиц с массой m^* . Спектр квазичастиц такого газа тот же самый, что и у ферми-жидкости. Поэтому такой идеальный газ может описывать свойства реальной взаимодействующей системы. Однако надо иметь в виду, что те свойства газовой модели, которые зависят от частиц, расположенных далеко от уровня Ферми, не соответствуют реальной ферми-жидкости. В дальнейшем мы, в зависимости от удобства, будем пользоваться обеими картинами: газовой моделью или квазичастицами со спектром (2.6').

§ 2.3. Анизотропная ферми-жидкость

Все результаты, изложенные выше, относятся к изотропной ферми-жидкости. Для того чтобы понять, что представляют собой электронные спектры металлов, «выключим» сначала взаимодействие электронов, или, точнее, рассмотрим газ из невзаимодействующих электронов, находящихся в усредненном периодическом поле. Состояния одной частицы в таком поле были рассмотрены в гл. 1. Там было продемонстрировано, что энергетические уровни образуют зоны, разделенные запрещенными участками (энергетическими щелями). Каждая зона имеет $2N$ состояний, где N — число элементарных ячеек в образце.

Если имеется много невзаимодействующих между собой частиц, то они как-то распределяются между этими состояниями. При $T = 0$ (а в металлах практически при всех температурах ниже температуры плавления) будут заняты все нижние состояния вплоть до некоторого максимального уровня (энергии Ферми), а все верхние состояния будут пустыми. При этом имеются две возможности.

1. Уровень Ферми совпадает с верхним краем одной из зон, так что некоторые зоны полностью заполнены, а другие совершенно пустые. В этом случае не слишком сильное электрическое поле не может создать электрический ток. Это следует из того факта, что в равновесном состоянии каждому электрону с импульсом $\mathbf{p}$ соответствует

другой с импульсом $-\mathbf{p}$, ибо $\varepsilon(\mathbf{p})$ — четная функция импульса. Поэтому в равновесном состоянии тока нет. Для того чтобы создать ток, надо перераспределить электроны между состояниями. Но вследствие наличия энергетической щели перераспределение электронов требует конечного изменения энергии. Малое электрическое поле не может произвести такое изменение энергии, а поэтому рассмотренное вещество будет не металлом, а диэлектриком.

2. Пусть уровень Ферми попадает в середину зоны. Такая зона называется зоной проводимости (возможно существование нескольких таких зон). Она заполнена лишь частично. Конечно, без электрического поля нет тока. Однако перераспределение электронов между состояниями, необходимое для создания тока, может быть сделано ценой бесконечно малого изменения энергии; произвольно малое электрическое поле может создать электрический ток. Эта ситуация соответствует металлу. Полупроводники принадлежат к первому случаю, но энергетическая щель между заполненными и незаполненными состояниями в них мала (это может быть связано с появлением дополнительных электронных уровней при введении примесных атомов). Поэтому при не слишком низких температурах их свойства напоминают свойства металлов. Мы ограничимся здесь истинными металлами.

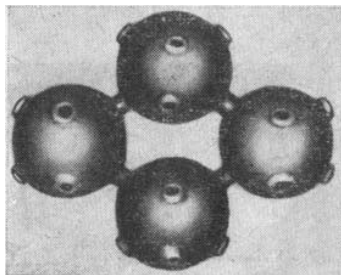


Рис. 2.4

Легко понять, что в случае, когда число электронов, приходящихся на одну элементарную ячейку, нечетно, по крайней мере одна из зон должна быть частично заполнена (напомним, что каждая зона содержит $2N$ состояний). Однако и в том случае, когда число электронов, приходящихся на одну ячейку, четно, вещество может быть металлом, так как в реальном трехмерном случае зоны могут перекрываться. При этом будет несколько частично заполненных зон.

Уровень Ферми для «газа в решетке» задается условием $\varepsilon(\mathbf{p}) = \mu$. В пространстве импульсов это уравнение описывает поверхность, которая называется поверхностью Ферми. Симметрия этой поверхности определяется симметрией кристалла. Здесь тоже можно определить квазичастицы типа «частиц» с импульсами вне поверхности Ферми и квазичастицы типа «античастиц» с импульсами внутри этой поверхности.

Ферми-поверхность в общем случае может иметь весьма сложный вид. Два примера приведены на рис. 2.4 и 2.5.

На рис. 2.4 изображена поверхность Ферми золота, где имеется лишь одна зона проводимости (зоне Бриллюэна соответствует один «шар»). Рис. 2.5 изображает поверхность Ферми свинца, в котором

имеются две зоны проводимости. Поверхность на рис. 2.5а окружает область энергий $\varepsilon < \mu$, а внутренность трубок на рис. 2.5б соответствует энергиям $\varepsilon > \mu$. Поверхности, изображенные на рис. 2.4 и 2.5, получены из опыта.

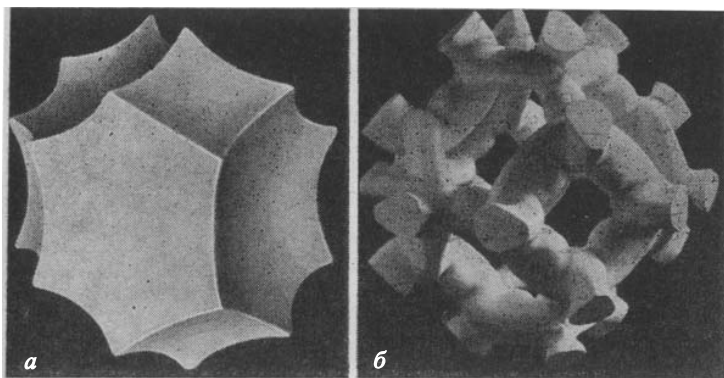


Рис. 2.5

Но есть два случая, когда поверхность Ферми оказывается очень простой. Один случай — это почти совсем пустая зона. Электронов очень мало и при температуре $T = 0$ они займут самые низкие состояния. Значит, они будут находиться вблизи минимума функции $\varepsilon(\mathbf{p})$. Если этот минимум соответствует точке $\mathbf{p}_m$, то энергия может быть разложена по степеням $\mathbf{p} - \mathbf{p}_m$. При этом линейные члены, естественно, будут отсутствовать. Если кристалл кубический и $\mathbf{p}_m = 0$, то получим

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon_0 + p^2/2m^*. \quad (2.12)$$

В более общем случае, когда симметрия произвольна, но по-прежнему $\mathbf{p}_m = 0$, получаем вместо p^2 положительную квадратичную форму. После приведения к главным осям она выглядит следующим образом:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon_0 + (1/2)(p_x^2/m_1 + p_y^2/m_2 + p_z^2/m_3). \quad (2.13)$$

Если $\mathbf{p}_m \neq 0$, то в этом выражении надо заменить все p_i на $p_i - p_{mi}$. Однако в этом случае есть несколько эквивалентных минимумов энергии, и соответствующие векторы $\mathbf{p}_m$ образуют «звезду», имеющую симметрию кристалла.

Очень похоже обстоит дело в случае почти заполненной зоны. Поскольку заполненная зона не участвует в электрическом токе, то можно считать, что ток осуществляется «дырками», т.е. пустыми местами, остающимися в зоне. Очевидно, они будут сконцентрированы вблизи максимумов энергии.

Если металл имеет кубическую симметрию и максимум энергии соответствует $p_m = 0$, то энергия электронов вблизи максимума имеет вид

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon_0 - p^2/2m^*. \quad (2.14)$$

Пользоваться такой формулой неудобно ввиду того, что эффективная масса электронов оказывается отрицательной. При переходе к дыркам меняется знак энергии и знак заряда. Следовательно, дырки имеют энергию $-\varepsilon(\mathbf{p})$ и заряд $-e$. Их масса, очевидно, положительна. Обобщение на некубический случай или $\mathbf{p}_m \neq 0$ тривиально. Ферми-поверхность во всех рассмотренных случаях является эллипсоидом или состоит из нескольких эллипсоидов (если $\mathbf{p}_m \neq 0$).

Заметим, что металлы с малым числом электронов или дырок в зоне проводимости на самом деле встречаются редко. Как уже отмечено, если число электронов на одну ячейку нечетно, то некоторые зоны могут быть заполнены, но будет по крайней мере одна, заполненная частично. Если она действительно одна, то она должна содержать N электронов. Так как вся зона Бриллюэна соответствует $2N$ состояниям, то, следовательно, объем внутри ферми-поверхности ¹⁾ должен быть равен половине объема зоны Бриллюэна. Для того чтобы получить малое число электронов и дырок, нужно, чтобы на одну элементарную ячейку приходилось четное число электронов и две верхние зоны слегка перекрывались. В этом случае часть электронов перейдет из верхней заполненной зоны (так называемой валентной зоны) в нижнюю незаполненную (зону проводимости) и будет иметься малое число электронов в одной зоне и такое же число дырок в другой. Таково положение в «полуметаллах»: Bi, Sb, As, графите.

Кроме того, может случиться, что металл содержит несколько частично заполненных зон и в одной из них число электронов мало или, наоборот, мало число дырок.

До сего времени мы рассматривали модель газа из невзаимодействующих частиц, помещенных в периодическое поле. Эта модель в действительности описывает свойства квазичастиц в реальном металле таким же образом, как модель изотропного идеального газа описывает свойства квазичастиц в изотропной ферми-жидкости. Однако надо помнить, что только те свойства газовой модели соответствуют действительности, которые зависят лишь от частиц вблизи поверхности Ферми.

В связи с этим могут возникнуть сомнения в том, что наши рассуждения о заполнении зон имеют отношение к действительности (ведь они связаны и с «глубокими» частицами). На самом деле существует теорема *Латтинжера* [5], являющаяся обобщением формулы Ландау

¹⁾ Если ферми-поверхность подходит к границам зоны Бриллюэна, то заполненный объем ограничен ферми-поверхностью и границами зоны Бриллюэна.

(2.5) для граничного импульса Ферми p_0 . Согласно этой теореме плотность электронов равна

$$N_e/V = 2qN/V + 2V_F/(2\pi\hbar)^3, \quad (2.15)$$

где q — целое число, а V_F — объем внутри ферми-поверхности. Эта формула полностью соответствует нашему рассуждению о заполнении зон. Первый член соответствует заполненным зонам, а второй — зоне проводимости.

§ 2.4. Электронная теплоемкость

Теперь мы выведем выражение для электронной теплоемкости металлов. Электронная жидкость описывается с помощью модели газа частиц, обладающих свойствами отдельных электронов в периодическом поле. Для простоты будем называть эти частицы «электронами», но, конечно, следует помнить об отличии «электронов» от истинных, образующих ферми-жидкость. Энергия такого ферми-газа дается формулой

$$E = 2V \int \varepsilon(\mathbf{p}) f \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (2.16)$$

где $2V/(2\pi\hbar)^3$ — плотность состояний в пространстве квазиимпульса (двойка от двух направлений спина), а f — функция распределения Ферми:

$$f = \left[e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1 \right]^{-1}. \quad (2.17)$$

Интегрирование по квазиимпульсу ограничено зоной Бриллюэна. Если есть несколько частично заполненных зон, то надо просуммировать по всем.

Дифференцируя (2.16) по T , получаем теплоемкость единицы объема:

$$C = V^{-1} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = 2 \int \varepsilon(\mathbf{p}) \frac{\partial f}{\partial T} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (2.18)$$

Производная $\frac{\partial f}{\partial T}$ равна

$$\frac{\partial f}{\partial T} = T^{-1} \frac{e^{(\varepsilon - \mu)/T}}{(e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1)^2} \left(\frac{\varepsilon - \mu}{T} + \frac{d\mu}{dT} \right).$$

Производная $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}$ имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = -T^{-1} \frac{e^{(\varepsilon - \mu)/T}}{(e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1)^2}. \quad (2.19)$$

Следовательно, можно записать

$$\frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\varepsilon - \mu}{T} + \frac{d\mu}{dT} \right). \quad (2.20)$$

Химический потенциал μ получается из условия сохранения числа частиц (напомним, что число частиц газовой модели равно числу частиц жидкости). Отсюда имеем

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{N_e}{V} = 2 \int \frac{\partial f}{\partial T} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = 0.$$

Подставляя (2.20) в (2.18) и в последнее условие, получаем

$$C = -2 \int \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\varepsilon - \mu}{T} + \frac{d\mu}{dT} \right) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial f}{\partial T} \frac{N_e}{V} = -2 \int \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\varepsilon - \mu}{T} + \frac{d\mu}{dT} \right) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = 0. \quad (2.22)$$

Обе эти формулы содержат $\partial f / \partial \varepsilon$. Но если $T \ll \mu(0)$, что, как уже сказано, всегда справедливо для металлов, то $\partial f / \partial \varepsilon$ отлично от нуля только в малой области энергий порядка T вблизи уровня Ферми $\mu(0)$ (см. рис. 2.1). Это доказывает, что описание электронов с помощью газовой модели действительно годится для вычисления теплоемкости.

Интегралы в импульсном пространстве могут быть преобразованы следующим образом. Рассмотрим поверхность постоянной энергии в импульсном пространстве $\varepsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$. Тогда интегрирование по $d^3 \mathbf{p}$ может быть разделено на интегрирование по этой поверхности и по $d\varepsilon$. Если dS — элемент изоэнергетической поверхности, то

$$d^3 \mathbf{p} = dS dp_n,$$

где dp_n означает интегрирование по нормали к элементу dS . Но

$$dp_n = d\varepsilon / |\partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}|,$$

где $\partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}$ — градиент $\varepsilon(\mathbf{p})$ в импульсном пространстве. Применяя обозначение $v = |\partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}|$, получаем

$$\int \dots d^3 \mathbf{p} = \int \dots d\varepsilon \int v^{-1} dS. \quad (2.23)$$

Так как функция распределения зависит лишь от энергии, то интегрирование по dS может быть произведено независимо. Обозначим

$$\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int v^{-1} dS = \nu(\varepsilon). \quad (2.24)$$

Эта величина называется плотностью состояний.

Для того чтобы вычислить (2.21) и (2.22), применим следующий метод интегрирования. Так как $\partial f / \partial \varepsilon$ отлично от нуля лишь вблизи $\varepsilon = \mu$, можем разложить все остальные величины в подынтегральном выражении по степеням $\varepsilon - \mu$. Это означает, что в интеграле типа

$$\int F(\varepsilon) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} d\varepsilon$$

функцию $F(\varepsilon)$ можно представить в виде

$$F(\varepsilon) = F(\mu) + (\varepsilon - \mu)F'(\mu) + (1/2)(\varepsilon - \mu)^2 F''(\mu) + \dots$$

Конечно, это можно сделать только в том случае, если функция F меняется не слишком быстро в окрестности $\varepsilon = \mu$.

Формула (2.19) может быть представлена в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = -(4T)^{-1} \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{\varepsilon - \mu}{2T} \right),$$

и, ввиду быстрого уменьшения этой функции по мере удаления от $\varepsilon = \mu$, пределы интегрирования по $z = \varepsilon - \mu$ могут быть взяты от $-\infty$ до ∞ . В силу четности этой функции нечетные члены разложения $F(\varepsilon)$ дадут нуль при интегрировании. Оставшиеся интегралы равны

$$\int \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = -1,$$

$$\int (\varepsilon - \mu)^2 \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = -(4T)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 dz}{\operatorname{ch}^2(z/2T)} = -\frac{\pi^2 T^2}{3}.$$

Таким образом, имеем

$$\int F(\varepsilon) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \approx -F(\mu) - \frac{\pi^2 T^2}{6} F''(\mu). \quad (2.25)$$

Применяя это правило к соотношениям (2.21) и (2.22), получаем

$$C = \mu \nu(\mu) \frac{d\mu}{dT} + \frac{\pi^2 T}{3} \frac{d}{d\mu} \mu \nu(\mu),$$

$$(d/dT)(N_e/V) = \nu(\mu) d\mu/dT + (\pi^2 T/3) d\nu(\mu)/d\mu = 0.$$

Из последнего условия находим

$$\frac{d\mu}{dT} = -\frac{\pi^2 T}{3} \frac{\nu'(\mu)}{\nu(\mu)}. \quad (2.26)$$

Отсюда следует, что

$$\mu(T) = \mu(0) - (\pi^2 T^2 / 6) \nu'(\mu) / \nu(\mu), \quad (2.27)$$

т.е. температурная поправка к $\mu(0)$ имеет относительный порядок $(T/\mu)^2$.

При подстановке (2.26) в выражение для электронной теплоемкости имеем

$$C = (\pi^2 / 3) T \nu(\mu). \quad (2.28)$$

Физический смысл этой формулы прост. Только электроны вблизи уровня Ферми участвуют в тепловом возбуждении системы. Число таких электронов — величина порядка произведения T на плотность состояний $\nu(\mu)$. Каждый электрон вносит в теплоемкость вклад порядка единицы (или порядка k_B — константы Больцмана в обычных единицах). Отсюда получается выражение, совпадающее по порядку величины с (2.28). При выводе соотношения (2.28) нам не нужны были конкретные сведения о ферми-поверхности. Следовательно, у всех металлов электронная теплоемкость пропорциональна термодинамической температуре.

Количественная оценка C может быть произведена на примере изотропной модели металла. Для этого случая

$$\nu(\mu) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{dS}{v} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi p_0^2}{p_0/m^*} = \frac{p_0 m^*}{\pi^2 \hbar^3}. \quad (2.29)$$

Следовательно,

$$C = [p_0 m^* / 3\hbar^3] T. \quad (2.30)$$

Эффективная масса m^* может сильно меняться от металла к металлу, но p_0 имеет один порядок для всех металлов (исключая полуметаллы), а именно $\hbar\pi/a$ (где a — период решетки, который, как известно, мало различается у разных веществ). Для обычных металлов m^* — величина порядка массы свободного электрона, но для переходных металлов, где внутренние оболочки не заполнены, масса m^* иная. Ее величина может быть определена из соотношения

$$\frac{p_0}{m^*} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \sim \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta p},$$

где $\Delta \varepsilon$ — ширина зоны, а Δp — величина порядка периода обратной решетки $\hbar\pi/a$. Внутренние оболочки слабо перекрываются, а следовательно, $\Delta \varepsilon$ (см. (1.29)) мало и m^* велико. Этот факт является причиной того, что теплоемкость переходных металлов гораздо больше (иногда более чем в 20 раз), чем у непроводящих металлов.

На опыте, конечно, измеряется не электронная, а полная теплоемкость. Однако, как известно, при низких температурах часть

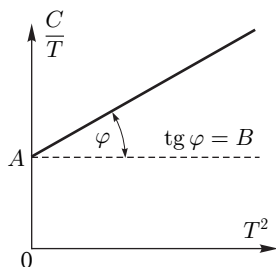


Рис. 2.6

теплоемкости, связанная с колебаниями решетки, зависит от температуры по кубическому закону (см., например, [1]). Поэтому полная теплоемкость может быть представлена в виде

$$C_{\text{полн}} = AT + BT^3.$$

Построив график $C_{\text{полн}}/T = f(T^2)$ (рис. 2.6), получаем при низких температурах прямую линию, из которой можно определить оба коэффициента: A и B .

Глава 3

ПРОВОДИМОСТЬ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

§ 3.1. Электрон как волновой пакет

До сих пор мы описывали электроны ¹⁾ стационарными блоховскими решениями уравнения Шрёдингера $\psi = e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} u(\mathbf{r})$.

Однако эти функции бесполезны для изучения явлений переноса, так как они соответствуют определенному значению квазиимпульса $\mathbf{p}$, в то время как координата остается совершенно неопределенной. Этот недостаток можно исправить, сформировав волновой пакет из блоховских состояний. Притом желательно все-таки наиболее точно определить квазиимпульс $\mathbf{p}$. Для этого возьмем сумму блоховских волн по малому интервалу $\Delta\mathbf{p}$ (сокращение этого интервала ограничено точностью определения координат). Из принципа неопределенности имеем

$$\Delta p \Delta r \sim \hbar.$$

Так как электроны рассеиваются и, следовательно, имеют конечную длину свободного пробега l , неопределенность координат должна быть меньше l . Верхний допустимый предел Δp — это, очевидно, сам импульс частицы. Таким образом, должно быть выполнено условие

$$p \gg \Delta p \sim \hbar/\Delta r \gg \hbar/l, \quad (3.1)$$

или

$$\lambda = 2\pi\hbar/p \ll l.$$

¹⁾ Здесь и в дальнейшем под электронами подразумеваются невзаимодействующие частицы газовой модели. Иногда нам будет удобнее перейти непосредственно к квазичастицам (одинаковым для газовой модели и истинной электронной жидкости) с энергетическим спектром $\epsilon_{\text{кв}} = |\xi|$. Это будет специально оговорено.

Только при этом условии описание с помощью волнового пакета имеет смысл. В нашем случае $p \sim p_0$, а p_0 имеет порядок $\hbar/a$, т.е. $\lambda \sim a$, где a — межатомные расстояния. Следовательно, условие (3.1) выполняется, если $\lambda \gg a$ и трудности возникают лишь, когда l становится порядка a (§ 4.8).

Другое условие, которое мы уже отмечали, связано с затуханием волновой функции квазичастиц. Оно имело вид

$$|\xi| \gg \gamma.$$

Коэффициент затухания γ связан со средним временем жизни квазичастицы соотношением $\gamma \sim \hbar/\tau$. В § 2.2 γ было найдено для взаимодействия самих квазичастиц. На самом деле имеются и другие процессы, ограничивающие жизнь квазичастиц (гл. 4). В данном случае существенны те из них, которые приводят к изменению энергии на величину порядка ξ . Сюда относится взаимодействие квазичастиц друг с другом, но не относится, например, рассеяние на примесях, ибо оно происходит упруго, без изменения энергии. Поэтому время «энергетической релаксации» τ_ξ может отличаться от времени пробега $\tau = l/v$ для релаксации импульса. Следовательно, второе условие справедливости модели квазичастиц имеет вид

$$|\xi| \gg \hbar/\tau_\xi.$$

Обычно ξ всегда имеет порядок температуры T . Следовательно, должно быть

$$T \gg \hbar/\tau_\xi. \quad (3.2)$$

Для того чтобы найти скорость электрона, описываемого волновым пакетом, рассмотрим интеграл

$$I = \int_{\mathbf{p}^{(0)} + \Delta \mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar - i\varepsilon(\mathbf{p})t/\hbar} u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{p},$$

взятый по окрестности радиуса $\Delta \mathbf{p}$ какого-то определенного квазиимпульса $\mathbf{p}^{(0)}$. При $\Delta p \ll p^{(0)}$ этот интеграл приближенно равен

$$I = u_{\mathbf{p}^{(0)}}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{p}^{(0)}\mathbf{r}/\hbar - i\varepsilon(\mathbf{p}^{(0)})t/\hbar} \int_{\Delta \mathbf{p}} e^{i\delta \mathbf{p} [\mathbf{r} - (\partial \varepsilon / \partial \mathbf{p})t]/\hbar} d^3\delta \mathbf{p}.$$

В последнем выражении интеграл имеет порядок

$$\begin{aligned} (\Delta p)^3, & \quad \text{если } |\mathbf{r} - (\partial \varepsilon / \partial \mathbf{p})t| \ll \hbar/\Delta p, \\ \Delta p \hbar^2 / |\mathbf{r} - (\partial \varepsilon / \partial \mathbf{p})t|^2, & \quad \text{если } |\mathbf{r} - (\partial \varepsilon / \partial \mathbf{p})t| \gg \hbar/\Delta p. \end{aligned}$$

Значит,

$$\mathbf{r} \approx (\partial \varepsilon / \partial \mathbf{p})t,$$

т. е. волновой пакет перемещается со скоростью ¹⁾

$$\mathbf{v} = \partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}. \quad (3.3)$$

Это так называемая групповая скорость волнового пакета.

Пусть электрон движется под действием внешнего электрического поля $\mathbf{E}$. Работа, совершенная внешним полем за единицу времени, равна $\mathbf{v} \mathbf{E}$. Но она должна быть равна изменению энергии электрона

$$\partial \varepsilon / \partial t = (\partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}) d\mathbf{p} / dt = \mathbf{v} d\mathbf{p} / dt.$$

Отсюда мы находим

$$d\mathbf{p} / dt = e\mathbf{E}. \quad (3.4)$$

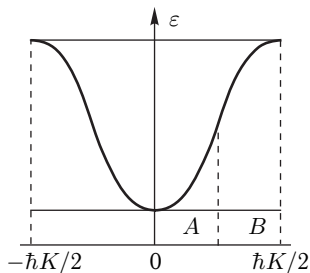


Рис. 3.1

На первый взгляд это ньютоновское уравнение движения свободной частицы. Однако $\mathbf{p}$ — это не импульс, а квазиимпульс. Возрастание $\mathbf{p}$ не означает, что электрон обязательно ускоряется. На рис. 3.1 видно, что скорость $\partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}$ возрастает лишь в области A , так что только в этой области электрон ускоряется, в то время как в области B электрон замедляется и вблизи границы зоны Бриллюэна $\hbar \mathbf{K} / 2$ его скорость обращается в нуль. Это соответствует отражению при достижении электроном максимально допустимой энергии.

Однако на практике такое положение никогда не возникает. Благодаря рассеянию импульс электрона не может измениться на большую величину под действием поля. Ускорение электронов происходит лишь на длине свободного пробега, а электрические поля, которые можно создать в металлах, никогда не сильны настолько, чтобы существенно изменить квазиимпульс электрона за время свободного пробега. Ввиду этого электроны в действительности всегда остаются в окрестности ферми-поверхности.

§ 3.2. Кинетическое уравнение

Описание с помощью волнового пакета с ограничениями (3.1) и (3.2) позволяет рассматривать электроны как классические частицы, имеющие одновременно координату и квазиимпульс. Введем неравновесную функцию распределения f в фазовом пространстве $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$. Полное изменение f со временем выражается производной df/dt .

¹⁾ Отметим, что, хотя волновой пакет сформирован из волновых функций частицы в периодическом поле, он перемещается с постоянной скоростью, как бы «не замечая» периодическое поле. Это обстоятельство является следствием квантовой природы электронов.

Это изменение происходит вследствие столкновений электрона с другими электронами и фононами, а также из-за рассеяния на дефектах кристалла (примесных атомах, дефектах структуры). Поэтому можно написать

$$df/dt = I(f), \quad (3.5)$$

где $I(f)$ — так называемый интеграл столкновений.

Соотношение (3.5) называется кинетическим уравнением. Оно будет использовано ниже для изучения явлений переноса в металлах. Левая сторона (3.5) может быть записана в виде

$$df/dt = \partial f / \partial t + (\partial f / \partial \mathbf{r}) \mathbf{dr} / dt + (\partial f / \partial \mathbf{p}) \mathbf{dp} / dt.$$

Заменяя $\mathbf{dr} / dt$ на $\mathbf{v}$ и $\mathbf{dp} / dt$ согласно (3.4), получаем

$$df/dt = \partial f / \partial t + \mathbf{v} \partial f / \partial \mathbf{r} + e \mathbf{E} \partial f / \partial \mathbf{p}. \quad (3.6)$$

Интеграл столкновений зависит от конкретных процессов рассеяния. Мы начнем с рассеяния на примесях (или других дефектах). Применим борновское приближение, считая взаимодействие с примесью слабым. Хотя это и не так на самом деле, однако можно показать, что в случае сильного взаимодействия борновская амплитуда рассеяния должна быть заменена полной амплитудой, которая тоже постоянна. Только в этом и заключается разница ¹⁾.

Вероятность рассеяния электрона в поле примесных центров в борновском приближении равна

$$\frac{2\pi}{\hbar} \int |V_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}')) \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} V, \quad (3.7)$$

где $V_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}$ — матричный элемент энергии взаимодействия электрона со всеми примесными атомами, занимающими положения $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots$;

$$V(\mathbf{r}) = \sum_i v(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i).$$

Матричный элемент в блоховских функциях

$$V^{-1/2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$$

(множитель $V^{-1/2}$ введен для нормировки, функции $u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ нормированы на единицу) имеет вид

$$V_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = V^{-1} \sum_i \int v(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}/\hbar} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} u_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{r}) u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) dV =$$

¹⁾ Это не совсем точно, если примесь является переходным металлом и атомы примеси в металле имеют спин (§ 4.6).

$$\begin{aligned}
&= V^{-1} \sum_i e^{-i(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\mathbf{R}_i/\hbar} \int v(\mathbf{r}) u_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{r}) u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\mathbf{r}/\hbar} dV = \\
&= V^{-1} \sum_i e^{-i(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\mathbf{R}_i/\hbar} v_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}.
\end{aligned}$$

Для простоты мы предположили, что все примесные атомы одинаковы и занимают эквивалентные положения в ячейках кристалла, хотя, конечно, сам выбор этих ячеек случаен. Вероятность рассеяния равна

$$\frac{2\pi}{\hbar} V^{-2} \int |v_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 \sum_{i,k} e^{-i(\mathbf{p}' - \mathbf{p})(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k)/\hbar} \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}')) V \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Если концентрация примесных атомов мала, то они распределены случайно, и среднее расстояние между ними много больше межатомных расстояний. В этом случае можно усреднить вероятность рассеяния по положениям атомов примеси. При этом все члены в

$$\sum_{i,k} e^{-i(\mathbf{p}' - \mathbf{p})(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k)/\hbar},$$

будучи быстро осциллирующими функциями, обратятся в нуль, за исключением членов с $i = k$. Следовательно, получим

$$\sum_{i,k} e^{-i(\mathbf{p}' - \mathbf{p})(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k)/\hbar} = N_i,$$

где N_i — число примесных атомов. Ввиду этого вероятность рассеяния становится равной

$$\frac{2\pi}{\hbar} \frac{N_i}{V} \int |v_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}')) \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (3.8)$$

Все приведенные выше рассуждения относились к отдельному электрону. Теперь рассмотрим систему электронов, описываемых функцией распределения. Благодаря процессам рассеяния число электронов с импульсами в заданном элементе объема импульсного пространства в окрестности $\mathbf{p}$ может возрасти ($\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}$) или уменьшиться ($\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$). Каждый процесс может произойти лишь в том случае, если в начальном состоянии есть электрон, а конечное состояние не заполнено (поскольку принцип Паули не позволяет двум электронам находиться в одном состоянии). Поэтому если речь идет о системе электронов, то каждая индивидуальная вероятность рассеяния должна быть умножена на функцию распределения f для начального состояния и $1 - f$ для конечного. После этого окончательно получаем

$$I(f) = \frac{2\pi}{\hbar} n_i \int |v_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 [f(\mathbf{p}')(1 - f(\mathbf{p})) - f(\mathbf{p})(1 - f(\mathbf{p}'))] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}')) \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} = \\ & = \frac{2\pi}{\hbar} n_i \int |v_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 [f(\mathbf{p}') - f(\mathbf{p})] \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}')) \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (3.9) \end{aligned}$$

где $n_i = N_i/V$ — плотность примесных атомов. Выделяя, как и в § 2.4, интегрирование по энергии, получаем

$$I(f) = \frac{2\pi}{\hbar} n_i \int |v_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 [f(\mathbf{p}') - f(\mathbf{p})] \frac{dS'}{v(\mathbf{p}') (2\pi\hbar)^3}, \quad (3.10)$$

где интеграл берется по изоэнергетической поверхности $\varepsilon(\mathbf{p}') = \varepsilon(\mathbf{p})$. Если в $I(f)$ подставить равновесную функцию распределения f_0 , зависящую лишь от энергии, то $I(f_0)$ обратится в нуль. В случае, когда внешнее электрическое поле и градиент температуры достаточно малы, отклонение от равновесия невелико, и можно написать

$$f = f_0 + f_1,$$

где f_1 — малая поправка: $|f_1| \ll f_0$. В $I(f)$ будет входить лишь f_1 .

Дальнейшее упрощение выражения $I(f)$ может быть проведено в изотропной модели. В этом случае импульсы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ равны по модулю, изоэнергетическая поверхность является сферой, интегрирование по dS' превращается в интегрирование по телесному углу и, наконец, $v_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}$ зависит лишь от угла между $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}$, который обозначим через θ . Введем величину

$$W(\theta) = (\pi/\hbar) n_i |v(\theta)|^2 \nu(\varepsilon).$$

Интеграл столкновений запишется в виде

$$I(f) = \int W(\theta) [f_1(\mathbf{p}') - f_1(\mathbf{p})] \frac{d\Omega}{4\pi}.$$

Пусть нарушение равновесия связано с присутствием малого электрического поля (аналогично обстоит дело в присутствии малого градиента температуры)¹⁾. Добавка к функции распределения должна быть скаляром и в первом приближении должна линейно зависеть от $\mathbf{E}$. Единственная возможная форма — это

$$f_1(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \mathbf{E} \eta(\varepsilon).$$

Подставляя в интеграл столкновений, получаем

$$I(f) = p E \eta(\varepsilon) \int W(\theta) (\cos(\widehat{\mathbf{p}'}, \mathbf{E}) - \cos(\widehat{\mathbf{p}}, \mathbf{E})) \frac{d\Omega}{4\pi}.$$

¹⁾ Приводимое ниже упрощение пригодно лишь для линейных задач.

Величина $\cos(\widehat{\mathbf{p}'}, \widehat{\mathbf{E}})$ может быть преобразована следующим образом. Выберем направление полярной оси z вдоль $\mathbf{p}$. Тогда $\mathbf{p}'\mathbf{E} = p'_z E_z + \mathbf{p}'_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}$, т. е.

$$\cos(\widehat{\mathbf{p}'}, \widehat{\mathbf{E}}) = \cos(\widehat{\mathbf{p}'}, \widehat{\mathbf{p}}) \cos(\widehat{\mathbf{E}}, \widehat{\mathbf{p}}) + \sin(\widehat{\mathbf{p}'}, \widehat{\mathbf{p}}) \sin(\widehat{\mathbf{E}}, \widehat{\mathbf{p}}) \cos \varphi_{p'E},$$

где $\varphi_{p'E}$ — угол между проекциями $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{E}$ на плоскость, перпендикулярную $\mathbf{p}$. При интегрировании по $\varphi_{p'E}$ второй член исчезает. Поскольку угол между $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}$ мы уже обозначили через θ , то подставляя $\cos(\widehat{\mathbf{p}'}, \widehat{\mathbf{E}})$ в $I(f)$, получаем

$$I(f) = (\mathbf{p}\mathbf{E}) \eta(\varepsilon) \int W(\theta) (\cos \theta - 1) \frac{d\Omega}{4\pi}.$$

Сравнивая с предположенной формой f_1 , видим, что

$$I(f) = -f_1/\tau,$$

где

$$\tau^{-1} = \int W(\theta) (1 - \cos \theta) \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (3.11)$$

Величина τ играет роль среднего времени между столкновениями.

Итак, в рассматриваемом случае кинетическое уравнение имеет вид

$$\partial f / \partial t + \mathbf{v} \partial f / \partial \mathbf{r} + e \mathbf{E} \partial f / \partial \mathbf{p} = -(f - f_0) / \tau. \quad (3.12)$$

Эту форму кинетического уравнения часто применяют для исследования различных процессов. Однако надо помнить предположения, которые были сделаны при его выводе. Это: а) изотропная модель и б) упругое рассеяние электронов (т. е. энергия при рассеянии не меняется). Первое из этих предположений вообще не соответствует реальному металлу, а второе годится не для всех процессов рассеяния. Тем не менее мы будем иногда пользоваться уравнением (3.12) либо для получения простых оценок, либо для иллюстрации методов расчета. Начнем с двух примеров применения уравнения (3.12).

§ 3.3. Проводимость

Допустим, что в металле имеется однородное и постоянное электрическое поле $\mathbf{E}$. Мы хотим найти ток, который при этом возникает. В кинетическом уравнении (3.12) исчезают два первых члена, и мы получаем

$$e \mathbf{E} \partial f / \partial \mathbf{p} = -(f - f_0) / \tau. \quad (3.13)$$

Предполагая поле слабым, подставляем $f = f_0 + f_1$, где $f_1 \ll f_0$. После этого (3.13) принимает вид

$$e \mathbf{E} \partial f_0 / \partial \mathbf{p} = -f_1 / \tau. \quad (3.14)$$

Поскольку f_0 зависит только от энергии, можем написать

$$\partial f_0 / \partial \mathbf{p} = (\partial f_0 / \partial \varepsilon) \partial \varepsilon / \partial \mathbf{p} = \mathbf{v} \partial f_0 / \partial \varepsilon.$$

Из (3.14) находим

$$f_1 = -e \mathbf{E} \mathbf{v} \tau \partial f_0 / \partial \varepsilon. \quad (3.15)$$

Электрический ток выражается через функцию распределения следующим образом:

$$\mathbf{j} = 2e \int \mathbf{v} f \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi \hbar)^3}. \quad (3.16)$$

Если подставить функцию $f_0(\varepsilon)$, интеграл обратится в нуль (это связано с тем, что ε — четная функция $\mathbf{p}$, а $\mathbf{v}$ — нечетная функция $\mathbf{p}$). Поэтому в качестве f надо подставить f_1 . При этом находим

$$\mathbf{j} = -e^2 \int \mathbf{v}(\mathbf{v} \mathbf{E}) \tau \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \nu(\varepsilon) d\varepsilon \frac{d\Omega}{4\pi},$$

где мы, как и раньше, ввели плотность состояний $\nu(\varepsilon)$. Этот интеграл содержит производную $\partial f_0 / \partial \varepsilon$, которая не равна нулю лишь в окрестности $\varepsilon = \mu$. Правило взятия интегралов, содержащих $\partial f_0 / \partial \varepsilon$, было найдено в § 2.4 (формула (2.25)). В первом приближении $\partial f_0 / \partial \varepsilon$ может рассматриваться как δ -функция: $\partial f_0 / \partial \varepsilon \approx -\delta(\varepsilon - \mu)$. Используя это обстоятельство и интегрируя по углам, получаем в изотропном случае

$$\mathbf{j} = (1/3) e^2 \mathbf{E} [v^2 \tau \nu(\varepsilon)]_{\varepsilon=\mu}.$$

Проводимость σ определяется как коэффициент пропорциональности между $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$: $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. Таким образом, находим

$$\sigma = (1/3) e^2 [v^2 \tau \nu(\varepsilon)]_{\mu}. \quad (3.17)$$

§ 3.4. Теплопроводность

В противоположность электрическому току, т. е. переносу электрического заряда, в переносе энергии участвуют не только электроны, но и фононы, и поэтому есть две части теплопроводности, электронная и фононная. Мы здесь рассмотрим только электронную теплопроводность, которая обычно значительно превосходит фононную. Исключение составляет случай очень низких температур, если металл содержит большое число примесей. Однако и в этом случае можно выделить электронную теплопроводность, используя ее поведение в магнитном поле (гл. 6).

Имеется одно существенное различие в механизмах переноса заряда и энергии. Заряд переносится реальными электронами. Поскольку плотность частиц газовой модели («электронов») равна плотности реальных электронов, то можно рассматривать электрический ток, возникающий в газовой модели под действием поля, что и было сделано

в предыдущем разделе. Что касается переноса энергии, то он осуществляется квазичастицами с энергетическим спектром $\varepsilon_{\text{KB}} = |\xi|$, и поэтому мы применим здесь модель квазичастиц¹⁾.

Прежде всего надо несколько изменить вид кинетического уравнения. Поскольку заряд «античастиц» противоположен заряду «частиц», то вместо e надо писать $e \operatorname{sign} \xi$, где $\operatorname{sign} \xi = \xi/|\xi|$. Далее, скорость квазичастиц есть

$$\partial|\xi|/\partial\mathbf{p} = (\partial|\xi|/\partial\xi) \partial\xi/\partial\mathbf{p} = \mathbf{v} \operatorname{sign} \xi,$$

где $\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p} = \mathbf{p}/m^*$. Наконец, равновесная функция распределения для квазичастиц равна $f_0 = [e^{|\xi|/T} + 1]^{-1}$ (число квазичастиц не задано, а определяется условием равновесия, поэтому $\partial\Phi/\partial N_{\text{KB}} = \mu_{\text{KB}} = 0$). Учитывая все это, можно записать кинетическое уравнение для квазичастиц в виде

$$\partial f/\partial t + \mathbf{v} \operatorname{sign} \xi \partial f/\partial \mathbf{r} + e\mathbf{E} \operatorname{sign} \xi \partial f/\partial \mathbf{p} = -(f - f_0)/\tau \quad (3.18)$$

(τ для квазичастиц совпадает с τ для частиц, ибо в него входит квадрат заряда).

Перейдем к вычислению теплопроводности. Если существует градиент температуры, то в уравнении (3.18) исчезает лишь первый член. Мы будем считать градиент температуры слабым и представим $f = f_0 + f_1$. Поскольку температура зависит от координат, то левая часть кинетического уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \operatorname{sign} \xi \partial f_0/\partial \mathbf{r} &= (\partial f_0/\partial T) \operatorname{sign} \xi (\mathbf{v} \nabla T) = \\ &= -(|\xi|/T)(\partial f_0/\partial |\xi|) \operatorname{sign} \xi (\mathbf{v} \nabla T) = -(\xi/T)(\partial f_0/\partial \xi)(\mathbf{v} \nabla T). \end{aligned}$$

Мы здесь подставили

$$\partial f_0/\partial T = -(|\xi|/T)(\partial f_0/\partial |\xi|). \quad (3.19)$$

Поток энергии выражается формулой

$$\mathbf{q} = 2 \int |\xi| \frac{\partial |\xi|}{\partial \mathbf{p}} f_1 \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = 2 \int \xi \mathbf{v} f_1 \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (3.20)$$

Из уравнения (3.18) следует

$$f_1 = \tau(\xi/T)(\partial f_0/\partial \xi)(\mathbf{v} \nabla T). \quad (3.21)$$

¹⁾ В принципе, и в этом случае можно пользоваться газовой моделью, так как квазичастицы газовой модели и реальной жидкости совпадают. Однако непосредственный расчет с помощью квазичастиц в данном случае проще, к тому же при таком способе легче устанавливается связь с расчетом теплопроводности в сверхпроводниках (§ 19.1).

Подставляя f_1 в (3.20), получаем

$$\mathbf{q} = \int \mathbf{v}(\mathbf{v} \nabla T) \tau \nu(\varepsilon) \frac{\xi^2}{T} \frac{\partial f_0}{\partial |\xi|} d\xi \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (3.20')$$

Поскольку

$$\partial f_0 / \partial |\xi| = -(4T)^{-1} \text{ch}^{-2}(|\xi|/2T) = -(4T)^{-1} \text{ch}^{-2}(\xi/2T),$$

то интеграл по ξ тот же, что и вычисленный в § 2.4. Подставляя его значение, находим

$$\mathbf{q} = -(\pi^2/9) T \nabla T (v^2 \tau \nu)_\mu. \quad (3.22)$$

Теплопроводность определяется как коэффициент пропорциональности между тепловым потоком и градиентом температуры:

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T. \quad (3.23)$$

Учитывая (3.22), находим теплопроводность

$$\kappa = (\pi^2/9) T (v^2 \tau \nu)_\mu. \quad (3.24)$$

Следует сделать две оговорки по поводу этого расчета. Прежде всего неоднородность температуры приводит к неоднородности μ , а следовательно, и изменению спектра квазичастиц вдоль проводника. Однако, ввиду малости изменения μ с температурой (см. (2.27)), учет этого эффекта приводит к малым поправкам в κ порядка $(T/\mu)^2$. Далее, наличие градиента температуры приводит к одновременному появлению в металле некоторого электрического поля. Это поле определяется из условия отсутствия электрического тока. Но нетрудно показать (§ 6.1), что учет этого обстоятельства тоже приводит к поправкам порядка $(T/\mu)^2$. Учет таких поправок не соответствует точности проведенного расчета.

Сравнивая выражение (3.24) с формулой (3.17) для σ , получаем

$$\kappa/(\sigma T) = \pi^2/3e^2. \quad (3.25)$$

Стоящая справа константа зависит лишь от заряда электрона и не содержит никаких характеристик металла. Она называется постоянной Лоренца, а соотношение (3.25) — законом Видемана–Франца. Здесь опять следует подчеркнуть, что это соотношение было выведено из кинетического уравнения для изотропной модели в предположении упругости столкновений.

Можно поставить вопрос, не является ли этот закон более общим, чем кинетическое уравнение (3.12) (или (3.18)). Рассмотрим случай анизотропного металла, но столкновения будем предполагать упругими. Для этого вернемся к выражению (3.10). Так как $I(f_0)$ обращается в нуль, то, как уже говорилось, останется лишь $I(f_1)$, т.е., вообще говоря, некоторый линейный интегральный оператор,

действующий на f_1 . При подстановке f_0 в левую часть кинетического уравнения (в форме (3.18)) получаем выражение, пропорциональное $\partial f_0 / \partial |\xi|$. Следовательно, можно предположить, что f_1 пропорционально $\partial f_0 / \partial |\xi|$. Это подтверждается, поскольку интеграл в (3.10) берется вдоль изоэнергетической поверхности, и $\partial f_0 / \partial |\xi|$ (и другие множители, зависящие от энергии) можно вынести за знак интеграла. Отсюда и из соображений четности по $\mathbf{p}$ следует, что функция f_1 должна иметь вид

$$f_1 = (\partial f_0 / \partial |\xi|) [e \mathbf{E} \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla T(\xi/T)] \zeta(\mathbf{p}),$$

где ζ — четная функция квазиимпульса, медленно меняющаяся в окрестности $|\mathbf{p}| = p_0$.

В анизотропном металле связь между током и электрическим полем будет выражаться в виде $j_i = \sum_k \sigma_{ik} E_k$, т.е. вместо одной величины σ будет иметься тензор σ_{ik} . То же справедливо для теплопроводности. На основании сказанного о функции f_1 мы можем заключить, что закон Видемана–Франца будет выполнен для соотношений соответствующих компонент σ_{ik} и χ_{ik} .

Если же столкновения не являются упругими, то закон Видемана–Франца не выполняется.

§ 3.5. Концепция длины свободного пробега

Выражения для проводимости и теплопроводности, которые были выведены из кинетического уравнения, могут быть получены более простым способом в газовой модели с помощью концепции длины свободного пробега.

Определим длину свободного пробега как среднее расстояние, проходимое электроном между столкновениями. Если τ — время между столкновениями, то длина свободного пробега $l = v\tau$ (v — средняя скорость).

Найдем прежде всего коэффициент диффузии. Пусть плотность частиц n_e неоднородна вдоль оси x . Тогда возникает поток частиц вдоль этой оси. Рассмотрим плоскость, перпендикулярную оси x . Диффузионный поток, т.е. число частиц, проходящих через 1 см^2 этой плоскости за 1 с, равен

$$j_D = \int n_e v \cos \theta \frac{d\Omega}{4\pi},$$

где θ — угол между направлением скорости частиц и осью x . Но так как расстояние, равное длине свободного пробега, частицы проходят без столкновений, то в эту формулу надо подставить не $n_e(x)$, а $n_e(x - l \cos \theta)$. Считая градиент n_e малым, мы можем разложить эту

величину по l . В результате получаем

$$j_D = -\frac{\partial n_e}{\partial x} lv \cdot \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos^2 \theta d \cos \theta = -\frac{1}{3} lv \frac{\partial n_e}{\partial x}.$$

Коэффициент пропорциональности между потоком частиц и градиентом плотности и есть коэффициент диффузии:

$$j_D = -D \partial n_e / \partial x. \quad (3.26)$$

Следовательно, коэффициент диффузии равен

$$D = (1/3) lv. \quad (3.27)$$

Проводимость есть не что иное, как диффузия электронов под действием внешней силы $F = eE$. Запишем электрический ток в виде диффузионного потока заряда:

$$j = ej_D = -eD \partial n_e / \partial x.$$

Подставив сюда

$$n_e = 2 \int f(\varepsilon - e\varphi) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3},$$

где φ — потенциал электрического поля ($E = -\partial\varphi/\partial x$), получаем

$$j = 2e^2 D \int \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = e^2 D \nu(\mu) E.$$

С другой стороны, $j = \sigma E$, следовательно ¹⁾,

$$\sigma = e^2 D \nu(\mu). \quad (3.28)$$

Подставляя формулу для D (3.27) и учитывая $l = v\tau$, приходим к формуле (3.17) для проводимости.

Аналогичным образом можно найти выражение для теплопроводности. Тепловой поток выражается через плотность энергии $\mathcal{E}/V$ соотношением

$$q = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\mathcal{E}}{V} v \cos \theta d \cos \theta.$$

Но плотность энергии зависит от координат благодаря наличию градиента температуры. Опять так же, как и раньше, надо подставить

$$\mathcal{E}[T(x - l \cos \theta)] \approx \mathcal{E}(T) - (\partial \mathcal{E} / \partial T) (\partial T / \partial x) l \cos \theta.$$

¹⁾ Соотношение между коэффициентом диффузии и коэффициентом, связывающим поток частиц и действующую на систему силу, называется соотношением Эйнштейна.

Величина $C = V^{-1} \partial \mathcal{E} / \partial T$ есть теплоемкость единицы объема. В связи с этим получаем

$$q = -(1/3) Clv \partial T / \partial x.$$

Подставляя сюда $l = v\tau$ и формулу (2.28) для теплоемкости, получаем

$$\kappa = (\pi^2/9) T v^2 \tau \nu(\mu),$$

что совпадает с (3.24).

§ 3.6. Проводимость и теплопроводность в газе свободных электронов

Для газа свободных электронов формула (3.17) становится очень простой. В этой модели

$$\nu(\mu) = (\partial / \partial \mu) 2V_F / (2\pi\hbar)^3, \quad (3.29)$$

где V_F — объем ферми-сферы. Так как $\mu = p_0^2 / (2m)$, а V_F пропорционально p_0^3 , то, следовательно, V_F пропорционально $\mu^{3/2}$. Отсюда имеем

$$\partial V_F / \partial \mu = (3/2) V_F / \mu, \quad \nu(\mu) = (3/2) 2 (2\pi\hbar)^{-3} V_F / \mu.$$

Но число электронов в единице объема равно

$$n_e = 2V_F / (2\pi\hbar)^3.$$

Итак,

$$\nu(\mu) = (3/2) n_e / \mu.$$

Проводимость равна

$$\sigma = (1/3) e^2 v^2 \tau \nu(\mu) = (2/3) e^2 \mu \tau \nu(\mu) / m$$

(так как $\mu = mv^2/2$). Подставляя сюда $\nu(\mu)$, получаем

$$\sigma = n_e e^2 \tau / m. \quad (3.30)$$

Из формулы Видемана–Франца (3.25) имеем

$$\kappa = (\pi^2/3) n_e \tau T / m.$$

Две последние формулы для σ и κ , хотя и не относятся к реальным металлам, тем не менее весьма полезны для оценок.

Глава 4

ПРОЦЕССЫ РАССЕЯНИЯ

§ 4.1. Рассеяние на примесях

Для реальных металлов функции $\varepsilon(\mathbf{p})$ очень сложны. В еще большей мере это относится к амплитудам рассеяния. Поэтому получить точные числовые значения проводимости и теплопроводности весьма трудно. Гораздо легче найти температурные зависимости и порядок величин этих коэффициентов. Для этого в большинстве случаев даже не нужно решать кинетическое уравнение и вполне достаточно концепция длины свободного пробега. Мы начнем с рассеяния на примесях. В § 3.2 мы уже рассматривали этот процесс для вывода кинетического уравнения в форме (3.12) и можно было бы получить соответствующие оценки для σ и κ из найденных там формул. Однако мы не будем делать этого, и для единообразия с другими механизмами рассеяния получим величины σ и κ из качественных, но более наглядных соображений.

Определим эффективное сечение рассеяния электронов примесями. Относительно потенциала примесного атома, действующего на электрон, можно сделать разные предположения. Либо можно считать, что атом нейтрален и ведет себя, как твердый шарик с атомными размерами, либо (и это более правдоподобно) примесный атом ионизован. Однако даже в этом случае применима модель твердых шариков. Для того чтобы это увидеть, рассмотрим экранировку потенциала примесного иона электронами.

Пусть ион введен в решетку. Если n'_e — изменение электронной плотности, то уравнение Максвелла, определяющее изменение электрического потенциала, имеет вид

$$\Delta\varphi = 4\pi en'_e \quad (4.1)$$

(наличие иона в точке $r = 0$ означает, что надо выбрать решение, которое имеет вид $-Ze/r$ при $r \rightarrow 0$). В присутствии потенциала энергии электрона ε заменяется на $\varepsilon - e\varphi$. Но в распределение Ферми ε входит в комбинации $\varepsilon - \mu$, где μ — химический потенциал. Таким образом, можно сказать, что μ заменяется на $\mu + e\varphi$. Итак,

$$n'_e = n_e(\mu + e\varphi) - n_e(\mu) \approx e\varphi \partial n_e / \partial \mu.$$

Уравнение Максвелла приобретает вид

$$\Delta\varphi - 4\pi e^2 \varphi \partial n_e / \partial \mu = 0. \quad (4.2)$$

Решение этого уравнения есть

$$\varphi = -Ze e^{-\kappa_D r} / r, \quad (4.3)$$

где $-Ze$ — заряд иона, а $\kappa_D = r_D^{-1}$ — обратный дебаевский радиус, равный

$$\kappa_D = (4\pi e^2 \partial n_e / \partial \mu)^{1/2}. \quad (4.4)$$

Итак, кулоновский потенциал примесного иона экранируется на расстояниях, больших дебаевского радиуса $r_D = \kappa_D^{-1}$. По порядку величины имеем

$$\kappa_D \sim \left(e^2 \frac{p_0^3}{\hbar^3} \frac{m}{p_0^2} \right)^{1/2} \sim \frac{p_0}{\hbar} \left(\frac{e^2 m}{p_0 \hbar} \right)^{1/2} \sim \frac{p_0}{\hbar} \left(\frac{e^2}{\hbar v} \right)^{1/2}. \quad (4.5)$$

Величина $e^2/\hbar v$ — безразмерна. Для того чтобы оценить ее, надо принять во внимание, что атомы в металле связаны, в основном, благодаря электронам проводимости. А это значит, что потенциальная и кинетическая энергии электронов должны иметь один порядок. Отношение средней потенциальной энергии электрона $e^2/\bar{r}$ к его кинетической энергии $p_0^2/(2m)$ равно

$$\frac{e^2/\bar{r}}{p_0^2/m} \sim \frac{e^2 p_0 / \hbar}{p_0^2 / m} \sim \frac{e^2}{\hbar v} \sim 1. \quad (4.6)$$

Здесь использован тот факт, что среднее расстояние между электронами $\bar{r} \sim \hbar/p_0$. Из соотношения (4.6) следует, что величина $e^2/\hbar v$ в (4.5) порядка единицы и что

$$r_D \sim \hbar/p_0 \sim a \sim 10^{-8} \text{ см.}$$

Значит, потенциал примесного иона экранируется на атомных расстояниях. Следовательно, даже в этом случае пригодна модель твердых шариков атомных размеров ¹⁾.

¹⁾ Приведенный вывод не является вполне точным. В действительно- сти изменение электронной плотности связано с потенциалом нелокальным

Теперь рассмотрим рассеяние электронов такими шариками. Если $Q_{\text{эф}}$ — эффективное сечение рассеяния (порядка 10^{-16} см^2) и электрон перемещается на расстояние 1 см, то на этом пути он столкнется с примесными атомами в объеме $1 \text{ см} \cdot Q_{\text{эф}}$. Если $n_i = N_i/V$ — плотность примесных атомов, то полное число столкновений будет

$$n_i \cdot 1 \cdot Q_{\text{эф}}.$$

Следовательно, среднее расстояние, которое электрон проходит без столкновений, иначе говоря, длина свободного пробега,

$$l \sim (n_i Q_{\text{эф}})^{-1}. \quad (4.7)$$

Для оценки порядка проводимости воспользуемся формулой (3.30) для газа свободных электронов:

$$\sigma \sim \frac{n_e e^2 \tau}{m} \sim \frac{n_e e^2 l}{m v} \sim \frac{n_e e^2 l}{p_0} \sim \frac{n_e e^2}{p_0 n_i Q_{\text{эф}}}.$$

Но число электронов проводимости в обычных металлах того же порядка, что и число атомов, поэтому $n_i/n_e \sim c_i$, где c_i — атомная концентрация примесей. Вспоминая также, что $e^2 \sim \hbar v$, получаем

$$\sigma \sim \frac{v \hbar}{p_0 c_i Q_{\text{эф}}} \sim \frac{\hbar}{m c_i Q_{\text{эф}}} \sim \frac{10^{-27} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с}}{10^{-27} \text{ г} \cdot c_i Q_{\text{эф}}} \sim \frac{10^{16}}{c_i} \text{ с}^{-1}. \quad (4.8)$$

Итак, проводимость не зависит от температуры.

Из закона Видемана–Франца (3.25) и (4.8) получаем, что теплопроводность

$$\kappa \sim 10^4 T c_i^{-1} \quad (4.9)$$

(здесь T измеряется в кельвинах, κ — в эрг/с·см·К).

соотношением

$$n'_e(\mathbf{r}) = e \int K(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') dV'.$$

Для изотропной модели

$$\begin{aligned} K(\mathbf{r}) = K(r) &= -\nu(\mu) (2\pi r)^{-3} [\cos(2p_0 r/\hbar) - (\hbar/2p_0 r) \sin(2p_0 r/\hbar)] = \\ &= -\nu(\mu) \left[p_0^3/(\pi \hbar^3) \right] \left[(2p_0 r/\hbar)^{-3} \cos(2p_0 r/\hbar) - (2p_0 r/\hbar)^{-4} \sin(2p_0 r/\hbar) \right]. \end{aligned}$$

Согласно этой формуле (она выводится подобно формуле (21.40) § 21.3 второй части, см. также Ландау, Лифшиц «Физическая кинетика»), под действием потенциала в данной точке изменение электронной плотности убывает в основном по закону r^{-3} , испытывая при этом осцилляции с периодом $\pi \hbar/p_0$ (осцилляции Фриделя [6]). Такое поведение электронной плотности является следствием ферми-вырождения. В больцмановском газе справедлив вывод формулы (4.3).

Однако для наших целей достаточно воспользоваться потенциалом, усредненным по расстояниям, большим по сравнению с $\hbar/p_0$; это опять приводит к модели твердого шарика с атомными размерами.

§ 4.2. Рассеяние электронов электронами

Другой механизм — это рассеяние электронов электронами. Мы уже рассматривали взаимное рассеяние ферми-частиц в § 2.2. Там было найдено, что вероятность рассеяния пропорциональна T^2 ; следовательно, время столкновений τ должно быть пропорционально T^{-2} . Надо только ввести коэффициент, чтобы τ имело размерность времени. Так как потенциальная энергия взаимодействия электронов имеет порядок их кинетической энергии, то единственный вид, который может иметь τ , есть

$$\tau \sim \hbar\mu/T^2.$$

Следовательно ($e^2 \sim \hbar v$),

$$\begin{aligned} \sigma &\sim \frac{n_e e^2 \hbar \mu}{m T^2} \sim \frac{n_e \hbar^2 p_0 \mu}{m^2 T^2} \sim \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 \frac{n_e \hbar^2 p_0}{\mu m^2} \sim \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 \frac{n_e \hbar^2}{p_0 m} \sim \\ &\sim \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 \left(\frac{p_0}{\hbar}\right)^3 \frac{\hbar^2}{p_0 m} \sim \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 \frac{\hbar}{m} \left(\frac{p_0}{\hbar}\right)^2. \end{aligned}$$

Ввиду того что $\hbar/p_0 \sim 10^{-8}$ см, получаем

$$\sigma \sim 10^{16} (\mu/T)^2 \quad (4.10)$$

(здесь T берется в энергетических единицах, σ — в с^{-1}). Итак, проводимость меняется пропорционально T^{-2} .

Необходимо сделать замечание о природе столкновений. Столкновения электронов друг с другом не могут считаться упругими, ибо изменения энергии при этом могут быть порядка T . Изменения импульса тоже не малы, а порядка p_0 (кулоновское взаимодействие электронов экранируется так же, как и примесный потенциал на межатомных расстояниях; изменение импульса при рассеянии порядка $\hbar/r_D \sim p_0$). Но мы, тем не менее, можем применять концепцию длины свободного пробега, так как каждое столкновение является эффективным как в смысле изменения импульса, так и в смысле изменения энергии (а поэтому τ , входящее в разные формулы, по порядку величины одно и то же). Благодаря этому по порядку величины гонится и формула Видемана–Франца (3.25). Из нее получаем для теплопроводности

$$\kappa \sim 10^{12} (T[\text{K}])^{-1} \text{ эрг/с}\cdot\text{см}\cdot\text{К}. \quad (4.11)$$

§ 4.3. Рассеяние на колебаниях решетки

Как уже отмечалось в § 3.1, в идеальной периодической решетке электрон движется как свободная частица. Однако решетка не является идеальной даже при температуре $T = 0$, ибо атомы совершают так называемые нулевые колебания (формула (2.4)). Тем не менее электрическое сопротивление при $T = 0$ отсутствует. Действительно, процесс

рассеяния соответствует передаче импульса и энергии от электрона колебаниям решетки или наоборот. Возбужденное состояние решетки может быть описано с помощью картины газа колебательных квантов, т. е. фононов. Итак, процесс рассеяния сводится к тому, что электрон испускает или поглощает фононы.

При $T = 0$ фононов нет, так что поглощать нечего. В то же время электронная жидкость находится в основном состоянии и не может испускать фононы — на это нет энергии ¹⁾. При $T \neq 0$ все эти процессы, конечно, будут иметь место. Поскольку, как и раньше, мы можем найти лишь температурные зависимости и порядки величин σ и κ , то будем все время ограничиваться простыми оценочными выводами.

Начнем с квантования колебаний решетки ²⁾. Кинетическая энергия решетки равна

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i M \dot{\mathbf{u}}_i^2,$$

где $\mathbf{u}_i$ — смещение i -го атома, M — его масса. Для длинноволновых колебаний вместо дискретных $\mathbf{u}_i$ можно ввести плавную функцию $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и записать кинетическую энергию в форме

$$E_k = \frac{1}{2} M n \int \dot{\mathbf{u}}^2(\mathbf{r}) dV,$$

где n — плотность ионов, т. е. число ионов в единице объема. Заметим здесь же, что замена $\mathbf{u}_i \rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{r})$, строго говоря, оправдана лишь для длинных волн, но для оценок она годится всегда, и поэтому мы будем ею пользоваться. Перестановочные соотношения между импульсами ионов $M\dot{\mathbf{u}}$ и их координатами $\mathbf{u}$ имеют вид

$$M[\dot{u}_i^\alpha, u_{i'}^{\alpha'}] = -i\hbar \delta_{ii'} \delta_{\alpha\alpha'}$$

(α — проекция вектора смещения). Переходя от $\mathbf{u}_i$ к $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, получаем отсюда ³⁾

$$nM [\dot{u}^\alpha(\mathbf{r}, t), u^{\alpha'}(\mathbf{r}', t)] = -i\hbar \delta_{\alpha\alpha'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Будем рассматривать один тип колебаний решетки и разложим оператор $u(\mathbf{r})$ в интеграл Фурье. Поскольку $u(\mathbf{r})$ — действительный

¹⁾ На самом деле электроны получают энергию от электрического поля, но учет этого обстоятельства приводит к малым, нелинейным по полю поправкам в ток.

²⁾ Подробное изложение динамики решетки см. [298, 299].

³⁾ Интеграл от коммутатора с $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$ по dV' , умноженный на n , эквивалентен сумме коммутаторов с дискретными $\mathbf{u}_{i'}$ по i' . И в том, и в другом случае справа получается $-i\hbar \delta_{\alpha\alpha'}$.

оператор, то

$$u(\mathbf{r}) = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega(\mathbf{k})t} + u_{\mathbf{k}}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega(\mathbf{k})t} \right).$$

Подставляя это в формулу для кинетической энергии и усредняя по времени, получаем

$$\bar{E}_k = (1/2) nM \sum_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^+ + u_{\mathbf{k}}^+ u_{\mathbf{k}}) \omega^2(\mathbf{k}).$$

Из общего соотношения коммутации находим

$$[u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}^+] = \hbar \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} / (2nM \omega(\mathbf{k})).$$

Этим соотношениям коммутации можно удовлетворить, если считать, что оператор $u_{\mathbf{k}}$ обладает матричными элементами, равными

$$(u_{\mathbf{k}})_{n_{\mathbf{k}}}^{n_{\mathbf{k}}-1} = \sqrt{n_{\mathbf{k}}} [\hbar / (2nM \omega(\mathbf{k}))]^{1/2}, \quad (4.12)$$

$$(u_{\mathbf{k}}^+)_{n_{\mathbf{k}}-1}^{n_{\mathbf{k}}} = (u_{\mathbf{k}})_{n_{\mathbf{k}}}^{n_{\mathbf{k}}-1},$$

где $n_{\mathbf{k}}$ — целые числа. Действительно,

$$\begin{aligned} [u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}}^+]_{n_{\mathbf{k}}}^{n_{\mathbf{k}}} &= (u_{\mathbf{k}})_{n_{\mathbf{k}}+1}^{n_{\mathbf{k}}} (u_{\mathbf{k}}^+)_{n_{\mathbf{k}}}^{n_{\mathbf{k}}+1} - (u_{\mathbf{k}}^+)_{n_{\mathbf{k}}-1}^{n_{\mathbf{k}}} (u_{\mathbf{k}})_{n_{\mathbf{k}}}^{n_{\mathbf{k}}-1} = \\ &= [\hbar / (2nM \omega(\mathbf{k}))] (n_{\mathbf{k}} + 1 - n_{\mathbf{k}}) = \hbar / 2nM \omega(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

При гармонических колебаниях средняя кинетическая и средняя потенциальная энергии равны друг другу. Поэтому полная энергия может быть найдена как удвоенная средняя кинетическая энергия $E = 2\bar{E}_k$. Подставляя формулу (4.12) в $\bar{E}_k$, находим

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega(\mathbf{k}) \left(n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right).$$

Итак, $n_{\mathbf{k}}$ — не что иное, как число фононов. Согласно (4.12) оператор $u_{\mathbf{k}}^+$ имеет матричные элементы, соответствующие увеличению числа фононов на единицу (т.е. испусканию фонона), а $u_{\mathbf{k}}$ — соответствующие уменьшению числа фононов на единицу (поглощению).

Рассмотрим взаимодействие электрона с колебаниями решетки. Если решетка деформирована, то возникает поляризация. Поляризационный заряд на единицу объема равен $\text{div } \mathbf{P}$, где $\mathbf{P}$ — поляризованность, т.е. дипольный момент единицы объема. Энергия взаимодействия электронов с поляризационным зарядом равна

$$e \int Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \text{div } \mathbf{P}(\mathbf{r}') dV'.$$

Без экранирования ядро интеграла Q было бы равно $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$. Однако экранирование делает взаимодействие короткодействующим. Если считать атомные расстояния малыми, то можно представить Q в виде δ -функции:

$$Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \approx a^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

где a — порядка атомных расстояний (т. е. $a \sim 10^{-8}$ см $\sim \hbar/p_0$). Поляризованность $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ по порядку величины равна $ne\mathbf{u}$, где n — плотность атомов, которая того же порядка, что и плотность электронов, а $\mathbf{u}$ — вектор смещения. Так как во взаимодействие входит $\text{div } \mathbf{P}$, то в фурье-компоненту взаимодействия войдет $iku_{\mathbf{k}}$ (или $-iku_{\mathbf{k}}^+$). Но для больших длин волн $\omega = sk$, где s — скорость звука. Итак, фурье-компонента взаимодействия будет порядка

$$V_{\mathbf{k}} \sim V^{-1/2} ie^2 a^2 n(\omega/s) u_{\mathbf{k}}.$$

Поскольку взаимодействие пропорционально $\mathbf{u}$, то в первом порядке теории возмущений могут быть процессы, соответствующие матричным элементам $u_{\mathbf{k}}$ и $u_{\mathbf{k}}^+$ (4.12), т. е. испускание или поглощение одного фонона. Например, для испускания имеем

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k},\mathbf{p}} &\sim -iV^{-1/2} e^2 a^2 n \left(\frac{\hbar(n_{\mathbf{k}}+1)}{nM\omega} \right)^{1/2} \frac{\omega}{s} = \\ &= -iV^{-1/2} \frac{e^2 a^2 n}{s} \left(\frac{\hbar\omega(n_{\mathbf{k}}+1)}{nM} \right)^{1/2} = \\ &= -iV^{-1/2} na^3 \frac{e^2}{a} \left(\frac{\hbar\omega(n_{\mathbf{k}}+1)}{n} \right)^{1/2} (s\sqrt{M})^{-1}. \end{aligned}$$

Но $na^3 \sim 1$, $e^2/a \sim p_0^2/m$, а скорость звука удовлетворяет соотношению $s\sqrt{M} \sim v\sqrt{m}$ (где M — масса иона, m — масса электрона, а v — его скорость)¹⁾. Пользуясь этим, преобразуем матричный элемент взаимодействия:

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k},\mathbf{p}} &\sim -iV^{-1/2} \frac{p_0^2}{mv\sqrt{m}} \left(\frac{\hbar\omega(n_{\mathbf{k}}+1)}{n} \right)^{1/2} = \\ &= -iV^{-1/2} p_0 \left(\frac{\hbar\omega(n_{\mathbf{k}}+1)}{nm} \right)^{1/2}. \quad (4.13) \end{aligned}$$

¹⁾ То, что это так, видно, например, из формулы для частоты осциллятора $\omega = \sqrt{\alpha/M}$, где α — упругий коэффициент. Поскольку кулоновские энергии в металле порядка кинетической энергии электронов, то при импульсах порядка p_0 отличие $\hbar\omega$ от электронных энергий заключается в множителе $(m/M)^{1/2}$. Но $\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$, а $\mathbf{s} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$, откуда следует, что это различие переносится на скорости.

Теперь заметим, что на самом деле функция $u(\mathbf{r})$ имеет физический смысл лишь в точках $\mathbf{r} = \mathbf{a}_n$, где находятся атомы. В фурье-разложение $u(\mathbf{r})$ в этих точках будут входить множители $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{a}_n)$. Но они не меняются при изменении $\mathbf{k}$ на период обратной решетки. Следовательно, любые $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k} + \mathbf{K}$ физически эквивалентны, и функция $\omega(\mathbf{k})$, так же как и $\varepsilon(\mathbf{p})$, должна быть периодичной в обратной решетке. Значит, она меняется в конечных пределах.

Для малых k (длинные волны) мы имеем звук и $\omega = sk$. Это соотношение передает правильный порядок величины и для больших k . Максимальное физическое значение k соответствует грани зоны Бриллюэна, т. е. по порядку величины равно $K_{\min} \sim \pi/a$. Поэтому предельная частота фононов имеет порядок

$$\omega_D \sim sK_{\min} \sim s\pi/a.$$

Этот предел называется дебаевской частотой. Для металлов он обычно соответствует нескольким сотням градусов. Поскольку $\hbar/a \sim p_0$ — импульс Ферми электронов, то можно также написать

$$\hbar\omega_D \sim sp_0. \quad (4.14)$$

Для числа фононов можно пользоваться распределением Бозе

$$n_{\mathbf{k}} = \left(e^{\hbar\omega/T} - 1 \right)^{-1}, \quad (4.15)$$

за исключением особых случаев, о которых речь пойдет в § 4.4.

Рассмотрим теперь два предельных случая: высоких и низких температур.

1. $T \gg \hbar\omega_D$. При высоких температурах наиболее вероятно испускание и поглощение фононов с большими энергиями порядка $\hbar\omega_D$. Но $\hbar\omega_D \ll T$, поэтому из бозевского распределения получаем

$$n_{\mathbf{k}} \approx T/\hbar\omega_D.$$

Так как $n_{\mathbf{k}} \gg 1$, то $n + 1 \approx n_{\mathbf{k}}$.

Полная вероятность рассеяния с испусканием фонона равна

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \int |V_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k},\mathbf{p}}|^2 \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}) - \hbar\omega(\mathbf{k})) V \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (4.16)$$

Аналогичную формулу можно написать для поглощения. Интегрирование δ -функции по $d^3\mathbf{k}$ дает множитель порядка ¹⁾

$$\frac{K_{\min}^3}{\mu} \sim \frac{p_0^3/\hbar^3}{p_0^2/m} \sim \frac{p_0 m}{\hbar^3}.$$

¹⁾ В действительности, вместо (4.16) надо рассматривать интеграл столкновений, в который входят функции распределения электронов и фононов. Вместе с δ -функцией они обеспечивают $k \sim K_{\min}$. Аналогично обстоит дело и с выражением (4.20), где оказывается $\hbar k \sim T/s$.

Подставляя выражения для $V_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k}, \mathbf{p}}$ и $n_{\mathbf{k}}$, получаем

$$W \sim \hbar^{-1} p_0^2 \frac{\hbar\omega_D}{mn} \frac{T}{\hbar\omega_D} \frac{p_0 m}{\hbar^3} \sim \frac{T}{\hbar}$$

(мы заменили n на $p_0^3/\hbar^3$). Итак ¹⁾,

$$\tau \sim W^{-1} \sim \hbar/T. \quad (4.17)$$

Подставляя это в формулу (3.30) для проводимости, находим

$$\begin{aligned} \sigma &\sim \frac{n_e e^2 \tau}{m} \sim \frac{n e \hbar}{m T} \sim \frac{n \hbar^2 p_0}{m^2 T} \sim \frac{\mu}{T} \frac{n \hbar^2}{p_0 m} \sim \frac{\mu}{T} \frac{p_0^3 \hbar^2}{\hbar^3 p_0 m} \sim \\ &\sim \frac{\mu}{T} \left(\frac{p_0}{\hbar} \right)^2 \frac{\hbar}{m} \sim 10^{16} \frac{\mu}{T} \text{ с}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Итак, при высоких температурах проводимость меняется по закону T^{-1} .

Поскольку $\hbar\omega_D \ll T$, то энергия электрона при столкновениях меняется мало, и столкновения можно считать упругими. Ввиду этого применим закон Видемана—Франца, который дает

$$\kappa = \text{const} \sim 10^8 \text{ эрг/с}\cdot\text{см}\cdot\text{К}. \quad (4.19)$$

2. $T \ll \hbar\omega_D$. Наибольшую роль при этом играют фононы с энергией $\hbar\omega \sim T$. Поэтому энергия электронов существенно изменяется в каждом столкновении. Поскольку импульс фононов в среднем равен $\hbar\omega/s \sim T/s$, а импульс электрона порядка p_0 , то последний при каждом столкновении меняется на относительную величину $T/sp_0 \sim T/\hbar\omega_D \ll 1$. Итак, это случай, в известном смысле противоположный рассмотренным ранее упругим столкновениям, в которых энергия менялась мало, а импульс мог измениться сильно. Поэтому применять механические правила, которыми мы пользовались до сих пор, нельзя.

Концепцией длины свободного пробега можно пользоваться, если ввести разные τ для электро- и теплопроводности. Так как при каждом столкновении энергия меняется на величину порядка T , то для теплопроводности каждое столкновение эффективно. Соответствующее τ_t

¹⁾ Полученный результат вызывает сомнения с точки зрения применимости концепции квазичастиц (условие (3.2)). Однако в это условие входит время энергетической релаксации τ_ξ . При $T \gg \hbar\omega_D$ в каждом акте взаимодействия с фононом энергия электрона меняется мало. При $T \ll \hbar\omega_D$, как мы увидим ниже, $\tau_\xi = \tau_t \gg \hbar/T$. Поэтому подозрительна только область $T \sim \hbar\omega_D$. Однако в реальных металлах константа электрон-фононного взаимодействия содержит малый числовой коэффициент порядка нескольких десятых. В τ^{-1} он входит в квадрате. Поэтому можно считать, что и в области $T \sim \hbar\omega_D$ условие (3.2) выполняется.

находится как W^{-1} , где W определяется формулой (4.16). Входящая в нее δ -функция может быть записана в виде ¹⁾

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k})^2}{2m} - \hbar\omega(\mathbf{k})\right) &= \\ &= \delta\left(\frac{\hbar\mathbf{p}\mathbf{k}}{m} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \hbar\omega(\mathbf{k})\right) = \\ &= \delta\left(\cos\theta - \frac{\hbar k}{2p} - \frac{m\omega}{pk}\right) \frac{m}{\hbar pk}, \end{aligned}$$

где θ — угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$. В силу сказанного выше об импульсе фонона $\hbar k/p_0 \ll 1$. Кроме того, $m\omega/pk \sim ms/p_0 \sim s/v \ll 1$.

Интеграл в (4.16) берется по модулю и по углам. Для нас важно, что значение $\cos\theta$, при котором аргумент δ -функции обращается в нуль, очень мало, т. е. наверняка находится в пределах допустимого интервала изменения $\cos\theta$ ²⁾. Поэтому δ -функция дает единицу при интегрировании по углам. После этого имеем

$$\begin{aligned} W &\sim \hbar^{-1} \frac{p_0^2 \hbar \omega}{mn} \frac{m}{\hbar p_0 k} k^3 \sim \hbar^{-1} \frac{p_0^2 \hbar \omega}{mn} \frac{ms}{p_0 \hbar \omega} \left(\frac{\omega}{s}\right)^3 \sim \\ &\sim \hbar^{-1} \frac{p_0^2 T}{m(p_0/\hbar)^3} \frac{ms}{p_0 T} \frac{T^3}{\hbar^3 s^3} \sim \frac{T}{\hbar} \left(\frac{T}{\hbar \omega_D}\right)^2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Здесь использованы соотношения: $\hbar\omega \sim T$, $\omega \sim sk$ и $sp_0 \sim \hbar\omega_D$. Время $\tau_t \sim W^{-1}$ может быть использовано в выражении для теплопроводности.

Теперь обратимся к электропроводности. Когда мы выводили интеграл столкновений в форме (3.12), то фактически использовали лишь то, что импульс электрона мало меняется по модулю при столкновениях. Это справедливо и в данном случае, а следовательно, верна и формула (3.11). Угол рассеяния θ по порядку величины равен отношению импульса фонона к импульсу электрона:

$$\theta \sim \hbar k/p_0 \sim T/\hbar\omega_D \ll 1.$$

Разлагая в (3.11) $1 - \cos\theta$ по θ , получаем для времени τ_e , отвечающего за электропроводность,

$$\tau_e^{-1} \sim \overline{W(\theta)\theta^2} \sim (T/\hbar)(T/\hbar\omega_D)^4.$$

¹⁾ Напомним, что $\delta(ax) = a^{-1} \delta(x)$.

²⁾ Отсюда следует также, что импульс фонона почти перпендикулярен импульсу электрона.

Поскольку проводимость пропорциональна τ_e , то, сравнивая τ_e с (4.17), получаем

$$\sigma \sim \sigma(T \gg \hbar\omega_D)(\hbar\omega_D/T)^4 \sim 10^{16}(\mu/T)(\hbar\omega_D/T)^4 \text{ с}^{-1}. \quad (4.21)$$

Итак, проводимость при низких температурах меняется по закону T^{-5} (закон Блоха).

Для теплопроводности пользуемся временем $\tau_t = W^{-1}$. Имеем при этом

$$\begin{aligned} \kappa &\sim Clv \sim Cv^2\tau_t \sim \frac{p_0 m T}{\hbar^3} \left(\frac{p_0}{m}\right)^2 \frac{\hbar}{T} \left(\frac{\hbar\omega_D}{T}\right)^2 \sim \\ &\sim \kappa(T \gg \hbar\omega_D) \left(\frac{\hbar\omega_D}{T}\right)^2 \sim 10^8 \left(\frac{T_D}{T}\right)^2 \frac{\text{эрг}}{\text{см} \cdot \text{с} \cdot \text{К}}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Здесь $T_D = \hbar\omega_D$ выражено в тех же единицах, что и T .

Сравнивая выражения для проводимости и теплопроводности, получаем

$$\kappa/\sigma \sim (T/e^2)(T/\hbar\omega_D)^2. \quad (4.23)$$

Закон Видемана–Франца не выполняется.

§ 4.4. Процессы переброса Пайерлса

Мы рассмотрели основные процессы рассеяния и определили величины, отвечающие за электро- и теплопроводность. В частности, было рассмотрено сопротивление, обязанное рассеянию электронов на электронах. Однако в действительности не вполне очевидно, как электрон-электронные столкновения могут привести к появлению сопротивления. Если имеется какой-то поток электронов, то торможение этого потока означает изменение полного импульса электронов. Но если при столкновениях полный импульс сохраняется, то такие столкновения не могут вызвать торможения потока. Здесь надо вспомнить, что на самом деле квазиимпульс, который мы рассматриваем, не является истинным импульсом. В частности, квазиимпульс определен лишь с точностью до $\hbar\mathbf{K}$, где $\mathbf{K}$ — любой период обратной решетки. Ввиду этого возможны электрон-электронные столкновения, при которых полный импульс не сохраняется.

Рассмотрим более детально интеграл столкновений для электрон-электронного рассеяния. Пусть вероятность рассеяния двух электронов есть $W(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2)$. Тогда интеграл столкновений содержит два члена. Один из них описывает уход электрона из рассматриваемого элемента объема импульсного пространства, а другой описывает приход.

В каждом члене должны быть множители, учитывающие наличие электронов в исходных состояниях и отсутствие их в конечных состояниях. Итак,

$$I(f) = - \int W(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2) \{f(\mathbf{p}_1) f(\mathbf{p}_2) [1 - f(\mathbf{p}'_1)] [1 - f(\mathbf{p}'_2)] - \\ - f(\mathbf{p}'_1) f(\mathbf{p}'_2) [1 - f(\mathbf{p}_1)] [1 - f(\mathbf{p}_2)]\} \times \\ \times \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) d^3 \mathbf{p}_2 d^3 \mathbf{p}'_1 (2\pi\hbar)^{-6}.$$

Здесь мы интегрируем по импульсам второго электрона $\mathbf{p}_2$ и по импульсам одного из электронов после рассеяния $\mathbf{p}'_1$. Что касается $\mathbf{p}'_2$, то этот импульс определяется законом сохранения с точностью до $\hbar \mathbf{K}$:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 + \hbar \mathbf{K}.$$

Вектор $\hbar \mathbf{K}$ является произвольным, и в интеграле столкновений подразумевается суммирование по $\hbar \mathbf{K}$ при условии, что все векторы $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}'_1$ и $\mathbf{p}'_2$ не выходят за пределы зоны Бриллюэна.

Представим функцию распределения в виде

$$f = f_0 - \psi \partial f_0 / \partial \varepsilon.$$

Производную $\partial f_0 / \partial \varepsilon$ можно записать как

$$\partial f_0 / \partial \varepsilon = -T^{-1} e^{(\varepsilon - \mu)/T} \left[e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1 \right]^2 = -f_0(1 - f_0)/T.$$

В равновесии f не меняется. Поэтому $df_0/dt = I(f_0) = 0$. Это означает, что комбинация функций распределения, стоящая в фигурных скобках в интеграле столкновений, обращается в нуль, если в качестве f подставить функцию f_0 . Определим теперь члены первого порядка по ψ в $I(f)$. Таких членов будет четыре: один с $\psi(\mathbf{p}_1)$, другой с $\psi(\mathbf{p}_2)$ и т. д. Член с $\psi(\mathbf{p}_1) \equiv \psi_1$ имеет вид

$$-\psi_1 \{f_1(1 - f_1) f_2(1 - f'_1)(1 - f'_2) + f'_1 f'_2 f_1(1 - f_1)(1 - f_2)\} / T,$$

где функции f в скобках — равновесные. Но вспоминая, что комбинация, входящая в исходный интеграл столкновений, равна нулю при $f = f_0$, мы можем преобразовать последнее выражение к следующему виду:

$$\psi_1 f_1 f_2(1 - f'_1)(1 - f'_2) / T.$$

Аналогичным образом можно преобразовать члены с $\psi(\mathbf{p}_2)$, $\psi(\mathbf{p}'_1)$ и $\psi(\mathbf{p}'_2)$. В результате оказывается, что у всех этих членов одинаковый коэффициент из функций f_0 , и комбинация в фигурных скобках в интеграле столкновений примет вид

$$f_1 f_2(1 - f'_1)(1 - f'_2) (\psi_1 + \psi_2 - \psi'_1 - \psi'_2) / T.$$

Представим теперь себе, что ψ имеет вид

$$\psi = c p_x, \quad c = \text{const.}$$

Для процессов с сохраняющимся импульсом интеграл столкновений обращается в нуль, ибо при этом

$$p_{x1} + p_{x2} - p'_{x1} - p'_{x2} = 0.$$

В отсутствие электрического поля функция $f = f_0 - (\partial f_0 / \partial \varepsilon) \psi$ обладает свойством $df/dt = 0$. Таким образом, если учитываются лишь процессы с сохраняющимся импульсом, эта функция является решением кинетического уравнения без электрического поля. Но в то же время эта функция, будучи подставленной в выражение для электрического тока

$$\mathbf{j} = 2e \int \mathbf{v} f \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3},$$

дает конечную величину. Это означает наличие тока в отсутствие электрического поля, или, иначе говоря, бесконечную проводимость.

В действительности надо учитывать и процессы, при которых

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2 = \hbar \mathbf{K} \neq 0.$$

Эти процессы называются «процессами переброса *Пайерлса*». Именно такие процессы и дадут конечное сопротивление. Как уже говорилось, все векторы $\mathbf{p}_i$ должны лежать в пределах зоны Бриллюэна. Более того, как мы видели в § 2.2, если импульс $\mathbf{p}_1$ находится вблизи ферми-поверхности, то и все остальные импульсы тоже будут лежать вблизи ферми-поверхности. Итак, для того чтобы получилось конечное сопротивление, необходимо выполнение условия ¹⁾

$$\max (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) = 4 \max p_0(\mathbf{n}) > \hbar |\mathbf{K}_{\min}|. \quad (4.24)$$

Очевидно, что это условие выполняется для случая, когда ферми-поверхность доходит до границы зоны Бриллюэна (рис. 1.5 б и в). Однако в щелочных металлах ферми-поверхности нигде не доходят до граней зоны Бриллюэна. Тем не менее даже в этом случае условие (4.24) выполняется. Дело в том, что ферми-поверхность любого из щелочных металлов очень близка к сфере, и поскольку у этих металлов имеется один валентный электрон на атом, объем ферми-сферы равен половине объема зоны Бриллюэна (это изображено условно на рис. 4.1 а). Поэтому ферми-сфера имеет радиус наверняка больше, чем 1/4 от наименьшего периода обратной решетки. Этого достаточно для выполнения условия (4.24).

¹⁾ Точнее, $\max(4p_0(\mathbf{n}) - K_{\min}(\mathbf{n})) > 0$, где $\mathbf{n}$ — возможные направления $\mathbf{K}$.

У полуметаллов, таких как висмут, ферми-поверхность состоит из нескольких малых замкнутых областей (долин). Но их центры находятся на расстоянии $\hbar\mathbf{K}/2$ (рис. 4.1 б), и этого достаточно для выполнения условия (4.24) (при междолинных переходах). Отсюда следует, что для электрон-электронных столкновений все обстоит благополучно.

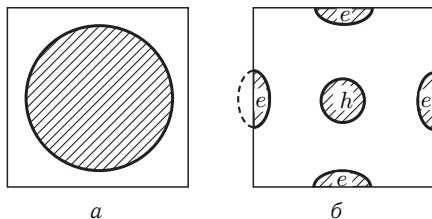


Рис. 4.1

Иначе, однако, складывается ситуация для электрон-фононных столкновений. В § 3.4 использовалась равновесная функция распределения фононов. Это допустимо, если существует независимый механизм, устанавливающий равновесие в фононном газе (например, рассеяние фононов на примесях или их рассеяние друг на друге). Но если концентрация примесей мала, то первый из этих процессов неэффективен. Что касается второго, то он, так же как и взаимное рассеяние электронов, может установить равновесие лишь благодаря процессам переброса. При низких температурах импульсы фононов малы и поэтому условие (4.24) для фонон-фононных столкновений наверняка не выполняется. Итак, в чистом металле при низких температурах единственным существенным механизмом релаксации фононов являются столкновения с электронами. Но при этом мы не имеем права подставлять равновесную фононную функцию, а должны находить ее из кинетического уравнения.

Интеграл столкновений для фононов при электрон-фононных столкновениях равен

$$I = \int W[f_1(1-f_2)(1+n_{\mathbf{k}}) - (1-f_1)f_2n_{\mathbf{k}}] \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \hbar\omega) \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Первый член соответствует излучению фонона, а второй — его поглощению. Интегрирование идет по всем импульсам электронов. Будем искать функцию распределения фононов в виде

$$n_{\mathbf{k}} = n_{\mathbf{k}0} + n_{\mathbf{k}0}(1 + n_{\mathbf{k}0})\varphi/T.$$

А для электронов предположим старую форму:

$$f = f_0 + f_0(1 - f_0)\psi/T.$$

В первом порядке по ψ и φ интеграл столкновений приобретает вид

$$I \approx \int W f_{10}(1 - f_{20})(n_{\mathbf{k}0} + 1)(\psi_1 - \psi_2 - \varphi) \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Если сюда подставить $\psi = c p_x$, $\varphi = c \hbar k_x$, то процессы с сохранением импульса дадут нуль. Это же, кстати говоря, относится и к интегралу столкновений, входящему в электронное кинетическое уравнение, а также к фонов-фононному интегралу столкновений. Таким образом, это решение удовлетворяет всем кинетическим уравнениям (без перебросов) и дает незатухающий электрический ток в отсутствие электрического поля, т.е. бесконечную проводимость. Физический смысл полученного результата таков. Хотя импульс электронной системы и не сохраняется, но сохраняется суммарный импульс электронов и фононов. Ввиду этого возможно совместное незатухающее движение обеих систем, т.е. электрический ток, сопровождаемый «фононным ветром».

Следовательно, опять надо принимать во внимание процессы переброса. Но, как уже отмечено, для фонов-фононных столкновений при низких температурах такие процессы невозможны. Что же касается электрон-фононных процессов, то для них имеем закон сохранения

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \hbar \mathbf{k} = \hbar \mathbf{K}.$$

При высоких температурах импульс фонона — величина порядка p_0 , и даже для щелочных металлов процессы переброса возможны. Однако при низких температурах импульс $\hbar k$ очень мал, и поэтому им можно пренебречь. Вместо (4.24) получаем условие

$$2 \max p_0(\mathbf{n}) > \hbar K_{\min}, \quad (4.25)$$

которое не выполняется в щелочных металлах (см. рис. 4.1 а) и вообще в тех случаях, когда ферми-поверхность не достигает граней зоны Бриллюэна.

Ввиду этого испускание и поглощение фононов с $\hbar \omega \sim T$ не меняет полного импульса электронов. Эффективным процессом является взаимодействие с фононами, имеющими импульсы порядка $\hbar K_{\min}$, т.е. энергии $T_0 \sim \hbar \omega_D$. Но число таких фононов пропорционально $\exp(-T_0/T)$. Казалось бы, эту экспоненту надо прямо подставить в выражение для сопротивления при $T < T_0$. Однако в действительности дело обстоит сложнее ¹⁾.

Изменение состояния электрона, испускающего и поглощающего фононы, можно представить себе, как диффузионное движение по ферми-поверхности точки, изображающей электрон с заданным импульсом. Для дальнейших рассуждений удобно рассматривать не одну зону Бриллюэна, а всю обратную решетку. Если ферми-поверхность достигает грани зоны Бриллюэна, то во всей обратной решетке она является «открытой», т.е. продолжается по всей обратной решетке (см. рис. 5.1). «Диффузия» электрона по такой поверхности включает в себя

¹⁾ Приводимые ниже рассуждения принадлежат Р.Н. Гуржи. Полные расчеты содержатся в работах [7].

и процессы переброса. Соответствующее время пробега, согласно § 4.3, есть

$$\tau_e \sim \left[W \theta^2 \right]^{-1} \sim \omega_D^{-1} (\hbar \omega_D / T)^5.$$

Если же ферми-поверхность является «замкнутой», т.е. не достигает грани зоны Бриллюэна, то при продолжении ее на всю обратную решетку она превращается в совокупность периодически повторяющихся замкнутых участков.

Рассеяние с перебросом означает скачок с одного участка на другой. Вероятность такого скачка нетрудно определить. Если считать, что скачок совершается на расстоянии все же численно меньшее, чем $\hbar K_{\min}$, то вероятность скачка порядка

$$\tau_u^{-1} \sim \omega_D \left(\frac{T_0}{\hbar \omega_D} \right)^3 e^{-T_0/T} \frac{T}{\hbar \omega_D}.$$

Здесь T_0 — энергия существенных фононов, множитель ω_D соответствует τ^{-1} при T , $T_0 \rightarrow \omega_D$, множитель $(T_0/\hbar \omega_D)^3$ происходит от статистического веса k^3 фононов с импульсами T_0/s , и, наконец, последний множитель соответствует доле времени, которое электрон, диффундируя по замкнутому участку ферми-поверхности, проводит вблизи другого участка, на который он может перескочить. Эта доля пропорциональна отношению площади опасного участка (S_0) к площади всей ферми-поверхности (S_F); учитывая, что опасный участок определяется удалением не более чем на $\delta p \sim T/s$, получаем $S_0/S_F \sim T/\hbar \omega_D$.

Итак, полное время пробега складывается из времени, в течение которого электрон диффундирует по замкнутому участку, и времени, нужного на скачок с перебросом:

$$\tau'_e = \tau_e + \tau_u.$$

Наиболее длинное из этих времен является самым существенным. Из условия $\tau_u \sim \tau_e$ находим $(\hbar \omega_D / T_0) x^4 \sim \exp x$, или $x = 4 \ln x + \ln(\hbar \omega_D / T_0)$, где $x = T_0/T$. Считая $\ln(\hbar \omega_D / T_0) \sim 1$, получаем $x \approx 7$. Следовательно, можно утверждать, что даже для щелочных металлов переход к экспоненциальной зависимости сопротивления от температуры происходит плавно в относительно широкой области температур, меньших $T_{00} \approx T_0/7$ (для калия $T_{00} \sim 10$ К, для натрия $T_{00} \sim 20$ К).

Изложенная картина имеет место лишь для очень чистых металлов. Если же основная релаксация импульса осуществляется не процессами переброса, а другими механизмами, например рассеянием на дефектах или границах образца, то возникает довольно сложная ситуация, связанная с интерференцией разных механизмов рассеяния. Основной причиной этого является тот факт, что фононное рассеяние без перебросов, происходящее со временем τ_e , хотя и не приводит к релаксации полного импульса электронов, создает вязкость электронной жидкости.

В результате движение электронов начинает напоминать пуазейлевское течение вязкой жидкости (подробно см. в [7]).

Мы вывели ранее выражение для проводимости и теплопроводности, рассматривая каждый раз какой-нибудь один механизм рассеяния. На самом деле присутствуют все механизмы. Можно сделать простейшее предположение, что все процессы рассеяния происходят независимо и соответствующие вероятности складываются. Это значит, что не проводимости (электрическая и тепловая), а обратные величины, т. е. сопротивления, являются аддитивными. Поэтому для электрического сопротивления при низких температурах получается закон (за исключением щелочных металлов) ¹⁾

$$\rho = c + aT^2 + bT^5, \quad (4.26)$$

где c , a , b — константы.

При высоких температурах доминирует электрон-фононное рассеяние и поэтому

$$\rho = AT. \quad (4.27)$$

Для электронной теплопроводности при низких температурах получается аналогичным образом

$$\kappa^{-1} = dT^{-1} + fT + gT^2. \quad (4.28)$$

При высоких температурах $\kappa = \text{const}$.

В действительности различные механизмы рассеяния влияют друг на друга (интерференция), и это может иногда приводить к существенным отклонениям температурной зависимости сопротивления при низких температурах от простой формулы (4.26) (Каган, Жернов, 1971) [290]. Вследствие фононного рассеяния и анизотропии истинного спектра фононов неравновесная часть функции распределения даже в кубическом кристалле не имеет форму $\mathbf{pE}\eta(\varepsilon)$, а зависит от периодов обратной решетки. Анизотропная часть η имеет тот же порядок, что и изотропная; это приводит к увеличению числового значения сопротивления. Однако рассеяние на примесях «перемешивает» электроны с разными импульсами и резко уменьшает анизотропную часть функции распределения. Это приводит к таким эффектам, как нелинейная зависимость ρ от концентрации примесей, зависимость коэффициента при T^5 от концентрации в области низких температур и др. Эти эффекты должны иметь место (и действительно наблюдаются) при малых концентрациях примеси в области температур, где примесная и фононная части ρ имеют один порядок величины. В совсем чистых ($c_i < 10^{-7}$) и совсем грязных ($c_i \sim 1$) металлах эти эффекты отсутствуют.

¹⁾ В § 11.5 будет показано, что при самых низких температурах становится существенной квантовая поправка к проводимости, которая зависит от температуры по закону $\delta\sigma \propto T^{1/2}$ (соответственно $\delta\rho \propto -T^{1/2}$).

§ 4.5. «Изотопическое» рассеяние

Если очистить металл от примесей и понижать температуру, то мы будем получать все более высокую проводимость. Эксперименты на олове показали, однако, что существует предел, ниже которого сопротивление не падает. Было также отмечено, что остаточное сопротивление не зависит от размеров образца. Довольно очевидно, что в идеальном кристалле при $T = 0$ электроны могут еще рассеиваться на границах, однако этот эффект должен зависеть от размеров кристалла. Ввиду этого было высказано предположение, что в данном случае причиной сопротивления является изотопический состав (*Померанчук*, 1958) [8].

Какие изменения возникают в кристалле, если в узлах решетки находятся атомы с одинаковой электронной структурой, но с разными массами? Так как потенциальная энергия зависит лишь от электронной структуры, то она не меняется. Однако кинетическая энергия ионов будет разной. Полная кинетическая энергия системы ионов может быть разделена на среднюю кинетическую энергию и добавку, зависящую от разностей масс. Запишем этот член как сумму по всем атомам:

$$(1/2) \sum_i (M_i - \bar{M}) \dot{\mathbf{u}}_i^2, \quad (4.29)$$

и будем рассматривать его как возмущение, ибо разница масс является малой. Надо отметить, что, в то время как обычно в задачах теории возмущений в качестве возмущения рассматривается часть потенциальной энергии, здесь такую роль играет часть кинетической энергии.

Смещение $\mathbf{u}$ имеет матричные элементы с изменением числа фононов на единицу: $n_{\mathbf{k}} \rightarrow n_{\mathbf{k}} \pm 1$. Так как в (4.29) входит $\dot{\mathbf{u}}_i^2$, то при этом возмущении число фононов меняется

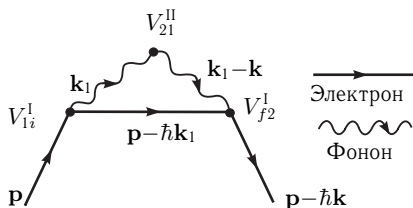


Рис. 4.2

на два или не меняется вовсе. Рассеяние электрона может, например, соответствовать процессу, изображенному на рис. 4.2. На этом рисунке вершины V^I соответствуют электрон-фононному взаимодействию, а вершина V^{II} — фонон-фононному взаимодействию. В процессе, изображенном на рис. 4.2, число фононов в вершине V^{II} не меняется. Можно изобразить и другие процессы с рождением или аннигиляцией двух фононов в этой вершине. Они отличаются от рис. 4.2 изменением последовательности процессов и направлением фононных линий и имеют тот же порядок величины. Поэтому мы рассмотрим только процесс на рис. 4.2.

Новое возмущение имеет следующую форму:

$$V^{-1} \sum_i \sum_{\mathbf{k}_1} u_{\mathbf{k}_1} \omega(\mathbf{k}_1) e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{R}_i} \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}}^+ \omega(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \mathbf{R}_i} (M_i - \overline{M}) \quad (4.30)$$

(или с $u_{\mathbf{k}}^+ \rightleftharpoons u_{\mathbf{k}}$). Вероятность рассеяния имеет обычную форму (i — начальное, f — конечное состояние):

$$\frac{2\pi}{\hbar} \int |V_{fi}|^2 \delta(\varepsilon_i - \varepsilon_f) \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (4.31)$$

Рассматриваемый процесс содержит три элементарных взаимодействия, и, следовательно, надо брать третий порядок теории возмущений:

$$V_{fi} = \sum_{1,2} \frac{V_{f2}^1 V_{21}^{\text{II}} V_{1i}^1}{(\varepsilon_i - \varepsilon_1)(\varepsilon_i - \varepsilon_2)}. \quad (4.32)$$

Рассмотрим сначала множитель в $|V_{fi}|^2$, в котором происходит суммирование по $\mathbf{R}_i$:

$$\sum_{i,k} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k)} (M_i - \overline{M})(M_k - \overline{M}). \quad (4.33)$$

Так как распределение изотопов — случайное, то можно усреднить (4.33) по их положениям. При этом ввиду того, что существенные значения $k \sim a^{-1}$ (a — межатомные расстояния), члены с $\mathbf{R}_i \neq \mathbf{R}_k$ быстро осциллируют и при усреднении обращаются в нуль. Поэтому существенны лишь члены с $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_k$ и они, после усреднения по положениям изотопов и суммирования по узлам, дают

$$N \overline{(M - \overline{M})^2}, \quad (4.34)$$

где N — число атомов.

Выражение (4.30) содержит также множитель

$$u_{\mathbf{k}_1} \omega(\mathbf{k}_1) u_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}}^+ \omega(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}).$$

В процессе, который мы рассматриваем, импульсы фононов будут иметь порядок p_0 . Подставляя матричные элементы, найденные нами раньше, и вспоминая, что при $T = 0$ фононов нет, т. е. $n_{\mathbf{k}} = 0$, $n_{\mathbf{k}} + 1 = 1$, получаем

$$u_{\mathbf{k}_1} \omega(\mathbf{k}_1) u_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}}^+ \omega(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) \sim \hbar \omega_D / Mn. \quad (4.35)$$

Теперь найдем степень объема кристалла V . Объем входит в матричные элементы и в суммы по состояниям ($\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow V \int d^3 \mathbf{k} / (2\pi)^3$). Так как матричные элементы V^1 встречаются два раза и после этого

еще V_{fi} возводится в квадрат, то мы имеем следующий множитель в вероятности рассеяния:

$$NV^{-4} \frac{V d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 \mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} = n \frac{d^3 \mathbf{k}_1 d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^9}.$$

Интегрирование в вероятности происходит по трем импульсам. Это связано с тем, что фонон $\mathbf{k}_1$ — виртуальный. Суммирование по $\mathbf{k}_1$ происходит в амплитуде, которая возводится в квадрат. После этого возникает два суммирования. А затем надо суммировать по всем возможным конечным импульсам электрона.

С помощью (4.32), (4.34), (4.35) можно теперь написать вероятность рассеяния в виде

$$\begin{aligned} W \sim \hbar^{-1} \int n \overline{(M - \bar{M})^2} [\hbar\omega_D / Mn]^2 p_0^4 [\hbar\omega_D / mn]^2 \times \\ \times [\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}_1) - \hbar\omega(\mathbf{k}_1)]^{-1} [\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}_1) - \hbar\omega(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})]^{-1} \times \\ \times [\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}_2) - \hbar\omega(\mathbf{k}_2)]^{-1} [\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}_2) - \hbar\omega(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k})]^{-1} \times \\ \times \delta(\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k})) d^3 \mathbf{k}_1 d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k} / (2\pi)^9. \end{aligned}$$

Рассмотрим множители в знаменателе, например

$$\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}_1) - \hbar\omega(\mathbf{k}_1) = \hbar\mathbf{p}\mathbf{k}_1/m - \hbar^2\mathbf{k}_1^2/(2m) - \hbar\omega(\mathbf{k}_1).$$

Существенные значения $\hbar k_1 \sim p_0$. Поэтому этот знаменатель меняется в пределах от $\hbar\omega_D$ до $\mu \sim p_0^2/m$. Малое значение знаменателя можно получить, если подобрать соответствующий угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}_1$. Конечно, это уменьшает область интегрирования по углам и дает множитель порядка $\hbar\omega_D/\mu$. Но каждая разность $\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}_1)$ встречается в знаменателе дважды. Поэтому, ограничиваясь в угловых интегралах отмеченной малой областью, мы, тем не менее, получим выигрыш.

Итак, учитывая это замечание, находим, что

$$W \sim \hbar^{-1} n \overline{(M - \bar{M})^2} \left(\frac{\hbar\omega_D}{Mn} \right)^2 p_0^4 \left(\frac{\hbar\omega_D}{mn} \right)^2 \frac{p_0^9}{\hbar^9} \mu^{-1} \left(\frac{\hbar\omega_D}{\mu} \right)^2 (\hbar\omega_D)^{-4}$$

(множитель $p_0^9/\hbar^9$ происходит от трех $d^3\mathbf{k}/(2\pi)^3$, μ^{-1} — от δ -функции по энергиям, а $(\hbar\omega_D/\mu)^2$ — от угловых интегралов). Полученное выражение может быть преобразовано к виду

$$W \sim \frac{\overline{(M - \bar{M})^2}}{M^2} \left(\frac{\hbar\omega_D}{\mu} \right)^2 \frac{p_0^2}{m\hbar}.$$

Так как $\hbar\omega_D \sim sp_0$, $\mu \sim vp_0$, то $\hbar\omega_D/\mu \sim s/v \sim (m/M)^{1/2}$. Отсюда находим

$$W \sim \frac{\overline{(M - \bar{M})^2}}{M^2} \frac{m}{M} \frac{\mu}{\hbar}. \quad (4.36)$$

Длина свободного пробега имеет порядок величины

$$l \sim v\tau \sim \frac{v\hbar}{\mu} \frac{M^2}{\overline{(M - \bar{M})^2}} \frac{M}{m} \sim 10^{-8} \frac{M^2}{\overline{(M - \bar{M})^2}} \frac{M}{m} \text{ см.} \quad (4.37)$$

Для олова $\overline{(M - \bar{M})^2}/\bar{M}^2 \sim 10^{-3}$, следовательно,

$$l \sim 10^{-8} \cdot 10^3 \cdot 10^5 \sim 1 \text{ см.}$$

Проводимость имеет порядок

$$\sigma \sim \frac{n_e e^2 \tau}{m} \sim 10^{16} \frac{M}{m} \frac{\bar{M}^2}{\overline{(M - \bar{M})^2}} \text{ с}^{-1}. \quad (4.38)$$

Значение длины свободного пробега для олова подтверждено опытом [9]. Полученный здесь результат показывает, что нельзя избавиться от конечного остаточного сопротивления в металле, если не очистить последний изотопически.

§ 4.6. Эффект Кондо

Рассмотренные выше механизмы рассеяния приводят к заключению, что при понижении температуры сопротивление падает или (при низких температурах) остается постоянным. Однако на опыте неоднократно наблюдалось, что сопротивление очень чистых золота, серебра, меди при понижении температуры иногда проходит через минимум и затем растет с понижением температуры. Это явление, остававшееся загадочным очень долго, было объяснено Кондо (1964) [10] и получило его имя. Причиной его является присутствие в металле примесных атомов с незаполненными внутренними оболочками, обладающих отличным от нуля спином. Такими магнитными примесями могут быть Mn, Fe, Cr, Co, Ce, Y и другие переходные или редкоземельные металлы. Энергия взаимодействия электрона с такими атомами, помимо обычного члена $\sum_i v(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)$, содержит член, зависящий от спинов электрона ($\boldsymbol{\sigma}$) и примеси ($\mathbf{S}$). Мы запишем его в виде

$$V_s = -(J/n) \sum_i \boldsymbol{\sigma} \mathbf{S}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i). \quad (4.39)$$

Здесь $\sigma\mathbf{S} = \sigma^x S^x + \sigma^y S^y + \sigma^z S^z$, σ^k — матрицы Паули. Поскольку спин $\mathbf{S}$ происходит от внутренних оболочек атомов, то взаимодействие считается точечным ¹⁾.

Выражение (4.39) соответствует физическому процессу рассеяния, при котором спин электрона может перевернуться с одновременным изменением ориентации спина примеси. При рассеянии электрона на обычном атоме его спин сохраняет свою ориентацию. Коэффициент J имеет размерность энергии ($n = N/V$ введено для нормировки). Как правило, J в несколько раз меньше электронных энергий (т. е. μ), в то время как обычное взаимодействие электрона с примесным атомом, не зависящее от спина, имеет порядок μ . Но так как оба взаимодействия не интерферируют в вероятности рассеяния, то их можно рассматривать по отдельности.

При взаимодействии (4.39) амплитуда рассеяния пропорциональна

$$-(J/n)(\sigma\mathbf{S})_{\sigma'\sigma},$$

где σ' соответствует конечной, а σ — начальной ориентации спина электрона. Но так как для проводимости играет роль лишь импульс электрона, а не его спин, то вероятность рассеяния надо просуммировать по всем конечным ориентациям спина и усреднить по начальным ориентациям. Это дает

$$\begin{aligned} (1/2)(J/n)^2 \sum_{\sigma\sigma'} (\sigma\mathbf{S})_{\sigma\sigma'} (\sigma\mathbf{S})_{\sigma'\sigma} &= \\ &= (1/2)(J/n)^2 \sum_{\sigma} (\sigma\mathbf{S} \cdot \sigma\mathbf{S})_{\sigma\sigma} = (J/n)^2 S(S+1). \end{aligned}$$

Итак, спиновая часть взаимодействия в первом приближении дает вклад в сопротивление порядка $J^2 S^2 / \mu^2$ по отношению к обычному взаимодействию с теми же примесями. Казалось бы, это малый эффект, который можно не учитывать. Раньше, в § 3.2, уже говорилось, что обычное взаимодействие не является малым и поэтому, строго говоря, борновское приближение для него не годится. Однако детальный расчет показывает, что для получения правильного ответа достаточно борновскую амплитуду рассеяния заменить на истинную. Но поскольку и та и другая не зависят от энергии электрона, имеют одинаковый порядок величины и к тому же в реальном металле не поддаются точному расчету, то ясно, что уточнение борновского приближения для обычного взаимодействия ничего не меняет.

Иначе обстоит дело со спиновой частью взаимодействия. Хотя она меньше бесспиновой части и поэтому применение борновского

¹⁾ В реальных переходных и редкоземельных металлах с вырожденными d - или f -уровнями это утверждение неверно. Однако учет угловой зависимости рассеяния качественно влияет на результат лишь при самых низких температурах, где становится неприменимой теория возмущений (§ 13.7).

приближения, казалось бы, в этом случае оправдано, тем не менее есть существенная разница. Дело в том, что поправка к борновскому приближению оказывается зависящей от энергии электрона (точнее, от $\xi = \varepsilon - \mu$), что в конечном итоге приводит к зависимости примесной части сопротивления от температуры.

Рассмотрим рассеяние электрона в металле на данном атоме во втором борновском приближении, причем, что очень существенно, учтем наличие других электронов, описываемых функцией распределения Ферми. Возможны два процесса.

1. Начальный электрон, находившийся в состоянии $\mathbf{p}\sigma$, переходит сначала в состояние $\mathbf{p}_1\sigma_1$, а затем в конечное состояние $\mathbf{p}'\sigma'$. По промежуточным состояниям берется сумма, причем надо обеспечить, чтобы эти состояния не были заняты. Для этого в сумму вводится множитель $1 - f(\mathbf{p}_1)$. Итак, имеем для этого варианта

$$\left(\frac{J}{n}\right)^2 \sum_{\sigma_1} \int \frac{(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{S})_{\sigma'\sigma_1} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{S})_{\sigma_1\sigma} [1 - f(\mathbf{p}_1)]}{\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}_1)} \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (4.40)$$

2. Один из электронов в занятых состояниях, скажем, $\mathbf{p}_1\sigma_1$, переходит в состояние $\mathbf{p}'\sigma'$, а уже затем электрон, находившийся в состоянии $\mathbf{p}\sigma$, переходит в освободившееся состояние $\mathbf{p}_1\sigma_1$. Здесь, наоборот, состояние $\mathbf{p}_1\sigma_1$ должно быть занято и поэтому надо ввести множитель $f(\mathbf{p}_1)$. В результате получим

$$-\left(\frac{J}{n}\right)^2 \sum_{\sigma_1} \int \frac{(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{S})_{\sigma_1\sigma} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{S})_{\sigma'\sigma_1} f(\mathbf{p}_1)}{\varepsilon(\mathbf{p}_1) - \varepsilon(\mathbf{p}')} \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (4.41)$$

Знак минус связан с антисимметрией волновых функций электронов относительно перестановки частиц (см. § 3 в [4]).

Ввиду упругости процесса $\varepsilon(\mathbf{p}') = \varepsilon(\mathbf{p})$. Поэтому знаменатели в формулах (4.40) и (4.41) отличаются лишь знаком. В числителе обоих выражений стоят спиновые множители, которые можно писать в виде

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{S})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{S}), \quad \sum_{i,k} \sigma^i \sigma^k S^k S^i.$$

Переставить S^k с S^i нельзя, ибо это операторы. Таким образом, спиновые множители для двух вариантов различны. Пользуясь свойствами матриц Паули, получаем

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{S})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{S}) &= S(S+1) - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{S}, \\ \sum_{i,k} \sigma^i \sigma^k S^k S^i &= S(S+1) + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Подставляя (4.42) в (4.40) и (4.41), имеем в сумме

$$\left(\frac{J}{n}\right)^2 \int \left\{ \frac{S(S+1)\delta_{\sigma'\sigma}}{\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}_1)} + \frac{2f(\mathbf{p}_1) - 1}{\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}_1)} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{S})_{\sigma'\sigma} \right\} \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Так как $f(\mathbf{p}_1)$ зависит от $\xi(\mathbf{p}_1) = \varepsilon(\mathbf{p}_1) - \mu$, то мы введем переменные ξ и ξ_1 вместо $\varepsilon(\mathbf{p})$ и $\varepsilon(\mathbf{p}_1)$. Переходя к интегралу по энергиям, получаем

$$\left(\frac{J}{n}\right)^2 \int \left\{ \frac{S(S+1)}{\xi - \xi_1} + \frac{2f(\xi_1) - 1}{\xi - \xi_1} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{S})_{\sigma'\sigma} \right\} \frac{\nu(\varepsilon)}{2} d\xi_1. \quad (4.43)$$

Плотность состояний $\nu(\varepsilon)$ слабо зависит от ε в окрестности $\varepsilon = \mu$. Поэтому ее можно заменить на $\nu(\mu)$. Первый член в интеграле при интегрировании по ξ дает величину порядка ξ/μ , и поскольку нас интересуют электроны вблизи границы Ферми, этой величиной можно пренебречь.

Что касается второго члена, то в нем имеется множитель

$$2f(\xi_1) - 1 = -\text{th}(\xi_1/2T),$$

антисимметричный по ξ_1 . Ввиду этого интеграл по ξ_1 можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \int_{-\mu}^{\mu} \frac{2f(\xi_1) - 1}{\xi - \xi_1} d\xi_1 &= \int_0^{\mu} [2f(\xi_1) - 1] [(\xi - \xi_1)^{-1} - (\xi + \xi_1)^{-1}] d\xi_1 = \\ &= \int_0^{\mu} [2f(\xi_1) - 1] \frac{2\xi_1 d\xi_1}{\xi^2 - \xi_1^2} \end{aligned}$$

(пределы интеграла имеют порядок $\pm\mu$, но, как мы сейчас увидим, их точное значение несущественно). Если $\xi_1 \gg |\xi|$, то ξ^2 в знаменателе подынтегрального выражения можно пренебречь. Если к тому же $\xi_1 \gg T$, то $2f(\xi_1) - 1 \approx -1$. При этом интеграл становится логарифмическим. Но в логарифмическом интеграле достаточно знать пределы лишь по порядку величины. Уточнение пределов дает поправку порядка единицы к большему логарифму. Пренебрегая такими поправками, мы можем написать для последнего интеграла

$$2 \ln[\mu/\max(|\xi|, T)].$$

Итак, второе борновское приближение к амплитуде рассеяния, связанной со спиновым взаимодействием, равно

$$(J/n)^2 \nu(\mu) (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{S})_{\sigma'\sigma} \ln[\mu/\max(|\xi|, T)].$$

Первое приближение имеет вид

$$-(J/n) (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{S})_{\sigma'\sigma}.$$

Следовательно, в целом мы можем написать для этой амплитуды рассеяния

$$-(J/n) (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{S})_{\sigma'\sigma} \{1 - (J/n) \nu(\mu) \ln[\mu/\max(|\xi|, T)]\}. \quad (4.44)$$

По порядку величины

$$\nu(\mu)/n \sim \nu(\mu)/n_e \sim \mu^{-1}.$$

Таким образом, поправка имеет относительный порядок

$$(J/\mu) \ln[\mu/\max(|\xi|, T)].$$

Знак поправки к амплитуде рассеяния зависит от знака J . Если $J > 0$, то амплитуда рассеяния уменьшается, если $J < 0$, то увеличивается. Этот результат имеет физическое объяснение. Во втором порядке теории возмущений становятся существенными эффекты пространственной корреляции спинов электрона и примеси. Если $J > 0$, то взаимодействие (4.39) имеет ферромагнитный знак и стремится повернуть спины параллельно друг другу. В то же время при взаимодействии спинов типа (4.39) полный спин электрона и примеси сохраняется. Но если полный спин равен максимальному значению $S + 1/2$, то электрон не может рассеяться с поворотом спина. Следовательно, корреляция спинов приводит к подавлению процессов рассеяния электрона с поворотом спина и к уменьшению амплитуды рассеяния. Наоборот, при $J < 0$ имеется тенденция к антипараллельной ориентации спинов электрона и примеси. При такой ориентации полный спин будет $S - 1/2$, и процессы с поворотом электронного спина ($S_z = S$, $s_z = -1/2 \rightarrow S_z = S - 1$, $s_z = 1/2$) вполне возможны ($\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}/2$ — спин электрона). Это приводит к увеличению амплитуды рассеяния при $J < 0$.

Перейдем к сопротивлению. Поскольку наиболее существенными являются электроны с $|\xi| \sim T$, с принятой точностью можно написать $\ln(\mu/T)$. А так как в сопротивление входит квадрат амплитуды рассеяния, то мы можем написать

$$\rho = \rho_v + \rho_J^{(0)} [1 - 2(J/n) \nu(\mu) \ln(\mu/T)], \quad (4.45)$$

где первый член происходит от обычного (потенциального) взаимодействия, а второй от спинового, причем $\rho_J^{(0)}$ — результат в первом борновском приближении. Из этой формулы видно, что при $J < 0$ сопротивление растет с понижением температуры по логарифмическому закону. Это соответствует опыту (Алексеевский, Гайдуков, 1956) [11]. Отношение члена, зависящего от температуры, к основной части остаточного сопротивления имеет порядок

$$(J/\mu)^3 \ln(\mu/T).$$

Кроме этой части, увеличивающейся (при $J < 0$) с понижением температуры, есть часть, рассмотренная ранее, уменьшающаяся с понижением температуры. Это приводит к появлению минимума в удельном

сопротивлении. Обычно наиболее существенный уменьшающийся член связан с фононами, и, таким образом, можно написать в целом

$$\rho = \rho_v + c_m a \ln(\mu/T) + bT^5, \quad (4.46)$$

где мы выделили зависимость от атомной концентрации магнитной примеси (c_m). Дифференцируя по температуре, находим положение минимума:

$$T_{\min} = [c_m a / 5b]^{1/5}. \quad (4.47)$$

Температура минимума пропорциональна $c_m^{1/5}$, т. е. довольно слабо зависит от c_m .

Со стороны низких температур рост сопротивления прекращается обычно там, где становится существенным взаимодействие между спинами примесных атомов. В случае если концентрация магнитной примеси мала, непосредственное обменное взаимодействие примесных спинов отсутствует. Однако благодаря взаимодействию со спинами электронов проводимости, имеется косвенное обменное взаимодействие примесных спинов, передаваемое электронами проводимости. Это взаимодействие детально рассмотрено в § 21.3, и его энергия выражается формулой (21.40). Характерной является осциллирующая зависимость этого взаимодействия от расстояния между спинами. Поскольку атомы примеси расположены хаотично, то такое взаимодействие не может привести к какому-либо регулярному упорядочению примесных спинов. Однако при температурах заметно ниже

$$\Theta \sim n_m (J/n)^2 \nu(\mu) \sim c_m J^2 / \mu \quad (4.48)$$

спины как бы «замерзают» со случайной ориентацией, образуя так называемое «спиновое стекло»¹⁾.

Благодаря фиксации ориентации примесных спинов исчезает возможность рассеяния электронов с поворотом спина (напоминаем, что полный спин электрона и примеси сохраняется). Логарифм в формуле (4.45), достигнув значения $\ln(\mu/\Theta)$, перестает увеличиваться. Но прекращение процессов рассеяния с поворотом спина одновременно приводит к уменьшению коэффициента $\rho_J^{(0)}$ в формуле (4.45), так что при $T \approx \Theta$ кривая $\rho(T)$ не просто выходит на плато, а имеет небольшой максимум.

Температура замерзания спинов Θ (4.48) пропорциональна концентрации примесей. Следовательно, уменьшая концентрацию примесей, можно сделать Θ сколько угодно малой, даже ниже той температуры, при которой логарифмический член в формуле (4.45) станет большим.

¹⁾ Величина Θ получается из (21.40) подстановкой $r \sim n_m^{-1/3}$, т. е. среднего расстояния между спинами.

Последнее происходит при температуре

$$T_K \sim \mu \exp \left[-\frac{n}{|J| \nu(\mu)} \right], \quad (4.49)$$

называемой температурой Кондо ¹⁾. В случае $T \lesssim T_K$ приближение, в котором выведена формула (4.45), уже недостаточно, и надо найти более точное выражение. Мы приведем здесь только некоторые результаты. Суммирование основных поправочных членов, содержащих такую же степень $\ln(\mu/T)$, что и J , приводит к результату (Абрикосов, 1965; Сул, 1965) [13, 14]

$$\rho = \rho_v + \rho_J^{(0)} [1 + (J/n) \nu(\mu) \ln(\mu/T)]^{-2}.$$

Эта формула вполне достаточна, если $J > 0$. Однако когда $J < 0$, при некоторой температуре ρ обращается в бесконечность. Причиной такого увеличения сопротивления является тенденция к образованию связанного комплекса из примеси и электронов, при котором примесный спин экранируется спином электронов. Полная экранировка имеет место лишь при $T = 0$. Согласно квантовой механике образование связанного состояния всегда приводит к резонансному рассеянию частиц соответствующей энергии (в данном случае резонансу соответствует $\xi = 0$). Существенно отметить, что резонанс является «коллективным эффектом», т.е. обязан своим существованием всей электронной системе в целом (это видно уже из того, что поправка Кондо к амплитуде рассеяния зависит от функции распределения электронов).

При $\xi, T \rightarrow 0$ эффективное взаимодействие электрона с примесью становится сильным, что делает неприменимой теорию возмущений. Детальный анализ показывает, что спиновая часть сопротивления, достигнув величины порядка ρ_v (имеется в виду та часть ρ_v , которая связана с магнитными примесями и пропорциональна c_m), перестает увеличиваться и стремится к постоянному пределу при $T \rightarrow 0$. Некоторые свойства металлов с магнитными примесями при низких температурах рассмотрены в § 13.7 на основе теории ферми-жидкости [116].

Еще одна особенность сопротивления, связанная с магнитными примесями, заключается в возможности падения сопротивления при включении магнитного поля.

В отсутствие магнитной примеси действие магнитного поля на сопротивление связано с закручиванием электронных орбит. Этот эффект рассмотрен детально в гл. 6. Он всегда приводит к увеличению

¹⁾ Температура Кондо (4.49) получена из формулы (4.45), выведенной в логарифмическом приближении. Более точный результат: $T_K \sim \sim (J/\mu)^{1/2} \exp[-n/|J| \nu(\mu)]$ (см. [12]).

сопротивления, причем в небольших полях

$$\Delta\rho_1 \sim \rho(\Omega\tau)^2, \quad (4.50)$$

где $\Omega \sim eH/mc$ — ларморовская частота, а τ — время столкновений.

При наличии магнитных примесей магнитное поле, кроме закручивания электронов, поляризует спины примесных атомов. При этом направление спинов фиксируется и, так же как и при образовании спинового стекла, исчезает возможность рассеяния электронов с поворотом спина. Полная вероятность рассеяния при этом уменьшается, а с ней уменьшается и сопротивление. Если $S\beta H \ll T$ (β — магнетон Бора, $gS\beta$ — магнитный момент примеси; $g \approx 2$)

$$\Delta\rho_2 \sim -\rho_J^{(0)} (gS\beta H/T)^2. \quad (4.51)$$

Если же $S\beta H \gg T$, то

$$\Delta\rho_2 \sim -\rho_J^{(0)}.$$

Оценка $\Delta\rho_1$ и $\Delta\rho_2$ показывает, что полное изменение сопротивления может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от конкретных характеристик образца. В частности, $\Delta\rho_1$ можно уменьшить, введя дополнительное количество немагнитных примесей. При этом τ будет уменьшаться, а с ним и $\Delta\rho_1$, в то время как на $\Delta\rho_2$ обычные примеси не влияют.

ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА МЕТАЛЛОВ**§ 5.1. Кинетическое уравнение в присутствии магнитного поля**

Динамика электронов в присутствии электрического и магнитного полей в значительной степени определяется топологией ферми-поверхности. До сих пор мы обычно ограничивались зоной Бриллюэна. Теперь нам будет более удобно рассматривать всю обратную решетку (так же как и в конце § 4.4). Энергия электронов является в этом случае периодической функцией квазиимпульса. То же самое относится и к любой поверхности $\varepsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$, в частности к ферми-поверхности. Все ферми-поверхности могут быть разделены на две группы.

1. **Замкнутые поверхности.** В пространстве обратной решетки мы имеем периодически повторяющуюся замкнутую поверхность. Если рассматривать одну зону Бриллюэна, то это тот случай, когда ферми-поверхность нигде не доходит до границы зоны ¹⁾.

2. **Открытые поверхности.** Это поверхности, продолжающиеся непрерывно по всей обратной решетке. Если рассматривать одну зону Бриллюэна, то, очевидно, в данном случае поверхность достигает границ зоны. Примеры для двумерного случая приведены на рис. 5.1 *a* и *б*. Некоторые типы открытых поверхностей в трехмерном случае приведены на рис. 5.2 *a*, *б* и *в* (ср. с экспериментальными данными по Au (рис. 2.4) и Pb (рис. 2.5)).

¹⁾ Поскольку возможны случаи, когда замкнутая ферми-поверхность расположена в окрестности границы, то точнее будет сказать, что любой вектор, расположенный внутри ферми-поверхности, меньше периода обратной решетки.

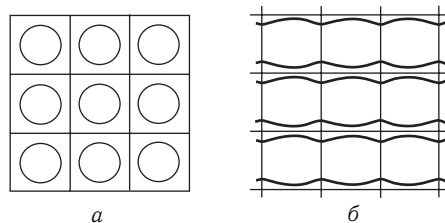


Рис. 5.1

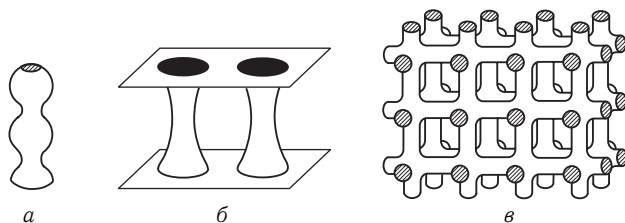


Рис. 5.2

Рассмотрим электрон, движущийся в магнитном поле. Если пренебречь квантовыми эффектами ¹⁾, то его уравнение движения имеет вид

$$d\mathbf{p}/dt = (e/c) [\mathbf{v}\mathbf{H}] = \mathbf{F}. \quad (5.1)$$

Изменение энергии за 1 секунду равно

$$d\varepsilon/dt = (\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}) d\mathbf{p}/dt = \mathbf{v}\mathbf{F} = 0.$$

Следовательно,

$$\varepsilon = \text{const}. \quad (5.2)$$

Из (5.1) следует также, что

$$p_z = \text{const}, \quad (5.3)$$

если магнитное поле направлено по оси z . Итак, электрон движется так, что у него сохраняются ε и p_z .

В импульсном пространстве это траектория, которая получается при пересечении поверхности $\varepsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ плоскостью $p_z = \text{const}$. Но, как

¹⁾ В гл. 10 будет показано, что магнитное поле приводит к квантованию уровней энергии электрона (квантование Ландау). Поэтому, в противоположность уравнению $\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E}$ в электрическом поле, уравнение (5.1) не является точным. Однако, ввиду того что в обычных металлах и в достижимых на опыте магнитных полях $\beta H \ll \mu$ (β — магнетон Бора), квантование уровней, за исключением особых случаев, рассмотренных в гл. 10–12, приводит к малым поправкам, которыми в первом приближении можно пренебречь.

известно, наибольшую роль играют электроны в окрестности ферми-поверхности, т.е. электроны с энергией $\varepsilon \approx \mu$. Следовательно, возможные траектории электронов в импульсном пространстве — это сечения ферми-поверхности плоскостями $p_z = \text{const}$. Если ферми-поверхность замкнутая, то все ее сечения являются замкнутыми контурами, но если ферми-поверхность открытая, то ее сечения могут быть как замкнутыми, так и открытыми, т.е. продолжающимися по всей обратной решетке.

Запишем теперь формулу (5.1) в компонентах:

$$dp_x/dt = (e/c) v_y H, \quad dp_y/dt = -(e/c) v_x H. \quad (5.4)$$

Возводя оба уравнения в квадрат и складывая, получаем

$$(dp_x^2 + dp_y^2)/dt^2 = (e/c)^2 H^2 (v_x^2 + v_y^2).$$

Но $(dp_x^2 + dp_y^2)^{1/2} = dl$ — элемент длины траектории электрона в импульсном пространстве. Следовательно,

$$dl/dt = (e/c) H v_{\perp}, \quad v_{\perp} = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}.$$

Иначе говоря,

$$dt = \frac{c}{eH} \frac{dl}{v_{\perp}}, \quad t = \frac{c}{eH} \int \frac{dl}{v_{\perp}}. \quad (5.5)$$

Если траектория электрона замкнутая, то этот интеграл можно взять по всему контуру, и при этом мы, очевидно, получим период движения по контуру

$$T = \frac{c}{eH} \oint \frac{dl}{v_{\perp}}. \quad (5.6)$$

Площадь плоскости $p_z = \text{const}$ изображается интегралом

$$S = \int dp_x dp_y.$$

Вместо того чтобы брать такой интеграл, мы можем изобразить в плоскости $p_z = \text{const}$ кривые $\varepsilon = \text{const}$ и интегрировать вдоль этих контуров и по нормали к ним. Кольцо, образованное двумя контурами с ε , отличающимися на $d\varepsilon$, имеет в данном месте ширину

$$d\varepsilon |\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}_{\perp}|^{-1} = d\varepsilon/v_{\perp}.$$

Площадь кольца равна $d\varepsilon \oint dl/v_{\perp}$ (интеграл берется вдоль контура), а площадь плоскости $p_z = \text{const}$ изображается интегралом

$$S = \int d\varepsilon \oint \frac{dl}{v_{\perp}}.$$

Сравнивая с (5.6), находим, что период движения равен

$$T = \frac{c}{eH} \partial S / \partial \varepsilon. \quad (5.7)$$

Введем так называемую «циклотронную массу» ¹⁾

$$m^* = (2\pi)^{-1} \partial S / \partial \varepsilon. \quad (5.8)$$

С учетом последней период выражается в виде

$$T = 2\pi cm^* / eH. \quad (5.9)$$

Угловая частота $\Omega = 2\pi/T = eH/m^*c$ называется ларморовской или циклотронной частотой. Циклотронная масса может быть определена лишь для замкнутых орбит. Если орбита $\varepsilon = \text{const}$ окружает область меньшей энергии, то m^* положительно. Это случай, когда носители являются «электронами». Сюда, в частности, относится случай с малым числом электронов в зоне, сосредоточенных вблизи ее дна. Наоборот, если контур окружает область большей энергии, то m^* будет отрицательно. Частным случаем является почти заполненная зона. В этом случае естественно перейти к представлению о «дырках» — носителях с положительной массой и зарядом, противоположным заряду электрона (§ 2.3). Для свободных электронов имеем

$$S = \pi p_{\perp}^2 = \pi(p^2 - p_z^2) = \pi(2m\varepsilon - p_z^2),$$

и, следовательно,

$$(2\pi)^{-1} \partial S / \partial \varepsilon = m,$$

где m — масса свободного электрона.

От движения электрона в импульсном пространстве нетрудно перейти к движению в координатном пространстве. Уравнение (5.1) можно переписать в виде

$$d\mathbf{p} = (e/c) [d\mathbf{r} \mathbf{H}]. \quad (5.10)$$

Отсюда следует, что проекция траектории электрона на плоскость, перпендикулярную $\mathbf{H}$, по сути дела повторяет траекторию в импульсном пространстве с заменой координат $x \rightarrow -(c/eH)p_y$, $y \rightarrow (c/eH)p_x$. Кроме того, остается движение по направлению z со скоростью $v_z = \partial \varepsilon / \partial p_z$. Если рассматриваемое сечение ферми-поверхности плоскостью $p_z = \text{const}$ — замкнутое, то траектория в координатном пространстве будет иметь вид спирали с осью вдоль $\mathbf{H}$. Если же траектория

¹⁾ Циклотронная масса на поверхности Ферми для изотропной модели совпадает с эффективной массой (см. соотношение (2.7)). Во избежание недоразумений напомним, что понятие эффективной массы мы применяем лишь для изотропной модели. В анизотропном случае m^* будет всегда обозначать циклотронную массу.

открытая в импульсном пространстве, то она будет открытой и в плоскости (x, y) .

В присутствии магнитного поля вместо p_x , p_y удобно ввести две новые переменные: энергию ε и «время движения по траектории»

$$t_1 = \frac{c}{eH} \int \frac{dl}{v_{\perp}}.$$

Надо иметь в виду, что в данном случае это не истинное время, а некоторая функция p_x и p_y , связанная с ними уравнениями (5.4). Согласно предыдущему имеем

$$\int dp_x dp_y = \int d\varepsilon \frac{dl}{v_{\perp}}.$$

Но так как $(c/eH) dl/v_{\perp} = dt_1$, то в новых переменных интегралы по импульсному пространству приобретают вид

$$\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int dp_x dp_y dp_z = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{eH}{c} \int dp_z dt_1 d\varepsilon. \quad (5.11)$$

Кинетическое уравнение при наличии постоянных электрического и магнитного полей может быть написано в виде

$$(\partial f / \partial t_1) \dot{t}_1 + (\partial f / \partial p_z) \dot{p}_z + (\partial f / \partial \varepsilon) \dot{\varepsilon} = I(f). \quad (5.12)$$

Для $\dot{\varepsilon}$ имеем

$$\dot{\varepsilon} = \partial \varepsilon / \partial t = (\partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}) d\mathbf{p} / dt = \mathbf{v} d\mathbf{p} / dt.$$

В присутствии электрического и магнитного полей

$$d\mathbf{p} / dt = (e/c) [\mathbf{vH}] + e\mathbf{E}, \quad (5.13)$$

поэтому

$$\dot{\varepsilon} = e\mathbf{vE}, \quad (5.14)$$

$$\dot{p}_z = eE_z. \quad (5.15)$$

Переменная t_1 определяется из уравнений (5.4), которые отличаются от (5.13) отсутствием электрического поля. Но в металлах для не слишком слабых магнитных полей $(v/c)H$ всегда больше E ¹⁾. Поэтому разница между t_1 и t мала и $dt_1/dt \approx 1$. Итак, мы получаем

$$\partial f / \partial t_1 + (\partial f / \partial p_z) eE_z + (\partial f / \partial \varepsilon) e\mathbf{vE} = I(f). \quad (5.16)$$

¹⁾ Например, магнитное поле Земли (H_0) равно примерно 0,5 Э. Если предположить $E = (v/c)H_0$, то при комнатной температуре, согласно формуле (4.18), $j = \sigma E \sim 10^6 - 10^7$ А/см². Такая плотность тока в нормальном металле привела бы к немедленному испарению проводника.

Будем предполагать f в виде

$$f = f_0 - (\partial f_0 / \partial \varepsilon) \psi. \quad (5.17)$$

Так как ε , p_z и t_1 — независимые переменные, то надо считать f_0 не зависящим от p_z . Ввиду этого подстановка (5.17) в (5.16) дает в низшем порядке по ψ

$$\partial \psi / \partial t_1 - I(\psi) = e \mathbf{v} \mathbf{E}. \quad (5.18)$$

Это общее уравнение, которое мы будем решать в разных конкретных случаях.

Рассмотрим теперь граничные условия по t_1 . Если траектория электрона замкнутая, то, очевидно, функция ψ должна периодически зависеть от t_1 . Если же траектория открытая, то функция ψ не обязана быть периодической, но должна быть везде конечной. Эти условия дают однозначное решение уравнения (5.18).

§ 5.2. Гальваномагнитные явления в слабом магнитном поле

Сначала мы рассмотрим слабое магнитное поле. В этом случае существенны процессы рассеяния и мы можем получить только порядок величины эффекта. Но для того чтобы продемонстрировать решение кинетического уравнения (5.18) на простом примере, рассмотрим изотропную модель с $I(\psi) = -\psi/\tau$. Кинетическое уравнение приобретает вид

$$\partial \psi / \partial t_1 + \psi / \tau = e v(t_1) E. \quad (5.19)$$

Решение этого уравнения есть

$$\psi = \int_C^{t_1} e \mathbf{v}(t_2) \mathbf{E} e^{-(t_1-t_2)/\tau} dt_2. \quad (5.20)$$

Константа C должна определяться из граничных условий. Будем считать функцию ψ периодической, так как в изотропном случае все орбиты замкнуты (поверхности постоянной энергии — это сферы). При этом в (5.20) надо положить $C = -\infty$. Действительно,

$$\begin{aligned} \psi(t_1 + T) &= \int_{-\infty}^{t_1+T} e \mathbf{v}(t_2) \mathbf{E} e^{-(t_1+T-t_2)/\tau} dt_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{t_1} e \mathbf{v}(t_2 + T) \mathbf{E} e^{-(t_1-t_2)/\tau} dt_2 = \psi(t_1), \end{aligned}$$

так как $v(t_2 + T) = v(t_2)$ — периодическая функция.

Согласно (5.11), (5.17) и (5.20) электрический ток равен

$$\begin{aligned} j_\alpha &= \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int f v_\alpha d^3\mathbf{p} = -\frac{2He^2}{(2\pi\hbar)^3 c} \int d\varepsilon \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \int dp_z dt_1 v_\alpha \psi = \\ &= \frac{2He^3}{(2\pi\hbar)^3} \int_{-p_0}^{p_0} dp_z \int_0^T dt_1 v_\alpha(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} v_\beta(t_2) e^{(t_2-t_1)/\tau} E_\beta dt_2. \end{aligned} \quad (5.21)$$

В последнем интеграле все импульсы лежат на ферми-поверхности.

Пусть $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$. Индексы α, β пробегает значения x, y . Уравнения (5.4) для t_1 имеют решения

$$v_x = v_\perp \cos \Omega t_1, \quad v_y = -v_\perp \sin \Omega t_1,$$

где $p_{x,y} = m^* v_{x,y}$, $\Omega = eH/m^*c$. Отсюда находим

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} j_x \\ j_y \end{Bmatrix} &= \frac{2He^3}{(2\pi\hbar)^3 c} \int_{-p_0}^{p_0} v_\perp^2 dp_z \int_0^T dt_1 \begin{Bmatrix} \cos \Omega t_1 \\ -\sin \Omega t_1 \end{Bmatrix} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{t_1} (E_x \cos \Omega t_2 - E_y \sin \Omega t_2) e^{(t_2-t_1)/\tau} dt_2. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t_1} e^{t_2/\tau} e^{i\Omega t_2} dt_2 &= \frac{e^{t_1/\tau + i\Omega t_1}}{\tau^{-1} + i\Omega} = \frac{e^{t_1/\tau + i\Omega t_1}}{\tau^{-2} + \Omega^2} (\tau^{-1} - i\Omega) = \\ &= \frac{e^{t_1/\tau}}{\tau^{-2} + \Omega^2} [\tau^{-1} \cos \Omega t_1 + \Omega \sin \Omega t_1 + i(\tau^{-1} \sin \Omega t_1 - \Omega \cos \Omega t_1)]. \end{aligned}$$

Действительная и мнимая части этой формулы определяют интегралы по dt_2 с $\cos \Omega t_2$ и $\sin \Omega t_2$. Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} j_x \\ j_y \end{Bmatrix} &= \frac{2He^3}{(2\pi\hbar)^3 c} \int_{-p_0}^{p_0} \frac{dp_z v_\perp^2}{\Omega^2 + \tau^{-2}} \int_0^T dt_1 \begin{Bmatrix} \cos \Omega t_1 \\ -\sin \Omega t_1 \end{Bmatrix} \times \\ &\times [E_x (\tau^{-1} \cos \Omega t_1 + \Omega \sin \Omega t_1) - E_y (\tau^{-1} \sin \Omega t_1 - \Omega \cos \Omega t_1)]. \end{aligned}$$

Интегрирование по полному периоду дает

$$\int_0^T \cos^2 \Omega t_1 dt_1 = \int_0^T \sin^2 \Omega t_1 dt_1 = \frac{T}{2},$$

$$\int_0^T \cos \Omega t_1 \sin \Omega t_1 dt_1 = 0.$$

Поэтому

$$\begin{Bmatrix} j_x \\ j_y \end{Bmatrix} = \frac{2He^3}{(2\pi\hbar)^3 c} \frac{T}{2} \frac{1}{\Omega^2 + \tau^{-2}} \begin{Bmatrix} \tau^{-1} E_x + \Omega E_y \\ -\Omega E_x + \tau^{-1} E_y \end{Bmatrix} \int_{-p_0}^{p_0} v_{\perp}^2 dp_z.$$

Последний интеграл легко сосчитать. Так как $v_{\perp} = p_{\perp}/m^*$, то имеем

$$\int_{-p_0}^{p_0} v_{\perp}^2 dp_z = m^{*-2} \int_{-p_0}^{p_0} p_{\perp}^2 dp_z = m^{*-2} \int_{-p_0}^{p_0} (p_0^2 - p_z^2) dp_z = \frac{4}{3} \frac{p_0^3}{m^{*2}}.$$

Таким образом, находим

$$\begin{Bmatrix} j_x \\ j_y \end{Bmatrix} = \frac{2He^3}{(2\pi\hbar)^3 c} \frac{4}{3} \frac{p_0^3}{m^{*2}} \frac{2\pi cm^*}{2He} \frac{1}{\Omega^2 + \tau^{-2}} \begin{Bmatrix} \tau^{-1} E_x + \Omega E_y \\ -\Omega E_x + \tau^{-1} E_y \end{Bmatrix},$$

или

$$\begin{Bmatrix} j_x \\ j_y \end{Bmatrix} = \frac{n_e e^2}{m^*} \frac{1}{\Omega^2 + \tau^{-2}} \begin{Bmatrix} \tau^{-1} E_x + \Omega E_y \\ -\Omega E_x + \tau^{-1} E_y \end{Bmatrix}, \quad (5.22)$$

где $n_e = p_0^3/3\pi^2\hbar^3$ — плотность электронов в изотропной модели.

Если эксперимент ставится так, что ток есть лишь в x -направлении, то $j_y = 0$. Из (5.22) получаем при этом

$$E_y = \Omega \tau E_x, \quad j_x = (n_e e^2 \tau / m^*) E_x. \quad (5.23)$$

Таким образом, в этой модели магнитное поле не меняет проводимости. Однако оно приводит к появлению электрического поля в направлении y , перпендикулярном току и магнитному полю. Это так называемый эффект Холла. Константа Холла определяется следующим образом:

$$R = \frac{E_y}{H j_x} = \frac{eH}{H j_x} \frac{\tau E_x m^*}{n_e e^2 \tau H E_x} = \frac{1}{n_e e c}. \quad (5.24)$$

Итак, для изотропной модели константа Холла зависит лишь от числа электронов в металле.

Для реальных металлов это свойство, так же как и независимость проводимости от магнитного поля, уже не имеет места. В слабом поле константа Холла зависит от вероятности рассеяния сложным образом, а сопротивление меняется с магнитным полем. Так как $\mathbf{H}$ — вектор, то очевидно, что изменение сопротивления при малых полях будет квадратично зависеть от $\mathbf{H}$.

Физической причиной этой зависимости является искривление электронных траекторий в магнитном поле (об этом уже говорилось в § 4.6). Вследствие этого уменьшается эффективная длина свободного пробега. Легко найти, что поправка к сопротивлению имеет порядок ¹⁾

$$\Delta\rho \sim \rho(l/r_L)^2,$$

где l — длина свободного пробега, а $r_L \sim v/\Omega \sim cp_0/eH$ — ларморовский радиус прецессии электрона в магнитном поле; $l \ll r_L$. Так как $r_L \sim v/\Omega$ ($\Omega = eH/m^*c = 2\pi/T$ — частота прецессии), а $l \sim v\tau$, то находим также

$$\Delta\rho \sim \rho(\Omega\tau)^2. \quad (5.25)$$

Формула (5.25) описывает квадратичную зависимость $\Delta\rho$ от H и дает порядок величины эффекта при малых полях.

В § 5.3 мы увидим, что в другом предельном случае больших полей ($\Omega\tau \gg 1$) тоже можно определить закон зависимости ρ от H и порядок величины ρ . Значительно хуже обстоит дело при промежуточных полях ($\Omega\tau \sim 1$). Для анизотропного металла в этой области нахождение зависимости сопротивления от напряженности магнитного поля является исключительно трудной задачей. Ввиду этого иногда пользуются так называемым правилом Колера, представляющим собой закон подобия для $\Delta\rho(H)$. Хотя это правило, строго говоря, может быть обосновано лишь для изотропной модели, но как и всякий закон подобия, оно описывает опытные данные лучше, чем детальные формулы для исходной модели. Примером аналогичного положения является закон соответственных состояний и уравнение Ван-дер-Ваальса при фазовом переходе газ—жидкость.

Правило Колера исходит из идеи о наличии универсальной длины пробега, не зависящей от импульса электрона. Сопротивление обратно пропорционально этой длине. При увеличении магнитного поля роль длины пробега постепенно берет на себя ларморовский радиус. Ввиду этого можно предположить, что $\rho(H, T)/\rho(0, T)$ зависит лишь от отношения l/r_L . Но так как

$$r_L \propto H^{-1}, \quad l \propto [\rho(0, T)]^{-1},$$

то можно считать отношение $\rho(H, T)/\rho(0, T)$ зависящим лишь от комбинации $H/\rho(0, T)$. Для нормировки эту переменную обычно умножают на удельное сопротивление при температуре 300 К. Если металл достаточно чистый, то $\rho(0, 300 \text{ К})$ определяется только фононным

¹⁾ Разность длин между дугой и хордой равна $2r_L\varphi - 2r_L \sin \varphi \approx (1/3)r_L\varphi^3$, где 2φ — угловой размер дуги, r_L — радиус дуги. Если считать $r_L\varphi \sim l$, то разность длин имеет порядок $l(l/r_L)^2$, т. е. относительный порядок поправки $(l/r_L)^2$.

рассеянием и не зависит от примесей, т.е. $\rho(0, 300 \text{ К})$ можно рассматривать как характеристику данного металла. Вычитая из отношения $\rho(H, T)/\rho(0, T)$ единицу, получаем

$$\frac{\Delta\rho}{\rho(0, T)} = f\left(\frac{\rho(0, 300 \text{ К}) H}{\rho(0, T)}\right).$$

Это и есть правило Колера.

Следует еще раз подчеркнуть, что это правило не является строгим для анизотропного металла. Если анизотропия играет существенную роль, например, при наличии открытых траекторий или в случае магнитного пробоя (§ 10.7), то возникают сильные отклонения от правила Колера. Кроме того, оно, очевидно, будет наверняка нарушаться, если зависимость сопротивления от поля происходит не только от искривления электронных траекторий, но и по другим причинам, как это имеет место при наличии магнитных примесей (§ 4.6) или когда становится существенной квантовая поправка к сопротивлению (§ 11.3).

§ 5.3. Гальваномагнитные явления в сильном магнитном поле. Замкнутые траектории

Теперь рассмотрим другой предельный случай $\Omega\tau \gg 1$, т.е. сильное магнитное поле (Лифшиц, Азбель, Каганов, 1956) [15]. Здесь мы предположим произвольный энергетический спектр. Введем малый параметр $\gamma = (\Omega\tau)^{-1}$ и найдем решение уравнения (5.18) методом последовательных приближений. Существенным при этом является то обстоятельство, что интеграл столкновений $I(\psi)$ является линейным относительно ψ . Пусть

$$\psi = \sum_k \psi_k, \quad (5.26)$$

где $\psi_k \sim \gamma^k$. В нулевом приближении из (5.18) получаем

$$\partial\psi_0/\partial t_1 = 0. \quad (5.27)$$

В первом приближении ¹⁾

$$\partial\psi_1/\partial t_1 - I(\psi_0) = e\mathbf{v}\mathbf{E}. \quad (5.28)$$

Во втором приближении

$$\partial\psi_2/\partial t_1 - I(\psi_1) = 0. \quad (5.29)$$

Следующие приближения аналогичны последнему уравнению.

¹⁾ Удобно приписать правую часть уравнения (5.18) к уравнению первого приближения. В этом случае ψ_0 определяется электрическим полем (см. (5.32)), а следующие приближения выражаются через ψ_0 .

Из (5.27) получаем $\psi_0 = C_0$, где C_0 — константа. Таким образом, ψ_0 не зависит от t_1 . Из (5.28) находим

$$\psi_1 = \int_0^{t_1} [I(C_0) + e\mathbf{v}(t_2) \mathbf{E}] dt_2 + C_1. \quad (5.30)$$

Все другие уравнения дают

$$\psi_k = \int_0^{t_1} I(\psi_{k-1}) dt_2 + C_k \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (5.31)$$

Первый член в (5.30) и (5.31) мы обозначим через $\tilde{\psi}_k$. Константы C_k можно определить посредством усреднения уравнений (5.28), (5.29), ... Конечность функции ψ во всех случаях дает

$$\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial t_1} = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \frac{\partial \psi}{\partial t_1} dt_1 = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{\psi(T_1) - \psi(0)}{T_1} = 0.$$

Поэтому мы получаем

$$-\overline{I(\psi_0)} = e\mathbf{E}\bar{\mathbf{v}}, \quad \overline{I(\psi_k)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Применяя обозначения $\psi_k = \tilde{\psi}_k + C_k$ и $\overline{I(\text{const})} = I_0$, находим

$$-I_0(C_0) = e\mathbf{E}\bar{\mathbf{v}}, \quad (5.32)$$

$$-I_0(C_k) = \overline{I(\tilde{\psi}_k)} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (5.33)$$

Последние уравнения определяют константы C_k .

Рассмотрим случай замкнутых орбит. При этом v_x и v_y периодичны, и $\bar{v}_x = \bar{v}_y = 0$. Из (5.32) мы заключаем, что C_0 зависит лишь от $\bar{v}_z E_z$. Следовательно, члены, пропорциональные E_x и E_y , могут быть только в ψ_1 . Определяя v_x и v_y из уравнений (5.4), получаем

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \int_0^{t_1} \frac{c}{H} \left(E_y \frac{dp_x}{dt_2} - E_x \frac{dp_y}{dt_2} \right) + \varphi(t_1) E_z + C_1 = \\ &= C_1 + \frac{c}{H} [E_y (p_x - p_x(0)) - E_x p_y] + \varphi(t_1) E_z, \end{aligned} \quad (5.34)$$

где

$$\varphi(t_1) E_z = \int_0^{t_1} I(C_0) dt_2 + e \int_0^{t_1} v_z(t_2) dt_2 E_z,$$

и начало отсчета времени t_1 выбрано так, что $p_y(0) = 0$.

Определим, например, компоненту тока j_x . Находим в первом приближении

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{2He^2}{(2\pi\hbar)^3 c} \int dp_z \int_0^T v_x(t_1) \psi_1 dt_1 = -\frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int dp_z \int_0^T \psi(t_1) \frac{dp_y}{dt_1} dt_1 = \\ &= -\frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int dp_z \left[\int_0^T [p_x - p_x(0)] E_y \frac{c}{H} \frac{dp_y}{dt_1} dt_1 - \int_0^T p_y E_x \frac{c}{H} \frac{dp_y}{dt_1} dt_1 + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T C_1 \frac{dp_y}{dt_1} dt_1 + \int_0^T \varphi(t_1) E_z \frac{dp_y}{dt_1} dt_1 \right] \end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались уравнением $v_x = -(c/eH) dp_y/dt_1$ и формулой (5.34)). Второй и третий из этих интегралов, а также часть первого интеграла с $p_x(0)$ равны нулю вследствие периодичности p_y : $p_y(T) = p_y(0)$. Следовательно, xy -компонента тензора проводимости равна

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= -\frac{2ec}{(2\pi\hbar)^3 H} \int dp_z \int_0^T p_x \frac{dp_y}{dt_1} dt_1 = -\frac{2ec}{(2\pi\hbar)^3 H} \int dp_z \oint p_x dp_y = \\ &= \frac{2ec}{(2\pi\hbar)^3 H} \int dp_z [S_e(p_z, \mu) - S_h(p_z, \mu)]. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Здесь S_e и S_h — площади сечений ферми-поверхности плоскостью $p_z = \text{const}$ в случаях, если внутри контура находится область меньших (S_e) или больших (S_h) энергий. Изменение знака для дырок вытекает из того, что их движение вдоль орбиты происходит в противоположном направлении по отношению к электрону. Общий знак может быть легко получен сравнением с изотропным случаем ($p_x = p_\perp \cos \Omega t_1$, $p_y = -p_\perp \sin \Omega t_1$). Интегрирование по dp_z дает

$$\sigma_{xy} = (ec/H)(n_e - n_h), \quad (5.36)$$

где n_e — плотность электронов, а n_h — плотность дырок ($n = 2V_F/(2\pi\hbar)^3$, V_F — объем импульсного пространства, заключенный внутри соответствующей части ферми-поверхности). Здесь мы предполагаем, что эти числа не равны. Формула (5.36) имеет смысл также и в том случае, когда ферми-поверхность открытая, но при данном направлении поля все ее сечения плоскостями $p_z = \text{const}$ замкнуты. При этом под V_F надо понимать объем, ограниченный ферми-поверхностью и гранями зоны Бриллюэна.

Другое заключение, которое можно сделать из вида j_x , это отсутствие членов, линейных по γ , в компоненте σ_{xx} тензора проводимости. Следовательно, σ_{xx} будет по крайней мере второго порядка по γ .

Наличие таких членов может быть продемонстрировано с помощью уравнения следующего приближения. То же самое относится и к σ_{yy} . Из выражения для j_x следует, что σ_{xz} — первого порядка по γ . Можно показать, что σ_{yz} — первого порядка по γ , а σ_{zz} — нулевого порядка. Все коэффициенты, линейные по γ , обладают свойством $\sigma_{ik} = -\sigma_{ki}$. Это следствие общего принципа симметрии кинетических коэффициентов Онсагера: $\sigma_{ik}(\mathbf{H}) = \sigma_{ki}(-\mathbf{H})$ (гл. 6).

Таким образом, весь тензор проводимости может быть записан в виде

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma^2 a_{xx} & \gamma a_{xy} & \gamma a_{xz} \\ \gamma a_{yx} & \gamma^2 a_{yy} & \gamma a_{yz} \\ \gamma a_{zx} & \gamma a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

Отсюда можно получить тензор сопротивления $\rho_{ik} = \sigma_{ik}^{-1}$. Сохраняя члены низшего порядка по γ , имеем

$$\rho_{ik} = \begin{pmatrix} b_{xx} & \gamma^{-1} b_{xy} & b_{xz} \\ \gamma^{-1} b_{yx} & b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & b_{zz} \end{pmatrix}, \quad (5.38)$$

где

$$\begin{aligned} b_{xx} &= (a_{yy}a_{zz} - a_{zy}a_{yz})(a_{xy}a_{yx}a_{zz})^{-1}, & b_{xy} &= a_{yx}^{-1}, \\ b_{yy} &= (a_{xx}a_{zz} - a_{xz}a_{zx})(a_{xy}a_{yx}a_{zz})^{-1}, & b_{yx} &= a_{xy}^{-1}, \\ b_{zz} &= a_{zz}^{-1}, & b_{xz} &= a_{zy}(a_{xy}a_{zz})^{-1}, & b_{yz} &= -a_{zx}(a_{yx}a_{zz})^{-1}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Определяя, как обычно, константу Холла

$$R = E_y/j_x H = \rho_{yx}/H = (\sigma_{xy}H)^{-1},$$

получаем

$$R = [(n_e - n_h)ec]^{-1}. \quad (5.40)$$

Таким образом, в сильном магнитном поле константа Холла действительно определяется числами электронов и дырок. Компоненты ρ_{xx} и ρ_{yy} не зависят от H . Это значит, что в больших полях поперечные компоненты тензора сопротивления имеют тенденцию к насыщению¹⁾.

До настоящего момента мы рассматривали случай $n_e \neq n_h$. Однако, как уже говорилось, каждый металл, содержащий четное число электронов на одну ячейку, должен иметь одинаковое число электронов

¹⁾ Слабый линейный рост магнитосопротивления при $\Omega\tau \gg 1$, наблюдавшийся в щелочных металлах (поверхность Ферми близка к сфере), достаточно удовлетворительно объясняется искривлением линий тока в реальных неоднородных образцах [16].

и дырок. В этом случае линейный член в компоненте σ_{xy} исчезает и она становится квадратичной по γ . Учитывая это, получаем

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma^2 a_{xx} & \gamma^2 a_{xy} & \gamma a_{xz} \\ \gamma^2 a_{yx} & \gamma^2 a_{yy} & \gamma a_{yz} \\ \gamma a_{zx} & \gamma a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Обратный тензор имеет вид

$$\rho_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma^{-2} b_{xx} & \gamma^{-2} b_{xy} & \gamma^{-1} b_{xz} \\ \gamma^{-2} b_{yx} & \gamma^{-2} b_{yy} & \gamma^{-1} b_{yz} \\ \gamma^{-1} b_{zx} & \gamma^{-1} b_{zy} & b_{zz} \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

Значит, в этом случае поперечные компоненты тензора сопротивления растут квадратично с H .

Обычно в экспериментах по эффекту Холла получают разность полей Холла для разных знаков $\mathbf{H}$:

$$R = [E_y(\mathbf{H}) - E_y(-\mathbf{H})] / 2H \quad j_x = [\rho_{yx}(\mathbf{H}) - \rho_{yx}(-\mathbf{H})] / 2H.$$

Очевидно, для случая $n_e = n_h$, где $\rho_{yx} \propto H^2$, эта разность равна нулю. Однако само E_y не постоянно, а растет с полем как H^2 .

§ 5.4. Гальваномагнитные явления в сильном поле и топология открытых ферми-поверхностей

Теперь мы перейдем к открытым ферми-поверхностям (Лифшиц, Песчанский, 1958) [17]. Траектории электрона, определяемые уравнениями $\varepsilon = \text{const}$, $p_z = \text{const}$, в этом случае могут быть как открытыми, так и замкнутыми. Мы рассмотрим несколько примеров, которые чаще всего осуществляются в металлах.

1. Предположим, что поверхность постоянной энергии топологически эквивалентна цилиндру (рис. 5.2а). Тогда, если магнитное поле перпендикулярно оси цилиндра, траектория в импульсном пространстве будет открытой. Этот случай продемонстрирован на рис. 5.3а. Однако если магнитное поле не перпендикулярно оси цилиндра, то орбиты замкнуты. Поэтому в случае цилиндрической поверхности открытые траектории имеют место, когда направление магнитного поля лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра.

2. Рассмотрим случай, при котором ферми-поверхность представляет собой нечто вроде решетки, состоящей из трубок (рис. 5.2б¹⁾). Если магнитное поле направлено по нормали к одной из плоскостей, то получаются лишь замкнутые траектории (рис. 5.3б). Если теперь начать

¹⁾ Случай, изображенный на рис. 5.2б, является более редким.

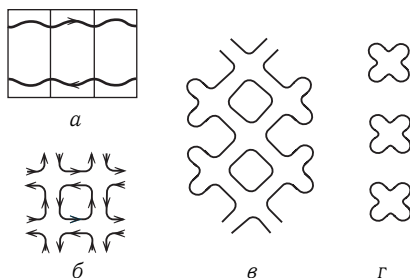


Рис. 5.3

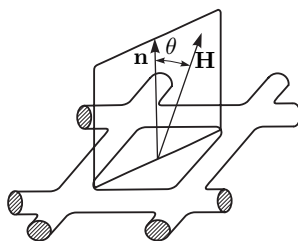


Рис. 5.4

поворачивать магнитное поле, то в пределах ограниченного интервала углов вблизи такой нормали будут получаться траектории, открытые в одном направлении. Например, увеличение угла θ на рис. 5.4 приведет к непрерывному изменению траекторий от типа 5.3 в к 5.3 г. Однако если магнитное поле вращается, находясь все время в одной из базисных плоскостей, то оно всегда будет перпендикулярно оси одной из трубок, и это означает наличие открытых траекторий.

Указанные топологические особенности могут быть изображены с помощью стереографической проекции (рис. 5.5). Центр круга соответствует нормали на рис. 5.4, а граница круга соответствует $\theta = 90^\circ$. Заштрихованные участки представляют области, где встречаются открытые траектории. Сплошные линии от центра к границе и сама окружность $\theta = 90^\circ$ соответствуют открытым траекториям, возникающим, когда поле поворачивается в одной из главных плоскостей ¹⁾. Точки в центре и на окружности соответствуют направлениям, где опять имеются лишь замкнутые траектории; штриховые линии ограничивают области траекторий, хотя и замкнутых, но продолжающихся на много периодов обратной решетки.

Рассмотрим простейший вариант — гофрированный цилиндр в случае, когда магнитное поле перпендикулярно оси цилиндра (рис. 5.6). Расположение осей указано на рисунке (ось цилиндра по p_x). Рассмотрим уравнение движения (5.4). Из рис. 5.6 следует, что в направлении p_x электрон может двигаться до бесконечности, но в направлении p_y движение ограничено. Усредняя уравнения (5.5), приходим к выводу,

¹⁾ В действительности у металлов, имеющих ромбическую, тетрагональную и кубическую решетки, существуют добавочные направления открытостей, лежащие в плоскостях, образующих рациональные углы с базисными плоскостями. Это приводит к появлению на рис. 5.5 дополнительных отрезков, идущих от центров по радиусам на конечную длину [18]. Мы не останавливаемся подробно на этом вопросе, поскольку нашей целью является не изучение конкретных металлов, а классификация особенностей компонент ρ_{ik} .

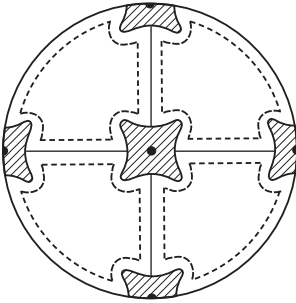


Рис. 5.5

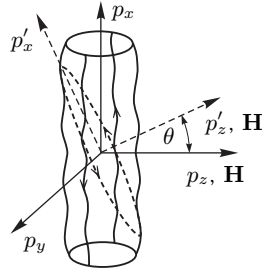


Рис. 5.6

что $\bar{v}_x = 0$, а $\bar{v}_y \neq 0$. Последнее видно из того, что

$$\bar{v}_y = (c/eH) \lim_{T_1 \rightarrow \infty} [p_x(T_1) - p_x(0)]/T_1,$$

а электрон может двигаться до бесконечности в направлении p_x . Итак, в противоположность случаю замкнутых траекторий, где $\bar{v}_x = \bar{v}_y = 0$, здесь лишь $\bar{v}_x = 0$. Поэтому из (5.32) мы можем заключить, что $\psi_0 = C_0$ зависит не только от E_z , но также и от E_y . Следовательно, компонента σ_{yy} уже не имеет малого множителя, так же как и σ_{zz} -компонента. Конечно, недиагональные компоненты $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ тоже не будут малы в этом случае. Остальные компоненты σ_{ik} имеют тот же порядок величины, что и в случае замкнутых орбит.

Итак, тензор проводимости имеет вид

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma^2 a_{xx} & \gamma a_{xy} & \gamma a_{xz} \\ \gamma a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ \gamma a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

Отсюда находим тензор сопротивления

$$\rho_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma^{-2} b_{xx} & \gamma^{-1} b_{xy} & \gamma^{-1} b_{xz} \\ \gamma^{-1} b_{yx} & b_{yy} & b_{yz} \\ \gamma^{-1} b_{zx} & b_{zy} & b_{zz} \end{pmatrix}. \quad (5.44)$$

Итак, в данном случае $\rho_{xx} \propto H^2$. Сравнивая ρ_{xy} в (5.44) с выражением в (5.38) для случая замкнутых орбит, замечаем, что эта компонента в обоих случаях линейно зависит от H , однако можно показать, что соответствующие константы b_{xy} не совпадают друг с другом.

Теперь интересно найти, как происходит изменение зависимости гальваномагнитных коэффициентов от магнитного поля, если мы переходим от замкнутых траекторий к открытым, меняя постепенно направление магнитного поля. Для этого мы рассмотрим случай, когда магнитное поле наклонено под малым углом к направлению,

перпендикулярному оси цилиндра (рис. 5.6, штриховые оси). Длина траектории электрона, очевидно, возрастает при уменьшении угла θ пропорционально θ^{-1} . Следовательно, период движения по ней, согласно формуле (5.6), растет пропорционально θ^{-1} ($v_{\perp}$ всегда порядка v) и, значит, частота вращения по такой орбите

$$\Omega \sim \Omega_0 \theta, \quad (5.45)$$

где $\Omega_0 \sim eH/mc$ — обычная циклотронная частота. При достаточно малом угле θ частота Ω становится столь малой, что нарушается условие $\Omega\tau \gg 1$. Очевидно, именно при этом происходит переход от σ_{ik} типа (5.37) к типу (5.43). Итак, соответствующая область углов есть $\theta \sim (\Omega_0\tau)^{-1} \sim \gamma \ll 1$.

Тензор $\rho_{ik} = \sigma_{ik}^{-1}$ при этих углах плавно меняется от формы (5.38) до формы (5.44). В частности, компонента ρ_{xx} в малой области углов $\theta \sim \gamma \sim (\Omega_0\tau)^{-1}$ пропорциональна H^2 , а при всех остальных углах постоянна. Следовательно, зависимость сопротивления от угла должна иметь вид, изображенный на рис. 5.7 а.

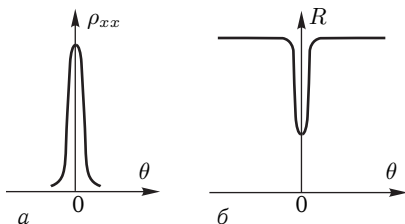


Рис. 5.7

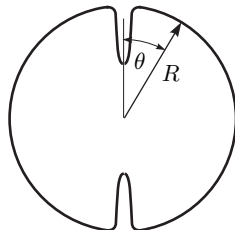


Рис. 5.8

Из выражения (5.44) мы можем также сделать заключение относительно константы Холла. Компонента ρ_{xy} линейна по H как для больших, так и для малых углов, но коэффициенты пропорциональности различны в обоих случаях. Переход от одного из них к другому происходит в узкой области углов $\theta \sim \gamma$. Более подробный анализ показывает, что константа Холла должна быть меньше в области малых углов (рис. 5.7 б). Если поле увеличивается, ширина минимума уменьшается, но его глубина, равно как высота крыльев, не меняется. Отметим также, что для ферми-поверхности типа изображенной на рис. 5.2 а константа Холла в сильных полях не зависит от углов (за исключением очень малых углов θ) и равна $[(n_e - n_h)ec]^{-1}$, где n_e , n_h определяются объемами в импульсном пространстве, ограниченными ферми-поверхностью и гранями зоны Бриллюэна (рис. 5.8). Об этом уже говорилось в § 5.3.

Если топология ферми-поверхности отвечает рис. 5.2 в, то угловая зависимость ρ_{xx} в сильных полях может иметь особые точки нескольких различных типов. Рассмотрим стереографическую проекцию

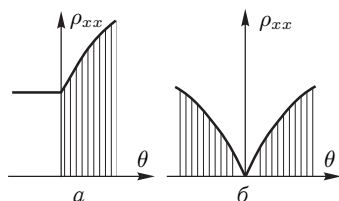


Рис. 5.9

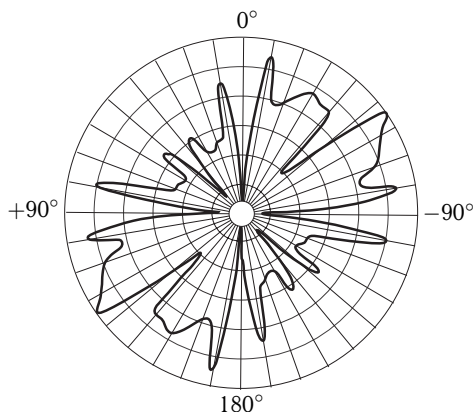


Рис. 5.10

на рис. 5.5. Если мы идем из одного из четырех секторов в другой, пересекая при этом диаметр, то это даст сингулярность типа изображенной на рис. 5.7 *a*, так как эти диаметры, окруженные штриховыми линиями, представляют направления, перпендикулярные к цилиндрическим частям ферми-поверхности.

Другую сингулярность можно получить, пересекая границу между заштрихованной областью и незаштрихованной. Заштрихованные области представляют направления поля, при которых траектория открыта в одном направлении. Следовательно, сопротивление в этой области должно расти как H^2 , а в незаштрихованной оставаться постоянным. Этот тип сингулярности изображен на рис. 5.9 *a*.

Есть также выделенные направления поля, обозначенные точками на стереографической проекции рис. 5.5. При этих направлениях имеются лишь замкнутые траектории, и поэтому ρ_{xx} остается постоянным. Но такие точки окружены заштрихованными областями, где $\rho_{xx} \propto H^2$, т. е. велико. Этот тип сингулярности изображен на рис. 5.9 *б*.

Итак, мы видим, что изучение сопротивления монокристаллического образца металла в сильном магнитном поле в зависимости от направления поля и его значения позволяет определить топологию ферми-поверхности. Конечно, этот метод не дает возможности узнать что-либо о замкнутых частях ферми-поверхности. Однако он сравнительно просто осуществим на практике и, действительно, был применен для изучения ферми-поверхности во многих металлах. Следует отметить, что в большинстве случаев ферми-поверхности имеют открытые части.

На рис. 5.10 в качестве примера угловой диаграммы для ρ_{xx} приведен результат, полученный для золота [19].

Ограничением этого метода является условие $\Omega\tau \gg 1$. Это условие можно переписать в следующей форме: $vT \ll v\tau$ или $r_L \ll l$, где

r_L — ларморовский радиус, а l — длина свободного пробега. Один способ удовлетворить этому условию — увеличение поля (при этом уменьшается r_L), другой способ — очистка металла и понижение температуры (при этом растет l). Ларморовский радиус для полей порядка 10^4 Э имеет порядок $r_L \sim c\mu_0/eH \sim 10^{-3}$ см. В области остаточного сопротивления vskip2pt

$$l \sim (n_i Q_{\text{эф}})^{-1} \sim (10^{22} c_i 10^{-16})^{-1} \sim 10^{-6}/c_i.$$

Следовательно, условию $r_L \ll l$ можно удовлетворить, если атомная концентрация примеси будет меньше 10^{-3} , что вполне осуществимо.

§ 5.5. Магнитосопротивление поликристаллов

До сих пор мы рассматривали свойства монокристаллов. Если образец представляет собой поликристалл, то необходимо произвести усреднение по ориентациям кристаллитов. При наличии открытых траекторий большая анизотропия тензора проводимости в сильном магнитном поле приводит к весьма своеобразным зависимостям $\rho(H)$ (Дрейзин, Дыхне, 1972) [20]. Мы изложим здесь теорию лишь для одного случая — слабо гофрированного цилиндра. Читателя, интересующегося другими возможными случаями (сильно гофрированный цилиндр, пространственная сетка), мы отсылаем к оригинальной статье.

В § 3.5 была найдена связь между коэффициентом диффузии и проводимостью (3.28). В рассматриваемом случае оказывается проще находить коэффициент диффузии. Представим себе, что электронная плотность меняется в пространстве и во времени. Эти изменения связаны уравнением непрерывности, выражающим закон сохранения числа электронов,

$$\partial n_e / \partial t + \text{div } \mathbf{j}_D = 0. \quad (5.46)$$

Подставляя сюда выражение для диффузионного потока (3.26), получаем известное уравнение диффузии

$$\partial n_e / \partial t = D \Delta n_e.$$

Согласно этому уравнению среднее расстояние, проходимое электроном за единицу времени, определяется формулой

$$\overline{r^2(t)} \sim Dt. \quad (5.47)$$

Конечно, это справедливо лишь для $t \gg \tau$, где t — время столкновений. Формула (5.47) послужит нам для нахождения коэффициента D .

Пусть электрон движется в течение какого-то времени t . Квадрат его смещения в направлении, перпендикулярном магнитному полю, в кристаллитах определенной ориентации есть $D(\theta) dt$; здесь θ характеризует ориентацию (рис. 5.6), а dt — время, которое электрон проводит

в кристаллитах с ориентацией в интервале θ и $\theta + d\theta$. Это время есть произведение t на вероятность встретить такой кристаллит. В случае достаточно однородного распределения ориентаций кристаллитов вероятность пропорциональна телесному углу, т. е.

$$2\pi \sin(\pi/2 - \theta) d\theta \sim d\theta.$$

Итак, $dt \sim t d\theta$. Для поперечной проводимости в «нормальных» кристаллитах с $\theta \gg \gamma \sim (\Omega_0 \tau)^{-1}$ имеем формулу § 5.4 $\sigma \sim \sigma_0 (\Omega \tau)^{-2}$. При малых углах $1 \gg \theta \gg \gamma$ $\Omega \sim \Omega_0 \theta$ (см. (5.45)). Подставляя это в σ , получаем $\sigma \sim \sigma_0 \gamma^2 / \theta^2$. То же самое переносится на D , т. е.

$$D(\theta) \sim D_0 \gamma^2 / \theta^2. \quad (5.48)$$

Поскольку это справедливо вплоть до углов $\theta \sim \gamma$, то полное смещение равно

$$\overline{r^2(t)} \sim t \int_{\gamma}^{\pi/2} D_0 (\gamma^2 / \theta^2) d\theta \sim t D_0 \gamma. \quad (5.49)$$

Однако произведенный вывод не вполне точен. Он не учитывает того, что у кристаллитов с очень малыми θ коэффициент диффузии очень велик, т. е. диффузия в поперечном направлении происходит быстро. При этом может оказаться, что смещение электронов в таких кристаллитах ограничено не временем наблюдения, а просто границами. Обозначим соответствующий критический угол через θ_0 и предположим, что $\theta_0 \gg \gamma$ (это будет доказано ниже). Тогда

$$\overline{r^2(t)} = (\overline{r^2})_1 + (\overline{r^2})_2,$$

где $(\overline{r^2})_1$ — общее смещение в кристаллитах с $\theta > \theta_0$, а $(\overline{r^2})_2$ — смещение в кристаллитах с $\theta < \theta_0$. Для первых можно воспользоваться интегралом (5.49), взяв в качестве нижнего предела не γ , а θ_0 . При этом получаем

$$D_1 \sim (\overline{r^2})_1 / t = D_0 \gamma^2 / \theta_0.$$

Вклад в D от кристаллитов с $\theta < \theta_0$ должен рассматриваться иначе. Движение электрона можно представить себе следующим образом. Поскольку поперечная диффузия в неособых кристаллитах мала, то электрон в основном диффундирует вдоль магнитного поля. Это происходит до тех пор, пока он не встречает особый кристаллит (с $\theta < \theta_0$). При этом электрон смещается в поперечном направлении на длину, соответствующую размеру кристаллита (d). После этого все повторяется. Этот процесс носит вероятностный характер, и поэтому движение вдоль поля можно рассматривать, как «свободный пробег», а встречу с особым кристаллитом как «рассеяние». Длина «свободного пробега» имеет порядок

$$\mathcal{L} \sim (nd^2)^{-1},$$

где n — число особых кристаллитов в единице объема, а d^2 играет роль «эффективного сечения». Величина nd^3 есть просто доля объема, занятая особыми кристаллитами, т. е., иначе говоря, вероятность ориентации $\theta < \theta_0$. Но эта вероятность порядка θ_0 , а следовательно, $nd^3 \sim \theta_0$ и

$$\mathcal{L} \sim / \theta.$$

Поскольку коэффициент диффузии вдоль магнитного поля порядка D_0 , (см. (5.43)), то время пролета дистанции $\mathcal{L}$ есть

$$\tau_1 \sim \mathcal{L} / \mathcal{D} \sim (/ \theta) \mathcal{D}^-.$$

За это время смещение в поперечном направлении соответствует размеру кристаллита, т. е. d . Следовательно, для особых кристаллитов коэффициент поперечной диффузии есть

$$D_2 \sim d^2 / \tau_1 \sim D_0 \theta_0^2.$$

Итак, полный коэффициент диффузии равен

$$D \sim D_1 + D_2 \sim D_0 \left(\theta_0^2 + \gamma^2 / \theta_0 \right). \quad (5.50)$$

Теперь остается определить θ_0 . Поскольку это угол, при котором смещение в одном кристаллите становится порядка d , то переход от режима при $\theta > \theta_0$ к режиму при $\theta < \theta_0$ должен происходить непрерывным образом. Следовательно, θ_0 определяется из условия, чтобы оба члена в (5.50) были одного порядка, т. е.

$$\theta_0 \sim \gamma^{2/3}. \quad (5.51)$$

Эту оценку можно получить и иначе. В течение времени τ_1 электрон движется по всей длине $\mathcal{L}$ и в среднем проводит одинаковое время на любом участке. Значит, в особом кристаллите он проводит время $\tau_1 d / \mathcal{L}$. За это время его смещение в поперечном направлении будет порядка

$$\begin{aligned} [D(\theta_0) \tau_1 d / \mathcal{L}]^{1/2} &\sim \left[\left(D_0 \gamma^2 / \theta_0^2 \right) \left(\mathcal{L}^2 / D_0 \right) (d / \mathcal{L}) \right]^{1/2} \sim \\ &\sim \left(\gamma^2 \mathcal{L} d / \theta_0^2 \right)^{1/2} \sim d \gamma \theta_0^{-3/2} \end{aligned}$$

(здесь $D(\theta)$ выражается формулой (5.48), $\mathcal{L} \sim d / \theta_0$). Угол θ_0 определяется из условия, чтобы это смещение стало порядка d , откуда опять получается формула (5.51).

Если подставить эту формулу в (5.50), то получается $D \sim D_0 \gamma^{4/3}$, или

$$\sigma_{\perp} \sim \sigma_0 \gamma^{4/3}. \quad (5.52)$$

Как и раньше, надо учесть, что на опыте определяется не $\sigma_{\perp}$, а $\rho_{\perp}$. Взяв компоненту обратного тензора, получаем

$$\rho_{\perp} \approx \sigma_{\perp} / (\sigma_{\perp}^2 - \sigma_{xy}\sigma_{yx}).$$

Если $n_e \neq n_h$, то $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = (n_e - n_h)ec/H$. При этом $\sigma_{xy} \gg \sigma_{\perp}$, и мы имеем

$$\rho_{\perp} \approx \sigma_{\perp} / \sigma_{xy}^2 \sim \rho_0 \gamma^{-2/3}. \quad (5.53)$$

Если же $n_e = n_h$, то $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \sim \sigma_0 \gamma^2 \ll \sigma_{\perp}$. В этом случае

$$\rho_{\perp} \approx \sigma_{\perp}^{-1} \sim \rho_0 \gamma^{-4/3}. \quad (5.54)$$

Итак, оказывается, что при больших полях поперечное сопротивление поликристаллических образцов металла с поверхностью Ферми типа гофрированного цилиндра должно расти пропорционально $H^{2/3}$ при $n_e \neq n_h$ и $H^{4/3}$ при $n_e = n_h$. Интересно отметить, что неучет изменения режима диффузии при $\theta < \theta_0$ приводит к формуле (5.49), т. е. к $\sigma_{\perp} \sim \sigma_0 \gamma$. При этом $\sigma_{xy} \lesssim \sigma_0 \gamma$ и в обоих случаях, $n_e \neq n_h$ и $n_e = n_h$, получается $\rho_{\perp} \sim \rho_0 \gamma^{-1}$, т. е. $\rho_{\perp} \propto H$. Отличить этот закон от истинных можно лишь в очень больших полях, таких, что $(\Omega\tau)^{1/3} \gg 1$.

На опыте наблюдался линейный или близкий к нему рост сопротивления с полем. Этот результат впервые получен непосредственно в поликристаллическом образце (Капица, 1929) [21]. Та же зависимость получалась при усреднении угловой диаграммы сопротивления, найденной для монокристалла [22]. Однако последний способ не соответствует тому, что происходит в поликристаллах, ибо не учитывает описанные выше особенности движения электронов в случае большой анизотропии проводимости. Для рассмотренного случая гофрированного цилиндра этот способ обязательно дает линейную зависимость $\rho_{\perp}(H)$. Действительно, основной вклад в $\overline{\rho_{\perp}}$ дают углы $\theta \lesssim \gamma$, где $\rho_{xx} \sim \gamma^{-2}$. Следовательно,

$$\overline{\rho_{\perp}} \sim \int \rho_{xx}(\theta) d\theta \sim (\rho_0/\gamma^2) \gamma \sim \rho_0/\gamma.$$

В заключение следует отметить, что в проделанном нами выводе предполагалось, что каждый кристаллит обладает тензором σ_{ik} , свойственным монокристаллу при соответствующей ориентации. Это возможно лишь в том случае, если размер кристаллитов значительно больше ларморовского радиуса. Такое условие является одновременно минимальным требованием для выполнения неравенства $\Omega\tau \gg 1$, ибо движение электрона резко меняется при переходе из одного кристаллита в другой, а поэтому длина пробега не может быть меньше размера кристаллитов.

Глава 6

ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ТЕРМОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

§ 6.1. Термоэлектрические явления

В гл. 3 были рассмотрены такие явления, как проводимость, т. е. электрический ток, возникающий в металле под действием электрического поля, и теплопроводность, т. е. поток энергии под действием градиента температуры.

Рассмотрим теперь те явления, которые происходят при одновременном наличии электрического тока и градиента температуры. Для простоты мы начнем с изотропного случая. Если в металле создан небольшой градиент температуры и одновременно к нему приложено электрическое поле, то в нем возникают электрический ток и тепловой поток:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \beta \nabla T, \quad (6.1)$$

$$\mathbf{q} = \gamma \mathbf{E} + \zeta \nabla T. \quad (6.2)$$

Между коэффициентами β и γ существует связь, которая следует из так называемого принципа симметрии кинетических коэффициентов Онсагера. Этот принцип (вывод см., например, в [23]) заключается в следующем. Пусть к системе приложены некоторые обобщенные силы $X_1, \dots, X_n$. Под влиянием этих сил в системе возникают обобщенные токи $J_1, \dots, J_n$, которые связаны с силами соотношениями

$$J_i = - \sum_k \gamma_{ik} X_k. \quad (6.3)$$

Далее, пусть силы и токи определены таким образом, чтобы изменение со временем энтропии системы могло быть записано в виде

$$\dot{S} = - \sum_i J_i X_i. \quad (6.4)$$

В этом случае, согласно принципу Онсагера, матрица коэффициентов γ_{ik} должна быть симметричной, т. е.

$$\gamma_{ik} = \gamma_{ki}. \quad (6.5)$$

В рассматриваемом случае изменение энтропии со временем происходит по двум причинам. Во-первых, благодаря тепловому потоку из единицы объема за единицу времени уходит количество теплоты, равное $\text{div } \mathbf{q}$. Во-вторых, за счет работы, совершаемой электрическим полем, в каждой единице объема за единицу времени диссипируется энергия, равная $\mathbf{jE}$. Отсюда получаем

$$\dot{S} = - \int \frac{\text{div } \mathbf{q}}{T} dV + \int \frac{\mathbf{jE}}{T} dV.$$

Взяв первый интеграл по частям, имеем

$$\dot{S} = \int \mathbf{q} \nabla (T^{-1}) dV + \int \frac{\mathbf{jE}}{T} dV. \quad (6.6)$$

Если в качестве обобщенных токов взять $\mathbf{j}$ и $\mathbf{q}$, то, согласно (6.4), роль обобщенных сил будут играть $-\mathbf{E}/T$ и $-\nabla (T^{-1}) = T^{-2} \nabla T$. Записывая соотношения (6.1) и (6.2) в виде

$$\mathbf{j} = -\sigma T (-\mathbf{E}/T) + \beta T^2 (\nabla T/T^2),$$

$$\mathbf{q} = -\gamma T (-\mathbf{E}/T) + \zeta T^2 (\nabla T/T^2),$$

получаем из (6.5)

$$\gamma = -\beta T. \quad (6.7)$$

На опыте всегда легче контролировать электрический ток, чем электрическое поле внутри металла. Ввиду этого мы решим систему уравнений (6.1) и (6.2) относительно $\mathbf{E}$. Отсюда получается

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} + Q \nabla T, \quad (6.8)$$

$$\mathbf{q} = \Pi \mathbf{j} - \kappa \nabla T, \quad (6.9)$$

где $\rho = \sigma^{-1}$, $Q = -\beta/\sigma$, $\Pi = \gamma/\sigma$, $\kappa = \gamma\beta/\sigma - \zeta$. Благодаря соотношениям (6.7) имеем

$$\Pi = QT, \quad \kappa = -(T\beta^2/\sigma + \zeta). \quad (6.10)$$

Для металлов первый член в скобке всегда значительно меньше второго (см. ниже (6.19)). Именно поэтому в § 3.4 вместо κ вычислялся коэффициент $-\zeta$.

Из уравнения (6.8) следует, что в неравномерно нагретом проводнике в отсутствие тока возникает электрическое поле

$$\mathbf{E} = Q \nabla T.$$

Если записать $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, то отсюда вытекает, что

$$-d\varphi/dT = Q. \quad (6.11)$$

Это термоэлектродвижущая сила, отнесенная к единице изменения температуры. Она называется дифференциальной термо-э.д.с.

Теперь рассмотрим термоэлемент. Схематически он представляет собой кольцо, спаянное из двух разных металлов. Здесь, естественно, возникает вопрос о граничных условиях на спае двух металлов. Поскольку границы Ферми в двух металлах различны, то при установлении электрического контакта электроны начнут переходить из одного металла в другой. Поэтому в области границы возникнет

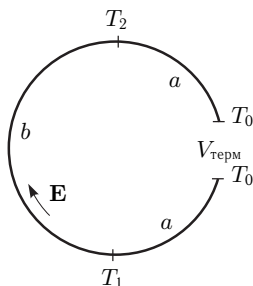


Рис. 6.1

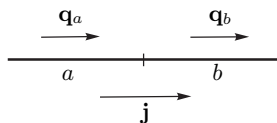


Рис. 6.2

электрический двойной слой. Толщина этого слоя порядка межатомных расстояний, т.е. исчезающе мала в тех масштабах, с которыми мы имеем дело. На таком слое происходит скачок электрического потенциала, который выравнивает границы Ферми двух металлов, находящихся в контакте. Этот скачок называется контактной разностью потенциалов.

Найдем электродвижущую силу термоэлемента из металлов a и b в отсутствие тока, т.е. когда кольцо прервано в каком-либо месте, например в металле a (рис. 6.1). Предполагается, что температура образовавшихся при этом концов одинакова (T_0). Температура спаев считается равной T_1 и T_2 . Из уравнения (6.8) при $\mathbf{j} = 0$ имеем

$$\begin{aligned} V_{\text{терм}} &= \oint Q (dT/dl) dl = \\ &= \int_{T_0}^{T_1} Q_a dT + \int_{T_1}^{T_2} Q_b dT + \int_{T_2}^{T_0} Q_a dT = \int_{T_1}^{T_2} (Q_b - Q_a) dT. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Итак, термо-э.д.с. выражается через разность дифференциальных термо-э.д.с. двух металлов.

Теперь рассмотрим так называемый эффект Пельтье. Предположим, что мы пропускаем электрический ток через спай двух металлов

(рис. 6.2). Будем считать, что температура вдоль всего комбинированного проводника постоянна. Согласно (6.9) наличие тока приведет к возникновению теплового потока. Однако из-за того, что константы Π в разных металлах различны, тепловой поток будет разным в двух металлах. Ввиду этого избыточное тепло будет выделяться или поглощаться в спае. Количество этой теплоты будет равно

$$W_{ab} = q_a - q_b = (\Pi_a - \Pi_b) j. \quad (6.13)$$

Величина Π называется коэффициентом Пельтье. Отметим, что знак эффекта, т. е. будет ли в спае поглощаться или выделяться тепло, зависит от направления тока. Согласно (6.10) знание дифференциальной термо-э.д.с. достаточно для нахождения и этого эффекта.

Наконец, рассмотрим эффект Томсона. Он заключается в том, что в неравномерно нагретом проводнике выделяется иное количество теплоты, чем при постоянной температуре. Количество теплоты, выделяющейся в единице объема проводника за единицу времени, равно, как мы уже писали,

$$W = \mathbf{jE} - \operatorname{div} \mathbf{q}.$$

Подставляя сюда формулы (6.8) и (6.9) и считая, что вся неоднородность происходит лишь от градиента температуры, получаем

$$W = \rho j^2 + \mathbf{j} Q \nabla T - \mathbf{j} (d\Pi/dT) \nabla T. \quad (6.14)$$

Первый член в этом выражении есть обычное джоулево тепло, а второй член представляет добавочное тепло, выделяющееся благодаря наличию градиента температуры. Этот член записывается в виде

$$W_T = -\mu_T \mathbf{j} \nabla T, \quad (6.15)$$

где μ_T называется коэффициентом Томсона. Из (6.14) и (6.10) получаем

$$\mu_T = -Q + d\Pi/dT = T dQ/dT. \quad (6.16)$$

Томсоновское тепло в отличие от джоулева пропорционально j , т. е. меняет знак при изменении направления тока. Это дает возможность легко отделить его от джоулева тепла. Достаточно произвести два эксперимента с противоположными направлениями тока.

Итак, оказывается, что все термоэлектрические явления в изотропном случае описываются одним коэффициентом, а именно дифференциальной термо-э.д.с. Q .

Найдем теперь этот коэффициент для изотропной модели металла в предположении упругости столкновений. Как и в § 3.4, воспользуемся моделью квазичастиц и применим кинетическое уравнение в форме (3.18). Подставляя $f = f_0 + f_1$, где $f_1 \ll f_0$, получаем

$$(\partial f_0 / \partial |\xi|) [e \mathbf{E} \mathbf{v} - (\xi/T) \mathbf{v} \nabla T] = -f_1 / \tau. \quad (6.17)$$

Отсюда для электрического тока находим

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= 2 \int (e \operatorname{sign} \xi) (\mathbf{v} \operatorname{sign} \xi) f \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = 2e \int \mathbf{v} f \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= -e^2 \int \mathbf{v} (\mathbf{v} \mathbf{E}) \tau \nu(\varepsilon) \frac{\partial f_0}{\partial |\xi|} d\xi \frac{d\Omega}{4\pi} + \\ &+ e \int \mathbf{v} (\mathbf{v} \nabla T) \frac{\xi}{T} \tau \nu(\varepsilon) \frac{\partial f_0}{\partial |\xi|} d\xi \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (6.18) \end{aligned}$$

Нас интересует второе слагаемое в (6.18). После интегрирования по углам остается интеграл по ξ . В первом приближении подынтегральная функция нечетна по ξ , и интеграл обращается в нуль. Ввиду этого надо разложить множитель при $\partial f_0 / \partial |\xi|$ по ξ :

$$(\nu v^2 \tau)_\xi \approx (\nu v^2 \tau)_\mu + \xi (d/d\mu) (\nu v^2 \tau)_\mu.$$

После этого интеграл по ξ приобретает тот же вид, что и (3.20'). Взяв его, находим коэффициент β (см. (6.1)):

$$\beta = -(\pi^2/9) e T (d/d\mu) (\nu^2 \tau \nu)_\mu. \quad (6.19)$$

Используя соотношение $Q = -\beta/\sigma$, находим

$$Q = \frac{\pi^2 T}{3e} \frac{d}{d\mu} \left[\ln \left(\nu^2 \tau \nu \right)_\mu \right]. \quad (6.20)$$

Если речь идет о свободных электронах, рассеивающихся на примесях, то $\tau = l/v$, где l не зависит от μ (§ 4.1), а $v \propto \sqrt{\mu}$. Плотность состояний $\nu = p_0 m / \pi^2 \hbar^3$ пропорциональна $\sqrt{\mu}$. Отсюда следует, что

$$(d/d\mu) \left[\ln \left(\nu^2 \tau \nu \right)_\mu \right] = \mu^{-1}.$$

Таким образом, для свободных электронов дифференциальная термо-э.д.с. равна

$$Q = (\pi^2/3e) T / \mu \sim 10^{-8} T \text{ В/К} \quad (6.21)$$

(где T измеряется в К). Эта оценка остается справедливой практически во всех случаях. На опыте она хорошо подтверждается для чистых немагнитных металлов. Из формул (6.10), (6.12) и (6.16) получаем

$$P \propto T^2, \quad V_{\text{терм}} \propto T_2^2 - T_1^2, \quad \mu_T \propto T. \quad (6.22)$$

Дело может существенно измениться при наличии магнитных примесей (§ 4.6) (Кондо, 1965) [24]. Мы опустим слишком сложный детальный анализ этого вопроса. Укажем лишь, что благодаря интерференции амплитуды обычного рассеяния и спинового взаимодействия

электрона с примесью $(J/n)\sigma\mathbf{S}$ в вероятности рассеяния появляются члены, быстро меняющиеся в окрестности поверхности Ферми. Более того, оказывается, что такие члены нечетны по ξ . В этих условиях обычное правило взятия интегралов с функцией Ферми (2.25) не годится. Практически дело сводится к тому, что в термо-э.д.с. исчезает малый множитель T/μ .

Полный результат для этого случая в предположении изотропии амплитуды рассеяния имеет вид

$$Q \sim e^{-1} \left[\frac{\nu(\mu)J}{n} \right]^2 \frac{VJS(S+1)}{V^2 + J^2S(S+1)}, \quad (6.23)$$

где V — амплитуда, соответствующая обычным механизмам рассеяния электрона, т. е. взаимодействию с примесями, не зависящему от спина, взаимодействию электронов друг с другом и с фононами. Во всех случаях $J \ll V$, так что $Q \sim \nu^2 J^3 / en^2 V$. При понижении температуры V уменьшается, пока не достигает предела, соответствующего взаимодействию электронов с примесями. Это приводит к росту абсолютного значения Q при понижении температуры. Если в металле имеются только магнитные примеси, то в пределе J/V определяется только отношением амплитуд спинового и потенциального взаимодействий, которое обычно имеет порядок 0,2. Так как $\nu V/n \sim 1$, то предельное значение Q оказывается порядка 10^{-6} В/К. Знак Q определяется, согласно (6.23), знаком произведения VJ (обычно в этой области $Q < 0$, так что при уменьшении температуры Q меняет знак). Следовательно, при достаточно низкой температуре дифференциальная термо-э.д.с. Q перестает зависеть от температуры. Обратим внимание на то, что сама величина Q при этом не зависит от концентрации примесей; от нее зависит лишь температура, при которой Q начинает отклоняться от закона (6.21).

Постоянство Q сохраняется до тех пор, пока температура не понижается до температуры Кондо (4.48), где термо-э.д.с. начинает быстро уменьшаться по модулю, достигая, по-видимому, нулевого значения при $T = 0$.

До сих пор мы рассматривали изотропную модель металла. В общем случае произвольного кристалла вместо (6.8) и (6.9) получаем выражения с тензорными коэффициентами

$$E_i = \sum_k \rho_{ik} j_k + \sum_k Q_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad q_i = \sum_k \Pi_{ik} j_k - \sum_k \varkappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \quad (6.24)$$

Из принципа симметрии кинетических коэффициентов при этом находим

$$\rho_{ik} = \rho_{ki}, \quad \varkappa_{ik} = \varkappa_{ki}, \quad \Pi_{ik} = T Q_{ki}. \quad (6.25)$$

Отсюда следует, что в общем случае матрицы коэффициентов Π_{ik} и Q_{ik} несимметричны.

§ 6.2. Термомагнитные явления в слабом поле

Если к металлу приложено магнитное поле, то уравнения (6.24) сохраняют свой вид, но коэффициенты начинают зависеть от магнитного поля. Поскольку вывод принципа симметрии кинетических коэффициентов [23] использует симметрию уравнений механики по отношению к изменению знака времени, то надо учесть, что при такой замене магнитное поле меняет знак. Следовательно, в этом случае вместо соотношений (6.25) мы получаем

$$\begin{aligned}\rho_{ik}(\mathbf{H}) &= \rho_{ki}(-\mathbf{H}), \quad \varkappa_{ik}(\mathbf{H}) = \varkappa_{ki}(-\mathbf{H}), \\ \Pi_{ik}(\mathbf{H}) &= T Q_{ki}(-\mathbf{H}).\end{aligned}\tag{6.26}$$

Об этом свойстве матрицы ρ_{ik} (или $\sigma_{ik} = \rho_{ik}^{-1}$) уже упоминалось в § 5.3.

Итак, согласно (6.24) свойства металла при наличии градиента температуры и электрического поля характеризуются 36 коэффициентами, которые подчиняются 15 различным соотношениям (6.26). При этом все 21 оставшиеся независимые коэффициенты являются сложными функциями модуля и направления магнитного поля. Ясно, что здесь возникает очень много разных явлений, в которых трудно разобраться. Ввиду этого обычно рассматривают, что происходит при наличии слабого магнитного поля ($\Omega\tau \ll 1$) в изотропном металле. На практике результаты такого исследования применимы либо к поликристаллическим образцам, либо к щелочным металлам, у которых энергетический спектр почти изотропен.

Магнитное поле вводит анизотропию даже в случае изотропного металла, так что соотношения (6.24) продолжают оставаться тензорными. Однако если ограничиваться линейными членами по $\mathbf{H}$, то мы можем воспользоваться тем, что $\mathbf{H}$ — аксиальный вектор, в то время как $\mathbf{E}$, ∇T , $\mathbf{q}$ и $\mathbf{j}$ — полярные векторы. Отсюда следует, что все изменение сведется к добавлению в правых частях уравнений (6.8) и (6.9) членов, пропорциональных $[\mathbf{Hj}]$ и $[\mathbf{H}\nabla T]$. Итак, имеем

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} + R [\mathbf{Hj}] + Q \nabla T + N [\mathbf{H}\nabla T],\tag{6.27}$$

$$\mathbf{q} = \Pi \mathbf{j} + B [\mathbf{Hj}] - \varkappa \nabla T + L [\mathbf{H}\nabla T].\tag{6.28}$$

Из принципа симметрии кинетических коэффициентов следует, что $B = NT$. Относительный порядок дополнительных членов в этих уравнениях есть $\Omega\tau$, например $NH/Q \sim \Omega\tau$.

Уравнения (6.27) и (6.28) описывают целый ряд эффектов. Для конкретности представим себе, что поле $\mathbf{H}$ направлено по оси z , а основное направление тока есть x .

Очевидно, второй член в (6.27) соответствует эффекту Холла. Но кроме обычного эффекта Холла, который наблюдается при условии

$\partial T/\partial y = 0$, можно изучать так называемый адиабатический эффект Холла при условии $q_y = 0$. При этом из (6.27) и (6.28) получаем

$$E_y = (R + QB/\kappa) H j_x. \quad (6.29)$$

Далее, представим себе, что имеется ток j_x , но $\partial T/\partial x = 0$. В этом случае из y -компоненты уравнения (6.28) при $q_y = 0$, $j_y = 0$ следует появление градиента температуры в направлении y , причем

$$\partial T/\partial y = (B/\kappa) H j_x. \quad (6.30)$$

Это явление называется эффектом Эттингсхаузена, а величина B/κ — соответствующий коэффициент.

Теперь зададим следующие условия. Пусть ток $j_x = 0$, но зато имеется градиент температуры $\partial T/\partial x$. В этом случае тоже появляется градиент температуры по оси y . Согласно (6.28) при $j_x = j_y = q_y = 0$

$$\partial T/\partial y = (L/\kappa) H \partial T/\partial x. \quad (6.31)$$

Это явление называется эффектом Ледюка–Риги. Соответствующим коэффициентом служит L/κ .

Градиент температуры по оси x способен, так же как и ток j_x , создать э.д.с. по оси y . Из уравнения (6.27) при условиях $j_x = j_y = \partial T/\partial y = 0$ находим

$$E_y = N H \partial T/\partial x. \quad (6.32)$$

Это явление называется эффектом Нернста. Впрочем, вместо условия $\partial T/\partial y = 0$ можно поставить и другое, а именно $q_y = 0$. Тогда мы получим адиабатический эффект Нернста. Из уравнений (6.27) и (6.28) следует, что он выражается формулой

$$E_y = (N + Ql/\kappa) H \partial T/\partial x. \quad (6.33)$$

Есть также многочисленные эффекты порядка $(\Omega\tau)^2$, типа магнитосопротивления. Однако все они представляют собой поправки к коэффициентам, существующим и в отсутствие магнитного поля, и поэтому мы не будем их рассматривать.

§ 6.3. Теплопроводность и термоэлектрические эффекты в сильном магнитном поле

В § 5.3 и 5.4 были найдены тензоры σ_{ik} и $\rho_{ik} = \sigma_{ik}^{-1}$ в случае $\Omega\tau \gg 1$. Вычислим теперь другие тензорные коэффициенты в уравнениях (6.24) в сильном магнитном поле (Азбель, Каганов, Лифшиц, 1957; Бычков, Гуревич, Недлин, 1959) [25, 26]. Поскольку для реализации условия $\Omega\tau \gg 1$ нужна большая длина свободного пробега, то естественно рассматривать случай очень низких температур, где рассеяние электронов определяется примесями. Но при этом столкновения являются упругими, т. е. энергия электрона при столкновениях сохраняется.

Кинетическое уравнение для квазичастиц в рассматриваемом случае приобретает форму

$$\partial f_1 / \partial t_1 - I(f_1) = [-e \mathbf{v} \mathbf{E} + (\xi/T) \mathbf{v} \nabla T] \partial f_0 / \partial |\xi|. \quad (6.34)$$

Естественно искать решение этого уравнения в виде

$$f_1 = - \sum_i e E_i \psi_i \frac{\partial f_0}{\partial |\xi|} + \sum_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \varphi_i \frac{\xi}{T} \frac{\partial f_0}{\partial |\xi|}. \quad (6.35)$$

Поскольку энергия при столкновениях сохраняется, то при подстановке выражения (6.35) в интеграл столкновений множители, зависящие только от энергии, выносятся за знак интеграла. После этого оказывается, что ψ_i и φ_i удовлетворяют одинаковым уравнениям следующего вида:

$$\partial \psi_i / \partial t_1 - I(\psi) = v_i. \quad (6.36)$$

Учитывая, что граничные условия для обеих функций тоже одинаковы, мы приходим к выводу, что

$$\varphi_i = \psi_i. \quad (6.37)$$

Выражения для тока и потока энергии имеют вид

$$\begin{aligned} j_i = \frac{2e^2 H}{(2\pi\hbar)^3 c} \int v_i f d\xi dt_1 dp_z = - \frac{2e^3 H}{(2\pi\hbar)^3 c} \sum_k \int \frac{\partial f_0}{\partial \xi} d\xi \int v_i \psi_k dt_1 dp_z E_k + \\ + \frac{2e^2 H}{(2\pi\hbar)^3 c T} \int \frac{\partial f_0}{\partial \xi} \xi d\xi \sum_k \int v_i \varphi_k dt_1 dp_z \frac{\partial T}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} q_i = \frac{2eH}{(2\pi\hbar)^3 c} \int \xi v_i f d\xi dt_1 dp_z = \\ = - \frac{2e^2 H}{(2\pi\hbar)^3 c} \int \frac{\partial f_0}{\partial \xi} \xi d\xi \sum_k \int v_i \psi_k dt_1 dp_z E_k + \\ + \frac{2eH}{(2\pi\hbar)^3 c} \int \frac{\partial f_0}{\partial \xi} \xi^2 d\xi \sum_k v_i \varphi_k dt_1 dp_z \frac{\partial T}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Эти соотношения представляют собой тензорные обобщения уравнений (6.1) и (6.2). Запишем их в виде

$$j_i = \sum_k \sigma_{ik} E_k + \sum_k \beta_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad (6.40)$$

$$q_i = \sum_k \gamma_{ik} E_k + \sum_k \zeta_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \quad (6.41)$$

По поводу коэффициентов в этих уравнениях можно сделать два замечания. Во-первых, принцип симметрии кинетических коэффициентов требует, чтобы было

$$\gamma_{ik}(\mathbf{H}) = -T\beta_{ki}(-\mathbf{H}). \quad (6.42)$$

Это обобщение соотношения (6.7). Однако из формул (6.38) и (6.39) с учетом (6.37) следует нечто большее, а именно

$$\gamma_{ik}(\mathbf{H}) = -T\beta_{ik}(\mathbf{H}).$$

Следовательно, оба коэффициента удовлетворяют условиям

$$\beta_{ik}(\mathbf{H}) = \beta_{ki}(-\mathbf{H}), \quad \gamma_{ik}(\mathbf{H}) = \gamma_{ki}(-\mathbf{H}), \quad (6.43)$$

т.е. тем же самым, что σ_{ik} и ζ_{ik} . Это следствие предположения об упругости столкновений.

Далее, рассмотрим последний член в уравнении (6.39). Возьмем интеграл по ξ , используя правило (2.25). При этом получаем

$$\zeta_{ik} = -\frac{2eH}{(2\pi\hbar)^3c} \frac{\pi^2 T}{3} \left[\int v_i \varphi_k dt_1 dp_z \right]_{\mu}.$$

С другой стороны, из (6.38) имеем

$$\sigma_{ik} = \frac{2e^3 H}{(2\pi\hbar)^3 c} \left[\int v_i \psi_k dt_1 dp_z \right]_{\mu}.$$

Учитывая (6.37), находим

$$\zeta_{ik} = - \left[\pi^2 T / 3e^2 \right] \sigma_{ik}. \quad (6.44)$$

Теперь выразим с помощью уравнений (6.40) и (6.41) $\mathbf{E}$ и $\mathbf{q}$ через $\mathbf{j}$ и ∇T . При этом получаются уравнения (6.24), где

$$\begin{aligned} \rho_{ik} &= \sigma_{ik}^{-1}, & Q_{ik} &= - \sum_l \rho_{il} \beta_{lk}, \\ \Pi_{ik} &= \sum_l \gamma_{il} \rho_{lk}, & \varkappa_{ik} &= \sum_{l,m} \gamma_{il} \rho_{lm} \beta_{mk} - \zeta_{ik}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Из вида интеграла по ξ в коэффициентах β_{ik} (6.40) и (6.38) следует, что они будут пропорциональны T ; следовательно, на основании (6.42) коэффициенты $\gamma_{ik} \propto T^2$. Ввиду этого первый член в выражении (6.45) для теплопроводности мал по сравнению со вторым (это уже отмечалось в § 6.1). Отсюда вытекает, что $\varkappa_{ik} = -\zeta_{ik}$, а из (6.44) получаем

$$\varkappa_{ik} = \left[\pi^2 T / 3e^2 \right] \sigma_{ik}. \quad (6.46)$$

Итак, оказывается, что закон Видемана–Франца для случая упругих столкновений имеет место и при наличии сильного магнитного поля.

Значит, κ_{ik} обладает теми же особенностями, что и σ_{ik} . Они были описаны в § 5.3. Отметим, в частности, что компоненты κ_{xx} и κ_{yy} (ось z направлена вдоль магнитного поля) для всех направлений магнитного поля, при которых траектории замкнуты, убывают с полем как H^{-2} . Это дает возможность выделить фоновую теплопроводность, которая не зависит от магнитного поля. Таким образом, оказывается возможным разделить эти две части полной теплопроводности металла.

Далее, компонента κ_{xy} для металла с разными числами электронов и дырок, согласно (5.36) и (6.46), имеет вид

$$\kappa_{xy} = \left[\pi^2 T c / 3eH \right] (n_e - n_h). \quad (6.47)$$

Это значит, что разность чисел электронов и дырок можно найти не только из эффекта Холла, но и из эффекта Ледюка-Риги (κ_{xy} соответствует $-LH$ в (6.31)).

Теперь перейдем к тензору термо-э.д.с. Q_{ik} . Применяя правило (2.25), после взятия интеграла по ξ получаем (см. (6.40), (6.38))

$$\beta_{ik} = -\frac{2e^2 H \pi^2 T}{3(2\pi\hbar)^3 c} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\int v_i \varphi_k dt_1 dp_z \right]_{\mu}.$$

Сравнивая с выражением для σ_{ik} и учитывая, что $\psi_k = \varphi_k$, находим

$$\beta_{ik} = -\frac{\pi^2 T}{3e} \frac{\partial}{\partial \mu} \sigma_{ik}(\mu). \quad (6.48)$$

Отсюда вытекает, что зависимость коэффициентов β_{ik} от H в общем должна быть такой же, как и зависимость коэффициентов σ_{ik} . Исключение представляет случай замкнутых ферми-поверхностей при $n_e = n_h$, ибо в этом случае, вообще говоря, $(\partial/\partial \mu)[n_e(\mu) - n_h(\mu)] \neq 0$.

Найдем теперь тензор Q_{ik} для основных случаев.

1. Замкнутые поверхности Ферми при $n_e \neq n_h$. Тензор β_{ik} на основании (6.48) и (5.37) имеет вид

$$\beta_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma^2 c_{xx} & \gamma c_{xy} & \gamma c_{xz} \\ -\gamma c_{xy} & \gamma^2 c_{yy} & \gamma c_{yz} \\ -\gamma c_{xz} & -\gamma c_{yz} & c_{zz} \end{pmatrix}. \quad (6.49)$$

Умножая слева на $-\rho_{ik}$ (5.38), получаем

$$Q_{ik} = \begin{pmatrix} \nu_{xx} & \gamma \nu_{xy} & \nu_{xz} \\ \gamma \nu_{yx} & \nu_{yy} & \nu_{yz} \\ \gamma \nu_{zx} & \gamma \nu_{zy} & \nu_{zz} \end{pmatrix}. \quad (6.50)$$

При этом $\nu_{xx} = \nu_{yy} = b_{xy}c_{xy}$. Учитывая, что $b_{xy} = a_{yx}^{-1} = -a_{xy}^{-1}$ (см. (5.37)), и используя (6.48) и (5.36), получаем

$$Q_{xx} = Q_{yy} = \left[\pi^2 T / 3e \right] (\partial / \partial \mu) \ln [n_e(\mu) - n_h(\mu)]. \quad (6.51)$$

Таким образом, поперечная термо-э.д.с. изотропна, не зависит от столкновений и определяется только энергетическим спектром. Из нее можно получить новую характеристику спектра, а именно $(\partial / \partial \mu) \ln [n_e(\mu) - n_h(\mu)]$, которую нельзя найти никаким другим способом.

2. Замкнутые поверхности Ферми при $n_e = n_h$. Тензор β_{ik} сохраняет прежний вид (6.49), но тензор ρ_{ik} выражается формулой (5.42). Согласно (6.45) получаем

$$Q_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma^{-1}\nu_{xx} & \gamma^{-1}\nu_{xy} & \gamma^{-1}\nu_{xz} \\ \gamma^{-1}\nu_{yx} & \gamma^{-1}\nu_{yy} & \gamma^{-1}\nu_{yz} \\ \nu_{zx} & \nu_{zy} & \nu_{zz} \end{pmatrix}. \quad (6.52)$$

В данном случае $Q_{xx} = -Q_{yy}$, но их конкретный вид зависит от интеграла столкновений. Отметим, что первые две строки тензора Q_{ik} растут пропорционально H , т.е. термо-э.д.с. в таких металлах в больших полях может стать очень большой.

3. Поверхность Ферми, открытая в направлении p_x . Согласно (6.48) и (5.43) имеем в этом случае

$$\beta_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma^2 c_{xx} & \gamma c_{xy} & \gamma c_{xz} \\ -\gamma c_{xy} & c_{yy} & c_{yz} \\ -\gamma c_{xz} & c_{yz} & c_{zz} \end{pmatrix}. \quad (6.53)$$

Тензор ρ_{ik} дается формулой (5.44). Из (6.45) получаем

$$Q_{ik} = \begin{pmatrix} \nu_{xx} & \gamma^{-1}\nu_{xy} & \gamma^{-1}\nu_{xz} \\ \gamma\nu_{yx} & \nu_{yy} & \nu_{yz} \\ \gamma\nu_{zx} & \nu_{zy} & \nu_{zz} \end{pmatrix}. \quad (6.54)$$

Итак, в данном случае сильно растут компоненты Q_{xy} и Q_{xz} и, наоборот, компоненты Q_{yx} и Q_{zx} уменьшаются с возрастанием поля. Так же как и для тензора ρ_{ik} , переход от законов (6.50) к законам (6.54) происходит в узкой области направлений магнитного поля порядка $\theta \sim (\Omega\tau)^{-1}$ от опасного направления, при котором появляются открытые траектории.

Подчеркнем еще раз, что многие из выводов этого параграфа становятся несправедливыми в том случае, если столкновения не являются вполне упругими, т.е. в рассеянии электронов участвуют не только примеси, но и фононы.

§ 6.4. Термо-э.д.с. и переходы Лифшица

В предыдущих параграфах было продемонстрировано, что термоэлектрические и термомагнитные явления могут дать дополнительную информацию об электронном спектре и процессах рассеяния. Здесь мы покажем, что измерение термо-э.д.с. является весьма чувствительным методом обнаружения особого типа электронных переходов, называемых переходами Лифшица или переходами 2,5 рода (*Лифшиц, 1960*) [27].

В конце § 1.3 мы рассматривали типы пересечения изознергетической поверхности с гранью зоны Бриллюэна в модели слабосвязанных электронов. В общем случае формулы теории слабой связи не годятся в буквальном смысле, однако качественно они хорошо передают поведение энергетического спектра в окрестности грани зоны Бриллюэна. Представим себе теперь, что с помощью внешнего воздействия (например, изотропного сжатия, одноосной деформации) или постепенного изменения состава мы можем менять относительное положение поверхности Ферми и грани зоны Бриллюэна. При этом возможны изменения топологии поверхности Ферми, изображенные на рис. 1.5: образование «шейки», или нового участка поверхности. Довольно очевидно, что такие изменения топологии будут сопровождаться особенностями термодинамических и кинетических характеристик.

Найдем особенность полной энергии в модели слабой связи при переходе от рис. 1.5а к рис. 1.5б. В качестве переменного параметра будем рассматривать химический потенциал μ . Число состояний, соответствующих внутренности ферми-поверхности, равно

$$n(\mu) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int 2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dp_{z1} = \frac{1}{4\pi^2\hbar^3} \int dp_{\perp}^2 dp_{z1}. \quad (6.55)$$

Интеграл по $dp_{\perp}^2$ при заданных μ и p_{z1} равен просто $p_{\perp}^2$, выраженному формулой (1.43), т. е.

$$p_{\perp}^2 = 2m\mu - (\hbar K/2)^2 - p_{z1}^2 + \left[(p_{z1}\hbar K)^2 + (2m|U_K|)^2 \right]^{1/2}. \quad (6.56)$$

Интеграл по p_{z1} берется в случае, изображенном на рис. 1.5а, от конечного значения $p_{z1}^{(0)}$ до какого-то верхнего предела P , а в случае, изображенном на рис. 1.5б, от 0 до P .

Значение $p_{z1}^{(0)}$ определяется из формулы (6.56) при $p_{\perp}^2 = 0$. Нас будут интересовать малые значения p_{z1} и $\Delta\mu = \mu - \mu_c$, где μ_c , равное

$$\mu_c = (\hbar K/2)^2/2m - |U_K|, \quad (6.57)$$

— значение μ , при котором происходит касание. Положим $\Delta\mu < 0$ и разложим правую часть формулы (6.56) по p_{z1}^2 :

$$p_{\perp}^2 \approx 2m\Delta\mu - p_{z1}^2 + \frac{(p_{z1}\hbar K)^2}{4m|U_K|} = 2m\Delta\mu - p_{z1}^2 \frac{(\hbar K)^2/2 - 2m|U_K|}{2m|U_K|}.$$

Считая $p_{\perp}^2 = 0$, получаем

$$p_{z1}^{(0)} = 2m|U_K|^{1/2} |\Delta\mu|^{1/2} \left[(\hbar K)^2/2 - 2m|U_K| \right]^{-1/2}. \quad (6.58)$$

Основная часть интеграла (6.55) соответствует большим p_{z1} . Но нас будет интересовать сингулярная часть, зависящая от $\Delta\mu$; она определяется значением интеграла на нижнем пределе. Итак, при $\Delta\mu < 0$ ($P \sim \hbar/a$ — условный верхний предел) имеем

$$\begin{aligned} n(\mu) &= (4\pi^2\hbar^3)^{-1} \int_{p_{z1}^{(0)}}^P \left\{ 2m\Delta\mu + p_{z1}^2 \frac{(\hbar K)^2/2 - 2m|U_K|}{2m|U_K|} \right\} dp_{z1} = \\ &= n_{\text{reg}} - (4\pi^2\hbar^3)^{-1} \left\{ 2m\Delta\mu p_{z1}^{(0)} - (1/3) p_{z1}^{(0)3} \frac{(\hbar K)^2/2 - 2m|U_K|}{2m|U_K|} \right\} = \\ &= n_{\text{reg}} + (6\pi^2\hbar^3)^{-1} (2m)^2 |U_K|^{1/2} \left[(\hbar K)^2/2 - 2m|U_K| \right]^{-1/2} |\Delta\mu|^{3/2}. \end{aligned} \quad (6.59)$$

В случае $\Delta\mu > 0$ существует лишь регулярная часть $n(\mu)$.

Добавка к полной энергии может быть найдена как $-\int_{\mu}^{\mu_1} n(\mu_1) d\mu_1$. Очевидно, сингулярная часть имеется при $\mu < \mu_c$ и пропорциональна $|\mu - \mu_c|^{5/2}$, где μ_c дается формулой (6.57). Допустим, для определенности, что переменным внешним фактором является изотропное сжатие (p — давление). В этом случае $\Delta\mu = \mu - \mu_c$ пропорционально $\Delta p = p - p_c$, и сингулярная часть полной энергии пропорциональна $|\Delta p|^{5/2}$ с одной стороны от точки перехода. Это напоминает фазовый переход 2-го рода. Если считать $T = \text{const}$ и менять давление, то с одной стороны от точки перехода в термодинамическом потенциале появляется дополнительное слагаемое, пропорциональное $(\Delta p)^2$ (в рамках теории Ландау, приложение II); это слагаемое ответственно за скачок модуля объемного сжатия: $\alpha = -V^{-1}(\partial V/\partial p)_{T_c} = -V^{-1}(\partial^2 \Phi/\partial p^2)_{T_c}$. Поскольку в данном случае добавка к энергии пропорциональна $|\Delta p|^{5/2}$, то такой переход иногда называют переходом 2,5 рода.

Следует, однако, иметь в виду коренное отличие перехода Лифшица от фазового перехода 2-го рода. В то время как фазовый переход 2-го рода связан с изменением симметрии и имеет место вдоль целой кривой в плоскости (T, p) , переход Лифшица имеет место, строго говоря, лишь при $T = 0$, а при конечных температурах сингулярность сглаживается.

В реальных металлах ввиду малости T/μ остается весьма заметный след от сингулярности перехода Лифшица; сглаживание имеет место лишь в малой окрестности точки перехода. Отметим, что рассмотренный случай перехода, связанный с разрывом «шейки» ферми-поверхности на грани зоны Бриллюэна, не является единственно возможным. Другим примером является переход от ферми-поверхности, изображенной на рис. 1.5 б, к поверхности на рис. 1.5 в, т. е. зарождение нового участка ферми-поверхности. В принципе такие изменения топологии возможны и не на грани зоны Бриллюэна, а внутри зоны. Но во всех случаях особенность в окрестности перехода имеет тот же характер, что и в рассмотренном примере.

Возникает вопрос о способе обнаружения переходов Лифшица. Очевидно, наиболее эффективным является измерение такой физической величины, которая содержит достаточно высокую производную функции $n(\mu)$, и поэтому обращается в бесконечность в точке перехода. Такой величиной является термо-э.д.с.

Дифференцируя (6.59) по μ , получаем $\nu(\mu)$:

$$\nu(\mu) = \partial n(\mu)/\partial \mu = \nu_{\text{reg}} - (4\pi^2 \hbar^3)^{-1} (2m)^2 |U_K|^{1/2} \times \\ \times \left[(\hbar K)^2/2 - 2m |U_K| \right]^{-1/2} |\Delta\mu|^{1/2}. \quad (6.60)$$

Термо-э.д.с., согласно (6.20), пропорциональна отношению $\sigma'(\mu)/\sigma(\mu)$, где σ — проводимость. Однако при вычислении σ нельзя пользоваться изотропной моделью ввиду резкой анизотропии спектра (1.43). На первый взгляд кажется, что особенность вообще исчезает благодаря тому, что в точке $p_{z1} = 0$, $p_{\perp} = 0$ обращаются в нуль компоненты скорости v_z и $v_{\perp}$. В действительности, дело обстоит несколько сложнее.

Основной вклад в термо-э.д.с. дают электроны с импульсами, далекими от точки $p_{z1} = 0$, $p_{\perp} = 0$. Однако благодаря процессам рассеяния они меняют импульс и «виртуально» попадают в окрестность особой точки. Поэтому вероятность рассеяния, а с ней и $\tau = W^{-1}$ приобретают поправку, пропорциональную $|\Delta\mu|^{1/2}$. Она фактически происходит от $\nu(\mu)$, но не для исходных состояний электронов, а для виртуальных, возникающих при рассеянии. Поэтому при дифференцировании в формуле (6.20) можно считать $v^2\nu(\mu)$ константами обычного порядка, а в τ надо учитывать поправку, имеющую тот же относительный порядок, что и относительная величина поправки к $\nu(\mu)$, но обратный знак. В результате находим

$$Q_{\text{sign}} \propto \tau'(\mu)/\tau(\mu) \propto -\nu'(\mu)/\nu(\mu) \propto -|\Delta\mu|^{-1/2}. \quad (6.61)$$

Отметим, что такая сингулярность имеет место при $\Delta\mu < 0$ и отсутствует при $\Delta\mu > 0$, т. е. несимметрична.

В других типах переходов Лифшица (образование шейки при уменьшении энергии, образование новой полости при увеличении или

при уменьшении энергии) сингулярность появляется всегда со стороны, соответствующей большему числу участков поверхности Ферми, причем во всех случаях $Q_{\text{sign}} \propto -|\Delta\mu|^{-1/2}$. Что касается регулярной части Q , то она может иметь любой знак. Например, когда μ находится вблизи дна зоны, то $Q > 0$, а в том случае, когда μ оказывается вблизи верхнего края зоны, $Q < 0$. Ввиду этого в окрестности сингулярности в принципе возможно изменение знака термо-э.д.с.

Экспериментальные исследования термо-э.д.с. при переходах Лифшица в сплавах литий-магний с переменной концентрацией и сплавах висмут-сурьма, подвергаемых анизотропной деформации (Егоров и др., 1982) [28], обнаружили резкие несколько асимметричные максимумы, быстро убывающие при повышении температуры. Причиной сглаживания особенности и уменьшения асимметрии является рассеяние электронов на дефектах и конечная температура. Что касается убывания амплитуды максимумов при повышении температуры, то оно является следствием перехода от примесного рассеяния к фононному, при котором импульс меняется мало; ввиду этого электроны с импульсами, далекими от особой точки, имеют меньшую вероятность в нее попасть [28].

Однако при низких температурах максимумы термо-э.д.с. вполне ярко выражены и, по-видимому, являются в настоящее время самым простым методом определения переходов Лифшица.

Глава 7

МЕТАЛЛ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ. ЦИКЛОТРОННЫЙ РЕЗОНАНС

§ 7.1. Нормальный скин-эффект

Рассмотрим металл, находящийся в высокочастотном электромагнитном поле. Будем обсуждать случай, когда применимо обычное выражение для тока $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, и для простоты считать металл изотропным.

Уравнения Максвелла тогда имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{H} / \partial t, \quad (7.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = (4\pi/c) \mathbf{j} = (4\pi/c) \sigma \mathbf{E}, \quad (7.2)$$

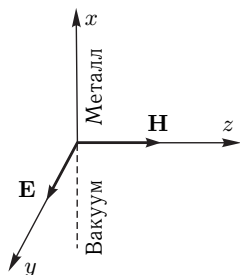


Рис. 7.1

мы пренебрегаем во втором уравнении «токами смещения», что для металлов справедливо при не слишком больших частотах. Пусть металл занимает полупространство $x > 0$ и волна падает нормально на его поверхность, причем вектор $\mathbf{E}$ направлен по оси y , а $\mathbf{H}$ — по оси z (рис. 7.1).

Будем искать решение, пропорциональное $\exp(ikx - i\omega t)$. Подставляя в (7.1) и (7.2), получаем

$$ikE_y = (i\omega/c) H_z, \quad -ikH_z = (4\pi/c) \sigma E_y.$$

Комбинируя эти уравнения, находим значение волнового вектора:

$$k^2 = 4\pi i \omega \sigma / c^2.$$

Следовательно,

$$k = (4\pi i \omega \sigma / c^2)^{1/2} = (2\pi \omega \sigma / c^2)^{1/2} (1 + i) = k_1 + i k_2. \quad (7.3)$$

Подставляя (7.3) в $\exp(ikx - i\omega t)$, мы видим, что электромагнитное поле по мере проникновения в глубь металла убывает по закону $\exp(-k_2 x)$, т. е. поле проникает лишь в поверхностный слой металла. Это явление называется скин-эффектом. Определим скин-глубину проникновения как

$$\delta = k_2^{-1} = \left[c^2 / 2\pi\omega\sigma \right]^{1/2}. \quad (7.4)$$

Для характеристики свойств металла в высокочастотном поле вводится так называемый импеданс, или поверхностное сопротивление Z . Он определяется как отношение электрического поля на поверхности металла к плотности тока, проинтегрированной по толщине металла:

$$Z = E_y(0) / \int_0^\infty j_y(x) dx. \quad (7.5)$$

Импеданс Z — величина комплексная и записывается в виде $R - iX$, где R называется активной частью, а X — реактивной частью. Величины R и X могут быть определены по изменению амплитуды и фазы волны, отраженной от металлической поверхности. Активная часть R определяет потери энергии электромагнитной волны при отражении и может быть найдена по выделению тепла в металле при помещении его в высокочастотное поле.

Соотношение (7.5) может быть преобразовано к другому виду. Из уравнения (7.2) находим

$$Z = R - iX = \frac{E_y(0)}{-(c/4\pi) H_z|_0^\infty} = \frac{4\pi}{c} \frac{E_y(0)}{H_z(0)}. \quad (7.6)$$

Из уравнения (7.1) теперь получаем

$$Z = \frac{4\pi}{c} \frac{E_y(0)}{H_z(0)} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\omega}{k}. \quad (7.7)$$

Формулы (7.6) и (7.7) справедливы при любой связи между $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$. В случае $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, подставляя (7.3) в (7.7), имеем

$$Z = \left[4\pi\omega / i\sigma c^2 \right]^{1/2} = \left[2\pi\omega / \sigma c^2 \right]^{1/2} (1 - i).$$

Таким образом, в этом случае

$$R = X = \left[2\pi\omega / \sigma c^2 \right]^{1/2}. \quad (7.8)$$

Эта формула описывает так называемый «нормальный» скин-эффект.

§ 7.2. Аномальный скин-эффект. Концепция неэффективности

Рассмотрим формулу (7.4) для скин-глубины проникновения. Для чистых металлов при низких температурах проводимость σ становится большой и глубина δ уменьшается. Еще сильнее можно уменьшить δ , увеличивая частоту ω . В то же время при понижении температуры растет длина свободного пробега l . При достаточно низких температурах и высоких частотах может возникнуть такое положение, когда δ становится меньше l . В этом случае простое выражение для связи плотности тока с полем $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ уже не годится, так как эта формула получена из кинетического уравнения в предположении однородности поля. Если же поле существенно меняется на расстояниях, сравнимых с длиной пробега или даже меньших, то его нельзя считать однородным.

Перейдем теперь к этому случаю; он называется аномальным скин-эффектом (Лондон, 1940) [29]. Рассмотрим физическую картину в предельной ситуации, когда $l \gg \delta$. Электроны могут двигаться параллельно металлической поверхности или под большим углом к ней. Электроны, движущиеся под большим углом, проводят мало времени в электрическом поле и поэтому практически с ним не взаимодействуют. Те же, которые движутся параллельно поверхности, или под малым углом, ускоряются электрическим полем и поэтому отбирают у волны долю ее энергии.

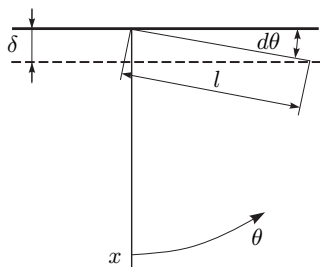


Рис. 7.2

В изотропном случае число электронов с импульсами, направленными в пределах какого-то телесного угла, пропорционально этому углу. Существенными электронами являются те, которые на протяжении всей своей длины свободного пробега движутся в пределах скин-слоя. Для этих электронов (рис. 7.2) $d\theta \sim \sim \delta/l$, а следовательно,

$$d\Omega \sim 2\pi \sin \theta d\theta \sim 2\pi d\theta \sim 2\pi \delta/l \quad (\theta \approx \pi/2).$$

Плотность эффективных электронов

$$n_{\text{эф}} \sim n_e d\Omega/4\pi \sim n_e \delta/l.$$

Проводимость пропорциональна числу электронов. Поэтому эффективная проводимость по сравнению с обычной содержит тоже множитель порядка δ/l . Мы предположим эффективную проводимость в виде

$$\sigma_{\text{эф}} = i a \sigma / k l, \quad (7.9)$$

где k — волновой вектор, a — действительный коэффициент порядка 1. Такая запись возможна в связи с тем, что $\delta = k_2^{-1}$, а $k_1 \sim k_2$. Однако в действительности формула (7.9) отражает то обстоятельство, что в строгой теории при $|kl| \gg 1$ величина i/k начинает играть роль l (см. вывод формулы (7.23)). В связи с этим формула (7.9) дает возможность получить правильное соотношение между действительной и мнимой частями импеданса; эта формула — основа так называемой концепции неэффективности.

Воспользуемся выражением

$$k = \left(4\pi i \omega \sigma / c^2\right)^{1/2}$$

и подставим в него (7.9) вместо σ . В результате получается уравнение относительно k . Решая его, находим

$$k = \left[4\pi \omega a \sigma / c^2 l\right]^{1/3} e^{i\pi/3}. \quad (7.10)$$

Глубина проникновения поля находится как обратная величина от мнимой части k . Следовательно,

$$\delta = \left(\frac{c^2 l}{4\pi \omega a \sigma}\right)^{1/3} (\sin(\pi/3))^{-1}. \quad (7.11)$$

Поверхностный импеданс может быть найден из формулы (7.7):

$$\begin{aligned} Z &= \frac{4\pi\omega}{c^2 k} = \left(\frac{4\pi\omega}{c^2}\right)^{2/3} \left(\frac{l}{a\sigma}\right)^{1/3} e^{-i\pi/3} = \\ &= \left(\frac{2}{a}\right)^{1/3} \left(\frac{\pi\omega}{c^2}\right)^{2/3} \left(\frac{l}{\sigma}\right)^{1/3} (1 - i\sqrt{3}). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Итак, мы получили следующие результаты: Z пропорционально $\omega^{2/3}$; $X = \sqrt{3} R$; удельная проводимость входит в (7.11) и (7.12) лишь в комбинации σ/l , но так как $\sigma \sim n_e e^2 \tau / m \sim n_e e^2 l / p_0$, то $\sigma/l \sim n_e e^2 / p_0$ (это отношение не зависит от температуры и определяется только электронным спектром).

Если представить полученные результаты в виде зависимости R^{-1} от $\sigma^{1/2}$, то она должна иметь вид, изображенный на рис. 7.3, где область A соответствует нормальному, а область B — аномальному скин-эффекту. Действительно, нормальный скин-эффект имеет место в области низкой проводимости (высокие температуры) и там $R \propto \sigma^{-1/2}$, а в области больших σ имеется аномальный скин-эффект и R не зависит от σ . Эта зависимость подтверждается на опыте.

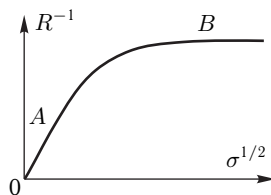


Рис. 7.3

Найдем ограничение на частоту, при которой можно наблюдать аномальный скин-эффект. Из условия $\delta \ll l$, формулы (7.4) и выражения для проводимости $\sigma = n_e e^2 l / p_0$ находим, что

$$\omega > c^2 p_0 / 2\pi n_e e^2 l^3.$$

Полагая $n_e \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $p_0 = \hbar (3\pi^2 n_e)^{1/3} \sim 10^{-19} \text{ г·см/с}$ (это справедливо для хорошего металла), получаем

$$\omega > 10^{-2} l^{-3} \text{ с}^{-1}.$$

Если $l \sim 10^{-3} \text{ см}$ (это уже область остаточного сопротивления), то $\omega > 10^7 \text{ с}^{-1}$.

§ 7.3. Аномальный скин-эффект. Решение кинетического уравнения

В § 7.2 было отмечено, что поверхностный импеданс в области аномального скин-эффекта содержит отношение σ/l , которое зависит только от параметров электронного спектра, но не от процессов рассеяния. Поэтому можно надеяться, что изучение аномального скин-эффекта даст возможность получить сведения об электронном спектре. С этой целью мы приведем строгий вывод поверхностного импеданса, основываясь на кинетическом уравнении (Ройтер, Зондхеймер, 1948) [30].

Из формул (7.1) и (7.2) получаем

$$-\text{rot rot } \mathbf{E} = -\text{grad div } \mathbf{E} + \nabla^2 \mathbf{E} = -(4\pi/c^2) i \omega \mathbf{j}.$$

Но $\text{div } \mathbf{E} = 0$, так как предполагается, что вектор $\mathbf{E}$ имеет лишь y - и z -компоненты, которые зависят только от x , поэтому можно написать

$$d^2 E_\alpha / dx^2 = -(4\pi i \omega / c^2) j_\alpha; \quad (7.13)$$

имеется в виду, что все величины пропорциональны $\exp(-i\omega t)$, $\alpha = y, z$. Для определения тока j_α мы должны иметь функцию распределения, которую будем искать в виде

$$f = f_0 - (\partial f_0 / \partial \varepsilon) \psi.$$

С ее помощью находим

$$j_\alpha = 2e \int v_\alpha f \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi \hbar)^3} = \frac{2e}{(2\pi \hbar)^3} \int v_\alpha \psi \frac{dS}{v}. \quad (7.14)$$

Здесь использовано преобразование интеграла по импульсам (2.23) и то обстоятельство, что $\partial f_0 / \partial \varepsilon \approx -\delta(\varepsilon - \mu)$. Интегрирование в (7.14) происходит вдоль ферми-поверхности.

Будем писать кинетическое уравнение в форме (3.12). Конечно, форма интеграла столкновений

$$I(f) = -(f - f_0)/\tau$$

является для анизотропного металла, вообще говоря, неправильной. Тем не менее мы можем ею пользоваться. Это связано, в первую очередь, с тем, что в предельно аномальном случае ответ вообще не будет зависеть от τ . Кроме того, интересной особенностью рассматриваемого случая является то, что интеграл столкновений действительно имеет такую форму, правда с τ , зависящим от $\mathbf{p}$ (см. конец этого параграфа). Подставляя предложенную форму f -функции, находим из (3.12)

$$-i\omega\psi + v_x \partial\psi/\partial x + \psi/\tau = eE_\alpha v_\alpha. \quad (7.15)$$

Здесь учтено, что $\mathbf{E}$ имеет только y - и z -компоненты и поэтому индексы α пробегает лишь эти значения. Если индекс повторяется, то подразумевается суммирование (т. е. $E_\alpha v_\alpha = E_y v_y + E_z v_z$).

Уравнение (7.15) выражает ψ через $\mathbf{E}(x)$. Решив его, можно найти $\mathbf{j}(\mathbf{E})$ и подставить его в уравнение Максвелла (7.13), откуда определяется $\mathbf{E}$ и в конечном счете импеданс.

Разделив уравнение (7.15) на v_x и обозначив $(\tau^{-1} - i\omega)/v_x$ через L , получаем

$$\partial\psi/\partial x + L\psi = e E_\alpha v_\alpha/v_x.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\psi = e^{-Lx} \int_C^x e E_\alpha(x_1) \frac{v_\alpha}{v_x} e^{Lx_1} dx_1, \quad (7.16)$$

где C — некая константа. Чтобы ее найти, надо ввести граничные условия. Прежде всего, ясно, что при $x \rightarrow \infty$

$$\psi \rightarrow 0.$$

Другое граничное условие зависит от типа металлической поверхности. Как известно, на поверхности имеется скачок потенциала, препятствующий выходу электронов из металла. Этот скачок потенциала отражает электроны внутрь металла.

Если поверхность идеальная, то электроны отражаются зеркально. В изотропном металле это означало бы, что p_y и p_z не меняются, а p_x меняет знак. В анизотропном случае, который мы рассматриваем, дело обстоит сложнее. Из однородности задачи по направлениям y и z по-прежнему следует неизменность p_y и p_z , но теперь вместо изменения знака p_x мы должны потребовать неизменность энергии.

В изотропном металле волны с p_x и $-p_x$, относящиеся к одной энергии, складываются так, что волновая функция обращается в нуль при $x = 0$ (потенциальная стенка). В данном случае тоже имеет место

суперпозиция волн. Одна из них имеет скорость $v_x = \partial\varepsilon/\partial p_x > 0$, а другая $v_x < 0$. Но при $\varepsilon(p_x, p_y, p_z) = \varepsilon(p'_x, p_y, p_z)$, вообще говоря, $p'_x \neq -p_x$. Это приводит к значительным усложнениям в общем случае.

Однако в предельно аномальном скин-эффекте, который мы рассматриваем, существуют только электроны, движущиеся почти параллельно поверхности, т. е. имеющие $v_x \approx 0$ (§ 7.2, а также дальнейший вывод). В малой окрестности таких импульсов энергия электрона имеет вид

$$\varepsilon = a(p_y, p_z) (p_x - b(p_y, p_z))^2 + d(p_y, p_z)$$

(при $p_x = b(p_y, p_z)$ $\partial\varepsilon/\partial p_x = 0$). При зеркальном отражении условие неизменности p_y и p_z означает, что $v_y \approx \partial d/\partial p_y$ и $v_z = \partial d/\partial p_z$ не меняются. Неизменность энергии при переходе от $v_x > 0$ к $v_x < 0$ означает, что $p_x - b(p_y, p_z)$ меняется на $-p_x + b(p_y, p_z)$, а, следовательно, $v_x = = 2a(p_y, p_z) (p_x - b(p_y, p_z))$ переходит в $-v_x$. Итак, в случае предельно аномального скин-эффекта при зеркальном отражении можно написать граничное условие при $x = 0$ в виде

$$\psi(v_x, v_y, v_z) = \psi(-v_x, v_y, v_z). \quad (\text{случай 1})$$

Обычно даже самая лучшая металлическая поверхность имеет неоднородности с размерами порядка атомных. В результате часть электронов отражается от поверхности диффузно, т. е. не сохраняет памяти о своем первоначальном состоянии. Поэтому наряду с зеркальным отражением имеет смысл рассмотреть и противоположный предельный случай — чисто диффузное отражение. При этом мы можем положить для $x = 0$, $v_x > 0$

$$\psi = 0^1). \quad (\text{случай 2})$$

Граничное условие $\psi \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ определяет константу C в (7.16) при $v_x < 0$. Действительно, поскольку при этом в показателе экспоненты $\exp(-Lx)$ $\text{Re } L < 0$, то надо выбрать $C = \infty$. Отсюда следует

$$\psi_{v_x < 0} = \int_{\infty}^x e E_{\alpha} \frac{v_{\alpha}}{v_x} e^{L(x_1 - x)} dx_1. \quad (7.17)$$

¹⁾ Это условие, правильное для данной геометрии задачи, не является универсальным для любой формы диффузно отражающей границы. Наиболее общее граничное условие при диффузном отражении, пригодное для границы произвольной формы, — это $\psi(x = 0, v_x > 0) = \text{const}$, т. е. независимость функции распределения отраженных электронов от направления отражения. Эта константа определяется из условия отсутствия тока по нормали к границе, т. е. $j_x = 0$ при $x = 0$, которое должно выполняться для любой границы. В рассматриваемом случае плоской границы для предельно аномального скин-эффекта $\delta \ll l$ отсюда получается $\psi(x = 0, v_x > 0) = 0$.

Это верно для обоих случаев (1 и 2). Если же $v_x > 0$, то $\exp(-Lx)$ сама обращается в нуль при $x \rightarrow \infty$. Ввиду этого константа C должна определяться из условия при $x = 0$, и, естественно, результат будет различным в обоих случаях.

Случай 1. Для $v_x > 0$ в случае зеркального отражения получаем при $x = 0$

$$\int_C^0 e E_\alpha(x_1) \frac{v_\alpha}{v_x} e^{Lx_1} dx_1 = - \int_\infty^0 e E_\alpha(x_1) \frac{v_\alpha}{v_x} e^{-Lx_1} dx_1,$$

так как если $v_x > 0$, то $-v_x < 0$ (надо иметь в виду, что L пропорционально v_x^{-1}). Следовательно, из (7.16) находим

$$\begin{aligned} \psi_{v_x > 0} &= \int_0^x e E_\alpha(x_1) \frac{v_\alpha}{v_x} e^{L(x_1-x)} dx_1 + \int_C^0 e E_\alpha(x_1) \frac{v_\alpha}{v_x} e^{L(x_1-x)} dx_1 = \\ &= \int_0^x e E_\alpha(x_1) \frac{v_\alpha}{v_x} e^{L(x_1-x)} dx_1 + \int_0^\infty e E_\alpha(x_1) \frac{v_\alpha}{v_x} e^{-L(x_1+x)} dx_1. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Подставляя (7.17) и (7.18) в выражение для тока (7.14) и обозначая v_α/v через n_α , получаем

$$\begin{aligned} j_\alpha &= \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \left\{ \int_{n_x > 0} dS \frac{n_\alpha n_\beta}{n_x} \left[\int_0^x E_\beta(x_1) e^{-L(x-x_1)} dx_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^\infty E_\beta(x_1) e^{-L(x+x_1)} dx_1 \right] - \int_{n_x < 0} dS \frac{n_\alpha n_\beta}{n_x} \int_x^\infty E_\beta(x_1) e^{-L(x-x_1)} dx_1 \right\}. \end{aligned}$$

Последние два интеграла могут быть объединены, если привести последний к интегрированию по области $n_x > 0$. Для этого изменим в интеграле знаки всех импульсов; при этом все скорости тоже меняют знак. В результате имеем

$$\begin{aligned} j_\alpha &= \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_{n_x > 0} \frac{n_\alpha n_\beta}{n_x} dS \left[\int_0^x E_\beta(x_1) e^{-L(x-x_1)} dx_1 + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty E_\beta(x_1) e^{-L(x+x_1)} dx_1 + \int_x^\infty E_\beta(x_1) e^{L(x-x_1)} dx_1 \right]. \end{aligned}$$

Интегрирование по x_1 происходит, конечно, по области внутри металла. Но если формально считать, что электрическое поле симметрично продолжено вне металла, то во втором интеграле можно заменить x_1 на $-x_1$ и при этом получается

$$\int_{-\infty}^0 E_{\beta}(x_1) e^{-L(x-x_1)} dx_1.$$

Тогда сумма первых двух интегралов в выражении для $\mathbf{j}$ даст

$$\int_{-\infty}^x E_{\beta}(x_1) e^{-L(x-x_1)} dx_1.$$

Объединяя этот интеграл с последним членом в выражении для $\mathbf{j}$, находим

$$j_{\alpha}(x) = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_{n_x > 0} \frac{n_{\alpha} n_{\beta}}{n_x} dS \int_{-\infty}^{\infty} E_{\beta}(x_1) e^{-L|x-x_1|} dx_1. \quad (7.19)$$

Случай 2. Теперь рассмотрим диффузное рассеяние электронов от границы. Применяя соответствующее граничное условие к (7.16) при $v_x > 0$, получаем $C = 0$. Подставляя это и (7.17) в (7.14), находим

$$j_{\alpha} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \left[\int_{n_x > 0} \frac{n_{\alpha} n_{\beta}}{n_x} dS \int_0^x E_{\beta}(x_1) e^{-L(x-x_1)} dx_1 - \int_{n_x < 0} \frac{n_{\alpha} n_{\beta}}{n_x} dS \int_0^{\infty} E_{\beta}(x_1) e^{-L(x-x_1)} dx_1 \right].$$

Если теперь во втором интеграле перейти от интегрирования по $n_x < 0$ к интегрированию по $n_x > 0$, то получим

$$j_{\alpha} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_{n_x > 0} \frac{n_{\alpha} n_{\beta}}{n_x} dS \left[\int_0^x E_{\beta}(x_1) e^{-L(x-x_1)} dx_1 + \int_x^{\infty} E_{\beta}(x_1) e^{-L(x-x_1)} dx_1 \right].$$

Опять эти два члена можно объединить, и в результате находим, что

$$j_{\alpha} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_{n_x > 0} \frac{n_{\alpha} n_{\beta}}{n_x} dS \int_0^{\infty} E_{\beta}(x_1) e^{-L|x-x_1|} dx_1. \quad (7.20)$$

Разница между этой формулой для j_α и формулой (7.19) в зеркальном случае заключается в том, что там x_1 менялось в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, а здесь от нуля до $+\infty$. Итак, мы получили

$$j_\alpha = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\alpha\beta}(x-x_1) E_\beta(x_1) dx_1 & \text{— зеркальный случай,} \\ \int_0^{\infty} K_{\alpha\beta}(x-x_1) E_\beta(x_1) dx_1 & \text{— диффузный случай,} \end{cases} \quad (7.21)$$

где ядро $K_{\alpha\beta}$ равно

$$K_{\alpha\beta}(x) = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_{n_x > 0} \frac{n_\alpha n_\beta}{n_x} e^{-|x|/l^* n_x} dS \quad (7.22)$$

(мы обозначили $(l^*)^{-1} = (\tau^{-1} - i\omega)/v$).

Рассмотрим фурье-образ ядра $K_{\alpha\beta}$:

$$K_{\alpha\beta}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\alpha\beta}(x) e^{-ikx} dx.$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx - \gamma|x|} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} \cos kx dx = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + k^2},$$

если $\text{Re } \gamma > 0$. Итак, мы получили

$$K_{\alpha\beta}(k) = \frac{4e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_{n_x > 0} dS \frac{n_\alpha n_\beta}{n_x} \frac{l^* n_x}{1 + (l^* n_x k)^2}. \quad (7.23)$$

Это выражение существенно упрощается для предельно аномального скин-эффекта, т.е. когда $k \sim \delta^{-1} \gg |l^*|^{-1}$.

Прежде всего, отметим, что от интеграла по ферми-поверхности более удобно перейти к интегралу по углам, характеризующим направление нормали к этой поверхности (т.е. скорости $\mathbf{v} = \partial\epsilon/\partial\mathbf{p}$). Рассмотрим элемент поверхности dS , изображенной на рис. 7.4. Пусть главные радиусы кривизны поверхности есть R_1 и R_2 . Очевидно, площадь элемента поверхности есть $R_1 R_2 d\theta_1 d\theta_2$. Теперь выберем полярную систему координат θ, φ для направления нормали так, чтобы плоскость угла θ_1 совпадала с плоскостью $\varphi = \text{const}$, т.е. $d\theta_1 = d\theta$. Тогда, очевидно, $d\theta_2 = \sin\theta d\varphi$. Отсюда следует, что

$$dS = R_1 R_2 d\Omega = d\Omega/K(\theta, \varphi), \quad (7.24)$$

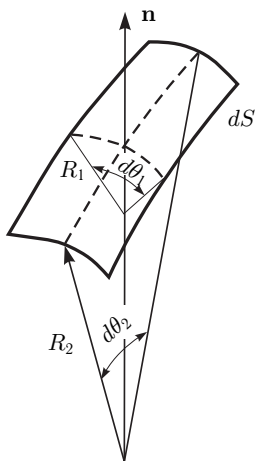


Рис. 7.4

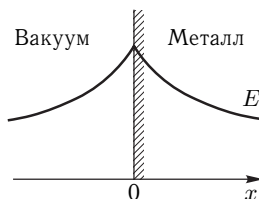


Рис. 7.5

где K — так называемая гауссова кривизна поверхности; она равна произведению главных радиусов кривизны в минус первой степени в точке поверхности, где направления нормали есть θ, φ : $K = (R_1 R_2)^{-1}$. Итак, теперь имеем

$$K_{\alpha\beta} = \frac{4e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{l^*}{1 + (l^*k \cos \theta)^2} \frac{n_\alpha n_\beta}{K(\theta, \varphi)} \sin \theta d\theta. \quad (7.25)$$

Верхний предел интеграла по θ есть $\pi/2$ (из условия $n_x > 0$). Если $kl^* \gg 1$, то существенны лишь малые значения $\cos \theta$. Поэтому мы сразу можем заменить

$$K(\theta, \varphi) \rightarrow K(\varphi) \equiv K(\pi/2, \varphi).$$

Остающийся интеграл по $\cos \theta$ становится равным

$$\int_0^1 \frac{l^* dx}{1 + (l^* k x)^2} = \frac{1}{|k|} \int_0^{l^*|k|} \frac{dy}{1 + y^2} \approx \frac{1}{|k|} \int_0^\infty \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{\pi}{2|k|}.$$

Итак, для случая $l^*k \gg 1$ получаем

$$K_{\alpha\beta}(k) = \frac{4e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{n_\alpha n_\beta}{K(\varphi)} \frac{\pi}{2|k|} = \frac{e^2 B_{\alpha\beta}}{4\pi^2 \hbar^3 |k|}, \quad (7.26)$$

где

$$B_{\alpha\beta} = \int_0^{2\pi} \frac{n_\alpha n_\beta}{K(\varphi)} d\varphi \quad (7.27)$$

— тензор в плоскости (y, z) .

Обратим внимание на то, что в интеграле (7.25) существенны значения $\cos \theta \ll 1$, т. е. $v_x \approx 0$. Это обстоятельство соответствует «концепции неэффективности»; оно было использовано нами для вывода граничного условия при зеркальном отражении.

Последующие вычисления производятся по-разному в двух случаях. В случае зеркального отражения вычисления гораздо проще, чем при диффузном отражении. Но результаты, получаемые в обоих случаях, различаются незначительно, и поэтому мы ограничимся расчетом для зеркального случая, а для диффузного приведем лишь окончательный результат.

Вывода формулу (7.19), мы считали электрическое поле продолженным симметрично на область $x < 0$. Но это означает, что при $x = 0$ производная dE/dx должна испытывать скачок (рис. 7.5) от $-E'(0)$ до $E'(0)$, т. е. вторая производная d^2E/dx^2 должна вести себя как δ -функция на границе $x = 0$. Чтобы учесть это обстоятельство, напишем уравнение (7.13) в виде

$$\frac{d^2 E_\alpha}{dx^2} - 2E'_\alpha(0) \delta(x) = -\frac{4\pi i\omega}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\alpha\beta}(x-x_1) E_\beta(x_1) dx_1. \quad (7.28)$$

Взяв фурье-образ от этого уравнения, получаем

$$-k^2 E_{k\alpha} - 2E'_\alpha(0) = -\left[i\omega e^2/c^2 \pi \hbar^3\right] B_{\alpha\beta} |k|^{-1} E_{k\beta}. \quad (7.29)$$

Это система двух уравнений ($\alpha, \beta = y, z$). Мы можем выбрать оси в плоскости (y, z) по нашему желанию. Выберем их вдоль главных осей тензора $B_{\alpha\beta}$. Тогда получатся два независимых уравнения: для E_y с B_1 и для E_z с B_2 . Поскольку они одинаковы по форме, то рассмотрим какое-нибудь одно из них:

$$-k^2 E_k - 2E'(0) = -\left[i\omega e^2/c^2 \pi \hbar^3\right] B |k|^{-1} E_k. \quad (7.30)$$

Разрешая его относительно E_k , получаем

$$E_k = -2E'(0) \left(k^2 - i b/|k|\right)^{-1}, \quad (7.31)$$

где

$$b = \omega e^2 B / c^2 \pi \hbar^3. \quad (7.32)$$

Так как E_k симметрично по k , то, переходя к $E(x)$, находим

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} E_k e^{ikx} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} E_k \cos kx = \\ &= -\frac{2E'(0)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 - i b/k} dk = -\frac{2E'(0)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k \cos kx}{k^3 - i b} dk. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Поле на поверхности равно

$$E(0) = -\frac{2E'(0)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k dk}{k^3 - ib}.$$

Этот интеграл берется, и он равен

$$\int_0^{\infty} \frac{k dk}{k^3 - ib} = \frac{2\pi}{b^{1/3}} \frac{e^{i\pi/6}}{3^{3/2}}.$$

Таким образом,

$$E(0)/E'(0) = -4 \cdot 3^{-3/2} e^{i\pi/6} b^{-1/3}.$$

Поверхностный импеданс, согласно (7.6), равен

$$Z = (4\pi/c) E_y(0)/H_z(0).$$

Но, с другой стороны,

$$dE_y/dx = (i\omega/c) H_z$$

и, следовательно, $H_z(0) = c E'_y(0)/i\omega$. Поэтому имеем

$$Z = \left(4\pi i\omega/c^2\right) E_y(0)/E'_y(0). \quad (7.34)$$

Подставляя сюда отношение $E(0)/E'(0)$, получаем

$$Z = \left(8\pi/3^{3/2}\right) (1 - i\sqrt{3}) \omega c^{-2} b^{-1/3}.$$

Наконец, подставляя сюда значение (7.32), находим

$$Z = \left(8\pi^{4/3}/3\sqrt{3}\right) \omega^{2/3} e^{-2/3} c^{-4/3} \hbar B^{-1/3} (1 - i\sqrt{3}). \quad (7.35)$$

Итак, Z есть тензор в плоскости (y, z) , главные значения которого выражаются через главные значения тензора $B_{\alpha\beta}$. Этот результат был получен для зеркального случая.

Для диффузного случая решение сложнее, и мы его не приводим; в результате получается формула для Z , близкая к (7.35), но с коэффициентом $\sqrt{3}$ вместо $8/3\sqrt{3}$ в (7.35). Значит, отношение Z в двух случаях есть $9/8$. Это различие не имеет большого значения при сравнении теории с экспериментом, ибо независимые определения поверхностного импеданса Z различаются не менее чем на 10%. Следовательно, из высокочастотного импеданса невозможно определить характер отражения ¹⁾.

¹⁾ Более детальный расчет, в котором учитывается структура поверхности [31], показывает, что в случае предельно аномального скин-эффекта

Заметим, что время столкновений не вошло в (7.35). Тензор $B_{\alpha\beta}$ зависит лишь от характеристик ферми-поверхности. Таким образом, измерение импеданса может быть использовано для нахождения ферми-поверхности реальных металлов. Действительно, такой метод был одним из первых, примененных для этой цели.

Результат (7.35) совпадает с тем, что был найден в предыдущем разделе с помощью концепции «неэффективности». Однако микроскопический вывод с помощью кинетического уравнения дал возможность определить неизвестную константу и фазовый множитель.

Поскольку время столкновений не вошло в результат, то не очень существенно, в какой именно форме был выбран интеграл столкновений. Однако можно показать [25], что принятая форма была точной в предельно аномальном случае. Действительно, для примесного рассеяния имеем

$$I(f) = \int W(\mathbf{p}, \mathbf{p}') [f(\mathbf{p}') - f(\mathbf{p})] \frac{dS'}{v'(2\pi\hbar)^3},$$

где интегрирование ведется по поверхности $\varepsilon(\mathbf{p}') = \varepsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$. При подстановке $f = f_0 - (\partial f_0 / \partial \varepsilon) \psi$ получаем

$$I(f) = (\partial f_0 / \partial \varepsilon) \int W(\mathbf{p}, \mathbf{p}') [\psi(\mathbf{p}) - \psi(\mathbf{p}')] \frac{dS'}{v'(2\pi\hbar)^3},$$

где теперь $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ лежат на поверхности Ферми.

Величина ψ как функция $\mathbf{p}$ близка к $\delta(n_x)$. Это можно увидеть из выражения (7.23) для ядра $K_{\alpha\beta}$, определяющего ток. Если подставить $\psi \propto \delta(n_x)$ в интеграл столкновений, то член с $\psi(\mathbf{p})$ сохранит характер δ -функции, а в члене с $\psi(\mathbf{p}')$ δ -функция исчезнет при интегрировании. Следовательно, этот член станет гладким и несущественным для определения δ -образной функции ψ . Обозначая

$$\int W(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{dS'}{v'(2\pi\hbar)^3}$$

через $\tau^{-1}(\mathbf{p})$, мы получаем интеграл столкновений с временем $\tau(\mathbf{p})$. Так как $\tau(\mathbf{p})$ не имеет особенностей при $n_x = 0$, то в интеграле (7.25) величину I^* можно рассматривать как не зависящую от θ , и она выпадает при интегрировании по θ . Аналогичным образом можно показать,

отражение электронов от поверхности практически является зеркальным. Этот результат имеет простое физическое истолкование. Если электрон падает на границу под углом θ_1 , то длина волны де Бройля, соответствующая его движению по нормали к поверхности, имеет порядок $\hbar/p_0\theta_1$. Если имеется шероховатость атомных размеров, то она вызывает неопределенность фазы волны на поверхности порядка $a/\lambda \sim \theta_1$. В случае аномального скин-эффекта существенные значения $\theta_1 \sim \delta/l \ll 1$. С этой точностью граница может считаться зеркальной.

что принятая форма интеграла столкновений применима при любом механизме рассеяния.

§ 7.4. Циклотронный резонанс

До сих пор мы рассматривали металлы либо в высокочастотном поле, либо в сильном магнитном поле. Теперь рассмотрим случай, когда имеется и то, и другое. Наиболее интересным здесь является так называемый циклотронный резонанс.

Пусть металл занимает полупространство $x > 0$, а магнитное поле направлено параллельно поверхности металла вдоль оси z , перпендикулярной плоскости рисунка (рис. 7.6).

Предположим, что ферми-поверхность замкнутая. Далее будем считать, что поле достаточно сильное, так что ларморовский радиус много меньше длины свободного пробега. В этом случае электроны будут двигаться по спиральным траекториям с осью вдоль оси z (круговая проекция на плоскость (x, y) изображена для простоты; в действительности мы рассмотрим общий случай). Если температура достаточно низка, а частота переменного поля велика, то глубина скин-слоя δ гораздо меньше ларморовского радиуса r_L . В этом случае некоторые электроны могут вернуться несколько раз в скин-слой, хотя большую часть времени они будут проводить вне этого слоя.

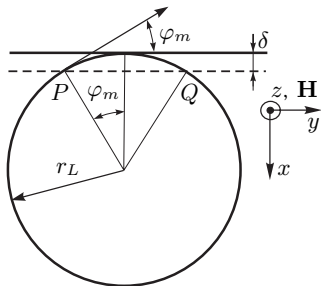


Рис. 7.6

Электрическое поле в скин-слое меняется со временем. Если частота вращения электрона будет равна частоте приложенного поля, то каждый раз, когда в скин-слой будет приходить электрон, электрическое поле будет подталкивать его в одном направлении. Конечно,

то же самое будет происходить в случае, если частота электромагнитного поля будет целым кратным ларморовской частоты: $\omega = n\Omega$, ибо изменение поля за то время, которое электрон проводит вне скин-слоя, несущественно.

Отсюда видно, что если удовлетворяются резонансные условия, то электроны более эффективно поглощают энергию электромагнитного поля. Это явление очень близко к тому, что происходит в циклотронах — ускорителях элементарных частиц, и поэтому оно было названо циклотронным резонансом (Азбель, Канер, 1956) [32]. Так как это явление зависит от электронных орбит, то можно ожидать, что соответствующие эксперименты дадут некоторые сведения об электронном спектре.

Мы не будем приводить здесь точную теорию этого явления. Поступим проще: используем концепцию неэффективности (§ 7.2). Начнем

с электронах, ответственных за циклотронный резонанс, хотя, как мы увидим ниже, их вклад в полный ток является относительно малым.

Напишем кинетическое уравнение, зависящее от времени:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t_1} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + eE_z \frac{\partial f}{\partial p_z} + e\mathbf{v}\mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = -\frac{f - f_0}{\tau}. \quad (7.36)$$

Использование τ оправдано теми же соображениями, что и в отсутствие магнитного поля (§ 7.3). Как всегда, ищем функцию распределения в виде

$$f = f_0 - (\partial f_0 / \partial \varepsilon) \psi$$

и, считая ψ зависящей от времени по закону $e^{-i\omega t}$, получаем

$$(-i\omega + \tau^{-1}) \psi + \partial \psi / \partial t_1 + \mathbf{v} \partial \psi / \partial \mathbf{r} = e\mathbf{v}\mathbf{E}. \quad (7.37)$$

Это уравнение можно решить методом характеристик. Напишем

$$dt_1 = dx/v_x = dy/v_y = dz/v_z = d\psi / [e\mathbf{E}(\mathbf{r}) \mathbf{v} - (-i\omega + \tau^{-1}) \psi]. \quad (7.38)$$

Первые уравнения дают

$$\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t_3) dt_3. \quad (7.39)$$

Это соответствует движению электрона по траектории. Координату $\mathbf{r}(t_1)$ мы подставим в $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, так что $\mathbf{E}$ становится функцией t_1 , а затем решим уравнение

$$\partial \psi / \partial t_1 + (-i\omega + \tau^{-1}) \psi = e\mathbf{v}(t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}(t_1)).$$

Решение имеет вид

$$\psi(t_1) = \int_C^{t_1} e\mathbf{v}(t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}(t_2)) \exp [(-i\omega + \tau^{-1}) (t_2 - t_1)] dt_2. \quad (7.40)$$

Если траектория электрона не касается поверхности, то нижний предел интеграла должен быть взят равным $-\infty$. Как мы видели в § 5.2, при этом ψ будет периодичным. Что касается траекторий, которые касаются поверхности, то они не дают вклад в резонанс, и мы пока не будем их рассматривать.

Кроме этого, следует учесть тот факт, что мы рассматриваем ψ в заданной точке $\mathbf{r}$. Но так как электрон в соответствии с уравнением (7.39) движется вдоль траектории $\mathbf{r}(t_1)$, нужно выбрать такую траекторию, чтобы в момент t_1 электрон оказался в точке $\mathbf{r}$. Из (7.39) получаем

$$\mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r} + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t_3) dt_3. \quad (7.41)$$

Это и есть то $\mathbf{r}(t_2)$, от которого зависит $\mathbf{E}(\mathbf{r}(t_2))$ в (7.40).

Подставляя (7.40) в выражение для плотности тока, находим

$$j_{\alpha}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \oint \frac{dS}{v} v_{\alpha} \times \\ \times \int_{-\infty}^{t_1} v_{\beta}(t_2) E_{\beta}(\mathbf{r}(t_2)) \exp[(t_2 - t_1)(\tau^{-1} - i\omega)] dt_2 \quad (7.42)$$

(где $\alpha, \beta = y, z$). Вместо точного вычисления интеграла в (7.42) мы найдем результат с помощью простых физических рассуждений.

Рассмотрим электронную орбиту на рис. 7.6. На этом рисунке считается $\delta \ll r_L$; φ_m представляет собой максимальный угол, который соответствует электрону, касающемуся поверхности металла. Из рисунка ясно, что

$$\delta = r_L - r_L \cos \varphi_m, \quad \text{или} \quad r_L \varphi_m^2 \sim \delta.$$

Следовательно,

$$\varphi_m \sim (\delta/r_L)^{1/2}. \quad (7.43)$$

Длина части орбиты, находящейся внутри скин-слоя, $PQ \approx 2r_L \varphi_m$, а, следовательно, время, проведенное электроном в скин-слое, равно $2r_L \varphi_m / v_y$.

Если траектория электрона не касается поверхности, то в (7.42) надо интегрировать от $-\infty$ до t_1 . До момента t_1 есть много коротких промежутков времени, когда электрон входит в скин-слой. Каждый такой промежуток очень короток, и при интегрировании по одному промежутку мы заменим выражение под интегралом его средним значением. Только эти промежутки и вносят вклад в интеграл по t_2 , ибо в то время, когда электрон движется вне скин-слоя, поле E равно нулю. Однако поскольку до входа в скин-слой электрон движется в течение целого периода T , то каждый такой промежуток дает в интеграле (7.42) дополнительный фазовый множитель $\exp[-T(\tau^{-1} - i\omega)]$ по сравнению с последующим промежутком. Обозначая $w = T(\tau^{-1} - i\omega)$, мы получаем после интегрирования по dt_2 сумму

$$(2r_L \varphi_m / v_y) (1 + e^{-w} + e^{-2w} + \dots) = (2r_L \varphi_m / v_y) (1 - e^{-w})^{-1}. \quad (7.44)$$

Ниже будет показано, что множитель $(1 - e^{-w})^{-1}$ приводит к резонансу. Интеграл по dS может быть переписан в виде

$$\int dS \rightarrow \int \frac{d\Omega}{K(\theta, \varphi)},$$

где K — гауссова кривизна поверхности в точке, где направление нормали к ней задано углами θ, φ (§ 7.3).

Теперь применим концепцию неэффективности. Так как здесь существенны лишь те электроны, которые в скин-слое движутся параллельно поверхности, то интегрирование по $d\theta$ дает нам величину порядка $v_{x\max}/v$. Но из рис. 7.6 следует, что $v_{x\max} = v_y\varphi_m$. Таким образом, интегрирование по $d\theta$ дает нам $v_y\varphi_m/v K(\varphi)$, где $K(\varphi) = K(\pi/2, \varphi)$. Подставляя это в интеграл (7.42), находим

$$j_\alpha \sim \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int (1 - e^{-w})^{-1} \frac{2r_L\varphi_m}{v_y} \frac{v_y\varphi_m}{v K(\varphi)} v_\alpha v_\beta E_\beta \frac{d\varphi}{v}.$$

Подставляя сюда $\varphi_m \sim (\delta/r_L)^{1/2}$ из (7.43), мы получаем эффективную проводимость:

$$\sigma_{r\alpha\beta} \sim \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{2\pi} (1 - e^{-w})^{-1} \frac{n_\alpha n_\beta}{K(\varphi)} \delta d\varphi. \quad (7.45)$$

В отсутствие магнитного поля $w \rightarrow \infty$ и эффективная проводимость $\sigma_r \sim e^2 p_0^2 \delta / \hbar^3 \sim \sigma \delta / l$, где $\sigma \sim n_e e^2 \tau / m \sim n_e e^2 l / p_0 \sim e^2 p_0^2 l / \hbar^3$ — обычная проводимость. Эта величина соответствует аномальному скин-эффекту без поля (ср. с (7.9), $k \sim \delta^{-1}$).

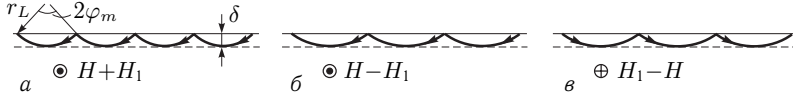


Рис. 7.7

Теперь рассмотрим вклад в ток от траекторий, которые касаются поверхности. Наиболее существенными из них являются так называемые «скачущие траектории», изображенные на рис. 7.7 (Фальковский, 1981) [33]. Связано это с уже отмеченным ранее обстоятельством: электроны, падающие на поверхность под малым углом, отражаются от нее в основном зеркально (см. сноску на с. 132). Такие электроны все время остаются в скин-слое и дают преобладающий вклад в ток. Оценим этот ток, применив концепцию неэффективности ¹⁾.

Для того чтобы электроны не выходили за пределы скин-слоя, надо, чтобы угол φ на рис. 7.7 не превышал $\varphi_m \sim (\delta/r_L)^{1/2}$. Эффективное число электронов при этом будет порядка $n_e\varphi_m$. Соответствующим образом меняется и эффективная проводимость. Однако при этом не учитывается тот факт, что при каждом столкновении с поверхностью имеется малая вероятность диффузного отражения. Если обозначить эту вероятность через q , то формулу для эффективной проводимости

¹⁾ Приводимые ниже рассуждения принадлежат Л. А. Фальковскому [34].

электронов, движущихся по скачущим траекториям, можно написать в виде

$$\sigma_s \sim \sigma \varphi_m / (1 + \zeta q), \quad (7.46)$$

где ζ — число столкновений с поверхностью на расстоянии, равном длине пробега. Так как длина одного участка между отражениями порядка $r_L \varphi_m \sim (\delta r_L)^{1/2}$, то $\zeta \sim l / (\delta r_L)^{1/2}$.

Точное микроскопическое рассмотрение показывает, что если шероховатость поверхности имеет атомные размеры, то $q \sim \varphi_m$ (это соответствует оценке в сноске на с. 132). Отсюда следует, что

$$\zeta q \sim \left(l / (\delta r_L)^{1/2} \right) (\delta / r_L)^{1/2} \sim l / r_L \gg 1.$$

В этом случае второй член скобки в формуле (7.46) значительно больше первого, а поэтому можно пользоваться выражением

$$\sigma_s \sim \sigma / \zeta \sim \sigma (\delta r_L)^{1/2} / l. \quad (7.47)$$

Сравнивая это с выражением для эффективной проводимости резонансных электронов $\sigma_r \sim \sigma \delta / l$, видим, что $\sigma_s \gg \sigma_r$ (за исключением, может быть, самой близкой окрестности резонансов с малыми n , см. ниже).

Далее мы поступаем аналогично тому, как при вычислении импеданса в случае аномального скин-эффекта с той разницей, что здесь мы пользуемся δ вместо k^{-1} . Запишем полную эффективную проводимость в виде

$$\sigma_{\text{эф}} \sim \sigma \left[(\delta r_L)^{1/2} / l \right] (1 + \alpha),$$

где $\alpha = \sigma_r / \sigma_s \ll 1$, и подставим в выражение (7.4) для δ . Получается уравнение для δ , решение которого дает

$$\delta \sim \left(c^2 l / \omega \sigma \right)^{2/5} r_L^{-1/5} (1 + \alpha)^{-2/5}. \quad (7.48)$$

Подставляя в формулу (7.7) для импеданса, получаем

$$Z \sim c^{-2} (\omega / k) \sim c^{-2} \omega \delta \sim \left(\omega / c^2 \right)^{3/5} (\sigma / l)^{-2/5} r_L^{-1/5} (1 - 2\alpha/5). \quad (7.49)$$

Относительная величина резонансной части импеданса порядка $\alpha = \sigma_r / \sigma_s$. Подставляя соответствующие формулы и выражая δ с помощью (7.48), находим

$$Z_r / Z \sim \sigma_r / \sigma_s \sim (\delta / r_L)^{1/2} \sim \left(c^2 l / \omega \sigma \right)^{1/5} r_L^{-3/5} \ll 1. \quad (7.50)$$

Теперь рассмотрим резонансную часть Z_r более детально. Она пропорциональна проводимости резонансных электронов (7.45).

В эту формулу входит тензор

$$B_{\alpha\beta} = \int_0^{2\pi} \frac{n_\alpha n_\beta}{K(\varphi)} \frac{d\varphi}{1 - e^{-w(\varphi)}}. \quad (7.51)$$

В знаменателе подынтегрального выражения стоит

$$1 - e^{-w} = 1 - \exp[2\pi i\omega/\Omega - 2\pi/(\Omega\tau)].$$

Если $\Omega\tau \gg 1$, то множитель $\exp(-2\pi/(\Omega\tau))$ несуществен и для $\omega = n\Omega$ мы получаем резонанс. Однако следует отметить, что Ω зависит от φ и при интегрировании по φ сингулярность интеграла может исчезнуть. Поэтому интеграл надо проанализировать более тщательно.

Как было показано в § 5.1, $\Omega = eH/m^*c$, где m^* — циклотронная масса

$$m^* = (2\pi)^{-1} [\partial S(p_z, \varepsilon)/\partial \varepsilon]_{\varepsilon=\mu}.$$

В ток вносят вклад лишь точки на ферми-поверхности, где скорость лежит в плоскости металлической поверхности, т. е. $v_x = 0$.

Это проиллюстрировано на рис. 7.8. На нем изображена замкнутая ферми-поверхность. Штриховая линия соединяет точки, где $v_x = 0$. Вертикальные плоские контуры — это сечения ферми-поверхности плоскостями $p_z = \text{const}$.

Если бы зависимость энергии от импульса была квадратичной, т. е. $\varepsilon = \alpha_{ik} p_i p_k$, то, очевидно, величина m^* для всех p_z была бы одинаковой. В общем случае это, конечно, не так, и m^* зависит от p_z , меняясь в каких-то пределах. Предположим, что частота и магнитное поле таковы, что электроны какого-то сечения попадают в резонанс. Если мы слегка изменим поле или частоту, то в резонансе окажутся электроны соседнего сечения. Отсюда видно, что если в резонансе оказываются электроны с какой-то промежуточной массой m^* , то это не может привести к сингулярности импеданса.

Иное дело, если в резонансе оказываются электроны с экстремальным (максимальным или минимальным) значением m^* . В этом случае при изменении поля в одну сторону в резонансе оказываются другие электроны, но при обратном изменении поля резонанс исчезает совсем. Здесь следует ожидать особенности импеданса. Следовательно, условием резонанса является

$$\omega = n\Omega_{\text{extr}}, \quad \Omega_{\text{extr}} = eH/m_{\text{extr}}^*c. \quad (7.52)$$

Рассмотрим этот вопрос более подробно. Обычно на опыте частота ω постоянна, а меняется магнитное поле. Предположим, что мы

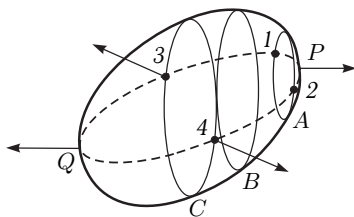


Рис. 7.8

находимся вблизи резонанса, соответствующего $H = H_n$. В интеграле (7.51), очевидно, будут существенны значения φ вблизи φ_0 , соответствующего m_{extr}^* . Ввиду этого можно представить Ω приближенно в виде

$$\Omega = (\omega/n) \left[1 + \Delta + a(\varphi - \varphi_0)^2 \right],$$

где

$$\Delta = (H - H_n)/H_n, \quad a \sim 1.$$

Если масса при φ_0 минимальна, то $a < 0$, если же она максимальна, то $a > 0$. Входящая в (7.51) величина $w = 2\pi/(\Omega\tau) - 2\pi i\omega/\Omega$ близка к $-2\pi in$. Пусть $\Omega\tau \gg 1$. Разлагая $1 - \exp(-w)$ по Δ , $(\varphi - \varphi_0)^2$ и $(\Omega\tau)^{-1}$, находим

$$1 - e^{-w} \approx w + 2\pi in \approx 2\pi n/\omega\tau + 2\pi in\Delta + 2\pi ina(\varphi - \varphi_0)^2.$$

Поскольку интеграл (7.51) быстро сходится около $\varphi = \varphi_0$, то все медленно меняющиеся в этой окрестности величины можно заменить их значениями при $\varphi = \varphi_0$, а пределы интегрирования по $x = \varphi - \varphi_0$ считать бесконечными. Таким образом, получаем, что

$$B_{\alpha\beta} = \frac{n_\alpha(\varphi_0)n_\beta(\varphi_0)}{K(\varphi_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi ina [x^2 + \Delta/a - i/(a\omega\tau)]}. \quad (7.53)$$

Заметим здесь следующее. В действительности экстремальная циклотронная масса относится к данному сечению $p_z = \text{const}$, которое пересекает контур $v_x = 0$ в двух точках (кроме опорной точки, см. ниже), соответствующих двум углам: φ_{01} и φ_{02} . Поэтому, очевидно, надо рассматривать окрестности обоих этих углов. Интегралы при этом будут одинаковы и единственная необходимая замена заключается в множителе перед интегралом в (7.53): надо взять сумму от φ_{01} и φ_{02} :

$$B_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{n_\alpha(\varphi_{01})n_\beta(\varphi_{01})}{K(\varphi_{01})} + \frac{n_\alpha(\varphi_{02})n_\beta(\varphi_{02})}{K(\varphi_{02})}. \quad (7.54)$$

Рассмотрим случай, когда $|\Delta| \gg (\omega\tau)^{-1}$. Если $a > 0$, имеем

$$B_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}^{(0)} \begin{cases} -i(2n\sqrt{\Delta a})^{-1}, & \Delta > 0; \\ (2n\sqrt{|\Delta|a})^{-1}, & \Delta < 0. \end{cases} \quad (7.55)$$

Если же $a < 0$, то получаем

$$B_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}^{(0)} \begin{cases} (2n\sqrt{\Delta|a|})^{-1}, & \Delta > 0; \\ i(2n\sqrt{|\Delta||a|})^{-1}, & \Delta < 0. \end{cases} \quad (7.56)$$

Отсюда видно, что знак a существенно влияет на результат, т.е. максимальная и минимальная циклотронные массы дают совершенно разного типа эффекты в импедансе.

В самом резонансе вместо Δ мы должны подставить $(\omega\tau)^{-1}$, т. е. $B_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}^{(0)} (\omega\tau)^{1/2} n^{-1}$. Если $n \sim 1$, то $\omega \sim \Omega$, т. е.

$$B_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}^{(0)} (\Omega\tau)^{1/2} \sim B_{\alpha\beta}^{(0)} (l/r_L)^{1/2}.$$

Так как σ_r пропорциональна $B_{\alpha\beta}$, то, согласно (7.50), отношение Z_r/Z может достигнуть величины порядка

$$(l/r_L)^{1/2} (\delta/r_L)^{1/2} \sim (l\delta)^{1/2}/r_L.$$

В принципе эта величина может быть и большой, но в реальных экспериментах она невелика. С увеличением n высота максимумов быстро падает.

Для резонансов с большим n уже нельзя считать $2\pi/\Omega\tau \ll 1$ и лучше пользоваться приближением $\exp(-w) \ll 1$. Тогда осциллирующая часть тензора $B_{\alpha\beta}$ соответствует интегралу

$$\tilde{B}_{\alpha\beta} = \int_0^{2\pi} \frac{n_\alpha n_\beta}{K(\varphi)} \exp(-w) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{n_\alpha n_\beta}{K(\varphi)} \exp\left(-\frac{2\pi}{\Omega\tau}\right) \exp\left(\frac{2\pi i\omega}{\Omega}\right) d\varphi.$$

Подставляя $\Omega = \Omega_{\text{extr}} [1 + a(\varphi - \varphi_0)^2]$ и считая $\omega\tau \gg 1$, получаем интеграл, который можно взять методом «перевала». В результате имеем

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}^{(0)} \left(\frac{\Omega_{\text{extr}}}{2\omega|a|} \right)^{1/2} \times \\ \times \exp\left(\frac{i\pi \operatorname{sign} a}{4}\right) \exp\left(-\frac{2\pi}{\Omega_{\text{extr}}\tau}\right) \exp\left(\frac{2\pi i\omega}{\Omega_{\text{extr}}}\right). \end{aligned} \quad (7.57)$$

Отсюда видно, что с увеличением n совокупность резонансных пиков переходит в затухающие осцилляции импеданса.

Вернемся к условию резонанса (7.52). Интересно выяснить, где же именно находятся сечения с экстремальными массами. Если ферми-поверхность имеет центр симметрии, то центральное сечение (C на рис. 7.8) определено будет иметь экстремальную массу. Могут быть также некоторые случайные сечения, обладающие этим свойством. И, наконец, этим свойством обладают точки P и Q на рис. 7.8, которые называются эллиптическими опорными точками (название связано с тем, что в этих точках поверхность опирается на плоскости $p_z = \text{const}$). Для того чтобы это доказать, рассмотрим сечение, очень близкое к P , например A . Это сечение пересекает линию $v_x = 0$ в двух точках 1 и 2. Они соответствуют разным значениям φ , но принадлежат к одному сечению и, следовательно, имеют одно и то же значение $m^* = (2\pi)^{-1} \partial S / \partial \varepsilon$. Значит, некоторое значение φ между этими точками соответствует экстремуму $\partial S / \partial \varepsilon$. Очевидно, что это точка P .

Для того чтобы сосчитать $\partial S/\partial \varepsilon$ в точке P , рассмотрим опять сечение, близкое к P . Оно будет эллипсом с полуосями, равными (рис. 7.9)

$$a = \left[R_1^2 - (R_1 - \delta p_z)^2 \right]^{1/2} \approx (2R_1 \delta p_z)^{1/2}, \quad b \approx (2R_2 \delta p_z)^{1/2},$$

где R_1 и R_2 — два главных радиуса кривизны ферми-поверхности. Площадь сечения равна

$$\delta S = \pi ab = 2\pi (R_1 R_2)^{1/2} \delta p_z = 2\pi \delta p_z / \sqrt{K}. \quad (7.58)$$

В точке P скорость параллельна магнитному полю $\mathbf{H}$, т. е. $v_z = v = \partial \varepsilon / \partial p_z$, следовательно,

$$\delta p_z = \delta \varepsilon / v, \quad \delta S = (2\pi / \sqrt{K}) \delta \varepsilon / v.$$

Так как $m^* = (2\pi)^{-1} \partial S / \partial \varepsilon$, то для эллиптических опорных точек циклотронная масса равна

$$m^* = (v \sqrt{K})^{-1}. \quad (7.59)$$

Возникает, однако, следующая неясность. Если скорость в точке P параллельна магнитному полю, то чему равен ларморовский радиус? Очевидно, в этом случае он равен нулю, в то время как все явление основано на предположении $r_L \gg \delta$. В действительности никакого противоречия тут нет. Около опорной точки

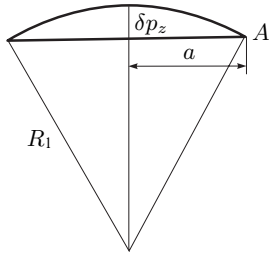


Рис. 7.9

$$\Omega = \Omega_0 \left[1 + a(\varphi - \varphi_0)^2 \right],$$

где $a \sim 1$. Но ведь в формуле (7.51) $w = T(\tau^{-1} - i\omega)$, т. е. содержит член $2\pi/(\Omega\tau)$. Этот член приводит к размазыванию резонанса, что означает участие в нем точек, смежных с P . Размеры этой области определяются условием $(\omega/\Omega)(\varphi - \varphi_0)^2 \sim (\Omega\tau)^{-1}$, или

$$|\varphi - \varphi_0| \sim (\omega\tau)^{-1/2}. \quad (7.60)$$

С другой стороны, ларморовский радиус $r_L \sim r_{L0}(\varphi - \varphi_0)$ (где r_{L0} — некоторое среднее значение для данной поверхности). Следовательно, ларморовские радиусы, участвующие в резонансе, вблизи опорных точек имеют порядок $r_L \sim r_{L0}(\omega\tau)^{-1/2}$. Условие $r_L \gg \delta$ означает, что

$$(\omega\tau)^{1/2} \ll r_{L0}/\delta. \quad (7.61)$$

Таким образом, хотя для наблюдения циклотронного резонанса необходимо $\omega\tau \gg 1$, но эта величина не должна быть слишком велика. Иначе невозможно наблюдать резонанс от опорных точек.

При экспериментальном исследовании циклотронного резонанса легко различить разные типы точек с экстремальными массами.

В опорных точках P и Q на рис. 7.8 скорость электрона направлена параллельно магнитному полю $\mathbf{H}$. Так как взаимодействие с электрическим полем выражается величиной $e\mathbf{v}\mathbf{E}$, то резонанс на опорной точке должен исчезнуть при $\mathbf{E}$, перпендикулярном постоянному магнитному полю (напомним, что волна падает нормально к поверхности металла и $\mathbf{E}$ лежит обязательно в плоскости поверхности).

Если экстремальные массы связаны с центральным сечением C (рис. 7.8), то здесь существенные в задаче скорости в точках 3 и 4 имеют прямо противоположные направления. Следовательно, можно найти направление электрического поля, перпендикулярное обоим скоростям. В этом случае резонанс пропадает. Однако направления скоростей при этом не совпадают с направлением постоянного магнитного поля.

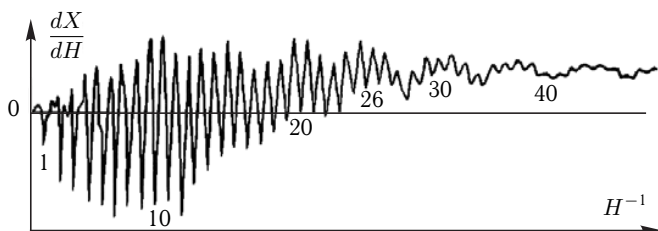


Рис. 7.10

Наконец, если сечение с экстремальной массой является случайным, то скорости в двух точках пересечения контура $v_x = 0$ с контуром $p_z = \text{const}$ направлены в разные стороны. При этом резонанс вообще не может исчезнуть.

Как уже было сказано, на опыте легче менять не частоту, а магнитное поле. Написав резонансное условие в виде

$$H^{-1} = ne/(m^*c\omega),$$

мы видим, что поверхностный импеданс должен быть периодическим, как функция H^{-1} . На рис. 7.10 [35] отчетливо видны до 40 осцилляций. Из частот осцилляций (их две на рисунке) были определены на олове две циклотронные массы, отличающиеся в 5,5 раз.

Теперь рассмотрим некоторые условия, которые должны быть выполнены для наблюдения циклотронного резонанса. Прежде всего найдем возможный предел наклона постоянного поля к металлической поверхности. Посмотрим на рис. 7.11 а. Для того чтобы возник резонанс, электрон должен войти в скин-слой хотя бы дважды. Период равен $2\pi r_L/v$. Если средняя скорость движения вдоль поля тоже порядка v , то электрон движется в направлении x со скоростью $v\psi$. В течение одного периода его смещение в x -направлении будет $(2\pi r_L/v)v\psi$.

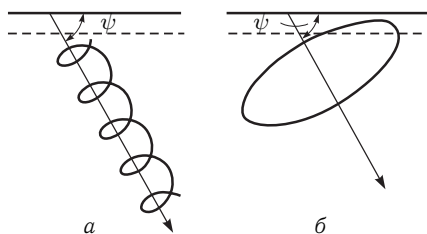


Рис. 7.11

Оно должно быть меньше δ , т. е.

$$\psi < \delta/2\pi r_L. \quad (7.62)$$

Это условие для обычных металлов при полях порядка 10^4 Э удовлетворяется для $\psi < 1^\circ$.

В опорных точках $r_L/v_\perp \sim \sim r_{L0}/v$. Поэтому условие (7.62) справедливо и для них.

В особом положении находятся центральные сечения. Для них средняя скорость электрона в направлении магнитного поля равна нулю. Следовательно, траектория электрона не спиральная, а замкнутая (рис. 7.11 б). Условие наблюдения резонанса в этом случае не столь жесткое, как в общем случае. Его можно получить следующим образом. Хотя на самом центральном сечении $\bar{v}_z = 0$, но в резонансе на самом деле принимает участие некоторая окрестность центрального сечения. Эта окрестность определяется из тех же соображений, что и для опорной точки, т. е. выражается формулой (7.60). Нетрудно видеть, что средняя скорость v_z при каком-то $\varphi - \varphi_0$ будет порядка $v(\varphi - \varphi_0)$, т. е. порядка $v(\omega\tau)^{-1/2}$. Рассуждая далее аналогично тому, как мы выводили формулу (7.62), находим

$$\psi \ll \delta(\omega\tau)^{1/2}/2\pi r_L. \quad (7.63)$$

Из формулы (7.57) следует, что при больших n амплитуда осцилляций импеданса пропорциональна

$$\exp(-2\pi/\Omega\tau) = \exp(-2\pi n/\omega\tau) = \exp(-n/\nu\tau), \quad (7.64)$$

где $\nu = \omega/2\pi$ — циклическая частота. Если ω остается постоянным, то этот множитель быстро убывает с увеличением n , т. е. при заданном $\nu\tau$ можно наблюдать резонансы с номерами, не намного превышающими $\nu\tau$. Значит для наблюдения резонанса надо обеспечить большие τ . Для частоты $\nu = 10^{10}$ Гц условие $n \gg 1$ дает

$$10^{10}\tau \sim 10^{10}l/v \sim 10^2 l \gg 1$$

(так как у большинства металлов $v \sim p_0/m \sim 10^8$ см/с). Значит, необходимо, чтобы длина свободного пробега $l \gg 10^{-2}$ см, или концентрация примесей $c_i \ll 10^{-4}$.

Даже при этом условии число наблюдаемых резонансных пиков ограничено. Дело в том, что в течение промежутка времени, когда электрон движется в скин-слое, электрическое поле волны должно оставаться практически постоянным. Длина этой части траектории, как мы уже выяснили, порядка $(r_L\delta)^{1/2}$, и электрон проходит ее

со скоростью v . Следовательно, время прохождения скин-слоя порядка $(r_L \delta)^{1/2}/v$ и условие неизменности поля есть

$$(r_L \delta)^{1/2}/v \ll \nu^{-1}. \quad (7.65)$$

Учитывая, что $r_L \sim v/\Omega = vn/\omega$, получаем

$$n \ll (v/\nu)^2 (\omega/\delta v) \sim 2\pi v/\nu \delta. \quad (7.66)$$

Для частоты $\nu \sim 10^{10}$ Гц глубина скин-слоя $\delta \sim 10^{-4}$ см, и мы получаем отсюда $n < 10^3$, что соответствует опыту для самых чистых образцов.

§ 7.5. Нелинейные эффекты. Токовые состояния

До сих пор мы считали высокочастотное поле слабым и по сути дела вычисляли распределение токов в металле, возникающих под действием этого поля в первом порядке по полю. Такого типа расчет носит название теории линейного отклика. Вместе с тем применение очень чистых металлов и низких температур дали возможность наблюдать нелинейные явления, зависящие от мощности падающей волны.

Существует большое количество подобных явлений. Например, когда на металл падает волна, то в противоположность вакууму, где электрическое и магнитное поля волны равны по амплитуде, внутри металла магнитное поле значительно больше электрического. Но проводимость чистых металлов зависит от магнитного поля. Это приводит к зависимости поверхностного импеданса от мощности волны, а также генерации волны с удвоенной частотой, появлению волны с разностной частотой при одновременном падении двух волн разной частоты и т. п.

Особенно заметным образом проявляются нелинейные эффекты тогда, когда в явлении участвует малая выделенная группа электронов. Не будучи в состоянии исказить функцию распределения всех электронов, падающая волна способна произвести заметное действие на малую группу. Примером является циклотронный резонанс, в котором главную роль играет малая группа электронов в окрестности точки пересечения плоского сечения $p_z = \text{const}$, обладающего экстремальной циклотронной массой m^* , и контура $v_x = 0$.

Мы разберем здесь очень интересный нелинейный эффект, заключающийся в появлении так называемых «токовых состояний» (Долгополов, 1975) [36]. Пусть задача поставлена так же, как при циклотронном резонансе. Однако на этот раз будем считать, что амплитуда переменного магнитного поля H_1 не мала по сравнению с амплитудой постоянного поля H , приложенного к образцу. В этом случае движение электронов будет существенно различным в зависимости от взаимной ориентации полей $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}$.

В § 7.4 уже говорилось, что если глубина скин-слоя мала по сравнению с лармовским радиусом, то основной вклад в ток вносят электроны, движущиеся по скачущим траекториям (рис. 7.7). Вид этих

траекторий существенно зависит от размера ларморовского радиуса. При наличии постоянного поля возникает асимметрия между токами в разные полупериоды, и в результате у поверхности появляется выпрямленный ток. Этот ток создает добавку к постоянному магнитному полю в образце. Эффект «токовых состояний» заключается в возможности спонтанного появления выпрямленного тока и соответствующего постоянного поля без приложения какого-либо внешнего постоянного поля. Поле и ток при этом поддерживают друг друга. Конечно, это может происходить лишь при достаточно большой амплитуде падающего высокочастотного излучения.

Будем предполагать выполненными два условия, при которых релактируются скачущие траектории. Во-первых, число скачков на длине пробега должно быть велико:

$$(\delta r_L)^{1/2} \ll l. \quad (7.67)$$

Во-вторых, обязательно должно выполняться условие

$$\delta \ll r_L. \quad (7.68)$$

Мы будем, как и раньше, считать $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ параллельными поверхности образца и для простоты предположим $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$, так, что существуют E_y , H_z . При этом может возникнуть подозрение, что даже без учета нелинейности ток зависит от взаимной ориентации $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, т. е. различен в разные полупериоды. Ведь электроны закручиваются магнитным полем в одну сторону. Поэтому электроны, движущиеся параллельно поверхности в направлении поля $\mathbf{E}$ ($\mathbf{vE} > 0$), при одном направлении поля $\mathbf{H}$ поворачивают к поверхности и образуют скачущие траектории, а при другом направлении $\mathbf{H}$ поворачивают в глубь металла и выходят из скин-слоя. Однако ток возникает не только за счет разгона электронов, движущихся в направлении $\mathbf{E}$, но и за счет торможения тех, которые движутся в обратном направлении. Для последних вся картина противоположна. Отсюда следует, что взаимная ориентация $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ несущественна, и ток зависит лишь от модуля поля $\mathbf{H}$.

Как уже говорилось, постоянное поле $\mathbf{H}$ складывается из внешнего поля и поля выпрямленного тока. Интегрируя уравнение Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}$ и усредняя его по времени, мы получаем граничное условие

$$\overline{H}_{\text{int}} - \overline{H}_{\text{ext}} = -\frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \bar{j} dx.$$

Здесь $\overline{H}_{\text{int}}$ среднее поле в глубине металла, а $\overline{H}_{\text{ext}}$ — вне металла. Поскольку выпрямленный ток замыкается внутри металла, то он не создает магнитное поле вне металла. Следовательно, $\overline{H}_{\text{ext}} = H_0$, $\overline{H}_{\text{int}} = H_0 + \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — поле, создаваемое выпрямленным током. Итак, имеем

$$\mathcal{H} = -\frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \bar{j} dx = f(H_0 + \mathcal{H}). \quad (7.69)$$

Это уравнение относительно $\mathcal{H}$. Положим $H_0 = 0$; если уравнение (7.69) все же имеет ненулевые решения, то это означает спонтанное возникновение выпрямленного тока и постоянного поля, поддерживающих друг друга.

Для нахождения выпрямленного тока воспользуемся формулой эффективной проводимости для скачущих траекторий (7.46). Ток $\bar{j}$ получается как разность токов с магнитным полем $|H_1 - \mathcal{H}|$ и $H_1 + \mathcal{H}$ (H_1 — амплитуда переменного поля). Так как ток течет лишь в скин-слое, то $\int \bar{j} dx \sim \bar{j} \delta$.

Ввиду того что $\bar{j}$ есть разность токов, возникает вопрос о знаке. Его можно решить на основании следующего рассуждения. Внешнее магнитное поле вызывает закручивание электронных орбит, что в свою очередь приводит к появлению в объеме металла дополнительного поля, противоположного внешнему (диамагнетизм, гл. 10). Однако ток, образуемый электронами скачущих траекторий, противоположен диамагнитному току объемных электронов, а поэтому всегда дает парамагнитный эффект, т.е. магнитное поле параллельное внешнему. Если постоянное поле $H = H_0 + \mathcal{H}$ больше переменного H_1 , то в оба полупериода общее поле направлено в одну сторону (рис. 7.7 а и б) и среднее поле $\mathcal{H}$ параллельно этому полю. Если же $H_1 > H$, то картина меняется. В один полупериод поле, создаваемое электронами скачущих орбит, направлено в одну сторону (рис. 7.7 а), а в другой полупериод — в противоположную сторону (рис. 7.7 в). Среднее по времени поле определяется тем, в какой полупериод ток, или, иначе говоря, эффективная проводимость, будет больше. Это зависит от соотношения между r_L и l . Если $r_L \gg l$, то, согласно (7.46),

$$\sigma_{\text{эф}} \sim \sigma \varphi_m \sim \sigma (\delta/r_L)^{1/2}.$$

В этом случае $\sigma_{\text{эф}}$ растет с увеличением поля, и она будет больше в тот полупериод, когда $\mathbf{H}_1$ параллельно $\mathbf{H}$. В этом случае среднее поле, создаваемое электронами скачущих орбит, т.е. $\mathcal{H}$, направлено параллельно $\mathbf{H}$. Если же $r_L \ll l$, то из (7.46) следует

$$\sigma_{\text{эф}} \sim \sigma (\delta r_L)^{1/2} / l,$$

т.е. проводимость убывает с ростом поля и больше в тот полупериод, когда $\mathbf{H}_1$ направлено антипараллельно $\mathbf{H}$. Это приводит к изменению знака среднего поля, создаваемого электронами скачущих орбит. Однако на практике амплитуда падающей электромагнитной волны никогда не является настолько большой, что $r_L(H_1) \ll l$. Ввиду этого мы будем предполагать $r_L \gg l$.

Для дальнейшего весьма важно, какую величину следует считать заданной. Из уравнения $\text{rot } \mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{H} / \partial t$ находим, что внутри металла

$$E \sim (\delta \omega / c) H_1 \sim (\delta / \lambda) H_1, \quad (7.70)$$

где $\lambda = c/\omega$ — длина волны переменного поля в вакууме. В радиодиапазоне $\lambda \gg \delta$, т.е. в металле $E \ll H_1$. Из граничных условий на поверхности металла следует, что H_1 порядка амплитуды падающей волны. Поэтому естественно считать заданным именно H_1 .

Мы будем интересоваться спонтанным возникновением токовых состояний и поэтому положим в (7.69) $H_0 = 0$. Подставляя $\sigma_{\text{эф}} \sim \sigma(\delta/r_L)^{1/2}$, получаем

$$f(\mathcal{H}) \sim (\sigma/c) \delta^{3/2} \left[r_L^{-1/2} (H_1 - \mathcal{H}) - r_L^{-1/2} |H_1 - \mathcal{H}| \right] E \sim \\ \sim (\sigma\omega/c^2) \delta^{5/2} \left[r_L^{-1/2} (H_1 + \mathcal{H}) - r_L^{-1/2} |H_1 - \mathcal{H}| \right] H_1. \quad (7.71)$$

Рассмотрим функцию $f(\mathcal{H})$ в предельных случаях. Если $\mathcal{H} \ll H_1$, то разложим ее по $\mathcal{H}$:

$$f(\mathcal{H}) \sim (\sigma\omega/c^2) \delta^{5/2} \mathcal{H} H_1^{1/2} (e/cp_0)^{1/2}.$$

Скинговая глубина проникновения может быть найдена из (7.4). После подстановки выражения для эффективной проводимости ¹⁾ получаем уравнение для δ , откуда находим

$$\delta \sim (c^2/\omega\sigma)^{2/5} (cp_0/eH_1)^{1/5}. \quad (7.72)$$

Подставляя это в предыдущую формулу, получаем

$$f(\mathcal{H}) \sim \mathcal{H}. \quad (7.73)$$

В противоположном предельном случае разложим (7.71) по H_1 :

$$f(\mathcal{H}) \sim (\sigma\omega/c^2) \delta^{5/2} H_1^2 \mathcal{H}^{-3/2} (e/cp_0)^{1/2}.$$

Формула для δ имеет вид (7.72) с заменой H_1 на $\mathcal{H}$. Подставляя ее, находим

$$f(\mathcal{H}) \sim H_1^2/\mathcal{H}. \quad (7.74)$$

Отсюда, конечно, нельзя сделать определенное заключение о возможности спонтанных токовых состояний; для этого необходимо точное решение задачи. Однако предельные формулы для $f(\mathcal{H})$ (7.73) и (7.74) показывают, что ненулевое решение уравнения (7.69) при $H_0 = 0$ может существовать в области $\mathcal{H} \sim H_1$. Обязательным условием является наличие скачущих траекторий, т.е. $(\delta/r_L)^{1/2} < l$. Подставляя δ согласно (7.72), получаем

$$H_1 > H_c \sim (cp_0/e) \left[c^2/\omega\sigma l^5 \right]^{1/3}. \quad (7.75)$$

¹⁾ В изложенном качественном выводе величина δ остается несколько неопределенной ввиду различия $\sigma_{\text{эф}}$ в разные полупериоды. Представляется разумным взять среднее значение $\sigma_{\text{эф}}$.

Пороговое значение H_c быстро убывает с увеличением частоты и в особенности длины пробега. Для обычных металлов

$$\sigma \sim (ne^2/p_0)l \sim 10^{22}l,$$

т. е. $H_c \sim 5\omega^{-1/3}l^{-2}$. Если сюда подставить реальные экспериментальные значения: $\omega \sim 10^7 \text{ с}^{-1}$, $l \sim 3 \cdot 10^{-2} \text{ см}$, то получается $H_c \sim 20 \text{ Э}$, что соответствует наблюдениям.

На опыте [37] оказывается, что когда мощность «накачки» превосходит определенный порог, металл переходит скачком в состояние с выпрямленным током и созданным им магнитным полем, т. е. в намагниченное состояние. Этот переход можно заметить либо по появлению индукционной э.д.с. в измерительной катушке, окружающей образец, либо по гистерезису в любых свойствах металла, зависящих от магнитного поля. Для порогового поля H_c хорошо соблюдается закон $\omega^{-1/3}$, соответствующий формуле (7.75). Токовые состояния были обнаружены в висмуте, олове, меди, индии, молибдене.

Описанный переход является одним из примеров «динамического» фазового перехода. В противоположность обычным фазовым переходам здесь речь идет о переходах между неравновесными состояниями, происходящих при изменении «накачки», т. е. внешнего фактора, поддерживающего неравновесность. Другие примеры таких переходов будут описаны в гл. 22.

Глава 8

РАЗМЕРНЫЕ ЭФФЕКТЫ

§ 8.1. Отсечка циклотронных резонансных орбит

Теперь мы рассмотрим некоторые явления, которые имеют место в тонких металлических пластинках в переменных и постоянных полях. Таких явлений много, и они имеют различную природу, но все они вместе образуют особую группу так называемых размерных эффектов,

Один из этих эффектов связан с циклотронным резонансом (*Канер*, 1958) [38]. Геометрия опыта изображена на рис. 8.1. Проинтегрируем по t одно из уравнений (5.4):

$$\frac{dp_y}{dt} = -\frac{e}{c} v_x H$$

в пределах от $t = 0$, когда электрон находится на минимальном расстоянии от поверхности A (в этой точке, конечно, $v_x = 0$), до момента t' , когда электрон ближе всего подходит к границе B (и опять $v_x = 0$). При этом получаем

$$p_y(t') - p_y(0) = -\frac{e}{c} H \int_0^{t'} v_x dt.$$

Но интеграл в правой стороне этого уравнения есть просто смещение электрона в направлении x . Будем называть его диаметром орбиты d . Следовательно,

$$p_y(t') - p_y(0) = -(e/c) H d. \quad (8.1)$$

Предположим теперь, что это одна из орбит циклотронного резонанса. Вследствие соотношения (7.48) получаем

$$p_y(t') - p_y(0) = -(m^* \omega / n) d_n \quad (8.2)$$

для какого-то n . В гл. 7 было установлено, что каждое n соответствует резонансу. Согласно (8.2) диаметр орбиты должен возрастать с увеличением n . Поэтому существует некоторое наибольшее n , для которого диаметр d_n меньше толщины пластинки D , в то время как диаметр следующего порядка d_{n+1} уже больше этой толщины. Последнее означает, что такие электроны уже достигают границы пластинки и, следовательно, не могут давать резонанса.

Вместо графика, изображенного на рис. 7.10, получаем в этом случае график, изображенный на рис. 8.2 [35]¹⁾. Устанавливая номер последнего наблюдаемого пика и полагая в (8.2) $d_n = D$, мы находим значение величины $p_y(t') - p_y(0)$. Если резонанс связан с центральным сечением ферми-поверхности, то, очевидно, $t' = T/2$, где T — период, и, более того, $p_y(T/2) = -p_y(0)$. В этом случае из (8.2) получается

$$p_y(0) = (m^* \omega / 2n) d_n. \quad (8.3)$$

Таким образом, этот метод дает возможность точно измерить импульс Ферми. Это p_y -координата той точки ферми-поверхности, где центральное сечение $p_z = 0$ пересекает линию $v_x = 0$. Точность этого измерения зависит от числа n , при котором обрывается резонанс. Действительно, мы получаем $d_n < D < d_{n+1}$. Следовательно, максимальная ошибка равна n^{-1} , и поэтому надо создать условия, чтобы n было как можно больше. Согласно (8.3) для этого нужно иметь большую частоту ω . В чистых оловянных кристаллах удалось достичь $n \sim 25-30$.

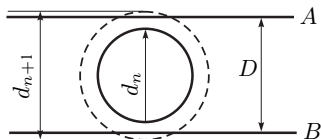


Рис. 8.1

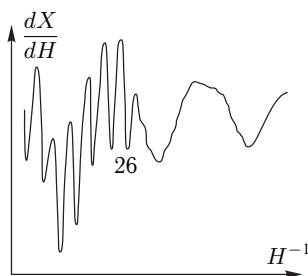


Рис. 8.2

¹⁾ Резкое исчезновение одной из гармоник (более частой) на рис. 8.2 свидетельствует о диффузном отражении электронов от поверхности. Это вполне понятно с точки зрения рассуждения, приведенного в сноске на с. 134. Если n -я орбита — последняя, уместающаяся в образце, то $n+1$ -я подходит к поверхности под углом $\varphi \sim n^{-1/2}$. Это приводит к неопределенности импульса порядка $n^{-1/2}$, а следовательно, к такой же неопределенности ларморовского радиуса. Но для наблюдения резонанса нужно, чтобы гармоники не перекрывались, т. е. $\Delta r_L / r_L < n^{-1}$. Следовательно, $n+1$ -я орбита не может быть резонансной.

В тонких пластинах может наблюдаться также особый тип циклотронного резонанса, представляющий большой интерес с точки зрения изучения энергетического спектра. Речь идет о циклотронном резонансе на неэкстремальных орбитах (Володин, Хайкин, Эдельман, 1973) [39]. Представим себе, что мы наблюдаем отсечку $(n + 1)$ -й орбиты, связанной с центральным сечением поверхности Ферми, обладающим наибольшим p_y . Другие сечения обладают меньшим p_y , а следовательно, и меньшим диаметром орбиты. Меняя p_z , начиная от центрального сечения, мы приходим к какому-то другому, для которого имеет место соотношение

$$p_y(t') - p_y(0) = -[m^*\omega/(n + 1)] D.$$

При заданной частоте это вполне определенное сечение. Оно является особым в том смысле, что сечения ближе к центральному не могут участвовать в $n + 1$ -м резонансе, а сечения, лежащие за данным, уже могут в нем участвовать. Поэтому в импедансе должна появиться особенность при

$$H = m^* c \omega / e(n + 1).$$

Следующему подобному сечению соответствуют аналогичные формулы с $n + 2$ и т. д.

Это явление наблюдалось на опыте [39], причем оказалось, что амплитуда соответствующих максимумов на кривой dR/dH на порядок меньше, чем у максимумов, которые связаны с резонансом на центральном сечении. Тем не менее эффект наблюдаем и является пока единственным, с помощью которого можно непосредственно измерить зависимость массы m^* от p_z . Отметим, что, кроме случая постоянной массы (т. е. квадратичного спектра типа $\varepsilon = \alpha_{ik} p_i p_k$), каждому такому резонансу соответствует свое значение m^* , и поэтому нет никакой периодичности максимумов по H^{-1} , как в случае резонанса на экстремальном сечении.

§ 8.2. Внутренние всплески высокочастотного поля при циклотронном резонансе

Как было отмечено раньше, высокочастотное поле проникает в металл на глубину δ . Однако в присутствии магнитного поля внутри металла появляются слои, где высокочастотное поле тоже отлично от нуля (Азбель, 1960) [40].

Рассмотрим электронную орбиту, входящую в скин-слой металла (рис. 8.3). Длина дуги AB будет порядка $r_L \varphi$ или $(r_L \delta)^{1/2}$. Если полный ток, текущий через скин-слой, есть J , то плотность тока будет $j = J/\delta$. Электрон движется по орбите, и поэтому компонента его скорости v_y вдоль поверхности в любой точке C есть $v \cos \theta$; y -компонента полного тока будет пропорциональна $J \cos \theta$. Этот ток будет распределен по дуге $A'B'$ той же длины, что и раньше. Но эта

дуга повернулась и теперь ее проекция на ось x равна $(r_L \delta)^{1/2} / \sin \theta$. Поэтому плотность тока теперь будет $J \cos \theta / [(r_L \delta)^{1/2} / \sin \theta]$, т. е. при средних углах θ в $(r_L \delta)^{1/2}$ раз меньше, чем значение в скин-слое. Однако когда мы приходим в точку D орбиты, мы опять получаем большую плотность тока.

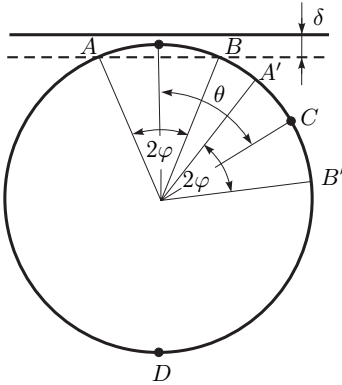


Рис. 8.3

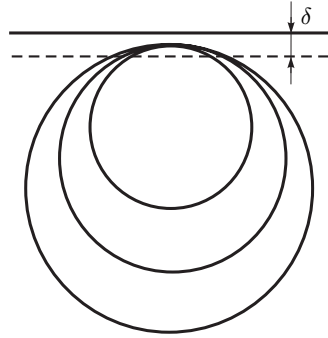


Рис. 8.4

Все это относится к одной орбите, но в действительности имеются разные орбиты с различными диаметрами. Для свободных электронов они равны $cp_{\perp}/eH = (c/eH)(2m\varepsilon - p_z^2)^{1/2}$. Поэтому истинная картина выглядит так, как изображено на рис. 8.4 и на любой глубине плотность «токонесущих» электронов составляет, по крайней мере, δ/r_L от той, что имеется в скин-слое.

Этот недостаток можно преодолеть в случае циклотронного резонанса. Как известно, в циклотронном резонансе участвуют электроны с частотами, близкими к экстремальным значениям. Имеем следующее условие:

$$|\omega - n\Omega| \sim \tau^{-1}.$$

Так как Ω близко к экстремальному значению, то

$$\Omega \approx \Omega_0 + (1/2) (\partial^2 \Omega / \partial p_z^2) (\Delta p_z)^2$$

(мы здесь не рассматриваем опорных точек; для последних $\delta\Omega \propto \delta p_z$). По порядку величины $\partial^2 \Omega / \partial p_z^2 \sim \Omega / p_0^2$ (p_0 — средний импульс Ферми). Поэтому мы имеем

$$(\omega / p_0^2) (\Delta p_z)^2 \sim \tau^{-1}, \quad \text{или} \quad \Delta p_z \sim p_0 / (\omega \tau)^{1/2}.$$

Теперь рассмотрим это явление в двух различных случаях.

1. Центральное сечение. При этом не только $\partial S/\partial \varepsilon$ экстремально, но диаметр орбиты тоже имеет экстремальное значение. Значит,

$$d = d_0 + (1/2) (\partial^2 d / \partial p_z^2) (\Delta p_z)^2.$$

Так как $\partial^2 d / \partial p_z^2 \sim d_0 / p_0^2$, получаем

$$\Delta d \sim (\Delta p_z)^2 \frac{d_0}{p_0^2} \sim \frac{p_0^2}{\omega \tau} \frac{d_0}{p_0^2} \sim \frac{d_0}{\omega \tau}.$$

Мы также знаем, что $d_0 \sim r_L \sim v/\Omega \sim nv/\omega$, так что разброс диаметров орбит будет $\Delta d \sim nv/\omega^2 \tau$. Для того чтобы электрическое поле в области AB было передано в более глубокую точку D на рис. 8.3, надо, чтобы выполнялось условие $\Delta d < \delta$, т. е.

$$\omega \tau > d_0 / \delta \sim r_L / \delta. \quad (8.4)$$

Раньше мы видели, что для резонанса нужно $\omega \tau \gg 1$. Условие (8.4) является гораздо более жестким. Однако оно все-таки может быть выполнено на практике.

2. Нецентральное сечение с экстремумом $\partial S/\partial \varepsilon$. При этом

$$\Delta d \sim \Delta p_z d_0 / p_0 \sim d_0 / (\omega \tau)^{1/2}.$$

Условие $\Delta d < \delta$ дает теперь ($d_0 \sim r_L$)

$$\omega \tau \gg (r_L / \delta)^2. \quad (8.5)$$

Это условие выполнить на опыте очень трудно.

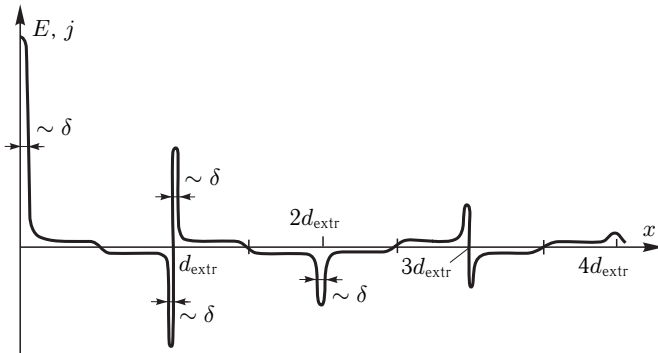


Рис. 8.5

Следовательно, только резонансы на центральных сечениях могут приводить к переносу высокочастотного поля внутрь металла. При этом на расстоянии d_{extr} от поверхности мы получим слой толщины δ ,

где будет присутствовать высокочастотное поле, сравнимое по амплитуде с тем, что имеется в скин-слое. Этот всплеск поля в свою очередь приведет к возникновению следующего — на глубине $2d_{\text{extr}}$, затем третьего — на глубине $3d_{\text{extr}}$, и т. д. Точное вычисление показывает, что амплитуды E и j внутри металла меняются, как показано на рис. 8.5.

Наличие всплесков поля может быть обнаружено в тонких пластинках. Следует ожидать появления особенностей поверхностного импеданса, когда один из дополнительных «скин-слоев» оказывается у противоположной поверхности пластины¹⁾. Однако достигнуть этого не так легко. Ведь при заданной частоте резонанс возникает при определенных значениях магнитного поля, т. е. при определенных размерах резонансных орбит. Диаметры таких орбит, вообще говоря, отличаются от толщины пластины. Для наблюдения всплесков надо либо, меняя частоту переменного поля, варьировать диаметры резонансных орбит и «подгонять» их к толщине пластины, либо варьировать толщину пластины. И то, и другое трудно осуществимо на опыте.

Однако те же самые данные об электронном спектре можно получить с помощью нерезонансных размерных эффектов путем изменения одного лишь магнитного поля. Они будут рассмотрены в следующих разделах.

§ 8.3. Нерезонансный размерный эффект

Уравнение (8.1) может быть применено также и к нерезонансным орбитам. Если диаметр орбиты больше толщины пластинки, то электрон рассеивается диффузно на поверхности и не сохраняет памяти о своем предыдущем движении. Если, однако, увеличивать внешнее поле, то диаметр орбиты будет уменьшаться, и в конце концов он станет меньше толщины пластины. Если этот диаметр был экстремальным, то при соответствующем значении поля должна быть особенность поверхностного импеданса (Гантмахер, 1962) [41]. Детальный расчет показывает, что производная dZ/dH имеет экстремум при этом поле. Следует заметить, что этот эффект не связан с резонансом, и поэтому положение особенности не зависит от частоты переменного поля.

Природа этого явления становится понятной, если мы будем рассуждать аналогично предыдущему. Для экстремальной орбиты

$$\Delta d \sim (1/2) (\partial^2 d / \partial p_z^2) (\Delta p_z)^2 \sim (\Delta p_z)^2 d_0 / p_0^2.$$

Если $\Delta d \lesssim \delta$, то высокочастотное поле переносится внутрь металла и появляется дополнительный «скин-слой» на глубине d_{extr} . Однако здесь мы получаем

$$\Delta p_z < p_0 (\delta / r_L)^{1/2}.$$

¹⁾ Это и аналогичные явления, описанные в следующих параграфах, теперь принято называть «баллистической прозрачностью».

Следовательно, лишь малая доля электронов (с орбитами, близкими к экстремальной) участвует в этом эффекте. Ввиду этого плотность тока на расстоянии d_{extr} внутри металла составляет $(\delta/r_L)^{1/2}$ от плотности тока в скин-слое. Тем не менее она больше, чем плотность тока на других расстояниях от скин-слоя, ибо там она по крайней мере в δ/r_L раз меньше, чем в скин-слое.

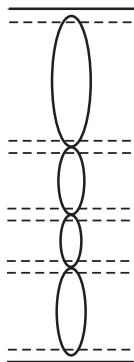


Рис. 8.6

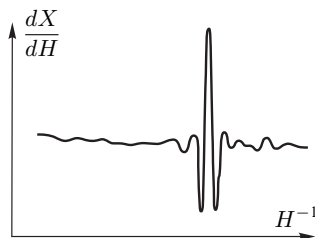


Рис. 8.7

Если толщина пластины достаточно велика, то наличие в металле слоя с высокочастотным полем приведет к образованию еще одного слоя на расстоянии $2d_{\text{extr}}$, и т. д. Если существует несколько экстремальных диаметров, то всплеск поля, связанный с одним из этих диаметров, приведет к возникновению второго, связанного с другим d_{extr} . Это значит, что второй всплеск поля будет на глубине $d_{\text{extr}}^{(1)} + d_{\text{extr}}^{(2)}$. В общем случае могут иметь место любые комбинации разных d_{extr} и всплески будут возникать на всех расстояниях $\sum n_i d_{\text{extr}}^{(i)}$ (рис. 8.6). Однако, поскольку в каждом всплеске плотность тока в $(\delta/r_L)^{1/2}$ раз меньше, чем в предыдущем, амплитуда тока в очередном слое будет иметь порядок

$$(\delta/r_L)^{\sum_i n_i/2}. \quad (8.6)$$

Если один из этих дополнительных слоев окажется у противоположной поверхности пластины, то наличие высокочастотного тока приведет к излучению в пространство электромагнитного поля. Иными словами, пластина будет обладать повышенной прозрачностью для падающей на нее электромагнитной волны. Это проявляется как особенность поверхностного импеданса (экстремум dX/dH , рис. 8.7) при соответствующем значении постоянного магнитного поля. Согласно (8.1) условие появления особенности поверхностного импеданса имеет вид

$$\sum_i n_i [p_y(t') - p_y(0)]_{\text{extr}}^{(i)} = -(e/c) H D. \quad (8.7)$$

Амплитуда особенности зависит от ее порядка по закону (8.6).

Этот метод оказался наиболее эффективным для прямого измерения импульса Ферми. Конечно, он применим лишь в случае, когда длина свободного пробега больше толщины пластинки или, по крайней мере, того же порядка.

§ 8.4. Нерезонансный размерный эффект в наклонном поле

Есть еще один размерный эффект того же типа, что и рассмотренный в § 8.3, однако его амплитуда не падает так быстро с порядком особенности. Этот эффект имеет место в наклонном поле и связан с центральным сечением поверхности Ферми (Канер, 1963) [42].

Рассмотрим рис. 8.8. Для центрального сечения средняя скорость вдоль магнитного поля $\bar{v}_z = 0$. Все остальные электроны движутся по спиральным орбитам и выходят из скин-слоя. Вблизи центрального сечения есть группа электронов, которые весь свой пробег проводят в скин-слое. Для них, очевидно, $v_z \tau \sin \psi < \delta$, или $v_z < \delta / \tau \sin \psi$. Относительное число таких электронов равно $n/n_e \sim v_z/v \sim \delta / \tau v \sin \psi$. Но их вклад в проводимость благодаря многократному возвращению в скин-слой оказывается в $\Omega \tau$ раз больше, чем вклад соответствующего числа обычных электронов, не попадающих в скин-слой многократно. Поэтому эффективная проводимость от таких электронов порядка

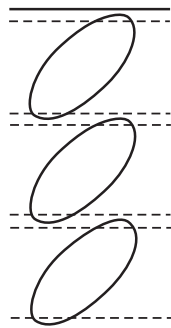


Рис. 8.8

$$\sigma (n/n_e) \Omega \tau \sim \sigma \delta \Omega / v \sin \psi \sim \sigma \delta / r_L \sin \psi.$$

В том случае, если

$$\sin \psi < \delta / r_L,$$

проводимость будет определяться в основном этими электронами.

С другой стороны, разброс диаметров орбит для электронов вблизи центрального сечения имеет порядок

$$\Delta d \sim d_0 (p_z/p_0)^2 \sim d_0 (v_z/v)^2 \sim d_0 (\delta/l \sin \psi)^2.$$

Если эта величина меньше δ , то скин-слой будет воспроизводиться в глубине металла, т. е. там возникает всплеск поля и тока (рис. 8.8). Следовательно, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$r_L (\delta/l \sin \psi)^2 < \delta$$

или, вместе с предыдущим условием,

$$(\delta r_L)^{1/2} / l < \sin \psi < \delta / r_L. \quad (8.8)$$

Если образец представляет собой пластину, то, так же как и в предыдущем случае, путем изменения магнитного поля можно достигнуть такого положения, при котором один из всплесков окажется у противоположной стороны пластины. Это приведет к особенности поверхностного импеданса (экстремуму dZ/dH). Местоположение особенности определяется условием

$$np_y(0) = (eH/2c) (D/\cos \psi). \quad (8.9)$$

В противоположность размерному эффекту в параллельном поле ток в дополнительных скин-слоях не ослабляется заметно по сравнению с током в основном слое. Поэтому амплитуда особенностей мало меняется с номером.

§ 8.5. Эффект Зондхеймера

Этот эффект может наблюдаться как в статической проводимости, так и в высокочастотном импедансе. Рассмотрим случай статической проводимости (Зондхеймер, 1950) [43]. Представим себе опять пластинку в магнитном поле, направленном под углом ψ к поверхности. Электрон движется по спиральной траектории (рис. 8.9). Если $\bar{v}_z$ — средняя скорость электрона в направлении z , то его средняя скорость по нормали к поверхности есть

$$v_z = \bar{v}_z \sin \psi.$$

Предположим, что электрон движется в течение времени, равного целому числу периодов:

$$t = nT = [2\pi m^* c / eH] n.$$

Может случиться, что в течение этого времени электрон как раз пройдет расстояние от одной поверхности пластины до другой. Соответствующее условие имеет вид

$$v_z t = [2\pi m^* c / eH] n v_z = D.$$

Отсюда

$$H = 2\pi n c m^* v_z / eD = 2\pi n c m^* \bar{v}_z \sin \psi / eD.$$

Поэтому можно ожидать периодической зависимости разных свойств металла от магнитного поля. Но величина $m^* \bar{v}_z$ зависит от p_z . Опять наиболее существенны экстремальные значения. Период осцилляций поля равен

$$\Delta H = 2\pi c \sin \psi (m^* \bar{v}_z)_{\text{extr}} / eD. \quad (8.10)$$

Теперь рассмотрим величину $m^* \bar{v}_z$. Так как $m^* = (2\pi)^{-1} \partial S / \partial \varepsilon$, а $v_z = \partial \varepsilon / \partial p_z$, то $m^* \bar{v}_z = \partial S / \partial p_z$. Очевидно, речь идет об экстремуме

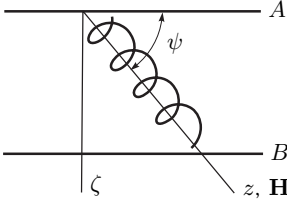


Рис. 8.9

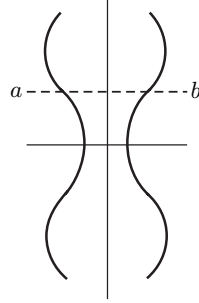


Рис. 8.10

$\partial S/\partial p_z$ на ферми-поверхности. Такой экстремум может возникнуть в некотором случайном сечении, в котором

$$\partial^2 S/\partial p_z^2 = 0$$

(рис. 8.10, линия ab). В этом случае имеем

$$\Delta H = c \sin \psi (\partial S/\partial p_z)_{\text{extr}} (eD)^{-1}. \quad (8.11)$$

Кроме того, экстремальные значения $\partial S/\partial p_z$ соответствуют эллиптическим опорным точкам. Правда, это просто краевые значения, и в общем случае в опорных точках $\partial^2 S/\partial p_z^2 \neq 0$. В соответствии с (7.58) в этих точках имеем $\partial S/\partial p_z = 2\pi/\sqrt{K}$, где K — гауссова кривизна. Следовательно, период осцилляций равен

$$\Delta H = 2\pi c K^{-1/2} \sin \psi / eD. \quad (8.12)$$

Итак, мы имеем возможность найти из опыта гауссову кривизну в опорной точке. Сравнивая это с формулой (7.59) для циклотронной массы, мы видим, что из эффекта Зондхеймера вместе с циклотронным резонансом мы можем определить скорость Ферми в опорной точке. Меняя направление магнитного поля, мы можем найти эту скорость почти для всей ферми-поверхности.

Определим порядок осциллирующей добавки к проводимости. Для простоты ограничимся случаем, когда поле направлено перпендикулярно поверхности.

Начнем с сечения, у которого $\partial^2 S/\partial p_z^2 = 0$. В эффекте принимают участие электроны, находящиеся в некоторой малой окрестности такого сечения, которая определяется из условия, чтобы два соседних периода осцилляции не слились, т. е. $\Delta n < 1$. Согласно предыдущему рассуждению для этого надо, чтобы было

$$\Delta(D/\bar{v}_z T) < 1. \quad (8.13)$$

Но величина $(\bar{v}_z T)^{-1}$, пропорциональная $(\partial S / \partial p_z)^{-1}$, в рассматриваемом случае имеет экстремум, следовательно, имеем

$$\Delta(\bar{v}_z T)^{-1} = (1/2)(\partial^2 / \partial p_z^2)(\bar{v}_z T)^{-1}(\Delta p_z)^2 \sim \\ \sim (\Delta p_z / p_0)^2 (\bar{v}_z T)^{-1} \sim (\Delta p_z / p_0)^2 r_L^{-1},$$

где r_L — ларморовский радиус. Таким образом, окрестность Δp_z определяется условием

$$\Delta p_z \sim p_0 (r_L / D)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что эффективное число электронов, участвующих в осциллирующей компоненте тока, имеет порядок

$$n_{\text{эф}} \sim n_e \Delta p_z / p_0 \sim n_e (r_L / D)^{1/2}.$$

Роль времени τ в проводимости в данном случае, очевидно, играет период вращения, т.е. T . Кроме того, надо учесть, что электроны в плоскости пластины совершают финитное движение, и поэтому ток возникает лишь оттого, что конечные витки спирали остаются незамкнутыми. Это добавляет в осциллирующую часть проводимости еще один множитель порядка $n^{-1} \sim r_L / D$ ¹⁾. Собирая все вместе, получаем

$$\sigma_{\text{осц}} \sim n_{\text{эф}} e^2 \tau_{\text{эф}} m^{-1} r_L / D \sim \sigma(\Omega \tau)^{-1} (r_L / D)^{3/2}, \quad (8.14)$$

где $\Omega = 2\pi / T$ (Гуревич, 1958) [44]. Итак, амплитуда осцилляций зависит от H по закону $H^{-5/2}$.

Теперь проведем такую же оценку для опорной точки. В этом случае $(\bar{v}_z T)^{-1}$ имеет краевой экстремум и, следовательно,

$$\Delta(\bar{v}_z T)^{-1} = (\partial / \partial p_z)(v_z T)^{-1} \Delta p_z \sim (\Delta p_z / p_0) r_L^{-1}.$$

Согласно условию (8.13), имеем²⁾

$$\Delta p_z / p_0 \sim r_L / D.$$

Эффективное число электронов зависит от Δp_z иначе, чем в предыдущем случае. Площадь сечения, находящегося на расстоянии Δp_z от опорной точки, пропорциональна Δp_z (см. (7.58)). Следовательно, соответствующий объем внутри ферми-поверхности пропорционален $(\Delta p_z)^2$, т.е.

$$n_{\text{эф}} \sim n_e (\Delta p_z / p_0)^2.$$

¹⁾ Речь идет о средней проводимости, равной J / DE , где J — полный ток через пластину шириной в 1 см.

²⁾ Здесь $r_L \sim \bar{v}_z T$ обозначает величину порядка обычного ларморовского радиуса cr_0 / eH . Мы подчеркиваем это обстоятельство, поскольку истинный ларморовский радиус для электронов вблизи опорной точки порядка $cr_{\perp} / eH$, где $p_{\perp} \sim (p_0 \Delta p_z)^{1/2}$ (см. вывод формулы (7.58)).

Эффективное время столкновений порядка T . И опять, поскольку вклад в ток возникает лишь от незавершенности граничных витков, появляется множитель $n^{-1} \sim r_L/D$. Учитывая это, получаем [44]:

$$\sigma_{\text{осц}} \sim n_{\text{эф}} e^2 \tau_{\text{эф}} m^{-1} r_L / D \sim \sigma(\Omega\tau)^{-1} (r_L/D)^3. \quad (8.15)$$

Итак, в данном случае $\sigma_{\text{осц}}/\sigma \propto H^{-4}$.

§ 8.6. Дрейфовая фокусировка высокочастотного поля

Из формул (8.14) и (8.15) следует, что эффект Зондхеймера дает лишь малую поправку к статической проводимости. Аналогично обстоит дело с поверхностным импедансом. Однако в случае высокочастотного поля дрейф электронов вдоль магнитного поля вызывает еще один, причем значительно больший эффект, связанный с образованием всплесков высокочастотного поля в глубине металла (*Гантмахер, Канер, 1963*) [45].

Прежде всего отметим, что «эффективный» электрон должен двигаться в скин-слое параллельно электрическому полю. Если он образует дополнительный скин-слой, то там он тоже должен двигаться в том же направлении. Следовательно, расстояние, на котором образуется такой скин-слой, должно соответствовать дрейфу электрона вдоль магнитного поля в течение целого числа периодов. Далее, поскольку смещение вдоль поля за период у разных электронов различно, то, очевидно, наибольшую роль будут играть экстремальные смещения. Следовательно, всплески высокочастотного поля будут возникать на расстояниях от поверхности, равных nu_{extr} , где u_{extr} — экстремальное смещение за период в направлении нормали к пластине. Наибольший эффект в импедансе возникает, если один из таких скин-слоев будет находиться у противоположной поверхности пластины, т. е. когда

$$nu_{\text{extr}} = n(\bar{v}_z T)_{\text{extr}} \sin \psi = n[2\pi c/eH](m^* \bar{v}_z)_{\text{extr}} \sin \psi = D.$$

Нетрудно видеть, что это в точности то же самое условие, что и для эффекта Зондхеймера. Однако этот эффект дает не малые поправки, а приводит к заметным изменениям в импедансе. Именно это обстоятельство дает возможность использовать его для изучения характеристик электронов. Наиболее интересным является то, что эффект дрейфовой фокусировки может возникнуть от опорных точек. Поэтому соответствующие результаты дают возможность изучать свойства электронов с заданным импульсом.

Найдем условия, при которых этот эффект может наблюдаться [45]. Высокочастотное поле вблизи поверхности можно описать как суперпозицию плоских волн с непрерывным набором волновых векторов k , имеющим ширину $\Delta k \sim \delta^{-1}$. Электроны при своем движении по спиральным траекториям будут взаимодействовать с этими волнами, причем, очевидно, наиболее сильным будет взаимодействие с гармониками,

у которых $n\lambda = u_{\text{extr}}$, где u — смещение электрона за период в направлении распространения волны, т.е. нормали к пластине ζ . Ввиду этого такие волны проникают в металл на большую глубину, и их интерференция образует всплески в металле на глубинах $\zeta = nu_{\text{extr}}$. Конечно, это будет иметь место лишь при $\delta \ll u_{\text{extr}}$.

Для сильного взаимодействия электрона с волной необходимо, чтобы он при движении в скин-слое и на глубине $\zeta = nu_{\text{extr}}$ двигался вдоль фронта волны, т.е. чтобы при этом скорость $v_\zeta = 0$. Значит, необходимо, чтобы среди электронов с $u(p_z) = u_{\text{extr}}$ нашлись такие, у которых $v_\zeta = 0$. В самой опорной точке при любом конечном угле ψ скорость $v_\zeta = v \sin \psi \neq 0$. Но если угол ψ мал, то уже в малой окрестности этой точки могут встретиться электроны с $v_\zeta = 0$. Эффективная область вблизи опорной точки определяется из следующего соображения. В течение времени пробега τ электроны с разными скоростями успевают разойтись на расстояние (по ζ) порядка

$$[v_\zeta(\psi) - v_\zeta(0)]\tau = [v_z(\psi) - v_z(0)]\tau \sin \psi.$$

Для того чтобы эффект наблюдался, нужно, чтобы это расстояние было меньше глубины скин-слоя δ . Но так как в окрестности опорной точки

$$v_z(\psi) = v \cos \psi \approx v(1 - \psi^2/2),$$

то отсюда следует

$$v\psi^3\tau \ll \delta, \quad \text{или} \quad \psi^3 \ll \delta/l.$$

С другой стороны, как уже говорилось, для наблюдения эффекта нужно $\delta \ll u_{\text{extr}}$. Так как $u_{\text{extr}} \sim \psi r_L$, то отсюда получаем $\psi \gg \delta/r_L$. Итак, два условия дают вместе

$$\left(\frac{\delta}{r_L}\right)^3 \ll \psi^3 \ll \frac{\delta}{l}. \quad (8.16)$$

Экспериментальные результаты для олова [45] изображены на рис. 8.11.



Рис. 8.11

Эффект дрейфовой фокусировки высокочастотного поля дает возможность измерить также длину свободного пробега электрона с заданным импульсом [45] и ее зависимость от температуры (Гантмахер, Шарвин, 1965) [46]. Чтобы это увидеть, надо принять во внимание, что электрон в окрестности опорной точки движется практически точно в направлении z . Пусть средняя длина пробега есть l_0 . Тогда число электронов с длиной пробега большей, чем l , пропорционально $\exp(-l/l_0)$. Следовательно, число электронов, долетающих до другой поверхности пластины, пропорционально $\exp[-D/l_0 \sin \psi]$. Очевидно, что амплитуда всплесков должна быть тоже пропорциональна этой величине. Поэтому график $\ln A$ (где A — амплитуда) как функция $D/\sin \psi$ должен быть прямой линией (рис. 8.12), угол наклона которой определяет длину свободного пробега. На опыте действительно получается прямая линия, что подтверждает изложенные соображения.

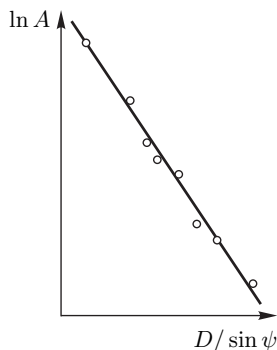


Рис. 8.12

Отсюда можно определить длину пробега в зависимости от импульса электрона и температуры. Следует заметить, что рассеяние даже на малый угол нарушит условие фокусировки электронов. Ввиду этого, l_0 есть длина свободного пробега по отношению к одному столкновению (даже с фононом), т. е. это та длина пробега, которая входит в коэффициент теплопроводности, а не та, что определяет электропроводность, где рассеяние на малый угол менее эффективно. Естественно, что опыт дает $l_0^{-1} = a + bT^3$.

§ 8.7. Размерный эффект на открытых траекториях

Теперь рассмотрим размерный эффект, связанный с открытыми траекториями (Гантмахер, Канер, 1963) [45]. Пусть магнитное поле параллельно оси z и пусть в направлении p_x имеется открытая траектория.

Уравнение для p_x имеет вид

$$dp_x/dt = (eH/c) v_y.$$

Интегрируя в каких-то пределах по t , мы имеем

$$p_x(t) - p_x(0) = \frac{eH}{c} \int_0^t v_y dt.$$

Если геометрия опыта такова, как изображено на рис. 8.13, то

$$v_{\zeta} = v_y \sin \theta,$$

$$\int_0^t v_{\zeta} dt = \frac{c}{eH} [p_x(t) - p_x(0)] \sin \theta.$$

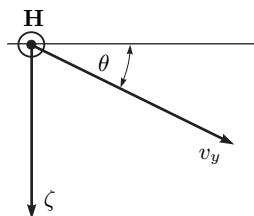


Рис. 8.13

Слева стоит смещение электрона по направлению ζ . Положим его равным толщине пластины. Далее, пусть магнитное поле будет таким, чтобы изменение импульса было равно одному из периодов обратной решетки в направлении p_x . Это дает

$$H = \sin \theta n \hbar K c / e D, \quad (8.17)$$

где K — минимальный период обратной решетки. Очевидно, что эффективная проводимость будет осциллировать в данном случае с периодом, соответствующим (8.17), т.е. определяемым периодом решетки. Этот метод может применяться для измерения периодов решетки или для установления открытых ферми-поверхностей.

Размерный эффект на открытых траекториях существует как в статической проводимости, так и в высокочастотном поверхностном импедансе. В последнем случае он связан с образованием всплесков поля в глубине металла и амплитуда его значительно больше, чем в статическом случае.

Глава 9

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 9.1. Геликоны в металлах с неравными числами электронов и дырок

Рассмотрим металл в высокочастотном поле. Раньше мы уже пришли к заключению, что переменное поле не может проникнуть в сплошной металл (за исключением скин-слоя у поверхности). Однако в предыдущей главе мы видели, что в присутствии магнитного поля при определенных условиях высокочастотное поле может существовать и внутри металла, образуя дополнительные «скин-слои» на определенных расстояниях от поверхности. Здесь мы покажем, что в присутствии сильного магнитного поля существуют волны, которые могут распространяться в металле без существенного затухания (*Константинов, Перель, 1960*) [47]. В последующие годы этому вопросу были посвящены многочисленные работы. Оказалось, что типы таких волн и условия, в которых они могут распространяться, весьма разнообразны. Мы не будем рассматривать здесь все эти волны и изложим только теорию двух видов длинноволновых колебаний, наиболее простых для наблюдений. Более широкие сведения читатель может найти в обзоре Канера и Скобова [73].

Напишем опять уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = (4\pi/c) \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{H} / \partial t. \quad (9.1)$$

Взяв rot от последнего уравнения и подставляя в первое, получаем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -(4\pi/c^2) \partial \mathbf{j} / \partial t. \quad (9.2)$$

Будем считать, что длина волны велика (точный критерий будет получен ниже). В этом случае электрическое поле медленно меняется

по пространству и мы можем применять тензор проводимости, рассчитанный для однородного электрического поля. Следовательно,

$$j_i = \sum_k \sigma_{ik} E_k.$$

Будем искать решение уравнения (9.2), пропорциональное $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Из (9.2) находим

$$\sum_k \left(k^2 \delta_{ik} - k_i k_k \right) E_k = (4\pi i\omega/c^2) \sum_k \sigma_{ik} E_k. \quad (9.3)$$

Это однородная система уравнений. Она имеет решения, если детерминант обращается в нуль. Итак,

$$\text{Det} \left[k^2 \delta_{ik} - k_i k_k - \left(4\pi i\omega/c^2 \right) \sigma_{ik} \right] = 0. \quad (9.4)$$

Это условие и дает закон дисперсии $\omega(k)$.

Однако до того, как решать уравнение (9.4), надо найти тензор проводимости. Кинетическое уравнение, которым мы уже пользовались в гл. 7, имело вид

$$\partial\psi/\partial t + \partial\psi/\partial t_1 + \mathbf{v} \partial\psi/\partial \mathbf{r} + \psi/\tau = e\mathbf{v}\mathbf{E}.$$

Подставляя $\psi \propto \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$, получаем

$$(-i\omega + \tau^{-1}) \psi + i\mathbf{k}\mathbf{v} \psi + \partial\psi/\partial t_1 = e\mathbf{v}\mathbf{E}.$$

Производная $\partial\psi/\partial t_1$ имеет порядок $\Omega\psi$, где $\Omega = eH/m^*c$ — циклотронная частота. Величина $vk/\Omega \sim kr_L$, так как $v/\Omega \sim r_L$. Предполагая

$$kr_L \ll 1, \quad (9.5)$$

мы можем опустить член с $\mathbf{k}\mathbf{v}$, т.е. пренебречь пространственным изменением ψ . Если, кроме того,

$$|-i\omega + \tau^{-1}| \ll \Omega, \quad (9.6)$$

то мы приходим к кинетическому уравнению, которое дает нам статический тензор проводимости в сильном магнитном поле. Итак, предполагая условия (9.5) и (9.6) выполненными, можно применять тензор проводимости, найденный в § 5.3.

Если ферми-поверхность замкнутая и число дырок не равно числу электронов, то мы можем применить формулу (5.37), где

$$\gamma \sim (\tau^{-1} - i\omega)/\Omega, \quad (9.7)$$

$$\sigma_{xy} = \gamma a_{xy} = ec(n_e - n_h)/H.$$

Формула (5.37) была выведена в предположении, что поле направлено по оси z . Другие оси мы расположим так, чтобы вектор $\mathbf{k}$ находился

в плоскости (y, z) , образуя угол θ с осью z (рис. 9.1). В детерминанте (9.4) оставим только члены нулевого и первого порядков по γ . При этом получаем

$$\begin{vmatrix} k^2 & -4\pi i \omega c^{-2} \sigma_{xy} & -4\pi i \omega c^{-2} \sigma_{xz} \\ 4\pi i \omega c^{-2} \sigma_{xy} & k_z^2 & -k_y k_z - 4\pi i \omega c^{-2} \sigma_{yz} \\ 4\pi i \omega c^{-2} \sigma_{xz} & -k_y k_z + 4\pi i \omega c^{-2} \sigma_{yz} & k_y^2 - 4\pi i \omega c^{-2} \sigma_{zz} \end{vmatrix} = 0. \quad (9.8)$$

В соответствии с (5.37) σ_{zz} — самая большая компонента. Если предположить, что

$$k^2 \sim 4\pi \omega c^{-2} \sigma_{xy} \sim 4\pi \omega c^{-2} \sigma_{yz} \ll 4\pi \omega c^{-2} \sigma_{zz},$$

то из (9.8) получается

$$k^2 k_z^2 + (4\pi i \omega c^{-2})^2 \sigma_{xy}^2 = 0$$

(тем самым предположение подтверждается).

Подставляя (9.7) и $k_z = k \cos \theta$, находим

$$\omega = \frac{c^2 k^2 \cos \theta}{4\pi |\sigma_{xy}|} = \frac{c H k^2 \cos \theta}{4\pi e |n_e - n_h|}. \quad (9.9)$$

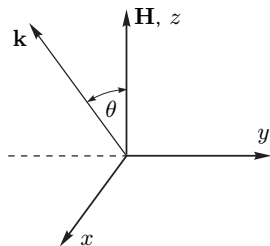


Рис. 9.1

Мы видим, что ω пропорционально H и k^2 . Волна может распространяться под любым углом к $\mathbf{H}$, кроме $\theta = \pi/2$. Волны такого типа называются геликонами.

Посмотрим, как меняется электрическое поле в такой волне. Из последнего уравнения (9.3) (оно соответствует последней строке матрицы (9.8)) мы видим, что из-за большой величины σ_{zz} по сравнению с другими компонентами σ_{ik} компонента $E_z \ll E_x, E_y$.

Переходя теперь к первому из уравнений (9.3), получаем

$$k^2 E_x - 4\pi i \omega c^{-2} \sigma_{xy} E_y = 0.$$

Подставляя σ_{xy} из (9.7) и ω из (9.9), находим

$$E_x = i \cos \theta E_y. \quad (9.10)$$

Это эллиптически поляризованная волна. Если $\theta = 0$, то мы имеем $E_x = i E_y$. Такая волна поляризована по кругу.

§ 9.2. Магнитоплазменные волны в металлах с равными числами электронов и дырок

Рассмотрим теперь металл с четным числом электронов на ячейку. При этом числа электронов и дырок равны; ферми-поверхности опять будут предполагаться замкнутыми (Хайкин, Фальковский, Эдельман,

Мина, 1963; Канер, Скобов, 1963) [48, 49]. В статическом случае тензор проводимости имел вид (5.41)

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma^2 a_{xx} & \gamma^2 a_{xy} & \gamma a_{xz} \\ \gamma^2 a_{yx} & \gamma^2 a_{yy} & \gamma a_{yz} \\ \gamma a_{zx} & \gamma a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix}.$$

Теперь пусть частота будет столь велика, что ¹⁾

$$\tau^{-1} \ll \omega, \quad kv \ll \omega, \quad (9.11)$$

но не столь велика, чтобы нарушились условия (9.6) или (9.5). В этом случае можно пользоваться тензором проводимости, но его надо несколько изменить. Поскольку в кинетическое уравнение входит комбинация $\tau^{-1} - i\omega$, то в формуле (9.11) надо просто сделать замену $\tau^{-1} \rightarrow -i\omega$. Например, в статическом случае с $n_e = n_h$

$$\sigma_{xy} \sim (ecn/H) (\Omega\tau)^{-1}.$$

Следовательно, в данном случае

$$\sigma_{xy} \sim (ecn/H) (-i\omega/\Omega) a_{12} \quad (9.12)$$

с $a_{12} \sim 1$. Таким же образом можно определить и все другие компоненты тензора проводимости. В результате находим

$$\sigma_{ik} = \frac{ecn}{H} \begin{pmatrix} -(i\omega/\Omega) a_1 & -(i\omega/\Omega) a_{12} & a_{13} \\ -(i\omega/\Omega) a_{12} & -(i\omega/\Omega) a_2 & -a_{32} \\ -a_{13} & a_{32} & (i\Omega/\omega) a_3 \end{pmatrix}, \quad (9.13)$$

где все a_i и $a_{ik} \sim 1$.

Теперь мы введем две координатные системы так, как показано на рис. 9.2, где ζ направлено по $\mathbf{k}$, ось η находится в плоскости $(\mathbf{H}, \mathbf{k})$, а ось x — общая для обеих координатных систем. Рассмотрим третье из уравнений (9.3) в координатной системе x, η, ζ . Из него получаем

$$E_\zeta = -(\sigma_{\zeta x} E_x + \sigma_{\zeta \eta} E_\eta) / \sigma_{\zeta \zeta}.$$

Если это подставить в два других уравнения (9.3), то получатся два однородных

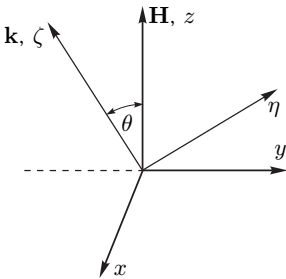


Рис. 9.2

¹⁾ Условия (9.11) связаны с тем, что в рассматриваемом случае существенны компоненты тензора проводимости второго порядка по γ . Благодаря условиям (9.11) эти компоненты имеют форму (9.12), а не $(ecn/H) (kv/\Omega)$, или $(ecn/H) (\Omega\tau)^{-1}$.

уравнения относительно E_x и E_η . Приравнивая детерминант системы нулю, имеем

$$\text{Det} \left[k^2 \delta_{\alpha\beta} - 4\pi i \omega c^{-2} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta} \right] = 0, \quad (9.14)$$

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\zeta} \sigma_{\zeta\beta} / \sigma_{\zeta\zeta}; \quad (9.15)$$

индексы α и β могут принимать значения x и η .

Преобразуем тензор проводимости (9.13), рассчитанный в системе x, y, z , к системе x, η, ζ . Это простая, но довольно длинная процедура. Оставляя лишь главные члены по ω/Ω , имеем

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = -(i\omega/\Omega) (nec/H) A_{\alpha\beta}, \quad (9.16)$$

где

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a_1 + a_{13}^2/a_3 & (a_{12} + a_{13}a_{32}/a_3) \sec \theta \\ (a_{12} + a_{13}a_{32}/a_3) \sec \theta & (a_2 + a_{23}^2/a_3) \sec^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (9.17)$$

В формуле (9.16) выделен множитель, определяющий порядок величины $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$. В нем $n = n_e = n_h$, $\Omega = eH/mc$, m — масса свободного электрона.

Подставляя (9.16) в (9.14), можно записать последнее уравнение в форме

$$\text{Det} \left[(v_a k/\omega)^2 \delta_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta} \right] = 0, \quad (9.18)$$

где $v_a^2 = c\Omega H/4\pi ne$, т. е. и $v_a^{-1} = H/(4\pi nm)^{1/2}$. Из (9.18) находим

$$(v_a k/\omega)^4 - (v_a k/\omega)^2 \text{Sp } A_{\alpha\beta} + \text{Det } A_{\alpha\beta} = 0,$$

откуда имеем

$$v_a k/\omega = \left\{ \text{Sp } A_{\alpha\beta}/2 \pm \left[(\text{Sp } A_{\alpha\beta}/2)^2 - \text{Det } A_{\alpha\beta} \right]^{1/2} \right\}^{1/2},$$

или

$$\omega/k = v_a (\text{Det } A_{\alpha\beta})^{-1/2} \times \\ \times \left\{ (A_{xx} + A_{\eta\eta})/2 \mp \left[(A_{xx} - A_{\eta\eta})^2/4 + A_{x\eta}^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (9.19)$$

Итак, существуют две волны с линейным законом дисперсии $\omega \propto k$. Эти волны называют магнитоплазменными волнами. Скорости обеих волн пропорциональны H . Если магнитное поле направлено вдоль оси

¹⁾ Оценку v_a можно получить из следующего простого рассуждения. В § 9.1 мы получили $k^2 \sim 4\pi i \omega c^{-2} \sigma_{xy}$. Если подставить сюда (9.12) и решить полученное уравнение относительно ω , получается $\omega = vk$, где $v \sim H/(4\pi nm^*)^{1/2}$.

симметрии кристалла, то тензор $A_{\alpha\beta}$ упрощается (все $a_{ik} = 0$, если $i \neq k$ и $a_1 = a_2$):

$$A_{\alpha\beta} = A_{xx} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sec^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (9.20)$$

Подстановка этого тензора в (9.19) дает

$$\omega/k = 2^{-1/2} v_a A_{xx}^{-1/2} \cos \theta \left[\left(1 + \sec^2 \theta \right) \pm \left(1 - \sec^2 \theta \right) \right]^{1/2}.$$

Следовательно, для одной волны

$$\omega_1/k = v_a A_{xx}^{-1/2}, \quad (9.21)$$

а для другой

$$\omega_2/k = v_a A_{xx}^{-1/2} \cos \theta, \quad (9.22)$$

что дает

$$\omega_2/\omega_1 = \cos \theta. \quad (9.23)$$

Из (9.22) вытекает, что, когда $\cos \theta = 0$, остается лишь одна волна. Это заключение не совсем строго, ибо при выводе тензора $A_{\alpha\beta}$ (9.17) мы принимали, что $\cos \theta \gg \omega/\Omega$. Если же имеет место противоположное неравенство, т. е. если θ очень близко к $\pi/2$, то расчет надо произвести заново. Тем не менее, если это проделать, а затем подставить результат в уравнение (9.14), то остается лишь одна волна с линейным законом дисперсии.

§ 9.3. Экспериментальные исследования

Существуют разные экспериментальные методы изучения волн. Один из этих методов (техника стоячих волн) заключается в измерении высокочастотного поверхностного импеданса металлических пластин в зависимости от магнитного поля. Меняя магнитное поле при заданной частоте, мы меняем длину волны λ колебаний, распространяющихся через металл. При некоторых значениях H на толщине пластины будет укладываться целое число полуволн ($D = q\lambda/2$, q — целое число). Это условие существования стоячей волны. Итак, есть основания ожидать периодической зависимости поверхностного импеданса от D/λ или Dk . В первом случае, который мы рассматривали, $\omega \propto Hk^2$. Следовательно, поверхностный импеданс будет периодической функцией от $H^{-1/2}$. Если $H \sim 10^4$ Э и $D \sim 1$ мм, то эффект в обычных металлах может наблюдаться при частотах порядка $\omega/2\pi = \nu \sim cH/D^2 en_e \sim \sim 10^4$ Гц (т. е. при сравнительно малых частотах). Экспериментально волны этого типа изучались в Na, Cu, Ag, Au, Al и многих других металлах.

Волны второго типа были обнаружены в висмуте, где число электронов равно числу дырок. В этом случае значения n и m^* малы ($n \sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $m^* \sim 10^{-2}m$). Поэтому должно быть

$$\nu \sim H/Dn^{1/2}m^{*1/2} \sim 10^{10} \text{ Гц}$$

в полях $H \sim 10^3 \text{ Э}$ ($D \sim 1 \text{ мм}$). Опять наблюдалась стоячая волна, но поверхностный импеданс был периодичен как функция H^{-1} . Таким образом были обнаружены обе магнитоплазменные волны, причем в том случае, когда магнитное поле было направлено вдоль главной оси кристалла, частоты удовлетворяли соотношению (9.23).

Другой метод изучения волн — так называемая интерференционная техника. В этом случае изучается интерференция волны, падающей на металлическую пластинку, и волны, прошедшей через нее.

Помимо закона дисперсии, т.е. функции $\omega(k)$, большой интерес представляет и затухание электромагнитных волн в металле, в особенности в области частот и магнитных полей, где становятся существенными резонансные механизмы затухания, не связанные со столкновениями электронов (т.е. существующие и при $\tau \rightarrow \infty$).

Один из этих механизмов называется затуханием Ландау и был впервые обнаружен при исследовании колебаний в газовой плазме. Заключается он в следующем. В магнитном поле электрон совершает движение по спиральной траектории. Его средняя скорость вдоль магнитного поля равна $\bar{v}_z$. Перейдем в систему отсчета, движущуюся с этой скоростью. Поле электромагнитной волны, которое в исходной системе отсчета было пропорционально $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$, в новой системе будет пропорционально $\exp[i\mathbf{k}\mathbf{r} - i(\omega - k_z v_z)t]$. Если

$$\omega = k_z v_z, \quad (9.24)$$

то электрон будет воспринимать это поле как статическое. При этом создаются условия для заметной перекачки энергии от волны к электронам.

Затухание Ландау можно описать и несколько иначе. На рис. 9.3 изображено движение электрона и распространение волны. Штриховые линии соответствуют плоскостям равной фазы. Условие (9.24) выражает тот факт, что электрон движется все время в фазе с волной.

Принимая во внимание, что скорости электронов меняются в пределах от $-v$ до v , где v — максимальное значение $\bar{v}_z$, которое, как правило, соответствует опорной точке, мы видим, что условие (9.24) может быть выполнено для какой-то группы электронов, только начиная с достаточно малых частот, а именно

$$\omega < kv \cos \theta. \quad (9.25)$$

Если же частота задана и меняется поле, то это условие задает нижний предел магнитных полей. Измеряя это поле, можно найти v — скорость на границе Ферми в опорной точке. На опыте затухание Ландау

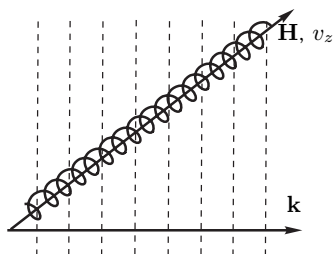


Рис. 9.3

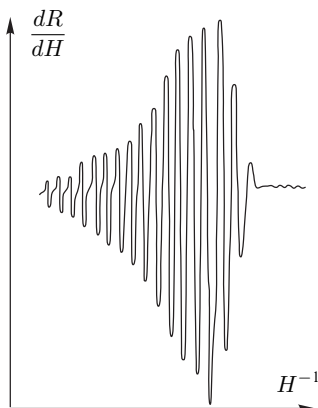


Рис. 9.4

является весьма эффективным механизмом поглощения, так что, например, в методе измерения импеданса пластин экспериментальная картина выглядит как на рис. 9.4 [50] (этот рисунок относится к четному металлу — висмуту, если же металл нечетный, то картина примерно та же, но в координатах Z , $H^{-1/2}$).

Формула (9.25) с $\omega(k)$ в виде (9.9) или (9.19) может применяться лишь в случае, когда выполнено условие (9.5). Это обычно имеет место в опытах с нечетными металлами. Действительно, при $H \sim 10^4$ Э

$$\lambda = 2\pi/k \sim 0,1 \text{ см}, \quad kr_L \sim 10^{-2}.$$

Но в опытах с четными металлами условие (9.5) может и нарушаться. В действительности критерий (9.25) правилен и при $kr_L \gtrsim 1$, хотя в этом случае мы уже не можем пользоваться законами дисперсии $\omega(k)$ в форме (9.9) и (9.19).

В случае $kr_L \sim 1$ вступает в действие еще один интересный механизм затухания, называемый циклотронным резонансом, смещенным благодаря эффекту Доплера. Этот механизм связан с тем, что в системе отсчета, движущейся со скоростью $\bar{v}_z$, электрон совершает движение по замкнутому контуру с циклотронной частотой $\Omega = eH/m^*c$. Если частота электромагнитного поля в новой системе отсчета совпадает с Ω , то создаются условия для циклотронного резонанса. Итак, соответствующее условие есть

$$\omega - k_z \bar{v}_z = \Omega. \quad (9.26)$$

В нечетном металле обычно $\omega \ll \Omega$ (например, при $H \sim 10^4$ Э, $\lambda = 2\pi/k \sim 0,1$ см, $\omega \sim 10^4$ с⁻¹, $\Omega \sim 10^{11}$ с⁻¹). Следовательно, этот механизм вступает в силу, когда

$$kv \cos \theta > \Omega. \quad (9.27)$$

В этом случае экспериментальная картина выглядит примерно, как на рис. 9.4 (но только в координатах Z , $H^{-1/2}$). В четном металле в обычных условиях опыта $\omega \sim \Omega$, а поэтому из (9.26) следует, что область затухания в принципе может быть ограничена с двух сторон:

$$\omega - kv \cos \theta < \Omega < \omega + kv \cos \theta. \quad (9.28)$$

В зависимости от соотношения параметров металла и условий эксперимента левое из этих неравенств может либо не давать реального ограничения H^{-1} , либо давать такое ограничение. В первом случае экспериментальный результат подобен графику, изображенному на рис. 9.4, второму случаю соответствует график рис. 9.5.

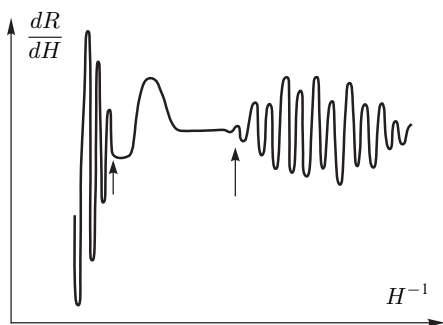


Рис. 9.5

Формулы (9.27) и (9.28) относятся к области, где нарушено условие (9.5), и поэтому неприменимы формулы (9.9) и (9.19). Но поскольку истинный закон дисперсии устанавливается в том же опыте, то он может быть использован вместо теоретической формулы. Это дает возможность определить из границы затухания в случае нечетного металла величину $m^*v = K^{-1/2}$, где K — гауссова кривизна в опорной точке, а в случае четного металла как m^* , так и $v = (m^*)^{-1}K^{-1/2}$. Такие определения позволили уточнить параметры спектра ряда металлов.

Глава 10

МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ И ЭФФЕКТ ДЕ ГААЗА–ВАН АЛЬФЕНА

§ 10.1. Спиновый парамагнетизм Паули

До сих пор мы рассматривали электрон как классическую частицу, движущуюся по определенной траектории. Теперь мы перейдем к явлениям, в которых существенна квантовая природа электронов. Начнем с поведения электронов в статическом магнитном поле. Рассмотрим сначала слабое поле.

Каждый электрон имеет спин $\hbar s$ и магнитный момент $2\beta s$, где s может иметь проекцию на определенное направление, равную $\pm 1/2$, а $\beta = e\hbar/2mc$ — магнетон Бора. Очевидно, что в присутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты электронов поляризуются и возникает полный магнитный момент. Это явление называется спиновым парамагнетизмом или парамагнетизмом Паули.

Соответствующую магнитную восприимчивость легко найти. Энергия взаимодействия магнитного момента электрона с внешним полем равна $-2\beta s H$. Поэтому если спин электрона направлен вдоль магнитного поля, то его энергия будет $\varepsilon - \beta H$, а если спин противоположен полю, то $\varepsilon + \beta H$. Но в ферми-распределение энергия входит в комбинации с химическим потенциалом $\varepsilon - \mu$. Таким образом, вместо того чтобы рассматривать изменение энергии под влиянием поля, мы можем считать, что химический потенциал делается равным $\mu + \beta H$ электронов со спином по полю и $\mu - \beta H$ для электронов со спином против поля.

При $T = 0$, $H = 0$ число электронов в единице объема равно

$$n = \int_0^{\mu} \nu(\varepsilon) d\varepsilon.$$

В данном случае числа электронов с разной ориентацией спина будут различными. Нетрудно понять, что они выражаются следующим образом:

$$n_+ = \frac{1}{2} \int_0^{\mu+\beta H} \nu(\varepsilon) d\varepsilon, \quad n_- = \frac{1}{2} \int_0^{\mu-\beta H} \nu(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Полный магнитный момент единицы объема будет равен $\beta(n_+ - n_-)$. Итак,

$$M = \beta(n_+ - n_-) = \frac{1}{2} \beta \int_{\mu-\beta H}^{\mu+\beta H} \nu(\varepsilon) d\varepsilon \approx \beta^2 H \nu(\mu), \quad (10.1)$$

если $\beta H \ll \mu$. Следовательно, магнитная восприимчивость равна

$$\chi = \beta^2 \nu(\mu). \quad (10.2)$$

На первый взгляд эта формула кажется правильной и с точки зрения идей ферми-жидкости (§ 2.2), так как интегрирование в (10.1) затрагивает лишь окрестность ферми-поверхности. На самом деле это не так. В теории ферми-жидкости Ландау показывается, что сам энергетический спектр меняется под влиянием изменения функции распределения, и это в ряде случаев приводит к изменению результатов. В частности, это относится и к формуле (10.2), которая на самом деле определяет лишь порядок величины эффекта. Более подробно эти вопросы будут рассмотрены в гл. 13.

Отметим также, что мы считали $T = 0$. Но, как всегда для электронов, температурные поправки имеют порядок $(T/\mu)^2$, и ими можно пренебречь.

§ 10.2. Квантование уровней свободного электрона в магнитном поле

Рассмотрим движение свободного электрона в постоянном магнитном поле. Заменяя операторы импульса $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ на $\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}$ — векторный потенциал), записываем гамильтониан в виде

$$\mathcal{H} = [-i\hbar\nabla - (e/c)\mathbf{A}]^2 / 2m. \quad (10.3)$$

Мы не написали спиновый член $(-2\beta\mathbf{s}\mathbf{H})$, так как он дает лишь смещение уровней на $\pm\beta H$. Предположим, что поле $\mathbf{H}$ направлено по оси z , и возьмем векторный потенциал в форме $A_y = Hx$, $A_x = A_z = 0$. Уравнение Шредингера $\mathcal{H}\psi = \varepsilon\psi$ примет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla_y - \frac{e}{c} Hx \right)^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \varepsilon \psi. \quad (10.4)$$

Так как в это уравнение явно входит лишь координата x , то мы можем искать решение в виде функции

$$\psi(x, y, z) = e^{ip_y y/\hbar} e^{ip_z z/\hbar} \psi(x). \quad (10.5)$$

Подставляя это в уравнение (10.4), получаем

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2m} \left(p_y - \frac{e}{c} Hx \right)^2 \psi(x) + \frac{p_z^2}{2m} \psi(x) = \varepsilon \psi(x),$$

или

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{e^2 H^2}{2mc^2} \left(x - \frac{p_y c}{eH} \right)^2 \psi(x) = \left(\varepsilon - \frac{p_z^2}{2m} \right) \psi(x). \quad (10.6)$$

Уравнение (10.6) очень похоже на уравнение для одномерного квантового осциллятора

$$-(\hbar^2/2m) d^2 \psi/dx^2 - (1/2) kx^2 \psi = E \psi. \quad (10.7)$$

Собственные значения последнего уравнения равны

$$E = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (10.8)$$

где $\omega = (k/m)^{1/2}$. Если сравнить уравнения (10.7) и (10.6), то мы увидим, что они идентичны, если только сместить точку равновесия на расстояние cp_y/eH от начала координат. Роль ω играет величина eH/mc , а роль энергии осциллятора — величина $\varepsilon - p_z^2/2m$. Следовательно, мы получаем

$$\varepsilon = p_z^2/2m + \beta H (2n + 1), \quad (10.9)$$

где $\beta = e\hbar/2mc$. Это — формула так называемых уровней Ландау (1930) [51]. Итак, вместо непрерывной зависимости ε от p_y и p_x мы

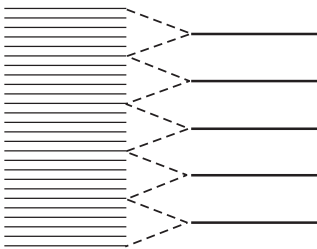


Рис. 10.1

получили дискретные уровни. Это превращение проиллюстрировано на рис. 10.1. Так как расстояние между уровнями Ландау пропорционально H , то каждый из них «собирает» интервал непрерывного спектра, пропорциональный H . Следовательно, уровни Ландау должны быть вырожденными и это вырождение должно быть пропорционально H .

Для того чтобы найти более точное выражение для степени вырождения каждого уровня, мы рассмотрим, как уже делалось раньше, прямоугольный ящик с длинами ребер L_1 , L_2 и L_3 . Положение центра

осциллятора зависит от p_y . Этот центр должен лежать в интервале от 0 до L_1 , так что

$$0 < cp_y/eH < L_1, \quad \text{или} \quad 0 < p_y < eHL_1/c.$$

Число состояний в интервалах dp_z и dp_y то же самое, что и для свободного электрона, т. е.

$$dn_y = dp_y L_2 / 2\pi\hbar,$$

$$dn_z = dp_z L_3 / 2\pi\hbar.$$

Следовательно, число состояний для всего интервала p_y есть $L_1 L_2 eH / 2\pi c \hbar$. Умножая на dn_z , получаем полное выражение

$$\frac{eH}{c} \frac{V dp_z}{(2\pi\hbar)^2},$$

которое дает число состояний, соответствующее интервалу dp_z и определенному n в (10.9). Для того чтобы найти плотность состояний, надо учесть, что энергия ε зависит от p_z^2 , т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_z \varphi(\varepsilon) = 2 \int_0^{\infty} \varphi(\varepsilon) d|p_z| = 2 \int_0^{\infty} \varphi(\varepsilon) (d|p_z|/d\varepsilon) d\varepsilon,$$

где φ — произвольная функция энергии. Принимая также во внимание двукратное вырождение, связанное со спином, мы получаем

$$\nu(\varepsilon) = \frac{4V}{(2\pi\hbar)^2} \frac{eH}{c} \frac{d|p_z|}{d\varepsilon}. \quad (10.10)$$

§ 10.3. Диамагнетизм Ландау

При помещении металла в магнитное поле движение электронов меняется: они начинают двигаться по спиральным траекториям. При этом электроны создают добавочное магнитное поле, противоположное внешнему. Иными словами, изменение орбитального движения электронов под влиянием внешнего поля приводит к диамагнитному эффекту.

Нетрудно показать, что этот эффект имеет квантовую природу и отсутствует в классическом приближении. Действительно, согласно классической механике в магнитном поле импульс электрона заменяется на разность $\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал. Однако поскольку термодинамические величины зависят только от энергии электрона и представляют собой интегралы по всем импульсам, то мы

можем перейти в них к интегрированию по $\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}$. При этом интегралы приобретут тот же вид, что и в отсутствие магнитного поля.

В действительности диамагнетизм имеет место и является результатом квантования уровней энергии электрона в магнитном поле.

Вычислим термодинамический потенциал

$$\Omega = -T \sum_i \ln \left(1 + e^{(\mu - \varepsilon_i)/T} \right), \quad (10.11)$$

где сумма берется по всем состояниям. Это выражение может быть получено из формулы

$$(\partial\Omega/\partial\mu)_T = -N = -\sum_i n(\varepsilon_i),$$

где $n(\varepsilon_i)$ — распределение Ферми. Вводя плотность состояний $\nu(\varepsilon)$ (10.10), получим

$$\Omega = -\frac{4VT}{(2\pi\hbar)^2} \frac{eH}{c} \int_0^\infty d\varepsilon \sum_n \frac{d|p_z|}{d\varepsilon} \ln \left(1 + e^{(\mu - \varepsilon)/T} \right).$$

Интегрируя по частям и подставляя из (10.9)

$$|p_z(\varepsilon, n)| = [2m(\varepsilon - \beta H(2n + 1))]^{1/2}, \quad (10.12)$$

мы находим

$$\Omega = -\frac{4V}{(2\pi\hbar)^2} \frac{eH}{c} \int_0^\infty d\varepsilon \sum_n \frac{[2m(\varepsilon - \beta H(2n + 1))]^{1/2}}{\exp[(\varepsilon - \mu)/T] + 1}. \quad (10.13)$$

Суммирование по n здесь ограничено условием $\varepsilon > \beta H(2n + 1)$.

Выражение (10.13) годится для произвольной температуры. Но если $T \ll \mu$, то можно положить $T = 0$, ибо поправка в случае слабого магнитного поля будет порядка $(T/\mu)^2$. Поэтому мы заменим ферми-распределение на ступенчатую функцию и, переменив порядок суммирования по n и интегрирования по ε , получим

$$\begin{aligned} \Omega &= -\frac{4V}{(2\pi\hbar)^2} \frac{eH}{c} \sum_n \int_{\beta H(2n+1)}^\mu d\varepsilon [2m(\varepsilon - \beta H(2n + 1))]^{1/2} = \\ &= -\frac{8}{3} \frac{V}{(2\pi\hbar)^2} \frac{eH(2m)^{1/2}}{c} \sum_n [\mu - \beta H(2n + 1)]^{3/2}, \quad \left(n < \frac{\mu}{2\beta H} - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

При малых H можно перейти от суммирования к интегрированию с помощью формулы

$$\sum_{n=0}^{n_0} f(n) = \int_{-1/2}^{n_0+1/2} f(n) dn - \frac{1}{24} \left[f' \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) - f' \left(-\frac{1}{2} \right) \right]. \quad (10.14)$$

В результате получаем, что термодинамический потенциал равен

$$\Omega = -\frac{8}{15} \frac{V e (2m)^{1/2} \mu^{5/2}}{\beta c (2\pi \hbar)^2} + \frac{1}{3} \frac{V e \beta H^2 (2m)^{1/2} \mu^{1/2}}{(2\pi \hbar)^2 c}.$$

Подставляя $\beta = e\hbar/2mc$ и $\mu = p_0^2/2m$, находим

$$\Omega = -\frac{p_0^5 V}{15m\pi^2 \hbar^3} + \frac{V \beta^2 H^2}{6} \frac{p_0 m}{\pi^2 \hbar^3}.$$

Магнитный момент единицы объема равен

$$M = -V^{-1} \partial \Omega / \partial H = -(1/3) \beta^2 H (p_0 m / \pi^2 \hbar^3).$$

Следовательно, магнитная восприимчивость равна (Ландау, 1930) [51]

$$\chi = -(\beta^2/3) (p_0 m / \pi^2 \hbar^3). \quad (10.15)$$

Из формулы (2.29) следует, что $p_0 m / \pi^2 \hbar^3$ — это как раз $\nu(\varepsilon)$ для свободных электронов. Сравнивая (10.15) и (10.2), находим, что квантование энергетических уровней приводит к диамагнитной восприимчивости, которая для газа свободных электронов компенсирует лишь 1/3 парамагнитной восприимчивости, связанной со спинами. Итак, газ свободных электронов будет определенно парамагнитным.

Но на самом деле в природе существует много диамагнитных металлов. Качественно это можно объяснить тем фактом, что электронный энергетический спектр металла отличается от спектра идеального газа. Возьмем, например, простейший случай — изотропный спектр $\varepsilon = p^2/2m^*$ с эффективной массой m^* . В этом случае величины β , входящие в формулы (10.2) и (10.15), различаются. Та, что входит в формулу (10.2), есть боровский магнетон и содержит массу свободного электрона. А формула (10.15) содержит β^* , связанное с орбитальным движением электрона, т. е. $e\hbar/2m^*c$. Плотность состояний $\nu(\varepsilon)$ тоже содержит m^* . Отсюда мы можем заключить, что

$$\chi_{\text{диа}} / \chi_{\text{пара}} = (1/3) (m/m^*)^2.$$

Эта величина может быть больше единицы.

Конечно, это лишь простейшая модель. В действительности рассчитывать диамагнетизм трудно, так как в него дают вклад также

виртуальные переходы из глубоких электронных состояний в зону проводимости (поляризационные эффекты)¹⁾.

§ 10.4. Квазиклассическое квантование энергетических уровней для произвольного спектра

Мы не будем рассматривать формулу (10.13) при больших полях и конечных температурах, так как наиболее интересные следствия могут быть получены не только для модели свободных электронов, но и для произвольного энергетического спектра. Конечно, в общем случае невозможно точно определить энергетические уровни. Но если сравнить расстояние между уровнями βH с химическим потенциалом μ , то можно увидеть, что для обычно применяемых магнитных полей порядка 10^4 Э отношение

$$\beta H / \mu \sim 10^{-4}.$$

Так как квантовые эффекты связаны с дискретностью энергетических уровней, то эта оценка показывает, что они должны быть малы, давая поправки порядка $(\beta H / \mu)^m$, где степень m различна для разных конкретных эффектов. Так как $\mu \gg \beta H$, то существенны лишь высокие уровни с большими значениями n , и мы можем применить квазиклассические правила квантования Бора.

В присутствии магнитного поля операторы импульса $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ заменяются на

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}.$$

Взяв $A_y = Hx$, $A_x = A_z = 0$, находим

$$P_x = -i\hbar \partial / \partial x, \quad P_y = -i\hbar \partial / \partial y - (e/c) Hx.$$

Они удовлетворяют соотношению коммутации

$$P_y P_x - P_x P_y = -i\hbar e H / c. \quad (10.16)$$

Введя обозначение $Y = (c/eh) P_x$, видим, что Y играет роль координаты, канонически сопряженной импульсу P_y :

$$P_y Y - Y P_y = -i\hbar.$$

Если мы имеем замкнутую орбиту, то можно применить правило квантования Бора:

$$\oint P_y dY = 2\pi\hbar (n + \gamma),$$

¹⁾ Пример такого расчета см. в работе [300].

где константу γ можно выбрать в интервале $|\gamma| < 1/2$. Подставляя определение Y через P_x , мы получаем

$$\oint P_y dP_x = (2\pi e\hbar H/c)(n + \gamma).$$

Но интеграл слева — это площадь, ограниченная электронной траекторией. Как мы знаем, траектория определяется условиями: $p_z = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$, т. е. представляет собой сечение поверхности постоянной энергии плоскостью $p_z = \text{const}$. Итак, мы получаем (Онсагер, 1952) [52]

$$S(\varepsilon, p_z) = (2\pi e\hbar H/c)(n + \gamma). \quad (10.17)$$

Для свободных электронов

$$S = \pi p_{\perp}^2 = \pi(p^2 - p_z^2) = \pi(2m\varepsilon - p_z^2).$$

Следовательно,

$$\varepsilon = p_z^2/2m + (e\hbar H/mc)(n + \gamma),$$

что совпадает с (10.9) для больших n .

Формула (10.17) может быть также легко выведена из принципа соответствия. Для замкнутых орбит циклотронная частота равна $\Omega = eH/m^*c$, где $m^* = (2\pi)^{-1} \partial S / \partial \varepsilon$. В квазиклассическом случае мы должны получить эквидистантную систему уровней с промежутками, равными $\hbar\Omega$. Следовательно,

$$\Delta\varepsilon = \hbar\Omega = \frac{eH\hbar}{c(2\pi)^{-1} \partial S / \partial \varepsilon}.$$

Эта формула может быть записана в виде

$$(\partial S / \partial \varepsilon) \Delta\varepsilon = \Delta S = 2\pi e\hbar H/c. \quad (10.18)$$

Отсюда мы получаем формулу (10.17).

Согласно формуле (5.10) проекция траектории электрона в координатном пространстве на плоскость (x, y) имеет вид, подобный траектории в импульсном пространстве. Соответствующая площадь равна $(c/eH)^2 S$. Согласно формуле (10.18) изменение этой площади при переходе от уровня n к $n + 1$ равно $2\pi c\hbar/eH$. Умножив на H , получаем изменение магнитного потока, проходящего через этот контур. Оно оказывается равным

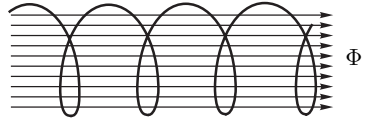


Рис. 10.2

$$\Delta\Phi = 2\pi c\hbar/e = 2\Phi_0. \quad (10.19)$$

Величина $\Phi_0 = \pi c \hbar / e$, содержащая только мировые постоянные, называется квантом магнитного потока (Ф. Лондон, 1950) [53]¹⁾. Она равна $2,05 \cdot 10^{-7}$ Э·см². Итак, изменение траектории электрона происходит таким образом, чтобы проходящий через нее магнитный поток (рис. 10.2) менялся обязательно на четное число квантов потока. Это правило является универсальным (см., например, § 11.2).

Теперь найдем в квазиклассическом случае ($n \gg 1$), какое число состояний приходится на один уровень n и интервал dp_z . Вообще говоря, число состояний всегда равно

$$\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} dp_z \iint dP_y dP_x.$$

Двойной интеграл — это площадь в плоскости $p_z = \text{const}$. В данном случае это должна быть площадь, соответствующая интервалу, скажем, от n до $n+1$. Но ведь это как раз ΔS , определенное формулой (10.18). Итак, искомое число состояний равно

$$\frac{eH}{c} \frac{V dp_z}{(2\pi\hbar)^2}.$$

Это то же самое выражение, что и в случае свободных электронов.

Отметим, что весь проделанный вывод относится только к замкнутым траекториям. Если для определенного направления поля возможны также и открытые траектории, то спектр значительно изменяется и состоит из непрерывных зон конечной ширины. Здесь мы не будем рассматривать этот случай.

§ 10.5. Эффект де Гааза–ван Альфена

В § 10.1 и 10.3 была найдена магнитная восприимчивость газа свободных электронов. Приближение, применявшееся там, было первой поправкой к термодинамическому потенциалу от магнитного поля. Ее порядок был $(\beta H/\mu)^2$. Здесь мы найдем следующую поправку. Мы увидим, что она быстро осциллирует с магнитным полем, и поэтому ее производная по H (при достаточно низких температурах) может превзойти монотонную часть магнитного момента. Это явление

¹⁾ Для универсальности мы определяем квант потока как $\pi \hbar c / e$. Эта величина играет существенную роль в сверхпроводниках и в квантовых поправках к проводимости нормальных металлов (§ 11.4). В работе Ф. Лондона [53] по теории сверхпроводимости была введена величина вдвое большая, так как в 1950 г. еще не было известно, что сверхпроводящий ток переносится «куперовскими парами» с зарядом $2e$ (часть II). Именно эта величина ($2\Phi_0$) определяет ΔF в нормальном металле, однако введение двух квантов потока: одного для нормального металла, другого для сверхпроводника, представляется нам неоправданным.

было теоретически предсказано Ландау (1930) [54] и открыто на опыте де Гаазом и ван Альфеном (1930) [55].

Мы приведем здесь расчет для произвольного энергетического спектра (Лифшиц, Косевич, 1955) [56]. Выражения для уровней энергии и числа состояний были найдены в § 10.4.

Термодинамический потенциал записывается в виде (10.11), т. е. в данном случае

$$\Omega = -\frac{VT}{(2\pi\hbar)^2} \frac{eH}{c} \sum_n \sum_\sigma \int \ln \left[1 + e^{(\mu - \varepsilon_\sigma(n, p_z))/T} \right] dp_z. \quad (10.20)$$

Индекс σ обозначает проекцию спина, а $\varepsilon_\sigma = \varepsilon(n, p_z) \pm \beta H$ ¹⁾. Для дальнейшего нам понадобится формула Пуассона

$$\sum_{n_0}^{\infty} \varphi(n) = \int_a^{\infty} \varphi(n) dn + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^{\infty} \varphi(n) e^{2\pi i k n} dn, \quad (10.21)$$

где a лежит между $n_0 - 1$ и n_0 . Доказательство этой формулы заключается в следующем. Нетрудно показать, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x}. \quad (10.22)$$

Действительно, правая часть должна равняться нулю везде, кроме $x = n$. Если $x \neq n$, то, переходя от k к $k + k_1$ (k и k_1 — целые числа), получаем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x} = e^{2\pi i k_1 x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x}.$$

Так как $e^{2\pi i k_1 x} \neq 1$, то $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x} = 0$ для $x \neq n$. С другой стороны, правая часть (10.22) — периодическая функция x с периодом 1. Проинтегрируем правую часть (10.22) по интервалу $(-\delta, \delta)$ и положим после этого $\delta \rightarrow 0$. Находим

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x} dx &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k \delta} - e^{-2\pi i k \delta}}{2\pi i k} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k \delta}{\pi k} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k \delta}{\pi k} dk = 1. \end{aligned}$$

¹⁾ В слабых полях эффекты от поляризации спинов и от квантования орбит просто складываются, что дает возможность рассчитывать их независимо. Это и было сделано в § 10.1 и 10.3. Однако при расчете осциллирующих добавок такое разделение уже невозможно.

Переход от суммы к интегралу здесь оправдан, если $\delta \rightarrow 0$, так как при этом существенны лишь члены суммы с большими k .

Итак, мы показали, что вблизи $x = 0$ правая часть (10.22) ведет себя как δ -функция. В силу периодичности, а также обращения в нуль этой суммы при любом нецелом x , получаем формулу (10.22). Умножая эту формулу на $\varphi(x)$ и интегрируя от a до ∞ , где $n_0 - 1 < a < n_0$, получаем формулу Пуассона (10.21). Первый член соответствует $k = 0$, а во втором члене слагаемые с k и $-k$ скомбинированы вместе.

Применим формулу Пуассона (10.21) к сумме в (10.20). Она при этом разделяется на два интеграла. Только второй интеграл в (10.21) дает осциллирующую добавку, и поэтому только его мы и будем рассматривать. Итак, имеем

$$\tilde{\Omega} = -2 \operatorname{Re} \sum_{\sigma, k} I_{k\sigma}, \quad (10.23)$$

где $\tilde{\Omega}$ обозначает осциллирующую часть Ω , а $I_{k\sigma}$ есть

$$I_{k\sigma} = \frac{VTeH}{(2\pi\hbar)^2c} \int_a^\infty dn \int_{-\infty}^\infty dp_z \ln \left[1 + e^{(\mu_\sigma - \varepsilon(n, p_z))/T} \right] e^{2\pi i k n}.$$

Здесь мы заменили $\mu - \varepsilon_\sigma(n, p_z)$ на $\mu_\sigma - \varepsilon(n, p_z)$, где $\mu_\sigma = \mu + \beta H \sigma_z$. Вместо интегрирования по n мы будем интегрировать по энергии. Это дает

$$I_{k\sigma} = \frac{VTeH}{(2\pi\hbar)^2c} \times \\ \times \int_0^\infty d\varepsilon \ln \left[1 + e^{(\mu_\sigma - \varepsilon)/T} \right] \int_{p_{z\min}}^{p_{z\max}} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} (p_z, \varepsilon) e^{2\pi i k n(p_z, \varepsilon)} dp_z. \quad (10.24)$$

Нижний предел интеграла по энергиям мы выбрали равным нулю. Но на самом деле существенна лишь окрестность ферми-поверхности и поэтому выбор нижнего предела безразличен. Пределы $p_{z\min}$ и $p_{z\max}$ относятся к данному значению ε .

Множитель $\exp(2\pi i k n)$ в интеграле по dp_z является быстро осциллирующей функцией. Предположим, что n достигает экстремального значения n_m при каком-то p_z , например p_z^m . Тогда

$$n(\varepsilon, p_z) = n_m + (1/2) \left(\partial^2 n / \partial p_z^2 \right)_{p_z^m} (p_z - p_z^m)^2$$

(конечно, n_m зависит при этом от ε). При интегрировании по p_z существенны лишь эти экстремумы. Вблизи какого-либо из таких

экстремумов интеграл по p_z становится равным

$$\left(\frac{\partial n}{\partial \varepsilon}\right)_m \exp(2\pi i k n_m) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\pi k \left(\frac{\partial^2 n}{\partial p_z^2}\right)_m z^2\right] dz, \quad (10.25)$$

где $z = p_z - p_z^m$. Если $(\partial^2 n / \partial p_z^2)_m > 0$, то

$$\int \exp\left[i\pi k \left(\frac{\partial^2 n}{\partial p_z^2}\right)_m z^2\right] dz = \exp(i\pi/4) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\pi k \left(\frac{\partial^2 n}{\partial p_z^2}\right)_m y^2\right] dy,$$

где мы положили $z = \exp(i\pi/4) y$. В случае $(\partial^2 n / \partial p_z^2)_m < 0$ мы положим $z = \exp(-i\pi/4) y$. Интегрируя, получаем

$$\int \exp\left[i\pi k \left(\frac{\partial^2 n}{\partial p_z^2}\right)_m z^2\right] dz = \exp(\pm i\pi/4) \left(k \left|\frac{\partial^2 n}{\partial p_z^2}\right|_m\right)^{-1/2}. \quad (10.26)$$

Подставляя (10.25) и (10.26) в (10.24), находим

$$I_{k\sigma} = \frac{VTeH}{(2\pi\hbar)^2 c} \sum_m \int_0^{\infty} d\varepsilon \ln\left[1 + \exp\left(\frac{\mu_\sigma - \varepsilon}{T}\right)\right] \times \\ \times \exp(\pm i\pi/4) \left(\frac{\partial n}{\partial \varepsilon}\right)_m \exp(2\pi i k n_m) \left(k \left|\frac{\partial^2 n}{\partial p_z^2}\right|_m\right)^{-1/2}, \quad (10.27)$$

где взята сумма по всем экстремумам $n(p_z, \varepsilon)$. Теперь проинтегрируем это выражение по ε . При этом надо учитывать, что только логарифм и $\exp(2\pi i k n_m)$ являются быстро меняющимися функциями ε , а поэтому остальные множители могут считаться постоянными. После интегрирования по частям имеем

$$I_{k\sigma} = \frac{VeH}{(2\pi\hbar)^2 c k^{3/2} 2\pi i} \sum_m e^{\pm i\pi/4} \int_0^{\infty} \frac{e^{2\pi i k n_m} |\partial^2 n / \partial p_z^2|_m^{-1/2}}{e^{(\varepsilon - \mu_\sigma)/T} + 1} d\varepsilon. \quad (10.28)$$

Здесь мы оставили лишь осциллирующий член.

Наиболее существенная часть интеграла происходит от окрестности $\varepsilon = \mu_\sigma$. Надо принять во внимание, что $\exp(2\pi i k n_m)$ — быстро осциллирующая функция, но само n_m меняется плавно и может быть разложено по степеням $\varepsilon - \mu_\sigma$:

$$n_m(\varepsilon) = n_m(\mu_\sigma) + (\partial n_m / \partial \varepsilon)_{\mu_\sigma} (\varepsilon - \mu_\sigma).$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\exp(2\pi i k n_m)}{\exp(\varepsilon - \mu_\sigma/T) + 1} d\varepsilon = \\ = \exp[2\pi i k n_m(\mu_\sigma)] \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp[2\pi i k x (\partial n_m / \partial \varepsilon)_{\mu_\sigma}]}{\exp(x/T) + 1} dx, \end{aligned}$$

где $x = \varepsilon - \mu_\sigma$ (нижний предел можно положить равным $-\infty$). Воспользовавшись значением интеграла

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\alpha y}}{e^y + 1} dy = -\frac{i\pi}{\operatorname{sh} \alpha \pi},$$

получаем

$$I_{k\sigma} = -\frac{VT e H}{2(2\pi\hbar)^2 c k^{3/2}} \sum_m e^{\pm i\pi/4} \frac{e^{2\pi i k n_m(\mu_\sigma)} |\partial^2 n / \partial p_z^2|_{m, \mu_\sigma}^{-1/2}}{\operatorname{sh}[2\pi^2 k (\partial n_m / \partial \varepsilon)_{\mu_\sigma} T]}. \quad (10.29)$$

При подстановке этого выражения в (10.23) надо произвести суммирование по проекциям спина. Так как быстро осциллирующим является только множитель $\exp[2\pi i k n_m(\mu_\sigma)]$, то мы можем во все остальные члены подставить $\mu_\sigma \approx \mu$. Пользуясь тем, что $\beta H \ll \mu$, можно написать

$$\begin{aligned} \sum_\sigma \exp[2\pi i k n_m(\mu_\sigma)] = \\ = \exp[2\pi i k n_m(\mu)] \sum_\sigma \exp[2\pi i k (\partial n_m / \partial \varepsilon)_\mu \beta H \sigma_z] = \\ = 2 \exp[2\pi i k n_m(\mu)] \cos(2\pi k (\partial n_m / \partial \varepsilon)_\mu \beta H). \quad (10.30) \end{aligned}$$

Согласно (10.17) имеем

$$n_m \approx c S_m / 2\pi \hbar e H. \quad (10.31)$$

Подставляя (10.29), (10.30) и (10.31) в (10.23), мы получаем окончательно для осциллирующей части термодинамического потенциала

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} = \frac{V}{2^{3/2} \pi^{7/2} \hbar^3} \left(\frac{e \hbar H}{c} \right)^{5/2} \sum_m \left| \partial^2 S / \partial p_z^2 \right|^{-1/2} [m^*(\mu, p_z^m)]^{-1} \times \\ \times \sum_k \frac{\psi(k\lambda)}{k^{5/2}} \cos\left(k \frac{c S_m}{e \hbar H} \pm \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\pi k \frac{m^*}{m}\right), \quad (10.32) \end{aligned}$$

где

$$\psi(z) = \frac{z}{\operatorname{sh} z}, \quad \lambda = \frac{2\pi^2 T c m^*}{\hbar e H}, \quad m^* = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial \varepsilon}.$$

Сумма по m обозначает суммирование по сечениям ферми-поверхности, обладающим экстремальной площадью.

Теперь разберем результат. Прежде всего, оценим, какую роль играет осциллирующая добавка в термодинамических величинах. Для этого найдем отношение $\tilde{\Omega}$ к Ω_0 — потенциалу при $H = 0$. Порядок величины Ω_0 есть

$$\Omega_0 \sim V n_e \mu \sim V (p_0^3 / \hbar^3) p_0^2 / m \sim V S^{5/2} / m \hbar^3.$$

Из (10.32) при $\psi \sim 1$, $m^* \sim m$ мы получаем

$$\tilde{\Omega} \sim (e \hbar H / c)^{5/2} V / m \hbar^3.$$

Следовательно,

$$\tilde{\Omega} / \Omega_0 \sim (e \hbar H / c S)^{5/2} \sim (\beta H / \mu)^{5/2}.$$

Эта величина мала. Неосциллирующая добавка к Ω_0 от магнитного поля имеет порядок $(\beta H / \mu)^2$. Таким образом, осциллирующая часть мала даже по сравнению с этой добавкой.

Теперь определим роль осциллирующего члена в магнитном моменте. Осциллирующая часть намагниченности равна

$$\tilde{M} = -\partial \tilde{\Omega} / \partial H.$$

Из (10.32) находим

$$\begin{aligned} \tilde{M} = & -2^{-3/2} \pi^{-7/2} \hbar^{-3} \left(\frac{e \hbar}{c} \right)^{3/2} H^{1/2} \sum_m \left| \partial^2 S_m / \partial p_z^2 \right|^{-1/2} \frac{S_m}{m^*} \times \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k \lambda)}{k^{3/2}} \sin \left[k \frac{c S_m}{e \hbar H} \pm \frac{\pi}{4} \right] \cos \left(\pi k \frac{m^*}{m} \right). \end{aligned} \quad (10.33)$$

Для низких температур $\psi \sim 1$. Тогда

$$\tilde{M} \sim \hbar^{-3} (e \hbar / c)^{3/2} H^{1/2} S / m.$$

Неосциллирующая часть намагниченности имеет порядок

$$M_0 \sim \beta^2 \hbar^{-3} p_0 m H.$$

Итак, мы получаем

$$\tilde{M} / M_0 \sim (\mu / \beta H)^{1/2}. \quad (10.34)$$

Значит, при низких температурах осциллирующая часть дает больший вклад в магнитный момент, чем монотонная. Это связано с высокой

частотой осцилляций, которая сильно увеличивает эффект при дифференцировании.

Если температура не слишком низка, то от суммы по k в (10.33) достаточно сохранить лишь один член, и тогда имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{M} \approx & -\frac{2^{1/2}T}{\pi^{3/2}} \left(\frac{e\hbar}{c}\right)^{1/2} H^{-1/2} \sum_m S_m \left| \partial^2 S_m / \partial p_z^2 \right|^{-1/2} \times \\ & \times \exp\left(-\frac{2\pi^2 T c m^*}{e\hbar H}\right) \sin\left(\frac{c S_m}{e\hbar H} \pm \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi m^*}{m}\right). \end{aligned} \quad (10.35)$$

Итак, магнитный момент M — периодическая функция H^{-1} (на рис. 10.3 изображен график M/H для висмута) [57]. Период равен

$$\Delta(H^{-1}) = 2\pi e\hbar / c S_m. \quad (10.36)$$

При низких температурах нельзя ограничиваться одним членом в сумме по k (10.33). Однако периодичность магнитного момента как функции H^{-1} с периодом (10.36) сохраняется и при этом.

При выводе мы не приняли во внимание рассеяние электронов. Качественно роль столкновений легко оценить. Столкновения в данном случае играют ту же роль, что и температура — они размывают острый край ферми-распределения¹⁾. Если среднее время столкновений равно τ , то неопределенность в энергии электрона порядка $\hbar/\tau$. Эта величина играет ту же роль, что и температура. Поэтому можно ожидать, что в (10.35) учет столкновений приводит к новому экспоненциальному множителю. Это соответствует действительности. Учет столкновений дает в формуле (10.35) множитель (Дингль, 1952) [58]

$$\exp[-2\pi c m^* / e\tau H]. \quad (10.37)$$

Мы получили осцилляции де Гааза–ван Альфена в результате довольно длинного расчета. Однако физически их происхождение довольно легко объяснить, если рассмотреть заполнение электронных состояний. Рассмотрим рис. 10.4 а. На нем изображены уровни, соответствующие разным n (точнее, каждая горизонтальная линия означает начало зоны $\varepsilon_n(p_z)$). Штриховая линия соответствует химическому

¹⁾ В действительности роль температуры и столкновений различна. В то время как конечная температура приводит к перераспределению электронов по уровням энергии, столкновения приводят к изменению самих этих уровней (ввиду несохранения чисел n и p_z при столкновениях меняется классификация уровней). В случае когда время столкновений не слишком мало, можно считать, что уровни энергии $\varepsilon(n, p_z)$ приобретают конечную ширину порядка $\hbar/\tau$. В рассматриваемом случае это приводит к тем же эффектам, что и конечная температура.

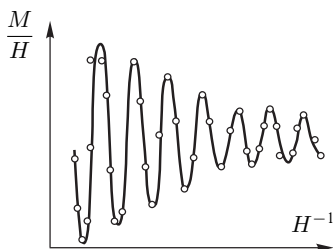


Рис. 10.3

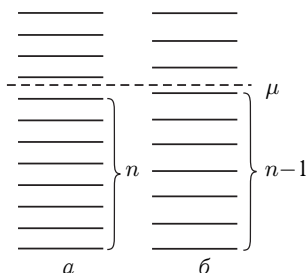


Рис. 10.4

потенциалу μ . Нижние уровни заняты, а верхние пусты. Так как $\mu \gg \beta H$, то число уровней n ниже μ очень велико. Пусть теперь магнитное поле увеличивается. Тогда расстояние между уровнями возрастает и в конце концов один из нижних уровней пересечет ферми-границу $\varepsilon = \mu$. (рис. 10.4 б). После этого распределение уровней будет очень похоже на предыдущее с той лишь разницей, что число уровней ниже μ стало $n - 1$ вместо n . Но так как n очень велико, то эта разница крайне незначительна, а поэтому надо ожидать, что новое состояние будет эквивалентно старому. А это и означает периодическую зависимость от магнитного поля.

Можно дать очень простой вывод колебаний магнитного момента, если воспользоваться моделью двумерного металла в перпендикулярном магнитном поле и считать $T = 0$ [59]. В этой модели уровни имеют вид $\varepsilon = \beta H (2n + 1)$. Каждый уровень вырожден и соответствующее число состояний равно pSH ($p = e/2\pi\hbar c = \text{const}$, S — площадь двумерного металла).

Если полное число электронов меньше, чем pSH , то все они будут находиться на нижнем уровне с энергией βH . Следовательно, полная энергия будет в этом случае

$$E = N_e \beta H,$$

а магнитный момент единицы площади равен

$$M = -S^{-1} (\partial E / \partial H) = -n_e \beta,$$

где N_e — полное число электронов, а $n_e = N_e / S$ — электронная плотность.

Пусть теперь магнитное поле уменьшилось, так что

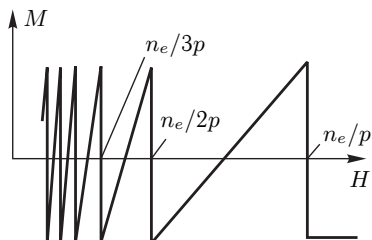


Рис. 10.5

$$2pH > n_e > pH, \quad \text{или} \quad n_e/2p < H < n_e/p.$$

В этом случае электронам приходится занимать не только первый уровень, но и второй с $n = 1$. Поэтому имеем

$$E/S = \beta H p H + 3\beta H (n_e - p H) = 3\beta n_e H - 2\beta p H^2,$$

$$M = -3\beta n_e + 4\beta p H.$$

Значит, при $H = n_e/p$ магнитный момент скачком меняется от значения $-n_e\beta$ до значения $n_e\beta$, а при меньших полях меняется по линейному закону до значения $-n_e\beta$ при $H = n_e/2p$.

Теперь рассмотрим случай

$$3pH > n_e > 2pH, \quad \text{или} \quad n_e/3p < H < n_e/2p.$$

На этот раз включается уровень с $n = 2$, так что

$$E/S = \beta H p H + 3\beta H p H + (n_e - 2pH) 5\beta H = 5\beta H n_e - 6\beta p H^2,$$

$$M = -5\beta n_e + 12\beta p H,$$

и т. д.

Если изобразить график $M(H)$, то получим картину, представленную на рис. 10.5. Скачки происходят при $H = n_e/qp$, или $H^{-1} = qp/n_e$, где q — целое число. Конечно, двумерная модель при $T = 0$ не воспроизводит многих деталей истинной трехмерной картины, но она объясняет эффект качественно.

Вернемся теперь к формуле (10.35) и посмотрим, каковы должны быть физические условия для наблюдения эффекта. Предположим, что металл является достаточно чистым, так что множитель (10.37), происходящий от τ , равен единице. (Выражение в показателе порядка $2\pi/\Omega\tau$, где Ω — циклотронная частота, так что нужно $\Omega\tau \gg 2\pi$.)

Рассмотрим температурную экспоненту. В показателе стоит $2\pi^2 T/\beta^* H \approx 20T/\beta^* H$. Если $m^* \sim m$, так что $\beta^* \sim \beta$ и $T \sim 1$ К, то для того, чтобы экспонента была близка к единице, нужно поле $H \sim 5 \cdot 10^5$ Э. Такие поля в принципе можно обеспечить, хотя это не просто. Далее, для $\beta H \sim 20$ К аргумент синуса в выражении (10.35) имеет порядок $\mu/\beta H \sim 10^3$, так как $\mu \sim (2-3) \cdot 10^4$ К. Но период осцилляций равен 2π . Следовательно, надо сохранять поле однородным и постоянным с точностью до 1–0,1%. Это увеличивает трудность практического наблюдения эффекта ¹⁾.

Однако в полуметаллах дело значительно упрощается. Если $m^* \sim 0,01m$, то $\beta^* \sim 100\beta$. Следовательно, при $T \sim 1$ К хватит поля порядка 10^4 Э. Число электронов в полуметалле тоже мало. Поэтому энергия Ферми составляет несколько сотых от того, что имеет место

¹⁾ Требование однородности поля не является непреодолимым препятствием, ибо в современных установках удастся получить однородность с точностью до 10^{-3} – 10^{-4} %.

в обычных металлах. Ввиду этого аргумент синуса становится порядка единицы, и требование однородности поля уже не будет чрезмерно жестким.

В «хороших» металлах тоже существуют части ферми-поверхности с малыми сечениями и малыми эффективными массами. Эти части трудно обследовать с помощью методов, описанных в предыдущих главах, так как их влияние на проводимость ничтожно. Но осцилляции де Гааза–ван Альфена от этих частей ферми-поверхности будут иметь большую амплитуду и большой период. Конечно, площадь экстремального сечения — не такая прямая характеристика спектра, как непосредственное значение граничного импульса Ферми. Но тем не менее измерение этой величины при разных направлениях поля практически позволяет восстановить ферми-поверхность с хорошей точностью.

Исторически сложилось так, что эффект де Гааза–ван Альфена был первым явлением, дававшим возможность определить энергетический спектр, и поэтому раньше всего был определен энергетический спектр полуметалла — висмута (Шенберг, 1939) [54].

§ 10.6. Диамагнитные домены

В формулах § 10.5 в качестве действующего поля у нас фигурировало внешнее поле H . На самом деле, конечно, поле внутри металла отличается от внешнего. Но пока магнитная восприимчивость мала, этой разницей можно пренебречь. Нетрудно видеть, что эффект де Гааза–ван Альфена может приводить к большой магнитной восприимчивости. Действительно, из (10.33) получаем при $T \lesssim \beta H$

$$\chi = \partial M / \partial H \sim (\mu / \beta H)^{3/2} \gg 1.$$

Ввиду этого надо понять, какое же поле надо подставлять в формулы (10.33), (10.35) для M .

Электроны в металлах движутся по ларморовским орбитам. Поэтому создаваемое ими магнитное поле усредняется по областям с размерами порядка $r_L \sim c \rho_0 / e H \sim 10^{-3}$ см в поле $H \sim 10^4$ Э. А среднее расстояние между электронами есть 10^{-8} см. Отсюда ясно, что поле, действующее на электроны в металле, есть среднее поле. Как известно, среднее значение микроскопического поля есть не что иное как индукция B . Следовательно, в формуле для момента в условиях, когда χ становится большим, надо заменить H на B . При этом зависимость $B(H)$ или $M(H)$ уже не дается формулой (10.33), а находится из уравнения

$$H = B - 4\pi M(B). \quad (10.38)$$

Это приводит к довольно неожиданному следствию. Если температура не очень низка, то $M(B) \ll B$ и зависимость $H(B)$ выглядит, как изображено на рис. 10.6 а. Но при понижении температуры амплитуда

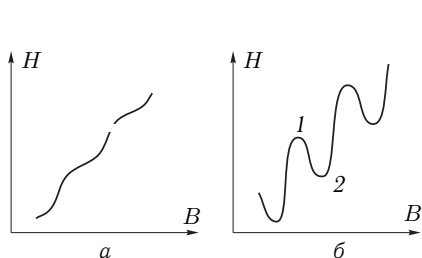


Рис. 10.6

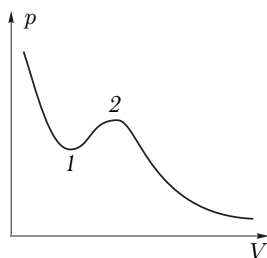


Рис. 10.7

осцилляций растет и в конце концов мы приходим к картине, изображенной на рис. 10.6 б. При этом появляются области значений H , которым соответствуют три разных значения B . Такая неоднозначность свидетельствует о неустойчивости состояния наподобие того, как это имеет место на кривой Ван-дер-Ваальса уравнения состояния вещества $p(V)$ (рис. 10.7).

Эта аналогия не случайна. Так же, как в случае уравнения Ван-дер-Ваальса, где в силу термодинамического неравенства $(\partial p / \partial V)_T < 0$ не может осуществляться участок кривой между точками 1 и 2, так и в рассматриваемом случае имеется термодинамическое неравенство $\partial H / \partial B > 0$, которое запрещает участок 1–2 на рис. 10.6 б (Шенберг, 1962) [60]. Аналогия продолжается и дальше. Так же, как кривая Ван-дер-Ваальса описывает в действительности фазовый переход 1-го рода из газа в жидкость, кривая на рис. 10.6 б описывает последовательные фазовые переходы со скачкообразным изменением индукции (Пиннард, 1963) [61]. Правда, ситуация в магнитном поле более своеобразна из-за эффекта размагничивания. Но мы пока предположим, что речь идет о цилиндрическом образце в продольном поле. При такой геометрии аналогия полностью сохраняется.

Итак, условием скачков индукции является появление участков на кривой зависимости $H(B)$, где $\partial H / \partial B < 0$, или

$$\chi = \partial M(B) / \partial B > (4\pi)^{-1}. \quad (10.39)$$

Скачок индукции происходит в постоянном внешнем поле и определяется равенством свободных энергий в заданном поле, т. е. $\int B dH$. Это равенство можно изобразить как

$$\int_1^2 B dH = H_c(B_2 - B_1) - \int_1^2 H dB = 0, \quad (10.40)$$

что сводится к равенству заштрихованных площадей на рис. 10.8. Итак, в этом случае кривая $B(H)$ состоит из плавных участков и скачков, а кривая $M(H)$ имеет вид, изображенный на рис. 10.9 а.

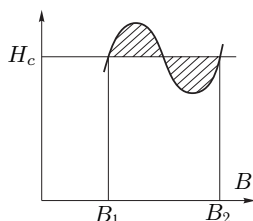


Рис. 10.8

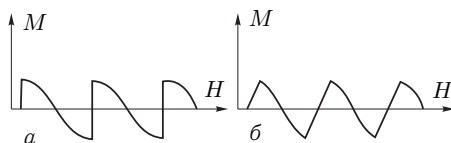


Рис. 10.9

Теперь рассмотрим нецилиндрическую геометрию. Предположим, что образец имеет форму произвольного эллипсоида с размагничивающим фактором n . Внутреннее максвелловское поле, как известно, равно $H_i = H_0 - 4\pi n M$, где H_0 — внешнее поле на бесконечности (см. приложение III). В то же время оно равно, согласно (10.38), $H_i = B - 4\pi M$. Отсюда находим

$$H_0 = B - 4\pi(1 - n) M. \quad (10.41)$$

Поскольку в данном случае H_i берет на себя роль поля H , то зависимость $H_i(B)$ дается прежним рис. 10.6. Следовательно, для «особых» участков имеем $H_c = H_0 - 4\pi M$, или

$$M = (H_0 - H_c)/4\pi n, \quad (10.42)$$

т. е. линейную зависимость вместо скачков. Эта зависимость имеет место в области, где $B_1 < B < B_2$ или, согласно (10.41) и (10.42),

$$nB_1 + (1 - n) H_c < H_0 < nB_2 + (1 - n) H_c. \quad (10.43)$$

В целом зависимость $M(H_0)$ изображена на рис. 10.9 б.

Теперь, однако, зададимся вопросом о том, что же собой представляет в этом случае такая «особая» область. Ведь образец может находиться либо в состоянии с индукцией B_1 , либо в состоянии с индукцией B_2 . А в случае $n \neq 0$ его индукция принимает все промежуточные значения. Дело заключается в том, что формальная теория, изложенная выше, описывает только полностью усредненные величины. Индукция B , входящая в (10.41), — это среднее значение по всему образцу. Поскольку на самом деле возможны лишь значения B_1 и B_2 , то отсюда следует, что образец разбивается на чередующиеся домены со значениями индукции B_1 и B_2 (Кондон, 1966) [62]. Отношение объемов фаз таково, что средняя индукция соответствует B .

Особенно просто дело выглядит в случае плоской пластины, перпендикулярной внешнему полю ($n = 1$). В этом случае граничное условие непрерывности нормальной компоненты индукции означает $B = H_0$. Поэтому область разбиения на домены есть $B_1 < H_0 < B_2$, а следовательно, одни домены намагничены парамагнитным образом, а другие — диамагнитным образом.

Картины зависимости намагниченности от поля, изображенные на рис. 10.9 а и б, были получены на опыте [62]. Более того, с помощью метода ядерного магнитного резонанса (§ 21.4) было доказано, что образец серебра при низких температурах разбивается на домены с разной индукцией, причем значения индукции не меняются при изменении внешнего поля, а меняется лишь концентрация фаз [63].

Все предыдущие рассуждения дают возможность установить наличие доменов, значения индукции в доменах и относительную концентрацию фаз. Однако сама детальная магнитная структура при этом остается неопределенной. Наиболее естественно предположить, что вследствие пространственной однородности и симметрии задачи в пластине, перпендикулярной внешнему полю, возникнет периодическая картина чередующихся доменов, имеющих форму плоских слоев, параллельных внешнему полю. Для определения периода этой структуры надо ввести новое понятие — поверхностную энергию на границе между слоями.

Довольно понятно, что переходный слой между фазами находится в особом состоянии. Индукция в нем меняется от B_1 до B_2 , т.е. неоднородна в пространстве. Значит, с этим слоем должна быть связана какая-то дополнительная энергия. Вся описанная ранее картина справедлива лишь в том случае, если эта поверхностная энергия положительна. Действительно, в противном случае было бы энергетически выгодно, чтобы число межфазных границ бесконечно возросло, что привело бы к полному перемешиванию фаз. Причем это имело бы место не только в случае $n \neq 0$, но даже для цилиндра в продольном поле. В этом случае вся картина перехода имела бы совершенно иной характер. В принципе это может иметь место [64], но наиболее частым является случай положительной поверхностной энергии (*Привороцкий, 1967*) [65], который мы рассмотрим здесь качественно.

Поскольку термодинамическое равновесие требует, чтобы вещество находилось либо в состоянии с индукцией B_1 , либо в состоянии с индукцией B_2 , то всякое промежуточное значение индукции должно давать избыточную энергию. Эта энергия должна обращаться в нуль при $B = B_1$ и $B = B_2$. Следовательно, если B_1 и B_2 мало отличаются друг от друга, то избыточная энергия пропорциональна

$$(B_1 - B_2)^2 - (2B - B_1 - B_2)^2.$$

Во всем переходном слое эта величина порядка $(B_1 - B_2)^2$. Так как в выражение для свободной энергии входит $(4\pi)^{-1} \int H dB$, то на единицу объема переходного слоя должна приходиться энергия порядка

$$(B_1 - B_2)^2/4\pi.$$

Умножая это на толщину переходного слоя d , мы получаем энергию единицы площади границы, т. е. поверхностную энергию

$$\sigma \sim d(B_1 - B_2)^2/4\pi.$$

Если $B_1 - B_2$ порядка периода осцилляции де Гааза–ван Альфена, то единственный параметр размерности длины есть ларморовский радиус r_L , так что $d \sim r_L$.

Возьмем пластину толщины D и со всеми остальными размерами, равными единице. Если период структуры равен b , то число слоев равно b^{-1} , а полная площадь всех границ равна $2D/b$. Таким образом, поверхностная энергия вносит вклад в полную энергию, равный $2\sigma D/b$.

Теперь посмотрим, как слои выходят на поверхность образца. Это изображено на рис. 10.10. Непрерывность магнитного потока ($\text{div } \mathbf{B} = 0$) означает непрерывность линий индукции. Вдали от образца линии распределены с однородной плотностью, но внутри образца их плотность различна в разных доменах. С другой стороны, сильное искривление линий индукции приводит к дополнительной энергии. Отсюда следует, что должны искривляться границы слоев при выходе на поверхность, как это показано на рис. 10.10. Линейные размеры такого искривления будут порядка толщины слоев, т. е. порядка периода структуры b , а энергия этих участков, очевидно, будет порядка $(B_1 - B_2)^2 b^2/4\pi$. Поскольку число слоев равно b^{-1} , то полный вклад искривлений в энергию порядка $(B_1 - B_2)^2 b/4\pi$. Итак, полная энергия равна

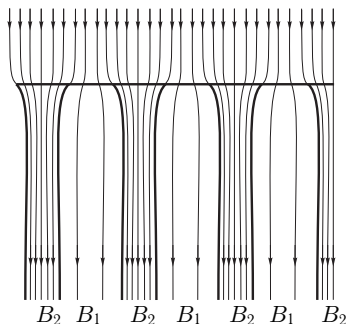


Рис. 10.10

$$C_1 (B_1 - B_2)^2 (dD/b + C_2 b)/4\pi,$$

где $C_1, C_2 \sim 1$. Взяв минимум от этого выражения по b , находим период структуры:

$$b = (dD/C_2)^{1/2},$$

т. е. размеры доменов растут с увеличением толщины пластины как $D^{1/2}$.

Образование доменов благодаря эффекту де Гааза–ван Альфена во многом аналогично другим случаям образования магнитных доменов при нецилиндрической геометрии, а именно в ферромагнетиках и сверхпроводниках 1-го рода (промежуточное состояние, § 15.3). В обоих этих случаях имеется равновесие двух различных фаз и существует добавочная поверхностная энергия на межфазной границе. Так же, как и в рассмотренном случае, размер доменов оказывается пропорциональным $D^{1/2}$.

§ 10.7. Магнитный пробой

До сих пор мы всегда сравнивали расстояние между уровнями Ландау βH с T и μ , но не сравнивали эту величину с шириной запрещенной полосы в электронном энергетическом спектре, которую мы обозначим через ε_g . Очевидно, что если βH станет порядка ε_g (а на самом деле, как мы увидим ниже, еще задолго до этого), простое квазиклассическое квантование уже неприменимо. Обычно расстояние между магнитными уровнями порядка 10^{-8} эВ на 1 Э, в то время как энергии, характеризующие зонную структуру, порядка 2–10 эВ. Но есть случаи, когда энергия расщепления зон существенно меньше 1 эВ. Наиболее известным является случай, когда расщепление вызвано спин-орбитальной связью электронов.

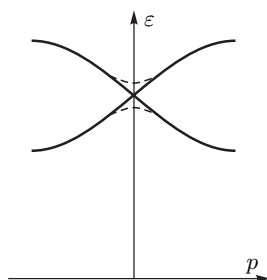


Рис. 10.11

Речь идет о следующем. Вполне возможен случай, когда уровни электрона, движущегося в электростатическом потенциале ионов и других электронов, оказываются вырожденными. Обычно это имеет место в точках пространства обратной решетки, обладающих повышенной симметрией. При этом может оказаться, что вырождение это снимается благодаря своеобразному релятивистскому эффекту, называемому спин-орбитальной связью. Он происходит от того, что при переходе в систему отсчета, движущуюся вместе с электроном, к электрическому полю добавляется

небольшое магнитное поле порядка $(v/c) \nabla V$, где v — скорость электрона, c — скорость света, а V — периодический электростатический потенциал решетки. Это магнитное поле взаимодействует с магнитным моментом электрона и может изменить электронный энергетический спектр. Относительная поправка к энергии порядка $(v/c)^2 f(Z)$, где $f(Z)$ — растущая функция атомного номера. Так как $v \sim 10^8$ см/с, то обычно это энергии порядка 10^{-3} – 10^{-2} эВ.

Таким образом, это малый эффект, однако, он может оказаться существенным, когда речь идет о снятии вырождения уровней. Например, представим себе случай, изображенный на рис. 10.11, когда две зоны соприкасаются в точке, которая соответствует максимуму энергии для одной зоны и минимуму — для другой. В этом случае спин-орбитальная связь может снять вырождение, что приведет к появлению малой щели в энергетическом спектре.

Если магнитное поле, действующее на такой металл, мало, то электроны будут двигаться по соответствующим квазиклассическим орбитам. Но при увеличении поля может возникнуть положение, при котором такие малые щели будут несущественны. Тогда движение

электронов будет происходить по орбитам, получающимся при полном игнорировании малых щелей. Это явление называется магнитным пробоем (Коэн, Фаликов, 1961) [66].

При промежуточных значениях магнитного поля уровни энергии расширяются в энергетические полосы, что приводит к некоторым своеобразным эффектам (например, к изменению характера рассеяния электронов). Но это относится лишь к самой переходной области и не имеет места вне ее.

Рассмотрим, например, случай, когда почти свободный электрон помещен в решетку, периодическую в одном направлении (рис. 10.12 а). В соответствии с изложенным в гл. 1, мы должны рассматривать только одну зону Бриллюэна, а часть изоэнергетической поверхности, которая выступает за пределы зоны Бриллюэна, должна интерпретироваться как относящаяся к следующей энергетической зоне. На рис. 10.12 б мы видим, что при достаточно больших энергиях получаются гофрированный цилиндр в одной зоне и замкнутая поверхность — в другой. Если магнитное поле направлено вдоль оси z , то при малых полях мы увидим осцилляции де Гааза–ван Альфена лишь от замкнутых поверхностей, а сопротивление ρ_{xx} будет пропорционально H^2 , так как это будет случай гофрированного цилиндра в перпендикулярном поле (§ 5.4). Однако когда магнитное поле будет достаточно велико, магнитный пробой восстановит первоначальную ферми-сферу для свободных электронов, и экваториальное ее сечение даст период осцилляций де Гааза–ван Альфена. По той же причине ρ_{xx} будет стремиться к насыщению.

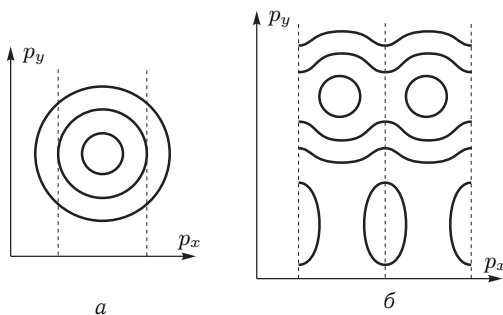


Рис. 10.12

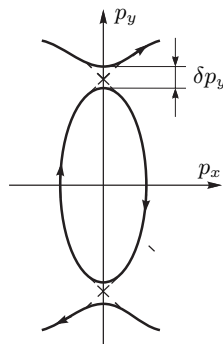


Рис. 10.13

Оценим порядок магнитных полей, необходимых для магнитного пробоя. Рассмотрим рис. 10.13. Этот рисунок можно интерпретировать не только как изображение изоэнергетической поверхности, но и как изображение ее сечения плоскостью $p_z = 0$, т. е. электронной траектории. Зависимость энергии от импульса для почти свободных электронов была нами рассмотрена в § 1.3. Согласно формуле (1.42)

с соответствующим переобозначением импульсов, имеем уравнение траекторий, изображенных на рис. 10.13:

$$(2m)^{-1} \left[p_x^2 + p_y^2 + (\hbar K/2)^2 \right] \pm \left[(p_x \hbar K/2m)^2 + |U_K|^2 \right]^{1/2} = \varepsilon, \quad (10.44)$$

где $2U_K$ играет роль энергетической щели.

Кратчайшее расстояние между двумя траекториями соответствует $p_x = 0$ и равно

$$\begin{aligned} \delta p_y &= \left\{ 2m \left[\varepsilon - (2m)^{-1} (\hbar K/2)^2 + |U_K| \right] \right\}^{1/2} - \\ &\quad - \left\{ 2m \left[\varepsilon - (2m)^{-1} (\hbar K/2)^2 - |U_K| \right] \right\}^{1/2} \approx \\ &\approx (2m)^{1/2} |U_K| \left[\varepsilon - (2m)^{-1} (\hbar K/2)^2 \right]^{-1/2} \sim (m/\mu)^{1/2} |U_K|. \end{aligned}$$

Здесь мы считаем

$$U_K \ll \varepsilon - (2m)^{-1} (\hbar K/2)^2 \sim \mu.$$

Как уже отмечалось в § 5.1 (формула (5.10)), траектория в координатном пространстве подобна траектории в импульсном пространстве. Поэтому, меняя масштаб, мы находим из размера «запрещенного участка» в импульсном пространстве δp_y размер запрещенного участка в координатном пространстве:

$$\delta x \sim (c/eH) (m/\mu)^{1/2} U_K. \quad (10.45)$$

Этот участок представляет собой потенциальный барьер, который не может быть пройден классическим электроном. Но в квантовой механике существует вероятность прохождения барьера с помощью так называемого туннельного эффекта. Вероятность туннельного эффекта пропорциональна

$$W \sim \exp \left[-(2/\hbar) \operatorname{Im}(p_x) \delta x \right].$$

Мнимая часть p_x получается из уравнения (10.44) в запрещенном участке на рис. 10.13. По порядку величины ее можно определить, исходя из того условия, чтобы мнимое p_x под корнем в (10.44) компенсировало член $|U_K|^2$. Отсюда имеем

$$\operatorname{Im}(p_x) \sim U_K m/\hbar K \sim U_K (m/\mu)^{1/2}. \quad (10.46)$$

Подставляя (10.45) и (10.46) в формулу для вероятности туннельного эффекта, находим (Блаунт, 1962) [67]

$$W \sim \exp \left(-\alpha \frac{2cm}{e\hbar H} \frac{U_K^2}{\mu} \right) = \exp \left(-\alpha \frac{U_K^2}{\beta H \mu} \right), \quad (10.47)$$

где $\alpha \sim 1$. Итак, отсюда следует, что для осуществления магнитного пробоя нужно не $\beta H \sim U_K$, а $\beta H \sim U_K^2/\mu$, т. е. гораздо меньшая величина. Например, при $U_K \sim 10^{-2}$ эВ, $\mu \sim 1$ эВ достаточно поля 10^4 Э.

На самом деле рассмотренная модель в природе непосредственно не реализуется, и условия наблюдения магнитного пробоя встречаются нечасто. Одним из примеров является магний. В нем при больших полях в эффекте де Гааза–ван Альфена наблюдалась площадь сечения, большая чем сечение зоны Бриллюэна [66]. Это можно интерпретировать следующим образом. У магния гексагональная плотно упакованная решетка (т. е. имеющая симметрию правильной шестигранной призмы). Рассмотрим центральное сечение ферми-поверхности, перпендикулярное главной оси. Сечение зоны Бриллюэна в этом случае имеет форму правильного шестиугольника (рис. 10.14).

Нарисуем электронные орбиты согласно модели свободных электронов (§ 14.3). Для этого изобразим окружности с центром в центре каждого шестиугольника. Эти окружности пересекаются. Как всегда, пересечение в действительности снимается, получается замкнутый контур в середине и «треугольные контуры» по краям шестиугольника. Существенно здесь то, что снятие вырождения происходит только за счет спин-орбитальной связи. При малых полях периоды осцилляций де Гааза–ван Альфена определяются площадями, заштрихованными на рис. 10.14. Но если поле достаточно велико, то восстанавливается орбита свободного электрона и получается сечение, большее площади шестиугольника.

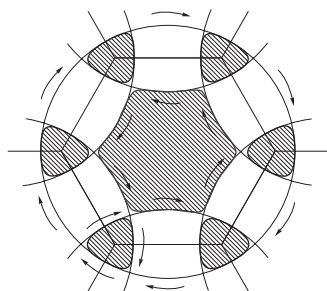


Рис. 10.14

КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В ПРОВОДИМОСТИ

§ 11.1. Эффект Шубникова–де Гааза

Осцилляции того же типа, что и в эффекте де Гааза–ван Альфена, наблюдаются также в кинетических явлениях, например в проводимости и теплопроводности. Осцилляции проводимости (*Шубников и де Гааз*, 1930) [68] являются наиболее удобными для экспериментального наблюдения; поэтому мы остановимся именно на этом эффекте. Кинетическое уравнение, которым мы пользовались до сих пор, в данном случае неприменимо, а построение полной квантовой теории кинетических явлений по своему уровню выходит за рамки данной книги ¹⁾. Ввиду этого мы найдем по порядку величины осциллирующую добавку к проводимости, воспользовавшись тем, что основной вклад в нее происходит от изменения вероятности рассеяния [71].

Будем рассматривать рассеяние на примесях и для простоты считать его изотропным. В § 3.2 была найдена вероятность рассеяния для классического случая:

$$W = \frac{\pi}{\hbar} n_i |v|^2 \nu(\mu) = \frac{2\pi}{\hbar} n_i |v|^2 \int \delta(\varepsilon - \mu) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (11.1)$$

Обобщим формулу (11.1) на квантовый случай. Состояния при этом характеризуются квантовыми числами n и p_z . Вместо формулы (11.1) получаем

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} n_i |v|^2 \int dp_z \sum_n \delta(\varepsilon(n, p_z) - \mu) \frac{eH/c}{(2\pi\hbar)^2}. \quad (11.2)$$

¹⁾ Читателям, желающим ознакомиться с полной теорией, рекомендуем книги [4, 69] и статью [70].

Для больших n ($\mu \gg \beta H$) эта формула переходит в (11.1), ибо

$$\sum_n \rightarrow \int dn \rightarrow \int \frac{c}{2\pi e \hbar H} dp_x dp_y.$$

При рассмотрении обычного примесного рассеяния мы могли пользоваться формулой (11.1) для любых температур. Однако в квантовом случае температура, будучи гораздо меньше μ , не обязательно мала по сравнению с βH . Ввиду этого мы произведем замену:

$$\delta(\varepsilon - \mu) \rightarrow -\partial f / \partial \varepsilon,$$

где f — функция Ферми. Итак, окончательно мы запишем вероятность рассеяния для электронов с заданной проекцией спина в виде ¹⁾

$$W = (2\pi/\hbar) n_i |v|^2 (eH/c) (2\pi\hbar)^{-2} \cdot I, \quad (11.3)$$

где

$$I = - \sum_n \int \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} dp_z. \quad (11.4)$$

Применим, как и в § 10.5, формулу Пуассона (10.21). При этом получаем

$$I = - \int_a^\infty dn \int \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} dp_z + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^\infty I_k, \quad (11.5)$$

где

$$I_k = - \int_{-\infty}^\infty dp_z \int_a^\infty e^{2\pi i k n} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} dn. \quad (11.6)$$

Нетрудно убедиться в том, что первый член в формуле (11.5) дает вероятность рассеяния (11.1) для классического случая.

Найдем теперь величину I_k , наподобие того как мы находили $I_{k\sigma}$ в § 10.5. Перейдем от интегрирования по n к интегрированию по ε . в этом случае появляется быстро меняющийся множитель $\exp[2\pi i k n(\varepsilon, p_z)]$. Показатель экспоненты мы разложим около точек экстремумов n по p_z ($n = n_m$) при заданном ε . В результате получится

¹⁾ На первый взгляд создается впечатление, что мы находим поправку к плотности состояний и что такая поправка не скажется на проводимости, ибо $\sigma \sim e^2 v^2 \nu \tau$, а $\tau = W^{-1}$, т. е. обратно пропорционально ν (см. (11.1)). В действительности мы вычисляем поправку не к ν , а к интегралу столкновений, т. е. к τ^{-1} . Строгий расчет показывает, что в σ_{zz} , σ_{xx} и σ_{yy} наряду с поправками к W входят совсем иные суммы по n , так что никакого сокращения не происходит. При этом оказывается, что найденный ниже результат дает точный ответ для σ_{zz} и определяет порядок относительной поправки к σ_{xx} и σ_{yy} .

интеграл (10.25). Взяв его, имеем

$$I_k = - \sum_m \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} e^{\pm i\pi/4} \left(\frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \right)_m e^{2\pi i k n_m} \left(k \left| \frac{\partial^2 n}{\partial p_z^2} \right|_m \right)^{-1/2} d\varepsilon. \quad (11.7)$$

Здесь быстро меняющимися функциями ε являются множители $\partial f/\partial \varepsilon$ и $\exp(2\pi i k n_m)$. Опять, как и раньше, полагая

$$n_m \approx n_m(\mu_\sigma) + (\partial n_m / \partial \varepsilon)_\mu (\varepsilon - \mu_\sigma),$$

получаем интеграл

$$\begin{aligned} - \int (\partial f / \partial \varepsilon) \exp(2\pi i k n_m) &\approx \\ &\approx (4T)^{-1} \exp(2\pi i k n_m(\mu_\sigma)) \int_{-\infty}^{\infty} \text{ch}^{-2}(x/2T) \exp[2\pi i (\partial n / \partial \varepsilon)_m x] dx. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\alpha y) \text{ch}^{-2} y dy = -\frac{\pi\alpha}{\text{sh}(\pi\alpha/2)}$$

и подставляя все эти результаты в (11.7), находим, что

$$\begin{aligned} I_k = - \sum_m e^{\pm i\pi/4} (\partial n_m / \partial \varepsilon) \left| \partial^2 n / \partial p_z^2 \right|_m^{-1/2} \times \\ \times \sum_k \psi(k\lambda) k^{-1/2} e^{2\pi i k n_m(\mu_\sigma)}. \quad (11.8) \end{aligned}$$

В данном случае имеется в виду вероятность рассеяния для электронов с определенной проекцией спина, т. е. $\mu_\sigma = \mu + \beta H \sigma_z$. Однако проводимость определяется электронами с обеими проекциями спина, и малые поправки в первом приближении просто складываются. Ввиду этого полученное выражение для I_k можно усреднить по проекциям спина, заменив

$$\exp[2\pi i k n_m(\mu_\sigma)] \rightarrow \exp[2\pi i k n_m(\mu)] \cos[2\pi k (\partial n / \partial \varepsilon)_m \beta H].$$

Подставляя это в (11.5), выражая n_m через S_m с помощью (10.31) и используя определение $m^* = (2\pi)^{-1} (\partial S / \partial \varepsilon)$, находим

$$\begin{aligned} I = \frac{c}{eH} (2\pi\hbar)^2 \frac{\nu(\mu)}{2} - \\ - 2(2\pi)^{1/2} \left(\frac{c}{\hbar eH} \right)^{1/2} \sum_m m_m^* \left| \partial^2 S_m / \partial p_z^2 \right|^{-1/2} \times \end{aligned}$$

$$\times \sum_k k^{-1/2} \psi(k\lambda) \cos\left(\frac{cS_m k}{\hbar e H} \pm \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\pi k \frac{m^*}{m}\right). \quad (11.9)$$

Подставляя I в (11.3), окончательно получаем

$$W = W_0 \left[1 - \frac{2^{1/2}}{\pi^{3/2} \hbar^3} \left(\frac{e \hbar H}{c} \right)^{1/2} \frac{1}{\nu(\mu)} \sum_m m_m^* \left| \partial^2 S_m / \partial p_z^2 \right|^{-1/2} \times \right. \\ \left. \times \sum_k k^{-1/2} \psi(k\lambda) \cos\left(\frac{cS_m k}{\hbar e H} \pm \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\pi k \frac{m^*}{m}\right) \right]. \quad (11.10)$$

Поскольку проводимость пропорциональна $\tau = W^{-1}$, то следует ожидать, что относительная поправка к проводимости будет равна по порядку величины относительной поправке к W . Более полная теория показывает, что если записать $W = W_0(1 - \tilde{\alpha})$, то $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(0)}(1 + \tilde{\alpha})$. Такой же порядок величины имеют относительные поправки к σ_{xx} и σ_{yy} (напомним, что в рассматриваемом нами случае предполагается $\Omega\tau \gg 1$, так что $\sigma_{xx}^{(0)}/\sigma_{zz}^{(0)} \sim \sigma_{yy}^{(0)}/\sigma_{zz}^{(0)} \sim (\Omega\tau)^{-2}$).

Итак, относительная поправка к проводимости при низких температурах порядка $(\beta\hbar/\mu)^{1/2}$. Если сравнить второй член формулы (11.10) с выражением (10.33) для M , мы приходим к заключению, что относительная поправка к проводимости может быть записана в виде

$$\frac{\Delta\tilde{\sigma}_{zz}}{\sigma_{zz}} \sim \frac{\Delta\tilde{\sigma}_{xx}}{\sigma_{xx}} \sim \frac{\Delta\tilde{\sigma}_{yy}}{\sigma_{yy}} \sim \nu^{-1}(\mu) \sum_m \left(\frac{m_m^* S_m}{H} \right)^2 \frac{\partial \tilde{M}_m}{\partial H}, \quad (11.11)$$

где $\tilde{M}_m$ — слагаемое, соответствующее одному экстремуму S_m в формуле (10.33).

Весьма сходный вид имеют и осцилляции высокочастотного поверхностного импеданса [72]. Относительный порядок этих осцилляций тот же, что и в статической проводимости; следовательно, при $T = 0$

$$\frac{\tilde{Z}}{Z(H)} \sim \left(\frac{e \hbar H}{c S} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{\beta \hbar}{\mu} \right)^{1/2}. \quad (11.12)$$

Как уже говорилось в предыдущей главе, ввиду большой частоты осцилляций каждое дифференцирование по H увеличивает относительную амплитуду осциллирующей добавки. Поэтому эксперименты, в которых определяется $\partial X/\partial H$ или $\partial R/\partial H$, особенно выгодны с точки зрения квантовых осцилляций. Измерения импеданса имеют и другое преимущество по сравнению с эффектом де Гааза–ван Альфена. В последнем случае все экстремальные сечения участвуют в магнитном моменте, и если их несколько, то нелегко выделить различные типы осцилляций. При измерении же импеданса по сути дела определяется

эффективная проводимость $\sigma_{\text{эф}}$, пропорциональная $v_\alpha v_\beta$. Поэтому, меняя поляризацию падающей волны, можно подавить некоторые из осцилляций. В частности, осцилляции от центрального сечения легко подавляются благодаря тому обстоятельству, что обе существенные точки, где контур $v_x = 0$ пересекает центральное сечение (рис. 7.8), имеют противоположные направления скорости. Взяв $\mathbf{E}\mathbf{v} = 0$, мы полностью уничтожаем соответствующие осцилляции.

В заключение этого параграфа отметим те качественные изменения, которые возникают в наклонном поле.

В результате строгого расчета (см. [73]) оказывается, что осцилляции в этом случае возрастают по сравнению со случаем параллельного поля в отношении $k_z v / \max(\tau^{-1}, \omega)$, где k_z — проекция волнового вектора на направление магнитного поля. Следовательно, мы получим

$$\frac{\tilde{Z}}{Z(H)} \sim \left(\frac{\beta H}{\mu} \right)^{1/2} \frac{k_z v}{\max(\tau^{-1}, \omega)}.$$

При достаточно больших полях и частотах это отношение может превысить единицу, т.е. осцилляции станут гигантскими. По сути дела, это явление подобно гигантским осцилляциям при поглощении звука (§ 12.7). Если в приведенную выше оценку подставить

$$\omega \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}, \quad k \sim \delta^{-1} \sim 10^4 \text{ см}^{-1}, \quad H \sim 10^4 \text{ Э},$$

то $\tilde{Z}/Z \sim 0,1\text{--}1$; отсюда видно, что гигантские осцилляции импеданса вполне осуществимы.

§ 11.2. Циклотронный резонанс на «скачущих» орбитах

При рассмотрении циклотронного резонанса и токовых состояний мы уже говорили о «скачущих» траекториях. Остановимся теперь на этом вопросе подробнее.

При сравнении длины волны электрона и параметров неоднородности поверхности существенной является длина волны, связанная лишь с движением электронов по нормали к поверхности. Соответствующая компонента импульса может быть сильно уменьшена, если электрон движется под малым углом к поверхности¹⁾. При этом создаются условия для зеркального отражения.

Пусть металл находится в магнитном поле, параллельном его поверхности. Тогда в нем возможны электронные траектории типа изображенных на рис. 11.1. Если угол, под которым электрон подходит к поверхности, мал, то электрон испытывает зеркальное отражение

¹⁾ Можно показать, что в анизотропном металле эффективная длина волны соответствует $\hbar/(p_x - p_{x0})$, где p_{x0} — значение p_x в точке, где $v_x = 0$.

и последующий участок траектории воспроизводит предыдущий, так возникают «скачущие» траектории.

При перемещении по скачущей траектории движение электрона по нормали к поверхности является периодическим и, следовательно, оно квантуется. Возникают дискретные уровни, между которыми возможны переходы с поглощением энергии высокочастотного поля. Благодаря этому в области малых магнитных полей имеется очень своеобразный резонансный механизм поглощения энергии высокочастотного поля (Хайкин, 1960; Ни и Прейндж, 1967) [74, 75].

Хотя физическая картина здесь та же, что и при циклотронном резонансе, но есть одна существенная разница. При циклотронном резонансе благодаря неравенству $\hbar\Omega \ll \mu$ речь идет о переходах между очень высокими квантовыми уровнями; поэтому эффект является по сути дела классическим. При резонансе на скачущих траекториях речь может идти о нижних квантовых уровнях, где классическое вычисление требуется сравнивать с точным.

В импульсном пространстве движению по траектории на рис. 11.1 соответствует движение по замкнутой орбите, ограничивающей заштрихованный сегмент на рис. 11.2. Согласно формуле (10.17) заштрихованная площадь равна $(2\pi e\hbar H/c) [n + \gamma]$, где γ находится в пределах $|\gamma| < 1/2$. Квазиклассическое правило квантования не дает никаких дальнейших сведений о константе γ . Это было несущественно в случае квантования обычных траекторий, ибо там речь шла о высоких уровнях, но здесь $n \sim 1$, так что знание γ существенно. В рассматриваемой задаче константу γ удастся определить для произвольного спектра благодаря тому, что существенна лишь очень малая часть всей замкнутой орбиты и ее можно считать частью окружности. Оказывается, что для любого n $\gamma \approx -1/4$. Относительная погрешность в $n + \gamma$ даже для $n = 1$ составляет меньше 2% и с увеличением n она убывает как n^{-2} . Мы не приводим здесь подробностей этого расчета. Обозначим $n + \gamma = n - 1/4$ через n_1 .

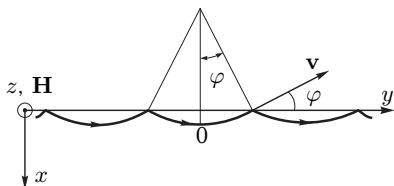


Рис. 11.1

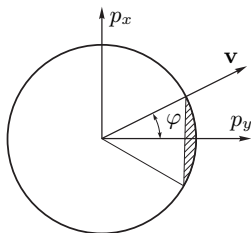


Рис. 11.2

Так как угол φ мал, то соответствующую часть траектории будем аппроксимировать окружностью. Тогда высота сегмента на рис. 11.1

равна

$$x = R(1 - \cos \varphi) \approx R\varphi^2/2,$$

где $R = cp/eH$ (p — радиус кривизны орбиты в импульсном пространстве). Площадь сегмента на рис. 11.1 равна

$$(2\varphi/2\pi) \pi R^2 - R^2 \sin \varphi \cos \varphi \approx (2/3) R^2 \varphi^3 = (4/3) (2x^3 R)^{1/2}.$$

Но согласно формуле (5.10) площадь в импульсном пространстве равна площади в координатном пространстве, умноженной на $(eH/c)^2$. Итак, согласно правилу квантования имеем

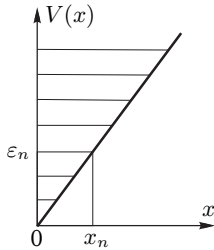
$$S_n = (4/3) (eH/c)^2 (2x_n^3 R)^{1/2} = (2\pi e \hbar H/c) n_1.$$

Отсюда находим

$$x_n = 2^{-1} (3\pi \hbar)^{2/3} (c/eHp)^{1/3} n_1^{2/3}. \quad (11.13)$$

Теперь нетрудно найти уровни энергии. Так как на электрон действует сила Лоренца $(e/c)[\mathbf{v}\mathbf{H}]$, а его скорость $\mathbf{v}$ почти параллельна границе, то можно приближенно считать, что сила направлена по нормали и равна $(e/c)v_y H$. В этом случае можно ввести потенциал

$$V(x) = (e/c)v_y H x \quad (x > 0).$$



Зеркальное отражение от границы будет обеспечено, если изобразить границу как бесконечно высокую потенциальную стенку. При этом мы получим бесконечную потенциальную яму, изображенную на рис. 11.3. Очевидно, каждой возможной точке остановки x_n соответствует энергия

Рис. 11.3

$$\varepsilon_n = eH v_y x_n / c. \quad (11.14)$$

Резонансные частоты, соответствующие линиям поглощения, равны разностям ε_n , деленным на $\hbar$:

$$\omega_{nm} = \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_m}{\hbar} = \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi e}{c} \right)^{2/3} \left(\frac{H^2}{p\hbar} \right)^{1/3} v_y \left(n_1^{2/3} - m_1^{2/3} \right). \quad (11.15)$$

На самом деле задается частота, а меняется магнитное поле. Резонансные значения поля имеют вид

$$H_{nm} = \frac{2^{3/2} \hbar^{1/2}}{3\pi} \frac{c}{e} \omega^{3/2} \left(\frac{p}{v_y^3} \right)^{1/2} \left(n_1^{2/3} - m_1^{2/3} \right)^{-3/2}. \quad (11.16)$$

Множитель $(p/v_y^3)^{1/2}$ соответствует линии на ферми-поверхности, на которой $v_x = 0$. Он зависит от p_z . Очевидно, в H_{nm} должны проявляться экстремальные значения p/v_y^3 . Но эффект будет

гораздо сильнее, если параметр p/v_y^3 будет мало меняться вдоль целого участка ферми-поверхности. Это заведомо имеет место, когда у ферми-поверхности есть цилиндрические участки. Именно такие участки и дают максимумы поглощения, найденные на опыте в висмуте, олове и индии.

Линии резонанса, описываемые формулой (11.16), могут быть классифицированы по сериям. Каждая серия характеризуется определенным m_1 , и все линии этой серии можно получать из (11.16), взяв $n_1 = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots$. Нетрудно видеть, что каждая следующая серия будет начинаться при большем поле, чем предыдущая, и все линии этой серии будут отсчитываться в сторону меньшего поля. Формула (11.16) формально позволяет получить сколь угодно большие значения резонансных полей. Но на самом деле эффективными будут только те орбиты, которые находятся в пределах скин-слоя. Как мы сейчас покажем, этим орбитам соответствуют сравнительно небольшие числа m_1 и n_1 .

Сделаем предположение, что n_1 велико, а $n_1 - m_1 = \Delta n \ll n_1$. Тогда из (11.16) получаем

$$H \approx (3^{1/2} \pi) (\hbar^{1/2} c / e) \omega^{3/2} (p / v_y^3)^{1/2} n^{1/2} (\Delta n)^{-3/2}.$$

Подставляя эти значения H в (11.13), получаем

$$x_n \approx (3^{1/2} \pi / 2) (\hbar v_y / p \omega)^{1/2} (n \Delta n)^{1/2} < \delta.$$

Наименьшее значение Δn есть 1 и, следовательно, имеем

$$n < (4/3\pi^2) (\delta^2 p \omega / \hbar v_y) = n_{\text{lim}}. \quad (11.17)$$

Для

$$\omega \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}, \quad \delta \sim 10^{-4} \text{ см}, \quad p/\hbar \sim 10^8 \text{ см}^{-1}, \quad v_y \sim 10^8 \text{ см/с}$$

находим, что n не может превышать нескольких десятков. При больших значениях n интенсивность резонансных пиков будет резко снижаться¹⁾.

Значение $\Delta n = 1$ соответствует началу серии. Для больших Δn получаем ограничение

$$1 < \Delta n < n_{\text{lim}}/n, \quad (11.18)$$

где n_{lim} — абсолютный предел n .

Подставляя в формулу для H $\Delta n = 1$, $n = n_{\text{lim}}$, находим

$$H < 1-10 \text{ Э.}$$

¹⁾ Кроме того, при больших числах m и n резонансы начинают сливаться, так как разность соседних ω_{nm} становится меньше, чем τ^{-1} .

Поскольку $\delta \propto \omega^{-1/3}$, то увеличение частоты мало способствует увеличению допустимых n , хотя, конечно, резонансные значения H при этом растут.

Следует отметить, что поскольку электроны, движущиеся по скачущим орбитам, все время проводят в скин-слое, то они весьма эффективны в поглощении электромагнитных волн и резонансы, связанные с цилиндрическими участками ферми-поверхности, дают заметные пики в полном поверхностном импедансе.

§ 11.3. Интерференционная добавка к проводимости

В § 3.1 было показано, что при условии $p_0 l \gg \hbar$ электроны можно рассматривать как классические частицы. Это и было использовано во всех случаях, кроме тех, когда становились существенными квантовые эффекты, связанные с дискретностью уровней энергии в магнитном поле. В отсутствие магнитного поля квантовые поправки малы и до недавнего времени не привлекали к себе внимания. Однако более тщательное исследование показало, что эти поправки сильно зависят от температуры, частоты приложенного электрического поля и очень слабого магнитного поля, а поэтому могут быть выделены на фоне основного эффекта.

Полное вычисление квантовых добавок к проводимости и другим физическим характеристикам производится с помощью методов квантовой теории поля. Однако существуют простые и элегантные рассуждения, которые дают возможность получить эти добавки по порядку величины. Достоинством такого подхода является очень ясная физическая картина происхождения различных эффектов ¹⁾.

Рассмотрим прежде всего поправку, возникающую в модели невзаимодействующих друг с другом электронов, рассеивающихся на примесях. Предположим, что электрон, испытывая рассеяние на примесях, переходит из точки A в точку B . Он может при этом пройти по разным путям (рис. 11.4). Согласно квантовой механике должны складываться не вероятности этих путей, а соответствующие амплитуды. Если обозначить эти амплитуды как A_i , то полная вероятность перехода из точки A в точку B равна квадрату модуля суммы всех амплитуд, т. е.

$$W = \left| \sum_i A_i \right|^2 = \sum_i |A_i|^2 + \sum_{i \neq j} A_i A_j^*. \quad (11.19)$$

Первое слагаемое описывает сумму вероятностей прохождения каждого пути, а второе слагаемое соответствует интерференции разных

¹⁾ Приводимые далее рассуждения принадлежат в основном Д. Е. Хмельницкому [76] и изложены, в частности, в диссертации Б. Л. Альтшулера [79], которой мы будем следовать в этом и следующем параграфах; см. также книгу В. Ф. Гантмахера [301] и книгу Й. Имри [302].

амплитуд. Для большинства траекторий интерференция не важна, так как длины этих траекторий сильно отличаются, и поэтому сильно отличаются изменения фазы волновой функции на этих траекториях:

$$\Delta\varphi = \hbar^{-1} \int_A^B \mathbf{p} d\mathbf{l}. \quad (11.20)$$

При суммировании по всем траекториям интерференционное слагаемое, ввиду его осциллирующего характера, обращается в нуль.

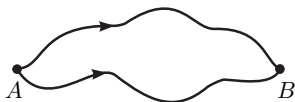


Рис. 11.4



Рис. 11.5

Однако среди всех траекторий есть особые, для которых нельзя пренебречь интерференцией. Это траектории с самопересечением (рис. 11.5). Каждая такая траектория в действительности соответствует двум амплитудам, отличающимся направлением прохождения петли. Поскольку при изменении направления движения в формуле (11.20) происходит замена $\mathbf{p}$ на $-\mathbf{p}$ и $d\mathbf{l}$ на $-d\mathbf{l}$, то $\Delta\varphi$ для петли при этом не меняется. Две амплитуды оказываются когерентными (т. е. имеют одинаковые фазы), и, следовательно, полная вероятность равна

$$|A_1 + A_2|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + A_1 A_2^* + A_2 A_1^* = 4 |A_1|^2,$$

т. е. в два раза больше, чем при сложении вероятностей. Интерференция амплитуд рассеяния имеет квантовое происхождение, в то время как сложение вероятностей соответствует классическому описанию электрона с помощью кинетического уравнения. Как мы видели, интерференционные эффекты важны для траекторий с самопересечением, и они приводят к увеличению полной вероятности рассеяния, т. е. к увеличению сопротивления или уменьшению проводимости.

Оценим теперь порядок интерференционной добавки к проводимости. Относительная поправка определяется вероятностью траектории с самопересечением. Эта вероятность была бы равна нулю для классической точки, но для электрона траекторию следует рассматривать как трубку конечной толщины порядка длины волны $\lambda \sim \hbar/p_0$. Пусть электрон движется в течение времени t , значительно большего времени столкновений τ . За это время благодаря диффузии он может попасть в любую точку, находящуюся на расстоянии $\sqrt{x^2} \sim (Dt)^{1/2}$ (см. (5.47)). Иначе говоря, электрону доступен объем порядка $(Dt)^{3/2}$. Для того чтобы в промежуток времени dt произошло «самопересе-

ние», надо, чтобы конечная точка пути электрона попала в элемент объема $v dt \cdot \lambda^2$. Вероятность этого события равна отношению объемов.

Поскольку нас интересует полная вероятность, то мы должны проинтегрировать по времени. В качестве нижнего предела надо взять τ , ибо лишь на больших временах применимо понятие диффузии. Что касается верхнего предела, то надо учесть, что кроме рассеяния на примесях имеются неупругие процессы взаимодействия электронов друг с другом и с фононами, которые приводят к релаксации фазы и разрушению когерентности амплитуд. Это время мы обозначим через τ_φ . Итак ¹⁾,

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} \sim - \int_{\tau}^{\tau_\varphi} v \lambda^2 (Dt)^{-3/2} dt, \quad (11.21)$$

интегрируя, получаем

$$\Delta\sigma/\sigma \sim v \lambda^2 D^{-3/2} (\tau^{-1/2} - \tau_\varphi^{-1/2}) \sim -(\lambda/l)^2 + \lambda^2/lL_\varphi \quad (11.22)$$

(мы здесь подставили $D \sim lv$, $\tau \sim l/v$ и ввели обозначение $L_\varphi = (D\tau_\varphi)^{1/2}$). Значит, относительная поправка к проводимости имеет порядок $(\lambda/l)^2 \sim (\hbar/p_0 l)^2$. Если воспользоваться оценкой для самой проводимости

$$\sigma \sim n_e e^2 \tau / m \sim n_e e^2 l / p_0 \sim p_0^2 e^2 l / \hbar^3, \quad (11.23)$$

то из (11.22) получается (Горьков, Ларкин, Хмельницкий, 1979) [77]:

$$\Delta\sigma \sim -e^2/\hbar l + e^2/\hbar L_\varphi. \quad (11.24)$$

Хотя в целом поправка мала и к тому же последний член в (11.22) мал по сравнению с первым, но именно он представляет главный интерес, поскольку τ_φ сильно зависит от температуры. Как уже говорилось, время релаксации фазы τ_φ определяется неупругим рассеянием. Для того чтобы интерференционные эффекты вообще имели место, необходимо выполнение условия $\tau \ll \tau_\varphi$, т.е. низкие температуры (область остаточного сопротивления). Неупругими процессами при этом являются рассеяние электронов на электронах и на фононах. В первом случае $\tau_\varphi \sim \hbar\mu/T^2$. Согласно формуле (11.22) интерференционная температурная добавка имеет следующий относительный порядок:

$$[\sigma(T) - \sigma(0)]/\sigma(0) \sim (\lambda/l)^{3/2} (T/\mu). \quad (11.25)$$

Интересно сравнить ее с температурной добавкой от электрон-электронного рассеяния. Как уже отмечалось в §4.4, складываются сопротивления. Ввиду этого

$$\Delta\sigma_{ee}(T)/\sigma(0) = -\rho_{ee}(T)/\rho(0) = -\sigma(0)/\sigma_{ee}(T),$$

¹⁾ Знак определяется тем, что интерференция увеличивает вероятность рассеяния и уменьшает проводимость.

где σ_{ee} — проводимость, определенная в § 4.2. Подставляя это значение и (11.23) в качестве $\sigma(0)$, получаем

$$\Delta\sigma_{ee}(T)/\sigma(0) \sim -(l/\lambda) (T/\mu)^2.$$

Значит, при достаточно низких температурах интерференционная добавка становится больше.

Если же время τ_φ определяется испусканием и поглощением фононов, то оно порядка (§ 4.3)

$$\tau_\varphi \sim (\hbar/T) (\hbar\omega_D/T)^2.$$

В этом случае из (11.22) получаем

$$[\sigma(T) - \sigma(0)]/\sigma(0) \sim (\lambda/l)^{3/2} (T/\mu)^{1/2} (T/\hbar\omega_D). \quad (11.26)$$

Соотношение между двумя механизмами релаксации фазы определяется отношением соответствующих вероятностей τ_φ^{-1} . Нетрудно увидеть, что при $T < (\hbar\omega_D)^2/\mu \sim 1$ К доминирует электрон-электронное рассеяние; при больших температурах — электрон-фононное.

Кроме того, надо обратить внимание на то, что интерференционная температурная добавка к проводимости положительна, т.е. добавка к сопротивлению отрицательна. Иными словами, сопротивление падает с увеличением температуры, как в эффекте Кондо. Несмотря на это интересное обстоятельство мы не будем рассматривать эту добавку более детально, ибо, как мы увидим из § 11.4, существует квантовая температурная добавка от электрон-электронного взаимодействия, которая превосходит найденную выше. Последнее справедливо для трехмерного массивного образца, который рассматривался до сих пор. Однако для тонкой металлической пленки (или проволоки) дело обстоит иначе. Ввиду этого мы кратко рассмотрим интерференционную поправку и в этом случае.

Если толщина пленки (или проволоки) b мала ¹⁾, то частица много раз успевает продиффундировать от одной стенки до другой, и вероятность найти ее в любой точке поперек пленки (или проволоки) одинакова. Ввиду этого объем участка пересечения $\lambda^2 v dt$ надо относить

¹⁾ Критерий малости поперечного размера b разный в зависимости от постановки задачи. Строго говоря, в формулах (11.27) присутствует слагаемое $-(\lambda/l)^2$, так же как и в (11.22) для трехмерного случая. Связано это с тем, что на малых временах любой образец ведет себя как трехмерный. Поэтому если речь идет о том, в каких условиях интересующий нас член в поправке к проводимости, зависящий от L_φ , меняет свое поведение, то критерием является $b < L_\varphi$. Если же нас интересует, когда можно опустить слагаемое $-(\lambda/l)^2$, то для проволоки получается $l \ll b \ll (L_\varphi l)^{1/2}$, а для пленки $l \ll b \ll l \ln(L_\varphi/l)$. Формулы (11.27) справедливы, строго говоря, лишь при выполнении последних условий, однако части, зависящие от L_φ , сохраняют свой вид и при менее строгих условиях $l \ll b \ll L_\varphi$.

не к $(Dt)^{3/2}$, а к $(Dt)^{d/2}b^{3-d}$, где d — размерность образца: $d = 2$ для пленки и $d = 1$ для проволоки. Итак, имеем

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} \sim - \int_{\tau}^{\tau_{\varphi}} \frac{v\lambda^2 dt}{(Dt)^{d/2}b^{3-d}} \sim - \frac{v\lambda^2}{D} \begin{cases} b^{-1} \ln(\tau_{\varphi}/\tau), & d = 2, \\ b^{-2} L_{\varphi}, & d = 1. \end{cases} \quad (11.27)$$

Если найти отсюда произведение $\Delta\sigma b^{3-d}$, то получается [77]:

$$\Delta\sigma_d \sim -\Delta\sigma b^{3-d} \sim -\frac{e^2}{\hbar} \begin{cases} \ln(L_{\varphi}/l), & d = 2, \\ L_{\varphi}, & d = 1. \end{cases} \quad (11.28)$$

Введенное здесь $\Delta\sigma_d$ соответствует добавке к величине, обратной полному сопротивлению квадратной пленки или проволоки единичной длины. Отметим, что здесь речь идет не о размерах порядка атомных (в последнем случае возрастание вероятности самопересечения очевидно), а о макроскопических размерах. Время релаксации фазы в системе с малой размерностью ($d = 1, 2$) определяется электрон-электронным взаимодействием с малой передачей энергии [78]. Мы не будем излагать здесь соответствующий вывод ввиду его сложности и приведем лишь основные результаты. В случае $d = 2$ (пленка) получается

$$L_{\varphi} \sim (l/\lambda) (\hbar v/T)^{1/2} b^{1/2} \ln(lb/\lambda^2), \quad (11.29)$$

$$\Delta\sigma_d \sim -(e^2/\hbar) \ln \left[b (\hbar v/T) \lambda^{-2} \right]. \quad (11.30)$$

Для $d = 1$ (тонкая проволока) имеем

$$L_{\varphi} \sim (l/\lambda)^{2/3} (\hbar v/T)^{1/3} b^{2/3}, \quad (11.31)$$

$$\Delta\sigma_d \sim -(e^2/\hbar) (l/\lambda)^{2/3} (\hbar v/T)^{1/3} b^{2/3}. \quad (11.32)$$

Сравнение интерференционных добавок к проводимости (11.30) и (11.32) с квантовой добавкой от взаимодействия электронов (см. § 11.5) показывает, что для $d = 2$ обе добавки имеют один порядок величины, а в случае $d = 1$ интерференционная поправка является главной.

Если исследуется проводимость в высокочастотном поле с частотой $\omega > \tau_{\varphi}^{-1}$, то верхним пределом интегралов (11.21) и (11.27) является ω , ибо основным механизмом релаксации фазы становится воздействие внешнего поля (соответствующее время порядка $\omega^{-1} \ll \tau_{\varphi}$). Если $\omega^{-1} \gg \tau$, то полученные ранее формулы сохраняют прежний вид, однако в них L_{φ} заменяется на L_{ω} :

$$L_{\omega} = (D/\omega)^{1/2}. \quad (11.33)$$

§ 11.4. Интерференционные эффекты в магнитном поле

Весьма интересно поведение интерференционной поправки в магнитном поле. В присутствии поля происходит замена $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - (e/c) \mathbf{A}$. При изменении направления обхода замкнутой петли импульс $\mathbf{p}$ меняет знак на обратный, но векторный потенциал $\mathbf{A}$ сохраняет свой знак. В результате у интерферирующих амплитуд появляется разность фаз

$$\Delta\varphi_H = \frac{2e}{\hbar c} \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{2e}{\hbar c} \int \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \frac{2e}{\hbar c} \Phi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (11.34)$$

где Φ — поток магнитного поля через петлю, Φ_0 — квант потока (§ 10.4). Появление разности фаз приводит к разрушению интерференции, т.е. к уменьшению сопротивления (*Альтшулер, Хмельницкий, Ларкин и Ли*, 1980) [79]. Итак, интерференционная поправка приводит к отрицательному магнитосопротивлению даже при отсутствии магнитных примесей (см. конец § 4.6).

Для оценки отрицательного магнитосопротивления введем время t_H . Оно определяется следующим образом. Если в формуле (11.34) в качестве характерного размера петли взять диффузионную длину $(Dt)^{1/2}$, то поток магнитного поля через петлю $\Phi \sim HDt$. Определим t_H так, чтобы в (11.34) $\Delta\varphi_H \sim 2\pi$. Это дает

$$t_H \sim \Phi_0 / HD \sim L_H^2 / D. \quad (11.35)$$

Здесь

$$L_H = (\hbar c / 2eH)^{1/2}$$

— так называемая магнитная длина (она соответствует размеру собственной функции Ландау в магнитном поле, см. § 10.2). Существенные поля определяются условием $t_H \sim \tau_\varphi$, т.е.

$$H \sim \Phi_0 / D\tau_\varphi. \quad (11.36)$$

Подставляя $D \sim lv \sim v^2\tau \sim \mu\tau/m$, $\Phi_0 \sim c\hbar/e$, получаем

$$\Omega\tau \sim \hbar/\tau_\varphi\mu \ll 1; \quad (11.37)$$

таким образом, речь идет о полях, значительно меньших, чем классически сильные поля, для которых $\Omega\tau \gg 1$.

Асимптотические формулы для проводимости получаются из формул (11.21) и (11.27) заменой τ_φ на t_H , если $t_H \ll \tau_\varphi$ (т.е. H больше значения (11.36)):

$$\sigma_d(H) - \sigma_d(0) \sim \frac{e^2}{\hbar} \begin{cases} \ln(eHD\tau_\varphi/\hbar c), & d = 2, \\ (eH/\hbar c)^{1/2}, & d = 3. \end{cases} \quad (11.38)$$

Мы уже отметили, что интерференционный эффект отрицательного магнитосопротивления проявляется в классически слабых полях $\Omega\tau \ll 1$. Помимо этой особенности имеются еще следующие: а) в трехмерном случае эффект не зависит от угла между током и полем (в двумерном случае подразумевалось, что поле направлено поперек пленки); б) эффект может сильно зависеть от температуры благодаря τ_φ (выход на асимптотику (11.38) и сама асимптотика в двумерном случае); в) благодаря тому, что разность фаз (11.34) определяется магнитным потоком, т.е. размером петли, ясно, что в одномерном случае (проволока тоньше L_φ) эффект гораздо меньше, чем в массивном образце; что касается двумерного случая (пленка тоньше L_φ), то эффект должен быть малым при поле, направленном в плоскости пленки, т.е. имеется сильная анизотропия в зависимости от ориентации поля относительно пленки.

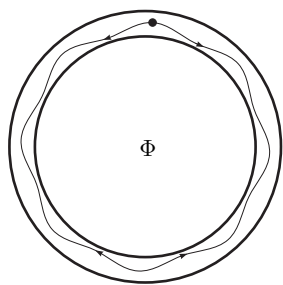


Рис. 11.6

Рассмотрим теперь сопротивление полого тонкостенного металлического цилиндра (рис. 11.6). Пусть в полости имеется магнитное поле, параллельное оси цилиндра. Оно может быть создано соленоидом, целиком находящимся в полости, так что магнитное поле в металле будет равно нулю. Будем считать, что длина свободного пробега электрона l много меньше длины окружности цилиндра L , так чтобы не происходило квантование движения электрона по окружности цилиндра. В этом случае согласно (11.34) разность фаз волн де Бройля, прошедших по окружности цилиндра по и против часовой стрелки будет равна $\Delta\varphi = 2\pi\Phi/\Phi_0$. Поэтому из-за интерференции амплитуд вероятность возвращения электрона в заданную точку будет осциллировать с периодом $\Delta\Phi = \Phi_0$. Так как поток Φ для всех траекторий, обходящих цилиндр, одинаков, то полное сопротивление будет осциллирующей функцией потока Φ с периодом $\Delta\Phi = \Phi_0$ (Альтшулер, Аронов, Спивак, 1981) [80]. Конечно, для наблюдения эффекта нужно сохранение фазовой когерентности вдоль окружности цилиндра, т.е. $L \ll L_\varphi$.

На первый взгляд это явление кажется парадоксальным. Если магнитное поле существует лишь в полости цилиндра и не проникает в металл, то как могут электроны «узнать» о его существовании? Причиной является квантовая природа электрона. Хотя электрон движется внутри металла, но фаза его волновой функции зависит от векторного потенциала, который отличен от нуля не только в полости, но и внутри металла. Можно сказать и иначе: фаза волновой функции определяется полем в полости. Такое свойство волновой функции было впервые предсказано Аароновым и Бомом [81]. Эффект осцилляций сопротивления полого цилиндра с магнитным полем был обнаружен на опыте [82, 83].

На рис. 11.7 приведен результат для лития при $T = 1,1$ К. Данные точного теоретического расчета изображены штриховой кривой.

Квантовая интерференция очень существенно зависит от спина электрона в том случае, если имеются механизмы рассеяния, приводящие к повороту электронного спина. Мы уже говорили об одном механизме такого рода — рассеянии на магнитных примесях (§ 4.6). Но даже в том случае, если магнитные примеси отсутствуют, на электронный спин оказывают влияние спин-орбитальные эффекты при обычном рассеянии на немагнитных примесях. В § 10.7, посвященном магнитному про-

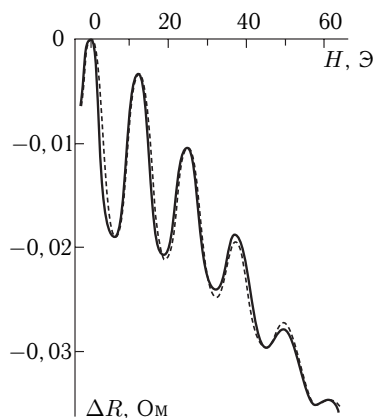


Рис. 11.7

бою, мы уже говорили о спин-орбитальном взаимодействии электрона с периодической кристаллической решеткой. Такой же эффект имеется и при взаимодействии электрона с примесью. Он дает добавку к амплитуде рассеяния, пропорциональную $[\mathbf{p} \times \mathbf{p}'] \mathbf{s} f(Z)$, где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ — импульсы электрона до и после рассеяния, $\mathbf{s}$ — оператор электронного спина, $f(Z)$ — растущая функция атомного номера Z . Во второй части мы увидим, что спин-орбитальное рассеяние приводит к некоторым интересным свойствам сверхпроводников (§ 21.4). Здесь мы покажем, что оно может существенно повлиять на интерференционную поправку в нормальном металле (Хиками, Ларкин, Нагаока, 1980) [84].

Рассмотрим интерференционную поправку в амплитуде рассеяния

$$A_1^* A_2 + A_2^* A_1 = 2 \operatorname{Re} (A_1 A_2^*).$$

Если в начальном состоянии имела волновая функция φ_σ ($\sigma = \pm$ характеризует проекцию электронного спина), а в конечном $\varphi_{\sigma'}$, то интерференционное слагаемое можно записать в виде

$$C = A_1 A_2^* = (1/2) \sum_{\sigma \sigma'} \varphi_\sigma^{(1)} \varphi_{\sigma'}^{(2)} \varphi_{\sigma'}^{(1)*} \varphi_\sigma^{(2)*} \quad (11.39)$$

(здесь взята сумма по конечным состояниям и среднее по начальным). Теперь поступим следующим образом. Будем считать, что на рис. 11.4 вместо двух возможных траекторий одной частицы изображена траектория одновременно движущихся двух частиц. Тогда выражение C может быть записано с помощью билинейных комбинаций, соответствующих заданному полному спину двух частиц и его проекции (см. [118]). Полный спин может быть равен 1 (с проекциями 1, 0, -1)

или 0. Соответствующие функции имеют вид

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= 2^{-1/2} (\varphi_+^{(1)} \varphi_-^{(2)} - \varphi_-^{(1)} \varphi_+^{(2)}), \\ \Psi_{1,1} &= \varphi_+^{(1)} \varphi_+^{(2)}, \\ \Psi_{1,-1} &= \varphi_-^{(1)} \varphi_-^{(2)}, \\ \Psi_{1,0} &= 2^{-1/2} (\varphi_+^{(1)} \varphi_-^{(2)} + \varphi_-^{(1)} \varphi_+^{(2)}).\end{aligned}\tag{11.40}$$

После простых вычислений из (11.39) находим

$$C = (1/2) \left[\sum_{m=0,\pm 1} |\Psi_{1,m}|^2 - |\Psi_0|^2 \right]. \tag{11.41}$$

При наличии спин-орбитального рассеяния с характерным временем $\tau_{s0} \ll \tau_\varphi$ состояния с полным спином 1 и с полным спином 0 ведут себя по-разному. Состояния $\Psi_{1,m}$ несут информацию об электронном спине, а поэтому затухают со временем τ_{s0} . Что касается функции Ψ_0 , то она затухает лишь со временем τ_φ . Поэтому получается

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} \sim - \int_{\tau}^{\tau_\varphi} \frac{\lambda^2 v dt}{b^{3-d} (Dt)^{d/2}} \left(\frac{3}{2} e^{-t/\tau_{s0}} - \frac{1}{2} \right). \tag{11.42}$$

Интегрируя, находим

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} \sim \lambda^2 v \begin{cases} D^{-3/2} \left[(3/2) \tau_{s0}^{-1/2} - (1/2) \tau_\varphi^{-1/2} - \tau^{-1/2} \right], & d = 3, \\ (Db)^{-1} \left[-(3/2) \ln(\tau_{s0}/\tau) + (1/2) \ln(\tau_\varphi/\tau) \right], & d = 2, \\ D^{-1/2} b^{-2} \left[-(3/2) \tau_{s0}^{1/2} + (1/2) \tau_\varphi^{1/2} \right], & d = 1. \end{cases} \tag{11.43}$$

Так как от температуры зависит лишь $\tau_\varphi \propto T^{-p}$, то, согласно этой формуле, получается, что при $\tau_{s0} \ll \tau_\varphi$ температурная зависимость сопротивления меняет знак: $\Delta\sigma$ уменьшается с повышением температуры.

Это же относится и к магнитосопротивлению. В слабых полях магнитосопротивление становится положительным. Только когда магнитное поле становится настолько сильным, что определенное формулой (11.35) характерное время $t_H < \tau_{s0}$, или

$$H > \Phi_0 / D\tau_{s0}, \tag{11.44}$$

происходит перемена знака магнитосопротивления, и оно становится отрицательным. Это наблюдалось на опыте в пленках меди [85] и магния [86].

§ 11.5. Квантовая поправка к плотности состояний и проводимости, происходящая от взаимодействия электронов

Во всем предыдущем материале мы основывались на картине электрона в самосогласованном периодическом поле, образованном ионами решетки и остальными электронами. Такая картина оказывается неверной, когда электроны сближаются на межатомные расстояния. При этом начинает сказываться непосредственное кулоновское отталкивание, которое приводит к рассеянию электронов друг на друге (§ 4.2). Однако, помимо рассеяния, кулоновское взаимодействие меняет также энергетический спектр.

Как известно, поправка первого порядка теории возмущений к энергии есть просто диагональный матричный элемент энергии взаимодействия. В § 2.2 мы рассматривали процесс рассеяния частиц при слабом взаимодействии (рис. 2.2). При этом мы не учли одну возможность, которая не соответствует истинному рассеянию, но дает поправку в энергетический спектр, а именно: электрон 1, взаимодействуя с электроном 2, переходит на его место, а электрон 2 становится на место электрона 1. Эта энергия называется обменной и равна

$$\Delta\varepsilon = - \int_{|\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k}| < p_0} g(\mathbf{k}) \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (11.45)$$

Здесь $g(\mathbf{k})$ — фурье-компонента энергии взаимодействия (кулоновское отталкивание с экранировкой на атомных расстояниях), знак минус связан с перестановкой электронов.

Вычислим $\Delta\varepsilon$ для трехмерного случая. Для простоты будем рассматривать неэкранированное кулоновское взаимодействие и $p > p_0$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &= -4\pi e^2 \int_{|\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k}| < p_0} k^{-2} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = -4\pi e^2 \hbar^2 \int_{p' < p_0} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^{-2} \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= -\frac{e^2}{\pi\hbar} \left(p_0 - \frac{p^2 - p_0^2}{2p} \ln \frac{p + p_0}{p - p_0} \right). \end{aligned}$$

Первый член является константой, он представляет собой просто перенормировку химического потенциала. Второй член в случае $|p - p_0| \ll \ll p_0$ имеет вид

$$\Delta\varepsilon = (e^2/\pi\hbar v) \xi \ln(2p_0 v/\xi). \quad (11.46)$$

Чтобы учесть экранировку, надо заменить в интеграле k^{-2} на $(k^2 + \varkappa^2)^{-1}$, где $\varkappa = r_D^{-1}$ — обратный дебаевский радиус, уже введенный в § 4.1. При этом $\Delta\varepsilon$ за вычетом константы будет выражаться формулой (11.46) с заменой $\ln(2p_0 v/\xi)$ на $\ln(2p_0/\hbar\varkappa)$ при $\hbar\varkappa \ll p_0$.

Для нас будет важно лишь то обстоятельство, что обменное взаимодействие приводит к положительной добавке к скорости квазичастиц порядка $e^2/\hbar$.

В действительности в этой оценке не учтена интерференция состояний¹⁾. Два состояния, отличающиеся по энергии на δ , будут когерентными в течение времени порядка $\hbar/\delta$. Если взаимодействие точечное (а в нашем случае оно имеет радиус действия порядка межатомных расстояний, т.е. практически не отличается от точечного), то вследствие интерференции эффективная константа взаимодействия будет увеличена, причем относительная поправка к константе взаимодействия порядка вероятности встречи частиц в одной точке за время, меньшее $\hbar/|\xi|$. Так как квазичастицы совершают диффузионное движение, то вероятность оказаться в одной точке определяется формулой (11.27) с верхним пределом $\hbar/|\xi|$,

$$\alpha_\xi = \int_{\tau}^{\hbar/|\xi|} \frac{v\lambda^2}{(Dt)^{d/2} b^{3-d}} dt. \quad (11.47)$$

Поэтому эффективная константа взаимодействия становится

$$e_{\text{эф}}^2 \sim e^2 (1 + \alpha_\xi), \quad (11.48)$$

а поправка к скорости на границе Ферми будет порядка

$$\Delta v \sim (e^2/\hbar) \alpha_\xi. \quad (11.49)$$

При любой размерности ($d = 1, 2, 3$) плотность состояний пропорциональна v^{-1} . Заменяя v на $v + \Delta v$, получаем (Альтшулер, Аронов, 1979) [87]:

$$\frac{\Delta v}{v} \sim -\frac{e^2}{\hbar v} \alpha_\xi \sim \frac{e^2}{\hbar v} \begin{cases} (\lambda/l)^{3/2} (|\xi|/\mu)^{1/2}, & d = 3, \\ -(\lambda^2/lb) \ln(\hbar/|\xi| \tau), & d = 2, \\ -(\lambda^{5/2}/l^{1/2}b^2) (\mu/|\xi|)^{1/2}, & d = 1. \end{cases} \quad (11.50)$$

Поскольку проводимость пропорциональна ν , то в ней тоже появляется добавка. Относительная добавка того же порядка, что $\Delta v/\nu$ с заменой $|\xi|$ на T . Величину $e^2/\hbar v$ при оценках можно считать единицей. Для трехмерного случая получаем

$$[\sigma(T) - \sigma(0)]/\sigma(0) \sim (\lambda/l)^{3/2} (T/\mu)^{1/2}. \quad (11.51)$$

Сравнивая с (11.25), мы видим, что квантовая добавка от взаимодействия электронов оказывается больше интерференционной добавки.

¹⁾ Приведенные ниже физическое рассуждение и оценка поправки к плотности состояний принадлежат А. Г. Аронову.

Отметим также, что квантовая добавка положительна и растет с температурой пропорционально $T^{1/2}$. Благодаря этой добавке сопротивление уменьшается с увеличением температуры даже в отсутствие магнитных примесей.

Условием наблюдения этого эффекта является $\hbar/T \gg \tau$, или

$$T \ll \hbar/\tau. \quad (11.52)$$

Это неравенство не противоречит условию (3.2), которое дает возможность ввести квазичастицы. Дело заключается в том, что в условии (3.2) подразумевается время неупругого рассеяния, связанное с размытием волнового пакета по энергиям, тогда как в формуле (11.52) стоит время упругого рассеяния на примесях, при котором энергия квазичастицы не меняется.

Из (11.50) при подстановке $\Delta\sigma/\sigma \sim \Delta\nu/\nu$ и $|\xi| \sim T$ и формул (11.30), (11.32) следует, что при $d = 2$ интерференционная поправка порядка поправки от взаимодействия электронов, а при $d = 1$ интерференционная поправка доминирует.

§ 11.6. Андерсоновская локализация. Переход металл–диэлектрик

До сих пор мы рассматривали случаи, когда квантовые поправки являются малыми. Однако в случаях $d = 2$ и $d = 1$ интерференционная поправка при понижении температуры растет вследствие роста τ_φ (или $L_\varphi = (D\tau_\varphi)^{1/2}$) и в конце концов перестает быть малой (см. (11.28)). При этом наши рассуждения теряют свою применимость, и возникает вопрос о том, что произойдет с проводимостью. Отметим, что при $d = 1$ или 2, этот вопрос возникает даже при соблюдении условия $p_0 l / \hbar \gg \gg 1$ или $l \gg \lambda$. В трехмерном случае интерференционная поправка, согласно (11.22), никогда не превышает $(\lambda/l)^2$. В этом случае уместно поставить вопрос о том, как поведет себя проводимость при нарушении условия $l/\lambda \gg 1$.

В 1958 г. Андерсоном [88] были высказаны аргументы в пользу того, что при нарушении условия $l/\lambda \gg 1$ проводимость бесконечного образца при $T = 0$ обращается в нуль, т. е. каждый электрон оказывается локализованным в определенной области проводника. Это явление получило название «андерсоновской локализации».

Впоследствии стало ясно, что в абсолютно одномерном металле, представляющем собой цепочку атомов с перекрывающимися валентными оболочками, локализация в случае $T = 0$ возникает при произвольно малой концентрации дефектов (Мотт и Туз, 1961) [89]. Следующим шагом было предсказание, что то же самое справедливо и для бесконечной проволоки конечной толщины (Таулесс, 1977) [90]. Впоследствии было строго показано, что как в первом [91], так и во втором случае [92] сопротивление экспоненциально возрастает

при увеличении длины образца. Характерным радиусом локализации в первом случае оказалась длина пробега l , а во втором случае $(b/\lambda)^{2l}$ (b — диаметр проволоки). По-видимому, экспоненциальный рост сопротивления при увеличении размеров имеет место и для металлической пленки, хотя это утверждение строго не доказано.

Происхождение андерсоновской локализации можно пояснить следующим образом. Представим себе самолет, движущийся над горами. Если самолет движется достаточно высоко, то он не встречает препятствий. По мере снижения он оказывается ниже горных вершин. Если его маршрут строго определен (одномерное движение), то он в конце концов наткнется на вершину. Если же он имеет возможность обогнуть вершину (двумерное движение), то он может снижаться до тех пор, пока не окажется ниже перевалов. После этого он будет заперт. Так обстоит дело в классической механике.

В квантовой механике частицы описываются волновой функцией, которая в принципе распространяется на бесконечное расстояние. Поэтому даже если частица летит высоко над потенциальным рельефом, то горы дают «эхо» в виде отраженных волн. При этом рассеяние на случайном потенциале примесей происходит упруго, т.е. отраженные волны соответствуют той же энергии, что и основная волна. Если рассматривается чисто одномерный проводник, то поверхность Ферми сводится к двум точкам: $p = \pm p_0$. Значит отраженные волны имеют ту же длину волны λ , что и исходная. Все эти волны между собой интерферируют, и в результате частица оказывается локализованной.

Из этого рассуждения видно, что причиной локализации является интерференция падающих и отраженных волн. Для того чтобы локализация имела место, надо полностью исключить расстройку интерференции благодаря неупругим процессам. Именно поэтому необходимо, чтобы температура равнялась нулю.

Рассмотрим интерференционные поправки к проводимости (11.21) и (11.27) при $T \rightarrow 0$. Очевидно, в этом случае $\tau_\varphi \rightarrow \infty$ и верхний предел интегралов будет просто определяться размером образца: $t_L \sim L^2/D$ (будем предполагать, что все большие размеры равны L , т.е. рассматривать куб с ребром L при $d = 3$, квадратную пленку при $d = 2$). При этом в $\Delta\sigma/\sigma$ величина L_φ заменяется на L . Очевидно, что для $d = 3$ при $L \gg l$ интерференционная поправка всегда порядка $(\lambda/l)^2$; она становится существенной лишь при $l \sim \lambda$, что в хороших металлах практически недостижимо, но может иметь место в полуметаллах и полупроводниках. Для $d = 1, 2$ поправка растет с размером образца. Найдем критический размер, при котором $\Delta\sigma/\sigma \sim 1$. Из (11.27) получаем

$$L_c = \begin{cases} l \exp(bl/\lambda^2), & d = 2, \\ l(b/\lambda)^2, & d = 1. \end{cases} \quad (11.53)$$

Как уже говорилось, для одномерной цепочки атомов и проволоки конечной толщины локализация была строго доказана и L_c совпадает с оценкой (11.53) ($d = 1$). Хотя для $d = 2, 3$ строгая теория не построена, но можно сделать весьма вероятное предположение, что, так же как и в случае $d = 1$, локализация осуществляется в тех условиях, когда $\Delta\sigma/\sigma \sim 1$. Это значит, что для металлической пленки ($d = 2$) локализация имеет место при сколь угодно малой концентрации примесей и радиус локализации выражается формулой (11.53) ($d = 2$), а для трехмерного металла локализация имеет место лишь для $l \sim \lambda$.

Если температура не слишком низка, то интерференционные эффекты дают лишь малую поправку к проводимости; она была рассмотрена в § 11.3, 11.4. Теорию, изучающую эту поправку, иногда называют теорией «слабой локализации», а саму поправку — не «интерференционной», а «локализационной». Но здесь нас интересует случай сильной локализации, т. е., строго говоря, $T = 0$.

Рассмотрим величину, обратную полному сопротивлению, для образцов с $d = 1, 2, 3$, у которых все большие размеры одинаковы; эта величина называется «кондактансом»¹⁾. Поведение кондактанса при увеличении размеров может быть понято на основе гипотезы масштабной инвариантности (Абрахамс, Андерсон, Личардделло и Рамакришнан, 1979) [93], аналогичной той, которая применяется в теории фазовых переходов 2-го рода (см. приложение II). Согласно этой гипотезе кондактанс G является единственной величиной, определяющей поведение системы при изменении ее размеров. Это условие записывается в следующем виде:

$$G(qL) = f[q, G(L)]. \quad (11.54)$$

Соотношение (11.54) можно переписать в дифференциальной форме. Положим $q = 1 + \alpha$, где $\alpha \ll 1$. В нулевом приближении имеем

$$G(L) = f[1, G(L)].$$

В первом порядке по α получаем

$$\alpha LG'(L) = \alpha(\partial f/\partial q)_{q=1}.$$

Разделим это равенство на G , и функцию $(\partial f/\partial q)_{q=1}/G$ обозначим через $\beta(G)$. После этого имеем

$$\partial \ln G / \partial \ln L = \beta(G). \quad (11.55)$$

Теперь рассмотрим поведение функции $\beta(G)$ (ее называют функцией Гелл-Манна и Лоу). В случае, когда G велико, применима обычная

¹⁾ Conductance — в отличие от conductivity, проводимости. Часто кондактансом называют безразмерную величину G/G_0 , где $G_0 = e^2/\pi^2\hbar$ (см. ниже).

теория проводимости. При этом

$$G = \sigma \begin{cases} S_{\perp}^2/L = L, & d = 3, \\ bL_{\perp}/L = b, & d = 2, \\ b^2/L, & d = 1, \end{cases} \quad (11.56)$$

где $S_{\perp}^2$ — поперечное сечение образца. Согласно формуле (11.55) в нулевом приближении

$$\beta(G) \approx d - 2. \quad (11.57)$$

Полученные ранее интерференционные поправки (11.21) и (11.27) могут быть использованы для получения следующего приближения функции $\beta(G)$ при больших G .

Для $d = 3$ из (11.21) получаем

$$\ln G \approx \ln(\sigma L) + \Delta\sigma/\sigma \approx \ln(\sigma_1 L) + \lambda^2/lL,$$

где $\sigma_1 = \sigma + \Delta\sigma$ ($L = \infty$). Отсюда следует

$$\beta(G) = \partial \ln G / \partial \ln L \approx 1 - \lambda^2/lL \approx 1 - \lambda^2\sigma/lG = 1 - \alpha_3 G_0/G,$$

где

$$G_0 = e^2/\pi^2\hbar, \quad (11.58)$$

а $\alpha_3 \sim 1$ (удобно ввести единую константу G_0 для всех размерностей).

Для $d = 2$ из (11.27) находим

$$\ln G = \ln(\sigma b) + \Delta\sigma/\sigma = \ln(\sigma b) - (\lambda^2/bl) \ln(L/l).$$

Отсюда имеем $\beta(G) = -\lambda^2/bl$. Но, согласно идее масштабной инвариантности, $\beta(G)$ может зависеть только от G . В нулевом порядке

$$G = b\sigma = (e^2/\hbar) bl/\lambda^2.$$

Ввиду этого с нужной точностью можно написать

$$\beta(G) = -\alpha_2 G_0/G,$$

где $\alpha_2 \sim 1$.

Наконец, для $d = 1$ из (11.27) получаем

$$\ln G \approx \ln(\sigma b^2/L) + \Delta\sigma/\sigma \approx \ln(\sigma b^2/L) + \lambda^2 L/b^2 l.$$

Отсюда следует

$$\beta(G) \approx -1 - \alpha_1 G_0/G.$$

Итак, мы получили

$$\beta(G) \approx d - 2 - \alpha_d G_0/G, \quad (11.59)$$

где $\alpha_d \sim 1$.

Малые G означают локализацию. Поэтому асимптотику при малых G можно получить на основании предположения, что

$$G \sim G_0 \exp(-L/L_c) \quad (11.60)$$

(согласно формулам (11.58) и (11.59) $G_0 = e^2/\pi^2\hbar$ представляет собой естественный масштаб для G). Из (11.60) находим

$$\beta(G) \approx \ln(G/G_0). \quad (11.61)$$

На основании полученных асимптотических формул для больших и малых G можно предположить зависимость $\beta(\ln G)$, изображенную на рис. 11.8. Видно, что кривые имеют существенно различную

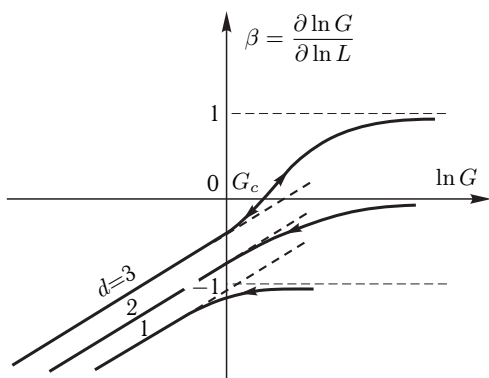


Рис. 11.8

форму для разных размерностей. Для $d = 1, 2$ функция $\beta(G)$ всегда отрицательна. Отсюда следует, что с увеличением размеров G всегда падает, т. е. имеется локализация.

В трехмерном случае дело обстоит иначе. Если мы начинаем с малого G , то β отрицательно, и G падает с увеличением размеров. Если же мы возьмем G справа от точки пересечения $G = G_c$, то β положительно, и G растет с увеличением размеров, приближаясь к обычной зависимости $G \propto L$.

В самой точке $G = G_c$ (очевидно, $G_c \sim G_0$) $\beta = 0$, и, согласно уравнению (11.55), G не зависит от размеров. Ввиду этого точка G_c называется фиксированной точкой. Так как небольшое отклонение от фиксированной точки приводит к тому, что G начинает меняться с изменением размеров, т. е. уходить от G_c , то G_c называется неустойчивой фиксированной точкой.

Сделаем простейшее предположение, что в окрестности G_c

$$\beta(G) \approx \gamma(\ln G - \ln G_c) \approx \gamma(G/G_c - 1). \quad (11.62)$$

Предположим начальное условие: $G = G^{(0)}$ при $L = L_0$ ($G^{(0)}$ близко к G_c). В этом случае

$$G \approx G_c (G^{(0)} / G_c)^{(L/L_0)^\gamma}. \quad (11.63)$$

Эта формула отражает изложенные выше тенденции: если $G^{(0)} > G_c$, то G увеличивается с L , если $G^{(0)} < G_c$, то G уменьшается с L и, наконец, если $G^{(0)} = G_c$, то G не меняется при изменении L .

С помощью формулы (11.63) можно найти физические зависимости величин в окрестности порога локализации. Разумно предположить, что при размерах порядка длины пробега l все зависимости являются простыми, т. е. на этих размерах

$$\sigma \sim e^2 p_0^2 l / \hbar^3, \quad G = \sigma L \sim e^2 p_0^2 l^2 / \hbar^3 \sim (e^2 / \hbar) (l / \lambda)^2.$$

Поэтому в (11.63) мы возьмем $L_0 \sim l$.

Предположим, что свойства металла могут изменяться путем механических воздействий или изменения состава. Будем описывать эти изменения переменным параметром x . Это может быть относительная деформация или атомная концентрация примеси. В результате может меняться p_0 или l . Можно предположить, что $G^{(0)}$ не имеет особенности по этому параметру при $G^{(0)} = G_c$, т. е. можно написать

$$G^{(0)} = G_c (1 + x).$$

Подставив это в формулу (11.63) при $L_0 = l$, имеем

$$G = G_c (1 + x)^{(L/l)^\gamma} \approx G_c \exp [x (L/l)^\gamma]. \quad (11.64)$$

Последнее преобразование годится лишь в том случае, когда $x \ll 1$, $L/l \gg 1$.

Если $x < 0$, то при увеличении L происходит экспоненциальное падение G . Характерная длина, или радиус локализации, определяется из условия, что показатель экспоненты в (11.64) по абсолютной величине порядка единицы. Следовательно,

$$L_c \sim l |x|^{-1/\gamma}, \quad x < 0. \quad (11.65)$$

Если $x > 0$, то при увеличении размеров $G \rightarrow \infty$. Это может продолжаться лишь до тех пор, пока $G \sim G_c \sim G_0$. Затем происходит сшивка с обычным законом Ома, т. е. $G = \sigma L$, где $\sigma = \text{const}$. Таким образом, получаем

$$\sigma \sim G_0 / L_c \sim (G_0 / l) x^{1/\gamma}, \quad x > 0. \quad (11.66)$$

Итак, оказывается, что проводимость убывает по степенному закону при приближении к порогу локализации. С другой стороны, от порога вещество является диэлектриком, причем радиус локализации бесконечно растет по степенному закону с тем же показателем γ^{-1} . Экспериментальные исследования (например, [94]) подтверждают эти

заклучения, причем $\gamma = 0,6 \pm 0,1$ (радиус локализации может быть определен из диэлектрической проницаемости: $\varepsilon_0 \propto L_c^2$).

Когда речь шла о локализации, то, строго говоря, предполагалось, что $T = 0$ и проводимость измеряется на нулевой частоте. На самом деле первое условие невыполнимо, а второе весьма затрудняет эксперимент. Ввиду этого естественно задаться вопросом: каковы пределы применимости полученных выше формул? Нетрудно понять, что для того, чтобы заметить локализацию, необходимо выполнение неравенств

$$L_c \ll L \ll L_\varphi, L_\omega, \quad (11.67)$$

т. е. во всяком случае

$$L_c \ll L_\varphi, L_\omega. \quad (11.68)$$

Однако практически выполнить условия (11.67) не удастся. В металлах можно добиться того, чтобы L было меньше L_φ , но в них не выполняются условия сильной локализации. В полупроводниках для выполнения условий (11.67) необходимо либо брать очень малые образцы, что очень ухудшает точность измерений, либо создать фантастически низкие температуры. Ввиду этого эксперименты ставятся на образцах, у которых $L \gg L_\varphi$; измерения проводятся на конечной частоте при разных температурах и результаты экстраполируются к $T = 0$ (либо на нулевой частоте, но при $T \neq 0$). Именно так были проверены формулы (11.65) и (11.66) [94].

Однако такая процедура вызывает большие сомнения. Не исключено, что при переходе от $L \gg L_\varphi$ к $L < L_\varphi$ поведение вещества резко меняется и экстраполяция является незаконной. Для таких подозрений имеются следующие основания. В случае чисто одномерной модели металла (цепочка атомов) многие величины могут быть вычислены до конца, и при этом выясняется, что проводимость цепочки конечной длины при $T = 0$, $\omega = 0$ является «несамоусредняющейся» величиной, т. е. ее средняя относительная флуктуация не падает, а растет с длиной [95]. Можно сказать и иначе. Вероятность флуктуации проводимости не описывается обычным законом Гаусса, а имеет гораздо более широкую функцию распределения, при которой $\overline{\sigma^2} \neq (\overline{\sigma})^2$, $\rho = \overline{\sigma}^{-1}$ отличается от $(\overline{\sigma})^{-1}$, и т. д. Причиной является то, что усреднение по «реализациям случайного потенциала», т. е. по расположению примесей, имеет совсем другой характер, чем термодинамическое усреднение. Практически отсюда следует, что измерения на разных образцах, пусть даже приготовленных в одинаковых условиях, должны дать весьма различные результаты.

Недавно было продемонстрировано [293] (см. также § 11.7), что аналогичная ситуация имеет место при любой размерности. Однако таково положение лишь для длин, меньших чем L_φ . При $L \gg L_\varphi$ относительные флуктуации убывают с размерами, т. е. восстанавливается самоусредняемость. Именно поэтому можно подозревать, что экстраполяция через $L = L_\varphi$ незаконна.

С другой стороны, если проводимость — несомаусредняющаяся величина, то все рассуждения, основывающиеся на гипотезе масштабной инвариантности, теряют смысл. Ввиду этого не исключено, что они относятся именно к тем величинам, которые получаются экстраполяцией из области $L \gg L_\varphi$. В пользу этой возможности говорит соответствие формул (11.65), (11.66) с экспериментом [94].

При конечной температуре, или частоте, строгая локализация не имеет места. В образцах больших размеров выполняется закон Ома, и относительные флуктуации проводимости уменьшаются с увеличением размеров. При расчетах можно сразу считать образец бесконечным. Конечно, в том случае, когда квантовая поправка становится большой (для $d = 1$ или 2 это соответствует $L_\varphi \gtrsim L_c$, а для $d = 3$ $l \lesssim \lambda$), расчет проводимости сильно затрудняется.

В настоящее время имеются лишь некоторые результаты для одномерного металла, т. е. атомарной цепочки (см. [95]), и для квазиодномерного металла, т. е. совокупности цепочек с малой вероятностью перескока. Для трехмерного металла известен экспериментальный результат [96], что в металлических стеклах при высоких температурах, когда длина пробега становится порядка $\lambda = \hbar/p_0$, изменение сопротивления отклоняется от закона $\rho \propto T$ и выходит на насыщение.

До сих пор мы рассматривали лишь рассеяние электронов на примесях, а их взаимодействие друг с другом предполагалось малым и определяло лишь τ_φ , причем считалось $\tau \ll \tau_\varphi$. Это справедливо при низких температурах и для достаточно неупорядоченных металлов. Возьмем теперь другой предельный случай, когда металл чистый, и основную роль играет взаимодействие электронов друг с другом. В этом случае тоже может произойти переход металл–диэлектрик.

Рассмотрим четный металл и допустим, что благодаря изменению какого-либо внешнего параметра, например давления, перекрытие зон уменьшается. Электроны и дырки могут оставаться «свободными» лишь до тех пор, пока их кинетическая энергия больше или порядка потенциальной энергии их кулоновского взаимодействия, т. е.

$$p_0^2/m^* \gtrsim e^2/\varepsilon_0 \bar{r},$$

где ε_0 — диэлектрическая проницаемость «среды», т. е. та ее часть, которая не связана со свободными носителями. Это условие дает

$$e^2/\varepsilon_0 \hbar v \lesssim 1, \quad (11.69)$$

где $v = p_0/m^*$ (напомним, что $p_0 = \hbar(3\pi^2 n_e)^{1/3}$). В том случае, если это условие нарушается, электроны и дырки могут объединиться в нейтральные комплексы — экситоны Мотта–Ванье. При этом возникает «экситонная фаза», в которой либо нет свободных носителей, т. е. это диэлектрик, либо их число сильно уменьшено. В последнем случае может иметь место целая серия экситонных переходов. Экситонные переходы могут быть 1-го или 2-го рода.

Возникает вопрос: почему экситонный переход не происходит в полуметаллах, где число электронов и дырок мало (порядка 10^{-5} электронов/атом у висмута). Связано это с тем, что у полуметаллов очень мала эффективная масса (у Bi $m^* \sim 10^{-2}m$), так что $v = p_0/m^* \sim 10^8$ см/с, как в обычном металле ¹⁾. Кроме того, у них велика диэлектрическая проницаемость (у Bi $\epsilon_0 \sim 100$), так что условие (11.69) выполняется в них с большим запасом.

Первоначально считалось, что при нарушении условия (11.69) происходит переход 1-го рода в диэлектрическую фазу; он был назван переходом Мотта [98]. Отсюда возникло представление о «минимальной металлической проводимости». Считалось, что при уменьшении проводимости либо за счет числа носителей, либо за счет длины пробега она, достигнув минимального значения, скачком обращается в нуль. Минимальное значение получалось из условия (11.69), т. е. $e^2/\epsilon_0 \hbar v \sim 1$, и предположения, что $l \sim \lambda \sim \hbar/p_0$. Это давало

$$\sigma \sim n_e e^2 l / p_0 \sim p_0 e^2 / \hbar^2 \sim e^2 / \hbar r_B^*,$$

где $r_B^* = \hbar^2 \epsilon_0 / m^* e^2$ — эффективный боровский радиус.

В действительности рассеяние электронов на примесях препятствует экситонному переходу. Поэтому представление о том, что именно проводимость регулирует переход металл–диэлектрик не имеет никаких оснований. На опыте в чистых веществах наблюдались экситонные переходы, а в сильно неупорядоченных легированных полупроводниках — переходы металл–диэлектрик, связанные с андерсоновской локализацией, о которых речь шла выше. При таких переходах проводимость постепенно уменьшается до нуля [94].

§ 11.7. Мезоскопика

В предыдущем параграфе отмечалось, что свойства малых образцов с размерами $L \ll L_\varphi$ оказываются непривычными в том смысле, что их кинетические характеристики не являются самоусредняющимися величинами. Распределение вероятности проводимости и других кинетических характеристик таких образцов не является гауссовским с относительной шириной, пропорциональной $N^{-1/2}$, где N — число частиц или объем системы, а гораздо шире. Отсюда, прежде всего, следует, что свойства образцов, приготовленных стандартным способом, в действительности будут различаться. Это касается не микроскопических объектов, состоящих из нескольких атомов или молекул, а образцов, содержащих много атомов, от которых можно было бы ожидать вполне макроскопического поведения. Область физики металлов, изучающая такие объекты, получила название «мезоскопика». Оценки

¹⁾ Энергетический спектр носителей в полуметаллах в действительности близок к линейному $\epsilon = v p$, где $v \sim 10^8$ см/с [97].

показывают, что при $T < 0,1$ К мезоскопические эффекты могут наблюдаться в образцах с размерами меньше 10^{-4} см.

На самом деле приготовление таких образцов и подвод контактов от источника тока не могут быть сделаны стандартным способом и поэтому на первый взгляд вся проблема кажется чисто академической. Однако в действительности мезоскопические эффекты сказываются и в необычном поведении одного образца при изменении внешних параметров. Связано это с тем, что мезоскопика является следствием квантовой интерференции, которая характерна для заданной конфигурации рассеивателей. В отличие от интерференционных поправок, рассмотренных в § 11.3–11.5, мезоскопические эффекты исчезают при усреднении по конфигурациям примеси. Однако они в той же степени зависят от внешних параметров: магнитного поля, температуры.

Приведем простой пример. В § 11.4 было показано, что сопротивление полого цилиндра, помещенного в продольное магнитное поле, периодически зависит от поля, причем период характеризуется тем, что поток магнитного поля меняется на один квант потока Φ_0 . Такое поведение связано с траекториями, изображенными на рис. 11.6, т.е. обходящими полость цилиндра и возвращающимися в ту же точку. Интерференция возникает между амплитудами прохождения таких траекторий в прямую и в обратную стороны.

Рассмотрим теперь траектории другого типа. Пусть одна траектория выходит из какой-то точки A и приходит в другую точку B . Вторая траектория выходит из той же точки A и приходит в точку B , однако при этом огибает полость с другой стороны. Разность фаз между этими траекториями равна

$$\hbar^{-1} \oint \mathbf{p} d\mathbf{l} - \frac{e}{\hbar c} \oint \mathbf{A} d\mathbf{l}, \quad (11.70)$$

где интеграл берется по замкнутому контуру, образованному двумя траекториями. Второе слагаемое после преобразования превращается в $\pi\Phi/\Phi_0$, где $\Phi = \int \mathbf{B} d\mathbf{S}$ — поток магнитного поля через полость. При изменении Φ на $2\Phi_0$ это слагаемое меняется на 2π . Следовательно, можно ожидать осцилляций с периодом не Φ_0 , а $2\Phi_0$.

Тут, однако, следует вспомнить о первом слагаемом в (11.70), которое в противоположность случаю, рассмотренному в § 11.4, не сокращается в интерференционном члене. Усреднение $\exp(i\hbar^{-1} \oint \mathbf{p} d\mathbf{l})$ по разным траекториям, или, что то же самое, по разным конфигурациям рассеивателей, обращает соответствующий член в нуль. Это и имеет место, когда эксперимент производится на длинном тонкостенном цилиндре. Если, однако, вместо цилиндра взять тонкое колечко, то такое усреднение не происходит, и это значит, что наряду с осцилляциями с периодом Φ_0 должны наблюдаться осцилляции с периодом $2\Phi_0$. Это соответствует опытными данным [294, 295].

Помимо осцилляционного эффекта, связанного с интерференцией особых траекторий, в вероятности рассеяния имеются и другие интерференционные члены, которые сильно зависят от поля и приводят к беспорядочным флуктуациям на кривой магнитосопротивления. В противоположность тепловому «шуму» эти флуктуации полностью воспроизводимы для данного образца, ибо определяются только конкретной конфигурацией рассеивателей, которая задана. Иногда их называют «травой» на регулярной (усредненной) кривой.

Мы рассмотрим эту «траву» на другом примере, являющемся более важным в практическом отношении. Найдем флуктуации вольт-амперной характеристики проволоки с размерами

$$l \ll b \ll L \ll L_\varphi \quad (11.71)$$

(l — длина пробега, b — диаметр, L — длина проволоки). Они могут быть оценены из следующих соображений (Ларкин, Хмельницкий, 1986) [296]. Интерференция возможна лишь между электронами с близкими энергиями. Допустимый интервал определяется из условия, чтобы разность фаз была порядка единицы, т. е.

$$\hbar^{-1}[p(\varepsilon + \delta\varepsilon) - p(\varepsilon)] S \sim \hbar^{-1} S(dp/d\varepsilon) \delta\varepsilon \sim (\hbar v)^{-1} S \delta\varepsilon \sim 1,$$

где S — полная длина пути, проходимого частицей. В случае диффузионного движения

$$S = vt \sim vL^2/D,$$

где D — коэффициент диффузии. Следовательно,

$$\delta\varepsilon \sim \hbar v/S \sim \hbar D/L^2. \quad (11.72)$$

Масштаб флуктуаций вольт-амперной характеристики по оси V определяется соотношением $eV_c \sim \delta\varepsilon$, или

$$V_c \sim \hbar D/eL^2. \quad (11.73)$$

Амплитуда флуктуаций по току определяется следующим образом. В токе участвуют электроны, находящиеся в области порядка eV вблизи границы Ферми, где V — приложенная разность потенциалов. Если $V \gg V_c$, то интерференция возможна лишь между электронами в пределах интервалов eV_c , а следовательно, область eV распадается на eV/eV_c независимых интервалов. Интерференционная добавка к току от одного из таких интервалов имеет порядок

$$\Delta \left(\frac{V_c}{R} \right) = \Delta \left(\frac{V_c}{L/\sigma b^2} \right) = \frac{V_c}{L} b^2 \Delta\sigma \sim \frac{V_c e^2}{\hbar}.$$

(Мы здесь подставили формулу (11.28) для $d = 1$: $\Delta\sigma_d = \Delta\sigma b^2 \sim \sim (e^2/\hbar) L$.) Но разные интервалы порядка V_c между собой нескоррелированы, и соответствующие интерференционные добавки к току могут иметь разный знак. Полный эффект можно определить тем же

методом, как и расстояние, проходимое частицей при диффузионном движении:

$$x \sim (Dt)^{1/2} \sim (lvt)^{1/2} = (lS)^{1/2},$$

где l — длина пробега, проходимая в одном акте (она соответствует V_c), а $S = vt$ — полная длина ломаного пути (она соответствует V). Итак, получаем амплитуду флуктуации по оси I :

$$I_c \sim \frac{e^2}{\hbar} (VV_c)^{1/2}. \quad (11.74)$$

Эти флуктуации накладываются в виде нерегулярной волнистой линии на регулярную кривую, соответствующую закону Ома: $I = V/R_0$. Отметим, что отношение I_c/V_c имеет порядок

$$\frac{I_c}{V_c} \sim \frac{e^2}{\hbar} \frac{(VV_c)^{1/2}}{V_c} \sim \frac{e^2}{\hbar} \left(\frac{V}{V_c} \right)^{1/2},$$

т. е. растёт с увеличением V . В случае $I_c/V_c > R_0^{-1}$, т. е.

$$V > \left(\hbar/e^2 R_0 \right)^2 V_c,$$

на вольт-амперной характеристике появляются участки с отрицательным наклоном (N — образные участки). Это может привести к образованию подвижных доменов с разным электрическим полем (эффект Ганна).

Приведенные примеры — не единственные проявления мезоскопии. Есть и целый ряд других эффектов. Все эти эффекты имеют тенденцию исчезать при повышении температуры. Связано это не только с уменьшением L_φ , но и с изменением распределения электронов по энергиям [297]. Если температура превышает $\delta\varepsilon$ (11.72), то, так же как и в случае разности потенциалов, весь интервал T распадается на независимые интервалы, в которых интерференционные добавки могут иметь разный знак. Аналогично предыдущему, суммарный эффект пропорционален $(T\delta\varepsilon)^{1/2}$. Среднее значение получается делением на интервал T , т. е. имеет порядок $(\delta\varepsilon/T)^{1/2}$ и убывает с температурой, как $T^{1/2}$. Именно такое поведение и наблюдается на опыте. Условие $\delta\varepsilon/T \gtrsim 1$ дает

$$L \lesssim L_T \sim (\hbar D/T)^{1/2}. \quad (11.75)$$

Итак, для наблюдения мезоскопических эффектов необходимо выполнение не только условия $L \lesssim L_\varphi$, но и также $L \lesssim L_T$. Отметим, что температурное размытие ферми-распределения фактически эквивалентно усреднению по конфигурациям рассеивателей, а потому не сказывается на эффектах, рассмотренных в § 11.3–11.5.

Как уже говорилось, мезоскопические эффекты реально наблюдаются в микронных образцах при температурах ниже 0,1 К и поэтому на первый взгляд кажутся экзотическими и не имеющими отношения

к практике. Однако надо учесть, что совершенствование компьютерной техники идет по пути миниатюризации. Для подавления тепловых флуктуации и уменьшения тепловыделения применяются все более низкие температуры. Мезоскопика накладывает естественные ограничения на эти тенденции, ибо показывает, что дойдя до определенных пределов, нельзя не только производить стандартные элементы, но даже рассчитывать на то, что путем отбора можно найти такие, которые обладают нужными свойствами (например, гладкой вольт-амперной характеристикой).

ПОГЛОЩЕНИЕ ЗВУКА В МЕТАЛЛАХ

§ 12.1. Коэффициент поглощения в отсутствие магнитного поля (низкие частоты)

Поглощение звука в металлах зависит от величины $\omega\tau$, а также от отношения длины волны к длине пробега (λ/l) или (в случае $\lambda/l \ll 1$) от отношения λ/δ , где δ — глубина скин-слоя при частоте, равной частоте звука. Если $\omega\tau \gg 1$, то можно говорить об испускании и поглощении отдельных квантов. В случае $\omega\tau \ll 1$ звуковая волна играет роль внешнего поля, действующего на электроны. Рассмотрим сначала именно этот случай (Ахиезер, Каганов, Любарский, 1957) [99].

До сих пор мы изучали свойства электронов в покоящемся кристалле. Поскольку при прохождении звуковой волны кристаллическая решетка колеблется, то необходимо учесть, что энергетический спектр электронов задан в системе отсчета, связанной с кристаллической решеткой. Именно эту систему отсчета мы и будем использовать в последующих рассуждениях.

Энергия электронов в поле звуковой волны приобретает добавку:

$$\varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \lambda_{ik}(\mathbf{p}) u_{ik}(\mathbf{r}, t), \quad (12.1)$$

где

$$u_{ik} = (1/2) (\partial u_i / \partial x_k + \partial u_k / \partial x_i) \quad (12.2)$$

— тензор деформации, $\mathbf{u}$ — вектор смещения среды в точке $\mathbf{r}$, λ_{ik} — тензор, называемый деформационным потенциалом. В принципе ускорение электронов должно было бы дать также инерционный член $m\mathbf{v} \partial \mathbf{u} / \partial t$ (результат разложения по $\mathbf{u}$ энергии $m(\mathbf{v} + \partial \mathbf{u} / \partial t)^2 / 2$). Однако порядок величины этого члена есть $mvsk$ (s — скорость звука, k — волновой вектор). В то же время второй член в (12.1) имеет

порядок $u_{ik} \sim mv^2 u_{ik}$ ($\lambda_{ik} \sim \mu$) и, следовательно, в $v/s \sim 10^3$ раз больше, чем инерционный член.

Кинетическое уравнение имеет вид

$$\partial f / \partial t + \mathbf{v} \partial f / \partial \mathbf{r} + \dot{\mathbf{p}} \partial f / \partial \mathbf{p} = I(f). \quad (12.3)$$

Поскольку в наиболее интересных случаях, которые будут рассмотрены в данной главе, столкновения играют малую роль, то мы используем для $I(f)$ приближение времени столкновений, т. е.

$$I(f) = -[f - f_0(\varepsilon)]/\tau.$$

Однако в данном случае f_0 — равновесная функция в системе отсчета, связанной с кристаллической решеткой. Это значит, что энергия в ней выражается формулой (12.1) и, кроме того, перенормируется химический потенциал. Итак,

$$f_0(\varepsilon) \approx f_0(\varepsilon_0) + (\partial f_0 / \partial \varepsilon) (\lambda_{ik} u_{ik} - \Delta\mu).$$

Добавка $\Delta\mu$ определяется из условия сохранения электронной плотности. Дело в том, что, как уже говорилось ранее, любой заряд в металле экранируется на атомных расстояниях. Так как длина волны звука предполагается значительно большей межатомных расстояний, то объемный заряд следует считать равным нулю. Иными словами, электронная плотность не должна отличаться от равновесной в отсутствие звука. Отсюда следует, что

$$\int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} (\lambda_{ik} u_{ik} - \Delta\mu) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = - \int (\lambda_{ik} u_{ik} - \Delta\mu) \frac{dS}{v(2\pi\hbar)^3} = 0,$$

или

$$\Delta\mu = \bar{\lambda}_{ik} u_{ik},$$

где $\bar{\lambda}_{ik}$ означает среднее по ферми-поверхности. Следовательно,

$$f_0(\varepsilon) = f_0(\varepsilon_0) + (\partial f_0 / \partial \varepsilon) \Lambda_{ik} u_{ik}, \quad (12.4)$$

где $\Lambda_{ik} = \lambda_{ik} - \bar{\lambda}_{ik}$.

Входящая в кинетическое уравнение производная $\dot{\mathbf{p}}$ равна

$$\dot{\mathbf{p}} = -\partial \varepsilon / \partial \mathbf{r} + e \mathbf{E}.$$

Первый член связан с изменением энергетического спектра в поле звуковой волны, а второй — с возникающими при прохождении звука электрическими полями. Ввиду отсутствия объемного заряда поле $\mathbf{E}$ может быть только вихревого происхождения, т. е. $\text{div } \mathbf{E} = 0$. Следовательно, $\mathbf{E}$ определяется из уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{H} / \partial t, \quad \text{rot } \mathbf{H} = (4\pi/c) \mathbf{j}.$$

Комбинируя эти уравнения и пользуясь условием $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, получаем

$$\nabla^2 \mathbf{E} = (4\pi/c^2) \partial \mathbf{j} / \partial t. \quad (12.5)$$

Кинетическое уравнение (12.3) мы будем решать тем же методом, что и раньше. При подстановке $f = f_0(\varepsilon) - (\partial f_0 / \partial \varepsilon) \psi$ получаем

$$\partial \psi / \partial t + \mathbf{v} \partial \psi / \partial \mathbf{r} + \psi / \tau = \Lambda_{ik} \dot{u}_{ik} + e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (12.6)$$

Полная процедура решения задачи заключается в следующем. Кинетическое уравнение дает ψ как функцию $\mathbf{E}$. Отсюда находим $\mathbf{j}$ как функцию $\mathbf{E}$ и, подставляя его в уравнение (12.5), получаем уравнение для определения электрического поля.

В действительности можно легко показать, что вихревое электрическое поле играет существенную роль в поглощении звука лишь при условии $kl \gg 1$, $k\delta \ll 1$, где

$$\delta \sim (c\rho_0/4\pi\omega n_e e^2)^{1/3}$$

— глубина скин-слоя в аномальном пределе при частоте ω , и дает в этом случае вклад в поглощение звука того же порядка, какой получается без учета члена с $\mathbf{E}$ в уравнении (12.6). Все выражение будет зависеть от тензора Λ_{ik} — весьма сложного для анизотропного металла. Ввиду этого реальный смысл имеет лишь определение частотной зависимости коэффициента поглощения и порядка его величины (так же, как для электрического сопротивления в гл. 4). Но для решения такой задачи можно обойтись без учета члена с $\mathbf{E}$ в (12.6), ибо он ни при каких условиях не меняет порядок величины эффекта.

Предположим, что

$$u_{ik} = u_{ik}^0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t),$$

и будем искать функцию ψ , пропорциональную той же экспоненте. Подставляя в уравнение (12.6) (с $\mathbf{E} = 0$), находим ¹⁾

$$\psi = \frac{-i\omega \Lambda_{ik} u_{ik}}{\tau^{-1} + i(\mathbf{v}\mathbf{k} - \omega)}. \quad (12.7)$$

Коэффициент поглощения звука может быть выражен непосредственно через ψ . Рассмотрим рис. 12.1. Пусть I — поток энергии, падающий на 1 см^2 поверхности, Q — количество энергии, поглощенной в 1 см^3 за 1 секунду. В этом случае объем, изображенный на рис. 12.1, будет поглощать за 1 секунду энергию Qdx или часть

¹⁾ Неравновесная добавка ψ приводит к изменению электронной плотности, пропорциональному ψ . Однако нетрудно увидеть, что это изменение несущественно. Действительно, в случае $\tau^{-1} \gg \mathbf{k}\mathbf{v}$ $\bar{\psi} = 0$ вследствие $\bar{\Lambda}_{ik} = 0$. Если же $\mathbf{k}\mathbf{v} \gg \tau^{-1}$, то $\bar{\psi} \sim \Lambda_{ik} u_{ik} \omega / kv \sim \Lambda_{ik} u_{ik} s / v$. Возникающая из-за этого поправка к коэффициенту поглощения имеет порядок $s/v \ll 1$ по отношению к основному эффекту.

$(Q/I)dx$ от падающей энергии. Обозначая Q/I через Γ , мы можем записать уравнение для потока:

$$dI = -\Gamma I dx,$$

откуда получается

$$I = I_0 e^{-\Gamma x}.$$

Таким образом, Γ — это коэффициент поглощения. Согласно предыдущему

$$\Gamma = Q/I. \quad (12.8)$$

При гармонических колебаниях средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной энергии. Отсюда для средней полной энергии имеем

$$\bar{E} = \bar{K} + \bar{U} = 2\bar{K}.$$

Кинетическая энергия единицы объема есть $\rho v^2/2$ ($\rho = MN/V$ — плотность). При распространении волны $v = v_0 \cos(kx - \omega t)$. Отсюда имеем

$$\bar{E} = \rho \bar{v}^2 = (1/2) \rho v_0^2.$$

Но $v_0 = u_0 \omega$, где u_0 — амплитуда смещения. Таким образом, полная средняя энергия единицы объема равна $\rho u_0^2 \omega^2/2$. Умножая на скорость звука s , находим поток энергии

$$I = \rho u_0^2 \omega^2 s/2. \quad (12.9)$$

Теперь рассмотрим Q . Это энергия, диссипированная в единице объема за 1 секунду. Следовательно, имеем

$$Q = 2 \int \dot{\epsilon} f \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi \hbar)^3}. \quad (12.10)$$

Это выражение надо усреднить по времени. Если мы подставим сюда $f = f_0(\epsilon) - (\partial f_0 / \partial \epsilon) \psi$, то комбинация $f_0(\epsilon) \dot{\epsilon}$ есть производная по времени от некоторой функции ϵ ; поэтому при усреднении по времени получается нуль. Следовательно,

$$Q = -2 \int \dot{\epsilon} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \psi \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi \hbar)^3}. \quad (12.11)$$

Кинетическое уравнение (12.6) можно записать в виде

$$d\psi/dt - \dot{\epsilon} = -\psi/\tau.$$

Выражая отсюда $\dot{\epsilon}$ через ψ , подставляя в (12.11) и вспоминая, что производная по времени при усреднении дает нуль, находим

$$Q = -\frac{2}{\tau} \int \psi^2 \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi \hbar)^3}. \quad (12.12)$$

Остается выражение, квадратичное по ψ . Ввиду этого мы не можем пользоваться комплексной формой для ψ , а должны взять лишь действительную часть. Пусть

$$\psi = A \exp[i(kx - \omega t + \varphi)],$$

где A — действительно. Тогда

$$\operatorname{Re} \psi = A \cos(kx - \omega t + \varphi), \quad \overline{(\operatorname{Re} \psi)^2} = A^2/2,$$

или $|\psi|^2/2$. Таким образом, мы имеем

$$Q = - \int \frac{|\psi|^2}{\tau} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (12.13)$$

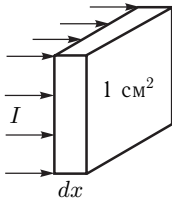


Рис. 12.1

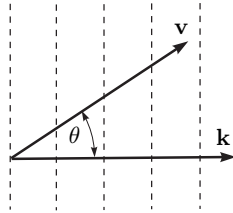


Рис. 12.2

Рассмотрим сначала длинные волны $kl \ll 1$. Так как $l \sim v\tau$, $vk \ll \ll \tau^{-1}$, а неравенство $\omega\tau \ll 1$ было предположено с самого начала. Следовательно, из (12.7) получается

$$\psi = -i\omega\tau \Lambda_{ik} u_{ik}. \quad (12.14)$$

Поэтому по порядку величины имеем

$$Q \sim \omega^2 \tau \mu^2 k^2 u_0^2 p_0^3 / \hbar^3 \mu \sim \omega^2 \tau \mu k^2 u_0^2 n_e.$$

Разделив последнее выражение на (12.9), получаем

$$\Gamma \sim \tau \mu k^2 n_e / \rho s \sim \omega^2 \tau \mu n_e / \rho s^3 \sim \omega^2 \tau / s \quad (12.15)$$

(здесь учтено, что $s^2 \sim v^2 m / M$ и $\rho = Mn \sim Mn_e$). Итак, в этом случае коэффициент поглощения пропорционален ω^2 и длине свободного пробега l ($\tau \sim l/v$).

Рассмотрим противоположный предельный случай $kl \gg 1$. Согласно (12.7) мы можем написать

$$\frac{|\psi^2|}{\tau} = \omega^2 \left| \Lambda_{ik} u_{ik}^0 \right|^2 \frac{\tau^{-1}}{(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)^2 + \tau^{-2}}.$$

Последний множитель с точностью до членов порядка $(kl)^{-1}$ равен $\pi \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)$. Иными словами, поглощение связано с теми электронами,

для которых $\mathbf{k}\mathbf{v} \approx \omega$. Но так как $\omega = sk$, мы получаем $v \cos \theta = s$. Это значит, что поглощают звук электроны, движущиеся в фазе со звуковой волной. Это не что иное, как механизм поглощения Ландау, о котором уже говорилось в § 9.3. Правда, там речь шла о взаимодействии электронов с электромагнитной волной. Так как $s/v \ll 1$, то эффективные электроны движутся почти перпендикулярно к $\mathbf{k}$ (рис. 12.2). Интегрирование δ -функции по $\cos \theta$ дает $(vk)^{-1}$. Итак, имеем

$$Q \sim \omega^2 \mu k^2 u_0^2 n_e / vk, \\ \Gamma \sim \omega \mu n_e / \rho v s^2 \sim \omega / v. \quad (12.16)$$

Следовательно, коэффициент поглощения уже не зависит от l . Формально, l в (12.15) заменилось на k^{-1} .

§ 12.2. Коэффициент поглощения в отсутствие магнитного поля (высокие частоты)

Теперь рассмотрим противоположный предельный случай $\omega\tau \gg 1$ [100, 101]. Здесь уже надо рассматривать испускание и поглощение отдельных квантов. При поглощении фонона имеем законы сохранения импульса и энергии:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}, \quad \varepsilon(\mathbf{p}') = \varepsilon(\mathbf{p}) + \hbar \omega.$$

Таким образом,

$$\varepsilon(\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \hbar \omega.$$

Так как в реальной ситуации всегда $k \ll p_0$, то энергию можно разложить по $\mathbf{k}$:

$$\varepsilon(\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}) \approx \varepsilon(\mathbf{p}) + (\partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}) \hbar \mathbf{k} = \varepsilon(\mathbf{p}) + \hbar \mathbf{v} \mathbf{k}.$$

Следовательно, мы имеем

$$\mathbf{k}\mathbf{v} = \omega. \quad (12.17)$$

Это то же самое условие, что в случае $kl \gg 1$, $\omega\tau \ll 1$.

Гамильтониан электрона во внешнем периодическом поле равен

$$\mathcal{H}' = (1/2) [U e^{-i\omega t} + U^+ e^{i\omega t}].$$

Если речь идет о взаимодействии со звуковой волной, то

$$U = U_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad U_0 = \Lambda_{ik}(\mathbf{p}) u_{ik}^0.$$

Вероятность перехода под влиянием периодического во времени возмущения равна

$$W = (\pi/2\hbar^2) \left[|U_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 \delta(\omega_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} - \omega) + |U_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^+|^2 \delta(\omega_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} + \omega) \right], \quad (12.18)$$

где

$$\hbar\omega_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = \varepsilon(\mathbf{p}') - \varepsilon(\mathbf{p}).$$

Первый член в (12.18) соответствует поглощению, а второй — испусканию кванта. Эту вероятность надо умножить на

$$f_0(\mathbf{p})(1 - f_0(\mathbf{p}'))$$

— вероятность того, что состояние $\mathbf{p}$ занято, а состояние $\mathbf{p}'$ — пусто. Если умножить результат еще на изменение энергии электрона $\hbar\omega_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}$ и просуммировать по всем импульсам $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ и проекциям спина (это дает множитель 2, так как спин сохраняется), то мы получим энергию, поглощенную за 1 секунду. Отнеся ее к единице объема, имеем

$$Q = V^{-1} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \hbar\omega_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} (\pi/\hbar^2) \left[|U_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 \delta(\omega_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} - \omega) + \left| U_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^+ \right|^2 \delta(\omega_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} + \omega) \right] f_0(\varepsilon(\mathbf{p})) [1 - f_0(\varepsilon(\mathbf{p}'))].$$

Во втором члене мы сделаем замену $U_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^+ = U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^*$. При взятии суммы по $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ в этом члене мы заменим индексы $\mathbf{p} \rightleftharpoons \mathbf{p}'$. В результате получается

$$Q = (\pi\omega/V) \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} |U_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 \delta(\hbar\omega_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} - \hbar\omega) [f_0(\varepsilon(\mathbf{p})) - f_0(\varepsilon(\mathbf{p}'))]. \quad (12.19)$$

Разность в последней скобке можно разложить по $\varepsilon' - \varepsilon$, что дает

$$Q = -(\pi\omega^2/V) \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} |U_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 \delta(\omega_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} - \omega) (\partial f_0 / \partial \varepsilon). \quad (12.20)$$

Величина $U_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}$ имеет матричные элементы лишь для переходов с $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}$, которые равны $\Lambda_{ik} u_{ik}^0$. С учетом этого обстоятельства

$$Q = -(\pi\omega^2/V) \sum_{\mathbf{p}} \left| \Lambda_{ik} u_{ik}^0 \right|^2 \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega) (\partial f_0 / \partial \varepsilon).$$

Переходя от суммы по $\mathbf{p}$ к интегралу ($\sum_{\mathbf{p}} = [V/(2\pi\hbar)^3] \int d^3\mathbf{p}$) и разделив на поток энергии, получаем

$$\Gamma \sim \omega \mu n_e / \rho v s^2 \sim \omega / v. \quad (12.21)$$

Но эта формула совпадает с результатом (12.16) для случая $\omega\tau \ll 1$ и $kl \gg 1$. Отсюда следует, что истинным параметром, определяющим характер поглощения, является kl , а не $\omega\tau$. Это происходит оттого, что ω и k входят в кинетическое уравнение в комбинации $\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega$. А поскольку $kv \gg \omega = sk$, то поглощение определяется величиной $kv\tau \sim kl$, а не $\omega\tau$.

Поглощение звука при $kl \gg 1$ является поглощением отдельных квантов и обеспечивается электронами, движущимися в фазе со звуковой волной. В противоположном случае $kl \ll 1$ электроны между столкновениями движутся фактически в однородном поле звуковой волны. Причиной поглощения звука в этом случае является вязкость электронной жидкости.

§ 12.3. Геометрический резонанс

Перейдем к рассмотрению поглощения звука при наличии магнитного поля. Мы начнем со случая, когда квантованием уровней энергий электронов в магнитном поле можно пренебречь, т. е. применима классическая картина электронов, движущихся по траекториям. Очевидно, это имеет место, когда поле не слишком сильное, т. е. $\hbar\Omega \ll T$. Критерием, который здесь будет важен, является также

$$kr_L \gg 1.$$

Однако в то же время будем предполагать, что

$$\Omega\tau \gg 1.$$

Рассмотрим прежде всего случай, когда векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{k}$ перпендикулярны. В этом случае фаза звуковой волны не меняется вдоль направления поля, а потому смещение электрона в этом направлении не существенно для поглощения звука. Рассмотрим проекцию движения электрона на плоскость (x, y) (рис. 12.3); ось z , как всегда, направим вдоль поля $\mathbf{H}$. Траектория предполагается замкнутой. Штриховые линии обозначают плоскости равной фазы. Электрон проводит разное время вблизи этих плоскостей. Наибольшее время электрон проводит вблизи той плоскости, где его скорость параллельна плоскости. Таковы точки 1 и 2 на рис. 12.3. Поглощение в основном определяется этими точками.

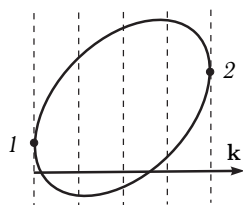


Рис. 12.3

Разница между точками 1 и 2 и другими точками орбиты заключается в том, что вблизи 1 и 2 электрон длительное время находится в более или менее постоянном поле, в то время как в других местах орбиты поле звуковой волны, действующее на электрон, быстро меняется. Конечно, это соображение правильно лишь в том случае, когда число длин волн, приходящихся на диаметр орбиты, велико, т. е. $kr_L \gg 1$.

Предположим, что функция ψ имеет экстремальное значение для какой-то определенной разности фаз звукового поля между плоскостями, проходящими через точки 1 и 2. В этом случае та же разность

фаз будет сохраняться, если число длин волн, укладывающихся на диаметре орбиты, изменится на целое число, т. е.

$$\varphi = \mathbf{k} \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \mathbf{v} dt$$

изменится на $2\pi n$. Так как $\mathbf{k}$ направлено вдоль оси x , то мы находим

$$dp_y/dt = -(e/c) H v_x, \quad \varphi = (ck/eH) [p_y^{(1)} - p_y^{(2)}].$$

Поэтому если $\varphi \gg 1$, то ψ становится осциллирующей функцией H^{-1} с периодом

$$\Delta H^{-1} = (2\pi e/ck) [p_y^{(1)} - p_y^{(2)}]^{-1}. \quad (12.22)$$

Конечно, разность $p_y^{(1)} - p_y^{(2)}$ зависит от p_z и истинные осцилляции соответствуют экстремальным значениям $p_y^{(1)} - p_y^{(2)}$. Этот эффект аналогичен нерезонансному размерному эффекту в металлических пластинках (§ 8.3). Он называется геометрическим резонансом (Беммель, 1955; Пинпард, 1957) [101, 102].

§ 12.4. Магнитоакустические резонансные явления

Теперь рассмотрим случай, когда $\mathbf{k}$ не перпендикулярно $\mathbf{H}$. Начнем со случая замкнутой траектории в импульсном пространстве. В этом случае в координатном пространстве электрон совершает спиральное движение вдоль магнитного поля. В то же время надо помнить,

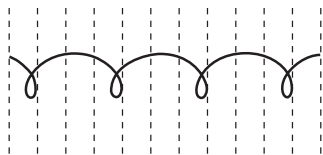


Рис. 12.4

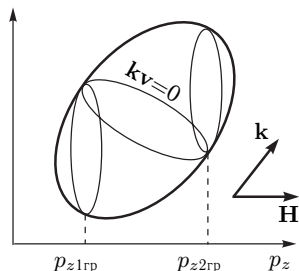


Рис. 12.5

что в поглощении существенны лишь электроны с $\mathbf{k}\mathbf{v} \approx 0$. Рассмотрим рис. 12.4. Предположим, что в какой-то момент электрон имел скорость, перпендикулярную $\mathbf{k}$. Естественно, что то же самое будет иметь место через период T . За это время электрон сдвинется вдоль $\mathbf{H}$ на расстояние $\bar{v}_z T$, а в направлении $\mathbf{k}$ на расстояние $\bar{v}_z T \cos \theta$ (θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}$). Очевидно, максимальный эффект будет в том

случае, когда фаза звуковой волны при этом изменится на $2\pi n$. Иначе говоря,

$$k\bar{v}_z T \cos \theta = 2\pi n.$$

Наибольшую роль будут играть экстремальные значения $\bar{v}_z T$. Плотность состояний для таких значений сильно возрастает, и можно ожидать резонансный эффект в поглощении звука. Подставляя $T = 2\pi m^* c / eH$, находим резонансные значения магнитного поля:

$$H_n = (kc/en) (m^* \bar{v}_z)_{\text{extr}} \cos \theta.$$

Вспоминая, что

$$m^* = (2\pi)^{-1} (\partial S / \partial \varepsilon), \quad v_z = \partial \varepsilon / \partial p_z,$$

получаем

$$H_n = \frac{kc \cos \theta}{2\pi n e} \left(\frac{\partial S}{\partial p_z} \right)_{\text{extr}}. \quad (12.23)$$

Этот эффект родствен дрейфовой фокусировке высокочастотного поля (§ 8.6), и из него определяется та же величина $(\partial S / \partial p_z)_{\text{extr}}$. Очевидно, что $\partial S / \partial p_z$ может иметь экстремум лишь для невыпуклой поверхности Ферми (см. рис. 8.10) или в опорной точке.

Кроме точек с $(m^* v_z)_{\text{extr}}$, при $\mathbf{k}$, не перпендикулярном $\mathbf{H}$ ($\mathbf{kH} \neq 0$), существенную роль играют так называемые граничные точки. Дело в том, что условие $\mathbf{k}\mathbf{v} = 0$, необходимое для поглощения фонона, выполняется не для всех электронов, а лишь для части (рис. 12.5). Если следить за контуром $p_z = \text{const}$, то в середине поверхности условие $\mathbf{k}\mathbf{v} = 0$ выполняется в двух точках, но по мере изменения p_z в ту или другую сторону эти точки сливаются в одну, после чего условие $\mathbf{k}\mathbf{v} = 0$ уже не выполняется ни для одной из точек контура. Итак, есть основания ожидать особенности коэффициента поглощения при значении поля, равном

$$H_{1n} = \frac{kc \cos \theta}{2\pi n e} \left(\frac{\partial S}{\partial p_z} \right)_{\text{гр}}, \quad (12.24)$$

где индекс означает, что производная берется при граничном значении импульса $p_z = p_{z\text{гр}}$.

Наконец, рассмотрим случай открытой траектории. В этом случае электрон совершает дрейф поперек поля. Характерным временем, заменяющим ларморовский период, является в этом случае время, за которое электрон проходит период обратной решетки. Если открытость имеется в направлении p_x , то, интегрируя по t уравнение

$$dp_x/dt = (eH/c) v_y,$$

получаем условие резонанса

$$\hbar K = \frac{eH}{c} \int v_y dt = \frac{eH}{c} \cos \theta n \lambda,$$

где K — наименьший период обратной решетки, λ — длина волны звука, а θ — угол между направлениями $\mathbf{k}$ и y . Иными словами, резонансные значения H в этом случае равны

$$H_n = \frac{c \hbar K k \cos \theta}{2\pi e n}. \quad (12.25)$$

Все эти явления получили название магнитоакустических резонансов (Канер, Песчанский, Привороцкий, 1961) [103].

§ 12.5. Количественная теория геометрического резонанса

Рассмотрим случай замкнутой поверхности Ферми. В присутствии магнитного поля уравнение (12.5) приобретает дополнительный член $\partial\psi/\partial t_1$. Считая $\mathbf{E} = 0$ и предполагая ψ зависящим от координат и времени по закону $\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$, получаем

$$i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)\psi + \partial\psi/\partial t_1 + \psi/\tau = g, \quad (12.26)$$

где $g \equiv \Lambda_{ik} \dot{u}_{ik}$. Умножим это уравнение на ψ^* и сложим его с комплексно сопряженным уравнением, умноженным на ψ . В результате находим

$$(1/2) \partial|\psi|^2/\partial t_1 + |\psi|^2/\tau = (1/2) (g\psi^* + g^*\psi) = \text{Re}(g^*\psi).$$

В коэффициент поглощения входит

$$\int (|\psi|^2/\tau) (\partial f_0/\partial \varepsilon) d^3\mathbf{p}.$$

Сделав замену переменных

$$dp_x dp_y \rightarrow (eH/c) dt_1 d\varepsilon$$

(см. (5.11)), мы видим, что при интегрировании по t_1 член $\partial|\psi|^2/\partial t_1$ обращается в нуль. Отсюда следует

$$\int \frac{|\psi|^2}{\tau} dt_1 = \int \text{Re}(g^*\psi) dt_1. \quad (12.27)$$

Ниже мы будем считать $\omega \ll \tau^{-1}$ и поэтому будем пренебрегать ω . Решая уравнение (12.26) аналогично тому, как это делалось в § 5.2 и в гл. 7, получаем

$$\psi(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} g(t_2) \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} [i\mathbf{k}\mathbf{v}(t_3) + \tau^{-1}] dt_3 \right\} dt_2. \quad (12.28)$$

Теперь разобьем $\int_{-\infty}^{t_1} \dots dt_2$ на интегралы по промежуткам продолжительностью T и в каждом таком интеграле сделаем замену переменных, чтобы у всех слагаемых были одинаковые пределы интегрирования. Например,

$$\int_{t_1 - T(n+1)}^{t_1 - Tn} f(t_2) dt_2 = \int_{t_1}^{t_1 + T} f[t_2 - T(n+1)] dt_2.$$

Так как $g(t_2)$ — периодическая функция t_2 , то она не меняется при такой замене, и следовательно, подынтегральное выражение в (12.28) после такой замены станет равным

$$g(t_2) \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2 - T(n+1)} [i\mathbf{k}\mathbf{v}(t_3) + \tau^{-1}] dt_3 \right\}.$$

Но поскольку подынтегральное выражение в экспоненте — периодическая функция от t_3 , находим

$$g(t_2) \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} [i\mathbf{k}\mathbf{v} + \tau^{-1}] dt_3 \right\} \exp \{ -T(n+1) (i\mathbf{k}\bar{\mathbf{v}} + \tau^{-1}) \}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \psi(t_1) = & \int_{t_1}^{t_1 + T} g(t_2) \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} [i\mathbf{k}\mathbf{v} + \tau^{-1}] dt_3 \right\} dt_2 \times \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} \exp [-T(n+1) (i\mathbf{k}\bar{\mathbf{v}} + \tau^{-1})]. \end{aligned}$$

Суммируя по n , получаем

$$\psi(t_1) = \int_{t_1}^{t_1+T} g(t_2) \times \\ \times \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} [i\mathbf{k}\mathbf{v} + \tau^{-1}] dt_3 \right\} dt_2 \{ \exp [T(i\mathbf{k}\bar{\mathbf{v}} + \tau^{-1})] - 1 \}^{-1}. \quad (12.29)$$

В подынтегральном выражении содержится большая экспонента. Мы применим к этому интегралу метод стационарной фазы. Стационарные точки экспоненты определяются условием

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \int_{t_1}^{t_2} i\mathbf{k}\mathbf{v}(t_3) dt_3 = 0, \quad \mathbf{k}\mathbf{v}(t_2) = 0.$$

Пусть решением уравнения $\mathbf{k}\mathbf{v}(t_2) = 0$ являются точки $t = t_\alpha$. Разлагая по $t = t_2 - t_\alpha$ и распространяя пределы интегрирования по t от $-\infty$ до ∞ , получаем

$$\int_{t_1}^{t_1+T} g(t_2) \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} [i\mathbf{k}\mathbf{v} + \tau^{-1}] dt_3 \right\} dt_2 = \\ = \sum_{t_1 < t_\alpha < t_1+T} g_\alpha J_\alpha \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_\alpha} [i\mathbf{k}\mathbf{v} + \tau^{-1}] dt_3 \right\}, \quad (12.30)$$

где $g_\alpha = g(t_\alpha)$, а

$$J_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp \left[(i/2) \mathbf{k}\mathbf{v}'_\alpha t^2 + (i/6) \mathbf{k}\mathbf{v}''_\alpha t^3 \right] \quad (12.31)$$

(индекс α соответствует моменту t_α).

Обычно в методе стационарной фазы оставляют лишь первый член, пропорциональный t^2 . Но здесь надо соблюдать осторожность, ибо в точках $p_{z\text{гр}}$ $\mathbf{k}\mathbf{v}'_\alpha = 0$. Ввиду этого мы оставляем и член с t^3 . Если $\mathbf{k}\mathbf{v}'_\alpha \neq 0$, то получаем

$$J_\alpha = |2\pi/\mathbf{k}\mathbf{v}'_\alpha|^{1/2} \exp[(\pi i/4) \text{sign}(\mathbf{k}\mathbf{v}'_\alpha)] \quad (12.32)$$

($\text{sign } x$ означает знаковую функцию, т. е. 1, если $x > 0$, и -1 , если $x < 0$). Если же $\mathbf{k}\mathbf{v}'_\alpha = 0$, то

$$J_\alpha = 3^{-1/2} \Gamma(1/3) |6/\mathbf{k}\mathbf{v}''_\alpha|^{1/3}. \quad (12.33)$$

Коэффициент поглощения, согласно (12.8), (12.13), (12.27) и (5.11), равен

$$\Gamma = \frac{eH}{c} (2\pi\hbar)^{-3} I^{-1} \operatorname{Re} \int dp_z \int_0^T g^*(t_1) dt_1 \sum_{t_1 \leq t_\alpha \leq t_1 + T} g_\alpha J_\alpha \times \\ \times \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_\alpha} [i\mathbf{k}\mathbf{v} + \tau^{-1}] dt_3 \right\} \left\{ \exp [T (i\mathbf{k}\bar{\mathbf{v}} + \tau^{-1})] - 1 \right\}^{-1}.$$

Тот же метод стационарной фазы мы теперь применим для вычисления интеграла по t_1 и в результате найдем

$$\Gamma = \frac{eH}{c} (2\pi\hbar)^{-3} I^{-1} \operatorname{Re} \int dp_z \left\{ \exp [T (i\mathbf{k}\bar{\mathbf{v}} + \tau^{-1})] - 1 \right\}^{-1} \times \\ \times \sum_{0 \leq t_\alpha, t_\beta < T} g_\alpha J_\alpha g_\beta^* J_\beta^* \exp \left\{ \int_{t_\beta}^{t_\alpha} [i\mathbf{k}\mathbf{v} + \tau^{-1}] dt_3 \right\}. \quad (12.34)$$

Это общее выражение.

А теперь рассмотрим конкретно случай геометрического резонанса [104]. При этом $\mathbf{k}\bar{\mathbf{v}} = 0$ (так как $\bar{\mathbf{v}} \parallel \mathbf{H}$, а $\mathbf{kH} = 0$). На электронной орбите имеются две точки, где $\mathbf{k}\mathbf{v} = 0$. Обозначим их через $t_{(1)}$ и $t_{(2)}$ (см. рис. 12.3). В этих точках $\mathbf{k}\mathbf{v}'(t_{(1)})$ и $\mathbf{k}\mathbf{v}'(t_{(2)})$, вообще говоря, не обращаются в нуль и имеют разные знаки. Следовательно, если мы обозначим через $t_{(1)}$ точку, в которой $\mathbf{k}\mathbf{v}'_{(1)} > 0$, то обязательно $\mathbf{k}\mathbf{v}'_{(2)} < 0$. При $\mathbf{k}\mathbf{v} = 0$ в формуле (12.34) остается $\exp(T/\tau) - 1$ и, так как $\tau \gg T$, это выражение равно T/τ . Сумма по t_α и t_β включает члены с $t_\alpha = t_\beta = t_{(1)}$, $t_\alpha = t_\beta = t_{(2)}$ и два члена $t_\alpha = t_{(1)}$, $t_\beta = t_{(2)}$; $t_\alpha = t_{(2)}$, $t_\beta = t_{(1)}$. Отсюда находим

$$\Gamma = \frac{2\pi eH}{c(2\pi\hbar)^3 I} \int \frac{\tau}{T} dp_z \left\{ \left| \frac{g_{(1)}^2}{\mathbf{k}\mathbf{v}'_{(1)}} \right| + \left| \frac{g_{(2)}^2}{\mathbf{k}\mathbf{v}'_{(2)}} \right| + \right. \\ \left. + \frac{2|g_{(1)}g_{(2)}|}{[(\mathbf{k}\mathbf{v}'_{(1)})(\mathbf{k}\mathbf{v}'_{(2)})]^{1/2}} \sin \left(\int_{t_{(1)}}^{t_{(2)}} \mathbf{k}\mathbf{v}(t_3) dt_3 \right) \right\} \quad (12.35)$$

(мы здесь опять воспользовались тем, что $\tau \gg T$).

Выберем ось x вдоль $\mathbf{k}$ и применим уравнение

$$dp_y/dt = -(e/c) v_x H,$$

тогда

$$\int_{t_{(1)}}^{t_{(2)}} \mathbf{k}\mathbf{v}(t_3) dt_3 = \frac{kc}{eH} [p_y^{(1)} - p_y^{(2)}], \quad (12.36)$$

т. е. получилось то же, что в § 12.3.

Первые два члена в фигурных скобках (12.35) дают монотонную, неосциллирующую часть коэффициента поглощения $\Gamma_{\text{мон}}$. По порядку величины

$$\Gamma_{\text{мон}} \sim \frac{eH\tau p_0 \Lambda^2 \omega^2 u_{ik}^2}{c\hbar^3 kvI} \sim \frac{eH\tau p_0 \mu^2 \omega^2 k^2 u^2}{c\hbar^3 \rho u^2 \omega^2 skv} \sim \Omega\tau \frac{\omega \mu n_e}{\rho v s^2} \sim \Gamma_0 \Omega\tau. \quad (12.37)$$

Величина $\Gamma_0 \sim \omega \mu n_e / \rho v s^2$ есть коэффициент поглощения в отсутствие магнитного поля.

Третий член в (12.35), содержащий синус, дает осциллирующую часть коэффициента поглощения. Поскольку синус — быстро осциллирующая функция p_z , то мы применим метод перевала при интегрировании по p_z . Напишем

$$p_y^{(1)} - p_y^{(2)} = \Delta p_y$$

и выбирая экстремальные значения этой разности, мы имеем

$$\Delta p_y = \Delta p_{ym} + (1/2) (\partial^2 \Delta p_y / \partial p_z^2)_m (p_z - p_{zm})^2.$$

После этого интегрирование выполняется легко и мы получаем

$$\left(\frac{2\pi eH}{ck} \right) \left| \frac{\partial^2 \Delta p_y}{\partial p_z^2} \right|_m^{-1/2} \sin \left(\frac{ck}{eH} \Delta p_{ym} \pm \frac{\pi}{4} \right),$$

где знак плюс берется при $(\partial^2 \Delta p_y / \partial p_z^2)_m > 0$, а знак минус — в обратном случае. При интегрировании по p_z все остальные величины в (12.35) должны считаться константами (значения при $p_z = p_{zm}$).

Сравнивая результат для $\Gamma_{\text{осц}}$ и $\Gamma_{\text{мон}}$, получаем

$$\frac{\Gamma_{\text{осц}}}{\Gamma_{\text{мон}}} \sim (kr_L)^{-1/2} \sum_m \sin \left(\frac{ck}{eH} \Delta p_{ym} \pm \frac{\pi}{4} \right). \quad (12.38)$$

Итак, геометрический резонанс, так же как и размерный эффект, может являться методом определения ферми-поверхности.

Очевидно, при этом мы находим разность значений p_y в точках пересечения 1 и 2 контура $p_z = p_{zm}$ с контуром $k\mathbf{v} = 0$ на ферми-поверхности (рис. 12.6), причем контур $p_z = p_{zm}$ соответствует экстремальному значению Δp_y . Например, это может быть центральное сечение.

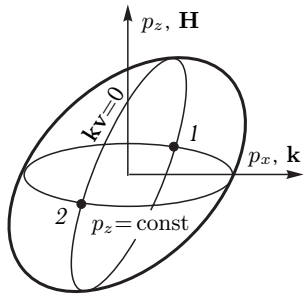


Рис. 12.6

§ 12.6. Количественная теория магнитоакустических резонансов

Магнитоакустические резонансы при $\mathbf{kH} \neq 0$ [103] возникают от множителя

$$C(p_z) = \left\{ \exp \left[T (i\mathbf{k}\bar{\mathbf{v}} + \tau^{-1}) \right] - 1 \right\}^{-1}$$

в формуле (12.34). Этот множитель имеет узкие и острые максимумы как функция p_z . Если зафиксировать ω и H , то эти максимумы будут отвечать таким p_z , при которых

$$T\mathbf{k}\bar{\mathbf{v}} = \frac{k_z c}{eH} \left| \frac{\partial S(p_{zn})}{\partial p_z} \right| = 2\pi n.$$

Вообще говоря, эти значения не соответствуют экстремумам $\partial S / \partial p_z$. Но можно подобрать ω или H таким образом, чтобы это условие выполнялось для $(\partial S / \partial p_z)_{\text{extr}}$. Тогда максимум в $C(p_z)$ будет гораздо шире и вклад его в поглощение гораздо больше.

В окрестности такого экстремума, которому, скажем, соответствует $p_z = p_s$, мы можем разложить выражение в показателе экспоненты в $C(p_z)$ по $(T\mathbf{k}\bar{\mathbf{v}})_{\text{extr}} - 2\pi n$:

$$C(p_z) \approx \left\{ \exp \left[\gamma + i\Delta + (i/2) q (p_z - p_s)^2 \right] - 1 \right\}^{-1},$$

где мы обозначили

$$\gamma = T/\tau, \quad \Delta = (T\mathbf{k}\bar{\mathbf{v}})_{\text{extr}} - 2\pi n, \quad q = \left[\partial^2 (T\mathbf{k}\bar{\mathbf{v}}) / \partial p_z^2 \right]_{p_s}.$$

Ввиду узости максимумов $C(p_z)$ можно считать все остальные функции константами при $p_z = p_s$. Подставляя $C(p_z)$ в (12.34) и обозначая

$$\varphi_\alpha = \int_0^{t_\alpha} (\mathbf{k}\bar{\mathbf{v}}) dt_3,$$

получаем

$$\Gamma = (eH/c) (2\pi\hbar)^{-3} I^{-1} \left| \sum_{t_\alpha} g_\alpha I_\alpha \exp(i\varphi_\alpha) \right|_{p_s}^2 \times \\ \times \text{Re} \int \left\{ \exp \left[\gamma + i\Delta + (i/2) q (p_z - p_s)^2 \right] - 1 \right\}^{-1} dp_z.$$

Вторую экспоненту при достаточно малых Δ можно разложить в ряд. После этого интеграл легко берется, и мы получаем

$$\text{Re} \int \dots dp_z = \frac{\pi}{|q|^{1/2}} \left[\frac{(\gamma^2 + \Delta^2)^{1/2} - \Delta \text{sign } q}{\gamma^2 + \Delta^2} \right]^{1/2}. \quad (12.39)$$

Этот множитель и определяет форму линии резонанса. Максимум достигается при $\Delta = \gamma \operatorname{sign} q / \sqrt{3}$, т. е. он сдвинут относительно $\Delta = 0$. Линия несимметричная. Ширина линии по переменной Δ порядка γ или, в пересчете на магнитное поле, $\Delta H \sim H_n (k_z l)^{-1}$, т. е. абсолютная ширина линии растет с уменьшением номера: $H_n = H_1 / n$. В максимуме множитель в квадратных скобках имеет порядок $\gamma^{-1/2}$, а следовательно,

$$\operatorname{Re} \int \dots dp_z \sim p_0 (n\gamma)^{-1/2}.$$

Весь коэффициент поглощения будет при этом порядка

$$\Gamma_n \sim \Gamma_0 (n\gamma)^{-1/2} \gg \Gamma_0, \quad (12.40)$$

где Γ_0 — коэффициент поглощения при $H = 0$. Так как $\gamma = T/\tau$, $T \propto H^{-1}$, а $H_n \propto n^{-1}$, то $\gamma n \propto n^2$, т. е. высота максимумов уменьшается с увеличением n как n^{-1} . В целом картина имеет вид, изображенный на рис. 12.7.

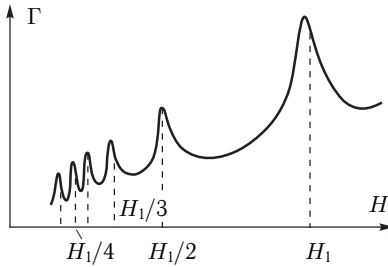


Рис. 12.7

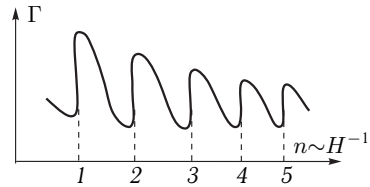


Рис. 12.8

Теперь рассмотрим роль точек $p_{z\text{гр}}$. Возьмем для простоты центрально-симметричную выпуклую поверхность Ферми. Как уже говорилось, при $|p_z| < p_{z\text{гр}}$ есть две точки t_α , где $\mathbf{k}\mathbf{v}(t)_\alpha = 0$, а при $|p_z| > p_{z\text{гр}}$ таких точек нет совсем. Очевидно, что поскольку при $p_{z\text{гр}}$ сливаются две точки с одинаковым значением $\mathbf{k}\mathbf{v}$, то в самой этой точке $\mathbf{k}\mathbf{v}'(t) = 0$, т. е. мы должны пользоваться формулой (12.33).

Рассмотрим окрестность $p_{z\text{гр}}$. В общей формуле (12.34) мы можем положить в числителе $t_\alpha = t_\beta$, а множитель $C(p_z)$ записать в виде

$$C(p_z) \approx \left\{ \exp \left[\gamma + i\Delta + i q_1 (p_z - p_{z\text{гр}}) \right] - 1 \right\}^{-1},$$

где на этот раз

$$\Delta = T(\mathbf{k}\bar{\mathbf{v}})_{\text{гр}} - 2\pi n, \quad q_1 = (\partial(T\mathbf{k}\bar{\mathbf{v}})/\partial p_z)_{\text{гр}}.$$

Коэффициент поглощения имеет вид

$$\Gamma = (eH/cl) (2\pi\hbar)^{-3} |g_\alpha J_\alpha|^2 p_{z\text{гр}} \times \\ \times \operatorname{Re} \int_{p_{z\text{гр}}} \left\{ \exp [\gamma + i\Delta + i q_1 (p_z - p_{z\text{гр}})] - 1 \right\}^{-1} dp_z. \quad (12.41)$$

Интеграл оказывается равным

$$\operatorname{Re} \int \dots dp_z = \frac{\pi}{|q_1|} \left[\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sign} q_1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Delta}{\gamma} \right]. \quad (12.42)$$

Если $\Delta \operatorname{sign} q_1 > 0$ и $|\Delta| \gg \gamma$, то в квадратной скобке стоит единица. Если же $\Delta \operatorname{sign} q_1 < 0$, $|\Delta| \gg \gamma$, мы получаем нуль. Итак, коэффициент поглощения испытывает скачки при $H = H_n = H_1/n$, где

$$H_1 = (k_z c / 2\pi e) |\partial S / \partial p_z|_{p_{z\text{гр}}}.$$

Из (12.41), (12.42) и (12.33) находим амплитуду скачков

$$\Delta\Gamma \sim \Gamma_0 n^{-2/3}, \quad (12.43)$$

т. е. амплитуда растет с увеличением поля H . В целом картина имеет вид, изображенный на рис. 12.8, если $q_1 > 0$. Если же $q_1 < 0$, то скачки происходят в обратном направлении: Γ скачками увеличивается с увеличением H .

Дифференцируя (12.42), получаем следующую формулу:

$$\partial\Gamma / \partial \ln H \sim \Gamma_0 n^{1/3} \gamma / (\gamma^2 + \Delta^2). \quad (12.44)$$

Это кривая с максимумами в точках $H = H_n$. Высота каждого максимума

$$d\Gamma/dH \sim \Gamma_0 n^{1/3} / \gamma H, \quad (12.45)$$

т. е. растет с уменьшением H_n как $n^{1/3}$ (так как $\gamma = T/\tau \propto n$).

Как уже указывалось в § 8.5, экстремум $T\mathbf{k}\mathbf{v}$ соответствует, в частности, опорной точке. При этом, однако, для наблюдения резонансов нужно соблюдение некоторых неравенств. Согласно рис. 12.5, для того чтобы опорная точка участвовала в магнито-акустическом резонансе, нужно, чтобы контур $\mathbf{k}\mathbf{v} = 0$ проходил около нее, а для этого $\mathbf{k}$ должно быть почти перпендикулярно $\mathbf{H}$.

Пусть $\mathbf{k}$ находится в плоскости (x, z) . Обозначим угол между $\mathbf{k}$ и осью x через φ . Этот угол не должен быть слишком мал. Ведь смещение электрона за период в направлении k должно быть много больше длины волны. Отсюда следует $v\varphi T \gg \lambda$, или $\varphi \gg (kr_L)^{-1}$. С другой стороны, при любом конечном φ контур $\mathbf{k}\mathbf{v} = 0$ уже не проходит через опорную точку. Она участвует в резонансе только благодаря небольшому размытию, происходящему от конечности пробега, т. е.

от наличия τ^{-1} в показателе экспоненты. Порядок величины этого размытия определяется соотношением

$$k_z(v - v_0) \sim \tau^{-1}.$$

Но так как $v_0 - v \sim v_0(l - \cos \varphi) \sim v_0 \varphi^2$, а $k_z \sim k\varphi$, то отсюда мы находим $\varphi \ll (kl)^{-1/3}$. Итак, условием наблюдения магнитоакустического резонанса от опорной точки является

$$(kl)^{-1/3} \gg \varphi \gg (kr_L)^{-1}. \quad (12.46)$$

Отметим еще раз сходство всей ситуации с эффектом дрейфовой фокусировки высокочастотного поля (см. условие (8.16)).

В случае резонанса на опорной точке мы сталкиваемся с особой ситуацией, когда, с одной стороны, имеет место краевой экстремум $T\mathbf{k}\bar{\mathbf{v}}$, с другой стороны, возникает граничная точка, где $\mathbf{k}\mathbf{v}'(t_\alpha) = 0$. Поэтому данный случай нуждается в специальном рассмотрении (Козуб, 1974)¹⁾. Согласно приведенному рассуждению, в резонанс вносит вклад не сама опорная точка, а некоторая окрестность этой точки. Во всей этой области точки t_α и t_β не совпадают и поэтому для J_α можно пользоваться формулой (12.32). На контуре с заданным p_z

$$v_\perp \sim (p_0^2 - p_z^2)^{1/2}/m \sim [p_0(p_0 - p_z)]^{1/2}/m$$

(p_0 соответствует опорной точке), т. е.

$$|J_\alpha|^2 \sim Tm/k[p_0(p_0 - p_z)]^{1/2}.$$

Следовательно, $|J_\alpha|^2$ сильно зависит от p_z , и поэтому вместо формулы (12.41) надо написать аналогичную, но с $|J_\alpha|^2$ под знаком интеграла. Несложное вычисление дает:

$$\int \dots |J_\alpha|^2 dp_z \sim \frac{Tm}{k(p_0 |q_1|)^{1/2}} \left[\frac{(\gamma^2 + \Delta^2)^{1/2} - \Delta \operatorname{sign} q_1}{\gamma^2 + \Delta^2} \right]^{1/2}. \quad (12.47)$$

Эта формула напоминает (12.42) в том смысле, что при $\Delta q_1 > 0$, $|\Delta| \gg \gamma$ мы получаем конечную величину, а при $\Delta q_1 < 0$, $|\Delta| \gg \gamma$ — нуль, т. е. имеют место скачки поглощения. Однако в окрестности скачков, т. е. при $|\Delta| \ll \gamma$, формула (12.47) дает величину порядка $Tm/k(p_0 q_1 \gamma)^{1/2}$, а в случае обычной граничной точки, согласно (12.33), (12.42),

$$|J_\alpha|^2 \int \dots dp_z \sim \frac{T^{4/3}}{(\mathbf{k}\mathbf{v})^{2/3} q_1}.$$

¹⁾ Автор благодарен В.И. Козубу за сообщение этого неопубликованного вывода.

Подставив порядки величин, находим, что опорная точка дает амплитуду в $n^{-1/3} (kl)^{1/2}$ раз большую, чем дает обычная граничная точка. Сравнивая этот результат с формулой (12.43), видим, что перед тем, как совершить скачок, коэффициент поглощения достигает максимума, имеющего порядок

$$\Gamma_n \sim \Gamma_0(kl)^{1/2}/n. \quad (12.48)$$

Для не слишком больших n этот максимум значительно превышает коэффициент поглощения в отсутствие поля.

В заключение убедимся в том, что использование формулы (12.32) было законным. Действительно, для этого надо, чтобы $[kv'(t_\alpha)]^{1/2} \gg [kv''(t_\alpha)]^{1/3}$, т. е. $(kv_\perp/T)^{1/2} \gg (kv_\perp/T^2)^{1/3}$. Подставляя сюда

$$v_\perp \sim [p_0(p_0 - p_z)]^{1/2}/m \quad \text{и} \quad p_0 - p_z \sim \gamma/q_1,$$

получаем условие $kl \gg 1$, которое предполагалось выполненным.

§ 12.7. Нелинейное поглощение звука. Влияние магнитного поля

Так же как и при взаимодействии электронов с электромагнитным полем, рассмотренным в § 12.5, существенный интерес имеют нелинейные эффекты в поглощении звука. Имеется целый ряд таких эффектов. Сюда относятся зависимость коэффициента поглощения Γ от интенсивности звука и так называемый звукоэлектрический эффект. Последний заключается в возникновении постоянного тока благодаря увлечению электронов проводимости бегущей звуковой волной (или появлению электрического поля при разомкнутой цепи). При малых интенсивностях звука ток пропорционален интенсивности, при больших интенсивностях возникает более сложная зависимость.

Как уже отмечалось в § 7.5, особенно сильные нелинейные эффекты возникают в условиях, когда существенную роль играет малая выделенная группа электронов. Поле звуковой волны, не будучи в состоянии заметно изменить всю функцию распределения, может значительно исказить ее для малой группы электронов. Именно такое положение имеет место при поглощении коротковолнового звука ($kl \gg 1$), когда со звуковой волной взаимодействуют лишь электроны в окрестности контура на ферми-поверхности, на котором $\mathbf{k}\mathbf{v} = 0$. Это взаимодействие приводит к искажению распределения электронов по импульсам, что, в свою очередь, меняет коэффициент поглощения. Такой эффект называется импульсной нелинейностью (*Гальперин, Каган, Козуб*, 1972) [105]. Мы изложим здесь лишь качественную теорию нелинейного поглощения. Количественная теория содержится в оригинальных работах [105, 106].

Рассмотрим влияние волны на движение резонансных частиц. За счет деформационного взаимодействия звуковая волна создает

эффективное поле, действующее на электроны, с потенциальной энергией $U = \Lambda_{ik} u_{ik}$. В этом поле электроны разделяются на две группы: прелетные, которые совершают инфинитное движение, и захваченные, траектории которых локализованы в потенциальных ямах эффективного поля волны. Последние совершают колебательное движение с характерной скоростью $\tilde{v} \sim (U_0/m)^{1/2}$ ($U_0 = \Lambda_{ik} u_{ik}^0$ — амплитуда потенциала) и частотой

$$\omega_0 \sim \tilde{v}/\lambda \sim \tilde{v}k \sim (U_0/m)^{1/2}k. \quad (12.49)$$

Однако каждый акт рассеяния, меняя направление скорости электрона, выводит его из резонансной группы. Поэтому о захвате можно говорить лишь в том случае, если время свободного пробега больше характерного периода колебаний, т. е.

$$\omega_0 \tau \sim (U_0/m)^{1/2} k \tau \sim (U_0/\mu)^{1/2} kl \gtrsim 1, \quad (12.50)$$

где $\mu \sim mv^2$ — энергия Ферми. Возникновение группы захваченных частиц означает существенное искажение распределения в резонансной группе и вызванное этим изменение коэффициента поглощения звука.

Характер этого изменения можно понять из очень простых соображений. В линейном пределе можно пренебречь влиянием звуковой волны на распределение электронов (которое описывается равновесной функцией f_0). Если перейти в систему отсчета, связанную с волной, то это распределение будет ассиметрично по скоростям: «отстающих» от волны электронов будет больше, чем «опережающих» ее. В результате волна отдает электронам больше энергии, чем получает от них, причем коэффициент поглощения Γ_0 пропорционален производной $\partial f_0 / \partial v_x$ (мы выбрали направление $\mathbf{k}$ в качестве оси x).

Если образуется группа захваченных частиц, то за время ω_0^{-1} происходит «размешивание» распределения по скоростям v_x , так что выделенное направление в системе отсчета, связанной с волной, теряется. Если бы рассеяние отсутствовало, то распределение в этой системе отсчета стало бы равновесным и поглощение энергии прекратилось бы. При наличии рассеяния коэффициент поглощения отличен от нуля и пропорционален

$$\Gamma \sim \Gamma_0 (\omega_0 \tau)^{-1}. \quad (12.51)$$

Так как $\omega_0 \propto (\Lambda u_0)^{1/2} \propto I^{1/4}$, то Γ пропорционально $I^{-1/4}$ (I — интенсивность звука)¹⁾.

Оценим возможности наблюдения эффекта. В настоящее время вполне достижима интенсивность звука $I \sim 1$ Вт/см². Это соответствует

$$u_{ik}^0 \sim k u_0 \sim (\omega/s) u_0 \sim (I/\rho s^3)^{1/2} \sim 10^{-5}.$$

¹⁾ При соблюдении условия (12.50) основная часть электронов захвачена волной.

Так как

$$\Lambda \sim \mu \sim 10 \text{ эВ} \sim 10^{-11} \text{ эрг},$$

то $\Lambda_{ik} u_{ik}^0 \sim 10^{-16}$ эрг. При этом $(U_0/\mu)^{1/2} \sim 3 \cdot 10^{-3}$ и, согласно (12.50), $\omega_0 \tau \gtrsim l$, если $kl \gtrsim 300$. Если взять частоту звука $\nu \sim 10^9$ Гц, то

$$k \sim \nu/s \sim 10^4 \text{ см}^{-1}$$

и требуется длина пробега $l > 3 \cdot 10^{-2}$ см, что вполне возможно.

Теперь рассмотрим как влияет на этот механизм поглощения магнитное поле (Гальперин, Козуб, 1975) [106]. Как мы увидим, даже очень слабое магнитное поле приводит к подавлению эффекта. Ввиду этого мы не будем накладывать условие $\Omega\tau \gtrsim 1$, которое необходимо, чтобы магнитное поле заметно влияло на поглощение звука в линейной теории. Будем считать, что поле не направлено вдоль оси x (т.е. $\mathbf{k}$). С волной эффективно взаимодействуют лишь электроны, скорость которых почти перпендикулярна $\mathbf{k}$. Поэтому если $\mathbf{H}$ не направлено вдоль x , то сила Лоренца, действующая на электроны, содержит компоненту вдоль оси x порядка $(e/c)vH$. Эта сила приводит к увеличению скорости v_x и тем самым к «выносу» электронов из группы захваченных звуковой волной (при увеличении v_x их энергия становится больше U_0). Вынос эффективен, если сила Лоренца больше или порядка силы, действующей со стороны волны. Следовательно, поле подавляет нелинейное поглощение, если

$$(e/c)vH \sim \partial U_0/\partial x \sim kU_0$$

или

$$(U_0/\mu) kr_L \sim 1. \quad (12.52)$$

Как мы выяснили, в отсутствие поля поглощение осуществляется благодаря актам рассеяния с эффективным временем τ . Введем теперь «магнитное» время τ_1 , которое требуется для того, чтобы сила Лоренца сообщила электрону скорость $\tilde{v}$. Из уравнения движения имеем

$$(d/dt)m\tilde{v} \sim m\tilde{v}/\tau_1 \sim (e/c)vH.$$

Следовательно (см. 12.49),

$$\tau_1 \sim \omega_0/\Omega kv. \quad (12.53)$$

При $\tau_1 < \tau$ вынос электронов из захваченной группы благодаря магнитному полю важнее, чем вынос за счет столкновений. Условие $\tau_1 < \tau$ может быть записано в виде

$$(U_0/\mu)^{1/2} r_L/l < 1. \quad (12.54)$$

Поскольку $U_0/\mu \ll 1$ и $r_L/l \sim (\Omega\tau)^{-1}$, условие (12.54) значительно слабее, чем $\Omega\tau > 1$ и может выполняться при весьма малых полях.

Оценка коэффициента поглощения в нелинейном режиме имеет вид

$$\Gamma \sim [\omega_0 \min(\tau_1, \tau)]^{-1} \Gamma_0. \quad (12.55)$$

Если $\tau_1 < \tau$, то коэффициент поглощения пропорционален H и $I^{-1/2}$. Рост коэффициента поглощения с полем продолжается до тех пор, пока $\omega_0 \tau_1 \gtrsim 1$, а затем Γ приближается к Γ_0 — значению для линейного поглощения. Условие $\omega_0 \tau_1 \sim 1$ после подстановки выражений (12.53) и (12.49) совпадает с (12.52).

Оценим значение магнитного поля, при котором оно начинает существенно влиять на поглощение звука. Из условий $\omega_0 \tau_1 > 1$ и $\tau_1 < \tau$ имеем $\omega_0 \tau > 1$. С другой стороны, условие $\tau_1 < \tau$ дает:

$$\omega_0 < \Omega k v \tau \sim \Omega k l.$$

Следовательно, во всяком случае $\Omega k l \tau > 1$, или $(\Omega/v) k l^2 > 1$. Но так как $v/\Omega \sim r_L$, мы получаем

$$r_L < k l^2. \quad (12.56)$$

Если взять частоту звука порядка 10^9 Гц, то $k \sim 10^4$ см⁻¹. В чистом металле можно добиться $l \sim 10^{-1}$ см. При этом получаем

$$r_L < 10^{-2} \text{ см} \quad \text{и} \quad H > 10^{-1} \text{ Э.}$$

Следовательно, в этом случае магнитное поле Земли оказывается достаточным для подавления нелинейного поглощения.

В заключение отметим, что во всем этом разделе движение электронов описывалось классическим уравнением Ньютона. Это справедливо, если число квантовых уровней внутри потенциальных ям звуковой волны велико. Соответствующее условие имеет вид

$$m^{-1}(\hbar/\lambda)^2 \sim (\hbar k)^2/m \ll U_0. \quad (12.57)$$

Есть и другая возможность подавления квантовых эффектов, а именно, когда размытие уровней благодаря столкновениям больше расстояния между ними. Соответствующее условие имеет вид

$$(\hbar k)^2/m \ll \hbar/\tau. \quad (12.58)$$

При выполнении любого из этих условий задача становится классической.

Изложенные теоретические результаты по зависимости коэффициента поглощения от интенсивности звука и подавлению нелинейного поглощения слабым магнитным полем подтверждены экспериментальными данными (см. [107]).

§ 12.8. Гигантские осцилляции поглощения вследствие квантования уровней в магнитном поле

До сих пор, говоря о влиянии магнитного поля на поглощение звука, мы ограничивались классической теорией. Рассмотрим теперь сначала качественно, а потом количественно, что возникает при учете квантования уровней в магнитном поле. Очевидно, оно сказывается лишь при температурах $T \ll \hbar\Omega$.

В модели свободных электронов уровни описываются формулой

$$\varepsilon = \hbar\Omega (n + 1/2) + p_z^2/2m.$$

При поглощении фонона законы сохранения дают

$$p'_z = p_z + \hbar k_z,$$

$$\hbar\Omega (n' + 1/2) + p_z'^2/2m = \hbar\Omega (n + 1/2) + p_z^2/2m + \hbar\omega.$$

Считая k_z малым, получаем отсюда

$$\hbar\Omega (n' - n) + p_z \hbar k_z / m = \hbar\omega. \quad (12.59)$$

Если $n \neq n'$, то член $\hbar\Omega (n' - n)$ будет очень большим по сравнению с остальными, а потому условие (12.59) может быть выполнено лишь при $n' = n$. Отсюда получаем

$$p_z \hbar k_z / m = \hbar\omega,$$

или

$$p_z = m\omega/k_z = msk/k_z = ms/\cos\theta. \quad (12.60)$$

Значение p_z , даваемое этим соотношением, зависит от θ . Изменяя $\cos\theta$, мы можем увеличивать или уменьшать значение p_z , при котором происходит поглощение.

Если мы изобразим энергию как функцию p_z , то получим систему парабол (рис. 12.9). Если $T \ll \hbar\Omega \ll \mu$, то в поглощении участвуют лишь те электроны, которые лежат в полосе шириной T в окрестности μ . Импульсы для этих электронов лежат в интервалах 1, 2, 3 на рис. 12.9. Предположим, что значение p_z , удовлетворяющее условию (12.60), есть P . Если это P расположено так, как на рис. 12.9, то это «запрещенная область» для поглощения звука, т. е. поглощение будет ничтожным.

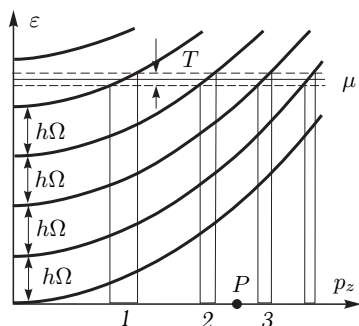


Рис. 12.9

Если теперь мы начнем увеличивать поле, то все параболы двинутся вверх. Это приведет к движению интервалов 1, 2, 3 вдоль оси p_z . В конце концов точка P окажется в одном из этих интервалов. В этом случае поглощение возможно. Разница между «разрешенным и запрещенным» поглощением звука очень велика, и поэтому такие осцилляции коэффициента поглощения с увеличением магнитного поля были названы гигантскими квантовыми осцилляциями (Гуревич, Скобов, Фирсов, 1961) [108].

Теперь рассмотрим этот эффект количественно. Энергия, диссипируемая за единицу времени в 1 см^3 , дается формулой, аналогичной (12.18):

$$Q = \frac{\pi}{2\hbar V} \sum_{a, a'} [f_0(\varepsilon_a) - f_0(\varepsilon_{a'})] \hbar \omega_{a'a} |U_{a'a}|^2 \delta(\hbar \omega_{a'a} - \hbar \omega). \quad (12.61)$$

Индексы a означают p_y, p_z и n ¹⁾. Если $\hbar \omega \ll T$, то мы можем разложить функцию распределения по разности энергий

$$\varepsilon_{a'} - \varepsilon_a \equiv \hbar \omega_{a'a} = \hbar \omega.$$

Тогда получаем

$$Q = -\frac{\pi}{2\hbar V} \sum_{a, a'} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} (\hbar \omega)^2 |U_{a'a}|^2 \delta(\hbar \omega_{a'a} - \hbar \omega). \quad (12.62)$$

У нас было

$$U = \Lambda_{ik} u_{ik}^0 e^{ikr}.$$

В общем случае теперь Λ_{ik} зависит от импульса, но здесь для простоты мы будем считать его константой. Тогда получаем

$$U_{a'a} = \Lambda_{ik} u_{ik}^0 \delta_{nn'} \delta_{p'_y, p_y + \hbar k_y} \delta_{p'_z, p_z + \hbar k_z}.$$

Другие величины зависят только от ε и не зависят от p_y . Здесь $\delta_{p'_y, p_y + \hbar k_y}$ — символ Кронекера, поэтому $\delta^2 = \delta$ и $\sum_{p'_y} \delta^2 = 1$. Остающаяся сумма по p_y сводится к умножению на число состояний с различными p_y . Это дает

$$\sum_{p_y} = \frac{L_2 \Delta p_y}{2\pi \hbar} = \frac{L_2 L_1 e H}{2\pi \hbar c}.$$

¹⁾ Кроме того, должна быть задана и проекция спина. Мы будем считать, что число n нумерует и уровни Ландау, и проекции спина, тем более, что в тяжелых металлах вследствие сильной спин-орбитальной связи нумерация уровней является более сложной и спин в чистом виде не выделяется.

Суммирование по p'_z приводит к замене $p'_z \rightarrow p_z = \hbar k_z$ в $\delta(\omega_{a'a} - \omega)$. После этого мы перейдем от суммы к интегралу: $\sum_{p_z} \rightarrow \rightarrow L_3 (2\pi\hbar)^{-1} \int dp_z$. Итак

$$Q = -\frac{\pi\omega^2}{2} \left(\frac{\Lambda_{ik} u_{ik}^0}{2\pi\hbar} \right)^2 \frac{eH}{c} \sum_n \int dp_z \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \delta \left(\frac{k_z p_z}{m} - \omega \right). \quad (12.63)$$

Используем модель свободных электронов; при этом

$$\varepsilon = p_z^2/2m + \hbar\Omega (n + 1/2) \pm \hbar\Omega/2 \rightarrow p_z^2/2m + \hbar\Omega n \quad (n = 0, 1, \dots),$$

причем все уровни с $n > 0$ двукратно вырождены. Предположим

$$\Omega \gg \omega \quad \text{и} \quad \Omega \gg kp_z/m.$$

Тогда условие $\omega_{a'a} = \omega$ может быть выполнено лишь для $n = n'$. Мы будем дальше предполагать также $T \ll \hbar\Omega \ll \mu$. Подставляя в соотношение (12.63)

$$\partial f_0 / \partial \varepsilon = -(4T)^{-1} \text{ch}^{-2}[(\varepsilon - \mu)/2T],$$

получаем коэффициент поглощения в виде

$$\begin{aligned} \Gamma = \frac{Q}{(1/2)\rho\omega^2 u_0^2 s} &= \frac{\pi\omega^2}{(2\pi\hbar)^2} \frac{eH}{c} \frac{(\Lambda_{ik} u_{ik}^0)^2}{(1/2)\rho\omega^2 u_0^2 s} (4T)^{-1} \times \\ &\times \sum_n \int \delta \left(\frac{k_z p_z}{m} - \omega \right) \text{ch}^{-2} \left[\frac{p_z^2/2m + \hbar\Omega n - \mu}{2T} \right] dp_z. \end{aligned}$$

При $H \rightarrow 0$ отсюда должно получиться поглощение в отсутствие поля. Поэтому можно написать

$$\Gamma = \Gamma_0 \frac{k_z}{m} \frac{\hbar\Omega}{4T} \sum_n \int \delta \left(\frac{k_z p_z}{m} - \omega \right) \text{ch}^{-2} \left[\frac{p_z^2/2m + \hbar\Omega n - \mu}{2T} \right] dp_z. \quad (12.64)$$

Действительно, при $\Omega \rightarrow 0$ сумма по n заменяется интегралом и $\Gamma \rightarrow \Gamma_0$. Интеграл по p_z дает значение p_z согласно формуле (12.60). Считая $p_z^2/2m \ll \hbar\Omega$, можем еще дальше упростить формулу для Γ :

$$\Gamma = \Gamma_0 \frac{\hbar\Omega}{4T} \sum_n \text{ch}^{-2} \left[\frac{\hbar\Omega n - \mu}{2T} \right]. \quad (12.65)$$

Если H очень велико (так что $\hbar\Omega \gg T$), то в случае, когда один из аргументов $\hbar\Omega n$ близок к μ ,

$$\Gamma \approx \Gamma_0 \hbar\Omega/4T \gg \Gamma_0. \quad (12.66)$$

Если же все $\hbar\Omega n$ далеки от μ , то

$$\Gamma = \Gamma_0 (\hbar\Omega/4T) e^{-\alpha\hbar\Omega/T} \ll \Gamma_0 \quad (12.67)$$

($\alpha \sim 1$). Таким образом, коэффициент поглощения Γ как функция поля H совершает очень сильные осцилляции, расположенные равномерно по шкале H^{-1} :

$$\Delta(H^{-1}) = e\hbar/mc\mu.$$

Острые и высокие максимумы разделены широкими минимумами, где поглощение звука пренебрежимо мало. Однако точное значение коэффициента поглощения в минимуме можно определить, лишь если учесть рассеяние электронов. Оценку этого эффекта можно произвести с помощью следующего приема. Наличие рассеяния приводит к неопределенности в энергии электрона порядка $\hbar/\tau$. Поэтому заменим δ -функцию в (12.64), выражающую закон сохранения энергии, на несколько размазанную функцию с шириной τ^{-1} . Обычно $\omega \ll \tau^{-1}$, а поэтому ω можно пренебречь. Возьмем вместо δ -функции

$$(\pi\tau)^{-1} \left[\tau^{-2} + (k_z p_z/m)^2 \right]^{-1}.$$

Введем теперь новую переменную $p_z/(2mT)^{1/2} = y$. Выражение для Γ приобретает вид

$$\Gamma = \Gamma_0 \frac{\hbar\Omega}{4T} \int \frac{1}{\pi} \frac{B}{1+B^2 y^2} \sum_n \text{ch}^{-2} \left(\frac{y^2 - A_n}{2} \right) dy, \quad (12.68)$$

где

$$B = (2T/m)^{1/2} k_z \tau, \quad A_n = (\mu - \hbar\Omega n) T.$$

В интеграле (12.68) оба множителя быстро меняющиеся. Множитель $\sum_n \text{ch}^{-2}$ имеет много максимумов с шириной порядка единицы, разделенных интервалами порядка $(\hbar\Omega/T)^{1/2}$, а член $B/(1+B^2 y^2)$ имеет максимум ширины B^{-1} при $y = 0$.

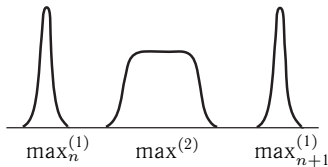


Рис. 12.10

Рассмотрим случай, когда ширина кривой $B/(1+B^2 y^2)$ много меньше, чем расстояние между двумя максимумами другого множителя (рис. 12.10). Для этого нужно, чтобы выполнялось условие

$$B (\hbar\Omega/T)^{1/2} \gg 1, \quad \text{или} \quad kl (\hbar\Omega/\mu)^{1/2} \gg 1. \quad (12.69)$$

Для обычных металлов условие (12.69) очень сильное, так как для $H \sim 10^4$ Э ($\hbar\Omega/\mu)^{1/2} \sim 10^{-2}$, так что нужна очень малая длина волны. Если взять очень чистый металл с $l \sim 0,1$ см, то должно быть $k \sim 10^3$, или $\omega = ks \sim 10^8$ с $^{-1}$. Это довольно высокая частота для звука,

хотя и достижимая в настоящее время. В полуметаллах $m^* \sim 0,01m$, $p_0 \sim 0,01\hbar/a$, что дает возможность снизить предельную частоту на два порядка.

Пусть H таково, что один из максимумов множителя $\sum_n \text{ch}^{-2}$ попадает в положение $y = 0$. Тогда мы имеем один из максимумов Γ .

Если бы ширина B^{-1} была мала по сравнению с единицей, то множитель $(B/\pi)(1+B^2y^2)^{-1}$ можно было бы заменить на δ -функцию. При этом получается формула (12.66). Если, однако, $B \lesssim 1$, то форма линии поглощения будет совершенно иной.

В случае $B \ll 1$ получаем

$$\Gamma_{\max} \sim B(\hbar\Omega/T)\Gamma_0 \sim \hbar\Omega(T\mu)^{-1/2}kl\Gamma_0. \quad (12.70)$$

Теперь рассмотрим минимум. Очевидно, он будет иметь место, если ближайшие к точке $y = 0$ пики первой функции будут максимально удалены от этой точки; соответствующее $A_{n0} \sim \hbar\Omega/T$. Поскольку ширина функций ch^{-2} порядка единицы, то при этих условиях их можно заменить на δ -функции. Таким образом, находим

$$\begin{aligned} \Gamma_{\min} &\sim \Gamma_0 (\hbar\Omega/T) (BA_{n0}^{3/2})^{-1} \sim \\ &\sim \Gamma_0 (\mu/\hbar\Omega)^{1/2} (kl)^{-1}. \end{aligned} \quad (12.71)$$

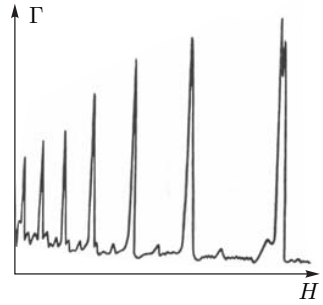


Рис. 12.11

Итак, для двух случаев: $B \gg 1$ и $B \ll 1$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_{\max}}{\Gamma_{\min}} &\sim \frac{\hbar\Omega}{T} \left(\frac{\hbar\Omega}{\mu} \right)^{1/2} kl, \quad \text{если} \quad \left(\frac{T}{\mu} \right)^{1/2} kl \gg 1, \\ \frac{\Gamma_{\max}}{\Gamma_{\min}} &\sim \frac{\hbar\Omega}{\mu} \left(\frac{\hbar\Omega}{T} \right)^{1/2} (kl)^2, \quad \text{если} \quad \left(\frac{T}{\mu} \right)^{1/2} kl \ll 1. \end{aligned} \quad (12.72)$$

До сих пор мы рассматривали свободные электроны, что дало нам возможность оценить порядок величины эффекта. Теперь посмотрим, чему будут соответствовать максимумы в анизотропном металле. Мы получаем

$$\varepsilon(p_z + \hbar k_z, n) - \varepsilon(p_z, n) = \hbar\omega,$$

или

$$v_z \hbar k_z = \hbar\omega.$$

Следовательно,

$$v_z \sim s \ll v.$$

Это означает, что существенны те сечения ферми-поверхности, где средняя скорость в направлении поля практически обращается в нуль. Но таким свойством в общем случае обладает лишь центральное сечение ферми-поверхности. Следовательно, интервал между максимумами поглощения будет определяться соотношением

$$\Delta(H^{-1}) = 2\pi e\hbar / (cS(\mu))_{\text{центр}}.$$

Так как максимумы очень острые, то этот метод дает возможность получения самих квантовых уровней. Это особенно важно для низлежащих уровней, где квазиклассическое приближение не годится, и уровни, вообще говоря, не эквидистантны. Конечно, это возможно лишь для малых участков ферми-поверхностей с малыми массами, или в полуметаллах.

В настоящее время эффект гигантских осцилляций обнаружен в целом ряде веществ, например в галлии (рис. 12.11) [109].

Глава 13

ФЕРМИ-ЖИДКОСТНЫЕ ЭФФЕКТЫ

§ 13.1. Взаимодействие квазичастиц

В гл. 2, говоря о соответствии между жидкостью, состоящей из ферми-частиц (ферми-жидкостью), и идеальным ферми-газом, мы сознательно опустили один существенный момент. Согласно теории Ландау, есть одно важное отличие между спектрами квазичастиц ферми-жидкости и ферми-газа. В то время как в случае ферми-газа форма энергетического спектра (2.6) определяется лишь энергией свободной частицы, в ферми-жидкости существенную роль играет взаимодействие с другими квазичастицами, которое, вообще говоря, не мало.

В гл. 2 мы выяснили, что это взаимодействие не приводит к большому затуханию, если энергия квазичастицы находится вблизи энергии Ферми. Но это было связано не со слабостью взаимодействия, а с особенностью ферми-спектра (наличием заполненной ферми-сферы). То, что взаимодействие не является слабым, проявляется, в частности, в том, что эффективная масса квазичастиц может заметно отличаться от массы свободных частиц (например, в жидком ^3He при низкой температуре $m^* = 3m_{^3\text{He}}$, в металлах это отличие меньше, см. гл. 14).

По идее Ландау (1956) [3] взаимодействие квазичастиц может быть введено как некоторое самосогласованное поле от окружающих квазичастиц, действующее на данную. Но при этом, очевидно, энергия квазичастицы будет зависеть от состояния других квазичастиц, т. е., иначе говоря, будет функционалом от их функции распределения ¹⁾.

¹⁾ В этой главе будем называть квазичастицами частицы газовой модели ферми-жидкости. Однако, в отличие от предыдущих глав, мы будем учитывать взаимодействие квазичастиц.

В таком случае возникают вопросы: как определять эту энергию, что представляет собой равновесная функция распределения, как находить неравновесную функцию и т. д. Иными словами, строго говоря, надо пересмотреть все выводы и результаты, полученные до сих пор, так как в них, по сути дела, использовалась газовая модель без учета зависимости энергетического спектра от функции распределения.

В действительности, мы покажем в этой главе, это новое обстоятельство, за редким исключением, оказывается несущественным. В ряде случаев оно не меняет порядка величины результата. Но есть явления, которые происходят исключительно вследствие зависимости спектра от функции распределения. Такие явления мы называем ферми-жидкостными эффектами. Для простоты всюду ниже рассматривается изотропная модель металла.

В этой главе мы будем пользоваться другим обозначением функции распределения, а именно $n(\mathbf{p}, \mathbf{r})$. Связано это с тем, что буква f в теории ферми-жидкости всегда обозначает функцию Ландау (см. ниже), и введение для последней другого обозначения нерацionalmente.

Мы начнем с энергии квазичастиц. Пусть полная энергия системы равна $E[n]$, где $[n]$ означает функциональную зависимость от функции распределения. Энергию квазичастиц естественно определить следующим образом.

При малом изменении функции распределения δn изменение полной энергии на единицу объема имеет вид

$$\delta E = \sum_{\sigma} \int \varepsilon(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) \delta n(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (13.1)$$

где $\sum_{\sigma}$ обозначает суммирование по проекциям спина. Величину $\varepsilon(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma})$ естественно считать энергией квазичастиц. Действительно, если появилась одна квазичастица с импульсом $\mathbf{p}_1$ и проекцией спина σ_1 то $\delta n(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) = (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \delta_{\sigma\sigma_1}$. Но при этом $\delta E = \varepsilon(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\sigma}_1)$.

Вообще говоря, наравне с импульсом и спином здесь надо бы ввести еще и координату. Однако в действительности благодаря тому, что длина волны электронов порядка межатомных расстояний, рассматриваемые нами неоднородности функции распределения с характерными расстояниями, значительно большими межатомных, не будут влиять на энергию квазичастиц.

Формулу (13.1) удобно записать в другом виде. Если спин электрона играет существенную роль в задаче, то вместо функции распределения надо пользоваться так называемым статистическим оператором, или матрицей плотности: $n(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma})$. При этом среднее значение всякой величины, которой соответствует оператор A , зависящий от операторов спина и импульса, выражается формулой

$$\bar{A} = \text{Sp}_{\sigma} \int A n(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (13.2)$$

В частности, (13.1) может быть тоже записана в такой же форме:

$$\delta E = \text{Sp}_\sigma \int \varepsilon(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) \delta n(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (13.3)$$

Определение энергии квазичастиц согласно (13.3), как мы сейчас увидим, дает в случае равновесия распределение Ферми. Для этого напомним формулу для энтропии:

$$S = -\text{Sp}_\sigma \int \{n \ln n + (1 - n) \ln(1 - n)\} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (13.4)$$

Справедливость этой формулы применительно к квазичастицам в ферми-жидкости доказывается тем, что она имеет чисто комбинаторное происхождение, а для квазичастиц имеет место принцип Паули, так же как и для частиц ферми-газа. Теперь найдем максимум энтропии, требуя при этом неизменность числа частиц и полной энергии. Это можно сделать, отыскивая максимум выражения

$$S' = S + \alpha E + \beta N,$$

где α и β — неопределенные множители Лагранжа. Проварьировав это выражение по n , из условия $\delta S' = 0$ мы находим равновесную функцию распределения:

$$n_0(\varepsilon) = n_F(\varepsilon) = \left[e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1 \right]^{-1}, \quad (13.5)$$

где μ и T связаны с множителями α и β .

Из формул (13.5) и (13.3) сразу следует правильность определения теплоемкости в § 2.4. Действительно, формула (2.18) формально соответствует формуле (13.3). На самом деле между этими формулами есть отличие, так как в (2.18) не учитывается изменение ε при изменении функции распределения с температурой. Однако это дает лишь малые поправки к теплоемкости порядка $(T/\mu)^2$.

§ 13.2. Функция f Ландау

Хотя зависимость спектра от функции распределения не сказывается в теплоемкости, но тем не менее она имеет место. Если E является функционалом от n , то это же справедливо для ε . При малом изменении функции распределения функция ε приобретает добавку, которая может быть записана в виде

$$\delta \varepsilon(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) = \text{Sp}_{\sigma'} \int f(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}; \mathbf{p}', \boldsymbol{\sigma}') \delta n(\mathbf{p}', \boldsymbol{\sigma}') \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (13.6)$$

Поскольку функция f является второй вариационной производной от полной энергии, то она симметрична относительно перестановки аргументов, т. е.

$$f(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}; \mathbf{p}', \boldsymbol{\sigma}') = f(\mathbf{p}', \boldsymbol{\sigma}'; \mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}).$$

Существование связи (13.6) сказывается, прежде всего, в кинетическом уравнении. В § 3.2 при выводе кинетического уравнения мы имели

$$dn/dt = \partial n / \partial t + (\partial n / \partial \mathbf{r}) d\mathbf{r} / dt + (\partial n / \partial \mathbf{p}) d\mathbf{p} / dt.$$

Величина $d\mathbf{p}/dt$ определялась действующей силой. Считалось, что единственная сила происходит от внешнего поля. Однако в данном случае благодаря связи (13.6) энергия квазичастиц начинает зависеть от координаты через функцию распределения n . Это означает появление потенциальной энергии, которая описывает действие на данную квазичастицу самосогласованного поля остальных квазичастиц. Следовательно, мы теперь должны написать

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} = e\mathbf{E} - \text{Sp}_{\sigma'} \int f(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}; \mathbf{p}', \boldsymbol{\sigma}') \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Итак, в левой стороне кинетического уравнения появляется дополнительный член. Если считать $n = n_0(\varepsilon_0) + n_1$, где ε_0 — энергия в равновесии при $T = 0$, и ограничиваться линейными членами по n_1 , то дополнительный член имеет вид

$$- \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \mathbf{v} \text{Sp}_{\sigma'} \int f(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}; \mathbf{p}', \boldsymbol{\sigma}') \frac{\partial n_1}{\partial \mathbf{r}} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Наконец, если отыскивать n_1 в виде $n_1 = -\psi \partial n_0 / \partial \varepsilon$, то, поделив все уравнение на $\partial n_0 / \partial \varepsilon$, мы получаем дополнительный член в уравнении для ψ в виде

$$- \frac{\mathbf{v}}{(2\pi\hbar)^3} \text{Sp}_{\sigma'} \int f(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}; \mathbf{p}', \boldsymbol{\sigma}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{p}', \boldsymbol{\sigma}') \frac{dS'}{v},$$

где импульсы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ находятся на поверхности Ферми.

Следовательно, кинетическое уравнение может быть записано в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\psi + \text{Sp}_{\sigma'} \int f(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}; \mathbf{p}', \boldsymbol{\sigma}') \psi(\mathbf{p}', \boldsymbol{\sigma}') \frac{dS'}{v(2\pi\hbar)^3} \right) - e\mathbf{v}\mathbf{E} = I(\psi). \quad (13.7)$$

При наличии не слишком сильного магнитного поля в левой части кинетического уравнения появляется еще один член:

$$\frac{e}{c} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{H} \right] \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}}.$$

В нулевом приближении он дает нуль, так как n_0 зависит только от ε . В первом приближении надо учесть член с ψ не только в $\partial n / \partial \mathbf{p}$,

но и в $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$. Несложный расчет показывает, что это приводит к появлению в (13.7) члена

$$\frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(\psi + \text{Sp}_{\sigma'} \int f(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}; \mathbf{p}', \boldsymbol{\sigma}') \psi(\mathbf{p}', \boldsymbol{\sigma}') \frac{dS'}{v(2\pi\hbar)^3} \right).$$

Оператор $(e/c) [\mathbf{v} \mathbf{H}] \partial/\partial\mathbf{p}$ есть не что иное, как $\partial/\partial t_1$, где t_1 — переменная, введенная в § 5.1.

Рассмотрим интеграл столкновений. Очевидно, что он обращается в нуль лишь в том случае, если в него подставить $n_0(\varepsilon)$ с реальной энергией ε , а не $n_0(\varepsilon_0)$. Мы можем написать

$$n = n_0(\varepsilon_0) + n_1 = n_0(\varepsilon) - \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \text{Sp}_{\sigma'} \int f n_1 \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} + n_1.$$

Подставив сюда $n_1 = -\psi \partial n_0 / \partial \varepsilon$, получаем

$$n = n_0(\varepsilon) - \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \left[\psi + \text{Sp}_{\sigma'} \int f \psi \frac{dS'}{v(2\pi\hbar)^3} \right].$$

Поскольку интеграл столкновений обращается в нуль при подстановке $n_0(\varepsilon)$, то, очевидно, он будет зависеть от функции

$$\varphi = \psi + \text{Sp}_{\sigma'} \int f \psi \frac{dS'}{v(2\pi\hbar)^3} \quad (13.8)$$

так же, как при $f = 0$ он зависел от ψ .

Найдем выражение электрического тока через ψ :

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= e \text{Sp}_{\sigma} \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} n \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= e \text{Sp}_{\sigma} \int \mathbf{v} n_1 \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} + e \text{Sp}_{\sigma, \sigma'} \int n_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \int f n_1 \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} \end{aligned}$$

($\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$). Взяв интеграл по $\mathbf{p}$ по частям, получаем

$$\mathbf{j} = e \text{Sp}_{\sigma} \int \mathbf{v} n_1 \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} - e \text{Sp}_{\sigma, \sigma'} \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \mathbf{v} \int f n_1 \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Наконец, подставляя $n_1 = -\psi \partial n_0 / \partial \varepsilon$, имеем

$$\mathbf{j} = e \text{Sp}_{\sigma} \int \left[\psi + \text{Sp}_{\sigma'} \int f \psi \frac{dS'}{v(2\pi\hbar)^3} \right] \mathbf{v} \frac{dS}{v(2\pi\hbar)^3}. \quad (13.9)$$

Итак, оказывается, что выражение для тока и интеграл столкновений при учете f -функции зависят от комбинации φ (13.8) так же, как при $f = 0$ они зависели от ψ . Можно легко показать, что это остается верным и для теплового потока. Если ψ не зависит от времени, или если ω гораздо меньше характерной частоты для рассматриваемой задачи, то в левой части кинетического уравнения (13.7) отсутствует член $\partial\psi/\partial t$. Но в этом случае в него входит та же самая комбинация φ (13.8). Отсюда следует, что во всех рассмотренных ранее явлениях, для которых в кинетическом уравнении можно полагать $\omega = 0$, наличие f -функции никак не сказывается.

Функция f играет роль лишь в тех кинетических явлениях, для которых существен член $\partial\psi/\partial t$ в кинетическом уравнении. Однако даже тут это происходит не всегда. Рассмотрим, например, аномальный скин-эффект или циклотронный резонанс (см. гл. 7). Мы выяснили, что при этом функция ψ имеет почти δ -образный характер: $\psi \propto \delta(v_x)$, где v_x — компонента скорости, перпендикулярная поверхности. Конечно, функция ψ имеет и гладкую часть, но в рассматриваемых задачах она не существенна. Нетрудно видеть, что при подстановке δ -функции в интеграл (13.8) мы получаем гладкую функцию. Следовательно, δ -образные части функций ψ и φ одинаковы. Значит, различием ψ и φ можно пренебречь, что оправдывает полностью вычисления, сделанные без учета функции f .

Наконец, в некоторых задачах, рассмотренных ранее, существен член $\partial\psi/\partial t$ и в то же время ψ -функция не имеет δ -образного характера. Например, это относится к задаче о распространении магнитоплазменных волн в четном металле. В этом случае член $\mathbf{v} \partial\psi/\partial \mathbf{r}$ не существует, но имеется член $\partial\psi/\partial t$. Отличие от случая с $f = 0$ заключается в том, что в токе и в интеграле столкновений ψ заменяется на $\varphi = L\psi$, где L — действительный линейный интегральный оператор. По порядку величины $L \sim 1$.

Отсюда видно, что утверждение о том, что при $\omega\tau \gg 1$ кинетические коэффициенты будут зависеть от $-i\omega$ так же, как они зависели от τ^{-1} при $\omega\tau \ll 1$, остается правильным по порядку величины, а также в смысле характера комплексности коэффициентов. Но ведь и само τ определено лишь по порядку величины. Следовательно, наличие функции f в этом случае не приводит к качественному изменению результатов. Однако при конкретных расчетах с заданной формой спектра функцию f надо учитывать.

Итак, практически во всех расчетах, где применимо представление о квазиклассическом электроде, движущемся по орбите, ферми-жидкостные эффекты практически никак не проявляются. Именно поэтому, чтобы не усложнять расчетов и их наглядной интерпретации, мы не вводили эту функцию в предыдущих главах.

§ 13.3. Роль взаимодействия квазичастиц в парамагнитной восприимчивости

В § 10.1 было рассмотрено самое простое квантовое явление — спиновый парамагнетизм. Согласно формуле (10.2) парамагнитная восприимчивость χ содержит единственную характеристику данного металла — плотность состояний $\nu(\mu)$, т.е. ту же величину, которая, согласно формуле (2.28), определяет электронную теплоемкость. Как уже отмечалось в § 3.1, формула для теплоемкости не меняется при учете взаимодействия квазичастиц. Однако, как мы сейчас покажем, функция f , не меняя порядка величины χ , приводит к изменению ее конкретного значения ¹⁾.

Изменение энергетического спектра благодаря действию магнитного поля на спин может быть в общем случае записано в виде

$$\delta\varepsilon = -\beta_1(\sigma\mathbf{H}). \quad (13.10)$$

Это изменение складывается из двух компонент. Во-первых, магнитное поле действует на магнитный момент электрона, что дает вклад $-\beta\sigma\mathbf{H}$ (β — магнетон Бора). Во-вторых, изменение функции распределения оказывает влияние на энергетический спектр. Соответствующее изменение энергии, очевидно, равно

$$\begin{aligned} \text{Sp}_{\sigma'} \int f(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') \delta n(\mathbf{p}', \sigma') \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} = \\ = \text{Sp}_{\sigma'} \int f(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') (\partial n_0 / \partial \varepsilon') \delta\varepsilon(\mathbf{p}', \sigma') \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} = \\ = -\text{Sp}_{\sigma'} \int f(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') (\partial n_0 / \partial \varepsilon') \beta_1(\mathbf{p}')(\sigma'\mathbf{H}) \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}. \end{aligned}$$

Мы подставили для $\delta\varepsilon$ выражение (13.10).

Теперь рассмотрим вопрос о зависимости f от спинов. В изотропной жидкости для спина нет выделенного направления, а потому есть лишь одна возможность:

$$f = \eta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + (\sigma\sigma')\zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \quad (13.11)$$

где σ_i — матрицы Паули. На самом деле даже в реальном металле можно приближенно пользоваться формулой (13.11). Это связано с тем, что член, содержащий произведение $(\sigma\sigma')$, имеет обменное происхож-

¹⁾ В металлах точное значение χ не представляет большого интереса, так как измерить можно лишь полную восприимчивость, а расчет диамагнитной части представляет большие трудности. Но существует нейтральная ферми-жидкость — жидкий ³He, обладающая лишь спиновым парамагнетизмом. В ней путем сравнения χ с теплоемкостью можно получить сведения о функции f .

дение, т.е. определяется кулоновским взаимодействием электронов. В то же время всякие анизотропные члены имеют в своей основе либо релятивистские спин-орбитальные взаимодействия, о которых шла речь в § 10.7, либо непосредственное взаимодействие магнитных моментов. Все эти эффекты составляют примерно $(v/c)^2 \sim 10^{-3}-10^{-4}$ от кулоновских взаимодействий. Таков и относительный порядок анизотропных членов в функции f . Поэтому выражение (13.11) является и в реальном металле неплохим приближением.

Подставляя выражение (13.11) в предыдущую формулу, получаем изменение энергии из-за функции f :

$$-2(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}) \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \beta_1(\mathbf{p}') \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Следовательно, оба члена в $\delta\varepsilon$ пропорциональны $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}$, и мы можем написать уравнение

$$\beta_1 = \beta - 2 \int \zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \beta_1(\mathbf{p}') \frac{dS'}{v(2\pi\hbar)^3}, \quad (13.12)$$

где импульс $\mathbf{p}'$ лежит на ферми-поверхности.

Магнитный момент равен

$$\begin{aligned} M &= \beta \text{Sp}_\sigma \boldsymbol{\sigma} \int n(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \beta \text{Sp}_\sigma \boldsymbol{\sigma} \int \delta n(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= \beta \text{Sp}_\sigma \boldsymbol{\sigma} \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = -\beta \text{Sp}_\sigma \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}) \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \beta_1(\mathbf{p}) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= 2\beta\mathbf{H} \int \beta_1(\mathbf{p}) \frac{dS}{v(2\pi\hbar)^3}, \quad (13.13) \end{aligned}$$

где в последнем интеграле $\mathbf{p}$ лежит на ферми-поверхности.

В изотропной модели функция $\zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ может зависеть лишь от угла между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$, а $\beta_1(\mathbf{p})$ не может зависеть от направления вектора $\mathbf{p}$. При этом результат очень упрощается. Решая уравнение (13.12), получаем

$$\beta_1 = \beta/(1 + Z_0), \quad (13.14)$$

где

$$Z_0 = \nu(\mu) \zeta_0, \quad \zeta_0 = \int \zeta \frac{dS}{v} \left(\int \frac{dS}{v} \right)^{-1} = \int \zeta \frac{d\Omega}{4\pi}.$$

Очевидно, $\zeta \sim \mu\hbar^3/p_0^3$, и так как

$$\nu = 2 \int \frac{dS}{v(2\pi\hbar)^3} \sim \frac{p_0^2}{\hbar^3 v} \sim \frac{p_0^3}{\hbar^3 \mu},$$

то $Z_0 \sim 1$.

В дальнейшем вместо f будет удобно пользоваться безразмерной функцией порядка единицы:

$$F = f\nu(\mu) \quad (13.15)$$

и ее представлением в форме (13.11):

$$F = X(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + (\sigma\sigma') Z(\mathbf{p}, \mathbf{p}').$$

Подставляя β_1 в формулу (13.13), получаем [3]

$$\chi = \beta^2 \nu(\mu) / (1 + Z_0). \quad (13.16)$$

Итак, найденное выражение отличается от (10.2) и поэтому по данным о теплоемкости нельзя предсказывать непосредственно парамагнитную восприимчивость. Величина β в полуметаллах и полупроводниках с узкой запрещенной зоной отличается от магнетона Бора из-за влияния спин-орбитального взаимодействия.

Не исключена следующая возможность. Величина Z_0 должна иметь порядок единицы и может быть произвольного знака. Очевидно, все наши рассуждения справедливы лишь при $Z_0 > -1$. Если Z_0 становится равным -1 , то χ обращается в бесконечность, т.е. металл становится ферромагнитным. В этом случае требуется специальный подход, и наше рассмотрение не годится.

Физика этого явления заключается в следующем. Обычно принцип Паули создает у электронов тенденцию к противоположному направлению спинов, и если электроны не взаимодействуют или их взаимодействие не зависит от спинов, то в равновесии имеется одинаковое число электронов с противоположными спинами. Для создания полного спина, не равного нулю, нужно перераспределить электроны по состояниям, что связано с увеличением энергии. Если же взаимодействие электронов зависит от спинов, причем спины стремятся выстроиться параллельно (отрицательная функция Z), то при достаточной величине Z уменьшение энергии благодаря взаимодействию может превысить увеличение кинетической энергии при перераспределении по состояниям. При этом возникнет новое основное состояние с нескомпенсированным полным спином и магнитным моментом — ферромагнитное состояние ¹⁾.

Но, как уже говорилось, этот случай требует отдельного рассмотрения (см. приложение I).

Возможен также случай, когда Z_0 очень близко к -1 ($Z_0 + 1 \ll 1$); при этом магнитная восприимчивость χ становится очень большой. Это имеет место в палладии и его сплавах. Такие металлы называются

¹⁾ Здесь речь идет о ферромагнитных металлах. В диэлектриках обычно более удобным является представление о локализованных спинах, которые упорядочиваются под действием обменного взаимодействия.

«почти ферромагнитными» и обладают рядом аномальных свойств. Мы здесь не будем рассматривать этот случай.

§ 13.4. Квантование Ландау и квантовые осцилляции

Теперь речь пойдет о квантовых явлениях в магнитном поле. Все они происходят от квантования уровней энергии, связанного как с орбитальным движением электронов, так и с ориентацией их спина.

Начнем с орбитального движения. В § 10.4 были найдены квазиклассические уровни энергии (с большими квантовыми числами) без учета функции f (формула (10.17)). При этом было отмечено, что правило квантования уровней соответствует в координатном пространстве квантованию магнитного потока: магнитный поток, проходящий внутри спиральной электронной траектории, может меняться лишь на четное число квантов потока:

$$\Delta_n \Phi = 2n \Phi_0,$$

где $2\Phi_0$ дается формулой (10.19). Мы покажем, что это правило является совершенно общим и не меняется от взаимодействия квазичастиц.

Согласно правилам квантовой механики, квазиклассическая волновая функция частицы

$$\Psi \propto \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int \mathbf{P} d\mathbf{l} \right),$$

где $\mathbf{P}$ — обобщенный импульс, а интеграл берется вдоль классической траектории. В случае квазичастиц речь идет о волновом пакете (§ 3.1), но это в данном случае мало меняет дело. В присутствии магнитного поля $\mathbf{P} = \mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал. Будем предполагать траекторию в импульсном пространстве замкнутой. Это же будет относиться к проекции координатной траектории на плоскость (x, y) . Изменение квазиклассической волновой функции под действием магнитного поля выражается множителем

$$\exp \left(-\frac{ie}{\hbar c} \int \mathbf{A} d\mathbf{l} \right). \quad (13.17)$$

Волновая функция обязательно должна быть однозначной. Если считать, что $\mathbf{A}$ лежит в плоскости (x, y) , перпендикулярной магнитному полю, в интеграле (13.17) интегрирование идет вдоль замкнутой проекции электронной траектории на плоскость (x, y) . Очевидно, что, перемещаясь вдоль этого контура, мы будем периодически возвращаться в одни и те же точки, и при каждом обходе в функции Ψ будет появляться фазовый множитель

$$\exp \left(-\frac{ie}{\hbar c} \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} \right).$$

Однозначность волновой функции требует, чтобы этот множитель был равен единице, т. е.

$$\frac{e}{\hbar c} \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = 2\pi n,$$

где n — произвольное целое число. Преобразуя контурный интеграл, получаем

$$\oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int \mathbf{H} d\mathbf{S} = \Phi,$$

где Φ — магнитный поток через контур.

Поскольку в действительности все это рассуждение относится лишь к достаточно большим квантовым числам, то, строго говоря, мы имеем право написать лишь

$$\Delta\Phi_n = 2\pi n\hbar c/e = 2n\Phi_0,$$

где $\Delta\Phi_n = \Phi_{m+n} - \Phi_m$ ($m \gg 1$). Очевидно, отсюда следует установленное раньше правило квантования в импульсном пространстве (10.17).

Однако существенно не только квантование орбитального движения, но и спиновое расщепление. Последнее полностью определяется формулами (13.10) и (13.14).

Возьмем какую-либо формулу для осциллирующей добавки, например (10.33). Из этой формулы видно, что период осцилляций определяется орбитальным правилом квантования, т. е. не меняется при учете ферми-жидкостных эффектов. Что касается амплитуды, то в нее входит множитель $\cos(\pi k m^*/m)$ (это амплитуда данной гармоники k). Масса свободного электрона возникла здесь от магнетона Бора $\beta = e\hbar/2mc$. Но поскольку, согласно (13.14), β заменяется на β_1 , то можно заключить, что ферми-жидкостные эффекты приведут к замене $m \rightarrow m(1 + Z_0)$.

§ 13.5. Нулевой (высокочастотный) звук

До сих пор мы доказывали, что рассмотренные ранее явления не меняются существенным образом при учете функции f . Теперь речь пойдет о специфических явлениях, связанных с этой функцией.

В гл. 7 мы пришли к выводу, что в металле в отсутствие магнитного поля не могут распространяться электромагнитные волны. Это получалось и в том случае, когда длина волны много меньше длины пробега (аномальный скин-эффект). Возникает вопрос, насколько это заключение справедливо, если учитывать функцию f .

Очевидно, единственная возможность, о которой может идти речь, — это колебания функции распределения электронов в случае $\omega \gg \tau^{-1}$ (Ландау, 1957) [110]. В этом случае можно пренебречь членом, ответственным за столкновения в кинетическом уравнении.

Изменение функции распределения всегда может быть представлено в виде

$$\delta n = n_1(\mathbf{p}) + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_2(\mathbf{p}). \quad (13.18)$$

Так как мы будем исследовать малые колебания, то кинетическое уравнение будет линейно относительно δn и поэтому уравнения для n_1 и $\mathbf{n}_2$ разделяются.

Мы начнем с уравнения для n_1 . Такие колебания называют «нулевым звуком». Предполагая n_1 в виде $n_1 = -\psi \partial n_0 / \partial \varepsilon$ и $\psi \propto \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$, мы получаем из (13.7)

$$i(-\omega + \mathbf{k}\mathbf{v}) \psi + i\mathbf{k}\mathbf{v} \text{Sp}_\sigma \int f \psi \frac{dS}{v(2\pi\hbar)^3} - e\mathbf{v}\mathbf{E} = 0. \quad (13.19)$$

Электрическое поле определяется из уравнений Максвелла. Если предположить, что $\delta n = n_1(\mathbf{p})$, то при подстановке в (13.19) функции f в виде (13.11) остается лишь $\eta(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$. Будем рассматривать изотропный случай. Тогда η будет зависеть лишь от угла между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$. Наконец, сделаем еще одно упрощающее предположение: $\eta = \text{const} = \eta_0$. В этом случае из (13.19) находим

$$i(-\omega + \mathbf{k}\mathbf{v}) \psi + i\mathbf{k}\mathbf{v} X_0 \psi_0 - e\mathbf{v}\mathbf{E} = 0, \quad (13.20)$$

где

$$\psi_0 = \int \psi \frac{dS}{v} \left(\int \frac{dS}{v} \right)^{-1}, \quad X_0 = \eta_0 \nu(\mu).$$

Электрическое поле определяется из уравнения

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi e \text{Sp}_\sigma \int \delta n \frac{d^3\mathbf{p}}{v(2\pi\hbar)^3} = 4\pi e \nu(\mu) \psi_0.$$

Есть также и вихревые поля, связанные с током, но, очевидно, они гораздо меньше. Предполагая $\mathbf{E} \propto \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$, получаем

$$\mathbf{E} = -4\pi i k e \nu(\mu) \psi_0 / k^2.$$

Подставив это в уравнение (13.20), мы можем выразить ψ через ψ_0 :

$$\psi = \frac{\mathbf{k}\mathbf{v} [X_0 + 4\pi e^2 \nu(\mu) / k^2] \psi_0}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}.$$

Наконец, интегрируя по углам, получаем однородное уравнение для ψ_0 . Условие разрешимости этого уравнения есть

$$1 = \int \frac{\mathbf{k}\mathbf{v} [X_0 + 4\pi e^2 \nu(\mu) / k^2] d\Omega}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{d\Omega}{4\pi}.$$

Как уже говорилось, $X_0 \sim 1$. Второй член в числителе имеет порядок

$$e^2 p_0^2 / k^2 \hbar^3 v \sim (e^2 / \hbar v) (p_0^2 / \hbar^2 k^2) \gg 1,$$

ибо $e^2/\hbar v \sim 1$, и мы рассматриваем колебания с длиной волны, гораздо большей межатомных расстояний, т. е. $k \ll p_0/\hbar$. Предположим также (это подтвердится ниже), что $kv \ll \omega$. Тогда, пренебрегая X_0 по сравнению со вторым членом в числителе и зная по $\mathbf{k}\mathbf{v}$, получаем

$$1 = \int (\mathbf{k}\mathbf{v})^2 \cdot 4\pi \frac{e^2 \nu(\mu)}{k^2 \omega^2} \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2 \nu(\mu) v^2}{\omega^2},$$

откуда следует

$$\omega = \left[(4\pi/3) e^2 \nu(\mu) v^2 \right]^{1/2} = \text{const.} \quad (13.21)$$

Величина $\hbar\omega$ имеет порядок $(e^2/\hbar v)^{1/2} (p_0^2/m) \sim \mu$. Это оправдывает сделанное предположение $kv \ll \omega$, так как для того чтобы было $kv \sim \omega$, волновой вектор k должен быть порядка $p_0/\hbar$, а мы считаем его гораздо меньшим. Следовательно, рассмотренные колебания должны обладать очень большими частотами порядка $\mu/\hbar \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$, и в радиочастотном диапазоне такие колебания увидеть нельзя. В действительности, как уже говорилось в § 2.2, все выводы для ферми-жидкости справедливы лишь в том случае, если они затрагивают малую окрестность поверхности Ферми. Следовательно, в случае когда $\hbar\omega$ получается порядка μ , теория теряет свою применимость. Единственное, что мы можем утверждать — это то, что благодаря возникновению электрических полей низкочастотные колебания электронной плотности в металле отсутствуют ¹⁾.

Однако можно поставить вопрос о колебаниях функции распределения, не сопровождающихся изменением электронной плотности, т. е. таких, при которых $\psi_0 = 0$. Здесь дело обстоит следующим образом. Поскольку в изотропной модели в случае, когда $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ лежат на фермисфере, функция $X(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ может зависеть лишь от угла между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$, то ее можно представить в виде

$$X = \sum X_n P_n(\cos \theta), \quad (13.22)$$

где P_n — полиномы Лежандра. Если это разложение продолжается до $n = N$, то можно показать, что кинетическое уравнение в принципе

¹⁾ Это рассуждение, естественно, не означает, что в металле не могут распространяться волны с частотой $\omega \sim \mu$. Подобные волны действительно наблюдаются. Поскольку во многих металлах можно пользоваться приближением свободных электронов (гл. 14), то к ним применим проделанный выше расчет. Такие волны с частотой, слабо зависящей от длины волны, описываемые (с точностью до членов порядка $(vk/\omega)^2$) формулой (13.21), называются плазменными колебаниями или плазмонами. Для свободных электронов $\nu(\mu) = p_0 m / \pi^2 \hbar^3$ и, следовательно, частота плазмонов равна $\omega_0 = (4\pi n_e e^2 / m)^{1/2}$, где n_e — плотность валентных электронов.

допускает решения, пропорциональные $\exp(im\varphi)$ с $m \leq N$, где φ — «долгота» импульса $\mathbf{p}$ в полярной системе координат с осью вдоль $\mathbf{k}$. Конечно, функция ψ , пропорциональная $\exp(im\varphi)$, при усреднении обращается в нуль, а потому в такой волне не возникает колебаний заряда и больших электрических полей.

Однако такие решения имеются лишь в том случае, если коэффициенты X_n достаточно велики: $X_n > X_{n \min}$. Например, если функция X содержит всего две гармоники: $X = X_0 + X_1 \cos \theta$, то возможны решения, пропорциональные $\exp(i\varphi)$; они имеются лишь при $X_1 > 6$. Для появления следующих гармоник требуются еще большие значения следующих X_n .

В то же время, если $X(\theta)$ — достаточно гладкая функция, то коэффициенты X_n в (13.22) должны убывать с увеличением n . Видно это хотя бы из того, что если X не зависит от угла, то лишь $X_0 \neq 0$, а случай, когда все X_n одинаковы, — это δ -функция. Следовательно, можно ожидать в лучшем случае появления лишь одной-двух первых гармоник.

Тут нужно вспомнить о роли вихревых электрических полей. Из уравнения Максвелла (12.4) видно, что эти поля могут играть роль в области длинных волн (оценки показывают, что это $\lambda > \lambda_0 \sim \sim 10^{-5}$ см). Так же как и в случае возникновения пространственного заряда, электрические поля препятствуют возникновению колебаний — будет подавлена первая гармоника (т. е. $\psi \propto \exp(i\varphi)$), которая дает колебания электрического тока. Значит, можно ожидать лишь следующие гармоники, что, как уже отмечено, гораздо менее вероятно.

Поэтому более вероятно найти такие колебания в коротковолновой области, где электрические поля не сказываются. Из кинетического уравнения (13.19) следует, что закон дисперсии колебаний $\omega(k)$, если они существуют, будет линейным: $\omega = uk$, причем $u \sim v$. Следовательно, речь идет о частотах $\omega > \omega_0 \sim vk \sim 10^{13}$ с $^{-1}$. Это инфракрасная область частот. Однако подчеркнем, что уже требование $X_1 > 6$ является трудно выполнимым, так как взаимодействие квазичастиц в металле в действительности невелико (§ 14.3). Может быть, поэтому до сих пор такие волны не обнаружены.

§ 13.6. Спиновые волны

Более перспективным является случай, когда колеблются лишь спиновые характеристики электронной жидкости, т. е. $\delta n = \mathbf{n}_2 \boldsymbol{\sigma}$. Такие колебания называют спиновыми волнами. Здесь картина выглядит поразно в случаях, когда приложено магнитное поле и когда его нет.

Мы начнем со случая без поля. Естественно, что при спиновых колебаниях заметных электрических полей нет, а поэтому в (13.19) отсутствует член с $\mathbf{E}$. От функции f вносит вклад лишь член с ζ

(см. (13.11)). Предполагая для простоты $\zeta = \text{const} = \zeta_0$, получаем

$$i(-\omega + \mathbf{k}\mathbf{v})\psi + i\mathbf{k}\mathbf{v} Z_0\psi_0 = 0,$$

где $Z_0 = \zeta_0\nu(\mu)$. Это уравнение решаем относительно ψ :

$$\psi = \mathbf{k}\mathbf{v} Z_0\psi_0/(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}).$$

Определяя отсюда ψ_0 , получаем уравнение для нахождения $\omega(k)$:

$$1 = Z_0 \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\cos \theta d(\cos \theta)}{s - \cos \theta}, \quad (13.23)$$

где $s = \omega/kv$. Это уравнение может иметь действительные корни лишь в том случае, если знаменатель в подынтегральном выражении нигде не обращается в нуль (обход полюса в обратном случае можно узнать, добавив малую мнимую часть к частоте $\omega \rightarrow \omega - i/\tau$). Значит, $s > 1$. Производя интегрирование, получаем

$$1 = Z_0 \left(\frac{s}{2} \ln \frac{s+1}{s-1} - 1 \right). \quad (13.24)$$

Это уравнение имеет решение лишь при $Z_0 > 0$. Согласно § 13.3 таких волн заведомо нет в «почти ферромагнитных» металлах.

Итак, при $Z_0 > 0$ в металле без магнитного поля могут распространяться волны плотности спина с линейным законом дисперсии $\omega = uk$, причем u порядка v (скорости на ферми-границе), но обязательно превышает v . Конечно, при более сложной форме функции Z (см. (13.22)) возможны, в принципе, спиновые волны с другими типами колебаний функции распределения, но к этому случаю относится все сказанное ранее о трудности наблюдения сложных типов нулевого звука.

Заметим еще следующее. Спиновые волны можно возбудить действием на электронный спин магнитного поля падающей на металл электромагнитной волны. Появление спиновых волн могло бы быть зарегистрировано по изменению импеданса (например, при установлении стоячей волны в пластине). Сила, действующая на электронный спин со стороны магнитного поля, равна $\beta \boldsymbol{\sigma} \nabla \mathbf{H} \sim \beta \mathbf{H} / \delta$. Согласно уравнению Максвелла, $\mathbf{H} \sim c\mathbf{E} / \delta\omega$. Следовательно, отношение силы со стороны магнитного поля к силе со стороны электрического поля волны порядка

$$c\beta/\delta^2\omega e \sim \hbar/m\delta^2\omega.$$

Для $\omega \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}$ $\delta \sim 10^{-4} \text{ см}$, и это отношение порядка 10^{-2} . Однако надо заметить, что всякая волна формируется на длине порядка ее длины волны λ . В данном случае при $\omega \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}$,

$$\lambda \sim u/\omega \sim 10^8/10^{10} \sim 10^{-2} \text{ см}.$$

Так как в случае аномального скин-эффекта поле затухает по закону $E \approx E_0(\delta/x)^2$ (это следует из формулы (7.33)), то для $\lambda \sim 10^{-2}$ см

$$E \sim 10^{-4} E_0.$$

Итак, условия для наблюдения таких волн неблагоприятны.

В инфракрасном диапазоне диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon \approx -4\pi n_e e^2 / m\omega^2.$$

Высокочастотное поле затухает в глубь металла по закону $\exp[-(\omega/c)|\varepsilon|^{1/2}x]$, т. е. глубина проникновения порядка

$$(\hbar/p_0)(c/v) \sim 10^{-6} \text{ см}$$

и не зависит от ω . Если взять частоту порядка 10^{14} с^{-1} , то $\lambda \sim \delta$. Но отношение сил будет по-прежнему 10^{-2} . Следовательно, хотя инфракрасный диапазон более благоприятен для наблюдения эффекта, но все же влияние спиновых волн на поверхностный импеданс будет малым. Возможно, поэтому они до сих пор не наблюдались.

Единственный тип колебаний, связанных с функцией f , который пока удалось обнаружить, — это спиновые волны во внешнем магнитном поле (Силин, 1958) [111].

Мы должны прежде всего учесть, что в данном случае энергия квазичастиц начинает зависеть от их спина, и это, естественно, относится к равновесной функции распределения. Поэтому надо пользоваться уравнением для матрицы плотности, которое, согласно квантовой механике, имеет вид

$$\partial n / \partial t = (i/\hbar) [\mathcal{H}, n], \quad (13.25)$$

где $\mathcal{H}$ — гамильтониан. В данном случае операторы координат и импульсов квазичастицы рассматриваются как классические переменные, а потому, если бы n и $\mathcal{H}$ не зависели от спинов, то правая часть уравнения (13.25) давала бы лишь известную скобку Пуассона

$$-\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}},$$

которая совпадает с соответствующими членами обычного кинетического уравнения.

Однако зависимость от спина меняет дело. Мы должны написать явно то, что дает правая часть уравнения (13.25) вследствие некоммутативности операторов спина. Таким образом, приходим к уравнению

$$\partial n / \partial t - (i/\hbar) [\varepsilon, n] + \mathbf{v} \partial n / \partial \mathbf{r} + \dot{\mathbf{p}} \partial n / \partial \mathbf{p} = 0. \quad (13.26)$$

Здесь, ввиду наличия магнитного поля, имеем

$$\dot{\mathbf{p}} = (e/c) [(\partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}) \mathbf{H}] - \partial \varepsilon / \partial \mathbf{r}. \quad (13.27)$$

В равновесии в присутствии не слишком большого магнитного поля, согласно § 13.8, получим

$$\varepsilon(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) = \varepsilon(\mathbf{p}) - \beta_1 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}, \quad (13.28)$$

$$n_0(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) = n_0(\mathbf{p}) - (\partial n_0 / \partial \varepsilon) \beta_1 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}.$$

Подставим в (13.26) $n = n_0 - (\partial n_0 / \partial \varepsilon) \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\sigma}$ и ограничимся членами, линейными по $\boldsymbol{\Psi}$. При этом, однако, будем учитывать, что энергия ε тоже приобретает добавку:

$$- \text{Sp}_{\sigma'} \int f(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}; \mathbf{p}', \boldsymbol{\sigma}') \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{p}') \boldsymbol{\sigma}' \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} = \boldsymbol{\sigma} \int Z(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{p}') \frac{d\Omega'}{4\pi}.$$

После этого умножим полученное уравнение на $\boldsymbol{\sigma}$ и возьмем Sp_{σ} , в результате возникает уравнение относительно $\boldsymbol{\Psi}$:

$$\begin{aligned} -i\omega \boldsymbol{\Psi} - \frac{2\beta_1}{\hbar} \left[\mathbf{H} \left(\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{p}) + \int Z(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{p}') \frac{d\Omega'}{4\pi} \right) \right] + \\ + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{p}) + \int Z(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{p}') \frac{d\Omega'}{4\pi} \right) + \\ + \frac{e}{c} [\mathbf{vH}] \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{p}) + \int Z(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{p}') \frac{d\Omega'}{4\pi} \right) = 0. \end{aligned} \quad (13.29)$$

В это уравнение везде, кроме первого члена, входит комбинация

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{p}) + \int Z(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{p}') \frac{d\Omega'}{4\pi} \quad (13.30)$$

(напоминаем, что $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ здесь относятся к ферми-поверхности).

В изотропной модели можно разложить Z по полиномам Лежандра ($\theta = \widehat{(\mathbf{p}, \mathbf{p}')} \cdot \mathbf{p}'$):

$$Z = \sum_n Z_n P_n(\cos \theta). \quad (13.31)$$

Функцию $\boldsymbol{\Psi}$ можно представить в общем случае как

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{p}) = \sum_n \boldsymbol{\Psi}_n, \quad \boldsymbol{\Psi}_n = \sum_m \boldsymbol{\Psi}_{nm} Y_n^m(\theta_1, \varphi),$$

где $\boldsymbol{\Psi}_{nm}$ — коэффициенты, не зависящие от углов, θ_1 и φ — полярные углы вектора $\mathbf{p}$, а $Y_n^m = P_n^m(\cos \theta_1) \exp(im\varphi)$ — сферические функции. Согласно известному правилу

$$P_n(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) = \sum_{m=-n}^n \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} Y_n^m(\mathbf{n}_1) Y_n^{-m}(\mathbf{n}_2) \quad (13.32)$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль $\mathbf{p}$). Интеграл от двух сферических функций равен

$$\int Y_n^m(\mathbf{n}_1) Y_{n'}^{-m'}(\mathbf{n}_1) \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{\delta_{mm'} \delta_{nn'}}{2n+1} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}. \quad (13.33)$$

Пользуясь этими соотношениями, находим

$$\rho_n(\mathbf{p}) = \Psi_n(\mathbf{p}) [1 + Z_n/(2n+1)]. \quad (13.34)$$

Это выражение можно обратить:

$$\Psi(\mathbf{p}) = \int L(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \rho(\mathbf{p}') \frac{d\Omega'}{4\pi}, \quad (13.35)$$

где

$$L = \sum_n L_n P_n(\cos \theta), \quad L_n = \frac{2n+1}{1 + Z_n/(2n+1)}. \quad (13.36)$$

Теперь можно упростить уравнение (13.29):

$$-i\omega \int L(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \rho(\mathbf{p}') \frac{d\Omega'}{4\pi} - \frac{2\beta_1}{\hbar} [\mathbf{H}\rho] + \\ + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \rho + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \rho = 0. \quad (13.37)$$

Мы рассмотрим здесь лишь поперечные колебания, т.е. $\rho \perp \mathbf{H}$. Выбрав ось z вдоль $\mathbf{H}$, можно написать уравнения для ρ_x и ρ_y , а из них получить уравнения для $\rho_+ = \rho_x + i\rho_y$ и для $\rho_- = \rho_x - i\rho_y$:

$$\omega \int L(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \rho_{\pm}(\mathbf{p}') \frac{d\Omega'}{4\pi} \pm \frac{2\beta_1 H}{\hbar} \rho_{\pm} + \\ + i\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \rho_{\pm} + \frac{ieH}{m^*c} \frac{\partial}{\partial \varphi} \rho_{\pm} = 0. \quad (13.38)$$

Рассмотрим сначала решение, не зависящее от координат $\mathbf{r}$. Предполагая $\rho_{\pm} \propto Y_n^m(\theta_1, \varphi)$, получаем из (13.38):

$$\omega_{n,m} = (\mp\Omega_0 + m\Omega) [1 + Z_n/(2n+1)], \quad (13.39)$$

где

$$\Omega_0 = \frac{2\beta_1 H}{\hbar} = \frac{2\beta H}{(1 + Z_0)\hbar}, \quad \Omega = \frac{2\beta^* H}{\hbar} \quad \left(\beta^* = \frac{e\hbar}{2m^*c} \right). \quad (13.40)$$

Отметим, что для $n = m = 0$ получается

$$\omega_{00} = \Omega_0(1 + Z_0) = 2\beta H/\hbar, \quad (13.41)$$

т.е. частота прецессии спина свободного электрона. Следовательно, в присутствии магнитного поля в металле имеются некоторые резонансные частоты, связанные с прецессией электронного спина. Это

явление называется парамагнитным резонансом. Обычно речь идет об ω_{00} , так как частоты с $m \neq 0$ — это циклотронные частоты, а волны с $n \neq 0$ трудно возбудить. Детальная теория парамагнитного резонанса в массивном металле учитывает скин-эффект [112, 113]. Мы не будем излагать ее здесь, а только отметим два обстоятельства.

Во-первых, как было показано, резонансная частота ω_{00} не зависит от ферми-жидкостных эффектов. Поскольку в условиях аномального скин-эффекта движение электронов тоже не зависит от этих эффектов, то парамагнитный резонанс может рассматриваться с помощью газовой модели.

Во-вторых, как всегда, в условиях резонанса энергия электромагнитной волны более эффективно передается электронам, что выражается, в частности, в более сильном отклонении функции распределения от равновесной. Это изменение функции распределения сохраняется на длине пробега электрона. В случае парамагнитного резонанса важен не импульс электрона, а его спин. Поэтому характерным расстоянием является не обычная длина пробега, а та, на которой происходит столкновение с поворотом электронного спина. Эта длина l_s значительно превышает обычную.

При аномальном скин-эффекте наиболее существенны лишь те электроны, которые весь свой свободный пробег проводят в скин-слое. Поэтому, кроме особых случаев (гл. 8), функция распределения больше всего отклоняется от равновесной лишь на глубине δ . Вместе с тем имеется небольшая добавка, затухающая на глубине l — длине свободного пробега. В случае парамагнитного резонанса электрон, двигаясь на расстоянии l в скин-слое, затем уходит от него и начинает диффундировать в глубь металла. Согласно правилам диффузии (см. (5.47)),

$$t \sim \overline{x^2}/D,$$

где x — расстояние, t — время, а D — коэффициент диффузии. Полный путь равен $vt = l_s$, а так как $D \sim lv$, то $x \sim (ll_s)^{1/2} \gg l$. Итак, можно ожидать, что в пластинах с толщиной, меньшей $(ll_s)^{1/2}$, изменение электронной функции распределения будет доходить до противоположной границы и вызывать излучение. Иными словами, при парамагнитном резонансе такие пластины обладают повышенной прозрачностью. Это используется для наблюдения резонанса на опыте.

Рассмотрим теперь спиновые волны. Очевидно, каждая частота (13.39) является, в действительности, началом функции $\omega_{nm}(k)$, т. е. одной из ветвей спектра спиновых волн. Мы рассмотрим ρ_- при $n = m = 0$ (только эта ветвь и наблюдалась на опыте). Ограничимся для простоты случаем $Z = Z_0 + Z_1 \cos \theta$. Будем искать $\rho_- \propto \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Из уравнения (13.38) получаем при этом

$$\omega \int L(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \rho_-(\mathbf{p}') \frac{d\Omega'}{4\pi} - \omega_0 \rho_- - \mathbf{k}\mathbf{v} \rho_- + i\Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \rho_- = 0. \quad (13.42)$$

Рассмотрим длинноволновый предел, т. е. $kv \ll \Omega_0$, и будем решать уравнение (13.42) последовательными приближениями:

$$\rho_- = \rho^{(0)} + \rho^{(1)} + \rho^{(2)} + \dots,$$

$$\omega = \Omega_0(1 + Z_0) + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \dots$$

Напишем уравнение (13.42) в первом приближении

$$\begin{aligned} & \frac{\omega^{(1)} \rho^{(0)}}{1 + Z_0} + \Omega_0(1 + Z_0) \times \\ & \times \int L(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \rho^{(1)}(\mathbf{p}') \frac{d\Omega'}{4\pi} - \Omega_0 \rho^{(1)} - \mathbf{k}\mathbf{v} \rho^{(0)} + i\Omega \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (13.43)$$

Так как углы θ_1 и φ определены по отношению к системе координат с осью вдоль $\mathbf{H}$, то

$$\mathbf{k}\mathbf{v} = kv (\cos \alpha \cos \theta_1 + \sin \alpha \sin \theta_1 \cos \varphi),$$

где $\alpha = (\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{H}})$. Отсюда следует, что $\rho^{(1)}$ будет иметь компоненты, пропорциональные Y_1^1 , Y_1^{-1} и Y_1^0 . Обозначим их соответственно через $\rho_1^{(1)}$, $\rho_{-1}^{(1)}$, $\rho_0^{(1)}$. Из (13.42) получаем для них уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{\omega^{(1)}}{1 + Z_0} \rho^{(0)} + \Omega_0 \frac{1 + Z_0}{1 + Z_1/3} \rho_0^{(1)} - \Omega_0 \rho_0^{(1)} - kv \cos \alpha \cos \theta_1 \rho^{(0)} = 0, \\ & \frac{\Omega_0(1 + Z_0)}{1 + Z_1/3} \rho_1^{(1)} - (\Omega_0 + \Omega) \rho_1^{(1)} - \frac{kv}{2} \sin \alpha \sin \theta_1 \rho^{(0)} e^{i\varphi} = 0, \\ & \frac{\Omega_0(1 + Z_0)}{1 + Z_1/3} \rho_{-1}^{(1)} - (\Omega_0 - \Omega) \rho_{-1}^{(1)} - \frac{kv}{2} \sin \alpha \sin \theta_1 \rho^{(0)} e^{-i\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (13.44)$$

Если первое из этих уравнений проинтегрировать по углам, то получается $\omega^{(1)} = 0$, так как $\rho_0^{(1)} \propto Y_1^0 = \cos \theta_1$. Следовательно, добавка к $\Omega_0(1 + Z_0)$ порядка k^2 . Решая уравнения, находим

$$\begin{aligned} \rho^{(1)}(\theta_1, \varphi) = & kv \cos \alpha \cos \theta_1 (1 + Z_1/3) \rho^{(0)} / [\Omega_0(Z_0 - Z_1/3)] + \\ & + (1/2) kv \sin \alpha \sin \theta_1 (1 + Z_1/3) \rho^{(0)} \left\{ [-\Omega(1 + Z_1/3) + \right. \\ & \left. + \Omega_0(Z_0 - Z_1/3)]^{-1} e^{i\varphi} + [\Omega(1 + Z_1/3) + \Omega_0(Z_0 - Z_1/3)]^{-1} e^{-i\varphi} \right\}. \end{aligned} \quad (13.45)$$

Во втором приближении из (13.43) получаем

$$\frac{\omega^{(2)}\rho^{(0)}}{1+Z_0} + \Omega_0(1+Z_0) \times \\ \times \int L(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \rho^{(2)}(\mathbf{p}') \frac{d\Omega'}{4\pi} - \Omega_0\rho^{(2)} - \mathbf{k}\mathbf{v}\rho^{(1)} + i\Omega \frac{\partial\rho^{(2)}}{\partial\varphi} = 0.$$

Если $\rho^{(2)}$ содержит слагаемое, не зависящее от углов, то оно сокращается во втором и в третьем члене. Что касается членов, пропорциональных сферическим функциям более высоких порядков, то при интегрировании с L эти сферические функции воспроизводятся. Поэтому если последнее уравнение проинтегрировать по углам, то мы находим

$$\frac{\omega^{(2)}\rho^{(0)}}{1+Z_0} = \int \mathbf{k}\mathbf{v} \rho^{(1)} \frac{d\Omega}{4\pi}.$$

Подставляя значение $\rho^{(1)}$ из (13.45), получаем (Плацман, Вольф, 1967) [114]

$$\omega = \frac{2\beta H}{\hbar} \left\{ 1 + \frac{k^2 v^2}{3} \left(1 + \frac{Z_1}{3} \right) \left(Z_0 - \frac{Z_1}{3} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\cos^2 \alpha}{\Omega_0^2(Z_0 - Z_1/3)^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\Omega_0^2(Z_0 - Z_1/3)^2 - \Omega^2(1 + Z_1/3)^2} \right] \right\}. \quad (13.46)$$

Как уже говорилось, такие спиновые волны были обнаружены на опыте [115]. Это было сделано при исследовании прохождения циклотронных электромагнитных волн через тонкие пленки натрия и калия. В условиях, когда $\omega = 2\beta H/\hbar$, т. е. частота падающего поля совпадает с частотой прецессии спинов, возникает парамагнитный резонанс. Это сказывается в виде появления максимума прозрачности пленки.

Возможность распространения спиновой волны приводит к появлению дополнительных пиков прозрачности, в зависимости от магнитного поля или частоты, в условиях, когда в металле устанавливается стоячая спиновая волна, т. е. $kD = n\pi$ (D — толщина пластинки). При малых n волновые векторы очень малы, так что соответствующие частоты (или поля, если задана частота) мало отличаются от частоты парамагнитного резонанса, т. е. пики спиновых волн близки к пику парамагнитного резонанса.

Однако, в то время как парамагнитный пик не зависит от направления поля (в кубическом металле), положение дополнительного пика меняется при изменении ориентации поля относительно $\mathbf{k}$ (в опыте с пластинкой $\mathbf{k}$ направлено по нормали к пластине). Из формулы (13.46) следует, что при $\Omega|1 + Z_1/3| > \Omega_0|Z_0 - Z_1/3|$ дополнительный пик перемещается при изменении ориентации поля с одной стороны от основного пика на другую сторону. Это наблюдалось на опыте [115].

§ 13.7. Эффект Кондо при низких температурах

Идеи теории ферми-жидкости были применены для исследования поведения металлов с магнитными примесями (§ 4.6) при низких температурах в случае, когда взаимодействие электрон–примесь имеет антиферромагнитный знак (Нозьер, 1974) [116]. Как уже было отмечено в § 4.6, при понижении температуры эффективное взаимодействие неограниченно возрастает, что приводит к полной экранировке примесного спина спином электронов проводимости.

Исследование этой экранировки в случае больших спинов требует учета того обстоятельства, что большие спины могут быть созданы электронами незаполненных d - или f -оболочек примесных атомов, имеющих отличный от нуля орбитальный момент. Анализ этого вопроса сложен (см. обзор [117]), и мы ограничимся простейшей моделью, когда примесный спин связан с s -оболочкой и равен $S = 1/2$. Хотя буквально это в природе не происходит, но истинные случаи d - или f -оболочек во многом близки к рассматриваемой модели. Например, для случая f -оболочек вследствие сильной спин-орбитальной связи состояния характеризуются полным моментом $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. Благодаря действию кристаллического поля состояния с разными значениями проекции $\mathbf{J}$ на кристаллическую ось оказываются настолько разделенными по энергиям, что при наличии центра инверсии сохраняется лишь двукратное вырождение, которое можно описывать как некоторый «спин $1/2$ »: две проекции спина соответствуют двум состояниям. Главное же заключается в том, что во всех реальных случаях при $T \rightarrow 0$ происходит полная экранировка примесного спина любой величины.

Мы рассмотрим здесь случай $T \ll T_K$, когда примесный спин почти полностью заэкранирован, т. е. полный спин комплекса электрон–примесь практически равен нулю. Однако этот комплекс обладает поляризуемостью, что обеспечивает косвенное взаимодействие между электронами, расположенными по соседству с этим комплексом: один из электронов поляризует комплекс; эта поляризация действует на другой электрон. Таким образом, возникает взаимодействие между электронами, которое приводит к ферми-жидкостным эффектам. Однако надо иметь в виду, что это локальные эффекты, связанные с атомами примеси, и поправки, вносимые ими, порядка c_m — атомной концентрации примеси.

Итак, задача о магнитной примеси в модели газа невзаимодействующих частиц заменяется взаимодействием электронов с немагнитной примесью, причем электроны считаются взаимодействующими друг с другом, и это взаимодействие происходит лишь в местах расположения примесных центров.

Для начала нам понадобятся некоторые сведения из теории рассеяния (см. [118]). Если поток свободных частиц упруго рассеивается на центрально-симметричном потенциале с центром в точке $r = 0$,

то при больших r его волновая функция имеет вид

$$\Psi \approx e^{ikz} + f(\theta) e^{ikr}/r \quad (13.47)$$

(z — направление падающего потока). Первый член отвечает свободно падающим частицам ($k = p/\hbar$), а второй — рассеянной волне. Дифференциальное эффективное сечение рассеяния, т. е. вероятность частице после рассеяния направиться в элемент телесного угла $d\Omega$, есть

$$dQ = |f(\theta)|^2 d\Omega. \quad (13.48)$$

Интеграл по $d\Omega$ дает полное эффективное сечение.

Волновая функция (13.47) является аксиально-симметричной относительно оси z . Всякая такая функция может быть представлена в виде разложения по состояниям с заданным орбитальным моментом l :

$$\Psi = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos \theta) R_{kl}(r), \quad (13.49)$$

где $P_l(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра, A_l — постоянные, а функции R_{kl} удовлетворяют уравнению, получающемуся из уравнения Шрёдингера

$$r^{-2}(\partial/\partial r)(r^2 \partial R_{kl}/\partial r) + \left[k^2 - l(l+1)/r^2 - (2m/\hbar^2) U(r) \right] R_{kl} = 0. \quad (13.50)$$

Рассмотрим решение уравнения (13.50) на больших расстояниях. Нетрудно показать, что оно имеет вид (см. [118])

$$R_{kl} \approx (2/r) \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l), \quad (13.51)$$

где δ_l — «фаза рассеяния», обязанная своим происхождением потенциалу $U(r)$. Коэффициенты A_l в формуле (13.49) должны быть подобраны так, чтобы функция $\Psi = \exp(ikz)$ имела только члены, пропорциональные $\exp(ikr)/r$, т. е. соответствующие расходящейся волне. Воспользовавшись асимптотикой разложения функции $\exp(ikz)$ по полиномам Лежандра

$$\begin{aligned} e^{ikz} &= \exp(ikr \cos \theta) \approx \\ &\approx (2ikr)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) [(-1)^{l+1} e^{-ikr} + e^{ikr}], \end{aligned} \quad (13.52)$$

получаем однозначное определение коэффициентов A_l .

В результате волновая функция на далеких расстояниях от центра приобретает вид (13.47), где

$$f(\theta) = (2ik)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [\exp(2i\delta_l) - l] P_l(\cos \theta). \quad (13.53)$$

Подставив в (13.48), проинтегрировав по θ и используя свойство полиномов Лежандра

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 2\delta_{ll'}/(2l+1), \quad (13.54)$$

находим полное эффективное сечение рассеяния

$$Q = (4\pi/k^2) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (13.55)$$

Итак, полное сечение определяется «фазами рассеяния» асимптотик волновых функций с заданным орбитальным моментом и представляет собой сумму «парциальных сечений», соответствующих определенному орбитальному моменту. Максимальное значение $\sin x$ есть 1, а поэтому максимальное значение каждого парциального сечения (оно иногда называется «унитарным пределом») есть

$$Q_{l\max} = (4\pi/k^2)(2l+1) = (4\pi\hbar^2/p^2)(2l+1). \quad (13.56)$$

Теперь представим себе, что речь идет об электронах в металле, содержащем примеси. Под действием примесей электронные волновые функции меняются. Если, например, взять образец в виде большой сферы радиуса L и подставить на границе граничное условие $\Psi = 0$, то это приведет к квантованию волнового вектора в асимптотической формуле

$$R_{kl} \approx (2/r) \sin(kr - l\pi/2),$$

а именно $k_{nl} = n\pi/L + l\pi/2$.

Пусть теперь в середину сферы помещается атом примеси. К аргументу синуса прибавится δ_l . Так как граничное условие не меняется, то должны измениться значения k :

$$k'_{nl} - k_{nl} = -\delta_l/L. \quad (13.57)$$

Число состояний в интервале $k' - k$ есть

$$(\delta_l/L)(\pi/L)^{-1} = \delta_l/\pi.$$

Если просуммировать по всем l с учетом, что каждому орбитальному моменту l соответствует $2l+1$ возможных значений его проекции m ,

а также иметь в виду две возможных проекции спина, то мы получаем полное изменение числа состояний:

$$\Delta N = (2/\pi) \sum_l (2l + 1) \delta_l.$$

Изменение числа состояний ниже ферми-границы равно изменению числа электронов. В силу электронейтральности оно должно равняться избыточному заряду примеси, т. е. разности зарядов примесного иона и иона основной решетки. Итак, имеем

$$\Delta Z = (2/\pi) \sum_l (2l + 1) \delta_l(p_0) \quad (13.58)$$

(p_0 — импульс Ферми). Эта формула называется правилом сумм Фриделя [6].

Мы видим, что изменение электронных характеристик под действием примеси может быть выражено через фазы рассеяния. В рассматриваемом нами случае электроны взаимодействуют с комплексом электрон–примесь. Вопрос о размерах этого комплекса, т. е. об эффективном радиусе сил взаимодействия, является весьма неочевидным. Наиболее естественно предположить, что при $T \ll T_K$ это взаимодействие можно считать точечным. Согласно квантовой механике [118] при этом достаточно ограничиться учетом s -рассеяния. Поскольку электронный спин играет существенную роль, то мы перепишем формулу (13.58) в виде

$$\Delta Z = \pi^{-1} \sum_{\sigma} \delta_{\sigma}(p_0), \quad (13.59)$$

где δ_{σ} соответствует фазе с орбитальным моментом $l = 0$ и проекцией спина σ ($\sigma = \pm$).

В духе теории ферми-жидкости мы будем полагать, что вследствие взаимодействия электронов фазы δ_{σ} зависят от функции распределения. Согласно нашему предположению комплекс электрон–примесь при $T \ll T_K$ считается точечным; поэтому взаимодействие электронов, осуществляемое путем поляризации этого комплекса, происходит в одной точке пространства. Но согласно принципу Паули в одной точке могут находиться лишь электроны с противоположными проекциями спина. Ввиду этого взаимодействие возможно лишь между такими электронами, откуда вытекает

$$\delta_{\sigma}(\xi) = \delta_0(\xi) + \sum_{\mathbf{p}'} \varphi(\xi, \xi') \delta n_{-\sigma}(\xi'). \quad (13.60)$$

Нас интересует окрестность ферми-границы, и поэтому мы разложим все величины по $\xi = \varepsilon - \mu$:

$$\delta_0(\xi) \approx \delta_0 + \alpha \xi + O(\xi^2), \quad (13.61)$$

$$\varphi(\xi, \xi') = \varphi + O(\xi, \xi'), \quad (13.62)$$

где $\varphi = \text{const}$. Мы увидим, что дальнейшие члены разложения несущественны при $T \rightarrow 0$. Поскольку примесь действует лишь на электронный спин, то полную плотность электронов $n_{e+} + n_{e-}$ (обозначим $n_{e+} = \int n_+(2\pi\hbar)^{-3} d^3\mathbf{p}$) будем считать неизменной, т. е. $\delta n_{e+} + \delta n_{e-} = 0$. Следовательно,

$$\delta n_{e+} - \delta n_{e-} = 2\delta n_{e+} = -2\delta n_{e-} = n_{e+} - n_{e-} = m. \quad (13.63)$$

После всего этого формула (13.60) может быть переписана в виде

$$\delta_\sigma(\xi) = \delta_0 + \alpha\xi - (1/2)\sigma\varphi m. \quad (13.64)$$

Итак, фазы рассеяния оказались выраженными через две константы: α и φ . В действительности эти константы связаны между собой благодаря тому, что кондовская особенность привязана к уровню Ферми. Если в формуле (13.60) сделать одинаковый сдвиг ξ и μ , то $\delta_\sigma(\xi)$ не должно измениться. Благодаря этому имеем

$$\alpha + \nu_0\varphi/2 = 0, \quad (13.65)$$

где $\nu_0 = p_0 m / \pi^2 \hbar^3$ — плотность состояний чистого металла, просуммированная по проекциям спина (в интеграл (13.60) входит лишь $\partial n_- / \partial \varepsilon$, что приводит к множителю $1/2$).

Рассмотрим теперь формулу (13.59). Слева в ней стоит изменение числа электронов под уровнем Ферми. Увеличение этого числа произошло благодаря понижению уровней энергии. Следовательно, для заданной проекции спина

$$-(\nu_0 V/2) \delta \varepsilon_\sigma = \delta_\sigma / \pi \quad (13.66)$$

(V — объем системы). Изменение плотности состояний для заданной проекции спина равно

$$\begin{aligned} \partial n_{e\sigma} / \partial (\varepsilon + \delta \varepsilon_\sigma) - \partial n_{e\sigma} / \partial \varepsilon &= (\partial n_{e\sigma} / \partial \varepsilon) [\partial \varepsilon / \partial (\varepsilon + \delta \varepsilon_\sigma) - 1] = \\ &= -(\nu_0/2) \partial \delta \varepsilon_\sigma / \partial \varepsilon = \alpha / \pi V \end{aligned}$$

($n_{e\sigma}$ — плотность электронов с проекцией спина σ). Эту величину надо умножить на N_m — число примесей. В результате V^{-1} заменяется на n_m — число примесей в единице объема.

Поскольку теплоемкость пропорциональна плотности состояний, то

$$\delta C / C = (\alpha n_m / \pi) (\nu_0/2)^{-1} = 2\alpha n_m / \pi \nu_0. \quad (13.67)$$

Итак, мы приходим к выводу, что в теплоемкости меняется коэффициент в линейном температурном законе.

Теперь рассмотрим магнитную восприимчивость. В присутствии магнитного поля $n_+ \neq n_-$. Согласно формулам (13.66) и (13.64) направленные значения энергии равны

$$\xi'_+ = \xi - \beta H - 2\alpha\xi/\pi\nu_0 V + m\varphi/\pi\nu_0 V,$$

$$\xi'_- = \xi + \beta H - 2\alpha\xi/\pi\nu_0 V - m\varphi/\pi\nu_0 V.$$

На границе Ферми оба эти значения одинаковы и равны нулю. Получающиеся при этом значения ξ обозначим через $\delta\mu_+$ и $\delta\mu_-$. Имеем

$$\delta\mu_+ = [\beta H - m\varphi/\pi\nu_0 V] [1 - 2\alpha/\pi\nu_0 V]^{-1},$$

$$\delta\mu_- = [-\beta H + m\varphi/\pi\nu_0 V] [1 - 2\alpha/\pi\nu_0 V]^{-1},$$

$$m = n_{e+} - n_{e-} = n_{e+}(\mu + \delta\mu_+) - n_{e-}(\mu + \delta\mu_-) =$$

$$= \nu_0 [\beta H - m\varphi/\pi\nu_0 V] [1 - 2\alpha/\pi\nu_0 V]^{-1}.$$

Решая последнее уравнение, находим магнитный момент $M = \beta m$ и магнитную восприимчивость $\chi = M/H$. В результате получаем

$$\chi = \beta^2 \nu_0 [1 + 2\alpha/\pi\nu_0 V - \varphi/\pi V] \quad (13.68)$$

(мы учли, что добавки, соответствующие одной примеси, имеют порядок V^{-1} , где V — объем системы, т.е. малы, и по ним заведомо можно произвести разложение). Опять, как и раньше, добавку к χ надо умножить на N_m — число примесей, что приводит к замене V^{-1} на n_m . Используя соотношение (13.65), находим

$$\delta\chi/\chi = 4\alpha n_m/\pi\nu_0. \quad (13.69)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (13.67), получаем

$$(\delta\chi/\chi)(\delta C/C)^{-1} = 2. \quad (13.70)$$

Это соотношение получается в полной теории [12, 117] в результате исключительно трудных вычислений¹⁾. Оно не содержит никаких констант, характеризующих конкретный металл или примесь. Согласно формуле (13.64) коэффициент α имеет размерность обратной энергии. Очевидно, по порядку величины он равен T_K^{-1} (T_K — температура Кондо, § 4.6), хотя его точную связь с константой J в энергии взаимодействия электронного и примесного спина (4.39) установить не удастся; это доступно лишь полной теории, где получается [12]:

$$\alpha^{-1} = 3,08 \varepsilon_F (|J| \nu_0/n)^{1/2} \exp[-n/|J| \nu_0].$$

¹⁾ Обобщение приведенного расчета для модели с конечным орбитальным моментом [119, 120] дает в правой части формулы (13.70) $(2/3)(2l+3)$; при $l=0$ получается 2.

Если обозначить $\alpha \equiv T_K^{-1}$, то учитывая, что $C = (1/3)\pi^2\nu_0 T$, находим из (13.67) примесную часть теплоемкости единицы объема:

$$C_m = (2n_m\alpha/\nu_0\pi)(\pi^2\nu_0 T/3) = (2\pi/3)n_m T/T_K. \quad (13.71)$$

С помощью формулы (13.69) и выражения для парамагнитной восприимчивости электронов $\chi = \beta^2\nu_0$ находим примесную часть последней:

$$\chi_m = (4n_m\alpha/\nu_0\pi)\beta^2\nu_0 = (4/\pi)n_m\beta^2/T_K. \quad (13.72)$$

Перейдем к проводимости. Если возможно лишь s -рассеяние, то формула для проводимости может быть написана непосредственно согласно § 3.3 с учетом того, что вероятность рассеяния зависит от ξ и поэтому заменять ее значением при $\xi = 0$ не следует. Итак, находим

$$\sigma = -\frac{1}{6}\nu_0 e^2 v^2 \sum_{\sigma} \int W_{\sigma}^{-1}(\xi) \frac{\partial n_0}{\partial \xi} d\xi, \quad (13.73)$$

где $W = \tau^{-1}$ — суммарная вероятность всех процессов рассеяния.

При $T = 0$ возможны лишь упругие процессы рассеяния, так как и электронная система, и комплекс электрон–примесь находятся в основном состоянии. Вероятность упругого рассеяния может быть получена из выражения для эффективного сечения, а именно

$$W_{\sigma} = n_m v Q_{\sigma} \quad (13.74)$$

(справедливость этого соотношения может быть, в частности, проверена следующим образом: $W = \tau^{-1} = v/l = vn_m Q$, см. (4.7)).

При подстановке Q_{σ} , согласно формулам (13.55), (13.60)–(13.62), видно, что появляется еще одна константа, а именно δ_0 . Относительно δ_0 можно сделать следующее допущение, являющееся фактически следствием принятой модели. Мы исходим из того, что при $T = 0$ происходит полная экранировка спина примеси электронами. Но это означает, что эффективное взаимодействие между электронами и примесью при $T \rightarrow 0$ (или $\xi \rightarrow 0$) становится бесконечно большим. В этом случае эффективное сечение рассеяния электронов должно достигнуть максимального значения (унитарного предела), которое соответствует $\delta = \pi/2$. Ввиду этого положим $\delta_0 = \pi/2$. Тогда

$$\sin^2 \delta_0(\xi) \approx \cos^2 \alpha \xi \approx 1 - \alpha^2 \xi^2.$$

Ограничиваясь в (13.55) членом с $l = 0$, подставляя (13.74) в (13.73) и интегрируя, находим

$$\sigma = \sigma(0) (1 + (\pi^2/3) \alpha^2 T^2),$$

где

$$\sigma(0) = (1/12) \pi \hbar e^2 v^2 \nu_0^2 / n_m = p_0 e^2 / 4 \pi c_m \hbar^2 \quad (13.75)$$

и $c_m = n_m / n_e$.

Найденное выражение для проводимости верно при $T = 0$, когда возможно лишь упругое рассеяние. Однако при $T \neq 0$ возможны и неупругие процессы рассеяния, которые вносят поправки того же порядка $(\alpha T)^2$, что и найденная выше добавка к упругому рассеянию. Учет неупругого рассеяния требует внесения некоторых изменений в использованные ранее формулы теории рассеяния (см. [118]). Для амплитуды упругого рассеяния $f(\theta)$ вместо (13.53) получается более общая формула:

$$f(\theta) = (2ik)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [S_l - 1] P_l(\cos \theta), \quad (13.76)$$

где S_l — какие-то комплексные величины, по модулю меньшие единицы. В соответствии с этим для полного сечения упругого рассеяния вместо (13.55) получается

$$Q_{\text{el}} = (\pi/k^2) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |1 - S_l|^2. \quad (13.77)$$

Если представить асимптотику волновой функции на больших расстояниях как суперпозицию сходящейся и расходящейся волн, то при чисто упругом рассеянии их амплитуды одинаковы (формула (13.51)), а при наличии неупругого рассеяния интенсивность расходящейся волны с заданным l ослаблена по отношению к интенсивности сходящейся волны в отношении $|S_l|^2$. Поскольку это ослабление связано с неупругим рассеянием, то эффективное сечение неупругого рассеяния имеет вид

$$Q_{\text{in}} = (\pi/k^2) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 - |S_l|^2]. \quad (13.78)$$

Полное сечение рассеяния равно

$$Q = Q_{\text{el}} + Q_{\text{in}} = (2\pi/k^2) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - \text{Re } S_l). \quad (13.79)$$

По нашим предположениям существенно лишь рассеяние с $l = 0$. Температура предполагается низкой, т. е. неупругие процессы малы. В этом случае $S_0 = (1 - s) \exp[2i\delta_0(\xi)]$, где $s \ll 1$. Подставляя это в (13.78) и (13.79), находим

$$\begin{aligned} Q_{\text{in}} &= 2\pi s/k^2, \\ Q &= (2\pi/k^2) [1 - \cos 2\delta_0(\xi) + s \cos 2\delta_0(\xi)] = \\ &= (4\pi/k^2) \sin^2 \delta_0(\xi) + Q_{\text{in}} \cos 2\delta_0(\xi). \end{aligned} \quad (13.80)$$

Подставляя (13.61) с $\delta_0 = \pi/2$ и учитывая, что ввиду малости Q_{in} во втором члене можно ограничиться $\delta_0(\xi) \approx \delta_0 = \pi/2$, получаем

$$Q = (4\pi/k^2) (1 - \alpha^2 \xi^2) - Q_{\text{in}}. \quad (13.81)$$

На первый взгляд эта формула кажется парадоксальной в том смысле, что сечение неупругого рассеяния вычитается, а не прибавляется. В действительности это связано с тем, что благодаря неупругим процессам поглощается часть падающего пучка и, следовательно, уменьшается упругое рассеяние; вблизи унитарного предела ($\delta = \pi/2$) это уменьшение оказывается доминирующим.

Теперь надо найти Q_{in} . При вычислении этой добавки мы исходим из представления о том, что энергия связи синглетного комплекса электрон–примесь порядка T_K . Поэтому вероятность разрушения этого комплекса порядка $\exp(-T/T_K)$, т.е. гораздо меньше искомой поправки. Следовательно, речь может идти о последствиях косвенного поляризационного взаимодействия между электронами. Благодаря ему возможен процесс, изображенный на рис. 2.2, т.е. электрон переходит в новое состояние, рождая при этом две квазичастицы. Однако надо учесть, что взаимодействие осуществляется в заданной точке пространства; благодаря этому полный импульс электронов не сохраняется. Если пользоваться газовой моделью, то соответствующий вклад в интеграл столкновений равен (§ 4.4):

$$I(n) = (2\pi/\hbar) n_m (\nu_0/2)^3 |g|^2 \int d\xi_2 d\xi'_1 d\xi'_2 \delta(\xi + \xi_2 - \xi'_1 - \xi'_2) \times \\ \times [(1-n)(1-n_2)n'_1n'_2 - nn_2(1-n'_1)(1-n'_2)]. \quad (13.82)$$

Здесь g — константа взаимодействия (напомним, что оно предполагается точечным и действующим лишь между электронами с противоположными спинами).

При подстановке равновесных функций распределения скобка обращается в нуль. Если же $n = n_0 + \delta n$, то, взяв интегралы, получаем $I(n) = -\delta n W_{\text{in}}$, где

$$W_{\text{in}} = (\pi/\hbar) (\nu_0/2)^3 n_m (\pi^2 T^2 + \xi^2) |g|^2. \quad (13.83)$$

Поскольку вероятности рассеяния и эффективные сечения связаны соотношением (13.74), то, умножив (13.81) на $n_m v$, находим

$$W = (4n_m/\nu_0\pi\hbar)(1 - \alpha^2 \xi^2) - (\pi/\hbar) (\nu_0/2)^3 n_m (\pi^2 T^2 + \xi^2) |g|^2.$$

Теперь остается выразить константу взаимодействия g . Довольно очевидно, что поскольку g и φ в формуле (13.60) происходят от одной причины — косвенного взаимодействия электронов через заэкранированные примеси, то в первом порядке по c_m они должны быть пропорциональными друг другу. Коэффициент пропорциональности может

быть установлен следующим образом: $\varphi \int \delta n d^3 \mathbf{p} / (2\pi \hbar)^3$ характеризует изменение фазы, а $(g/V) \int \delta n d^3 \mathbf{p} / (2\pi \hbar)^3$ — изменение энергии (диагональный матричный элемент от взаимодействия). Но эти величины связаны соотношением (13.66). Отсюда следует

$$g = (2/\pi \nu_0) \varphi = -(4/\pi \nu_0^2) \alpha \quad (13.84)$$

(см. (13.65)). Подставляя это в формулу для W , имеем

$$W = (4n_m/\nu_0 \pi \hbar) \left[1 - (3/2) \alpha^2 \xi^2 - (1/2) \pi^2 \alpha^2 T^2 \right]. \quad (13.85)$$

Используя это выражение в формуле для проводимости (13.73) и интегрируя по ξ , получаем

$$\sigma = \sigma(0) (1 + \pi^2 \alpha^2 T^2) = \sigma(0) \left[1 + \pi^2 (T/T_K)^2 \right], \quad (13.86)$$

где $\sigma(0)$ выражается формулой (13.75).

На опыте измеряется полное сопротивление. Найденная нами проводимость (13.86) соответствует учету лишь обменного взаимодействия электрон–примесь. Поэтому мы приведем выражение для полного сопротивления при $T \ll T_K$:

$$\rho = \rho_v + \rho_J(0) \left[1 - \pi^2 (T/T_K)^2 \right] \quad (\rho_J = \sigma^{-1}(0)).$$

Член ρ_v соответствует как рассеянию на обычных примесях, так и потенциальному рассеянию на магнитных примесях. Отметим, что $\rho_J(0)$ того же порядка, что и часть ρ_v , связанная с магнитными примесями. Действительно, последняя имеет порядок

$$(n_e e^2 \tau / m)^{-1} \sim (n_e e^2 l / p_0)^{-1} \sim (n_e e^2 / p_0 n_m Q)^{-1} \sim \\ \sim (e^2 p_0 / \hbar^2 c_m)^{-1} \sim \sigma^{-1}(0)$$

(мы здесь подставили $Q \sim a^2 \sim (\hbar/p_0)^2$).

Итак, даже в том случае, если мы не имеем способа найти связь T_K с константой взаимодействия J (см. (4.39)) и тем самым описать единым образом свойства металла при высоких и низких температурах ¹⁾, то имеются три формулы, характеризующие низкотемпературные зависимости ($C_m(T)$, $\chi_m(T)$ и $\sigma(T)/\sigma(0)$), которые содержат только один параметр T_K и тем самым дают возможность принципиальной проверки теории. Конечно, как уже сказано, здесь была рассмотрена модель примеси со спином $S = 1/2$, и для количественного сравнения с опытом в конкретных системах необходима соответствующая теория. Однако качественно все найденные выше зависимости от температуры и порядки величин согласуются с опытом для любых систем.

¹⁾ В литературе единое описание резко меняющегося поведения какой-либо величины в разных областях значений внешнего параметра, например температуры, называется кроссовером.

Глава 14

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ СПЕКТРОВ МЕТАЛЛОВ

§ 14.1. Метод ортогонализированных плоских волн

Из предыдущего ясно, что существует много способов, позволяющих получить детальные характеристики электронных спектров. Мы можем найти практически всю ферми-поверхность и скорость в каждой точке на этой поверхности. Возникает вопрос о возможности расчета этих характеристик спектра, исходя из картины взаимодействия электронов и ядер.

Это интересно и с другой точки зрения. Экспериментальные данные дают нам всегда лишь куски поверхности или, точнее, куски контуров определенных плоских сечений поверхности или площади этих сечений. Сопоставить все эти данные и получить всю ферми-поверхность легко лишь в простейших случаях, но обычно это трудная задача. Поэтому, если бы существовала теория, дающая, по крайней мере, общую форму ферми-поверхности, интерпретация экспериментальных данных существенно упростилась бы.

Как уже отмечено в гл. 1, можно рассмотреть два предельных случая: сильно связанных электронов и почти свободных электронов. Строго говоря, ни один из параметров разложения, применяемых в обоих этих методах, не является в действительности малым, и поэтому эти методы приводят к плохо сходящимся или даже расходящимся рядам. Ввиду этого еще начиная с 30-х годов предпринимались попытки найти достаточно надежную и быстро сходящуюся процедуру расчета электронных спектров, а в дальнейшем, возможно, энергий связи металлов и кинетических коэффициентов. В настоящее время возникла большая и, фактически, довольно обособленная область теории металлов, занимающаяся этими вопросами. Она тесно связана с расчетами на компьютерах, и математическая сторона в ней безусловно доминирует над

физической. Изложение этой области выходит за рамки данного курса. Читателю, интересующемуся соответствующим кругом вопросов, можно порекомендовать, например, книги [121] и [122]. Однако для полноты мы здесь изложим очень кратко ряд идей, лежащих в основе вычислительных методов. Удобнее, прежде всего, остановиться на так называемом методе ортогонализированных плоских волн (OPW, Херринг, 1940) [123], хотя он и не был самым первым. Этот метод представляет собой некоторую комбинацию приближений сильной и слабой связи.

Начнем с уравнения Шрёдингера для электрона в периодическом поле:

$$\mathcal{H}\psi = \varepsilon\psi,$$

где

$$\mathcal{H} = -(2m)^{-1} \hbar^2 \nabla^2 + V(\mathbf{r}).$$

Эта задача эквивалентна нахождению минимума интеграла

$$\int \psi^* \mathcal{H} \psi dV - \varepsilon \int \psi^* \psi dV. \quad (14.1)$$

Будем отыскивать этот минимум с помощью некоторой пробной функции $\psi_{\text{пр}}$, которая определяется как линейная комбинация известных функций:

$$\psi_{\text{пр}} = \sum_i a_i \chi_i. \quad (14.2)$$

Коэффициенты a_i подбираются так, чтобы минимизировать выражение (14.1). Если подставить (14.2) в (14.1) и продифференцировать по всем a_i , то мы получим систему однородных линейных уравнений относительно a_i . Условие их совместности — обращение в нуль определителя системы. Элементы этого определителя — матричные элементы оператора $\mathcal{H} - \varepsilon$ по функциям χ_i . Итак, мы получаем

$$\text{Det} \left[\int \chi_i^* \mathcal{H} \chi_k dV - \varepsilon \int \chi_i^* \chi_k dV \right] = 0. \quad (14.3)$$

Это и есть уравнение для определения ε , которое мы искали.

В методе OPW функции χ_i конструируются следующим образом. Принимается, что для электронов внутренних оболочек годится приближение сильной связи. Если волновая функция электрона в свободном атоме была

$$u_{nlm} = Y_l^m(\theta, \varphi) R_{nl}(\mathbf{r}), \quad (14.4)$$

где Y_l^m — сферическая функция, то в металле можно пользоваться функциями Ванье (§ 1.2)

$$\psi_{nlm;\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = N^{-1/2} \sum_{\nu} e^{i\mathbf{p}\mathbf{a}_{\nu}/\hbar} u_{nlm}(\mathbf{r} - \mathbf{a}_{\nu}), \quad (14.5)$$

где $\mathbf{a}_\nu$ — узлы решетки, а N — полное число узлов. Для валентных электронов применяются функции

$$\chi_{\mathbf{p}} = V^{-1/2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} - \sum_{nlm} B_{nlm;\mathbf{p}} \psi_{nlm;\mathbf{p}}. \quad (14.6)$$

Это плоская волна, из которой вычтен член, являющийся линейной комбинацией волновых функций внутренних электронов.

Коэффициенты $B_{nlm;\mathbf{p}}$ подбираются таким образом, чтобы сделать функцию (14.6) ортогональной ко всем $\psi_{nlm;\mathbf{p}'}$ (с любыми $\mathbf{p}'$). Легко доказать, что это может быть обеспечено вычитанием линейной комбинации с тем же $\mathbf{p}$, что и в плоской волне. Условие ортогональности дает однозначное определение коэффициентов $B_{nlm;\mathbf{p}}$.

Если мы хотим найти энергию для определенного значения квазиимпульса $\mathbf{p}$, то возьмем функции χ_i в виде

$$\chi_i = \chi_{\mathbf{p}+\hbar\mathbf{K}_i},$$

где $\mathbf{K}_i$ — векторы обратной решетки, а каждая из функций $\chi_{\mathbf{p}+\hbar\mathbf{K}_i}$ имеет вид (14.6). Чем большее число таких функций мы возьмем, тем большая точность будет получена.

Однако для расчета детерминанта (14.3) нужны не только функции χ_i , но и периодический потенциал $V(\mathbf{r})$, входящий в уравнение Шрёдингера. Здесь имеются разные возможности. Например, в качестве этого потенциала можно взять выражение

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{\nu} V_{\text{ат}}(\mathbf{r} - \mathbf{a}_\nu), \quad (14.7)$$

где «атомный» потенциал находится как сумма потенциала ядра, кулоновского потенциала электронов и так называемого обменного потенциала, учитывающего антисимметрию полной электронной волновой функции:

$$V_{\text{ат}}(\mathbf{r}) = -\frac{Ze}{|\mathbf{r}|} + e^2 \sum_{j=1}^Z \int \frac{u_j^*(\mathbf{r}') u_j(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \\ - 3e^2 \left[\frac{3}{8\pi} \sum_{j=1}^Z \int u_j^*(\mathbf{r}) u_j(\mathbf{r}') \right]^{1/3}, \quad (14.8)$$

где u_j — волновые функции электронов в изолированном атоме (т.е. функции (14.4)).

Метод OPW дает хорошее согласие с опытом для простых веществ, у которых d - и f -состояния достаточно удалены от валентной зоны. Однако в случае переходных металлов с незаполненными d - или f -оболочками, а также в случае благородных металлов, где d -состояния электронов близки к валентной зоне и существенно влияют на спектр, OPW работает существенно хуже.

Кроме того, сложность вычислений по этому методу делает его неподходящим для быстрой интерпретации экспериментальных данных.

§ 14.2. Метод псевдопотенциала

Существенным прогрессом как в отношении уточнения фундаментальных расчетов, так и в смысле выработки полуфеноменологической, но «быстродействующей» процедуры было создание метода псевдопотенциала (Филлипс, Клейнман, 1959; Бассани, Челли, 1959) [124, 125]. Он основан на следующей идее. Будем искать волновые функции валентных электронов не в виде (14.2), (14.6), а в виде каких-то более общих и заранее неизвестных функций, из которых для ортогонализации по отношению к атомным функциям вычтены соответствующие линейные комбинации, как и в (14.6):

$$\psi_i = \varphi_i - \sum_n B_n^i \psi_n. \quad (14.9)$$

Здесь мы для простоты написали один индекс n вместо nlm . Функции ψ_n соответствуют электронам внутренних оболочек. Эти функции подобны функциям (14.5). Условие ортогональности дает

$$B_n^i = \int \psi_n^*(\mathbf{r}) \varphi_i(\mathbf{r}) dV.$$

Подставим функции (14.9) в уравнение Шрёдингера. При этом получим

$$\mathcal{H} \varphi_i - \sum_n B_n^i (\varepsilon_n - \varepsilon) \psi_n = \varepsilon \varphi_i.$$

Здесь мы считаем, что $\mathcal{H} \psi_n = \varepsilon_n \psi_n$. Введем интегральный оператор V_i такой, что

$$V_i \varphi_i = - \sum_n B_n^i (\varepsilon_n - \varepsilon) \psi_n = - \sum_n (\varepsilon_n - \varepsilon) \psi_n \int \psi_n^*(\mathbf{r}') \varphi_i(\mathbf{r}') dV'. \quad (14.10)$$

Так как $\varepsilon > \varepsilon_n$, то при $\mathbf{r}$, близком к положениям ионов, эта величина положительная, т. е. вблизи ионов потенциал V_i соответствует отталкиванию. Уравнение Шрёдингера приобретает вид

$$(\mathcal{H} + V_i) \varphi_i = \varepsilon \varphi_i. \quad (14.11)$$

Это уравнение имеет форму уравнения Шрёдингера для функции φ_i с полным потенциалом $W = V(\mathbf{r}) + V_i$, который называется псевдопотенциалом.

Однако оператор V_i , а следовательно, и псевдопотенциал W определены неоднозначно благодаря тому, что, согласно формуле (14.9), в функцию φ_i можно включить любую линейную комбинацию

функций ψ_n ; она будет компенсироваться соответствующей добавкой во второй член (14.9). Таким образом, функция ψ_i при этом не изменится, однако оператор V_i будет другим. Наиболее общий вид оператора V_i это

$$V_i \varphi_i = \sum_n \psi_n(\mathbf{r}) \int F_n(\mathbf{r}') \varphi_i(\mathbf{r}') dV', \quad (14.12)$$

где $F_n(\mathbf{r})$ — совершенно произвольные функции. Можно показать, что уровни энергии не зависят от выбора $F_n(\mathbf{r})$. Ввиду этого необходим какой-то критерий для однозначного выбора псевдопотенциала. Наиболее естественным является требование максимальной гладкости функции φ_i , т. е. $\int (\nabla \varphi_i)^2 dV = \min$. Такое требование для простых металлов приводит к тому, что потенциал V_i почти нацело компенсирует потенциал $V(\mathbf{r})$, входящий в $\mathcal{H}$, в области ионной сердцевины. Это довольно очевидно. Для того чтобы соблюдалось условие ортогональности по отношению к волновым функциям внутренних оболочек ионов, функции ψ_i должны быстро осциллировать в окрестности ионных сердцевин. Последнее приводит к появлению большой кинетической энергии, которая, согласно квантовой механике, равна $\hbar^2 \int |\nabla \psi|^2 dV / 2m$. Переход к гладким функциям φ_i означает, что большая часть этой кинетической энергии включается в потенциальную энергию, благодаря чему и происходит сильная компенсация.

Весьма простым вариантом выбора псевдопотенциала, хорошо удовлетворяющим критерию гладкости волновой функции, является так называемый псевдопотенциал Остина [127], при котором в (14.12) положено $F_n(\mathbf{r}) = -\psi_n(\mathbf{r}) V(\mathbf{r})$. Это дает для полного псевдопотенциала в уравнении для φ_i

$$W^A \varphi_i = \int w^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varphi_i(\mathbf{r}') dV',$$

$$w^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = V(\mathbf{r}') \left\{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \sum_n \psi_n^*(\mathbf{r}') \psi_n(\mathbf{r}) \right\}. \quad (14.13)$$

Если бы система функций ψ_n была полной, то $w^A = 0$. В действительности ψ_n соответствуют лишь глубоким локализованным состояниям. Поэтому выбор псевдопотенциала в форме (14.12) практически оставляет неизменным потенциал вне ионных сердцевин и почти нацело уничтожает большой отрицательный потенциал внутри сердцевин, тем самым обуславливая гладкость волновой функции.

Таким образом, мы приходим к выводу, что решение полной задачи можно заменить решением уравнения Шрёдингера

$$\left(-\hbar^2 \nabla^2 / 2m + W \right) \varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{p}) \varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \quad (14.14)$$

где W — некоторый плавный потенциал, не слишком большой даже в окрестности сердцевин ионов. Хотя полученные таким способом

волновые функции не будут правильными в окрестности сердцевин, но энергетические уровни будут при этом определяться с достаточной точностью.

Хотя, согласно формуле (14.12), псевдопотенциал является нелокальным интегральным оператором типа

$$W\varphi = \int w(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') dV',$$

оказывается, что можно получить очень точные результаты для $\varepsilon(\mathbf{p})$, взяв вместо него локальный оператор, т. е. просто некоторую периодическую функцию $W(\mathbf{r})$ и, более того, функцию типа

$$W(\mathbf{r}) = \sum_{\nu} U(\mathbf{r} - \mathbf{a}_{\nu}), \quad (14.15)$$

где сумма идет по положениям атомов, а функция $U(r)$ считается изотропной (Браст, 1964) [128]. Эта функция подбирается путем сравнения результатов либо с экспериментальными данными, либо с результатами расчетов по методу ОРВ. При практическом осуществлении такой процедуры оказалось, что функции $U(r)$ для разных металлов весьма близки, и разница спектров происходит на самом деле от разницы в числе валентных электронов и кристаллических решеток.

Подбор функции $U(r)$ в действительности сводится к определению нескольких чисел. Связано это с тем, что ввиду плавности функций $\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ их можно разложить по плоским волнам (см. теорему Блоха (1.1.5)):

$$\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = N^{-1/2} \sum_{\mathbf{K}} c_{\mathbf{p}+\hbar\mathbf{K}} e^{i(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{K})\mathbf{r}/\hbar}.$$

Из уравнения (14.14) получаем уравнение для $c_{\mathbf{p}+\hbar\mathbf{K}}$:

$$\left[\frac{(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{K})^2}{2m} - \varepsilon(\mathbf{p}) \right] c_{\mathbf{p}+\hbar\mathbf{K}} + \sum_{\mathbf{K}_1} W_{\mathbf{p}+\hbar\mathbf{K}, \mathbf{p}+\hbar\mathbf{K}_1} c_{\mathbf{p}+\hbar\mathbf{K}_1} = 0. \quad (14.16)$$

Согласно (14.15) матричные элементы $W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ равны

$$W_{\mathbf{p}, \mathbf{p}+\hbar\mathbf{K}} = U(K) \left(N^{-1} \sum_{\mathbf{a}_{\nu}} e^{i\mathbf{K}\mathbf{a}_{\nu}} \right) = U(K) S(\mathbf{K}). \quad (14.17)$$

Здесь $U(K)$ — матричный элемент функции $U(r)$, а $S(\mathbf{K})$ — так называемый структурный фактор, зависящий только от геометрии решетки. Если кристаллическая решетка совпадает с решеткой Бравэ (один атом в элементарной ячейке), то $S(\mathbf{K}) = 1$. В более общем случае $S(\mathbf{K}) \neq 1$. Поскольку на практике ограничиваются лишь несколькими наименьшими значениями K , то, согласно (14.17), вместо всей функции достаточно подобрать несколько чисел $U(K)$.

Для данного конкретного вещества этого достаточно. Но если исходить из предположения, что функции $U(r)$ для разных металлов различаются мало, то желательно иметь всю функцию $U(r)$, или, точнее, ее фурье-образ $U(k)$, из которого можно уже находить значения $U(K)$ для каждой конкретной решетки. Точки, найденные первоначально для германия [128], хорошо интерполируются функцией [129]

$$U(k) = A_1(k^2 - A_2) \left[\exp(A_3(k^2 - A_4)) + 1 \right]^{-1}. \quad (14.18)$$

Если k и A_i выражать в атомных единицах $m = \hbar = e = 1$, т. е. длины и k^{-1} — в единицах, равных боровскому радиусу $r_B = \hbar^2/me^2 = 0,529 \text{ \AA}$, а энергию — в ридбергах: $Ry = me^4/\hbar^2 = 27,2 \text{ эВ}$, то коэффициенты в этой формуле равны

$$A_1 = 0,0655, \quad A_2 = 2,78, \quad A_3 = 2,38, \quad A_4 = 3,70.$$

Заметим, что величина A_1 , определяющая масштаб потенциала, фактически мала, так как энергия Ферми в атомных единицах имеет порядок единицы. Кроме того, следует отметить, что обычно решетки металлов весьма симметричны, так что есть много значений $\mathbf{K}$ с одинаковым абсолютным значением. Поэтому уже несколько первых значений $|\mathbf{K}|$ дают достаточно широкую базу для нахождения энергетического спектра.

Таким способом был рассчитан целый ряд энергетических спектров, в том числе спектры полуметаллов: сурьмы и мышьяка. Поскольку в них число электронов проводимости мало ($\sim 10^{-2}$ на атом в As и 10^{-3} на атом в Sb), то точность расчетов ферми-поверхности должна быть очень большой. Оказалось, что результаты хорошо согласуются с экспериментом.

Пожалуй, единственным примером, где этот метод не годится, является висмут, в котором число электронов, проводимости порядка 10^{-5} на атом. Здесь метод псевдопотенциала дает для поверхности Ферми результаты, отличающиеся от опытных в 2–3 раза. Следовательно, можно заключить, что точность этого метода может быть доведена до нескольких процентов.

Отметим здесь также, что применение простых модельных локальных псевдопотенциалов, подобранных по электронным спектрам, дает возможность теоретически воспроизвести для непреходных металлов экспериментально найденные фононные спектры [291] и температурные зависимости кинетических коэффициентов [292] с точностью 15–20%.

Тем не менее использование упрощенного псевдопотенциала в виде (14.15) не может считаться вполне удовлетворительным. Прежде всего, не передается нелокальный характер истинного псевдопотенциала. Далее, для нахождения фурье-компонент $U(\mathbf{K})$ надо обращаться либо к методу ОРВ, что связано с громоздкими расчетами, либо подбирать соответствующие константы из сравнения с опытом, что сильно

уменьшает ценность этой процедуры как микроскопической теории. В связи с этим были разработаны методы построения «модельных» псевдопотенциалов.

Наиболее популярным из них является метод *Хейне–Абаренкова–Шоу* [130, 131], который мы здесь кратко изложим. Вернемся к формуле (14.15), однако будем считать, что квазиатомный потенциал U является нелокальным. В этом случае

$$W\varphi = \int \sum_{\nu} U(\mathbf{r} - \mathbf{a}_{\nu}, \mathbf{r}' - \mathbf{a}_{\nu}) \varphi(\mathbf{r}') dV'. \quad (14.19)$$

Если разложить φ по плоским волнам, как это делалось раньше, то получим уравнение (14.16), но с коэффициентами

$$W_{\mathbf{p}+\hbar\mathbf{K}, \mathbf{p}+\hbar\mathbf{K}_1} = U(\mathbf{p}/\hbar + \mathbf{K}, \mathbf{p}/\hbar + \mathbf{K}_1) S(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}), \quad (14.20)$$

где $U(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ — фурье-компонента потенциала $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

Квазиатомный потенциал U строится следующим образом. Начнем с уравнения Шрёдингера для частицы в центрально-симметричном поле. Представив волновую функцию в виде (14.4), мы получаем уравнения для функции $R_{nl}(r)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{nl}}{\partial r} \right) + \left[U(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{nl} = \varepsilon R_{nl}. \quad (14.21)$$

В действительности мы имеем дело не с одним электроном в поле заданного потенциала, а с многоэлектронной системой. Она моделируется следующим образом. Для каждого из уравнений (14.21) выбирается свой потенциал U_l . При $r > r_l$ он совпадает с атомным потенциалом, т.е. $V_{\text{ат}}(r) = -Ze^2/r$ (Ze — заряд иона), а при $r < r_l$ считается константой: $-A_l(\varepsilon)$. Для гладкой сшивки необходимо, чтобы

$$-A_l(\varepsilon) = V_{\text{ат}}(r_l). \quad (14.22)$$

Такое обрезание кулоновского потенциала при $r < r_l$ делается лишь для $l \leq l_0$; обычно $l_0 = 1$ или 2. Связано это с тем, что положительная центробежная энергия $l(l+1)/r^2$, которая добавляется к $U_l(r)$ в (14.21), не дает возможности электрону при больших l подойти близко к иону.

Константы A_l , или, что то же самое, r_l подбираются так, чтобы уравнение Шрёдингера с обрезанным кулоновским потенциалом давало правильные уровни энергии изолированного атома, т.е. системы электрон–ион. Так получают значения A_l для определенных энергий, после чего функция $A_l(\varepsilon)$ находится при помощи экстраполяции между этими значениями.

В целом псевдопотенциал Хейне–Абаренкова–Шоу может быть записан в виде

$$U(r) = V_{\text{ат}}(r) - \sum_{l=0}^{l_0} \theta(r_l - r) [A_l(\varepsilon) V + V_{\text{ат}}(r)] P_l, \quad (14.23)$$

где $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, а P_l — оператор проектирования на состояния с заданным l . Ввиду того что потенциал различается для разных l , он не может быть записан как локальный потенциал.

Для получения фурье-компонент можно воспользоваться разложением плоской волны по сферическим функциям (см. [118]):

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(kr) Y_l^{m*}(\theta_k, \varphi_k) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (14.24)$$

где $j_l(x) = (\pi/2x)^{1/2} J_{l+1/2}(x)$, J — функция Бесселя. После этого получаем

$$\begin{aligned} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} U e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} &= V_{\text{ат}}(r) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} - \sum_{l=0}^{l_0} \theta(r_l - r) [A_l(\varepsilon) + V_{\text{ат}}(r)] \times \\ &\times (4\pi)^2 \sum_{m=-l}^l \sum_{m_1=-l}^l j_l(kr) j_l(k'r) Y_l^{m*}(\theta_k, \varphi_k) Y_l^m(\theta, \varphi) \times \\ &\times Y_l^{m_1}(\theta_{k'}, \varphi_{k'}) Y_l^{m_1*}(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Рассмотрим второй член этого выражения. Введем переменную $x = r/r_l$ и воспользуемся тем, что, согласно (14.22),

$$A_l(\varepsilon) + V_{\text{ат}}(r) = Ze^2(r - r_l)/r r_l = (Ze^2/r_l)(x - 1)/x.$$

Интегрируя по углам θ, φ и пользуясь ортонормированностью функций $Y_l^m(\theta, \varphi)$, получаем сумму по m , которую преобразуем согласно правилу свертки сферических функций (см. [118]),

$$\sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(\theta_k, \varphi_k) Y_l^m(\theta_{k'}, \varphi_{k'}) = (4\pi)^{-1} (2l+1) P_l(\cos \theta_{kk'}). \quad (14.25)$$

После этого для получения искомой фурье-компоненты остается взять интеграл по r :

$$\int_0^{\infty} r^2 dr \theta(r_l - r) \longrightarrow r_l^3 \int_0^1 x^2 dx.$$

Что касается первого члена, то в нем интеграл по dV дает

$$-4\pi Ze^2/|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2.$$

Итак, в целом получаем

$$U(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -4\pi Ze^2/|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 + 4\pi Ze^2 \sum_{l=0}^{l_0} (2l+1) P_l(\cos \theta_{kk'}) \times \\ \times \int_0^1 x(1-x) j_l(kr_l x) j_l(k'r_l x) dx. \quad (14.26)$$

Первый член зависит лишь от разности $|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|$ и соответствует локальному потенциалу; второй зависит по отдельности от $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ и в этом проявляется его нелокальность.

Найденная фурье-компонента $U(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ подставляется в формулу (14.20), а результат используется в системе уравнений (14.16). Обрывая систему на каком-либо $|\mathbf{K}|$ и решая секулярное уравнение (условие обращения в нуль детерминанта системы линейных однородных уравнений), получаем энергетический спектр.

Есть разные другие способы определения «модельного псевдопотенциала», но, по-видимому, изложенный способ является наиболее обоснованным, физически понятным и практически удобным.

Тем не менее существуют случаи, когда метод модельного псевдопотенциала отказывает. Это металлы, в которых d - и f -зоны попадают либо внутрь валентной зоны, либо находятся вблизи ее края. Трудность таких случаев заключается в следующем. Использование для металла значений A_l и r_l , подогнанных по спектру электрона в поле иона, предполагает возможность экстраполяции $A_l(\varepsilon)$ к другим значениям энергии, т.е. фактически $A_l(\varepsilon)$ считаются слабо зависящими от энергии в некоторых ее интервалах.

Посмотрим, как обстоит дело в том случае, если d - или f -зоны близки к зоне проводимости. На d - или f -электрон в атоме действует потенциал, состоящий из кулоновского притяжения иона и центробежного отталкивания $l(l+1)/r^2$. В результате получается потенциальная яма, имеющая форму сферического слоя вокруг ядра, где и локализуется такой электрон. В металле благодаря перекрытию валентных оболочек потенциал вдалеке от иона не равен нулю, а отрицателен. Тем не менее в этом случае яма может не совсем исчезнуть, а частично сохраниться, и будет отделена от внешней области потенциальным барьером. В такой ситуации дискретный уровень с большим орбитальным моментом разрушается не полностью, а превращается в так называемый «виртуальный», или «резонансный», уровень.

Хотя эта ситуация тоже может быть описана модельным потенциалом типа рассмотренного выше, но соответствующие коэффици-

енты $A_l(\varepsilon)$ начинают сильно зависеть от энергии вблизи резонанса, и в результате вся ценность метода может быть сведена к нулю. Именно поэтому для построения энергетических спектров переходных и редкоземельных металлов, а также благородных металлов, у которых d -зона близка к зоне проводимости, применяются гораздо более сложные методы, такие как метод «присоединенных плоских волн» (Augmented Plane Waves, APW) или метод функций Грина, предложенный Коррингой, Коном и Ростокером (KKR). Изложение этих методов выходит за рамки данной книги. Мы отсылаем читателя к специальной литературе (например, [121, 122]).

В то же время надо иметь в виду, что теория энергетических спектров ставит перед собой две совершенно различные задачи. Одна из них — возможно более строгий расчет спектров исходя из элементарных взаимодействий электронов и ионов. Об этом говорилось выше. Другая задача — практическое построение спектров, облегчающее анализ и систематизацию экспериментального материала. Последняя задача легко решается для простых металлов с помощью модели свободных электронов, описанной в следующем параграфе. В металлах, в которых существенны d - или f -зоны, можно пытаться описать их с помощью формул, полученных из приближения сильной связи, подбирая коэффициенты из сравнения с экспериментальными данными. Такая процедура оказывается во многих случаях очень успешной. Однако следует понимать, что это не является доказательством правильности такого приближения. В действительности орбиты перекрываются достаточно сильно, а к тому же имеет место так называемая «гибридизация» с s - и p -зонами. Успех формул сильной связи связан с тем, что они правильно учитывают симметрию кристаллической решетки и возникающую вследствие этого возможность вырождения энергетических термов $\varepsilon(\mathbf{p})$ для точек $\mathbf{p}$ в пространстве обратной решетки, обладающих повышенной симметрией.

§ 14.3. Модель свободных электронов

Изложенные в § 14.2 общие соображения, а также конкретные расчеты псевдопотенциалов или их подбор для простых металлов из сравнения с экспериментальными данными показывает, что в таких металлах псевдопотенциал существенно меньше энергии Ферми. Следовательно, в первом приближении псевдопотенциал можно считать равным нулю и рассматривать электроны как свободные. Согласно модели почти свободных электронов (§ 1.3) отклонения проявятся лишь в небольшой окрестности граней зоны Бриллюэна и будут сводиться к «скруглению» соответствующих малых участков ферми-поверхности. Точность такого подхода невелика ($\sim 10\%$), но зато он является предельно простым и поэтому идеально подходит для упомянутой выше задачи: восстановления ферми-поверхности по отрывочным экспериментальным данным.

Для того чтобы объяснить основную идею метода свободных электронов, начнем с одномерного случая. При отсутствии потенциала задача сводится к тому, чтобы разбить параболу $\varepsilon(p) = p^2/2m$ на участки, соответствующие:

- 1) $-\hbar K/2 < p < \hbar K/2$,
- 2) $-\hbar K < p < -\hbar K/2$ и $\hbar K/2 < p < \hbar K$,
- 3) ... ,

где $K = 2\pi/a$ (см. рис. 1.4) и привести эти участки путем переноса на $n\hbar K$ к зоне Бриллюэна $-\hbar K/2 < p < \hbar K/2$. Это может быть сделано путем следующего графического построения. Изобразим

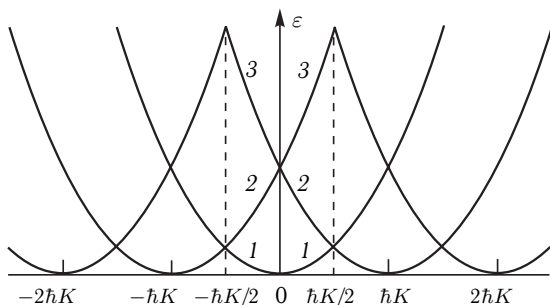


Рис. 14.1

на плоскости (ε, p) много парабол с вершинами в точках $0, \pm\hbar K, \pm 2\hbar K, \dots$ (рис. 14.1). Выделим зону Бриллюэна. Будем считать, что кусок какой-либо параболы «относится» не только к ней, но и ко всем параболом, для которых он является «внутренним», т.е. лежит выше них. Теперь будем рассматривать куски, которые входят в зону Бриллюэна. Самый нижний кусок относится только к одной параболе. Его мы будем считать 1-й зоной. Следующие по высоте куски относятся к двум параболом. В целом они образуют 2-ю зону. Далее идет 3-я зона, состоящая из кусков, относящихся к трем параболом, и т.д. Нетрудно увидеть, что эта процедура автоматически дает нам картину зон в пределе, когда потенциал стремится к нулю (ср. с рис. 1.4 и рис. 1.3).

Теперь применим аналогичную процедуру для конструирования поверхности Ферми (Харрисон, 1960) [132]. Изобразим обратную решетку. Взяв узел $\mathbf{K} = 0$, нарисуем ферми-сферу с радиусом $p_0 = \hbar(3\pi^2 n_e)^{1/3}$, где n_e — плотность валентных электронов. Такие же сферы рисуются вокруг узлов с другими $\mathbf{K}$. В общем случае сферы перекрываются. Теперь рассмотрим зону Бриллюэна. Разные ее части входят в разное число сфер. Выделим область, которая входит в одну или большее число сфер. Граница этой области

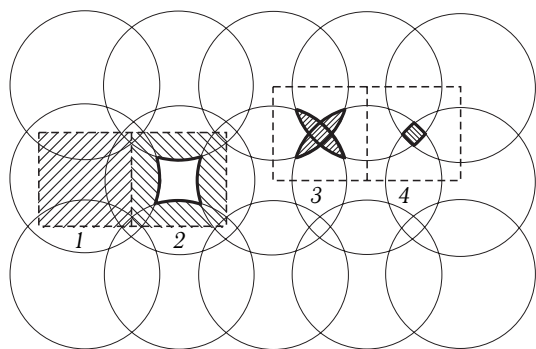


Рис. 14.2

интерпретируется как ферми-поверхность в низшей зоне. Если при этом получится вся зона Бриллюэна, то значит 1-я зона целиком заполнена, и ферми-поверхность относится к более высоким зонам. Затем идут части объема зоны Бриллюэна, входящие в две или большее число сфер. Границы этих частей образуют ферми-поверхность во 2-й зоне и т. д. Это продемонстрировано для двумерной модели на рис. 14.2.

Пример того, что получается в трехмерном случае, приведен на рис. 14.3, где изображены ферми-поверхности гранецентрированных кубических металлов с разным числом валентных электронов [132]. Описанное геометрическое построение дает неплохое согласие с опытными данными для простых многовалентных металлов.

Конечно, как уже сказано, точность этого метода ухудшается около граней зоны Бриллюэна, что может привести к неправильным предсказаниям относительно малых участков ферми-поверхности или даже относительно ее топологии. Это, однако, можно исправить. Согласно модели слабосвязанных электронов (§ 1.3) энергия вблизи такой грани имеет вид

$$\varepsilon = (1/2) [\varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{K}) + \left\{ (1/4) [\varepsilon(\mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{K})]^2 + V_{\mathbf{K}}^2 \right\}^{1/2}]. \quad (14.27)$$

Величина $V_{\mathbf{K}}$ в этой формуле может быть подобрана либо из экспериментальных данных, либо из расчета по более точному методу (OPW или методу псевдопотенциала). Таким способом удастся справиться с трудностями, касающимися окрестности граней.

Если речь идет об окрестности пересечения двух граней, т. е. об области, близкой к ребру зоны Бриллюэна, то в модели слабосвязанных электронов надо брать линейную комбинацию не двух, а трех плоских волн:

$$e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar}, \quad e^{i(\mathbf{p}-\hbar\mathbf{K}_1)\mathbf{r}/\hbar}, \quad e^{i(\mathbf{p}-\hbar\mathbf{K}_2)\mathbf{r}/\hbar}.$$

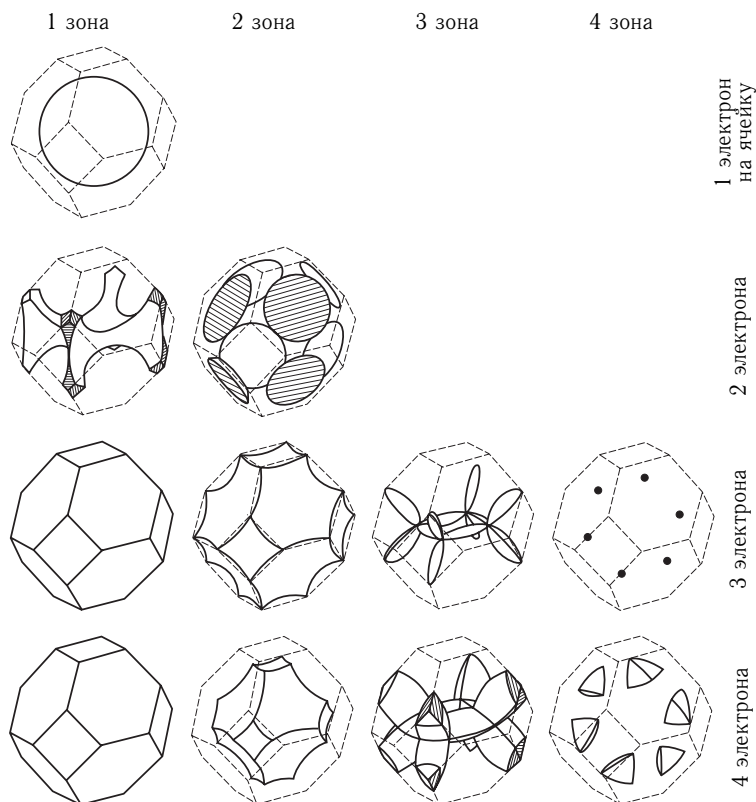


Рис. 14.3

Функции $\varepsilon(\mathbf{p})$ в этом случае определяются как собственные значения матрицы 3-го порядка и будут включать три неизвестных константы: V_{01} , V_{02} и V_{12} . Около вершины зоны Бриллюэна надо рассматривать четыре функции и шесть неизвестных констант.

Модель свободных электронов дает возможность легко интерпретировать экспериментальные данные. Если, например, получается зависимость граничного импульса Ферми от угла вдоль каких-то контуров на поверхности Ферми, то построение по модели свободных электронов дает возможность легко классифицировать, к каким именно участкам ферми-поверхности относятся эти контуры. Более того, зная из модели общую форму данного участка поверхности и имея экспериментальные данные, относящиеся к отдельным местам на этой поверхности, можно выбрать разумную интерполяционную процедуру.

Если же смотреть на построение по модели свободных электронов как на количественный метод, то, как уже отмечалось, ее точность для ферми-поверхности порядка 10 % (вблизи граней зоны Бриллюэна это будет так лишь после внесения необходимой поправки, как было указано выше). Хуже обстоит дело с эффективными массами. При сравнении данных, полученных из циклотронного резонанса, с моделью свободных электронов надо учесть, что циклотронный период вдоль определенной орбиты — это лишь часть того периода, который имел бы свободный электрон, перемещаясь по сечению полной ферми-сферы. Лишь этот последний период должен быть связан со свободной массой соотношением

$$T = 2\pi mc/eH.$$

По модели свободных электронов отсюда нетрудно определить периоды движения по сечениям истинных участков ферми-поверхности.

Однако такие предсказания отличаются от опытных данных на 30–40 %. Интересно отметить, что эта разница в данном конкретном металле мало зависит от направления. Поэтому, внося поправку в свободную массу, можно затем уже с хорошей точностью получить все циклотронные массы для разных участков поверхности Ферми. Само происхождение отличия массы от свободной связано, по-видимому, со взаимодействием электронов с фононами (§ 14.4).

§ 14.4. Приближение сильно сжатого вещества

Итак, согласно предыдущему приближение свободных электронов довольно хорошо описывает ферми-поверхности металлов. Хотя этот результат вполне оправдывается рассуждением о псевдопотенциале, но на него можно взглянуть и с несколько иной точки зрения. Можно задаться вопросом, не свидетельствует ли это о том, что кинетическая энергия валентных электронов больше их потенциальной энергии. Как мы увидим ниже, такая идея может быть оправдана для многих многовалентных металлов. Подобное положение имеет место в сильно сжатом веществе. Действительно, средняя потенциальная энергия имеет порядок $e^2/\bar{r}$, где $\bar{r}$ — среднее расстояние между атомами. Кинетическая энергия порядка $p_0^2/2m$. Но согласно принципу неопределенности $p_0 \sim \hbar/\bar{r}$. Следовательно, по порядку величины кинетическая энергия равна $\hbar^2/m\bar{r}^2$. Отношение потенциальной энергии к кинетической равно

$$\frac{e^2/\bar{r}}{\hbar^2/(m\bar{r}^2)} \sim \frac{\bar{r}}{r_B}, \quad (14.28)$$

где $r_B = \hbar^2/me^2$ — так называемый боровский радиус. Отсюда следует, что при большой плотности, когда $\bar{r} \ll r_B$, потенциальная энергия электронов становится гораздо меньше, чем их кинетическая энергия.

Можно предположить, что и при обычных условиях валентные электроны в металлах находятся в «сильно сжатом» состоянии, что делает их потенциальную энергию гораздо меньше их кинетической энергии. Скорее этого следует ожидать в многовалентных металлах, ибо периоды решетки металлов обычно различаются мало, так что плотность электронов в многовалентных металлах должна быть больше ¹⁾.

Преимущества такого подхода, если он правилен, заключаются в следующем. В этом случае можно утверждать, что не только ферми-поверхности хорошо описываются приближением свободных электронов, но, более того, все взаимодействия электронов с ионами решетки и между собой малы по сравнению с их кинетической энергией и могут быть рассмотрены с помощью теории возмущений.

Расчет модели сильно сжатого вещества [133] показывает, что параметром разложения является $e^2/\pi\hbar v$, где $v = p_0/m$ (конечно, по порядку величины это то же самое, что и (14.28), так как $p_0 \sim \hbar/\bar{r}$, но здесь нужно точное значение). Для реальных металлов импульс можно вычислить из плотности валентных электронов. Отсюда получаем параметр $e^2/\pi\hbar v$:

Металл	Sn	Pb	Al	Cu	Ag	Au	Na	K
$e^2/\pi\hbar v$	0,37	0,38	0,35	0,45	0,51	0,50	0,67	0,83

Итак, действительно, параметр $e^2/\pi\hbar v$ невелик, причем в многовалентных металлах он меньше, чем в одновалентных.

Найдем изменение ферми-поверхности, происходящее от конечности параметра разложения. Поправка к энергии от взаимодействия

¹⁾ Такое рассуждение не следует понимать слишком буквально. Ведь без внешнего сжатия кристаллическая решетка сбалансирована внутренними силами, т. е. отвечает минимальной энергии. Поскольку полная энергия представляет собой сумму кинетической энергии электронов и кулоновской потенциальной энергии, то, очевидно, обе они одного порядка. Речь может идти лишь о том, что параметр $e^2/\pi\hbar v$ при таком балансе получается не слишком большим. Расчет модели сильно сжатого вещества [133] дает следующую энергию на один атом:

$$E = \frac{3p_0^2 Z}{10m} - \frac{e^2 p_0}{\hbar (3\pi^2 Z)^{1/3}} (1,44Z^2 + 0,74Z^{4/3}),$$

где Z — число электронов на один атом. Минимизируя это выражение и определяя параметр $e^2/\pi\hbar v$, находим следующие значения: 0,2 для $Z = 2$; 0,16 для $Z = 3$. Это подтверждает разумность предлагаемого подхода.

электронов с ионами равна

$$\delta\varepsilon(\mathbf{p}) = (4\pi n_e e^2)^2 \sum_{\mathbf{K} \neq 0} K^{-4} \left[\frac{p^2}{2m} - \frac{(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{K})^2}{2m} \right]^{-1}, \quad (14.29)$$

где n_e — электронная плотность. Поправки первого порядка по e^2 от электронов и ионов сокращаются в силу условия электронейтральности. Что касается поправки второго порядка от взаимодействия электронов, то она изотропна, а следовательно, не влияет на поверхность Ферми. Последняя описывается уравнением

$$\delta p(\theta, \varphi) = (m/p_0) [\bar{\delta\varepsilon} - \delta\varepsilon(p_0\mathbf{n})], \quad (14.30)$$

где $\bar{\delta\varepsilon}$ — среднее по углам от (14.21) при $|\mathbf{p}| = p_0$, $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p_0$.

Из (14.29) и (14.30) следует, что поправка к ферми-поверхности имеет второй порядок по $e^2/\hbar\pi v$. Это вполне может объяснить наблюдаемую на опыте точность приближения свободных электронов в многовалентных металлах.

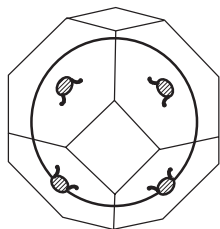


Рис. 14.4

В благородных металлах параметр разложения не столь мал. Поэтому неудивительно, что, хотя, согласно модели свободных электронов, ферми-поверхность не должна пересекать грани зоны Бриллюэна, на самом деле поверхность является открытой (рис. 14.4, ср. с рис. 2.4). Это расхождение можно попытаться устранить, применяя в окрестности грани зоны Бриллюэна формулу (14.27) с $V_{\mathbf{K}} = 4\pi e^2 n_e / K^2$. В этом случае мы действительно получаем перекрытие. Из сравнения радиусов «шеек» с опытными данными (см. ниже в таблице) видно, что для такого

низкого приближения согласие неплохое. Впрочем, этому сходству не следует придавать большого значения, ибо, как уже отмечалось в § 14.2, в благородных металлах дело очень осложняется из-за примеси d -состояний.

Металл	Cu	Ag	Au
r/p_0 (теор.)	0,1	0,2	0,2
r/p_0 (эксп.)	0,19	0,14	0,18

В щелочных металлах положение кажется несколько странным с точки зрения рассматриваемого подхода. Дело в том, что их спектры очень близки к спектру свободных электронов, в то время как значения $e^2/\hbar\pi v$ для них сравнительно велики. Однако здесь нет никакого противоречия, так как при немалых значениях этого параметра модель

просто неприменима и не может быть использована для каких-либо предсказаний ¹⁾).

Наконец, о массах. Для сильно сжатого вещества было показано [133], что благодаря взаимодействию электрона с фононами их эффективная масса должна иметь форму

$$m^*/m = 1 + \alpha_1 e^2 / \pi \hbar v, \quad (14.31)$$

где $\alpha_1 \sim 1$ и приблизительно изотропно. Следовательно, масса меняется в первом приближении по параметру $e^2 / \pi \hbar v$, причем поправка мало зависит от направления в металле. Это соответствует опытным данным.

Приведенные данные свидетельствуют о том, что приближение «сильно сжатых» электронов дает возможность, по крайней мере качественно, объяснить разные факты с единой точки зрения. Но его основная ценность заключается в том, что оно дает простую модель, которая позволяет составить представление не только об электронных спектрах, но и о кинетических свойствах простых многовалентных металлов.

¹⁾ Хорошее согласие с данными для щелочных металлов может быть получено и с помощью рассматриваемой модели, если ввести экранировку кулоновского взаимодействия, т.е. заменить r^{-1} на $\exp(-\kappa r)/r$ (или в фурье-компонентах k^{-2} на $(k^2 + \kappa^2)^{-1}$, где $\kappa^2 = 4\pi e^2 (\partial n_e / \partial \mu) = 4e^2 p_0 m / \pi \hbar^3$) (§ 4.1).

Часть II

СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ МЕТАЛЛЫ

Глава 15

МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

§ 15.1. Общие свойства сверхпроводников

В предыдущей части были рассмотрены различные механизмы электрического сопротивления. Одни из них дают постепенное уменьшение сопротивления с температурой, другие приводят к постоянному значению или даже возрастанию сопротивления при самых низких температурах. Однако в 1911 г. голландский физик *Камерлинг-Оннес* [134], изучая температурную зависимость сопротивления ртути, обнаружил, что оно внезапно исчезает при температуре около 4 К. Вскоре после этого те же свойства были найдены и у некоторых других металлов. Новое явление получило название «сверхпроводимость», а соответствующие металлы стали называться «сверхпроводниками».

Температура, при которой исчезает сопротивление, называемая критической, весьма различна у разных сверхпроводников. Наибольшую критическую температуру из чистых металлов имеет ниобий: $T_c = 9,25$ К; наименьшая найдена у вольфрама: $T_c = 0,0154$ К. Хотя все это низкие температуры, но в действительности их диапазон очень велик, ибо крайние значения отличаются почти в тысячу раз.

В дальнейшем мы будем говорить о практических применениях сверхпроводников. Уже теперь они довольно многообразны. Но их было бы неизмеримо больше, если бы удалось повысить критическую температуру хотя бы до 77 К, т. е. температуры кипения жидкого азота. В настоящее время самая высокая критическая температура достигнута у пленок соединения Nb_3Ge : $T_c = 23$ К¹⁾.

Мы обсудим ниже происхождение критической температуры и надежды на ее повышение.

¹⁾ Рекордсменами к 2007 г. являются «высокотемпературные сверхпроводники»: $Hg_xBa_{2-x}Ca_2Cu_3O_{8+\delta}$, у которого $T_c = 133$ К, $Tl_2Ca_2Ba_2Cu_3O_{10}$ с $T_c = 125$ К, $YBa_2Cu_3O_7$ с $T_c = 92$ К. У купрата ртути под давлением достигнута $T_c = 164$ К при оптимальном допировании δ .

Дальнейшее исследование свойств сверхпроводников показало, что сверхпроводимость может быть разрушена не только путем повышения температуры, но и посредством приложения достаточно сильного магнитного поля (Камерлинг-Оннес, 1914) [135]. Критическое поле, в котором исчезает сверхпроводимость, уменьшается с повышением температуры. Эмпирически установлено, что зависимость $H_c(T)$ хорошо описывается формулой

$$H_c(T) = H_c(0) \left[1 - (T/T_c)^2 \right]. \quad (15.1)$$

Разрушение сверхпроводимости имеет место и при прохождении сильного электрического тока. Если сверхпроводник не слишком тонкий (см. ниже), то критический ток, при котором возникает сопротивление, удовлетворяет правилу *Сильсби* [136]: магнитное поле, создаваемое критическим током на поверхности сверхпроводника, должно равняться H_c .

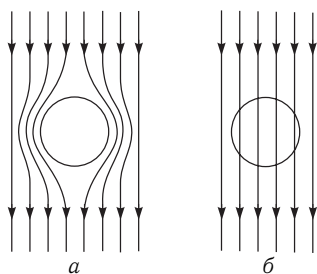


Рис. 15.1

Одним из основных свойств сверхпроводников является так называемый эффект Мейснера (Мейснер и Оксенфельд, 1933) [137]. Если поместить металл в магнитное поле, меньшее H_c , то при переходе в сверхпроводящее состояние поле «выталкивается» из сверхпроводника, т.е. в сверхпроводнике истинное поле $\mathbf{B} = 0$ (напомним, что магнитная индукция $\mathbf{B}$ есть среднее микроскопическое поле)¹⁾. Это изображено на рис. 15.1: *а* — сверхпроводник, *б* — нормальный металл.

Более детальные исследования обнаружили, что магнитное поле равно нулю лишь в толще массивного образца. В тонком поверхностном слое поле постепенно уменьшается от заданного значения на поверхности до нуля. Толщина этого слоя, называемая глубиной проникновения (δ), обычно порядка 10^{-5} – 10^{-6} см.

При помещении сверхпроводника во внешнее магнитное поле в поверхностном слое появляется незатухающий ток, который создает свое собственное поле, полностью компенсирующее внешнее поле внутри сверхпроводника.

Проще всего это проследить на примере цилиндра в продольном магнитном поле. Представим себе соленоид с током i . Внутри соленоида создается магнитное поле $H = (4\pi/c)in$, где n — число витков спирали, приходящееся на 1 см длины. Вместо in можно написать

¹⁾ В сверхпроводящих сплавах поведение в магнитном поле является более сложным, в частности, эффект Мейснера может быть неполным. Мы пока не будем касаться этого вопроса; он будет рассмотрен в гл. 18.

J — ток, приходящийся на 1 см длины соленоида. Если поместить сверхпроводящий цилиндр в поле H , то в поверхностном слое потечет ток $J = cH/4\pi$, направленный так, чтобы создаваемое им поле компенсировало внешнее поле H .

Глубина проникновения δ зависит от разных факторов и, в частности, от температуры. При приближении температуры к T_c $\delta \rightarrow \infty$. Эмпирическая формула, отражающая в общих чертах температурную зависимость δ , имеет вид

$$\delta(T) = \delta(0) / [1 - (T/T_c)^4]^{1/2}. \quad (15.2)$$

Теперь следует сказать о термодинамическом характере перехода металла из сверхпроводящего в нормальное состояние. Экспериментально обнаружено, что если переход совершается при $H = 0$, т.е. при $T = T_c$, то это фазовый переход 2-го рода (см. приложение II). При этом переходе не поглощается скрытая теплота перехода, но зато имеет место скачок теплоемкости. Если же переход осуществляется при $H \neq 0$, т.е. при $T < T_c$, то это переход 1-го рода, при котором поглощается теплота перехода.

Такое изменение характера перехода можно связать с поведением глубины проникновения. При $T \rightarrow T_c$ $\delta \rightarrow \infty$, и сверхпроводник в точке перехода ничем не отличается от нормального металла (по отношению к проникновению бесконечно слабого поля). Следовательно, величина, которая может служить характеристикой степени отличия сверхпроводника от нормального металла, меняется непрерывно, и следует ожидать, что переход будет 2-го рода. Если же переход происходит в конечном магнитном поле, то имеет место скачкообразное изменение δ от конечного значения в сверхпроводящей фазе до бесконечного в нормальной (в нормальный металл поле проникает полностью, т.е. формально $\delta = \infty$).

Непрерывность изменения δ при T_c свидетельствует о том, что состояние электронной жидкости в металле меняется непрерывно. Об этом же говорят и измерения теплопроводности.

В части I книги отмечалось, что обычно в теплопроводности металла основную роль играют электроны. Но обращение в нуль сопротивления могло бы свидетельствовать о том, что электроны перестают взаимодействовать с кристаллической решеткой и, следовательно, неспособны участвовать в теплопроводности. В таком случае полный коэффициент теплопроводности в точке перехода должен был бы уменьшаться скачком до значения, определяемого одними фононами. Этого не происходит. При $T = T_c$ κ меняется непрерывно.

Последним из фундаментальных свойств, которое мы здесь упомянем, является поведение теплоемкости при низких температурах. В первой части мы приводили построение (рис. 2.6), позволяющее отделить электронную теплоемкость от решеточной. Таким образом

можно узнать коэффициент в законе Дебая $C = VT^3$ для решеточной (фононной) теплоемкости. Предполагая, что решеточная теплоемкость не меняется при переходе в сверхпроводящее состояние, можно определить электронную теплоемкость сверхпроводника, вычитая VT^3 из полной теплоемкости. В результате таких измерений оказалось, что электронная теплоемкость сверхпроводника при температурах, существенно меньших T_c , зависит от температуры по экспоненциальному закону [138]:

$$C_{es} = a \exp(-\Delta/T). \quad (15.3)$$

Это означает, что возбужденные состояния электронной системы отделены от основного «энергетической щелью», как в полупроводнике. С другой стороны, сверхпроводник по своим электрическим свойствам очень сильно отличается от полупроводника. К тому же фазовый переход при T_c является переходом 2-го рода, а значит, энергетическая щель обращается в нуль при T_c , т.е. энергетический спектр сильно зависит от температуры, иначе говоря, от состояния электронной системы, предусматривается теорией ферми-жидкости Ландау (гл. 13). Это будет использовано нами при выводе микроскопической теории сверхпроводимости.

§ 15.2. Термодинамика сверхпроводящего перехода

Рассмотрим массивный цилиндрический образец в продольном магнитном поле. Условием сверхпроводящего перехода является равенство свободных энергий

$$F_s(H, T) = F_n(H, T); \quad (15.4)$$

индексы s и n здесь и дальше обозначают сверхпроводящую и нормальную фазы. Равновесие может иметь место лишь при поле $H = H_c(T)$.

В сверхпроводник магнитное поле проникает только на глубину проникновения δ . В этом же поверхностном слое при наличии поля течет сверхпроводящий ток, экранирующий поле в толще образца. Это вносит вклад в энергию порядка $H_c^2/8\pi$ на единицу объема поверхностного слоя. Полный вклад в F_s токов и поля порядка $(H_c^2/8\pi) \delta S/V$, где S — площадь поверхности образца (мы относим свободную энергию к единице объема).

В нормальный металл поле проникает полностью. Поскольку мы рассматриваем равновесие в заданном поле, то надо воспользоваться формулой для F_H (приложение III, формула (П.3.10)). Обычно сверхпроводящие металлы немагнитные, т.е. в них $\mu \approx 1$. Следовательно,

$$F_n(H_c, T) = F_n(T) - H_c^2/8\pi.$$

Отсюда видно, что магнитная добавка к F_n значительно больше, чем к F_s , а именно порядка D/δ , где D — диаметр образца. Поэтому для

массивного цилиндра полевой добавкой к F_s можно пренебречь, и из (15.4) получаем

$$F_n(T) - F_s(T) = H_c^2/8\pi. \quad (15.5)$$

Продифференцировав по T , находим разность энтропии ($S = -\partial F/\partial T$)

$$S_n - S_s = -H_c (dH_c/dT)/4\pi. \quad (15.6)$$

Величина $q = T(S_n - S_s)$ дает теплоту фазового перехода. Ввиду того что $dH_c/dT < 0$ (см. (15.1)), оказывается, $q > 0$, т. е. тепло поглощается при переходе из сверхпроводящей фазы в нормальную.

Если переход происходит при $T = T_c$, т. е. при $H_c = 0$, то в правой части (15.6) стоит нуль, т. е. энтропия непрерывна, теплота фазового перехода отсутствует, и мы имеем дело с фазовым переходом 2-го рода.

Еще одно дифференцирование по температуре дает разность теплоемкостей ($C_v = T(\partial S/\partial T)_V$):

$$C_n - C_s = -(4\pi)^{-1} \left[H_c d^2 H_c / dT^2 + (dH_c/dT)^2 \right]. \quad (15.7)$$

В частности, при $T = T_c$ $H_c = 0$, и мы имеем

$$C_s(T_c) - C_n(T_c) = (4\pi)^{-1} (dH_c/dT)^2. \quad (15.8)$$

Интересно отметить, что это элементарное рассмотрение, использующее, по сути дела, только один экспериментальный факт — эффект Мейснера, позволяет получить строгие формулы, связывающие критическое магнитное поле с термодинамическими характеристиками сверхпроводника.

§ 15.3. Промежуточное состояние

До сих пор мы рассматривали цилиндрическую геометрию. Пусть теперь образец имеет произвольную форму или, даже если это цилиндр, поле не является продольным. В этом случае сверхпроводящий образец искажает поле, которое становится неоднородным по пространству. Рассмотрим, что происходит, если образец имеет форму эллипсоида. В случае эллипсоида максвелловское поле H_i внутри него однородно, хотя и отличается от внешнего поля на бесконечности, которое равно H_0 . Они связаны соотношением (см. приложение III)

$$H_i = H_0 - 4\pi n M, \quad (15.9)$$

где M — намагниченность, а n — размагничивающий фактор.

Поскольку металл находится в сверхпроводящем состоянии, то в нем $B = 0$, т. е.

$$H_i + 4\pi M = H_0 + 4\pi(1 - n) M = 0,$$

т. е.

$$M = -H_0/4\pi(1 - n), \quad H_i = H_0/(1 - n). \quad (15.10)$$

Согласно граничным условиям теории Максвелла на границе сред непрерывны нормальная компонента поля $\mathbf{B}$ и тангенциальная компонента поля $\mathbf{H}$. Вне сверхпроводника $\mathbf{B} = \mathbf{H}$. Из того, что в сверхпроводнике $\mathbf{B} = 0$, можно сделать заключение, что $\mathbf{H}$ на границе сверхпроводника имеет лишь тангенциальную компоненту, т.е. силовые линии поля «обходят» сверхпроводник (рис. 15.1 а). Из непрерывности тангенциальной компоненты $\mathbf{H}$ на границе можно сделать заключение, что в тех точках, где направление $\mathbf{H}$ совпадает с $\mathbf{H}_0$, поле на границе максимально и равно $H_0/(1 - n)$, т.е. больше H_0 . Сверхпроводник как бы раздвигает силовые линии поля, что приводит к их сгущению. Мы видим также, что вдоль поверхности сверхпроводника поле меняется и на каких-то участках может достигнуть значения H_c , в то время как $H_0 < H_c$.

Пусть на каком-то участке поверхности сверхпроводника поле превышает H_c . Тогда здесь должно начаться разрушение сверхпроводимости. Наиболее естественно предположить, что дело будет выглядеть, как изображено на рис. 15.2, где заштрихована часть образца, перешедшая в нормальное состояние. Однако такое предположение приводит к противоречию. Если металл в нормальном состоянии немагнитный, то для магнитного поля нет разницы между нормальным металлом и вакуумом. Следовательно, при удалении от сверхпроводящей области поле должно уменьшаться. Если предположить, что на границе между нормальной и сверхпроводящей областями $H = H_c$, то в нормальной области поле $H < H_c$. Но в этом случае металл должен быть сверхпроводящим.

Выход из этого противоречия был предложен *Пайерлсом* и *Лондоном* [139, 140], выдвинувшими идею «промежуточного состояния». Согласно этой идее в промежутке внешних полей

$$(1 - n)H_c < H_0 < H_c \quad (15.11)$$

сверхпроводник переходит в особое состояние, характеризующееся условием

$$H_i = H_c. \quad (15.12)$$

Из (15.9) получаем при этом, что намагниченность равна

$$M = -(H_c - H_0)/4\pi n. \quad (15.13)$$

Подставляя в формулу для индукции, находим

$$B = H_i + 4\pi M = H_0/n - H_c(1 - n)/n. \quad (15.14)$$

Отсюда видно, что при $H_0 = (1 - n)H_c$ поле $B = 0$, при $H_0 = H_c$ $B = H_c$, а в промежутке между этими значениями зависимость B

от H_0 линейная. Для цилиндра в поле, перпендикулярном его оси, зависимость $B(H_0)$ изображена на рис. 15.3 ($n = 1/2$).

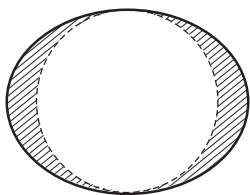


Рис. 15.2

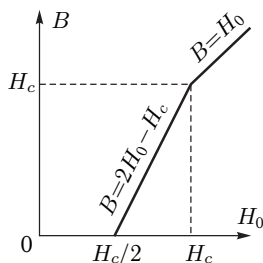


Рис. 15.3

В теории Максвелла поле H_i не всегда имеет четкий микроскопический смысл. Поэтому хотя предположение $H_i = H_c$ и следующая из него формула (15.14) хорошо соответствуют эксперименту, но тем не менее они оставляют чувство неудовлетворенности. Поэтому промежуточное состояние стали исследовать более детально. При этом выяснилось, что когда цилиндрический образец помещен в поле, перпендикулярное его оси, и переходит в промежуточное состояние, его электрическое сопротивление становится анизотропным. Вдоль оси цилиндра имеется конечное сопротивление, а поперек оси сопротивление равно нулю. Это указывает на то, что цилиндр разбивается на тонкие слои нормальной и сверхпроводящей фазы, перпендикулярные его оси. При пропускании тока вдоль оси слои включены последовательно, а перпендикулярно оси — они включены параллельно и сверхпроводящие слои шунтируют нормальные.

Наиболее простой должна быть картина в бесконечной пластине, плоскость которой перпендикулярна магнитному полю. В этом случае $n = 1$, т. е. промежуточное состояние начинается с $H_0 = 0$. Если предположить, что в нормальных слоях поле равно H_c , а в сверхпроводящих оно равно нулю, то среднее поле, т. е. индукция в сверхпроводнике, равно $B = xH_c$, где x — концентрация (доля) нормальной фазы. Снаружи $B = H_0$. В данном случае поле направлено перпендикулярно к границе. Из условия непрерывности нормальной компоненты $\mathbf{B}$ (т. е. самого поля $\mathbf{B}$) имеем

$$x = H_0/H_c. \quad (15.15)$$

Больше мы ничего не можем заключить без исследования структуры слоев.

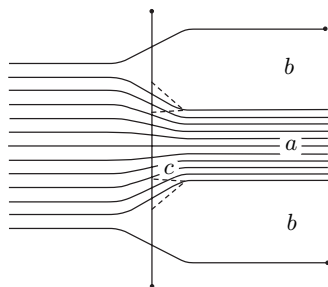


Рис. 15.4

Детальное исследование структуры промежуточного состояния было произведено Л.Д. Ландау в 1937 г. [141]. Мы изложим здесь упрощенный вариант этой теории. Рассмотрим пластину в поле, перпендикулярном ее плоскости. Если считать, что в ней образуются чередующиеся плоскопараллельные слои нормальной и сверхпроводящей фаз, то границы между слоями совпадают с силовыми линиями поля. Излом линий поля привел бы к большой дополнительной энергии. Поэтому надо допустить, что нормальные слои слегка расширяются при подходе к поверхности (рис. 15.4). Если толщина нормального слоя a , а сверхпроводящего b , то характерный размер «уголка» порядка

$$c \sim ab/(a + b). \quad (15.16)$$

При $a \rightarrow 0$ или $b \rightarrow 0$ уголки исчезают, как и должно быть.

Рассчитаем энергию этой структуры. Воспользуемся формулами приложения III (П.3.12) и (П.3.13) для свободной энергии тела произвольной формы в магнитном поле. Намагниченность M определяется по отношению к полю H_0 . Но поскольку вне образца $B = H_0$, а при пересечении границы B не меняется, то индукция тела $B = H_0$, т. е. $M = 0$. Следовательно, можно считать, что нормальные слои имеют энергию F_n , а сверхпроводящие F_s на единицу объема. Будем считать толщину пластины (т. е. длину слоев) равной L . Размер пластины в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, будем считать равным единице. Если отсчитывать свободную энергию от F_s , то сверхпроводящие слои дают нулевой вклад и полная свободная энергия будет равна $H_c^2/8\pi$, умноженному на объем нормальной фазы. Учитывая, что число слоев на 1 см длины равно $(a + b)^{-1}$, имеем энергию на единицу площади пластины

$$\frac{H_c^2}{8\pi} (a + b)^{-1} \left[La + \gamma \left(\frac{ab}{a + b} \right)^2 \right], \quad (15.17)$$

где $\gamma \sim 1$. Второй член учитывает «уголки», т. е. расширение нормальных слоев вблизи поверхности.

Однако если руководствоваться только этой энергией, то нельзя получить слои конечного размера. Поэтому Ландау предположил существование дополнительной поверхностной энергии на границе между нормальной и сверхпроводящей фазами. Энергия, приходящаяся на единицу площади границы, σ_{ns} имеет размерность эрг/см², в то время как $H_c^2/8\pi$ имеет размерность эрг/см³. Это дает возможность ввести новый удобный параметр ξ с размерностью длины:

$$\sigma_{ns} = (H_c^2/8\pi) \xi. \quad (15.18)$$

Впоследствии мы увидим, что параметр ξ играет фундаментальную роль в теории сверхпроводимости.

Учитывая, что каждый нормальный слой имеет две границы длиной $L + \beta c$, где $\beta \sim 1$, а c — длина уголка (15.16), получаем вклад в свободную энергию единицы площади поверхности пластины, происходящий от границ:

$$\frac{H_c^2}{8\pi} \xi (a+b)^{-1} \cdot 2 \left[L + \beta \frac{ab}{a+b} \right]. \quad (15.19)$$

Прежде чем находить минимум полной свободной энергии, надо учесть, что ширины слоев a и b не являются независимыми, а определяются внешним полем H_0 . Согласно (15.15) находим концентрацию нормальной фазы:

$$x = a/(a+b) = H_0/H_c. \quad (15.20)$$

В дальнейшем будем все длины выражать через a . С помощью (15.20) имеем

$$a+b = a(H_c/H_0), \quad b = a(H_c - H_0)/H_0. \quad (15.21)$$

Подставляя это в (15.17) и (15.19), получаем полную свободную энергию:

$$F = \frac{H_c^2}{8\pi} \left\{ L \frac{H_0}{H_c} + \gamma a \frac{H_0 (H_c - H_0)^2}{H_c^2} + 2\xi \left[\frac{L}{a} \frac{H_0}{H_c} + \beta \frac{H_0 (H_c - H_0)}{H_c^2} \right] \right\}. \quad (15.22)$$

В этом выражении только два члена зависят от a . Взяв минимум по a , находим, что наименьшей свободной энергии соответствует

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{2\xi L}{\gamma} \right)^{1/2} \frac{H_c}{H_c - H_0}, \\ b &= \left(\frac{2\xi L}{\gamma} \right)^{1/2} \frac{H_c}{H_0}, \\ a+b &= \left(\frac{2\xi L}{\gamma} \right)^{1/2} \frac{H_c^2}{H_0(H_c - H_0)}. \end{aligned} \quad (15.23)$$

На опыте $\xi \sim 10^{-5}$ см. Для пластины толщиной порядка 1 см период структуры порядка 10^{-3} см и растет с толщиной, как $L^{1/2}$. Отметим сходство этих результатов со структурой диамагнитных доменов (§ 10.6). Хронологически теория промежуточного состояния была построена раньше. Согласно (15.23) период структуры $a+b$ растет на обеих границах промежуточного состояния, т.е. как при $H_0 \rightarrow 0$, так и при $H_0 \rightarrow H_c$. При этом если $H_0 \rightarrow 0$, то $b \rightarrow \infty$, $a \rightarrow \text{const}$, и, наоборот, при $H_0 \rightarrow H_c$ $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \text{const}$.

Точная теория Ландау [141] позволяет определить форму слоев из условия, что граница между нормальным и сверхпроводящим слоями совпадает с силовой линией поля. Результаты этой теории качественно соответствуют приведенным выше с тем отличием, что на пределах промежуточного состояния толщина «чужих» слоев не остается постоянной, а слабо уменьшается. Например, при $H_0 \rightarrow 0$

$$a \sim [\xi L / \ln(H_c/H_0)]^{1/2}.$$

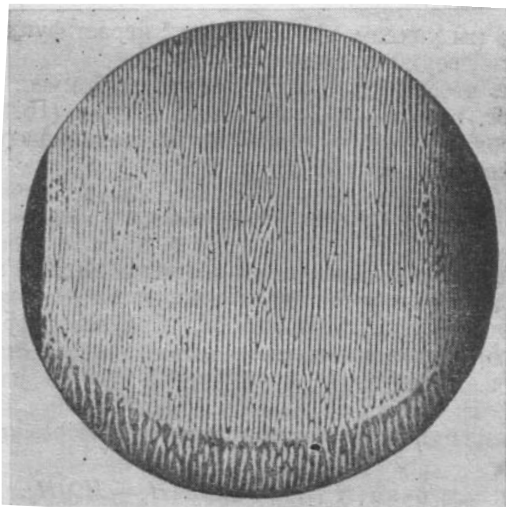


Рис. 15.5

Экспериментальное определение структуры промежуточного состояния использует неоднородность магнитного поля, возникающего благодаря расслоению. В первых экспериментах применялся датчик магнитного поля в виде проволоочки висмута очень малых размеров, сопротивление которой менялось в зависимости от магнитного поля. С помощью такого датчика можно было проследить выход на поверхность образца слоев промежуточного состояния (*Мешковский и Шальников*, 1947) [142]. В другом методе применялись ферромагнитные порошки. Если посыпать образец таким порошком, то частицы ферромагнетика концентрируются около выхода нормальных слоев (*Шарвин*, 1956) [143]. На рис. 15.5 приведена фотография полученных таким образом нормальных слоев в сверхпроводящей пластине. Поле $\mathbf{H}_0$, наклонено по отношению к нормали $\mathbf{n}$. Слои параллельны плоскости, в которой лежат $\mathbf{n}$ и $\mathbf{H}_0$.

Еще одним способом определения структуры промежуточного состояния является нанесение на поверхность образца тонкого слоя прозрачного вещества, обладающего большим эффектом Фарадея, т. е. вращением плоскости поляризации света в магнитном поле. Освещение поляризованным светом и наблюдение отраженного света с помощью поляроида дает весьма контрастную картину слоев нормальной и сверхпроводящей фаз. Можно даже наблюдать их динамику при изменении внешнего поля (Лэнг, Риндерер, 1972) [144].

Благодаря таким экспериментам удалось установить реальность существования слоев в промежуточном состоянии и определить параметр ξ , т. е. поверхностную энергию на границе фаз.

В заключение мы вернемся к максвелловскому полю H_i . Хотя, как уже говорилось (см. приложение III), истинный физический смысл имеет не максвелловское поле H_i , а индукция B , соответствующая среднему от микроскопического поля в образце, но условие (15.12) $H_i = H_c$ должно иметь физический смысл. Оказывается, что при переходе от микроскопического описания промежуточного состояния к «макроскопическому», в котором производится усреднение по расстояниям, большим по сравнению с толщиной слоев, необходимо ввести еще одну переменную, а именно среднее от магнитного поля, взятое лишь по нормальным слоям [145]. Именно такое среднее и соответствует H_i ; это делает понятным смысл условия (15.12).

§ 15.4. Разрушение сверхпроводимости током

Теперь мы рассмотрим другую задачу о промежуточном состоянии. Пусть по толстому сверхпроводящему проводу с круговым сечением радиусом r_0 течет ток. Согласно правилу Сильсби [136] сопротивление может появиться тогда, когда поле тока достигнет значения H_c . Рассмотрим уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = (4\pi/c) \mathbf{j}.$$

Проинтегрировав его по площади круга радиусом $r < r_0$ и пользуясь правилом преобразования ротора, получаем

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{H} d\mathbf{S} = \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} J(r).$$

Следовательно,

$$H(\mathbf{r}) = 2J(r)/cr, \quad (15.24)$$

где $H(r)$ — поле на расстоянии r от оси цилиндра, $J(r)$ — ток, текущий через круг радиуса r .

В сверхпроводящем состоянии ток течет лишь в тонком поверхностном слое. Следовательно, $H = 0$ везде, кроме этого слоя. Максимальное

поле имеется на поверхности. Оно становится равным H_c при токе

$$J_c = cr_0 H_c / 2. \quad (15.25)$$

Пусть $J > J_c$. В этом случае сверхпроводимость в поверхностном слое начнет разрушаться. Опять, казалось бы, образуется нормальная трубка и сверхпроводящая сердцевина (рис. 15.6 а). В действительности при этом весь ток потечет внутри сверхпроводящего цилиндра. Но он имеет меньший радиус и из (15.24) следует, что при том же токе поле H на границе будет еще больше. Следовательно, процесс разрушения дойдет до конца. Но в этом случае весь образец станет нормальным и ток распределится равномерно по сечению. Тогда $J(r) = j\pi r^2$, где j — постоянная плотность тока. Согласно (15.24) при этом поле в окрестности оси цилиндра станет меньше H_c ; таким образом, и нормальное состояние неустойчиво.

Выход заключается в предположении о промежуточном состоянии [146]¹⁾. Будем считать, что внутренняя часть цилиндра радиусом r_1 находится в промежуточном состоянии, а внешняя трубка — в нормальном (рис. 15.6 б). Во внутренней части $H(r) = H_c$. Из (15.24) получаем

$$J(r) = (1/2)cr H_c. \quad (15.26)$$

Плотность тока равна

$$j_{r < r_1}(r) = dJ(r)/dS = dJ(r)/2\pi r dr = cH_c/4\pi r. \quad (15.27)$$

С другой стороны, во внешней нормальной трубке ток распределен однородно, т. е.

$$j_{r > r_1}(r) = [J - J(r_1)]/\pi(r_0^2 - r_1^2). \quad (15.28)$$

Из условия непрерывности плотности тока при $r = r_1$ находим

$$\frac{cH_c}{4\pi r_1} = \frac{J - (1/2)cr_1 H_c}{\pi(r_0^2 - r_1^2)} \quad (15.29)$$

(мы подставили $J(r_1)$ из (15.26)).

Введем новые переменные. Обозначим

$$r_1/r_0 = \rho, \quad J/J_c = 2J/cr_0 H_c = \lambda. \quad (15.30)$$

При этом уравнение (15.29) переписется в виде

$$\rho^2 - 2\lambda\rho + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения равны

$$\rho = \lambda \pm (\lambda^2 - 1)^{1/2}.$$

¹⁾ Одновременно эта же идея была высказана Л. Д. Ландау, см. [147, с. 128].

Оставить надо лишь один из них, ибо физическое решение, очевидно, соответствует $\rho \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Итак,

$$\rho = \lambda - \left(\lambda^2 - 1 \right)^{1/2}. \quad (15.31)$$

Проведем два сечения провода на каком-то расстоянии r друг от друга. Очевидно, что потенциал должен быть постоянен вдоль каждого сечения. Разность потенциалов есть произведение тока на сопротивление. Обозначим сопротивление нормального металла через R_n . В таком случае сопротивление нормальной трубки $r_1 < r < r_0$ будет равно $R_n r_0^2 / (r_0^2 - r_1^2)$. Разность потенциалов, с одной стороны, равна произведению этого сопротивления на ток,



Рис. 15.6

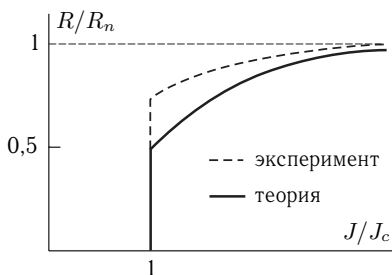


Рис. 15.7

протекающий по нормальной трубке, а с другой стороны, — произведению полного тока на полное сопротивление R :

$$JR = [J - J(r_1)] R_n r_0^2 / (r_0^2 - r_1^2). \quad (15.32)$$

Подставляя $J(r_1)$ и переходя к безразмерным переменным ρ и λ , получаем

$$R/R_n = (1/2) \left[1 + \left(1 - \lambda^{-2} \right)^{1/2} \right]. \quad (15.33)$$

Эта формула применима в области промежуточного состояния, т. е. для $\lambda > 1$. Из нее следует, что при $\lambda = 1$ происходит скачок сопротивления до значения $R_n/2$, а затем, при увеличении λ , — асимптотическое приближение к R_n (сплошная линия на рис. 15.7). Такое предсказание качественно соответствует опыту, однако количественно результаты различаются. Скачок при $J = J_c$ ($\lambda = 1$) происходит до значения, большего $R_n/2$, и последующее асимптотическое приближение к R_n идет быстрее (штриховая линия на рис. 15.7). Это можно объяснить следующим образом. Согласно формуле (15.27) плотность тока в сердцевине провода обратно пропорциональна r . Следовательно, структура промежуточного состояния такова, что толщина нормальных слоев растет пропорционально r , как это изображено на рис. 15.6б.

Если вспомнить о наличии поверхностной энергии σ_{ns} , становится ясно, что граница с изломом привела бы к бесконечной энергии. Следовательно, «диски» сверхпроводящей фазы должны иметь скругленные края, что приводит к некоторой задержке перехода и к более высокому значению полного сопротивления. Интересно отметить, что при увеличении диаметра провода первоначальный скачок сопротивления уменьшается и стремится к $(1/2)R_n$. Это соответствует изложенным представлениям, поскольку при увеличении радиуса слоев относительная роль скруглений уменьшается.

Мы не излагаем здесь полную микроскопическую теорию [148]. Ее результат таков: период структуры при значении тока, равном J_c , порядка $(\xi^2 r_0)^{1/3}$ и уменьшается с увеличением тока.

Теория предсказывает также истинный критический ток и значение скачка сопротивления при J_c , которые хорошо соответствуют опыту.

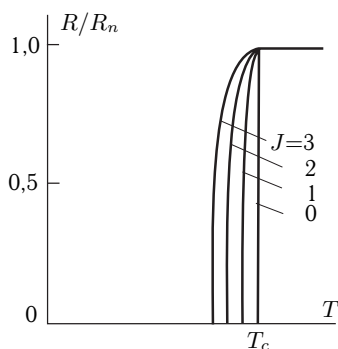


Рис. 15.8

Интересно отметить, что, согласно микроскопической теории, изложенная картина промежуточного состояния имеет место лишь в случае не слишком чистого металла. Если же металл настолько чистый, что холловские компоненты тензора сопротивления сравнимы с диагональными, то сверхпроводящие слои вместо системы плоских дисков прогибаются вдоль оси, образуя систему конусов («елку»), и при этом движутся вдоль оси проводника.

В заключение рассмотрим формулу (15.33) с несколько иной точки зрения.

Подставим в нее λ , согласно (15.30),

и выразим $H_c(T)$ по формуле (15.1). В результате получим

$$R/R_n = (1/2) \left\{ 1 + \left[1 - (cr_0 H_c(0)/2J)^2 \left(1 - T^2/T_c^2 \right)^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (15.34)$$

Формула применима, пока выражение в квадратных скобках положительно.

Зададим ток J и будем рассматривать $R(T)$. Если $J \rightarrow 0$, то, согласно этой формуле, сопротивление появляется вблизи самого T_c и почти сразу же становится равным R_n . Если же взять большой ток, то переход растянется на конечный интервал температур (рис. 15.8). Отсюда следует, что говорить о скачке сопротивления от нуля до R_n при сверхпроводящем переходе можно, только подразумевая измерение в бесконечно малом токе.

§ 15.5. Уравнения Ф. Лондона и Г. Лондона

Первая попытка построить электродинамику сверхпроводников была предпринята Ф. Лондоном и Г. Лондоном в 1935 г. [149]. Эта теория имела целью, не вникая в микроскопические причины сверхпроводимости, записать в математической форме основные экспериментальные факты: отсутствие сопротивления и эффект Мейснера.

Если электрон не испытывает рассеяния, то он ускоряется внешним полем и

$$m d\mathbf{v}/dt = e\mathbf{E}. \quad (15.35)$$

Это относится ко всем электронам. Следовательно, можно переписать (15.35) для плотности тока. Введя $\mathbf{j} = n_e e \mathbf{v}$, где n_e — плотность электронов, e — заряд, получаем

$$(d/dt)(\Lambda \mathbf{j}) = \mathbf{E},$$

где $\Lambda = m/n_e e^2$.

В части I уже отмечалось, что полная производная означает изменение величины в данном элементе объема, движущемся вместе с жидкостью. Полная производная связана с частной производной, описывающей изменение в данной точке пространства соотношением

$$d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \nabla.$$

Ввиду того что реальные токовые скорости v в металле малы по сравнению со скоростью Ферми, можно заменить полную производную на частную, после чего имеем

$$\partial(\Lambda \mathbf{j})/\partial t = \mathbf{E}. \quad (15.36)$$

Согласно общему уравнению электродинамики

$$\text{rot } \mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{H} / \partial t. \quad (15.37)$$

Взяв ротор от уравнения (15.36) и подставляя (15.37), получаем

$$(\partial/\partial t)(\text{rot } \Lambda \mathbf{j} + c^{-1} \mathbf{H}) = 0.$$

Значит, величина в скобках сохраняется. Но в толще массивного сверхпроводника всегда $\mathbf{j} = 0$ и $\mathbf{H} = 0$. Следовательно, величина в скобках не просто сохраняется, но всегда равна нулю:

$$\text{rot } \Lambda \mathbf{j} + c^{-1} \mathbf{H} = 0. \quad (15.38)$$

Уравнения (15.36) и (15.38) являются основой лондоновской электродинамики.

Рассмотрим простейшую задачу: массивный сверхпроводник во внешнем магнитном поле. Согласно уравнению Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = (4\pi/c) \mathbf{j}. \quad (15.39)$$

Возьмем rot от этого уравнения:

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H} = (4\pi/c) \text{rot } \mathbf{j}.$$

Пользуясь тем, что $\text{div } \mathbf{H} = 0$, и подставляя $\text{rot } \mathbf{j}$ из (15.38), получаем

$$\Delta \mathbf{H} - \delta^{-2} \mathbf{H} = 0, \quad (15.40)$$

где

$$\delta = \left(\frac{\Lambda c^2}{4\pi} \right)^{1/2} = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_e e^2} \right)^{1/2} \quad (15.41)$$

(мы использовали здесь определение Λ). Пусть сверхпроводник занимает полупространство $x > 0$ и поле приложено параллельно его поверхности в направлении z . Из (15.40) находим

$$H = H_0 \exp(-x/\delta), \quad (15.42)$$

где H_0 — поле на поверхности. Из (15.38) получается

$$j_y = (cH_0/4\pi\delta) \exp(-x/\delta). \quad (15.43)$$

Итак, мы приходим к выводу, что электродинамика Ф. и Г. Лондонов качественно правильно описывает тот факт, что поле и ток имеются лишь в тонком поверхностном слое сверхпроводника. Более того, величина δ , согласно (15.41), имеет порядок 10^{-5} – 10^{-6} см, что соответствует экспериментальным данным.

Конечно, в приведенном выводе мы исходили из того, что все электроны участвуют в сверхпроводящем токе. Это противоречит как тому факту, что δ зависит от температуры, так и тому, что при T_c имеет место фазовый переход 2-го рода, т.е. состояние электронов меняется непрерывно. Можно несколько «подправить» теорию, введя вместо полного числа электронов некоторое число «сверхпроводящих электронов» $n_s(T)$, которое уменьшается с температурой и обращается в нуль при T_c .

В заключение отметим, что уравнения (15.36) и (15.38) могут быть записаны в другой форме, которая в дальнейшем окажется полезной. Введем векторный потенциал $\mathbf{A}$; $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ выражаются тогда соотношениями

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{A} / \partial t.$$

С помощью векторного потенциала $\mathbf{A}$ оба уравнения Лондонов могут быть записаны в виде одного уравнения:

$$\mathbf{j} = -(\Lambda c)^{-1} \mathbf{A} = -(n_e e^2 / mc) \mathbf{A}. \quad (15.44)$$

На первый взгляд это означает, что существенно лишь одно уравнение Лондонов, а второе является его следствием. Но это не так: взяв

div от уравнения Максвелла (15.39), мы получаем закон сохранения заряда:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (15.45)$$

Но это совместимо с (15.44), если только

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (15.46)$$

Значит, уравнение (15.44) верно не для любого векторного потенциала $\mathbf{A}$, а лишь для такого, который удовлетворяет условию (15.46). Итак, вместо двух уравнений Ф. и Г. Лондонов (15.36) и (15.38), имеем опять два уравнения: (15.44) и (15.46).

ОСНОВНЫЕ ИДЕИ МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

§ 16.1. Условие сверхтекучести

Микроскопическая теория сверхпроводимости была построена *Бардином*, *Купером* и *Шриффером* [150] и независимо от них *Боголюбовым* в 1957 г. [151, 152]. Естественно задаться вопросом, почему понадобилось целых 46 лет с момента открытия сверхпроводимости для того, чтобы понять это явление. Ведь наука не стояла на месте; был накоплен большой экспериментальный материал, существовала теория, изложенная в гл. 15, и многое другое.

Основная причина заключалась в следующем. Явление сверхпроводимости очень похоже на явление сверхтекучести жидкого гелия, открытое *Капицей* в 1938 г. [153]. Теория этого явления была построена *Ландау* в 1941 г. [154]. Одним из проявлений сверхтекучести является течение гелия по капиллярам с нулевой вязкостью. Естественно было интерпретировать сверхпроводимость как сверхтекучесть электронной жидкости.

В теории Ландау [154] был введен критерий сверхтекучести. Представим себе гелий, текущий по капилляру со скоростью $\mathbf{v}$. Если перейти в систему отсчета, связанную с гелием, то он будет находиться в покое, а стенки трубки будут двигаться со скоростью $-\mathbf{v}$. Если возникнет вязкость, то движущаяся трубка начнет увлекать за собой покоящийся гелий. Это значит, что у гелия изменится импульс $\mathbf{P}$ и энергия E . Но, как мы знаем из гл. 2, у однородной квантовой системы изменение энергии и импульса происходит путем появления квазичастиц. Пусть появилась квазичастица с импульсом $\mathbf{p}$ и энергией $\varepsilon(p)$. Перейдем обратно в лабораторную систему отсчета, связанную с трубкой. В этой системе энергия и импульс равны

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + M\mathbf{v}, \quad E' = E + \mathbf{P}\mathbf{v} + Mv^2/2,$$

где M — масса жидкости. Изменение энергии, происходящее в результате рождения квазичастицы, равно $E + \mathbf{P}\mathbf{v} = \varepsilon(p) + \mathbf{p}\mathbf{v}$. Следовательно, чтобы рождение квазичастицы было энергетически выгодно, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\varepsilon(p) + \mathbf{p}\mathbf{v} < 0.$$

Наименьшее значение $\varepsilon(p) + \mathbf{p}\mathbf{v}$ достигается при противоположной ориентации $\mathbf{p}$ и $\mathbf{v}$; следовательно, во всяком случае $\varepsilon(p) - pv < 0$, или

$$v > \varepsilon(p)/p.$$

Это та наименьшая скорость, при которой могут появиться квазичастицы с импульсом $\mathbf{p}$ и энергией $\varepsilon(p)$. Но нас интересует вопрос о том, при какой скорости вообще могут появиться квазичастицы. Очевидно, для этого необходимо выполнение условия

$$v > v_c = \min[\varepsilon(p)/p]. \quad (16.1)$$

Итак, вязкость появляется, если скорость превышает v_c . У жидкого гелия энергетический спектр таков, что v_c — конечная величина. Значит, при меньших скоростях течения вязкость отсутствует.

Рассмотрим с этой точки зрения ферми-жидкость. Возбуждение такой системы заключается в рождении пары: частица — античастица. Если они рождаются у самой поверхности ферми-сферы, то энергия может быть сколь угодно малой. В то же время полное изменение импульса может достигать $2p_0$, если частица и античастица будут расположены на противоположных сторонах ферми-сферы. Отсюда следует, что $v_c = 0$, т. е. при любой скорости течения в ферми-системе имеется вязкость.

Выход пытались найти в предположении о том, что электроны объединяются в пары, которые являются бозе-частицами и аналогичны атомам гелия. Однако никаких причин для такого объединения найти не удавалось, ибо электроны — одноименно заряженные частицы и по закону Кулона отталкиваются друг от друга. Именно это и задержало создание теории сверхпроводимости.

§ 16.2. Фононное притяжение

В 1950 г. было открыто явление, названное изотопическим эффектом [155, 156]. При определении T_c и H_c сверхпроводников с разным изотопическим составом была обнаружена зависимость T_c и H_c от массы ионов кристаллической решетки:

$$T_c \propto M^{-1/2}, \quad H_c \propto M^{-1/2}. \quad (16.2)$$

Масса ионов проявляется только при учете колебаний решетки. Следовательно, сверхпроводимость не чисто электронное явление, а в ней

участвуют фононы. Основываясь на этом факте, *Фрёлх* и *Бардин* (1950) [157, 158] независимо друг от друга показали, что, находясь в кристаллической решетке, электроны могут и притягиваться.

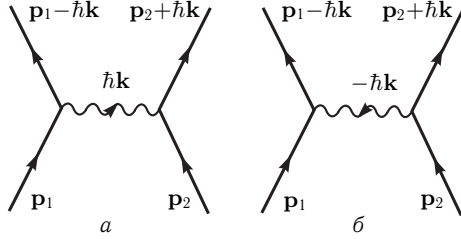


Рис. 16.1

Рассмотрим процесс, схематически изображенный на рис. 16.1 а. Один электрон с импульсом $\mathbf{p}_1$ испускает фонon с импульсом $\hbar\mathbf{k}$. При этом его импульс становится $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1 - \hbar\mathbf{k}$. Фонon поглощается вторым электроном, который до этого имел импульс $\mathbf{p}_2$; после поглощения фонon электрон

приобретает импульс $\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_2 + \hbar\mathbf{k}$. Амплитуда этого процесса, имеющего второй порядок по теории возмущений, равна

$$\frac{|V_{\mathbf{k}}|^2}{\varepsilon(\mathbf{p}_1) - \varepsilon(\mathbf{p}_1 - \hbar\mathbf{k}) - \hbar\omega(\mathbf{k})},$$

где $V_{\mathbf{k}} = V_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k}, \mathbf{p}}$ (см. (4.13)).

С другой стороны, те же конечные импульсы получаются, если электрон с импульсом $\mathbf{p}_2$ испустит фонon с импульсом $-\hbar\mathbf{k}$, который затем поглотится электроном с импульсом $\mathbf{p}_1$ (рис. 16.1 б). Амплитуда этого процесса равна

$$\frac{|V_{\mathbf{k}}|^2}{\varepsilon(\mathbf{p}_2) - \varepsilon(\mathbf{p}_2 + \hbar\mathbf{k}) - \hbar\omega(\mathbf{k})}.$$

Здесь учтено, что $\omega(\mathbf{k})$ и $V_{\mathbf{k}}$ инвариантны относительно замены $\mathbf{k}$ на $-\mathbf{k}$. Полученные выше амплитуды должны складываться. При этом надо учесть закон сохранения энергии:

$$\varepsilon(\mathbf{p}_1) + \varepsilon(\mathbf{p}_2) = \varepsilon(\mathbf{p}'_1) + \varepsilon(\mathbf{p}'_2).$$

В результате для суммарной амплитуды находим

$$-\frac{2|V_{\mathbf{k}}|^2\hbar\omega(\mathbf{k})}{[\hbar\omega(\mathbf{k})]^2 - [\varepsilon(\mathbf{p}_1) - \varepsilon(\mathbf{p}_1 - \hbar\mathbf{k})]^2}.$$

Учтя выражение (4.13) для $V_{\mathbf{k}}$ (в данном случае $n_{\mathbf{k}} = 0$), получаем порядок величины суммарной амплитуды:

$$-\frac{\hbar^3}{p_0 m V} \frac{[\hbar\omega(\mathbf{k})]^2}{[\hbar\omega(\mathbf{k})]^2 - [\varepsilon(\mathbf{p}_1) - \varepsilon(\mathbf{p}_1 - \hbar\mathbf{k})]^2}. \quad (16.3)$$

Проанализируем это выражение. При $\varepsilon(\mathbf{p}_1) - \varepsilon(\mathbf{p}'_1) \ll \hbar\omega(\mathbf{k})$ получаем отрицательную константу, не зависящую от $\mathbf{k}$. Если бы электроны

непосредственно взаимодействовали друг с другом в одной точке, т. е. $U = U_0 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, то матричный элемент, соответствующий первому порядку теории возмущений для амплитуды рассеяния, был бы равен U_0 . Следовательно, взаимодействие между электронами, передаваемое фононами, при малых изменениях энергии эквивалентно точечному взаимодействию, причем знак его соответствует притяжению.

Отметим также, что поскольку взаимодействие не зависит от $\mathbf{k}$, т. е. от угла поворота импульсов электронов, то это взаимодействие в s -состоянии, т. е. в состоянии с орбитальным моментом $l = 0$. Следовательно, координатная волновая функция взаимодействующих электронов симметрична относительно перестановки частиц. Но поскольку электроны — ферми-частицы, то их полная волновая функция антисимметрична относительно перестановки. Следовательно, их спиновая волновая функция должна быть антисимметричной, т. е. спины взаимодействующих электронов должны быть противоположно направлены. То же самое можно сказать иными словами. Найденное взаимодействие эквивалентно притяжению частиц при совпадении их координат. Принцип Паули запрещает двум одинаковым ферми-частицам находиться в одной точке. Следовательно, они должны различаться по направлениям спина.

Если учесть, что плотность состояний фононов пропорциональна $k^2(dk/d\omega)$, т. е. быстро убывает с уменьшением k , а найденная амплитуда не зависит от k , то ясно, что основную роль будут играть фононы с самыми большими k , т. е. с $k \sim k_D \sim \pi/a$ и $\hbar\omega \sim \hbar\omega_D$. При $\varepsilon(\mathbf{p}_1) - \varepsilon(\mathbf{p}'_1) \gg \hbar\omega_D$ взаимодействие быстро убывает. Поскольку основную роль играют электроны в окрестности ферми-границы, то можно сказать, что фононное притяжение имеет место в узком слое вблизи границы Ферми, толщина которого в энергетическом масштабе порядка $\hbar\omega_D$, а в импульсном, соответственно, $\Delta p \sim \hbar\omega_D/v$.

Согласно принципу неопределенности, $\Delta p \sim \hbar/\Delta r$, т. е. в координатном пространстве

$$\Delta r \sim v/\omega_D \sim (v/s)a \sim (M/m)^{1/2}a,$$

где M — масса иона, а m — масса электрона (§ 4.3). Для атомной массы порядка 10^2

$$(M/m)^{1/2} \sim 10^2 - 10^3, \quad \text{т. е.} \quad \Delta r \sim 10^{-6} - 10^{-5} \text{ см.}$$

Итак, фононное притяжение является дальнодействующим. Его величина порядка $(p_0 m / \hbar^3)^{-1}$.

Наряду с этим имеется кулоновское отталкивание. Благодаря дебаевской экранировке (§ 4.1) оно действует на расстояниях порядка межатомных и может быть записано в виде $e^2 a^2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, где $a \sim \hbar/p_0$ — порядка межатомных расстояний. Отношение констант

обоих взаимодействий

$$e^2 a^2 / (\hbar^3 / p_0 m) \sim (e^2 \hbar^2 / p_0^2) (p_0 m / \hbar^3) \sim e^2 / \hbar v \sim 1,$$

т. е. оба взаимодействия одного порядка. Следовательно, в одних металлах может преобладать фононное притяжение, а в других кулоновское отталкивание. Именно этим и объясняется то, что одни металлы переходят в сверхпроводящее состояние, а другие остаются нормальными при всех температурах.

Если быть более аккуратным, то следует сказать, что количественные расчеты дают некоторый перевес кулоновского отталкивания. Однако оно обладает радиусом действия порядка межатомных расстояний, в то время как фононное притяжение является дальнедействующим. Это приводит к эффективному ослаблению кулоновского отталкивания: оно делится на логарифм отношения радиусов действия, т. е. на $\ln(M/m)$.

В большинстве случаев оба взаимодействия количественно различаются достаточно сильно в ту или другую сторону, так что, изучая сверхпроводимость, можно ограничиться учетом лишь фононного притяжения. Вместо точной формулы (16.3) мы будем моделировать его амплитуду константой $-g$ (где $g \sim \hbar^3 / p_0 m \sim [\nu(\mu)]^{-1}$ (§ 2.4)) в энергетическом интервале $\mu - \hbar\omega_D < \varepsilon < \mu + \hbar\omega_D$ и нулем при других энергиях.

§ 16.3. Куперовские пары

Казалось бы, после открытия фононного притяжения можно было сразу построить теорию сверхпроводимости. Тем не менее, на это потребовалось еще несколько лет. Трудность, которую надо было преодолеть, заключалась в следующем. Как уже объяснялось ранее, сверхтекучесть электронной жидкости могла бы возникнуть при объединении электронов в пары. Но из квантовой механики известно, что если взаимодействие недостаточно сильно или имеет слишком малый радиус действия, то связанное состояние не может возникнуть. Исключением является чисто одномерный случай, когда движение частиц ограничено прямой линией; в этом случае любое притяжение приводит к образованию связанного состояния. Но такая модель на первый взгляд не имеет отношения к рассматриваемому случаю.

Мерой энергии связи в паре может служить критическая температура. Если учесть, что она порядка нескольких градусов, т. е. в 10^4 раз меньше кинетической энергии электронов (энергии Ферми), то объединение электронов в пары представляется невозможным.

Разрешение этого парадокса нашел Купер (1956) [159], который обратил внимание на то, что речь идет об образовании пар не из свободных изолированных электронов, а из квазичастиц ферми-жидкости. Мы приведем здесь слегка модифицированный вывод Купера, который

дает правильный по порядку величины ответ, в противоположность первоначальному выводу [159], где фактически учитывались лишь квазичастицы типа частиц и это приводило к неправильному результату.

Будем для простоты рассматривать изотропный случай. Энергетический спектр квазичастиц изображен на рис. 16.2 сплошной линией (§ 2.2). Здесь правая ветвь относится к квазичастицам типа частиц, а левая — к квазичастицам типа античастиц. В целом энергетический спектр можно записать в виде $|\xi(p)|$, где $\xi = v(p - p_0)$. Надо, однако, помнить, что античастицы имеют другой знак заряда. Как будет видно ниже, нас будет интересовать взаимодействие квазичастиц с одинаковым $|\mathbf{p}|$, т. е. взаимодействие либо двух частиц, либо двух античастиц. В обоих случаях фононы осуществляют притяжение.

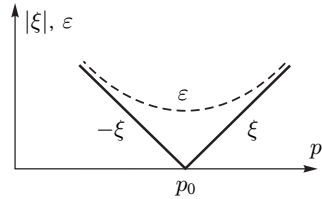


Рис. 16.2

Напишем уравнение Шрёдингера для двух квазичастиц:

$$[\mathcal{H}_0(\mathbf{r}_1) - \mathcal{H}_0(\mathbf{r}_2) + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2); \quad (16.4)$$

здесь $\mathcal{H}_0(\mathbf{r}_1)$ — гамильтониан свободной квазичастицы, т. е.

$$\mathcal{H}_0(\mathbf{r}_1) \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}_1) = |\xi(\mathbf{p})| \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}_1) \quad (16.5)$$

(в модели свободных квазичастиц $\psi_{\mathbf{p}} = V^{-1/2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar}$). В основном состоянии полный импульс и спин связанной пары должны быть равными нулю. Следовательно, волновая функция пары будет суперпозицией состояний двух свободных квазичастиц с противоположными импульсами и спинами, т. е.

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p},+}(\mathbf{r}_1) \psi_{-\mathbf{p},-}(\mathbf{r}_2), \quad (16.6)$$

где индексы плюс, минус означают проекции спина $\pm 1/2$. Подставив это в уравнение (16.4), получаем

$$2|\xi(\mathbf{p})| c_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{p}'} U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} c_{\mathbf{p}'} = E c_{\mathbf{p}}. \quad (16.7)$$

Положим

$$U_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = \begin{cases} -g, & p_0 - \hbar\omega_D/v < |\mathbf{p}|, \quad |\mathbf{p}'| < p_0 + \hbar\omega_D/v, \\ 0 & \text{вне этого интервала} \end{cases} \quad (16.8)$$

и разрешим (16.7) относительно $c_{\mathbf{p}}$:

$$c_{\mathbf{p}} = gI/[2|\xi(\mathbf{p})| - E], \quad (16.9)$$

где

$$I = \sum_{|\mathbf{p}'|=p_0-\hbar\omega_D/v}^{|\mathbf{p}'|=p_0+\hbar\omega_D/v} c_{\mathbf{p}'}. \quad (16.10)$$

Учтем, что мы ищем связанное состояние, т.е. отрицательное собственное значение энергии. Обозначим $E = -2\Delta$. Подставим c_p из (16.9) в условие (16.10). При этом находим

$$I = (gI/2) \sum_{|\mathbf{p}|=p_0-\hbar\omega_D/v}^{|\mathbf{p}|=p_0+\hbar\omega_D/v} [|\xi(\mathbf{p})| + \Delta]^{-1}.$$

Переходя к интегрированию по ξ и учитывая, что интеграл берется по окрестностям границы Ферми, получаем

$$1 = [g\nu(\mu)/2] \ln(\hbar\omega_D/\Delta)$$

(множитель $1/2$ возник оттого, что мы суммируем по состояниям одной из квазичастиц, у которой проекция спина задана, в то время как определенная ранее плотность состояний $\nu = p_0 m / \pi^2 \hbar^3$ учитывала обе проекции спина). Решая относительно Δ , находим

$$\Delta = \hbar\omega_D \exp[-2/g\nu(\mu)]. \quad (16.11)$$

Итак, у пары квазичастиц имеется конечная энергия связи 2Δ . По имени автора этого вывода такие пары стали называться куперовскими парами. При $T = 0$ пары образуют бозе-конденсат.

Ниже мы получим Δ из точной теории. Оно окажется вдвое больше, чем (16.11). Отличие связано с тем, что в приведенном выводе рассматривалось возникновение пары на фоне неперестроенного основного состояния с «нормальным» энергетическим спектром¹⁾.

Несмотря на некоторую неточность, результат (16.11) дает возможность сделать определенные выводы. Прежде всего, отметим, что поскольку $g \sim \nu^{-1}(\mu)$, то выражение в показателе экспоненты формально порядка единицы. В действительности $g\nu$ всегда несколько меньше единицы. Существуют даже некоторые аргументы в пользу того, что обязательно $g\nu < 1$ (§ 16.10). Так или иначе, некоторая численная малость в показателе экспоненты превращается в существенную малость отношения $\Delta/\hbar\omega_D$, которая, судя по известным значениям T_c (ниже будет показано, что $\Delta \sim T_c$), обычно составляет 10^{-2} или меньше.

Далее, из полученного результата видно, что энергия связи пары 2Δ конечна при любом g , что не согласуется с приведенным выше рассуждением о невозможности образования связанного комплекса при слабом взаимодействии. В действительности речь идет не об изоли-

¹⁾ Вывод в оригинальной работе [159] приводит к существенной ошибке, давая вдвое больший по абсолютному значению показатель экспоненты.

рованных частицах, а о квазичастицах при заполненной ферми-сфере. Это приводит к фактической замене трехмерной задачи на одномерную: интегралы по импульсам преобразуются согласно правилу

$$\int d^3\mathbf{p}/(2\pi\hbar)^3 \rightarrow (\nu/2) \int d\xi,$$

а для одномерной задачи, как уже сказано, любое притяжение достаточно для связывания частиц.

Мы видим, таким образом, что наличие заполненной ферми-сферы играет важнейшую роль в образовании куперовских пар. Ясно, что любое изменение температуры повлияет на энергию связи. Именно поэтому $\Delta(T)$ уменьшается при повышении температуры и при $T_c \sim \Delta(0)$ обращается в нуль. Такова физическая картина. Далее мы перейдем к более полному изложению теории Бардина–Купера–Шриффера (БКШ)¹⁾.

§ 16.4. Энергетический спектр

В § 4.3, рассматривая квантование колебаний решетки, мы ввели операторы $u_{\mathbf{k}}$ и $u_{\mathbf{k}}^+$. Запишем эти операторы в виде

$$u_{\mathbf{k}} = \left(\frac{\hbar}{2n M \omega(\mathbf{k})} \right)^{1/2} b_{\mathbf{k}}, \quad (b_{\mathbf{k}})_{n_{\mathbf{k}}}^{n_{\mathbf{k}}-1} = n_{\mathbf{k}}^{1/2}.$$

Введенный таким образом оператор $b_{\mathbf{k}}$ называется оператором уничтожения фонона, а эрмитовски сопряженный ему $b_{\mathbf{k}}^+$ — оператором рождения фонона. Оператор $b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}}$ является диагональным с матричными элементами, равными $n_{\mathbf{k}}$. Таким образом,

$$b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} = n_{\mathbf{k}}$$

является оператором числа частиц в состоянии $\mathbf{k}$. Аналогично,

$$b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+ = n_{\mathbf{k}} + 1.$$

Следовательно, коммутатор операторов $b_{\mathbf{k}}$ и $b_{\mathbf{k}}^+$ равен

$$b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+ - b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} = [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^+] = 1.$$

Поскольку операторы с разными $\mathbf{k}$ коммутируют, то можно написать

$$[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^+] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}.$$

Все это относилось к фононам, которые подчиняются статистике Бозе. Рассмотрим теперь электроны, подчиняющиеся статистике Ферми.

¹⁾ Как уже отмечалось выше, практически одновременно та же теория была построена Боголюбовым. Мы будем применять название БКШ, поскольку оно стало общеупотребительным.

Для них тоже можно ввести операторы рождения и уничтожения частиц. Рассмотрим систему невзаимодействующих ферми-частиц. По принципу Паули в каждом состоянии может находиться не более одной частицы. Будем условно записывать волновую функцию этой системы, отмечая в каких состояниях есть частицы, а в каких их нет. Например,

$$\Phi(1_{\mathbf{p}_1}, 0_{\mathbf{p}_2}, 1_{\mathbf{p}_3}, 1_{\mathbf{p}_4}, 0_{\mathbf{p}_5})$$

обозначает систему, в которой состояния $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_3$ и $\mathbf{p}_4$ заняты, а $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}_5$ свободны.

Пусть система описывается волновой функцией $\Phi(\dots, 0_{\mathbf{p}}, \dots)$. Тогда оператор уничтожения $a_{\mathbf{p}}$, действуя на эту функцию, дает нуль, ибо в состоянии $\mathbf{p}$ нет частиц:

$$a_{\mathbf{p}}\Phi(\dots, 0_{\mathbf{p}}, \dots) = 0.$$

Если же имеется волновая функция $\Phi(\dots, 1_{\mathbf{p}}, \dots)$, то под действием оператора $a_{\mathbf{p}}$ она превращается в $\Phi(\dots, 0_{\mathbf{p}}, \dots)$, т. е.

$$a_{\mathbf{p}}\Phi(\dots, 1_{\mathbf{p}}, \dots) = \Phi(\dots, 0_{\mathbf{p}}, \dots).$$

Теперь подействуем на эти функции оператором $a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}}$. Так как $a_{\mathbf{p}}^+$ есть оператор рождения, получаем

$$a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} \Phi(\dots, 0_{\mathbf{p}}, \dots) = a_{\mathbf{p}}^+ \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \Phi(\dots, 0_{\mathbf{p}}, \dots),$$

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} \Phi(\dots, 1_{\mathbf{p}}, \dots) &= \\ &= a_{\mathbf{p}}^+ \Phi(\dots, 0_{\mathbf{p}}, \dots) = \Phi(\dots, 1_{\mathbf{p}}, \dots) = 1 \cdot \Phi(\dots, 1_{\mathbf{p}}, \dots). \end{aligned}$$

Из этих формул следует, что оператор $a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}}$ является диагональным и равен числу частиц:

$$a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} = n_{\mathbf{p}}.$$

Аналогичным образом находим

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^+ \Phi(\dots, 1_{\mathbf{p}}, \dots) &= 0, \\ a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^+ \Phi(\dots, 0_{\mathbf{p}}, \dots) &= \Phi(\dots, 0_{\mathbf{p}}, \dots), \end{aligned}$$

а следовательно,

$$a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^+ = 1 - n_{\mathbf{p}},$$

$$\{a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^+\} = a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^+ + a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} = 1.$$

Это правило называется правилом антикоммутирования фермиевских операторов.

Рассмотрим теперь действие операторов $a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}'}$ и $a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}}^+$ с разными $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$. В первом случае имеем

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}'} \Phi(\dots, 0_{\mathbf{p}}, \dots, 1_{\mathbf{p}'}, \dots) &= \\ &= a_{\mathbf{p}}^+ \Phi(\dots, 0_{\mathbf{p}}, \dots, 0_{\mathbf{p}'}, \dots) = \Phi(\dots, 1_{\mathbf{p}}, \dots, 0_{\mathbf{p}'}, \dots), \end{aligned}$$

во втором случае

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}}^+ \Phi(\dots, 0_{\mathbf{p}}, \dots, 1_{\mathbf{p}'}, \dots) &= \\ &= a_{\mathbf{p}'} \Phi(\dots, 1_{\mathbf{p}}, \dots, 1_{\mathbf{p}'}, \dots) = -a_{\mathbf{p}'} \Phi(\dots, 1_{\mathbf{p}'}, \dots, 1_{\mathbf{p}}, \dots) = \\ &= -\Phi(\dots, 0_{\mathbf{p}'}, \dots, 1_{\mathbf{p}}, \dots) = -\Phi(\dots, 1_{\mathbf{p}}, \dots, 0_{\mathbf{p}'}, \dots). \end{aligned}$$

Изменение знака связано с тем, что когда две частицы переставляются, то волновая функция меняет знак. Это надо учитывать в тех случаях, когда имеется несколько занятых состояний. Отсюда следует, что антикоммутатор $\{a_{\mathbf{p}}^+, a_{\mathbf{p}'}\}$ с разными $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ равен нулю и, следовательно,

$$\{a_{\mathbf{p}'}, a_{\mathbf{p}}^+\} = a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}}^+ + a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}'} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}. \quad (16.12)$$

Использование в качестве переменных чисел заполнения состояний и введение операторов $a_{\mathbf{p}}$, $a_{\mathbf{p}}^+$ называется вторичным квантованием.

С помощью операторов вторичного квантования можно записать гамильтониан взаимодействующей системы электронов. При этом надо помнить, что речь идет о квазичастицах электронной жидкости. В нормальном металле мы пользовались двумя описаниями: квазичастицами с энергетическим спектром $\varepsilon_{\text{кв}} = |\xi|$ и газовой моделью. Различие между этими моделями заключается, в частности, в том, что в первой из них задается химический потенциал, в то время как во второй задано полное число частиц. Как было выяснено в § 2.4, изменение химического потенциала в случаях, представляющих физический интерес, является незначительным. Поэтому оба описания являются практически эквивалентными.

В сверхпроводниках нам гораздо удобнее пользоваться картиной квазичастиц, и это тоже соответствует заданию химического потенциала. При заданном химическом потенциале роль гамильтониана играет $\mathcal{H} - \mu N$, где N — оператор полного числа частиц. Фактически это сводится к замене энергии электрона на $\xi = \varepsilon - \mu$, т.е. к сдвигу начала отсчета энергии. Именно такой гамильтониан мы применим для определения энергетического спектра квазичастиц.

Ниже всегда будет рассматриваться изотропная модель металла, ибо на ней легче прослеживаются основные свойства сверхпроводников. В тех случаях, когда анизотропия имеет принципиальное значение, мы будем делать оговорки.

После всего сказанного можно прямо записать гамильтониан ¹⁾:

$$\mathcal{H} - \mu N = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \xi_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ a_{\mathbf{p}, \sigma} - g \sum_{\substack{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \\ \mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}'_1}} a_{\mathbf{p}'_1, +}^+ a_{\mathbf{p}'_2, -}^+ a_{\mathbf{p}_2, -} a_{\mathbf{p}_1, +}. \quad (16.13)$$

Первый член есть просто $\sum_{\mathbf{p}, \sigma} \xi_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}, \sigma}$. Суммирование происходит по импульсам и по спинам ($\sigma = \pm$). Второй член соответствует взаимодействию электронов. Он описывает, как два электрона с первоначальными импульсами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ в результате взаимодействия приобретают новые импульсы $\mathbf{p}'_1$ и $\mathbf{p}'_2$; иными словами, электроны с первоначальными импульсами исчезают и вместо них рождаются электроны с новыми импульсами. При этом соблюдается закон сохранения суммарного импульса ²⁾. Суммы по импульсам идут в интервалах $p_0 \pm \hbar\omega_D/v$; принято во внимание, что в одной точке взаимодействуют лишь электроны с противоположными спинами. Коэффициент в этом члене надо было бы писать в виде g/V , но для простоты будем считать в этой части нормировочный объем $V = 1$.

Для нормального металла можно перейти от электронов к квазичастицам. Для этого будем считать, что $a_{\mathbf{p}, \sigma} = \alpha_{\mathbf{p}, \sigma}$ при $p > p_0$ и $a_{\mathbf{p}, \sigma} = \alpha_{-\mathbf{p}, -\sigma}^+$ при $p < p_0$, где $\alpha_{\mathbf{p}, \sigma}$ — операторы вторичного квантования для квазичастиц. Действительно, уничтожение частицы с $p < p_0$ есть рождение квазичастицы типа античастицы. Таким образом, уже в обычной ферми-системе основное состояние таково, что переход к квазичастицам требует переопределения операторов рождения и уничтожения.

В сверхпроводнике имеется более сложное изменение основного состояния. Для его нахождения и вычисления энергии квазичастиц применим вариационный метод (Абрикосов, Халатников, 1958) [160] ³⁾. Введем операторы рождения и уничтожения квазичастиц $\alpha_{\mathbf{p}, +}$ и $\alpha_{\mathbf{p}, -}$ с помощью формул преобразования Боголюбова [151]:

$$a_{\mathbf{p}, +} = u_p \alpha_{\mathbf{p}, +} + v_p \alpha_{-\mathbf{p}, -}^+, \quad a_{\mathbf{p}, -} = u_p \alpha_{\mathbf{p}, -} - v_p \alpha_{-\mathbf{p}, +}^+. \quad (16.14)$$

Отметим, что при этих преобразованиях сохраняются импульс и спин.

¹⁾ Здесь и ниже $\xi_{\mathbf{p}} \equiv \xi(\mathbf{p})$.

²⁾ Во втором члене гамильтониана мы исключили слагаемое с $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1$. Это слагаемое приводит к небольшому изменению химического потенциала и может быть компенсировано, если в первом члене написать $\xi - \Delta\mu$. Для простоты мы опускаем эту процедуру, несущественную для вывода.

³⁾ Излагаемый метод проще того, который был применен в оригинальной работе БКШ [150] и является обобщением метода Боголюбова [151, 152] на конечные температуры.

Напишем антикоммутатор $\{a_{\mathbf{p},+}, a_{\mathbf{p},+}^+\}$ и подставим в него формулы (16.14). При этом получаем

$$\begin{aligned} \{a_{\mathbf{p},+}, a_{\mathbf{p},+}^+\} &= u_p^2 \{\alpha_{\mathbf{p},+}, \alpha_{\mathbf{p},+}^+\} + v_p^2 \{\alpha_{-\mathbf{p},-}^+, \alpha_{-\mathbf{p},-}\} + \\ &+ u_p v_p \{\alpha_{\mathbf{p},+}, \alpha_{-\mathbf{p},-}\} + u_p v_p \{\alpha_{-\mathbf{p},-}^+, \alpha_{\mathbf{p},+}^+\} = 1. \end{aligned}$$

Для того чтобы операторы $\alpha_{\mathbf{p},\sigma}$ удовлетворяли обычным правилам антикоммутации, необходимо, чтобы

$$u_p^2 + v_p^2 = 1. \quad (16.15)$$

Итак, имеется лишь одна независимая функция, скажем v_p . Подберем ее так, чтобы средняя энергия была минимальна ¹⁾. При этом пока оставим числа заполнения квазичастиц неопределенными. Средняя энергия соответствует диагональному матричному элементу от гамильтониана (16.13). Подставив в него формулы (16.14) и сохраняя лишь $\langle \alpha_{\mathbf{p},-}^+, \alpha_{\mathbf{p},-} \rangle = n_{\mathbf{p},-}$, $\langle \alpha_{\mathbf{p},+}^+, \alpha_{\mathbf{p},+} \rangle = n_{\mathbf{p},+}$ (здесь $\langle \dots \rangle$ означает среднее по состоянию с данными числами заполнения), мы получим

$$\begin{aligned} E - \mu N &= \langle \mathcal{H} - \mu N \rangle = \sum_{\mathbf{p}} \xi_p \left[u_p^2 (n_{\mathbf{p},+} + n_{\mathbf{p},-}) + v_p^2 (2 - n_{\mathbf{p},-} - n_{\mathbf{p},+}) \right] - \\ &- g \sum_{\mathbf{p}} u_p v_p (1 - n_{\mathbf{p},+} - n_{\mathbf{p},-}) \sum_{\mathbf{p}'} u_{p'} v_{p'} (1 - n_{\mathbf{p}',+} - n_{\mathbf{p}',-}). \end{aligned} \quad (16.16)$$

Выразим u_p согласно (16.15) и проварьируем по v_p . Это приводит к условию

$$2\xi_p = \Delta(1 - 2v_p^2)/u_p v_p, \quad (16.17)$$

где

$$\Delta = g \sum_{\mathbf{p}} u_p v_p (1 - n_{\mathbf{p},+} - n_{\mathbf{p},-}). \quad (16.18)$$

Решением уравнения (16.17) являются

$$u_p^2 = (1/2)(1 + \xi_p/\varepsilon_p), \quad v_p^2 = (1/2)(1 - \xi_p/\varepsilon_p), \quad (16.19)$$

где

$$\varepsilon_p = (\xi_p^2 + \Delta^2)^{1/2}. \quad (16.20)$$

Подстановка в (16.18) приводит к определению

$$\Delta = (1/2)g \sum_{\mathbf{p}} (\Delta/\varepsilon_p) (1 - n_{\mathbf{p},+} - n_{\mathbf{p},-}). \quad (16.21)$$

Для вычисления энергии квазичастиц мы воспользуемся идеей теории ферми-жидкости Ландау (§ 13.1). Энергия квазичастиц

¹⁾ В §14.1 уже говорилось о том, что вариационный принцип с условием минимальности средней энергии эквивалентен решению уравнения Шрёдингера.

определяется как вариационная производная полной энергии по функции распределения:

$$\delta(E - \mu N) = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p},+} \delta n_{\mathbf{p},+} + \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p},-} \delta n_{\mathbf{p},-}. \quad (16.22)$$

При таком определении равновесная функция распределения будет функцией Ферми с $\varepsilon_{\mathbf{p},\sigma}$ в качестве энергии ¹⁾. Поскольку в функционал (16.16) $n_{\mathbf{p},+}$ и $n_{\mathbf{p},-}$ входят одинаковым образом, то и соответствующие $\varepsilon_{\mathbf{p},\sigma}$ окажутся одинаковыми. Варьируя (16.16), например, по $n_{\mathbf{p},+}$ ²⁾, получаем

$$\varepsilon_{\mathbf{p},+} = \delta(E - \mu N) / \delta n_{\mathbf{p},+} = \xi_p (u_p^2 - v_p^2) + 2u_p v_p \Delta = (\xi_p^2 + \Delta^2)^{1/2} = \varepsilon_p.$$

Итак, ε_p , определяемое формулой (16.20), соответствует энергии квазичастиц (рис. 16.2, штриховая линия). При $|\xi_p| \gg \Delta$ ε_p превращается в $|\xi_p|$, что соответствует квазичастицам нормального металла. Это можно увидеть и из формул (16.14) и (16.19). При $|\xi_p| \gg \Delta$ $u_p \rightarrow 1$, $v_p \rightarrow 0$, если $\xi_p > 0$ и $u_p \rightarrow 0$, $v_p \rightarrow 1$, если $\xi_p < 0$. При этом $\alpha_{\mathbf{p},+}$, $\alpha_{\mathbf{p},-}$ играют роль операторов уничтожения квазичастиц нормального металла.

Из формулы (16.20) вытекает, что в спектре квазичастиц имеется энергетическая щель Δ . Это не только соответствует экспериментальным данным по теплоемкости, но и объясняет саму сверхпроводимость. Критическая скорость, по критерию Ландау (16.1), является конечной: $v_c \sim \Delta/p_0$, т.е. при меньших скоростях электронная жидкость обладает сверхтекучестью. Поясним еще, что энергия связи куперовской пары равна 2Δ . При развале куперовской пары получаются две квазичастицы, т.е. на образование каждой квазичастицы надо затратить энергию Δ .

Возникает, однако, следующий вопрос. Нет ли возбуждений, связанных не с развалом куперовских пар, а с их поступательным движением. Исследование этого вопроса приводит к следующим результатам, довольно понятным с физической точки зрения. Куперовские пары образуют взаимодействующую систему. При низких температурах ее можно рассматривать как жидкость, а следовательно, возбуждения с низкой энергией соответствуют распространению звуковых волн (фононов). Но звук — это колебания плотности, а жидкость из куперовских пар заряженная. При колебаниях плотности возникают электрические поля, которые необходимо учитывать.

¹⁾ В соответствии с общепринятым мы обозначаем здесь через ε_p энергию квазичастиц. В ферми-распределение она входит без вычитания μ , т.е. $n_p = [\exp(\varepsilon_p/T) + 1]^{-1}$. Ее не надо путать с энергией электронов газовой модели $\varepsilon(p)$, употребляемой в части I книги.

²⁾ При вариации по $n_{\mathbf{p},\sigma}$ надо считать u_p , v_p постоянными, так как сами эти функции определяются из условия $\delta(E - \mu N) / \delta v_p = 0$.

В целом мы приходим к ситуации, напоминающей вопрос о распространении нулевого звука в электронной жидкости (§ 13.5). Там было выяснено, что при учете электрического поля спектр колебаний перестает быть линейным и начинается с конечной энергии порядка μ . Это же имеет место в сверхпроводниках. Ясно, что квазичастицы с такой энергией не могут представлять интереса при изучении сверхпроводимости.

Конечно, как и в нормальном металле, в принципе, возможны колебания с более сложным изменением функции распределения, не приводящим к изменению электронной плотности. Однако ввиду отсутствия четких экспериментальных свидетельств об их существовании мы не будем их рассматривать.

Можно также поставить вопрос о спаривании с ненулевым орбитальным моментом, $l \neq 0$. Исследование этого вопроса показывает, что если амплитуда рассеяния электронов существенно зависит от угла и в ее разложении по сферическим гармоникам (каждая соответствует определенному l) имеются отрицательные коэффициенты, то может осуществляться спаривание, соответствующее отрицательному коэффициенту, наибольшему по абсолютному значению (*Абрикосов, Горьков, Ландау, Халатников*, 1958, см. [4, § 20]). Пример такого рода в природе имеется — это ферми-жидкость — сверхтекучий ^3He . В нем действительно возникает спаривание квазичастиц с орбитальным моментом $l = 1$ и параллельными спинами, что приводит к сверхтекучести (см. обзоры [161, 162]), но ^3He — нейтральная ферми-жидкость. Среди металлов спаривание с ненулевым орбитальным моментом, возможно, осуществляется в так называемых «системах с тяжелыми фермионами», но пока этот вопрос недостаточно изучен.

Трудность заключается в том, что рассеяние с ненулевым орбитальным моментом означает нелокальное взаимодействие. Однако, как мы выяснили, фононное притяжение и кулоновское отталкивание фактически являются локальными (т. е. осуществляются при нахождении электронов в одной точке). Следовательно, речь может идти лишь о каком-то новом, нефононном механизме притяжения электронов, происхождение которого в настоящее время неизвестно (см. обсуждение этого вопроса в § 16.11). Ввиду этого мы не будем рассматривать спаривание с $l \neq 0$.

§ 16.5. Температурная зависимость энергетической щели

Изучение термодинамики сверхпроводников мы начнем с вычисления температурной зависимости энергетической щели $\Delta(T)$. Подставляя в формулу (16.21) функцию Ферми и переходя к интегрированию

по импульсам, получаем уравнение для определения Δ :

$$1 = \frac{g}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1 - 2n_F(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{g}{2} \nu(\mu) \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{\text{th} \left[(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2} / 2T \right]}{(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}} d\xi. \quad (16.23)$$

Мы здесь выделили интегрирование по ξ , учли симметрию по отношению к $\xi \rightarrow -\xi$ и ввели плотность состояний $\nu(\mu) = p_0 m / \pi^2 \hbar^3$ (мы все время рассматриваем изотропную модель).

При $T \rightarrow 0$ $\text{th} \rightarrow 1$. Взяв интеграл, получаем

$$1 = [g\nu(\mu)/2] \ln[2\hbar\omega_D/\Delta(0)]$$

(предполагаем $g\nu(\mu) \ll 1$; при этом $\Delta \ll \hbar\omega_D$). Отсюда следует

$$\Delta(0) = 2\hbar\omega_D \exp[-2/g\nu]. \quad (16.24)$$

Эта формула отличается от (16.11) множителем 2, который появился от учета перестройки энергетического спектра.

При $T \rightarrow T_c$ $\Delta \rightarrow 0$. При этом получаем

$$1 = \frac{g\nu(\mu)}{2} \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{\text{th}(\xi/2T_c)}{\xi} d\xi = \frac{g\nu(\mu)}{2} \ln \frac{2\hbar\omega_D \gamma}{\pi T_c},$$

где $\gamma = \exp C = 1,78$. Отсюда следует

$$T_c = (2\hbar\omega_D \gamma / \pi) \exp[-2/g\nu]. \quad (16.25)$$

Сравнивая с (16.23), находим

$$\Delta(0) = (\pi/\gamma) T_c = 1,76 T_c. \quad (16.26)$$

Рассмотрим поведение Δ в окрестностях $T = 0$ и $T = T_c$.

Вблизи $T = 0$ формулу (16.23) перепишем следующим образом: разделим ее на $g\nu(\mu)/2$, а затем вычтем и прибавим в подынтегральном выражении $(\xi^2 + \Delta^2)^{-1/2}$. При этом получим

$$\ln \frac{\Delta(0)}{\Delta(T)} = \int_0^\infty \frac{1 - \text{th} \left[(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2} / 2T \right]}{(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}} d\xi = 2f \left(\frac{\Delta}{T} \right), \quad (16.27)$$

где

$$f(x) = \int_1^\infty \frac{(y^2 - 1)^{-1/2}}{1 + e^{yx}} dy \quad (16.28)$$

(переменная y соответствует $(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}/\Delta$). Ввиду того что интеграл в (16.27) сходится при $\xi \sim \Delta$, мы продлили его верхний предел

до бесконечности. Так как нас интересуют большие значения $x = \Delta/T$, разложим подынтегральное выражение в (16.28) по $\exp(-yx)$:

$$f(x) = \int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-nyx} (y^2 - 1)^{-1/2} dy.$$

Воспользовавшись интегральным представлением функции Макдональда (функция Ханкеля от мнимого аргумента)

$$K_{\nu}(z) = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu + 1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \int_1^{\infty} e^{-zy} (y^2 - 1)^{\nu-1/2} dy,$$

находим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_0(nx). \quad (16.29)$$

При больших значениях аргумента функции K_0 экспоненциально убывают. Оставляя лишь первый член и воспользовавшись асимптотикой

$$K_0(x) \approx (\pi/2x)^{1/2} e^{-x},$$

при $T \ll T_c$ получаем

$$\Delta \approx \Delta(0) - [2\pi\Delta(0)T]^{1/2} e^{-\Delta(0)/T}. \quad (16.30)$$

Эта зависимость — следствие того факта, что изменение Δ связано с появлением квазичастиц, а число квазичастиц пропорционально $\exp[-\Delta(0)/T]$.

Если, наоборот, $T \rightarrow T_c$, то $\Delta \rightarrow 0$. В этом случае формулу (16.23) удобно разложить по Δ . Поступим сначала подобно предыдущему: разделим (16.23) на $g\nu(\mu)/2$, затем вычтем и прибавим в подынтегральном выражении $\xi^{-1} \text{th}(\xi/2T)$. В результате получим

$$\ln \frac{T_c}{T} = \int_0^{\infty} \left[\frac{\text{th}(\xi/2T)}{\xi} - \frac{\text{th}[(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}/2T]}{(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}} \right] d\xi \quad (16.31)$$

(ввиду сходимости интеграла при $\xi \sim T$ мы опять продлили его верхний предел до бесконечности).

Применим следующую формулу:

$$\text{th}(\pi x/2) = (4x/\pi) \sum_{k=0}^{\infty} \left[(2k+1)^2 + x^2 \right]^{-1}.$$

Подставляя ее в (16.31), разлагая по Δ и интегрируя по ξ , находим

$$\ln \left(\frac{T_c}{T} \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \left(\frac{\Delta}{\pi T} \right)^{2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}, \quad (16.32)$$

где $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$. Если ограничиться первым членом, то получаем

$$\Delta \approx \pi(8/7\zeta(3))^{1/2}[T_c(T_c - T)]^{1/2} = 3,06 [T_c(T_c - T)]^{1/2}, \quad (16.33)$$

где $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана: $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$.

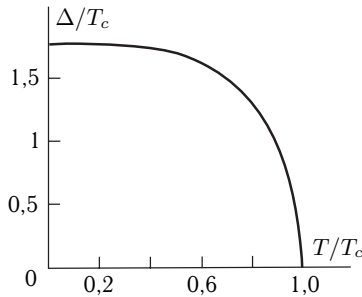


Рис. 16.3

Такое поведение довольно естественно. Ведь Δ , будучи отличным от нуля при $T < T_c$ и равным нулю при $T > T_c$, может служить параметром порядка сверхпроводящего перехода. Температурная зависимость (16.33) согласуется с теорией фазовых переходов 2-го рода Ландау (см. приложение II). Вопрос о применимости этой теории к сверхпроводникам рассмотрим позже.

График функции $\Delta(T)$ представлен на рис. 16.3.

§ 16.6. Термодинамика сверхпроводников

Статистическая физика дает следующее выражение для термодинамического потенциала ¹⁾:

$$\Omega = -T \ln Z, \quad Z = \sum_{n, N} e^{(-E_{nN} + N\mu)/T}, \quad (16.34)$$

где E_{nN} — уровни энергии, т.е. собственные значения оператора Гамильтона системы из N частиц. Выражение для статистической суммы может быть записано в виде шпура (следа) матрицы

$$Z_{nm} = \int \Phi_n^* Z \Phi_m dV,$$

где

$$Z = \exp[-(\mathcal{H} - N\mu)/T],$$

а Φ_n — волновые функции системы (операция Sp инвариантна относительно выбора ортонормированной системы функций Φ_n):

$$Z = \text{Sp } e^{-(\mathcal{H} - N\mu)/T}. \quad (16.35)$$

¹⁾ Потенциал Ω зависит от переменных T , V , μ , в то время как свободная энергия F зависит от T , V , N .

Подставим сюда $\mathcal{H} - N\mu$ в виде (16.13) и продифференцируем Ω (16.34) по константе взаимодействия g . Имеем при этом

$$\frac{\partial \Omega}{\partial g} = g^{-1} \frac{\text{Sp} [\mathcal{H}_{\text{int}} e^{-(\mathcal{H} - N\mu)/T}]}{\text{Sp} [e^{-(\mathcal{H} - N\mu)/T}]} = g^{-1} \langle \mathcal{H}_{\text{int}} \rangle, \quad (16.36)$$

где мы обозначили второй член в гамильтониане (16.13) через $\mathcal{H}_{\text{int}}$ (он описывает взаимодействие электронов). Скобка $\langle \dots \rangle$ обозначает среднее по гиббсовскому распределению.

Выразим в (16.36) операторы $a_{\mathbf{p}, \sigma}$ через $\alpha_{\mathbf{p}, \sigma}$ (16.14) и возьмем среднее. С точностью до множителя получаем второй член формулы (16.16); используя определение Δ (16.18), напомним

$$\partial \Omega / \partial g = -\Delta^2 / g^2. \quad (16.37)$$

Переходя от переменной g к переменной Δ , получаем

$$\Omega_s - \Omega_n = \int_0^{\Delta} \frac{dg^{-1}(\Delta_1)}{d\Delta_1} \Delta_1^2 d\Delta_1. \quad (16.38)$$

Мы здесь воспользовались тем, что при $\Delta = 0$ сверхпроводник превращается в нормальный металл. Выражение g^{-1} как функция Δ получается из формул (16.24) и (16.27):

$$g^{-1} = (1/2)\nu(\mu)[\ln(2\hbar\omega_D/\Delta) - 2f(\Delta/T)]. \quad (16.39)$$

Функция f выражается формулой (16.28).

Найдем асимптотические значения $\Omega_s - \Omega_n$ при $T \rightarrow 0$ и $T \rightarrow T_c$.

В первом случае воспользуемся для f формулой (16.29). Подставляя ее в (16.38), находим

$$\Omega_s - \Omega_n = -\frac{1}{2}\nu(\mu) \left[\frac{\Delta^2}{2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{T^2}{n^2} \int_0^{n\Delta/T} K_1(x) x^2 dx \right],$$

где мы применили соотношение $K'_0(x) = -K_1(x)$. Интеграл в скобках берется в явной форме:

$$\int x^2 K_1(x) = -x^2 K_2(x).$$

При подстановке нижнего предела учтем, что $[x^2 K_2(x)]_{x \rightarrow 0} = 2$. После этого получим сумму

$$2T^2 \nu(\mu) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-2} = \pi^2 T^2 \nu(\mu) / 6.$$

Стоящая слева свободная энергия нормального металла равна $-\pi^2 T^2 \nu(\mu)/6$. Это следует из формулы (2.27) для теплоемкости и соотношения $C = -T(\partial^2 \Omega / \partial T^2)$. Сокращая $-\Omega_n$ в левой и правой частях, получаем

$$\Omega_s = -\frac{1}{2} \nu(\mu) \left[\frac{\Delta^2}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_2 \left(\frac{n\Delta}{T} \right) \Delta^2 \right]. \quad (16.40)$$

При $T = 0$ второй член обращается в нуль и получается

$$\Omega_s(0) = -\nu(\mu) \Delta^2(0)/4. \quad (16.41)$$

Эта формула довольно естественна. Она соответствует тому, что электроны в энергетической полосе шириной порядка Δ (их число порядка $\nu(\mu)\Delta$) связываются в пары с энергией связи порядка Δ .

При низких температурах учтем поправку к $\Delta(0)$ и член с $n = 1$ во втором слагаемом (16.40). В результате находим

$$\begin{aligned} \Omega_s(T) - \Omega_s(0) &\approx \nu(\mu) \Delta^2(0) [K_0(\Delta(0)/T) - K_2(\Delta(0)/T)] = \\ &= -2\nu(\mu) \Delta(0) T K_1(\Delta(0)/T) \approx \nu(\mu) \left(2\pi T^3 \Delta(0) \right)^{1/2} e^{-\Delta(0)/T}. \end{aligned} \quad (16.42)$$

Отсюда получаем энтропию единицы объема

$$S_s = -\partial \Omega_s / \partial T \approx \nu(\mu) \left(2\pi \Delta^3(0)/T \right)^{1/2} e^{-\Delta(0)/T} \quad (16.43)$$

и теплоемкость

$$C_s = T \partial S_s / \partial T = \nu(\mu) \left(2\pi \Delta^5(0)/T^3 \right)^{1/2} e^{-\Delta(0)/T}. \quad (16.44)$$

Теперь перейдем к случаю $T \rightarrow T_c$. Применим формулу (16.32). Выражая T_c через g с помощью формулы (16.25), находим g^{-1} как функцию Δ :

$$\begin{aligned} g^{-1} &= \frac{1}{2} \nu(\mu) \times \\ &\times \left[\ln \frac{2\hbar\omega_D\gamma}{\pi T} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \left(\frac{\Delta}{\pi T} \right)^{2n} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-(2n+1)} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя в (16.38), получаем

$$\begin{aligned} \Omega_s - \Omega_n &= \\ &= -\nu(\mu) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!! 2n}{(2n+2)!!} \frac{\Delta^{2n+2}}{(\pi T)^{2n}} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-(2n+1)}. \end{aligned} \quad (16.45)$$

Ограничиваясь первым членом, отсюда находим

$$\Omega_s - \Omega_n \approx -\nu(\mu) (7\zeta(3)/32)\Delta^4/(\pi T)^2. \quad (16.46)$$

Подставляя значение Δ при $T \rightarrow T_c$ (16.33), имеем

$$\Omega_s - \Omega_n \approx -(2/7\zeta(3))(p_0 m/\hbar^3)(T_c - T)^2. \quad (16.47)$$

Отсюда находим энтропию:

$$S_s(T) \approx S_n(T) + (4/7\zeta(3))(p_0 m/\hbar^3)(T - T_c). \quad (16.48)$$

Дифференцируя еще раз, получаем теплоемкость в точке перехода:

$$C_s(T_c) = C_n(T_c) + (4/7\zeta(3))(p_0 m/\hbar^3)T_c. \quad (16.49)$$

Напомним (см. (2.29)), что

$$C_n(T) = S_n(T) = (p_0 m/3\hbar^3) T. \quad (16.50)$$

Из (16.49) следует, что теплоемкость испытывает скачок в точке перехода, равный $(4/7\zeta(3))(p_0 m/\hbar^3)T_c$. Для того чтобы проследить температурный ход теплоемкости в окрестности T_c , необходимо учесть следующие члены разложения по Δ в формулах (16.45) и (16.32). После этого, подставляя числа, получаем

$$C_s(T)/C_n(T_c) = 2,42 + 4,76(T - T_c)/T_c. \quad (16.51)$$

График зависимости $C_s(T)$ приведен на рис. 16.4.

Знание термодинамических потенциалов дает возможность определить критическое поле H_c . Для этого используем соотношение (15.5). Учтем, что согласно термодинамике добавки ко всем термодинамическим потенциалам одинаковы, если они выражены в соответствующих переменных. В частности,

$$(\delta F)_{N,T,V} = (\delta \Omega)_{\mu,T,V}.$$

Это дает возможность определить H_c из соотношения

$$\Omega_n - \Omega_c = H_c^2/8\pi. \quad (16.52)$$

Прежде всего, при $T = 0$ из (16.41) получаем (напоминаем, что мы считаем $\Omega_n(0) = 0$)

$$H_c(0) = (2\pi\nu(\mu))^{1/2} \Delta(0). \quad (16.53)$$

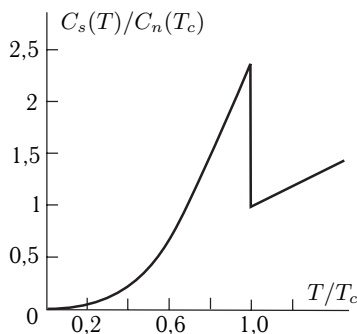


Рис. 16.4

При низких температурах $\Omega_n(T) = -\pi^2 T^2 \nu(\mu)/6$, а температурная добавка к $\Omega_s(0)$, согласно (16.42), экспоненциально мала. Следовательно,

$$H_c^2(T)/8\pi = \Omega_n(T) - \Omega_s(T) \approx -\pi^2 T^2 \nu(\mu)/6 + \nu(\mu) \Delta^2(0)/4.$$

С помощью (16.53) отсюда находим, что

$$\begin{aligned} H_c(T) &\approx H_c(0) \left[1 - (\pi^2/3) T^2/\Delta^2(0) \right] = H_c(0) \left[1 - (\gamma^2/3) T^2/T_c^2 \right] = \\ &= H_c(0) \left(1 - 1,05 T^2/T_c^2 \right). \end{aligned} \quad (16.54)$$

Мы здесь воспользовались связью между $\Delta(0)$ и T_c (16.26).

Вблизи T_c , согласно (16.47), получаем

$$\begin{aligned} H_c &\approx \left[16\pi p_0 m / 7\zeta(3) \hbar^3 \right]^{1/2} (T_c - T) = \\ &= H_c(0) \gamma (8/7\zeta(3))^{1/2} (1 - T/T_c) = 1,735 H_c(0) (1 - T/T_c). \end{aligned} \quad (16.55)$$

Формулы (16.55) и (16.49), как и должно быть, согласуются с формулой (15.8) для скачка теплоемкости.

Отметим некоторые следствия полученных результатов. Согласно (16.26) и (16.53) критическая температура T_c и критическое поле $H_c(0)$ пропорциональны $\Delta(0)$. Согласно (16.24) $\Delta(0)$ пропорционально дебаевской частоте ω_D , которая зависит от массы ионов решетки по закону $\omega_D \propto M^{-1/2}$. Это соответствует формулам для изотопического эффекта (16.2). Далее, при низких температурах теплоемкость описывается экспоненциальным законом (16.44), что согласуется с экспериментальным результатом (15.3). Наконец, хотя результаты для критического поля не вполне совпадают с эмпирической формулой (15.1), но асимптотические формулы при $T \ll T_c$ и $T \rightarrow T_c$ (16.54) и (16.55) довольно близки к ней.

Все приведенные результаты относятся к изотропной модели, в то время как истинные металлы анизотропны. Поэтому можно только удивляться тому, что эти формулы хорошо согласуются с экспериментом не только качественно, но и количественно. Тем не менее имеются и некоторые различия, на которых следует остановиться.

Прежде всего, отметим, что, согласно изложенной теории, любая термодинамическая величина, представленная в безразмерных единицах, например $C_s(T)/C_n(T_c)$, $H_c(T)/H_c(0)$, зависит лишь от отношения T/T_c , где T_c связано со щелью в энергетическом спектре при $T = 0$ соотношением (16.26).

В анизотропном металле энергетический спектр квазичастиц выглядит несколько иначе:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = [\Delta^2(\mathbf{n}) + \xi^2(\mathbf{n})]^{1/2}, \quad (16.56)$$

где $\xi(\mathbf{n}) = v(\mathbf{n})[p - p_0(\mathbf{n})]$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{p}$. Таким образом, Δ зависит от направления $\mathbf{p}$. При низких температурах роль энергетической щели играет минимальное значение $\Delta(\mathbf{n}, 0)$,

которое обозначим через $\Delta_{\min}$. Именно эта величина определяет температурный ход теплоемкости при $T \rightarrow 0$:

$$C_s \propto \exp(-\Delta_{\min}/T).$$

С другой стороны, $\Delta(\mathbf{n}, T)$ зависит от температуры, и при $T \rightarrow T_c$

$$\Delta(\mathbf{n}, T) \approx \Delta_0(\mathbf{n}) f(T/T_c),$$

где $f \rightarrow 0$ при $T \rightarrow T_c$ [163].

Для анизотропного металла утверждение, что $C_s(T)/C_n(T_c)$ зависит лишь от T/T_c во всей области температур от 0 до T_c , не соответствует действительности. В самом деле, если определить $\Delta(0)$ из формулы (16.26), то получится какое-то усредненное значение $\Delta(0)$, а следовательно, низкотемпературная формула $C_s \propto \exp[-\Delta(0)/T]$ будет отличаться от истинного закона, в который входит $\Delta_{\min}$. Поэтому если сравнивать экспериментальные данные для C_s с теоретической кривой для изотропной модели, то следует ожидать, что при $T \rightarrow 0$ экспериментальные точки будут находиться выше теоретической кривой, что и имеет место в действительности. Однако реально анизотропия Δ не очень велика: $(\Delta(0) - \Delta_{\min})/\Delta(0) < 10\%$. Это может объясняться тем, что фононные силы притяжения определяются в основном коротковолновыми фононами с частотой порядка ω_D . При обмене такими фононами с $\hbar k \sim p_0$ импульсы электронов меняются существенным образом. Это приводит к некоторому эффективному усреднению вдоль всей ферми-поверхности.

Другое допущение изложенной теории заключалось в предположении о слабости взаимодействия между электронами:

$$g\nu(\mu) \ll 1.$$

Такое предположение не всегда оправдано. В самом деле, для свинца, например, $T_c = 7,2$ К, а $\hbar\omega_D = 94,5$ К; следовательно, $g\nu(\mu) = 0,76$. Неудивительно, что для таких металлов изложенная выше теория несколько отличается от эксперимента (в основном это касается зависимости $H_c(T)$). Впрочем, после соответствующего исправления теории различие заметно уменьшается.

§ 16.7. Лондоновские и пиппардовские сверхпроводники (качественная теория)

Прежде чем приступить к микроскопическому выводу основных соотношений, характеризующих поведение сверхпроводников в электромагнитном поле, дадим простой качественный анализ. В § 15.5 были выведены уравнения лондоновской электродинамики. В частности, было отмечено, что эти уравнения могут быть записаны в виде (15.44), т. е.

$$\mathbf{j} = -QA \quad (\operatorname{div} \mathbf{A} = 0),$$

где

$$Q = n_e e^2 / m c.$$

При выводе лондоновских уравнений предполагалось, что сверхпроводящий ток переносится электронами. Теперь, однако, мы знаем, что носителями сверхпроводящего тока являются куперовские пары. Основное отличие заключается в том, что куперовские пары имеют конечный размер. Определить этот размер можно на основе следующих соображений. Энергетический спектр квазичастиц $\varepsilon = [v^2(p - p_0)^2 + \Delta^2]^{1/2}$ свидетельствует о том, что объединение в пары затрагивает импульсы в области $\delta p \sim \Delta/v$ около ферми-границы. Согласно принципу неопределенности $\delta p \delta r \sim \hbar$. Отсюда можно сделать вывод, что размер пары есть $\hbar v / \Delta$. Если подставить сюда

$$v \sim 10^8 \text{ см/с}, \quad \Delta \sim 10 \text{ К} \sim 10^{-3} \text{ эВ} \sim 10^{-15} \text{ эрг},$$

то получается

$$\hbar v / \Delta \sim 10^{-4} \text{ см},$$

т. е. размер куперовской пары составляет десятки тысяч межатомных расстояний. Следовательно, пары являются весьма рыхлыми образованиями. Возникает естественный вопрос: как они могут помещаться в металле, не мешая друг другу? В действительности, конечно, куперовские пары нельзя представлять себе как классический газ из частиц, расстояние между которыми много больше их размеров. Пары проникают друг через друга и в то же время как частицы газа являются свободными и практически не взаимодействуют друг с другом. Такое положение, конечно, возможно только в квантовой механике, так же как и течение этого газа через решетку без рассеяния. Для того чтобы подчеркнуть эту неклассичность, в строгой теории говорят не о парах, имеющих определенный размер, а о парной корреляции между электронами, распространяющейся на определенное расстояние — «корреляционную длину», имеющую порядок $\xi \sim \hbar v / \Delta$ ¹⁾.

В связи с наличием корреляции ток определяется электромагнитным полем не только непосредственно в точке наблюдения, но и в целой области вокруг этой точки радиусом порядка ξ . Поэтому связь между током и полем становится нелокальной и выражается соотношением

$$j_i(\mathbf{r}) = - \sum_k \int Q_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') A_k(\mathbf{r}') dV', \quad (16.57)$$

где ядро Q_{ik} убывает на расстоянии порядка ξ .

¹⁾ Обозначение ξ для корреляционной длины является общепринятым. Мы будем тоже применять его, так как корреляционная длина и энергия электронов $\xi = v(p - p_0)$ не будут встречаться в одних и тех же формулах.

В предельном случае, когда поле меняется очень медленно по пространству, в интеграле (16.57) можно заменить $A_k(\mathbf{r}')$ на $A_k(\mathbf{r})$ и вынести его за знак интеграла. Обозначая

$$\int Q_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = \delta_{ik} Q,$$

получаем лондоновскую связь между током и полем. Характерной длиной, которая определяет изменение поля в сверхпроводнике, является, очевидно, глубина проникновения δ . Действительно, на этом расстоянии поле меняется от заданного значения на поверхности сверхпроводника до нуля. Следовательно, в том случае, когда $\delta \gg \xi$, мы возвращаемся к лондоновской электродинамике. Этот предел называется лондоновским.

В противоположном предельном случае, $\delta \ll \xi$, можно применить концепцию неэффективности, как и в аномальном скин-эффекте (§ 7.2). В самом деле, электроны (или, точнее, пары), которые движутся под большими углами к поверхности сверхпроводника, быстро выходят из глубины проникновения и практически не взаимодействуют с полем. Лишь те из них, которые движутся под углом, не превышающим $\theta \sim \delta/\xi$, являются эффективными. Но число таких электронов есть $n_e \theta \sim n_e \delta/\xi$. Подставляя это число в выражение (15.41) для глубины проникновения, получаем

$$\delta \sim \left[mc^2/4\pi n_e e^2 \delta \xi^{-1} \right]^{1/2}.$$

Это уравнение для δ . Решая его, получаем

$$\delta_P \sim \left[(mc^2/4\pi n_e e^2) \xi \right]^{1/3} \sim \delta_L^{2/3} \xi^{1/3} \quad (16.58)$$

(лондоновскую глубину проникновения (15.41) мы обозначили как δ_L). Случай $\delta \ll \xi$ был впервые рассмотрен Пиппардом [164]. Поэтому такие сверхпроводники называют пиппардовскими.

На опыте все чистые сверхпроводники являются либо пиппардовскими, либо промежуточными, т. е. в них $\xi \gtrsim \delta$. Однако, как мы увидим ниже, можно уменьшить корреляционную длину и увеличить δ , введя примеси или дефекты структуры, на которых рассеиваются электроны. В результате можно прийти к лондоновскому пределу. Кроме того, вблизи T_c все сверхпроводники становятся лондоновскими.

В заключение отметим, что выражения для лондоновского коэффициента Ω и соответствующей глубины проникновения δ не зависят от того, считаем ли мы носителями электроны или пары. Действительно, сделав замену $e \rightarrow 2e$, $n_e \rightarrow n_e/2$, $m \rightarrow 2m$, получаем ту же самую формулу (15.44) для Q и (15.41) для δ .

§ 16.8. Эффект Мейснера при $T = 0$

Теперь перейдем к количественному микроскопическому выводу. Поскольку в общем случае получаются громоздкие уравнения, то мы рассмотрим здесь самый простой случай: поведение сверхпроводников при $T = 0$ в слабом магнитном поле, не зависящем от времени.

Из квантовой механики известно изменение гамильтониана при вариации векторного потенциала [118, с. 538]:

$$\delta \mathcal{H} = -c^{-1} \int \mathbf{j} \delta \mathbf{A} dV. \quad (16.59)$$

Здесь справа под интегралом стоит оператор тока. Усреднив эту формулу по заданному состоянию, например по равновесному состоянию при температуре T , получаем

$$\delta E = -c^{-1} \int \langle \mathbf{j} \rangle \delta \mathbf{A} dV, \quad (16.59')$$

где $\langle \mathbf{j} \rangle$ — средний ток. Таким образом, для нахождения $\langle \mathbf{j} \rangle$ ¹⁾ нам надо найти среднюю энергию как функцию $\mathbf{A}$ и проварьировать ее по $\mathbf{A}$.

Поскольку в отсутствие поля $\mathbf{j} = 0$, то при не слишком больших полях ток пропорционален полю. Отсюда следует, что для получения тока нам надо найти энергию при наличии поля с точностью до членов второго порядка по $\mathbf{A}$, а затем проварьировать ее по $\mathbf{A}$.

В присутствии поля гамильтониан (16.13) трансформируется таким образом, чтобы вместо операторов импульса $-i\hbar \nabla$ вошла комбинация $-i\hbar \nabla - (e/c)\mathbf{A}$. Следовательно, в гамильтониане мы получим

$$(2m)^{-1} \left[-\hbar^2 \nabla^2 + i\hbar(e/c)(\mathbf{A} \nabla + \nabla \mathbf{A}) + (e/c)^2 \mathbf{A}^2 \right]. \quad (16.60)$$

В то время как первое слагаемое сохраняет импульс частицы, для других это не имеет места. Если разложить $\mathbf{A}$ в интеграл Фурье

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \mathbf{A}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad (16.61)$$

то $\mathbf{A}_{\mathbf{q}}$ можно интерпретировать как оператор поглощения электромагнитного кванта с импульсом $\hbar \mathbf{q}$. Ввиду этого оператор $\mathbf{A}_{\mathbf{q}}$ переводит частицу с импульсом $\mathbf{p} - \hbar \mathbf{q}$ в состояние с импульсом $\mathbf{p}$. Интересующие нас члены гамильтониана, содержащие $\mathbf{A}$, с помощью операторов вторичного квантования могут быть записаны в виде

$$\mathcal{H}_1 = -(e/2mc) \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \sigma} [(\mathbf{p} - \hbar \mathbf{q}) a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ a_{\mathbf{p} - \hbar \mathbf{q}, \sigma} + \mathbf{p} a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ a_{\mathbf{p} - \hbar \mathbf{q}, \sigma}] \mathbf{A}_{\mathbf{q}}, \quad (16.62)$$

¹⁾ В дальнейшем мы будем опускать скобки в обозначении среднего тока.

$$\mathcal{H}_2 = (e^2/2mc^2) \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{q}', \sigma} a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ a_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{q}-\hbar\mathbf{q}', \sigma} \mathbf{A}_{\mathbf{q}} \mathbf{A}_{\mathbf{q}'}. \quad (16.63)$$

Здесь учтено что, например,

$$-i\hbar\nabla \mathbf{A}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} = \mathbf{A}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} (-i\hbar\nabla + \hbar\mathbf{q}).$$

Выразим входящие в $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ комбинации $\sum_{\sigma} a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ a_{\mathbf{p}', \sigma}$ через операторы α_+ и α_- . Подставляя формулы (16.14) и группируя члены, находим

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ a_{\mathbf{p}', \sigma} &= u_p u_{p'} (\alpha_{\mathbf{p}, +}^+ \alpha_{\mathbf{p}', +} + \alpha_{\mathbf{p}, -}^+ \alpha_{\mathbf{p}', -}) + \\ &+ v_p v_{p'} (\alpha_{-\mathbf{p}, -}^+ \alpha_{-\mathbf{p}', -} + \alpha_{-\mathbf{p}, +}^+ \alpha_{-\mathbf{p}', +}) + u_p v_{p'} (\alpha_{\mathbf{p}, +}^+ \alpha_{-\mathbf{p}', -} - \\ &- \alpha_{\mathbf{p}, -}^+ \alpha_{-\mathbf{p}', +}) + v_p u_{p'} (\alpha_{-\mathbf{p}, -} \alpha_{\mathbf{p}', +} - \alpha_{-\mathbf{p}, +} \alpha_{\mathbf{p}', -}). \end{aligned} \quad (16.64)$$

Поскольку часть гамильтониана $\mathcal{H}_2$ (16.63) — второго порядка по $\mathbf{A}$, то ее достаточно учесть лишь в первом порядке теории возмущений, т.е. просто усреднить по основному состоянию. В результате из выражения (16.64) вносит вклад лишь член с $v_p v_{p'}$, причем, оказывается, $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$, т.е. $\mathbf{q} = -\mathbf{q}'$. Учитывая, что при $T = 0$ $n_{\mathbf{p}, +} = n_{\mathbf{p}, -} = 0$, получаем от этого члена

$$E_2 = (e^2/mc^2) \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} v_p^2 \mathbf{A}_{\mathbf{q}} \mathbf{A}_{-\mathbf{q}}. \quad (16.65)$$

Первый порядок теории возмущений от $\mathcal{H}_1$ обращается в нуль. Действительно, при усреднении по основному состоянию получается $\sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} v_p^2 \delta_{\mathbf{q}, 0} = 0$, так как v_p зависит лишь от $|\mathbf{p}|$. Поэтому найдем второй порядок теории возмущений:

$$E_1 = \sum_{m \neq 0} \frac{|(\mathcal{H}_1)_{m0}|^2}{E_{(0)} - E_{(m)}}.$$

Поскольку в основном состоянии нет квазичастиц, то вклад в E_1 дадут лишь переходы с рождением двух квазичастиц и их уничтожением. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_1)_{m0} &= -(e/2mc) (u_p v_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{q}} - v_p u_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{q}}) (2\mathbf{p} - \hbar\mathbf{q}) \mathbf{A}_{\mathbf{q}}, \\ E_{(0)} - E_{(m)} &= -(\varepsilon_p + \varepsilon_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{q}}), \\ E_1 &= - \left(\frac{e}{2mc} \right)^2 \sum_{\mathbf{p}} \frac{[(2\mathbf{p} - \hbar\mathbf{q}) \mathbf{A}_{\mathbf{q}}] [(2\mathbf{p} - \hbar\mathbf{q}) \mathbf{A}_{-\mathbf{q}}]}{\varepsilon_p + \varepsilon_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{q}}} \times \\ &\times (u_p v_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{q}} - v_p u_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{q}})^2. \end{aligned} \quad (16.66)$$

Мы здесь использовали действительность $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Согласно (16.61) при этом $\mathbf{A}_{\mathbf{q}}^* = \mathbf{A}_{-\mathbf{q}}$. Кроме того, было учтено, что операторы $\alpha_{\mathbf{p},-}$ и $\alpha_{\mathbf{p},+}$ антикоммутируют, т.е. их перестановка приводит к изменению знака.

Прежде чем производить дальнейшие вычисления, сделаем одно замечание. Как известно из электродинамики, правильная теория должна обладать свойством градиентной инвариантности. В статическом случае это сводится к инвариантности уравнений относительно преобразования $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\varphi$, где φ — любая скалярная функция. Связано это с тем, что физический смысл имеет только магнитное поле $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$. Если же фурье-компонента векторного потенциала явно входит в уравнения, то допустимой является лишь комбинация

$$\mathbf{A}_{\mathbf{q}\perp} = \mathbf{A}_{\mathbf{q}} - \mathbf{q}(\mathbf{q}\mathbf{A}_{\mathbf{q}})/q^2.$$

Действительно, градиентное преобразование в фурье-компонентах имеет вид

$$\mathbf{A}_{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathbf{q}} + i\mathbf{q}\varphi_{\mathbf{q}}.$$

При такой замене $\mathbf{A}_{\mathbf{q}\perp}$ не меняется.

Инвариантность относительно градиентного преобразования обеспечивается в квантовой механике тем, что векторный потенциал входит в гамильтониан в комбинации с оператором импульса $\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}$; добавление градиента к $\mathbf{A}$ может быть компенсировано изменением фазы волновой функции. Ввиду этого нет нужды проверять градиентную инвариантность результирующих уравнений и можно пользоваться той калибровкой $\mathbf{A}$, которая наиболее удобна. Мы будем пользоваться векторным потенциалом, удовлетворяющим условию $\text{div } \mathbf{A} = 0$, или, в фурье-компонентах, $\mathbf{q}\mathbf{A}_{\mathbf{q}} = 0$ (§15.5), ибо при этом вывод упрощается.

Для того чтобы получить явно градиентно-инвариантные уравнения, справедливые при любой калибровке, надо было бы учесть изменение формул преобразования Боголюбова (16.14) под действием поля. Поскольку $u_{\mathbf{p}}$ и $v_{\mathbf{p}}$ являются скалярами, то они могут иметь лишь добавки, пропорциональные $\mathbf{q}\mathbf{A}_{\mathbf{q}}$, т.е. исчезающие при нашей калибровке $\mathbf{q}\mathbf{A}_{\mathbf{q}} = 0$. Если же не накладывать это условие, то в результате получаются те же уравнения, но с заменой $\mathbf{A}_{\mathbf{q}}$ на $\mathbf{A}_{\mathbf{q}\perp}$. Мы не будем проделывать здесь этот сложный вывод, поскольку при выборе правильного исходного гамильтониана результат ясен заранее.

Сделаем замену переменной $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \hbar\mathbf{q}/2$, введем обозначения

$$\xi_{\mathbf{p}+\hbar\mathbf{q}/2} \equiv \xi_+, \quad \xi_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{q}/2} \equiv \xi_-$$

(здесь $\xi = v(p - p_0)$) и аналогичные для других величин. Подставляя в (16.66) значения $u_{\mathbf{p}}$ и $v_{\mathbf{p}}$, согласно (16.19), имеем

$$E_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \sum_{\mathbf{p}} \frac{(\mathbf{p}\mathbf{A}_{\mathbf{q}})(\mathbf{p}\mathbf{A}_{-\mathbf{q}})(\xi_+\xi_- - \xi_+\xi_- - \Delta^2)}{\xi_+\xi_- (\xi_+ + \xi_-)}. \quad (16.67)$$

Соотношение (16.59') в фурье-компонентах имеет вид

$$\delta E = -c^{-1} \sum_{\mathbf{q}} \mathbf{j}_{\mathbf{q}} \delta \mathbf{A}_{-\mathbf{q}}. \quad (16.68)$$

Из (16.65) и (16.66) получаем

$$\mathbf{j}_{\mathbf{q}} = -\frac{2e^2}{mc} \sum_{\mathbf{p}} v_p^2 \mathbf{A}_{\mathbf{q}} + \frac{e^2}{m^2 c} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{p} (\mathbf{p} \mathbf{A}_{\mathbf{q}}) (\varepsilon_+ \varepsilon_- - \xi_+ \xi_- - \Delta^2)}{\varepsilon_+ \varepsilon_- (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)}. \quad (16.69)$$

В первом члене $2 \sum_{\mathbf{p}} v_p^2 = n_e$ — плотность электронов (напоминаем, что нормировочный объем V мы положили равным единице). Это равенство может быть получено, если в выражении для оператора числа частиц (§ 16.4)

$$n_e = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ a_{\mathbf{p}, \sigma} \quad (16.70)$$

произвести преобразование Боголюбова и затем усреднить его по основному состоянию.

Во втором члене предположим $|\mathbf{q}| \ll p_0$. При этом

$$\xi_{\pm} = (2m)^{-1} \left[(\mathbf{p} \pm \hbar \mathbf{q}/2)^2 - p_0^2 \right] \approx \xi \pm (1/2) v \hbar q \cos \theta,$$

где $v = p_0/m$; для вектора $\mathbf{p}$ мы ввели полярные координаты с осью вдоль $\mathbf{q}$ (ось z). В соответствии с нашим выбором $\mathbf{A}_{\mathbf{q}}$ компонента тока вдоль $\mathbf{q}$ отсутствует, и мы найдем j_x (очевидно, $j_x = j_y$). Переходя от $\sum_{\mathbf{p}}$ к $(2\pi\hbar)^{-3} \int d^3\mathbf{p}$, имеем

$$\mathbf{j}_{\mathbf{q}\perp} = -Q(q) \mathbf{A}_{\mathbf{q}\perp}, \quad (16.71)$$

где

$$Q(q) = \frac{n_e e^2}{mc} - (2\pi\hbar)^{-3} \frac{e^2}{m^2 c} \frac{p_0^4}{v} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \frac{\varepsilon_+ \varepsilon_- - \xi_+ \xi_- - \Delta^2}{\varepsilon_+ \varepsilon_- (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)} d\Omega. \quad (16.72)$$

Ввиду того что в интеграле существенны $\xi \sim \Delta$, мы заменили $p \approx p_0$ и перешли от интегрирования по p к интегрированию по ξ , которое можно распространить на интервал $(-\infty, +\infty)$. Не делая дальнейших предположений, можно взять интегралы по φ и по ξ . После этого остается интеграл по $d(\cos \theta)$; обозначим $\cos \theta = t$. В результате имеем

$$\begin{aligned}
Q(q) &= \\
&= \frac{n_e e^2}{mc} \left\{ 1 - \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1-t^2) \left[1 - \frac{4\Delta^2(0)}{\hbar q t v} \frac{\operatorname{arsh}(\hbar q t v / 2\Delta(0))}{[4\Delta^2(0) + (\hbar q t v)^2]^{1/2}} \right] dt \right\} = \\
&= \frac{3n_e e^2 \Delta(0)}{m \hbar q v} \int_0^1 (1-t^2) \frac{\operatorname{arsh}(\hbar q t v / 2\Delta(0))}{[1 + (\hbar q t v / 2\Delta(0))^2]^{1/2}} \frac{dt}{t}. \quad (16.73)
\end{aligned}$$

Интеграл по t в общем случае нельзя взять в явной форме. Поэтому мы ограничимся предельными формулами для больших и малых q .

Выражение $Q(q)$ зависит от комбинации $q\hbar v/\Delta(0)$. Волновой вектор $\mathbf{q}$ характеризует быстроту пространственного изменения поля и тока. Соответствующая характерная длина есть q^{-1} . В физических задачах, очевидно, $q^{-1} \sim \delta$ — глубины проникновения; величина $\xi = \hbar v/\Delta(0)$, как было выяснено в § 16.7, — это корреляционная длина. Итак, ядро Q зависит от отношения δ/ξ . Большому значению этого соотношения соответствует $q \rightarrow 0$. В этом случае из (16.73) находим

$$Q = n_e e^2 / mc. \quad (16.74)$$

Эта формула соответствует лондоновскому пределу (см. § 16.7 и формулу (15.44)).

Наоборот, большие значения q соответствуют пиппардовскому пределу $\delta/\xi \ll 1$. В интеграле (16.73) при этом существенны малые значения t . Пренебрегая t^2 по сравнению с единицей и вычисляя интеграл, получаем

$$Q(q) \approx (3\pi^2/4)(n_e e^2 / mc) (\Delta(0)/\hbar v) q^{-1}. \quad (16.75)$$

Эта формула соответствует концепции неэффективности. Действительно, считая $q^{-1} \sim \delta$, мы видим, что формула (16.75) отличается от (16.74) заменой n_e на $n_e \delta/\xi$.

В координатном пространстве связь $\mathbf{j}(\mathbf{q}) = -Q(\mathbf{q}) \mathbf{A}(\mathbf{q})$ выражается формулой (16.57). При $\xi \gg \delta$ связь существенно нелокальная, ибо поле $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$ быстро меняется на расстояниях, характерных для ядра $Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. При этом, строго говоря, нельзя пользоваться полученными выше результатами, ибо мы нашли Q для бесконечного пространства, в то время как в задаче о проникновении поля металл имеет поверхность, т. е., скажем, занимает полупространство $x > 0$. В таких задачах необходимо поставить граничное условие для электронов.

Самым простым таким условием оказывается условие зеркального отражения от границы. В этом случае, как и для аномального скин-эффекта, можно пользоваться ядром Q для бесконечного пространства, но при этом надо продлить векторный потенциал четным образом через границу (§ 7.3). Если магнитное поле направлено параллельно

поверхности металла вдоль оси z , то можно выбрать $A_y(x)$ вдоль оси y . В силу вышесказанного $A_y(x) = A_y(-x)$.

Согласно уравнению Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = (4\pi/c) \mathbf{j}.$$

Первый член в левой части равен нулю, так как $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Продолжение векторного потенциала четным образом через границу означает излом кривой $A_y(x)$. Следовательно, если на поверхности металла задано поле H_0 , т. е. $(dA_y/dx)_{x=+0} = H_0$, то $(dA_y/dx)_{x=-0} = -H_0$. При этом вторая производная $d^2 A_y/dx^2$ получает добавку: $2H_0 \delta(x)$. Итак, имеем

$$d^2 A_y/dx^2 = 2H_0 \delta(x) - (4\pi/c) j. \quad (16.76)$$

Переходя к фурье-компонентам, подставляя (16.71) и решая полученное уравнение, находим

$$A_q = -2H_0 \left[q^2 + (4\pi/c) Q(q) \right]^{-1}. \quad (16.77)$$

В координатном представлении имеем

$$A(x) = -\frac{2H_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos qx \, dq}{q^2 + (4\pi/c) Q(q)} \quad (16.78)$$

(здесь было учтено, что Q зависит лишь от $|\mathbf{q}|$). Дифференцируя по H , находим магнитное поле ¹⁾:

$$H(x) = \frac{2H_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{q \sin qx \, dq}{q^2 + (4\pi/c) Q(q)}. \quad (16.79)$$

Мы не будем анализировать поведение поля в общем случае, а найдем лишь глубину проникновения, которую определим как

$$\delta = H_0^{-1} \int_0^\infty H \, dx = -\frac{A(0)}{H_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{q^2 + (4\pi/c) Q(q)}. \quad (16.80)$$

Предположим, что в интеграле существенны малые q . При этом $Q(q)$ имеет вид (16.74) и мы получаем из интеграла лондоновскую глубину проникновения:

$$\delta_L = (mc^2/4\pi n_e e^2)^{1/2}. \quad (16.81a)$$

¹⁾ Для получения поля H на поверхности нельзя положить $x = 0$ под интегралом, а надо вычислить его для малого $x > 0$ и лишь после этого устремить $x \rightarrow 0$.

Отметим, что в интеграле существенны $q \sim \delta^{-1}$, следовательно, наш расчет верен при $\delta \gg \hbar v / \Delta \sim \xi$.

В противоположном предельном случае подставим Q из (16.75). Вычисляя интеграл, находим

$$\begin{aligned} \delta_P &= 4 \cdot 3^{-11/6} \pi^{-1} (mc^2 / n_e e^2)^{1/3} (\hbar v / \Delta(0))^{1/3} = \\ &= 2^{8/3} 3^{-11/6} \pi^{-2/3} \delta_L^{2/3} (\hbar v / \Delta(0))^{1/3}. \end{aligned} \quad (16.81\text{б})$$

Эта формула соответствует оценке для пиппардовского случая (16.58), приведенной в § 16.7.

При переходе к координатному представлению (16.57) в общем случае существенно, что ядро $Q(\mathbf{q})$ связывает лишь поперечные компоненты $\mathbf{j}$ и $\mathbf{A}$ (см. (16.71)), т.е., строго говоря, надо заменить $Q(q)$ на $Q(q)(\delta_{ik} - q_i q_k / q^2)$. Для пиппардовского предельного случая это приводит к следующей форме для $Q_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ в формуле (16.57):

$$Q_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = (3/4)(n_e e^2 / mc)(\Delta(0) / \hbar v) n_i n_k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-2}, \quad (16.71')$$

где $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}') / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

§ 16.9. Связь между током и полем при конечных температурах (лондоновский предел)

Мы не будем разбирать общий случай при конечных температурах ввиду его сложности. Отметим лишь следующее. При повышении температуры в ядре $Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, осуществляющем связь между током и полем (16.57), роль корреляционной длины постепенно переходит от $\hbar v / \Delta(0)$ к $\hbar v / T$. Ввиду того что $\Delta(0) \sim T_c$, при всех температурах корреляционная длина имеет порядок $\hbar v / T_c$. Обычно пользуются стандартной корреляционной длиной, равной

$$\xi_0 = \hbar v / \pi \Delta(0) = (\gamma / \pi^2) \hbar v / T_c = 0,18 \hbar v / T_c. \quad (16.82)$$

В § 15.1 отмечалось, что глубина проникновения δ неограничено возрастает при $T \rightarrow T_c$. Это же будет получено ниже. Но отсюда вытекает, что даже если при $T = 0$ $\delta(0) \ll \xi_0$, то при $T \rightarrow T_c$ $\delta(T)$ рано или поздно превзойдет ξ_0 . При этом возникает лондоновская ситуация, т.е. фурье-компонента ядра $Q(q)$ может быть заменена на $Q(0)$. Итак, вычисление $Q(0)$ при конечной температуре дает возможность установить связь между током и полем при всех температурах для лондоновских сверхпроводников, у которых $\delta(0) \gg \xi_0$, и при температуре в окрестности T_c для пиппардовских сверхпроводников, у которых $\delta(0) \ll \xi_0$ (и, конечно, для промежуточных, у которых $\delta(0) \sim \xi_0$).

Можно, как и раньше, найти $E\{\mathbf{A}\}$ по теории возмущений, а затем, проварьировав по $\mathbf{A}$, вычислить ток. Однако искомый результат можно получить гораздо проще. При конечных температурах часть

куперовских пар разрывается и появляются квазичастицы. Последние взаимодействуют с примесями и фононами, а поэтому не вносят вклад в сверхпроводящий ток. Следовательно, эффективное число электронов, входящее в формулу (15.44) или совпадающую с ней (16.74), должно начать уменьшаться, т. е. это число заменяется на некоторую функцию $n_s(T)$, которая до появления микроскопической теории называлась «числом сверхпроводящих электронов». Замена n_e на $n_s(T)$ в лондоновской теории давала возможность качественно объяснить температурную зависимость глубины проникновения. Мы определим эту величину количественно.

Представим себе, что все квазичастицы движутся со скоростью $\mathbf{u}$. В этом случае аргументом функции распределения будет не $\varepsilon(\mathbf{p})$, а $\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{u}$. Движение квазичастиц приведет к появлению импульса $\mathbf{P}$, равного

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{p}(n_{\mathbf{p},+} + n_{\mathbf{p},-}) \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = 2 \int \mathbf{p} n_F(\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{u}) \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}$$

(n_F — функция Ферми). Считая $\mathbf{u}$ малым и разлагая по $\mathbf{u}$, получаем

$$\mathbf{P} = -2 \int \mathbf{p}(\mathbf{p}\mathbf{u}) \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (16.83)$$

Преобразуем интеграл по $d^3\mathbf{p}$ в интеграл по $d\xi$ и по телесному углу, как это делалось в части I книги. При этом, однако, надо учесть, что ε не совпадает с ξ — энергией нормального металла. Имеем

$$2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \rightarrow \nu(\mu) \int d\xi \int \frac{d\Omega}{4\pi}.$$

Мы здесь учли, что интеграл берется по окрестности поверхности Ферми. Это же дает возможность считать в (16.83) $|\mathbf{p}| = p_0$. Интегрируя по телесному углу, получаем

$$\int \mathbf{p}(\mathbf{p}\mathbf{u}) \frac{d\Omega}{4\pi} \approx \frac{1}{3} p_0^2 \mathbf{u}.$$

Подставляя $\varepsilon = (\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}$ и вводя новую переменную $\xi = \Delta \operatorname{sh} \varphi$, находим (мы учли быстрое убывание интеграла при увеличении $|\xi|$ и заменили пределы интегрирования на $-\infty, \infty$)

$$\mathbf{P} = \frac{2}{3} p_0^2 \mathbf{u} \nu(\mu) \frac{\Delta}{T} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \varphi d\varphi}{(e^{\Delta \operatorname{ch} \varphi / T} + 1)(e^{-\Delta \operatorname{ch} \varphi / T} + 1)}.$$

Коэффициент пропорциональности между $\mathbf{P}$ и $m\mathbf{u}$ назовем числом «нормальных электронов» n_n . Подставляя $\nu(\mu) = p_0 m / \pi^2 \hbar^3$ и учитывая,

что полное число электронов есть $n_e = p_0^3/3\pi^2\hbar^3$, получаем

$$\frac{n_n}{n_e} = 2 \frac{\Delta}{T} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \varphi d\varphi}{(e^{\Delta \operatorname{ch} \varphi/T} + 1)(e^{-\Delta \operatorname{ch} \varphi/T} + 1)}. \quad (16.84)$$

Если сделать ту же замену переменных в формуле (16.27), то получим

$$\ln \frac{\Delta(0)}{\Delta(T)} = 2 \int_0^\infty \frac{d\varphi}{e^{\Delta \operatorname{ch} \varphi/T} + 1}. \quad (16.85)$$

Дифференцируя по температуре, имеем

$$\Delta^{-1} \frac{d\Delta}{dT} = 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \varphi d\varphi}{(e^{\Delta \operatorname{ch} \varphi/T} + 1)(e^{-\Delta \operatorname{ch} \varphi/T} + 1)} \frac{d}{dT} \left(\frac{\Delta}{T} \right).$$

Сравнивая с (16.84), находим

$$\frac{n_n}{n_e} = T^{-1} \frac{d\Delta}{dT} \left(\frac{d}{dT} \frac{\Delta}{T} \right)^{-1}. \quad (16.86)$$

Эта величина при $T = T_c$ равна единице (что видно из того, что $\Delta \propto (T_c - T)^{1/2}$), но при $T < T_c$ она меньше единицы. Следовательно, в противоположность нормальному металлу перемещение одних лишь квазичастиц не соответствует перемещению всей электронной жидкости. Остающаяся часть электронов и есть искомое «число сверхпроводящих электронов». Итак,

$$\frac{n_s}{n_e} = 1 - \frac{n_n}{n_e} = - \left[\frac{d \ln(\Delta/T)}{d \ln T} \right]^{-1}. \quad (16.87)$$

Именно это число и фигурирует в ядре $Q(T)$ вместо n_e .

Итак, в лондоновской ситуации при $T \neq 0$ имеем

$$Q = n_s e^2 / mc. \quad (16.88)$$

Этот же результат получается путем более длинных вычислений, аналогичных вычислениям §16.8. Из (16.88) следует, что глубина проникновения вместо (15.41) выражается формулой

$$\delta = (mc^2/4\pi n_s e^2)^{1/2}. \quad (16.89)$$

Рассмотрим предельные случаи.

При $T \ll T_c$ с помощью формулы (16.30) получаем

$$n_s/n_e \approx 1 - [2\pi\Delta(0)/T]^{1/2} e^{-\Delta(0)/T}, \quad (16.90)$$

$$\delta_L(T) \approx \delta_L(0) \left\{ 1 + [\pi\Delta(0)/2T]^{1/2} e^{-\Delta(0)/T} \right\}. \quad (16.91)$$

При $T_c - T \ll T_c$ из (16.33) находим

$$n_s/n_e \approx 2(T_c - T)/T_c, \quad (16.92)$$

$$\delta_L(T) \approx \delta_L(0)[T_c/2(T_c - T)]^{1/2}. \quad (16.93)$$

В заключение заметим следующее. Хотя в пределе $T \rightarrow T_c$ все сверхпроводники становятся лондоновскими и их глубина проникновения описывается полученными выше формулами, но если при $T = 0$ $\Delta_L(0) \ll \xi_0$, то переход к лондоновскому пределу осуществляется лишь в очень близкой окрестности T_c . Для таких сверхпроводников практически во всей области температур имеет место пиппардовская ситуация; в частности, она сохраняется и при $T_c - T \ll T_c$, например, для алюминия лондоновский предел наступает лишь при $1 - T/T_c \sim 10^{-3}$. Полный вывод для пиппардовского случая, который мы не приводим, дает результат, качественно похожий на формулу (16.81 б) для $T = 0$ с заменой $\delta_L(0)$ на $\delta_L(T)$. Следовательно, при $T \rightarrow T_c$

$$\delta_P(T) \sim \delta_P(0)(1 - T/T_c)^{-1/3}.$$

Полная формула имеет вид

$$\delta_P(T) = \delta_P(0) \left[\frac{\Delta}{\Delta(0)} \operatorname{th} \left(\frac{\Delta}{2T} \right) \right]^{-1/3}. \quad (16.94)$$

§ 16.10. Сверхпроводящая корреляция и поверхностная энергия. Два рода сверхпроводников. Роль примесей

Понятие корреляционной длины, введенное в предыдущих разделах, объясняет поверхностную энергию на границе между нормальной и сверхпроводящей фазами, которая была предположена Л. Д. Ландау в теории промежуточного состояния (§15.3). Представим себе плоскую границу между нормальной и сверхпроводящей фазами, возникающую в промежуточном состоянии. Рассмотрим, как меняется Δ и магнитное поле в окрестности этой границы ¹⁾. Сверхпроводящая корреляция не позволяет Δ меняться скачком, ибо состояния электронов коррелированы на расстоянии порядка $\xi(T) = \hbar v / \Delta(T)$. Следует отметить, что детальная теория приводит к несколько различным корреляционным длинам для разных величин. В § 16.8 уже говорилось, что в электродинамике это ξ_0 (16.82), т. е. величина, не зависящая от температуры. Характерная длина, на которой меняется Δ — это $\xi(T) = \hbar v / \Delta(T)$. Различие сказывается вблизи T_c , где $\xi(T) \rightarrow \infty$.

¹⁾ Излагаемое ниже рассуждение принадлежит Пиппарду [165].

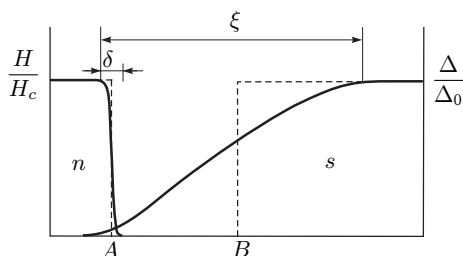


Рис. 16.5

ное H_c . Поле затухает в глубь сверхпроводящей фазы на расстоянии δ . На рисунке изображена пиппардовская ситуация, соответствующая $\xi \gg \delta$.

Для удобства рассуждений заменим истинную картину условной с резкими границами по H (штриховая линия A) и по Δ (штриховая линия B), проведенными так, чтобы сохранялись полная свободная энергия и среднее поле. Тогда возникает область AB порядка ξ , в которой, с одной стороны, $\Delta = 0$, что соответствует нормальной фазе, а с другой стороны, отсутствует магнитное поле. Учитывая, что $F_n - F_s = H_c^2/8\pi$, получаем избыток энергии, равный $H_c^2/8\pi$ на каждый кубический сантиметр области AB . Но нас интересует избыточная энергия на 1 см² площади границы. Она равна $[H_c^2/8\pi] \cdot AB$, т. е.

$$\sigma_{ns} \sim \xi H_c^2/8\pi$$

(именно такой параметр ξ мы вводили в § 15.3 вместо σ_{ns}).

Как уже отмечалось, изложенный вывод, равно как и рис. 16.5, относится к пиппардовскому случаю: $\xi \gg \delta$. Если же, наоборот, $\delta \gg \xi$, то таким же образом мы находим, что на границе возникает отрицательная поверхностная энергия порядка $-\delta H_c^2/8\pi$. Естественно, это имеет место и при $\xi = 0$, т. е. в лондоновской теории. Невозможность объяснить происхождение положительной поверхностной энергии в рамках лондоновской теории долгое время считалась одним из ее главных недостатков.

Оказалось, что в действительности существуют сверхпроводники с отрицательной поверхностной энергией. Эти сверхпроводники обладают совершенно необычным поведением в магнитном поле, которое будет детально изложено в следующей главе. Существование таких сверхпроводников было впервые предположено *Абрикосовым* и *Заварицким* (1952) [166, 167] на основании анализа экспериментальных данных о критических полях тонких сверхпроводящих пленок, полученных разными методами. Эти сверхпроводники были названы сверхпроводниками второй группы. В настоящее время общепринято название «сверхпроводники 2-го рода» или «2-го типа». Соответственно,

Итак, в области соприкосновения нормальной и сверхпроводящей фаз Δ меняется, как показано на рис. 16.5. С другой стороны, равновесие между нормальной и сверхпроводящей фазами может иметь место, только если в нормальной фазе имеется магнитное поле, рав-

обычные сверхпроводники с $\sigma_{ns} > 0$ называются сверхпроводниками 1-го рода.

Поскольку знак поверхностной энергии определяется соотношением между глубиной проникновения δ и корреляционной длиной ξ , то естественно производить классификацию сверхпроводников по отношению δ/ξ . Особенно привлекательным является то обстоятельство, что при $T \rightarrow T_c$ это отношение стремится к константе, ибо и $\delta(T)$, и $\xi(T)$ зависят от температуры по закону $(T_c - T)^{-1/2}$. Точная граница между сверхпроводниками 1-го и 2-го рода определяется условием $\kappa = 1/\sqrt{2}$, где при $T \rightarrow T_c$, согласно [168] (см. вывод в гл. 17),

$$\kappa(T_c) = [24/7\zeta(3)]^{1/2} (\gamma/\pi) \delta_L(0)/\xi_0 = 0,96 \delta_L(0)/\xi_0. \quad (16.95)$$

Величина κ впервые была введена в теории Гинзбурга и Ландау и получила название параметра Гинзбурга–Ландау. Итак, в окрестности T_c имеем

$$\begin{aligned} \kappa < 1/\sqrt{2}, \quad \sigma_{ns} > 0 & \text{ — сверхпроводники 1-го рода,} \\ \kappa > 1/\sqrt{2}, \quad \sigma_{ns} < 0 & \text{ — сверхпроводники 2-го рода.} \end{aligned} \quad (16.96)$$

Это условие можно распространить и на температуры, далекие от T_c . Для этого надо считать κ зависящей от температуры:

$$\kappa(T) = \kappa(T_c) A(T). \quad (16.97)$$

Расчет показывает, что функция $A(T)$ мало меняется с температурой. Ее график изображен на рис. 16.6 [169].

Среди чистых металлов истинные сверхпроводники 2-го рода, по-видимому, не встречаются. Однако существует способ, посредством которого любой сверхпроводник 1-го рода можно превратить в сверхпроводник 2-го рода. Для этого надо ввести примеси.

Рассеяние на примесях прежде всего нарушает сверхпроводящую корреляцию¹⁾.

Действительно, представим себе электрон, движущийся в поле примесей. Он совершает диффузионное движение с длиной свободного пробега l и скоростью v ; его среднее смещение будет порядка (§ 3.5)

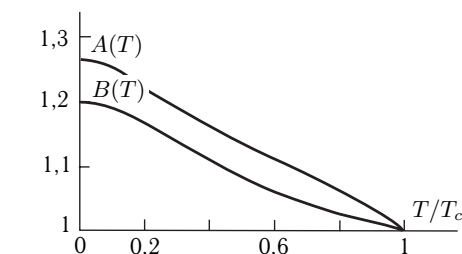


Рис. 16.6

$$x \sim (Dt)^{1/2},$$

¹⁾ Проводимая ниже оценка относится к температурам, далеким от T_c .

где D — коэффициент диффузии, имеющий порядок $D \sim lv$. Но полная длина пути электрона есть tv . Если взять $tv \sim \xi$, то

$$x \sim \xi' \sim (lv\xi/v)^{1/2} \sim (\xi l)^{1/2}. \quad (16.98)$$

Иными словами, эффективная корреляционная длина уменьшается и становится равной ξ' . Конечно, все это рассуждение справедливо лишь до тех пор, пока $\xi \gg l$. Если же $l \gg \xi$, то рассеяние на примесях практически не влияет на сверхпроводящую корреляцию.

Введение примесей меняет и глубину проникновения. В случае когда $l \ll \xi$, можно довольно просто оценить измененную величину δ' . Наличие конечной длины свободного пробега приводит к появлению в ядре $Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ затухания на расстоянии l , которое можно учесть, введя множитель $f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/l)$. Фурье-компонента произведения функций $Q_0(\mathbf{r})f(\mathbf{r})$ равна, как легко увидеть,

$$(2\pi)^{-3} \int Q_0(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1) f(\mathbf{q}_1) d^3\mathbf{q}_1$$

(Q_0 относится к чистому металлу). В нашем случае характерной длиной для $f(\mathbf{r})$ является l , а следовательно, для ее фурье-компоненты характерные значения $q_1 \sim l^{-1}$. Масштабом ядра $Q_0(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1)$ является ξ^{-1} . Если $l \ll \xi$, то $q_1 \xi \sim \xi/l \gg 1$, т. е. аргумент у Q_0 большой и надо пользоваться пиппардовским пределом (16.75).

При дальнейшем вычислении существенны $q \sim \delta^{-1}$. Если $\delta/l \ll 1$, то $q \gg q_1$. При этом

$$(2\pi)^{-3} \int Q_0(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1) f(\mathbf{q}_1) d^3\mathbf{q}_1 = \frac{Q_0(q)}{(2\pi)^3} \int f(\mathbf{q}_1) d^3\mathbf{q}_1.$$

Последний интеграл есть $f(\mathbf{r})$ при $\mathbf{r} = 0$, т. е. единица. Таким образом, воспроизводится формула (16.75). Если же $\delta/l \gg 1$, то $q \ll q_1$. В этом случае

$$(2\pi)^{-3} \int Q_0(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1) f(\mathbf{q}_1) d^3\mathbf{q}_1 \approx (2\pi)^{-3} \int Q_0(\mathbf{q}_1) f(\mathbf{q}_1) d^3\mathbf{q}_1 \sim \frac{n_e e^2}{mc} \frac{l}{\xi}$$

(мы подставили для Q_0 выражение (16.75)). Так как результирующее ядро не зависит от q , то имеем лондоновскую ситуацию. При этом глубина проникновения есть $\delta = (4\pi Q/c)^{-1/2}$. Таким образом, находим

$$\delta' \sim \delta_L (\xi/l)^{1/2}. \quad (16.99)$$

Следовательно, в присутствии примесей

$$\kappa \sim \delta'/\xi' \sim \delta_L/l.$$

Значения, даваемые точной теорией при $l \ll \xi$, есть [170–172]¹⁾

$$\delta(T) = \left[\frac{mc^2 \hbar}{4\pi n_e e^2 \tau_{tr} \Delta \operatorname{th}(\Delta/2T)} \right]^{1/2}, \quad (16.100)$$

$$\tau_{tr}^{-1} = \frac{1}{4\pi} \int W(\theta) (1 - \cos \theta) d\Omega, \\ \varkappa(T) = \varkappa(T_c) B(T), \quad l = v \tau_{tr}, \quad (16.101)$$

$$\varkappa(T_c) = [42\zeta(3)]^{1/2} \pi^{-2} \delta_L(0)/l = 0,72 \delta_L(0)/l.$$

График функции $B(T)$ тоже изображен на рис. 16.6. Именно это значение $\varkappa$ надо подставлять в критерий (16.97).

В промежуточных случаях $\xi \sim l$ можно пользоваться интерполяцией

$$\varkappa(T) \approx \delta_L(0) [0,96 A(T) \xi_0^{-1} + 0,72 B(T) l^{-1}]. \quad (16.102)$$

При $\xi_0^{-1} l \gg 1$ это выражение переходит в (16.97), (16.95), а при $\xi_0^{-1} l \ll 1$ — в (16.101).

Из изложенного можно сделать вывод, что, уменьшая длину пробега, т.е. увеличивая концентрацию примесей ($l \propto n_i^{-1}$, § 4.1), можно увеличить $\varkappa$ и сделать любой сверхпроводник 1-го рода сверхпроводником 2-го рода.

Может, однако, возникнуть следующий вопрос: как влияют примеси на Δ , T_c и другие термодинамические характеристики сверхпроводника. Исследование этого вопроса показывает [170, 173], что изменение всех величин имеет порядок a/l , где a — атомные размеры. Учтя, что $l \sim (n_i a^2)^{-1} \sim (c_i n a^2)^{-1} \sim a/c_i$, находим (§ 4.1), что поправки к термодинамическим величинам имеют относительный порядок c_i — атомной концентрации примесей. Следовательно, пока $c_i \ll 1$, эти поправки малы, в противоположность поправке к δ , которая имеет относительный порядок $\delta/l \sim 10^2$ – $10^3 c_i$. Малость поправок к термодинамическим величинам является следствием того факта, что они определяются локальными свойствами сверхпроводника, т.е. свойствами в данной точке, и не связаны с движением электронов из одной точки в другую. Очевидно, что любое затухание типа $\exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/l)$ при $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ становится неэффективным. Что же касается локальных свойств, то они определяются плотностью состояний, которая изменится лишь на величину порядка c_i ²⁾.

¹⁾ Здесь $W(\theta)$ — введенная в § 3.2 вероятность рассеяния электрона на примеси, а τ_{tr} — соответствующее время столкновений (ранее оно было обозначено через τ ; мы пользуемся здесь обозначением τ_{tr} , принятым в литературе).

²⁾ Приведенное рассуждение справедливо для изотропной модели, однако для анизотропного сверхпроводника дело обстоит иначе. В этом случае

Конечно, если $c_i \sim 1$, то все величины могут сильно измениться, но в этом случае мы уже имеем дело с другим веществом.

Сверхпроводящая корреляция помогает понять еще один результат. В § 16.6 была вычислена теплоемкость, причем оказалось, что при T_c она имеет скачок, но не имеет особенностей. Такое поведение теплоемкости связано с тем, что мы не учли флуктуации (приложение II). Однако в данном случае у нас есть основания предполагать, что флуктуационная область соответствует чрезвычайно малой окрестности T_c . В приложении II показано, что размер этой области определяется отношением среднего расстояния между частицами к корреляционной длине вдали от T_c . В рассматриваемом случае это отношение имеет порядок

$$\frac{\hbar/p_0}{\hbar v/T_c} \sim \frac{T_c}{p_0 v} \sim \frac{T_c}{\mu} \sim 10^{-4},$$

т. е. очень мало. Точный размер флуктуационной области будет установлен в § 17.1.

§ 16.11. Проблема высокотемпературной сверхпроводимости

Как уже говорилось в § 15.1, наивысшая критическая температура, достигнутая к настоящему времени, равна 23 К для Nb_3Ge . Однако этот сплав не является удовлетворительным по своим механическим свойствам. «Технологическими» сверхпроводящими сплавами являются Nb_3Sn ($T_c = 17\text{--}18$ К), $\text{Nb}\text{--}\text{Zr}\text{--}\text{Ti}$ ($T_c = 9\text{--}11$ К). Для поддержания таких низких температур необходимо пользоваться специальными криостатами с жидким гелием (точка кипения при атмосферном давлении 4,2 К). Тем не менее, как мы увидим в дальнейшем, явление сверхпроводимости уже имеет практические применения несмотря на сложности, связанные с охлаждением, ибо некоторые важные для практики свойства имеются только у сверхпроводников и их нельзя заменить другими материалами.

Нетрудно понять, какую техническую революцию произвели бы вещества, сверхпроводящие при комнатной температуре. В первую очередь сюда относится возможность создания линий, передающих

рассеяние электронов на примесях перемешивает компоненты волновой функции куперовской пары, соответствующие разным значениям импульса, т. е. разным Δ . Это приводит к уменьшению энергии связи пары и к изменению всех термодинамических величин. Точная теория [174] показывает, что относительные поправки имеют порядок $\left[(\Delta(\mathbf{n}) - \bar{\Delta})^2 / \bar{\Delta}^2 \right] \xi_0 / l$. Поскольку в реальных сверхпроводниках анизотропия мала $\left((\Delta(\mathbf{n}) - \bar{\Delta})^2 / \bar{\Delta}^2 \lesssim 1\% \right)$, то эти поправки фактически мало отличаются от поправок для изотропного сверхпроводника, имеющих порядок c_i .

электроэнергию на любое расстояние без потерь. Был бы полностью решен вопрос об аккумуляции энергии в малых объемах, а тем самым о переводе всего транспорта, использующего нефтепродукты, на электродвигатели. Можно представить себе и множество других перспектив. Однако пока такие вещества не найдены.

Ясно, что вопрос о повышении критической температуры сверхпроводящего перехода имеет первостепенное значение. Даже достижение температур $T_c > 30\text{--}40$ К дало бы возможность перейти к криостатам с жидким водородом, что существенно удешевило бы и сделало экономически более выгодным применение сверхпроводников и, следовательно, очень расширило бы область таких применений. «Высокотемпературную» сверхпроводимость с $T_c = 39$ К обнаружили впервые у лантанового купрата в 1986 г. *Беднорц* и *Мюллер*. Мы не собираемся подробно излагать здесь все существующие на этот счет идеи (многое можно найти в [175, 303–305], но обсудим некоторые основные моменты.

Начнем с более детального обсуждения уже известных взаимодействий между электронами: кулоновского отталкивания и фононного притяжения; затем рассмотрим «квазифононные» механизмы взаимодействия электронов и, наконец, перейдем к нефононным, или так называемым «экситонным», механизмам взаимодействия. В заключение обсудим вопрос о возможности получения больших критических магнитных полей.

Формула для критической температуры (16.25) была найдена в теории БКШ. Она учитывала лишь электрон-фононное взаимодействие, причем в упрощенной форме. Более детальная формула найдена *Макмилланом* [176] при помощи точного рассмотрения электрон-фононного взаимодействия и учета кулоновского отталкивания; она имеет вид

$$T_c = \frac{\hbar\omega_D}{1,45} \exp \left[-\frac{1,04(1+\lambda)}{\lambda - \mu^*(1+0,62\lambda)} \right], \quad (16.103)$$

где λ характеризует электрон-фононное взаимодействие (λ соответствует $g\nu/2$ в упрощенной теории), а μ^* характеризует электрон-электронное отталкивание. Поскольку кулоновское взаимодействие экранируется на межатомных расстояниях, то его можно считать точечным и описывать константой μ . Величина μ^* связана с этой константой ¹⁾ соотношением

$$\mu^* = \frac{\mu}{1 + \mu \ln(\varepsilon_F/\hbar\omega_D)}. \quad (16.104)$$

¹⁾ Мы пользуемся здесь обозначением μ для безразмерной константы кулоновского взаимодействия ($\mu \sim e^2/\hbar v$), поскольку оно общепринято в литературе. Его не следует путать с химическим потенциалом, который здесь будет обозначаться как ε_F .

Большой логарифм в знаменателе является следствием разных радиусов действия кулоновского отталкивания ($r_c \sim a \sim \hbar/p_0 \sim \hbar v/\varepsilon_F$) и фоновонного притяжения ($r_{ph} \sim v/\omega_D$); $r_c/r_{ph} \sim \hbar\omega_D/\varepsilon_F \ll 1$. Для $\lambda \ll 1$ и $\mu^* = 0$ формула (16.103) принимает вид, близкий к (16.25).

Поскольку λ и μ^* входят в показатель экспоненты, то ясно, что эти константы представляют интерес в первую очередь. Константа кулоновского взаимодействия μ формально порядка единицы. Однако μ^* , входящее в T_c , согласно (16.104) ослаблено большим логарифмом. Оценки дают $\mu^* \sim 0,1-0,2$. Что касается константы λ , то она тоже формально порядка единицы. Однако надо учесть, что электрон-фоновонное взаимодействие в конечном итоге происходит от взаимодействия электронов с ионами, которое описывается малым псевдопотенциалом. Поэтому обычно λ не достигает единицы. В целом разность $\lambda - \mu^*(1 + 0,62\lambda)$, входящая в (16.103), может быть любого знака, однако, по-видимому, вещества, у которых эта разность близка к нулю, редки. При относительно малых λ вещество не является сверхпроводником, а при относительно больших λ , можно пренебречь членом с μ^* .

В действительности ситуация, по всей вероятности, более сложная. Силы взаимодействия между электронами на больших расстояниях, по-видимому, всегда соответствуют притяжению. При этом могут образовываться куперовские пары с отличным от нуля орбитальным моментом (конечно, если речь идет об изотропной модели; в анизотропном случае нет сохраняющегося орбитального момента, но есть другая аналогичная классификация состояний, так что качественные выводы не меняются). Энергия связи таких пар мала, так что малым будет и T_c . Тем не менее это рассуждение приводит к выводу, что при достаточно низких температурах любой чистый металл станет сверхпроводником.

Поэтому разумно сосредоточить внимание на константе λ . Эта константа определяет не только критическую температуру, но и значение электрического сопротивления, происходящего от рассеяния электронов на фононах. Поскольку при комнатной температуре этот механизм доминирует над другими, то возникает парадоксальное следствие: плохие проводники (при комнатной температуре) являются хорошими сверхпроводниками (т.е. имеют высокие T_c). Примерами могут служить Pb (ρ (18 °C) = $20,8 \cdot 10^{-6}$ Ом·см, $T_c = 7,2$ К) и Al (ρ (18 °C) = $3,2 \cdot 10^{-6}$ Ом·см, $T_c = 1,2$ К). Если в формуле (16.103) считать $\mu^* = 0$, то T_c монотонно растет с увеличением λ , но даже при $\lambda \rightarrow \infty$ T_c не может стать больше, чем $\hbar\omega_D/4$. Это было бы неплохо, если учесть, что у металлов $\hbar\omega_D \sim 10^2-10^3$ К. Тем не менее в действительности, как уже говорилось, λ всегда невелико¹⁾. Высказывалась идея

¹⁾ В ранних работах малость $T_c/\hbar\omega_D$ связывалась с тем фактом, что при большом электрон-фоновонном взаимодействии в так называемой модели Фрелиха (она соответствует принятому нами изложению в §4.3) возникает неустойчивость решетки. Более тщательное исследование показывает, что

о том, что λ может сильно возрасти, если решетка близка к структурному переходу. Однако, по-видимому, эта идея не подтверждается.

Наряду с увеличением λ можно думать и об увеличении $\hbar\omega_D$. Учитывая, что

$$\hbar\omega_D \sim sp_0 \sim \varepsilon_F(m/M)^{1/2},$$

где M — масса иона, надо стремиться к уменьшению этой массы.

Уникальную возможность в этом отношении мог бы представить твердый водород, если бы он был металлом. К сожалению, в обычных условиях твердый водород представляет собой диэлектрический кристалл, состоящий из молекул H_2 . Теоретические расчеты показывают, что при увеличении давления должен произойти фазовый переход молекулярного водорода в атомарную фазу, аналогичную щелочным металлам. Давление перехода очень велико, порядка 2,5 Мбар.

Конечно, создать и поддерживать такое давление трудно и непрактично. Существует, однако, вероятность того, что ввиду большой разницы удельных объемов молекулярной и атомарной фаз последняя может сохраниться и при снятии давления в виде метастабильной фазы (как, например, алмаз, являющийся в обычных условиях метастабильной фазой углерода). Предлагались также разные способы получения непосредственно металлического водорода из газовой фазы без применения высоких давлений (адсорбция на углероде, конденсация в сильном магнитном поле и др.). Однако пока вопрос о существовании метастабильной металлической фазы и возможности ее получения без давления неясен.

Трудность расчетов для твердого водорода связана с тем, что в отличие от всех остальных элементов его ионы не имеют электронных оболочек и являются просто протонами. Ввиду этого для водорода псевдопотенциал совпадает с реальным кулоновским потенциалом и не является малым (§ 14.2). Обычно расчеты металлического водорода основываются на приближении сильно сжатого вещества (§ 14.4). Однако получаемые при этом ряды сходятся недостаточно быстро, так что не удается выбрать наиболее энергетически выгодную структуру и решить вопрос о возможности метастабильного состояния. В то же время сильное электрон-ионное взаимодействие означает и сильное электрон-фононное взаимодействие, что может привести к некоторому увеличению λ в формуле (16.103). Весьма предварительные расчеты приводят к $T_c \sim 100\text{--}200\text{ К}$ [177].

Высказывалась идея об обходе трудностей, связанных с получением металлического водорода, посредством создания гидридов, т.е. соединений металлов с водородом. В фононном энергетическом спектре таких веществ возможны ветви, соответствующие в основном колебаниям протонов и обладающие высокими частотами. Однако гидриды

это не приводит к реальному ограничению T_c . К тому же само заключение о неустойчивости решетки вызывает возражения.

являются диэлектриками. Поэтому были предприняты попытки использовать хорошую растворимость водорода в некоторых металлах, особенно в платине. Поскольку естественная растворимость все же недостаточна, то путем специальных методов создавались метастабильные твердые растворы с повышенной концентрацией водорода. Хотя эти вещества были сверхпроводниками, но они имели $T_c < 10$ К. Возможно, что взаимодействие электронов с высокочастотными колебаниями протонов по каким-то причинам является слабым.

Существует еще одна теоретическая возможность, использующая, по сути дела, те же преимущества, которыми обладает металлический водород (Абрикосов, 1978) [178]. Речь идет о создании вещества, которое можно назвать «металлический экситоний». Представим себе четный металл, содержащий равное число электронов и дырок. Если в силу особенностей энергетического спектра масса дырок будет значительно больше массы электронов ¹⁾, то их потенциальная энергия превзойдет их кинетическую энергию. При этом дырки станут классическими объектами и образуют периодическую сверхструктуру, т.е. «решетку в решетке» (Херринг, 1968; см. в [179]). Периоды такой сверхструктуры определяются плотностью электронов и дырок и не обязаны совпадать с периодами основной решетки. Для устойчивости дырочной решетки нужно, чтобы амплитуда нулевых колебаний дырок была значительно меньше (не более 1/5) периода решетки, а это приводит к требованию $m_h^*/m_e^* > 50$. Если к тому же m_e^* меньше массы свободного электрона m , то отношение m_h^*/m не должно быть очень большим.

В результате получается «вещество», очень напоминающее металлический водород, но с заменой протонов на тяжелые дырки (в работе [178] предложено называть его металлическим экситонием). В таком веществе могут распространяться «фононы». Их скорость будет определяться массой дырок, которая в благоприятном случае может быть порядка 10–20 m , т.е. в 100 раз меньше массы протона. При не слишком малой плотности электронов и дырок это может привести к значению $\hbar\omega_D$ в формуле (16.103), в 10 раз большему по сравнению с значением для водорода. Правда, вследствие того что металлический экситоний образуется не в вакууме, а в реальном веществе, кулоновское взаимодействие, лежащее в основе вообще всех взаимодействий, может быть заметно ослаблено наличием большой диэлектрической проницаемости (речь идет, конечно, о той ее части, которая не включает свободные носители). Последняя определяется далекими зонами и может быть оценена, если известен полный энергетический спектр. Большая диэлектрическая проницаемость обычно является следствием

¹⁾ Это может иметь место, если дырки возникают в узкой зоне, получившейся из d - или f -уровней атомов, в то время как электроны связаны с s -или p -состояниями атомов.

наличия малых энергетических щелей (как у известных полупроводников: Ge, Si и др., а также полуметаллов: Bi, Sb и др.).

В настоящее время такие вещества неизвестны и, конечно, неясно, удастся ли их создать. Как уже отмечалось, их скорее всего следует искать среди соединений, включающих переходные металлы (а также близкие к ним, типа Cu, Ag, Au) или редкоземельные элементы, для того чтобы валентная зона могла образоваться из слабо перекрывающихся d - или f -оболочек атомов. В этом случае возможно возникновение тяжелых дырок. Поиск таких соединений — непростая задача. К тому же, как уже отмечалось, помимо большой массы дырок, для получения больших T_c нужно, чтобы плотность носителей была не слишком мала, а диэлектрическая проницаемость не слишком велика. Однако, с другой стороны, здесь нет нужды в высоких давлениях и нет вопроса об устойчивости метастабильной металлической фазы, как в металлическом водороде.

До сих пор речь шла о механизме электронного притяжения, осуществляемом фононами (или подобными им колебаниями решетки дырок в гипотетическом «металлическом экситонии»). Возникает естественный вопрос о возможности иного механизма притяжения. Поскольку непосредственное взаимодействие электронов является отталкиванием, то надо искать в металлах «передающую систему», отличную от фононной системы.

Общая схема возникновения взаимодействия электронов через передающую систему A может быть схематически изображена в виде

$$e_1 + A \rightarrow e'_1 + A^*, \quad e_2 + A^* \rightarrow e'_2 + A, \quad (16.105)$$

где e_i соответствует электрону с импульсом p_i , A — основное, а A^* — возбужденное состояние передающей системы. В результате этой двойной «реакции» система A возвращается в первоначальное состояние, а у электронов e_1 и e_2 меняются импульсы, т. е. они как бы рассеиваются друг на друге. Можно легко показать, что такое взаимодействие обязательно является притяжением, и если оно не слишком велико, то дает

$$T_c \sim \Delta E \exp(-1/\lambda), \quad (16.106)$$

где ΔE — разность энергий состояний A и A^* , а λ зависит от взаимодействия электронов с системой A . По сути дела, по такой же схеме происходит и фононное притяжение.

Рассмотрим разные варианты. Передающей системой A могла бы быть система спинов в магнитном металле. Возбуждение этой системы описывается газом квазичастиц, называемых магнонами или спиновыми волнами. Поскольку ферромагнетизм является антагонистом сверхпроводимости (об этом см. подробнее § 21.2), то речь может идти об антиферромагнитных металлах. Однако оценка величин ΔE и λ , определяющих T_c , в этом случае не дает никаких преимуществ по сравнению с фононами.

Другой передающей системой могли бы служить электроны, каким-то образом отделенные от электронов проводимости (т.е. их состояния мало смешаны). Возбуждения таких электронных систем называют «экситонами», и поэтому такой принципиально возможный механизм сверхпроводимости называют «экситонным» (Литтл, 1964 [180], Гинзбург, 1964 [181]).

В частности, такой изолированной системой могли бы служить электроны внутренних оболочек атомов, которые сохраняются в ионах решетки металлов. Энергии возбуждения ΔE здесь порядка 10 эВ, т.е. 10^5 К. Если бы этот механизм был эффективным, то все металлы были бы высокотемпературными сверхпроводниками. Это не имеет места из-за слабости взаимодействия электронов проводимости с электронами внутренних оболочек и, соответственно, малости λ в (16.106).

Действительно, рассмотрим матричный элемент, соответствующий первому из процессов (16.105). Он равен

$$M_{12} = \int \psi_{A^*}^*(\mathbf{r}_1) \psi_A(\mathbf{r}_1) V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) e^{-i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}_2 / \hbar} u_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{r}_2) u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}_2) dV_1 dV_2,$$

где $V(r)$ — взаимодействие, ψ_A , ψ_{A^*} — волновые функции одного из ионных электронов, а электрон проводимости мы описываем блоховской функцией $\exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar) u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$. В интеграле по $\mathbf{r}_2$ существенны $r_2 \sim a$, где a — межатомное расстояние. Порядок величины r_1 определяется радиусом иона r_i , который заметно меньше a . Следовательно, можно разложить $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ по r_1/r_2 :

$$V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \approx V(r_2) - (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 / r_2) V'(r_2).$$

Так как функции ψ_A и ψ_{A^*} ортогональны, то нулевой член разложения $V(r_2)$ не дает вклада, и мы можем ожидать, что матричный элемент M_{12} будет по порядку величины не более чем r_i/a . Такая же малость возникает и от второго процесса в (16.105). Следовательно, эффективная константа взаимодействия электронов g будет содержать $(r_i/a)^2$, и эта малость войдет в λ (ибо $\lambda = gv(\mu)/2$). Можно сказать, что ионные оболочки обладают малой поляризуемостью.

Следовательно, надо попытаться найти передающую систему электронов с большой поляризуемостью. Первой по времени была идея Литтла [180], который предложил использовать длинные полимерные органические молекулы с так называемыми альтернированными связями атомов углерода, которые ведут себя как одномерные металлы. Если структура молекул включает боковые сильно поляризующиеся атомные группы (рис. 16.7), то эти группы могли бы служить передающей системой А. В действительности, не говоря уже о технической невозможности создания проводников из неразорванных полимерных молекул, имеется принципиальное возражение против этой идеи. Дело в том, что чисто одномерный сверхпроводник не может существовать,

ибо флуктуации фазы параметра порядка разрушают дальний порядок при любой конечной температуре [182]¹⁾.

Для того чтобы обойти эту трудность, были синтезированы многочисленные «квазиодномерные» соединения. В большинстве своем это сложные молекулярные кристаллы, которые в смысле проводящих свойств можно уподобить связ-

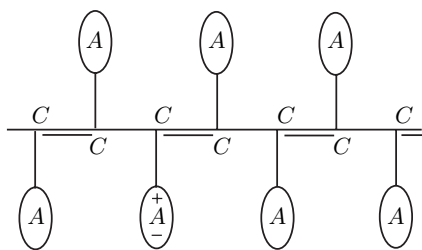


Рис. 16.7

кам изолированных проводящих нитей. Проводимость вдоль нитей большая, но вероятность перехода электрона с нити на нить мала, и поэтому анизотропия проводимости $\sigma_{\parallel}/\sigma_{\perp}$ может достигать нескольких тысяч. Кроме молекулярных кристаллов изучались также полимеры $(\text{SN})_x$, $(\text{CH})_x$ (x означает многократное повторение группы) и др. В некоторых из этих веществ была обнаружена сверхпроводимость с температурой $T_c \leq 8$ К, причем соответствующие кристаллы были, по-видимому, в большой степени «трехмерными», а механизм сверхпроводимости был обычным фоновым механизмом.

В связи с этим следует отметить, что основой идеи Литтла была не одномерность, которая, как уже отмечено, только мешает сверхпроводимости, а наличие сильно поляризующихся боковых групп, окружавших основную нить толстой «шубой». В существующих ныне молекулярных квазиодномерных кристаллах анизотропия проводимости происходит не из-за больших расстояний между нитями, а из-за большой анизотропии электронных волновых функций, которые сильно перекрываются вдоль нитей и слабо — в поперечном направлении. Следовательно, в соединениях такого типа просто нет места для сильно поляризующейся «шубы».

Идея Гинзбурга [181] заключалась в создании гетерогенных структур, в которых чередовались бы пленки металла и диэлектрика

¹⁾ Вычисляется функция корреляции $Z(x_1 - x_2) = \langle \Psi(x_1) \Psi(x_2) \rangle$, где Ψ — параметр порядка Гинзбурга–Ландау, пропорциональный Δ (гл. 17), и берется среднее значение с учетом термодинамических флуктуаций. В результате оказывается, что при $|x_1 - x_2| \rightarrow \infty$

$$Z \propto \exp(-|x_1 - x_2| mT / \Psi_0^2 \hbar^2).$$

Здесь Ψ_0 — равновесное значение Ψ (в одномерной задаче Ψ_0^2 нормировано на число электронов на 1 см длины). Следовательно, при $|x_1 - x_2| \rightarrow \infty$ $Z \rightarrow 0$; это свидетельствует об отсутствии дальнего порядка при конечной температуре. При наличии дальнего порядка Ψ когерентно во всем пространстве, а, следовательно, Z имеет конечный предел при $|x_1 - x_2| \rightarrow \infty$. Разрушение дальнего порядка происходит из-за флуктуации фазы комплексной функции $\Psi = |\Psi| e^{i\varphi}$.

(вместо диэлектрика предлагался также полупроводник [183]). Благодаря квантовому эффекту туннелирования электроны металла могли бы частично заходить внутрь диэлектрика и обмениваться друг с другом экситонами диэлектрика. Теоретическая оценка T_c весьма трудна, ибо она очень зависит от детальных предположений о свойствах границ. Скорее всего, таким способом нельзя получить большие T_c из-за малости слоя, в котором происходит спаривание, и слабости эффективного взаимодействия. На опыте не удалось получить существенного увеличения T_c в структурах этого типа.

По поводу возможности сверхпроводимости в тонких приграничных слоях металла можно заметить следующее. Мы уже говорили о сверхпроводящей корреляции (§ 16.7, 16.10). Одним из ее проявлений является так называемый «эффект близости» — взаимное влияние сверхпроводника и нормального металла, находящихся в контакте (подробнее см. § 20.1). В частности, сверхпроводимость в пленке, нанесенной на нормальный металл, будет разрушена, если ее толщина меньше ξ . Следовательно, даже если в тонком слое вблизи контакта металла с какой-либо поляризующейся диэлектрической средой и могла бы возникнуть сверхпроводимость, она была бы подавлена, если толщина этого слоя меньше ξ . Сверхпроводимость могла бы сохраниться лишь при условии достижения столь большого T_c , чтобы величина $\xi_0 \sim \hbar v/T_c$ была порядка толщины сверхпроводящего слоя; отметим, что комнатной температуре соответствует $\xi \sim 10^{-5} - 10^{-6}$, т. е. несколько сотен межатомных расстояний. Выходом из этого положения могло бы быть использование тонких сверхпроводящих пленок между слоями изолятора, что и делалось в экспериментах, хотя пока безуспешно.

Предельным случаем гетерогенных структур являются квазидвумерные сверхпроводники, в которых проводящие слои имеют толщину в одну молекулу и разделены относительно толстыми непроводящими слоями. Такие вещества действительно удалось синтезировать на базе слоистых халькогенидов TaS_2 , $NbSe_2$ и других. Благодаря слабости взаимодействия между слоями халькогенида в промежутки можно внедрить большие органические молекулы, например пиридин C_5H_5N . Такие кристаллы называются интеркалированными соединениями. При этом расстояние между слоями может сильно возрасти (вплоть до 50 Å), что, в частности, сказывается на анизотропии проводимости (она может увеличиться от 10 до 10^5).

Хотя чисто двумерная сверхпроводимость невозможна по той же причине, что и чисто одномерная (флуктуационное разрушение дальнего порядка [182]), но оказывается, что даже незначительное взаимодействие между слоями подавляет флуктуации и восстанавливает сверхпроводимость [184]. На опыте в некоторых случаях при интеркаливании наблюдалось значительное увеличение T_c . Например, при интеркаливании TaS_2 пиридином T_c повышалась от 0,8 до 3,5 К [185]. Хотя высокие критические температуры в таких соединениях пока не достигнуты, но тем не менее этот путь следует считать перспективным.

В связи с вопросом о сверхпроводимости двумерных систем следует отметить полученное недавно увеличение T_c на границах двойникования кристаллов (Хайкин, Хлюстиков, 1981) [186]. При выращивании монокристаллов «навстречу» друг другу появляется плоскость их соприкосновения. В общем случае при произвольной ориентации встречающихся кристаллов граница их соприкосновения ничем не замечательна. При специальном подборе взаимной ориентации монокристаллов, таком, что плоскость границы является кристаллической плоскостью (плоскостью, заполненной атомами) для обоих кристаллов, эти кристаллы называются «двойниками».

Оказалось, что в окрестности двойниковой границы олова сверхпроводимость сохраняется до температуры на 0,15 К выше T_c массивного олова. Конечно, это небольшое увеличение ($T_c = 3,72$ К), однако надо учесть, что сверхпроводящий участок находится в окружении нормального металла, который подавляет его сверхпроводимость благодаря «эффекту близости» (§ 20.1). Для уменьшения влияния этого эффекта приготавливался образец путем прессования порошка из мелких частиц чистого олова. При этом была велика вероятность возникновения большого числа двойниковых границ на близком расстоянии друг от друга. В полученном образце признаки сверхпроводимости (диамагнетизм) сохранялись до 7 К [186].

Увеличение T_c вблизи двойниковой границы можно объяснить несколькими причинами. Прежде всего, могут существовать особые типы колебаний решетки, связанные именно с двойниковой границей, наподобие рэлеевских волн у поверхности. Обмен этими фононами может усилить эффективное электронное притяжение. Во-вторых, возможны особые электронные состояния, в которых электроны свободно перемещаются вдоль границы, но не могут уйти вглубь вследствие быстрого затухания волновой функции. Такие состояния называются таммовскими уровнями. Сверхпроводимость может быть связана с такими электронами. Если граница не является плоскостью двойникования, то в ней имеется большая концентрация дислокаций или других дефектов, что может привести к уничтожению особых электронных или фононных состояний. Так можно объяснить отсутствие эффекта повышения T_c на произвольной границе.

Недавно появился еще один вариант системы, передающей взаимодействие между электронами проводимости — так называемые двухуровневые системы в металлических «стеклах» с сильно нарушенной кристаллической структурой. В таких веществах возможны переходы целых групп атомов из одних позиций в другие, связанные с относительно малыми изменениями энергии. Такие группы называются двухуровневыми системами. Обычно при каждой температуре T наиболее существенны те из них, которые имеют разность уровней порядка T .

Теоретическое исследование [187] показывает, что взаимодействие электронов через двухуровневые системы добавляется к фоновому притяжению и приводит к увеличению T_c . Оценка этого эффекта

в реальных металлических стеклах показывает, что T_c может увеличиться на 2–7%. Это соответствует опытным фактам: критическая температура неупорядоченного металла всегда понижается при отжиге (нагрев, приводящий к рекристаллизации), например в сплаве $\text{Cu}_{33}\text{Zr}_{67}$ от 2,34 до 2 К, в $\text{Zr}_{76}\text{Ni}_{24}$ от 3,15 до 3 К. Хотя этот эффект невелик, но он интересен с точки зрения демонстрации нефононного механизма сверхпроводимости.

В последнее время появились сведения о необычной сверхпроводимости в целом ряде соединений, включающем редкоземельные металлы и актиниды, например UBe_{13} , CeCu_2Si_2 и др. (см. обзоры [188]). Хотя критическая температура этих соединений и невелика: $T_c < 1$ К, но другие их свойства весьма интересны. Прежде всего, они обладают относительно большими критическими магнитными полями. Это можно интерпретировать как следствие увеличения эффективной массы носителей; тогда получаются значения m^* порядка 200–400 m , где m — масса свободного электрона. Поэтому принято говорить о «тяжелых фермионах».

Изучение разнообразных характеристик в нормальном состоянии свидетельствует о том, что в таких веществах плотность состояний имеет узкий и большой пик у самого уровня Ферми (напомним, что плотность состояний $\nu = p_0 m^* / \pi^2 \hbar^3$). Происхождение этого пика, возможно, связано с электронной экранировкой спина магнитных атомов редкоземельных металлов или актинидов. Если магнитные атомы являются малыми примесями, то это приводит к эффекту Кондо в проводимости (§ 4.6), но не влияет заметным образом на энергетический спектр и термодинамические свойства. Однако если магнитные атомы становятся регулярным элементом структуры и константа обменного взаимодействия J столь велика, что температура Кондо больше температуры замерзания спинов, то «резонанс Абрикосова–Сула» в проводимости (см. формулу (4.49)) может проявиться в виде пика плотности состояний.

Другое интересное свойство заключается в том, что низкотемпературная электронная теплоемкость в UBe_{13} оказалась пропорциональной T^3 или T^2 . Это свидетельствует о том, что в некоторых точках или контурах ферми-поверхности энергетическая щель Δ обращается в нуль. По всей вероятности, последнее связано с нефононным механизмом притяжения электронов (см. обзоры [188]).

Итак, существует довольно много идей относительно увеличения критической температуры. Имеется, однако, одно обстоятельство, которое может вызвать сомнение в принципиальной возможности высокотемпературной сверхпроводимости — это кулоновское отталкивание. Учет кулоновского взаимодействия приводит к замене формулы (16.106) чем-то похожим на (16.103). Однако в данном случае в μ^* (16.104) $\hbar\omega_D$ тоже заменяется на ΔE , т.е. при $\Delta E \sim 1$ эВ большой логарифм заменится величиной порядка единицы. В то же время все предлагаемые механизмы сверхпроводимости могут увеличить ΔE ,

но не могут привести к большим значениям λ . Если учесть, что несмотря на малые значения μ^* в обычных металлах не все металлы являются сверхпроводящими, становится понятным, что увеличение μ^* является весьма нежелательным.

Итак, значительное увеличение ΔE вместо увеличения T_c может привести к полному исчезновению сверхпроводимости. Это не означает принципиальную невозможность высокотемпературной сверхпроводимости, но показывает, что задача является чрезвычайно трудной.

Можно, однако, поставить вопрос по-иному. Если нельзя существенно повысить T_c , то, возможно, при той же критической температуре удастся существенно увеличить критическое магнитное поле. Один из возможных путей — это поиски сверхпроводников с большой эффективной массой носителей. К ним, по-видимому, принадлежат так называемые фазы Шевреля: соединения типа $M_x\text{Mo}_6\text{S}_8$, где M — какой-либо металл, например Pb , Li и др. В этих соединениях сверхпроводимость связана, по-видимому, с электронами d -оболочки молибдена, имеющими большую эффективную массу, что и объясняет рекордные критические поля этих соединений. К сожалению, они пока нетехнологичны. Выше мы говорили о соединениях актинидов и редкоземельных металлов с огромными m^* , но у них пока очень низкие критические температуры.

В принципе, для получения больших критических магнитных полей необходимы две вещи: а) как можно большая локализация электронов и б) их притяжение в локализованном состоянии. В этом случае куперовские пары могли бы быть «приготовлены заранее» из локализованных электронов, а некоторая вероятность перескока обеспечивала бы сверхпроводящий ток [189, 190]. Ниже, в § 18.1, мы увидим, что самые высокие критические поля могут быть достигнуты в сверхпроводниках 2-го рода и они ограничены двумя механизмами: 1) ларморовским закручиванием пар и 2) стремлением магнитного поля повернуть спины электронов параллельно друг другу. Обоим этим механизмам разрушения пар могли бы успешно противостоять сверхпроводники «локализованного» типа: первому благодаря большой эффективной массе носителей, второму благодаря сильному притяжению носителей с противоположными спинами в одной «яме». Однако пока неизвестно, можно ли создать такие сверхпроводники ¹⁾. Не исключено, что с этой точки зрения интересны металлические стекла, в которых случайный потенциал мог бы приводить к локализации электронов (§ 11.6) [191].

¹⁾ Возможно, что сюда относятся фазы Шевреля и сверхпроводники с тяжелыми фермионами [306].

ТЕОРИЯ ГИНЗБУРГА И ЛАНДАУ

§ 17.1. Вывод уравнений Гинзбурга и Ландау

В предыдущей главе было изложено применение микроскопической теории БКШ для описания термодинамических свойств сверхпроводников и их поведения в слабом магнитном поле. Обобщение этой теории (Горьков, 1958) [193] позволяет рассмотреть поведение сверхпроводников в сильных полях, в том числе и переменных. Однако соответствующие уравнения чрезвычайно сложны, а потому на практике редко применяются при решении физических задач. Вместо этого используется упрощенная теория, которую мы изложим в настоящей главе.

В 1950 г., т. е. еще до создания микроскопической теории сверхпроводимости БКШ, Гинзбург и Ландау предложили теорию (ГЛ) [192], которая описывала свойства сверхпроводников вблизи T_c ; эта теория успешно справилась с трудностями лондоновской электродинамики, например, объяснила происхождение положительной поверхностной энергии σ_{ns} . Уравнения этой теории были выведены на основе идей теории фазовых переходов 2-го рода Ландау (приложение II).

Впоследствии Горьков (1959) [168, 171] показал, что уравнения теории ГЛ являются точным пределом уравнений микроскопической теории при выполнении двух условий: а) $T_c - T \ll T_c$, б) $\delta \gg \xi_0$. Для лондоновских сверхпроводников второе условие выполняется при всех температурах и остается не выполненным лишь условие а). Для пиппардовских сверхпроводников, наоборот, требование б) является более сильным. Изложим здесь простой вывод, данный в основной работе [192].

Начнем с определения параметра порядка. В качестве такового берется волновая функция куперовских пар, содержащихся в бозе-

конденсате. Для идеального бозе-газа, находящегося в однородных условиях, основным состоянием является состояние с $\mathbf{p} = 0$. Ниже точки бозе-конденсации в этом состоянии имеется конечное число частиц с волновой функцией $\Psi = \text{const} \cdot \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar + i\alpha)$ при $\mathbf{p} = 0$ одинаковой для всех частиц; это называется когерентностью. Предполагается, что при слабом (длинноволновом) нарушении однородности, связанном с приложением внешнего поля, когерентность сохраняется, и функция $\Psi(\mathbf{r})$ характеризует все частицы конденсата.

Вблизи критической температуры Ψ мало и свободная энергия Ω может быть разложена в ряд по Ψ . В отсутствие внешнего поля в массивном сверхпроводнике волновая функция Ψ не зависит от координат. Поскольку Ψ — комплексная величина, а Ω действительно, то разложение идет по степеням $|\Psi|^2$. Итак, имеем (для единицы объема)

$$\Omega_s = \Omega_n + a|\Psi|^2 + (b/2)|\Psi|^4 + \dots \quad (17.1)$$

Поскольку теория строится для окрестности T_c , то коэффициенты a и b можно разложить по $\tau = (T - T_c)/T_c$ и ограничиться первыми неисчезающими членами. Так как выше T_c минимуму Ω_s должно соответствовать $\Psi = 0$, а ниже T_c $\Psi \neq 0$, то коэффициент a в точке перехода меняет знак; поэтому $a = \alpha\tau$, где $\alpha > 0$. Из условия, что $\Psi = 0$ должно соответствовать минимуму Ω_s также и в самой точке перехода, имеем $b \approx b(T_c) > 0$.

Дифференцируя по Ψ^* , получаем условие минимума Ω_s :

$$\Psi (\alpha\tau + b|\Psi|^2) = 0.$$

Отсюда следуют равновесные значения:

$$\begin{aligned} \Psi &= 0, & T &> T_c; \\ |\Psi|^2 &= -\alpha\tau/b \equiv \Psi_0^2, & T &< T_c. \end{aligned} \quad (17.2)$$

Подставляя равновесное значение $|\Psi|^2 = \Psi_0^2$ в (17.1) и сравнивая с (16.52), имеем

$$\Omega_n - \Omega_s = (\alpha\tau)^2/2b = H_{cm}^2/8\pi. \quad (17.3)$$

В настоящей главе будем употреблять обозначение H_{cm} для термодинамического критического поля массивного сверхпроводника, чтобы отличить его от критического поля тонкой пленки и других критических полей, которые будут определены дальше. Сравнивая (17.3) с формулой (16.55), видим, что теория ГЛ дает правильную температурную зависимость H_{cm} . Из этого сравнения можно также получить микроскопическую формулу для определенной комбинации из коэффициентов α и b :

$$\alpha^2/b = [4/7\zeta(3)] T_c^2 m p_0 / \hbar^3 = [4\pi^2/7\zeta(3)] \nu(\mu) T_c^2. \quad (17.4)$$

Теперь представим себе, что к сверхпроводнику приложено внешнее магнитное поле. В этом случае как само поле в сверхпроводнике, так и Ψ зависят от координат. При этом надо исследовать полную свободную энергию всего сверхпроводника. Энергия поля в единице объема есть $H^2/8\pi$. Кроме того, надо добавить энергию, связанную с неоднородностью функции Ψ . Будем считать, что изменение Ψ в пространстве происходит медленно. Это дает возможность ограничиться добавкой в свободную энергию $|\nabla\Psi|^2$. Однако параметр порядка Ψ имеет смысл волновой функции куперовских пар. Ввиду этого оператор импульса $-i\hbar\nabla$ должен обязательно входить в комбинации $-i\hbar\nabla - (2e/c)\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал ¹⁾; мы учли, что пара имеет заряд $2e$.

Для того чтобы придать новому члену в свободной энергии привычный вид, запишем его как кинетическую энергию частицы с массой $2m$ ²⁾:

$$(4m)^{-1} |(-i\hbar\nabla - (2e/c)\mathbf{A})\Psi|^2.$$

Итак, имеем

$$\int \Omega_s dV = \int \Omega_n^{(0)} dV + \int \left\{ \alpha\tau |\Psi|^2 + (1/2)b|\Psi|^4 + \right. \\ \left. + (4m)^{-1} |(-i\hbar\nabla - (2e/c)\mathbf{A})\Psi|^2 + H^2/8\pi \right\} dV \quad (17.5)$$

(здесь мы ввели обозначение $\Omega_n^{(0)}$ для свободной энергии нормальной фазы без поля).

Для получения минимума полной свободной энергии проварьируем выражение (17.5) по Ψ^* . Получаем при этом

$$\int \left\{ \alpha\tau \Psi\delta\Psi^* + b\Psi|\Psi|^2\delta\Psi^* + \right. \\ \left. + (4m)^{-1} [-i\hbar\nabla - (2e/c)\mathbf{A}]\Psi[i\hbar\nabla - (2e/c)\mathbf{A}]\delta\Psi^* \right\} dV = 0.$$

Чтобы избавиться от $\nabla\delta\Psi^*$, проинтегрируем соответствующее слагаемое по частям и используем теорему Гаусса. При этом находим

$$(i\hbar/4m) \int \delta\Psi^* \mathbf{n} [-i\hbar\nabla - (2e/c)\mathbf{A}]\Psi dS +$$

¹⁾ Напомним, что теория должна быть инвариантной относительно градиентного преобразования векторного потенциала $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\varphi$. В выражении $[-i\hbar\nabla - (2e/c)\mathbf{A}]\Psi$ это обеспечивается тем, что $\nabla\varphi$ компенсируется изменением фазы функции Ψ .

²⁾ Масса m в этом члене совершенно произвольна, но ее удобно выбрать равной массе электрона (см. ниже).

$$+ (4m)^{-1} \int \delta \Psi^* [-i\hbar \nabla - (2e/c) \mathbf{A}]^2 \Psi dV,$$

где в первом члене интегрирование идет по поверхности сверхпроводника ($\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали).

Вариация $\delta \Psi^*$ является произвольной. Полагая $\delta \Psi^* = 0$ на поверхности и приравнявая нулю множитель при $\delta \Psi^*$ в интеграле по объему, получаем уравнение для Ψ :

$$(4m)^{-1} [-i\hbar \nabla - (2e/c) \mathbf{A}]^2 \Psi + \alpha \tau \Psi + b |\Psi|^2 \Psi = 0. \quad (17.6)$$

Если теперь считать произвольным $\delta \Psi^*$ на поверхности сверхпроводника, то поверхностный интеграл дает нам граничное условие

$$\mathbf{n} [-i\hbar \nabla - (2e/c) \mathbf{A}] \Psi|_{\text{гр}} = 0. \quad (17.7)$$

При варьировании (17.5) по $\delta \Psi$ получаются уравнение и граничное условие, комплексно сопряженные (17.6) и (17.7).

Далее, проварьируем (17.5) по векторному потенциалу $\mathbf{A}$, считая $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$. Вариация H^2 дает $2 \text{rot } \mathbf{A} \text{ rot } \delta \mathbf{A}$. Можно воспользоваться формулой $\text{div}[\mathbf{a}\mathbf{b}] = \mathbf{b} \text{ rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{b}$. Это дает

$$2\delta \mathbf{A} \text{ rot rot } \mathbf{A} + 2 \text{div}[\delta \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{A}].$$

Объемный интеграл от div преобразуется к поверхностному и исчезает. Приравнявая вариацию нулю, находим

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{H} = (4\pi/c) \mathbf{j}, \quad (17.8)$$

$$\mathbf{j} = -(ie\hbar/2m)(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - (2e^2/mc) |\Psi|^2 \mathbf{A}. \quad (17.9)$$

Уравнение (17.8) — уравнение Максвелла. Граничным условием является задание поля на поверхности сверхпроводника. Выражение (17.9) соответствует квантовомеханическому току в магнитном поле, если волновая функция равна Ψ , заряд $2e$ и масса $2m$.

Перейдем к новым единицам, позволяющим избавиться от большинства констант в (17.6)–(17.9). Обозначим

$$\begin{aligned} \Psi' &= \Psi/\Psi_0, & \mathbf{H}' &= \mathbf{H}/(H_{cm}\sqrt{2}), \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r}/\delta, & \delta &= [2mc^2/4\pi\Psi_0^2(2e)^2]^{1/2}, \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A}/(H_{cm}\sqrt{2}\delta), & H_{cm} &= 2\sqrt{\pi} \alpha\tau/b^{1/2}, \\ \Psi_0^2 &= \alpha |\tau|/b. \end{aligned} \quad (17.10)$$

При этом уравнения преобразуются к виду (мы не будем писать штрихов в новых величинах)

$$(-i\kappa^{-1}\nabla - \mathbf{A})^2 \Psi - \Psi + |\Psi|^2 \Psi = 0, \quad (17.6')$$

$$\mathbf{n} (-i\kappa^{-1}\nabla - \mathbf{A}) \Psi|_{\text{гп}} = 0, \quad (17.7')$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -(i/2\kappa) (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - |\Psi|^2 \mathbf{A}. \quad (17.8')$$

В уравнения (17.6')–(17.8') входит лишь одна константа κ , называемая параметром Гинзбурга и Ландау и равная

$$\kappa = 2^{3/2} e H_{cm} \delta^2 / \hbar c. \quad (17.11)$$

Это та же самая константа, которая была введена ранее (см. (16.95)). Мы в этом убедимся несколько позже.

Рассмотрим простейшую задачу: проникновение слабого магнитного поля в глубь сверхпроводника с плоской границей. Пусть сверхпроводник занимает полупространство $x > 0$. К нему приложено поле вдоль оси z . Поле проникает внутрь сверхпроводника, но быстро затухает вглубь, т. е. зависит от x . Поэтому выберем векторный потенциал $\mathbf{A}$ вдоль направления y . Тогда

$$H(x) = dA_y/dx.$$

Естественно считать Ψ тоже зависящим только от x . При этом из (17.6') и (17.7') получаем

$$-\kappa^{-2} d^2 \Psi / dx^2 - \Psi + A^2 \Psi + |\Psi|^2 \Psi = 0,$$

$$d\Psi/dx|_{\text{гп}} = 0.$$

Будем считать $\kappa \ll 1$, тогда $\Psi = \text{const}$. Из условия в глубине сверхпроводника следует $|\Psi|^2 = 1$. Функцию Ψ можно выбрать действительной. Уравнение (17.8') дает

$$d^2 A / dx^2 - A = 0.$$

Дифференцируя по x , получаем такое же уравнение для H . Решением, удовлетворяющим граничному условию $H = H_0$, является $H = H_0 \exp(-x)$, или, в обычных единицах,

$$H = H_0 e^{-x/\delta}, \quad (17.12)$$

где δ определено в (17.10). Но нам известно, что при этом должна получаться лондоновская глубина проникновения вблизи T_c . Выбирая m в (17.10) равной массе электрона, находим, что $|\Psi_0|^2 = n_s/2$, т. е. «числу куперовских пар». Сравнивая (17.2) с микроскопической формулой (16.92), находим

$$\alpha/b = n_e \quad (17.13)$$

(это соотношение является следствием выбранной нами нормировки Ψ). С помощью формул (17.13) и (17.4) можно определить α и b ($n_e = p_0^3/3\pi^2 \hbar^3$):

$$\alpha = (12\pi^2/7\zeta(3)) m T_c^2 / p_0^2, \quad b = \alpha/n_e. \quad (17.14)$$

Подставляя в выражение для $\varkappa$ (17.11) формулы (16.55) для $H_{cm}(T)$, (16.93) для $\delta(T)$, получаем

$$\varkappa = 3[2/7\zeta(3)]^{1/2} (\pi\hbar/v)^{3/2} cT_c/\hbar p_0. \quad (17.15)$$

Константу $\varkappa$ можно выразить через отношение

$$\delta_L(0) = (mc^2/4\pi n_e e^2)^{1/2}$$

к $\xi_0 = (\gamma/\pi^2) \hbar v/T_c$ (см. (16.82)). В результате придем к формуле (16.95).

Итак, все константы, входящие в теорию, имеют микроскопическое истолкование. Остается неясным лишь микроскопический смысл параметра порядка Ψ . Однако и его можно найти путем сравнения с микроскопической теорией. Довольно очевидно, что Ψ пропорционально Δ . Обе эти величины в общем случае комплексные скаляры, обе равны нулю при $T > T_c$ и пропорциональны $|\tau|^{1/2}$ при $T_c - T \ll T_c$. Поэтому достаточно сравнить коэффициенты при $|\tau|^{1/2}$ для Ψ (17.2) и для Δ при $T \rightarrow T_c$ (16.33). Отсюда получаем

$$\Psi(\mathbf{r}) = \pi^{-1} [7\zeta(3)/8]^{1/2} n_e^{1/2} \Delta(\mathbf{r})/T_c. \quad (17.16)$$

Теория Гинзбурга и Ландау относится и к сверхпроводникам, включающим примеси, которые в литературе принято называть сверхпроводящими сплавами или грязными сверхпроводниками. Как уже отмечалось в § 16.9, примеси, имеющие малую концентрацию, мало влияют на термодинамические свойства, т. е. на T_c , Δ и H_{cm} , но при $l \ll \xi$ заметно меняют глубину проникновения. Подставив в общую формулу для $\varkappa$ (17.11) выражения для H_{cm} (16.55) и δ (16.100) при $T \rightarrow T_c$, получаем формулу (16.101), где $l = v\tau_{tr}$.

Для удобства сравнения с опытом $\varkappa$ можно выразить через проводимость нормального металла $\sigma = n_e e^2 l/p_0$ и коэффициент в линейном законе теплоемкости ($C_n = \gamma_c T$) $\gamma_c = p_0 m/3\hbar^3$ [171]:

$$\varkappa = [21\zeta(3)/2\pi]^{1/2} \pi^{-3} c e \gamma_c^{1/2} \sigma^{-1}. \quad (17.17)$$

В единицах, когда температура измеряется в кельвинах, а теплоемкость в эрг/(см³·К), коэффициент γ_c , измеряемый в эрг·см⁻³·К⁻², есть γ_c/k_B^2 , где k_B — константа Больцмана. Подставляя числовые значения c и e и выражая удельное сопротивление $\sigma^{-1} = \rho$ в Ом·см, получаем

$$\varkappa = 7,5 \cdot 10^3 \gamma_c^{1/2} \rho. \quad (17.17')$$

Используя соотношение (17.4), полученное из H_{cm} , которое мы считаем неизменным, и выражения (16.100) и (17.10) для δ вместе с формулой (16.33) для Δ (оно тоже не меняется), находим коэффициенты α , b и связь между Δ и Ψ :

$$\alpha = (6/\pi) (\hbar T_c/\tau_{tr}) (m/p_0^2),$$

$$\alpha/b = [2\pi^3/7\zeta(3)] (T_c \tau_{tr}/\hbar) n_e, \quad (17.18)$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = (\pi/4)^{1/2} (n_e \tau_{tr}/\hbar T_c)^{1/2} \Delta(\mathbf{r}).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (17.6), можем получить часто употребляемую (для сплавов) форму этого уравнения:

$$(\pi D \hbar / 8 T_c) [\nabla - (2ie / \hbar c) \mathbf{A}]^2 \Delta + [(T_c - T) / T_c] \Delta - \\ - \left[7 \zeta(3) / 8 \pi^2 T_c^2 \right] |\Delta|^2 \Delta = 0, \quad (17.6'')$$

где $D = (1/3)v^2 \tau_{tr}$ — коэффициент диффузии (§ 3.5). Соответствующее выражение для тока имеет вид

$$\mathbf{j} = -i(\pi e \nu D / 4 T_c) \times \\ \times \left[(1/2)(\Delta^* \nabla \Delta - \Delta \nabla \Delta^*) - (2ie / \hbar c) \mathbf{A} |\Delta|^2 \right], \quad (17.9')$$

где $\nu = p_0 m / \pi^2 \hbar^3$ — плотность состояний.

Для дальнейших применений преобразуем выражение для свободной энергии (17.5). Переходя к приведенным величинам по формулам (17.10), имеем

$$\int \Omega_s dV = \int \Omega_n^{(0)} dV + \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \int \left\{ -|\Psi|^2 + \frac{|\Psi|^4}{2} + \right. \\ \left. + \left| \left(-\frac{i\nabla}{\varkappa} - \mathbf{A} \right) \Psi \right|^2 + H^2 \right\} dV. \quad (17.19)$$

Как и раньше при выводе уравнений, проинтегрируем член с $\nabla \Psi^*$ по частям. При этом поверхностный интеграл исчезнет вследствие граничного условия (17.7), а в остающемся объемном интеграле мы воспользуемся тем, что Ψ удовлетворяет уравнению (17.6'). В результате остается

$$\int \Omega_s dV = \int \Omega_n^{(0)} dV + \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \int \left(H^2 - \frac{|\Psi|^4}{2} \right) dV. \quad (17.19')$$

В дальнейшем нас будет интересовать переход из нормального в сверхпроводящее состояние под действием внешнего поля. Для цилиндрической геометрии свободная энергия в заданном внешнем поле получается вычитанием $\mathbf{H}_0 \mathbf{B} / 4\pi$, где $\mathbf{H}_0$ — внешнее поле, а $\mathbf{B}$ — индукция, равная среднему полю в образце:

$$\mathbf{B} = V^{-1} \int \mathbf{H} dV$$

(см. приложение III). Для нормальной фазы $\Omega_{nH} = \Omega_n^{(0)} - H_0^2 / 8\pi$.

Итак, получаем (в приведенных единицах)

$$\int (\Omega_{sH} - \Omega_{nH}) dV = \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \int \left[(H - H_0)^2 - \frac{|\Psi|^4}{2} \right] dV. \quad (17.20)$$

В заключение оценим размеры области, где теория ГЛ, основанная на приближении Ландау для фазовых переходов 2-го рода, становится неприменимой из-за флуктуационных эффектов. Согласно приложению II границы применимости приближения Ландау определяются условием (П.2.20):

$$1 \gg |\tau| \gg b^2 T_c^2 / \alpha c^3,$$

где $\tau = (T - T_c) / T_c$. В теории ГЛ α и b имеют тот же смысл, что и в модели, рассмотренной в приложении II, а роль параметра c (коэффициента при $\nabla\varphi$, где φ — скалярный действительный параметр порядка) играет $\hbar^2/m$. Следовательно,

$$1 \gg |\tau| \gg m^3 b^2 T_c^2 / \alpha \hbar^6.$$

Подставляя α и b для чистого сверхпроводника согласно формулам (17.14), получаем

$$1 \gg |\tau| \gg (T_c / \varepsilon_F)^4, \quad (17.21)$$

где $\varepsilon_F \sim p_0^2/m$ — энергия Ферми. Обычно T_c / ε_F не больше 10^{-3} , т. е. справа стоит величина, меньшая 10^{-12} , что на много порядков меньше тех колебаний температуры, которые можно контролировать в эксперименте.

Для сверхпроводников с примесями при $l \ll \xi$, согласно (17.18), имеем

$$1 \gg |\tau| \gg T_c (\hbar / \tau_{\text{tr}})^3 / \varepsilon_F^4. \quad (17.22)$$

Это требование является более слабым, чем (17.21), но практически тоже исключает флуктуационную область.

Отсюда вытекает, что флуктуации не существенны в термодинамике массивных сверхпроводников. Физическая причина этого — большая корреляционная длина, как уже было отмечено в конце § 16.9. Тем не менее возможны ситуации, при которых роль флуктуаций заметно возрастает, и они приводят к наблюдаемым эффектам. Это имеет место для кинетических эффектов в малых объектах, например для проводимости тонких пленок и нитей. Этому вопросу будет посвящен § 19.6.

Итак, теория Гинзбурга и Ландау может применяться практически вплоть до критической температуры. Каковы же границы ее применимости со стороны низких температур? Одно из этих условий нам известно: это $|\tau| \ll 1$. Другим условием является $\delta \gg \xi_0$, т. е. лондоновская область. Последнее можно увидеть, например, из того факта, что, согласно § 16.7, связь между током и полем является в общем случае нелокальной и переходит в локальную только в лондоновской области. В теории ГЛ связь между током и полем является локальной.

Как уже говорилось выше, уравнения ГЛ являются точным пределом микроскопической теории при $|\tau| \ll 1$. Мы не будем приводить здесь соответствующий вывод ввиду его громоздкости (см. [168, 171]). Отметим лишь, что соотношение, обобщающее формулу (16.18)

для Δ на неоднородный случай $\Delta(\mathbf{r})$ (здесь речь идет о $T \rightarrow T_c$, т. е. о малых Δ) является сложным интегральным соотношением: правая часть содержит члены типа

$$\int K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta(\mathbf{r}') dV',$$

$$\int K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') \Delta(\mathbf{r}') \Delta(\mathbf{r}'') \Delta(\mathbf{r}''') dV' dV'' dV''''.$$

Расстояния, существенные в ядрах интегралов, порядка ξ_0 . С другой стороны, расстояния, на которых меняется Δ , порядка $\xi(T) \sim \hbar v / \Delta(T) \gg \xi_0$ (при $|\tau| \ll 1$). Это дает возможность считать изменение $\Delta(\mathbf{r})$ медленным и перейти от интегральной связи к дифференциальной. Аналогичным образом обстоит дело с векторным потенциалом $\mathbf{A}$, если выполнено условие $\delta(T) \gg \xi_0$.

Оба требования можно выразить в виде одного соотношения. Для этого воспользуемся тем, что $\xi_0 \sim \xi(0) \sim \delta_L(0) / \varkappa$, а также тем, что при $|\tau| \ll 1$ $\delta(T) \sim \delta_L(0) |\tau|^{-1/2}$. Условие $\delta(T) \gg \xi_0$ можно записать в виде $|\tau|^{1/2} \ll \varkappa$. Итак, общее условие применимости теории ГЛ есть

$$1 - T/T_c \ll \min(\varkappa^2, 1). \quad (17.23)$$

Хотя мы все время рассуждали о чистых сверхпроводниках, но формула (17.23) применима и к случаю сверхпроводников с примесями.

Теория ГЛ значительно проще, чем полная микроскопическая теория для сверхпроводников во внешнем поле. Тем не менее, содержание ее оказалось очень богатым, ибо она позволила дать объяснение всем основным равновесным свойствам сверхпроводников. Несмотря на ограничение (17.23) оказалось, что если выражать все параметры в приведенных единицах, теория ГЛ дает неплохое количественное согласие с экспериментом даже при температурах заметно ниже T_c . Это связано с медленностью изменения $\varkappa$ с температурой (функция $A(T)$ в (16.97) и $B(T)$ в (16.101)).

§ 17.2. Поверхностная энергия на границе нормальной и сверхпроводящей фаз

Ниже мы продемонстрируем решение нескольких задач с помощью теории ГЛ. Рассмотрим случай, когда Ψ и A зависят лишь от одной координаты, скажем x , причем A направлено перпендикулярно x . При этом общие уравнения (17.6')–(17.8') упрощаются и приобретают вид

$$\varkappa^{-2} d^2 \Psi / dx^2 + \Psi(1 - A^2) - \Psi^3 = 0, \quad (17.24)$$

$$d\Psi/dx|_{\text{гп}} = 0, \quad (17.25)$$

$$d^2 A/dx^2 - \Psi^2 A = 0 \quad (17.26)$$

(легко увидеть, что Ψ можно считать действительным).

Уравнения (17.24) и (17.26) имеют интеграл, который легко находится. Для этого умножим (17.24) на $d\Psi/dx$, а (17.26) на dA/dx , сложим и проинтегрируем по x . С учетом граничного условия в толще сверхпроводника получаем

$$\kappa^{-2} (d\Psi/dx)^2 + (dA/dx)^2 + \Psi^2(1 - A^2) - \Psi^4/2 = \text{const} = 1/2 \quad (17.27)$$

(значение константы взято из граничных условий (17.28)).

Найдем поверхностную энергию между нормальной и сверхпроводящей фазами [192]. Пусть при $x \rightarrow \infty$ имеется сверхпроводящая фаза, а при $x \rightarrow -\infty$ нормальная. Будем считать $\mathbf{H} \parallel z$, $\mathbf{A} \parallel y$, $H = dA/dx$. При этом имеем граничные условия

$$\begin{aligned} x \rightarrow \infty : \quad \Psi &= 1, \quad H = A = 0, \quad d\Psi/dx = 0; \\ x \rightarrow -\infty : \quad \Psi &= 0, \quad H = H_0 = 1/\sqrt{2}, \quad d\Psi/dx = 0 \end{aligned} \quad (17.28)$$

(в обычных единицах $\Psi = 1$ соответствует Ψ_0 , а $H_0 = 1/\sqrt{2}$ соответствует H_{cm}). Поскольку уравнения (17.24)–(17.26) в общем случае не интегрируются, то рассмотрим предельный случай $\kappa \ll 1$.

Этот случай соответствует $\xi \gg \delta$ и изображен на рис. 16.5. Очевидно, что большая часть поверхностной энергии возникает от области, в которой H и A малы. Полагая $A = H = 0$ в (17.27), получаем уравнение

$$d\Psi/dx = (\kappa/\sqrt{2})(1 - \Psi^2). \quad (17.29)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию $\Psi = 1$ при $x \rightarrow \infty$ и уменьшающееся в сторону убывающих x , есть

$$\Psi = \text{th}(\kappa x/\sqrt{2}). \quad (17.30)$$

Конечно, надо учесть, что такое решение становится неправильным в области, куда проникает поле, но эта область вносит малый вклад в поверхностную энергию. Для удобства мы выбрали начало координат в точке $x = 0$, где $\Psi \approx 0$ (граница A на рис. 16.5).

Рассмотрим теперь формулу для разности свободных энергий (17.20). Подынтегральное выражение обращается в нуль при $x \rightarrow \infty$ и при $x \rightarrow -\infty$. Вклад вносит лишь переходная область. Он и соответствует избыточной энергии, связанной с границей, т. е. σ_{ns} . Подставляя

в (17.20) $H_0 = 1/\sqrt{2}$, $H = 0$ и Ψ согласно (17.30), получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{ns} &= \frac{H_{cm}^2}{8\pi} \int_0^\infty (1 - \Psi^4) dx = \frac{H_{cm}^2}{8\pi} \int_0^\infty \left[1 - \operatorname{th}^4 \frac{\kappa x}{\sqrt{2}} \right] dx = \\ &= \frac{H_{cm}^2}{8\pi} \int_0^\infty \operatorname{ch}^{-2} \frac{\kappa x}{\sqrt{2}} \left[1 + \operatorname{th}^2 \frac{\kappa x}{\sqrt{2}} \right] dx = \frac{H_{cm}^2}{8\pi} \frac{4\sqrt{2}}{3\kappa}. \quad (17.31)\end{aligned}$$

Нижний предел интеграла по x выбран там, где Ψ становится малым и начинает проникать поле, т. е. $x = 0$. В обычных единицах получаем

$$\sigma_{ns} = (H_{cm}^2/8\pi) (4\sqrt{2} \delta/3\kappa). \quad (17.32)$$

Для $\kappa \gtrsim 1$ вычисление σ_{ns} возможно лишь численным методом. При этом оказывается, что при $\kappa = 1/\sqrt{2}$ σ_{ns} обращается в нуль, а при больших κ σ_{ns} становится отрицательным. Поскольку это противоречило картине сверхпроводимости, известной к моменту создания теории ГЛ (1950 г.), то такой случай в ней не рассматривался. Экспериментальные данные по размерам слоев в промежуточном состоянии (§ 15.3) дают возможность определить κ . Для чистых сверхпроводников получаются малые значения κ : для ртути $\kappa = 0,16$, для олова $\kappa = 0,15$, для алюминия $\kappa = 0,026$ ¹⁾.

§ 17.3. Критическое поле и намагниченность тонкой пленки. Переохлаждение и перегрев

Так как для многих чистых сверхпроводников $\kappa \ll 1$, то имеет смысл решать задачи в этом приближении, которое сильно облегчает вычисления. Рассмотрим вопрос о свойствах тонкой сверхпроводящей пленки, помещенной в параллельное магнитное поле H_0 [192, 194]. Пусть $\mathbf{H} \parallel z$, и пленка занимает объем $-d/2 < x < d/2$. Уравнение (17.24) перепишем в форме

$$d^2\Psi/dx^2 = \kappa^2\Psi(A^2 - 1 + \Psi^2). \quad (17.33)$$

При $\kappa \ll 1$ в нулевом приближении пренебрежем правой частью. При этом имеем (с учетом (17.25))

$$d^2\Psi/dx^2 = 0, \quad d\Psi/dx|_{x=\pm d/2} = 0.$$

Это дает

$$\Psi = \text{const}. \quad (17.34)$$

¹⁾ Легче определить κ экспериментально по полю переохлаждения (§ 18.4), хотя, строго говоря, так можно получить завышенные значения κ .

Подставляя эту, пока неизвестную, константу в (17.26), используя соотношение $H = dA/dx$ и граничное условие $H(\pm d/2) = H_0$, имеем

$$H = H_0 \frac{\text{ch}(\Psi x)}{\text{ch}(\Psi d/2)}, \quad (17.35)$$

$$A = \frac{H_0}{\Psi} \frac{\text{sh}(\Psi x)}{\text{ch}(\Psi d/2)}. \quad (17.36)$$

Рассмотрим уравнение (17.33) в следующем приближении. Подставим в него $\Psi + \Psi_1$:

$$d^2\Psi_1/dx^2 = \varkappa^2\Psi \left(A^2 - 1 + \Psi^2 \right).$$

Для того чтобы это неоднородное уравнение имело решение, надо, чтобы правая часть была ортогональна к решению однородного уравнения с правильными граничными условиями; таким решением является $\Psi_1 = \text{const}$. Следовательно,

$$\int_{-d/2}^{d/2} \left(A^2 - 1 + \Psi^2 \right) dx = 0, \quad (17.37)$$

откуда находим связь между Ψ и H_0 :

$$H_0^2 = \frac{2\Psi^2 (1 - \Psi^2) \text{ch}^2(\Psi d/2)}{\text{sh}(\Psi d)/\Psi d - 1}. \quad (17.38)$$

Это соотношение имеет место при любом H_0 и дает в неявной форме выражение Ψ через H_0 . Отсюда можно найти намагниченность пленки (в единицах $H_{cm} \sqrt{2}$):

$$4\pi M = B - H_0 = d^{-1} \int_{-d/2}^{d/2} H dx - H_0 = -H_0 \left[1 - \frac{\text{th}(\Psi d/2)}{\Psi d/2} \right]. \quad (17.39)$$

При $\Psi d \gg 1$ $4\pi M = -H_0$, что соответствует эффекту Мейснера — непроникновению поля в сверхпроводник. Если же $\Psi d \ll 1$, то из (17.39) и (17.38) находим

$$4\pi M \approx -(1/12) H_0 d^2 \Psi^2, \\ H_0^2 \approx 12 (1 - \Psi^2)/d^2. \quad (17.40)$$

Отсюда получаем

$$4\pi M \approx -(1/12) H_0 d^2 (1 - H_0^2 d^2/12). \quad (17.41)$$

Для дальнейших применений найдем разность свободных энергий сверхпроводящего и нормального состояний в заданном внешнем поле H_0 и при заданном $\Psi = \text{const}$, не используя уравнение для Ψ и вытекающей из него связи (17.38). Это означает, что мы рассматриваем неравновесное состояние, характеризуемое каким-то постоянным Ψ . Добавляя $-\mathbf{H}_0\mathbf{B}/4\pi + H_0^2/8\pi$ в (17.19) и перейдя к приведенным величинам, получаем

$$\int_{-d/2}^{d/2} (\Omega_{sH} - \Omega_{nH}) dx = \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \int_{-d/2}^{d/2} \left[-\Psi^2 + \frac{\Psi^4}{2} + (H - H_0)^2 + A^2\Psi^2 \right] dx. \quad (17.42)$$

Отметим, что минимизация этого выражения по Ψ^2 приводит к условию (17.38), а подстановка последнего в (17.42) дает равновесную формулу (17.20).

Подставим в (17.42) формулы для H и A , (17.35) и (17.36). При этом получается

$$\begin{aligned} (H_{cm}^2/4\pi d)^{-1} \int_{-d/2}^{d/2} (\Omega_{sH} - \Omega_{nH}) dx = \\ = H_0^2 [1 - \text{th}(\Psi d/2)(\Psi d/2)^{-1}] - \Psi^2 + \Psi^4/2. \end{aligned} \quad (17.43)$$

В поле, равном критическому H_c , это выражение должно равняться нулю. Следовательно,

$$H_c^2 = \frac{\Psi^2 (2 - \Psi^2)}{2 [1 - \text{th}(\Psi d/2)(\Psi d/2)^{-1}]}. \quad (17.44)$$

Формулы (17.38) и (17.39) дают зависимость H_c от толщины пленки.

Рассмотрим предельные случаи. Если толщина велика, то в точке перехода Ψ близко к единице. Положим $\Psi = 1 - \varphi$, где $\varphi \ll 1$. Подставив это в (17.38), получаем

$$\varphi \approx H_0^2/2d,$$

т. е. действительно $\varphi \ll 1$. Подставляя $\Psi = 1 - \varphi$ в (17.44), находим

$$H_c^2 \approx \frac{(1 - 2\varphi)(1 + 2\varphi)}{2(1 - 2/d)} \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{d} \right).$$

Следовательно,

$$H_c \approx (1/\sqrt{2}) (1 + 1/d), \quad (17.45)$$

или, в обычных единицах,

$$H_c \approx H_{cm} (1 + \delta/d). \quad (17.46)$$

Для тонкой пленки мы уже имеем разложение по d формулы (17.38) — это выражение (17.40). Из (17.44) при $d \ll 1$ имеем

$$H_c^2 \approx 6(2 - \Psi^2)/d^2. \quad (17.47)$$

Сравнивая с (17.40), получаем в точке перехода $\Psi = 0$,

$$H_c = 2\sqrt{3}/d, \quad (17.48)$$

или, в обычных единицах,

$$H_c = 2\sqrt{6} H_{cm} \delta/d. \quad (17.48')$$

Итак, в то время как для $d \gg 1$ переход в нормальное состояние с $\Psi = 0$ происходит из состояния с $\Psi \approx 1$, т. е. это переход 1-го рода, для $d \ll 1$ при подходе к точке перехода $\Psi \rightarrow 0$, т. е. это переход 2-го рода. При этом H_c растет с уменьшением толщины по закону $H_c \propto d^{-1}$. Полная кривая зависимости H_c/H_{cm} от δ/d изображена на рис. 17.1.

Значит, при какой-то толщине пленки фазовый переход 1-го рода сменяется фазовым переходом 2-го рода. Для того чтобы выяснить, как это происходит, вернемся к неравновесной формуле (17.43). График функции, стоящей справа (обозначим ее Ω), в зависимости от Ψ^2 при разных H_0 изображен на рис. 17.2, где рис. а соответствует $d/\delta = 4$, рис. б соответствует $d/\delta = 1,6$. Из этих графиков видно, что при малых толщинах Ω имеет один минимум, который при малых полях соответствует $\Psi \neq 0$, а при больших $\Psi = 0$. Это случай фазового перехода 2-го рода. Для больших толщин в общем случае имеется два минимума: один при $\Psi = 0$, другой при конечном Ψ . Поле, при котором глубины минимумов выравниваются, и есть поле перехода. Очевидно, это переход 1-го рода.

Пограничной ситуации между случаями, изображенными на рис. а и б, соответствует случай, когда оба минимума сливаются в точке $\Psi = 0$. Очевидно, в этой точке одновременно будут выполняться равенства $\Psi = 0$, $d\Omega/d(\Psi^2) = 0$, $d^2\Omega/d(\Psi^2)^2 = 0$. Из этих условий получаем

$$d_c = \sqrt{5}, \quad (17.49)$$

или, в обычных единицах,

$$d_c = \sqrt{5} \delta, \quad (17.49')$$

(этой толщине соответствует кружок на рис. 17.1).

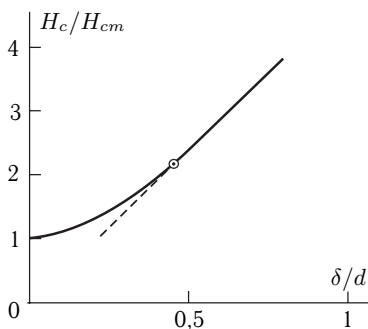


Рис. 17.1

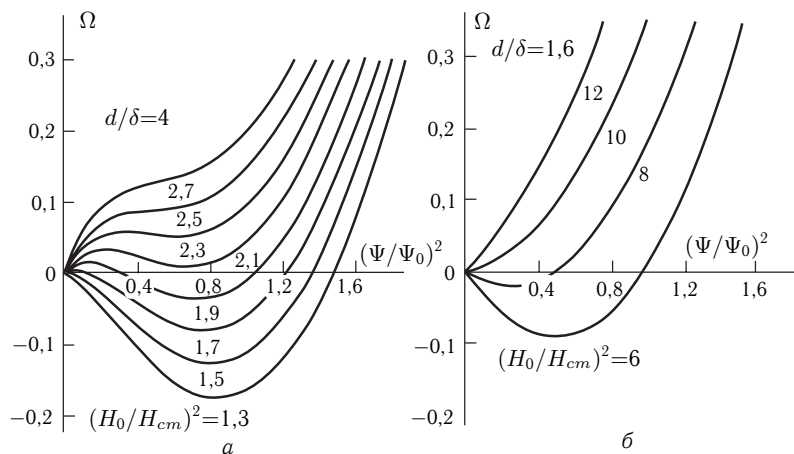


Рис. 17.2

В случае фазового перехода 1-го рода равновесному состоянию соответствует нижний из двух минимумов. Что касается более высокого минимума, то он отвечает метастабильному состоянию. Действительно, малое отклонение Ψ^2 от значения в минимуме приводит к увеличению свободной энергии. При изменении магнитного поля метастабильная фаза может сохраниться до тех пор, пока высокий минимум не исчезнет. Это приводит к тому, что при исследовании перехода в увеличивающемся и в уменьшающемся поле может наблюдаться гистерезис. Наличие гистерезиса является наиболее простым способом установления перехода 1-го рода.

Предельные поля задержки метастабильных фаз называются полями переохладения (задержка нормальной фазы) и перегрева (задержка сверхпроводящей фазы). Поле перегрева наблюдать сложно, ибо у краев образца всегда происходит концентрация линий поля, т. е. увеличение его напряженности. Следовательно, края могут служить местами появления зародышей нормальной фазы. Гораздо легче наблюдать поле переохладения. Исчезновение минимума при $\Psi = 0$ происходит при $d\Omega/d(\Psi^2) = 0$. Последнее условие, как уже говорилось, дает формулу (17.38). Подстановка в нее $\Psi = 0$ приводит к соотношению

$$H_0 = H_{c2} = 2\sqrt{3}/d, \quad (17.50)$$

совпадающему с (17.48). Следовательно, формула критического поля для толщины $d < d_c$ определяет в то же время поле переохладения для толщины $d > d_c$ (штриховая линия на рис. 17.1).

В действительности это заключение справедливо лишь для не слишком больших толщин. Дело в том, что оно выведено из формулы

для неравновесной свободной энергии (17.43), полученной в предположении $\Psi = \text{const}$. В то же время ясно, что в массивном образце минимальный зародыш сверхпроводящей фазы будет локализован в определенной области пространства, т.е. ему будет соответствовать $\Psi(\mathbf{r}) \neq \text{const}$ (это будет продемонстрировано в § 18.2 и 18.4). Предположение $\Psi = \text{const}$, очевидно, применимо при $d \ll \xi$, или в наших единицах $d \ll \kappa^{-1}$, т.е. при $\kappa \ll 1$, до толщин, значительно превышающих d_c . При толщинах $d \gg \xi$ поле переохлаждения совпадает с полем H_{c3} (§ 18.4).

Экспериментальное определение магнитных свойств тонких сверхпроводящих слоев производится на пленках, полученных испарением капель расплавленного металла на диэлектрическую подложку. Конечно, при этом довольно трудно проконтролировать толщину пленки. Ввиду этого можно воспользоваться тем, что во все теоретические формулы входит отношение d/δ , где δ выражается формулой (16.93), т.е. возрастает, когда температура приближается к T_c . Это дает возможность, вместо использования многих пленок, применять одну, производя измерения при разных температурах. Тогда приведенная длина, входящая в формулы, будет выражаться, согласно (16.93), соотношением

$$d_{\text{прив}} = [d/\delta_L(0)] [2(T_c - T)/T_c]^{1/2}.$$

Результаты измерений на пленках, напыленных на подложку, находящуюся при комнатной температуре [195], подтвердили теорию ГЛ [192].

§ 17.4. Критический ток тонкой проволоки с $\kappa \ll 1$

Рассмотрим теперь другую одномерную задачу теории ГЛ — критический ток тонкой цилиндрической проволоки радиуса R ¹⁾. Согласно уравнению Максвелла имеем (см. (15.24))

$$H_J = 2J/cR. \quad (17.51)$$

Следовательно, задание полного тока эквивалентно заданию поля на границе. Введем цилиндрические координаты: ρ , φ , z . Поскольку ток идет вдоль z , то поле $\mathbf{H}$ имеет лишь компоненту H_φ . Выберем векторный потенциал $\mathbf{A}$ вдоль оси z . Тогда из общих уравнений (17.6')–(17.8') получаем

$$d^2\Psi/d\rho^2 = \kappa^2 (A^2 - 1 + \Psi^2) \Psi, \quad (17.52)$$

¹⁾ В оригинальной работе [192] была рассмотрена тонкая пленка, причем предполагалось, что плотность тока меняется лишь в поперечном направлении, а вдоль ширины пленки ток однороден. Это не соответствует реальному случаю, ибо ток перераспределяется по пленке и становится неоднородным в двух направлениях. Поэтому мы рассматриваем цилиндр с током.

$$d\Psi/d\rho|_{\rho=R} = 0, \quad (17.53)$$

$$d^2 A/d\rho^2 + \rho^{-1} dA/d\rho - \Psi^2 A = 0, \quad (17.54)$$

$$H = -dA/d\rho. \quad (17.55)$$

Из (17.52) и (17.53) следует, что в первом приближении при $\kappa \ll 1$ $\Psi = \text{const}$. Подставляя это в (17.54), находим, что A пропорционально $I_0(\Psi\rho)$, где I_0 — функция Бесселя от мнимого аргумента. Согласно (17.55), $H(\rho)$ пропорционально $I_1(\Psi\rho)$; вследствие граничного условия имеем

$$H = H_J I_1(\Psi R)/I_1(\Psi R), \quad (17.56)$$

$$A = -(H_J/\Psi) I_0(\Psi R)/I_1(\Psi R). \quad (17.57)$$

Условие разрешимости уравнения для поправки к Ψ аналогично (17.37):

$$\int_0^R (A^2 - 1 + \Psi^2) \rho d\rho = 0.$$

Отсюда получаем

$$H_J^2 = \frac{\Psi^2(1 - \Psi^2) I_1(\Psi R)}{I_0^2(\Psi R) - I_1^2(\Psi R)}. \quad (17.58)$$

Начнем со случая $R \ll 1$. Считая, что $\Psi \lesssim 1$, разложим правую часть (17.58) по R :

$$H_J^2 \approx (1/4) \Psi^4 (1 - \Psi^2) R^2. \quad (17.59)$$

Очевидно, при $R \ll 1$ H_J тоже мало, т. е. разрушение сверхпроводимости не может произойти, оттого что H_J станет равным H_{cm} (в обычных единицах), как это имеет место в массивных образцах согласно правилу Сильсби (§ 15.4). Механизм разрушения сверхпроводимости здесь иной. Если рассмотреть H_J^2 (17.59) как функцию Ψ^2 , то видно, что она обращается в нуль при $\Psi = 0$ и $\Psi = 1$, а посередине имеет максимум. Следовательно, имеется некоторое максимальное значение H_J , которое совместимо со сверхпроводимостью, а при большей величине H_J сверхпроводимость не может существовать. Что происходит при таких больших токах, мы рассмотрим в § 22.9. А пока найдем максимальное значение H_J .

Дифференцируя по Ψ^2 , получаем для точки максимума

$$\Psi^2 = 2/3,$$

$$H_{J \max} = R/3^{3/2}. \quad (17.60)$$

Переходя к обычным единицам и воспользовавшись формулой (17.51), получаем значение критического тока:

$$J_c = (cR^2/3\sqrt{6}) H_{cm}/\delta. \quad (17.61)$$

Так как $J_c \propto R^2$, то разумно ввести критическую плотность тока

$$j_c = J_c/\pi R^2 = (3\pi\sqrt{6})^{-1} c H_{cm}/\delta. \quad (17.62)$$

Величина j_c не зависит от размеров и является характеристикой сверхпроводящего металла.

Физический смысл этой величины можно понять, если подставить формулы микроскопической теории для δ и H_{cm} . При этом получаем

$$j_c = (3\sqrt{2})^{-1} n_s e \Delta(T)/p_0 \quad (17.63)$$

(мы здесь ввели $\Delta(T)$ согласно (17.33) и n_s согласно (17.92)). Из этой формулы следует, что j_c соответствует движению электронов со скоростью порядка $\Delta(T)/p_0$. Итак, приходим к выводу, что куперовское спаривание, а следовательно, и сверхпроводимость существуют лишь до тех пор, пока пары не начинают двигаться со скоростью, большей Δ/p_0 . Это имеет место не только вблизи T_c , но и при любых температурах и находится в соответствии с критерием Ландау (16.1).

Следует заметить, что критическая плотность тока (17.62) весьма велика. Если подставить типичные значения для чистых сверхпроводников: $H_{cm} \sim 10^2 - 10^3$ Э, $\delta \sim 10^{-5} - 10^{-6}$ см, то получается

$$j_c \sim 10^7 - 10^9 \text{ А/см}^2. \quad (17.64)$$

Для больших толщин $R \gg 1$ получаем из формулы (17.58)

$$H_J^2 \approx \Psi^3 (1 - \Psi^2) R.$$

Максимальному значению H_J^2 соответствует $\Psi^2 = 3/5$ и

$$H_{J \text{ max}} \approx (3/5)^{3/4} (2/5)^{1/2} R^{1/2}.$$

Переходя к обычным единицам и выражая J_c , находим

$$J_c \approx 3^{3/4} 5^{-5/4} c H_{cm} R^{3/2} \delta^{-1/2}. \quad (17.65)$$

Полная кривая зависимости H_J^2 от R в приведенных единицах представлена на рис. 17.3 (кривая 1).

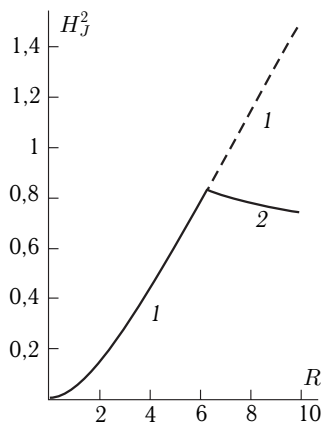


Рис. 17.3

Описанный механизм разрушения сверхпроводимости током имеет место лишь до тех пор, пока радиус цилиндра не слишком велик. Согласно формуле (17.59) магнитное поле тока становится порядка H_{cm} при $R \sim \delta$. При этом возможно разрушение сверхпроводимости магнитным полем тока согласно правилу Сильсби. Если бы образец был массивным, то возникло бы промежуточное состояние, рассмотренное в § 15.4. Однако в промежуточном состоянии образец должен состоять из слоев нормальной и сверхпроводящей фаз, т.е. параметр порядка должен меняться по пространству. Это возможно лишь на расстояниях порядка $\xi \sim \delta/\kappa \gg \delta$. Таким образом, имеется целая область толщин от δ до ξ (или в приведенных единицах от 1 до κ^{-1}), при которых, на первый взгляд, не могут осуществляться ни сверхпроводящее состояние, ни нормальное (поле в середине пленки меньше H_{cm}), ни промежуточное.

Это означает в действительности, что при какой-то толщине происходит скачкообразный переход из сверхпроводящего состояния в нормальное. Строго говоря, такой переход нельзя рассматривать как равновесие фаз, ибо в нормальном состоянии при наличии тока происходит диссипация энергии и состояние не является равновесным. Однако вследствие большой проводимости металла отклонение от равновесия является очень малым. По той же причине электрическое поле всегда мало по сравнению с магнитным. Это дает возможность рассматривать переход в проволоке с током как фазовый переход 1-го рода и учитывать лишь магнитную энергию.

В данном случае условием перехода является равенство свободных энергий в заданном поле, ибо задание полного тока эквивалентно заданию поля на границе. Поскольку поле и в нормальной фазе неоднородно, мы не можем пользоваться формулой (17.20), а должны найти Ω_{sH} и Ω_{nH} при соответствующем распределении H . Из (17.19) имеем

$$\int \Omega_{sH} dV = \int \Omega_n^{(0)} dV + \frac{H_{cm}^2}{2} \int_0^R \left(H^2 - \frac{\Psi^4}{2} - 2H H_J \right) \rho d\rho, \quad (17.66)$$

$$\int \Omega_{nH} dV = \int \Omega_n^{(0)} dV + \frac{H_{cm}^2}{2} \int_0^R \left(H^2 - 2H H_J \right) \rho d\rho. \quad (17.67)$$

В качестве $H(\rho)$ для сверхпроводника надо подставить формулу (17.56). Для нормального металла имеем $j = \text{const} = J/\pi R^2$; значит,

$$H = 2J(\rho)/c\rho = 2j\pi\rho^2/c\rho = 2J\rho/cR^2 = H_J\rho/R \quad (17.68)$$

(последнее выражение справедливо и в приведенных единицах).

Рассмотрим более детально случай $R \gg 1$. Используя асимптотики функций I_ν при $z \gg 1$:

$$I_\nu(z) \approx (2\pi z)^{-1/2} e^z \left[1 - (2z)^{-1} \left(\nu^2 - (1/4) \right) \right], \quad (17.69)$$

находим из (17.58) и (17.56)

$$\Psi \approx 1 - O(R^{-1}), \quad (17.70)$$

$$H \approx H_J(R/\rho)^{1/2} e^{\rho-R}. \quad (17.71)$$

Отсюда вытекает, что в сверхпроводящей фазе H отлично от нуля лишь в слое порядка δ , т.е. с точностью до членов порядка R^{-1} можно заменить подынтегральное выражение в (17.66) на $-\Psi^4/2 \approx -1/2$. Вычисляя Ω_{nH} с H (17.68) и используя условие $\Omega_{nH} = \Omega_{sH}$, получаем $H_{J_c} = (3/5)^{1/2}$, или, в обычных единицах,

$$H_{J_c} = (6/5)^{1/2} H_{cm}. \quad (17.72)$$

Как и следовало ожидать, H_{J_c} несколько больше H_{cm} , ибо поле в нормальном состоянии меняется от 0 до H_{J_c} на границе. Однако это отличие составляет лишь 10%. Поскольку H_J пропорционально J , то из (17.79) имеем

$$J_c = J_{\text{Silsbee}} (6/5)^{1/2}. \quad (17.73)$$

В случае $R \sim 1$ поле H_{J_c} не удастся выразить в аналитической форме. Соответствующая кривая представлена на рис. 17.3 (кривая 2). Пересечение кривых 1 и 2 происходит при довольно большом значении R ($R = 6,24$). В этой области J_c слева от пересечения хорошо описывается асимптотикой (17.65). Отметим, что продолжение кривой 2 за пределы точки пересечения налево бессмысленно, ибо $H_{J_{\max}}$ соответствует максимальному полю, совместимому со сверхпроводимостью.

Как и при всяком фазовом переходе 1-го рода, возможен гистерезис. При увеличении тока переход может задержаться вплоть до предела устойчивости метастабильного сверхпроводящего состояния, соответствующего максимуму поля H_J (17.58) (кривая 1 на рис. 17.3). При уменьшении тока переход, по-видимому, может задержаться до $J = 0$.

Напомним, что все рассуждения этого раздела справедливы лишь до тех пор, пока $R \ll \xi$ (в приведенных единицах $R \ll \kappa^{-1}$). При больших толщинах возникает промежуточное состояние.

§ 17.5. Квантование магнитного потока

Рассмотрим полый цилиндр, или, иначе говоря, трубку с толщиной стенки больше δ . Пусть этот цилиндр помещен во внешнее продольное магнитное поле, меньшее критического (в случае проводника 2-го рода $H < H_{c1}$, гл. 18). Представим себе, что внешнее поле

меняется со временем. Мы не рассматривали обобщение уравнений ГЛ на нестационарные задачи, но для наших целей достаточно уравнения Лондонов (17.36). Проинтегрируем это уравнение вдоль замкнутого контура, целиком лежащего в толще сверхпроводника и охватывающего полость. При этом получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint \Lambda \mathbf{j} d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int \text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{S} = -c^{-1} \int \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} d\mathbf{S}$$

(мы здесь воспользовались уравнением Максвелла). Следовательно,

$$\oint \Lambda \mathbf{j} d\mathbf{l} + c^{-1} \int \mathbf{H} d\mathbf{S} = \text{const}.$$

Так как ток может протекать лишь в поверхностном слое, то на контуре, лежащем в толще сверхпроводника, $\mathbf{j} = 0$. Значит,

$$\Phi = \int \mathbf{H} d\mathbf{S} = \text{const}. \quad (17.74)$$

Итак, мы пришли к выводу, что магнитный поток, проходящий через контур, лежащий в толще сверхпроводника, не может меняться со временем.

Отметим, что это заключение справедливо не только для рассматриваемой задачи о трубке с полостью, но и для неоднородного сверхпроводника, у которого разные участки имеют разные критические параметры. В таком образце могут образоваться многосвязные сверхпроводящие области, охватывающие нормальные участки, и благодаря этому при уменьшении магнитного поля возникает явление «захваченного магнитного потока».

Вернемся, однако, к задаче о трубке. Мы покажем сейчас, что значение магнитного потока, удерживаемого сверхпроводящей трубкой, не может быть произвольным. Рассмотрим для этой цели выражение для сверхпроводящего тока (17.9). Запишем функцию Ψ в виде $\Psi = |\Psi| \exp(i\chi)$, т. е. введем модуль и фазу. Тогда ток запишется в виде

$$\mathbf{j} = (\hbar e/m) |\Psi|^2 [\nabla \chi - (2e/\hbar c) \mathbf{A}]. \quad (17.75)$$

Поделим $\mathbf{j}$ на $|\Psi|^2$ и проинтегрируем вдоль того же контура, что и раньше, т. е. вдоль замкнутого контура, охватывающего полость и проходящего в толще стенки трубки. Получаем при этом

$$\oint \frac{\mathbf{j}}{|\Psi|^2} d\mathbf{l} = \frac{\hbar e}{m} \left[\oint \nabla \chi d\mathbf{l} - \frac{2e}{\hbar c} \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} \right]. \quad (17.75')$$

Если контур проходит внутри стенки трубки, то на нем $\mathbf{j} = 0$. Второй интеграл справа равен

$$\oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int \mathbf{H} d\mathbf{S} = \Phi.$$

Что касается первого интеграла, то на первый взгляд он должен равняться нулю, как всякий интеграл от градиента функции по замкнутому контуру. Однако в действительности это не обязательно должно быть так. Для однозначности функции $\Psi = |\Psi| \exp(i\chi)$ не требуется, чтобы фаза χ не менялась при обходе по замкнутому контуру; достаточно лишь того, чтобы она менялась на $2\pi n$, где n — целое число. Итак, в общем случае

$$\oint \nabla \chi d\mathbf{l} = 2\pi n.$$

При этом получаем

$$\Phi = n\Phi_0, \quad (17.76)$$

$$\Phi_0 = \pi \hbar c / e = 2,07 \cdot 10^{-7} \text{ Э} \cdot \text{см}^2. \quad (17.77)$$

Следовательно, магнитный поток, проходящий через контур, может принимать лишь дискретный ряд значений. Это явление называется квантованием магнитного потока, а величина Φ_0 — квантом потока.

Явление квантования потока в сверхпроводнике было впервые предсказано Ф. Лондоном в 1950 г. [53]. Однако, не имея представления о куперовском спаривании, он считал заряд носителей равным e вместо $2e$ и получил квант потока равным $2\Phi_0$. Напомним, что квант потока фигурирует и в теории для нормального металла. В металле, помещенном в магнитное поле, электроны движутся по спиральным траекториям (в случае замкнутой ферми-поверхности); эти траектории охватывают магнитный поток, равный $n2\Phi_0$ (§ 10.4). Квант магнитного потока Φ_0 определяет период интерференционных осцилляций сопротивления полого нормального цилиндра (§ 11.4).

В рассматриваемом нами случае квантованный магнитный поток Φ есть сумма потока, проходящего через полость, и потока в поверхностном слое сверхпроводника толщиной δ , примыкающего к полости. Если радиус трубки гораздо больше δ , то последним можно пренебречь.

Для экспериментального определения потока через полость нельзя просто менять внешнее поле. Согласно условию (17.74) при этом внутренний поток не будет меняться. Поэтому поступают так [196]. Сверхпроводник охлаждают в заданном внешнем поле от температуры выше T_c до какой-то определенной температуры ниже T_c . При переходе в сверхпроводящее состояние в нем замораживается определенный магнитный поток. Значение этого потока можно определить из условия минимума разности свободных энергий (17.20):

$$\int (\Omega_{sH} - \Omega_{nH}) dV = \\ = \frac{H_{cm}^2}{4\pi} \left[(H_{\text{int}} - H_0)^2 \pi R_1^2 + \int_{R_1}^{R_2} \left\{ (H - H_0)^2 - \frac{|\Psi|^4}{2} \right\} 2\pi \rho d\rho \right], \quad (17.78)$$

где R_1 и R_2 — внутренний и внешний радиусы трубки, H_{int} — поле внутри трубки. Первый член в скобках относится к полости, а второй к сверхпроводящей трубке. Надо найти H_{int} , соответствующее условию

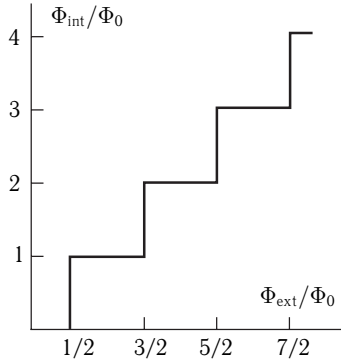


Рис. 17.4

квантования (17.76) и отвечающее минимальности выражения (17.78). Поскольку во втором члене зависимость от H_{int} распространяется лишь на слой толщины δ , можно его не учитывать.

Минимизация первого члена приводит к следующему результату: магнитный поток через полость, равный $\Phi_{\text{int}} = n\Phi_0$, осуществляется в таком интервале полей H_0 , когда $\Phi_{\text{ext}} = H_0\pi R_1^2$ находится в промежутке

$$(n - 1/2)\Phi_0 < \Phi_{\text{ext}} < (n + 1/2)\Phi_0.$$

При переходе границы этого интервала происходит переход к следующему n . Эта ситуация изображена на рис. 17.4.

Согласно приведенному выводу квантование магнитного потока является следствием изменения фазы параметра порядка Ψ на $2\pi n$ при обходе по замкнутому контуру. Такое поведение фазы было продемонстрировано в очень остроумном эксперименте (Литтл, Паркс, 1962) [197]. Возьмем очень тонкую цилиндрическую сверхпроводящую пленку, толщиной гораздо меньше глубины проникновения, и приложим магнитное поле вдоль оси цилиндра. Столь тонкая пленка практически не экранирует магнитное поле (ее намагниченность в поле, согласно (17.40), равна нулю), а следовательно, поля внутри и снаружи пленки не различаются. Радиус цилиндра будем предполагать гораздо большим глубины проникновения. В этом случае все величины, в том числе и векторный потенциал $\mathbf{A}$, практически не меняются вдоль толщины пленки.

Выберем $\mathbf{A}$ так, чтобы он обладал лишь компонентой A_φ в цилиндрических координатах. Подставим в свободную энергию (17.5) $\Psi = |\Psi| \exp(i\chi)$. Подынтегральное выражение имеет вид

$$\Omega_s - \Omega_n^{(0)} = \alpha\tau|\Psi|^2 + b|\Psi|^4/2 + [\hbar^2/4m][\nabla\chi - (2e/c\hbar)\mathbf{A}]^2|\Psi|^2 + H^2/8\pi \quad (17.79)$$

(в соответствии с результатами § 17.4 можно считать $|\Psi| = \text{const}$). Комбинация $\mathbf{A} - (c\hbar/2e)\nabla\chi$ является градиентно-инвариантной, так как любой градиент, добавленный к $\mathbf{A}$, может быть компенсирован изменением фазы.

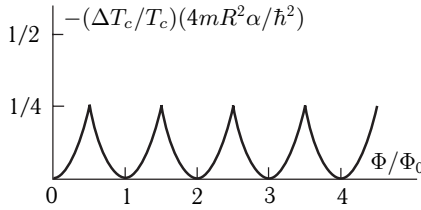


Рис. 17.5

Воспользовавшись тем, что $\nabla\chi$ и $\mathbf{A}$ постоянны вдоль сверхпроводящей пленки, запишем комбинацию, входящую в квадратную скобку (17.79), в виде среднего значения:

$$\begin{aligned}\nabla\chi - (2e/c\hbar)\mathbf{A} &= (2\pi R)^{-1} \oint [\nabla\chi - (2e/c\hbar)\mathbf{A}] d\mathbf{l} = \\ &= (2\pi R)^{-1} [2\pi n - (2e/c\hbar)\Phi] = R^{-1}(n - \Phi/\Phi_0),\end{aligned}$$

где интеграл взят по контуру сечения цилиндра, перпендикулярному оси, $\Phi = H\pi R^2$ — магнитный поток через цилиндр, Φ_0 — квант потока. Подставляя полученное выражение в (17.79), находим

$$\begin{aligned}\Omega_s - \Omega_n^{(0)} &= \\ &= \alpha\tau|\Psi|^2 + \left[\hbar^2/2mR^2\right] (n - \Phi/\Phi_0)^2 |\Psi|^2 + b|\Psi|^4/2 + H^2/8\pi.\end{aligned}\quad (17.80)$$

Число n подбирается так, чтобы соответствовать минимуму свободной энергии, т. е. данное n осуществляется при

$$n - 1/2 < \Phi/\Phi_0 < n + 1/2. \quad (17.81)$$

В формуле (17.80) второе слагаемое может быть добавлено к первому с заменой τ на τ' :

$$\tau' = \tau + (\hbar^2/4mR^2\alpha)(n - \Phi/\Phi_0)^2.$$

Из условия $\tau' = 0$ получаем изменение критической температуры:

$$\Delta T_c/T_c = -(\hbar^2/4mR^2\alpha)(\Phi/\Phi_0 - n)^2. \quad (17.82)$$

Подставляя микроскопические выражения для α из формул (17.14) и (17.18), находим

$$-\Delta T_c/T_c = \begin{cases} C_1 (\xi_0^2/R^2) (\Phi/\Phi_0 - n)^2, & \xi_0 \ll l; \\ C_2 (\xi_0 l/R^2) (\Phi/\Phi_0 - n)^2, & \xi_0 \gg l, \end{cases} \quad (17.83)$$

где

$$C_1 = 7\pi^2\zeta(3)/48\gamma^2 = 0,55, \quad C_2 = \pi^3/24\gamma = 0,72, \quad l = v\tau_{\text{тг}}.$$

Из (17.83) вытекает, что зависимость $-\Delta T_c/T_c$ от Φ/Φ_0 состоит из периодически повторяющихся параболических кусков, каждый из которых отвечает интервалу (17.81) с соответствующим n (рис. 17.5). Это предсказание соответствует опыту [197]. Отметим, что в данном опыте сверхпроводник из-за своей малой толщины не может захватить магнитный поток, а поэтому нет и квантования потока; однако неоднозначность фазы может иметь место, и именно последняя измеряется в данном опыте.

СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ ВТОРОГО РОДА**§ 18.1. Магнитные свойства сверхпроводников
2-го рода (качественная картина)**

В этой главе мы изучим свойства сверхпроводников 2-го рода, у которых, согласно (16.96), $\kappa > 1/\sqrt{2}$ и $\sigma_{ns} < 0$. Прежде всего, отметим, что при $\sigma_{ns} < 0$ невозможен фазовый переход 1-го рода в нормальное состояние, даже если речь идет о сверхпроводящем цилиндре в продольном поле. Действительно, представим себе, что сверхпроводник разбился на слои нормальной и сверхпроводящей фаз, параллельные магнитному полю. В § 17.4 было определено критическое поле тонкого слоя, которое оказалось пропорциональным $H_{cm}\delta/d$; оно может значительно превышать H_{cm} . Следовательно, таким слоям энергетически выгодно сохранять сверхпроводимость в полях выше H_{cm} . В обычных сверхпроводниках 1-го рода разбиения на слои не происходит из-за возникновения поверхностной энергии σ_{ns} на границах слоев. Но если $\sigma_{ns} < 0$, то ничто не препятствует разбиению сверхпроводника на слои n - и s -фаз.

Следовательно, фазовый переход сверхпроводника 2-го рода будет идти путем постепенного вытеснения сверхпроводящей фазы, и металл станет нормальным при том поле, когда в нем не сможет существовать даже бесконечно малый сверхпроводящий участок. Итак, можно заключить, что переход растянется на целый интервал магнитных полей, и в этом интервале внешнее магнитное поле будет частично проникать в сверхпроводник, т.е. эффект Мейснера будет неполным. Сверхпроводник при этом будет находиться в особом состоянии, называемом смешанным, которое при некотором поле H_{c1} (нижнее критическое поле) граничит со сверхпроводящей фазой, а при другом

поле H_{c2} (верхнее критическое поле) — с нормальной фазой (Абрикосов, 1957) [198].

Поля H_{c1} и H_{c2} могут быть определены по порядку величины из качественных соображений. Начнем с H_{c2} — поля, при котором полностью исчезает сверхпроводимость. Разрушение куперовских пар происходит вследствие их закручивания в магнитном поле. Очевидно, пара может сохраниться лишь до тех пор, пока ларморовский радиус больше ее размера, т. е.

$$r_L \sim cp_{\perp}/eH > \xi.$$

В этой формуле $p_{\perp}$ — это перпендикулярная компонента импульса, соответствующего движению пары как целого. Поэтому $p_{\perp} \leq p \sim mv_s$, где v_s — скорость пары. Из критерия Ландау (см. также формулу (17.63)) следует, что $v_s < \Delta/p_0$, иначе пара разрушается. То же самое условие можно записать в виде $p_{\perp} < \hbar/\xi$. Итак, имеем

$$\xi < cp_{\perp}/eH < c\hbar/\xi eH,$$

или

$$H < c\hbar/e\xi^2 \sim H_{c2}. \quad (18.1)$$

Поле H_{c2} можно выразить через H_{cm} :

$$H_{c2} \sim \frac{c\hbar}{e\xi} \frac{\Delta}{\hbar v} \sim \frac{c}{e\xi v} \frac{H_{cm}\hbar^{3/2}}{(mp_0)^{1/2}} \sim H_{cm} \frac{\delta_L}{\xi} \sim H_{cm}\kappa. \quad (18.2)$$

Мы пока рассматривали чистый сверхпроводник. Если же в нем имеются примеси и $l \ll \xi_0$, то в формуле (18.1) надо заменить ξ на $\xi' \sim (\xi l)^{1/2}$. При этом получаем

$$H_{c2} \sim \frac{c\hbar}{e\xi l} \sim \frac{c\hbar}{el} \frac{\Delta}{\hbar v} \sim H_{cm} \frac{\delta_L}{l} \sim H_{cm}\kappa. \quad (18.3)$$

Итак, в обоих случаях поле H_{c2} порядка $H_{cm}\kappa$. Однако второй случай является более важным. Из него следует, что, увеличивая концентрацию примесей и таким образом уменьшая длину пробега (так как $l \propto n_i^{-1}$), можно сильно увеличить H_{c2} . А вплоть до поля H_{c2} в металле сохраняются сверхпроводящие участки, т. е. возможен ток без сопротивления. Уменьшение длины свободного пробега возможно в принципе вплоть до межатомных расстояний. Учитывая, что обычные значения $H_{cm} \sim 10^2$ – 10^3 Э, а $\delta_L \sim 10^{-5}$ – 10^{-6} см, мы получаем предельную оценку для полей H_{c2} [199]:

$$H_{c2} < 10^3 (10^{-5}/10^{-8}) \text{ Э} \sim 10^6 \text{ Э}. \quad (18.4)$$

Это столь большие поля, что может возникнуть вопрос: не произойдет ли разрушение пар раньше благодаря ориентации спина

обоих электронов параллельно магнитному полю (парамагнитный предел Клогстона [200])? Порядок величины этого предела определяется, очевидно, условием

$$\beta H_{cp} \approx 2\Delta, \quad (18.5)$$

где β — магнетон Бора. Учитывая, что наибольшее T_c порядка 20 К, мы получаем отсюда

$$H_{cp} < 10^6 \text{ Э}, \quad (18.6)$$

т. е. верхние пределы для H_{cp} и H_{c2} совпадают, и цифру 10^6 Э можно считать предельной.

Что же происходит при уменьшении поля ниже H_{c2} ? Если поле частично проникает в сверхпроводник, то в нем должны существовать незатухающие вихревые токи. Вблизи предельного поля H_{c1} металл должен быть почти полностью сверхпроводящим, т. е. участки с вихревыми токами должны быть редкими. Определить поле H_{c1} можно, если учесть, что элементарный вихрь является квантовым образованием. Впервые это было обнаружено при исследовании сверхтекучести жидкого гелия (Онсагер (1949) [201], Файнман (1955) [202]).

Представим себе, что куперовские пары совершают вихревое движение вокруг некоторой оси. Проведем круговой контур вокруг оси. Скорость пар на этом контуре, очевидно, постоянна. Согласно правилу квантования Бора

$$\oint p dq = 2m \oint \mathbf{v}_s d\mathbf{l} = 2m v_s \cdot 2\pi\rho = 2\pi n\hbar.$$

Следовательно,

$$v_s = n\hbar/2m\rho,$$

т. е. скорость пар убывает обратно пропорционально расстоянию от оси.

Это заключение делается неверным, когда $\rho \lesssim \xi$ — размера пар.

С другой стороны, мы не учли, что пары заряженные и их движение означает возникновение электрического тока и магнитного поля. Последние должны затухать на расстоянии порядка глубины проникновения δ . Следовательно, полученная формула верна лишь при $\rho < \delta$. Ниже мы предположим, что $\delta \gg \xi$, т. е. $\kappa \gg 1$.

Что касается числа n , то оно, в принципе, может быть любым. Однако довольно ясно, что надо взять $n = 1$. Прежде всего, очевидно, что маленький вихрь может легче зародиться, чем большой, а потому нижнее критическое поле H_{c1} соответствует рождению наименьшего вихря. При больших полях вопрос решается условием минимальности свободной энергии. Из этого условия можно найти положения осей вихрей. Представим себе, например, что $n = 2$. Это соответствует двум слипшимся вихрям с $n = 1$. Для установления положения оси вихря нам надо найти минимум свободной энергии по координатам оси, т. е. по точкам x, y ее пересечения с плоскостью, перпендикулярной магнитному полю (ось z). Но если бы вихри не слиплись, то мы имели

бы возможность минимизировать Ω по x_1, y_1 и x_2, y_2 , т. е. по большему числу переменных. Это в общем случае приводит к более низкому минимуму Ω . Итак, будем считать $n = 1$ и, следовательно ¹⁾,

$$v_s = \hbar/2m\rho, \quad \xi \ll \rho \ll \delta. \quad (18.7)$$

Энергия такого вихря в основном является кинетической энергией куперовских пар. На единицу длины вихря приходится энергия, равная (плотность пар равна $n_s/2$)

$$\varepsilon_0 = \frac{n_s}{2} \int_{\xi}^{\delta} \frac{2mv_s^2}{2} 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi n_s \hbar^2}{4m} \int_{\xi}^{\delta} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\pi n_s \hbar^2}{4m} \ln \frac{\delta}{\xi} = \frac{\pi n_s \hbar^2}{4m} \ln \kappa$$

(здесь мы подставили (18.7)). Магнитный момент вихря, приходящийся на единицу длины, равен

$$M = \frac{n_s}{2} \frac{2e}{c} \int_{\xi}^{\delta} \rho v_s 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi e \hbar n_s}{mc} \int_{\xi}^{\delta} \rho d\rho \approx \frac{\pi e \hbar n_s}{2mc} \delta^2$$

(мы пренебрегли ξ^2 по сравнению с δ^2).

В присутствии внешнего поля H_{c2} у вихря появляется магнитная энергия — MH . Наименьшее поле, при котором может появиться элементарный вихрь, соответствует $\varepsilon_0 - MH = 0$, или

$$H_{c1} = \varepsilon_0/M \sim (c\hbar/e\delta^2) \ln \kappa.$$

Пользуясь формулами микроскопической теории, получаем

$$H_{c1} \sim H_{cm} \kappa^{-1} \ln \kappa. \quad (18.8)$$

Как и в случае H_{c2} , эта формула относится и к чистому сверхпроводнику и к случаю $l \ll \xi_0$. Из формулы (18.8) следует, что чем выше H_{c2} (т. е. чем больше κ), тем ниже H_{c1} , т. е. тем раньше начинается проникновение магнитного поля в сверхпроводник.

В следующих двух параграфах мы изложим количественную теорию магнитных свойств сверхпроводников 2-го рода на основе уравнений теории Гинзбурга–Ландау [198]. Хотя эта теория справедлива, строго говоря, лишь вблизи T_c , но, как уже отмечалось раньше, все основные выводы применимы при любых температурах.

¹⁾ Квантовые вихри сверхпроводящего тока, затухающие на расстоянии δ и несущие один квант магнитного потока Φ_0 (см. § 18.2, 18.3), обычно называют флюксонидами или абрикосовскими вихрями.

§ 18.2. Количественная теория для окрестности H_{c2}

Начнем с поля H_{c2} . Поскольку это предельное поле для существования сверхпроводимости, то бесконечно малый зародыш сверхпроводящей фазы должен уменьшаться со временем при $H > H_{c2}$ и возрастать со временем при $H < H_{c2}$. Значит, при $H = H_{c2}$ возможен стационарный бесконечно малый сверхпроводящий зародыш.

Рассмотрим одномерные уравнения ГЛ (17.24)–(17.26) ¹⁾. Считая Ψ бесконечно малым, оставим лишь члены низшего порядка по Ψ . При этом находим

$$\kappa^{-2} d^2 \Psi / dx^2 + \Psi(1 - A^2) = 0, \quad (18.9)$$

$$d^2 A / dx^2 = 0. \quad (18.10)$$

Из (18.10) получаем $A = H_0 x$ (считаем $\mathbf{H} \parallel z$, $\mathbf{A} \parallel y$), причем начало координат можно выбрать в произвольной точке. Подставляя в (18.9), имеем

$$-d^2 \Psi / dx^2 + \kappa^2 H_0^2 x^2 \Psi = \kappa^2 \Psi. \quad (18.11)$$

Надо найти решение, обращающееся в нуль при $x \rightarrow \pm\infty$.

Мы нарочно расставили члены уравнения (18.11) так, чтобы оно имело сходство с уравнением Шрёдингера для гармонического осциллятора:

$$-(\hbar^2/2m) d^2 \Psi / dx^2 + (k/2) x^2 \Psi = \varepsilon \Psi. \quad (18.12)$$

Как хорошо известно из квантовой механики, последнее уравнение имеет решения, обращающиеся в нуль при $x \rightarrow \pm\infty$, для

$$\varepsilon = \hbar\omega (n + 1/2),$$

где $\omega = (k/m)^{1/2}$. Если считать, что коэффициент при первом члене в (18.12) равен a , а при втором — равен b , то $\hbar\omega = 2\sqrt{ab}$. Сравнивая (18.11) с (18.12), получаем $2\sqrt{ab} = 2\kappa H_0$, а следовательно, искомые решения существуют при $\kappa^2 = 2\kappa H_0 (n + 1/2)$, или ²⁾

$$H_0 = \kappa / (2n + 1).$$

¹⁾ На первый взгляд может показаться, что поиск зародыша, зависящего лишь от одной координаты, является ограничением общности. В действительности однородному магнитному полю соответствует векторный потенциал, линейно зависящий от координат. Выбрав $A_y = H_0 x$, видим, что в уравнение для Ψ входит явно лишь координата x .

²⁾ Возможность возникновения сверхпроводящих участков с малым Ψ при $H_0 = \kappa / (2n + 1)$ была отмечена в работе [192]. Но авторы ограничились рассмотрением сверхпроводников 1-го рода с $\kappa < 1/\sqrt{2}$, для которых эти значения H_0 были меньше H_{cm} , и постановка вопроса о малых Ψ не имела смысла (если не говорить о поле переохладения, которое не исследовалось в работе [192]).

Нас интересует наибольшее поле, при котором возможно решение $\Psi \neq 0$. Оно соответствует $n = 0$ и равно

$$H_{c2} = \kappa, \quad (18.13)$$

или, в обычных единицах,

$$H_{c2} = \kappa \sqrt{2} H_{cm}. \quad (18.14)$$

Эта величина согласуется с качественной оценкой (18.2), (18.3). Отметим, что для $\kappa > 1/\sqrt{2}$ поле $H_{c2} > H_{cm}$.

Решение, соответствующее низшему уровню осциллятора, имеет вид $\Psi \propto \exp \left[-(\sqrt{km}/2\hbar) x^2 \right]$. Опять обозначив коэффициенты в (18.12) через a и b , имеем $\Psi \propto \exp \left[-(1/2)(b/a)^{1/2} x^2 \right]$. В нашем случае получаем $\Psi \propto \exp \left[-(\kappa H_0/2) x^2 \right]$, или, вследствие $H_0 = \kappa$,

$$\Psi \propto \exp \left(-\kappa^2 x^2/2 \right). \quad (18.15)$$

Как уже отмечалось выше, можно выбрать начало координат $x = 0$ в любой точке, т. е. зародыш сверхпроводящей фазы может появиться в любом месте сверхпроводника. Изменение начала отсчета соответствует изменению калибровки векторного потенциала, если мы хотим пользоваться действительными Ψ . Если же мы хотим пользоваться единой калибровкой, то надо взять комплексное Ψ . Действительно, записав $\Psi = |\Psi| \exp(i\chi)$ и подставив в (17.6'), находим

$$(-i\kappa^{-1}\nabla + \kappa^{-1}\nabla\chi - \mathbf{A})^2 |\Psi| - |\Psi| + |\Psi|^3 = 0; \quad (18.16)$$

достаточно взять $\chi = ky$ и получается прежнее уравнение с заменой

$$A_y \rightarrow A_y - k/\kappa = H_0(x - k/\kappa H_0).$$

Следовательно, малый зародыш может иметь форму, не только выраженную соотношением (18.15), но и

$$\Psi \propto \exp \left[iky - \kappa^2 (x - k\kappa^{-2})^2/2 \right]. \quad (18.17)$$

Очевидно, решением может быть и любая линейная комбинация функций типа (18.17). Поскольку условия вдоль всего сверхпроводника однородны, то наиболее естественно предположить линейную комбинацию решений, центрированных через равные промежутки, т. е.

$$\Psi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp \left[i kny - \kappa^2 (x - kn\kappa^{-2})^2/2 \right]. \quad (18.18)$$

Теперь рассмотрим решение уравнения (17.6') при H_0 , немного меньших $\varkappa$. Применим метод последовательных приближений. Прежде всего, учтем член с Ψ в уравнении для A (17.8'). Подставляя (18.18), получаем два уравнения:

$$\begin{aligned} \partial^2 A / (\partial x \partial y) &= \partial H / \partial y = (i/2\varkappa) \sum_{n,m} C_n C_m^* \times \\ &\times \exp \left[ik(n-m)y - \varkappa^2 (x - kn\varkappa^{-2})^2 / 2 - \varkappa^2 (x - km\varkappa^{-2})^2 / 2 \right] k(m-n), \\ -\partial^2 A / \partial x^2 &= -\partial H / \partial x = (2\varkappa)^{-1} \sum_{n,m} C_n C_m^* \times \\ &\times \exp \left[ik(n-m)y - \varkappa^2 (x - kn\varkappa^{-2})^2 / 2 - \varkappa^2 (x - km\varkappa^{-2})^2 / 2 \right] \times \\ &\times \left[k(n+m) + 2\varkappa^2 x \right] \end{aligned}$$

(в правой стороне (17.8') мы взяли $A = H_0 x$). Отсюда легко показать, что

$$\begin{aligned} H &= \partial A / \partial x = H_0 - |\Psi|^2 / 2\varkappa, \\ A &= H_0 x - (2\varkappa)^{-1} \int |\Psi|^2 dx. \end{aligned} \quad (18.19)$$

Рассмотрим теперь следующее приближение уравнения (17.6'). Запишем

$$\Psi = \Psi^{(0)} + \sum_n e^{ikny} \psi_n^{(1)}(x),$$

где $\Psi^{(0)}$ есть функция (18.18). Будем считать второй член малой добавкой и напишем уравнение (17.6') в первом порядке по этой добавке. При этом получается линейное неоднородное уравнение, которое можно разделить на уравнения для отдельных $\psi_n^{(1)}$. Векторный потенциал подставим в виде (18.19), причем запишем первый член в виде $\varkappa x + (H_0 - \varkappa)x$ и второе слагаемое будем считать добавкой первого порядка, равно как и второй член в (18.19).

В результате находим

$$\begin{aligned} (kn\varkappa^{-1} - \varkappa x)^2 \psi_n^{(1)} - \varkappa^{-2} d^2 \psi_n^{(1)} / dx^2 - \psi_n^{(1)} &= \\ &= 2(\varkappa - H_0) \varkappa x (x - kn\varkappa^{-2}) C_n \psi_n(x) + \\ &+ \sum_{m,p} C_p C_m^* C_{n-p+m} \left\{ \left[x - k(n - (p-m)/2) \varkappa^{-2} \right] \times \right. \\ &\times \left. \psi_{n-p+m}(x) \int_x^x \psi_p(x') \psi_m(x') dx' - \psi_p(x) \psi_m(x) \psi_{n-p+m}(x) \right\}, \end{aligned} \quad (18.20)$$

где

$$\psi_n(x) = \exp \left[-\kappa^2 (x - kn\kappa^{-2})^2 / 2 \right]. \quad (18.21)$$

Для того чтобы это неоднородное уравнение имело решение, надо, чтобы его правая часть была ортогональна решению однородного уравнения с теми же граничными условиями. Таковым является $\psi_n(x)$. Из условия ортогональности получаем

$$2^{-1/2} \left[(2\kappa^2)^{-1} - 1 \right] \sum_{p,m} C_p C_m^* C_{n-p+m} \times \\ \times \exp \left\{ -k^2 \left[(p-n)^2 + (p-m)^2 \right] (2\kappa^2)^{-1} \right\} + C_n (\kappa - H_0) / \kappa = 0. \quad (18.22)$$

Умножим это уравнение на C_n^* и просуммируем по n . Получившееся соотношение можно записать в виде (см. (18.18))

$$[(\kappa - H_0) / \kappa] |\overline{\Psi}|^2 + \left[(2\kappa^2)^{-1} - 1 \right] |\overline{\Psi}|^4 = 0. \quad (18.23)$$

Индукция, т. е. среднее поле, получается из формул (18.19), (18.23):

$$B = \overline{H} = H_0 - |\overline{\Psi}|^2 (2\kappa)^{-1} = H_0 - \left[\left(|\overline{\Psi}|^2 \right)^2 / |\overline{\Psi}|^4 \right] (2\kappa)^{-1} |\overline{\Psi}|^4 / |\overline{\Psi}|^2 = \\ = H_0 - \beta_A^{-1} (\kappa - H_0) / (2\kappa^2 - 1), \quad (18.24)$$

где

$$\beta_A = |\Psi|^4 / \left(|\overline{\Psi}|^2 \right)^2 \quad (18.25)$$

— величина, не зависящая от H_0 .

Найдем свободную энергию по формуле (17.19). Подставляя в нее формулы (18.18) и (18.19) и выражая H_0 через B согласно (18.24), получаем (все $|\overline{\Psi}|^2$ и $|\overline{\Psi}|^4$ вычисляем с помощью формул (18.25) и (18.23))

$$\frac{\Omega_s - \Omega_n^{(0)}}{H_{cm}^2 / 4\pi} = B^2 - \frac{(\kappa - B)^2}{1 + (2\kappa^2 - 1) \beta_A}. \quad (18.26)$$

Это термодинамический потенциал относительно B . Чтобы получить отсюда внешнее поле, надо вычислить $(1/2) \partial \Omega_s / \partial B$. Имеем при этом

$$H_{\text{ext}} = B + \frac{(\kappa - B)}{1 + (2\kappa^2 - 1) \beta_A}. \quad (18.27)$$

Решая уравнение (18.24) относительно H_0 , получаем то же выражение, т. е. $H_0 = H_{\text{ext}}$.

Минимум свободной энергии (18.26) достигается при минимальном значении β_A . Это позволяет выбрать коэффициенты C_n и k в формуле (18.18) для Ψ . Отметим, что, согласно (18.25), $\beta_A > 1$. Действительно, если $|\Psi|^2 = \overline{|\Psi|^2} + q$, то $\bar{q} = 0$. В то же время $\overline{|\Psi|^4} = \overline{(\overline{|\Psi|^2} + q)^2} = (\overline{|\Psi|^2})^2 + \overline{q^2} > (\overline{|\Psi|^2})^2$. Нетрудно увидеть, что уравнение (18.22), полученное нами из условия разрешимости неоднородного уравнения (18.20), может быть записано в виде

$$\partial\beta_A/\partial C_n^* = 0, \quad (18.28)$$

т. е. следует из требования минимальности β_A .

Полный анализ вопроса о выборе правильного решения является весьма трудоемким, и мы не приводим его здесь (см. [203]). Если взять простейший вариант, а именно положить все коэффициенты в (18.18) равными, то оказывается,

$$\beta_A = (k/\kappa\sqrt{2\pi}) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-k^2 n^2 / 2\kappa^2) \right]^2.$$

Минимальное значение достигается при $k = \kappa(2\pi)^{1/2}$ и равно

$$\beta_A^\square = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2) \right]^2 = \vartheta_3^2(1; 0) = 1,18, \quad (18.29)$$

где ϑ_3 — тэта-функция, определяемая в общем случае формулой

$$\vartheta_3(X; Y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi X n^2 + 2\pi i n Y). \quad (18.30)$$

Сама функция Ψ может быть записана в виде

$$\Psi^\square = C \exp(-\kappa^2 x^2 / 2) \vartheta_3 \left[1; (2\pi)^{1/2} \kappa i (x + iy) \right]. \quad (18.31)$$

Пользуясь свойствами ϑ_3 -функций, можно показать, что при повороте координатной системы на $\pi/2$ функция Ψ умножается на фазовый множитель $\exp(i\kappa^2 xy)$, а в остальном не меняется. Таким образом, $|\Psi|^2$ имеет симметрию квадратной решетки. В точках $x = (\sqrt{2\pi}/\kappa) \times (m + 1/2)$, $y = (\sqrt{2\pi}/\kappa) (n + 1/2)$ (m и n — целые числа) функция Ψ обращается в нуль. Согласно формуле (18.19) магнитное поле в этих точках достигает максимального значения H_0 .

В результате полного анализа [204] выяснилось, что наименьшим значением β_A обладает решение, имеющее симметрию треугольной решетки, которое можно записать в виде

$$\Psi^\Delta = C \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{\pi i n (n-1)}{2} - \frac{\kappa^2 (x - kn/\kappa^2)^2}{2} + i k n y \right], \quad (18.32)$$

где $k = \kappa(\pi\sqrt{3})^{1/2}$. Возможны и другие формы записи, но они отличаются лишь выбором системы отсчета. Сравнение с формулой (18.18) показывает, что в этом случае коэффициенты C_n выбраны так, что $C_{n+4} = C_n$ и $C_0 = C_1 = C$, $C_2 = C_3 = -C$. Решение (18.32) может быть записано в виде

$$\Psi^\Delta = \exp\left(\frac{-\kappa^2 x^2}{2}\right) \vartheta_3\left[\exp\left(\frac{-i\pi}{6}\right); \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)^{1/2} (y - ix) - \frac{1}{4}\right]. \quad (18.33)$$

Треугольная решетка имеет период $a = 2\kappa^{-1}(\pi/\sqrt{3})^{1/2}$ (сторона треугольника). Функция Ψ^Δ обращается в нуль в точках

$$x - (a\sqrt{3}/2)(m + 1/2), \quad y = a(1 + m/2 + n),$$

где m и n — целые числа. Для этой решетки

$$\beta_A^\Delta = 1.16. \quad (18.34)$$

Как мы видим, оба рассмотренных решения периодичны и в обоих имеются точки, в которых $\Psi = 0$. В окрестности каждой такой точки Ψ пропорционально $x + iy$, где x и y отсчитываются от точки, где $\Psi = 0$. Это же можно записать в виде $\Psi \propto \rho \exp(i\theta)$, где $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\theta = \arctg(y/x)$. Фаза χ совпадает с углом цилиндрической системы координат. Мы видим, что фаза меняется на 2π при обходе вокруг такой точки. Рассмотрим теперь формулу (17.75) для тока, записанного в обычных единицах и выраженного через модуль и фазу Ψ . В цилиндрических координатах $\nabla\chi = \rho^{-1}\partial\chi/\partial\theta = \rho^{-1}$. При достаточно малых ρ $\nabla\chi \gg (2e/\hbar c)\mathbf{A}$. Следовательно,

$$j = (\hbar e/m) |\Psi|^2 / \rho.$$

Если записать $j = en_s v_s$, то мы получаем отсюда ($|\Psi|^2 = n_s/2$)

$$v_s = \hbar/2m\rho,$$

что точно совпадает с формулой (18.7) для квантового вихря.

В самой точке $\rho = 0$ v_s обращается в бесконечность. Для того чтобы физическая величина — электрический ток — была конечной, нужно, чтобы $\Psi \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, и это действительно имеет место.

Можно привести и другой аргумент: обращение Ψ в нуль при $\rho = 0$ необходимо для однозначности Ψ в самой этой точке. Впервые такое поведение волновой функции бозе-конденсата при наличии квантового вихря предсказал *Файнман* (1955) для сверхтекучего жидкого гелия [202].

Возникает естественный вопрос: мы строили решения уравнений ГЛ, ничего не предполагая заранее, и несмотря на это во всех решениях появляются точки, где $\Psi = 0$ и фаза меняется на 2π при обходе.

С чем это связано? Ответ заключается в следующем. В уравнения входит векторный потенциал $\mathbf{A}$. Если магнитное поле во всем сверхпроводнике направлено параллельно внешнему полю, то $A_y = \int^x H dx$ обязательно растет при возрастании x . Но физической величиной является не векторный потенциал, а магнитное поле, которое не растет в среднем по образцу. Следовательно, рост векторного потенциала должен компенсироваться. Это и имеет место. Дело в том, что в уравнения всегда входит комбинация $\kappa^{-1} \nabla \chi - \mathbf{A}$ (в приведенных единицах).

Рассмотрим решение $\Psi^\square$ (18.31) в плоскости (x, y) (рис. 18.1). Кругами отмечены точки, где $\Psi = 0$. Для однозначности фазы проведем через эти точки разрезы, параллельные оси y . Если идти справа от такого разреза, то χ будет меняться по закону

$$\chi(y) = \chi_{\text{reg}}(y) + \pi y/a,$$

где a — период структуры, $\chi_{\text{reg}}(y)$ — регулярная часть, не связанная с вихрями. Если же идти слева от разреза, то

$$\chi(y) = \chi_{\text{reg}}(y) - \pi y/a.$$

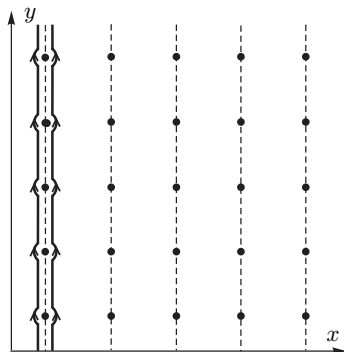


Рис. 18.1

Отсюда следует, что на каждом разрезе градиент фазы испытывает скачок

$$\Delta(\partial \chi / \partial y) = 2\pi/a.$$

В то же время векторный потенциал при увеличении x за один период вырастает приблизительно на κa ($A_y \approx H_0 x$, $H_0 \approx \kappa$). Для компенсации этого роста необходимо, чтобы

$$\kappa a = \kappa^{-1} \Delta(\partial \chi / \partial y) = 2\pi/\kappa a.$$

Отсюда следует

$$a^\square = \sqrt{2\pi}/\kappa.$$

Именно это и получалось для квадратной решетки.

Что касается треугольной решетки, то там расстояние между разрезами равно $a\sqrt{3}/2$ и условие компенсации есть

$$\kappa a\sqrt{3}/2 = 2\pi/\kappa a.$$

Следовательно,

$$a^\Delta = 2\kappa^{-1}(\pi/\sqrt{3})^{1/2},$$

что соответствует решению (18.33).

Найдем линии тока. Подставив (18.18) в выражение для тока (правую часть уравнения (17.8')), получаем

$$\begin{aligned}
 j_x &= \sum_{n,m} C_n C_m^* [k(n+m)(2\kappa)^{-1} - \kappa x] \times \\
 &\times \exp \left[i(n-m)y - \kappa^2(x - kn\kappa^{-2})^2/2 - \kappa^2(x - km\kappa^{-2})^2/2 \right] = \\
 &= -(2\kappa)^{-1} \partial |\Psi|^2 / \partial y, \\
 j_y &= (2\kappa)^{-1} \partial |\Psi|^2 / \partial x.
 \end{aligned}$$

Уравнение линий тока есть

$$dx/j_x = dy/j_y.$$

Подставляя j_x и j_y , получаем

$$(\partial |\Psi|^2 / \partial x) dx + (\partial |\Psi|^2 / \partial y) dy = 0,$$

или

$$|\Psi|^2 = \text{const}.$$

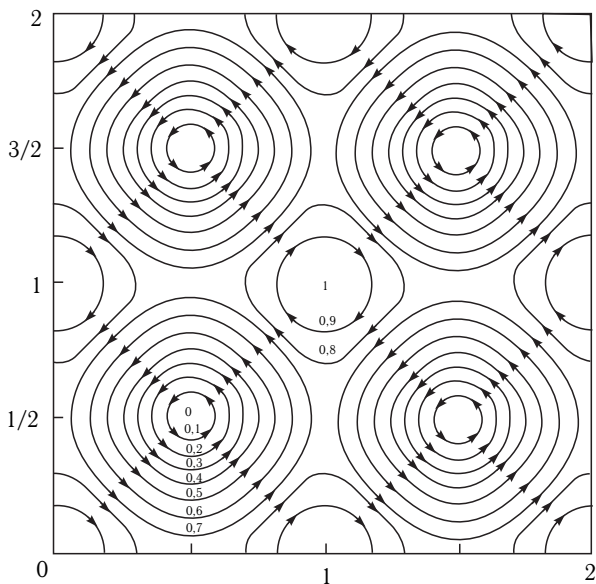


Рис. 18.2

Согласно (18.19) это одновременно линии постоянного поля. Системы этих линий изображены на рис. 18.2 для квадратной решетки (цифры соответствуют значениям $|\Psi|^2/|\Psi|_{\max}^2$).

Рассмотрим квадратный контур на этом рисунке с вершинами в точках, обозначенных единицами. Нетрудно увидеть, что интеграл $\oint \mathbf{j} d\mathbf{l}$, взятый вдоль этого контура, равен нулю. Следовательно, согласно § 17.6, через этот контур проходит целое число квантов магнитного потока. Покажем, что это один квант потока. Действительно, имеем

$$\Phi = B S^{\square} \approx \kappa (2\pi/\kappa^2) = 2\pi/\kappa. \quad (18.35)$$

Переходя к обычным единицам и подставляя значение κ (17.11), получаем

$$\Phi = (2\pi/\kappa) H_{cm} \sqrt{2} \delta^2 = \pi \hbar c/e = \Phi_0. \quad (18.35')$$

Аналогичным образом обстоит дело для треугольной решетки (контур является шестиугольником, окружающим точку, в которой $\Psi = 0$).

В заключение перепишем формулу (18.24) в виде, более удобном для сравнения с экспериментом:

$$-4\pi M = (H_{c2} - H_0)/(2\kappa^2 - 1) \beta_A, \quad (18.36)$$

т. е. зависимость $M(H_0)$ вблизи $H_0 = H_{c2}$ является линейной.

§ 18.3. Магнитные свойства сверхпроводников 2-го рода в случае $\kappa \gg 1$

В настоящем параграфе будем использовать приближение, которое применимо при полях, гораздо меньших H_{c2} . Для того чтобы оно соответствовало реальному смешанному состоянию, необходимо выполнение условия $H_{c1} \ll H_{c2}$, или, согласно результатам § 18.1, $\kappa \gg 1$.

В § 18.2 мы нашли решение при полях вблизи H_{c2} . Довольно очевидно, что основное качественное свойство функции Ψ : наличие точек, где $\Psi = 0$, при обходе которых фаза меняется на 2π , должно сохраниться и при меньших полях. Это связано с необходимостью компенсации роста векторного потенциала скачками градиента фазы. Но чем меньше поле, тем медленнее растет A_y , а следовательно, тем реже должны быть скачки. Действительно, условие компенсации (для квадратной решетки) при произвольном поле имеет вид

$$2\pi/\kappa a = A_y(a) - A_y(0) = \int_0^a H(x) dx = \bar{H}a = Ba.$$

Отсюда видно, что $a = (2\pi/\kappa B)^{1/2}$, т. е. период структуры растет при уменьшении B .

При малых полях расстояние между вихревыми нитями становится столь большим, что они являются почти независимыми и в первом приближении мы можем рассматривать одну вихревую нить. Введем цилиндрическую систему координат (ρ, θ, z) и ось z направим вдоль оси вихревой нити. Векторный потенциал выберем перпендикулярным радиус-вектору ρ , т. е. $\mathbf{A} = A_\theta \mathbf{e}_\theta$.

Если записать $\Psi = f \cdot \exp(i\chi)$ ($f = |\Psi|$), то ток в единицах ГЛ имеет вид $\mathbf{j} = f^2(\nabla\chi/\kappa - \mathbf{A})$. Так как $f^2 = n_s/2$ — плотность пар в конденсате (n_s — плотность «сверхпроводящих электронов»), то $\nabla\chi/\kappa - \mathbf{A}$ играет роль их скорости. Поэтому введем обозначение

$$\mathbf{v}_s = \nabla\chi/\kappa - \mathbf{A}.$$

Подчеркнем, что вектор $\mathbf{v}_s$, удобный при решении уравнений, не является истинной физической величиной в противоположность току $\mathbf{j} = f^2\mathbf{v}_s$, который может быть измерен. Уравнения (17.6'), (17.8') в новых обозначениях примут вид

$$-\kappa^{-2}\rho^{-1}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{df}{d\rho}\right) + v_s^2 f = f - f^3, \quad (18.37)$$

$$-\frac{dH}{d\rho} = v_s f^2, \quad (18.38)$$

$$H = (\text{rot } \mathbf{A})_z = -\rho^{-1}\frac{d}{d\rho}(\rho v_s) + \frac{2\pi}{\kappa}\delta(\mathbf{p}). \quad (18.39)$$

В последней формуле принято во внимание, что в окрестности отдельной нити $\chi = \theta$, т. е. фаза меняется на 2π при обходе линии $\rho = 0$. Ввиду этого $\nabla\chi$ обладает необычным свойством. Если взять интеграл от $\nabla\chi$ по бесконечно малому контуру вокруг точки $\rho = 0$, то это дает, с одной стороны,

$$\oint \nabla\chi d\mathbf{l} = 2\pi,$$

а с другой стороны,

$$\oint \nabla\chi d\mathbf{l} = \int \text{rot } \nabla\chi d\mathbf{S}.$$

Следовательно,

$$(\text{rot } \nabla\chi)_z = 2\pi\delta(\mathbf{p}). \quad (18.40)$$

Магнитное поле $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = -(\text{rot } \mathbf{v}_s - \kappa^{-1} \text{rot } \nabla\chi)$, откуда и получается (18.39).

Граничные условия к уравнениям (18.37)–(18.39) следующие. При $\rho \rightarrow \infty$ $f \rightarrow 1$, $H \rightarrow 0$ (а следовательно, и $v_s \rightarrow 0$). При $\rho \rightarrow 0$ $v_s \rightarrow (\kappa\rho)^{-1}$; это связано с тем, что $\nabla_\theta\chi = \rho^{-1}\partial\chi/\partial\theta \rightarrow \rho^{-1}$. Что касается f , то оно не должно бесконечно возрастать ни при каких ρ .

Решение уравнений в общем случае может быть получено лишь путем численного интегрирования. Однако при $\kappa \gg 1$ дело существенно упрощается. Чтобы это продемонстрировать, заметим, что расстояния, на которых существенно меняется функция v_s , — это $\rho \sim 1$. Что же касается функции f , то она заметно меняется на расстояниях $\rho \sim \kappa^{-1} \ll 1$. Ввиду этого в уравнении (18.38) можно ожидать, что функция f уже достигла значения $f = 1$. Подставляя (18.39) для $\rho \neq 0$, получаем уравнение для v_s ; его решение

$$v_s = K_1(\rho)/\kappa, \quad (18.41)$$

где K_1 — функция Макдональда, уже появлявшаяся в § 16.5.

В уравнении для f можно пользоваться асимптотическим видом v_s для малых расстояний, т. е. $v_s \approx (\kappa\rho)^{-1}$. Подставляя это в (18.37), получаем

$$\kappa^{-2} \left[\rho^{-1} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{df}{d\rho} \right) - \rho^{-2} f \right] = f^3 - f. \quad (18.42)$$

Решение этого уравнения на расстояниях $\rho \gg \kappa^{-1}$ (но, конечно, $\rho \ll 1$) равно

$$f^2 = 1 - (\kappa\rho)^{-2}. \quad (18.43)$$

При $\rho \ll \kappa^{-1}$ предполагаем $f \ll 1$ и находим

$$f = C\kappa\rho, \quad (18.44)$$

где C — числовая константа, которую можно найти путем численного решения уравнения (18.42). Результат $\Psi \propto \rho$ соответствует тому, что получалось в окрестности H_{c2} .

Определим свободную энергию на единицу длины вихревой нити. Ее надо отсчитывать от энергии сверхпроводника без магнитного поля. С помощью формулы (17.19') получаем (в единицах $H_{cm}^2 \delta^2 / 4\pi$):

$$\varepsilon_0 = 2\pi \int [\Omega_s - \Omega_s^{(0)}] \rho d\rho = 2\pi \int \left[H^2 + (1 - f^4)/2 \right] \rho d\rho. \quad (18.45)$$

Основная часть этого интеграла происходит от второго члена и связана с расстояниями, много большими κ^{-1} . Подставляя (18.43), получаем

$$\varepsilon_0 \approx (2\pi/\kappa^2) \int \rho^{-1} d\rho \approx (2\pi/\kappa^2) \ln \kappa.$$

В результате численного интегрирования находим более точный результат:

$$\varepsilon_0 = (2\pi/\kappa^2) (\ln \kappa + 0,081). \quad (18.46)$$

Для того чтобы образование вихревых нитей было энергетически выгодным, нужна такая напряженность поля, при которой свободная

энергия $\Omega_s - \Omega_s^{(0)} - 2H_0B$ становится отрицательной. Если плотность нитей, т. е. число нитей, пересекающих единицу площади, обозначить через n , то

$$\Omega_s - \Omega_s^{(0)} = n\varepsilon_0, \quad B = \overline{H} = n \int \mathbf{H} d\mathbf{S} = n \oint \mathbf{A} d\mathbf{l}. \quad (18.47)$$

Ввиду того что контур проходит на расстоянии $\rho = \infty$ и на таких расстояниях $v_s = 0$ (см. (18.41)), заключаем, что $\mathbf{A} = \nabla\chi/\kappa$ и по абсолютному значению равно $(\kappa\rho)^{-1}$. Следовательно,

$$B = 2\pi n/\kappa. \quad (18.48)$$

Но так как B есть в то же время магнитный поток через единицу площади, то на одну нить приходится магнитный поток $2\pi/\kappa$, или, согласно (18.35), (18.35'), один квант потока Φ_0 .

Из условия $\Omega_s - \Omega_s^{(0)} - 2H_0B = 0$ получаем значение первого критического поля:

$$H_{c1} = \varepsilon_0\kappa/4\pi. \quad (18.49)$$

Эта формула годится для любых κ . В случае $\kappa \gg 1$ можно подставить формулу (18.46) для ε_0 . В обычных единицах имеем

$$H_{c1} = (\sqrt{2}\kappa)^{-1}H_{cm}(\ln\kappa + 0,08). \quad (18.50)$$

Интересно отметить, что поле в центре нити примерно вдвое больше H_{c1} . Действительно, согласно (18.38),

$$H(0) = \int_0^\infty v_s f^2 d\rho.$$

Основная часть интеграла берется по области $\kappa^{-1} \ll \rho \ll 1$. Подставляя $f \approx 1$, $v_s \approx (\kappa\rho)^{-1}$, находим $H(0) \approx \kappa^{-1} \ln \kappa$. Численное интегрирование дает более точную формулу:

$$H(0) = \kappa^{-1}(\ln \kappa - 0,18). \quad (18.51)$$

Распределение поля $H(\rho)$ и $f(\rho)$ в вихре представлено на рис. 18.3.

Когда $H_0 > H_{c1}$, появляется много вихрей, которые начинают взаимодействовать. Для того чтобы найти распределение полей и токов в этом случае,

а также зависимость $B(H_0)$, воспользуемся тем, что оси вихрей сближаются на расстояние порядка κ^{-1} только при $H_0 \rightarrow H_{c2}$, а при меньших полях расстояние между вихрями существенно больше. Ввиду

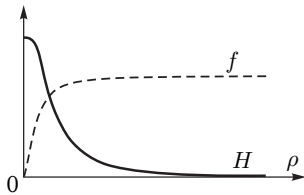


Рис. 18.3

этого сердцевинны вихрей (порядка κ^{-1}) будут просто играть роль особенностей в решении, а детальная их структура будет несущественна. Напишем уравнение Максвелла в форме

$$\text{rot } \mathbf{H} = f^2 \mathbf{v}_s,$$

подставим $f = 1$ и возьмем rot . Учитывая, что каждая вихревая нить дает δ -функцию согласно (18.40), получаем

$$\Delta H - H = -(2\pi/\kappa) \sum_m \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m), \quad (18.52)$$

где $\mathbf{r}_m$ соответствуют центрам нитей ($\mathbf{r} = (x, y)$). Решением этого уравнения является

$$H = \kappa^{-1} \sum_m K_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|), \quad (18.53)$$

где K_0 — функция Макдональда.

Свободную энергию будем отсчитывать от значения для сверхпроводящей фазы без поля. Воспользуемся формулой (17.19), в которой положим $\Psi = f \exp(i\chi)$, $f = 1$. При этом имеем

$$\int (\Omega_s - \Omega_s^{(0)}) dV = \int (v_s^2 + H^2) dV. \quad (18.54)$$

Воспользовавшись тем, что в нашем приближении $\mathbf{v}_s = \text{rot } \mathbf{H}$, интегрируя первый член по частям и подставляя (18.52), находим

$$\overline{\Omega_s} - \Omega_s^{(0)} = \overline{H(H - \Delta H)} = (2\pi n/\kappa^2) \sum_m K_0(|\mathbf{r}_m|) \quad (18.55)$$

(n — число нитей, пересекающих 1 см^2). Слагаемое, соответствующее $\mathbf{r}_m = 0$, должно быть заменено на $n\epsilon_0$.

Так же как и в предыдущем параграфе, надо выбрать решетку вихрей, исходя из минимальности свободной энергии. Наиболее выгодной оказывается треугольная решетка. Период решетки выбирается согласно формуле (18.48), т. е. исходя из того, что $B = n\Phi_0 = n(2\pi/\kappa)$. При этом получаем $n^{-1} = a \cdot a\sqrt{3}/2$, откуда

$$a = 2(\pi/\sqrt{3})^{1/2} (B\kappa)^{-1/2} \quad (18.56)$$

(a — сторона треугольника). Вектор $\mathbf{r}_m$ есть

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{a}_1 q + \mathbf{a}_2 l,$$

где l и q — целые числа, а базисные векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ имеют длину a и образуют угол 60° . В соответствии с этим

$$|\mathbf{r}_m| = a(q^2 + l^2 + ql)^{1/2}.$$

Таким образом, получаем

$$\Omega_s - \Omega_s^{(0)} = \varkappa B \varepsilon_0 / 2\pi + (B/\varkappa) \sum_{x_{q,l} \neq 0} K_0(x_{q,l}), \quad (18.57)$$

где

$$x_{q,l} = [4\pi (q^2 + l^2 + ql) / \sqrt{3} B \varkappa]^{1/2}. \quad (18.58)$$

Внешнее поле выражается отсюда с помощью соотношения

$$H_0 = (1/2) \partial(\Omega_s - \Omega_s^{(0)}) / \partial B. \quad (18.59)$$

Подставляя (18.56) и воспользовавшись тем, что $K'_0(x) = -K_1(x)$, получаем отсюда

$$\varkappa(H_0 - H_{c1}) = \frac{1}{4} \sum_{x_{q,l} \neq 0} [2K_0(x_{q,l}) + x_{q,l} K_1(x_{q,l})]. \quad (18.60)$$

Мы видим, что зависимость $\varkappa B$ от $\varkappa(H_0 - H_{c1})$ является универсальной функцией. Исследуем асимптотические формы этой зависимости. При $H_0 - H_{c1} \rightarrow 0$ $B \rightarrow 0$, т. е. $x_{q,l} \rightarrow \infty$. Ввиду экспоненциального убывания функций Макдональда достаточно оставить только слагаемые с наименьшими x , соответствующими $q^2 + l^2 + ql = 1$. Так как в треугольной решетке у каждой точки 6 соседей, то в (18.59) появляется множитель 6. Используя асимптотику функций Макдональда $K_0(x) \approx K_1(x) \approx [\pi/2x]^{1/2} \exp(-x)$, получаем

$$\varkappa(H_0 - H_{c1}) \approx \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{4\pi}{\sqrt{3} B \varkappa}\right)^{1/4} \exp \left[- \left(\frac{4\pi}{\sqrt{3} B \varkappa}\right)^{1/2} \right]. \quad (18.61)$$

Нетрудно увидеть, что при $H_0 - H_{c1} \rightarrow 0$ $B \rightarrow 0$, а $dB/dH_0 \rightarrow \infty$, т. е. у кривой $B(H_0)$ в точке H_{c1} есть вертикальная касательная.

Другой предел, который можно получить, — это связь H_0 и B для полей, при которых период решетки гораздо больше ξ , но меньше δ , т. е. в приведенных единицах $\varkappa^{-1} \ll a \ll 1$, или

$$\varkappa \gg B \gg \varkappa^{-1}. \quad (18.62)$$

При $\varkappa \gg 1$ это имеет место в большей части области смешанного состояния, кроме непосредственных окрестностей H_{c1} и H_{c2} . Перейдем в формуле (18.60) к фурье-образам K_0 и K_1 :

$$\varkappa(H_0 - H_{c1}) = \pi \int \frac{2 + k^2}{(1 + k^2)^2} \sum_{\mathbf{p}_{q,l} \neq 0} e^{i\mathbf{k}\mathbf{p}_{q,l}} \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2}. \quad (18.63)$$

Если к сумме по $\mathbf{p}_{q,l}$ добавить член с $\mathbf{p}_{q,l} = 0$, то получится

$$\sum_{\mathbf{p}_{q,l}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{p}_{q,l}} = (2\pi)^2 n \sum_{\mathbf{K}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{K}), \quad (18.64)$$

где n — число вихрей на 1 см^2 , $\mathbf{K}$ — векторы обратной решетки по отношению к плоской решетке, образуемой векторами $\mathbf{p}_{q,l}$. Эти векторы равны

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= p_1 \mathbf{K}_1 + p_2 \mathbf{K}_2, \\ \mathbf{K}_1 &= 2\pi [\mathbf{a}_1 \mathbf{z}_0] n, \quad \mathbf{K}_2 = 2\pi [\mathbf{z}_0 \mathbf{a}_2] n, \end{aligned} \quad (18.65)$$

где n^{-1} — площадь элементарной ячейки, $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ — базисные векторы, $\mathbf{z}_0$ — орт по z . Так как $n = \kappa B / 2\pi$, то $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ по абсолютному значению равны $2(\pi/\sqrt{3})^{1/2} (\kappa B)^{1/2}$, а угол между ними равен $\pi/3$, как и в основной решетке.

Подставив (18.64) в (18.63), получаем

$$\kappa(H_0 - H_{c1}) = \pi \left[n \sum_{\mathbf{K}} \frac{2 + K^2}{(1 + K^2)^2} - \int_0^\infty \frac{2 + k^2}{(1 + k^2)^2} \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \right] \quad (18.66)$$

(вычитание последнего интеграла соответствует отсутствию слагаемого с $\mathbf{p}_{q,l} = 0$ в (18.63)). Каждое из выражений в скобке логарифмически расходится, но вместе они дают конечное выражение. Выделим из первой суммы слагаемое с $\mathbf{K} = 0$. Оно равно $2\pi n = \kappa B$. В остальных слагаемых и в интеграле будем сначала ограничиваться значениями $|\mathbf{K}|, |\mathbf{k}| < K_1 P = 2(\pi/\sqrt{3})^{1/2} (\kappa B)^{1/2} P$, затем найдем разность и после этого перейдем к пределу $P \rightarrow \infty$. Ввиду того что в оставшейся сумме по $\mathbf{K}$ наименьшее K^2 есть $K_1^2 \gg 1$ (согласно (18.62)), то ее можно заменить на

$$\begin{aligned} n \sum_{\mathbf{K}} K^{-2} &= n K_1^{-2} \sum_{p_1, p_2} (p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2)^{-1} = \\ &= \sqrt{3} (8\pi^2)^{-1} \sum_{p_1, p_2} (p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2)^{-1}. \end{aligned}$$

Вычисляя интеграл по k с пределом $K_1 P \gg 1$, получаем

$$\int_0^{K_1 P} \frac{2 + k^2}{(1 + k^2)^2} \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} = (2\pi)^{-1} \left(\ln K_1 + \ln P + \frac{1}{2} \right).$$

Собирая вместе все члены, находим

$$\begin{aligned} \kappa(H_0 - H_{c1}) &\approx \kappa B - (1/4) \ln(\kappa B) - (1/4) \ln(4\pi/\sqrt{3}) - 1/4 + \\ &+ \lim_{P \rightarrow \infty} \left[(\sqrt{3}/8\pi) \sum_{0 < (p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2) < P} (p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2)^{-1} - (1/2) \ln P \right] = \\ &= \kappa B - (1/4) \ln(\kappa B) - 0,49. \end{aligned} \quad (18.67)$$

Если подставить сюда формулу (18.49) для H_{c1} , то получается

$$H_0 \approx B + (4\kappa)^{-1} \ln(\kappa/B) - 0,45\kappa^{-1}. \quad (18.68)$$

Из этой формулы видно, что при $B \sim \kappa$ $H_0 \approx B$ с точностью до членов порядка κ^{-1} , как и должно было быть. На основании предельных выражений (18.68) и (18.27) можно написать интерполяционную формулу, которая передает логарифмическую зависимость $H_0 - B$ от B в области, где расстояние между сердцевинами вихрей велико, и переходит в (18.27) при $B \rightarrow \kappa$ ($\kappa \gg 1$):

$$H_0 \approx B + (2\beta_A \kappa)^{-1} \ln(\kappa/B). \quad (18.69)$$

Конечно, это, во-первых, лишь интерполяция, а во-вторых, она не годится вблизи H_{c1} .

В заключение покажем, что при $\kappa = 1/\sqrt{2}$ критические поля H_{c1} , H_{c2} и H_{cm} совпадают друг с другом. Положим $\kappa = 1/\sqrt{2}$ в (18.37). Покажем, что

$$H = 2^{-1/2} (1 - f^2). \quad (18.70)$$

Действительно, подставляя эту формулу в (18.38), получаем

$$fv_s = 2^{1/2} \partial f / \partial \rho. \quad (18.71)$$

Умножим (18.37) (с $\kappa = 2^{-1/2}$) на f и подставим (18.71):

$$-\rho^{-1} f \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{df}{d\rho} \right) + \left(\frac{df}{d\rho} \right)^2 = \frac{1}{2} (1 - f^2) f^2.$$

С другой стороны, если умножить (18.39) на f^2 и подставить (18.70) и (18.71), то получается то же самое соотношение; это подтверждает предположение (18.70). Теперь найдем ε_0 с помощью (18.45). Подстановка (18.70) дает

$$\varepsilon_0 = 2\pi \int (1 - f^2) \rho d\rho = 2\pi\sqrt{2} \int H \rho d\rho = \sqrt{2} \Phi = \sqrt{2} (2\pi/\kappa). \quad (18.72)$$

Здесь учтено, что на одну нить приходится квант потока, т.е. $2\pi/\kappa$. Подставляя это в (18.49), получаем $H_{c1} = 2^{-1/2}$, или, в обычных единицах, $H_{c1} = H_{cm}$. Для H_{c2} это следует из (18.14). Итак, при уменьшении κ до $1/\sqrt{2}$ область смешанного состояния сужается вплоть до полного исчезновения.

Значит, на основании качественных аргументов и количественных расчетов мы пришли к выводу, что в сверхпроводниках 2-го рода в магнитном поле возникает смешанное состояние с неполным эффектом Мейснера, когда внешнее поле проникает в сверхпроводник в виде нитей магнитного потока. Каждая нить является миниатюрным вихревым током и несет один квант магнитного потока. Параметр порядка равен

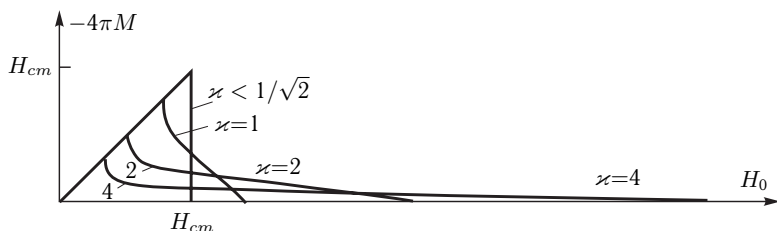


Рис. 18.4

нулю на оси вихря и восстанавливается до равновесного значения без поля на расстоянии $\xi = \delta/\kappa$. Эта область называется сердцевинной вихря. Область смешанного состояния отсутствует при $\kappa \leq 1/\sqrt{2}$ и становится большой при $\kappa \gg 1$. Типичные кривые намагничивания ($-4\pi M$ в зависимости от H_0) представлены на рис. 18.4.

Непосредственное наблюдение вихревой структуры было сначала проведено методом дифракции нейтронов [205]. Ввиду того что нейтроны имеют магнитный момент, их можно использовать для анализа магнитных структур, так же как рентгеновское излучение применяется для исследования распределения плотности электронов. Таким образом было впервые непосредственно доказано существование вихревой решетки.

Несколько позже для наблюдения вихревой структуры были использованы ферромагнитные порошки (Эссманн и Тройбле, 1967) [206], наподобие того, как это делалось в случае промежуточного состояния сверхпроводников 1-го рода. Однако, ввиду того что период структуры в этом случае гораздо меньше, пришлось использовать порошки из очень мелких частиц (диаметр ~ 40 Å) и изучать полученную картину с помощью электронного микроскопа методом реплики (рис. 18.5). Обычно получается треугольная вихревая решетка. Однако когда магнитное поле направлено вдоль оси 4-го порядка, то получается квадратная решетка. Это объясняется малой разностью энергий между обеими

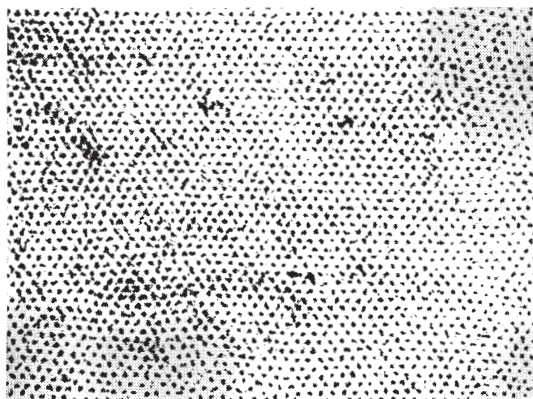


Рис. 18.5

структурами, что приводит к возможности перестройки под действием анизотропии кристалла.

§ 18.4. Поверхностная сверхпроводимость

До сих пор мы рассматривали бесконечное сверхпроводящее пространство, иными словами, явления, происходящие в толще массивного сверхпроводника. Исследование показывает, что в поверхностном слое сверхпроводимость может задержаться до полей, больших H_{c2} (Сан-Жам и Де Женн, 1963) [207]. Физическая причина этого явления заключается в следующем. Рассматривая зародыш сверхпроводящей фазы в бесконечном пространстве в § 18.2, мы пользовались граничным условием $\Psi \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. При наличии поверхности граничным условием является $d\Psi/dx|_{\text{гр}} = 0$.

На рис. 18.6 изображены различные возможные случаи: *a* — зародыш в толще; *b* — зародыш с центром, на поверхности, *в* — зародыш около поверхности, но со смещенным центром и, наконец, *г* — зародыш в тонкой пленке. В последних двух случаях граничное условие на поверхности требует увеличения Ψ вблизи поверхности по сравнению со случаем бесконечного пространства. Это приводит к увеличению собственного значения в уравнении для Ψ (18.11) (роль энергии играет κ^2) и в результате увеличивается значение критического поля. Примером может служить критическое поле тонких пленок (§ 17.4), которое при толщинах $d \ll \min(1, \kappa^{-1})$ одинаково для сверхпроводников 1-го и 2-го рода (§ 18.6) и растет с уменьшением толщины.

Нетрудно увидеть, что решения с центром далеко от поверхности и с центром на самой поверхности отличаются только сдвигом начала отсчета (в обоих случаях $d\Psi/dx|_{\text{гр}} = 0$, см. рис. 18.6) и, следовательно,

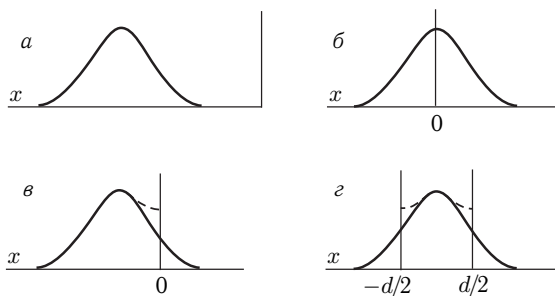


Рис. 18.6

они соответствуют одному значению поля $H_0 = \varkappa$. Решение с максимумом, слегка сдвинутым относительно поверхности, отвечает большему значению поля. Отсюда вытекает, что существует одно определенное решение, при котором поле будет максимальным. Найдем это решение.

Начнем со случая внешнего поля, параллельного поверхности. Здесь можно взять векторный потенциал в форме $A = H_0(x - x_0)$ и пользоваться граничными условиями $\Psi = 0$ при $x \rightarrow \infty$ и $d\Psi/dx = 0$ при $x = 0$. При этом Ψ будет зависеть лишь от x . Вместо этого мы могли бы взять $A = H_0x$, а искать Ψ в форме $\exp(iky)\Psi(x)$, но, как показано в § 18.2, это эквивалентные постановки задачи. Итак, подставляя $A = H_0(x - x_0)$ в (18.9), имеем уравнение

$$-d^2\Psi/dx^2 + \varkappa^2 H_0^2(x - x_0)^2\Psi = \varkappa^2\Psi. \quad (18.73)$$

Решением этого уравнения в общем случае является

$$\Psi = \exp(-\zeta^2/2) \left\{ C_1 F \left[(1 - \beta)/4, 1/2, (\zeta - \zeta_0)^2 \right] + \right. \\ \left. + \zeta C_2 F \left[(3 - \beta)/4, 3/2, (\zeta - \zeta_0)^2 \right] \right\}, \quad (18.74)$$

где $\zeta = (\varkappa H_0)^{1/2} x$, $\zeta_0 = (\varkappa H_0)^{1/2} x_0$, $\beta = \varkappa/H_0$, $F(\alpha, \gamma, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, удовлетворяющая уравнению

$$zF'' + (\gamma - z)F' - \alpha F = 0; \quad (18.75)$$

C_1 и C_2 — произвольные константы (см. [118]).

Граничные условия дают возможность определить отношение констант C_2/C_1 и β как функцию x_0 . После этого, минимизируя β по x_0 , получаем $\beta_{\min}$, или $H_{0 \max}$. Оно оказывается равным

$$H_{c3} = 1,695\varkappa = 1,695 H_{c2}. \quad (18.76)$$

Это критическое поле поверхностной сверхпроводимости. Оно больше, чем H_{c2} .

Изложенная процедура дает возможность получить точное значение H_{c2} , но требует громоздкого численного расчета. Мы можем вместо этого применить более простой прием, который окажется полезным в дальнейшем [208]. Запишем уравнение (18.73) с помощью введенных ранее переменных ζ , ζ_0 , и β :

$$-d^2\Psi/d\zeta^2 + (\zeta - \zeta_0)^2 \Psi = \beta\Psi. \quad (18.77)$$

Задача о решении этого уравнения может быть представлена как вариационная задача о нахождении минимума величины

$$\beta = \int_0^\infty \left[(d\Psi/d\zeta)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2 \Psi^2 \right] d\zeta / \int_0^\infty \Psi^2 d\zeta.$$

Действительно, варьируя по Ψ , приходим к уравнению (18.77). Подставим в функционал пробную функцию $\Psi = \exp(-b\zeta^2/2)$, удовлетворяющую правильным граничным условиям: $\Psi(\infty) = 0$, $d\Psi/d\zeta = 0$ при $\zeta = 0$. Коэффициент b должен определяться из условия минимальности β . Вычисляя интегралы, имеем

$$\beta = b/2 + (2b)^{-1} - 2\zeta_0/(\pi b)^{1/2} + \zeta_0^2.$$

Минимизируя по b , мы получим $\beta(\zeta_0)$. Затем надо найти минимум по ζ_0 . Вместо этого будем действовать в обратном порядке, т. е. сначала найдем минимум по ζ_0 , а затем по b . Путем простых вычислений получаем

$$\beta_{\min} = b = (1 - 2/\pi)^{1/2}, \quad \zeta_0 = (\pi b)^{-1/2}. \quad (18.78)$$

Отсюда имеем

$$H_0 = 1,66\kappa,$$

что отличается от истинного значения (18.76) на 2%.

Итак, мы приходим к выводу, что в поверхностном слое сверхпроводимость задерживается до полей, больших чем H_{c2} , а следовательно, в этом слое могут циркулировать незатухающие токи. Однако эти токи не в состоянии экранировать поле внутри образца. Действительно, если бы поле внутри образца отличалось от внешнего, то возникла бы дополнительная объемная энергия

$$\int (H - H_0)^2 dV,$$

которая не могла бы быть компенсирована за счет уменьшения энергии в поверхностном слое. Следовательно, плотность тока в поверхностном слое распределена так, что $\int_0^\infty j_y dx = 0$, т. е. j_y меняет знак с глубиной. Это видно и из того факта, что

$$j_y = -A\Psi^2 = -H_0(x - x_0)\Psi^2.$$

Если подставить результат вариационного расчета, то имеем

$$\int_0^{\infty} (\zeta - \zeta_0) \exp(-b\zeta^2) d\zeta = (1/2) \left[b^{-1} - \zeta_0(\pi/b)^{1/2} \right].$$

Согласно (18.78) интеграл равен нулю. Это справедливо и для точного решения.

Интересно отметить, что при $1/\sqrt{2} > \kappa > (1,69\sqrt{2})^{-1}$ сверхпроводник будет относиться к 1-му роду, т. е. переходить в нормальное состояние скачком при H_{cm} . Однако в поверхностном слое будет сохраняться сверхпроводимость вплоть до полей, равных $H_{c3} = 1,69\sqrt{2}\kappa H_{cm}$. Из всего этого следует, что, определяя переход в нормальное состояние в магнитном поле по исчезновению диамагнитного момента и по появлению сопротивления между контактами, приложенными к поверхности сверхпроводника, можно получить разные результаты.

Поле H_{c3} играет еще одну важную роль. В § 17.3 говорилось о том, что в сверхпроводниках 1-го рода возможна задержка нормальной фазы при понижении поля ниже критического значения. Эта задержка может иметь место вплоть до предельного поля переохладения, когда исчезает минимум свободной энергии, соответствующий нормальной фазе. В случае массивного сверхпроводника 1-го рода предельное поле переохладения определяется из условия возможности существования малого стационарного зародыша сверхпроводящей фазы в нормальном проводнике. Действительно, при больших полях он должен убывать со временем, а при меньших — возрастать. Но это как раз и есть условие, из которого определялись поля H_{c2} и H_{c3} . Так как $H_{c3} > H_{c2}$, то поле переохладения определяется именно как поле H_{c3} . Конечно, это имеет смысл лишь для тех сверхпроводников 1-го рода, у которых $H_{c3} < H_{cm}$, т. е. $\kappa < (1,69\sqrt{2})^{-1}$. Если же $1/\sqrt{2} > \kappa > (1,69\sqrt{2})^{-1}$, то задержка нормальной фазы не имеет места, ибо еще до перехода у поверхности появляется сверхпроводящий зародыш.

Впрочем, можно специально «испортить» поверхность, например путем адсорбции магнитных атомов (§ 21.1) или напылением пленки нормального металла (§ 20.1). В этом случае поверхностная сверхпроводимость невозможна, и роль поля переохладения будет играть H_{c2} .

Теперь рассмотрим случай, когда внешнее поле направлено под углом к поверхности образца. Пусть сверхпроводник занимает полупространство $x > 0$, а магнитное поле имеет компоненты

$$H_z = H_0 \cos \theta, \quad H_x = H_0 \sin \theta. \quad (18.79)$$

Векторный потенциал выберем вдоль оси y :

$$A_y = H_0(x \cos \theta - z \sin \theta). \quad (18.80)$$

Уравнение для Ψ в линейном приближении запишется в виде

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \left[i \frac{\partial}{\partial y} + \kappa H_0 (x \cos \theta - y \sin \theta) \right]^2 \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \kappa^2 \Psi. \quad (18.81)$$

Граничные условия прежние.

Вдоль плоскости границы, в частности вдоль направления z , условия должны быть однородными. Нетрудно увидеть, что изменение z в уравнении (18.81) может быть компенсировано фазовым множителем $\exp(iky)$ в функции Ψ , т.е. мы встречаемся с ситуацией очень похожей на ту, что имела место вблизи H_{c2} (§ 18.2). Но для получения критического поля нам достаточно решить линейное уравнение, и решением может быть суперпозиция решений, локализованных около любых z , в частности и одно решение такого типа. Поэтому достаточно найти Ψ , обращающееся в нуль при $z \rightarrow \pm\infty$. Подставляя $\Psi(x, y, z) = \exp(i\kappa H_0 x_0 y) \Psi(x, z)$ и вводя переменные

$$\zeta = (\kappa H_0)^{1/2} x, \quad \zeta_0 = (\kappa H_0)^{1/2} x_0, \quad \eta = (\kappa H_0)^{1/2} z, \quad \beta = \kappa/H_0,$$

получаем обобщение (18.77):

$$-\partial^2 \Psi / \partial \zeta^2 - \partial^2 \Psi / \partial \eta^2 + [(\zeta - \zeta_0) \cos \theta - \eta \sin \theta]^2 \Psi = \beta \Psi.$$

Это уравнение эквивалентно вариационному принципу для определения минимума β :

$$\beta = \int_0^\infty d\zeta \int_{-\infty}^\infty d\eta \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)^2 + [(\zeta - \zeta_0) \cos \theta - \eta \sin \theta]^2 \Psi^2 \right\} \times \\ \times \left(\int_0^\infty d\zeta \int_{-\infty}^\infty d\eta \Psi^2 \right)^{-1}. \quad (18.82)$$

Будем искать пробную функцию $\Psi = \exp(-a\eta^2/2 - b\zeta^2/2)$, удовлетворяющую граничным условиям. Получаем

$$\beta = (1/2)(b + b^{-1} \cos^2 \theta) + (1/2)(a + a^{-1} \sin^2 \theta) + \\ + \cos^2 \theta \left(\zeta_0^2 - 2\zeta_0(\pi b)^{-1/2} \right).$$

Минимизируя это выражение по a , b и ζ_0 , находим

$$\beta = \cos \theta (1 - 2/\pi)^{1/2} + \sin \theta, \quad b = \cos \theta (1 - 2/\pi)^{1/2}, \\ a = \sin \theta, \quad \zeta_0 = (\pi b)^{-1/2}. \quad (18.83)$$

Подставляя $\beta = \kappa/H_{c3}(\theta)$, $H_{c3}(0) = \kappa(1 - 2/\pi)^{-1/2}$, $H_{c2} = \kappa$, имеем

$$H_{c3}^{-1}(\theta) = H_{c3}^{-1}(0) \cos \theta + H_{c2}^{-1} \sin \theta, \quad (18.84)$$

т. е. плавное изменение H_{c3} от $H_{c3}(0)$ при $\theta = 0$ до H_{c2} при $\theta = \pi/2$. Отсюда, в частности, получается

$$- [H_{c3}^{-1}(dH_{c3}/d\theta)]_{\theta=0} = H_{c3}(0)/H_{c2} = 1,66.$$

Точный расчет дает число 1,35 [209].

Для того чтобы найти распределение тока при полях, несколько меньших $H_{c3}(\theta)$, надо решить нелинейное уравнение ГЛ. Решение опять ищется в виде суперпозиции решений, типа найденных нами ранее, центрированных около разных z :

$$\Psi = \exp(i\kappa H_0 x_0 y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{ikny} \Psi_0[x, z - nk/\kappa H_0 \sin \theta]. \quad (18.85)$$

Такого же типа суперпозиция (18.18) фигурировала вблизи H_{c2} . Дальнейший ход рассуждений вполне аналогичен § 18.2, и мы не будем приводить его здесь. Результатом является решение, содержащее вихри, т. е. точки, при обходе вокруг которых фаза Ψ меняется на 2π (Кулик, 1967) [210].

Периоды вихревой структуры можно найти, применяя идею компенсации роста векторного потенциала скачками градиента фазы на линиях разреза, проведенных через вихревые точки параллельно оси y . Если период вдоль оси y есть a , то скачок $\partial\varphi/\partial y$ на каждой линии есть $2\pi/a$. Компенсация роста члена $\kappa H_0 z \sin \theta$ в (18.81) происходит при условии

$$-2\pi/a + \kappa H_0 b \sin \theta = 0,$$

где b — период в направлении z , или

$$ab = 2\pi/\kappa H_0 \sin \theta. \quad (18.86)$$

В данном случае, в противоположность окрестности H_{c2} , имеет место анизотропия: направления y и z неэквивалентны, ибо поле $\mathbf{H}$ лежит в плоскости (x, z) . Тем не менее, если предположить прямоугольную решетку вихрей, то минимизация свободной энергии приводит к результату $a = b$, т. е. дает квадратную решетку с периодом

$$a = b = [2\pi/\kappa H_0 \sin \theta]^{1/2}. \quad (18.87)$$

Другие варианты не исследовались.

Из формулы (18.87) следует, что период вихревой структуры растет с уменьшением θ по закону $a \sim \theta^{-1/2}$ (при малых θ). Кроме того, один из базисных векторов вихревой решетки направлен вдоль компоненты H в плоскости поверхности (в рассматриваемом случае это ось z).

Поле H_{c3} обнаружено в многочисленных экспериментах. Имеются также данные в пользу вихревой структуры поверхностных токов [211] при наклонном поле. Они касаются критического тока для поверхностной сверхпроводимости. Теоретический расчет критического тока для поля, параллельного поверхности [208], который мы здесь не приводим, дает

$$J_c \sim j_c \xi, \quad (18.88)$$

где J_c — критический ток, протекающий через поперечную площадку длиной 1 см (вдоль поверхности) и бесконечную в глубь металла, а j_c — абсолютное критическое значение плотности тока, соответствующее критерию Ландау (см. (17.63)). Этот результат очевиден, ибо толщина сверхпроводящего слоя при поверхностной сверхпроводимости порядка ξ . Формула (18.88) есть оценка значения критического тока в интервале $H_{c2} < H_0 < H_{c3}$. Ток зависит от H_0 и обращается в нуль при H_{c3} .

На опыте всегда получаются существенно меньшие значения критического тока. Это можно объяснить тем, что осуществить ориентацию поля, строго параллельную поверхности, практически невозможно, а при наклонном поле возникает вихревая структура. При пропускании тока на вихри действует сила, которая приводит их в движение. В результате возникает электрическое сопротивление (об этом будет подробнее написано в § 18.7). Строго говоря, мы должны были бы получить нулевой критический ток. Однако в действительности вихри цепляются за шероховатости поверхности («пиннинг» — см. § 18.7), и поэтому при очень малом токе они остаются неподвижными. Этот эффект можно усилить, нарочно сделав поверхность более шероховатой. Действительно, в этом случае критический ток увеличивается [211].

§ 18.5. Сверхпроводники 2-го рода при низких температурах

В этом параграфе мы сделаем ряд заключений, касающихся поведения сверхпроводников 2-го рода при температурах, далеких от T_c , где теория ГЛ неприменима. Будем пользоваться обычными единицами.

Довольно очевидно, что при низких температурах качественная картина магнитных свойств сверхпроводников та же, что и в окрестности температуры T_c . Существует поверхностная энергия, которая может иметь разный знак. У сверхпроводников 1-го рода она положительна; при поле H_{cm} происходит переход 1-го рода и имеется поле переохлаждения H_{c3} или H_{c2} . У сверхпроводников 2-го рода поверхностная энергия $\sigma_{ns} < 0$, превращение в нормальную фазу происходит путем перехода 2-го рода в поле H_{c2} . Поэтому отношение

$$H_{c2}(T)/[H_{cm}(T) \sqrt{2}] = \kappa(T) \quad (18.89)$$

является той величиной, которая разделяет два типа сверхпроводников (с $\kappa < 1/\sqrt{2}$ и с $\kappa > 1/\sqrt{2}$), и именно ее мы приводили в формулах (16.97) и (16.101).

У сверхпроводников 2-го рода при всех температурах в магнитном поле возникает смешанное состояние. По порядку величины поле H_{c1} определено в § 18.1. Однако для случая $\kappa \gg 1$ (напомним, что согласно формулам (16.97) и (16.101) κ мало меняется с температурой) можно довольно точно определить значение H_{c1} . Для этого учтем, что основная часть энергии вихря набирается в области $\xi \ll \rho \ll \delta$ и в этой области детальная структура его сердцевины, имеющей радиус порядка ξ , не имеет значения. Важно лишь то, что параметр порядка, а вместе с ним и ток, на таких расстояниях начинают уменьшаться и обращаются в нуль в центре.

Как и вблизи T_c , каждый вихрь несет один квант магнитного потока. Это следует из того факта, что при $\delta \gg \xi$ вдали от оси вихря имеет место уравнение Лондонов (§ 16.7). Согласно этому уравнению ток связан с векторным потенциалом соотношением $\mathbf{j} = -Q\mathbf{A}$, но в таком виде ток не является градиентно-инвариантным, т. е. зависит от выбора $\mathbf{A}$. Для того чтобы обеспечить градиентную инвариантность, необходимо существование в комбинации с градиентом фазы комплексного параметра порядка $\Delta = |\Delta| \exp(i\chi)$:

$$\mathbf{j} = -Q[\mathbf{A} - (\hbar c/2e) \nabla \chi]. \quad (18.90)$$

Но это выражение вполне аналогично (17.75).

Учитывая, что вдали от оси вихря $|\Delta|$, а вместе с ним и Q , равны своим значениям в сверхпроводнике без поля, т. е. не зависят от координат, можно утверждать, что поток равен целому числу квантов потока внутри контура, для которого $\oint \mathbf{j} d\mathbf{l} = 0$. Если речь идет об одном вихре, то достаточно выбрать контур при $\rho \gg \delta$, и там $\mathbf{j} = 0$. В случае когда вихрей много и они образуют решетку, можно найти такой контур вокруг каждого вихря, на котором вследствие симметрии решетки $\oint \mathbf{j} d\mathbf{l} = 0$. Очевидно, что каждый вихрь несет лишь один квант потока.

Как уже говорилось, при $\rho \gg \xi$ можно считать Δ равным его значению без поля, а потому для H имеет место уравнение Лондонов (15.40). Итак, имеем

$$\Delta H - \delta^{-2} H = -\delta^{-2} \Phi_0 \delta(\rho). \quad (18.91)$$

Правая часть учитывает наличие вихря с магнитным потоком Φ_0 . Интегрируя по площади сечения, перпендикулярного оси вихря, можно убедиться в правильности выбора правой части. Решением уравнения (18.91) является

$$H = (2\pi\delta^2)^{-1} \Phi_0 K_0(\rho/\delta). \quad (18.92)$$

Теперь надо написать выражение для свободной энергии, соответствующей уравнению Лондонов. Оно складывается из энергии поля и кинетической энергии сверхпроводящего тока. На единицу объема получим

$$\begin{aligned}\Omega_s - \Omega_s^{(0)} &= H^2/8\pi + n_s m v_s^2/2 = \\ &= H^2/8\pi + (n_s m/2)(j/n_s e)^2 = H^2/8\pi + \Lambda j^2/2, \quad (18.93)\end{aligned}$$

где использовано выражение $\Lambda = m/n_s e^2$ (см. (15.36)). Отметим, что при этом выводе безразлично, пользоваться ли представлениями о сверхпроводящих электронах с плотностью n_s , зарядом e и массой m или о парах с плотностью $n_s/2$, зарядом $2e$ и массой $2m$.

Интеграл по объему от последнего числа можно преобразовать с помощью уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}$:

$$\begin{aligned}(\Lambda/2) \int j^2 dV &= (\Lambda/2)(c/4\pi)^2 \int (\text{rot } \mathbf{H})^2 dV = \\ &= (\delta^2/8\pi) \int \{ \text{div}[\mathbf{H} \text{rot } \mathbf{H}] + \mathbf{H} \text{rot rot } \mathbf{H} \} dV = \\ &= (\delta^2/8\pi) \left\{ \int_S [\mathbf{H} \text{rot } \mathbf{H}] dS - \int \mathbf{H} \Delta \mathbf{H} dV \right\}.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой $\text{div}[\mathbf{a}\mathbf{b}] = \mathbf{b} \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{rot } \mathbf{b}$, преобразовали интеграл от div в интеграл по поверхности образца и воспользовались тем, что $\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H}$, а $\text{div } \mathbf{H} = 0$. Итак, имеем

$$\begin{aligned}\int \Omega_s dV &= \int \Omega_s^{(0)} dV + [\delta^2/8\pi] \int_S [\mathbf{H} \text{rot } \mathbf{H}] dS + \\ &+ (8\pi)^{-1} \int \mathbf{H} (\mathbf{H} - \delta^2 \Delta \mathbf{H}) dV. \quad (18.94)\end{aligned}$$

Приведем еще одну, последнюю форму этого выражения. Ввиду того что

$$[\mathbf{H} \text{rot } \mathbf{H}] = (1/2)\nabla(H^2) - (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H},$$

а

$$\mathbf{H} \Delta \mathbf{H} = \text{div}(\nabla(H^2)/2 - (\nabla \mathbf{H})^2),$$

можно получить из (18.94) для случая, когда $(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} = 0$, т. е. $\mathbf{H}$ направлено вдоль z и зависит от ρ ,

$$\int \Omega_s dV = \int \Omega_s^{(0)} dV + (8\pi)^{-1} \int [H^2 + \delta^2 (\nabla \mathbf{H})^2] dV. \quad (18.94')$$

В рассматриваемом случае одного вихря поверхностный интеграл равен нулю. Во второй интеграл (18.94) надо подставить формулы (18.91) и (18.92). Логарифмическую бесконечность $K_0(\rho/\delta)$ при $\rho = 0$ надо заменить на $\ln(\delta/\xi)$, ибо на расстоянии порядка ξ от оси уравнение (18.91) становится неприменимым, и H перестает зависеть от координаты (с логарифмической точностью). В результате получаем дополнительную энергию на единицу длины вихря:

$$\varepsilon_0 \approx (4\pi\delta)^{-2} \Phi_0^2 \ln(\delta/\xi). \quad (18.95)$$

Мы ограничились вычислением основного члена с $\ln(\delta/\xi)$, ибо бо́льшая точность требует знания структуры сердцевины.

Условие зарождения вихря есть

$$\varepsilon_0 - (4\pi)^{-1} H_0 \int H dS = \varepsilon_0 - (4\pi)^{-1} H_0 \Phi_0 = 0.$$

Отсюда имеем

$$H_{c1} = 4\pi\varepsilon_0/\Phi_0 \approx (4\pi)^{-1} (\Phi_0/\delta^2) \ln(\delta/\xi). \quad (18.96)$$

Эта формула согласуется по порядку величины с (18.8) и (18.50). Отметим, что, согласно (18.91), поле в сердцевине вихря с логарифмической точностью равно

$$H(0) \approx (2\pi)^{-1} (\Phi_0/\delta^2) \ln(\delta/\xi),$$

т. е., как и вблизи T_c , $H(0)$ приблизительно вдвое больше H_{c1} .

Выражение для тока получается из уравнения Максвелла $\mathbf{j} = (c/4\pi) \operatorname{rot} \mathbf{H}$. В данном случае

$$j_\varphi = (c/2\delta)(2\pi\delta)^{-2} \Phi_0 K_1(\rho/\delta). \quad (18.97)$$

При $\rho \ll \delta$ $K_1 \approx \delta/\rho$. Подставляя $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$, $\delta = (mc^2/4\pi n_s e^2)^{1/2}$, получаем

$$j_\varphi \approx n_s e (\hbar/2m\rho).$$

Отсюда вытекает, что скорость куперовских пар в вихре на расстоянии $\xi \ll \rho \ll \delta$ равна $\hbar/2m\rho$, и это соответствует формуле (18.7), полученной из правила квантования Бора. На расстояниях $\rho \gtrsim \delta$ проявляется то обстоятельство, что жидкость состоит из заряженных частиц, и ее движение приводит к возникновению магнитного поля. В результате при $\rho \gg \delta$ ток затухает по закону $\exp(-\rho/\delta)$.

Учитывая соответствие между уравнением (18.52) вблизи температуры T_c и уравнением (18.91), а также между выражениями для свободной энергии (18.55) и (18.94) и принимая во внимание тот факт, что каждый вихрь несет один квант потока, приходим к заключению, что справедливы и формулы (18.60), (18.58), в которых надо лишь

написать правильные единицы, а именно заменить κ на $2\pi\delta^2/\Phi_0$. Это относится и к предельным выражениям (18.61), (18.67), а также к формуле (18.68) без последнего члена, который не может быть точно определен из-за логарифмической точности в определении H_{c1} . Все эти результаты характеризуют зависимость $B(H_0)$ при $H_{c1} \ll H_0 \ll H_{c2}$.

В дальнейшем нам будут полезны оценки для критических полей, выраженные через Φ_0 и характерные длины. Формула (18.96) дает оценку для H_{c1} . При поле H_{c2} вихри сдвигаются на расстояния порядка ξ , и так как на каждый приходится один квант потока, то $H_{c2} \sim \Phi_0/\xi^2$. Наконец, вследствие того что $H_{c2} \sim H_{cm}\kappa \sim H_{cm}\delta/\xi$, имеем $H_{cm} \sim \Phi_0/\delta\xi$. Итак,

$$H_{c1} \sim \Phi_0/\delta^2, \quad H_{cm} \sim \Phi_0/\delta\xi, \quad H_{c2} \sim \Phi_0/\xi^2. \quad (18.98)$$

При сравнении теории с экспериментом необходимо иметь в виду ряд обстоятельств. Прежде всего, большие H достигаются лишь у сверхпроводников с большой концентрацией примесей. Мы уже отмечали в § 16.9, что примеси при малой концентрации очень слабо влияют на термодинамические свойства сверхпроводника, в том числе и на H_{cm} . Однако при большой концентрации примесей, порядка десятков процентов, мы фактически имеем дело с новым веществом.

Границами смешанного состояния являются поля H_{c1} и H_{c2} , которые достаточно четко видны на кривой зависимости $B(H_0)$. Оказывается, что из этой же кривой можно легко определить и H_{cm} . Действительно, при H_{c2}

$$\Omega_s(H_{c2}) = \Omega_n(H_{c2}).$$

Отсюда следует (см. приложение III)

$$\Omega_s^{(0)} - (4\pi)^{-1} \int_0^{H_{c2}} B(H_0) dH_0 = \Omega_n^{(0)} - H_{c2}^2/8\pi.$$

Но так как $\Omega_n^{(0)} - \Omega_s^{(0)} = H_{cm}^2/8\pi$, то

$$\frac{H_{cm}^2}{2} = \int_0^{H_{c2}} [H_0 - B(H_0)] dH_0 = \int_0^{H_{c2}} [-4\pi M(H_0)] dH_0. \quad (18.99)$$

Иными словами, H_{cm} определяется площадью под кривой зависимости $-4\pi M$ от H_0 .

На опыте часто приходится иметь дело с образцами нецилиндрической формы. Если образец имеет форму эллипсоида, то роль внешнего поля H_0 начинает играть «внутреннее» поле H_i , равное (см. приложение III)

$$H_i = H_0 - 4\pi nM,$$

где M — намагниченность, а n — размагничивающий фактор. Намагниченность M связана с B соотношением

$$B = H_i + 4\pi M.$$

Выражая отсюда M и подставляя в предыдущую формулу, получаем

$$(1 - n) H_i + nB = H_0.$$

Если полученную ранее кривую зависимости $B(H_0)$ для цилиндрической геометрии записать в форме $H_0 = f(B)$, то теперь та же функция будет связывать H_i и B . Итак, в результате имеем

$$(1 - n) f(B) + nB = H_0. \quad (18.100)$$

Это и есть связь между B и H_0 для эллипсоида. В частности, начало смешанного состояния соответствует $B = 0$, $f(B) = H_{c1}$. Следовательно, для эллипсоида оно начинается при

$$H_0 = (1 - n) H_{c1}. \quad (18.101)$$

Для бесконечной пластины в перпендикулярном поле ($n = 1$) смешанное состояние начинается при $H_0 = 0$. Концу смешанного состояния соответствует значение $B = f(B) = H_0 = H_{c2}$.

Говоря о сравнении с экспериментом, надо иметь в виду еще одно обстоятельство. Изменение индукции в зависимости от H_0 в смешанном состоянии есть результат изменения плотности вихрей. Следовательно, при постепенном изменении поля H_0 происходит смещение вихрей. Такому смещению могут препятствовать макроскопические неоднородности образца («пиннинг»). Оставляя более детальное рассмотрение этого вопроса до § 18.7, отметим лишь, что для реальных образцов зависимость $B(H_0)$ может оказаться весьма далекой от теоретической равновесной кривой, так что сравнение теории с экспериментом можно производить только для специально приготовленных гомогенизированных образцов. Гомогенизация может быть достигнута, в частности, путем длительного отжига при температуре, близкой к температуре плавления.

Однако и в этом случае имеется некоторый неизбежный потенциальный барьер, препятствующий свободному перемещению вихрей. Он связан с поверхностью образца (Бин, Ливингстон, 1964) [212]. Рассмотрим вихрь, приближающийся к поверхности (рис. 18.7 а). Будем считать $\kappa \gg 1$, ось вихря параллельной поверхности образца (вдоль оси z) и расстояние x_1 от оси до поверхности значительно превышающим радиус сердцевин. В отсутствие вихря поле равно $H_0 \exp(-x/\delta)$. Вихрь добавляет свое магнитное поле, которое искажается поверхностью так, чтобы, во-первых, не создавалось добавочное поле на поверхности (ибо поле на поверхности задано и равно H_0), а во-вторых, ток, нормальный к поверхности, обращался в нуль.

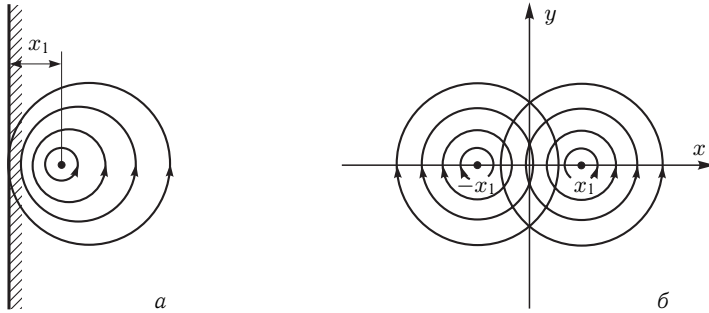


Рис. 18.7

Это можно осуществить, если добавить к вихрю его зеркальное изображение относительно поверхности с противоположным направлением поля и тока (рис. 18.7 б). При этом поле вихря будет удовлетворять уравнению Лондонов с двумя источниками:

$$\Delta H - \delta^{-2} H = -\delta^{-2} \Phi_0 [\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) - \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2)], \quad (18.102)$$

где $\mathbf{p}_1 = (x_1, 0)$, $\mathbf{p}_2 = (-x_1, 0)$; полное магнитное поле будет равно

$$H = H_0 e^{-x/\delta} + (\Phi_0/2\pi\delta^2) [K_0(|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1|/\delta) - K_0(|\mathbf{p} - \mathbf{p}_2|/\delta)]. \quad (18.103)$$

С помощью этих формул найдем энергию в заданном поле:

$$\int \Omega_{sH} dV = \int \Omega_s dV - (4\pi)^{-1} H_0 \int H dV.$$

Будем вычислять энергию на единицу длины вдоль оси z и реально интегрировать по полуплоскости $x > 0$. В данном случае в противоположность одному вихрю в бесконечном пространстве интеграл по поверхности не обращается в нуль, а поэтому надо проявить аккуратность.

Прежде всего, проинтегрируем по полуплоскости $x > 0$ уравнение (18.102). Получаем при этом (нормаль к поверхности направлена вдоль $-x$)

$$\int H dV = \Phi_0 + \delta^2 \int \Delta H dx dy = \Phi_0 - \delta^2 \int_{x=0} \frac{\partial H}{\partial x} dy.$$

Следовательно,

$$-(4\pi)^{-1} H_0 \int H dV = -\frac{H_0 \Phi_0}{4\pi} + \frac{\delta^2 H_0}{4\pi} \int_{x=0} \frac{\partial H}{\partial x} dy.$$

Поверхностный интеграл в (18.94) равен

$$\frac{\delta^2}{8\pi} \int [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}] d\mathbf{S} = -\frac{\delta^2}{8\pi} H_0 \int_{x=0} \frac{\partial H}{\partial x} dy.$$

Объемный интеграл в (18.94) вычисляется с помощью формул (18.102), (18.103). При этом заменяем $K_0(0)$ на $\ln(\delta/\xi)$, ибо на расстояниях, меньших ξ , излагаемая теория неприменима и надо экстраполировать поле H от расстояний $x \sim \xi$. Воспользуемся также формулой (18.96). При подстановке формулы (18.103) для H в интеграл $[\delta^2/8\pi] H_0 \int_{x=0} (\partial H/\partial x) dy$ первый член дает $-(\delta^2 H_0/8\pi) \int dy$, что соответствует энергии поля в слое δ без вихря. Эту энергию учитывать не будем. В итоге энергия, связанная с вихрем, равна

$$U(x_1) = \frac{\Phi_0}{4\pi} \left\{ H_0 \exp\left(-\frac{x_1}{\delta}\right) - \frac{\Phi_0}{4\pi\delta^2} K_0\left(\frac{2x_1}{\delta}\right) - H_0 + H_{c1} \right\}. \quad (18.104)$$

На расстояниях $x_1 \lesssim \xi$ $K_0(2x_1/\delta)$ надо заменить на $\ln(\delta/\xi)$. Сравнивая с (18.96), видим, что на таких расстояниях $U(x_1)$ обращается в нуль. При $x_1 \rightarrow \infty$ два первых члена (18.104) обращаются в нуль; $U(\infty) < 0$ при $H_0 > H_{c1}$ и $U(\infty) > 0$ при $H_0 < H_{c1}$, как и должно быть.

График функции $U(x_1)$ при разных H_0 (обозначим $h = 4\pi H_0 \delta^2 / \Phi_0$) изображен на рис. 18.8. Мы видим, что около поверхности возникает потенциальный барьер, препятствующий как входу вихря в сверхпроводник, так и его выходу из сверхпроводника. Увеличение поля приводит к исчезновению барьера лишь при некотором поле $H_0 = H'_{c1} > H_{c1}$. Оценить это поле можно следующим образом. Условие $U'(x_1) = 0$ дает

$$\frac{\Phi_0}{4\pi\delta^2} \frac{2}{\delta} K_1\left(\frac{2x_1}{\delta}\right) - \frac{H_0}{\delta} \exp\left(-\frac{x_1}{\delta}\right) = 0.$$

Нас интересует случай, когда вершина барьера выходит на поверхность, т.е. $x_1 = 0$. Но при $x_1 \rightarrow 0$ $K_1(2x_1/\delta) \approx \delta/2x_1$. Как уже

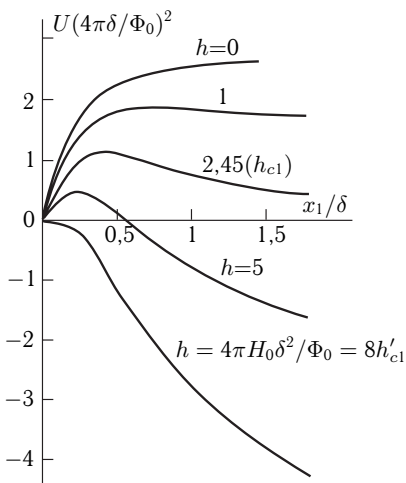


Рис. 18.8

говорилося, при малых x_1 надо заменить x_1 на ξ , т. е. $K_1(2x_1/\delta) \sim \delta/\xi$. Отсюда получаем (см. (18.97))

$$H'_{c1} \sim \Phi_0/\delta\xi \sim H_{cm}.$$

При уменьшении поля барьер исчезает лишь при $H_0 = 0$.

В реальных экспериментах у краев образца всегда имеет место сгущение силовых линий поля, и, таким образом, в этих местах внешнее поле может превзойти H'_{c1} . Эти края и будут теми «слабыми местами», через которые вихри проникнут в образец. Поэтому кривую $B(H_0)$, снятую в увеличивающемся поле, можно считать равновесной ¹⁾. Однако при уменьшении поля на поверхности образца не оказывается участков, где поле равно нулю, а следовательно, барьер везде сохраняется. Следовательно, кривая намагничивания, снятая в уменьшающемся поле даже у самых гомогенных образцов, будет неравновесной. Это подтверждается экспериментальными данными (рис. 18.9).

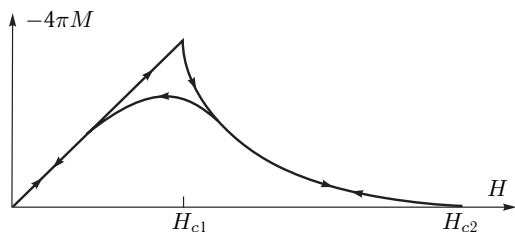


Рис. 18.9

Теперь остановимся на еще одном свойстве смешанного состояния. Как уже было выяснено раньше, на оси вихря энергия $\Delta = 0$. Но спектр квазичастиц в сверхпроводнике начинается с энергии Δ . Ввиду этого не исключена возможность существования особых квазичастиц, локализованных вблизи оси вихря, с нулевой энергией возбуждения. Это заключение подтверждается строгим теоретическим расчетом [213]. Действительно, в смешанном состоянии у сверхпроводника имеются квазичастицы, движущиеся вдоль оси вихря и обладающие конечной плотностью состояний при $\varepsilon \rightarrow 0$, как у цилиндров из нормального металла с радиусом порядка ξ .

Поскольку площадь сечения сердцевинки одного вихря порядка ξ^2 , а число вихрей, пронизывающих 1 см^2 , есть $n = B/\Phi_0$, то доля «нормального металла» составляет $\xi^2 B/\Phi_0$ и, соответственно, плотность состояний

$$\nu \sim \nu_n \xi^2 B/\Phi_0,$$

¹⁾ В специально приготовленных образцах с очень гладкой поверхностью можно добиться задержки перехода в увеличивающемся поле. При этом получается хорошее согласие с результатом точной теории $H'_{c1} = H_{cm}$.

где ν_n — плотность состояний для нормального металла. При поле H_{c2} вихри сближаются на расстояния порядка ξ ; в этом случае $B \approx H_{c2} \sim \sim \Phi_0/\xi^2$ (см. (18.97)). Следовательно, плотность состояний может быть записана в виде

$$\nu = \nu_n B/H_{c2} \quad (18.105)$$

(знак равенства поставлен из условия сшивки с нормальным металлом при $B = H_{c2}$). Но конечная плотность состояний приводит к линейной зависимости теплоемкости от температуры. Итак, приходим к выводу, что при $T \ll T_c$ у сверхпроводника 2-го рода в смешанном состоянии имеется линейная по температуре теплоемкость

$$\Delta C(B) = (\pi^2/3) \nu_n T B/H_{c2} = C_n(T) B/H_{c2}. \quad (18.106)$$

В заключение отметим, что, так же как и в окрестности T_c , возникновение сверхпроводящего зародыша вблизи поверхности возможно при полях, больших чем H_{c2} . Отношение H_{c3}/H_{c2} зависит от температуры и от условий рассеяния электронов на поверхности образца. Расчет с помощью вариационного метода, наподобие того, который был применен в § 18.4, дает при $T = 0$ $H_{c3}/H_{c2} \geq 1,99$ для зеркального отражения электронов от поверхности и $H_{c3}/H_{c2} \geq 2,09$ для диффузного отражения [210]. Мы видим, что все магнитные свойства сверхпроводников 2-го рода не только качественно похожи на те, что имеются в окрестности T_c , но и количественно (в соответствующих единицах) не очень от них отличаются.

§ 18.6. Тонкая пленка сверхпроводника 2-го рода в магнитном поле

Критическое поле тонких пленок сверхпроводников 1-го рода с $\kappa \ll 1$ было вычислено в § 17.3. Условие $\kappa \ll 1$ позволяло считать $\Psi \approx \text{const}$ по всему сверхпроводнику. Во всех дальнейших расчетах κ не фигурировало. Некоторые результаты § 17.3 можно распространить и на сверхпроводники 2-го рода. Действительно, при толщинах $d \ll \xi$ (в приведенных единицах $d \ll \kappa^{-1}$) Ψ не должно меняться по толщине пленки. Но для сверхпроводников 2-го рода $\xi \ll \delta$ и, следовательно, надо применять формулы для $d \ll \delta$ (в приведенных единицах $d \ll 1$). В частности, критическое поле перехода в нормальное состояние выражается формулой (17.48) или (17.48'). Отметим, что для таких пленок δ/d играет роль «эффективного» параметра κ , и поэтому формула (17.48) вполне соответствует формулам (18.2) и (18.3) для верхнего критического поля сверхпроводников 2-го рода.

Если говорить о реальных экспериментальных объектах, то обычно пленки сверхпроводников 2-го рода получаются с помощью испарения металла и осаждения пара на немагнитическую подложку, поддерживаемую при гелиевой температуре. Оказывается, что атомы металла,

соприкоснувшись с подложкой, немедленно к ней прилипают и не смещаются. Поэтому образовавшаяся пленка является почти совершенно аморфной, т.е. обладает малой длиной свободного пробега электронов, и поэтому принадлежит к сверхпроводникам 2-го рода, даже если исходный чистый металл был сверхпроводником 1-го рода и имел $\kappa \ll 1$. Итак, мы видим, что пленка сверхпроводника 2-го рода является весьма обычным объектом. При отжиге такой пленки, т.е. повышении ее температуры до нескольких десятков градусов, происходит рекристаллизация, и она становится сверхпроводником 1-го рода с H_{cm} и T_c , близкими к характеристикам массивного материала. То же самое имеет место, если металл испаряют на подложку, находящуюся при комнатной температуре.

Возникает вопрос о возможности осуществления в пленке с $\kappa > 1/\sqrt{2}$ смешанного состояния. Качественный ответ довольно очевиден: смешанное состояние возможно при толщинах $d \gtrsim \xi$. Отсюда вытекает, что при уменьшении толщины пленки поле H_{c1} должно возрастать быстрее, чем H_{c2} , и они должны сравняться при $d \sim \xi$.

Теперь рассмотрим вопрос количественно. Для нахождения поля H_{c1} нам надо найти условия возникновения одного вихря. Из соображений симметрии ясно, что наименьшей энергией будет обладать вихрь в центре пленки. В § 18.5 было показано, что граничные условия на плоской границе можно учесть наличием зеркально отраженного вихря с обратным направлением поля и тока. В данном случае имеются две границы и в результате возникнет бесконечная система отражений, знакопеременных по полю и току, с расстоянием d между ближайшими вихрями. Вместо уравнения (18.102) получается

$$\Delta H - \delta^{-2} H = \delta^{-2} \Phi_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n), \quad (18.107)$$

где $\mathbf{r}_n = (nd, 0)$, а n принимает все целые значения, положительные и отрицательные.

Полное магнитное поле, удовлетворяющее условиям $H = H_0$ при $x = \pm d/2$, будет равно (см. (18.102), (18.103))

$$H = H_0 \frac{\text{ch}(x/\delta)}{\text{ch}(d/2\delta)} + \frac{\Phi_0}{2\pi\delta^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n K_0 \left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}{\delta} \right). \quad (18.108)$$

Найдем теперь свободную энергию. Аналогично тому, как это делалось в § 18.5, найдем энергию одного вихря в поле (на единицу длины):

$$\int (\Omega_{sH} - \Omega_{sH}^{(0)}) dV = \int (\Omega_s - \Omega_s^{(0)}) dV - (4\pi)^{-1} H_0 \int [H(\mathbf{r}) - H^{(0)}(\mathbf{r})] dV,$$

где $\Omega_{sH}^{(0)}$, $\Omega_s^{(0)}$ соответствуют отсутствию вихря, а $H^{(0)}(\mathbf{r})$ есть первый член в (18.108). Вычисление дает

$$\int_{-d/2}^{d/2} dx \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_{sH} - \Omega_{sH}^{(0)}) dy = (4\pi)^{-1} \frac{\Phi_0 H_0}{\text{ch}(d/2\delta)} +$$

$$+ 2 \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\delta} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_0 \left(\frac{nd}{\delta} \right) + (4\pi)^{-1} [H_{c1}(\infty) - H_0] \Phi_0,$$

где $H_{c1}(\infty)$ соответствует бесконечному образцу. Приравнявая это выражение нулю, получаем первое критическое поле для образца толщиной d (Абрикосов, 1964) [214]:

$$H_{c1}(d) = \left[H_{c1}(\infty) - \frac{\Phi_0}{2\pi\delta^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_0 \left(\frac{nd}{\delta} \right) \right] \left[1 - \text{ch}^{-1} \frac{d}{2\delta} \right]^{-1}. \quad (18.109)$$

Предельные выражения таковы:

$$H_{c1}(d) \approx H_{c1}(\infty) [1 + 2 \exp(-d/2\delta)], \quad d \gg \delta, \quad (18.110)$$

$$H_{c1}(d) \approx (2\Phi_0/\pi d^2) \ln(d/\xi), \quad d \ll \delta.$$

В последней формуле было использовано интегральное представление функций Макдональда (с. 343) и выражение (18.96) для H_{c1} при $\kappa \gg 1$ (выражение написано с логарифмической точностью). Асимптотика (18.110) для $d \ll \delta$ годится лишь при $d \gg \xi$. Из этой асимптотики следует, что H_{c1} растет при уменьшении толщины пропорционально d^{-2} , в то время как H_{c2} растет пропорционально d^{-1} (см. (17.48)). Из микроскопической теории следует, что $H_{cm} \sim \Phi_0/\delta\xi$ (см. (18.98)). Сравнивая поля

$$H_{c2} \sim H_{cm}\delta/d \sim \Phi_0/\xi d \quad \text{и} \quad H_{c1} \sim \Phi_0/d^2,$$

видим, что они становятся одинаковыми при $d \sim \xi$.

Рассмотрим теперь тонкую пластину в перпендикулярном магнитном поле. Будем предполагать толщину пластины гораздо меньше глубины проникновения. Продемонстрируем, что в этом случае тоже образуются вихри, причем не только в сверхпроводнике 2-го, но и 1-го рода (Перл, 1964) [215].

Представим себе, что такой вихрь образовался, причем поле и ток затухают на расстоянии, значительно большем ξ . В этом случае вне сердцевины с радиусом порядка ξ можно использовать уравнение Лондонов с вихрем (18.91), которое нам будет удобнее написать в форме

$$\mathbf{H} + (4\pi\delta^2/c) \text{rot } \mathbf{j} = \Phi_0 \mathbf{z}^0 \delta(\mathbf{p}) \quad (18.111)$$

(считаем, что пластина перпендикулярна оси z и вихрь находится в точке $\mathbf{p} = 0$). Введем векторный потенциал: $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$. Если использовать цилиндрическую систему координат, то ток, очевидно, будет

иметь только компоненту j_θ . Ввиду этого и векторный потенциал $\mathbf{A}$ выберем в виде $\mathbf{A} = (0, A_\theta, 0)$.

Уравнение (18.111) можно проинтегрировать и выразить из него плотность тока

$$\mathbf{j} = (c/4\pi\delta^2) (\mathbf{S} - \mathbf{A}), \quad (18.112)$$

где $\mathbf{S} = (0, S_\theta, 0)$,

$$S_\theta = \Phi_0/2\pi\rho \quad (18.113)$$

(действительно, $\text{rot } \mathbf{S} = 0$ везде, кроме $\mathbf{p} = 0$, и $\int \text{rot } \mathbf{S} \, ds = \oint \mathbf{S} \, d\mathbf{l} = \Phi_0$ для любого контура вокруг $\mathbf{p} = 0$).

Если толщина пластины d меньше глубины проникновения, то ток и поле слабо меняются по толщине пластины. Как мы увидим ниже, характерное расстояние, на котором поле значительно меняется, существенно больше d и δ , а поэтому можно считать пластину бесконечно тонкой и в качестве плотности тока использовать

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{I}\delta(z) = \mathbf{j}d\delta(z) = (cd/4\pi\delta^2) (\mathbf{S} - \mathbf{A}) \delta(z). \quad (18.114)$$

Этот ток создает магнитное поле во всем окружающем пространстве, которое определяется из уравнения Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{H} = (4\pi/c) \mathbf{j} = (d/\delta^2) (\mathbf{S} - \mathbf{A}) \delta(z).$$

Подставляя $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ и пользуясь условием $\text{div } \mathbf{A} = 0$, получаем уравнение для $\mathbf{A}$:

$$-\Delta \mathbf{A} + \delta_{\text{эф}}^{-1} \mathbf{A} \delta(z) = \delta_{\text{эф}}^{-1} \mathbf{S} \delta(z), \quad (18.115)$$

где введено определение

$$\delta_{\text{эф}} = \delta^2/d. \quad (18.116)$$

Этот параметр, имеющий размерность длины, и будет характерным размером задачи. Для того чтобы наше рассмотрение имело смысл, нужно, чтобы он был значительно больше ξ . Для сверхпроводника 2-го рода это следует из того, что $\delta > \xi$, $d \ll \delta$, а для сверхпроводника 1-го рода необходимо, чтобы было

$$d \ll \delta^2/\xi \sim \delta\kappa \sim \xi\kappa^2. \quad (18.117)$$

Для решения уравнения (18.115) введем фурье-преобразование:

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}, z) = \int \mathbf{A}_{\mathbf{q}k} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{p} + ikz) \frac{d^2\mathbf{q} \, dk}{(2\pi)^3}.$$

При этом

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}, z) \delta(z) = \mathbf{A}(\mathbf{p}, 0) \delta(z) = \int \mathbf{A}_{\mathbf{q}k} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{p}) \frac{d^2\mathbf{q} \, dk}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_1 z) \frac{dk_1}{2\pi}.$$

Из уравнения (18.115) получаем

$$(q^2 + k^2) \mathbf{A}_{\mathbf{q}k} + \delta_{\text{эф}}^{-1} \mathbf{A}_{\mathbf{q}} = \delta_{\text{эф}}^{-1} \mathbf{S}_{\mathbf{q}}, \quad (18.118)$$

где

$$\mathbf{A}_{\mathbf{q}} = \int_{-\infty}^{\infty} A_{\mathbf{q}k} \frac{dk}{2\pi}, \quad (18.119)$$

а $\mathbf{S}_{\mathbf{q}}$ — фурье-компонента $\mathbf{S}(\mathbf{p})$.

Решая (18.118), находим

$$\mathbf{A}_{\mathbf{q}k} = (\mathbf{S}_{\mathbf{q}} - \mathbf{A}_{\mathbf{q}}) \delta_{\text{эф}}^{-1} / (q^2 + k^2). \quad (18.120)$$

Подставляя это в (18.119), получаем

$$\mathbf{A}_{\mathbf{q}} = \mathbf{S}_{\mathbf{q}} / (1 + 2q \delta_{\text{эф}}). \quad (18.121)$$

Фурье-компоненту $\mathbf{S}_{\mathbf{q}}$ можно легко найти из условия

$$\text{rot } \mathbf{S} = \Phi_0 \mathbf{z}^0 \delta(\mathbf{p}).$$

Подставляя фурье-разложение, имеем

$$\mathbf{S}_{\mathbf{q}} = i\Phi_0 [\mathbf{qz}^0] / q^2. \quad (18.122)$$

Согласно формулам (18.112), (18.119) и (18.122) получаем

$$\mathbf{I}_{\mathbf{q}} = \frac{c}{4\pi\delta_{\text{эф}}} (\mathbf{S}_{\mathbf{q}} - \mathbf{A}_{\mathbf{q}}) = \frac{c}{2\pi} \frac{q}{1 + 2q\delta_{\text{эф}}} \mathbf{S}_{\mathbf{q}} = \frac{c}{2\pi} \frac{i\Phi_0 [\mathbf{qz}^0]}{q(1 + 2q\delta_{\text{эф}})}. \quad (18.123)$$

Ввиду того что $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$, имеем для поля при $z = 0$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{q}} = i[\mathbf{qS}_{\mathbf{q}}] / (1 + 2q\delta_{\text{эф}}) = \mathbf{z}^0 \Phi_0 / (1 + 2q\delta_{\text{эф}}). \quad (18.124)$$

Из этих формул видно, что существуют две асимптотических области: $q \gg \delta_{\text{эф}}^{-1}$, соответствующая $\rho \ll \delta_{\text{эф}}$, и $q \ll \delta_{\text{эф}}^{-1}$, соответствующая $\rho \gg \delta_{\text{эф}}$. В первой из этих областей

$$\mathbf{I}_{\mathbf{q}} \approx (c/4\pi\delta_{\text{эф}}) \mathbf{S}_{\mathbf{q}}.$$

Следовательно, $\mathbf{I}(\mathbf{p})$ просто пропорционально $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ и, согласно (18.113),

$$I(\rho) = \Phi_0 c / 8\pi^2 \delta_{\text{эф}} \rho, \quad \rho \ll \delta_{\text{эф}}. \quad (18.125)$$

На больших расстояниях из (18.123) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\mathbf{p}) &= \int \mathbf{I}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{p}} \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} = \text{rot} \left[\frac{c\Phi_0 \mathbf{z}^0}{2\pi} \int_0^\infty dq \int_0^{2\pi} d\theta \frac{e^{iq\rho \cos \theta}}{(2\pi)^2} \right] = \\ &= \text{rot} \left[\frac{c\Phi_0 \mathbf{z}^0}{2\pi} \int_0^\infty J_0(q\rho) dq \right] = \frac{\Phi_0 c}{(2\pi)^2} \text{rot} \left(\frac{\mathbf{z}^0}{\rho} \right) \end{aligned}$$

($J_0(q\rho)$ — функция Бесселя). Отсюда получается, что ток $\mathbf{I}$ имеет лишь θ -компоненту, равную

$$I(\rho) \approx \Phi_0 c / 4\pi^2 \rho^2, \quad \rho \gg \delta_{\text{эф}}. \quad (18.126)$$

Предельное выражение для магнитного поля при $z = 0$ и $\rho \ll \delta_{\text{эф}}$ получается с помощью формулы (18.124):

$$H(\rho, 0) \approx \frac{\Phi_0}{4\pi\delta_{\text{эф}}} \int_0^\infty J_0(q\rho) dq = \frac{\Phi_0}{4\pi\delta_{\text{эф}}\rho}, \quad \rho \ll \delta_{\text{эф}}. \quad (18.127)$$

Для случая $\rho \gg \delta_{\text{эф}}$ лучше воспользоваться уравнением Лондонов (18.111) и формулой (18.126):

$$H(\rho, 0) = -(4\pi\delta_{\text{эф}}/c) \operatorname{rot}_z I = \Phi_0 \delta_{\text{эф}} / \pi \rho^3, \quad \rho \gg \delta_{\text{эф}}. \quad (18.128)$$

Распределение поля вне пластины можно получить с помощью формулы (18.120). Подставляя (18.121) и (18.122), получаем

$$\mathbf{A}_{\mathbf{q}k} = \frac{2q\mathbf{S}_{\mathbf{q}}}{(1 + 2q\delta_{\text{эф}})(q^2 + k^2)} = \frac{2i\Phi_0 [\mathbf{q}\mathbf{z}^0]}{q(1 + 2q\delta_{\text{эф}})(q^2 + k^2)}.$$

Взяв ротор, находим

$$\begin{aligned} H_{z\mathbf{q}k} &= i [\mathbf{q}\mathbf{A}_{\mathbf{q}k}]_z = \frac{2\Phi_0 q}{(1 + 2q\delta_{\text{эф}})(q^2 + k^2)}, \\ \mathbf{H}_{\perp\mathbf{q}k} &= \frac{2\Phi_0 \mathbf{q}k}{q(1 + 2q\delta_{\text{эф}})(q^2 + k^2)}. \end{aligned} \quad (18.129)$$

В координатном представлении имеем

$$\begin{aligned} H &= -\nabla\varphi \operatorname{sign} z, \\ \varphi &= \frac{\Phi_0}{2\pi} \int_0^\infty J_0(q\rho) e^{-q|z|} \frac{dq}{1 + 2q\delta_{\text{эф}}}. \end{aligned} \quad (18.130)$$

Большим расстояниям соответствуют $q \ll \delta_{\text{эф}}^{-1}$. При этом

$$\varphi = \frac{\Phi_0}{2\pi r}, \quad \mathbf{H} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \operatorname{sign} z. \quad (18.131)$$

Отметим, что, согласно (18.130), $\mathbf{H}_{\perp} \neq 0$ при $z = 0$. Если же с самого начала положить $z = 0$, т. е. найти $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_{\perp\mathbf{q}k} dk / 2\pi$, то получится нуль. Связано это с заменой пластины на бесконечно тонкую плоскость

с током. Для такой пластины из уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = (4\pi/c) \mathbf{j}$ имеем:

$$\mathbf{H}_\perp(\mathbf{p}, +0) - \mathbf{H}_\perp(\mathbf{p}, -0) = (4\pi/c) \mathbf{I}(\mathbf{p}).$$

Это условие удовлетворяется формулами (18.129) и (18.123). Переход от $\mathbf{H}_\perp(\mathbf{p}, +0)$ к $\mathbf{H}_\perp(\mathbf{p}, -0)$ происходит на расстоянии $\Delta z \sim d$. При этом в центре пластины $\mathbf{H}_\perp = 0$.

Мы рассмотрели один изолированный вихрь. В действительности, конечно, вихри возникают при помещении пластины в перпендикулярное магнитное поле. При этом появляется регулярная вихревая структура. Из симметрии задачи получается, как и раньше, что вокруг каждой сердцевинки можно провести контур, на котором $\oint \mathbf{j} d\mathbf{l} = 0$, следовательно, каждый вихрь несет один квант потока Φ_0 . Если центры сердцевин расположены в точках $\mathbf{p}_m$, то вместо уравнения (18.111) с $\delta(\mathbf{p})$ получится уравнение с $\sum \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_m)$.

Все дальнейшие выражения, в которых не конкретизировано $\mathbf{S}_q$, сохраняются. Новое $\mathbf{S}_q$ получается из условия

$$\text{rot } \mathbf{S} = \Phi_0 \mathbf{z}^0 \sum_m \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_m)$$

и равно (ср. с (18.122))

$$\mathbf{S}_q = i\Phi_0 [\mathbf{qz}^0] \sum_m \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{p}_m)/q^2. \quad (18.132)$$

С помощью формул (18.121) и (18.120) получаем $\mathbf{A}_{qk}$ и $\mathbf{H}_{qk}$. В частности, при $z > 0$

$$H_z(\mathbf{p}, z) = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\Phi_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sum_m J_0(q|\mathbf{p} - \mathbf{p}_m|) e^{-qz}}{1 + 2q\delta_{\text{эф}}} dq.$$

При $z \gg \delta_{\text{эф}}$ можно считать $q\delta_{\text{эф}} \ll 1$. Взяв интеграл, получаем

$$H_z(\mathbf{p}, z) \approx \Phi_0/2\pi z \sum_m \left[z^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{p}_m)^2 \right]^{-3/2}. \quad (18.133)$$

На расстоянии z , гораздо большем периода структуры, можно заменить

$$\sum_m \rightarrow n \int d^2\mathbf{p}_m,$$

n — число вихрей на 1 см^2 . Взяв интеграл, получаем очевидный результат:

$$H_z(\mathbf{p}, z) \approx n\Phi_0 = H_0, \quad (18.134)$$

(H_0 — внешнее поле на бесконечности). Этот же результат можно было бы получить из условия непрерывности нормальной компоненты индукции.

Полученные формулы применимы до тех пор, пока расстояния между вихрями значительно больше ξ , т. е. при

$$H_0 \ll \Phi_0/\xi^2 \sim H_{c2}$$

(напомним, что для сверхпроводников 1-го рода H_{c2} есть поле переохлаждения).

§ 18.7. Сверхпроводящие магниты. Пиннинг

Идея о применении сверхпроводников вместо обычных металлов с целью ликвидации омических потерь существует с момента открытия сверхпроводимости. Препятствием служит необходимость создания низких температур. Дороговизна сооружения эксплуатации сверхпроводящих кабелей с гелиевым охлаждением делает пока нерентабельным использование сверхпроводимости для передачи энергии.

Иное дело, когда речь идет об охлаждении ограниченного объема. Именно поэтому в настоящее время быстро расширяется использование сверхпроводников для создания мощных магнитов. Обычный электромагнит, представляющий собой катушку из медной или алюминиевой проволоки, потребляет мощность, растущую пропорционально H^2 , где H — создаваемое им магнитное поле. Для создания поля 100 кЭ в отверстии диаметром 2,5 см требуется мощность порядка 1 МВт. Почти вся эта энергия выделяется в виде джоулева тепла, и для отвода последнего необходима громоздкая и дорогостоящая система водяного охлаждения ¹⁾.

Если же сделать катушку (соленоид) из сверхпроводника, то необходима лишь энергия для поддержания гелиевой температуры. Она может быть на несколько порядков меньше, чем энергия, потребляемая соответствующим электромагнитом; кроме того, вся установка получается гораздо компактнее. К этому надо добавить, что сверхпроводящая катушка может быть замкнута накоротко и в этом случае она превращается в постоянный магнит. Как мы знаем, поток поля через полый сверхпроводник не меняется со временем, ибо любое изменение внешних условий компенсируется сверхпроводящими токами. Поэтому сверхпроводящий постоянный магнит характеризуется уникальным постоянством создаваемого им магнитного поля.

Идея создания сверхпроводящих магнитов была высказана еще Камерлинг-Оннесом. Но известные в то время сверхпроводники обладали малыми критическими полями порядка сотен эрстед. Ситуация

¹⁾ К этому надо добавить, что водяные насосы создают вибрацию, которая в большинстве случаев очень вредна.

изменилась в 60-х годах, когда были открыты сверхпроводники с критическими полями выше 100 кЭ и к тому же сильно усовершенствовались и сделались более дешевыми криостаты, т.е. установки для поддержания гелиевых температур. Последующее изучение показало, что новые материалы, обладающие высокими критическими полями, являются сверхпроводниками 2-го рода, которые хорошо описываются теорией, изложенной в предыдущих параграфах.

Как уже отмечалось, наибольшие известные критические поля получены у так называемых фаз Шевреля: соединений типа $M_x(\text{Mo}_6\text{S}_8)_y$ (M — металлы: Pb, Li и др.). Они достигают 600 кЭ. Однако для практически нужд необходимы хорошие механические свойства сплавов, и поэтому применяются сплавы Nb–Zr–Ti с критическими полями до 110–120 кЭ и Nb_3Sn с критическим полем до 230 кЭ. Как мы знаем из предыдущего, теоретический предел соответствует 1000 кЭ.

Тем не менее возможность применения сверхпроводников 2-го рода для создания больших полей не вполне очевидна. Действительно, как было установлено в предыдущих параграфах, при $\kappa \gg 1$ имеется большая область смешанного состояния, начиная от поля $H_{c1} \sim H_{cm}/\kappa$ до $H_{c2} \sim H_{cm}\kappa$. Следовательно, если имеется большое поле, то сверхпроводник наверняка находится в смешанном состоянии и пронизан вихревыми нитями. Ток, создающий поле в соленоиде, течет перпендикулярно вихревым нитям. Но при этом на вихревые нити действует сила Лоренца в направлении, перпендикулярном $\mathbf{H}$ и $\mathbf{j}$.

Найти эту силу можно следующим образом. Пусть в сверхпроводнике имеется один вихрь с током $\mathbf{j}$ и пропускается внешний ток $\mathbf{j}^{\text{ex}}$. Тогда полный ток будет $\mathbf{j} + \mathbf{j}^{\text{ex}}$. Подставляя в (18.93), получим энергию взаимодействия токов

$$\Lambda \int \mathbf{j}^{\text{ex}} \mathbf{j} dV$$

(энергия взаимодействия магнитных полей сравнительно мала). В данном случае $\mathbf{j}$ зависит от $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0$, где $\mathbf{p}_0$ — координата оси вихря. Компонента силы, действующей на ось вихря, есть производная от энергии взаимодействия по координате со знаком минус:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_{0k}} \Lambda \int \mathbf{j}^{\text{ex}} \mathbf{j} dV &= -\Lambda \sum_{i=1,2} \int j_i^{\text{ex}} \frac{\partial}{\partial x_{0k}} j_i dV = \Lambda \sum_{i=1,2} \int j_i^{\text{ex}} \frac{\partial}{\partial x_k} j_i dV = \\ &= \Lambda \sum_{i=1,2} \int j_i^{\text{ex}} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} j_i - \frac{\partial}{\partial x_i} j_k \right) dV + \Lambda \sum_{i=1,2} \int j_i^{\text{ex}} \frac{\partial}{\partial x_i} j_k dV \end{aligned}$$

(мы воспользовались тем, что j зависит от $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0$).

Последнее слагаемое равно нулю, ибо путем интегрирования по частям мы получаем из него $-\Lambda \int j_k \text{div} \mathbf{j}^{\text{ex}} dV = 0$ ($\text{div} \mathbf{j}^{\text{ex}} = 0$). Скобка

в первом слагаемом при $i = k$ равна нулю, а при $i \neq k$ — это компонента $\text{rot } \mathbf{j}$ по оси z (ибо $i, k = x, y$). Нетрудно увидеть, что в целом интеграл равен

$$\Lambda \int [\mathbf{j}^{\text{ex}} \text{rot } \mathbf{j}] dV.$$

Но для вихря

$$\text{rot } \mathbf{j} = -(\Lambda c)^{-1} \text{rot}[\mathbf{A} - (\hbar c/2e) \nabla \chi] = (\Lambda c)^{-1} (\hbar c/2e) 2\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

(см. формулы (18.90) и (18.40)). Следовательно, на единицу длины вихря действует сила

$$\mathbf{f}_L = (\Phi_0/c) [\mathbf{j}^{\text{ex}} \mathbf{b}], \quad (18.135)$$

где $\Phi_0 = \pi \hbar c/e$ — квант потока, $\mathbf{b}$ — единичный вектор вдоль оси вихря. Умножая на число вихрей, приходящихся на единицу площади поперечного сечения, $n = B/\Phi_0$, находим силу Лоренца на единицу объема ($n\mathbf{b} = \mathbf{B}/\Phi_0$):

$$\mathbf{F}_L = c^{-1} [\mathbf{j}^{\text{ex}} \mathbf{B}]. \quad (18.136)$$

Под действием этой силы вихревая решетка должна начать перемещаться. Предположим, что этому перемещению препятствует вязкая сила, которая пропорциональна скорости. Пусть для одного вихря

$$\mathbf{f}_v = -\eta \mathbf{v}_L, \quad (18.137)$$

где $\mathbf{v}_L$ — скорость движения вихря, а η — некоторый «коэффициент вязкости». В равновесии $\mathbf{f}_L + \mathbf{f}_v = 0$, т. е.

$$\mathbf{v}_L = (\Phi_0/\eta c) [\mathbf{j}^{\text{ex}} \mathbf{b}]. \quad (18.138)$$

Следовательно, вихри перемещаются перпендикулярно $\mathbf{B}$ и $\mathbf{j}^{\text{ex}}$. Такое перемещение вихревой решетки приводит к появлению электрического поля. Действительно, если в системе отсчета, движущейся вместе с решеткой со скоростью $\mathbf{v}_L$, имеется среднее магнитное поле (индукция) $\mathbf{B}$, то, согласно правилам электродинамики, при переходе к лабораторной системе возникает добавочное электрическое поле

$$\mathbf{E} = c^{-1} [\mathbf{B} \mathbf{v}_L]. \quad (18.139)$$

Подставляя (18.138) и учитывая, что $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ и $\mathbf{B} \perp \mathbf{j}^{\text{ex}}$, получаем

$$\mathbf{E} = (\Phi_0 B/\eta c^2) \mathbf{j}^{\text{ex}}. \quad (18.140)$$

Но появление электрического поля вдоль $\mathbf{j}^{\text{ex}}$ означает возникновение электрического сопротивления

$$\rho = E/j^{\text{ex}} = \Phi_0 B/\eta c^2. \quad (18.141)$$

Если сверхпроводник совершенно однородный, то при достижении поля H_{c2} сопротивление ρ должно стать равным ρ_n — сопротивлению нормального металла. Отсюда следует, что

$$\rho_n = \Phi_0 H_{c2} / \eta c^2.$$

Тогда

$$\eta = \Phi_0 H_{c2} / \rho_n c^2, \quad (18.142)$$

$$\rho = \rho_n B / H_{c2}. \quad (18.143)$$

Последняя формула очень проста и напоминает формулу для теплоемкости (18.106). Ее тоже можно было бы интерпретировать как результат того, что сердцевины вихрей с диаметром порядка ξ находятся в нормальном состоянии. Однако если бы вихревая решетка стояла на месте, то сверхпроводящий ток легко обогнул бы нормальные сердцевины и никакое сопротивление не возникало бы. Появление сопротивления является результатом движения вихрей под действием силы Лоренца.

В действительности формулы (18.142) и (18.143) верны лишь по порядку величины в основном вдали от T_c и H_{c2} . Истинная вязкость η зависит от многих механизмов, а не только от диссипации энергии в нормальных сердцевинах и является сложной функцией поля и температуры. К тому же простая линейная связь (18.137) далеко не всегда имеет место.

Итак, приходим к выводу, что сверхпроводимость прекращается как только возникают вихри, т. е. при поле, равном $H_{c1} \sim H_{cm} / \kappa$. Значит, мы не только не выигрываем при увеличении κ , но, наоборот, сильно проигрываем в критическом поле. Однако есть способ справиться с этим недостатком. Для этого надо остановить движение вихревой решетки и тогда, согласно (18.139), $\mathbf{E} = 0$, а следовательно, и $\rho = 0$. Для этого надо закрепить вихри в определенных местах образца, как бы «пришпилить» их к металлу. Это явление носит название «пиннинг» (от английского слова pin — булавка).

Мы уже встретились в § 18.5 с поверхностным барьером, препятствующим входу вихрей в образец и выходу из него. Из этого примера уже видно, что неоднородности могут приводить к образованию барьеров, мешающих движению вихрей. Ясно, что неоднородности с размером больше ξ будут весьма эффективны для пиннинга ¹⁾.

Рассмотрим в качестве примера полость в сверхпроводнике, с размерами $d \gg \xi$. Мы знаем, что на единицу длины вихря приходится энергия сердцевинки порядка $(\Phi_0 / \delta)^2$ (см. (18.95)). Можно сказать и иначе.

¹⁾ Детальное исследование показывает, что более мелкомасштабные неоднородности могут оказывать коллективное действие на всю вихревую решетку в целом и тоже приводить к пиннингу.

Раз сердцевина находится в нормальном состоянии, то на каждый 1 см^3 приходится избыточная энергия $H_{cm}^2/8\pi$, а на единицу длины — порядка $H_{cm}^2\xi^2$. Тожество этих выражений следует из (18.97).

Если вихрь проходит через полость, то соответствующая часть энергии сердцевины отсутствует. Значит, полная энергия меньше, т. е. вихрь притягивается к полости. Силу этого притяжения можно найти, если учесть, что вихрь исчезает, сливаясь со своим изображением на расстоянии порядка ξ от края полости (§ 18.5). Следовательно, сила, равная градиенту энергии, будет порядка самой энергии, деленной на ξ . Для полости с размером d

$$f_p \sim H_{cm}^2 d/\xi. \quad (18.144)$$

При прохождении тока на вихрь действует сила Лоренца, которая, согласно (18.135), после умножения на длину d имеет порядок ($H_{cm} \sim \Phi_0/\delta\xi$)

$$f_L d \sim \Phi_0 j^{\text{ex}} d/c \sim H_{cm} j^{\text{ex}} \delta\xi d/c.$$

Приравнявая обе силы, находим критическую плотность тока, способного оторвать вихрь от полости,

$$j^{\text{ex}} \sim H_{cm} c/\delta. \quad (18.145)$$

Сравнивая с формулой (17.62), видим, что это значение сравнимо с той плотностью тока, которая нужна для разрушения куперовских пар.

В действительности, конечно, надо учитывать, что сила пиннинга действует на ограниченную часть вихревой нити, в то время как сила Лоренца тянет всю нить. Более того, в реальных случаях имеется много взаимодействующих вихрей, образующих решетку, а поэтому для расчета критической плотности тока надо учитывать деформацию решетки и упругие силы, возникающие при этом. Не будем обсуждать конкретно модели и получающиеся при этом результаты, тем более, что природа центров пиннинга в конкретных сверхпроводниках, применяемых в технике, изучена еще далеко не полностью.

Более того, не всегда ясно, как в действительности распределяется ток по сверхпроводнику в смешанном состоянии с пиннингом. Если мы знаем, что в отсутствие магнитного поля ток течет лишь в поверхностном слое толщины δ , то опыт показывает, что в рассматриваемом случае это заведомо не так, и значительная часть тока идет по внутренней части сверхпроводника. Связано это с тем, что критический ток является функцией поля: $j_c(B)$. При прохождении тока образуется «критический профиль» тока, такой, что индукция и ток в каждом месте сечения проводника соответствуют $j_c(B)$. При $x \gg 1$ и большой плотности дефектов ток распределен почти равномерно по сечению.

В общем случае можно говорить лишь о «токонесущей способности», которая чисто условно выражается в виде средней плотности тока. В настоящее время достигнуты критические значения порядка 10^6 А/см².

Итак, согласно тому, что было сказано, создается впечатление, что до достижения критического тока сопротивление равно нулю, а затем оно возникает скачком. Легко, однако, понять, что это имеет место лишь при $T = 0$. В действительности центры пиннинга создают для вихревой решетки потенциальный рельеф, состоящий из «долин», разделенных «хребтами» — потенциальными барьерами. При конечной температуре возможен переход из одной долины в другую благодаря тепловым флуктуациям. Это приводит к тому, что еще до достижения истинной критической плотности тока возникает «крип» (от английского слова *сгеер* — ползти): флуктуационное скачкообразное перемещение вихревой решетки. При этом появляется сопротивление. Следует подчеркнуть, что так обстоит дело при любой конечной температуре, и поэтому в строгом смысле слова критический ток в смешанном состоянии при $T > 0$ равен нулю.

Однако в действительности дело обстоит не столь безнадежно. Представим себе сверхпроводящий постоянный магнит — короткозамкнутый соленоид. Он используется в рабочем режиме в течение ограниченного времени, ибо все это время надо тратить энергию на охлаждение. Если сопротивление, связанное с крипом вихрей, столь мало, что ток через соленоид не меняется ощутимо в течение, скажем, 100 лет, то с практической точки зрения сопротивление равно нулю.

Не будем приводить здесь теорию крипа (см. [216]). Отметим лишь, что из нее следует уменьшение поля в полости соленоида по очень медленному закону

$$B(t) = B(0) (1 - \alpha \ln t)$$

с коэффициентом $\alpha \sim 10^{-3}$. Следовательно, убывание тока в соленоиде и создаваемого им магнитного поля происходит за фантастически огромные времена.

Отсюда можно было бы сделать вывод, что крип не опасен, и его можно было бы игнорировать, т. е. считать, что с практической точки зрения дело обстоит так же, как при $T = 0$, и до достижения критического тока образец остается сверхпроводящим. В действительности крип создает другую опасность. Если в каком-то месте происходит проскакивание связи вихрей, то выделяется тепло. Это приводит к резкому уменьшению значений критического поля и тока и может вызвать переход участка в нормальное состояние. При этом тепловыделение резко возрастает и в результате возникает неустойчивость, которая чревата разрушением магнита.

Для того чтобы это предотвратить, сверхпроводящие кабели или ленты для магнитов делают многожильными, причем в качестве изолятора применяют нормальный металл — обычно медь. По сравнению

со сверхпроводником любое вещество с конечным сопротивлением является изолятором. Однако, в то время как сверхпроводник обладает плохой теплопроводностью, ибо тепло может передаваться лишь квази-частицами, число которых при низких температурах экспоненциально мало (§ 19.1), нормальный металл — хороший проводник тепла. Он и отводит тепло в случае внезапного нагрева. Кроме того, в случае прекращения тока по сверхпроводнику параллельно включенный толстый нормальный проводник берет на себя роль шунта.

Глава 19

КИНЕТИКА СВЕРХПРОВОДНИКОВ

До сего времени мы рассматривали лишь равновесные явления в сверхпроводниках, т. е. их поведение при изменении температуры и внешнего статического магнитного поля. Исключение составлял только § 18.7, где была качественно рассмотрена кинетика вихревой структуры при прохождении тока.

Серьезное рассмотрение кинетики сверхпроводников требует привлечения полных уравнений микроскопической теории, что приводит к очень сложным расчетам. В большинстве случаев ответ нельзя найти в аналитической форме. Некоторое упрощение может быть достигнуто для полей, медленно меняющихся в пространстве и во времени: $\omega \ll \Delta/\hbar$, $k \ll \xi_0^{-1}$, где ω и k — частота и модуль волнового вектора поля.

Тем не менее даже в этом случае получающееся «кинетическое уравнение» (см. [217]) весьма сложно и к тому же не охватывает все интересные явления. Ввиду этого мы ограничимся в ряде случаев качественным описанием, стараясь, где это возможно, давать оценки на основе простых физических соображений ¹⁾. Начнем с явлений, происходящих в слабых полях или при малом градиенте температуры, когда состояние сверхпроводника мало отклоняется от равновесия; затем рассмотрим некоторые эффекты, связанные с сильной неравновесностью.

§ 19.1. Электронная теплопроводность

Перенос тепла в сверхпроводниках, так же как и в нормальных металлах, осуществляется как квазичастицами электронной жидкости, так и фононами. При не слишком низких температурах основной

¹⁾ Теория флуктуаций в сверхпроводниках подробно изложена в книге А. А. Варламова и А. И. Ларкина [307].

вклад будут давать электроны. Что касается самых низких температур, то и там электронный вклад можно отделить от фононного. Например, в магнитном поле выше H_c электроны становятся нормальными и, таким образом, можно найти разность теплопроводности в сверхпроводящем и в нормальном состояниях. Что касается электронной теплопроводности нормального металла, то ее можно либо экстраполировать из области $T > T_c$, либо выделить с помощью сильного магнитного поля, как описано в части I книги. Итак, электронную теплопроводность сверхпроводника можно получить из экспериментальных данных.

При вычислении теплопроводности нормального металла мы столкнулись с тем обстоятельством, что градиент температуры приводит к возникновению электрического поля, которое определяется из условия отсутствия тока. Однако этот эффект вносит лишь малую поправку, порядка $(T/\mu)^2$ (см. § 6.1). В сверхпроводнике электрическое поле отсутствует, однако ток квазичастиц уравнивается противотоком куперовских пар (этот вопрос рассмотрен подробно в § 19.2). При вычислении теплопроводности движением куперовских пар можно пренебречь, ибо оно вносит лишь поправку порядка $(T/\mu)^2$.

При температурах ниже T_c основным механизмом рассеяния электронов является рассеяние на примесях. Поэтому рассмотрим только его. Кинетическое уравнение для квазичастиц имеет обычный вид:

$$(\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}) \partial n/\partial\mathbf{r} - (\partial\varepsilon/\partial\mathbf{r}) \partial n/\partial\mathbf{p} = I(n), \quad (19.1)$$

где ε — энергия квазичастиц, $-\partial\varepsilon/\partial\mathbf{r}$ — сила, действующая на квазичастицы.

Вид интеграла столкновений определим следующим образом. Предположим, что примеси не имеют спина. В этом случае электроны при рассеянии сохраняют свой спин. Кроме того, столкновения с примесями являются упругими, т. е. сохраняется энергия квазичастиц. Ввиду этого рассеяние электронов на примесях может быть описано членом в гамильтониане

$$\mathcal{H}_{\text{imp}} = \sum_{\sigma, \mathbf{p}, \mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}', \sigma}^+ a_{\mathbf{p}, \sigma} V_{\mathbf{p}' \mathbf{p}}, \quad (19.2)$$

где $V_{\mathbf{p}' \mathbf{p}}$ — матричный элемент взаимодействия, являющийся функцией только от $\theta = (\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{p}'})$. Выражение (19.2) соответствует исчезновению электрона с импульсом $\mathbf{p}$ и рождению вместо него другого, с импульсом $\mathbf{p}'$.

Для того чтобы перейти к квазичастицам, подставим преобразование Боголюбова (16.14). При этом сохраним лишь члены, не связанные с изменением энергии, т. е. отбросим члены, описывающие рождение или уничтожение двух квазичастиц. В результате находим

$$\mathcal{H}_{\text{imp}} = \sum_{\sigma, \mathbf{p}, \mathbf{p}'} \alpha_{\mathbf{p}', \sigma}^+ \alpha_{\mathbf{p}, \sigma} V_{\mathbf{p}' \mathbf{p}} (u_p u_{p'} - v_p v_{p'}). \quad (19.3)$$

При рассеянии на примеси сохраняется энергия квазичастиц. Следовательно, $\varepsilon_p = \varepsilon_{p'}$. Отсюда $\xi_p = \pm \xi_{p'}$. Если $\xi_{p'} = \xi_p$, то $u_{p'} = u_p$, $v_{p'} = v_p$, $u_p^2 - v_p^2 = \xi_p/\varepsilon_p$. Если же $\xi_{p'} = -\xi_p$, то $v_{p'} = u_p$, $u_{p'} = v_p$, и выражение (19.2) обращается в нуль.

Найдем теперь вероятность рассеяния за единицу времени, иными словами, функцию, заменяющую τ^{-1} в § 3.2 ¹⁾. Имеем

$$\begin{aligned} \tau_{\text{str}}^{-1} &= \frac{2\pi}{\hbar} \int |V_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 (1 - \cos \theta) (u_p u_{p'} - v_p v_{p'})^2 \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'}) \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= \frac{\pi}{\hbar} \nu(\mu) \left(\frac{\xi_p}{\varepsilon_p} \right)^2 \left| \frac{d\xi_p}{d\varepsilon_p} \right| \int |V(\theta)|^2 (1 - \cos \theta) \frac{d\Omega}{4\pi} = \tau_{\text{tr}}^{-1} \frac{|\xi_p|}{\varepsilon_p} \end{aligned} \quad (19.4)$$

(мы использовали переход $d^3 \mathbf{p}' \rightarrow p_0^2 dp' d\Omega \rightarrow p_0^2 (d\xi'/v) d\Omega$ и

$$\delta(\varepsilon - \varepsilon') = |d\xi/d\varepsilon| \delta(|\xi| - |\xi'|) \rightarrow |d\xi/d\varepsilon| \delta(\xi - \xi'),$$

ибо для $\xi' = -\xi$ $\tau_{\text{str}}^{-1} = 0$). Из (19.4) следует, что интеграл столкновений равен

$$I(n) = -(n - n_F) (|\xi_p|/\varepsilon_p) \tau_{\text{tr}}^{-1}. \quad (19.5)$$

Подставляя в левую часть кинетического уравнения равновесную функцию

$$n_F = [\exp(\varepsilon/T) + 1]^{-1} \quad (19.6)$$

и пользуясь тем, что

$$\partial n_F / \partial \mathbf{r} = -(\varepsilon/T) (\partial n / \partial \varepsilon) \nabla T, \quad (19.7)$$

$$\partial \varepsilon / \partial \mathbf{p} = (\partial \varepsilon / \partial \xi) d\xi / d\mathbf{p} = \mathbf{v} \xi / \varepsilon, \quad (19.8)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$, находим ²⁾

$$-(\xi/T) (\partial n_F / \partial \varepsilon) \mathbf{v} \nabla T = -(n - n_F) (|\xi|/\varepsilon) \tau_{\text{tr}}^{-1}. \quad (19.9)$$

Отсюда следует, что неравновесная добавка равна

$$n^{(1)} = n - n_F = (\varepsilon/T) (\partial n_F / \partial \varepsilon) \tau_{\text{tr}} \text{sign } \xi \mathbf{v} \nabla T, \quad (19.10)$$

$$\text{sign } \xi = \xi/|\xi|.$$

¹⁾ Напомним, что в этой части мы используем обозначение τ_{tr} вместо τ .

²⁾ При подстановке равновесной функции n_F в левую часть уравнения (19.1) надо, строго говоря, учитывать, что $\varepsilon = (\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}$, где Δ зависит от T и, следовательно, от $\mathbf{r}$. Однако соответствующие добавки от двух членов в левой части (19.1) взаимно сокращаются.

Тепловой поток выражается формулой

$$\mathbf{q} = 2 \int \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} n \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (19.11)$$

Множитель 2 возникает в результате суммирования по проекциям спина. Так как n_F зависит лишь от ε , сюда дает вклад лишь $n^{(1)}$. Подставляя в последнее выражение (19.10) и (19.8) и переходя к интегрированию по ε , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \frac{2\nu}{T} \int_{\Delta}^{\infty} d\varepsilon \int \frac{d\Omega}{4\pi} \varepsilon^2 \tau_{\text{tr}} \mathbf{v} (\mathbf{v} \nabla T) \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} = \frac{2\nu \nabla T}{3T} v^2 \tau_{\text{tr}} \int_{\Delta}^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^2 \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} = \\ &= -\frac{n_e \tau_{\text{tr}}}{2mT^2} \int_{\Delta}^{\infty} \varepsilon^2 \operatorname{ch}^{-2} \frac{\varepsilon}{2T} \nabla T d\varepsilon \quad (19.12) \end{aligned}$$

(здесь двойка появляется от интегрирования по областям $\xi > 0$)

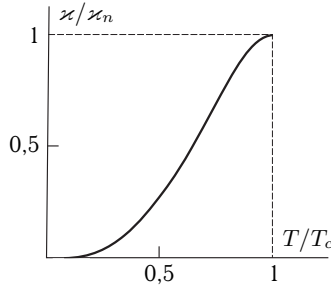


Рис. 19.1

и $\xi < 0$; $n_e = p_0^3/3\pi^2\hbar^3$. Следовательно, имеем (Гейликман, 1958) [218] ¹⁾

$$\kappa = (n_e \tau_{\text{tr}} T/2m) \int_{\Delta/T}^{\infty} x^2 \operatorname{ch}^{-2}(x/2) dx.$$

При $T \rightarrow T_c$ отсюда получается выражение (3.28) для нормального металла. Если же $T \rightarrow 0$, то $\operatorname{ch}(x/2) \approx (1/2) \exp(x/2)$ и

$$\kappa \approx (2n_e \tau_{\text{tr}} T/m) [\Delta(0)/T]^2 \exp[-\Delta(0)/T]. \quad (19.13)$$

Зависимость κ/κ_n как функция T/T_c приведена на рис. 19.1.

¹⁾ В этом и следующем разделах κ — коэффициент теплопроводности.

§ 19.2. Термоэлектрические явления

Как уже отмечалось в § 19.1, градиент температуры приводит к появлению не только потока тепла, но и потока квазичастиц, т. е. «нормального тока». Однако он уравнивается текущим в обратную сторону сверхпроводящим током, ибо в толще сверхпроводника полный ток должен быть равным нулю (иначе не имел бы места эффект Мейснера). Поэтому долгое время считалось, что термоэлектрические явления в сверхпроводнике отсутствуют. В действительности оказалось, что возникновение сверхпроводящего тока поддается обнаружению.

Наличие сверхпроводящего тока означает, что импульс куперовских пар уже не равен нулю, т. е. бозе-конденсат куперовских пар приходит в движение. В этом случае формулы преобразования Боголюбова (16.14) должны быть заменены следующими:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p},+} &= u_p \alpha_{\mathbf{p},+} + v_p \alpha_{-\mathbf{p}+\mathbf{q},-}^+, \\ a_{\mathbf{p},-} &= u_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}} \alpha_{\mathbf{p},-} - v_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}} \alpha_{-\mathbf{p}+\mathbf{q},+}^+. \end{aligned} \quad (19.14)$$

Смысл этих преобразований таков: члены с v в каждой формуле соответствуют объединению электронов в куперовскую пару с импульсом $\mathbf{q}$ и уходу ее в конденсат (очевидно, $\mathbf{q} = 2m\mathbf{v}_s$). Вместо нее появляется электрон с импульсом $-\mathbf{p} + \mathbf{q}$ и противоположной проекцией спина.

Индексы при u и v во второй формуле подобраны так, чтобы выполнялось условие

$$\{a_{\mathbf{p},+}, a_{-\mathbf{p}+\mathbf{q},-}\} = -u_p v_p + u_p v_p = 0.$$

Коэффициенты u и v связаны прежним соотношением:

$$|u_p|^2 + |v_p|^2 = 1. \quad (19.15)$$

Подставляя формулы (19.14) в гамильтониан (16.13) и усредняя, получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H} - \mu N \rangle &= \sum_{\mathbf{p}} \{ \xi [n_{\mathbf{p},+} + |v_p|^2 (1 - n_{\mathbf{p},+} - n_{-\mathbf{p}+\mathbf{q},-})] + \\ &+ \xi' [n_{-\mathbf{p}+\mathbf{q},-} + |v_p|^2 (1 - n_{\mathbf{p},+} - n_{-\mathbf{p}+\mathbf{q},-})] \} - |\Delta|^2/g, \end{aligned} \quad (19.16)$$

где

$$\Delta = g \sum_{\mathbf{p}} u_p v_p (1 - n_{\mathbf{p},+} - n_{-\mathbf{p}+\mathbf{q},-}), \quad (19.17)$$

$$\xi' = \xi(-\mathbf{p} + \mathbf{q}). \quad (19.18)$$

Будем искать действительное решение для u и v (это не меняет результат, но упрощает выкладки). В таком случае и Δ действительно. Минимизируя по v_p и используя (19.15), получаем

$$u_p^2 = u_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}}^2 = (1/2) [1 + (\xi + \xi')/2\varepsilon], \quad (19.19)$$

$$v_p^2 = v_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}}^2 = (1/2) [1 - (\xi + \xi')/2\varepsilon], \quad (19.20)$$

$$\varepsilon = [(\xi + \xi')^2/4 + \Delta^2]^{1/2}. \quad (19.21)$$

Варьируя (19.16) по $n_{\mathbf{p},+}$ и по $n_{\mathbf{p},-}$, находим значение энергии в функциях распределения Ферми (19.17):

$$\varepsilon_{\mathbf{p},+} = \varepsilon + (\xi - \xi')/2, \quad (19.22)$$

$$\varepsilon_{-\mathbf{p}+\mathbf{q},-} = \varepsilon - (\xi - \xi')/2.$$

Вычислим электрический ток. При этом надо иметь в виду различие между переносом заряда и переносом энергии. В то время как энергия переносится квазичастицами, имеющими энергию $\varepsilon = (\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}$ и скорость $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$, заряд переносится исходными электронами со скоростью $\mathbf{p}/m$ (им соответствуют операторы a и a^+ , а не α , α^+). Таким образом, оператор тока имеет вид

$$\mathbf{j} = (e/m) \sum_{\mathbf{p},\sigma} \mathbf{p} a_{\mathbf{p},\sigma}^+ a_{\mathbf{p},\sigma}. \quad (19.23)$$

Такой же результат был получен ранее (см. формулы (16.59') и (16.62) при $\mathbf{A} = 0$ и $\mathbf{q} = 0$).

Подставляем сюда преобразования (19.14) и усредняем. При этом получаем

$$\mathbf{j} = \frac{e}{m} \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} \left[u_p^2 n_{\mathbf{p},+} + v_p^2 (1 - n_{-\mathbf{p}+\mathbf{q},-}) + u_p^2 n_{\mathbf{p},-} + v_p^2 (1 - n_{-\mathbf{p}+\mathbf{q},+}) \right]$$

(мы здесь воспользовались равенствами (19.19), (19.20)). Перейдем к новой переменной: $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \mathbf{q}/2$. Считая $|q| \ll p_0$, получаем

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow \xi + \mathbf{v}\mathbf{q}/2, & \xi' &\rightarrow \xi - \mathbf{v}\mathbf{q}/2, & (\xi + \xi')/2 &\rightarrow \xi, \\ \varepsilon &\rightarrow (\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}, & \varepsilon_{\mathbf{p}} &\rightarrow \varepsilon + \mathbf{v}\mathbf{q}/2, & \varepsilon_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}} &\rightarrow \varepsilon - \mathbf{v}\mathbf{q}/2. \end{aligned} \quad (19.24)$$

Выражение для тока приобретает вид

$$\mathbf{j} = 2\frac{e}{m} \sum_{\mathbf{p}} (\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) \left[u_p^2 n_{\mathbf{p}} + v_p^2 (1 - n_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}}) \right]. \quad (19.25)$$

Импульс пар связан со скоростью конденсата соотношением $\mathbf{q} = 2m\mathbf{v}_s$. Ввиду того что $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$, имеем

$$\mathbf{v}\mathbf{q}/2 = \mathbf{p}\mathbf{v}_s. \quad (19.26)$$

Полученный результат может быть интерпретирован следующим образом. В системе отсчета, связанной с движущимся конденсатом, энергия квазичастиц есть ε , а импульс электронов равен $\mathbf{p}$. Если же перейти к лабораторной системе, то энергия квазичастиц становится равной $\varepsilon + \mathbf{p}\mathbf{v}_s$, а импульс электронов равным $\mathbf{p} + m\mathbf{v}_s$.

В § 19.1 при вычислении теплопроводности следовало бы, строго говоря, заменить ε в выражении (19.11) на $\varepsilon + \mathbf{p}\mathbf{v}_s$, а $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$ на $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p} + \mathbf{v}_s$. При этом, однако, надо учесть, что сверхпроводящий ток возникает только в результате появления градиента температуры, т. е. $\mathbf{v}_s \propto \nabla T$. При подстановке в (19.11) в качестве n равновесной функции распределения n_F под интегралом получается градиент в импульсном пространстве от некоторой функции $f(\varepsilon + \mathbf{p}\mathbf{v}_s)$. Интеграл по $d^3\mathbf{p}$ превращается в поверхностный интеграл и равен нулю ввиду того, что $n_F(\infty) = 0$. Поэтому остается лишь интеграл от неравновесной добавки $n^{(1)}$, которая сама пропорциональна ∇T . Следовательно, в этом интеграле можно положить $\mathbf{v}_s = 0$.

Вернемся к формуле (19.25). Подставим в нее $n = n_F + n^{(1)}$, где $n^{(1)} \ll n_F$, и ограничимся членами первого порядка по $n^{(1)}$ и $\mathbf{v}_s$ (порядка ∇T). При этом получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = 2e\mathbf{v}_s \sum_{\mathbf{p}} \left[u_p^2 n_F + v_p^2 (1 - n_F) \right] + \\ + 2(e/m) \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p}(\mathbf{p}\mathbf{v}_s) \partial n_F / \partial \varepsilon + 2(e/m) \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} n^{(1)}. \end{aligned} \quad (19.27)$$

В последнем члене учтено, что $n_{-\mathbf{p}}^{(1)} = -n_{\mathbf{p}}^{(1)}$ (см. (19.10)). Мы воспользовались также условием (19.15).

Если произвести преобразование Боголюбова (16.14) в операторе плотности электронов

$$n_e = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p},\sigma}^+ a_{\mathbf{p},\sigma}$$

и усреднить, то получается

$$n_e = 2 \sum_{\mathbf{p}} \left[u_p^2 n_F + v_p^2 (1 - n_F) \right].$$

Итак, первый член в (19.27) равен $n_e \mathbf{v}_s e$. Второй член в (19.27) мы сравним с формулой (16.83) для импульса квазичастиц, движущихся со скоростью $\mathbf{u}$ (в нашем случае роль $\mathbf{u}$ играет $-\mathbf{v}_s$). Коэффициент

пропорциональности между $\mathbf{P}$ и $m\mathbf{u}$ является «числом нормальных электронов» n_n . Следовательно, первые два члена в (19.27) дают

$$(n_e - n_n) e \mathbf{v}_s = n_s e \mathbf{v}_s = \mathbf{j}_s.$$

Это и есть сверхпроводящий ток.

Последний член в (19.27) есть ток квазичастиц, возникающий под действием градиента температуры. Подставляя (19.10) и переходя к интегрированию по ξ , получаем

$$\mathbf{j}_n = e \int (\varepsilon/T) (\partial n_F / \partial \varepsilon) \tau_{\text{tr}} \text{sign } \xi \mathbf{v} (\mathbf{v} \nabla T) \nu d\xi d\Omega / 4\pi.$$

Этот интеграл ввиду наличия множителя $\text{sign } \xi$ обращается в нуль в первом приближении по ξ . Поэтому надо, как и в нормальном металле, разложить множитель $\tau_{\text{tr}} v^2 \nu$ в подынтегральном выражении по ξ :

$$\tau_{\text{tr}} v^2 \nu = (\tau_{\text{tr}} v^2 \nu)_\mu + \xi (\partial / \partial \mu) (\tau_{\text{tr}} v^2 \nu)_\mu.$$

Второй член дает отличный от нуля результат. При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi \text{sign } \xi d\xi \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| d\xi \rightarrow 2 \int_0^{\infty} |\xi| d|\xi| \rightarrow 2 \int_{\Delta}^{\infty} \varepsilon d\varepsilon.$$

После этого получается (Гальперин, Гуревич, Козуб, 1973) [219]

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_n &= (2/3)e \left[(\partial / \partial \mu) (\tau_{\text{tr}} v^2 \nu)_\mu \right] (\nabla T / T) \int_{\Delta}^{\infty} \varepsilon^2 (\partial n / \partial \varepsilon) d\varepsilon = \\ &= -(2/3)e \left[(\partial / \partial \mu) (\tau_{\text{tr}} v^2 \nu)_\mu \right] (T \nabla T) \int_{\Delta/T}^{\infty} x^2 \text{ch}^{-2}(x/2) dx = \\ &= -e \left[(\partial / \partial \mu) \ln(\tau_{\text{tr}} v^2 \nu)_\mu \right] \varkappa \nabla T. \quad (19.28) \end{aligned}$$

Учитывая, что в нормальном металле $\mathbf{j}_n = -\beta \nabla T$ и сравнивая формулы (3.24) и (6.19), видим, что выражение для $\mathbf{j}_n$, записанное через $\varkappa$, такое же, как и для нормального металла. Поскольку при $T \rightarrow T_c$ $\varkappa \rightarrow \varkappa_n$, то то же самое справедливо для $\mathbf{j}_n$. Учитывая, что для примесного рассеяния $\tau_{\text{tr}} = l/v \propto \mu^{-1/2}$, $v^2 \propto \mu$ и $\nu \propto p_0 \propto \mu^{1/2}$, получаем окончательно

$$\mathbf{j}_s = -\mathbf{j}_n = (e/\mu) \varkappa \nabla T. \quad (19.29)$$

Асимптотики находятся с помощью формул для $\varkappa$: (3.24) при $T \rightarrow T_c$ и (19.13) при $T \rightarrow 0$.

Теперь возникает вопрос о том, как можно на опыте определить наличие сверхпроводящего тока. Для этой цели воспользуемся выражением для сверхпроводящего тока через фазу параметра порядка (17.75):

$$\mathbf{j}_s = (\hbar n_s / 2m) [\nabla \chi - (2e / \hbar c) \mathbf{A}] \quad (19.30)$$

(здесь мы подставили $|\Psi|^2 = n_s / 2$ — число куперовских пар). Сравнивая выражения (19.30) и (19.29), находим

$$\nabla \chi = (2m / \hbar n_s) (e \kappa / \mu) \nabla T + (2e / \hbar c) \mathbf{A}. \quad (19.31)$$

Представим себе теперь кольцо, составленное из двух разных сверхпроводников (рис. 19.2). Будем считать, что спаи находятся при разной температуре T_1 и T_2 . Проинтегрируем выражение (19.31) по замкнутому контуру C , проходящему в глубине обоих сверхпроводников. Изменение фазы вдоль замкнутого контура должно быть равно $2\pi n$, где n — целое число. Отсюда получаем

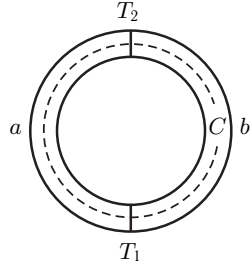


Рис. 19.2

$$\begin{aligned} 2\pi n &= \frac{2m}{\hbar} \oint_C \frac{\kappa}{\mu n_s} \nabla T d\mathbf{l} + \frac{2e}{\hbar c} \oint_C \mathbf{A} d\mathbf{l} = \\ &= \frac{2m}{\hbar} \int_{T_1}^{T_2} \left[\left(\frac{\kappa}{\mu n_s} \right)_a - \left(\frac{\kappa}{\mu n_s} \right)_b \right] dT + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = n - \frac{m}{\pi \hbar} \int_{T_1}^{T_2} \left[\left(\frac{\kappa}{\mu n_s} \right)_a - \left(\frac{\kappa}{\mu n_s} \right)_b \right] dT. \quad (19.32)$$

Из этой формулы следует, что магнитный поток, проходящий через контур, не равен целому числу квантов потока и имеет добавку, зависящую от температуры. Эта добавка является проявлением термоэлектричества в сверхпроводниках.

На первый взгляд кажется парадоксальным, что в отсутствие тока в кольце через него может проходить магнитный поток. В действительности утверждение, что $\mathbf{j} = 0$, относится лишь к толще сверхпроводника. По внутренней поверхности кольца циркулирует сверхпроводящий ток, который и создает магнитный поток.

Оценим поправку к магнитному потоку. Будем считать $T \sim T_c$, а следовательно, $n_s \sim n_e$, $\kappa \sim \kappa(T_c)$. Выражение для $\kappa(T_c)$ дается формулой (3.24). Имеем

$$\Delta \Phi / \Phi_0 \Delta T \sim (m / \hbar) (\kappa / \mu n_e) \sim (m / \hbar) (n_e \tau_{tr} / m \mu n_e) T_c \sim$$

$$\sim (T_c / \mu) (\tau_{tr} / \hbar) \sim 10^{-4} (l / v \hbar) \sim 10^{12} \text{ эрг}^{-1} \sim 10^{-4} \text{ К}^{-1}$$

(считаем, что длина пробега $l \sim 10^{-3}$ см, $T_c/\mu \sim 10^{-4}$). Итак, температурная добавка очень мала (10^{-4} кванта потока на 1 К). Ее измерение затруднено и тем обстоятельством, что сверхпроводящее кольцо трудно уберечь от малого захваченного магнитного потока. Поэтому в действительности надо измерять разностный эффект при $T_1 \rightleftharpoons T_2$. Соответствующее измерение было проделано [220] с помощью скивда (§ 22.8) и качественно подтвердило теорию. Однако имеются и другие результаты, превышающие теоретические предсказания. Не исключено, что их следует отнести за счет захваченного потока.

§ 19.3. Поведение сверхпроводников в слабом высокочастотном поле

Поведение сверхпроводников в слабом поле, не зависящем от времени, было рассмотрено нами ранее в § 16.7, 16.8. В принципе, тем же способом можно найти связь между током и полем конечной частоты. Не будем излагать здесь соответствующие расчеты ввиду их громоздкости (см., например, [160]), а только приведем некоторые принципиальные результаты (Абрикосов, Горьков, Халатников, 1958; Маттис и Бардин, 1958) [221, 222].

Рассмотрим, прежде всего, случай $T = 0$. В этом случае в сверхпроводнике нет квазичастиц, которые могли бы поглощать кванты любой энергии. Поглощение электромагнитных волн начинается лишь, когда

$$\hbar\omega = 2\Delta(0). \quad (19.33)$$

Это энергия, нужная для разрушения куперовской пары. В пределе, когда $\hbar\omega \gg 2\Delta$, разница между сверхпроводником и нормальным металлом пропадает, т. е. связь между током и полем стремится к той, что имеет место в нормальном металле.

Поглощение электромагнитной энергии пропорционально действительной части импеданса. Для чистого сверхпроводника в предельном пиппардовском случае имеет место соотношение:

$$Z_s/R_n = -2i [\pi\hbar\omega/\Delta Q_1(\omega)]^{1/3}, \quad (19.34)$$

где $Q_1(\omega)$ входит в коэффициент пропорциональности между током и полем:

$$\mathbf{j} = -Q(q, \omega) \mathbf{A}(q, \omega), \quad (19.35)$$

$$Q(q, \omega) = \frac{3}{4} \frac{n_e e^2}{mc} \frac{\Delta}{\hbar v q} Q_1(\omega),$$

а R_n — значение R для нормального металла.

Действительная часть импеданса появляется только в том случае, если мнимая часть Q_1 отлична от нуля. Зависимость $\text{Im } Q_1(\omega)$

при $T = 0$ приведена на рис. 19.3. Качественно такой же вид имеет график $R_s(\omega)/R_n$. Вблизи порога поглощения

$$\text{Im } Q_1 \approx -\pi^2[\hbar\omega/2\Delta - 1]. \quad (19.35')$$

Этой же величине пропорционально отношение $R_s(\omega)/R_n$.

При $T > 0$ в сверхпроводнике имеются квазичастицы, которые могут поглощать электромагнитные кванты любой частоты. Если $T \ll T_c$, то число квазичастиц экспоненциально мало ($\sim \exp[-\Delta(0)/T]$). В случае $\omega \ll \Delta$ та же экспонента содержится в мнимой части $Q_1(\omega)$ и в действительной части импеданса. Приведем выражение $\text{Im } Q_1$ для ω , $T \ll \Delta(0)$:

$$\text{Im } Q_1 \approx -4\pi \text{sh}(\omega/2T) K_0(\omega/2T) \exp[-\Delta(0)/T], \quad (19.35'')$$

где K_0 — функция Макдональда.

Начиная с $\hbar\omega = 2\Delta(0) = 3,52 T_c$ возникает конечное поглощение и при $T = 0$. Это хорошо видно на экспериментальных графиках, полученных для алюминия при разных частотах и температурах (рис. 19.4) [223]. Отметим, что при $\omega \rightarrow 0$ зависимость $R_s(T)$ приобретает ту же форму, что и кривая сопротивления при постоянном токе: $R_s = 0$ при $T < T_c$ и $R_s = R_n$ при $T > T_c$.

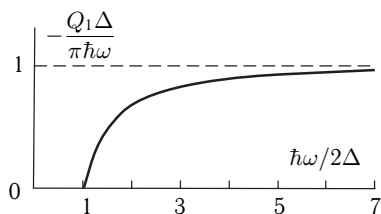


Рис. 19.3

Характерные длины волн, соответствующие условию (19.33), находятся в диапазоне порядка 1–0,1 мм, а соответствующие частоты $\nu = \omega/2\pi \sim 10^{11}$ – 10^{12} Гц. Отметим, что в оптическом диапазоне $\nu \sim 10^{15}$ Гц. Для этих частот импеданс сверхпроводников не отличается от импеданса нормальных металлов.

Однако в принципе, кроме упругого отражения, на несмещенной частоте можно наблюдать и комбинационное рассеяние света, когда часть энергии кванта передается электронной системе. В этом случае (Абрикосов, Фальковский, 1961) [224] спектральное разложение отраженного света содержит «сателлиты», т. е. кванты с измененной частотой¹⁾. В данном случае речь идет о разрыве пар, а потому при низких температурах появляется «стоксовский сателлит» с непрерывным распределением частот $\hbar\omega \leq \hbar\omega_0 - 2\Delta$ (ω_0 — частота падающего света). Интенсивность сателлита чрезвычайно мала, ибо взаимодействие света с электронной системой происходит лишь в тонком скин-слое. При этом надо специально заботиться о том, чтобы линия падающего света была узкой (в смысле спектральной ширины) и интенсивность была не очень большой, так как иначе образец будет нагреваться. По-видимому,

¹⁾ См. обзор [308].

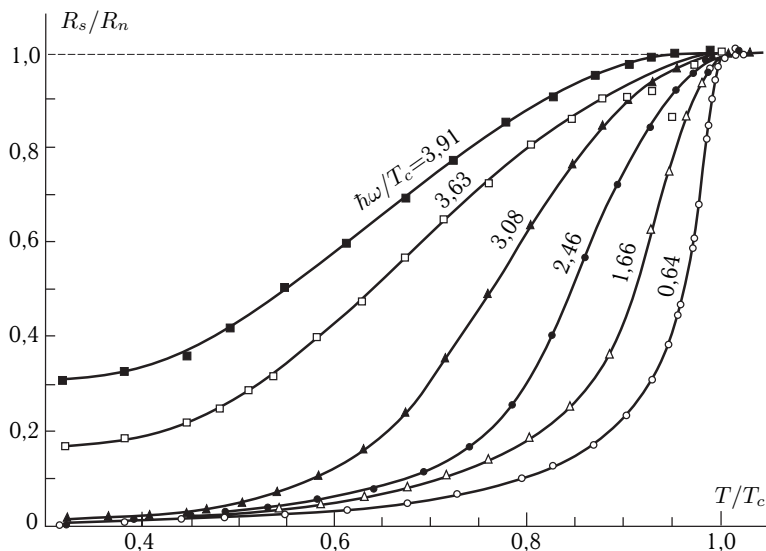


Рис. 19.4

в настоящее время благодаря созданию разнообразных лазеров, такие эксперименты становятся возможными [306].

В заключение приведем еще связь между током и полем для сверхпроводника с примесями в лондоновском пределе ($q = 0$) в окрестности критической температуры и для малой частоты: $\hbar\omega \ll \Delta \ll T_c$ (этот случай представляет интерес для дальнейшего). Имеем

$$\mathbf{j} = [-c/4\pi\delta^2 + i\omega\sigma/c] \mathbf{A},$$

где $\sigma = n_e e^2 t_{tr}/m$ — проводимость нормального металла, а δ зависит от соотношения между ξ_0 и l , но во всех случаях соответствует статической глубине проникновения (§ 16.9, 16.10). Иными словами, для рассматриваемого случая

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n,$$

где $\mathbf{j}_s$ выражается формулой для постоянного поля, а $\mathbf{j}_n = \sigma \mathbf{E}$ ($\mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{A} / \partial t = (i\omega/c) \mathbf{A}$). Это соответствует представлениям лондоновской электродинамики. Однако при других соотношениях между ω , Δ и T такого соответствия уже нет.

§ 19.4. Поглощение ультразвука

В соответствии с § 12.1 изменение энергии электрона в поле звуковой волны можно считать равным $\Lambda_{ik}(\mathbf{p}) u_{ik}(\mathbf{r}, t)$ (u_{ik} — тензор деформации, Λ_{ik} — деформационный потенциал). Эта величина играет

роль потенциальной энергии. Соответствующий оператор записывается аналогично выражению (19.2). Частота звука, который реально можно генерировать, не превышает 10^9 Гц, в то время как $\Delta/2\pi\hbar \sim 10^{11}$ Гц. Следовательно, $\hbar\omega \ll \Delta$. Ввиду этого при переходе к операторам квазичастиц опять надо отбросить члены, соответствующие рождению или уничтожению двух квазичастиц. Что касается членов, соответствующих рассеянию, то надо учесть, что энергия электрона после поглощения фонона увеличивается на $\hbar\omega$. Поэтому в формуле (19.3) $\varepsilon \neq \varepsilon'$.

Будем считать $\omega\tau_{tr} \gg 1$ и применим квантовый подход, изложенный в § 12.2. Все изменение по сравнению с формулой (12.20) заключается в появлении множителя $(uu' - vv')^2$. Подставляя выражения для u и v , получаем (считаем нормировочный объем $V = 1$)

$$Q = -\pi\omega^2 \sum_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} |U_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 \delta(\omega_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} - \omega) \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_p \xi_{p'} - \Delta^2}{\varepsilon_p \varepsilon_{p'}} \right). \quad (19.36)$$

Матричный элемент $U_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}$ равен (при $k \ll p_0$)

$$U_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = \Lambda_{ik}(\mathbf{p}) u_{ik}^0 \delta_{\mathbf{p}', \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}}, \quad (19.37)$$

где $u_{ik}^0 = (i/2)(k_i u_k^0 - k_k u_i^0)$, $\mathbf{u}^0$ — амплитуда звуковой волны. Переходя от сумм по импульсам к интегралам: $\sum_{\mathbf{p}} = (2\pi\hbar)^{-3} \int d^3\mathbf{p}$ и учитывая, что $\delta_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^2 = \delta_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} \rightarrow (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$, получаем

$$Q = -\pi\omega^2 \hbar \int d^3\mathbf{p} (2\pi\hbar)^{-3} \left| \Lambda_{ik}(\mathbf{p}) u_{ik}^0 \right|^2 \times \\ \times \delta(\varepsilon_{p'} - \varepsilon_p - \hbar\omega) (\partial n_F / \partial \varepsilon) (1/2) \left[1 + (\xi_p \xi_{p'} - \Delta^2) / \varepsilon_p \varepsilon_{p'} \right], \quad (19.38)$$

где $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}$. Здесь $\int d^3\mathbf{p} (2\pi\hbar)^{-3}$ соответствует $(\nu/2) \int d\xi d\cos\theta/2$, где $\theta = (\mathbf{v}, \mathbf{k})$. Учитывая, что $\xi' = \xi + vk \cos\theta$ и $vk \gg \omega$ (ибо $v \gg s$ — скорости звука), можем перейти к интегрированию по ξ , ξ' и написать

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \rightarrow \frac{\nu}{2\hbar vk} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi'$$

(в качестве $|\Lambda_{ik}(\mathbf{p})|^2$ при этом надо взять $|\overline{\Lambda_{ik}(\mathbf{p})}|^2$, где подразумевается среднее по пояску ферми-поверхности, где $\cos\theta = 0$, или $\mathbf{v} \perp \mathbf{k}$). Интегрирование по ξ и ξ' приводит к уничтожению нечетных членов по ξ и ξ' в (19.38). После этого можно перейти к интегрированию по ε с учетом двух возможных знаков ξ : $\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \rightarrow 2 \int_{\Delta}^{\infty} \varepsilon (\varepsilon^2 - \Delta^2)^{-1/2} d\varepsilon$.

В результате получаем

$$Q = -(\pi\omega^2\nu/vk) \int_{\Delta}^{\infty} |\Lambda_{ik} u_{ik}^0|^2 \left[\varepsilon(\varepsilon + \hbar\omega) - \Delta^2 \right] \times \\ \times (\varepsilon^2 - \Delta^2)^{-1/2} \left[(\varepsilon + \hbar\omega)^2 - \Delta^2 \right]^{-1/2} (\partial n_F / \partial \varepsilon) d\varepsilon. \quad (19.39)$$

Так как $\hbar\omega \ll \Delta$, то все скобки под интегралом дают единицу. Сравнивая с выражением для нормального металла (при $\Delta = 0$) и учитывая, что для получения коэффициента поглощения величина Q в обоих случаях делится на один и тот же поток звуковой энергии I , получаем [150]

$$\frac{\Gamma_s}{\Gamma_n} = -2 \int_{\Delta}^{\infty} \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = 2n_F(\Delta) = 2 \left(e^{\Delta/T} + 1 \right)^{-1}. \quad (19.40)$$

При $T \rightarrow T_c$ это отношение стремится к единице, а при низких

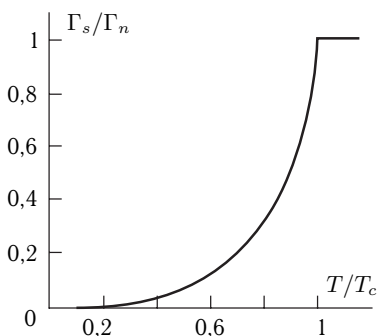


Рис. 19.5

температурах оно падает, как $\exp(-\Delta/T)$, т. е. пропорционально числу квазичастиц. Кривая зависимости Γ_s/Γ_n от T/T_c приведена на рис. 19.5.

§ 19.5. Стимуляция сверхпроводимости высокочастотным полем и звуком большой интенсивности

До сих пор, рассматривая поведение сверхпроводников под действием различных внешних факторов, мы ограничивались линейными задачами. Примерами могут служить вычисление тока при наличии малого внешнего поля, теплового потока и электрического тока при наличии

малого градиента температуры. Такие расчеты называют вычислением линейного отклика системы.

Вместе с тем при увеличении амплитуды внешних воздействий может стать существенным и нелинейный отклик. В частности, под действием переменного электромагнитного поля возможно возникновение тока вдвое большей частоты, что приведет к излучению электромагнитной волны на удвоенной частоте. Следовательно, при падении электромагнитной волны на поверхность металла возможно появление отраженной волны удвоенной частоты. Существуют и другие нелинейные эффекты.

Мы здесь рассмотрим особое нелинейное воздействие высокочастотного поля на сверхпроводники (речь может идти об электромагнитной волне или о звуке), которое приводит к качественно новому эффекту — повышению критической температуры сверхпроводящего перехода, или стимуляции сверхпроводимости (Элиашберг, 1970) [225].

В § 16.4, 16.5 был найден энергетический спектр квазичастиц в сверхпроводнике и уравнение для Δ . Формула (16.21), связывающая Δ с функцией распределения, справедлива при произвольном распределении, а не только при равновесном, выражаемом функцией Ферми. Итак, имеем

$$1 = \frac{g}{2} \int \frac{1 - 2n}{\varepsilon} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (19.41)$$

При равновесном распределении мы видели, что в случае $T = 0$, когда квазичастицы отсутствуют, Δ максимально. При конечных температурах появление квазичастиц приводит к уменьшению Δ . При этом в интеграле (19.41) наиболее существенными были квазичастицы с энергией порядка Δ .

Представим себе теперь, что электронная система поглощает кванты с энергией $\hbar\omega$. Если $\hbar\omega > 2\Delta$, то это приводит к рождению новых квазичастиц и, следовательно, к уменьшению Δ . Однако если $\hbar\omega \ll \Delta$, то новые квазичастицы рождаться не могут, и кванты поглощаются уже имеющимися квазичастицами. Это приводит к их перераспределению по энергиям. Если заметное число квазичастиц приобретает дополнительную энергию больше Δ , то это значит, что они переходят в другую область энергий. Следовательно, они уходят из области, существенной в интеграле (19.41), и в этом смысле ситуация начинает приближаться к той, которая была при $T = 0$. В результате Δ увеличивается.

Для упрощения расчета будем считать, что температура близка к T_c , т. е. $\Delta \ll T_c$, но все же $\hbar\omega \ll \Delta$. Кроме того, предположим, что интенсивность внешнего поля не слишком велика, а потому относительно изменение Δ является малым.

Подставим в (19.41) $n = n_F(\varepsilon) + n - n_F$. Интеграл с n_F разложим по Δ , как это делалось в § 16.5 (формула (16.32)). При этом получаем

$$\ln(T_c/T) - [7\zeta(3)/8] (\Delta^2/\pi^2 T_c^2) - 2 \int_{\Delta}^{\infty} (\varepsilon^2 - \Delta^2)^{-1/2} \overline{(n - n_F)} d\varepsilon = 0, \quad (19.42)$$

где черта в последнем интеграле означает усреднение по углам. Мы здесь воспользовались формулой (16.25) для T_c ; в интеграле от $n - n_F$ мы перешли к переменной ε и учли два знака ξ . При наших предположениях $\ln(T_c/T) \approx (T_c - T)/T_c$. Если функция распределения зависит от времени, то в интеграле надо брать усредненную по времени величину.

Функцию распределения n можно определить из кинетического уравнения.

Расчеты, основанные на полной микроскопической теории, учитывая зависимость величин от времени, приводят к очень сложным кинетическим уравнениям, причем разным в зависимости от характера внешнего воздействия. Трудность усугубляется тем, что рассеяние на примесях, будучи упругим, не дает релаксацию квазичастиц по энергиям, и поэтому надо учитывать взаимодействие с фононами. Последнее обстоятельство приводит к усложнению интеграла столкновений. Поэтому вместо полного расчета произведем простую оценку ¹⁾.

Представим себе тонкий образец с толщиной, меньшей глубины проникновения, на который падает высокочастотная электромагнитная волна. Как уже отмечалось в § 19.3, в нем возникает, в частности, нормальный ток $j_n = \sigma E$, который приводит к омическим потерям. В единицу времени электронная система получает энергию

$$\partial Q/\partial t = \sigma \overline{E^2} = \sigma E_0^2/2, \quad (19.43)$$

где $E = E_0 \cos \omega t$. Вблизи T_c проводимость σ равна проводимости нормального металла, т. е. $\sigma = n_e e^2 \tau_{tr}/m$. Сюда входит время рассеяния на примесях, ибо этот процесс является главным.

Электронная система передает полученную энергию решетке в виде фононов. Однако этот процесс идет медленно, со временем τ_{ph} . Поэтому эффективная температура электронной системы повышается. Довольно очевидно, что

$$\tau_{ph} \partial Q/\partial t \sim C_e \delta T, \quad (19.44)$$

где C_e — электронная теплоемкость, имеющая тот же порядок, что и в нормальном металле, т. е. $C_e \sim p_0 m T/\hbar^3$.

Из формул (19.43) и (19.44) находим

$$\delta T \sim \frac{\tau_{ph} \sigma E_0^2}{C_e} \sim \frac{\tau_{ph} n_e e^2 \tau_{tr} E_0^2 \hbar^3}{m \cdot m p_0 T} \sim \frac{(e v E_0)^2 \tau_{ph} \tau_{tr}}{T}. \quad (19.45)$$

¹⁾ Излагаемое ниже рассуждение принадлежит Б. И. Ивлеву.

При разогреве квазичастиц полем их число не меняется ввиду того, что $\hbar\omega \ll \Delta$. Это можно учесть, если ввести эффективный химический потенциал. Новое распределение будет иметь вид

$$n = [\exp((\varepsilon - \delta\mu)/(T + \delta T)) + 1]^{-1}.$$

Из условия

$$\int_0^{\infty} n d\varepsilon = \int_{\Delta}^{\infty} n\varepsilon (\varepsilon^2 - \Delta^2)^{-1/2} d\varepsilon = \int_{\Delta}^{\infty} n_F \varepsilon (\varepsilon^2 - \Delta^2)^{-1/2} d\varepsilon = \text{const},$$

разлагая по $\delta\mu$ и δT , находим

$$\begin{aligned} -\delta\mu \int_{\Delta}^{\infty} (\partial n_F / \partial \varepsilon) \varepsilon (\varepsilon^2 - \Delta^2)^{-1/2} d\varepsilon - \\ - (\delta T / T) \int_{\Delta}^{\infty} (\partial n_F / \partial \varepsilon) \varepsilon^2 (\varepsilon^2 - \Delta^2)^{-1/2} d\varepsilon = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\Delta \ll T$, можно везде положить $\Delta = 0$. При этом получаем

$$\delta\mu = -2\delta T \ln 2.$$

Подставляя в последний член соотношения (19.42)

$$n \approx n_F - (\partial n_F / \partial \varepsilon) [\delta\mu + (\varepsilon / T) \delta T],$$

находим

$$\begin{aligned} \int_{\Delta}^{\infty} (\varepsilon^2 - \Delta^2)^{-1/2} (-\partial n_F / \partial \varepsilon) [\delta\mu + (\varepsilon / T_c) \delta T] d\varepsilon \approx \\ \approx (\delta\mu / 4T_c) \ln(T_c / \Delta) + \delta T_c / 2T_c \approx -(\delta T / 2T_c) \ln 2 \ln(T_c / \Delta). \end{aligned}$$

Мы ограничились логарифмической точностью по отношению к $\ln(T_c / \Delta)$. Важно, что интеграл является отрицательным.

Запишем теперь уравнение (19.42) в виде

$$\frac{T - T_c}{T_c} = a \tau_{\text{ph}} \tau_{\text{tr}} \frac{(evE_0)^2}{T_c^2} - \frac{[7\zeta(3)/8] \Delta^2}{\pi^2 T_c^2}, \quad (19.46)$$

где a — коэффициент порядка единицы (мы не считаем $\ln(T_c / \Delta)$ большим). Зависимость $(T - T_c) / T_c$ как функция Δ изображена схематически на рис. 19.6. Нижняя кривая соответствует равновесному случаю $E_0 = 0$. При наличии волн, т.е. при $E_0 \neq 0$, получаем верхнюю кривую, которая при уменьшении Δ достигает какого-то

положительного значения. Однако изложенная теория применима лишь для $\Delta > \omega/2$. При меньших значениях Δ начинается рождение новых квазичастиц. При этом коэффициент при Δ^2 в (19.46) уменьшается и даже может изменить знак (штриховая кривая).

Итак, приходим к выводу, что кривая на рис. 19.6 имеет максимум при $\Delta \neq 0$, соответствующий $T - T_c > 0$. Это означает следующее. Если пленку поддерживать при температуре выше T_c и облучать ее,

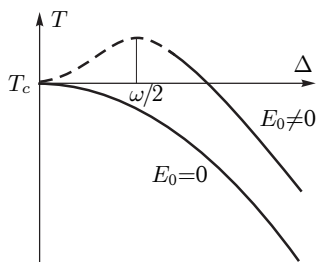


Рис. 19.6

то она может перейти скачком в сверхпроводящее состояние с конечным Δ . Конечно, этот эффект может иметь место лишь при температурах, не слишком далеких от T_c .

Полученные результаты могут быть без труда перенесены на случай, когда возбуждение осуществляется звуковой волной. Сравнивая два члена в правой части кинетического уравнения (12.6), приходим к выводу, что в этом случае надо заменить в (19.46) evE_0 на $\Lambda_{ik}\dot{u}_{ik} \sim \omega\epsilon_F k u^0 = \omega^2\epsilon_F u^0/s$,

где u^0 — амплитуда волны, s — скорость звука.

Изложенные идеи качественно соответствуют опыту [226]. Измерение критического тока пленки, подвергнутой электромагнитному облучению, показало, что ток увеличивался в зависимости от мощности излучения. Эффект имел место вблизи T_c и при не слишком больших мощностях.

Следует, однако, отметить, что эксперименты производились на так называемых мостиках, т. е. пленках, имеющих сужение. В этом случае, помимо изложенного, существует и другой механизм стимуляции сверхпроводимости [227], который мы здесь описывать не будем.

§ 19.6. Парапроводимость

В § 17.1 была приведена оценка флуктуационной области вблизи T_c . Согласно формулам (17.21) и (17.22) она оказалась чрезвычайно малой. Как уже говорилось, причиной этого является большая корреляционная длина. Произведенная оценка основывалась на флуктуационной добавке к теплоемкости массивного металла. Однако относительные флуктуации всегда больше для систем меньшей размерности, т. е. нитей и пленок, толщиной меньше δ и ξ . Правда, в таких образцах неудобно определять теплоемкость и гораздо проще измерять проводимость. Как будет показано ниже, флуктуационная добавка к проводимости тонких пленок оказывается настолько большой, что она может быть измерена. Физическая причина добавочной проводимости заключается в возможности флуктуационного рождения куперовских пар, которые создают

дополнительный «канал» для тока. Этот эффект получил название парапроводимости (Асламазов, Ларкин, 1968) [228, 303].

Для того чтобы найти значение парапроводимости, необходимо временное обобщение уравнений Гинзбурга и Ландау. Связано это с тем, что электрическое поле можно определить, как $\mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{A} / \partial t$, где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал; но в этом случае приходится считать $\mathbf{A}$ зависящим от времени. Либо надо считать $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$, $\mathbf{A} = 0$, но, как мы увидим ниже, скалярный потенциал φ входит в уравнение для Ψ в комбинации с $\partial \Psi / \partial t$. Иными словами, электрическое поле в сверхпроводниках обязательно приводит к нестационарным явлениям. Этому соответствует и уравнение Лондонов $\partial(\Lambda \mathbf{j}) / \partial t = \mathbf{E}$.

Общие нестационарные уравнения теории сверхпроводимости весьма сложны, даже в пределе медленных временных и пространственных изменений полей и параметра порядка. Поэтому не будем их выводить, а вместо этого напомним модельное уравнение для окрестности T_c , которое в основном правильно передает качественные черты поведения параметра порядка, а в некоторых случаях является точным.

Если считать, что имеется отклонение от равновесия, то $\delta \int \Omega_s dV / \delta \Psi^*$ уже не будет равно нулю (из условия равенства нулю этой вариационной производной в гл. 17 было получено уравнение Гинзбурга и Ландау для Ψ). В то же время в отсутствие равновесия Ψ начинает зависеть от времени. При малых отклонениях от равновесия естественно считать, что $\partial \Psi / \partial t$ пропорционально $\delta \int \Omega_s dV / \delta \Psi^*$.

Однако градиентная инвариантность требует, чтобы $\partial \Psi / \partial t$ входило в уравнения в комбинации

$$\partial \Psi / \partial t + 2i(e/\hbar) \varphi \Psi.$$

Действительно, полное условие градиентной инвариантности требует неизменности электрического и магнитного полей:

$$\mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{A} / \partial t - \nabla \varphi, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A},$$

при изменении потенциалов $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \eta$, $\varphi \rightarrow \varphi - c^{-1} \partial \eta / \partial t$, где η — какой-то скаляр. Нетрудно увидеть, что в случае если $\mathbf{A}$ входит в уравнения в комбинации $[-i\hbar \nabla - (2e/c) \mathbf{A}] \Psi$, а φ в комбинации $[\partial / \partial t + 2i(e/\hbar) \varphi] \Psi$, то градиентное преобразование компенсируется изменением фазы функции Ψ . Итак, имеем

$$-\gamma \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + 2i \frac{e}{\hbar} \varphi \Psi \right) = \delta \int \Omega_s \frac{dV}{\delta \Psi^*}. \quad (19.47)$$

Микроскопический вывод показывает, что в задаче о парапроводимости уравнение (19.47) дает точный ответ при правильном выборе константы γ .

Определить γ можно из следующих соображений. В правой части уравнения (19.47) имеется член $-(\hbar^2/4m)\Delta\Psi$. В целом это уравнение напоминает уравнение диффузии (§ 3.5)

$$\partial n/\partial t = D \Delta n.$$

Роль коэффициента диффузии D играет величина $\hbar^2/4m\gamma$. С другой стороны, в присутствии примесей уравнение ГЛ может быть записано в виде (17.6''). Нетрудно увидеть, что в этом уравнении коэффициент $\pi D\hbar/8T_c$ играет ту же роль, которую в чистом сверхпроводнике играл коэффициент $\hbar^2/4m\alpha$. Написав

$$\frac{\hbar^2}{4m} = \frac{\pi D\hbar\alpha}{8T_c} = D\gamma,$$

имеем

$$\gamma = \pi\hbar\alpha/8T_c. \quad (19.48)$$

Это значение совпадает с тем, которое получается из микроскопической теории.

Нас будет интересовать флуктуационная добавка к Ψ , возникающая под действием постоянного электрического поля. Будем считать поле малым, а поэтому в первом порядке искомая добавка будет пропорциональна $\mathbf{E}$. Но поскольку $\mathbf{E}$ не зависит от времени, то же самое будет относиться и к искомой добавке. Ввиду этого можно исключить из (19.47) производную $\partial\Psi/\partial t$. Считая Ψ малым, мы ограничимся линейными членами по Ψ . Подставляя в (19.47) функционал ГЛ, имеем

$$2\gamma i(e/\hbar)\varphi\Psi + \alpha\tau\Psi - (\hbar^2/4m)\Delta\Psi = 0. \quad (19.49)$$

Мы выбрали калибровку, при которой $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Так как $\mathbf{E}$ однородно, то $\varphi = -\mathbf{E}\mathbf{r}$. Напоминаем, что $\tau = (T - T_c)/T_c$.

В отсутствие электрического поля Ψ испытывает равновесные флуктуации. Вероятность флуктуации пропорциональна (см. приложение II)

$$W \propto \exp\left(-T^{-1} \int \Omega_s dV\right) \propto \exp\left[-T^{-1} \sum_p (\alpha\tau + p^2/4m) |\Psi_{\mathbf{p}}|^2\right], \quad (19.50)$$

где $\Psi_{\mathbf{p}} = \int \Psi(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar) dV$. Следовательно, средняя равновесная

флуктуация $|\Psi_{\mathbf{p}}^{(0)}|^2$ равна

$$\begin{aligned} \langle |\Psi_{\mathbf{p}}^{(0)}|^2 \rangle &= \int |\Psi_{\mathbf{p}}|^2 \exp \left[-T^{-1}(\alpha\tau + p^2/4m) |\Psi_{\mathbf{p}}|^2 \right] d|\Psi_{\mathbf{p}}|^2 \times \\ &\times \left\{ \int \exp \left[-T^{-1}(\alpha\tau + p^2/4m) |\Psi_{\mathbf{p}}|^2 \right] d|\Psi_{\mathbf{p}}|^2 \right\}^{-1} = \\ &= T(\alpha\tau + p^2/4m)^{-1}, \quad (19.51) \end{aligned}$$

где $\langle \dots \rangle$ означает статистическое среднее.

В присутствии слабого электрического поля имеем $\Psi_{\mathbf{p}} = \Psi_{\mathbf{p}}^{(0)} + \Psi_{\mathbf{p}}^{(1)}$. Ввиду того что импульсное представление величины $\mathbf{r}\Psi(\mathbf{r})$ есть $i\hbar(\partial/\partial\mathbf{p})\Psi$, получаем в первом приближении по $\mathbf{E}$

$$2\gamma e \mathbf{E} \partial \Psi_{\mathbf{p}}^{(0)} / \partial \mathbf{p} + [\alpha\tau + p^2/4m] \Psi_{\mathbf{p}}^{(1)} = 0,$$

откуда следует

$$\Psi_{\mathbf{p}}^{(1)} = -2\gamma e [\alpha\tau + p^2/4m]^{-1} \mathbf{E} \partial \Psi_{\mathbf{p}}^{(0)} / \partial \mathbf{p}. \quad (19.52)$$

Средний электрический ток в теории Гинзбурга–Ландау есть

$$\mathbf{j} = -i(e\hbar/2m) \langle \Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^* \rangle = \sum_{\mathbf{p}} (e\mathbf{p}/m) \langle |\Psi_{\mathbf{p}}|^2 \rangle. \quad (19.53)$$

Если в эту формулу подставить $\langle |\Psi_{\mathbf{p}}^{(0)}|^2 \rangle$ согласно (19.51), то получается нуль. В следующем приближении имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sum_{\mathbf{p}} (e\mathbf{p}/m) \langle \Psi_{\mathbf{p}}^{(0)} \Psi_{\mathbf{p}}^{(1)*} + \Psi_{\mathbf{p}}^{(1)} \Psi_{\mathbf{p}}^{(0)*} \rangle = \\ &= -2(\gamma e^2/m) \sum_{\mathbf{p}} [\alpha\tau + p^2/4m]^{-1} \mathbf{p} \langle (\mathbf{E} \partial \Psi_{\mathbf{p}}^{(0)*} / \partial \mathbf{p}) \Psi_{\mathbf{p}}^{(0)} + \\ &\quad + (\mathbf{E} \partial \Psi_{\mathbf{p}}^{(0)} / \partial \mathbf{p}) \Psi_{\mathbf{p}}^{(0)*} \rangle = \\ &= -2(\gamma e^2/m) \sum_{\mathbf{p}} [\alpha\tau + p^2/4m] \mathbf{p} (\mathbf{E} \partial / \partial \mathbf{p}) \langle |\Psi_{\mathbf{p}}^{(0)}|^2 \rangle. \end{aligned}$$

Подставляя сюда (19.51), находим

$$\mathbf{j} = (T\gamma e^2/m^2) \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} (\mathbf{pE}) [\alpha\tau + p^2/4m]^{-3}. \quad (19.54)$$

Переход от суммирования к интегрированию осуществляется по следующим правилам ¹⁾:

$$\sum_{\mathbf{p}} \rightarrow \begin{cases} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} & \text{— трехмерный случай,} \\ d^{-1} \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2} & \text{— пленка толщиной } d \ll \hbar(4m\alpha\tau)^{-1/2} \sim \xi, \\ S^{-1} \int \frac{dp}{2\pi\hbar} & \text{— проволока сечением } S \ll \xi^2. \end{cases}$$

Взяв интегралы в (19.54) для всех трех случаев и подставив γ согласно (19.48), получаем значения парапроводимости:

$$\sigma' = \begin{cases} (8\pi)^{-1}(e/\hbar)^2(\alpha m/\tau)^{1/2} & \text{— трехмерный случай,} \\ (1/16)e^2/\hbar d\tau & \text{— пленка толщиной } d \ll \xi, \\ (\pi/32)e^2/\alpha^{1/2}\tau^{3/2}Sm^{1/2} & \text{— проволока сечением } S \ll \xi^2. \end{cases} \quad (19.55)$$

Сюда можно подставить формулы для α , согласно (17.14), для чистого сверхпроводника ($\xi_0 \ll l$) и (17.18) для сплава ($\xi_0 \gg l$). По порядку величины имеем: для трехмерного случая $\sigma' \sim (e^2/\xi_0\hbar)\tau^{-1/2}$, для двумерного случая $\sigma' \sim (e^2/d\hbar)\tau^{-1}$ и для одномерного случая $(e^2\xi_0/S\hbar)\tau^{-3/2}$.

Наиболее интересным является двумерный случай, ибо формула (19.55) для этого случая не содержит никаких характеристик пленки, кроме ее толщины и T_c . Кроме того, как уже отмечалось, флуктуации в пленке сильнее, чем в трехмерном образце, это видно и из формул (19.55). Наконец, такую пленку легко приготовить. Экспериментальные данные [229] полностью подтверждают формулу (19.55) для этого случая.

¹⁾ Эти правила устанавливаются так. Мы имеем сумму по импульсам, которая сходится при $p^2 \sim (\hbar/\xi)^2$. В образце с размерами L_1, L_2, L_3 компоненты импульса принимают значения $p_x = 2\pi\hbar n_x/L_1$, $p_y = 2\pi\hbar n_y/L_2$, $p_z = 2\pi\hbar n_z/L_3$, где n_x, n_y, n_z — целые числа. Если один из размеров (скажем, $L_z = d$) оказывается меньше ξ , то в сумме по соответствующему n существенный вклад дает лишь $n_z = 0$. Поэтому сумма по импульсам, отнесенная к объему, приобретает вид

$$V^{-1} \sum_{\mathbf{p}} \rightarrow (dL_1L_2)^{-1} \int L_1L_2 \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2}.$$

Аналогично обстоит дело для проволоки. Это надо иметь в виду, поскольку мы явно не выписываем нормировочный объем, принимая его за единицу в обычном трехмерном случае.

Формулы (19.55) обращаются в бесконечность при $T \rightarrow T_c$, что свидетельствует об их неприменимости в близкой окрестности T_c . Предел применимости устанавливается требованием, чтобы флуктуационная поправка была гораздо меньше нормальной проводимости $\sigma = n_e e^2 \tau_{tr} / m$.

Другой источник ошибки — неучет взаимодействия электронов с флуктуационными куперовскими парами. Этот эффект тоже увеличивает проводимость, однако его не удастся так просто интерпретировать как рассмотренную выше парапроводимость флуктуационных пар. Соответствующая «аномальная проводимость Маки–Томсона» [230] во многих случаях (и, в частности, в условиях эксперимента [229]) оказывается малой ¹⁾, что и дает возможность получить подтверждение формулы (19.55).

¹⁾ Проводимость Маки–Томсона исчезает, если, например, сверхпроводник содержит магнитные примеси.

ГРАНИЦА СВЕРХПРОВОДНИКА С НОРМАЛЬНЫМ МЕТАЛЛОМ

§ 20.1. Эффекты близости

Сверхпроводящая корреляция проявляется не только в сверхпроводнике, но и на границе сверхпроводника с нормальным металлом. Довольно естественно предположить, что нормальный металл оказывает влияние на сверхпроводник, приводя к уменьшению Δ на расстоянии порядка ξ . В частности, если толщина сверхпроводника меньше ξ , то он вообще перестанет быть сверхпроводящим. С другой стороны, сверхпроводник должен оказывать влияние на нормальный металл. Тонкая пленка нормального металла, нанесенная на массивный сверхпроводник, должна стать сверхпроводящей. Эти явления были обнаружены на опыте (*Мейснер*, 1958) [231] и получили название эффектов близости.

Рассмотрим эффекты близости с помощью уравнений Гинзбурга–Ландау. Чтобы не выходить за рамки применимости теории ГЛ, будем иметь в виду две модели. В первой модели рассмотрим сверхпроводник при температуре, близкой к T_c , граничащий с нормальным металлом, который либо вообще не становится сверхпроводником, либо имеет критическую температуру, значительно ниже T_c . Вторая модель — это граница двух сверхпроводников с близкими критическими температурами T_{c1} и T_{c2} , причем предполагается, что $T_{c1} < T < T_{c2}$, т. е. один металл находится в сверхпроводящем, а другой в нормальном состоянии.

Рассмотрим первую модель и будем сначала считать оба металла массивными. В § 17.1 мы получили граничное условие (17.7) на поверхности сверхпроводника, считая вариацию $\delta\Psi$ на границе произвольной. Это условие имеет смысл на границе с вакуумом, или диэлектриком, ибо влияние такой границы на электроны в сверхпроводнике

распространяется на расстояния порядка межатомных. Из граничного условия (17.7), в частности, следует, что нормальная компонента сверхпроводящего тока обращается в нуль на границе

$$\mathbf{j}_n|_{\text{гр}} = 0. \quad (20.1)$$

В случае границы с нормальным металлом условие (20.1) тоже должно выполняться, ибо в нормальном металле не может течь недиссипативный ток. Однако взаимное влияние электронов обоих металлов может распространиться значительно дальше межатомных расстояний. Ввиду этого вместо (17.7) применим другое граничное условие:

$$\mathbf{n} [\nabla - (2ie/c\hbar) \mathbf{A}] \Psi|_{\text{гр}} = t^{-1} \Psi|_{\text{гр}}, \quad (20.2)$$

которое тоже согласуется с (20.1). Коэффициент t должен быть порядка ξ , но его точное значение определяется только с помощью микроскопической теории. Результат оказывается следующим [232]:

$$t = \begin{cases} 0,6 \xi_{0n} & \text{— чистый сверхпроводник,} \\ 0,3 (\xi_{0n} l)^{1/2} & \text{— сверхпроводник с } \xi_0 \gg l, \end{cases} \quad (20.2')$$

где $\xi_{0n} = (\gamma/\pi^2) \hbar v_n / T_c = 0,18 \hbar v_n / T_c$ (формула (16.82)), v_n — скорость Ферми в нормальном металле.

Рассмотрим плоскую границу. В этом случае граничное условие (20.2) приобретает вид

$$d\Psi/dx|_{x=0} = t^{-1} \Psi(0). \quad (20.3)$$

Вместо уравнения ГЛ для Ψ мы можем взять его интеграл (17.27), который при отсутствии магнитного поля ($A = 0$) равен

$$\xi^2 (d\Psi/dx)^2 + \Psi^2 - \Psi^4/2 = 1/2 \quad (20.4)$$

(мы здесь выразили Ψ в единицах $\Psi_0 = (\alpha|\tau|/\hbar)^{1/2}$ и ввели обозначение $\xi^2 = \hbar^2/4m\alpha|\tau|$); константа справа определяется из условия, что в глубине сверхпроводника $\Psi = 1$, $d\Psi/dx = 0$.

Уравнение (20.4) уже решалось в § 17.2 при вычислении поверхностной энергии на границе сверхпроводника и нормального металла. Решение имеет вид

$$\Psi = \text{th} [(x - x_0)/\sqrt{2} \xi]. \quad (20.5)$$

Значение x_0 определяется из граничного условия (20.3), что дает

$$\text{sh} [x_0 \sqrt{2} / \xi] = -2t/\xi. \quad (20.6)$$

Согласно (20.5) характерным масштабом изменения Ψ является длина $\xi(T)$, растущая при приближении к T_c , как $(T_c - T)^{-1/2}$.

В то же время величина t не зависит от температуры. Согласно формулам (17.14), (17.18) для α и формулам (20.2') для t отношение t/ξ во всех случаях порядка $\tau^{1/2}$. Согласно (20.6) это означает, что x_0 при приближении к T_c уменьшается, т. е. $x_0 \approx -\sqrt{2} t$. Это значит, что при увеличении ξ значение функции Ψ на границе уменьшается. Следует заметить, что теория Гинзбурга–Ландау в действительности применима лишь к случаю, когда все величины, меняются на расстояниях, значительно больших ξ_0 , или $(\xi_0 l)^{1/2}$, т. е. обязательно $\xi \gg t$ и $x_0 \approx 0$ (скорости Ферми имеют один порядок во всех хороших металлах, и поэтому $\xi_{0n} \sim \xi_{0s}$). Значит, строго говоря, в пределах применимости теории ГЛ граничным условием является не (20.3), а $\Psi(0) = 0$.

Рассмотрим теперь задачу о сверхпроводящей пленке, нанесенной на поверхность массивного металла. На границе с вакуумом выполняется обычное граничное условие $d\Psi/dx = 0$. Нетрудно увидеть, что задача о такой пленке эквивалентна задаче о «сэндвиче», т. е. о сверхпроводящей прослойке между двумя массивными слоями одного и того же нормального металла. Очевидно, функция Ψ должна быть симметричной, т. е. посередине пленки $d\Psi/dx = 0$. Значит, нанесенная пленка толщиной d эквивалентна пленке в сэндвиче толщиной $2d$.

Введем новую переменную $u = x/\xi\sqrt{2}$ и запишем интеграл уравнения ГЛ для Ψ . В образце конечной толщины уже нельзя считать константу в правой стороне (20.4) равной $1/2$. Мы обозначим ее $(1/2)(1 - s^2)$. При этом получаем

$$(d\Psi/du)^2 = (1 - \Psi^2)^2 - s^2. \quad (20.7)$$

Пусть граница с металлом находится при $x = 0$, а с вакуумом при $x = d$. Из предыдущего ясно, что вблизи границы с металлом Ψ мало, и при удалении от нее Ψ растет. На этом основании находим из (20.7)

$$d\Psi/du = \left[(1 - \Psi^2)^2 - s^2 \right]^{1/2}, \quad (20.8)$$

$$\int_0^{\Psi} (1 - s - \Psi_1^2)^{-1/2} (1 + s - \Psi_1^2)^{-1/2} d\Psi_1 = u. \quad (20.9)$$

Здесь учтено, что при $u = 0$ $\Psi \approx 0$. При $u = d/\xi\sqrt{2}$ $d\Psi/du = 0$, т. е., согласно (20.8),

$$\Psi(d/\xi\sqrt{2}) = (1 - s)^{1/2}. \quad (20.10)$$

Подставляя в (20.9), получаем

$$\int_0^{(1-s)^{1/2}} (1 - s - \Psi_1^2)^{-1/2} (1 + s - \Psi_1^2)^{-1/2} d\Psi_1 = \frac{d}{\xi\sqrt{2}}. \quad (20.11)$$

Сделаем замену переменной интегрирования $\Psi_1 = (1 - s)^{1/2} \sin \varphi$. Тогда последняя формула приобретает вид

$$(1 + s)^{-1/2} \int_0^{\pi/2} d\varphi (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} = (1 + s)^{-1/2} K(k) = \frac{d}{\xi \sqrt{2}}, \quad (20.12)$$

где $k^2 = (1 - s)/(1 + s)$, а $K(k)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода. Пусть d фиксировано. При приближении к T_c ξ увеличивается, т. е. правая часть в (20.12) уменьшается. Наименьшее значение эллиптического интеграла получается при $k = 0$, т. е. при $s = 1$, и оно равно $\pi/2$. Следовательно, ξ не может расти неограниченно и максимально допустимое значение есть

$$\xi_{\max} = (2/\pi) d. \quad (20.13)$$

Но это означает, что сверхпроводимость не может сохраниться вплоть до T_c . Иначе говоря, критическая температура должна понизиться. Согласно определению ξ получаем [233]

$$[T_c - T_c(d)]/T_c = (\pi^2/16)(\hbar^2/m\alpha) d^{-2}. \quad (20.14)$$

С другой стороны, при $k \rightarrow 1$, т. е. $s \rightarrow 0$, эллиптический интеграл возрастает неограниченно, что соответствует большим значениям d . Подставляя $s = 0$ в формулу (20.9), приходим к зависимости (20.5) при $x_0 = 0$.

Рассмотрим поведение Ψ вблизи T_c . Для этого будем считать $1 - s = r \ll 1$. Тогда $k^2 \approx r/2 \ll 1$ и $K(k) \approx (\pi/2)(1 + k^2/4) \approx (\pi/2) \times (1 + r/8)$. Следовательно, согласно (20.12)

$$r \approx (16/\pi) [d/\xi - (d/\xi)_{\min}].$$

Из (20.9) получаем при этом

$$\Psi \approx \sqrt{r} \sin(u\sqrt{2}) = (4/\sqrt{\pi}) [d/\xi - (d/\xi)_{\min}]^{1/2} \sin(x/\xi_{\max}). \quad (20.15)$$

Эта формула, естественно, годится лишь для $r \ll 1$. Она дает возможность убедиться в том, что переход в нормальное состояние остается фазовым переходом 2-го рода. Если выразить формулу (20.15) в виде температурной зависимости и считать, что $T_c(d) - T \ll T_c - T_c(d)$, то получается

$$\Psi \approx 2[(T_c(d) - T)/(T_c - T_c(d))]^{1/2} \sin(\pi x/2d). \quad (20.16)$$

Хотя проделанный вывод годится лишь для окрестности T_c , из него можно сделать качественное заключение о том, что будет при более

низких температурах. Очевидно, что при $T \rightarrow 0$ $\xi \rightarrow \xi_0$ (или $(\xi_0 l)^{1/2}$ для грязного сверхпроводника). Из (20.13) (ее можно записать как $d_{\min} = (\pi/2)\xi$) вытекает, что при толщинах, меньших ξ_0 , у нанесенной пленки сверхпроводимость будет отсутствовать при любых температурах.

Для того чтобы проследить поведение тонкой пленки нормального металла на поверхности массивного сверхпроводника, надо воспользоваться второй из моделей, описанных нами в начале параграфа. Будем считать, что имеется контакт двух сверхпроводников со слегка различающимися критическими температурами ($T_{c2} - T_{c1} \ll T_{c1}$), и предположим, что $T_{c1} < T < T_{c2}$. При этом металл 1 будет нормальным, а металл 2 — сверхпроводящим. Согласно [232] в случае мало различающихся параметров металлов граничные условия сводятся к непрерывности Ψ и $d\Psi/dx$:

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0), \quad d\Psi_1/dx|_{x=0} = d\Psi_2/dx|_{x=0}, \quad (20.17)$$

где предполагается, что граница находится при $x = 0$.

Сначала, как и в первой модели, будем считать оба металла массивными. Пусть нормальный металл занимает полупространство $x > 0$, а сверхпроводящий — полупространство $x < 0$. Тогда при $x < 0$ выполняется уравнение (20.4). Его решением является

$$\Psi_2 = \text{th}[(x_0 - x)/\sqrt{2} \xi_2], \quad x < 0. \quad (20.18)$$

При $x > 0$ в уравнении Гинзбурга–Ландау $\tau > 0$. Поэтому при переходе к безразмерным переменным член с Ψ^2 в (20.4) окажется с другим знаком. Кроме того, константа в правой части будет равна не $1/2$, а нулю, так как при $x \rightarrow \infty$ $\Psi \rightarrow 0$, $d\Psi/dx \rightarrow 0$. Итак, получаем

$$\xi_1^2 (d\Psi_1/dx)^2 = \Psi_1^2 + \Psi_1^4/2, \quad x > 0. \quad (20.19)$$

Предположим, что в формуле (20.18) $x_0 \ll \xi_2$. Тогда при $x = 0$ $\Psi_2(0) \ll 1$, а следовательно, согласно (20.17), и $\Psi_1(0) \ll 1$, но так как, согласно (20.19), Ψ_1 монотонно убывает при $x \rightarrow \infty$, то и везде $\Psi_1(x) \ll 1$. Решая в этом предположении уравнение (20.19), получаем

$$\Psi_1 = C \exp(-x/\xi_1).$$

Из граничных условий (20.17) находим $C = x_0/\sqrt{2} \xi_2$, $x_0 \approx \xi_1$ и, значит,

$$\Psi_1 = [\xi_1/\sqrt{2} \xi_2] \exp(-x/\xi_1), \quad x > 0; \quad (20.20)$$

$$\Psi_2 = \text{th}[(\xi_1 + |x|)/\sqrt{2} \xi_2], \quad x < 0.$$

Предположение $x_0 \ll \xi_2$ выполняется при условии

$$\xi_1 \ll \xi_2.$$

Из формул (20.20) следует не только быстрое убывание Ψ в глубь нормального металла, но и существенное уменьшение Ψ в сверхпроводнике вблизи границы.

Теперь будем считать, что нормальная пластина имеет конечную толщину d , т. е. при $x = d$ $d\Psi_1/dx = 0$. В этом случае в уравнение (20.19) войдет неизвестная константа, и мы запишем его в виде

$$2\xi_1^2 (d\Psi_1/dx)^2 = (1 + \Psi_1^2)^2 - s^2.$$

Отсюда следует, что

$$d\Psi_1/dx = -(\sqrt{2} \xi_1)^{-1} \left[\Psi_1^2 - (s-1) \right]^{1/2} \left[\Psi_1^2 + s + 1 \right]^{1/2}, \quad (20.21)$$

$$\int_{(s-1)^{1/2}}^{\Psi_1} d\Psi_3 \left[\Psi_3^2 - (s-1) \right]^{-1/2} \left[\Psi_3^2 + s + 1 \right]^{-1/2} = \frac{d-x}{\sqrt{2} \xi_1} \quad (20.22)$$

(здесь уже учтено, что при $x = d$ $d\Psi_1/dx = 0$, т. е. $\Psi_1 = (s-1)^{1/2}$).

Предположим по-прежнему, что выполнено условие $\xi_1 \ll \xi_2$. Ясно, что пока толщина нормальной пленки не слишком мала, в (20.18) снова будет $x_0 \ll \xi_2$, т. е.

$$\Psi_2(0) \approx x_0/\sqrt{2} \xi_2, \quad d\Psi_2/dx|_{x=0} \approx -(\sqrt{2} \xi_2)^{-1}.$$

Из граничных условий (20.17) определим s и x_0 . Поскольку $\Psi_1(0) = \Psi_2(0) \ll 1$, то, как и раньше, $\Psi_1(x) \ll 1$. Следовательно, во втором множителе подынтегрального выражения в (20.22) можно положить $\Psi_3 \approx 0$. Тогда интеграл берется и получаем

$$\operatorname{arch} \left[\Psi_1/(s-1)^{1/2} \right] = (d-x)/\xi_1. \quad (20.23)$$

Очевидно, что s близко к единице. Это было учтено в формуле (20.23).

Подставляя $\Psi_1(0)$ и $x = 0$, имеем

$$\operatorname{arch} \left[x_0/\sqrt{2} \xi_2 (s-1)^{1/2} \right] = d/\xi_1. \quad (20.24)$$

Учитывая малость Ψ_1^2 и близость s к единице, получаем из равенства производных при $x = 0$ и формулы (20.21)

$$\left[(x_0/\sqrt{2} \xi_2)^2 - (s-1) \right]^{1/2} = \xi_1/\sqrt{2} \xi_2. \quad (20.25)$$

Пусть сначала $d \gg \xi_1$. Тогда, согласно (20.24), $x_0/\xi_2 \gg (s-1)^{1/2}$. Из (20.25) получаем при этом $x_0 = \xi_1$. Подставляя в (20.24), находим

$$(s-1)^{1/2} = (\sqrt{2} \xi_1/\xi_2) \exp(-d/\xi_1).$$

Подставляя в (20.23), имеем

$$\Psi_1 = (\xi_1/\sqrt{2}\xi_2) \{ \exp(-x/\xi_1) + \exp[(x-2d)/\xi_1] \}. \quad (20.26)$$

Если же $d \ll \xi_1$, то аргумент arsh в (20.24) должен быть близок к единице. Разлагая по d/ξ_1 , получаем

$$(s-1)^{1/2} = (x_0/\sqrt{2}\xi_2) [1 - d^2/2\xi_1^2].$$

Подставляя это в (20.25), находим

$$x_0 = \xi_1^2/d.$$

Наконец, из (20.23) получаем Ψ_1 :

$$\Psi_1 = (\xi_1^2/\sqrt{2}\xi_2 d) \left[1 - dx/\xi_1^2 - x^2/2\xi_1^2 \right]. \quad (20.27)$$

Для выполнения условия $x_0 \ll \xi_2$ необходимо, чтобы

$$\xi_1 \gg d \gg \xi_1^2/\xi_2. \quad (20.28)$$

Итак, оказывается, что даже при толщине нормальной пленки, меньшей ξ_1 , функция Ψ_1 в ней все еще будет мала. И лишь при еще меньших толщинах Ψ_1 начинает приближаться к единице. В предположении $x_0 \gg \xi_2$, что соответствует $d \ll \xi_1^2/\xi_2$, получаем, аналогично предыдущему,

$$\Psi_1 = 1 - \sqrt{2} d\xi_2/\xi_1^2 - 2dx/\xi_1^2 + x^2/\xi_1^2. \quad (20.29)$$

В рамках теории Гинзбурга–Ландау мы не имеем возможности рассмотреть поведение нормальной пленки с критической температурой значительно более низкой, чем в сверхпроводнике, или вообще несверхпроводящей. Однако из изложенного достаточно ясно, что благодаря эффекту близости пленка будет сверхпроводящей, если ее толщина достаточно мала, а при большой толщине она останется нормальной.

§ 20.2. Андреевское отражение

В предыдущем разделе мы интересовались поведением сверхпроводящего параметра порядка в окрестности контакта сверхпроводника с нормальным металлом. Теперь рассмотрим другой аспект такого контакта.

Как уже говорилось в части I, у обоих металлов должны быть равны химические потенциалы электронов. Но электроны в основном состоянии сверхпроводника объединены в куперовские пары, а в нормальном металле они существуют поодиночке. Следовательно, должны быть равными химические потенциалы двух отдельных электронов

в нормальном металле и куперовской пары в сверхпроводнике. Пусть отдельный электрон перейдет из нормального металла в сверхпроводник. В этом случае у него не будет партнера, с которым он мог бы составить куперовскую пару, а, значит, его энергия будет больше на половину энергии связи, т. е. на Δ . Следовательно, для отдельного электрона уровни энергии в сверхпроводнике начинаются на Δ выше, чем в нормальном металле. Значит, если его энергия возбуждения над уровнем Ферми меньше Δ , то он должен отразиться от границы.

Такое отражение происходит весьма своеобразно. Для того чтобы это понять, лучше говорить на языке квазичастиц. Представим себе для простоты, что речь идет о границе между нормальным и сверхпроводящим слоями в промежуточном состоянии сверхпроводника. В этом случае металлы в принципе одинаковы, а Δ меняется от нуля до равновесного значения в массивном сверхпроводнике на расстоянии $\xi \sim \hbar v / \Delta$. Энергетический спектр квазичастиц, выражаемый формулой $\epsilon = (\epsilon^2 + \Delta^2)^{1/2}$, меняется, как показано на рис. 20.1. Квазичастицы с энергией, меньшей чем Δ в массивном сверхпроводнике, должны отражаться обратно в нормальный металл. При таком отражении должна сохраняться энергия.

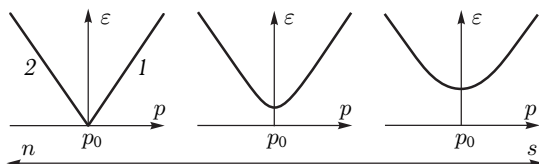


Рис. 20.1

Что касается изменения квазиимпульса δp , то его можно оценить следующим образом. Величина δp порядка dp/dt , умноженного на время прохождения области границы, т. е. ξ/v . Что касается dp/dt , то оно равно действующей силе: $-dU/dx \sim \Delta/\xi$. Отсюда имеем

$$\delta p \sim (\xi/v) \Delta/\xi \sim \Delta/v \sim p_0 (\Delta/p_0 v) \sim p_0 (\Delta/\epsilon_F) \ll p_0.$$

Значит, изменение квазиимпульса гораздо меньше самого квазиимпульса. Но движение электрона после отражения должно быть направлено от границы.

Удовлетворить всем этим условиям можно лишь одним способом, а именно, если квазичастица перейдет, скажем, с ветви 1 энергетического спектра на ветвь 2 (рис. 20.1), т. е. превратится из «частицы» в «античастицу» с близким квазиимпульсом. Действительно, при этом энергия и квазиимпульс практически не изменятся. Что касается скорости, то она после отражения будет равна

$$\mathbf{v}_{\text{отр}} = \partial[v(p_0 - p)]/\partial \mathbf{p} = -v\mathbf{p}/p = -\mathbf{v}_{\text{пад}}.$$

Итак, при таком отражении «частица» превращается в «античастицу». Квазимпульс и энергия сохраняются, а скорость меняет знак. Такое отражение в корне отличается от зеркального отражения электронов, где меняет знак лишь нормальная компонента скорости электронов по отношению к границе. Специфика этого отражения, названного андреевским (Андреев, 1964) [234], связана с медленностью изменения потенциала, роль которого играет Δ .

Может возникнуть вопрос: как быть с сохранением заряда? Ответ заключается в том, что электрон, находящийся у самой границы Ферми, несколько выше ее, подхватывает другой, с противоположным квазимпульсом, находящийся чуть ниже границы Ферми, и образует с ним куперовскую пару, которая уходит в конденсат сверхпроводника. Остается «античастица» с импульсом, противоположным импульсу подхваченного электрона, т. е. совпадающим с импульсом первоначального электрона.

Очевидно, при андреевском отражении возможен и переход с ветви 2 на ветвь 1 энергетического спектра, т. е. превращение античастицы в частицу с противоположной скоростью. Кроме того, ясно, что ввиду эффекта близости медленность изменения потенциала для квазичастиц сохранится и при контакте нормального металла с совершенно посторонним сверхпроводником, а значит, сохраняется и закон отражения.

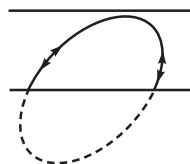


Рис. 20.2

Непосредственное наблюдение андреевского отражения возможно с помощью нерезонансного размерного эффекта, описанного в § 8.3. Эффект заключался в том, что, как только на толщине пластины уместился экстремальный диаметр траектории в магнитном поле (или целое число диаметров), возникала особенность поверхностного импеданса. На рис. 20.2 изображена ситуация в случае, когда в слое нормального металла, нанесенного на поверхность сверхпроводника, укладывается ровно половина экстремальной траектории. Электрон, подлетая к границе, превращается в античастицу с противоположной скоростью. Эта античастица повторяет траекторию электрона в обратном направлении и в конце концов опять долетает до границы. После этого античастица превращается в электрон, и все повторяется.

Значит, особенности импеданса возникнут не только при тех полях, когда на толщине нормальной пластины уместается целое число диаметров, но и тогда, когда их число будет полуцелым. Иначе говоря, возникнут дополнительные особенности $Z(H)$ посередине между первоначальными. Это действительно наблюдается на опыте [235].

Отметим, что если экстремальное сечение не является центральным, то в обычном опыте по размерному эффекту ему соответствует в координатном пространстве спиральная траектория, т. е. электрон смещается вдоль поля. Если же траектория соответствует дополнительному резонансу, то компонента скорости вдоль поля также меняет знак

при отражении и античастица проходит свою половину витка спирали в обратном направлении. Следовательно, каждая квазичастица остается в пределах одной половины витка спирали, и в среднем никакого смещения вдоль поля не происходит.

§ 20.3. Низкотемпературная теплоемкость промежуточного состояния

В предыдущем разделе уже был рассмотрен случай, когда отражение от $n - s$ (нормально-сверхпроводящей) границы приводило к замене поступательного движения периодическим. Рассмотрим теперь другой такой случай: промежуточное состояние. Будем предполагать слои плоскопараллельными. Для макроскопических образцов толщина слоев обычно порядка 10^{-3} см, т. е. они гораздо больше ξ , и $n - s$ границы могут быть учтены с помощью граничного условия. При этом мы получаем периодическую картину движения квазичастиц в нормальном слое: квазичастица типа частицы достигает границы и превращается в античастицу; затем она летит назад до другой границы, превращается в частицу, и все повторяется.

Наличие магнитного поля в нормальных слоях не меняет дела, так как искривленная траектория античастицы в точности повторяет траекторию частицы, которая проходит в обратном направлении. Впрочем, в реальных сверхпроводниках 1-го рода ларморовский радиус в критическом поле (100–1000 Э) не меньше 10^{-2} см, а это значит, что траектории можно считать прямыми (рис. 20.3).

Согласно правилу Бора периодическому движению соответствует квантование, а именно

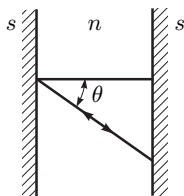


Рис. 20.3

$$\oint \mathbf{p} d\mathbf{l} = 2\pi\hbar [n + \gamma], \quad (20.30)$$

где $\gamma < 1$. Поскольку для частицы энергия равна $\varepsilon = \xi = v(p_{\text{ч}} - p_0)$, то ее квазиимпульс есть (мы здесь применяем обозначение ε вместо $\varepsilon_{\text{КВ}}$)

$$p_{\text{ч}} = p_0 + \varepsilon/v.$$

Отраженная античастица имеет энергию $\varepsilon = -\xi = v(p_0 - p_{\text{а}})$, а следовательно, ее квазиимпульс есть

$$p_{\text{а}} = p_0 - \varepsilon/v.$$

В интеграле (20.30) на обеих половинах траектории импульс $\mathbf{p}$ сохраняет ориентацию, но $d\mathbf{l}$ меняет знак. Если ширина слоя равна a , то длина пути в одном направлении есть $a/|\cos\theta|$, где θ — угол

между направлением траектории и нормалью к границе (рис. 2.30). В результате из (20.30) получаем

$$(p_{\text{ч}} - p_{\text{а}}) a / |\cos \theta| = 2\pi (n + \gamma).$$

Подставляя выражения для $p_{\text{ч}}$ и $p_{\text{а}}$, получаем (Андреев, 1965) [236]

$$\varepsilon(n, \theta) = \pi \hbar (n + \gamma) v |\cos \theta| / a. \quad (20.31)$$

Это формула для энергетического спектра квазичастиц в промежуточном состоянии. Энергия зависит от дискретной переменной n и непрерывной угловой переменной θ .

Найдем теперь плотность состояний. Вектор $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$ однозначно определяется его проекциями на плоскость границы слоя. Число состояний выражается формулой

$$2S dp_x dp_y / (2\pi \hbar)^2,$$

где S — площадь границы, а множитель 2 происходит от двух проекций спина. Введем угол φ в плоскости (p_x, p_y) . При этом для числа состояний получаем

$$2S p_{\perp} dp_{\perp} d\varphi / (2\pi \hbar)^2,$$

где $p_{\perp} = (p_x^2 + p_y^2)^{1/2}$. Но поскольку $p_{\perp}^2 + p_z^2 = p_0^2$, то

$$p_{\perp} dp_{\perp} \rightarrow |p_z| dp_z = p_0^2 |\cos \theta| d(\cos \theta).$$

Итак, получаем, что на одно квантовое число n в (20.31) приходится число состояний

$$2S p_0^2 |\cos \theta| d(\cos \theta) d\varphi / (2\pi \hbar)^2 = 2S p_0^2 |\cos \theta| d\Omega / (2\pi \hbar)^2, \quad (20.32)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла для направлений вектора $\mathbf{p}$.

Для свободной энергии на единицу объема нормального слоя получаем формулу (см. (10.11))

$$\Omega(T) = -T a^{-1} \sum_n \int 2p_0^2 |\cos \theta| \ln \left[1 + \exp \left(-\frac{\varepsilon(n, \theta)}{T} \right) \right] \frac{d\Omega}{(2\pi \hbar)^2}.$$

Поскольку ε зависит лишь от $|\cos \theta|$, то интеграл $\int d\Omega = \int_{-1}^1 d \cos \theta \int d\varphi$ можно заменить на $4\pi \int_0^1 d \cos \theta$. При этом находим

$$\Omega(T) = -\frac{2p_0^2 T}{a\pi \hbar^2} \sum_n \int_0^1 x \ln \left[1 + \exp \left(-\frac{\varepsilon(n, x)}{T} \right) \right] dx. \quad (20.33)$$

Далее рассмотрим две температурные области. Если $T \gg \hbar v/a$, то суммирование по n можно заменить интегрированием. В этом случае, вводя переменную ε вместо n , согласно (20.31), получаем

$$\Omega(T) = -\frac{2p_0^2 T}{v\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \ln(1 + e^{-\varepsilon/T}) d\varepsilon = -\frac{p_0^2 T}{v\pi^2 \hbar^3} \int_{-\infty}^\infty \ln(1 + e^{-|\varepsilon|/T}) d\varepsilon.$$

Это обычное выражение для нормального металла. Вычисление интеграла дает

$$\Omega(T) = -(p_0^2/v\pi^2 \hbar^3) \pi^2 T^2/6.$$

Отсюда получается обычная формула для электронной теплоемкости нормального металла (см. (2.29))

$$C = -T \partial^2 \Omega / \partial T^2 = (p_0 m / 3 \hbar^3) T.$$

Если же $T \ll \hbar v/a$, то мы поступим иначе. В интеграле (20.32) вместо переменной x введем с помощью формулы (20.31) переменную $y = \varepsilon/T$. При этом получаем

$$\Omega(T) = -\frac{2p_0^2 T^3 a}{\pi^3 \hbar^4 v^2} \sum_n (n + \gamma)^{-2} \int_0^{\pi \hbar (n + \gamma) v / a T} y \ln(1 + e^{-y}) dy.$$

Предел интегрирования по y ввиду быстрой сходимости интеграла можно положить равным бесконечности. Сумма по n сходится и дает число порядка единицы, которое обозначим через q . В целом после взятия интеграла по y получаем

$$\Omega(T) = -3\zeta(3) q p_0^2 T^3 a / 2\pi^3 \hbar^4 v^2.$$

Отсюда имеем

$$C = -T \partial^2 \Omega / \partial T^2 = \beta p_0^2 T^2 a / \hbar^4 v^2,$$

где $\beta = 9\zeta(3) \pi^{-3} \sum_n (n + \gamma)^{-2}$. Учитывая, что доля нормальных слоев всегда равна $x_n = B/H_{cm}$ (зависимость B от внешнего поля определяется геометрией эксперимента), находим для теплоемкости всего образца [236]

$$C = \begin{cases} (p_0 m B / 3 \hbar^3 H_{cm}) T, & T \gg \hbar v/a, \\ (\beta m^2 a B / \hbar^4 H_{cm}) T^2, & T \ll \hbar v/a. \end{cases} \quad (20.34)$$

Экспериментальные измерения теплоемкости сверхпроводников в промежуточном состоянии [237] подтвердили формулы (20.34).

СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ И МАГНЕТИЗМ

§ 21.1. Сверхпроводники с магнитными примесями. Бесщелевая сверхпроводимость

Как уже отмечалось в § 16.9, примеси с малой концентрацией слабо влияют на термодинамические свойства сверхпроводников. Изменение этих свойств имеет относительный порядок $a/l \sim c_i$, где a — атомный размер, l — длина пробега, c_i — атомная концентрация. Совершенно иначе ведут себя магнитные примеси, о которых мы уже писали в § 4.6, 13.7. Действие этих примесей измеряется величиной ξ/l_s , где l_s — длина пробега относительно переворота спина, связанная с этими примесями. То же самое можно записать в виде $\hbar/\tau_s T_c$, где $\tau_s = l_s/v$ — соответствующее время пробега. Связано это с совершенно различным действием обычных немагнитных (потенциальных) примесей и магнитных атомов на куперовские пары.

Обычные примеси действуют лишь на электрический заряд, а следовательно, одинаково рассеивают оба электрона, входящие в состав пары, и это не приводит к ее разрушению. Что же касается магнитных примесей, то они обладают способностью поворачивать электронный спин. Значит, при рассеянии на такой примеси пара может переходить в состояние с параллельными спинами (триpletное состояние), когда принцип Паули требует, чтобы электроны, входящие в ее состав, не находились в одной точке и описывались антисимметричной координатной волновой функцией. Пара при этом разрушается.

В § 4.6 было показано, что в 1-м порядке вероятность рассеяния электрона на магнитной примеси пропорциональна $(J/n)^2 S(S+1)$. Эта величина заменяет $|V_{\mathbf{p},\mathbf{p}}|^2$ в вероятности рассеяния на обычной примеси. В действительности взаимодействие электрона с каждой примесью содержит и потенциальную часть (V) и обменную $-(J/n)(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{S})$,

причем первая, как правило, больше второй; однако в интересующем нас эффекте потенциальная часть не играет роли, и мы будем ее игнорировать. Время рассеяния, связанное только с обменным взаимодействием, будем обозначать как τ_s .

Теория, дающая точное описание действия магнитных примесей (Абрикосов и Горьков, 1960) [238], основана на применении методов квантовой теории поля, и она слишком сложна, чтобы ее здесь описывать. Поэтому постараемся дать представление об основных особенностях таких объектов с помощью простых рассуждений.

Начнем с критической температуры. Общая формула зависимости $\Delta(T)$ для чистых сверхпроводников приведена в § 16.5 (формула (16.23)). Ее можно переписать в ином виде, пользуясь свойством гиперболического тангенса:

$$\text{th}(\pi x/2) = (4x/\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \left[(2k-1)^2 + x^2 \right]^{-1}. \quad (21.1)$$

На основании этой формулы из (16.23) получаем

$$1 = 2g\nu(\mu)T \sum_{\omega_k=\pi T}^{\hbar\omega_D} \int_0^{\infty} \left(\omega_k^2 + \xi^2 + \Delta^2 \right)^{-1} d\xi, \quad (21.2)$$

где $\omega_k = \pi T(2k-1)$. Мы здесь перенесли суммирование в конечных пределах на ω_k , что будет удобнее в дальнейшем и, строго говоря, более правильно, чем ограничение ξ .

Если рассматривать формально подынтегральное выражение, то оно имеет мнимые полюсы при $\omega_k = \pm i(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2} = \pm i\varepsilon$. Возможность распада пар под действием магнитных примесей приводит к конечному времени жизни. Мы уже рассматривали этот вопрос в § 2.2. Волновая функция состояния $\exp(-i\xi t/\hbar)$ приобретает затухающий множитель $\exp(-\gamma t/\hbar)$. Это можно интерпретировать так, как будто энергия квазичастиц приобретает мнимую добавку $-i\gamma$. Ввиду этого становится понятным, что в точной теории в выражении (21.2) происходит замена ω_k на $\omega_k + \hbar\tau_s^{-1}$. Действительно, новое подынтегральное выражение имеет полюсы в точках $\omega_k = \pm i(\varepsilon \pm i\hbar\tau_s^{-1})$.

Для получения T_c положим $\Delta = 0$. Имеем при этом

$$1 = 2g\nu T \sum_{\omega_k=\pi T}^{\hbar\omega_D} \int_0^{\infty} \left[(\omega_k + \hbar\tau_s^{-1})^2 + \xi^2 \right]^{-1} d\xi.$$

Интеграл по ξ дает

$$1 = g\nu\pi T \sum_{\omega_k=\pi T}^{\hbar\omega_D} (\omega_k + \hbar\tau_s^{-1})^{-1} = g\nu \sum_{k=1}^{\hbar\omega_D/2\pi T} (2k-1+\rho)^{-1},$$

где мы подставили $\omega_k = \pi T(2k - 1)$ и ввели безразмерный параметр $\rho = \hbar/\pi T\tau_s$.

Вычтем и прибавим к последней сумме такую же сумму с $\rho = 0$. Разность быстро сходится, и поэтому предел суммы по k можно распространить до бесконечности. Подставляя значения суммы от $(2k - 1)^{-1}$, имеем

$$1 = (g\nu/2) \ln(2\gamma\omega_D\hbar/\pi T_c) + g\nu \sum_{k=1}^{\infty} \left[(2k - 1 + \rho)^{-1} - (2k - 1)^{-1} \right],$$

$$\gamma = 1,78.$$

Воспользуемся теперь следующим свойством Γ -функций:

$$\psi(x) - \psi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(y + k)^{-1} - (x + k)^{-1} \right], \quad (21.3)$$

где $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ — логарифмическая производная Γ -функции, а последняя определяется следующим образом: для целых значений $x = n$ $\Gamma(n) = (n - 1)!$, а для нецелых

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (21.4)$$

Поделив на $g\nu/2$, переставив члены и используя формулу (16.25), получаем

$$\ln(T_{c0}/T_c) = \psi(1/2 + \rho/2) - \psi(1/2), \quad (21.5)$$

где T_{c0} — критическая температура чистого сверхпроводника. Эта формула является точной и годится при любых $\rho = \hbar/\pi T_c\tau_s$. Что касается самого τ_s , то из предыдущего ясно, что

$$\tau_s^{-1} \propto \pi\nu(\mu) (J/n)^2 S(S + 1) n_m,$$

а точное значение величины, входящей в (21.5), есть

$$\hbar\tau_s^{-1} = (7\pi/24) \nu(\mu) (J/n)^2 S(S + 1) n_m, \quad (21.6)$$

где n_m — концентрация магнитных атомов.

Рассмотрим теперь асимптотические значения формулы (21.5). При $\rho \ll 1$ воспользуемся разложением

$$\psi(1/2 + \rho/2) \approx \psi(1/2) + \psi'(1/2) \rho/2 = \psi(1/2) + \pi^2 \rho/4.$$

Разлагая $\ln(t_{c0}/T_c) \approx (T_{c0} - T_c)/T_{c0}$, получаем

$$T_c \approx T_{c0} - \pi\hbar/4\tau_s. \quad (21.7)$$

Отсюда видно, что в противоположность обычным примесям магнитные примеси существенно понижают T_c .

Очевидно, что при $\hbar\tau_s^{-1} \sim T_{c0}$ сверхпроводимость вообще должна исчезнуть, т. е. T_c должно обратиться в нуль. В окрестности этой точки в формуле (21.5) $\rho \gg 1$. Рассмотрим соответствующую асимптотику. При больших x

$$\psi(x) \approx \ln x - (2x)^{-1} - (12x^2)^{-1},$$

а $\psi(1/2) = -\ln(4\gamma)$. Разлагая по ρ^{-1} , получаем

$$\ln(\pi T_{c0} \tau_s / 2\gamma \hbar) \approx (1/6) (\pi T_c \tau_s / \hbar)^2. \quad (21.8)$$

Отсюда следует, что критическая концентрация, при которой $T_c = 0$, соответствует выражению

$$\hbar\tau_{sc}^{-1} = \pi T_{c0} / 2\gamma. \quad (21.9)$$

В окрестности критической концентрации критическая температура имеет вид

$$T_c \approx \sqrt{6} (\hbar/\pi) (\tau_s - \tau_{sc})^{1/2} \tau_{sc}^{-3/2}. \quad (21.10)$$

Другим принципиальным следствием наличия магнитных примесей является «бесщелевая сверхпроводимость». Дело заключается в следующем. Магнитные примеси не только уменьшают энергию связи куперовских пар, но и, как показывает точный расчет [238], они приводят к тому, что не все пары имеют одинаковую энергию связи. В этом смысле дело выглядит подобно слабо-неидеальному бозе-газу (см., например, в [4]). В то время как в идеальном бозе-газе при $T = 0$ все частицы находятся в конденсате, т. е. имеют равные нулю $\mathbf{p}$ и ε и описываются когерентной волновой функцией $\Psi = \text{const}$, в неидеальном газе при $T = 0$ лишь некоторая доля частиц находится в конденсате, а остальные имеют энергию и импульс, отличные от нуля. Однако параметром порядка и в этом случае является когерентная волновая функция частиц конденсата.

В сверхпроводниках с магнитными примесями дело обстоит так же. Бозе-конденсат куперовских пар содержит не все пары: часть из них имеет меньшие энергии связи. Очевидно, чтобы разорвать такие пары, необходимо затратить меньшую энергию, чем для разрыва пар, имеющих в конденсате. До сих пор одна величина Δ описывала как число пар в конденсате, так и энергию связи. Однако применительно к сверхпроводникам с магнитными примесями это утверждение становится неверным. В то время как одна величина описывает параметр порядка (сохраним за ней название Δ), т. е. волновую функцию конденсата, совсем другая величина характеризует минимальную энергию связи пар или энергетическую щель, которая проявляется в низкотемпературной теплоемкости, теплопроводности, поглощении электромагнитного излучения, ультразвука и др.

Именно параметр порядка определяет основные особенности сверхпроводников: эффект Мейснера и отсутствие электрического сопротивления. Пока Δ конечно, все эти свойства имеют место. В то же время энергетическая щель может обратиться в нуль; это действительно имеет место в сверхпроводниках с магнитными примесями в диапазоне концентраций (n_{mc} соответствует τ_{sc} по формулам (21.9) и (21.6))

$$0,91 n_{mc} < n_m < n_{mc}.$$

Может возникнуть естественный вопрос: как это согласуется с критерием Ландау? Согласно этому критерию в отсутствие щели в энергетическом спектре невозможна сверхпроводимость. Однако критерий Ландау выведен для чистых систем, в которых имеет место пространственная однородность и сохраняется импульс. Для систем с примесями этот критерий неприменим.

Приведем без вывода формулы для энергетической щели:

$$\hbar\omega_0 = \left[\Delta_0^{2/3} - (\hbar/\tau_s)^{2/3} \right]^{3/2}, \quad (21.11)$$

и электронной теплоемкости в бесщелевой области:

$$C = (\pi^2/3) \nu(\mu) \left[1 - (\tau_s \Delta_0 / \hbar)^2 \right]^{1/2} T; \quad (21.12)$$

здесь Δ_0 — параметр порядка при $T = 0$, который сложным образом зависит от τ_s . На границе бесщелевой области $\Delta_0(\tau_s) = \hbar/\tau_s$.

Исчезновение щели удобно проследить по плотности состояний. Для нормального металла $\nu_n = p_0 m / \pi^2 \hbar^3 = \text{const}$. Для чистого сверхпроводника

$$\nu(\varepsilon) = (\pi^2 \hbar^3)^{-1} p_0 m d\xi/d\varepsilon = \nu_n \varepsilon (\varepsilon^2 - \Delta^2)^{-1/2}$$

при $\varepsilon > \Delta$ и $\nu(\varepsilon) = 0$ при $\varepsilon < \Delta$. Отметим, что при $\varepsilon \rightarrow \Delta$ $\nu(\varepsilon)$ имеет корневую особенность. Плотность состояний $\nu(\varepsilon)$ при разных значениях τ_s изображена на рис. 21.1. По оси ординат отложено $\nu(\varepsilon)/\nu_n$, а по оси абсцисс $\varepsilon/\Delta_0(\tau_s)$. Возрастание номеров кривых идет в порядке увеличения $\hbar/\tau_s \Delta_0$.

Следует отметить, что магнитные примеси являются не единственным пароразрушающим механизмом. Впоследствии было выяснено, что таким же действием обладают любые возмущения, которым соответствуют члены в гамильтониане, неинвариантные по отношению к изменению знака времени (см. [239]).

Куперовские пары являются суперпозицией состояний электронов с противоположными импульсами и спинами. Эти состояния получают друг из друга обращением знака времени (при $t \rightarrow -t$ меняют знак импульс и спин). Возмущение, не инвариантное по отношению к изменению знака времени, по разному действует на электроны, входящие в состав куперовской пары, и как бы растаскивает ее.

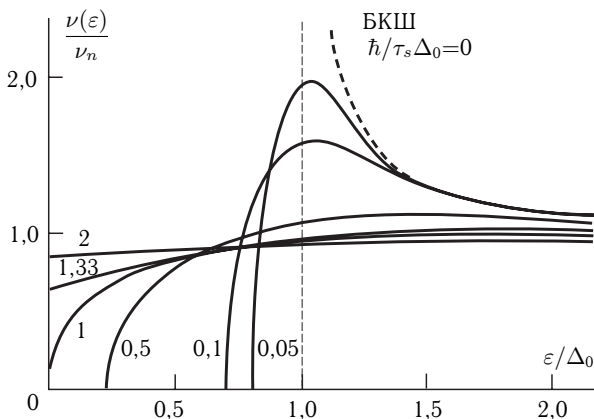


Рис. 21.1

Примером может служить внешнее магнитное поле. Конечно, поле не проникает в массивный сверхпроводник, и поэтому мы предположим, что речь идет о тонкой пленке с толщиной, меньшей δ и ξ . Главное возмущение от магнитного поля есть $-(e/mc)\mathbf{p}\mathbf{A}$. Волновая функция электрона пропорциональна $\exp(-i\mathbf{\varepsilon}t/\hbar)$. Отсюда видно, что в присутствии магнитного поля между электронами, входящими в состав пары, т. е. имеющими импульсы $\mathbf{p}$ и $-\mathbf{p}$, возникает разность фаз, которая меняется со временем по закону

$$d\theta/dt = (2e/\hbar c) \mathbf{v}\mathbf{A} \quad (21.13)$$

($v = p_0/m$).

Однако электроны рассеиваются на примесях или на границах образца. Поэтому они совершают броуновское диффузионное движение. Согласно § 3.5, 5.5 при таком движении

$$\overline{x^2} \sim Dt \sim lvt \sim v^2 t \tau_{\text{tr}},$$

где $D \sim lv \sim v^2 \tau_{\text{tr}}$ — коэффициент диффузии. Это соотношение можно обобщить для любой величины: средний квадрат искомой величины порядка квадрата мгновенной скорости ее изменения, умноженной на $t \tau_{\text{tr}}$. В нашем случае

$$\overline{\theta^2} \sim (d\theta/dt)^2 t \tau_{\text{tr}}.$$

Следовательно, для того чтобы θ стало порядка 2π , необходимо время τ_H , причем

$$\tau_H^{-1} \sim (d\theta/dt)^2 \tau_{\text{tr}},$$

где $(d\theta/dt)^2$ есть среднее значение квадрата выражения (21.13). Итак, имеем ($A \sim Hd$)

$$\tau_H^{-1} \sim v^2 \tau_{\text{tr}} (e/\hbar c)^2 H^2 d^2 \sim D (e/\hbar c)^2 H^2 d^2. \quad (21.14)$$

Можно привести и другие примеры, а именно смешанное состояние в массивном сверхпроводнике 2-го рода и в пленке в перпендикулярном магнитном поле, малые частицы и др. Можно показать (см. [239]), что все формулы, выведенные для магнитных примесей, остаются применимыми для всех пароразрушающих механизмов. Меняется лишь физический смысл константы ρ , связанной с частотой столкновений.

§ 21.2. Неоднородное сверхпроводящее состояние

В § 21.1 уже говорилось о том, что магнитные примеси разрушают сверхпроводимость. Еще хуже обстоит дело в том случае, если имеется ферромагнитное упорядочение. При этом число электронов с разной ориентацией спина различно, а значит, различны и соответствующие ферми-поверхности. Если ферромагнетизм сильный, т.е. температура Кюри порядка сотен градусов, как это имеет место у обычных ферромагнетиков на базе переходных металлов, то сверхпроводимость невозможна.

Однако в случае редкоземельных металлов или актинидов ситуация может быть иной. Магнетизм таких атомов связан с незаполненными 4f- или 5f-оболочками. Это внутренние оболочки, имеющие малый радиус. У соседних атомов они практически не перекрываются. Ввиду этого обменное взаимодействие спинов осуществляется путем косвенного обмена через электроны проводимости. Иными словами, можно исходить из картины локализованных спинов, взаимодействующих с электронами проводимости по типу, рассмотренному в § 4.1.

В § 21.3 будет рассмотрено более детально взаимодействие между двумя локализованными спинами, которое передается электронами проводимости. Здесь для нас важно лишь то обстоятельство, что результирующий магнетизм является «слабым», соответствующая температура Кюри — порядка градусов. Поэтому и встает вопрос о взаимном влиянии ферромагнетизма и сверхпроводимости.

Могут встретиться две крайние ситуации. Если температура Кюри ферромагнитного перехода θ несколько выше критической температуры сверхпроводящего перехода T_c (но не слишком), то сверхпроводимость, может возникнуть на фоне существующего ферромагнетизма. Если же температура сверхпроводящего перехода выше температуры Кюри, то ферромагнетизм возникает на фоне сверхпроводимости. Возможно, что те фазы, которые будут рассмотрены в этом и следующем параграфах, не охватывают всего разнообразия имеющихся возможностей, но они дают представление о специфических чертах взаимного влияния таких антагонистических явлений, как ферромагнетизм и сверхпроводимость.

Начнем со случая, когда сверхпроводимость возникает на фоне ферромагнетизма. Вместо (16.13) напомним гамильтониан

$$\mathcal{H} - \mu N = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} (\xi_{\mathbf{p}} - \sigma_z I) a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ a_{\mathbf{p}, \sigma} - g \sum a_{\mathbf{p}'_+, +}^+ a_{\mathbf{p}'_2, -}^+ a_{\mathbf{p}_2, -} a_{\mathbf{p}_1, +}, \quad (21.15)$$

где I — самосогласованное «молекулярное поле», под действием которого энергия электронов начинает зависеть от проекции их спина. Далее, введем операторы $\alpha_{\mathbf{p},+}$ и $\alpha_{\mathbf{p},-}$, согласно формулам (16.14), и повторим весь вывод, приведенный в § 16.4 с учетом измененного гамильтониана. При этом получаются те же формулы для коэффициентов u и v и формула (16.21) для Δ , однако энергии, входящие в ферми-распределения $n_{\mathbf{p},+}$ и $n_{\mathbf{p},-}$, имеют вид

$$\varepsilon_{p,+} = \varepsilon_p - I,$$

$$\varepsilon_{p,-} = \varepsilon_p + I$$

(как и раньше $\varepsilon_p = (\xi_p^2 + \Delta^2)^{1/2}$).

Рассмотрим лишь случай $T = 0$. Ввиду того что $\varepsilon_p > 0$, $n_{\mathbf{p},-} = 0$. Поэтому сумма по $\mathbf{p}$ в (16.21) ограничена снизу условием $\varepsilon_{\mathbf{p},+} > 0$, или $\varepsilon_p > I$. Возможны два случая. Если $\Delta > I$, условие $\varepsilon_{\mathbf{p},+} > I$ не накладывает ограничений на область интегрирования по $\mathbf{p}$ и мы получаем $\Delta = \Delta_0$. Если же $\Delta < I$, то, переходя к интегралу, имеем

$$\frac{2}{g\nu} = \ln \frac{2\hbar\omega_D}{\Delta_0} = \int_{(I^2 - \Delta^2)^{1/2}}^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\xi} = \ln \frac{2\hbar\omega_D}{I + (I^2 - \Delta^2)^{1/2}}. \quad (21.16)$$

Отсюда следует, что $I + (I^2 - \Delta^2)^{1/2} = \Delta_0$, или

$$\Delta = [\Delta_0 (2I - \Delta_0)]^{1/2}. \quad (21.17)$$

Итак, получаем две ветви решения уравнения (21.16); они изображены на рис. 21.2. Однако отличное от нуля решение для Δ означает лишь локальный минимум свободной энергии; это может соответствовать не равновесному, а метастабильному состоянию. Для того чтобы определить, действительно ли имеет место переход в сверхпроводящее состояние, надо найти разность свободных энергий $\Omega_s - \Omega_n$.

Для этой цели воспользуемся формулой (16.38). В области, где $\Delta_1 > I$, имеем, как и раньше,

$$\partial g^{-1}(\Delta_1)/\partial \Delta_1 = -(\nu/2) \Delta_1^{-1}. \quad (21.18)$$

В области, где $\Delta_1 < I$, получаем из (21.16)

$$\begin{aligned} \partial g^{-1}(\Delta_1)/\partial \Delta_1 &= (\nu/2) \Delta_1 \left(I^2 - \Delta_1^2 \right)^{-1/2} \left[I + \left(I^2 - \Delta_1^2 \right)^{1/2} \right]^{-1} = \\ &= (\nu/2) \Delta_1 \left[I - \left(I^2 - \Delta_1^2 \right)^{1/2} \right] \left(I^2 - \Delta_1^2 \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (21.19)$$

На нижней ветви рис. 21.2 формула (21.19) применима при всех Δ_1 и, подставляя ее в (16.38), находим

$$\Omega_s - \Omega_n = (\nu/4) \left[I - \left(I^2 - \Delta_1^2 \right)^{1/2} \right]^2 = (\nu/4) (2I - \Delta_0)^2 \quad (21.20)$$

(мы подставили (21.17) и учли, что $I < \Delta_0$). Итак, в этом случае $\Omega_s - \Omega_n > 0$, т. е. сверхпроводящий переход не имеет места.

На верхней ветви рис. 21.2 $\Delta = \Delta_0 > I$. Поэтому есть две области интегрирования: $\Delta_1 < I$ и $\Delta_1 > I$. Подставляя формулы (21.18) и (21.19) в (16.38), получаем

$$\Omega_s - \Omega_n = (\nu/4) (2I^2 - \Delta_0^2). \quad (21.21)$$

Отсюда следует, что верхняя ветвь на рис. 21.2, т. е. $\Delta = \Delta_0$, соответствует равновесной сверхпроводимости при

$$I < \Delta_0/\sqrt{2} = 0,707 \Delta_0. \quad (21.22)$$

Итак, в рассмотренной модели при увеличении I в точке $I = \Delta_0/\sqrt{2}$ имеет место фазовый переход 1-го рода из сверхпроводящей фазы с $\Delta = \Delta_0$ в нормальную с $\Delta = 0$.

Остальные части сплошных кривых на рис. 21.2 соответствуют метастабильным фазам.

Однако более детальное исследование показывает, что истинная ситуация сложнее. В предыдущем рассмотрении ставился вопрос лишь о возможности возникновения сверхпроводимости $\Delta = \text{const}$. Оказывается, что при значениях I , больших критического значения (21.22), возможно возникновение сверхпроводящей фазы с неоднородным параметром порядка $\Delta(\mathbf{r})$ путем фазового перехода 2-го рода (Ларкин, Овчинников, 1964, Фульде, Феррел, 1964) [240, 241]. Новую фазу иногда называют ЛОФФ-фазой.

Для того чтобы продемонстрировать этот переход, воспользуемся тем, что вблизи точки перехода Δ мало, и уравнение для Δ обязательно будет линейным. Это дает возможность применить фурье-разложение и поставить вопрос о возникновении одной фурье-гармоники, т. е.

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}/\hbar). \quad (21.23)$$

Если вспомнить, что $\Delta(\mathbf{r})$ играет роль когерентной волновой функции конденсата куперовских пар, то формула (21.23) соответствует движущемуся конденсату, в котором пары имеют импульс $\mathbf{q}$, т. е. скорость $\mathbf{v}_s = \mathbf{q}/2m$.

Вопрос о движущемся конденсате был рассмотрен нами в § 19.2. В полученное там уравнение для Δ подставим формулы (19.19)–(19.21), после чего произведем преобразование импульсной переменной $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \mathbf{q}/2$ и воспользуемся формулами (19.24). Учитывая, что для квазичастиц со спином $+1/2$ энергия содержит член $-I$, а в обратном случае — член $+I$, получаем окончательно уравнение

$$1 = (g/2) \sum_{\mathbf{p}} (1 - n_+ - n_-) / \varepsilon, \quad (21.24)$$

где n_+ и n_- — равновесные функции Ферми с энергиями

$$\begin{aligned} \varepsilon_+ &= \varepsilon + vqx/2 - I, \\ \varepsilon_- &= \varepsilon - vqx/2 + I. \end{aligned} \quad (21.25)$$

Здесь $\varepsilon = (\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}$, $x = \cos(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{q}})$. Мы предположили, что $vq > 2I$ (это подтверждается дальнейшим расчетом). Поскольку нас интересует область перехода, то будем считать $\Delta < I$. Так же как и раньше, положим $T = 0$.

Интеграл в правой части (21.24) отличен от нуля, если либо

$$n_+ = n_- = 1, \quad \text{т. е. } \varepsilon_+, \varepsilon_- < 0,$$

либо

$$n_+ = n_- = 0, \quad \text{т. е. } \varepsilon_+, \varepsilon_- > 0;$$

осуществляется последнее условие, которое дает

$$2(I + \varepsilon)/vq > x > 2(I - \varepsilon)/vq.$$

Учитывая, что x меняется в области $-1 \leq x \leq 1$ и $0 < |\xi| \leq \hbar\omega_D$, получаем из (21.24)

$$\begin{aligned} \frac{2}{g\nu} &= \ln \frac{2\hbar\omega_D}{\Delta_0} + \frac{1}{2} \ln \frac{2\hbar\omega_D}{vq/2 - I + [(vq/2 - I)^2 - \Delta^2]^{1/2}} + \\ &+ \frac{1}{2} \ln \frac{2\hbar\omega_D}{vq/2 + I + [(vq/2 + I)^2 - \Delta^2]^{1/2}} - \\ &- \frac{I}{vq} \ln \frac{vq/2 + I + [(vq/2 + I)^2 - \Delta^2]^{1/2}}{vq/2 - I + [(vq/2 - I)^2 - \Delta^2]^{1/2}} + \\ &+ (vq)^{-1} \left\{ [(vq/2 - I)^2 - \Delta^2]^{1/2} + [(vq/2 + I)^2 - \Delta^2]^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (21.26)$$

Переносим члены и введя новые переменные $z = I/\Delta_0$, $y = vq/2I$, $s = \Delta/I$, находим

$$\begin{aligned} \ln(1/z) = & \left\{ (y-1) \ln \left[y-1 + \left((y-1)^2 - s^2 \right)^{1/2} \right] + \right. \\ & + (y+1) \ln \left[y+1 + \left((y+1)^2 - s^2 \right)^{1/2} \right] \Big\} / 2y + \\ & + \left\{ \left((y-1)^2 - s^2 \right)^{1/2} + \left((y+1)^2 - s^2 \right)^{1/2} \right\} / 2y. \end{aligned} \quad (21.27)$$

В самой точке перехода $s = 0$. Имеем

$$\ln(1/z) + 1 - \ln 2 = [(y-1) \ln(y-1) + (y+1) \ln(y+1)] / 2y. \quad (21.28)$$

Правая часть имеет асимптотики $\ln y$ при $y \rightarrow \infty$ и $-(y-1) \times \ln[1/(y-1)]$ при $y \rightarrow 1$. Отсюда видно, что при некотором значении y она имеет минимум. Очевидно, ему соответствует максимальное значение $z = I/\Delta_0$, при котором впервые возникает $\Delta \neq 0$. Нахождение числового значения минимума правой части дает $y_c = 1,19$, $z_c = 0,754$. Итак, оказывается, что $\Delta \neq 0$ впервые возникает при

$$I_c = 0,754\Delta_0, \quad (21.29)$$

$$vq_c = 2,38I_c. \quad (21.30)$$

Величина I_c больше полученного ранее значения (21.22) для неподвижного конденсата (т. е. $\Delta(\mathbf{r}) = \text{const}$).

Теперь надлежит проверить, соответствует ли появление конечного Δ уменьшению свободной энергии. Здесь, однако, надо сделать следующую оговорку. Когда выяснялся вопрос о решении уравнения для Δ в пределе $\Delta \rightarrow 0$, мы могли воспользоваться линейностью этого уравнения и рассматривать одну фурье-гармонику. При этом оказалось, что впервые появляется гармоника с определенным $q_c = 2,38I/v$. Но изотропия и линейность задачи означают, что с таким же успехом может появиться любая линейная комбинация гармоник с разными $\mathbf{q}$, равными по абсолютному значению q_c .

Вопрос о выборе конкретной комбинации гармоник решается сравнением их свободных энергий, где Δ выражена как функция $I_c - I$. Однако это требует решения нелинейной задачи, для которой примененный здесь метод не годится. Конечно, можно обобщить преобразования Боголюбова, как это сделано в [242]. Однако ввиду громоздкости вычислений мы не будем этим заниматься и лишь продемонстрируем, что уже в простейшем случае одной фурье-гармоники, который был рассмотрен выше, свободная энергия уменьшается в результате сверхпроводящего спаривания. Отметим также, что полный анализ вопроса о наиболее выгодной структуре $\Delta(\mathbf{r})$ пока не произведен,

что в какой-то степени объясняется отсутствием экспериментальных наблюдений ЛОФФ-фазы ¹⁾.

Итак, найдем свободную энергию. С помощью формулы (21.26) получаем

$$\partial g^{-1}/\partial \Delta = (\nu/2\Delta) \left\{ -1 + (vq)^{-1} \left[(vq/2 - I)^2 - \Delta^2 \right]^{1/2} + \right. \\ \left. + (vq)^{-1} \left[(vq/2 + I)^2 - \Delta^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (21.31)$$

Разлагая по Δ и подставляя в (16.38), находим

$$\Omega_s - \Omega_n = -\nu \Delta^4 / 16 I_c^2 (y_c^2 - 1). \quad (21.32)$$

Для того чтобы выразить Δ через $I_c - I$, разложим уравнение (21.27) по $s = \Delta/I$. При этом имеем

$$(I_c - I)/I_c = \left[4 (y_c^2 - 1) \right]^{-1} (\Delta/I_c)^2.$$

Подставляя $y_c = 1,19$, находим

$$\Delta \approx 1,3 [(I_c - I) I_c]^{1/2}. \quad (21.33)$$

Используя это значение и $I_c = 0,754\Delta_0$, получаем

$$\Omega_s - \Omega_n = -0,42 \nu (I_c - I)^2. \quad (21.34)$$

Итак, в результате возникновения неоднородного сверхпроводящего конденсата свободная энергия действительно понижается.

Как уже говорилось, рассмотренная структура является лишь простейшим примером. В действительности следует ожидать возникновения трехмерной периодической структуры (например, с набором импульсов $\mathbf{q}$, направленных по главным осям тетраэдра) с периодами порядка $\hbar v/\Delta_0 \sim \xi(0)$. Не исключено, что при этом в определенных точках $\Delta(\mathbf{r}) = 0$, т.е. сверхпроводимость окажется бесщелевой. Это приведет к неэкспоненциальной температурной зависимости теплоемкости. Например, при $\Delta(\mathbf{r}) \propto \cos(\mathbf{q}\mathbf{r}/\hbar)$ $C \propto \ln^{-3}(\Delta/T)$ [240].

Поскольку в реальных условиях трудно избежать появления дефектов структуры, то возникает вопрос об устойчивости неоднородной сверхпроводящей фазы по отношению к дефектам. Анализ показывает [243], что в принципе ЛОФФ-фаза сохраняется при наличии любой концентрации дефектов, т.е. свободная энергия понижается при появлении $\Delta(\mathbf{r})$. Однако соответствующее значение I_c уменьшается с концентрацией дефектов, и при концентрации, соответствующей длине пробега $l < \xi(0)$, I_c становится меньше значения, определяемого формулой (21.22). При этом равновесной фазой будет однородная

¹⁾ Информацию о наблюдении ЛОФФ-фазы можно найти в недавно появившемся обзоре [309].

сверхпроводящая фаза с $\Delta = \Delta_0$; она возникает путем перехода 1-го рода по I . Величина I_c в этом случае играет роль предела переохлаждения нормальной фазы. При дальнейшем уменьшении I неоднородная сверхпроводимость ЛОФФ-фазы может появиться в качестве метастабильной фазы.

§ 21.3. Ферромагнитные сверхпроводники

Теперь рассмотрим другую возможность, а именно случай $\theta < T_c$ (θ — температура Кюри), при котором ферромагнетизм возникает на фоне сверхпроводимости (см. [244]). Эта ситуация имеет место, например, в соединениях HoMo_6S_8 и ErRh_4B_4 . В веществах такого типа при понижении температуры, прежде всего, происходит сверхпроводящий переход (температура T_{c1}).

При дальнейшем понижении температуры на фоне сверхпроводимости возникает магнитный переход в очень своеобразную слоистую, или доменную, магнитную структуру, в которой намагниченность в соседних слоях имеет противоположное направление (температура T_m). Поскольку сверхпроводящий ток экранирует магнитное поле, то узнать об этой магнитной структуре удастся лишь при помощи дифракции нейтронов. Нейтроны, имея магнитный момент, «чувствуют» магнитную структуру и дифрагируют на ней, как свет на дифракционной решетке или рентгеновское излучение в кристалле.

Наконец, при дальнейшем понижении температуры происходит фазовый переход 1-го рода в несверхпроводящее ферромагнитное состояние (температура T_{c2}). Приведем значения этих температур для HoMo_6S_8 : $T_{c1} = 1,8$ К, $T_m = 0,7$ К, $T_{c2} = 0,65$ К; для ErRh_4B_4 : $T_{c1} = 8,7$ К, $T_m = 0,8$ К, $T_{c2} = 0,75$ К. Для того чтобы понять последовательность этих переходов, разберем, прежде всего, механизм косвенного обменного взаимодействия спинов через электроны проводимости.

Начнем с гамильтониана взаимодействия спинов с электронами проводимости (4.39), который запишем через операторы a и a^+ :

$$\mathcal{H}_{eS} = -\frac{J}{n} \sum_{\substack{\mathbf{p}, \mathbf{p}' \\ \sigma, \sigma' \\ i}} a_{\mathbf{p}', \sigma'}^+ \boldsymbol{\sigma}_{\sigma', \sigma} a_{\mathbf{p}, \sigma} \exp \left[\frac{i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \mathbf{r}_i}{\hbar} \right] \mathbf{S}_i; \quad (21.35)$$

здесь $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули, $\mathbf{S}_i$ — операторы спина магнитных атомов¹⁾, σ, σ' — проекции электронного спина, $\mathbf{r}_i$ — положения атомов. Выражение (21.35) описывает процесс взаимодействия электрона со спинами, при котором импульс электрона равен $\mathbf{p}$ в начальном и $\mathbf{p}'$ в конечном состоянии, σ и σ' — начальная и конечная проекции спина.

¹⁾ Мы здесь не будем рассматривать эффект Кондо и поэтому будем считать $\mathbf{S}_i$ классическими векторами.

Что касается множителя, зависящего от $\mathbf{r}_i$, то замена суммы по $\mathbf{r}_i$ на интеграл по объему привела бы к появлению фурье-компоненты функции $\mathbf{S}(\mathbf{r})$. В этом случае полученное выражение было бы аналогично гамильтониану (16.60), описывающему взаимодействие электронов с электромагнитным полем. Его можно интерпретировать как изменение импульса и спина электрона при поглощении кванта внешнего поля. Наличие суммы по $\mathbf{r}_i$ в (21.35) учитывает дискретность в расположении спинов.

Рассмотрим сначала несверхпроводящий металл. Взяв второй порядок теории возмущений и выделив в нем члены с $\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_k$, описывающие взаимодействие спинов, получаем

$$\begin{aligned} E_{SS} &= \sum_{m \neq 0} \frac{|\langle \mathcal{H}_{eS} \rangle_{m0}|^2}{E_0 - E_m} = \\ &= \left(\frac{J}{n}\right)^2 \sum_{\substack{\mathbf{p}, \mathbf{p}' \\ \sigma, \sigma' \\ i \neq k}} \frac{n_{\mathbf{p}}(1 - n_{\mathbf{p}'})}{\xi_{\mathbf{p}} - \xi_{\mathbf{p}'}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_k) \right] \sigma_{\sigma', \sigma}^l \sigma_{\sigma, \sigma'}^m S_i^l S_k^m = \\ &= 2 \left(\frac{J}{n}\right)^2 \sum_{\substack{\mathbf{p}, \mathbf{p}' \\ i \neq k}} \frac{n_{\mathbf{p}}(1 - n_{\mathbf{p}'})}{\xi_{\mathbf{p}} - \xi_{\mathbf{p}'}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} - \mathbf{p}') \mathbf{r}_{ik} \right] \mathbf{S}_i \mathbf{S}_k. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{r}_{ik} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$, а множитель $n_{\mathbf{p}}(1 - n_{\mathbf{p}'})$ учитывает присутствие электронов в начальном и отсутствие в конечном состоянии. Введем замену переменных: $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \mathbf{q}/2$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathbf{q}/2$.

Учтем, что конечная температура приводит лишь к поправкам порядка $(T/\mu)^2$, а потому положим $T = 0$. При этом $\xi_{\mathbf{p}} < 0$, $\xi_{\mathbf{p}'} > 0$. Полученное выражение можно записать в виде

$$E_{SS} = -2 \left(\frac{J}{n}\right)^2 \sum_{i \neq k} \int F(q) \exp \left(\frac{i \mathbf{q} \mathbf{r}_{ik}}{\hbar} \right) \mathbf{S}_i \mathbf{S}_k \frac{d^3 q}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (21.36)$$

где

$$F(q) = \int (\xi' - \xi)^{-1} \theta(\xi') \theta(-\xi) \frac{d^3 q}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (21.37)$$

$\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$,

$$\xi = \xi(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) = (2m)^{-1} \left[(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2)^2 - p_0^2 \right], \quad \xi' = \xi(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2).$$

Интегрирование дает следующий результат:

$$F(q) = (\nu/4) f(q/2p_0), \quad (21.38)$$

где $\nu = p_0 m / \pi^2 \hbar^3$ — плотность состояний, а

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1-x^2}{2x} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right) \quad (21.39)$$

— так называемая функция Линдхардта.

Подстановка (21.38) и (21.39) в (21.36) и интегрирование по $\mathbf{q}$ приводят к формуле

$$E_{SS} = \left(\frac{J}{n} \right)^2 \nu \frac{p_0^3}{\pi \hbar^3} \sum_{i \neq k} \left[\cos \left(\frac{2p_0 r_{ik}}{\hbar} \right) \left(\frac{2p_0 r_{ik}}{\hbar} \right)^{-3} - \right. \\ \left. - \sin \left(\frac{2p_0 r_{ik}}{\hbar} \right) \left(\frac{2p_0 r_{ik}}{\hbar} \right)^{-4} \right] \mathbf{S}_i \mathbf{S}_k, \quad (21.40)$$

называемой по имени авторов взаимодействием RKKY (*Рудерман, Киттел, Касуя, Иосида*, 1955–1957) [245].

Представим себе, что в результате взаимодействия спинов (21.40) образовалась геликоидальная магнитная структура, при которой $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{r})$, причем

$$S_x = S \cos(qz/\hbar), \quad S_y = S \sin(qz/\hbar), \quad S_z = 0. \quad (21.41)$$

Это значит, что конец вектора $\mathbf{S}$ описывает в пространстве винтовую линию вокруг оси z . При подстановке в (21.36) мы переходим от суммирования по i, k к интегрированию по формуле $\sum_i \rightarrow n \int dV$, где n — число спинов в единице объема. В результате на единицу объема имеем

$$E_{SS} = -2J^2 S^2 F(q) = -(1/2) J^2 \nu S^2 f(q/2p_0). \quad (21.42)$$

Наименьшей энергии соответствует максимум $f(q)$. Функция Линдхардта (21.39) равна 1 при $q = 0$ и монотонно убывает при увеличении x (асимптотика при $x \rightarrow \infty$ $f(x) \approx 2/3x^2$). Следовательно, минимуму энергии соответствует $q = 0$, т. е. ферромагнитное упорядочение.

Этот вывод в действительности не является общим. Если учесть, что спины занимают определенные положения в пространстве, то нельзя переходить от суммирования по $\mathbf{r}_i$ к интегрированию по объему. Для некоторых решеток более выгодными оказываются другие типы упорядочения спинов, например антиферромагнитные или геликоидальные с $\mathbf{q} \neq 0$. Но мы ограничимся здесь простейшим случаем.

Как меняется ситуация в сверхпроводнике? Чтобы это выяснить, надо выразить в гамильтониане (21.35) операторы a и a^+ через α и α^+ согласно формулам Боголюбова (16.14). Будем сразу считать,

что спиновое упорядочение является геликоидальным и описывается формулами (21.41). При этом получаем

$$\mathcal{H}_{eS} =$$

$$= -(J/n) \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', i} (S_i^x - i S_i^y) (u_{p'} \alpha_{\mathbf{p}', +}^+ + v_{p'} \alpha_{-\mathbf{p}', -}) (u_p \alpha_{\mathbf{p}, -} - v_p \alpha_{-\mathbf{p}, +}^+) + \\ + (S_i^x + i S_i^y) (u_{p'} \alpha_{\mathbf{p}', -}^+ - v_{p'} \alpha_{-\mathbf{p}', +}) (u_p \alpha_{\mathbf{p}, +} + v_p \alpha_{-\mathbf{p}, -}^+).$$

Найдем, как и раньше, 2-й порядок теории возмущений и оставим члены с $i \neq k$. Сразу будем считать $T = 0$. Это значит, что все числа $n_{\mathbf{p}, +}$ и $n_{\mathbf{p}, -}$ для квазичастиц мы положим равными нулю. Конечно, строго говоря, это оправдано лишь для предельного случая, когда температура магнитного упорядочения T_M гораздо ниже T_{c1} . В результате получаем

$$E_{SS} = - \sum_{\substack{\mathbf{p}, \mathbf{p}' \\ i \neq k}} (u_p v_{p'} - u_{p'} v_p)^2 (\varepsilon + \varepsilon')^{-1} \exp [i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \mathbf{r}_{ik} / \hbar] \mathbf{S}_i \mathbf{S}_k.$$

Подставляя формулы (16.19) для u и v , находим

$$E_{SS} = -(1/2)(J/n)^2 \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'; i \neq k} \left[1 - (\xi \xi' + \Delta^2) / \varepsilon \varepsilon' \right] (\varepsilon + \varepsilon')^{-1} \times \\ \times \exp [i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \mathbf{r}_{ik} / \hbar] \mathbf{S}_i \mathbf{S}_k. \quad (21.43)$$

Введем те же переменные, что и раньше. Тогда вместо формулы (21.36) получим формулу того же вида, в которой, однако, будет стоять $F_1(q)$:

$$F_1(q) = \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{\xi \xi' + \Delta^2}{\varepsilon \varepsilon'} \right) (\varepsilon + \varepsilon')^{-1} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi \hbar)^3}. \quad (21.44)$$

Прежде всего, отметим, что $F_1(q) = 0$ при $\mathbf{q} = 0$. Действительно, при этом $\xi = \xi'$, а $\xi^2 + \Delta^2 = \varepsilon^2$. Физическое объяснение этому обстоятельству заключается в следующем. Косвенное обменное взаимодействие между спинами возникает оттого, что спин $\mathbf{S}_i$ в одной точке поляризует электроны, а те в свою очередь поляризуют другой спин $\mathbf{S}_k$. Но если мы имеем дело со сверхпроводником, то в основном состоянии электроны неполяризованы, а возбужденное состояние отделено от основного энергетической щелью. Статический спин не может изменить энергию электронной системы и, следовательно, не может ее поляризовать. Отсюда вытекает, что не только ферромагнетизм мешает сверхпроводимости, но в свою очередь сверхпроводимость препятствует возникновению ферромагнетизма.

В дальнейшем нам, как и раньше, понадобится максимум функции $F_1(q)$. Мы увидим, что этот максимум соответствует $\Delta/v \sim \hbar/\xi \ll q \ll 2p_0$. Поэтому вместо полного расчета функции F_1 можно найти ее асимптотику, считая $\Delta \ll vq \ll 2p_0v$. Для этой цели прибавим и вычтем в (21.44) соответствующее выражение с $\Delta = 0$. Разность сходится при $p \sim \Delta/v$, $vq \sim \Delta$. Ввиду этого можно продифференцировать разность по Δ и после этого, введя вместо p и $\theta = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ переменные ξ и ξ' , считать пределы интегрирования по этим переменным бесконечными. В результате находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Delta^2} [F_1(q) - F(q)] &= \\ &= \frac{\nu \Delta^2}{4vq} \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty [2\varepsilon\varepsilon'(\varepsilon + \varepsilon')]^{-1} \left[-3\Delta^{-2} + \varepsilon^{-2} + (\varepsilon')^{-2} + (\varepsilon\varepsilon')^{-1} \right] d\xi' = \\ &= \frac{\nu}{8vq\Delta} \int_0^\infty d\varphi_1 \int_0^\infty (\operatorname{ch} \varphi_1 + \operatorname{ch} \varphi_2)^{-1} \times \\ &\quad \times \left[-3 + \operatorname{ch}^{-2} \varphi_1 + \operatorname{ch}^{-2} \varphi_2 + \operatorname{ch}^{-1} \varphi_1 \operatorname{ch}^{-1} \varphi_2 \right] d\varphi_2, \end{aligned}$$

где мы ввели переменные $\xi = \Delta \operatorname{sh} \varphi_1$, $\xi' = \Delta \operatorname{sh} \varphi_2$. Получившийся безразмерный интеграл по φ_1 и φ_2 оказывается равным $-\pi^2/2$.

Интегрируя по Δ , получаем

$$F_1(q) - F(q) = -\nu\pi^2\Delta/8vq = -\nu\pi\hbar/8\xi_0q,$$

где мы ввели использовавшееся ранее обозначение $\xi_0 = \hbar v/\pi\Delta$. Оставшаяся часть, равная $F(q)$, ввиду малости q может быть разложена в ряд по q . Используя выражения (21.38) и (21.39), получаем

$$F_1(q) \approx (\nu/4) \left[1 - q^2/12p_0^2 - \pi\hbar/2\xi_0q \right]. \quad (21.45)$$

Во избежание недоразумений отметим, что эта формула неприменима ни для слишком малых, ни для слишком больших q .

Аналогично (21.42) энергия на единицу объема равна

$$E_{SS} = -2J^2S^2F_1(q). \quad (21.46)$$

Максимум функции $F_1(q)$ достигается при

$$q = (3\pi\hbar p_0^2/\xi_0)^{1/3}. \quad (21.47)$$

Это значит, что магнитное упорядочение имеет геликоидальную структуру с периодом

$$d = 2\pi\hbar/q = (2/3^{1/3})(\pi\hbar/p_0)^{2/3}\xi_0^{1/3} \sim a^{2/3}\xi_0^{1/3}, \quad (21.48)$$

где $a \sim \hbar/p_0$, т.е. порядка атомных размеров (Андерсон и Сул, 1959) [246].

Получившийся период велик по сравнению с атомными размерами, но мал по сравнению с ξ_0 . Поскольку в сверхпроводнике важно то, что происходит на расстояниях порядка ξ_0 , то можно сказать, что намагниченность меняется столь быстро, что усредняется на расстояниях порядка ξ_0 и поэтому может сосуществовать со сверхпроводимостью.

В действительности, кроме обменного взаимодействия спинов имеется спин-орбитальное взаимодействие, которое в редкоземельных элементах, ввиду их большого атомного номера, является весьма сильным. Это взаимодействие, в противоположность обменному, зависит от ориентации спина относительно кристаллографических осей. Вследствие этого возникает так называемое поле анизотропии. Это поле выбирает из всех направлений спина так называемые направления легкой намагниченности. Самый простой случай — это одноосный кристалл с направлением легкой намагниченности вдоль оси. В таком кристалле наиболее энергетически выгодны ориентации спина вдоль оси в прямом и противоположном направлениях. Наличие такого поля анизотропии «переделывает» геликоидальную магнитную структуру в доменную, состоящую из плоских слоев (доменов) с противоположной намагниченностью последовательных слоев; размеры доменов порядка $(a\xi_0)^{1/2}$.

Как уже отмечалось, сверхпроводящая фаза с магнитными доменами существует лишь до температуры T_{c2} , а затем скачком переходит в несверхпроводящую ферромагнитную фазу. Это во всяком случае означает, что при $T = 0$ однородный ферромагнетизм энергетически выгоднее сверхпроводимости. Сравнивая свободные энергии (21.42) при $q = 0$ ($F = 1$) и (16.41), получаем

$$\Delta(0) < JS\sqrt{2}. \quad (21.49)$$

С другой стороны, если в гамильтониане (4.39) или (21.35) перейти от суммирования к интегрированию, т.е. $\sum_i \rightarrow n \int dV$, то видно, что JS играет ту же роль, что I в § 21.2. Заключение (21.49) соответствует условию (21.22).

Тем не менее, при понижении температуры прежде всего появляется сверхпроводимость, а затем уже ферромагнетизм. Это можно объяснить только тем, что точка T_{c1} сверхпроводящего перехода лежит выше точки Кюри θ ферромагнитного перехода. Относительно T_{c1} мы знаем, что, согласно формуле (16.26), $T_{c1} = (\gamma/\pi)\Delta(0)$. Для того чтобы получить θ , применим метод самосогласованного поля (Абрикосов и Горьков, 1962) [247]. Предположим, что возникло ферромагнитное состояние и в результате появилась поляризация электронного спина, т.е. $\langle \sigma \rangle$, где $\langle \dots \rangle$ означает равновесное среднее при заданной температуре. Согласно гамильтониану (4.39) это эквивалентно тому, что на каждый спин редкоземельного иона действует эффективнее магнитное поле, причем роль $g\beta H$ играет $(J/n)\langle \sigma \rangle$. Свободная энергия всей системы ионных спинов на единицу объема равна ($n_m = n$)

$$F_i = -nT \ln \sum_{M=-S}^S \exp[(J/n)\langle\sigma\rangle M/T] =$$

$$= -nT \{ \ln \operatorname{sh}[(J/n)\langle\sigma\rangle (S + 1/2)/T] - \ln \operatorname{sh}[(J/n)\langle\sigma\rangle/2T] \}. \quad (21.50)$$

С другой стороны, поляризация электронных спинов означает их перераспределение по энергиям, т.е. возникновение разных ферми-поверхностей для $\sigma = \pm 1$, что тоже эквивалентно действию некоторого магнитного поля. Согласно § 10.1 под действием магнитного поля H у электронной системы возникает парамагнитный момент ¹⁾

$$M = \beta \langle\sigma\rangle = \beta^2 \nu(\mu) H = \chi H.$$

Изменение свободной энергии при заданном моменте есть (см. (10.2))

$$F_e = \int H dM = \frac{\chi H^2}{2} = \beta^2 \frac{\langle\sigma\rangle^2}{2\chi} = \frac{\langle\sigma\rangle^2}{2\nu}. \quad (21.51)$$

Найдем минимум $F_e + F_i$. Дифференцируя по $\langle\sigma\rangle$, получаем

$$\langle\sigma\rangle/\nu - JSB_S[(J/n)\langle\sigma\rangle/T] = 0, \quad (21.52)$$

где $B_S(x)$ — функция Бриллюэна, равная

$$B_S(x) = [(S + 1/2)/S] \operatorname{cth}[(S + 1/2)x] - (2S)^{-1} \operatorname{cth}(x/2). \quad (21.53)$$

Для нахождения температуры Кюри θ будем считать $\langle\sigma\rangle \rightarrow 0$. Учитывая, что

$$B_S(x) \approx (S + 1)x/3,$$

получаем из (21.52)

$$\theta = J^2 \nu S(S + 1)/3n. \quad (21.54)$$

Конечно, примененный метод является неточным из-за развития флуктуаций вблизи θ , однако он дает правильную оценку температуры Кюри θ . Учитывая, что $\nu \sim n_e/\varepsilon_F$, $n_e \sim n$, имеем $\theta \sim J^2 S^2/\varepsilon_F$.

Возможны две ситуации. Если ε_F имеет тот же порядок, что в обычных металлах, то при $\theta \sim 1$ К $JS \sim 10^2$ К, и, следовательно, условие (21.49) будет заведомо выполнено. В этом случае сосуществование сверхпроводимости и ферромагнетизма возможно лишь при $\theta < T_{c1}$ и смена фаз при понижении температуры будет происходить в той последовательности, которая описана в настоящем параграфе. Если же $\theta > T_{c1}$, то сверхпроводимость вообще не появится.

Однако в принципе есть и другая возможность. Как уже говорилось в § 16.10, в плотности состояний на границе Ферми может воз-

¹⁾ $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}/2$.

никнуть резкий пик («резонанс Абрикосова–Сула»), проявляющийся в различных свойствах при низких температурах. Его можно интерпретировать как увеличение эффективной массы — «тяжелые фермионы». Очевидно, при этом в формуле (21.54) ν будет аномально велико, а следовательно, JS может оказаться порядка Δ . В этом случае возможно возникновение сверхпроводимости при $\theta \gtrsim T_{c1}$, а также появление неоднородной сверхпроводящей ЛОФФ-фазы, описанной в § 20.3. Правда, для этого необходимо, чтобы было $m^* > 10^3 m$, θ , $T_{c1} \sim 10$ К, что никогда не наблюдалось и, по-видимому, маловероятно.

§ 21.4. Сдвиг Найта

Одним из очень чувствительных методов определения внутренних магнитных полей в твердом теле, а часто и деталей структуры является метод ядерного магнитного резонанса (ЯМР). Если ядро имеет спин, то оно имеет магнитный момент

$$\mu_{\text{я}} = \gamma \hbar S_{\text{я}}. \quad (21.55)$$

Ядерные магнитные моменты в тысячу раз меньше электронных моментов:

$$\gamma \hbar \sim e \hbar / M_{\text{p}} c \sim \beta m / M_{\text{p}},$$

где m — масса электрона, а M_{p} — масса протона. Если на ядерный момент действует магнитное поле, то его энергия имеет обычный вид

$$\varepsilon = -\mu_{\text{я}} \mathbf{H} = -\gamma \hbar M H, \quad (21.56)$$

где M — магнитное квантовое число (проекция ядерного спина на $\mathbf{H}$). Эта система с эквидистантными уровнями способна поглощать электромагнитные кванты с энергией $\gamma \hbar H$. Учитывая, что $\beta \sim 10^{-20}$, а $\gamma \hbar \sim 10^{-23}$, получаем $\omega \sim \gamma H$, т.е. в поле порядка 10^4 Э $\omega \sim 10^8$ с⁻¹. Это делает ядерный магнитный резонанс удобным инструментом для самых разнообразных исследований.

Ядерный спин взаимодействует с электронами, поскольку они создают магнитное поле. В немагнитном металле в отсутствие внешнего магнитного поля электронная система не обладает магнитным моментом и ядерный спин не взаимодействует с электронами. Если включается внешнее магнитное поле, то оно способно не только непосредственно воздействовать на ядерный спин, но путем ориентации электронного спина создать отличное от нуля поле электронов в области ядра. Практически, однако, имеет значение лишь поле, создаваемое спином s -электронов, ибо только у этих электронов волновая функция в месте расположения ядра отлична от нуля (согласно квантовой механике $\psi(r) \propto r^l$, где l — орбитальный момент).

В металлах под действием магнитного поля спины электронов поляризуются. Поскольку среди валентных электронов всегда имеются электроны, у которых волновая функция в окрестности ядра близка к атомной s -функции, то их поляризация создает дополнительное поле, действующее на спин ядра. Это приводит к сдвигу частоты ядерного магнитного резонанса, получившему название сдвига *Найта* (1949) [248].

Значение сдвига Найта можно рассчитать следующим образом. Гамильтониан магнитного взаимодействия электронов с ядром можно записать в виде

$$\mathcal{H}_{\text{эя}} = -2\beta \left[3(\mathbf{s}\mathbf{r})(\boldsymbol{\mu}_{\text{я}}\mathbf{r}) r^{-5} - (\mathbf{s}\boldsymbol{\mu}_{\text{я}}) r^{-3} \right] = -2\beta \mathbf{s} \text{ rot } \mathbf{A}, \quad (21.57)$$

где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал поля, создаваемого ядерным спином:

$$\mathbf{A} = [\boldsymbol{\mu}_{\text{я}}\mathbf{r}]/r^3 = \text{rot}(\boldsymbol{\mu}_{\text{я}}/r). \quad (21.58)$$

Подставляя в (21.57), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{эя}} &= -2\beta \mathbf{s} \text{ rot rot}(\boldsymbol{\mu}_{\text{я}}/r) = -2\beta \mathbf{s}(\text{grad div} - \nabla^2)(\boldsymbol{\mu}_{\text{я}}/r) = \\ &= -2\beta \left[(\mathbf{s}\nabla)(\boldsymbol{\mu}_{\text{я}}\nabla) - (\mathbf{s}\boldsymbol{\mu}_{\text{я}}) \nabla^2 \right] r^{-1} = \\ &= -2\beta \left[(\mathbf{s}\nabla)(\boldsymbol{\mu}_{\text{я}}\nabla) - (1/3)(\mathbf{s}\boldsymbol{\mu}_{\text{я}}) \nabla^2 \right] r^{-1} + \\ &\quad + (4\beta/3)(\mathbf{s}\boldsymbol{\mu}_{\text{я}}) \nabla^2 r^{-1}. \end{aligned} \quad (21.59)$$

Полученный гамильтониан надо усреднить по электронной волновой функции. При этом первый член в (21.59) дает отличный от нуля результат лишь с волновыми функциями, ведущими себя в окрестности ядра как атомные состояния с $l \neq 0$; поэтому он вносит малый вклад. Второй член в силу свойства закона Кулона

$$\nabla^2 r^{-1} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

равен

$$\mathcal{H}_{\text{эя}} = -(16\pi/3) \beta \mathbf{s}\boldsymbol{\mu}_{\text{я}} \delta(\mathbf{r}).$$

При усреднении он дает ¹⁾

$$E_{\text{эя}} = -(16\pi/3) \beta \langle \mathbf{s} \rangle \boldsymbol{\mu}_{\text{я}} |\psi_s(0)|^2 n^{-1}, \quad (21.60)$$

где n — плотность атомов.

¹⁾ Для получения формулы (21.60) можно воспользоваться электронной волновой функцией, записанной через функции Ванье (1.21), и учесть, что $w_n(\mathbf{r}) \approx \psi_s(\mathbf{r} - \mathbf{a}_n)$ быстро спадает при удалении $\mathbf{r}$ от $\mathbf{a}_n$.

В магнитном поле средний электронный спин единицы объема равен

$$\langle \mathbf{s} \rangle = \chi \mathbf{H} / 2\beta.$$

Отсюда получаем

$$E_{\text{эя}} = -(8\pi/3) \chi |\psi_s(0)|^2 n^{-1} (\boldsymbol{\mu}_\pi \mathbf{H}).$$

Итак, на ядерный спин действует добавочное магнитное поле

$$\Delta H = (8\pi/3) \chi |\psi_s(0)|^2 n^{-1} H. \quad (21.61)$$

Экспериментальное определение частоты ЯМР, а следовательно, и сдвига Найта, дает возможность непосредственно измерить χ — спиновую магнитную восприимчивость. Конечно, для нормального металла ценность этого метода снижается тем, что величина $|\psi_s(0)|^2$ — плотность вероятности нахождения электронов на ядре — не может быть вычислена точно. Но если металл переходит в сверхпроводящее состояние, то можно изучать отношение $\chi_s(T)/\chi_n$.

Наибольший интерес имеет $\chi_s(0)$. На первый взгляд, эта величина должна равняться нулю. Действительно, в основном состоянии электроны объединены в куперовские пары с нулевым спином, а возбужденные состояния отделены от основного энергетической щелью. Следовательно, малое магнитное поле не в состоянии создать намагниченность, т.е. $\chi_s(0) = 0$. Однако на опыте $\chi_s(0)$ всегда получается не только конечным, но и часто даже близким к χ_n (напомним, что при низких температурах χ_n практически не зависит от температуры).

Этот парадокс пытались объяснить возникновением триплетного спаривания, т.е. куперовских пар с параллельными спинами и $l = 1, 3, \dots$ (нечетность l есть результат симметрии волновой функции ферми-частиц: если она симметрична относительно перестановки спинов, то она должна быть антисимметричной по координатам), однако эта идея не подтвердилась.

Для того чтобы понять происхождение конечного $\chi_s(0)$, мы должны учесть, что эксперименты по ЯМР в сверхпроводнике должны проводиться на малых частицах (или очень тонких пленках) с размерами, меньшими глубины проникновения. В противном случае магнитное поле не будет проникать в сверхпроводник или будет сильно неоднородным, что не позволит наблюдать резонанс. В малых частицах, даже монокристаллических, электроны обязательно рассеиваются на границах, т.е. мы обязательно имеем $l \ll \delta$. Можно показать, что обочное потенциальное рассеяние не создает $\chi_s(0)$.

Однако кроме этого обязательно имеется спин-орбитальное рассеяние, о котором уже шла речь в § 11.4. Гамильтониан спин-орбитальной части взаимодействия электрон–примесь пропорционален

$(mc)^{-1}[-i\hbar\nabla V, \mathbf{p}]\mathbf{s}$, где V — потенциал примеси ¹⁾, и он дает в амплитуде рассеяния добавку, пропорциональную $[\mathbf{p}\mathbf{p}']\mathbf{s}$, где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ — импульсы электрона до и после рассеяния. Ввиду того что добавка в гамильтониане симметрична по отношению к изменению знака времени (при $t \rightarrow -t$ $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, $\mathbf{s} \rightarrow -\mathbf{s}$), она не приводит к заметному изменению термодинамических характеристик сверхпроводника (§ 21.1).

Однако в присутствии этого взаимодействия не сохраняется электронный спин. Следовательно, состояния не могут классифицироваться по полному спину электронной системы $\mathbf{S}$, и в основном состоянии сверхпроводника есть примесь состояний с $\mathbf{S} \neq 0$. Ввиду этого возможна и поляризация в слабом поле.

Результат расчета этого эффекта (Абрикосов и Горьков, 1962) [249] таков. Отношение χ_s/χ_n зависит от температуры и от параметра l_{s0}/ξ_0 , где l_{s0} — спин-орбитальная длина пробега, связанная с соответствующим вкладом в амплитуду рассеяния,

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = a + ibp_0^{-2}([\mathbf{p}\mathbf{p}']\boldsymbol{\sigma}), \quad l_{s0} = v\tau_{s0},$$

$$\tau_{s0}^{-1} = n_i \nu \frac{\pi}{\hbar} \int |b|^2 \sin^2 \theta \frac{d\Omega}{4\pi}, \quad (21.62)$$

где n_i — концентрация примесей.

При $T = 0$ получается

$$\chi_s(0)/\chi_n \approx (\pi^2/6)\xi_0/l_{s0}, \quad \xi_0 \ll l_{s0},$$

$$\chi_s(0)/\chi_n \approx 1 - (3/4)l_{s0}/\xi_0, \quad \xi_0 \gg l_{s0} \quad (21.63)$$

(напоминаем, что $\xi_0 = \hbar v/\pi\Delta(0)$). Из формул (21.63) следует, что при слабом спин-орбитальном рассеянии $\chi_s(0)$ мало, а при сильном рассеянии $\chi_s(0)$ приближается к единице. Этот результат соответствует опыту.

¹⁾ Объяснение физической причины спин-орбитального взаимодействия и его оценка даны в начале § 10.7.

Глава 22

ТУННЕЛЬНЫЙ КОНТАКТ. ЭФФЕКТ ДЖОЗЕФСОНА

§ 22.1. Одночастичный туннельный ток

Туннельный эффект — одно из самых популярных явлений квантовой механики, поскольку именно он ярко демонстрирует отличие квантовой механики от классической. Согласно квантовой механике частица может пройти через потенциальный барьер даже в том случае, если высота барьера превышает ее энергию. Об этом явлении уже говорилось в § 10.7 в связи с обсуждением магнитного пробоя.

Вероятность прохождения барьера в основном определяется экспоненциальным фактором:

$$W \sim \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int \text{Im}(p_x) dx \right] = \exp \left\{ -\frac{2(2m)^{1/2}}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} [U(x) - E]^{1/2} dx \right\}. \quad (22.1)$$

Интегрирование ведется по области, где $U(x) > E$ (рис. 22.1). Из написанной формулы следует, что вероятность прохождения барьера уменьшается с ростом высоты ($U_{\max} - E$) и ширины ($x_2 - x_1$) барьера, а также с увеличением массы частицы.

Реально речь может идти об электронах, и если барьер — это слой диэлектрика, то его толщина не должна превышать нескольких межатомных расстояний. Проще

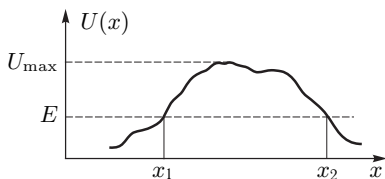


Рис. 22.1

всего использовать естественный слой окиси, который образуется на поверхности многих металлов: алюминия, олова, свинца и др. Испарив на него слой другого или того же самого металла, мы получаем так называемый туннельный контакт (Гизвер, 1960) [250]; это простое устройство является исключительно ценным инструментом для исследования сверхпроводимости.



Рис. 22.2

Начнем изучение свойств туннельного контакта с двух нормальных металлов. В равновесии их химические потенциалы равны (рис. 22.2 а). Если приложить разность потенциалов, то из-за большого сопротивления диэлектрического слоя вся разность потенциалов будет падать именно на этом слое. Тогда химические потенциалы двух металлов будут на разной высоте (разность уровней eV , рис. 22.2 б). Считая высоту барьера много большей eV , находим, что число электронов, которые могут перейти на свободные уровни другого металла, пропорционально eV , и все они проходят барьер с равной вероятностью. Отсюда следует, что ток будет пропорционален V , и это соответствует закону Ома (рис. 22.3, кривая 1).

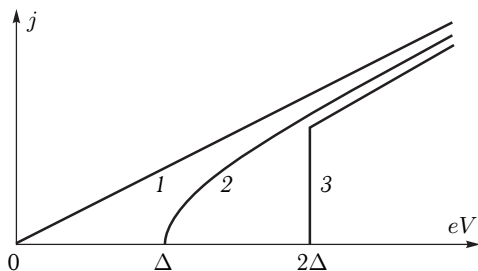


Рис. 22.3

Теперь пусть один из металлов будет нормальным, а другой сверхпроводником. Будем считать $T = 0$. В равновесии в отсутствие разности потенциалов должны быть равными химические потенциалы. Но электроны в сверхпроводнике объединены в куперовские пары, и последние находятся в бозе-конденсате. Этот энергетический уровень и есть химический потенциал пары. Со стороны нормального металла этой паре соответствуют две свободные квазичастицы газовой модели

на уровне Ферми. Представим себе, что электрон перешел из нормального металла в сверхпроводник. Но ведь он не входит в состав пары. Если энергия связи равна 2Δ , то энергия одного неспаренного электрона на Δ превышает энергию того, что входит в состав куперовской пары. Следовательно, для того чтобы перевести электрон из нормального металла в сверхпроводник, надо сообщить ему добавочную энергию.

То же самое необходимо сделать для того, чтобы перевести электрон из сверхпроводника в нормальный металл. Сначала надо разорвать пару, что требует энергии Δ на один электрон, после чего электрон может перейти в нормальный металл.

Естественно поставить вопрос: почему же пары не могут перемещаться как целое? В рамках изложенных только что представлений это связано с тем, что пара имеет удвоенный заряд (это увеличивает U в формуле (22.1)) и удвоенную массу по сравнению с отдельным электроном, а потому вероятность прохождения барьера для нее исчезающе мала.

Изложенная ситуация может быть изображена условной схемой электронных уровней (рис. 22.4): слева сверхпроводник, справа нормальный металл. Заштрихованные зоны соответствуют заполненным

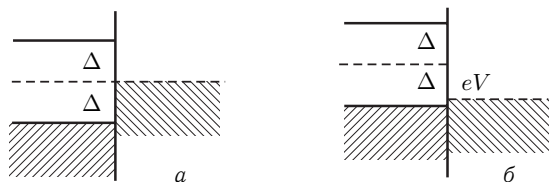


Рис. 22.4

уровням. На левой стороне полоса $\pm\Delta$ с двух сторон от штриховой линии — запрещенная зона. Выше нее находятся разрешенные состояния. Схема рис. 22.4 отражает тот факт, что для перевода одного электрона через барьер в любую сторону так, чтобы он из заполненного состояния перешел на свободное, ему надо сообщить энергию Δ . Имея такую схему, можно не думать о ее происхождении (т. е. о парах) и иметь дело только с квазичастицами.

При приложении разности потенциалов одна сторона рисунка начинает смещаться относительно другой и, когда заполненные уровни окажутся против пустых, потечет электрический ток. Следовательно, условием начала тока является

$$eV = \Delta. \quad (22.2)$$

Найдем теперь полную зависимость $j(V)$. Для того чтобы иметь возможность интегрировать по энергии, надо знать плотность

состояний. Для электронов нормального металла она равна

$$\nu_n = p_0 m / \pi^2 \hbar^3 = \text{const.}$$

Для квазичастиц сверхпроводника имеем

$$\begin{aligned} \nu_s &= 8\pi p^2 dp / [(2\pi\hbar)^3] d\varepsilon = p_0^2 d\xi / v\pi^2 \hbar^3 d\varepsilon = \\ &= (p_0 m / \pi^2 \hbar^3) d\xi / d\varepsilon = \nu_n \varepsilon / (\varepsilon^2 - \Delta^2)^{1/2}, \quad \varepsilon > \Delta \end{aligned}$$

(мы уже приводили эту формулу в §21.1). Это истинная плотность состояний. Однако если мы хотим использовать схему уровней рис. 22.4, мы должны считать, что ε может быть отрицательным и

$$\nu_s = \begin{cases} \nu_n |\varepsilon| / (\varepsilon^2 - \Delta^2)^{1/2}, & |\varepsilon| > \Delta, \\ 0, & |\varepsilon| < \Delta. \end{cases} \quad (22.3)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ соответствует возникновению квазичастиц в сверхпроводнике при переходе электронов из нормального металла, а $\varepsilon < 0$ — разрыву пар и переходу электронов в обратном направлении¹⁾. Существен тот факт, что $\nu_s(|\varepsilon| \rightarrow \Delta) \rightarrow \infty$, хотя эта бесконечность интегрируемая, т. е. полное число состояний в малом интервале энергий вблизи $|\varepsilon| = \Delta$ мало.

Ток, текущий из одного металла в другой, должен быть пропорционален вероятности туннелирования, числу занятых мест в первом металле и пустых во втором и плотностям состояний в обоих металлах.

Пусть разность потенциалов приложена так, как на рис. 22.4.

Найдем полный ток, текущий из сверхпроводника в нормальный металл. Он представляет собой разность токов, текущих в прямом и обратном направлениях. В соответствии со сказанным выше имеем

$$\begin{aligned} j &\propto \int W \nu_1(\varepsilon - eV) \nu_2(\varepsilon) \{n_1(\varepsilon - eV) [1 - n_2(\varepsilon)] - \\ &\quad - n_2(\varepsilon) [1 - n_1(\varepsilon - eV)]\} d\varepsilon = \\ &= \int W \nu_1(\varepsilon - eV) \nu_2(\varepsilon) [n_1(\varepsilon - eV) - n_2(\varepsilon)] d\varepsilon = \\ &= W \nu_{1n} \nu_{2n} \int |\varepsilon - eV| [(\varepsilon - eV)^2 - \Delta^2]^{-1/2} [n_1(\varepsilon - eV) - n_2(\varepsilon)] d\varepsilon. \end{aligned} \quad (22.4)$$

¹⁾ Введение отрицательных ε аналогично переходу в нормальном металле от $|\xi|$ к ξ , т. е. от квазичастиц типа частиц и античастиц к модели газа.

Поскольку $T = 0$, то $n(\varepsilon) = 0$ при $\varepsilon > 0$ и $n(\varepsilon) = 1$ при $\varepsilon < 0$. Следовательно, разность $n_1 - n_2$ дает единицу в интервале $0 < \varepsilon < eV$ и нуль вне этого интервала. Плотность состояний под интегралом отлична от нуля при $|\varepsilon - eV| > \Delta$, т. е. в данном случае $\varepsilon < eV - \Delta$. Отсюда вытекает, что ток отсутствует при $eV < \Delta$. При $eV > \Delta$ имеем

$$j \propto W \nu_{1n} \nu_{2n} \int_0^{eV-\Delta} (eV - \varepsilon) [(eV - \varepsilon)^2 - \Delta^2]^{-1/2} d\varepsilon = \\ = W \nu_{1n} \nu_{2n} [(eV)^2 - \Delta^2]^{1/2}. \quad (22.5)$$

При $eV \gg \Delta$ должна исчезать разница между нормальным металлом и сверхпроводником, т. е. ток должен быть таким же, как в туннельном контакте двух нормальных металлов. Отсюда имеем

$$j/j_n = [(eV)^2 - \Delta^2]^{1/2} / eV. \quad (22.6)$$

Результат изображен на рис. 22.3 (кривая 2).

Теперь рассмотрим туннельный контакт двух сверхпроводников, которые мы здесь для простоты предположим одинаковыми. Аналогично предыдущему, находим

$$j \propto W \nu_n^2 \int_{\Delta}^{eV-\Delta} (eV - \varepsilon) [(eV - \varepsilon)^2 - \Delta^2]^{-1/2} \varepsilon (\varepsilon^2 - \Delta^2)^{-1/2} d\varepsilon. \quad (22.7)$$

Ток отличен от нуля при $eV > 2\Delta$. Вычисление интеграла приводит к следующему результату:

$$j/j_n = E \left\{ [(eV)^2 - (2\Delta)^2]^{1/2} / eV \right\} - \\ - 2(\Delta/eV)^2 K \left\{ [(eV)^2 - (2\Delta)^2]^{1/2} / eV \right\}, \quad (22.8)$$

где K и E — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi, \\ E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi. \quad (22.9)$$

Как и должно быть, при $eV \rightarrow \infty$ $j/j_n \rightarrow 1$. Однако, в отличие от контакта сверхпроводника с нормальным металлом, порог

возникновения тока находится при $eV = 2\Delta$, и у порога ток остается конечным, т.е. при постепенном увеличении eV в точке $eV = 2\Delta$ происходит скачок тока от нуля до конечной величины. Согласно (22.8) при $eV = 2\Delta$

$$j/j_n = \pi/4. \quad (22.10)$$

Результат изображен на рис. 22.3 (кривая 3).

В принципе, можно легко найти выражения для туннельного тока при $T \neq 0$. Для этого надо подставить в общую формулу (22.4) соответствующие плотности состояний (с $\Delta(T)$) и функции распределения при конечных температурах. Не будем продлевать этот расчет, приводящий к ненаглядным формулам со сложными интегралами, а вместо этого дадим описание физической картины.

В случае s - n -контакта при конечной температуре в сверхпроводнике имеется некоторое число разорванных куперовских пар. Поэтому отдельные электроны могут проходить через барьер в нормальный металл без добавочной энергии Δ . С другой стороны, электроны нормального металла могут проходить в сверхпроводник, и там для них имеются партнеры, с которыми они могут образовать пары. Отсюда видно, что электрический ток возникает при сколь угодно малой разности потенциалов и увеличивается с увеличением V . Если температура не близка к T_c , то ток особенно заметно увеличивается при $eV = \Delta(T)$, так как здесь вступает в действие механизм разрыва пар. Ввиду этого можно находить из эксперимента непосредственно $\Delta(T)$ по максимуму производной dj/dV . Еще лучше использовать для этой цели контакт двух одинаковых сверхпроводников, у которого увеличение тока в окрестности $V = 2\Delta(T)/e$ происходит более резко.

Рассмотрим теперь характеристику туннельного контакта из двух разных сверхпроводников. Легко понять, что при $T = 0$ она будет иметь вид, подобный кривой 3 на рис. 22.3 со скачком тока при $V = (\Delta_1 + \Delta_2)/e$. Более интересна характеристика при конечной температуре. Будем считать $T_{c2} \gg T_{c1}$ и $T \lesssim T_{c1}$. Вместо схемы уровней того типа, который изображен на рис. 22.4, будем по горизонтальной оси изображать плотность состояний, причем для левого металла она будет откладываться налево, а для правого — направо (рис. 22.5). Тепловое возбуждение изобразим условно в виде некоторого числа носителей в левой верхней зоне и некоторого числа пустых мест в левой нижней зоне (в правом сверхпроводнике возбуждение мало ввиду $T \ll T_{c2}$).

При увеличении разности потенциалов левая часть рисунка сдвигается вверх относительно правой. Ток увеличивается за счет увеличения числа термически возбужденных электронов, которые находятся против пустых мест в правой верхней зоне. Это будет продолжаться до тех пор, пока край левой верхней зоны не совпадет с краем правой, т.е. до значения $V = (\Delta_2 - \Delta_1)/e$. После этого число электронов, способных переходить слева направо, будет оставаться постоянным,

а противостоящее число свободных мест, пропорциональное плотности состояний, будет уменьшаться. Следовательно, характеристика $j(V)$ загнется вниз. Так будет продолжаться до тех пор, пока верхний край

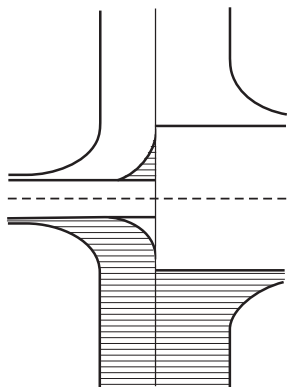


Рис. 22.5

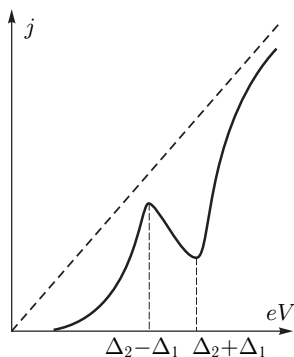


Рис. 22.6

левой нижней зоны не станет против нижнего края правой верхней, т.е. до $V = (\Delta_2 + \Delta_1)/e$, после чего опять начнется рост $j(V)$. Итак, в рассмотренном случае характеристика будет немонотонной (рис. 22.6) [251].

Туннельные контакты сыграли большую роль для непосредственного определения Δ , плотности состояний и их зависимости от температуры. В частности, с помощью туннельных измерений была доказана возможность бесщелевой сверхпроводимости и количественно подтверждена теория [238]. Помимо этого, оказалось, что в более точной теории, учитывающей вид фононного спектра и энергетическую зависимость электрон-фононного взаимодействия, туннельная характеристика дает возможность определить параметр $\alpha^2(\omega)\rho(\omega)$, где α — константа электрон-фононного взаимодействия, а $\rho(\omega)$ — плотность состояний фононов. Поскольку $\rho(\omega)$ может определяться независимым образом, то можно найти $\alpha(\omega)$.

В заключение отметим, что, кроме рассмотренного нами туннельного тока, связанного с переходом квазичастиц из одного металла в другой, возникающего в присутствии конечной разности потенциалов (одночастичный ток), существует и сверхпроводящий ток через контакт. Ему будут посвящены следующие параграфы. На опыте сверхпроводящий ток отсутствует, если слой диэлектрика является достаточно толстым (хотя все равно речь может идти лишь о нескольких межатомных расстояниях). В случае очень тонкой диэлектрической прослойки возникают оба тока, которые весьма любопытно проявляются в разных обстоятельствах. Об этом будет написано ниже.

§ 22.2. Эффект Джозефсона

До сих пор мы рассматривали металлы с обеих сторон контакта изолированно, считая, что когерентные электронные состояния формируются с обеих сторон независимо. В действительности само прохождение электронов через барьер является результатом распространения волновой функции электрона через контакт, а поэтому последовательная теория должна рассматривать формирование когерентного состояния во всей электронной системе в целом. Можно сказать, что в контакте двух сверхпроводников возможно образование куперовских пар из электронов, принадлежащих разным металлам.

Это обстоятельство приводит к возможности туннелирования с вероятностью, сравнимой с вероятностью туннелирования одного электрона, и образованию единого конденсата. Следовательно, через контакт может течь конечный сверхпроводящий ток при $V = 0$. Это явление было предсказано Джозефсоном в 1962 г. [252] и впоследствии названо его именем.

Значение сверхпроводящего джозефсоновского тока может быть найдено из следующих соображений [252]. Найдем избыточную энергию, связанную с существованием туннельного контакта и наличием сверхпроводимости. Очевидно, мы получим выражение, пропорциональное Δ_1 и Δ_2 и симметричное относительно этих величин. Простейшая форма есть

$$E = C \int (\Delta_1 \Delta_2^* + \Delta_1^* \Delta_2) dy dz = 2C \int |\Delta_1 \Delta_2| \cos(\chi_2 - \chi_1) dy dz$$

(C — константа, (y, z) — плоскость контакта). Мы считали $\Delta_{1,2}$ комплексными, поскольку фазы этих функций могут быть различными.

Зависимость энергии от разности фаз может быть понята следующим образом. Пусть приложено магнитное поле, параллельное плоскости контакта, которое описывается векторным потенциалом $\mathbf{A}$. Из условия градиентной инвариантности вытекает, что фаза входит с векторным потенциалом в комбинации

$$\nabla\chi - (2e/\hbar c) \mathbf{A}.$$

Выберем векторный потенциал нормально к плоскости контакта (ось x) и проинтегрируем написанную выше комбинацию по x от точки 1 в глубине левого сверхпроводника до точки 2 в глубине правого. В результате получаем

$$\chi_2 - \chi_1 - \frac{2e}{\hbar c} \int_1^2 A_x dx.$$

Итак, при наличии в контакте магнитного поля энергия равна

$$E = 2C \int |\Delta_1 \Delta_2| \cos \left[\chi_2 - \chi_1 - \frac{2e}{c\hbar} \int_1^2 A_x dx \right] dy dz. \quad (22.11)$$

Проварьируем по A_x . При этом получаем

$$\delta E = \frac{4e}{c\hbar} C \int |\Delta_1 \Delta_2| \sin \left[\chi_2 - \chi_1 - \frac{2e}{c\hbar} \int_1^2 A_x dx \right] \delta A_x dV.$$

Однако, согласно общей формуле электродинамики, изменение энергии при вариации векторного потенциала равно

$$\delta E = -c^{-1} \int \mathbf{j} \delta \mathbf{A} dV,$$

где $\mathbf{j}$ — плотность тока. Сравнивая две последних формулы, получаем (мы изменили знак аргумента):

$$j = \frac{4e}{\hbar} C |\Delta_1 \Delta_2| \sin \left[\chi_1 - \chi_2 + \frac{2e}{c\hbar} \int_1^2 A_x dx \right].$$

Максимальное значение синуса есть единица. Поэтому можно написать для тока выражение

$$j = j_c \sin \left[\chi_1 - \chi_2 + \frac{2e}{c\hbar} \int_1^2 A_x dx \right], \quad (22.12)$$

где j_c — критический ток через контакт. В частности, в отсутствие поля

$$j = j_c \sin(\chi_1 - \chi_2). \quad (22.13)$$

Итак, разность фаз функций Δ_1 и Δ_2 соответствует наличию сверхпроводящего тока.

Согласно приведенному выводу ток j_c должен быть пропорциональным Δ_1 и Δ_2 . Далее, он должен быть пропорциональным вероятности туннелирования электрона через контакт. Но той же величине пропорциональна проводимость контакта в нормальном состоянии, или R^{-1} , где R — сопротивление контакта. В противоположность обычной проводимости здесь разумно написать не $j = \sigma E$, а $j = R^{-1} V$, где V — разность потенциалов. Величина R соответствует полному сопротивлению 1 см^2 площади контакта и имеет размерность с·см (или Ом·см²).

Полная формула для двух разных сверхпроводников при $T = 0$ имеет вид (Амбегаоакер, Баратов, 1963) [253]

$$j_c = 2(eR)^{-1} \Delta_1 \Delta_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^{-1} K[|\Delta_1 - \Delta_2|/(\Delta_1 + \Delta_2)], \quad (22.14)$$

где K — полный эллиптический интеграл 1-го рода (см. формулу (22.9)). Для двух одинаковых сверхпроводников, подставляя $K(0) = \pi/2$, получаем

$$j_c = \pi \Delta / 2eR. \quad (22.15)$$

При конечной температуре, вместо (22.15), имеем [253]

$$j_c = [\pi \Delta(T) / 2eR] \operatorname{th}[\Delta(T) / 2T]. \quad (22.16)$$

В частности, вблизи T_c

$$j_c \approx \pi \Delta^2(T) / 4eR T_c. \quad (22.17)$$

Микроскопический вывод формул (22.14)–(22.16) будет дан в § 22.3.

На опыте для наблюдения эффекта Джозефсона нужны контакты с сопротивлением меньше $0,1$ Ом·мм². Реально удается получить еще меньшие сопротивления: 10^{-4} Ом·мм² и даже ниже. Соответствующая критическая плотность тока может достигать 10^2 – 10^3 А/см². Если сравнить это число с плотностью тока, соответствующей разрушению пар в массивном сверхпроводнике (17.63) и имеющей порядок 10^8 А/см², то максимальный джозефсоновский ток оказывается значительно меньше. Поэтому эффект Джозефсона и связанные с ним явления иногда называют слабой сверхпроводимостью.

Итак, кроме одночастичного тока, найденного в § 22.1, через туннельный контакт может течь сверхпроводящий ток, не превышающий j_c . Реально наблюдение эффекта Джозефсона происходит следующим образом. Меняется ток через контакт и меряется разность потенциалов. При малых значениях тока V остается равным нулю. Когда ток превосходит j_c , происходит срыв на одночастичную характеристику, и при дальнейшем увеличении тока кривая $V(j)$ идет вдоль последней. Однако при уменьшении тока нередко имеет место гистерезис, а именно одночастичная характеристика при уменьшении V продолжается вплоть до точки $j = 0$, $V = 2\Delta/e$, а затем скачком V обращается в нуль (см. осциллограмму на рис. 22.7 для двух направлений тока).

Уже на этом простом примере видно, что теоретическая зависимость тока от разности потенциалов и экспериментальное определение $V(j)$ дают в действительности разные результаты, объясняющиеся срывом измеряемых характеристик с одного режима на другой и появлением «ступенек», т. е. скачкообразным изменением V при заданном токе. Поскольку нашей целью является изложение принципиальной стороны основных физических явлений, то мы, как правило, будем рассматривать зависимости $j(V)$, оговаривая качественно, что наблюдается при реальном измерении $V(j)$.

Остановимся теперь на следующем вопросе. На первый взгляд кажется, что поскольку джозефсоновский ток пропорционален одной и той же величине, а именно R^{-1} , то они должны наблюдаться в одних и тех же условиях. Однако на опыте, как уже отмечалось, эффект Джозефсона при увеличении R исчезает гораздо раньше, чем одночастичный ток. Причиной этого является флуктуационная разность потенциалов в контакте. Именно она уничтожает сверхпроводящий джозефсоновский ток, но мало влияет на одночастичный. Связано это с тем, что одночастичный ток возникает при конечной разности потенциалов и поэтому малые флуктуации для него несущественны, в то время как джозефсоновский ток осуществляется при $V = 0$. Согласно так называемой теореме Найквиста, флуктуации V растут пропорционально R (см. [254]), чем и объясняется разница в поведении джозефсоновского и одночастичного токов. Ограничимся этим качественным объяснением и не будем приводить здесь теорию флуктуаций в джозефсоновских контактах (см. [255]).



Рис. 22.7

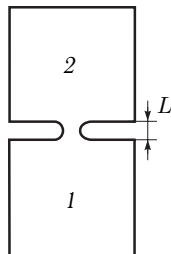


Рис. 22.8

В заключение приведем простой количественный вывод джозефсоновского тока, основанный на теории Гинзбурга–Ландау [256]. Эффект Джозефсона может наблюдаться не только в туннельном контакте, но и в любом сверхпроводнике со «слабым звеном». Одним из примеров может служить пленка с сужением (рис. 22.8), называемая мостиком. При прохождении тока его плотность в перемычке может превзойти критическое значение (§ 17.4). В результате перемычка начнет играть ту же роль по отношению к широким частям пленки, что и изолирующая прослойка в туннельном контакте двух сверхпроводников. В частности, через мостик может течь джозефсоновский ток.

Ввиду слабости джозефсоновского тока можно не учитывать создаваемого им магнитного поля. Напишем первое уравнение ГЛ (17.6') в отсутствие поля:

$$-\kappa^{-2} \Delta \Psi - \Psi + |\Psi|^2 \Psi = 0. \quad (22.18)$$

Предположим, что длина мостика L значительно меньше ξ (или в приведенных единицах $L/\delta \ll \kappa^{-1}$). В таком случае первый член в уравнении (22.18), имеющий порядок $(\delta/\kappa L)^{-2}$, значительно больше остальных, и мы можем сохранить в (22.18) лишь этот член. При этом получим

$$\Delta \Psi = 0. \quad (22.19)$$

Далеко от мостика $\Psi \rightarrow \text{const}$. Будем считать, что в нижней части константа равна $\exp(i\chi_1)$, а в верхней части $\exp(i\chi_2)$ (так как в глубине плотность тока мала, и $|\Psi| = 1$). Решение уравнения (22.19) будем искать в виде

$$\Psi = f(\mathbf{r}) \exp(i\chi_1) + [1 - f(\mathbf{r})] \exp(i\chi_2). \quad (22.20)$$

Очевидно, функция $f(\mathbf{r})$ стремится к единице в глубине пленки 1 и к нулю в глубине пленки 2. Подставляя в (22.19), получаем

$$\Delta f = 0.$$

Решение этого уравнения зависит от конкретных предположений о форме мостика.

Поскольку нас интересует лишь принципиальная сторона вопроса, мы не будем рассматривать конкретных моделей, а подставим Ψ в форму (22.20) в выражение для тока (17.9) (с $\mathbf{A} = 0$) и перейдем к обычным единицам (при этом (22.20) умножается на Ψ_0). В результате имеем

$$j = (e\hbar/m) \Psi_0^2 \nabla f \sin(\chi_1 - \chi_2). \quad (22.21)$$

Это выражение соответствует по форме (22.13) ($\nabla f \sim L^{-1}$), причем $j_c \propto \Psi_0^2(T) \propto \Delta^2(T)$, как и в формуле (22.17) для туннельного контакта в окрестности T_c .

§ 22.3. Микроскопический вывод джозефсоновского тока

Мы применим метод так называемого туннельного гамильтониана. Будем считать, что рождение и уничтожение электронов в левом сверхпроводнике описывается операторами $a_{\mathbf{p},\sigma}^+$, $a_{\mathbf{p},\sigma}$, а в правом, соответственно, $b_{\mathbf{p},\sigma}^+$, $b_{\mathbf{p},\sigma}$, и введем в гамильтониан дополнительный член

$$\mathcal{H}_\tau = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q},\sigma} T_{\mathbf{p}\mathbf{q}} a_{\mathbf{p},\sigma}^+ b_{\mathbf{q},\sigma} + T_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^* b_{\mathbf{q},\sigma}^+ a_{\mathbf{p},\sigma}, \quad (22.22)$$

описывающий переход электронов из одного металла в другой. Такой гамильтониан в действительности не вполне отвечает поставленной задаче, ибо на самом деле вместо реального потенциального барьера (22.22) означает переход свободных электронов из одного фазового

пространства в другое. Однако при правильной нормировке матрицы перехода $T_{\mathbf{pq}}$ он эквивалентен физической задаче, и поэтому дает возможность выразить сверхпроводящий ток через сопротивление контакта в нормальном состоянии. Именно с этой задачи мы начнем.

Полный ток $\langle I \rangle$ слева направо очевидно равен скорости уменьшения числа электронов в левом металле, умноженной на заряд электрона. Согласно квантовой механике (см. [118]) оператор тока равен

$$I = -e N_{\text{л}} = -(ie/\hbar) [\mathcal{H} N_{\text{л}}] = -(ie/\hbar) [\mathcal{H}_{\text{т}} N_{\text{л}}], \quad (22.23)$$

где мы от полного гамильтониана оставили лишь часть $\mathcal{H}_{\text{т}}$, ибо только эта часть гамильтониана приводит к несохранению по отдельности чисел электронов в левом и правом металлах, т. е. не коммутирует с $N_{\text{л}}$ и $N_{\text{п}}$. Подставляя в (22.23) выражение (22.22) для $\mathcal{H}_{\text{т}}$ и

$$N_{\text{л}} = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ a_{\mathbf{p}, \sigma} \quad (22.24)$$

(§ 16.4), получаем

$$I = (ie/\hbar) \left(\sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \sigma} T_{\mathbf{pq}} a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ b_{\mathbf{q}, \sigma} - \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \sigma} T_{\mathbf{pq}}^* b_{\mathbf{q}, \sigma}^+ a_{\mathbf{p}, \sigma} \right). \quad (22.25)$$

Написанное выражение представляет собой оператор, который надо усреднить по состоянию системы. Для нормального металла с точностью до членов порядка $(T/\mu)^2$ можно усреднять по состоянию при $T = 0$. Итак,

$$\langle I \rangle = \langle \psi_0^* I \psi_0 \rangle. \quad (22.26)$$

Ввиду малости вероятности туннелирования электронов мы могли бы в первом приближении взять ψ_0 для основной части гамильтониана без $\mathcal{H}_{\text{т}}$. Однако такое среднее равно нулю. Ввиду этого мы найдем первое приближение функции ψ_0 .

Согласно теории возмущений (см. [118])

$$\psi_0 \approx \psi_0^{(0)} + \psi_0^{(1)} = \psi_0^{(0)} + \sum_m \frac{(\mathcal{H}_{\text{т}})_{m0}}{E_0^{(0)} - E_m^{(0)} + i\delta} \psi_m^{(0)}, \quad (22.27)$$

где сумма идет по возбужденным состояниям системы, а верхний индекс $^{(0)}$ означает, что речь идет о собственных состояниях и функциях гамильтониана без $\mathcal{H}_{\text{т}}$. Добавка $i\delta$ в знаменателе учитывает то обстоятельство, что в действительности спектр является непрерывным (см. [118]). Подставляя в (22.26), имеем

$$\langle I \rangle = \langle \psi_0^{(1)*} I \psi_0^{(0)} \rangle + \langle \psi_0^{(0)*} I \psi_0^{(1)} \rangle. \quad (22.28)$$

Применяя формулы (22.25), (22.27) и (22.22), мы легко убеждаемся, что отличными от нуля являются только члены, в которые входят произведения $T_{\mathbf{pq}} T_{\mathbf{pq}}^* = |T_{\mathbf{pq}}|^2$. В полученное выражение входят разности

$$(E_0^{(0)} - E_m^{(0)} + i\delta)^{-1} - (E_0^{(0)} - E_m^{(0)} - i\delta)^{-1} = -2\pi i\delta (E_0^{(0)} - E_m^{(0)}),$$

ибо главные значения таких знаменателей сокращаются и остается лишь вычет в полюсе. Окончательно имеем

$$\langle I \rangle = (2\pi e/\hbar) \sum_{m, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \sigma} |T_{\mathbf{p}\mathbf{q}}|^2 \delta(E_0^{(0)} - E_m^{(0)}) [(a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ b_{\mathbf{q}, \sigma})_{0m} (b_{\mathbf{q}, \sigma}^+ a_{\mathbf{p}, \sigma})_{m0} - (b_{\mathbf{q}, \sigma}^+ a_{\mathbf{p}, \sigma})_{0m} (a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ b_{\mathbf{q}, \sigma})_{m0}] . \quad (22.29)$$

Выражение в скобке дает

$$n_{\mathbf{p}, \sigma}(1 - n_{\mathbf{q}, \sigma}) - n_{\mathbf{q}, \sigma}(1 - n_{\mathbf{p}, \sigma}) = n_{\mathbf{p}, \sigma} - n_{\mathbf{q}, \sigma} = n_F(\xi_p - eV) - n_F(\xi_q),$$

где n_F — функции Ферми, а их аргументы отвечают тому, что к контакту приложена разность потенциалов. Переходя от суммирования по импульсам к интегрированию и учитывая, что в токе участвуют лишь электроны в окрестности ферми-границы, получаем

$$\sum_{\mathbf{p}} \rightarrow V_1 \frac{\nu_1}{2} \int d\xi_p,$$

где V_1 — объем, ν_1 — плотность состояний левого металла. Теперь

$$\langle I \rangle = (4\pi e/\hbar) V_1 V_2 (\nu_1/2) \overline{|T_{\mathbf{p}\mathbf{q}}|^2} \times \\ \times \int d\xi_p \int d\xi_q [\delta(\xi_p - \xi_q) [n_F(\xi_p - eV) - n_F(\xi_q)] d\xi_q,$$

где $\overline{|T_{\mathbf{p}\mathbf{q}}|^2}$ означает среднее по обеим ферми-поверхностям. Взяв интеграл и поделив на площадь контакта, получаем плотность тока:

$$j = (\pi e/\hbar) eV \nu_1 \nu_2 \overline{|T_{\mathbf{p}\mathbf{q}}|^2} V_1 V_2 / S.$$

Записывая это выражение в виде $j = V/R$, находим

$$R^{-1} = (\pi e^2/\hbar) \nu_1 \nu_2 \overline{|T_{\mathbf{p}\mathbf{q}}|^2} V_1 V_2 / S. \quad (22.30)$$

Нетрудно увидеть, что, поскольку $T_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ имеет размерность энергии, R имеет правильную размерность с·см. В то же время ясно, что правильная нормировка $T_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ должна включать множитель $(V_1 V_2 / S)^{-1/2}$.

Теперь найдем джозефсоновский ток для двух сверхпроводников, выразив его сначала через $|T_{\mathbf{p}\mathbf{q}}|^2$, а затем с помощью формулы (22.30) через R . Для этого вернемся к формулам (22.28), (22.27), (22.25). Получающиеся при этом выражения содержат члены двух типов: те, в которых содержатся произведения a^+a и b^+b , и те, в которые входят комбинации a^+a^+bb или aab^+b^+ . Члены первого типа были использованы нами при выводе тока через нормальный контакт, и они обращаются

в нуль при $V = 0$. В сверхпроводнике эти члены дают одночастичный ток, выведенный нами более коротким способом в § 22.1, и тоже равны нулю в отсутствие разности потенциалов.

Остающиеся члены имеют вид

$$\begin{aligned}
 i(e/\hbar) \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \sigma, m} & \left\{ T_{\mathbf{p}\mathbf{q}} T_{\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1} (a_{\mathbf{p}, \sigma}^+ b_{\mathbf{q}, \sigma})_{0m} (a_{\mathbf{p}_1, \sigma_1}^+ b_{\mathbf{q}_1, \sigma_1})_{m0} \times \right. \\
 & \times \left[(E_0^{(0)} - E_m^{(0)} + i\delta)^{-1} + (E_0^{(0)} - E_m^{(0)} - i\delta)^{-1} \right] - \\
 & - T_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^* T_{\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1}^* (b_{\mathbf{q}, \sigma} a_{\mathbf{p}, \sigma})_{0m} (b_{\mathbf{q}_1, \sigma_1}^+ a_{\mathbf{p}_1, \sigma_1}^+)_{m0} \times \\
 & \left. \times \left[(E_0^{(0)} - E_m^{(0)} + i\delta)^{-1} + (E_0^{(0)} - E_m^{(0)} - i\delta)^{-1} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Преобразуем операторы $a_{\mathbf{p}, \sigma}$ и $b_{\mathbf{q}, \sigma}$ по формулам Боголюбова (16.14). Однако в данном случае мы не имеем оснований считать коэффициенты u_p и v_p действительными, поскольку в противоположность термодинамическим величинам джозефсоновский ток зависит не только от модулей, но и от фаз этих величин. Ввиду этого запишем преобразование Боголюбова в несколько измененном виде:

$$\begin{aligned}
 a_{\mathbf{p}, +} &= u_p \alpha_{\mathbf{p}, +} + v_p^* \alpha_{-\mathbf{p}, -}^+, \\
 a_{\mathbf{p}, -} &= u_p \alpha_{\mathbf{p}, -} - v_p^* \alpha_{-\mathbf{p}, +}^+,
 \end{aligned} \tag{22.31}$$

где $|u_p|^2 + |v_p|^2 = 1$. При этом, проделав все вычисления § 16.4, получаем

$$\begin{aligned}
 |u_p|^2 &= (1/2) (1 + \xi_p/\varepsilon_p), \quad |v_p|^2 = (1/2) (1 - \xi_p/\varepsilon_p), \\
 \varepsilon_p &= \left(\xi_p^2 + |\Delta|^2 \right)^{1/2}, \quad \Delta = g \sum_{\mathbf{p}} u_p v_p^* (1 - n_{\mathbf{p}, +} - n_{\mathbf{p}, -}).
 \end{aligned} \tag{22.32}$$

Усреднение оператора при $T \neq 0$, строго говоря, должно производиться в два этапа: сначала по заданным квантовым состояниям, а затем по распределению Гиббса. Однако мы можем воспользоваться тем, что всякая система из большого числа частиц с точностью до малых флуктуаций находится в определенном квантовом состоянии, характеризуемом равновесными числами заполнения $n_F(\varepsilon)$.

Нам понадобится также одно свойство матрицы $T_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$. Как уже отмечалось в § 1.1, уравнение Шрёдингера инвариантно по отношению к преобразованию $t \rightarrow -t$, $\psi \rightarrow \psi^*$. При таком преобразовании

импульсы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ меняют знак ($\exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar) \rightarrow \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar)$), а также происходит инверсия туннельного перехода, т. е. $b_{\mathbf{q}} \rightleftharpoons a_{-\mathbf{p}}$. Это означает, что $T_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ обладает следующим свойством

$$T_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = T_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}}^*. \quad (22.33)$$

После довольно простых, но длинных вычислений получаем выражение, пропорциональное $u_p^* v_p u_q v_q^* - u_p v_p^* u_q^* v_q$. Если считать

$$u_p^* v_p = |u_p| |v_p| \exp(i\chi_1), \quad u_q^* v_q = |u_q| |v_q| \exp(i\chi_2),$$

то эта разность равна

$$|u_p v_p u_q v_q| 2i \sin(\chi_1 - \chi_2).$$

Что касается энергетических знаменателей, то в противоположность нормальному металлу члены с $+i\delta$ и $-i\delta$ складываются, т. е. остается удвоенное главное значение интеграла. В целом получаем

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= 8(e/\hbar) \sum_{p,q} |u_p v_p u_q v_q| |T_{\mathbf{p}\mathbf{q}}|^2 \sin(\chi_1 - \chi_2) \times \\ &\times [n_p(1 - n_q)(\varepsilon_p - \varepsilon_q)^{-1} - n_p n_q(\varepsilon_p + \varepsilon_q)^{-1} + \\ &+ (1 - n_p)(1 - n_q)(\varepsilon_p + \varepsilon_q)^{-1} - (1 - n_p)n_q(\varepsilon_p - \varepsilon_q)^{-1}]. \end{aligned}$$

Объединяя члены с одинаковыми знаменателями, пользуясь формулой

$$|u_p v_p| = |\Delta|/2\varepsilon_p, \quad (22.34)$$

переходя от суммирования к интегрированию сначала по ξ_p, ξ_q , а затем по $\varepsilon_p, \varepsilon_q$ (с учетом двух возможных знаков ξ) и, наконец, выражая фермиевские функции через гиперболические тангенсы, получаем

$$\begin{aligned} j &= (2e/\hbar) \overline{|T_{\mathbf{p}\mathbf{q}}|^2} (V_1 V_2 / S) \sin(\chi_1 - \chi_2) \nu_1 \nu_2 \Delta_1 \Delta_2 \times \\ &\times \int_{\Delta_1}^{\infty} d\varepsilon_1 \int_{\Delta_2}^{\infty} [\varepsilon_1 \operatorname{th}(\varepsilon_2/2T) - \varepsilon_2 \operatorname{th}(\varepsilon_1/2T)] \left(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 \right)^{-1} \xi_1^{-1} \xi_2^{-1} d\varepsilon_2, \end{aligned}$$

где $\xi_{1,2} = (\varepsilon_{1,2}^2 - \Delta_{1,2}^2)^{1/2}$.

Рассмотрим сначала интеграл по ε_1 . Его можно записать в виде контурного интеграла в комплексной плоскости с разрезами вдоль действительной оси от Δ до ∞ и от $-\infty$ до $-\Delta$ (рис. 22.9 а). После этого

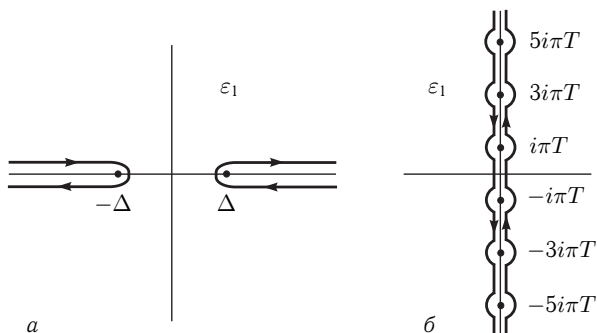


Рис. 22.9

контур интегрирования можно «разогнуть» (рис. 22.9 б) и в результате получится сумма вычетов от $\text{th}(\varepsilon_1/2T)$, которые расположены в точках $i\pi T(2n+1)$:

$$\int_{\Delta}^{\infty} d\varepsilon_1 \dots = \frac{1}{4} \int_C d\varepsilon_1 \dots = \frac{1}{4} \cdot 2T \cdot 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_2 \left[\pi^2 T^2 (2n+1)^2 + \varepsilon_2^2 \right]^{-1} \times \\ \times \left[\pi^2 T^2 (2n+1)^2 + \Delta_1^2 \right]^{-1/2} \left(\varepsilon_2^2 - \Delta_2^2 \right)^{-1/2}.$$

Теперь так же поступим с интегралом по ε_2 . В каждом члене суммы по n имеются два вычета по ε_2 при $\pm i\pi T(2n+1)$. В результате получаем $j = j_c \sin(\chi_1 - \chi_2)$, где

$$j_c = 2(eR)^{-1} \pi T \Delta_1 \Delta_2 \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[\pi^2 T^2 (2n+1)^2 + \Delta_1^2 \right]^{-1/2} \left[\pi^2 T^2 (2n+1)^2 + \Delta_2^2 \right]^{-1/2}.$$

Рассмотрим два отдельных случая. Пусть металлы одинаковы. В этом случае, используя соотношение (21.1):

$$\sum_{n=1}^n \left[(2n-1)^2 + x^2 \right] = (\pi/4x) \text{th}(\pi x/2),$$

имеем

$$j_c = (\pi/2eR) \Delta \text{th}(\Delta/2T),$$

что соответствует формулам (22.13), (22.16).

Пусть теперь металлы разные, но $T \rightarrow 0$. При этом интервалы между значениями $\pi T(2n+1)$ малы по сравнению с Δ , и мы можем перейти от суммы к интегралу. После этого получаем

$$j_c = (eR)^{-1} \Delta_1 \Delta_2 \int_0^\infty \left(\omega^2 + \Delta_1^2 \right)^{-1/2} \left(\omega^2 + \Delta_2^2 \right)^{-1/2} d\omega =$$

$$= 2(eR)^{-1} \Delta_1 \Delta_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^{-1} K[|\Delta_1 - \Delta_2|/(\Delta_1 + \Delta_2)],$$

т. е. формулу (22.14).

§ 22.4. Эффект Джозефсона в магнитном поле

Предположим, что параллельно плоскости туннельного контакта приложено магнитное поле. Пусть, например, $\mathbf{H}$ направлено вдоль y . В этом случае можно ввести векторный потенциал

$$A_x = H_y(x) z. \quad (22.35)$$

Площадь контакта будем предполагать настолько малой, что эффектом собственного поля тока можно пренебречь. Соответствующее условие будет выведено несколько позже. При наличии поля плотность тока имеет вид (22.12). Учитывая, что H_y не зависит от x в изолирующей прослойке толщиной d' и спадает в сверхпроводнике по закону $\exp(-x/\delta)$, получаем

$$\int_1^2 A_x dx = H_{y0} z d, \quad (22.36)$$

где

$$d = 2\delta(T) + d' \approx 2\delta(T). \quad (22.37)$$

Здесь учтено, что $d' \sim 10^{-7}-10^{-8}$ см, а $\delta(T) \sim 10^{-5}-10^{-6}$ см. Следовательно, плотность тока при наличии постоянного поля имеет вид ($H \equiv H_{y0}$)

$$j = j_c \sin[\chi_1 - \chi_2 + 2eH dz/c\hbar]. \quad (22.38)$$

Итак, плотность тока при наличии поля меняется в направлении, перпендикулярном к полю, и даже меняет знак.

На опыте, естественно, измеряется полный ток, или, что то же самое, средняя плотность тока. Так как в направлении поля ток однороден, то средняя плотность тока равна

$$\bar{j} = L^{-1} \int_0^L j(z) dz =$$

$$= j_c \frac{c\hbar}{2eHLd} \left\{ -\cos \left[\chi_1 - \chi_2 + \frac{2e}{c\hbar} H L d \right] + \cos(\chi_1 - \chi_2) \right\}, \quad (22.38')$$

где L — длина контакта вдоль z . Нетрудно увидеть, что $HLd = \Phi$ — поток поля через контакт. Вводя квант потока $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$, можно записать выражение (22.38') в виде

$$\bar{j} = j_c(\Phi_0/\pi\Phi) \sin(\pi\Phi/\Phi_0) \sin(\theta_0 + \pi\Phi/\Phi_0), \quad (22.39)$$

где $\theta_0 = \chi_1 - \chi_2$.

Из (22.39) следует, что $\bar{j}$ обращается в нуль при $\Phi = n\Phi_0$, т. е. когда поток поля через контакт равен целому числу квантов. Максимальное значение тока в промежутках между этими значениями получается подбором разности фаз и, очевидно, соответствует $\sin[\theta_0 + (\pi\Phi/\Phi_0)] = \pm 1$. В результате оказывается (Ройэлл, 1963) [257]

$$\bar{j}_{\max} = j_c |\sin(\pi\Phi/\Phi_0)/(\pi\Phi/\Phi_0)|. \quad (22.40)$$

График этой функции приведен на рис. 22.10. Ценность зависимости (22.40) заключается в том, что она дает возможность измерить

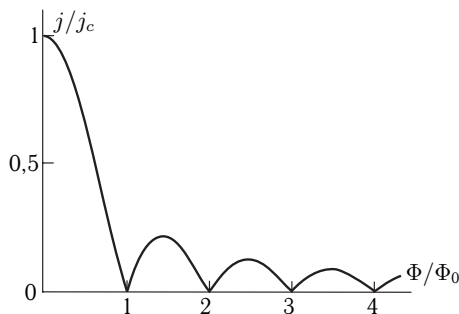


Рис. 22.10

величину d , т. е. $\delta(T)$, по точкам, в которых $j_{\max} = 0$. В принципе можно было бы использовать эту зависимость и для измерения магнитного поля, но на практике для этой цели применяются джозефсоновские интерферометры (§ 22.8).

Теперь перейдем к изучению широкого контакта, в котором нельзя пренебречь полем, создаваемым джозефсоновским током. В этом случае даже в отсутствие внешнего поля распределение тока вдоль контакта становится неоднородным. Обозначим через θ полный аргумент в формуле (22.12). Хотя ввиду неоднородности поля вдоль z мы уже не можем взять векторный потенциал в форме (22.35), но для разности $\theta(z + dz) - \theta(z)$ все-таки можно написать

$$\theta(z + dz) - \theta(z) = (2e/\hbar c) H(z) d \cdot dz = (2\pi/\Phi_0) H(z) d \cdot dz$$

(считаем, что H имеет только компоненту H_y). Отсюда следует

$$H(z) = (\Phi_0/2\pi d) d\theta/dz. \quad (22.41)$$

Согласно уравнению Максвелла

$$j = (c/4\pi) dH/dz. \quad (22.42)$$

В то же время $j = j_c \sin \theta$. Подставляя это в (22.42) и используя (22.41), получаем уравнение для θ (Феррел, Прейндж, 1963) [258]:

$$d^2\theta/dz^2 = \delta_J^{-2} \sin \theta, \quad (22.43)$$

где δ_J равно

$$\delta_J = (c\Phi_0/8\pi^2 j_c d)^{1/2}. \quad (22.44)$$

Рассмотрим случай, когда имеется поле $H_y = H$, но нет полного тока через контакт. Если поле мало, то можно считать малым и θ . Заменяя $\sin \theta$ на θ , получаем уравнение

$$d^2\theta/dz^2 = \delta_J^{-2} \theta, \quad (22.45)$$

решением которого является

$$\theta = \theta_0 \exp(-z/\delta_J).$$

Подставляя это в (22.41), имеем

$$H(z) = H_0 \exp(-z/\delta_J). \quad (22.46)$$

Полученный результат легко интерпретировать. Раз через контакт может течь сверхпроводящий ток, то он может экранировать приложенное поле. Соответствующая глубина проникновения δ_J дается формулой (22.44). Если подставить в нее порядки величин параметров, то для $j_c \sim 10^2$ А/см² получаем $\delta_J \sim 10^{-2}$ см, что гораздо больше, чем обычная глубина проникновения. Контакт может считаться узким, если его ширина $L \ll \delta_J$. В этом случае собственное поле тока может не учитываться, и экранировка внешнего магнитного поля не происходит. Если же $L > \delta_J$, то контакт является широким и экранировка должна учитываться.

Итак, джозефсоновский контакт является как бы двумерным сверхпроводником с соответствующим эффектом Мейснера. В действительности, конечно, линии тока замыкаются в трехмерном пространстве: ток течет в обоих сверхпроводниках перпендикулярно полю в слое толщиной δ (рис. 22.11 а).

До сих пор мы считали поле слабым и делали замену $\sin \theta \approx \theta$. В случае сильного поля этого делать нельзя. Вернемся к уравнению (22.43), умножим обе части на $d\theta/dz$ и проинтегрируем по z . В результате находим

$$(d\theta/dz)^2 = -2\delta_J^{-2} \cos \theta + C \quad (22.47)$$

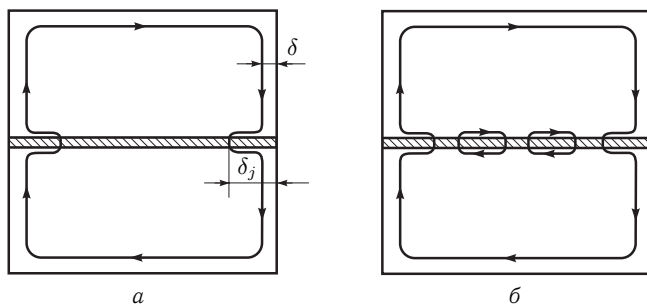


Рис. 22.11

(C — константа). Отсюда следует (нам удобно фиксировать точку, в которой $\theta = \pi$)

$$z - z_0 = \int_{\pi}^{\theta} \left(C - 2\delta_J^{-2} \cos \theta_1 \right)^{-1/2} d\theta_1. \quad (22.48)$$

Найдем решение типа «солитона», при котором ток отличен от нуля лишь в узкой окрестности какой-либо точки и равен нулю вдали от нее. Тогда при $z \rightarrow \pm\infty$ $d\theta/dz \rightarrow 0$. Этого можно достигнуть, предположив, что $\theta \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$ и $\theta \rightarrow 2\pi$ при $z \rightarrow \infty$. При этом в (22.47) $C = 2\delta_J^{-2}$. Интеграл (22.48) для такого случая легко вычисляется; после этого получаем

$$\theta(z) = 4 \operatorname{arctg} \{ \exp[(z - z_0)/\delta_J] \}. \quad (22.49)$$

Графики $\theta(z)$, поля и тока изображены на рис. 22.12. Из них видно, что полученное решение соответствует вихрю с центром в z_0 ¹⁾. Картина линий тока (для двух вихрей) изображена на рис. 22.11 б.

Найдем поток поля в одном вихре. Согласно (22.41)

$$\Phi = d \int_{-\infty}^{\infty} H dz = \frac{\Phi_0}{2\pi d} d[\theta(\infty) - \theta(0)] = \Phi_0.$$

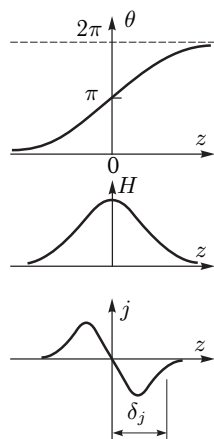


Рис. 22.12

Итак, вихрь несет квант магнитного потока. Мы приходим к выводу, что джозефсоновский контакт во внешнем поле является двумерным аналогом сверхпроводника 2-го рода.

¹⁾ Идея о возникновении таких вихрей принадлежит Джозефсону [259].

Вихри начинают образовываться во внешнем поле $H = H_{c1}$, имеющем порядок среднего поля в вихре, т. е. $H_{c1} \sim \Phi_0/d\delta_J$. Точная формула для напряженности такого поля имеет вид [259]

$$H_{c1} = 2\Phi_0/\pi^2\delta_J d. \quad (22.50)$$

При увеличении поля концентрация вихрей увеличивается, но ввиду того что у джозефсоновского вихря нет «нормальной средцевины», в которой сильно уменьшается параметр порядка, то нет и перехода в нормальное состояние при каком-либо поле H_{c2} .

В предельном случае при больших полях вихри перекрываются и поле в контакте почти однородно ¹⁾. Из (22.41) следует, что в основном $\theta \approx H(2\pi d/\Phi_0)(z - z_0)$, т. е. $d\theta/dz = \text{const}$. Согласно (22.47) и (22.48) второй член в скобке подынтегрального выражения (22.48) значительно меньше первого, и по нему можно произвести разложение. Окончательно находим

$$\theta \approx H(2\pi d/\Phi_0)(z - z_0) - (H_{c1}\pi/4H)^2 \sin[2\pi dH(z - z_0)/\Phi_0], \quad (22.51)$$

где мы воспользовались формулой (22.50). Итак, вдобавок к регулярному росту фазы в плоскости контакта в направлении, перпендикулярном полю, имеются малые осцилляции фазы, быстро уменьшающиеся по амплитуде с увеличением поля.

§ 22.5. Переменный эффект Джозефсона

Представим себе, что ток, пропускаемый через джозефсоновский контакт, сделался больше критического. В этом случае сверхпроводимость нарушается и появляется разность потенциалов. Из условия градиентной инвариантности следует, что в уравнениях всегда потенциал стоит вместе с производной фазы по времени в комбинации (§ 19.6)

$$2e\varphi + \hbar(\partial\chi/\partial t),$$

т. е. к фазе χ добавляется $(2e/\hbar) \int^t \varphi(t_1) dt_1$. Значит, в присутствии разности потенциалов разность фаз удовлетворяет уравнению

$$\partial\theta/\partial t = (2e/\hbar)V, \quad (22.52)$$

где $V = \varphi_1 - \varphi_2$. Если $V = \text{const}$, то разность фаз равна

$$\theta = \theta_0 + (2eV/\hbar)t. \quad (22.53)$$

¹⁾ В этом смысле сильное поле приводит к той же ситуации, которая возникает в узком контакте. Это естественно: в обоих случаях джозефсоновский ток не может экранировать поле.

Это соотношение было впервые выведено *Джозефсоном* в работе [252] для туннельного контакта, но, как потом выяснилось, оно описывает так называемое резистивное состояние сверхпроводников в самых разных случаях (например, § 22.9, формула (22.91)). Итак, если поддерживать на контакте постоянную разность потенциалов, то через него потечет переменный ток

$$j = j_c \sin[\theta_0 + (2eV/\hbar)t]. \quad (22.54)$$

Частота, равная

$$\omega = 2eV/\hbar, \quad (22.55)$$

соответствует 10^{11} с^{-1} для $V \sim 10^{-4} \text{ В}$.

Как уже говорилось в § 22.2, на опыте измеряется разность потенциалов при заданном токе. Ток складывается из нормального (одночастичного) и сверхпроводящего токов. Нормальный ток есть V/R (мы рассматриваем случай, когда V не слишком близко к $2\Delta/e$), или, согласно (22.52), равен $(\hbar/2eR) \partial\theta/\partial t$. Итак, имеем

$$j = j_c \sin \theta + (\hbar/2eR) \partial\theta/\partial t. \quad (22.56)$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \left[1 - (j_c/j)^2 \right]^{1/2} \operatorname{tg} \left[eRt (j^2 - j_c^2)^{1/2} \hbar \right] + j_c/j \right\}. \quad (22.57)$$

Отсюда с помощью $V = (\hbar/2e) \partial\theta/\partial t$ находим (*Асламазов, Ларкин, 1969*) [256]

$$V(t) = Rj(j^2 - j_c^2) / \left[j^2 + j_c^2 \cos \omega t + j_c(j^2 - j_c^2)^{1/2} \sin \omega t \right], \quad (22.58)$$

где

$$\omega = (2eR/\hbar) (j^2 - j_c^2)^{1/2}. \quad (22.59)$$

Эту же формулу можно переписать в виде

$$V(t) = R(j^2 - j_c^2) / [j + j_c \cos(\omega t - \theta_1)], \quad (22.58')$$

где $\theta_1 = \arccos(j_c/j)$. При $j \rightarrow \infty$ $V \rightarrow Rj$, т. е. к значению для нормального металла. Кривая зависимости V/Rj_c от ωt при нескольких значениях j/j_c приведена на рис. 22.13.

Усреднение формулы (22.58) по времени дает

$$\bar{V} = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} V(t) d(\omega t) = R(j^2 - j_c^2) = \frac{\omega \hbar}{2e}. \quad (22.60)$$

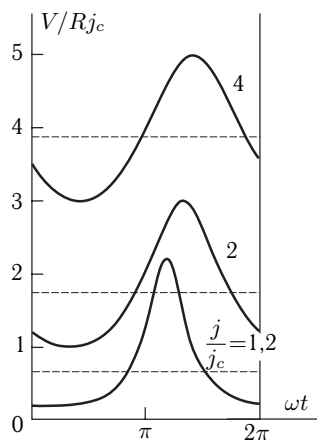


Рис. 22.13

Эта зависимость $\bar{V}(j)$ подтверждается на опыте. Отметим также, что при поддержании постоянного тока среднее напряжение и частота ω связаны обычным джозефсоновским соотношением (22.55). Средние значения $\bar{V}/Rj_c$ обозначены штриховыми линиями на рис. 22.13.

Поскольку туннельный контакт является в то же время плоским конденсатором, то он обладает некоторой емкостью, т. е. имеется заряд на обкладках, равный $Q = CV$, где емкость $C = \varepsilon/4\pi d'$, d' — толщина диэлектрического слоя, ε — его диэлектрическая проницаемость. Изменение этого заряда Q со временем тоже вносит вклад в ток, равный

$$\partial Q/\partial t = C \partial V/\partial t = (C\hbar/2e) \partial^2 \theta / \partial t^2,$$

так что полное уравнение, вместо (22.56), записывается в виде [260, 261]

$$j = j_c \sin \theta + (\hbar/2eR)(\partial \theta / \partial t) + (C\hbar/2e) \partial^2 \theta / \partial t^2. \quad (22.61)$$

Мы не будем здесь разбирать все возможные предельные случаи. Рассмотренный нами предел соответствует малой емкости, или, точнее, случаю, когда третий член (в 22.61) мал по сравнению со вторым, т. е. $\omega C/R \sim CeR^2 j/\hbar \ll 1$.

С переменным эффектом Джозефсона связано еще одно любопытное явление: появление ступенек на вольт-амперной характеристике при приложении внешнего переменного поля (Джозефсон, 1962, Шапиро, 1963) [252, 262] ¹⁾. Опыт ставится так: через джозефсоновский контакт пропускается постоянный ток j и, кроме того, прикладывается переменная разность потенциалов $v \cos \Omega t$. Снимается усредненная по времени вольт-амперная характеристика, т. е. $\bar{V}(t)$ как функция j . Но мы для простоты поставим задачу иначе; будем считать, что к контакту приложена разность потенциалов

$$V(t) = V_0 + v \cos \Omega t, \quad (22.62)$$

и найдем ток. Из (22.52) получим

$$\theta(t) = (2e/\hbar) [V_0 t + (v/\Omega) \sin \Omega t + \theta_0]. \quad (22.63)$$

¹⁾ Обычно их называют ступенями Шапиро, по имени автора их экспериментального открытия.

Джозефсоновский ток равен

$$j = j_c \sin \theta(t) = \\ = j_c \sin [(2e/\hbar) (V_0 t + \theta_0)] \cos[(2ev/\hbar\Omega) \sin \Omega t] + \\ + j_c \cos [(2e/\hbar) (V_0 t + \theta_0)] \sin[(2ev/\hbar\Omega) \sin \Omega t]. \quad (22.64)$$

Стоящие в этом выражении ангармонические множители могут быть разложены в ряды Фурье:

$$\cos(a \sin \Omega t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(in\Omega t), \\ \sin(a \sin \Omega t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \exp(in\Omega t),$$

где

$$A_n = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(a \sin x) \exp(-inx) dx = J_{2k}(a), \quad n = 2k, \\ B_n = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(a \sin x) \exp(-inx) dx = J_{2k+1}(a), \quad n = 2k+1,$$

J_n — функции Бесселя. Подставляя в формулу (22.64) и используя правило $J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x)$, получаем

$$j = j_c \sin [(2e/\hbar) (V_0 t + \theta_0)] [J_0(2ev/\hbar\Omega) + \\ + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(2ev/\hbar\Omega) \cos(2k\Omega t)] + j_c \cos [(2e/\hbar) (V_0 t + \theta_0)] \times \\ \times 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(2ev/\hbar\Omega) \sin[(2k-1)\Omega t]. \quad (22.65)$$

Выделив какой-либо член первой суммы, находим

$$j_c \sin [(2e/\hbar) (V_0 t + \theta_0)] 2J_{2k}(2ev/\hbar\Omega) \cos(2k\Omega t) = \\ = j_c J_{2k}(2ev/\hbar\Omega) \{ \sin [(2eV_0/\hbar + 2k\Omega) t + \theta_0] + \\ + \sin [(2eV_0/\hbar - 2k\Omega) t + \theta_0] \}.$$

Аналогичным образом любой член второй суммы преобразуется к виду

$$j_c J_{2k-1}(2ev/\hbar\Omega) \{ \sin [(2eV_0/\hbar + (2k-1)\Omega) t + \theta_0] - \\ - \sin [(2eV_0/\hbar - (2k-1)\Omega) t + \theta_0] \}.$$

Итак, мы видим, что в случае, если

$$2eV_0/\hbar = n\Omega, \quad (22.66)$$

где n — целое число, в токе появляется не зависящее от времени слагаемое, пропорциональное

$$\bar{j}_n = (-1)^n j_c J_n(2ev/\hbar\Omega) \sin \theta_0. \quad (22.67)$$

Это означает, что на кривой зависимости $\bar{j}_n(V_0)$ к одночастичному току (§ 22.1) добавляются резонансные пики при значениях V_0 , определяемых формулой (22.66).

Как уже говорилось, реально на опыте задается ток, а измеряется разность потенциалов. Для того чтобы получить точный ответ для этого случая, надо решить уравнение для фазы, как это делалось ранее в отсутствие высокочастотного поля. Однако если резонансные добавки не слишком велики, то можно поступить следующим образом. Изобразим кривую $\bar{j}(V_0)$, добавив к одночастичной характеристике вертикальные отрезки, соответствующие максимальным значениям резонансных добавок, т. е.

$$\max \bar{j}_n = j_c |J_n(2ev/\hbar\Omega)|$$

при $V_0 = V_{0n} = n\hbar\Omega/2e$. Увеличение тока приводит к срыву режима с чисто сверхпроводящего ($V_0 = 0$) на значение с конечным V_0 ,

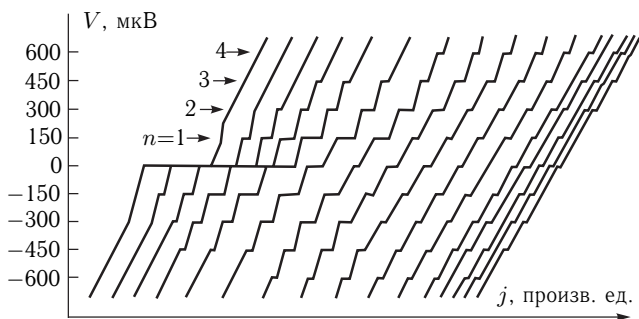


Рис. 22.14

и так происходит каждый раз, когда ток достигает конца очередного вертикального отрезка. В результате получается ступенчатая кривая (рис. 22.14) ¹⁾. Именно она и была первой экспериментальной демонстрацией переменного эффекта Джозефсона [262].

¹⁾ На рис. 22.14 изображены экспериментальные характеристики точечного контакта Nb–Nb [263]. Каждая кривая соответствует обоим направлениям тока. Разные кривые соответствуют разным амплитудам высокочастотного поля и сдвинуты друг относительно друга по оси абсцисс (ноль тока определяется как центр симметрии данной кривой). Реально в задаче с заданным током ступеньки не вполне прямоугольные: в промежутках между двумя $\bar{j}_n$ разность потенциалов $V(j)$ несколько увеличивается.

В заключение приведем физическую интерпретацию соотношений (22.55) и (22.66). Проходя статическую разность потенциалов, куперовская пара получает избыточную энергию и может излучить ее в виде кванта с $\hbar\Omega = 2eV$. Если же контакт находится во внешнем поле, то возникает обмен энергией с внешним полем, при котором возможны процессы излучения и поглощения многих квантов внешнего поля. Этому соответствует формула (22.66).

§ 22.6. Волны в джозефсоновском контакте

Представим себе, что джозефсоновский контакт находится одновременно под действием постоянного магнитного поля и постоянной разности потенциалов. В этом случае разность фаз имеет одновременно как пространственную, так и временную компоненты. В соответствии с формулами (22.38) и (22.54) находим

$$j = j_c \sin [\theta_0 + (2eV/\hbar)t + (2eHd/\hbar c)z]. \quad (22.68)$$

Но это не что иное, как формула бегущей волны. Частота этой волны есть $\omega = 2eV/\hbar$, а волновой вектор $k = 2eHd/\hbar c$. Следовательно, фазовая скорость равна

$$v_0 = \omega/k = cV/Hd. \quad (22.69)$$

Физический смысл этой формулы заключается в том, что при приложении разности потенциалов синусоидальная плотность тока (22.38) начинает перемещаться вдоль контакта с постоянной скоростью (22.69) (Экк, Скалапино, Тейлор, 1964) [264].

Результат (22.68) относится к случаю, когда в контакте поддерживаются постоянными разность потенциалов и магнитное поле. Рассмотрим теперь, какие волны могут самопроизвольно распространяться вдоль контакта. Для этой цели воспользуемся формулой (22.61) и подставим ее в уравнение Максвелла (22.42), выразив магнитное поле H с помощью формулы (22.41). В результате получаем уравнение

$$\partial^2 \theta / \partial z^2 - c_0^{-2} (\partial^2 \theta / \partial t^2 + \gamma \partial \theta / \partial t) = \delta_J^{-2} \sin \theta, \quad (22.70)$$

где

$$c_0 = (ec/4\pi^2 d C \hbar \Phi_0)^{1/2} = c(d'/\varepsilon d)^{1/2}, \quad (22.71)$$

$$\gamma = \tau^{-1} = (RC)^{-1}. \quad (22.72)$$

Глубина проникновения δ_J выражается формулой (22.44), а емкость $C = \varepsilon/4\pi d'$.

Если предположить, что джозефсоновский ток отсутствует, т. е. положить $j_c = 0$, то $\delta_J = \infty$ и правая часть уравнения (22.70) обращается

в нуль. Если к тому же пренебречь затуханием, т.е. положить $\gamma = 0$, то получаем уравнение распространения волн со скоростью c_0 . Из формулы (22.71) следует, что эта скорость много меньше скорости света. Хотя уравнение написано для не совсем обычной величины — разности фаз, мы можем путем дифференцирования по z переписать его в виде уравнения для H , а путем дифференцирования по t — в виде уравнения для E . Итак, мы видим, что в отсутствие джозефсоновского тока вдоль контакта двух сверхпроводников, разделенных слоем диэлектрика, могут распространяться волны со скоростью c_0 . Они называются волнами *Свихарта* (1961) [265].

Теперь рассмотрим уравнение (22.70) полностью, т.е. допустим возможность джозефсоновского тока. Без затухания (т.е. при $\gamma = 0$) это уравнение принято называть уравнением «син-Гордон» (при замене $\sin \theta$ на θ оно соответствует известному уравнению Клейна-Гордона-Фока для элементарных частиц с нулевым спином). Довольно очевидно, что в присутствии разности потенциалов и магнитного поля может возникнуть своеобразный резонанс, т.е. фазовая скорость джозефсоновских волн v_0 совпадает со скоростью c_0 (22.71) [264]. Для того чтобы увидеть, к чему это приводит, предположим, что правая часть в (22.70) мала, и будем искать решение в виде (Кулик, 1965) [266]

$$\theta = \theta^{(0)} + \theta^{(1)},$$

где $\theta^{(1)} \ll \theta^{(0)}$ и

$$\theta^{(0)} = \theta_0 + (2eV/\hbar)t + (2eHd/\hbar)z = \theta_0 + \omega t + kz.$$

В первом порядке из (22.70) получается

$$\partial^2 \theta^{(1)} / \partial z^2 - c_0^{-2} \left(\partial^2 \theta^{(1)} / \partial t^2 + \gamma \partial \theta^{(1)} / \partial t \right) = \delta_J^{-2} \sin(\theta_0 + \omega t + kz). \quad (22.73)$$

Отсюда находим

$$\theta^{(1)} = (c_0^2 / \delta_J^2) \operatorname{Im} \left\{ (\omega^2 - c_0^2 k^2 - i\omega\gamma)^{-1} \exp[i(\theta_0 + \omega t + kz)] \right\}. \quad (22.74)$$

Подставим выражение (22.74) в полную формулу для тока Джозефсона $j = j_c \sin \theta$ и усредним по времени и координате ¹⁾:

$$\begin{aligned} \bar{j} &= \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ L \rightarrow \infty}} T^{-1} \int_0^T dt L^{-1} \int_0^L j_c \sin \theta(z, t) dz \approx \\ &\approx \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ L \rightarrow \infty}} T^{-1} \int_0^T dt L^{-1} \int_0^L j_c \cos \theta^{(0)}(z, t) \theta^{(1)}(z, t) dz = \end{aligned}$$

¹⁾ Остальные компоненты тока — одночастичный и емкостный ток, пропорциональны временным производным θ и при усреднении дают нуль.

$$= j_c (\omega c_0^2 \gamma / 2\delta_J^2) \left[(\omega^2 - c_0^2 k^2)^2 + \omega^2 \gamma^2 \right]^{-1}. \quad (22.75)$$

Итак, получается резкий максимум среднего тока при $\omega = c_0 k$, или $v_0 = c_0$, т. е., согласно (22.69),

$$V_0 = (c_0/c) H d \quad (22.76)$$

(рис. 22.15). В этом случае имеется резонанс по фазовым скоростям джозефсоновских волн и волн Свихарта. Условием применимости полученного результата является малость $\bar{j}$ по сравнению с j_c . Взяв $\bar{j}$ в максимуме, находим

$$c_0^2/\delta_J^2 \ll \omega \gamma, \quad (22.77)$$

т. е. коэффициент затухания γ не должен быть слишком малым.

Как уже неоднократно отмечалось раньше, в действительности задается постоянный ток через контакт, а регистрируется постоянная часть возникающей разности потенциалов. Так же как и при наложении переменного поля, в рассматриваемом случае ток увеличивается до предельного значения при заданном напряжении, а затем происходит срыв на другой режим с другим напряжением, т. е. появляются ступеньки характеристики (см. рис. 22.15).

Для того чтобы описанный резонансный эффект ($v_0 = c_0$) мог наблюдаться, необходимо, чтобы основной джозефсоновский максимум при $V = 0$ не превосходил резонансный максимум при условии (22.76). В противном случае произойдет срыв характеристики с $V = 0$ сразу на одночастичную ветвь. Ввиду этого надо подобрать значение магнитного поля близкое к тому, которое обращает в нуль основной джозефсоновский ток (см. (22.40)).

До сих пор мы считали контакт бесконечным. В конечном контакте шириной L могут образовываться стоячие электромагнитные волны, если на расстоянии L укладывается целое число полувольт, т. е. $L = n\lambda/2$, или $k_n = n\pi/L$. Этому соответствуют частоты

$$\omega_n = c_0 n \pi / L. \quad (22.78)$$

Таким частотам соответствуют разности потенциалов $V_n = \hbar \omega_n / 2e$, т. е.

$$V_n = (\hbar c_0 / 2e) n \pi / L. \quad (22.79)$$

Поэтому, вместо одного резонанса для бесконечного контакта, получаем набор дискретных резонансов. Мы не будем приводить здесь подробный вывод и опишем лишь качественную картину.

Расчет показывает [266, 267], что при значениях V_n , определяемых условием (22.79), появляются резкие максимумы среднего тока при $V = V_n$. Высота этих максимумов зависит от n , причем так, что самым

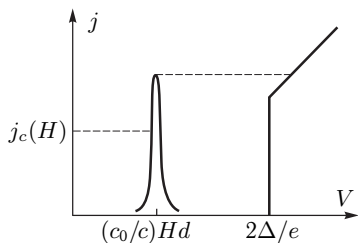


Рис. 22.15

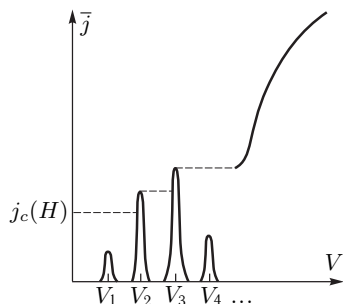


Рис. 22.16

высоким оказывается тот, который ближе всего соответствует условию резонанса фазовых скоростей (22.76), т. е. тот, для которого

$$|V_{n0} - (c_0/c) Hd| = \min. \quad (22.80)$$

Следовательно, меняя H , можно сдвигать модуляцию «гребенки» максимумов (22.79). Поскольку в реальных экспериментах вместо $\bar{j}(V)$ измеряется $\bar{V}(j)$, то мы получаем ступенчатую характеристику (рис. 22.16), вид которой существенно определяется магнитным полем H (в литературе принят термин «ступени Фиске» по имени их открывателя (1964)) [268].

При увеличении ширины контакта расстояние между соседними максимумами уменьшается согласно формуле (22.79). Максимумы начинают перекрываться, и в пределе $L \rightarrow \infty$ получается кривая, соответствующая уравнению (22.75) (ср. рис. 22.16 и рис. 22.15).

Эти свойства характеристик конечных контактов были использованы для генерации электромагнитных волн с помощью джозефсоновского контакта (Янсон, Свистунов, Дмитриенко, 1965; Лангенберг, Скалапино, Тейлор, Экк, 1965) [269, 270]. Использовался один из резонансов, даваемых выражением (22.79); его амплитуду увеличивали при помощи подбора магнитного поля в соответствии с условием (22.80).

§ 22.7. Джозефсоновские контакты с прослойкой из нормального металла и полупроводника

В конце § 22.8 мы остановимся на разных способах приготовления джозефсоновских элементов. Одним из наиболее популярных все-таки остается туннельный контакт с диэлектрической прослойкой. Однако приготовить такой контакт контролируемым образом довольно трудно. Слой диэлектрика, как уже говорилось, должен быть очень тонким и в то же время не иметь закороток. Обычно применяется окисление поверхности металла и последующее напыление пленки другого сверхпроводящего металла. Но при этом возможны дырки в слое окиси

и, следовательно, закоротки. Если же сделать слой окиси слишком толстым, то джозефсоновский ток будет отсутствовать.

Ввиду этого предпринимается попытка использовать вместо диэлектрика слой нормального металла или полупроводника. Проницаемость такого слоя, как мы увидим ниже, существенно больше слоя диэлектрика, и, следовательно, этот слой можно сделать толще. При этом легче контролировать проницаемость барьера и получать контакты с требуемыми свойствами.

Начнем с нормальной прослойки (s - n - s -контакты). Воспользуемся моделью, рассмотренной в § 20.1: контакта двух металлов с мало различающимися критическими температурами. Будем считать, что $T_{c2} - T_{c1} \ll T_{c1}$ и $T_{c1} < T < T_{c2}$. Положим, что металлы образуют «сэндвич», в котором первый нормальный металл образует слой толщиной d между двумя сверхпроводящими обкладками из второго металла. Будем, как и раньше, считать $\xi_2 \gg \xi_1$ и положим $d \gg \xi_1$. В этом случае критический ток через контакт (довольно очевидно, что он окажется пропорциональным $\exp(-d/\xi_1)$) будет настолько малым, что не повлияет на Ψ -функции в обоих сверхпроводниках. Поэтому эти функции можно взять в форме (20.18), добавив фазовый множитель. Таким образом, имеем:

в правом сверхпроводнике

$$\Psi_{\text{п}} = \text{th}[(x - d/2 + x_{0\text{п}})/\sqrt{2} \xi_2] \exp(i\chi_1), \quad x > d/2, \quad (22.81)$$

в левом сверхпроводнике

$$\Psi_{\text{л}} = \text{th}[(d/2 + x_{0\text{л}} - x)/\sqrt{2} \xi_2] \exp(i\chi_2), \quad x < -d/2.$$

В нормальном металле, занимающем полосу $-d/2 < x < d/2$, можно воспользоваться линеаризованным уравнением Гинзбурга–Ландау

$$\xi_1^2 d^2 \Psi / dx^2 = \Psi,$$

решением которого является

$$\Psi = A \exp(x/\xi_1) + B \exp(-x/\xi_1). \quad (22.82)$$

Используя условие непрерывности $d\Psi/dx$ на границах (непрерывность самого Ψ определяют $x_{0\text{п}}$ и $x_{0\text{л}}$, которые в данной задаче не представляют интереса) и учитывая, что $x_{0\text{п}}, x_{0\text{л}} \ll \xi_2$ (§ 20.1), находим

$$\begin{aligned} A &\approx [\xi_1/\sqrt{2} \xi_2] \exp[i\chi_1 - d/2\xi_1], \\ B &\approx [\xi_1/\sqrt{2} \xi_2] \exp[i\chi_2 - d/2\xi_1]. \end{aligned} \quad (22.83)$$

Ток равен

$$j = -(ie\hbar/2m) \Psi_0^2 (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*),$$

где $\Psi_0^2 = \alpha |\tau|/b$. Подставляя (22.82) и (22.83), легко убедиться в том, что ток не зависит от x и равен

$$j = -[ie\hbar\alpha |\tau|/2mb] (B^*A - A^*B) = \\ = [e\hbar\alpha |\tau|/2mb] (\xi_1/\xi_2^2) \exp(-d/\xi_1) \sin(\chi_1 - \chi_2). \quad (22.84)$$

Учитывая, что $|\Psi|^2$ на границе равно $(\alpha|\tau|/b)(\xi_1^2/2\xi_2^2)$ (см. (20.19)), можно написать

$$j = (e\hbar/m\xi_1) |\Psi(d/2)|^2 \exp(-d/\xi_1) \sin(\chi_1 - \chi_2), \quad (22.85)$$

что очень напоминает формулу (22.21). В данном случае малость джозефсоновского тока обусловлена в первую очередь нарушением сверхпроводящей корреляции в нормальном металле, что приводит к появлению множителя $\exp(-d/\xi_1)$. Хотя приведенный вывод относился к очень специальной модели, его основной качественный результат о том, что критический ток пропорционален $\exp(-d/\xi_1)$, где ξ_1 — корреляционная длина в нормальном металле, справедлив во всех случаях. Отметим, что в противоположность обычному туннельному контакту с диэлектрической прослойкой, где малость джозефсоновского тока обусловлена малой проницаемостью потенциального барьера для электронов, здесь эта малость обусловлена потерей когерентности куперовских пар в нормальном металле.

На практике s - n - s -контакты не получили широкого применения. Это связано с малым сопротивлением металла по отношению к нормальному току, что оказывается неудобным для приборов, включающих джозефсоновские элементы. Ввиду этого в последнее время усиленно исследуются джозефсоновские элементы с полупроводниковой прослойкой s - sm - s (см. [271, 272]).

Как известно, электрические свойства полупроводников в значительной степени определяются наличием примесей. Примеси в полупроводниках создают дополнительные уровни энергии электронов в запрещенной области между последней заполненной зоной (валентной) и первой пустой зоной (зоной проводимости). Уровни могут быть мелкими, т.е. лежать у края валентной зоны (акцепторы) или зоны проводимости (доноры), а также глубокими, т.е. лежать в глубине запрещенной зоны. Если концентрация примеси, создающей мелкие уровни, велика, то примесные уровни расширяются в зону, которая «наползает» на зону проводимости или валентную зону. При этом полупроводник становится «вырожденным», т.е. в нем возникает конечное число носителей тока в зоне при $T = 0$. Такой полупроводник фактически является полуметаллом, т.е. в этом случае контакт s - sm - s переходит в контакт s - n - s .

При меньших концентрациях примеси электроны или дырки в зонах создаются лишь путем температурного возбуждения. Однако ввиду того, что критические температуры сверхпроводников низки по сравнению с энергией возбуждения, наличием термически активированных носителей можно пренебречь. В таком случае полупроводник фактически является диэлектриком и высота потенциального барьера равна наименьшей энергии, требующейся для создания электронов в валентной зоне или дырок в зоне проводимости, иначе говоря, равна энергетической щели. Сравнивая показатели экспонент температурного возбуждения (V/T) и вероятности туннелирования $(d(mV)^{1/2}/\hbar)$, см. (22.1)), где V соответствует $U(x) - \mu$, мы видим, что для $V > 10^{-2}$ эВ и $d < 10^{-3}$ см температурным возбуждением действительно можно пренебречь.

При реальном определении вероятности туннелирования (Аслам-зов, Фистуль, 1979—1984) [272] надо учесть эффекты, возникающие на границе металл–полупроводник. В §6.1 мы рассматривали контакт двух металлов. Там отмечалось, что часть электронов переходит из одного металла в другой, в результате чего в окрестности границы возникает электрический двойной слой, на котором происходит скачок потенциала — контактная разность потенциалов. Толщина этого слоя порядка межатомных расстояний, ибо именно на таких расстояниях происходит экранировка электрического поля.

Иначе обстоит дело в полупроводниках, где экранировка гораздо слабее. Если слой полупроводника очень тонкий, то может получиться, что все электроны, находившиеся на примесных уровнях, уйдут в металл, и в результате потенциальный барьер возрастет почти до расстояния между валентной зоной и зоной проводимости. С другой стороны, уход электронов приведет к тому, что полупроводник приобретет электрический заряд, что в свою очередь несколько уменьшит эффективный барьер.

В более толстых слоях полупроводника электроны будут уходить в металлы лишь из граничных областей. При этом потенциальный барьер в середине будет определяться энергетической щелью для примесных уровней, а на краях возникнут высокие, но узкие «барьеры Шоттки».

Кроме того, существуют и другие эффекты, влияющие на туннельную проницаемость. Сюда относятся флуктуации концентрации примесей, приводящие к образованию узких каналов с пониженными барьерами [272], образование «резонансных» траекторий по периодическим цепочкам примесных состояний в полупроводнике [272] и, наконец, эффекты освещения. Экспериментально было обнаружено, что некоторые $s-sm-s$ -контакты, в которых не было эффекта Джозефсона, приобретают его в результате освещения и сохраняют его при выключении освещения (см. [255]). По-видимому, это связано с образованием долгоживущих метастабильных электронных состояний на примесях.

§ 22.8. Практические применения эффекта Джозефсона

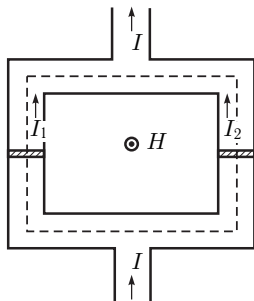


Рис. 22.17

В § 22.4 было показано, что критический ток Джозефсона сильно зависит от магнитного поля. Это свойство можно использовать для измерения малых магнитных полей. Правда, для этой цели применяются не отдельные джозефсоновские элементы, а так называемые джозефсоновские интерферометры, или сквиды (SQID — superconducting quantum interference device — сверхпроводящее квантовое интерференционное устройство).

Одна из схем такого интерферометра приведена на рис. 22.17. Он изображает два джозефсоновских элемента, включенных параллельно. Полный ток через первый из них равен $I_{c1} \sin \theta_1$, а через второй — $I_{c2} \sin \theta_2$. Суммарный ток через оба контакта равен

$$I = I_{c1} \sin \theta_1 + I_{c2} \sin \theta_2. \quad (22.86)$$

Представим себе, что перпендикулярно к плоскости контакта приложено магнитное поле. Произведем вывод, аналогичный выводу § 17.6, где рассматривалось квантование магнитного потока. Из того что в толще сверхпроводника $\mathbf{j} = 0$, можно заключить, что фаза параметра порядка удовлетворяет условию

$$\nabla \chi = (2e/c\hbar) \mathbf{A}.$$

Интегрируя вдоль контура, обозначенного на рис. 22.17 штриховой линией, получаем, что изменение фазы вдоль всего контура равно

$$\theta_1 - \theta_2 + (2e/c\hbar) \Phi,$$

где Φ — поток поля через контур, а θ_1 и θ_2 — скачки фазы на джозефсоновских контактах. Для однозначности параметра порядка необходимо, чтобы полное изменение фазы равнялось $2\pi n$, где n — целое число, т. е.

$$\theta_1 - \theta_2 + 2\pi\Phi/\Phi_0 = 2\pi n$$

(мы подставили $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$ — квант магнитного потока). Можно ввести некоторую величину θ и написать

$$\theta_1 = \theta - \pi\Phi/\Phi_0 + 2\pi n, \quad \theta_2 = \theta + \pi\Phi/\Phi_0.$$

Подставляя это в формулу (22.86) (считаем магнитное поле столь малым, что оно не влияет на I_{c1} и I_{c2}), имеем

$$I = I_{c1} \sin(\theta - \pi\Phi/\Phi_0) + I_{c2} \sin(\theta + \pi\Phi/\Phi_0).$$

Если оба контакта одинаковы, т. е. $I_{c1} = I_{c2} = I_c$, то

$$I_{\max} = \max[2I_c \sin \theta \cos(\pi\Phi/\Phi_0)] = 2I_c \cos(\pi\Phi/\Phi_0). \quad (22.87)$$

Отсюда следует, что суммарный критический ток обращается в нуль при

$$\Phi = (n + 1/2) \Phi_0. \quad (22.88)$$

Но в данном случае речь идет не о магнитном потоке через отдельный контакт: HLd , а о потоке через большую полость: $\Phi = HS$ (S — площадь полости). Поскольку квант магнитного потока очень малая величина: $\Phi_0 = 2 \cdot 10^{-7}$ Э·см², то с помощью джозефсоновского интерферометра можно мерить поля вплоть до 10^{-10} Э (напомним, что магнитное поле Земли составляет 0,5 Э).

Описанная схема сквида не является единственно возможной. Есть и другие, иногда более удобные в конкретных случаях.

Одним из существенных вопросов при измерении столь малых полей является защита от многочисленных помех, т. е. случайных полей, возникающих по самым разным причинам, в особенности в городах. Конечно, создание такой защиты весьма ограничило бы применение сквидов. Однако на практике удалось обойтись без этого. Дело в том, что источники помех обычно удалены от исследуемого объекта, а поля от удаленных источников медленно меняются в пространстве. Разработаны схемы, которые регистрируют лишь градиент магнитного поля или даже его вторую производную. Хотя это несколько уменьшает чувствительность, но зато позволяет обходиться без защиты.

Помимо применений для физических исследований, сквиды стали в последнее время использоваться в биологии и медицине. Слабые токи, текущие в организмах, создают в пространстве магнитные поля, которые можно измерять. Таким образом удается получить магнитокардиограммы и магнитоэнцефалограммы (картины изменения со временем магнитных полей, связанные с деятельностью сердца и мозга). Эти методы исследования дают гораздо больше деталей, чем обычные измерения электрических потенциалов (электрокардиография и электроэнцефалография) и к тому же осуществляются бесконтактным способом. Более того, снимая магнитные поля в разных точках пространства относительно исследуемого объекта, можно затем с помощью компьютера рассчитать распределение токов, создающих эти поля. Хотя эти работы начались лишь недавно, уже сейчас ясно, что благодаря сквидам биология и медицина приобрели уникальные методы исследования и диагностики.

Необыкновенная чувствительность сквидов к магнитным полям дает возможность использовать их для создания сверхчувствительных гальванометров и вольтметров. При этом удается измерять переменные токи до 10^{-14} А и разности потенциалов вплоть до 10^{-15} В.

Способность замкнутых сверхпроводящих контуров удерживать незатухающий ток, а также возможность разрушения сверхпроводни-

мости полем применяются для создания сверхпроводящих элементов памяти для компьютеров — криотронов. Некоторые из этих конструкций используют джозефсоновские элементы. При этом существенны два обстоятельства: миниатюризация и быстродействие. Для миниатюризации применяются напыленные сверхпроводящие пленки. Наименьшая площадь контакта, полученная таким способом, составляет 10^{-9} см² (торцевой контакт, см. рис. 22.18 а). Что касается быстродействия, то переключение туннельного контакта с джозефсоновского режима $j < j_c$, $V = 0$ на одночастичный режим $j > j_c$, $V > 2\Delta/e$ осуществляется за время, меньшее 10^{-10} с.

Одной из главных проблем, которая встает на пути создания все более компактных микросхем, т.е. содержащих все большее число элементов в заданном объеме, является отвод тепла, выделяющегося внутри такой микросхемы при ее работе. Контакт с охлаждающей жидкостью или газом происходит только вдоль поверхности, и теплопроводность не в состоянии обеспечить эффективного отвода тепла из объема. А повышение температуры может привести к разрушению всей структуры. В этом смысле джозефсоновские элементы обладают существенным преимуществом, ибо тепловыделение при их переключении ничтожно.

До сих пор мы говорили об использовании эффекта Джозефсона на постоянном токе. Что касается переменного эффекта Джозефсона, то несмотря на существование многих идей на практике он еще применяется мало. Наиболее естественно было бы использовать джозефсоновские элементы для генерации электромагнитных колебаний с перестраиваемой частотой. Основная трудность — вывод волн за пределы контакта. Использование резонанса джозефсоновских волн с волнами Свихарта (§ 22.6) позволило получить мощность излучения до 10^{-10} Вт с к.п.д. 2%. Конечно, это очень мало, и в настоящее время существуют другие устройства, позволяющие получить значительно большую мощность на тех же частотах.

В принципе, возможны следующие два приложения джозефсоновской генерации: а) в низкотемпературных маломощных устройствах, не требующих большой мощности, и б) для измерения разностей потенциалов, меньших 10^{-15} В, с помощью соотношения $\omega = 2eV/\hbar$, ибо определение частоты производится с большой точностью и позволяет довести измеряемое напряжение до 10^{-17} В.

Другое применение переменного эффекта Джозефсона — детектирование внешнего излучения. Самое простое — использование уменьшения критического джозефсоновского тока в присутствии внешнего переменного поля. Согласно формуле (22.67)

$$j_{0c} = j_c |J_0(2ev/\hbar\Omega)|, \quad (22.89)$$

где J_0 — функция Бесселя. В принципе, можно использовать и другие ступенные характеристики (при $V_n = n\hbar\Omega/2e$).

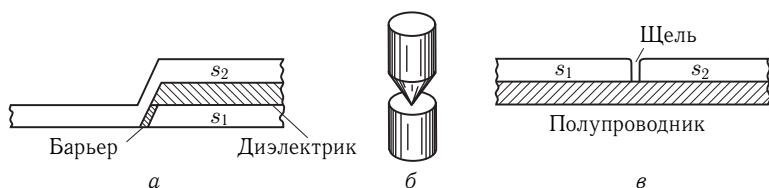


Рис. 22.18

В заключение остановимся на разных способах приготовления джозефсоновских элементов. Мы уже говорили о двух видах: туннельном контакте и мостике. В первом случае поверхность одного сверхпроводника подвергается окислению или на нее напыляется слой нормального металла или полупроводника. После этого сверху напыляется пленка второго сверхпроводника. Один из вариантов туннельного контакта — торцевой, в котором переход осуществляется вдоль торца тонкой пленки (рис. 22.18 *а*).

Что касается мостика, то его можно приготовить в виде пленки с сужением (рис. 22.8), либо в виде пленки переменной толщины. Еще один тип мостика — точечный контакт (рис. 22.18 *б*).

Наконец, использование в качестве барьера нормального металла или полупроводника дает возможность изготовить так называемые планарные элементы (рис. 22.18 *в*), в которых на подложку из полупроводника напыляется пленка из сверхпроводника с очень узкой щелью. При этом подложка служит барьером. В планарных элементах легче проконтролировать свойства материала барьера; это может быть обычный массивный монокристаллический образец с определенным легированием (если речь идет о полупроводнике).

§ 22.9. Динамическое резистивное состояние тонкого сверхпроводника при прохождении сверхкритического тока

В § 17.5 было показано, что для очень тонкого сверхпроводника существует критическая плотность тока, выше которой сверхпроводимость должна разрушаться. На основании этого результата можно было бы сделать заключение, что при увеличении тока до этого значения происходит переход в нормальную фазу и срыв характеристики на линейную зависимость $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ (рис. 22.19). В действительности на опыте наблюдаются зависимости типа изображенных на рис. 22.20 [273], т.е. постепенное приближение к нормальному сопротивлению и скачки электрического поля. Это очень напоминает картину, рассмотренную в § 22.5 для джозефсоновского контакта, и показывает, что сверхпроводимость в каком-то виде сохраняется и при наличии электрического поля.

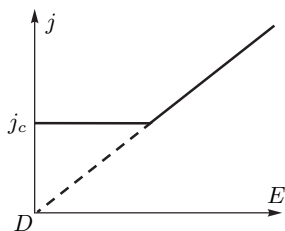


Рис. 22.19

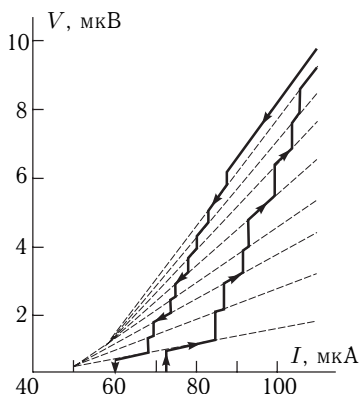


Рис. 22.20

На первый взгляд такое заключение кажется парадоксальным. Ведь из уравнения Лондонов $\partial(\Delta \mathbf{j})/\partial t = \mathbf{E}$ следует, что при наличии электрического поля ток должен расти со временем. Следовательно, он обязательно превзойдет критическое значение, что приведет к разрушению сверхпроводимости. С другой стороны, нам уже приходилось встречаться с подобным явлением: движение вихревой решетки в сверхпроводнике 2-го рода под действием магнитного поля и перпендикулярного ему тока приводит к появлению электрического поля при сохранении сверхпроводимости. Другим примером является джозефсоновский контакт при $j > j_c$.

Появление электрического поля обязательно приводит к нестационарности, т. е. к зависимости величин от времени. Как уже отмечалось, нестационарные уравнения теории сверхпроводимости весьма сложны, даже в пределе медленных временных и пространственных изменений. Поэтому мы воспользуемся модельным уравнением (19.47) для окрестности T_c .

Однако при этом мы встречаемся со следующей трудностью. Представим себе бесконечную сверхпроводящую проволочку. Ясно, что возникающее в ней электрическое поле должно быть в среднем однородным вдоль проволоки. Но в этом случае и Ψ должно быть в среднем однородным. В то же время входящий в уравнение (19.47) потенциал φ должен расти по абсолютному значению.

Такого же рода трудность встретилась нам в гл. 18, когда рассматривались сверхпроводники 2-го рода в магнитном поле. Там было показано, что рост векторного потенциала компенсируется благодаря появлению вихрей. Они приводят к скачкам градиента фазы на линиях разреза, проходящих через центры вихрей (см. рис. 18.1).

Будем рассматривать сверхпроводящую проволочку (вискер) с диаметром много меньшим как δ , так и ξ . При этом все величины будут

зависеть только от координаты вдоль проволоочки и от времени. Итак, вместо плоскости (x, y) в данном случае у нас имеется плоскость (x, t) . Поскольку в тонкой проволоке магнитное поле тока мало, то можно выбрать $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. В этом случае можно установить соответствие с вихревой картиной:

$$\begin{aligned} -i\partial/\partial x &\rightarrow -i\partial/\partial x, \\ -i\partial/\partial y - (2e/\hbar c)A_y &\rightarrow -i\partial/\partial t + (2e/\hbar)\varphi. \end{aligned} \quad (22.90)$$

Сравнивая с рис. 18.1 (с. 413) и рассуждениями § 18.2, приходим к выводу о возникновении вихревой решетки в плоскости (x, t) (Ивлев, Копнин, 1978) [274]. При обходе каждого вихря фаза меняется на 2π . Компенсация роста скалярного потенциала будет происходить за счет скачков производной фазы на линиях разреза вдоль оси t . Условие компенсации выглядит так:

$$2\pi/t_0 = (2e/\hbar) \langle E \rangle a, \quad (22.91)$$

где t_0 — временной период, a — пространственный период, $\langle E \rangle$ — среднее электрическое поле (по координате и времени). Решая условие (22.91) относительно электрического поля, получаем

$$\langle E \rangle = (\Phi_0/ct_0) (n/L), \quad (22.92)$$

где Φ_0 — квант потока, L — длина проводника, n — число центров «вихрей» ($n = L/a$).

Физическая интерпретация полученной картины иная, чем у магнитных вихрей. В определенных точках вдоль проводника происходит скачок временной производной фазы $\partial\chi/\partial t$, т. е. скорости изменения фазы со временем. Этот процесс является периодическим. В течение большей части периода скорости изменения фазы с двух сторон отмеченных точек на проводнике одинаковы. Однако в определенные моменты фаза меняется более резко, причем по разному с двух сторон от этих точек, так что в результате возникает разница фаз, равная 2π . Поэтому такие точки называются «центрами проскальзывания фазы»¹⁾. Поскольку функция $\Psi = |\Psi| \exp(i\chi)$ должна быть однозначной, то в самом центре в момент проскальзывания фазы $|\Psi| = 0$.

Отметим, что на рис. 18.1 изображена прямоугольная решетка, соответствующая не зависящему от времени расположению центров проскальзывания фазы вдоль сверхпроводника. Однако, вообще говоря, решетка может быть и косой, что соответствовало бы движению всей структуры вдоль сверхпроводника с постоянной скоростью. Это

¹⁾ Идея о центрах проскальзывания фазы была впервые высказана Андерсоном (1966) [275] и Литтлом (1967) [276] и подробно изложена в работе Ланжера и Амбегоакара (1967) [277].

в принципе возможно и у конечного сверхпроводника, если существует механизм зарождения и уничтожения центров проскальзывания фазы на краях.

Теперь рассмотрим, что происходит в тонком сверхпроводнике конечной длины. При $\mathbf{A} = 0$ выражение для тока имеет вид

$$j = |\Psi|^2 (\hbar e / m) \partial \chi / \partial x. \quad (22.93)$$

Если изобразить трехмерный график, на котором x — координата вдоль сверхпроводника, z соответствует $\text{Re } \Psi$, а y — $\text{Im } \Psi$, то состоянию с током соответствует спиральная кривая (рис. 22.21 а). Однако при наличии электрического поля ток растет со временем; это означает,

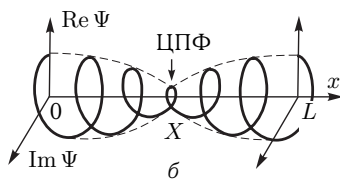
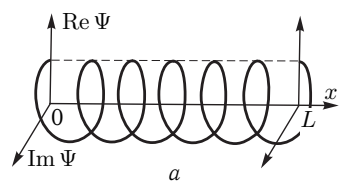


Рис. 22.21

что спираль «сжимается», т. е. плотность ее витков увеличивается. Но такой процесс не может продолжаться бесконечно долго, ибо ток достигает значения j_c . Есть одна только возможность: сбросить один из витков спирали. Но для этого надо «выпрямить» спираль в каком-то месте. Это и соответствует возникновению центра проскальзывания фазы и, в частности, $|\Psi| = 0$ (рис. 22.21 б).

Рассмотрим простую модель (Скочпол, Бизли, Тинкхэм, 1974) [278], которая объясняет характеристику со скачками разности потенциалов на рис. 22.20. Представим себе,

что исследуемый тонкий сверхпроводник с двух сторон присоединен к массивным образцам из того же металла. Такая конструкция называется мостиком, и мы уже говорили о ней как о возможной реализации джозефсоновского контакта. В данном случае суженная часть предполагается длинной. Для массивных сверхпроводников проходящий ток является слабым, и они находятся в состоянии равновесия. Если температура близка к T_c и применимо уравнение (19.47), то в контактах его правая часть должна равняться нулю, а следовательно, должно обращаться в нуль и левая часть. Подставляя $\Psi = |\Psi| \exp(i\chi)$, получаем

$$\partial |\Psi| / \partial t + i [\partial \chi / \partial t + (2e / \hbar) \varphi] |\Psi| = 0.$$

Выделяя действительную и мнимую части, имеем

$$\partial |\Psi| / \partial t = 0, \quad (22.94)$$

$$\partial \chi / \partial t + (2e / \hbar) \varphi = 0. \quad (22.95)$$

Эти уравнения являются граничными условиями для исследуемого тонкого сверхпроводника.

Условие (22.95) имеет место и при температурах, далеких от T_c . Его можно интерпретировать как равенство химических потенциалов «нормальных электронов» ($\mu_n = e\varphi$) и электронов, входящих в состав куперовских пар ($\mu_s = -(\hbar/2) \partial\chi/\partial t$). Обозначим

$$\eta = \mu_n - \mu_s = e\varphi + (\hbar/2) \partial\chi/\partial t. \quad (22.96)$$

Согласно (22.95) в массивном сверхпроводнике $\eta = 0$. Однако, так же как и магнитное поле, эта величина не может обратиться в нуль скачком и имеет конечную глубину проникновения.

Действительно, представим себе границу между сверхпроводником и нормальным металлом. Если электрон «впрыскивается» в сверхпроводник, то для того, чтобы придти в равновесное состояние, он должен потерять энергию Δ , ибо равновесные электроны связаны в пары с энергией связи 2Δ (на 2 частицы).

Электрон теряет энергию при столкновениях. Однако столкновения с примесями неэффективны, ибо они упругие, а столкновения с квазичастицами редки ($\propto \exp(-\Delta/T)$). Поэтому единственным процессом, который дает энергетическую релаксацию, является излучение фононов. При низких температурах характерное время такого процесса τ_{ph} велико. Это приводит к тому, что глубина проникновения для величины η велика по сравнению с корреляционной длиной ξ (порядка $\xi(T_c\tau_{ph}/\hbar)^{1/2}$ для чистого сверхпроводника). Обозначим эту величину через δ_E , поскольку она определяет также пространственное изменение электрического поля в сверхпроводнике.

По аналогии с уравнением Лондонов напишем

$$\partial^2\eta/\partial x^2 - \delta_E^{-2}\eta = 0 \quad (22.97)$$

(точная теория подтверждает это уравнение, см. [279]). Пусть контакты сверхпроводника находятся в точках 0 и L . Решая уравнение (22.97) с граничным условием $\eta = 0$ при $x = 0$, получаем

$$\eta = C_1 \operatorname{sh}(x/\delta_E). \quad (22.98)$$

С другой стороны, можно решить уравнение (22.97), используя граничное условие $\eta = 0$ при $x = L$. Это дает

$$\eta = C_2 \operatorname{sh}[(x - L)/\delta_E]. \quad (22.99)$$

Если в сверхпроводнике нет центров проскальзывания фазы, то общим решением является $\eta = 0$. Это возможно лишь до тех пор, пока ток меньше j_c .

Когда ток превышает j_c , появляется центр проскальзывания фазы. Пусть он находится в точке X (рис. 22.21 б). При этом получаем

$$\begin{aligned} \eta(X - 0) &= C_1 \operatorname{sh}(X/\delta_E), \\ \eta(X + 0) &= C_2 \operatorname{sh}[(X - L)/\delta_E]. \end{aligned}$$

Но в центре проскальзывания производная фазы $\partial\chi/\partial t$ терпит разрыв: $\Delta(\partial\chi/\partial t) = 2\pi/t_0$. Согласно (22.96) отсюда следует, что

$$C_2 \operatorname{sh}[(X - L)/\delta_E] - C_1 \operatorname{sh}(X/\delta_E) = \pi\hbar/t_0. \quad (22.100)$$

Благодаря проскальзыванию фазы все величины периодически зависят от времени с периодом t_0 . В эксперименте измеряются средние по времени ток и разность потенциалов (такие средние мы обозначим чертой). Согласно (22.96) $\bar{\eta} = e\bar{\varphi}$ (так как $\overline{\partial\chi/\partial t} = 0$). Среднее электрическое поле слева от центра проскальзывания фазы ($0 < x < X$) получается из формулы (22.98):

$$\bar{E} = -\overline{\partial\varphi/\partial x} = -e^{-1}\overline{\partial\eta/\partial x} = -(C_1/e\delta_E) \operatorname{ch}(x/\delta_E). \quad (22.101)$$

Справа от X ($X < x < L$) имеем

$$\bar{E} = -(C_2/e\delta_E) \operatorname{ch}[(x - L)/\delta_E]. \quad (22.102)$$

Константы C_1 и C_2 определяются из следующих соображений.

На опыте легче всего задать полный ток j . Он состоит из сверхпроводящей и нормальной частей:

$$j = j_s + j_n.$$

Эта формула является точной вблизи T_c (см. конец § 19.3); j_s было определено в § 16.8 ($j_s = -Q\mathbf{A}$, Q выражается формулами (16.88) и (16.92)), а $j_n = \sigma\mathbf{E}$, где σ — нормальная проводимость. Однако, в принципе, аналогичную формулу можно написать при любых температурах. Для этого надо взять связь $\mathbf{j} = -Q\mathbf{A}$ в пределе $\mathbf{q} = 0$, $\omega \ll \Delta$ (здесь имеется в виду калибровка $\varphi = 0$, $\mathbf{E} = -c^{-1}\partial\mathbf{A}/\partial t$) и разложить по ω : $\mathbf{j} = -Q(0)\mathbf{A} + (i\omega/c)\sigma\mathbf{A}$, где σ — некоторая константа, зависящая от Δ . Второй член играет роль j_n , ибо $(i\omega/c)\mathbf{A} = -c^{-1}\partial\mathbf{A}/\partial t = \mathbf{E}$.

Согласно рис. 22.21 в центре проскальзывания фазы сверхпроводящий ток пульсирует от максимального значения до нуля. Максимальное значение не может превышать j_c . Ввиду этого в таком центре $\bar{j}_s = \alpha j_c$, где $\alpha < 1$. Мы сделаем предположение, что даже при наличии нескольких центров в каждом из них $\bar{j}_s = \alpha j_c$ с тем же самым α , не зависящим от числа центров. Конечно, это модельное предположение, однако, как мы увидим ниже, оно дает возможность объяснить ступенчатую характеристику на рис. 22.20. А пока рассмотрим один центр. Итак, имеем

$$\bar{j}_s(X) = j - \bar{j}_n(X) = \alpha j_c. \quad (22.103)$$

Подставляя в (22.103) $j_n = \sigma E$ и учитывая (22.101) и (22.102), находим

$$C_1 = -\frac{(j - \alpha j_c) e \delta_E}{\sigma \operatorname{ch}(X/\delta_E)}, \quad C_2 = -\frac{(j - \alpha j_c) e \delta_E}{\sigma \operatorname{ch}[(L - X)/\delta_E]}. \quad (22.104)$$

Период t_0 связан с разностью потенциалов. Подставляя в формулу (22.91) в качестве пространственного периода длину проводника L , мы получаем

$$\frac{2\pi}{t_0} = \frac{2e}{\hbar} \langle E \rangle L = \frac{2e}{\hbar} \int_0^L \bar{E} dx = \frac{2e}{\hbar} [\bar{\varphi}(0) - \bar{\varphi}(L)] = \frac{2eV}{\hbar}. \quad (22.105)$$

Это не что иное, как соотношение Джозефсона (22.55).

Формула (22.105) может быть получена и непосредственно из рассматриваемой задачи. Поскольку на концах проводника $\eta = 0$, то, следовательно,

$$\varphi(0) - \varphi(L) = (\hbar/2e) [(\partial\chi/\partial t)_L - (\partial\chi/\partial t)_0].$$

Если взять среднее по времени, то регулярная часть производной $\partial\chi/\partial t$ дает нуль, и остается лишь скачок, равный $2\pi/t_0$, т. е. $\bar{\varphi}(0) - \bar{\varphi}(L) = \hbar\pi/et_0$, что соответствует формуле (22.105).

Подставляя выражения для C_1 и C_2 в (22.100) и выражая правую часть через V , получаем

$$V = (j - \alpha j_c) (\delta_E/\sigma) \{ \text{th}(X/\delta_E) + \text{th}[(L - X)/\delta_E] \}.$$

Из соображений симметрии можно предположить, что центр проскальзывания фазы расположится посередине проводника, т. е. $X = L/2$. При этом находим

$$V = 2(j - \alpha j_c) (\delta_E/\sigma) \text{th}(L/2\delta_E). \quad (22.106)$$

Согласно (22.101) и (22.102) среднее электрическое поле $\bar{E}$ и вместе с ним нормальный ток растут от краев к середине проводника. Следовательно, сверхпроводящий ток максимален у краев. При этом он не может превышать j_c . Это приводит к условию

$$j_s(0) = j - (j - \alpha j_c) / \text{ch}(L/2\delta_E) \leq j_c.$$

В то же время должно быть $j \geq j_c$. Отсюда получаем интервал значений тока, в котором годится формула (22.106):

$$j_c \leq j \leq j_c \frac{1 - \alpha \text{sech}(L/2\delta_E)}{1 - \text{sech}(L/2\delta_E)}. \quad (22.107)$$

При $j = j_c$ имеется скачок потенциала от нуля до

$$V_1 = 2(1 - \alpha) j_c (\delta_E/\sigma) \text{th}(L/2\delta_E). \quad (22.108)$$

Далее идет линейный участок характеристики вплоть до верхнего предела тока, определяемого формулой (22.107). При этом

$$V'_1 = \frac{2(1 - \alpha) j_c (\delta_E/\sigma) \text{th}(L/2\delta_E)}{1 - \text{sech}(L/2\delta_E)}. \quad (22.109)$$

При токе j_c , превышающем верхний предел в (22.107), появляются два центра проскальзывания фазы. Довольно естественно предположить, что они будут расположены так, чтобы ток j_n был симметричен относительно каждого из них. Это возможно, если они локализованы при $X_1 = L/4$, $X_2 = 3L/4$. При этом

$$\begin{aligned}\eta &= C_1 \operatorname{sh}(x/\delta_E), & 0 < x < X_1, \\ \eta &= C_2 \operatorname{sh}[(x - L/2)/\delta_E], & X_1 < x < X_2, \\ \eta &= C_3 \operatorname{sh}[(x - L)/\delta_E], & X_2 < x < L.\end{aligned}$$

Опять определяем коэффициенты C_1 , C_2 , C_3 из условия, чтобы в центрах проскальзывания фазы $\dot{j}_s = j - \dot{j}_n = \alpha j_c$. Это дает

$$C_1 = C_2 = C_3 = -(j - \alpha j_c)(e\delta_E/\sigma) / \operatorname{ch}(L/4\delta_E).$$

Из условия скачка η в центре проскальзывания фазы получаем связь коэффициентов C_i с периодом t_0 , а из формулы, аналогичной (22.105) (но на этот раз слева стоит $4\pi/t_0$), — связь t_0 с V . Отсюда находим следующий участок характеристики:

$$V = 4(j - \alpha j_c)(\delta_E/\sigma) \operatorname{th}(L/4\delta_E). \quad (22.110)$$

Формула (22.110) годится при токах, начиная с верхней границы (22.107) и вплоть до того, как максимум сверхпроводящего тока достигает критического значения j_c . Такой максимум осуществляется при $x = 0$, $L/2$ и L . Это дает следующие интервалы значений

$$j_c \frac{1 - \alpha \operatorname{sech}(L/2\delta_E)}{1 - \operatorname{sech}(L/2\delta_E)} \leq j \leq \frac{1 - \alpha \operatorname{sech}(L/4\delta_E)}{1 - \operatorname{sech}(L/4\delta_E)}. \quad (22.111)$$

На нижнем краю этого интервала имеет место скачок напряжения от значения V'_1 (22.109) до

$$V_2 = \frac{4(1 - \alpha) j_c (\delta_E/\sigma) \operatorname{th}(L/4\delta_E)}{1 - \operatorname{sech}(L/2\delta_E)} \quad (22.112)$$

(нетрудно убедиться в том, что $V_2 > V'_1$). Далее идет линейный участок характеристики согласно формуле (22.110), который продолжается вплоть до верхней границы интервала (22.111), на которой напряжение становится равным

$$V'_2 = \frac{4(1 - \alpha) j_c (\delta_E/\sigma) \operatorname{th}(L/4\delta_E)}{1 - \operatorname{sech}(L/4\delta_E)}. \quad (22.113)$$

Дальнейшее увеличение тока приводит к появлению большого числа центров проскальзывания фазы и аналогичным зависимостям $V(j)$. Кривая зависимости j/j_c от $\sigma E/j_c$ ($E = V/L$) для $L/\delta_E = 16$ приведена на рис. 22.22. При этом взято $\alpha = 0,09$ (см. ниже).

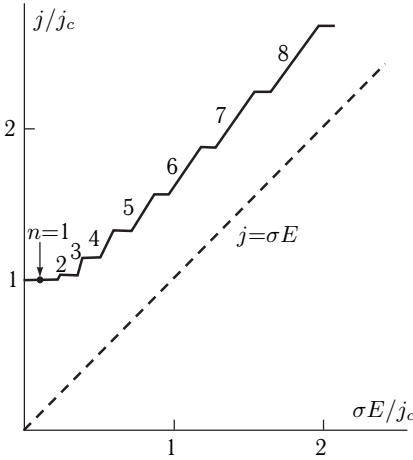


Рис. 22.22

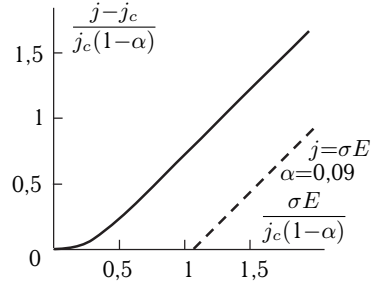


Рис. 22.23

Итак, оказывается, что характеристика состоит из скачков напряжения и участков с линейной зависимостью $V(j)$. Это соответствует экспериментальным результатам. При увеличении L интервалы (22.107), (22.111) и все последующие уменьшаются и характеристика приближается к непрерывной зависимости $V(j)$. Эту зависимость нетрудно найти, обобщая предыдущий вывод на n центров проскальзывания фазы. Линейный участок характеристики номера n имеет вид

$$V_n(j) = 2n \operatorname{th}(L/2n\delta_E) (j - \alpha j_c) (\delta_E/\sigma). \quad (22.114)$$

Значение полного тока, при котором максимальный сверхпроводящий ток достигает критического значения, равно

$$j_n = j_c \frac{1 - \alpha \operatorname{sech}(L/2n\delta_E)}{1 - \operatorname{sech}(L/2n\delta_E)}. \quad (22.115)$$

Подставляя это в (22.114), получаем

$$V_n(j_n) = \frac{2nj_c(1 - \alpha)(\delta_E/\sigma) \operatorname{sh}(L/2n\delta_E)}{\operatorname{ch}(L/2n\delta_E) - 1}. \quad (22.116)$$

При $n \rightarrow \infty$ число n можно рассматривать как непрерывную переменную. Еще удобнее ввести переменную $z = L/2n\delta_E$. Из (22.115) и (22.116) получаем

$$(j - j_c)/j_c(1 - \alpha) = (\operatorname{ch} z - 1)^{-1}, \quad (22.117)$$

$$\sigma E/j_c(1 - \alpha) = (\operatorname{sh} z/z) (\operatorname{ch} z - 1)^{-1}, \quad (22.118)$$

где $E = V/L$. Это параметрическая запись зависимости $E(j)$ в пределе $L \gg \delta_E$.

Большому току $j \gg j_c$ соответствует $z \ll 1$. При этом из (22.117) и (22.118) находим

$$j = \sigma E + (2 + \alpha) j_c / 3, \quad (22.119)$$

т. е. характеристика есть прямая, параллельная закону Ома. Наоборот, большие z отвечают окрестности j_c . Из (22.117) и (22.118) получаем в этом случае

$$(j - j_c) / j_c \approx 2(1 - \alpha) \exp[-j_c(1 - \alpha) / \sigma E]. \quad (22.120)$$

Кривая $j(V)$ при $V \rightarrow 0$, $j \rightarrow j_c$ имеет горизонтальную касательную. В целом график кривой (22.117), (22.118) приведен на рис. 22.23.

Результаты изложенной выше феноменологической модели находятся в хорошем согласии с результатами точной теории [279]¹⁾. Сравнивая формулы, полученные обоими способами, можно прийти к заключению, что $\alpha \leq 0,09$.

¹⁾ В точной теории тоже есть некоторый произвол, однако многие данные свидетельствуют в пользу принципа «минимального производства энтропии». Если пользоваться этим принципом, то в экспоненциальном законе (22.120) получается коэффициент 0,91 (в качестве $1 - \alpha$), а в формуле для $j - j_c$ добавочный ток $\Delta j = 0,68 j_c$. Если подставить в формулу (22.119) $\alpha = 0,09$, то получается $\Delta j = 0,696 j_c$.

Приложение I

МОДЕЛЬ ФЕРРОМАГНИТНОГО МЕТАЛЛА

Реальные ферромагнитные металлы имеют сложные (состоящие из нескольких зон) и сильно анизотропные электронные спектры. Однако некоторые свойства таких металлов могут быть продемонстрированы на примере изотропной ферми-жидкости (см. гл. 13) с достаточно большой обменной частью функции f (Абрикосов, Дзялошинский, 1958) [280].

Ферромагнетик характеризуется тем, что у него в равновесном состоянии отличны от нуля полный спин и магнитный момент, или, как говорят, имеется спонтанная намагниченность (см., например, [310]). Пусть единичный вектор $\mathbf{m}$ характеризует направление спонтанного момента. Энергия квазичастиц зависит от ориентации спина по отношению к $\mathbf{m}$ и ввиду этого может быть записана в виде

$$\varepsilon(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) = \varepsilon_0(\mathbf{p}) - b(\mathbf{p}) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{m}. \quad (\text{II.1.1})$$

Согласно этой формуле энергия электрона со спином, параллельным $\mathbf{m}$, есть $\varepsilon_0 - b$ и, соответственно, равновесная функция распределения равна $n_F(\varepsilon_0 - b) \equiv n^+$. У электрона с противоположным спином энергия равна $\varepsilon_0 + b$, а равновесная функция распределения равна $n_F(\varepsilon_0 + b) \equiv n^-$. Собственными значениями n^+ и n^- при соответствующих ориентациях спина обладает оператор

$$n_0(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) = (1/2)(n^+ + n^-) + (1/2)(n^+ - n^-) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{m}, \quad (\text{II.1.2})$$

который и следует считать равновесной матрицей плотности.

В изотропной ферми-жидкости f -функция имеет вид ¹⁾

$$f = \eta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}') \zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}'). \quad (\text{II.1.3})$$

¹⁾ В принципе, могут быть члены, пропорциональные $\mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}')$ и $(\mathbf{m} \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{m} \boldsymbol{\sigma}')$, но можно показать, что они не играют роли в последующих вычислениях, а потому мы их писать не будем.

Между $b(\mathbf{p})$ в формуле (П.1.1) и функцией ζ в (П.1.3) существует определенная связь. Для ее установления рассмотрим, как изменяется энергия электрона при повороте вектора $\mathbf{m}$ на угол $\delta\theta$. При этом $\delta\mathbf{m} = [\delta\theta \mathbf{m}]$ и согласно (П.1.1) имеем

$$\delta\varepsilon = -b[\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}]\delta\theta. \quad (\text{П.1.4})$$

Но, с другой стороны, при изменении $\mathbf{m}$ меняется и равновесная функция распределения n_0 :

$$\delta n_0(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma}) = (1/2)(n^+ - n^-)[\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}]\delta\theta,$$

а с нею и энергия:

$$\delta\varepsilon = \text{Sp}_{\sigma'} \int f \delta n_0 \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \text{Sp}_{\sigma'} \int \frac{1}{2} f (n^+ - n^-) [\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}'] \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (\text{П.1.5})$$

Приравнявая (П.1.4) и (П.1.5) при произвольном $\delta\theta$, получаем

$$-b[\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}] = \text{Sp}_{\sigma'} \int \frac{1}{2} f (n^+ - n^-) [\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}'] \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Подставляя сюда (П.1.3), находим

$$b(\mathbf{p}) = - \int \zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') (n^+ - n^-) \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (\text{П.1.6})$$

Из формулы (П.1.6) можно найти условие возникновения ферромагнетизма. Рассмотрим случай бесконечно малого b . Тогда $n^+ - n^-$ может быть разложено по b :

$$n^+ - n^- \approx -2(\partial n_F(\varepsilon_0)/\partial\varepsilon_0)b.$$

Подставляя это в (П.1.6), получаем

$$b(\mathbf{p}) = -2 \int \zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') b(\mathbf{p}') \frac{dS'}{(2\pi\hbar)^3 v'}, \quad (\text{П.1.7})$$

где интегрирование идет по ферми-поверхности. В изотропной жидкости b зависит лишь от $|\mathbf{p}|$. Считая $|\mathbf{p}| = p_0$, получаем в (П.1.7) функцию ζ , зависящую лишь от угла $\theta = \widehat{(\mathbf{p}, \mathbf{p}')}$. Из (П.1.7) находим

$$Z_0 = \nu(\mu) \int \zeta(\theta) \frac{d\Omega}{4\pi} = -1.$$

Это — то же значение, которое получается из условия бесконечной парамагнитной восприимчивости (см. (13.16)). Итак, для существования ферромагнетизма нужно

$$Z_0 < -1. \quad (\text{П.1.8})$$

При наличии ферромагнетизма возникает новый тип спиновых волн. Для получения их спектра применим кинетическое уравнение в форме (13.25), которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} + \frac{i}{\hbar} [\varepsilon, n] = 0, \quad (\text{П.1.9})$$

где $[\varepsilon, n] = \varepsilon n - n\varepsilon$. Будем искать функцию распределения в виде $n = n_0 + \delta n$, где n_0 — равновесная функция (П.1.2), а δn зависит от координат и времени как $\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$.

Представим δn в виде суммы двух слагаемых, а именно зависящего и не зависящего от спина:

$$\delta n = \nu(\mathbf{p}) + \mathbf{v}(\mathbf{p}) \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{П.1.10})$$

и подставим функцию распределения $n_0 + \delta n$ в уравнение (П.1.9), учитывая изменение энергии при изменении функции распределения. Сохраняя члены, линейные по δn , получим систему уравнений для ν и $\mathbf{v}$.

Система уравнений распадается на две. Первая из них соответствует колебаниям плотности электронов и связанным с ними колебаниям проекции спина на направление магнитного поля $\nu_z = \mathbf{v}\mathbf{m}$. Однако, поскольку колебания электронной плотности сопровождаются изменением плотности заряда, необходимо учесть возникающее при этом электрическое поле. Это сразу приводит к частотам $\omega \sim \mu/\hbar$ аналогично тому, как это было в § 13.5; такие колебания могут не рассматриваться. Для нас представляет интерес лишь вторая система уравнений, соответствующая колебаниям поперечных компонент полного спина.

Заметим, что в неферромагнитных металлах, где в энергию и n_0 не входят члены с $\mathbf{m}$, колебания величины $\mathbf{v}$ не связаны с колебаниями плотности, и поэтому, в принципе, возможны спиновые волны с продольной поляризацией и линейной зависимостью ω от k (§ 13.6).

Введем вместо компонент ν_x и ν_y величины $\nu_{\pm} = \nu_x \pm i\nu_y$. Тогда из системы уравнений для ν_x и ν_y получим для $\nu_{\pm}$

$$\begin{aligned} -\omega\nu_{\pm} + \mathbf{k}\mathbf{v}\nu_{\pm} + [\mathbf{k}(\mathbf{v} - \mathbf{u})\delta(\varepsilon_0 - b - \mu) + \mathbf{k}(\mathbf{v} + \mathbf{u})\delta(\varepsilon_0 + b - \mu)] \times \\ \times \int \zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \nu_{\pm}(\mathbf{p}') \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} - \frac{2b}{\hbar} \nu_{\pm} - \\ - \frac{2}{\hbar} (n^{+} - n^{-}) \int \zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \nu_{\pm}(\mathbf{p}') \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (\text{П.1.11}) \end{aligned}$$

где $\mathbf{v} = \partial\varepsilon_0/\partial\mathbf{p}$, $\mathbf{u} = \partial b/\partial\mathbf{p}$.

Уравнение для ν_{-} отличается знаком у двух последних членов и формально может быть получено из (П.1.11) преобразованием $\omega \rightarrow -\omega$, $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$.

Будем решать уравнение (П.1.11) последовательными приближениями. При $\mathbf{k} = 0$ имеем

$$\omega^{(0)}\nu^{(0)} + \frac{2b}{\hbar}\nu^{(0)} + \frac{2}{\hbar}(n^+ - n^-) \int \zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \nu^{(0)}(\mathbf{p}') \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} = 0. \quad (\text{П.1.12})$$

Проинтегрируем это уравнение по $d^3\mathbf{p}$. В интеграле от последнего члена сделаем замену переменных $\mathbf{p} \rightleftharpoons \mathbf{p}'$. После этого условие (П.1.6) приводит к тому, что интегралы от двух последних членов сокращают друг друга. В результате имеем $\omega^{(0)} = 0$, а для $\nu^{(0)}$ получаем (с помощью (П.1.6))

$$\nu^{(0)} = A(n^+ - n^-),$$

где A — константа. Таким образом, изменение функции распределения в этом порядке пропорционально $(n^+ - n^-)\sigma_x$ или $(n^+ - n^-)\sigma_y$. Сравнивая с формулой (П.1.2), видим, что в этом случае колебания сводятся к повороту полного магнитного момента.

В следующем приближении по $\mathbf{k}$ имеем

$$\begin{aligned} A\omega^{(1)}(n^+ - n^-) + \frac{2b}{\hbar}\nu^{(1)} + \frac{2}{\hbar}(n^+ - n^-) \int \zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \nu^{(1)}(\mathbf{p}') \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} = \\ = A(\mathbf{k}\mathbf{v})(n^+ - n^-) - Ab[\mathbf{k}(\mathbf{v} - \mathbf{u})\delta(\varepsilon_0 - b - \mu) + \\ + \mathbf{k}(\mathbf{v} + \mathbf{u})\delta(\varepsilon_0 + b - \mu)] \quad (\text{П.1.13}) \end{aligned}$$

(здесь опять использовано соотношение (П.1.6)).

Проинтегрируем это уравнение по $d^3\mathbf{p}$, учитывая условие (П.1.6) и то обстоятельство, что функции ε_0 и b должны быть четными относительно $\mathbf{p}$, а следовательно, и $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — нечетные функции. При этом получаем $\omega^{(1)} = 0$, т. е. ω имеет по крайней мере второй порядок по $\mathbf{k}$.

Согласно уравнению (П.1.13) изменение функции распределения состоит из трех частей. Одна из них отлична от нуля в том интервале, где разность $n^+ - n^-$ не обращается в нуль. Две другие отличны от нуля только на соответствующих ферми-поверхностях и пропорциональны, соответственно, $\delta(\varepsilon_0 - b - \mu)$ и $\delta(\varepsilon_0 + b - \mu)$. Обозначим через ν_1 величину $\nu^{(1)}/A$ (эта величина уже не зависит от A) и представим ν_1 в виде

$$\begin{aligned} \nu_1 = B(\mathbf{p})(n^+ - n^-) - \\ - (\hbar/2)[\mathbf{k}(\mathbf{v} - \mathbf{u})\delta(\varepsilon_0 - b - \mu) + \mathbf{k}(\mathbf{v} + \mathbf{u})\delta(\varepsilon_0 + b - \mu)]. \quad (\text{П.1.14}) \end{aligned}$$

Подставив это в (П.1.13), находим уравнение для функции $B(\mathbf{p})$:

$$\begin{aligned} \frac{2b}{\hbar} B(\mathbf{p}) + \frac{2}{\hbar} \int \zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') B(\mathbf{p}') (n^+ - n^-) \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} = \\ = \mathbf{k}\mathbf{v} + \int \zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\mathbf{k}(\mathbf{v}' - \mathbf{u}')}{|\mathbf{v}' - \mathbf{u}'|} \frac{dS'}{(2\pi\hbar)^3} \Big|_{\varepsilon_0(\mathbf{p}') - b(\mathbf{p}') = \mu} + \\ + \int \zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\mathbf{k}(\mathbf{v}' + \mathbf{u}')}{|\mathbf{v}' + \mathbf{u}'|} \frac{dS'}{(2\pi\hbar)^3} \Big|_{\varepsilon_0(\mathbf{p}') + b(\mathbf{p}') = \mu}. \quad (\text{П.1.15}) \end{aligned}$$

В общем случае произвольной функции ζ это уравнение не решается относительно $B(\mathbf{p})$.

Для нахождения связи между ω и $\mathbf{k}$ напомним уравнение для $\nu^{(2)}$ и проинтегрируем его по $d^3 \mathbf{p}$. Это дает

$$\begin{aligned} \omega^{(2)} = \left\{ \int \mathbf{k}\mathbf{v} \nu_1 \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} + \int \int [\mathbf{k}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \delta(\varepsilon_0 - b - \mu) + \right. \\ \left. + \mathbf{k}(\mathbf{v} + \mathbf{u}) \delta(\varepsilon_0 + b - \mu)] \zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \nu_1(\mathbf{p}') \frac{d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^6} \right\} \times \\ \times \left[\int (n^+ - n^-) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

В эту формулу мы подставим выражение (П.1.13) и преобразуем его с помощью уравнения (П.1.15) для B . При этом получается

$$\begin{aligned} \omega^{(2)} = \left\{ \int \mathbf{k}\mathbf{v} (n^+ - n^-) B(\mathbf{p}) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} - \int b B(\mathbf{p}) \frac{\mathbf{k}(\mathbf{v} - \mathbf{u})}{|\mathbf{v} - \mathbf{u}|} \frac{dS}{(2\pi\hbar)^3} \Big|_{\varepsilon_0 - b = \mu} - \right. \\ \left. - \int b B(\mathbf{p}) \frac{\mathbf{k}(\mathbf{v} + \mathbf{u})}{|\mathbf{v} + \mathbf{u}|} \frac{dS}{(2\pi\hbar)^3} \Big|_{\varepsilon_0 + b = \mu} \right\} \times \\ \times \left[\int (n^+ - n^-) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \right]^{-1}. \quad (\text{П.1.16}) \end{aligned}$$

Ввиду того что, согласно (П.1.15), функция B — первого порядка по $\mathbf{k}$ и нечетна по $\mathbf{p}$, ясно, что ω — квадратичная функция $\mathbf{k}$.

Уравнения (П.1.15) и (П.1.16) полностью определяют $\omega(\mathbf{k})$. В простейшем случае $\zeta = \text{const}$ уравнение (П.1.15) решается. Действительно, ввиду того что B — нечетная функция квазиимпульса, а n^+ и n^- — четные, все интегралы в уравнении (П.1.15) обращаются в нуль. В результате получаем $B = \hbar \mathbf{k}\mathbf{v}/2b$. Подставляя это в (П.1.16)

и учитывая, что, согласно соотношению (П.1.16), при $\zeta = \text{const}$ функция $b(\mathbf{p})$ является константой, и $\mathbf{u} = \partial b / \partial \mathbf{p} = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \omega = & \left\{ \int \hbar (\mathbf{k}\mathbf{v})^2 (n^+ - n^-) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} - \right. \\ & \left. - \hbar b \int (\mathbf{k}\mathbf{v})^2 \frac{dS}{(2\pi\hbar)^3 v} \Big|_{\varepsilon_0 = \mu + b} - \hbar b \int (\mathbf{k}\mathbf{v})^2 \frac{dS}{(2\pi\hbar)^3 v} \Big|_{\varepsilon_0 = \mu - b} \right\} \times \\ & \times \left[2b \int (n^+ - n^-) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \right]^{-1}. \quad (\text{П.1.17}) \end{aligned}$$

Оценку для ω можно произвести с помощью модели, в которой $\varepsilon_0 = p^2/2m$. При этом оказывается, что $\omega \sim \hbar k^2 v^2 b / \mu^2$.

Итак, в ферромагнитном металле могут распространяться поперечные волны с частотой ω , пропорциональной k^2 . Им соответствуют квазичастицы с энергией $\hbar\omega = Ck^2$. Иногда их называют «магноны».

Приложение II

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ ВТОРОГО РОДА

Теория фазовых переходов изложена в большом числе монографий и учебников, и проще всего было бы отослать к ним читателя. В частности, можно рекомендовать книги [23, 281]. Однако для полноты изложения мы приведем здесь основные моменты этой теории.

Понятие фазовых переходов 2-го рода было предложено *Л. Д. Ландау* в 1937 г. [282]. Согласно его концепции это такие переходы, при которых состояние вещества меняется непрерывно, а симметрия меняется скачком. Примерами могут служить переходы магнетиков из парамагнитного состояния в ферро- или антиферромагнитное состояние, переход металла из нормального в сверхпроводящее состояние, некоторые структурные переходы кристаллов, в частности сегнетоэлектрические переходы, и др.

В соответствии с теорией Ландау во всех случаях фазовых переходов 2-го рода может быть определен некоторый параметр, характеризующий переход и называемый параметром порядка. Этот параметр с одной стороны от точки перехода равен нулю, а с другой стороны (т. е. в другой фазе) отличен от нуля. Например, при ферромагнитном переходе параметром порядка может служить спонтанная намагниченность M . В этом случае параметр порядка имеет три компоненты. При некоторых структурных переходах меняется вероятность расположения атомов в решетке. В таком случае разность вероятностей разных положений может служить параметром порядка. Тогда это скаляр. В случае сверхпроводящего перехода параметром порядка служит комплексная скалярная величина — когерентная волновая функция куперовских пар, находящихся в бозевском конденсате. При этом параметр порядка имеет две действительные компоненты. Бывают переходы и с большим числом компонент параметра порядка.

При фазовом переходе 2-го рода параметр порядка меняется непрерывно. Тем не менее в точке перехода он имеет особенность, ибо став

равным нулю, он таковым и остается дальше. Отсюда довольно очевидно, что и термодинамические величины должны иметь особенности в точке перехода. Это значит, что хотя параметр порядка и становится малым в окрестности точки перехода, но термодинамический потенциал, вообще говоря, не может быть разложен в ряд по степеням параметра порядка. Несмотря на это, мы сделаем первоначально предположение, что особенность является слабой (т.е. проявляется в далеких членах разложения) или имеет место в очень узкой окрестности точки фазового перехода, которую мы не будем рассматривать, и разложим термодинамический потенциал в ряд по степеням параметра порядка. Именно это и было сделано в теории Ландау [282].

В дальнейшем мы для простоты будем рассматривать скалярный параметр порядка (φ). Введем также некоторое «внешнее поле» (h), вызывающее появление конечного φ . В этом случае термодинамический потенциал в окрестности точки перехода можно записать в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1\varphi + \Phi_2\varphi^2 + \Phi_3\varphi^3 + \Phi_4\varphi^4 + \dots - Vh\varphi. \quad (\text{П.2.1})$$

Последний член описывает энергию, связанную с полем (наподобие — МН, см. приложение III), V — объем системы.

Коэффициенты в этом ряду являются функциями давления p и температуры T . Следует заметить, что в состоянии равновесия Φ может зависеть лишь от p и T . В этом случае в формуле (П.2.1) φ не является независимой переменной и определяется из условия минимума Φ .

Можно показать (см. [23]), что по соображениям симметрии во всех без исключения случаях фазовых переходов $\Phi_1 \equiv 0$. Это вполне очевидно в приведенных нами примерах. Поскольку Φ — действительная скалярная функция, то она вообще не может содержать нечетных степеней вектора или комплексной функции.

Итак, при малых φ основную роль играет член с φ^2 . Если коэффициент $\Phi_2 > 0$, то минимуму Φ соответствует $\varphi = 0$. Следовательно, для того чтобы ниже точки перехода минимуму термодинамического потенциала соответствовало $\varphi \neq 0$, коэффициент Φ_2 должен менять знак в точке перехода. Итак, получаем условие

$$\Phi_2^{(c)}(p, T) = 0. \quad (\text{П.2.2})$$

В приведенных выше примерах все члены, нечетные по φ , равны нулю и, следовательно, $\Phi_3 = 0$. Если это так, то условие (П.2.2) является единственным. Оно описывает кривую перехода $p(T)$. Однако, в противоположность коэффициенту Φ_1 , требования симметрии в некоторых случаях допускают конечность Φ_3 . Если условие (П.2.2) выполнено, то в самой точке перехода обязательно должно быть $\Phi_3 = 0$, $\Phi_4 > 0$, ибо равновесное значение параметра порядка в этой точке должно быть $\varphi = 0$. Но тогда получаем два уравнения для двух переменных, т.е. строго определенные значения p_c и T_c . В результате исследований последних лет выяснено, что эта ситуация соответствует,

в действительности, критической точке. Например, если речь идет о переходе газ — жидкость, то в качестве φ можно взять $\varphi = \rho - \rho_c$, где ρ — плотность, а $\rho_c = \rho(p_c, T_c)$ — критическая плотность. Очевидно, что член третьего порядка по φ не должен, вообще говоря, обращаться в нуль. Мы здесь не будем разбирать эту ситуацию и ограничимся истинными фазовыми переходами 2-го рода, т.е. случаем, когда $\Phi_3 \equiv 0$.

Для определенности зафиксируем давление и будем рассматривать лишь переход по температуре. Предполагая отсутствие особенности, мы можем разложить все коэффициенты в ряды по $T - T_c$, ибо вся теория относится лишь к окрестности перехода. Согласно условию (П.2.2) разложение Φ_2 должно начинаться с члена первого порядка. Запишем его в виде

$$\Phi_2 \approx \alpha \tau V/2, \quad (\text{П.2.3})$$

где мы ввели $\tau = (T - T_c)/T_c$. Поскольку при $T > T_c$ $\Phi_2 > 0$, то $\alpha > 0$. В самой точке перехода определяющую роль играет член с φ^4 . Для того чтобы минимуму Φ соответствовало $\varphi = 0$, необходимо выполнение условия $\Phi_4^{(c)} > 0$. Ввиду этого можно заменить Φ_4 на $\Phi_4(T_c) > 0$. Переобозначим этот коэффициент:

$$\Phi_4 \approx \Phi_4(T_c) \equiv bV/4. \quad (\text{П.2.4})$$

Итак, вместо (П.2.1), получаем

$$\Phi = \Phi_0 + (1/2) \alpha V \tau \varphi^2 + (1/4) bV \varphi^4 - h\varphi V. \quad (\text{П.2.5})$$

Рассмотрим сначала случай $h = 0$. Взяв производную по φ , получаем условие экстремума:

$$(\alpha \tau + b\varphi^2) \varphi = 0.$$

Это уравнение имеет решение $\varphi = 0$, которое соответствует минимуму, если $T > T_c$. В случае $T < T_c$ решение $\varphi = 0$ соответствует максимуму Φ , а минимуму отвечает другой корень, т.е.

$$\varphi_0 = (\alpha |\tau| / b)^{1/2}. \quad (\text{П.2.6})$$

Зная Φ , можно найти поведение энтропии и теплоемкости. Так как $(\partial\Phi/\partial\varphi)_T = 0$ (напоминаем, что $p = \text{const}$), то

$$\begin{aligned} S = -\partial\Phi/\partial T &= -(\partial\Phi/\partial T)_\varphi - (\partial\Phi/\partial\varphi)_T d\varphi/dT = \\ &= -(\partial\Phi/\partial T)_\varphi = S_0 - (\alpha V/2T_c) \varphi^2 = S_0 + \alpha^2 V \tau / 2bT_c. \end{aligned} \quad (\text{П.2.7})$$

При $T = T_c$ ($\tau = 0$) $S = S_0$, т.е. энтропия непрерывна, а следовательно, теплота фазового перехода $q = T(S_1 - S_2)$ равна нулю. Теплоемкость равна

$$C_p = T (\partial S/\partial T)_p = C_{p0} + \alpha^2 V / 2bT_c \quad (\text{П.2.8})$$

(мы здесь заменили $T \approx T_c$). Так как при $T > T_c$ $C_p = C_{p0}$, то из формулы (П.2.8) следует, что теплоемкость испытывает скачок при $T = T_c$.

Отметим, что значение $\varphi = 0$ ниже точки перехода отвечает максимуму Φ , а корень (П.2.6) выше точки перехода ($\tau > 0$) вообще отсутствует. Это означает, что, в противоположность фазовым переходам 1-го рода, при фазовых переходах 2-го рода отсутствуют метастабильные фазы (типа перегретой жидкости или переохлажденного пара). На опыте этот критерий часто является наиболее простым способом определения характера перехода.

Пусть теперь $h \neq 0$. Минимум Φ определяется уравнением

$$\alpha\tau\varphi + b\varphi^3 = h. \quad (\text{П.2.9})$$

Если $\tau = 0$ (напомним, что $\tau = (T - T_c)/T_c$), то

$$\varphi = (h/b)^{1/3}.$$

При $h \rightarrow 0$ можно определить магнитную восприимчивость $\chi = (\partial\varphi/\partial h)_{h \rightarrow 0}$. Из (П.2.7) находим

$$(\partial\varphi/\partial h)(\alpha\tau + 3b\varphi^2) = 1. \quad (\text{П.2.10})$$

При $\tau > 0$ подставим в скобку $\varphi = 0$ и получим

$$\chi = (\alpha\tau)^{-1}. \quad (\text{П.2.11})$$

Если же $\tau < 0$, мы подставим значение φ из (П.2.6). При этом получается

$$\chi = (2\alpha|\tau|)^{-1}. \quad (\text{П.2.12})$$

Итак, в окрестности точки перехода возникли степенные зависимости физических величин от τ и h :

$$\begin{aligned} \varphi(\tau, h=0) &\propto |\tau|^\beta, & \varphi(\tau=0, h) &\propto h^{1/\delta}, \\ C_p(\tau, 0) &\propto |\tau|^{-\alpha}, & \chi(\tau, 0) &\propto |\tau|^{-\gamma}, \end{aligned} \quad (\text{П.2.13})$$

где, согласно теории Ландау, $\beta = 1/2$, $\delta = 3$, $\alpha = 0$, $\gamma = 1$. На опыте степенные зависимости типа (П.2.13) действительно наблюдаются. Однако показатели степеней (они называются критическими показателями или критическими индексами) не всегда совпадают с предсказаниями теории Ландау.

Что же делает неправильной простую схему Ландау? Причину может подсказать сходство между фазовым переходом 2-го рода и критической точкой. Как известно, окрестность критической точки в жидкости характеризуется так называемой «критической опалесценцией». Речь идет о резком увеличении рассеяния света, обязанном

возрастанию флуктуаций плотности. Для фазового перехода 2-го рода наблюдается аналогичное явление: резкое возрастание диффузного рассеяния нейтронов в магнитном металле в окрестности ферромагнитного перехода. Это явление тоже связано с возрастанием флуктуаций. Понять это можно, если учесть, что в окрестности точки фазового перехода так же, как и около критической точки, фазы мало отличаются друг от друга, а потому флуктуации параметра порядка связаны с малым увеличением энергии.

Для того чтобы определить вероятность флуктуаций, сделаем предположение, что в некотором объеме V равновесной системы с полным объемом $V + V_0$ (V_0 — объем окружающей среды) возникла флуктуация с энергией ΔE . Однако поскольку объем V не изолирован, а погружен в среду, то при этом меняется и энергия среды. Полное изменение энергии равно

$$\Delta E_{\text{полн}} = \Delta E + \Delta E_0 = \Delta E - p_0 \Delta V_0 + T_0 \Delta S_0,$$

где индекс «0» относится к среде. Поскольку полный объем задан, то

$$\Delta V + \Delta V_0 = 0.$$

В то же время, ввиду того что речь идет о равновесной системе, энтропия не должна увеличиваться в результате флуктуации, т. е.

$$\Delta S + \Delta S_0 = 0.$$

Давление и температура постоянны вдоль всей системы. Отсюда следует

$$\Delta E_{\text{полн}} = \Delta E + p_0 \Delta V - T_0 \Delta S = \Delta(E + p_0 V - T_0 S) = \Delta \Phi,$$

где $\Delta \Phi$ — изменение термодинамического потенциала подсистемы с объемом V . Итак, приходим к выводу, что вероятность флуктуации

$$W \propto \exp(-\Delta E_{\text{полн}}/T) = \exp(-\Delta \Phi/T). \quad (\text{П.2.14})$$

Для того чтобы установить форму $\Delta \Phi$, сделаем предположение, что основную роль будут играть малые флуктуации параметра порядка, плавно меняющиеся по пространству, или, как говорят, длинноволновые флуктуации. Чтобы учесть возможность таких пространственных изменений, к термодинамическому потенциалу единицы объема надо добавить член $(1/2)c(\nabla \varphi)^2$. Поскольку параметр φ становится неоднородным, Φ записывается в виде интеграла

$$\Phi[\varphi] = \Phi_0 + \int \left[\frac{1}{2} c(\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} \alpha \tau \varphi^2 + \frac{1}{4} b \varphi^4 - h \varphi \right] dV. \quad (\text{П.2.15})$$

Такую форму называют функционалом Ландау: $\Phi[\varphi]$ определяется не числом φ , а функцией $\varphi(\mathbf{r})$.

Предположим, что не только равновесное значение $\varphi = \varphi_0$ мало, но флуктуации φ малы по сравнению с φ_0 :

$$\Delta\varphi \ll \varphi_0.$$

В этом случае можно разложить (П.2.15) в ряд по степеням $\Delta\varphi$. Представим $\Delta\varphi$ в виде интеграла Фурье

$$\Delta\varphi = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (\text{П.2.16})$$

Поскольку $\Delta\varphi$ действительно, то $\varphi_{-\mathbf{k}} = \varphi_{\mathbf{k}}^*$. Подставляя $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$ в (П.2.15) и выделяя часть, обязанную флуктуациям, получаем

$$\Delta\Phi = \sum_{\mathbf{k}} (ck^2 + \alpha\tau + 3\varphi_0^2 b) |\varphi_{\mathbf{k}}|^2. \quad (\text{П.2.17})$$

Мы здесь считаем, что $\Delta\varphi$ не содержит постоянной части, т.е. $\mathbf{k} \neq 0$ (постоянная часть включена в φ_0). Суммирование в (П.2.17) идет по полусфере направлений $\mathbf{k}$.

Если подставить (П.2.17) в вероятность флуктуаций (П.2.14), то W разбивается на произведение отдельных множителей с разными $\mathbf{k}$. Следовательно, флуктуации с разными $\mathbf{k}$, или разными длинами волн, в рассматриваемом приближении статистически не зависимы.

Найдем флуктуационный вклад в теплоемкость. Для этого надо определить флуктуационную часть термодинамического потенциала

$$\Phi_{\text{фл}} = -T \ln \sum e^{-\Delta\Phi/T},$$

где сумма берется по всем допустимым флуктуациям, т.е. всем комплексным амплитудам $\varphi_{\mathbf{k}}$. Подставляя (П.2.17), получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{фл}} &= -T \ln \prod_{\mathbf{k}} \int \exp \left[- \left(ck^2 + \alpha\tau + 3\varphi_0^2 b \right) |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 / T \right] d \operatorname{Re} \varphi_{\mathbf{k}} d \operatorname{Im} \varphi_{\mathbf{k}} = \\ &= -T \sum_{\mathbf{k}} \ln \int_0^\infty \exp \left[- \left(ck^2 + \alpha\tau + 3\varphi_0^2 b \right) |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 / T \right] \cdot 2\pi |\varphi_{\mathbf{k}}| d |\varphi_{\mathbf{k}}|. \end{aligned}$$

Мы перешли здесь к интегрированию по $|\varphi_{\mathbf{k}}|$ и фазе комплексного $\varphi_{\mathbf{k}}$. Взяв интеграл, получаем

$$\Phi_{\text{фл}} = -T \sum_{\mathbf{k}} \ln \left[\pi T / \left(ck^2 + \alpha\tau + 3\varphi_0^2 b \right) \right].$$

Для нахождения отсюда теплоемкости надо дважды продифференцировать $\Phi_{\text{фл}}$ по температуре. Наиболее расходящимся будет, очевидно, член, получаемый дифференцированием по $\tau = (T - T_c)/T_c$:

$$C_{\text{фл}} = -T \partial^2 \Phi_{\text{фл}} / \partial T^2 \approx -T_c^{-1} \partial^2 \Phi_{\text{фл}} / \partial \tau^2 = \alpha^2 \sum_{\mathbf{k}} \left(ck^2 + \alpha\tau + 3\varphi_0^2 b \right)^{-2}. \quad (\text{П.2.18})$$

Переходя от суммирования к интегрированию

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow V \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \rightarrow V \int k^2 \frac{dk}{(2\pi)^2}$$

(напоминаем, что мы интегрируем по полусфере), получаем

$$C_{\text{фл}} = \left(V \alpha^2 / 16 \pi c^3 \right)^{1/2} \left(\alpha \tau + 3 \varphi_0^2 b \right)^{-1/2}. \quad (\text{П.2.19})$$

Изложенный вывод называют теорией Орнштейна–Цернике [23].

Из выражения (П.2.19) следует, что если подставить $\varphi_0 = 0$ для $\tau > 0$ или φ_0 , согласно (П.2.6), для $\tau < 0$ получается

$$C_{\text{фл}} \propto |\tau|^{-1/2}.$$

При выводе предполагалось, что флуктуации являются малыми и длинноволновыми. Последнее подтверждается тем, что в интеграле по k (для теплоемкости!) наиболее существенной была область малых k . Что касается условия малости флуктуаций, то соответствующий критерий мы получим, если сравним флуктуационную добавку в теплоемкость со скачком теплоемкости, получаемым по теории Ландау. Выражение (П.2.19) должно быть мало по сравнению с добавкой к $C_{\text{р0}}$ в (П.2.8). Помня, что вся излагаемая теория годится лишь при $|\tau| \ll 1$, получаем (Леванюк, 1959; Гинзбург, 1960) [283, 284]

$$1 \gg |\tau| \gg b^2 T_c^2 / \alpha c^3. \quad (\text{П.2.20})$$

Отсюда видно, что если величина, ограничивающая $|\tau|$ снизу, мала, то теория Ландау имеет область применимости. Если же она порядка единицы, то теория Ландау не применима ни при каких температурах. Мы увидим вскоре, что нижний предел $|\tau|$ по порядку величины никогда не превышает единицу.

Вопрос о применимости теории Ландау должен быть проанализирован для каждого конкретного перехода. При этом в разных случаях получаются разные результаты. Например, при сверхпроводящем переходе нижний предел $|\tau|$ всегда очень мал, и теория Ландау применима практически всегда. При переходе в сверхтекучее состояние жидкого ^4He (изотопа гелия с атомной массой 4) теория Ландау лишена области применимости, а для сверхтекучего перехода жидкого ^3He она, наоборот, годится практически при всех температурах $|\tau| \ll 1$. При магнитных переходах, ферромагнитном и антиферромагнитном, правая часть в (П.2.20) порядка 0,1–0,2, т.е. теория Ландау имеет приближенный смысл, хотя в близкой (но вполне наблюдаемой) окрестности перехода возникают отклонения.

Критерий (П.2.20) выражен через параметры функционала Ландау (П.2.15), а не через микроскопические характеристики задачи, т.е.

через свойства частиц, составляющих систему, и их взаимодействий. Поэтому иногда его трудно применить к реальной системе. Это положение можно исправить. Рассмотрим систему при температуре значительно ниже T_c . Хотя функционал Ландау не годится для количественного описания, но для оценок им можно пользоваться. Характерная энергия единицы объема может быть определена как произведение энергии одной частицы, которую естественно считать порядка T_c , на плотность частиц, т.е. на $N/V \sim r_0^{-3}$, где r_0 — среднее расстояние между частицами. С другой стороны, согласно (П.2.15), та же величина порядка $b\varphi^4$, или $\alpha\varphi^2$ (считаем $\tau \sim 1$). Само $\varphi^2 \sim \alpha/b$. Отсюда имеем $r_0^3 \sim T_c b / \alpha^2$.

Во всякой системе движение частиц коррелировано на каких-то расстояниях. Радиус корреляции r_c может быть порядка r_0 , но может быть и значительно больше. Отражением этой корреляции является член $c(\nabla\varphi)^2$ в (П.2.15.) Строго говоря, он правилен лишь при большом радиусе корреляции, когда φ медленно меняется по пространству; иначе надо учитывать более высокие производные. Однако для оценок возьмем этот член. По порядку величины $c(\nabla\varphi)^2 \sim c\varphi^2/r_c^2$. Сравнивая его с $\alpha\tau\varphi^2$, находим (при $\tau \sim 1$): $r_c \sim (c/\alpha)^{1/2}$. Составим теперь отношение r_0^6/r_c^6 :

$$(r_0/r_c)^6 \sim b^2 T_c^2 / \alpha c^3. \quad (\text{П.2.21})$$

Правая часть совпадает с правой частью в (П.2.20). Отсюда следует, что надо знать отношение радиуса корреляции, или корреляционной длины, к межатомному расстоянию при температуре гораздо ниже T_c . Если это отношение существенно больше единицы, то теория Ландау имеет область применимости, если же оно порядка единицы, то теория Ландау не применима нигде. Очевидно, что корреляционная длина не может быть меньше межатомного расстояния, т.е. правая часть в (П.2.20) может быть либо малой, либо порядка единицы.

Если $|\tau| \ll b^2 T_c^2 / \alpha c^3$ (эта область называется критической), то флуктуации становятся большими, а потому ни теория Ландау, ни теория Орнштейна–Цернике, основывающаяся на идее малых флуктуаций, неприменимы. В качестве выхода из положения была предложена гипотеза масштабной инвариантности, или «скейлинга» (Паташинский и Покровский, 1964; Каданов, 1966) [285, 286].

Ранее уже говорилось о корреляционной длине r_c . Если определять ее вблизи T_c , приравнивая первые два члена функционала Ландау $c(\nabla\varphi)^2 \sim c\varphi^2/r_c^2 \sim \alpha\tau\varphi^2$, то она оказывается порядка

$$r_c \sim (c/\alpha\tau)^{1/2}. \quad (\text{П.2.22})$$

В действительности в критической области эта формула неверна, однако, естественно предположить, что в точной теории сохранится ее основное качественное следствие:

$$r_c \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow 0. \quad (\text{П.2.23})$$

В критической области вклад флуктуаций в термодинамические величины становится главным. Но корреляционная длина, определяющая характерный размер флуктуаций, при уменьшении τ растет. Ввиду этого в критической области свойства вещества определяются не взаимодействием отдельных частиц, а взаимодействием объемов с характерным линейным размером порядка r_c . Но в основе всего все-таки лежит взаимодействие отдельных частиц.

Связь между этими утверждениями устанавливается гипотезой масштабной инвариантности. Согласно этой гипотезе при переходе от взаимодействия отдельных частиц к взаимодействию объемов, содержащих несколько частиц, наиболее существенная часть взаимодействия сохранит свой вид с точностью до постоянного множителя, зависящего от отношения масштабов. Следовательно, появляется возможность переходить от одного масштаба к другому, т. е. мерять длины любым масштабом. При этом, однако, все физические соотношения, например $\varphi(\tau, 0)$, $\varphi(0, h)$, $\chi(\tau)$ и другие, не должны зависеть от выбора масштаба. Не должен изменяться и термодинамический потенциал всей системы.

Осуществить это требование можно следующим способом. Надо считать, что при изменении масштаба каждая физическая величина преобразуется по закону

$$A(\lambda \mathbf{r}) = \lambda^{-\Delta_A} A(\mathbf{r}), \quad (\text{П.2.24})$$

т. е. умножается на множитель $\lambda^{-\Delta_A}$, где Δ_A — некоторое характерное число, называемое аномальной размерностью величины A . Аномальная размерность совсем не должна совпадать со степенью длины в физической размерности. Все физические зависимости должны иметь форму степенных законов типа (П.2.13). Действительно, согласно (П.2.24)

$$\varphi(\lambda \mathbf{r}) = \lambda^{-\Delta_\varphi} \varphi(\mathbf{r}),$$

$$\tau(\lambda \mathbf{r}) = \lambda^{-\Delta_\tau} \tau(\mathbf{r}).$$

Для того чтобы $\varphi(\lambda \mathbf{r})$ было связано с $\tau(\lambda \mathbf{r})$ тем же соотношением, что $\varphi(\mathbf{r})$ с $\tau(\mathbf{r})$, множители, зависящие от λ , должны сократиться. Это возможно при степенной зависимости типа (П.2.13), где

$$\beta = \Delta_\varphi / \Delta_\tau. \quad (\text{П.2.25})$$

Таким образом, во-первых, устанавливается сам факт степенной зависимости $\varphi(\tau)$ (П.2.13), во-вторых, получается связь между критическим индексом β и аномальными размерностями Δ_φ и Δ_τ .

Следует отметить, что концепция масштабной инвариантности пока является гипотезой. В действительности при переходе от взаимодействий отдельных частиц к взаимодействию объемов получается совокупность членов сложного вида, и утверждение, что основную роль играет взаимодействие, подобное взаимодействию между отдельными

частицами, не может быть доказано. Например, для магнетиков при переходе от взаимодействия спинов отдельных атомов к взаимодействию объемов результат отнюдь не выражается как взаимодействие полных спинов этих объемов.

С другой стороны, физические зависимости типа (П.2.13), если они правильны, должны непосредственно вытекать из микроскопической теории, основывающейся на исходном взаимодействии отдельных частиц. Такая программа была проведена для нескольких моделей в двумерном пространстве, т.е. на плоскости; результаты соответствуют (П.2.13). Но пока это не удалось осуществить ни для одной, даже простейшей, трехмерной модели, не говоря уж о реальных физических системах. Тем не менее несомненный успех гипотезы масштабной инвариантности при объяснении экспериментальных данных сделал ее общепризнанной.

Сделав это отступление, мы продолжим изложение следствий гипотезы скейлинга. Будем для общности рассматривать не трехмерное, а d -мерное пространство. Это окажется полезным в дальнейшем. Последний член в функционале Ландау (П.2.15) надо рассматривать как определение поля h , вызывающего появление конечного параметра порядка при $\tau = 0$. Поэтому этот член должен сохранить свой вид при масштабном преобразовании. Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие $\lambda^{-\Delta_h} \lambda^{-\Delta_\varphi} \lambda^d = 1$, т.е.

$$\Delta_\varphi + \Delta_h = d. \quad (\text{П.2.26})$$

Магнитная восприимчивость равна $\chi = (\partial\varphi/\partial h)_{h=0}$. Следовательно, ее аномальная размерность есть $\Delta_\varphi - \Delta_h$. Из формулы (П.2.13) для $\chi(\tau)$ видно, что $-\gamma$ играет ту же роль, что и β в формуле $\varphi(\tau)$. Следовательно, $-\gamma = (\Delta_\varphi - \Delta_h)/\Delta_\tau$, т.е.

$$\gamma = (\Delta_h - \Delta_\varphi)/\Delta_\tau. \quad (\text{П.2.27})$$

Вторая из формул (П.2.13) аналогичным образом приводит к соотношению

$$\delta = \Delta_h/\Delta_\varphi. \quad (\text{П.2.28})$$

Индекс α относится к теплоемкости единицы объема. Следовательно, $C = -V_d^{-1} \partial^2 \Phi[\varphi]/\partial \tau^2$ (V_d — объем в пространстве d измерений). Так как Φ инвариант, то $\Delta_c = -2\Delta_\tau + d$. Согласно третьей формуле (П.2.13)

$$\alpha = 2 - d/\Delta_\tau. \quad (\text{П.2.29})$$

Вместо индекса Δ_φ обычно вводят индекс η согласно формуле

$$\Delta_\varphi = (1/2)(d - 2 + \eta). \quad (\text{П.2.30})$$

Происхождение этого определения следующее. Если бы в функционале Ландау не было члена с φ^4 , то флуктуации отдельных фурье-

компонент $\varphi_{\mathbf{k}}$ всегда были бы статистически независимы, как в случае малых флуктуаций. При этом размерность Δ_{φ} могла бы определяться из инвариантности первого члена (П.2.15): $2\Delta_{\varphi} + 2 - d = 0$, т. е. $\Delta_{\varphi} = (1/2)(d - 2)$. Наличие взаимодействия флуктуаций с разными $\mathbf{k}$ приводит как бы к появлению аномальной размерности у коэффициента c . Это учитывается введением дополнительного члена η в (П.2.30).

Наконец, определим критический индекс ν для корреляционной длины

$$r_c(\tau) \propto \tau^{-\nu}. \quad (\text{П.2.31})$$

При изменении масштаба r_c просто умножается на λ . Следовательно,

$$\nu = \Delta_{\tau}^{-1}. \quad (\text{П.2.32})$$

Исключим из (П.2.25)–(П.2.32) «нефизические» индексы и оставим лишь α , β , γ , δ , ν , η . Нетрудно проверить выполнение следующих формул:

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad \beta + \gamma = \beta\delta, \quad (2 - \eta)\nu = \gamma, \quad 2 - \alpha = d\nu. \quad (\text{П.2.33})$$

Итак, на шесть индексов накладываются четыре соотношения, т. е. только два из них являются независимыми. Следует отметить нетривиальность этого заключения. Введенные нами шесть индексов являются физически независимыми и определяются из совершенно различных экспериментов. Это создает возможность проверки гипотезы масштабной инвариантности. Во всех исследованных переходах она блестяще подтверждается.

Что касается двух независимых индексов, то их можно грубо разделить на основе того экспериментального факта, что индексы α и η малы. Полагая $\alpha, \eta = 0$, мы получаем из (П.2.33) для трехмерного случая

$$\nu = 2/3, \quad \gamma = 4/3, \quad \beta = 1/3, \quad \delta = 5. \quad (\text{П.2.34})$$

Эти числа дают приближенные значения индексов для любых переходов в трехмерном пространстве. Более точное вычисление с учетом α и η приводит к зависимости индексов от числа компонент параметра порядка. Различные фазовые переходы, имеющие параметры порядка с одним и тем же числом компонент, имеют одинаковые критические индексы и относятся, как говорят, к одному классу универсальности.

Точное вычисление критических индексов является сложной задачей и выходит за рамки данной книги. Мы здесь лишь укажем, что может быть использовано для данного вывода. Подставим в (П.2.33) индексы из теории Ландау: $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$, $\gamma = 1$, $\delta = 3$, $\eta = 0$, $\nu = 1/2$ (последнее следует из (П.2.22)). Первые три соотношения (П.2.33) выполняются, а последнее выполняется при $d = 4$. Размерность $d = 4$ является, как говорят, критической для теории Ландау. Формально теория Ландау относится к любому числу измерений. При $d > 4$

флуктуационная поправка всегда мала и теория Ландау является точной (хотя физических объектов с $d > 4$ и не имеется). Если же $d < 4$, то флуктуационная поправка в критической области велика.

В случае $d = 4$ возникает особая, так называемая логарифмическая ситуация. Основные флуктуационные поправки расходятся не степенным образом, а как $\ln |\tau|$. Примером может служить вычисленный ранее интеграл (П.2.18) для первой флуктуационной поправки к теплоемкости. При $d = 4$

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow V_4 \int k^3 dk, \quad C_{\text{фл}} \propto \ln |\tau|.$$

При логарифмической ситуации особые части всех величин могут быть вычислены точно. Они выражаются не степенями τ , а степенями $\ln |\tau|$. Интересно отметить, что реально существуют фазовые переходы в некоторых сегнетоэлектриках и антиферромагнетиках, симулирующие четырехмерную ситуацию (*Ларкин, Хмельницкий, 1969*) [287].

Для обычного трехмерного случая индексы удалось вычислить *Вильсону и Фишеру* (1972) [288], которые обобщили теорию на пространство с нецелым числом измерений и затем нашли разложения индексов по $\varepsilon = 4 - d$ (истинный параметр разложения есть $\varepsilon(n+2)/(n+8)$, где n — число компонент параметра порядка). Результаты оказались в удовлетворительном согласии с опытом (см. [281]).

Приложение III

ТЕРМОДИНАМИКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Начнем с уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = (4\pi/c) \mathbf{j} + c^{-1} \partial \mathbf{D} / \partial t, \quad (\text{П.3.1})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{B} / \partial t, \quad (\text{П.3.2})$$

где $\mathbf{E}$ — электрическое поле, $\mathbf{D}$ — электрическое смещение, $\mathbf{H}$ — магнитное поле, $\mathbf{B}$ — магнитная индукция. Умножим уравнение (П.3.1) скалярно на $\mathbf{E}$ и вычтем из него уравнение (П.3.2), скалярно умноженное на $\mathbf{H}$. При этом получаем

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = (4\pi/c) \mathbf{j} \mathbf{E} + c^{-1} (\mathbf{E} \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{H} \partial \mathbf{B} / \partial t).$$

Выражение с левой стороны равно $-\operatorname{div}[\mathbf{E} \mathbf{H}]$.

Запишем полученное соотношение в виде

$$-\mathbf{j} \mathbf{E} = (c/4\pi) \operatorname{div}[\mathbf{E} \mathbf{H}] + (4\pi)^{-1} (\mathbf{E} \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{H} \partial \mathbf{B} / \partial t). \quad (\text{П.3.3})$$

Теперь проинтегрируем по объему системы и по малому интервалу времени δt :

$$-\int \mathbf{j} \mathbf{E} dV \delta t = (c/4\pi) \int \delta t \oint [\mathbf{E} \mathbf{H}] d\mathbf{S} + (4\pi)^{-1} \int (\mathbf{E} \delta \mathbf{D} + \mathbf{H} \delta \mathbf{B}) dV \quad (\text{П.3.4})$$

(мы воспользовались теоремой Гаусса $\int \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \oint \mathbf{a} d\mathbf{S}$). Соотношения (П.3.3) и (П.3.4) представляют собой разные формы теоремы Пойнтинга, выражающей закон сохранения энергии в электродинамике. Если написать $\mathbf{j} = n_e e \mathbf{v}$, где n_e — плотность электронов, а e — заряд, то $\mathbf{j} \mathbf{E} = n_e e \mathbf{E} \mathbf{v}$, но $e \mathbf{E}$ — сила, действующая на электроны, а следовательно, $\mathbf{j} \mathbf{E} \delta t = n_e e \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{r}$ — работа, произведенная полем

над системой электронов. Взятая с обратным знаком, эта величина выражает изменение энергии системы. Это изменение складывается из двух частей. Первый член правой части выражает поток энергии через поверхность тела, а второй — изменение энергии поля.

Нас будет интересовать лишь второй член, причем для случая, когда имеется лишь магнитное поле, т. е. при $\mathbf{E}, \mathbf{D} = 0$. В соответствии с полученным результатом изменение свободной энергии в магнитном поле равно

$$dF = dF_0 + (4\pi)^{-1} \mathbf{H} d\mathbf{B} = -S dT - p dV + (4\pi)^{-1} \mathbf{H} d\mathbf{B}. \quad (\text{П.3.5})$$

Таким образом, свободная энергия является термодинамическим потенциалом, зависящим от переменных T , V и $\mathbf{B}$. Это неудобно, ибо величина $\mathbf{B}$ является усредненным значением микроскопического поля в образце. На опыте мы не можем зафиксировать эту величину, а можем задать внешнее поле; поэтому надо перейти к соответствующему термодинамическому потенциалу. Для этой цели вычтем из F величину $\mathbf{H}\mathbf{B}/4\pi$. При этом получаем

$$dF_H = d[F - \mathbf{H}\mathbf{B}/4\pi] = dF_0 - (4\pi)^{-1} \mathbf{B} d\mathbf{H}. \quad (\text{П.3.6})$$

Часто пользуются свободной энергией $F'_H = F_H + H^2/8\pi$. Для нее

$$dF'_H = dF_0 - (4\pi)^{-1} (\mathbf{B} - \mathbf{H}) d\mathbf{H} = dF_0 - \mathbf{M} d\mathbf{H}, \quad (\text{П.3.7})$$

где $\mathbf{M}$ — намагниченность, связанная с $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ соотношением

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}. \quad (\text{П.3.8})$$

Свободные энергии F_H и F'_H зависят от максвелловского поля $\mathbf{H}$. Это поле совпадает с внешним для цилиндрической геометрии, т. е. для случая, когда цилиндрический образец произвольного сечения помещен в продольное магнитное поле. Если между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ имеется линейное соотношение: $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$, $\mu = 1 + 4\pi\chi$, μ — магнитная проницаемость, а χ — магнитная восприимчивость, то соотношения (П.3.5)–(П.3.7) можно проинтегрировать. При этом получается

$$F = F_0 + B^2/8\pi\mu, \quad (\text{П.3.9})$$

$$F_H = F_0 - \mu H^2/8\pi, \quad (\text{П.3.10})$$

$$F'_H = F_0 - \chi H^2/2 = F_0 - \mathbf{M}\mathbf{H}/2. \quad (\text{П.3.11})$$

Однако не всегда приходится иметь дело с цилиндрической геометрией. При иной геометрии максвелловское поле $\mathbf{H}$ не имеет четкого физического смысла. В реальной постановке опыта образец произвольной формы помещается в однородное магнитное поле, создаваемое

внешними источниками тока. При этом поле в окрестности образца искажается. Однако на большом расстоянии от образца поле сохраняется тем же, что и в отсутствие образца. Именно это поле и может быть задано. Не приводя вывода, мы напишем здесь лишь результат (вывод см. в [289]). Удобным термодинамическим потенциалом в этом случае является аналог свободной энергии F'_H , но не для единицы объема, а для всего изучаемого объема. Для нее имеется соотношение

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 - \mathcal{M} \mathbf{H}_0 / 2, \quad (\text{П.3.12})$$

где $\mathcal{F}_0 = F_0 V$ — свободная энергия в отсутствие поля, $\mathbf{H}_0$ — поле на бесконечности,

$$\mathcal{M} = \int \mathbf{M} dV \quad (\text{П.3.13})$$

— полный магнитный момент образца.

Выражение (П.3.12) описывает полную свободную энергию; в частности, она включает изменение энергии, связанное с искажением поля вокруг образца. Во многих параграфах речь будет идти о магнитном образце, имеющем форму эллипсоида, помещенном во внешнее магнитное поле, однородное на бесконечности. В этом случае можно показать, что максвелловское поле внутри образца $\mathbf{H}_i$ однородно, параллельно внешнему полю на бесконечности и равно

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_0 - 4\pi n \mathbf{M}. \quad (\text{П.3.14})$$

Здесь $\mathbf{M}$ — намагниченность образца, а n — так называемый размагничивающий множитель, зависящий лишь от геометрии образца, т. е. от отношений полуосей эллипсоида и его ориентации относительно внешнего поля. Магнитная индукция $\mathbf{B}$ равна

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}_i + 4\pi \mathbf{M}. \quad (\text{П.3.15})$$

Именно $\mathbf{B}$ определяет среднее поле в образце.

Поле вне образца получается решением уравнений Максвелла в вакууме

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (\text{П.3.16})$$

с соответствующими граничными условиями

$$H_{\text{вак}\parallel} = H_{i\parallel}, \quad H_{\text{вак}\perp} = B_{\text{вак}\perp} = B_{i\perp}. \quad (\text{П.3.17})$$

Величины справа являются пределами, взятыми «изнутри».

Рассмотрим для примера задачу о шаре. Пусть магнитная проницаемость шара равна μ . Уравнения для поля внутри шара есть $\text{rot } \mathbf{H}_i = 0$, $\text{div } \mathbf{B} = 0$, или, что то же самое, $\text{div } \mathbf{H}_i = 0$ ($\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}_i$). Следовательно, и снаружи, и внутри шара можно ввести потенциал φ и написать

$$\mathbf{H} = \nabla \varphi, \quad \Delta \varphi = 0. \quad (\text{П.3.18})$$

В сферических координатах с учетом симметрии задачи имеем

$$\partial^2 \varphi / \partial r^2 + (2/r) \partial \varphi / \partial r + (r^2 \sin \theta)^{-1} (\partial / \partial \theta) (\sin \theta \partial \varphi / \partial \theta) = 0. \quad (\text{П.3.19})$$

Граничными условиями являются формулы (П.3.17) и $\varphi = H_0 z = H_0 r \cos \theta$ при $r \rightarrow \infty$. Нетрудно увидеть, что решение имеет вид

$$\varphi = \begin{cases} (H_0 r + A r^{-3}) \cos \theta, & r > R, \\ H_i r \cos \theta \quad (\text{т. е. } H_i = H_{iz} = \text{const}), & r < R, \end{cases}$$

где R — радиус шара, A и H_i — константы. Подстановка в граничные условия (П.3.17) дает

$$H_i = 3H_0/(2 + \mu), \quad A = H_0 R^3 (1 - \mu)/(2 + \mu). \quad (\text{П.3.20})$$

Вводя $M = (B - H_i)/4\pi = (\mu - 1)H_i/4\pi$ и записывая H_i в форме (П.3.14), находим $n = 1/3$. Аналогичным образом можно найти следующие значения n : $n = 0$ для цилиндра в продольном поле, $n = 1/2$ для цилиндра в поперечном поле, $n = 1$ для диска в поле, нормальном к его плоскости.

Список литературы

1. *Пайерлс Р.* Квантовая теория твердых тел. — М.: ИЛ. 1956.
2. *Ландау Л. Д.* // ЖЭТФ. 1941. Т. 11. С. 581.
3. *Ландау Л. Д.* // ЖЭТФ. 1956. Т. 30. С. 1058.
4. *Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. — М.: ГИФМЛ, 1962. М.: Добросвет, 1998.
5. *Luttinger J. M., Ward J. C.* // Phys. Rev. 1960. V. 118. P. 1417; V. 119. P. 1153.
6. *Friedel J.* // Phil. Mag. 1952. V. 43. P. 153; Phil. Mag. Suppl. 1954. V. 3. P. 446; Nuovo Cimento Suppl. 1958. V. 7. P. 287.
7. *Гуржи Р. Н.* // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1415;
Гуржи Р. Н., Копелиович А. И. // ЖЭТФ. 1973. Т. 64. С. 380.
8. *Померанчук И. Я.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 992.
9. *Зернов В. Б., Шарвин Ю. В.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 1038.
10. *Kondo J.* // Progr. Theor. Phys. 1964. V. 32. P. 37.
11. *Алексеевский Н. Е., Гайдуков Ю. П.* // ЖЭТФ. 1956. Т. 31. С. 947; 1957. Т. 32. С. 1589.
12. *Wilson K.* In: Nobel Symposium—24. Collective Properties of Physical Systems, 1974. Academic Press, S. 14; Rev. Mod. Phys. 1975. V. 47. P. 773.
13. *Abrikosov A. A.* // Physics. 1965. V. 2. P. 21.
14. *Suhl H.* // Phys. Rev. A. 1965. V. 138. P. 515; Physics. 1965. V. 2. P. 39.
15. *Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И.* // ЖЭТФ. 1956. Т. 31. С. 63.
16. *Sampsel J. B., Garland J. C.* // Phys. Rev. B. 1976. V. 13. P. 583.
17. *Лифшиц И. М., Песчанский В. Г.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 1251.
18. *Алексеевский Н. Е., Гайдуков Ю. П., Лифшиц И. М., Песчанский В. Г.* // ЖЭТФ. 1960. Т. 39. С. 1201.
19. *Justi E.* // Phys. Z. 1940. V. 41. P. 563.
20. *Дрейзин Ю. А., Дыхне А. М.* // ЖЭТФ. 1972. Т. 63. С. 242.
21. *Kapiza P. L.* // Proc. Roy. Soc. A. 1929. V. 123. P. 292.
22. *Алексеевский Н. Е., Гайдуков Ю. П.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 554.
23. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. — М.: Наука, 1976.
24. *Kondo J.* // Progr. Theor. Phys. 1965. V. 34. P. 372.

25. Азбель М. Я., Каганов М. И., Лифшиц И. М. // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 1188.
26. Бычков Ю. А., Гуревич Л. Э., Недлин Г. М. // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 534.
27. Лифшиц И. М. // ЖЭТФ. 1960. Т. 38. С. 1569.
28. Егоров В. С., Федоров А. Н. // Письма ЖЭТФ. 1982. Т. 35. С. 375; Егоров В. С., Лавренюк М. Ю., Минина Н. Я., Савин А. М. // Письма ЖЭТФ. 1984. Т. 40. С. 25.
29. London H. // Proc. Roy. Soc. A. 1940. V. 176. P. 522.
30. Reuter G. E., Sondheimer E. H. // Proc. Roy. Soc. A. 1948. V. 195. P. 336.
31. Фальковский Л. А. // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. С. 838; J. Low-Temp. Phys. 1979. V. 36. P. 713.
32. Азбель М. Я., Канер Э. А. // ЖЭТФ. 1956. Т. 32. С. 896.
33. Фальковский Л. А. // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 775.
34. Falkovsky L. A. // Adv. Phys. 1983. V. 32. P. 753.
35. Хайкин М. С. // ЖЭТФ. 1961. Т. 41. С. 1773.
36. Долгополов В. Т. // ЖЭТФ. 1975. Т. 68. С. 355.
37. Долгополов В. Т. // УФН. 1980. Т. 130. С. 241.
38. Канер Э. А. // ДАН. 1958. Т. 119. С. 471.
39. Володин А. П., Хайкин М. С., Эдельман В. С. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 2105.
40. Азбель М. Я. // ЖЭТФ. 1960. Т. 39. С. 14.
41. Гантмахер В. Ф. // ЖЭТФ. 1962. Т. 43. С. 345.
42. Канер Э. А. // ЖЭТФ. 1963. Т. 44. С. 1036.
43. Sondheimer E. H. // Phys. Rev. 1950. V. 80. P. 401.
44. Гуревич В. Л. // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 669.
45. Гантмахер В. Ф., Канер Э. А. // ЖЭТФ. 1963. Т. 45. С. 1430.
46. Гантмахер В. Ф., Шарвин Ю. В. // ЖЭТФ. 1965. Т. 48. С. 1077.
47. Константинов О. В., Перель В. И. // ЖЭТФ. 1960. Т. 38. С. 161.
48. Хайкин М. С., Фальковский Л. А., Эдельман В. С., Мина Р. Т. // ЖЭТФ. 1963. Т. 45. С. 1704.
49. Канер Э. А., Скобов В. Г. // ЖЭТФ. 1963. Т. 45. С. 610.
50. Хайкин М. С., Эдельман В. С. // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. С. 1695.
51. Landau L. D. // Phys. Z. 1930. Bd 64. S. 629.
52. Onsager L. // Phil. Mag. 1952. V. 43. P. 1006.
53. London F. Superfluids. — N. Y.: John Wiley and Sons, 1950. V. 1.
54. Schoenberg D. // Proc. Roy. Soc. A. 1939. V. 170. P. 341.
55. De Haas W. J., van Alphen P. M. // Leiden Commun. A. 1930. V. 212. P. 215; Proc. Amsterdam Acad. Sci. 1930. V. 33. P. 1106.
56. Лифшиц И. М., Косевич А. М. // ЖЭТФ. 1955. Т. 29. С. 730.
57. Брандт Н. Б., Венцель В. А. // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 1081.
58. Dingle R. B. // Proc. Roy. Soc. A. 1952. V. 211. P. 517.

59. *Peierls R. E.* // *Phys. Z.* 1933. Bd 81. S. 186.
60. *Schoenberg D.* // *Phil. Trans. Roy. Soc. A.* 1962. V. 255. P. 85.
61. *Pippard A. B.* // *Proc. Roy. Soc. A.* 1963. V. 272. P. 192.
62. *Condon J. H.* // *Phys. Rev.* 1966. V. 145. P. 526.
63. *Condon J. H., Walstedt R. E.* // *Phys. Rev. Lett.* 1968. V. 21. P. 612.
64. *Азбель М. Я.* // *ЖЭТФ.* 1967. Т. 53. С. 1751.
65. *Привороцкий И. А.* // *ЖЭТФ.* 1967. Т. 52. С. 1755.
66. *Cohen M. H., Falikov L. M.* // *Phys. Rev. Lett.* 1961. V. 7. P. 231.
67. *Blount E. I.* // *Phys. Rev.* 1962. V. 126. P. 1636.
68. *Schubnikov L. W., De Haas W. J.* // *Leiden Commun.* 1930. V. 207. P. 210; *Proc. Amsterdam Acad. Sci.* 1930. V. 33. P. 418.
69. *Лифишиц Е. М., Питаевский Л. П.* *Физическая кинетика.* — М.: Наука, 1979.
70. *Абрикосов А. А.* // *ЖЭТФ.* 1969. Т. 56. С. 1391.
71. *Adams E. N., Holstein T. D.* // *J. Phys. a. Chem. Solids.* 1959. V. 10. P. 254.
72. *Азбель М. Я.* // *ЖЭТФ.* 1958. Т. 34. С. 969. 1158.
73. *Kaner E. A., Skobov V. G.* // *Adv. Phys.* 1968. V. 17. P. 605.
74. *Хайкин М. С.* // *ЖЭТФ.* 1960. Т. 39. С. 212; *УФН.* 1968. Т. 96. С. 409.
75. *Nee T. W., Prange R. E.* // *Physics Lett. A.* 1967. V. 25. P. 583.
76. *Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е.* // *УФН.* 1982. Т. 136. С. 536.
77. *Горьков Л. П., Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е.* // *Письма ЖЭТФ.* 1979. Т. 30. С. 248.
78. *Altshuler B. L., Aronov A. G., Khmelnsky D. E.* // *J. Phys. C.* 1982. V. 15. P. 7367.
79. *Altshuler B. L., Khmelnsky D. E., Larkin A. I., Lee P. A.* // *Phys. Rev. B.* 1980. V. 20. P. 5142;
Альтшулер Б. Л. Докт. дисс.— ЛИЯФ АН СССР, 1983.
80. *Альтшулер Б. Л., Аронов А. Г., Спивак Б. З.* // *Письма ЖЭТФ.* 1981. Т. 33. С. 101.
81. *Aharonov Y., Bohm D.* // *Phys. Rev.* 1959. V. 115. P. 485.
82. *Шарвин Д. Ю., Шарвин Ю. В.* // *Письма ЖЭТФ.* 1981. Т. 34. С. 285.
83. *Sharvin Yu. V.* // *Physica B.* 1984. V. 126. P. 288.
84. *Hikami S., Larkin A. I., Nagaoka Y.* // *Progr. Theor. Phys.* 1980. V. 63. P. 707.
85. *Gershenson M. E., Gubankov V. N.* // *Sol. State Commun.* 1982. V. 41. P. 33.
86. *Bergmann G.* // *Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 48. P. 1046; *Phys. Rev. B.* 1982. V. 25. P. 2937.
87. *Альтшулер Б. Л., Аронов А. Г.* // *ЖЭТФ.* 1979. Т. 77. С. 2028.
88. *Anderson P. W.* // *Phys. Rev.* 1958. V. 109. P. 1492.

89. *Mott N. F., Twose W. D.* // *Adv. Phys.* 1961. V. 10. P. 107.
90. *Thouless D. J.* // *Phys. Rev. Lett.* 1977. V. 39. P. 1167.
91. *Березинский В. Л.* // *ЖЭТФ.* 1973. Т. 65. С. 1251.
92. *Efetov K. B.* // *Adv. Phys.* 1983. V. 32. P. 53.
93. *Abrahams E., Anderson P. W., Licciardello D. C., Ramakrishnan T. V.* // *Phys. Rev. Lett.* 1979. V. 42. P. 673.
94. *Hess H. F., De Conde K., Rosenbaum T. F., Thomas G. A.* // *Phys. Rev. B*, 1982. V. 25. P. 5578;
Brandt N. B., Demishev S. V., Dmitriev A. A., Moshchalkov V. B. // *Sol. State Commun.* 1981. V. 37. P. 643.
95. *Abrikosov A. A., Ryzhkin I. A.* // *Adv. Phys.* 1978. V. 27. P. 147;
Abrikosov A. A. // *Sol. State Commun.* 1981. V. 37. P. 997.
96. *Gurvitch M.* // *Phys. Rev. B.* 1983. V. 28. P. 544.
97. *Абрикосов А. А., Фальковский Л. А.* // *ЖЭТФ.* 1962. Т. 43. С. 1090.
98. *Mott N. F.* // *Phil. Mag.* 1961. V. 6. P. 287;
Мотт Н., Дэвис Э. Электронные процессы в некристаллических веществах. — М.: Мир, 1974;
Мотт Н. Ф. Переходы металл — изолятор. — М.: Наука, 1979.
99. *Ахизер А. И., Каганов М. И., Любарский Г. Я.* // *ЖЭТФ.* 1957. Т. 32. С. 837.
100. *Скобов В. Г.* Канд. дисс. — ИФП АН СССР, 1962.
101. *Bottmel H.* // *Phys. Rev.* 1955. V. 100. P. 758.
102. *Pippard A. B.* // *Phil. Mag.* 1957. V. 2. P. 1147.
103. *Канер Э. А., Песчанский В. Г., Привороцкий И. А.* // *ЖЭТФ.* 1961. Т. 40. С. 214.
104. *Гуревич В. Л.* // *ЖЭТФ.* 1959. Т. 37. С. 71.
105. *Гальперин Ю. М., Каган В. Д., Козуб В. И.* // *ЖЭТФ.* 1972. Т. 62. С. 1521.
106. *Гальперин Ю. М., Козуб В. И.* // *ФТТ.* 1975. Т. 17. С. 2222.
107. *Гальперин Ю. М., Гуревич В. Л., Козуб В. И.* // *УФН.* 1979. Т. 128. С. 107.
108. *Гуревич В. Л., Скобов В. Г., Фирсов Ю. А.* // *ЖЭТФ.* 1961. Т. 40. С. 786.
109. *Shapira Y., Lax B.* // *Phys. Rev. A.* 1965. V. 138. P. 1191.
110. *Ландау Л. Д.* // *ЖЭТФ.* 1957. Т. 32. С. 59.
111. *Силин В. П.* // *ЖЭТФ.* 1958. Т. 35. С. 1243.
112. *Dyson F. J.* // *Phys. Rev.* 1955. V. 98. P. 349.
113. *Азбель М. Я., Герасименко В. И., Лифшиц И. М.* // *ЖЭТФ.* 1956. Т. 31. С. 357; 1957. Т. 32. С. 1212.
114. *Platzman P. M., Wolff P. A.* // *Phys. Rev. Lett.* 1967. V. 18. P. 280.
115. *Schultz S., Dunifer G.* // *Phys. Rev. Lett.* 1967. V. 18. P. 283.
116. *Nozieres P.* // *J. Low-Temp. Phys.* 1974. V. 17. P. 13.

117. *Tsvelick A. M., Wiegmann P. B.* // *Adv. Phys.* 1983. V. 32. P. 453.
118. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. — М.: Наука, 1974.
119. *Nozieres P., Blandin A.* // *J. Phys. (Fr.)*. 1980. V. 41. P. 193.
120. *Mihaly L. M., Zawadowsky A.* // *J. Phys. Lett. (Fr.)*. 1978. V. 39. P. L483.
121. *Займан Дж.* Вычисление блоховских функций. — М.: Мир, 1973.
122. Достижения электронной теории металлов / Под ред. П. Цише и Г. Леманна. — М.: Мир, 1984.
123. *Herring G.* // *Phys. Rev.* 1940. V. 57. P. 1169.
124. *Phillips J. C., Kleinman L.* // *Phys. Rev.* 1959. V. 116. P. 287, 880.
125. *Bassani F., Celli V.* // *Nuovo Cim.* 1959. V. 11. P. 805.
126. *Cohen M. H., Heine V.* // *Phys. Rev.* 1961. V. 122. P. 1821.
127. *Austin B. J., Heine V., Sham L. J.* // *Phys. Rev.* 1962. V. 127. P. 276.
128. *Brust D.* // *Phys. Rev. A.* 1964. V. 134. P. 1337.
129. *Falikov L. M., Golin S.* // *Phys. Rev. A.* 1965. V. 137. P. 871.
130. *Heine V., Abarenkov I.* // *Phil. Mag.* 1964. V. 9. P. 451; 1965. V. 12. P. 529.
131. *Shaw R. W.* // *Phys. Rev.* 1968. V. 174. P. 769.
132. *Harrison W. A.* // *Phys. Rev.* 1959. V. 116. P. 555; 1960. V. 118. P. 1182.
133. *Абрикосов А. А.* // *ЖЭТФ.* 1960. Т. 39. С. 1797; 1961. Т. 41. С. 569.
134. *Onnes H. K.* // *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden.* 1911. № 119b, 120b, 122b, 124c.
135. *Onnes H. K.* // *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden.* 1914. № 139f.
136. *Silsbee F. B.* // *J. Wash. Acad. Sci.* 1916. V. 6. P. 597.
137. *Meissner W., Ochsenfeld R.* // *Naturwiss.* 1933. V. 21. P. 787.
138. *Corak W. S., Goodman B. B., Satterthwaite C. B., Wexler A.* // *Phys. Rev.* 1954. V. 96. P. 1442; 1956. V. 102. P. 656;
Corak W. S., Satterthwaite C. W. // *Phys. Rev.* 1954. V. 99. P. 1660.
139. *Peierls R. E.* // *Proc. Roy. Soc. A.* 1936. V. 155. P. 613.
140. *London F.* // *Physica.* 1936. V. 3. P. 450.
141. *Landau L. D.* // *Phys. Z. (USSR).* 1937. Bd 11. S. 129.
142. *Мешковский А. Г., Шальников А. И.* // *ЖЭТФ.* 1947. Т. 17. С. 851.
143. *Шарвин Ю. В., Балашова Б. М.* // *ЖЭТФ.* 1956. Т. 31. С. 40;
Шарвин Ю. В. // *ЖЭТФ.* 1957. Т. 33. С. 1341.
144. *Laeng R., Rinderer L.* // *Cryogenics.* 1972. V. 12. P. 315.
145. *Андреев А. Ф.* // *ЖЭТФ.* 1966. Т. 51. С. 1510.
146. *London F.* Une conception nouvelle de la supraconductibilite. — Paris, 1937.
147. *Шенберг Д.* Сверхпроводимость. — М.: ИЛ, 1955.
148. *Андреев А. Ф.* // *ЖЭТФ.* 1968. Т. 54. С. 1510.

149. *London F., London H.* // Proc. Roy. Soc. A. 1935. V. 149. P. 71; Physica. 1935. V. 2. P. 341.
150. *Bardeen J., Cooper L.N., Schrieffer J.R.* // Phys. Rev. 1957. V. 106. P. 162; V. 108. P. 1175.
151. *Боголюбов Н.Н.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 58; Nuovo cim. 1958. V. 7. P. 794.
152. *Боголюбов Н.Н., Толмачев В.В., Ширков Д.В.* Новый метод в теории сверхпроводимости. — М.: Наука, 1958.
153. *Капица П.Л.* // ДАН СССР. 1938. Т. 18. С. 21; Nature. 1938. V. 141. P. 74.
154. *Landau L.D.* // J. Phys. (USSR). 1941. V. 5. P. 71; 1947. V. 11. P. 91; ЖЭТФ. 1944. Т. 11. С. 592.
155. *Maxwell E.* // Phys. Rev. 1950. V. 78. P. 477.
156. *Reynolds C.A., Serin B., Wright W.H., Nesbitt L.B.* — Phys. Rev. 1950. V. 78. P. 487.
157. *Fröhlich H.* // Phys. Rev. 1950. V. 79. P. 845.
158. *Bardeen J.* // Phys. Rev. 1950. V. 79. P. 167; V. 80. P. 567; 1951. V. 81. P. 829, 1070; V. 82. P. 987.
159. *Cooper L.N.* // Phys. Rev. 1956. V. 104. P. 1189.
160. *Абрикосов А.А., Халатников И.М.* // УФН. 1958. Т. 95. С. 551.
161. *Leggett A.J.* // Rev. Mod. Phys. 1975. V. 47. P. 33.
162. *Wheatley J.C.* // Rev. Mod. Phys. 1975. V. 47. P. 415.
163. *Покровский В.Л.* // ЖЭТФ. 1961. Т. 40. С. 641.
164. *Pippard A.B.* // Proc. Roy. Soc. A. 1953. V. 216. P. 547.
165. *Pippard A.B.* // Phil. Trans. Roy. Soc. A. 1955. V. 248. P. 97.
166. *Абрикосов А.А.* // ДАН СССР. 1952. Т. 86. С. 489.
167. *Заварицкий Н.В.* // ДАН СССР. 1952. Т. 86. С. 501.
168. *Горьков Л.П.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 1918.
169. *Горьков Л.П.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 833.
170. *Абрикосов А.А., Горьков Л.П.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 1558; 1959. Т. 36. С. 319.
171. *Горьков Л.П.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 1407.
172. *Helfand E., Werthamer N.R.* // Phys. Rev. 1966. V. 147. P. 288.
173. *Anderson P.W.* In: Proc. 8-th Int. Conf. Low-Temp. Phys.—London, 1963.
174. *Хохенберг П.* // ЖЭТФ. 1963. Т. 45. С. 1208.
175. Проблема высокотемпературной сверхпроводимости / Под ред. В.Л. Гинзбурга и Д.А. Киржница. — М.: Наука, 1977.
176. *McMillan M.L.* // Phys. Rev. 1968. V. 167. P. 331.
177. *Schneider T.* // Helv. Phys. Asta. 1969. V. 42. P. 957.
178. *Абрикосов А.А.* // Письма ЖЭТФ. 1978. Т. 27. С. 235; J. Less-Common Met. 1978. V. 62. P. 451.
179. *Halperin B.I., Rice T.M.* // Rev. Mod. Phys. 1968. V. 40. P. 755.

180. *Little W. A.* // Phys. Rev. A. 1964. V. 134. P. 1416.
181. *Гинзбург В. Л.* // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 2318; Phys. Lett. 1964. V. 13. P. 10; УФН. 1968. Т. 95. С. 91; 1970. Т. 101. С. 185; 1976. Т. 118. С. 315.
182. *Rice T. M.* // Phys. Rev. A. 1965. V. 140. P. 1889.
183. *Allender D., Bray J., Bardeen J.* // Phys. Rev. B. 1973. V. 7. P. 1020; V. 8. P. 4433.
184. *Дзялошинский И. Е., Кац Е. И.* // ЖЭТФ. 1968. Т. 55. С. 338.
185. *Gamble F. R., Klemm R. A., Di Salvo F. J., Geballe T. H.* — N. Y.: Science, 1976. V. 168. P. 568.
186. *Хайкин М. С., Хлюстиков И. Н.* // Письма ЖЭТФ. 1981. Т. 33. С. 167; Т. 34. С. 207; 1983. Т. 38. С. 191.
187. *Harris R., Lewis L. J., Zuckermann M. J.* // J. Phys. F. 1983. V. 13. P. 2323.
188. *Brandt N. B., Moshchalkov V. V.* // Adv. Phys. 1984. V. 33. P. 373; *Stewart G. R.* // Rev. Mod. Phys. 1984. V. 56. P. 755.
189. *Abrahams E., Kulik I. O.* — Kharkov: Preprint FTINT, 1977; *Кулик И. О., Педан А. Г.* // ЖЭТФ. 1980. Т. 79. С. 1469; ФНТ. 1982. Т. 8. С. 236; 1983. Т. 9. С. 256.
190. *Булаевский Л. Н., Собянин А. А., Хомский Д. И.* // ЖЭТФ. 1984. Т. 87. С. 1490; *Alexandrov A. S., Ranninger J., Robaszkiewicz S.* // Phys. Rev. B. 1986. V. 33. P. 4526.
191. *Kulik I. O.* — Kharkov: Preprint FTINT, 1984.
192. *Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д.* // ЖЭТФ. 1950. Т. 20. С. 1064.
193. *Горьков Л. П.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 735.
194. *Гинзбург В. Л.* // ДАН СССР. 1952. Т. 83. С. 385.
195. *Заварицкий Н. В.* // ДАН СССР. 1951. Т. 78. С. 665.
196. *Doll R., Nabauer M.* // Phys. Rev. Lett. 1961. V. 7. P. 51; *Deaver D. S., Fairbank W. M.* // Phys. Rev. Lett. 1961. V. 7. P. 43.
197. *Little W. A., Parks R. D.* // Phys. Rev. Lett. 1962. V. 9. P. 9; Phys. Rev. A. 1964. V. 133. P. 97.
198. *Абрикосов А. А.* // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 1442.
199. *Горьков Л. П.* // ЖЭТФ. 1963. Т. 44. С. 767.
200. *Clogston A. M.* // Phys. Rev. Lett. 1962. V. 9. P. 266.
201. *Onsager L.* // Nuovo Cim. Suppl. 1949. V. 6. P. 249.
202. *Feynman R. P.* In: Progress Low-Temp. Phys. — Amsterdam: North Holland, 1955. V. 1. Ch. 11.
203. *Сан-Жам Д., Сарма Г., Томас Е.* Сверхпроводимость второго рода. — М.: Мир, 1970.
204. *Kleiner W. H., Roth L. M., Autler S. H.* // Phys. Rev. A. 1964. V. 133. P. 1226.

205. *Cribier D., Jacrot B., Rao L. M., Farnoux B.* // Phys. Lett. 1964. V. 9. P. 106.
206. *Essmann U., Träuble H.* // Phys. Lett. A. 1967. V. 24. P. 526; Phys. Stat. Sol. 1967. V. 20. P. 95.
207. *Saint-James D., De Gennes P. G.* // Phys. Lett. 1963. V. 7. P. 306.
208. *Абрикосов А. А.* // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 720.
209. *Saint-James D.* // Phys. Lett. 1965. V. 16. P. 218.
210. *Кулик И. О.* // ЖЭТФ. 1968. Т. 55. С. 889.
211. *Ахмедов С. Ш., Карасик В. Р., Русинов А. И.* // ЖЭТФ. 1969. Т. 56. С. 444.
212. *Bean C. P., Livingston J. D.* // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 12. P. 14.
213. *Caroli C., Matricon J.* // Phys. Kond. Materie. 1965. V. 3. P. 380;
Caroli C., De Gennes P. G., Matricon J. // J. Phys. Lett. (Fr.). V. 9. P. 307
214. *Абрикосов А. А.* // ЖЭТФ. 1964. Т. 46. С. 1464.
215. *Pearl J.* // J. Appl. Phys. Lett. 1964. V. 5. P. 65.
216. *Anderson P. W.* // Phys. Rev. Lett. 1962. V. 9. P. 209;
Anderson P. W., Kim Y. B. // Rev. Mod. Phys. 1964. V. 36. P. 39.
217. *Aronov A. G., Galperin Yu. M., Gurevich V. L., Kozub V. I.* // Adv. Phys. 1981. V. 30. P. 539.
218. *Гейликман Б. Т.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 1042.
219. *Гальперин Ю. М., Гуревич В. Л., Козуб В. И.* // Письма ЖЭТФ. 1973. Т. 17. С. 687; ЖЭТФ. 1974. Т. 66. С. 1387.
220. *Заварицкий Н. В.* // Письма ЖЭТФ. 1974. Т. 19. С. 205.
221. *Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Халатников И. М.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 265; 1959. Т. 37. С. 187.
222. *Mattis D. C., Bardeen J.* // Phys. Rev. 1958. V. 111. P. 412.
223. *Biondi M. A., Garfunkel M. P.* // Phys. Rev. 1959. V. 116. P. 853.
224. *Абрикосов А. А., Фальковский Л. А.* // ЖЭТФ. 1961. Т. 40. С. 262;
Абрикосов А. А., Генкин В. М. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 842.
225. *Элиашберг Г. М.* // Письма ЖЭТФ. 1970. Т. 11. С. 186;
Ивлев Б. И., Элиашберг Г. М. // Письма ЖЭТФ. 1971. Т. 13. С. 464.
226. *Wyatt A. F., Dmitriev V. M., Moore W. S., Sheard F. W.* // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 16. P. 1166.
227. *Асламазов Л. Г., Ларкин А. И.* // ЖЭТФ. 1978. Т. 74. С. 2184.
228. *Aslamasov L. G., Larkin A. I.* // Phys. Lett. A. V. 26. P. 238.
229. *Glover R. E.* // Phys. Lett. A. 1967. V. 25. P. 542.
230. *Maki K.* // Progr. Theor. Phys. 1968. V. 39. P. 897; V. 40. P. 193;
Thompson R. S. // Phys. Rev. B. 1970. V. 1. P. 327.
231. *Meissner H.* // Phys. Rev. 1958. V. 109. P. 686; 1960. V. 117. P. 672;
Phys. Rev. Lett. 1959. V. 2. P. 458.
232. *Зайцев Р. О.* // ЖЭТФ. 1965. Т. 48. С. 664, 1759.

233. Werthamer N. R. // Phys. Rev. 1963. V. 132. P. 2440.
234. Андреев А. Ф. // ЖЭТФ. 1964. Т. 46. С. 182, 1823; Т. 47. С. 2222.
235. Крылов И. П., Шарвин Ю. В. // Письма ЖЭТФ. 1970. Т. 12. С. 102; ЖЭТФ. 1973. Т. 64. С. 946.
236. Андреев А. Ф. // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. С. 655.
237. Заварицкий Н. В. // Письма ЖЭТФ. 1965. Т. 2. С. 168.
238. Абрикосов А. А., Горьков Л. П. // ЖЭТФ. 1960. Т. 39. С. 178.
239. Maki K. In: Superconductivity, ed. R. D. Parks, Ch. 18. — N. Y.: Marcel Dekker, 1969.
240. Ларкин А. И., Овчинников Ю. Н. // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1136.
241. Fulde P., Ferrel R. A. // Phys. Rev. A. 1964. V. 135. P. 550.
242. Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. — М.: Мир, 1968.
243. Асламазов Л. Г., Ларкин А. И. // ЖЭТФ. 1968. Т. 55. С. 1477.
244. Bulaevskii L. N., Buzdin A. I., Kulic M. L., Panjukov S. V. // Adv. Phys. 1985. V. 34. P. 175.
245. Ruderman M. A., Kittel C. // Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 99;
Kasuya T. // Progr. Theor. Phys. 1956. V. 16. P. 45;
Yosida K. // Phys. Rev. 1957. V. 106. P. 893.
246. Anderson P. W., Suhl H. // Phys. Rev. 1959. V. 116. P. 898.
247. Абрикосов А. А., Горьков Л. П. // ЖЭТФ. 1962. Т. 43. С. 2230.
248. Knight W. D. // Phys. Rev. 1949. V. 76. P. 1259.
249. Абрикосов А. А., Горьков Л. П. // ЖЭТФ. 1960. Т. 39. С. 480; 1962. Т. 42. С. 1089.
250. Giaever I. // Phys. Rev. Lett. 1960. V. 5. P. 147.
251. Giaever I. // Phys. Rev. Lett. 1960. V. 5. P. 464;
Nicol J., Shapiro S., Smith P. H. // Phys. Rev. Lett. 1960. V. 5. P. 461.
252. Josephson B. D. // Phys. Lett. 1962. V. 1. P. 251; Rev. Mod. Phys. 1964. V. 36. P. 216.
253. Ambegoakar V., Baratoff A. // Phys. Rev. Lett. 1963. V. 10. P. 486; V. 11. P. 104.
254. Лифишиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. Часть II. — М.: Наука, 1978.
255. Бароне А., Патерно Дж. Эффект Джозефсона (физика и применения). — М.: Мир, 1984.
256. Асламазов Л. Г., Ларкин А. И. // Письма ЖЭТФ. 1969. Т. 9. С. 150.
257. Rowell J. M. // Phys. Rev. Lett. 1963. V. 11. P. 200.
258. Ferrel R., Prange R. // Phys. Rev. Lett. 1963. V. 10. P. 479.
259. Josephson B. D. // Adv. Phys. 1965. V. 14. P. 419.

260. *McCumber D. E.* // J. Appl. Phys. 1968. V. 39. P. 2503, 3113.
261. *Stewart W. C.* // Appl. Phys. Lett. 1968. V. 12. P. 277;
Johnson W. J. Ph. D. Thesis. — Univ. Wisconsin, 1968.
262. *Shapiro S.* // Phys. Rev. Lett. 1963. V. 11. P. 80;
Shapiro S., Janus A. R., Holly S. // Rev. Mod. Phys. 1964. V. 36. P. 223.
263. *Grimes C. C., Shapiro S.* // Phys. Rev. 1968. V. 169. P. 397.
264. *Eck R. E., Scalapino D. J., Taylor B. N.* // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 13. P. 15.
265. *Swihart J. C.* // J. Appl. Phys. 1961. V. 32. P. 461.
266. *Кулик И. О.* // Письма ЖЭТФ. 1965. Т. 2. С. 134.
267. *Дмитриенко И. М., Янсон И. К., Свистунов В. М.* // Письма ЖЭТФ. 1965. Т. 2. С. 17.
268. *Fiske M. D.* // Rev. Mod. Phys. 1964. V. 36. P. 221.
269. *Янсон И. К., Свистунов В. М., Дмитриенко И. М.* // ЖЭТФ. 1965. Т. 48. С. 976.
270. *Langenberg D., Scalapino D., Taylor B., Eck R.* // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. P. 294.
271. *Алфеев В. Н.* Сверхпроводники, полупроводники, параэлектрики в крио-электронике. — М.: Сов. радио, 1979.
272. *Асламазов Л. Г., Фистуль М. В.* // Письма ЖЭТФ. 1979. Т. 30. С. 233; ЖЭТФ. 1981. Т. 81. С. 382; 1982. Т. 83. С. 1170; 1984. Т. 86. С. 1516.
273. *Meyer J., Minnigerode G. V.* // Phys. Lett. A. 1972. V. 38. P. 529.
274. *Ивлев В. И., Копнин Н. Б.* // Письма ЖЭТФ. 1978. Т. 28. С. 640.
275. *Anderson P. W.* // Rev. Mod. Phys. 1966. V. 38. P. 298.
276. *Little W. A.* // Phys. Rev. 1967. V. 156. P. 398.
277. *Langer J. S., Ambegoakar V.* // Phys. Rev. 1967. V. 164. P. 498.
278. *Skocpol W. J., Beasley M. R., Tinkham M.* // J. Low-Temp. Phys. 1974. V. 16. P. 145.
279. *Iulev B. I., Корнин Н. В.* // Adv. Phys. 1984. V. 33. P. 47.
280. *Абрикосов А. А., Дзялошинский И. Е.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 771.
281. *Паташинский А. З., Покровский В. Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. — М.: Наука, 1982.
282. *Ландау Л. Д.* // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. С. 19; Phys. Z. (USSR). 1937. Bd 11. S. 26.
283. *Леванюк А. П.* // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 810.
284. *Гинзбург В. Л.* // ФТТ. 1960. Т. 2. С. 2034.
285. *Паташинский А. З., Покровский В. Л.* // ЖЭТФ. 1964. Т. 46. С. 994; 1966. Т. 50. С. 439.

286. *Kadanoff L. P.* // *Physics*. 1966. V. 2. P. 263.
287. *Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е.* // *ЖЭТФ*. 1969. Т. 56. С. 2087.
288. *Wilson K. G., Fisher M. E.* // *Phys. Rev. Lett.* 1972. V. 28. P. 240.
289. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
290. *Каган Ю. М., Жернов А. П.* // *ЖЭТФ*. 1971. Т. 60. С. 1832.
291. *Бровман Е. Г., Каган Ю. М.* // *УФН*. 1974. Т. 112. С. 369.
292. *Жернов А. П., Каган Ю. М.* // *ФТТ*. 1978. Т. 20. С. 3306.
293. *Альтшулер Б. Л.* // *Письма ЖЭТФ*. 1985. Т. 41. С. 530.
294. *Eds. B. Kramer, G. Bergmann, Y. Bruynseraede.* Localisation, Interaction and Transport Phenomena / Springer Series in Solid—State Physics. 1984. V. 61.
295. *Альтшулер Б. Л., Хмельницкий Д. Е.* // *Письма ЖЭТФ*. 1985. Т. 42. С. 291.
296. *Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е.* // *ЖЭТФ*. 1986. Т. 91. С. 1815.
297. *Stone A. D., Imry Y.* // *Phys. Rev. Lett.* 1986. V. 56. P. 189.

Литература, добавленная во второе издание

298. *Косевич А. М.* Теория кристаллической решетки. — Харьков: Вища школа, 1988.
299. *Ю П., Кардона М.* Основы физики полупроводников. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
300. *Фальковский Л. А., Бродовой А. В., Лашкарев Г. В.* Магнитная восприимчивость узкощелевых полупроводников // *ЖЭТФ*. 1981. Т. 80. С. 334.
301. *Гантмахер В. Ф.* Электроны в неупорядоченных средах. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
302. *Имри Й.* Введение в мезоскопическую физику. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
303. *Dagotto E.* Correlated electrons in high-temperature superconductors // *Rev. Mod. Phys.* 1994. V. 66. P. 763.
304. *Blatter G., Feigel'man M. V., Geshkenbein V. B., Larkin A. I., Vinokur V. M.* Vortices in high-temperature superconductors // *Rev. Mod. Phys.* 1994. V. 66. P. 1125.
305. *Superconductivity. V. 1–2.* Edited by Bennemann K. H., Ketterson J. B. — Springer, 2008.
306. *Stewart G. R.* Heavy-fermion systems // *Rev. Mod. Phys.* 1984. V. 56. P. 755.
307. *Варламов А. А., Ларкин А. И.* Теория флуктуаций в сверхпроводниках. — М.: Добросвет, 2007.
308. *Devereaux T. P., Hackl R.* Inelastic light scattering // *Rev. Mod. Phys.* 2007. V. 79. P. 175.

309. *Casalbuoni R., Naradulli G.* Inhomogeneous superconductivity in condensed matter and QCD // *Rev. Mod. Phys.* 2004. V. 76. P. 263.
310. *Ирхин В.Ю., Ирхин Ю.П.* Электронная структура, физические свойства и корреляционные эффекты в *d*- и *f*-металлах и их соединениях. — Екатеринбург, УрО РАН, 2004.

Книги по теории нормальных металлов и сверхпроводников

1. *Ашкрофт Н., Мермин П.* Физика твердого тела. — М.: Мир, 1979.
2. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. — М.: Наука, 1978.
3. *Займан Дж.* Принципы теории твердого тела. — М.: Мир, 1966.
4. Достижения электронной теории металлов / Под ред. П. Цише и Г. Леманна. — М.: Мир, 1984.
5. *Пайерлс Р.* Квантовая теория твердых тел. — М.: ИЛ, 1956.
6. *Займан Дж.* Вычисление блоховских функций — М.: Мир, 1973.
7. *Харрисон У.* Псевдопотенциалы в теории металлов. — М.: Мир, 1968.
8. *Пайнс Д., Нозьер Ф.* Теория квантовых жидкостей. Нормальные ферми-жидкости. — М.: Мир, 1967.
9. *Харрисон У.* Теория твердого тела. — М.: Мир, 1972.
10. Физика металлов. Т. I. Электроны / Под ред. Дж. Займана. — М.: Мир, 1972.
11. *Джонс Г.* Теория зон Бриллюэна и электронные состояния в кристаллах. — М.: Мир, 1968.
12. *Каллуэй Дж.* Теория энергетической зонной структуры. — М.: Мир, 1969.
13. *Займан Дж.* Электроны и фононы. — М.: ИЛ, 1962.
14. *Лифшиц И.М., Азбель М.Я., Каганов М.И.* Электронная теория металлов. — М.: Наука, 1971.
15. *Брандт Н.Б., Чудинов С.М.* Электронная структура металлов. — М.: Изд-во МГУ, 1973.
16. *Гантмахер В.Ф., Левинсон И.Б.* Рассеяние носителей тока в металлах и полупроводниках. — М.: Наука, 1984.
17. *Мотт Н., Дэвис Э.* Электронные процессы в некристаллических веществах. — М.: Мир, 1974.
18. *Ястребов Л.И., Кацнельсон А.А.* Основы одноэлектронной теории твердого тела. — М.: Наука, 1981.
19. *Брандт Н.Б., Чудинов С.М.* Экспериментальные методы исследования энергетических спектров электронов и фононов в металлах. — М.: Изд-во МГУ, 1983.
20. Электроны проводимости / Под ред. М.И. Каганова и В.С. Эдельмана. — М.: Наука, 1985.
21. *Мотт Н.Ф.* Переходы металл—изолятор. — М.: Наука, 1979.

22. *Вонсовский С. В., Кацнельсон М. И.* Квантовая физика твердого тела. — М.: Наука, 1983.
23. *Тинкхам М.* Введение в сверхпроводимость. — М.: Атомиздат, 1980.
24. *Шриффер Дж.* Теория сверхпроводимости. — М.: Наука, 1970.
25. *Лихарев К. К.* Введение в динамику джозефсоновских переходов. — М.: Наука, 1985.
26. *Шенберг Д.* Сверхпроводимость. — М.: ИЛ, 1955.
27. *Линтон Э.* Сверхпроводимость. — М.: Мир, 1971.
28. *Шмидт В. В.* Введение в физику сверхпроводников. — М.: Наука, 1982.
29. *Бароне А., Патерно Дж.* Эффект Джозефсона. Физика и применения. — М.: Мир, 1984.
30. *Сан-Жам Д., Сарма Г., Томас Е.* Сверхпроводимость второго рода. — М.: Мир, 1970.
31. *Де Жен П.* Сверхпроводимость металлов и сплавов. — М.: Мир, 1968.
32. *Кулик И. О., Янсон И. К.* Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. — М.: Наука, 1970.
33. *Вонсовский С. В., Изюмов Ю. А., Курмаев Э. З.* Сверхпроводимость переходных металлов, их сплавов и соединений. — М.: Наука, 1977.
34. *Коэн М., Глэдстоун Г., Йенсен М., Шриффер Дж.* Сверхпроводимость полупроводников и переходных металлов. — М.: Мир, 1972.
35. *Роуз-Инс А., Родерик Е.* Введение в физику сверхпроводимости. — М.: Мир, 1972.
36. *Гейликман Б. Т., Кресин В. З.* Кинетические и нестационарные явления в сверхпроводниках. — М.: Наука, 1972.
37. *Буккель В.* Сверхпроводимость. — М.: Мир, 1975.
38. *Бремер Дж.* Сверхпроводящие устройства. — М.: Мир, 1964.
39. *Солимар Л.* Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение. — М.: Мир, 1974.
40. *Альтов В. А., Зенкевич В. Б., Кремлев М. Г., Сычев В. В.* Стабилизация сверхпроводящих магнитных систем. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
41. *Алфеев В. Н.* Сверхпроводники, полупроводники, параэлектрики в криоэлектронике. — М.: Сов. радио, 1979.
42. *Минц Р. Г., Рахманов А. Л.* Неустойчивости в сверхпроводниках. — М.: Наука, 1984.
43. *Дмитриенко И. М.* В мире сверхпроводимости. — Киев: Наукова думка, 1981.
44. *Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В.* Новый метод в теории сверхпроводимости. — М.: Наука, 1958.

45. Проблема высокотемпературной сверхпроводимости / Под ред. В. Л. Гинзбурга и Д. А. Киржница. — М.: Наука, 1977.
46. Гинзбург В. Л. Сверхпроводимость. — М.; Л., 1946.
47. Асламазов Л. Г., Губанков Н. Н. Слабая сверхпроводимость. — М.: Знание, 1962.
48. Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. — М.: Наука, 1982.

Предметный указатель

Аномальная проводимость Маки–Томсона 477

Баллистическая прозрачность 157

Бозе-конденсат куперовских пар 336, 381, 459, 493

Верхнее критическое поле 406

Вихревая решетка 425, 431, 450, 451, 453, 550, 551

Вихри абрикосовские 408

— в джозефсоновском контакте 533, 534

— в сверхтекучем гелии 407

Волны Свихарта 540, 541, 548

Вторичное квантование 60, 61, 339, 340

Газовая модель 33, 34, 37

Гауссова кривизна 132

Гигантские осцилляции импеданса 206

Глубина проникновения в инфракрасном диапазоне 278

— — джозефсоновская 532

— — лондоновская 359

— — пиппардовская 353

— — постоянного поля в сверхпроводнике 314–316

— — скиновая 123–125

Граница Ферми 108, 486

Групповая скорость 45

Двойниковая граница 377

Двухуровневые системы 377

Дебаевская частота 63, 350

Дебаевский радиус 57

Джозефсоновские элементы 548, 549

Джозефсоновский интерферометр 546

— ток 522, 523

Динамические фазовые переходы 151

Дифракция нейтронов 425, 502

Дифференциальная термо-э.д.с. 108–111

Диффузионный поток 53, 54

Длина свободного пробега 53, 58, 76, 103, 124, 165, 281

Добавка интерференционная к проводимости 220, 221, 231

Доменная магнитная структура 502

Закон Блоха 66

— Видемана–Франца 52, 53, 115

— Дебая 42

Затухание Ландау 173

Захваченный магнитный поток 400

Звукоэлектрический эффект 253

Зона Бриллюэна 18, 19, 24, 25

— валентная 37

— проводимости 35–38

Изотопический эффект 331

Импеданс 123, 125

Импульс Ферми 30

Импульсная нелинейность 253

Интеграл столкновений 46, 48, 67, 69, 135, 136, 203, 292, 456, 457

Квазиимпульс 16

Квазиклассическая волновая функция 272

Квазиклассические уровни в магнитном поле 182

Квазиодномерные соединения 375
Квазичастицы 28
— в металле 37
— в сверхпроводнике 465, 469, 516
— в ферми-жидкости 263–265
Квант магнитного потока 272, 401
Квантование колебаний решетки 28, 60, 337
— магнитного потока 272, 401, 402, 404
Кинетическое уравнение 51–53, 109, 114, 127
— — в присутствии магнитного поля 84, 89, 114, 168
Комбинационное рассеяние света в сверхпроводнике 465
Кондактанс 223
Константа Холла 91, 96, 100
Контактная разность потенциалов 108
Корреляционная длина в сверхпроводнике 352, 360, 363
Коэффициент диффузии 53, 54, 102–104
— Пельтье 109
— Томсона 109
Криотрон 548
Крип вихревой решетки 453
Критерий Леванюка–Гинзбурга 571
— сверхтекучести 330
Критическая концентрация 493
— область 572, 573
— опалесценция 568
— плотность тока 522, 549
Критические индексы 568, 575
Критический профиль тока 452
Критическое магнитное поле 314

Ларморовская частота 87
Ларморовский радиус 92
Локализационная поправка к проводимости 223
ЛОФФ-фаза 498, 501, 502, 509

Магноны 564
Максвелловское внутреннее поле 578, 579

Масштабная инвариантность (скейлинг) 572–574
Металлические стекла 228, 377–379
Металлический водород 371, 372
— экситоний 372, 373
Метод Хейне–Абаренкова–Шоу 301
— самосогласованного поля 507
— туннельного гамильтониана 524
Минимальная металлическая проводимость 229
Множитель Динглия 190

Нижнее критическое поле 405

Обменная энергия 219
Обратная решетка 15–19
— —, элементарная ячейка 16, 17
Операторы рождения и уничтожения фононов 337
— — — — электронов 338
Осцилляции де Гааза–ван Альфена 190, 193, 199, 201
— проводимости 202
— Фриделя 58
Открытые траектории 98, 99, 102, 117, 165, 166, 184
Отражение электронов диффузное 128
— — зеркальное 128, 135, 206
Отрицательное магнитосопротивление 215, 216

Парамагнетизм Паули 176
Парамагнитный предел Клогстона 406, 407
— резонанс 280, 281
Параметр Гинзбурга–Ландау 365, 384
— порядка 346, 375, 385, 402, 425, 484, 494, 565, 566, 569
Переход Мотта 229
— экситонный 228, 229
— 2,5 рода 117, 118
Плотность состояний в электронном спектре 38
Поверхностный барьер Бина–Ливингстона 437

- Поглощение электромагнитных волн в сверхпроводнике 464
Полуметаллы 37, 229, 261, 262
Постоянная Лоренца 52
Почти ферромагнитные металлы 272
Правило Колера 92, 93
— квантования Бора 407
— Сильсби 314
— сумм Фриделя 287
Преобразование Боголюбова 340, 500, 527
Принцип Паули 47, 333, 490
— симметрии кинетических коэффициентов 96, 106, 115
Псевдопотенциал 297–299, 304
— модельный 301–303
— Остина 298
— Хейне–Абаренкова–Шоу 302

Радиус локализации 226, 227
Рассеяние электронов на примесях 210, 217, 221, 228, 490
— — неупругое на магнитных примесях 291, 292
— — электронами 66, 213, 219
Резистивное состояние 535
Резонанс Абрикосова–Сула 82, 378, 509

Сверхпроводники 1-го рода 365, 367, 405, 409, 429, 432, 442–444
— 2-го рода 364, 365, 367, 379, 405, 408, 417, 425, 432, 433, 441–444
— локализованного типа 379
Сверхпроводящие сплавы 368, 385
Сверхтекучесть 330, 342
— жидкого гелия 330, 343, 407
— электронной жидкости 330, 334
Скачок теплоемкости 315, 349, 368, 568
Скачущие траектории 139, 147–150, 206, 207, 210
Сквид (джозефсоновский интерферометр) 546, 547
Скорость Ферми 161, 480
Слабая сверхпроводимость 522
Смешанное состояние 417, 433, 437, 440, 449
— — в тонкой пленке 442
— — с пиннингом 452
— — с неполным эффектом Мейснера 425
Соотношение Эйнштейна 54
Спиновое стекло 81
Спин-орбитальное взаимодействие 198, 201, 217, 258, 270, 271, 284, 507, 512
— рассеяние 218, 511, 512
Ступени Фиске 542
— Шапиро 536

Таммовские уровни 377
Температура Кондо 82
Теорема Блоха 16
— Латтинжера 37, 38
Теория Бардина–Купера–Шриффера 337
— Гинзбурга–Ландау 380, 385, 387, 480, 484
— Орнштейна–Цернике 571
— слабой локализации 223
Теплоемкость промежуточного состояния 487
— смешанного состояния 441
Теплопроводность 53–56, 58, 59, 64–66, 315, 456
— нормального металла 456
— сверхпроводника 453, 456
— фононая 116
Термоэлемент 108
Точечный контакт 549
Тяжелые фермионы 343, 378, 379

Унитарный предел 286
Уравнение син-Гордона 540
— Феррела–Прейнджа 532
Уровень Ферми 30, 33–35
Уровни Ландау 178, 198

Фазовый переход 1-го рода 315, 394, 399, 405, 432
— — 2-го рода 315–317, 328, 405, 432, 565, 567, 568

- Фазы Шевреля 379
Ферми-поверхность 35–37, 118, 305–307
— замкнутая 71, 84, 86, 116, 117
— открытая 84, 86, 97, 98, 117
Ферромагнетизм 271, 496, 502, 505, 507, 508, 560, 561
Ферромагнитные порошки 425
Флуктуации параметра порядка 569
Флюксонид 408
Фоновый ветер 70
Фононы 28, 29
Формула Брэгга 26
— Мак-Миллана 369
Функции Ванье 20
Функционал Ландау 569, 571, 572, 574
Функция Гелл-Манна и Лоу 223
— Линдхарта 504
— Ферми 30
- Центры проскальзывания фазы 551, 554–557
Циклотронная масса 87, 141, 144, 145
— — экстремальная 142
Циклотронный резонанс на неэкстремальных орбитах 154
— —, смещенный эффектом Доплера 174
- Частота столкновений электронов 59
Число сверхпроводящих электронов 328, 361, 362
- Экситонная фаза 228
Экситонные переходы 228, 229
Экситонный механизм сверхпроводимости 374
Экситоны Мотта–Ванье 228
Эксперимент Литтла и Паркса 402
Энергетическая щель 17, 35, 316, 342, 343, 373, 378, 494
Энергетические зоны 17, 199
Энергия Ферми 33, 34, 192
Эффект Ааронова–Бома 216
— Ледюка–Риги 113
— Мейснера 314, 532
— — неполный 405, 425
— Нернста 113
— Пельтье 108, 109
— Томсона 109
— Холла 91, 97, 112
— — адиабатический 113
— Эттингсхаузена 113
Эффективная масса 31, 37, 87, 263, 378, 379
- Ядерный магнитный резонанс 509