З. Л. АБЖАНДАДЗЕ,
В. Ф. ОСИПОВ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ–ФРЕНЕЛЯ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

З. Л. АБЖАНДАДЗЕ,
В. Ф. ОСИПОВ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ–ФРЕНЕЛЯ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2000

УДК 5I7.5I2.2/4
ББК 22.161.5

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. В.С.Виденский
(РГПУ им. А.И.Герцена),
д-р физ.-мат. наук, проф. Н.А.Широков
(СПбГЭТУ)

Печатается по рекомендации
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета

А б ж а н д а д з е З. Л., О с и п о в В. Ф. **Преобразование**
A19 **Фурье–Френеля и некоторые его приложения.** — СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 2000. — 224 с.
ISBN 5–288–02738–2

В монографии излагается теория преобразования Фурье–Френеля на прямой, а также в общей ситуации локально компактных коммутативных групп. Основные теоремы гармонического анализа распространяются на нелинейные преобразования Фурье, соответствующие характерам второй и более высоких степеней. Особое внимание уделяется вопросам о соотношении между спектральными радиусами и нормой суммируемой функции, тесно связанным с асимптотическими оценками интегралов от быстро осциллирующих функций.

Книга предназначена для специалистов в области математики и математической физики. Она может представлять интерес также для физиков и астрономов.

Библиогр. 26 назв.

Без объявления **ББК 22.161.5**

© З. Л. Абжандадзе,
В. Ф .Осипов, 2000

© Издательство
С.-Петербургского
университета, 2000

ISBN 5–288–02738–2

Посвящается
светлой памяти
Левана Соломоновича
Абжандадзе

ПРЕДИСЛОВИЕ

При решении разнообразных задач гармонического анализа и его многочисленных приложений возникает необходимость перехода от разложений по плоским волнам (характерам на группе) к разложениям по их нелинейным аналогам (характерам второй и более высоких степеней). Например, при решении многих задач математической физики используется метод преобразования Фурье. Этот метод представляет собой разделение переменных, конечным результатом которого является решение, выраженное с помощью его Фурье–образа. Метод можно интерпретировать также как отыскание "нормальных мод", т. е. решений в виде

$$u(x,t) \sim Ae^{ikx-i\omega t}. \qquad (*)$$

Подставляя пробные решения указанного вида в исходное дифференциальное уравнение, сводим уравнение к соотношению

$$D(\omega,k)u(x,t) = 0.$$

Следовательно, $u(x,t)$ является нетривиальным решением дифференциального уравнения в частных производных только в том случае, когда k и ω связаны дисперсионным соотношением

$$D(\omega,k) = 0.$$

Если $\omega = \omega(k)$ есть решение этого уравнения, то при любом фиксированном t каждая пара $(k, \omega(k))$ в решении $(*)$ представляет собой одну "моду" в интеграле Фурье (или сумме), а суммирование по всем модам определяет (по крайней мере формально) решение исходного дифференциального уравнения:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx - i\omega(k)t} dk.$$

Метод применим, если интегралом (или суммой) может быть выражено и начальное условие при $t = 0$ для u, u'_t и т. д. Описанный метод не применим, если не существует дисперсионного соотношения или система нормальных мод не полна и, следовательно, не может являться начальным условием. В тех случаях когда метод работает, возможно интегральное представление решения задачи в форме нелинейного преобразования Фурье.

Впервые нелинейные преобразования Фурье появились, повидимому, в работах Френеля, который при изучении дифракции учитывал квадратичные члены в суперпозиции вторичных волн. Этим дифракция Френеля отличается от дифракции Фраунгофера, в которой при построении дифракционной картины не учитываются квадратичные члены и члены более высокого порядка. В поздних работах по нелинейной механике особое внимание уделяется важному классу рекуррентных по Пуанкаре–Биркгофу движений, возникающих в результате суперпозиции чистых колебаний с переменными во времени частотами.

Нелинейными преобразованиями Фурье пользуются и в квантовой физике, например, при построении представлений коммутационных соотношений с помощью группы Гейзенберга. Отметим также, что мультипликативная группа характеров второй степени и тесно с ней связанная группа Гейзенберга появляются в знаменитых работах К. Зигеля о квадратичных формах, в которых, как было установлено позднее А. Вейлем, центральную роль играют унитарные представления некоторого расширения симплектической группы с помощью тора.

Именно возможность приложения их в физике, а также в алгебраической теории чисел и функциональном анализе можно рассматривать в качестве исходных мотиваций для распространения стандартных теорем абстрактного гармонического анализа

на нелинейные преобразования Фурье, соответствующие характерам второй и более высоких степеней.

Существуют и внутренние причины, указывающие на необходимость перехода в гармоническом анализе к нелинейным преобразованиям Фурье, так как плоские волны, т. е. непрерывные характеры на прямой, не образуют достаточного семейства линейных непрерывных функционалов на сверточной алгебре суммируемых функций. Поэтому, естественно, возникает вопрос о расширении семейства мультипликативных функционалов, порожденных непрерывными характерами, до достаточной совокупности, которая все-таки сохраняла бы богатую алгебраическую структуру гармонического анализа на локально компактных коммутативных группах. Следует отметить, что расширение мультипликативных нормированных функционалов до единичной сферы пространства, сопряженного с алгеброй суммируемых функций, не интересно, поскольку при таком расширении гармонический анализ превращается в довольно скучную, хотя и полезную главу линейного функционального анализа.

Цель настоящей книги в изложении некоторых аспектов теории функций и гармонического анализа, в основном связанных с группой характеров второй степени на прямой, а также общей ситуации локально компактных коммутативных групп.

В гл. 1 приводится необходимый подготовительный материал: основные сведения из абстрактного гармонического анализа на группах, группа характеров второй степени, группа Гейзенберга и ее индуцированные представления, преобразование Фурье–Френеля, формулы обращения и операторы обобщенного сдвига.

В гл. 2 и 3 изучаются асимптотические свойства нелинейного преобразования Фурье сначала на прямой, а затем для общего случая. В гл. 2 исследуется семейство нелинейных волн, порожденных всевозможными многочленами с вещественными коэффициентами. Основной результат состоит в том, что такие нелинейные волны, действительно, порождают достаточное семейство линейных непрерывных функционалов для сверточной алгебры суммируемых функций на прямой. В данной главе рассматриваются также спектральные радиусы произвольной степени, указываются необходимые и достаточные условия совпадения спектрального радиуса фиксированного порядка с нормой

суммируемой функции, а также приводятся формулы для вычисления спектральных радиусов. Вопросы о соотношениях между спектральными радиусами и нормой суммируемой функции тесно связаны с асимптотическими оценками интегралов от быстро осциллирующих функций. В частности, известная лемма Римана–Лебега распространяется на случай нелинейного преобразования Фурье произвольной степени. В гл. 3 ряд результатов, полученных для нелинейного преобразования Фурье на прямой, переносится на произвольные локально компактные коммутативные группы.

Наконец, в гл. 4 подробно исследуются характеры второй степени на аддитивной группе целых чисел и связанные с ними суммы Гаусса. Здесь же рассматривается задача о представлении натуральных чисел в виде суммы квадратов целых чисел.

ГЛАВА 1

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ–ФРЕНЕЛЯ

Данная глава носит вводный характер. Она знакомит с основами теории интегралов Фурье–Френеля. Изложение начинаем с напоминания необходимых сведений из абстрактного гармонического анализа на локально компактных коммутативных группах. Вводится важное понятие характера второй степени и рассматриваются характеры второй степени для конкретных групп. С некоторыми подробностями обсуждаются индуцированные представления группы Гейзенберга. Кроме того, в главу включены основные сведения о преобразовании Фурье–Френеля в частном случае аддитивной группы вещественных чисел, а также в общей ситуации локально компактных коммутативных групп.

§ 1. Основные сведения из анализа Фурье на локально компактных коммутативных группах

1.1. Локально компактные коммутативные группы. Множество G называется коммутативной группой, если на G определена бинарная операция (в дальнейшем обозначаемая знаком "$+$") со следующими свойствами:

1) $x+y=y+x$ для любых $x, y \in G$ (коммутативность сложения);

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$ для любых $x, y, z \in G$ (ассоциативность сложения);

3) существует элемент $0 \in G$ (единичный элемент группы G), такой, что $x+0=x$ для любого $x \in G$;

4) для любого $x \in G$ существует элемент $-x \in G$, такой, что $x+(-x)=0$.

Условимся в дальнейшем писать $x-y=x+(-y)$. Воспользуемся следующими обозначениями:

если $A \subset G$, то $-A=\{-a : a \in A\}$;

если $A, B \subset G$, то $A+B=\{a+b : a \in A, b \in B\}$;

если $A \subset G$, $b \in G$, то $A+b=\{a+b : a \in A\}$ — сдвиг множества A на элемент b; $A-b=A+(-b)$.

Множество G — локально компактная коммутативная группа, если G — локально компактное хаусдорфово пространство и коммутативная группа, причем отображение

$$G \times G \to G \ ((x, y) \to x + y)$$

есть непрерывное отображение прямого произведения $G \times G$ на группу G.

Пример 1. Все конечные коммутативные группы являются локально компактными (на самом деле компактными) коммутативными группами в дискретной топологии.

Пример 2. $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел с дискретной топологией.

Пример 3. $\mathbb{R}$ — аддитивная группа вещественных чисел с естественной топологией на прямой.

Пример 4. $\mathbb{T}$ — мультипликативная группа комплексных чисел, равных по модулю единице; групповая операция является умножением комплексных чисел, топология на $\mathbb{T}$ есть относительная топология на окружности, возникающая из естественной топологии на плоскости.

Пример 5. $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ (n раз) — n-мерная решетка; $\mathbb{T}^n = \mathbb{T} \times \cdots \times \mathbb{T}$ (n раз) — n-мерный тор; $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n раз) — n-мерное арифметическое (евклидово) пространство. Отметим, что в прямых произведениях групповые операции определяются покоординатно, а топология — как топология прямого произведения топологических пространств.

Пример 6. Пусть $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, p — фиксированное простое число. Определим для $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ целое число k из соотношения $r_1 - r_2 = \frac{n}{m} p^k$, где n, m — целые числа, не делящиеся на p. Тогда p-адическое расстояние $\rho_p(r_1, r_2) = p^{-k}$. Поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ является пополнением $\mathbb{Q}$ относительно расстояния ρ_p точно так же, как поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ есть пополнение $\mathbb{Q}$ относительно расстояния $\rho_\infty(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$. Каждое p-адическое число представляется в виде

$$a_n p^n + a_{n+1} p^{n+1} + \cdots, \text{ где все } a_i \in \{0, 1, \cdots, p-1\}.$$

Те p-адические числа, для которых $n \geq 0$, называются целыми p-адическими числами. Множество $\mathbb{Z}_p$ всех целых p-адических

чисел является компактным открытым подкольцом поля $\mathbb{Q}_p$. Аддитивная группа $\mathbb{Q}_p$ и мультипликативная группа $\mathbb{Q}_p^*$ всех ненулевых элементов из $\mathbb{Q}_p$ являются локально компактными коммутативными группами, а аддитивная группа $\mathbb{Z}_p$ есть компактная коммутативная группа.

1.2. Интегрирование в локально компактных коммутативных группах. Пусть G — локально компактная коммутативная группа. Борелевская σ-алгебра $\mathfrak{B}$ есть наименьшая из σ-алгебр, содержащих все замкнутые подмножества группы G. Мерой на группе G называется комплекснозначная функция множества, заданная на $\mathfrak{B}$, σ-аддитивная и конечная на борелевских множествах с компактным замыканием.

Пусть μ — мера на группе G. Образуем новую функцию множества $|\mu|$:

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{(i)} |\mu(E_i)|,$$

где супремум берется по всевозможным конечным разбиениям

$$E = \bigcup_{(i)} E_i$$

множества E на дизъюнктные борелевские подмножества E_i. Функция множества $|\mu|$ является неотрицательной мерой на G, которая называется полной вариацией меры μ.

Мера μ называется регулярной, если для любого $E \in \mathfrak{B}$

$$|\mu|(E) = \sup_K |\mu|(K) = \inf_U |\mu|(U).$$

Здесь супремум берется по всем компактным подмножествам $K \subset E$, а инфимум — по всем открытым $U \supset E$.

Говорят также, что мера μ инвариантна относительно сдвигов, если $\mu(E + a) = \mu(E)$ для любых $E \in \mathfrak{B}$ и $a \in G$.

Наконец, неотрицательная регулярная мера на G, инвариантная относительно сдвигов и не равная тождественно нулю, называется мерой Хаара на группе G.

Теорема 1. *На любой локально компактной коммутативной группе существует мера Хаара, единственная с точностью до постоянного множителя.*

Обычно указанный в теореме множитель неединственности выбирают так, чтобы в дискретных группах мера одноточечного множества равнялась единице, а для компактных групп его выбирают из условия нормировки $\mu(G) = 1$.

Пусть снова G — локально компактная коммутативная группа. Фиксируем некоторую меру Хаара m на группе G. Пусть $L^p(G)$, $1 \le p < +\infty$, обозначает множество всех измеримых по Борелю функций f на G, для которых

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_G |f(x)|^p \, dm(x) \right)^{1/p} < +\infty.$$

После стандартного отождествления функций, совпадающих почти всюду на G (по мере Хаара), $L^p(G)$ становится банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_p$, в котором в силу регулярности меры Хаара плотно множество всех непрерывных на G функций с компактным носителем.

Рассмотрим теперь банахово пространство $L^1(G)$ суммируемых функций на G. Пусть $f, g \in L^1(G)$. Тогда из теоремы Фубини следует, что для почти всех x определена функция $f * g$:

$$(f * g)(x) = \int\limits_G f(x - y) \; g(y) \; dm(y),$$

при этом $f * g \in L^1(G)$. Функция $f * g$ называется сверткой функций f и g.

Операция свертки двух функций коммутативна, ассоциативна, дистрибутивна относительно сложения функций, а также непрерывна по совокупности сомножителей: если $f_n \to f$, $g_n \to g$ по норме в $L^1(G)$, то $f_n * g_n \to f * g$ по норме в $L^1(G)$. Последнее есть следствие неравенства $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$. Таким образом, $L^1(G)$ — коммутативная банахова алгебра.

Отметим, что для дискретных групп G в $L^1(G)$ существует единичный элемент относительно свертки; если $e(x) = 0$ при $x \ne 0$ и $e(0) = 1$, то для любой $f \in L^1(G)$

$$(f * e)(x) = \int\limits_G f(x - y) \; e(y) \; dm(y) = \sum_{y \in G} f(x - y) \; e(y) = f(x),$$

т. е. $f * e = f$.

Для недискретных групп в $L^1(G)$ единичный элемент отсутствует, но согласно следующей теореме можно говорить об аппроксимативной единице.

Теорема 2. *Пусть $\varepsilon > 0$ и $f \in L^1(G)$. Тогда существует $\varphi \in L^1(G)$, такая, что $\|\varphi\|_1 = 1$ и $\|f - f * \varphi\|_1 < \varepsilon$.*

1.3. Характеры и преобразование Фурье. На банаховой алгебре $L^1(G)$ особый интерес представляют непрерывные и мультипликативные функционалы. Здесь мультипликативность функционала F означает, что

$$< F, f * g > = < F, f > < F, g > \text{ для всех } f, g \in L^1(G).$$

Для таких функционалов существует полное описание.

Теорема 3. *Каждый ненулевой непрерывный линейный и мультипликативный функционал F на $L^1(G)$ имеет вид*

$$< F, f > = \int\limits_G f(x) \; \gamma(-x) \; dm(x), \; f \in L^1(G),$$

где $\gamma : G \to \mathbb{T}$ — непрерывная функция, для которой

$$\gamma(x + y) = \gamma(x)\gamma(y), \; x, y \in G.$$

Обратно, каждая такая функция γ по этой формуле порождает ненулевой непрерывный линейный и мультипликативный функционал на $L^1(G)$, причем разные функции порождают разные функционалы.

Непрерывная функция $\gamma : G \to \mathbb{T}$, для которой

$$\gamma(x + y) = \gamma(x)\gamma(y),$$

называется непрерывным характером локально компактной коммутативной группы G.

При поточечном умножении

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x), \; x \in G,$$

непрерывные характеры образуют коммутативную группу Γ, в которой единичным элементом является характер, тождественно равный единице на G, а для характера $-\gamma$, обратного к

характеру γ, $(-\gamma)(x) = (\gamma(x))^{-1}$. Коммутативная группа Γ называется группой характеров группы G.

Далее, при стандартном отождествлении $L^1(G)^* = L^\infty(G)$ группа характеров Γ становится подмножеством сопряженного $L^1(G)$ пространства $L^\infty(G)$, поэтому на Γ можно рассмотреть относительную топологию для $*$-слабой топологии сопряженного пространства. В этой топологии Γ — локально компактная коммутативная группа.

Как уже отмечалось, в пространстве $L^1(G)$ существует единичный элемент, если G — дискретная группа. Отсюда легко следует, что Γ — замкнутое (в $*$-слабой топологии) подмножество единичного шара пространства $L^\infty(G)$. Следовательно, если группа G дискретная, то ее группа характеров Γ — компактная коммутативная группа.

Пусть снова G — локально компактная коммутативная группа, а Γ — ее группа характеров. Можно дать эквивалентное описание топологии на группе Γ. Пусть K — компактное подмножество группы G и $\delta > 0$. Обозначим $V(K,\delta) = \{\gamma \in \Gamma : |\gamma(x)-1| < \delta$ для всех $x \in K\}$. Тогда система всевозможных таких $V(K,\delta)$ есть фундаментальная система окрестностей единичного элемента в группе характеров Γ, а семейство всех $V(K,\delta)$ и их всевозможных сдвигов образует базу топологии на Γ.

Введем теперь понятие преобразования Фурье. Пусть G — локально компактная коммутативная группа, Γ — ее группа характеров. Для $f \in L^1(G)$ определим функцию $\hat{f}$ на Γ формулой

$$\hat{f}(\gamma) = \int\limits_G f(x)\ \gamma(-x)\ dx,\ \gamma \in \Gamma.$$

Заметим, что здесь и в дальнейшем мы для обозначения интегрирования по мере Хаара вместо записи $dm(x)$ используем запись dx.

Функция $\hat{f}$ называется преобразованием Фурье функции f.

Приведем простейшие свойства преобразования Фурье:

1. $(f+g)\hat{} = \hat{f}+\hat{g}$, $(\lambda f)\hat{} = \lambda\hat{f}$, $(f*g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$ для любых функций $f, g \in L^1(G)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, т.е. преобразование Фурье линейно и мультипликативно.

2. Для любой функции $f \in L^1(G)$ функция $\hat{f}$ непрерывна на Γ и равна нулю на "бесконечности" в том смысле, что для любого

$\varepsilon > 0$ существует компакт $K \subset \Gamma$, такой, что для любых $\gamma \in \Gamma \setminus K$ выполняется неравенство $|\hat{f}(\gamma)| < \varepsilon$.

3. Для любых функций $f \in L^1(G)$ и $\gamma \in \Gamma$ справедливо неравенство $|\hat{f}(\gamma)| \le \|f\|_1$, откуда $\|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$. Другими словами, преобразование Фурье есть линейный непрерывный оператор $F : L^1(G) \to C_0(\Gamma)$ с нормой $\|F\| \le 1$. Здесь $C_0(\Gamma)$ обозначает банахово пространство всех комплекснозначных функций на Γ, равных нулю на "бесконечности", с нормой $\|\varphi\|_\infty = \max|\varphi(\gamma)|$, $\gamma \in \Gamma$.

4. Обозначим $A(\Gamma) = \{\hat{f} : f \in L^1(G)\}$. Здесь $A(\Gamma)$ — подалгебра (с поточечными алгебраическими операциями) банаховой алгебры $C_0(\Gamma)$, замкнутая относительно операции комплексного сопряжения и сдвигов функций. Кроме того, $A(\Gamma)$ разделяет точки группы Γ, т.е. для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ с $\gamma_1 \ne \gamma_2$ существует функция $\hat{f} \in A(\Gamma)$, такая, что $\hat{f}(\gamma_1) \ne \hat{f}(\gamma_2)$. Поэтому к подалгебре $A(\Gamma)$ можно применить теорему Стоуна–Вейерштрасса и доказать, что $A(\Gamma)$ плотна в $C_0(\Gamma)$.

Пример 1. Для $G = \mathbb{R}$ каждый характер γ определяется числом $y \in \mathbb{R}$: $\gamma(x) = e^{iyx}$, $x \in \mathbb{R}$. Это позволяет провести отождествление γ с определяющим его числом y, и, таким образом, $\Gamma = \mathbb{R}$, при этом равенство выполняется не только для множеств, но и для локально компактных коммутативных групп. Кроме того, мера Хаара на группе G есть мера Лебега, в инвариантности которой легко убедиться. Следовательно, преобразование Фурье функции $f \in L^1(G)$ представляем как

$$\hat{f}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ e^{-ixy}\ dx,\ y \in \mathbb{R}.$$

Пример 2. Для $G = \mathbb{T}$ характеры имеют вид $\gamma(x) = e^{inx}$. После отождествления γ с определяющим его целым числом n получаем $\Gamma = \mathbb{Z}$. Преобразованием Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ является функция

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\ e^{-iny}\ dx,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Отметим, что вместо $f(e^{ix})$ записываем $f(x)$, рассматривая $x \in (-\pi, \pi]$ вместо $e^{ix} \in \mathbb{T}$.

Пример 3. Для $G = \mathbb{Z}$ характеры имеют вид $g(n) = e^{inx}$, поэтому $\Gamma = \mathbb{T}$. Преобразованием Фурье функции $f \in l^1(\mathbb{Z})$ является функция

$$\hat{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\ e^{-inx},\ -\pi < x \leq \pi.$$

1.4. Основные теоремы гармонического анализа. "Тремя китами", на которых держится гармонический анализ на локально компактных коммутативных группах, являются следующие три теоремы [18, 19, 25].

Пусть G — локально компактная коммутативная группа. Комплекснозначная функция φ, заданная на G, называется положительно определенной, если для любого $n = 1, 2, \ldots$ и любых наборов комплексных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i\ \overline{c_j}\ \varphi(x_i - x_j) \geq 0.$$

Теорема Бохнера. *Непрерывная функция φ на G является положительно определенной тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$\varphi(x) = \int_{\Gamma} \gamma(x)\ d\mu(\gamma),\ x \in G,$$

где μ — неотрицательная регулярная мера на Γ с $\mu(\Gamma) < +\infty$.

В дальнейшем будем обозначать $B(G)$ множество всевозможных конечных линейных комбинаций с комплексными коэффициентами непрерывных положительно определенных функций. По теореме Бохнера все такие функции имеют вид

$$\varphi(x) = \int_{\Gamma} \gamma(x)\ d\mu(\gamma),$$

где мера $\mu \in M(\Gamma)$. Здесь $M(\Gamma)$ обозначаем банахово пространство всех комплекснозначных регулярных мер на Γ, для которых $\|\mu\| = |\mu|(\Gamma) < +\infty$.

Теорема обращения. *Если функция $f \in L^1(G) \cap B(G)$, то функция $\hat{f} \in L^1(\Gamma)$. Кроме того, на группе Γ можно выбрать меру Хаара так, чтобы для любой функции $f \in L^1(G) \cap B(G)$ выполнялось равенство*

$$f(x) = \int_{\Gamma} \hat{f}(\gamma)\ \gamma(x)\ d\gamma.$$

Приведем примеры формул обращения:

1. Если $G = \Gamma = \mathbb{R}$, то $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\ e^{ixy}\ dy$.
2. Если $G = \mathbb{T}$, то $\Gamma = \mathbb{Z}$ и $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)\ e^{inx}$.
3. Если $G = \mathbb{Z}$, то $\Gamma = \mathbb{T}$ и $f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(x)\ e^{inx}\ dx$.

Пусть G — локально компактная коммутативная группа, а Γ — ее группа характеров. На группах G и Γ рассматриваются меры Хаара, согласованные так, чтобы выполнялась формула обращения.

Теорема Планшереля. *Ограничение преобразования Фурье в $L^1(G) \cap L^2(G)$ является изометрическим относительно L^2-нормы отображением $L^1(G) \cap L^2(G)$ на линейное подпространство, плотное в $L^2(\Gamma)$. Тем самым оно продолжается единственным образом до изометрического оператора из $L^2(G)$ на $L^2(\Gamma)$.*

§ 2. Характеры второй степени

Пусть G, H — локально компактные коммутативные группы, $\mathbb{T}$ — единичная окружность в комплексной плоскости, рассматриваемая как мультипликативная группа по умножению комплексных чисел.

Непрерывное отображение $f : G \times H \to \mathbb{T}$ называется бихарактером, если для каждого $x \in G$ отображение $f(x, \cdot) : H \to \mathbb{T}$ есть характер для группы H и для каждого $y \in H$ отображение $f(\cdot, y) : G \to \mathbb{T}$ есть характер для группы G. Очевидно, что бихарактер можно записать в следующем виде:

$$f(x, y) = < x, \alpha y > = < y, \alpha^* x >,$$

где $\alpha : H \to G^\wedge$ есть групповой гомоморфизм, а α^* — сопряженный гомоморфизм из G в $H^\wedge$.

Если $G = H$, то будем называть бихарактер $f : G \times G \to \mathbb{T}$ симметричным бихарактером в случае когда $f(x,y) = f(y,x)$ для любых $x, y \in G$. Бихарактер f симметричен тогда и только тогда, когда гомоморфизм $\alpha : G \to G^\wedge$ симметричен, т. е. если $\alpha^* = \alpha$.

Непрерывное отображение $f : G \to \mathbb{T}$ называется характером второй степени, если для любых $x, y, z \in G$ справедливо соотношение

$$f(x+y)\ f(y+z)\ f(z+x) = f(x+y+z)\ f(x)\ f(y)\ f(z),$$

т. е. если отображение

$$(x,y) \longrightarrow \frac{f(x+y)}{f(x)f(y)}$$

является бихарактером для $G \times G$.

Если f — характер второй степени, то соответствующий ему бихарактер симметричен. Пусть $\rho(f)$ обозначает симметричный гомоморфизм, соответствующий этому бихарактеру, т. е. гомоморфизм $\rho(f) : G \to G^\wedge$ удовлетворяет соотношению

$$< x, \rho(f)y > = \frac{f(x+y)}{f(x)f(y)}$$

для любых $x, y \in G$.

Далее, пусть $X_2(G)$ обозначает множество всех характеров второй степени для группы G. Относительно поточечного умножения $X_2(G)$ является группой. Сопоставляя характеру второй степени $f \in X_2(G)$ симметричный гомоморфизм $\rho(f) : G \to G^\wedge$, получаем гомоморфизм $X_2(G)$ в аддитивную группу симметричных гомоморфизмов G в $G^\wedge$. Его ядро $X_1(G) = G^\wedge$.

Группа $X_2(G)$ разлагается в прямое произведение, если отображение $x \to x+x$ есть автоморфизм группы G. Действительно, в этом случае можно рассмотреть обратный автоморфизм $x \to \frac{x}{2}$ и для любого симметричного гомоморфизма $\rho : G \to G^\wedge$ определить характер второй степени f_ρ:

$$f_\rho(x) = < x, \rho\left(\frac{1}{2}x\right) >,\ x \in G.$$

Пусть $X_2^0(G)$ обозначает подгруппу для $X_2(G)$, порожденную всевозможными f_ρ. Тогда легко показать, что

$$X_2(G) = X_2^0(G) \times X_1(G),$$

при этом подгруппа $X_2^0(G)$ изоморфна аддитивной группе симметричных гомоморфизмов группы G в ее группу характеров $G^\wedge$.

Рассмотрим характеры второй степени.

1. Пусть $G = \mathbb{R}$. Тогда группа характеров $\Gamma = G^\wedge = \mathbb{R}$. Очевидно, что любой симметричный гомоморфизм $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяется вещественным числом k и имеет вид $x \to kx$, поэтому общий характер второй степени определяется двумя вещественными числами k и λ:

$$f(x) = e^{2\pi i \frac{k}{2} x^2} e^{2\pi i \lambda x} = e^{\pi i x^2 + 2\pi i \lambda x}.$$

Если $k = 0$, то $f(x) = e^{2\pi i \lambda x}$ есть обычный непрерывный характер на прямой $\mathbb{R}$ — чистое колебание, или плоская волна. В дальнейшем характеры второй степени $f(x) = e^{\pi i x^2 + 2\pi i \lambda x}$ будем называть волнами Френеля в случае $k \neq 0$. Отметим, что при изучении дифракции на отверстии в плоском экране Френель предложил учитывать в суперпозиции вторичных волн квадратичные члены. Этим дифракция Френеля отличается от дифракции Фраунгофера, в которой пренебрегают квадратичными членами и членами более высокого порядка.

2. Пусть $G = \mathbb{Z}$. Тогда группа характеров $\Gamma = \mathbb{T}$. Рассмотрим произвольный характер второй степени $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{T}$. Пусть $\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ обозначает симметричный гомоморфизм, ассоциированный с f, т. е.

$$\frac{f(n+m)}{f(n)f(m)} = < n, \rho(m) >,\ n, m \in \mathbb{Z}.$$

Гомоморфизм ρ определяется числом $c = \rho(1) \in \mathbb{T}$ и имеет вид $\rho(m) = c^m$, поэтому $< n, \rho(m) > = < n, c^m > = c^{nm}$.

Таким образом,

$$f(n+m) = c^{nm} f(n) f(m),$$

поэтому для любого положительного целого числа n

$$f(n) = f((n-1)+1) = c^{n-1} f(n-1) f(1) =$$
$$= c^{(n-1)+(n-2)} f(n-2) (f(1))^2 =$$
$$= \cdots = c^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1} (f(1))^n = c^{\frac{n(n-1)}{2}} d^n,$$

где $d = f(1) \in \mathbb{T}$.

Кроме того, из соотношения

$$1 = f(0) = f(n+(-n)) = c^{-n^2} f(n) f(-n)$$

имеем

$$f(-n) = c^{n^2} (f(n))^{-1} = c^{n^2 - \frac{n(n-1)}{2}} d^{-n} =$$
$$= c^{\frac{n^2+n}{2}} d^{-n} = c^{\frac{(-n)(-n-1)}{2}} d^{-n},$$

поэтому для любого $n \in \mathbb{Z}$ справедливо соотношение

$$f(n) = c^{\frac{n(n-1)}{2}} d^n.$$

Полагая $d = e^{2\pi i\varphi}$, $c = e^{2\pi i\theta}$ и $\alpha = \varphi - \frac{\theta}{2}$, получаем функцию

$$f(n) = e^{\pi i n^2 \theta + 2\pi i n\alpha}, \ n \in \mathbb{Z},$$

отражающую общий вид характера второй степени на $\mathbb{Z}$.

Полезно отметить, что числа $e^{\pi i\theta}$ и $e^{2\pi i\alpha}$ определяются характером второй степени f неоднозначно. Действительно, пусть $\gamma : \mathbb{T}^2 \to X_2(\mathbb{Z})$ есть гомоморфизм, заданный соотношениями

$$\gamma(z_1, z_2) = f((z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2), \ f(n) = z_1^{n^2} z_2^n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Если $\gamma(z_1, z_2) = 1$ — тривиальный характер второй степени, то $z_1^{n^2} z_2^n = 1$ для $n \in \mathbb{Z}$. В частности, $z_1 z_2 = 1$ для $n = 1$ и $z_1^4 z_2^2 = 1$ для $n = 2$, поэтому $z_1^2 = 1$, и, таким образом, $z_1 = \pm 1$. Так как $(-1)^{n^2} = (-1)^n$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, ядро гомоморфизма γ полностью соответствует подгруппе тора $\mathbb{T}^2$, состоящей из элементов $(1,1)$ и $(-1,-1)$. В результате получаем, что

$$X_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{T}^2 / \{\pm(1,1)\}.$$

3. Пусть $G = \mathbb{T}$. Тогда группа характеров $\Gamma = \mathbb{Z}$. Кроме того, пусть $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{Z}$ — непрерывный симметричный гомоморфизм, ассоциированный с характером второй степени f. Тогда из непрерывности ρ следует, что ρ есть постоянная функция на $\mathbb{T}$. Однако $\rho(1) = 0$, поэтому $\rho(z) = 0$ для любого $z \in \mathbb{T}$. В результате $X_2(\mathbb{T}) = X_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}$, т. е. на $\mathbb{T}$ не существует характеров второй степени, отличных от плоских волн.

Фиксируем некоторое $k \in \mathbb{R}$. На функциях, заданных на прямой $\mathbb{R}$, определим операцию "сдвига" на элемент $t \in \mathbb{R}$:

$$(A_t f)(x) = f(x+t) \ e^{-2\pi i k x t}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Пусть $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Из определения оператора A_t для любой функции f имеем

$$(A_{t_1} f)(x) = f(x+t_1) \ e^{-2\pi i k x t_1} = g(x),$$
$$(A_{t_2}(A_{t_1} f))(x) = (A_{t_2} g)(x) = g(x+t_2) \ e^{-2\pi i k x t_2} =$$
$$= f(x+t_1+t_2) \ e^{-2\pi i k (x+t_2) t_1} \ e^{-2\pi i k x t_2} =$$
$$= f(x+t_1+t_2) \ e^{-2\pi i k x (t_1+t_2)} \ e^{-2\pi i k t_1 t_2} =$$
$$= (A_{t_1+t_2} f)(x) \ e^{-2\pi i k t_1 t_2}.$$

Далее, рассмотрим характер второй степени на прямой $\mathbb{R}$:

$$f_k(x) = e^{\pi i k x^2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Так как

$$f_k(t_1 + t_2) = e^{2\pi i k t_1 t_2} f_k(t_1) f_k(t_2),$$

для операторов A_t получаем соотношение

$$\frac{1}{f_k(t_1) f_k(t_2)} \ A_{t_2}(A_{t_1} f)(x) = \frac{1}{f_k(t_1 + t_2)} \ (A_{t_1+t_2} f)(x).$$

Поэтому для отображения

$$t \to U_t = U_t(k) = \frac{1}{f_k(t)} \ A_t$$

выполняется групповое свойство

$$U_{t_1} \circ U_{t_2} = U_{t_1+t_2}.$$

Теперь рассмотрим произвольный характер второй степени на $\mathbb{R}$:

$$f_{k,\lambda}(x) = e^{\pi i k x^2 + 2\pi i \lambda x}.$$

В данном случае также справедливо равенство

$$f_{k,\lambda}(t_1 + t_2) = f_{k,\lambda}(t_1)\ f_{k,\lambda}(t_2)\ e^{\pi i k t_1 t_2},$$

поэтому для операторов

$$U_t = U_t(k,\lambda) = \overline{f_{k,\lambda}(t)}\ A_t$$

выполняется групповое свойство

$$U_{t_1}(k,\lambda) \circ U_{t_2}(k,\lambda) = U_{t_1+t_2}(k,\lambda).$$

Из определения операторов $U_t(k,\lambda)$ прямым вычислением легко получаем следующие простые правила действия $U_t(k,\lambda)$ на отдельные волны Френеля:

$$\begin{aligned} U_t(k,\lambda) f_{k,\lambda} &= f_{k,\lambda}, \\ U_t(k,\lambda) f_{k,\lambda_1} &= e^{2\pi i(\lambda_1 - \lambda)t}\ f_{k,\lambda_1}, \\ U_t(k,\lambda) f_{k_1,\lambda_1} &= f_{k_1-k,\lambda_1-\lambda}(t)\ f_{k_1,\lambda_1+(k_1-k)t}. \end{aligned}$$

§ 3. Группа Гейзенберга

Пусть $\omega = (t,\tau) \in \mathbb{R}^2$ и оператор $U(\omega)$ (например, как унитарный оператор в $L^2(\mathbb{R})$) определяется формулой

$$(U(\omega)f)(x) = f(x+t)e^{2\pi i \tau x}.$$

Тогда для $\omega_1 = (t_1,\tau_1),\ \omega_2 = (t_2,\tau_2)$ имеем

$$\begin{aligned} U(\omega_2)f(x) &= f(x+t_2)e^{2\pi i \tau_2 x} = h(x), \\ U(\omega_1)U(\omega_2)f(x) &= U(\omega_1)h(x) = h(x+t_1)e^{2\pi i \tau_1 x} = \\ &= f(x+t_1+t_2)e^{2\pi i \tau_2 (x+t_1)} e^{2\pi i \tau_1 x} = \\ &= e^{2\pi i t_1 \tau_2} f(x+(t_1+t_2))e^{2\pi i(\tau_1+\tau_2)x} = \\ &= e^{2\pi i t_1 \tau_2} U(\omega_1+\omega_2)f(x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$U(\omega_1) \circ U(\omega_2) = F(\omega_1,\omega_2)U(\omega_1+\omega_2),$$

где

$$F(\omega_1,\omega_2) = e^{2\pi i t_1 \tau_2}.$$

Рассмотрим локально компактную группу $A(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$, в которой групповая операция определяется соотношением

$$(\omega_1,\theta_1) \circ (\omega_2,\theta_2) = (\omega_1+\omega_2, F(\omega_1,\omega_2)\ \theta_1\theta_2),$$

а топология совпадает с топологией прямого произведения евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ на окружность $\mathbb{T}$. Очевидно, что отображение

$$(\omega,\theta) \longrightarrow U(\omega,\theta) = \theta U(\omega),\ (\omega,\theta) \in A(\mathbb{R}),$$

есть представление группы Гейзенберга $A(\mathbb{R})$.

Заметим, что центр группы $A(\mathbb{R})$ совпадает с подгруппой $\mathbb{T} = \{(0,\theta) : \theta \in \mathbb{T}\}$, поэтому $A(\mathbb{R})$ является центральным расширением для $\mathbb{R}^2$ с помощью окружности $\mathbb{T}$, при этом отображение $\tau : (\omega,\theta) \to \omega$ есть гомоморфизм группы $A(\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^2$ и $\ker\tau = \mathbb{T}$. Следовательно,

$$A(\mathbb{R})/\mathbb{T} = \mathbb{R}^2.$$

Далее, возьмем пару вещественных чисел (k,λ) и рассмотрим лагранжеву прямую $l = \{(t,-kt) : t \in \mathbb{R}\}$ в $\mathbb{R}^2$. Тогда для $\omega = \omega(t) = (t,-kt) \in l$ получим

$$U(\omega)f(x) = f(x+t)e^{-2\pi i k t x} = (A_t f)(x),$$

где $A_t = U(\omega(t))$. Кроме того, рассмотрим волну Френеля $f_{k,\lambda}$ и определим связанное с ней отображение $\alpha : \mathbb{R} \to A(\mathbb{R})$ формулой

$$\alpha(t) = (\omega(t), \overline{f_{k,\lambda}(t)}),\ t \in \mathbb{R}.$$

Тогда для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} \alpha(t_1) \circ \alpha(t_2) &= (\omega(t_1), \overline{f_{k,\lambda}(t_1)}) \circ (\omega(t_2), \overline{f_{k,\lambda}(t_2)}) = \\ &= (\omega(t_1)+\omega(t_2), F(\omega(t_1),\omega(t_2))\overline{f_{k,\lambda}(t_1)}\ \overline{f_{k,\lambda}(t_2)}) = \\ &= (\omega(t_1+t_2), e^{-2\pi i k t_1 t_2}\overline{f_{k,\lambda}(t_1)}\ \overline{f_{k,\lambda}(t_2)}) = \\ &= (\omega(t_1+t_2), \overline{f_{k,\lambda}(t_1+t_2)}) = \alpha(t_1+t_2), \end{aligned}$$

т. е. $\alpha(t_1)\circ\alpha(t_2)=\alpha(t_1+t_2)$, поэтому $\alpha:\mathbb{R}\to A(\mathbb{R})$ есть гомоморфизм прямой $\mathbb{R}$ в группу Гейзенберга $A(\mathbb{R})$.

Таким образом, для любого $t\in\mathbb{R}$ и любой функции f, заданной на прямой,

$$U(\alpha(t))f=\overline{f_{k,\lambda}(t)}\,U(\omega(t))f=\overline{f_{k,\lambda}(t)}\,A_tf=U_t(k,\lambda)f,$$

где

$$U(\alpha(t))=U_t(k,\lambda),\ t\in\mathbb{R},$$

поэтому представление прямой $t\to U_t(k,\lambda)$ совпадает с точностью до изоморфизма с сужением к подгруппе $\alpha(\mathbb{R})\subset A(\mathbb{R})$ представления Шредингера группы Гейзенберга $(\omega,\theta)\to U(\omega,\theta)$:

$$t\longrightarrow\alpha(t)\longrightarrow U(\alpha(t))=U_t(k,\lambda).$$

Коммутативная замкнутая подгруппа

$$\alpha(\mathbb{R})=\{(t,-kt,\overline{f_{k,\lambda}(t)}):\ t\in\mathbb{R}\}$$

содержится в коммутативной замкнутой подгруппе $L=l\times\mathbb{T}$ группы Гейзенберга $A(\mathbb{R})$. Рассмотрим непрерывное отображение $\gamma:L\to\mathbb{T}$, заданное формулой

$$\gamma(\omega,\theta)=f_{k,\lambda}(t)\theta,$$

где $\omega=(t,-kt)\in l$.

Если $\omega_1=(t_1,-kt_1)$, $\omega_2=(t_2,-kt_2)$, $t_1,t_2\in\mathbb{R}$, и $\theta_1,\theta_2\in\mathbb{T}$, то

$$\gamma(\omega_1,\theta_1)=f_{k,\lambda}(t_1)\theta_1,\ \gamma(\omega_2,\theta_2)=f_{k,\lambda}(t_2)\theta_2,$$

поэтому

$$\gamma(\omega_1,\theta_1)\gamma(\omega_2,\theta_2)=f_{k,\lambda}(t_1)f_{k,\lambda}(t_2)\theta_1\theta_2.$$

В то же время

$$\begin{aligned}(\omega_1,\theta_1)\circ(\omega_2,\theta_2)&=(\omega_1+\omega_2,F(\omega_1,\omega_2)\theta_1\theta_2)=\\&=(\omega_1+\omega_2,e^{-2\pi ikt_1t_2}\theta_1\theta_2),\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\gamma((\omega_1,\theta_1)\circ(\omega_2,\theta_2))&=f_{k,\lambda}(t_1+t_2)e^{-2\pi ikt_1t_2}\theta_1\theta_2=\\&=f_{k,\lambda}(t_1)f_{k,\lambda}(t_2)\theta_1\theta_2.\end{aligned}$$

В результате получаем, что

$$\gamma((\omega_1,\theta_1)\circ(\omega_2,\theta_2))=\gamma(\omega_1,\theta_1)\gamma(\omega_2,\theta_2),$$

т. е. γ есть непрерывный характер локально компактной коммутативной группы L. В дальнейшем иногда этот характер будем обозначать через $\gamma_{k,\lambda}$, указывая на его зависимость от пары вещественных чисел (k,λ).

Очевидно, что $\gamma=1$ на подгруппе $\alpha(\mathbb{R})$ группы L и

$$\gamma(t,-kt,1)=f_{k,\lambda}(t)$$

для любого $t\in\mathbb{R}$.

Теперь рассмотрим для заданной лагранжевой прямой $l\subset\mathbb{R}^2$ представление $W(l)$ группы $A(\mathbb{R})$, индуцированное характером γ группы L:

$$W(l)=\mathrm{Ind}_L^{A(\mathbb{R})}\gamma.$$

По определению индуцированное представление $W(l)$ реализуется следующим образом. Прежде всего, определяем гильбертово пространство $H(l)$ как пополнение пространства непрерывных функций φ на $A(\mathbb{R})$ со следующими свойствами:

1) $\varphi(zz_0)=\overline{\gamma(z_0)}\varphi(z)$ для любых $z\in A(\mathbb{R})$, $z_0\in L$;

2) функция $z\to|\varphi(z)|$, в силу свойства 1 постоянная в $A(\mathbb{R})$ на классах смежности zL, имеет суммируемый квадрат относительно инвариантной меры $dm(\dot z)$ на $A(\mathbb{R})/L$. Точнее, пусть l' — дополнительная лагранжева прямая в $\mathbb{R}^2$. Тогда каждый элемент $z\in A(\mathbb{R})$ однозначно записывается в виде

$$z=(\omega',1)\circ(t,-kt,\theta),$$

где $\omega'\in l'$, $t\in\mathbb{R}$ (т. е. $(t,-kt)\in l$) и $\theta\in\mathbb{T}$. В результате множество классов смежности относительно L можно отождествить с прямой l', при этом евклидова мера на l' определяет на $A(\mathbb{R})/L$ меру $dm(\dot z)$, инвариантную относительно левого действия $A(\mathbb{R})$ на однородном пространстве $A(\mathbb{R})/L$. Очевидно, что такая мера единственная с точностью до умножения на положительную постоянную. Наконец, норма функции φ определяется формулой

$$\|\varphi\|^2=\int\limits_{A(\mathbb{R})/L}|\varphi(z)|^2dm(\dot z).$$

Тогда представление $W(l)$ действует в $H(l)$ левыми сдвигами:

$$W(l)(z_1)\varphi(z) = \varphi(z_1^{-1}z),\ z_1 \in A(\mathbb{R}).$$

В частности, если $z_1 = (0,0,\theta)$, то $z_1^{-1} = (0,0,\theta^{-1})$ принадлежит центру группы $A(\mathbb{R})$, поэтому согласно свойству 1 имеем

$$W(l)(z_1)\varphi(z) = \varphi(z_1^{-1}z) = \varphi(zz_1^{-1}) = \overline{\gamma(z_1^{-1})}\varphi(z) = \theta\varphi(z),$$

откуда

$$W(l)(0,0,\theta) = \theta\ \mathbf{1}_{H(l)}.$$

Теперь рассмотрим подробнее условие 1.

Пусть $z = (x,y,\theta) \in A(\mathbb{R})$ и $z_0 = (t,-kt,\theta_0) \in L$. Тогда

$$z \circ z_0 = (x+t, y-kt, F((x,y),(t,-kt))\theta\theta_0) = \\ = (x+t, y-kt, e^{-2\pi iktx}\theta\theta_0).$$

Следовательно,

$$\varphi(x+t, y-kt, e^{-2\pi iktx}\theta\theta_0) = \varphi(zz_0) = \overline{\gamma(z_0)}\varphi(z) = \\ = \overline{f_{k,\lambda}(t)}\ \theta_0^{-1}\varphi(x,y,\theta).$$

Полагая $\theta_0 = e^{2\pi ikxt}$ и учитывая, что

$$e^{2\pi ikxt} = \frac{f_{k,\lambda}(x+t)}{f_{k,\lambda}(x)}\ \overline{f_{k,\lambda}(t)},$$

получаем соотношение

$$f_{k,\lambda}(x+t)\varphi(x+t, y-kt, \theta) = f_{k,\lambda}(x)\varphi(x,y,\theta).$$

Кроме того, заметим, что

$$\varphi(x,y,\theta) = W(l)(0,0,\theta^{-1})\varphi(x,y,1) = \theta^{-1}\varphi(x,y,1),$$

поэтому функция φ на $A(\mathbb{R})$ полностью определяется своими значениями на $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$. В то же время из последнего соотношения получаем, что если известно значение $\varphi(\omega,1)$ для некоторого $\omega \in \mathbb{R}^2$, то можно определить и $\varphi(\omega',1)$ для каждого

$\omega' \in \omega + l$. Другими словами, функция φ полностью определяется по своим значениям на дополнительной лагранжевой прямой l', т.е. на произвольной лагранжевой прямой, трансверсальной данной лагранжевой прямой l.

Рассмотрим дополнительную прямую $l' = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$. Очевидно, что любой элемент $z \in A(\mathbb{R})$ можно единственным образом представить в виде

$$z = (\omega',1) \circ (\omega,\theta),$$

где $\omega \in l$, $\omega' \in l'$. Это единственное разложение для $z = (x,y,\theta)$ представимо равенством

$$(x,y,\theta) = (0, y+kx, 1) \circ (x, -kx, \theta),$$

поэтому

$$\varphi(x,y,\theta) = \varphi((0,y+kx,1) \circ (x,-kx,\theta)) = \\ = \overline{\gamma(x,-kx,\theta)}\varphi(0,y+kx,1) = \overline{f_{k,\lambda}(x)\theta}\varphi(0,y+kx,1).$$

Пусть ψ обозначает сужение функции φ на лагранжеву прямую l' : $\psi(x) = \varphi(0,x,1)$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда для функций $\varphi \in H(l)$ имеем

$$\varphi(x,y,\theta) = \overline{f_{k,\lambda}(x)}\theta^{-1}\psi(y+kx).$$

Пусть отображение $R : H(l) \to L^2(\mathbb{R})$, при котором функции $\varphi \in H(l)$ сопоставляется функция $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ — сужение функции φ на лагранжеву прямую l'. При подходящем выборе меры на прямой $\mathbb{R}$, кратной мере Лебега, отображение R есть изометрия $H(l)$ на $L^2(\mathbb{R})$. Рассмотрим в $L^2(\mathbb{R})$ представление $\tilde{W} = \tilde{W}(l)$ группы Гейзенберга

$$\tilde{W} = RW(l)R^{-1}.$$

Пусть $z = (x,y,\theta) \in A(\mathbb{R})$ и $z_1 = (0,y_0,1)$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $z_1^{-1} = (0,-y_0,1)$. Следовательно,

$$\tilde{W}(l)(z_1)\varphi(z) = \varphi(z_1^{-1}z) = \varphi((0,-y_0,1) \circ (x,y,\theta)) = \varphi(x,y-y_0,\theta),$$

поэтому сужение этой функции на лагранжеву прямую l' есть

$$\psi_1(y) = \varphi(0,y-y_0,1) = \psi(y-y_0).$$

Таким образом, для любой функции $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ получаем, что

$$\tilde{W}(y_0)\psi(y) = \tilde{W}(0, y_0, 1)\psi(y) = \psi(y - y_0).$$

Далее, если $z_1 = (t, -kt, 1) \in l \times \{1\}$, то $z_1^{-1} = (-t, kt, e^{-2\pi i k t^2})$, поэтому

$$\begin{aligned}
[W(l)(t, -kt, 1)]\varphi(x, y, \theta) &= \varphi\left[(-t, kt, e^{-2\pi i k t^2}) \circ (x, y, \theta)\right] = \\
&= \varphi(x - t, y + kt, e^{-2\pi i t y} e^{-2\pi i k t^2}\theta) = \\
&= e^{2\pi i k t^2 + 2\pi i t y} \frac{1}{f_{k,\lambda}(x - t)} f_{k,\lambda}(x - t)\varphi(x - t, y + kt, \theta) = \\
&= e^{2\pi i k t^2 + 2\pi i t y} \overline{f_{k,\lambda}(x - t)} f_{k,\lambda}(x)\varphi(x, y, \theta).
\end{aligned}$$

В результате находим, что сужение этой функции на прямую l' есть

$$\psi_1(y) = e^{2\pi i k t^2 + 2\pi i t y}\, \overline{f_{k,\lambda}(-t)}\psi(y) = f_{k,\lambda}(t)\, e^{2\pi i t y}\, \psi(y),$$

откуда

$$\tilde{W}(t)\psi(y) = \tilde{W}(t, -kt, 1)\psi(y) = f_{k,\lambda}(t)\, e^{2\pi i t y}\, \psi(y).$$

Наконец, очевидно, что

$$\tilde{W}(\theta) = \tilde{W}(0, 0, \theta) = \theta \mathbf{1}_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Таким образом, представление $\tilde{W}$ действует на $L^2(\mathbb{R})$ по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\tilde{W}(t)\psi(y) &= f_{k,\lambda}(t) e^{2\pi i t y}\psi(y),\ t \in \mathbb{R}, \text{т.е. } (t, -kt) \in l, \\
\tilde{W}(y_0)\psi(y) &= \psi(y - y_0),\ y_0 \in \mathbb{R}, \text{ т. е. } (0, y_0) \in l', \\
\tilde{W}(\theta)\psi(y) &= \theta\psi(y),\ \theta \in \mathbb{T}.
\end{aligned}$$

Отметим, что представление $\tilde{W}$ группы Гейзенберга зависит от пары вещественных чисел (k, λ). В дальнейшем через W_1

будем обозначать представление $\tilde{W}$, соответствующее случаю $k = \lambda = 0$. Представление W_1 действует по формулам

$$\begin{aligned}
W_1(t)\psi(y) &= e^{2\pi i t y}\psi(y), \\
W_1(y_0)\psi(y) &= \psi(y - y_0), \\
W_1(\theta)\psi(y) &= \theta\psi(y),
\end{aligned}$$

где $(t, 0) \in l = \mathbb{R} \times \{0\}$, $(0, y_0) \in l' = \{0\} \times \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{T}$.

Рассмотрим также лагранжеву прямую $l = \{0\} \times \mathbb{R}$.

Пусть $L = l \times \mathbb{T}$ и $\gamma : L \to \mathbb{T}$ — непрерывный характер на L, заданный соотношением $\gamma(0, t, \theta) = \theta$. Тогда представление $W(l)$ группы $A(\mathbb{R})$, индуцированное характером γ группы L, действует на гильбертовом пространстве $H(l)$, полученном в результате пополнения суммируемых с квадратом непрерывных функций, для которых

$$\varphi(zz_0) = \overline{\gamma(z_0)}\varphi(z),\ z \in A(\mathbb{R}), z_0 \in L,$$

т. е.

$$\varphi(x, y + t, e^{2\pi i x t}\theta_0\theta) = \theta_0^{-1}\varphi(x, y, \theta).$$

Полагая $\theta_0 = e^{-2\pi i x t}$, получаем соотношение

$$\varphi(x, y + t, \theta) = e^{2\pi i x t}\varphi(x, y, \theta).$$

Рассмотрим, кроме того, дополнительную прямую $l' = \mathbb{R} \times \{0\}$. Тогда для каждого $z = (x, y, \theta) \in A(\mathbb{R})$ имеем разложение

$$(x, y, \theta) = (x, 0, 1) \circ (0, y, e^{-2\pi i x y}\theta),$$

поэтому

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y, \theta) &= \varphi((x, 0, 1) \circ (0, y, e^{-2\pi i x y}\theta)) = \\
&= \overline{\gamma(0, y, e^{-2\pi i x y}\theta)}\varphi(x, 0, 1) = e^{2\pi i x y}\theta^{-1}\varphi(x, 0, 1).
\end{aligned}$$

Пусть ψ обозначает сужение функции φ на прямую l', т. е. $\psi(x) = \varphi(x, 0, 1)$. Тогда отображение $R : H(l) \to L^2(\mathbb{R})$ определяется формулой $\psi = R\varphi$.

Наконец, рассмотрим в $L^2(\mathbb{R})$ представление

$$W_2 = RW(l)R^{-1}.$$

Легко видеть, что представление W_2 действует на $L^2(\mathbb{R})$ по следующим формулам:

$$W_2(x_0)\psi(x) = W_2(x_0,0,1)\psi(x) = \psi(x-x_0),$$
$$W_2(t)\psi(x) = W_2(0,t,1)\psi(x) = e^{-2\pi i x t}\psi(x),$$
$$W_2(\theta)\psi(x) = W_2(0,0,\theta)\psi(x) = \theta\psi(x).$$

Действительно, если

$$z = (x,y,\theta) \in A(\mathbb{R}),\ z_1 = (x_0,0,1) \in l' \times \{1\},$$

то

$$z_1^{-1} = (-x_0,0,1)$$

и для любой $\varphi \in H(l)$ имеем

$$\begin{aligned}\tilde{W}(l)(z_1)\varphi(z) &= \varphi(z_1^{-1}z) = \\ &= \varphi((-x_0,0,1)\circ(x,y,\theta)) = \\ &= \varphi(x-x_0,y,e^{-2\pi i x_0 y}\theta) = \\ &= e^{2\pi i x y}\theta^{-1}\varphi(x-x_0,0,1),\end{aligned}$$

поэтому сужение этой функции на прямую l' есть

$$\psi_1(x) = \varphi(x-x_0,0,1) = \psi(x-x_0),$$

что доказывает справедливость первой формулы.

Далее, для $(0,t) \in l$ имеем $(0,t,1)^{-1} = (0,-t,1)$, поэтому

$$\begin{aligned}\tilde{W}(l)(z_1)\varphi(z) &= \varphi((0,-t,1)\circ(x,y,\theta)) = \\ &= \varphi(x,y-t,\theta) = \\ &= e^{2\pi i x(y-t)}\theta^{-1}\varphi(x,0,1),\end{aligned}$$

на основании которой устанавливаем справедливость второй формулы.

Наконец, справедливость третьей формулы очевидна.

§ 4. Преобразование Фурье–Френеля

Рассмотренные в § 3 представления W_1, W_2 и $\tilde{W} = \tilde{W}(k,\lambda)$, $k,\lambda \in \mathbb{R}$, являются неприводимыми представлениями на $L^2(\mathbb{R})$ группы Гейзенберга, для которых каждому элементу вида $(0,0,\theta) \in A(\mathbb{R})$ соответствует оператор умножения на число $\theta \in \mathbb{T}$. Следовательно, по теореме Стоуна–Неймана все эти представления унитарно эквивалентны.

Далее вычислим сплетающие операторы, осуществляющие указанную унитарную эквивалентность представлений. Интегральная формула обращения преобразования Фурье–Френеля и связь между преобразованиями Фурье и Фурье–Френеля появляются из конкретного вида сплетающих операторов.

Сначала вычислим оператор $F_{21} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, сплетающий представления W_1 и W_2 : $F_{21}W_1 = W_2F_{21}$.

Рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in H(l_1)$, где прямая $l_1 = \mathbb{R}\times\{0\}$.

Пусть $\psi = R\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Тогда

$$\begin{aligned}(F_{21}\psi)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi((x,0,1)\circ(0,y,1))\,dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y,e^{2\pi i x y})\,dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x y}\psi(y)\,dy = \hat{\psi}(x) = (F\psi)(x),\end{aligned}$$

где $F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ есть преобразование Фурье–Планшереля. В результате доказано, что $F_{21} = F$.

Найдем теперь сплетающий оператор $F_{13} : F_{13}\tilde{W} = W_1F_{13}$ между представлениями $\tilde{W}$ и W_1, где $\tilde{W}$ — представление группы Гейзенберга, соответствующее произвольной паре вещественных чисел (k,λ).

Пусть $l_3 = \{(t,-kt) : t \in \mathbb{R}\}$ — лагранжева прямая в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in H(l_3)$.

Пусть $\psi = R\varphi \in \mathbb{R}^2$ есть ее сужение на дополнительную прямую $l' = \{0\}\times\mathbb{R}$.

Тогда

$$(F_{13}\psi)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi((0,y,1)\circ(x,0,1))\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x,y,1)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{f_{k,\lambda}(x)}\psi(y+kx)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi i k x^2 - 2\pi i \lambda x}\,\psi(y+kx)\,dx.$$

Следовательно,

$$(F_{13}\psi)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi i k x^2 - 2\pi i \lambda x}\,\psi(y+kx)\,dx.$$

Наконец, вычислим оператор F_{32}, сплетающий представления W_2 и $\tilde{W}$: $F_{32}W_2 = \tilde{W}F_{32}$.

Пусть $l_2 = \{0\}\times\mathbb{R}$. Рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in H(l_2)$ и функцию $\psi = R\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, являющуюся сужением функции φ на дополнительную прямую $\mathbb{R}\times\{0\}$. Так как $\varphi \in H(l_2)$ удовлетворяет соотношению

$$\varphi(x,y,1) = e^{2\pi i x y}\,\varphi(x,0,1),$$

для $\psi(x) = \varphi(x,0,1)$ имеем

$$(F_{32}\psi)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi((0,y,1)\circ(x,-kx,1))\,\gamma(x,-kx,1)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x,y-kx,1)\,f_{k,\lambda}(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x(y-kx)}\varphi(x,0,1)\,f_{k,\lambda}(x)\,dx,$$

поэтому

$$(F_{32}\psi)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x y - \pi i k x^2}\psi(x)\,dx.$$

Аналогично вычисляем операторы F_{12}, F_{31} и F_{23}, сплетающие представления W_2 и W_1, W_1 и $\tilde{W}$, $\tilde{W}$ и $\tilde{W}_2$ соответственно:

$$(F_{12}\psi)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x y}\,\psi(x)\,dx,$$

$$(F_{31}\psi)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_{k,\lambda}(x)\,\psi(y-kx)\,dx,$$

$$(F_{23}\psi)(y) = \overline{f_{k,\lambda}(x)} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x y}\,\psi(y+kx)\,dy.$$

Заметим, что формула обращения преобразования Фурье доказывает справедливость соотношения $F_{12} = F_{21}^{-1}$. Из общих соображений также следует, что $F_{23} = F_{32}^{-1}$. Однако здесь докажем это соотношение прямым способом, использовав хорошо известную из теории обобщенных функций формулу

$$\delta(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x y}\,dy$$

и равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\delta(x-t)\,dt = g(x),$$

справедливое для любой гладкой функции с компактным носителем.

Очевидно, что нам достаточно доказать соотношение

$$F_{23}(F_{32}\psi) = \psi$$

для всех функций из некоторого класса функций на прямой, плотного в $L^2(\mathbb{R})$, например, для всех гладких функций с компактным носителем.

Итак, пусть ψ — гладкая функция на прямой, имеющая компактный носитель.

Тогда

$$(F_{23}\circ F_{32})\ \psi(x) = \overline{f_{k,\lambda}(x)} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x y}\ (F_{32}\psi)(y+kx)\ dy =$$

$$= \overline{f_{k,\lambda}(x)} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x y} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi i t(y+kx) - \pi i k t^2 + 2\pi i \lambda t}\ \psi(t)\ dt \right) dy =$$

$$= \overline{f_{k,\lambda}(x)} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi i k t x - \pi i k t^2 + 2\pi i \lambda t}\ \psi(t) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi i (t-x) y}\ dy \right) dt =$$

$$= \overline{f_{k,\lambda}(x)} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi i k t x - \pi i k t^2 + 2\pi i \lambda t}\ \psi(t)\ \delta(t-x)\ dt =$$

$$= \overline{f_{k,\lambda}(x)}\ e^{2\pi i k x^2 - \pi i k x^2 + 2\pi i \lambda x}\ \psi(x) =$$

$$= \overline{f_{k,\lambda}(x)}\ f_{k,\lambda}(x)\ \psi(x) = \psi(x).$$

Следовательно, $F_{23}(F_{32}\psi) = \psi$, что доказывает соотношение $F_{23} = F_{32}^{-1}$. Аналогичным образом для любой гладкой функции ψ с компактным носителем имеем

$$(F_{31}\circ F_{13})\,\psi(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_{k,\lambda}(x)\ (F_{13}\psi)(y-kx)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f_{k,\lambda}(x) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi i k t^2 - 2\pi i \lambda t}\ \psi(y - kx + kt)\ dt \right) dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f_{k,\lambda}(x) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi i k (t+x)^2 - 2\pi i \lambda (x+t)}\ \psi(y+kt)\,dt \right) dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi i k t^2 - 2\pi i \lambda t}\ \psi(y+kt) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i k t x}\,dx \right) dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi i k t^2 - 2\pi i \lambda t}\ \psi(y+kt)\,\delta(kt)\,dt =$$

$$= \psi(y) \int\limits_{\mathbb{R}} \delta(kt)\,dt = |k|^{-1}\psi(y).$$

Таким образом, $|k|F_{31}(F_{13}\psi) = \psi$, т. е. сплетающие операторы F_{31} и F_{13} связаны соотношением

$$|k|F_{31} = F_{13}^{-1}.$$

Теперь определим композицию сплетающих операторов $F_{13}\circ F_{32}\circ F_{21}$.

Лемма 1. *При* $\operatorname{Im} z > 0$ *справедлива формула*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi}\ e^{\pi i z \xi^2}\ d\xi = \left(\frac{z}{i}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi i x^2}{z}},$$

где непрерывная ветвь функции $z \to \left(\frac{z}{i}\right)^{-\frac{1}{2}}$ *фиксируется выбором значения, равного для* $z = i$ *единице.*

Далее, из леммы 1 вытекает соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi)\ e^{\pi i \xi^2}\ d\xi = e^{\frac{\pi i}{4}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\ e^{-\pi i \xi^2}\ d\xi.$$

Действительно, при $\operatorname{Im} z > 0$ по теореме Планшереля и в силу леммы 1 имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi)\, e^{\pi i z \xi^2}\ d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\, (e^{\pi i z \xi^2})^{\wedge}\ d\xi =$$

$$= \left(\frac{z}{i}\right)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\ e^{-\frac{\pi i \xi^2}{z}}\ d\xi,$$

откуда при $z \to 1$ получаем формулу

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi)\, e^{\pi i \xi^2}\ d\xi = e^{\frac{\pi i}{4}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\ e^{-\pi i \xi^2}\ d\xi.$$

Замечание 1. Если $k > 0$, то при $z \to k$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(t)\ e^{\pi i k t^2}\ dt = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{k}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\ e^{-\frac{\pi i}{k} t^2}\ dt.$$

Замечание 2. Определим функцию $\tilde{\varphi}$ формулой

$$\tilde{\varphi}(t) = \overline{\varphi(-t)}.$$

Легко проверить, что $\tilde{\varphi}^\wedge = \overline{\varphi^\wedge}$. Если $k < 0$, то $-k = |k| > 0$, поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(t)\, e^{\pi i|k|t^2}\, dt = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{|k|}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, e^{-\frac{\pi i}{|k|}t^2}\, dt.$$

Переходя в последнем равенстве к комплексно-сопряженным величинам, имеем соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\hat{\varphi}(t)}\, e^{\pi i k t^2}\, dt = \frac{-e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{|k|}} \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(t)}\, e^{-\frac{\pi i}{k}t^2}\, dt,$$

поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (\tilde{\varphi})^\wedge(t)\, e^{\pi i k t^2}\, dt = \frac{-e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{|k|}} \int\limits_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(-t)\, e^{-\frac{\pi i}{k}t^2}\, dt =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{|k|}} \int\limits_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(t)\, e^{-\frac{\pi i}{k}t^2}\, dt.$$

Таким образом, из последнего соотношения при замене $\tilde{\varphi}$ на φ следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(t)\, e^{\pi i k t^2}\, dt = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{|k|}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, e^{-\frac{\pi i}{k}t^2}\, dt.$$

В результате объединения соотношения в замечании 1 с последней формулой для любого вещественного $k \neq 0$ получаем равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(t)\, e^{\pi i k t^2}\, dt = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} k}}{\sqrt{|k|}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, e^{-\frac{\pi i}{k}t^2}\, dt,$$

а после замены k на $-k$ имеем равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(t)\, e^{-\pi i k t^2}\, dt = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} k}}{\sqrt{|k|}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, e^{\frac{\pi i}{k}t^2}\, dt.$$

Перейдем к вычислению композиции сплетающих операторов. Обозначим

$$h(y) = (F_{32} \circ F_{21})\, \psi(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x y - \pi i k x^2 + 2\pi i \lambda x}\, \hat{\psi}(x)\, dx.$$

Тогда

$$(F_{13} \circ F_{32} \circ F_{21})\, \psi(x) = (F_{13} h)(x) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi i k t^2 - 2\pi i \lambda t}\, h(x + kt)\, dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi i k t^2 - 2\pi i \lambda t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \tau (x+kt) - \pi i k \tau^2 + 2\pi i \lambda \tau}\, \hat{\psi}(\tau)\, d\tau \right) dt.$$

Если

$$\varphi(u) = \psi(u + (x + kt + \lambda)),$$

то

$$\hat{\varphi}(\tau) = e^{2\pi i \tau (x+kt+\lambda)}\, \hat{\psi}(\tau),$$

поэтому внутренний интеграл можно записать в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\tau) e^{-\pi i k \tau^2}\, d\tau = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} k}}{\sqrt{|k|}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(u)\, e^{\frac{\pi i}{k}u^2}\, du =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} k}}{\sqrt{|k|}} \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(u + x + kt + \lambda)\, e^{\frac{\pi i}{k}u^2}\, du =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} k}}{\sqrt{|k|}} \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(u)\, e^{\frac{\pi i}{k}(u-x-kt-\lambda)^2}\, du,$$

и, значит,

$$(F_{13}\circ F_{32}\circ F_{21})\psi(x) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}k}}{\sqrt{|k|}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi i k t^2 - 2\pi i \lambda t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \psi(u)\, e^{\frac{\pi i}{k}(u-x-kt-\lambda)^2}\, du \right) dt =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}k}}{\sqrt{|k|}}\, e^{\frac{\pi i}{k}(x^2+\lambda^2+2\lambda x)} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\frac{\pi i}{k}(u^2-2ux-2u\lambda)} \psi(u) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi i(x-u)t}\, dt \right) du =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}k}}{\sqrt{|k|}}\, e^{\frac{\pi i}{k}(x^2+\lambda^2+2\lambda x)} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\frac{\pi i}{k}(u^2-2ux-2u\lambda)}\, \psi(u)\, \delta(x-u)\, du =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}k}}{\sqrt{|k|}}\, e^{\frac{\pi i}{k}\lambda^2}\, \psi(x).$$

Следовательно, доказано, что

$$F_{13}\circ F_{32}\circ F_{21} = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}k}}{\sqrt{|k|}}\, e^{\frac{\pi i}{k}\lambda^2}\, \mathbf{1}_{L^2(\mathbb{R})},$$

где $\mathbf{1}_{L^2(\mathbb{R})}$ есть оператор тождественного преобразования.

В частном случае $\lambda = 0$ сплетающие операторы F_{32} и F_{13} таковы:

$$(F_{32}\psi)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x y}\, e^{-\pi i k x^2}\, \psi(x)\, dx = F^{-1}\left(e^{-\pi i k x^2}\psi\right)(y),$$

$$(F_{13}\psi)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi i k x^2}\, \psi(y+kx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{|k|} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi i \frac{x^2}{k}}\, \psi(y+x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{|k|}\left(e^{-\pi i \frac{x^2}{k}} * \psi\right)(y),$$

поэтому

$$\frac{1}{|k|}\left(e^{-\frac{\pi i}{k}x^2} *\right)\circ F^{-1}\circ e^{-\pi i k x^2}\circ F = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}k}}{\sqrt{|k|}}\, \mathbf{1}_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Таким образом,

$$F^{-1} = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}k}}{\sqrt{|k|}}\left(e^{-\frac{\pi i}{k}x^2} *\right)\circ F^{-1}\circ e^{-\pi i k x^2},$$

где $e^{-\frac{\pi i}{k}x^2} *$ обозначает операцию свертки с функцией $e^{-\frac{\pi i}{k}x^2}$, а $e^{-\pi i k x^2}$ есть оператор умножения на эту функцию.

Так как $(F^{-1}\psi)(y) = (F\psi)(-y)$, имеем

$$\left(\left(e^{-\frac{\pi i}{k}x^2} *\right)\circ F^{-1}\right)\psi(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi i}{k}t^2}(F^{-1}\psi)(y-t)\, dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi i}{k}t^2}(F\psi)(-y+t)\, dt = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi i}{k}t^2}(F\psi)(-y-t)\, dt =$$

$$= \left(\left(e^{-\frac{\pi i}{k}x^2} *\right)\circ F\right)\psi(-y),$$

поэтому в доказанном соотношении для F^{-1} обратное преобразование Фурье можно заменить на прямое преобразование Фурье F. В результате имеем

$$F = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}k}}{\sqrt{|k|}}\left(e^{-\frac{\pi i}{k}x^2} *\right)\circ F\circ e^{-\pi i k x^2}.$$

Теперь определяем интегральное преобразование Фурье–Френеля

$$\hat{f}(k,\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-\pi i k x^2 - 2\pi i \lambda x}\, dx.$$

Очевидно, что при $k = 0$ из преобразования Фурье–Френеля получаем классическое преобразование Фурье

$$\hat{f}(0,\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i \lambda x}\, dx.$$

Кроме того, из уже доказанной формулы для F следует, что

$$\hat{f}(y) = (Ff)(y) = \frac{1}{\sqrt{|k|}}\, e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}k}\left(e^{-\frac{\pi i}{k}t^2} * \hat{f}(k,t)\right)(y) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|k|}}\, e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}k} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi i}{k}t^2}\, \hat{f}(k; y-t)\, dt =$$

$$= \sqrt{|k|}\, e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}k} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi i k t^2}\, \hat{f}(k, y-kt)\, dt,$$

поэтому преобразование Фурье–Френеля и преобразование Фурье одной и той же функции f связаны между собой интегральным преобразованием

$$\hat{f}(y) = \sqrt{|k|}\, e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} k} \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(k, y+kt)\, e^{-\pi i k t^2}\, dt.$$

Для данного интегрального преобразования легко получить формулу обращения.

Действительно, из соотношения для F находим, что

$$F \circ e^{-\pi i k x^2} = \sqrt{|k|}\, e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} k} \left(e^{-\frac{\pi i}{k} x^2} * \right)^{-1} \circ F,$$

где $\left(e^{-\frac{\pi i}{k} x^2} * \right)^{-1}$ есть обратный элемент в сверточной алгебре, т. е.

$$\left(e^{-\frac{\pi i}{k} x^2} * \right)^{-1} * e^{-\pi i \frac{x^2}{k}} = \delta(x).$$

Легко показать, что

$$|k| e^{-\pi i k x^2} * e^{\pi i k x^2} = \delta(x),$$

где правая часть представляет собой оператор свертки с дельта-функцией Дирака, т. е. является оператором тождественного преобразования. В самом деле, очевидно, что в смысле теории обобщенных функций имеем

$$|k|\, e^{-\pi i k x^2} * e^{\pi i k x^2} = |k| \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi i k t^2} e^{\pi i k (x-t)^2}\, dt =$$

$$= |k|\, e^{\pi i k x^2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i k x t}\, dt =$$

$$= e^{\pi i k x^2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x t}\, dt = e^{\pi i k x^2}\, \delta(x) = \delta(x),$$

так как носитель δ-функции состоит из одной точки $x = 0$.

Следовательно, обратный элемент для $e^{-\pi i k x^2}$ есть

$$\left(e^{-\pi i k x^2} * \right)^{-1} = |k|\, e^{\pi i k x^2},$$

поэтому

$$\left(e^{-\frac{\pi i}{k} x^2} * \right)^{-1} = \frac{1}{|k|}\, e^{\frac{\pi i}{k} x^2}.$$

Таким образом,

$$F \circ e^{-\pi i k x^2} = \frac{1}{\sqrt{|k|}}\, e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} k} \left(e^{\frac{\pi i}{k} x^2} * \right) \circ F,$$

откуда получаем

$$\hat{f}(k, y) = \left(e^{-\pi i k x^2} f \right)^{\wedge}(y) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|k|}}\, e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} k} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\frac{\pi i}{k} t^2}\, \hat{f}(y-t)\, dt =$$

$$= \sqrt{|k|}\, e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} k} \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(y-kt)\, e^{\pi i k t^2}\, dt.$$

В результате доказана формула обращения

$$\hat{f}(k, y) = \sqrt{|k|}\, e^{-\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} k} \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(y-kt)\, e^{\pi i k t^2}\, dt.$$

Далее, обозначим через f_t сдвиг функции f на число t:

$$f_t(x) = f(x-t).$$

Тогда

$$(f_t)^{\wedge}(k, y) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)\, e^{-\pi i k x^2 - 2\pi i x y}\, dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-\pi i k (x+t)^2 - 2\pi i y (x+t)}\, dx =$$

$$= e^{-\pi i k t^2 - 2\pi i y t} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-\pi i k x^2 - 2\pi i (y+kt) x}\, dx =$$

$$= e^{-\pi i k t^2 - 2\pi i y t}\, \hat{f}(k, y+kt),$$

поэтому справедлива формула

$$(f_t)^\wedge(k,y) = e^{-\pi i k t^2 - 2\pi i y t}\ \hat{f}(k, y+kt).$$

Пусть снова $\lambda = 0$ и $k \in \mathbb{R}$. Рассмотрим в этом случае сплетающий оператор F_{32}:

$$(F_{32}\psi)(y) = F^{-1}\left(e^{-\pi i k x^2}\psi\right)(y) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\ e^{-\pi i k x^2}\ e^{2\pi i y x}\ dx = \hat{\psi}(k,-y).$$

По определению сплетающего оператора F_{32} имеем соотношение $F_{32}\circ W_2 = \tilde{W}\circ F_{32}$, где операторы представлений W_2 и $\tilde{W}$ на функциях из пространства $L^2(\mathbb{R})$ заданы формулами

$$W_2(x_0,0,1)\ \psi(x) = \psi(x-x_0),$$
$$W_2(0,t,1)\ \psi(x) = e^{-2\pi i x t}\ \psi(x),$$
$$\tilde{W}(t,-kt,1)\ \psi(y) = e^{\pi i k t^2 + 2\pi i t y}\ \psi(y),$$
$$\tilde{W}(0,y_0,1)\ \psi(y) = \psi(y-y_0).$$

Поэтому для $(x_0,0,1)\in A(\mathbb{R})$ и $\psi\in L^2(\mathbb{R})$ получаем

$$W_2(x_0,0,1)\psi(x) = \psi(x-x_0) = \psi_{x_0}(x),$$
$$((F_{32}\circ W_2(x_0,0,1))\psi)(y) = (\psi_{x_0})^\wedge(k,-y).$$

Далее, пусть

$$\varphi(y) = (F_{32}\psi)(y) = \hat{\psi}(k,-y).$$

Так как

$$(x_0,0,1) = (0,kx_0,1)\circ(x_0,-kx_0,1),$$

имеем

$$\tilde{W}(x_0,0,1) = \tilde{W}(0,kx_0,1)\circ W(x_0,-kx_0,1).$$

Следовательно,

$$\tilde{W}(x_0,-kx_0,1)\varphi(y) = e^{\pi i k x_0^2 + 2\pi i x_0 y}\varphi(y) = \varphi_1(y),$$
$$\tilde{W}(x_0,0,1)\varphi(y) = \tilde{W}(0,kx_0,1)\varphi_1(y) = \varphi_1(y-kx_0) =$$
$$= e^{\pi i k x_0^2 + 2\pi i x_0(y-kx_0)}\ \varphi(y-kx_0) =$$
$$= e^{-\pi i k x_0^2 + 2\pi i x_0 y}\ \varphi(y-kx_0) =$$
$$= e^{-\pi i k x_0^2 + 2\pi i x_0 y}\ \hat{\psi}(k,-y+kx_0),$$

другими словами,

$$(\psi_{x_0})^\wedge(k,-y) = e^{-\pi i k x_0^2 + 2\pi i x_0 y}\ \hat{\psi}(k,-y+kx_0),$$

что полностью согласуется с соответствующей формулой для преобразования Фурье–Френеля от сдвига функции ψ.

Рассмотрим снова унитарное представление U группы Гейзенберга $A(\mathbb{R})$ в $L^2(\mathbb{R})$:

$$U(x_0,0,1)\ f(x) = f(x+x_0),$$
$$U(0,y_0,1)\ f(x) = e^{2\pi i y_0 x}\ f(x),$$
$$U(0,0,\theta)\ f(x) = \theta\, f(x),$$

т. е.

$$U(x_0,y_0,\theta)\ f(x) = \theta\ e^{2\pi i y_0 x}\ f(x+x_0).$$

Тогда для непрерывного гомоморфизма $\alpha:\mathbb{R}\to A(\mathbb{R})$, заданного формулой

$$\alpha(t) = (t,-kt,\overline{f_{k,\lambda}(t)},\ t\in\mathbb{R},$$

имеем

$$U_t(k,\lambda)\ f(x) = \overline{f_{k,\lambda}(t)}\ e^{-2\pi i k t x}\ f(x+t) = U(\alpha(t))\ f(x),$$

поэтому

$$U_t(k,\lambda) = U(t,-kt,\overline{f_{k,\lambda}(t)}).$$

Рассмотрим также представление W_2 группы $A(\mathbb{R})$:

$$W_2(x_0,0,1)\ f(x) = f(x-x_0),$$
$$W_2(0,y_0,1)\ f(x) = e^{-2\pi i y_0 x}\ f(x),$$
$$W_2(0,0,\theta)\ f(x) = \theta\, f(x).$$

Легко видеть, что для любого $(x_0,y_0,\theta)\in A(\mathbb{R})$ справедливо разложение

$$(-x_0,-y_0,\theta) = (0,-y_0,1)(-x_0,0,1)(0,0,\theta),$$

поэтому для любой функции $f\in L^2(\mathbb{R})$ получаем

$$W_2(-x_0,-y_0,\theta)f(x) = \theta\ W_2(0,-y_0,1)W_2(-x_0,0,1)f(x) =$$
$$= \theta\ W_2(0,-y_0,1)\,f_1(x) = \theta\ e^{2\pi i y_0 x}\,f_1(x),$$

где

$$f_1(x) = W_2(-x_0, 0, 1)\ f(x) = f(x + x_0).$$

Таким образом,

$$W_2(-x_0, -y_0, \theta)\ f(x) = \theta\, e^{2\pi i y_0 x}\ f(x + x_0) = \\ = U(x_0, y_0, \theta)\ f(x),$$

т. е. представления W_2 и U группы Гейзенберга $A(\mathbb{R})$ в $L^2(\mathbb{R})$ связаны соотношением

$$W_2(-x_0, -y_0, \theta) = U(x_0, y_0, \theta).$$

Далее, пусть $\lambda = 0$, $U_t(k) = U_t(k, 0)$, $f_k(t) = e^{\pi i k t^2}$ и $\tilde{W}$ есть соответствующее представление $A(\mathbb{R})$ в $L^2(\mathbb{R})$:

$$\tilde{W}(t, -kt, 1)\ \psi(y) = f_k(t)\ e^{2\pi i t y} \psi(y),$$
$$\tilde{W}(0, y_0, 1)\ \psi(y) = \psi(y - y_0),$$
$$\tilde{W}(0, 0, \theta)\ \psi(y) = \theta\ \psi(y).$$

Рассмотрим оператор F_{32}, сплетающий представления W_2 и $\tilde{W}$: $F_{32} \circ W_2 = \tilde{W} \circ F_{32}$. Как было показано ранее, сплетающий оператор F_{32} имеет вид

$$(F_{32} f)(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x y - \pi i k x^2}\ f(x)\ dx = \hat{f}(k, -y),$$

поэтому для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$[F_{32}(U_t(k) f)](y) = [F_{32} \circ W_2(-t, kt, \overline{f_k(t)}) f](y) = \\ = [\tilde{W}(-t, kt, \overline{f_k(t)}) \circ F_{32} f](y) = \\ = \overline{f_k(t)}\ \tilde{W}(-t, kt, 1)(F_{32} f)(y) = \\ = f_k(t)\ e^{\pi i k t^2 - 2\pi i t y}\ (F_{32} f)(y) = \\ = e^{-2\pi i t y}\ (F_{32} f)(y),$$

где

$$(F_{32} f)(y) = F^{-1}\left(e^{-\pi i k x^2}\ f(x)\right)(y) = \hat{f}(k, -y).$$

Полезно заметить, что в случае $k = \lambda = 0$ оператор обобщенного сдвига $U_t(k)$ превращается в оператор обычного сдвига $U_t = U_t(0) : (U_t f)(x) = f(x + t)$, а сплетающий оператор F_{32} — в оператор $F_{12} = F^{-1}$ обратного преобразования Фурье. Если функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ соответствует функция $\psi = F_{12} f$, то функции $U_t f$ соответствует функция

$$F_{12}(U_t f)(y) = e^{-2\pi i t y}\ \psi(y),$$

т. е. оператор F_{12} сплетает оператор сдвига на t с оператором умножения на характер $e^{-2\pi i t y}$. В общем случае мы доказали аналогичную формулу

$$F_{32}(U_t(k) f)(y) = e^{-2\pi i t y}\ \psi(y),$$

где $\psi = F_{32} f$. Таким образом, с точностью до замены y на $-y$ преобразование Фурье–Френеля сплетает оператор обобщенного сдвига $U_t(k)$ с оператором умножения на характер $e^{-2\pi i t y}$. И, наоборот, оператор $F_{23} = F_{32}^{-1}$ имеет вид

$$(F_{23}\psi)(x) = \overline{f_k(x)} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x y}\ \psi(y + kx)\ dy$$

и сплетает оператор умножения на характер $e^{-2\pi i t y}$ с оператором обобщенного сдвига $U_t(k)$.

§ 5. Преобразование Фурье–Френеля на локально компактной коммутативной группе

В этом параграфе основные конструкции, связанные с преобразованием Фурье–Френеля на прямой, переносятся на произвольные локально компактные коммутативные группы.

Пусть G — локально компактная коммутативная группа, $\Gamma = G^\wedge$ — группа всех непрерывных характеров на G. При $x \in G$ и $\gamma \in \Gamma$ используется обозначение $\gamma(x) = < x, \gamma >$ для значения характера γ в точке x. Кроме того, в дальнейшем фиксируем на группе G некоторую меру Хаара, а на группе Γ рассматриваем меру Хаара, согласованную с выбранной мерой на G в том

смысле, что имеем стандартную формулу обращения преобразования Фурье:

$$\hat{F}(\gamma) = \int_G F(x) < -x, \gamma > dx, \; F(x) = \int_\Gamma \hat{F}(\gamma) < x, \gamma > d\gamma,$$

или, что то же, преобразование Фурье–Планшереля из $L^2(G)$ на $L^2(\Gamma)$ является изометрией.

Рассмотрим прямое произведение $G \times \Gamma$, имеющее очевидный смысл "фазового пространства", и для любого $\omega = (t, \tau) \in G \times \Gamma$ определим оператор $U(\omega)$ (например, как унитарный оператор в $L^2(G)$) формулой

$$(U(\omega)\Phi)(x) \; = < x, \tau > \Phi(x + t).$$

Очевидно, что оператор $U(\omega)$ удовлетворяет соотношению

$$U(\omega_1) \; U(\omega_2) = F(\omega_1, \omega_2) \; U(\omega_1 + \omega_2)$$

для любых $\omega_1 = (t_1, \tau_1)$, $\omega_2 = (t_2, \tau_2) \in G \times \Gamma$, где функция F определена формулой

$$F(\omega_1, \omega_2) \; = < t_1, \tau_2 > .$$

Рассмотрим локально компактную группу $A(G) = G \times \Gamma \times \mathbb{T}$, в которой групповая операция задается соотношением

$$(\omega_1, \theta_1)(\omega_2, \theta_2) = (\omega_1 + \omega_2, F(\omega_1, \omega_2)\theta_1\theta_2),$$

а топология совпадает с топологией прямого произведения групп G, Γ и $\mathbb{T}$. Так, определенная группа $A(G)$ называется группой Гейзенберга для локально компактной коммутативной группы G.

Легко видеть, что отображение

$$(\omega, \theta) \longrightarrow U(\omega, \theta) = \theta \; U(\omega), \; (\omega, \theta) \in A(G),$$

есть унитарное представление группы $A(G)$ в $L^2(G)$.

Далее, пусть $f : G \to \mathbb{T}$ есть характер второй степени на группе G, т. е. f есть непрерывное отображение, удовлетворяющее функциональному уравнению

$$f(x+y)f(y+z)f(z+x) = f(x+y+z)f(x)f(y)f(z), \; x, y, z \in G.$$

Тогда отображение $G \times G \to \mathbb{T}$, заданное соотношением

$$(x, y) \longrightarrow \frac{f(x+y)}{f(x)f(y)}, \; x, y \in G,$$

определяет симметричный гомоморфизм $\rho = \rho(f) : G \to \Gamma$, для которого

$$f(x+y) \; = < x, \rho y > f(x) \; f(y).$$

Рассмотрим в фазовом пространстве $G \times \Gamma$ лагранжево подпространство $l = \{\omega(t) = (t, \rho t) : t \in G\}$, и пусть $\alpha : G \to A(G)$ есть гомоморфизм, для которого $\alpha(t) = (\omega(t), f(t)), \; t \in G$.

Коммутативная замкнутая подгруппа $\alpha(G)$ группы Гейзенберга $A(G)$ содержится в коммутативной замкнутой подгруппе $L = l \times \mathbb{T}$. Непрерывное отображение $\tau : L \to \mathbb{T}$ зададим формулой

$$\tau(\omega, \theta) = \overline{f(t)} \; \theta, \; \omega = \omega(t) \in l, \; \theta \in \mathbb{T}.$$

Если $\omega_1 = \omega(t_1)$, $\omega_2 = \omega(t_2) \in l$ и $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{T}$, то

$$\tau(\omega_1, \theta_1)\tau(\omega_2, \theta_2) = \overline{f(t_1)f(t_2)}\theta_1\theta_2.$$

В то же время имеем

$$\begin{aligned}(\omega_1, \theta_1)(\omega_2, \theta_2) &= (\omega_1 + \omega_2, F(\omega_1, \omega_2)\theta_1\theta_2) = \\ &= (\omega_1 + \omega_2, < t_1, \rho t_2 > \theta_1\theta_2),\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}\tau((\omega_1, \theta_1)(\omega_2, \theta_2)) &= \overline{f(t_1 + t_2)} < t_1, \rho t_2 > \theta_1\theta_2 = \\ &= \overline{f(t_1 + t_2)} \; \frac{f(t_1 + t_2)}{f(t_1)f(t_2)} \; \theta_1\theta_2 = \\ &= \overline{f(t_1)f(t_2)} \; \theta_1\theta_2 = \tau(\omega_1, \theta_1)\tau(\omega_2, \theta_2).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\tau((\omega_1,\theta_1)(\omega_2,\theta_2)) = \tau(\omega_1,\theta_1)\tau(\omega_2,\theta_2),$$

т. е. τ есть непрерывный характер на локально компактной коммутативной группе L. Кроме того, очевидно, что $\tau = 1$ на подгруппе $\alpha(G) \subset L$.

Теперь для заданного лагранжева подпространства $l \subset G \times \Gamma$ рассмотрим представление $W(l)$ группы Гейзенберга $A(G)$, индуцированное характером τ группы L:

$$W(l) = \mathrm{Ind}_{\tau}^{A(G)}.$$

Представление $W(l)$ реализуется в гильбертовом пространстве $H(l)$, являющемся пополнением пространства непрерывных функций φ на $A(G)$ со следующими свойствами:

1) $\varphi(zz_0) = \overline{\tau(z_0)}\varphi(z)$ для любых $z \in A(G)$, $z_0 \in L$;

2) функция $z \to |\varphi(z)|$, в силу свойства 1 постоянная в $A(G)$ на классах смежности zL относительно подгруппы L, имеет суммируемый квадрат относительно инвариантной меры $dm(\dot{z})$ на фактор-группе $A(G)/L$, при этом норма функции φ определяется формулой

$$\|\varphi\|^2 = \int\limits_{A(G)/L} |\varphi(z)|^2 dm(\dot{z}).$$

В то же время по определению индуцированное представление $W(l)$ действует в $H(l)$ левыми сдвигами:

$$W(l)(z_1)\varphi(z) = \varphi(z_1^{-1}z).$$

Очевидно, что для каждого $\theta \in \mathbb{T}$ и $z_1 = (0,0,\theta)$ оператор $W(l)(z_1)$ есть оператор умножения на число θ, поэтому

$$\varphi(x,\gamma,\theta) = \theta^{-1}\varphi(x,\gamma,1)$$

для любой непрерывной функции из $H(l)$. Следовательно, функция φ полностью определяется своими значениями на фазовом пространстве $G \times \Gamma = G \times \Gamma \times \{1\}$. Кроме того, легко показать, что

$$\overline{f(x+t_0)}\varphi(x+t_0,\gamma+\rho t_0,1) = \overline{f(x)}\varphi(x,\gamma,1),$$

т. е. функция φ полностью определяется на $\omega + l$, если известно ее значение в точке $\omega = (x,\gamma)$.

В частности, будем рассматривать группу Γ как подмножество $\{0\}\times\Gamma\times\{1\}$ в группе Гейзенберга $A(G)$. Так как для любого элемента $(x,\gamma,\theta) \in A(G)$ справедливо разложение

$$(x,\gamma,\theta) = (0,\gamma-\rho x,1)(x,\rho x,\theta),$$

для непрерывной функции $\varphi \in H(l)$ получаем равенство

$$\varphi(x,\gamma,\theta) = \theta^{-1}\, f(x)\, \varphi(0,\gamma-\rho x,1),$$

поэтому функция φ на группе $A(G)$ полностью определяется своими значениями на группе Γ.

При сужении непрерывной функции $\varphi \in H(l)$ на группу Γ : $\psi(\gamma) = \varphi(0,\gamma,1)$ последнее соотношение можно записать в виде

$$\varphi(x,\gamma,\theta) = \theta^{-1}f(x)\psi(\gamma-\rho x).$$

Итак, рассмотрим линейный оператор $R : H(l) \to L^2(\Gamma)$, при котором функции φ сопоставляется ее сужение ψ на группу Γ. Заметим, что оператор R сначала задается на непрерывных функциях, но при соответствующем выборе меры Хаара на группе Γ он допускает непрерывное продолжение до изометрии $H(l)$ на $L^2(\Gamma)$.

Теперь определим унитарное представление $\tilde{W}$ группы Гейзенберга $A(G)$ в $L^2(\Gamma)$ формулой

$$\tilde{W} = RW(l)R^{-1}.$$

Прямыми вычислениями, как в § 4, получим определение представления $\tilde{W}$ на $L^2(\Gamma)$ в явном виде:

$$\tilde{W}(t)\psi(\gamma) = <t,\gamma>\overline{f(t)}\psi(\gamma),$$
$$\tilde{W}(\gamma_0)\psi(\gamma) = \psi(\gamma-\gamma_0),$$
$$\tilde{W}(\theta)\psi(\gamma) = \theta\psi(\gamma),$$

где $\psi \in L^2(\Gamma)$ и

$$\tilde{W}(t) = \tilde{W}(t,\rho t,1),\ t \in G,$$
$$\tilde{W}(\gamma_0) = \tilde{W}(0,\gamma_0,1),\ \gamma_0 \in \Gamma,$$
$$\tilde{W}(\theta) = \tilde{W}(0,0,\theta),\ \theta \in \mathbb{T}.$$

Отметим, что представление $\tilde{W}$ группы Гейзенберга $A(G)$ зависит от характера второй степени $f \in X_2(G)$. В дальнейшем будем обозначать через W_1 представление W, соответствующее характеру второй степени $f = 1$. Очевидно, что представление W_1 действует по формулам

$$W_1(t)\psi(\gamma) = <t, \gamma> \psi(\gamma),$$
$$W_1(\gamma_0)\psi(\gamma) = \psi(\gamma - \gamma_0),$$
$$W_1(\theta)\psi(\gamma) = \theta\ \psi(\gamma).$$

Рассмотрим также прямую $l = \{0\} \times \Gamma \subset G \times \Gamma$. Тогда $L = l \times \mathbb{T}$ является замкнутой коммутативной подгруппой для $A(G)$, а отображение $\tau : L \to \mathbb{T}$, заданное формулой $\tau(0, t, \theta) = \theta$, является непрерывным характером на L. Проанализируем представление $W(l)$ группы $A(G)$, индуцированное характером τ. Это представление действует на гильбертовом пространстве $H(l)$, полученном в результате пополнения суммируемых с квадратом непрерывных функций, для которых

$$\varphi(zz_0) = \overline{\tau(z_0)}\varphi(z),\ z \in A(G),\ z_0 \in L,$$

т. е.

$$\varphi(x, \gamma + \gamma_0, <x, \gamma_0> \theta\theta_0) = \theta_0^{-1}\varphi(x, \gamma, \theta).$$

Полагая $\theta_0 = \overline{<x, \gamma_0>}$, отсюда получаем

$$\varphi(x, \gamma + \gamma_0,\ \theta) = <x, \gamma_0> \varphi(x, \gamma, \theta).$$

Так как

$$(x, \gamma, \theta) = (x, 0, 1)\ (0, \gamma, \overline{<x, \gamma>}\ \theta),$$

для непрерывной функции $\varphi \in H(l)$ имеем

$$\begin{aligned}\varphi(x, \gamma, \theta) &= \varphi((x, 0, 1)(0, \gamma, \overline{<x, \gamma>}\ \theta)) = \\ &= \overline{\tau(0, \gamma, \overline{<x, \gamma>}\ \theta)}\ \varphi(x, 0, 1) = \\ &= <x, \gamma>\ \theta^{-1}\ \varphi(x, 0, 1),\end{aligned}$$

поэтому функция φ на группе Гейзенберга $A(G)$ полностью определяется своими значениями на $G = G \times \{0\} \times \{1\}$.

Пусть $\psi(x) = \varphi(x, 0, 1)$ и $R\varphi = \psi$. Тогда R — линейный оператор, первоначально заданный на непрерывных функциях из пространства $H(l)$, который допускает непрерывное продолжение до изометрии из $H(l)$ на $L^2(G)$, если выбрать подходящую меру Хаара на группе G. Следовательно, на $L^2(G)$ можно рассмотреть унитарное представление $W_2 = RW(l)R^{-1}$.

В результате прямых вычислений убеждаемся в том, что

$$W_2(x_0)\psi(x) = \psi(x - x_0),$$
$$W_2(\gamma_0)\psi(x) = \overline{<x, \gamma_0>}\psi(x),$$
$$W_2(\theta)\psi(x) = \theta\ \psi(x),$$

где $\psi \in L^2(G)$ и

$$W_2(x_0) = W_2(x_0, 0, 1),\ x_0 \in G,$$
$$W_2(\gamma_0) = W_2(0, \gamma_0, 1),\ \gamma_0 \in \Gamma,$$
$$W_2(\theta) = W_2(0, 0, \theta),\ \theta \in \mathbb{T}.$$

Теперь переходим к построению операторов, сплетающих унитарные представления группы Гейзенберга $A(G)$, индуцированные характерами различных коммутативных подгрупп L.

Воспользуемся простым способом построения сплетающих операторов. Пусть f_1, f_2 — характеры второй степени на группе G и ρ_1, ρ_2 — симметричные гомоморфизмы $G \to \Gamma$, ассоциированные с f_1 и f_2 соответственно. Рассмотрим лагранжевы подпространства $l_1 = \{(t, \rho_1 t) : t \in G\}$ и $l_2 = \{(t, \rho_2 t) : t \in G\}$. Функции $\varphi \in H(l_1)$ являются полуинвариантными относительно сдвигов на элементах из $L_1 = l_1 \times \mathbb{T}$, т. е.

$$\varphi(zz_0) = \overline{\tau(z_0)}\ \varphi(z),\ z \in A(G),\ z_0 \in L_1.$$

Для преобразования этих функций в функции, полуинвариантные относительно сдвигов на элементы из $L_2 = l_2 \times \mathbb{T}$, можно, по крайней мере формально, попытаться усреднить φ по всевозможным сдвигам на элементы из $L_2 \setminus (L_2 \cap L_1)$:

$$(\tilde{F}_{21}\varphi)(z) = \int\limits_{L_2 \setminus (L_2 \cap L_1)} \varphi(zz_2)\tau(z_2)dz_2.$$

В результате получим оператор $\tilde{F}_{21}$, сплетающий представления $W(l_1)$ и $W(l_2)$ с точностью до умножения на положительную константу, так как при выборе меры на L_2 мы не акцентируем внимание на специальных вопросах согласования мер в различных лагранжевых подпространствах.

Сначала вычислим оператор $F_{21} : L^2(\Gamma) \longrightarrow L^2(G)$, сплетающий представления W_1 и $W_2 : F_{21}W_1 = W_2F_{21}$.

Пусть $f = 1$ и $l_1 = G \times \{0\}$ — соответствующее лагранжево подпространство. Тогда для $\varphi \in H(l_1)$ справедливо равенство

$$\varphi(x, \gamma, \theta) = \theta^{-1}\varphi(0, \gamma, 1) = \theta^{-1}\psi(\gamma).$$

Кроме того, необходимо рассмотреть представление $W(l_2)$, индуцированное характером $\tau(0, \gamma, \theta) = \theta$ замкнутой коммутативной подгруппы $L_2 = l_2 \times \mathbb{T} = \{0\} \times \Gamma \times \mathbb{T}$. Очевидно, что оператор $\tilde{F}_{21}$, сплетающий представления $W(l_1)$ и $W(l_2)$, имеет вид

$$(\tilde{F}_{21}\varphi)(x, \gamma', \theta) = \int_\Gamma \varphi((x, \gamma', \theta)(0, \gamma, 1))\ \tau(0, \gamma, 1)\ d\gamma =$$

$$= \int_\Gamma \varphi(x, \gamma' + \gamma, < x, \gamma > \theta)\ d\gamma =$$

$$= \int_\Gamma < -x, \gamma > \varphi(x, \gamma' + \gamma, \theta)\ d\gamma =$$

$$= \int_\Gamma < -x, \gamma >\ \theta^{-1}\ \psi(\gamma' + \gamma)\ d\gamma.$$

Следовательно, при сужении этой величины на группу $G = G \times \{0\} \times \{1\}$ получаем, что

$$(F_{21}\psi)(x) = (\tilde{F}_{21}\varphi)(x, 0, 1) = \int_\Gamma < -x, \gamma >\ \psi(\gamma)\ d\gamma.$$

Таким образом, в данном случае F_{21} действительно является унитарным оператором, задаваемым преобразованием Фурье–Планшереля. Очевидно, что $F_{12} : F_{12}W_2 = W_1F_{12}$ есть обратный оператор $F_{12} = F_{21}^{-1} : L^2(G) \to L^2(\Gamma)$, для которого

$$(F_{21}\psi)(\gamma) = \int_G < x, \gamma >\ \psi(x)\ dx,\ \psi \in L^2(G).$$

Теперь находим оператор F_{13}, сплетающий представления $\tilde{W}$ и W_1:

$$W_1(z)F_{13} = F_{13}\tilde{W}(z),\ z \in A(G).$$

Пусть $l = \{(t, \rho t) : t \in G\}$ — лагранжево подпространство, соответствующее характеру второй степени f. Для функций $\varphi \in H(l)$ имеем

$$(\tilde{F}_{13}\varphi)(x, \gamma, \theta) = \int_G \varphi((x, \gamma, \theta)(t, 0, 1))\ \tau(t, 0, 1)\ dt =$$

$$= \int_G \varphi(x + t, \gamma, \theta)\ dt = \int_G \varphi(t, \gamma, \theta)\ dt =$$

$$= \theta^{-1} \int_G f(t)\psi(\gamma - \rho t)\ dt.$$

Отсюда следует, что

$$(F_{13}\psi)(\gamma) = (\tilde{F}_{13}\varphi)(0, \gamma, 1) = \int_G f(t)\psi(\gamma - \rho t)\ dt,$$

т. е. искомый сплетающий оператор F_{13} с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$(F_{13}\psi)(\gamma) = \int_G f(x)\psi(\gamma - \rho x)\ dx.$$

Путем прямых вычислений можно убедиться в том, что соотношение

$$W_1(z)F_{13} = F_{13}\tilde{W}(z)$$

действительно справедливо для любого $z \in A(G)$. Здесь проверяем последнее равенство в случае, когда $z = (t, \rho t, 1)$. Если же $z = (0, \gamma_0, 1)$ или $z = (0, 0, \theta)$, то равенство справедливо очевидным образом.

Пусть $z = (t, \rho t, 1)$. Тогда $(t, \rho t, 1) = (0, \rho t, 1)(t, 0, 1)$, поэтому

$$W_1(t, \rho t, 1) = W_1(0, \rho t, 1)W_1(t, 0, 1) = W_1(\rho t)W_1(t).$$

Следовательно, необходимо убедиться в том, что

$$F_{13}\tilde{W}(t) = W_1(\rho t)W_1(t)F_{13}.$$

Последнее утверждение достаточно проверить на непрерывных функциях, заданных на группе Γ и имеющих компактный носитель.

Пусть ψ — непрерывная функция с компактным носителем. Тогда $\tilde{W}(t)\psi(\gamma) = <t,\gamma>\overline{f(t)}\,\psi(\gamma)$, поэтому

$$\begin{aligned}(F_{13}\tilde{W}(t)\psi)(\gamma) &= \\ &= \int_G f(x)\ <t,\gamma-\rho x>\overline{f(t)}\,\psi(\gamma-\rho x)\,dx = \\ &= <t,\gamma>\overline{f(t)}\int_G f(x)\ <t,-\rho x>\ \psi(\gamma-\rho x)\,dx.\end{aligned}$$

Вместе с тем имеем

$$(F_{13}\psi)(\gamma) = \int_G f(x)\ \psi(\gamma-\rho x)\ dx = \psi_1(\gamma),$$

$$W_1(t)(F_{13}\psi)(\gamma) = W_1(t)\,\psi_1(\gamma) = <t,\gamma>\psi_1(\gamma),$$

$$\begin{aligned}W_1(\rho t)(W_1(t)F_{13}\psi)(\gamma) &= <t,\gamma-\rho t>\psi_1(\gamma-\rho t) = \\ &= <t,\gamma><t,-\rho t>\int_G f(x)\,\psi(\gamma-\rho(x+t))\,dx = \\ &= <t,\gamma><t,-\rho t>\int_G f(x-t)\,\psi(\gamma-\rho x)\,dx.\end{aligned}$$

Таким образом, достаточно показать, что

$$<t,-\rho t>f(x-t) = \overline{f(t)}\,f(x)<t,-\rho x>.$$

Однако

$$1 = f(0) = f(t-t) = <t,-\rho t>f(t)\,f(-t),$$

поэтому

$$\begin{aligned}f(x-t) &= f(x)f(-t) <x,-\rho t> = \\ &= f(x)\,\overline{f(t)} <t,\rho t><t,-\rho x>,\end{aligned}$$

и, значит,

$$<t,-\rho t>f(x-t) = f(x)\,\overline{f(t)} <t,-\rho x>.$$

Полезно отметить, что при выводе формулы для сплетающего оператора F_{13} интегрирование проводилось по всей группе G при неявном предположении, что симметричный гомоморфизм $\rho : G \to \Gamma$ инъективен. Если $\ker\rho \neq \{0\}$, то усреднение функции $\varphi \in H(l)$ следует проводить только по фактор-группе $G/\ker\rho$, так как на $\ker\rho$ функция φ уже является полуинвариантной.

Наконец, вычислим сплетающий оператор F_{32}:

$$F_{32}W_2 = \tilde{W}F_{32}.$$

Рассмотрим подпространство $l = \{0\}\times\Gamma$. Пусть функции $\psi \in L^2(G)$, $\varphi \in H(l)$ и $R\varphi = \psi$. Тогда справедливо равенство

$$\varphi(x,\gamma,\theta) = \theta^{-1} <x,\gamma>\varphi(x,0,1) = \theta^{-1} <x,\gamma>\psi(x).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}(\tilde{F}_{32}\varphi)(x,\gamma,\theta) &= \int_G \varphi((x,\gamma,\theta)\,(t,\rho t,1))\ \tau(t,\rho t,1)\,dt = \\ &= \int_G \varphi(x+t,\gamma+\rho t,<x,\rho t>\ \theta)\ \overline{f(t)}\,dt = \\ &= \int_G \theta^{-1} <x,-\rho t>\varphi(x+t,\gamma+\rho t,1)\,\overline{f(t)}\,dt = \\ &= \int_G \theta^{-1} <x,-\rho t><x+t,\gamma+\rho t>\psi(x+t)\,\overline{f(t)}\,dt,\end{aligned}$$

поэтому

$$(F_{32}\psi)(\gamma) = (\tilde{F}_{32}\varphi)(0,\gamma,1) = \int_G <t,\gamma+\rho t>\ \overline{f(t)}\,\psi(t)\,dt.$$

В результате сплетающий оператор F_{32} с точностью до постоянного множителя имеет следующий вид:

$$(F_{32}\psi)(\gamma) = \int\limits_G < x, \gamma + \rho x > \overline{f(x)}\ \psi(x)\ dx,$$

а указанный положительный множитель перед интегралом следует выбирать так, чтобы оператор $F_{32} : L^2(G) \to L^2(\Gamma)$ был унитарным оператором.

Аналогичным образом вычисляются операторы F_{12}, F_{31}, F_{23}, сплетающие представления (W_2, W_1), $(W_1, \tilde{W})$, $(\tilde{W}, W_2)$ соответственно. Приведем только окончательные формулы для сплетающих операторов:

$$(F_{12}\psi)(\gamma) = \int\limits_G < x, \gamma > \psi(x)\, dx,$$

$$(F_{31}\psi)(\gamma) = \int\limits_G \overline{f(x)}\, \psi(\gamma + \rho x)\, dx,$$

$$(F_{23}\psi)(x) = < -x, \rho x > f(x) \int\limits_\Gamma < -x, \gamma > \psi(\gamma)\, d\gamma.$$

Как уже отмечалось, если в группах G и Γ выбирать меры Хаара так, чтобы выполнялась формула обращения преобразования Фурье, то сплетающие операторы F_{21} и F_{12} будут взаимно обратными унитарными операторами. Аналогичный результат справедлив и для операторов F_{32} и F_{23}.

Действительно, для любой функции $\psi \in L^2(G)$ функция $\varphi(x) = < x, \rho x > \overline{f(x)}\, \psi(x)$ также принадлежит пространству $L^2(G)$,

$$\|\varphi\|_{L^2(G)} = \|\psi\|_{L^2(G)},$$

а из формулы для сплетающего оператора F_{32} получаем преобразование Фурье–Планшереля для функции φ:

$$(F_{32}\psi)(\gamma) = \int\limits_G < x, \gamma > \varphi(x)\ dx.$$

Следовательно, оператор $F_{32} : L^2(G) \to L^2(\Gamma)$ есть унитарный оператор как суперпозиция унитарного преобразования $\psi \to \varphi$ и унитарного преобразования Фурье–Планшереля. Кроме того, можно воспользоваться формулой обращения

$$\varphi(x) = \int\limits_\Gamma < -x, \gamma > (F_{32}\ \psi)(\gamma)\, d\gamma,$$

а затем от функции φ снова перейти к функции ψ. В результате сплетающий оператор F_{23} представляется в виде суперпозиции унитарного оператора, обратного к преобразованию Фурье–Планшереля, и унитарного оператора умножения на функцию $< -x, \rho x > f(x)$.

Таким образом, доказано, что F_{32} и F_{23} являются взаимно обратными унитарными операторами.

Рассмотрим теперь, как связаны между собой сплетающие операторы F_{13} и F_{31}.

Пусть G, H — локально компактные коммутативные группы, снабженные мерами Хаара dx, dy. Если $\alpha : G \to H$ есть непрерывный изоморфизм G на H, то модуль изоморфизма α есть такое положительное число $|\alpha|$, что для любой функции $\Phi \in L^1(H)$ справедливо равенство

$$\int\limits_H \Phi(y)\ dy = |\alpha| \int\limits_G \Phi(\alpha x)\ dx,$$

т. е. $|\alpha| = \frac{d(\alpha x)}{dx}$. Легко показать, что

$$|\alpha^{-1}| = |\alpha|^{-1} \text{ и } |\alpha^*| = |\alpha|,$$

где $\alpha^* : \hat{H} \to \hat{G}$ — сопряженный изоморфизм, а на группах $\hat{H}, \hat{G}$ выбраны меры Хаара, согласованные с рассматриваемыми мерами Хаара на группах G, H соответственно (согласованы в смысле формулы обращения преобразования Фурье).

Следовательно, если f — невырожденный характер второй степени на группе G, т. е. ассоциированный с f гомоморфизм $\rho = \rho(f) : G \to \Gamma = \hat{G}$ есть изоморфизм G на Γ, то для любой функции $\Phi \in L^1(\Gamma)$ имеем

$$\int\limits_\Gamma \Phi(\gamma)\ d\gamma = |\rho| \int\limits_G \Phi(\rho x)\ dx.$$

Рассмотрим сплетающие операторы F_{13}, F_{31} в предположении, что f — невырожденный характер второй степени на группе G. Тогда из интегральных формул для F_{13} и F_{31} получаем, что

$$(F_{31}\circ F_{13})\psi(\gamma)=\int\limits_G \overline{f(x)}(F_{13}\psi)(\gamma+\rho x)\,dx=$$

$$=\int\limits_G \overline{f(x)}\left(\int\limits_G f(t)\psi(\gamma+\rho x-\rho t)\,dt\right)dx=$$

$$=\int\limits_G \overline{f(x)}\left(\int\limits_G f(t+x)\psi(\gamma-\rho t)\,dt\right)dx=$$

$$=\int\limits_G\left(\int\limits_G f(t)<x,\rho t>\psi(\gamma-\rho t)\,dt\right)dx.$$

Теперь во внутреннем интеграле выполним последовательно замену переменной $\gamma'=\rho t$, сдвиг и отражение:

$$\int\limits_G f(t)<x,\rho t>\psi(\gamma-\rho t)\,dt=$$

$$=|\rho|^{-1}\int\limits_\Gamma f(\rho^{-1}\gamma')<x,\gamma'>\psi(\gamma-\gamma')\,d\gamma'=$$

$$=|\rho|^{-1}\int\limits_\Gamma f(\rho^{-1}(\gamma'+\gamma))<x,\gamma'+\gamma>\psi(-\gamma')\,d\gamma'=$$

$$=|\rho|^{-1}<x,\gamma>\int\limits_\Gamma f(\rho^{-1}\gamma-\rho^{-1}\gamma')<-x,\gamma'>\psi(\gamma')\,d\gamma'.$$

Так как

$$f(\rho^{-1}\gamma-\rho^{-1}\gamma')=f(\rho^{-1}\gamma)\ f(-\rho^{-1}\gamma')\ <\rho^{-1}\gamma,-\rho\rho^{-1}\gamma'>=$$

$$=f(\rho^{-1}\gamma)\ f(-\rho^{-1}\gamma')\ <-\rho^{-1}\gamma,\gamma'>,$$

получаем, что

$$(F_{31}\circ F_{13})\psi(\gamma)=|\rho|^{-1}f(\rho^{-1}\gamma)\int\limits_G <x,\gamma>\times$$

$$\times\left(\int\limits_\Gamma <-x,\gamma'>f(-\rho^{-1}\gamma')<-\rho^{-1}\gamma,\gamma'>\psi(\gamma')\,d\gamma'\right)dx=$$

$$=|\rho|^{-1}f(\rho^{-1}\gamma)\,f(-\rho^{-1}\gamma)\ <-\rho^{-1}\gamma,\gamma>\psi(\gamma)=$$

$$=|\rho|^{-1}f(\rho^{-1}\gamma-\rho^{-1}\gamma)\ \psi(\gamma)=$$

$$=|\rho|^{-1}f(0)\ \psi(\gamma)=|\rho|^{-1}\psi(\gamma).$$

Таким образом, если f — невырожденный характер второй степени на группе G, то $|\rho|F_{31}(F_{13}\psi)=\psi$, поэтому сплетающие операторы F_{13} и F_{31} связаны соотношением

$$|\rho|F_{31}=F_{13}^{-1},$$

где $|\rho|$ — модуль изоморфизма $\rho: G\to\Gamma$, ассоциированного с характером второй степени f.

Рассмотрим снова невырожденный характер второй степени f на группе G, и пусть $\rho=\rho(f)$ — соответствующий изоморфизм G на группе Γ. Вычислим преобразование Фурье для f:

$$g(\gamma)=\int\limits_G <-x,\gamma>\ f(x)\,dx.$$

По крайней мере формально,

$$g(\gamma)=\int\limits_G <-x,\gamma>\ f(x)\ dx=$$

$$=\int\limits_G <-x-t,\gamma>\ f(x+t)\,dx=$$

$$=<-t,\gamma>\ f(t)\int\limits_G <-x,\gamma-\rho t>\ f(x)\,dx=$$

$$=<-t,\gamma>\ f(t)\,g(\gamma-\rho t).$$

Следовательно,

$$g(\gamma) = < -t, \gamma > f(t)\, g(\gamma - \rho t),\ t \in G.$$

Полагая в последнем равенстве $\gamma = \rho t$, получаем соотношение

$$g(\gamma) = < -t, \rho t > f(t)\, g(0) = g(0)\ \overline{f(-t)},$$

т. е.

$$g(\gamma) = g(0)\, f(-\rho^{-1}\gamma)^{-1}.$$

Однако тогда с помощью формулы обращения для преобразования Фурье имеем

$$f(x) = \int_\Gamma < x, \gamma > g(\gamma)\, d\gamma =$$

$$= g(0) \int_\Gamma < x, \gamma > f(-\rho^{-1}\gamma)^{-1}\, d\gamma =$$

$$= g(0)\ |\rho^{-1}|^{-1} \int_G < x, \rho t > \overline{f(-t)}\, dt =$$

$$= g(0)\ |\rho| \int_G < t, \rho x > \overline{f(-t)}\, dt =$$

$$= g(0)\, |\rho| \int_G < -t, -\rho x > \overline{f(-t)}\, dt =$$

$$= g(0)\ |\rho|\ \overline{g(-\rho x)},$$

поэтому

$$1 = f(0) = |\rho|\, |g(0)|^2,$$

и, значит,

$$g(0) = \tau(f)\, |\rho|^{-1/2},$$

где $\tau(f)$ — некоторое комплексное число, равное по абсолютной величине единице.

Таким образом,

$$g(\gamma) = \tau(f)\, \frac{1}{\sqrt{|\rho|}}\, f(-\rho^{-1}\gamma)^{-1}.$$

Для обоснования приведенных формальных вычислений преобразования Фурье применительно к характеру второй степени необходимо воспользоваться теорией обобщенных функций на произвольных локально компактных коммутативных группах. Для этого на группе G необходимо выделить "пространство бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций" $\mathfrak{L}$ и определить умеренные обобщенные функции как линейные непрерывные функционалы на пространстве Шварца–Брюа $\mathfrak{L}$, снабженном подходящей топологией. Тогда рассмотренное здесь преобразование Фурье для характера второй степени следует понимать в смысле соответствующей теории преобразования Фурье умеренных обобщенных функций на группе G. На деталях останавливаться не будем.

Теперь переходим к вычислению композиции сплетающих операторов F_{21}, F_{32}, F_{13}:

$$(F_{21}\psi)(x) = \int_\Gamma < -x, \gamma > \psi(\gamma)\, d\gamma = \hat{\psi}(-x),$$

$$((F_{32} \circ F_{21})\psi)(\gamma) = \int_G < x, \gamma + \rho x > \overline{f(x)}\, \hat{\psi}(-x)\, dx = h(\gamma),$$

$$((F_{13} \circ F_{32} \circ F_{21})\psi)(\gamma) = \int_G f(t)\, h(\gamma - \rho t)\, dt =$$

$$= \int_G f(t) \left(\int_G < x, \gamma - \rho t + \rho x > \overline{f(x)}\, \hat{\psi}(-x)\, dx \right) dt.$$

Преобразуем внутренний интеграл

$$\int_G < x, \gamma - \rho t + \rho x > \overline{f(x)}\, \hat{\psi}(-x)\, dx =$$

$$= \int_G < -x, \gamma - \rho t - \rho x > \overline{f(-x)}\, \hat{\psi}(x)\, dx =$$

$$= \int_G < -x, \gamma - \rho t > f(x)\ \hat{\psi}(x)\, dx.$$

Тогда с помощью равенства

$$\int\limits_G \Phi(x)\, F(x)\ <-x, \gamma_0>\ dx = \int\limits_\Gamma \hat{\Phi}(\gamma)\, \hat{F}(\gamma_0 - \gamma)\, d\gamma,$$

легко вытекающего из формулы Парсеваля, получаем

$$\int\limits_G <-x, \gamma - \rho t>\ f(x)\, \hat{\psi}(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_\Gamma \hat{f}(\gamma')\, \psi(\gamma - \rho t - \gamma')\, d\gamma' = \int\limits_\Gamma g(\gamma')\, \psi(\gamma - \rho t - \gamma')\, d\gamma' =$$

$$= \frac{\tau(f)}{\sqrt{|\rho|}} \int\limits_\Gamma \overline{f(-\rho^{-1}\gamma')}\, \psi(\gamma - \rho t - \gamma')\, d\gamma'.$$

Следовательно,

$$((F_{13} \circ F_{32} \circ F_{21})\psi)(\gamma) =$$

$$= \frac{\tau(f)}{\sqrt{|\rho|}} \int\limits_G f(t) \left(\int\limits_\Gamma \overline{f(-\rho^{-1}\gamma')}\ \psi(\gamma - \rho t - \gamma')\, d\gamma' \right) dt =$$

$$= \frac{\tau(f)}{\sqrt{|\rho|}} \int\limits_G f(t) \left(\int\limits_\Gamma \overline{f(t + \rho^{-1}\gamma')}\ \psi(\gamma + \gamma')\, d\gamma' \right) dt =$$

$$= \frac{\tau(f)}{\sqrt{|\rho|}} \int\limits_G f(t) \left(\int\limits_\Gamma \overline{f(t)}\, \overline{f(\rho^{-1}\gamma')}\ <-t, \gamma'>\ \psi(\gamma + \gamma')\ d\gamma' \right) dt =$$

$$= \frac{\tau(f)}{\sqrt{|\rho|}} \int\limits_G \left(\int\limits_\Gamma \overline{f(\rho^{-1}\gamma')}\ <-t, \gamma'>\, \psi(\gamma + \gamma')\, d\gamma' \right) dt =$$

$$= \frac{\tau(f)}{\sqrt{|\rho|}} \int\limits_\Gamma \overline{f(\rho^{-1}\gamma')}\, \psi(\gamma + \gamma') \left(\int\limits_G <-t, \gamma'>\, dt \right) d\gamma' =$$

$$= \frac{\tau(f)}{\sqrt{|\rho|}} \int\limits_\Gamma \overline{f(\rho^{-1}\gamma')}\, \psi(\gamma + \gamma')\, \delta(\gamma')\, d\gamma' =$$

$$= \frac{\tau(f)}{\sqrt{|\rho|}}\, \overline{f(0)}\, \psi(\gamma + 0) = \frac{\tau(f)}{\sqrt{|\rho|}}\, \psi(\gamma).$$

Таким образом, доказано, что композиция сплетающих операторов

$$F_{13} \circ F_{32} \circ F_{21} = \frac{\tau(f)}{\sqrt{|\rho|}}\, \mathrm{id}_{L^2(\Gamma)}.$$

Поскольку $F_{21}^{-1} = F_{12}$, последнее соотношение можно записать в виде

$$F_{13} \circ F_{32} = \frac{\tau(f)}{\sqrt{|\rho|}}\, F_{12}.$$

Кроме того, $\overline{f(x)} < x, \rho x > = f(-x)$, поэтому из интегральной формулы для сплетающего оператора F_{32} вытекает, что

$$(F_{32}\psi)(\gamma) = \int\limits_G <x, \gamma>\ f(-x)\, \psi(x)\, dx,$$

$$(F_{32}\psi)(\gamma) = (f(-x)\, \psi(x))^\wedge(-\gamma).$$

Следовательно,

$$(F_{13} \circ F_{32})\psi(\gamma) = \int\limits_G f(t)\, (F_{32}\psi)\, (\gamma - \rho t)\ dt =$$

$$= \int\limits_G f(t)\ (f(-x)\, \psi(x))^\wedge(-\gamma + \rho t)\, dt =$$

$$= |\rho|^{-1} \int\limits_\Gamma f(\rho^{-1}\gamma')\, (f(-x)\ \psi(x))^\wedge(-\gamma + \gamma')\, d\gamma' =$$

$$= |\rho|^{-1} \int\limits_\Gamma f(-\rho^{-1}\gamma')\, (f(-x)\, \psi(x))^\wedge(-\gamma - \gamma')\, d\gamma' =$$

$$= |\rho|^{-1}\, (f(-\rho^{-1}\gamma')\ *\ (f(-x)\, \psi(x))^\wedge(\gamma'))\, (-\gamma).$$

В результате получаем, что

$$\tau(f)\, \sqrt{|\rho|}\, \hat{\psi}(\gamma) = f(-\rho^{-1}\gamma)\ *\ (f(-x)\, \psi(x))^\wedge(\gamma),$$

или в символьной форме,

$$\tau(f)\ \sqrt{|\rho|}\ F = (f(-\rho^{-1}\gamma)\ *)\ \circ F \circ (f(-x)\ \cdot),$$

где F — оператор преобразования Фурье, $(f(-\rho^{-1}\gamma)\,*)$ — оператор свертки с функцией $f(-\rho^{-1}\gamma)$, а $(f(-x)\,\cdot)$ — оператор умножения на функцию $f(-x)$.

Если обозначить

$$\hat{\psi}(f,\gamma) = (F \circ (f(-x)\,\cdot))\,\psi(\gamma) = \\ = \int\limits_G < -x, \gamma > \, f(-x)\,\psi(x)\,dx,$$

то последнее равенство можно записать в виде

$$\tau(f)\,\sqrt{|\rho|}\,\hat{\psi}(\gamma) = f(-\rho^{-1}\gamma) * \hat{\psi}(f,\gamma),$$

где

$$f(-\rho^{-1}\gamma) * \hat{\psi}(f,\gamma) = \int\limits_\Gamma f(-\rho^{-1}\gamma')\,\hat{\psi}(f,\gamma-\gamma')\,d\gamma' = \\ = |\rho| \int\limits_G f(-x)\,\hat{\psi}(f,\gamma-\rho x)\,dx = \\ = |\rho| \int\limits_G f(x)\,\hat{\psi}(f,\gamma+\rho x)\,dx.$$

Таким образом, функцию $\hat{\psi}(\gamma)$ получаем из функции $\hat{\psi}(f,\gamma)$ путем интегрального преобразования

$$\hat{\psi}(\gamma) = \overline{\tau(f)}\,\sqrt{|\rho|} \int\limits_G f(x)\,\hat{\psi}(f,\gamma+\rho x)\,dx.$$

Для этого интегрального преобразования теперь получаем формулу обращения. Очевидно, что формула обращения прямо вытекает из соотношения

$$\tau(f)\,\sqrt{|\rho|}\,F = (f(-\rho^{-1}\gamma)\,*) \circ F \circ (f(-x)\,\cdot),$$

если известен обратный оператор $(f(-\rho^{-1}\gamma)\,*)^{-1}$:

$$F \circ (f(-x)\cdot) = \tau(f)\,\sqrt{|\rho|}\,(f(-\rho^{-1}\gamma)\,*)^{-1} \circ F.$$

Другими словами, достаточно решить уравнение в свертках

$$X * (f(-\rho^{-1}\gamma)) = \delta.$$

Докажем, что

$$X = \frac{1}{\sqrt{|\rho|}}\,\overline{f(\rho^{-1}\gamma)}$$

является решением этого уравнения.

Действительно, для $\gamma \in \Gamma$ и $t = \rho^{-1}\gamma$ имеем

$$(\overline{f(\rho^{-1}\gamma')} * f(-\rho^{-1}\gamma'))(\gamma) = \\ = \int\limits_\Gamma \overline{f(\rho^{-1}\gamma')}\,f(-\rho^{-1}(\gamma-\gamma'))\,d\gamma' = \\ = |\rho^{-1}|^{-1} \int\limits_G \overline{f(t')}\,f(-t+t')\,dt' = \\ = |\rho| \int\limits_G \overline{f(t')}\;f(t')\,f(-t)\;\; < -t', \rho t > \, dt' = \\ = |\rho|\,f(-t) \int\limits_G < -t', \gamma > \, dt' = |\rho|\,f(-\rho^{-1}\gamma)\,\delta(\gamma) = \\ = |\rho|\,f(0)\,\delta(\gamma) = |\rho|\,\delta(\gamma),$$

поэтому

$$(\overline{f(\rho^{-1}\gamma')} * f(-\rho^{-1}\gamma'))(\gamma) = |\rho|\,\delta(\gamma).$$

Таким образом,

$$(f(-\rho^{-1}\gamma)\,*)^{-1} = \frac{1}{|\rho|}\,(\overline{f(-\rho^{-1}\gamma)}\,*),$$

откуда следует, что

$$\hat{\psi}(f,\gamma) = (F \circ (f(-x)\,\cdot))\,\psi(\gamma) = \\ = \frac{\tau(f)}{\sqrt{|\rho|}} \int\limits_\Gamma \overline{f(\rho^{-1}\gamma')}\,\hat{\psi}(\gamma-\gamma')\,d\gamma' = \\ = \frac{\tau(f)}{\sqrt{|\rho|}} \int\limits_\Gamma \overline{f(\rho^{-1}\gamma')}\;\hat{\psi}(\gamma-\rho(\rho^{-1}\gamma'))\,d\gamma' = \\ = \tau(f)\sqrt{|\rho|} \int\limits_G \overline{f(t)}\,\hat{\psi}(\gamma-\rho t)\,dt.$$

В результате доказано, что

$$\hat{\psi}(f,\gamma) = \tau(f)\sqrt{|\rho|}\int\limits_G \overline{f(t)}\,\hat{\psi}(\gamma-\rho t)\,dt.$$

Наконец, из формулы обращения для преобразования Фурье следует, что

$$f(-x)\,\psi(x) = \int\limits_\Gamma <x,\gamma>\,\hat{\psi}(f,\gamma)\,d\gamma,$$

поэтому для интегрального преобразования

$$\hat{\psi}(f,\gamma) = \int\limits_G <-x,\gamma>\,f(-x)\,\psi(x)\,dx$$

справедлива формула обращения

$$\psi(x) = \overline{f(-x)}\int\limits_\Gamma <x,\gamma>\,\hat{\psi}(f,\gamma)\,d\gamma.$$

В дальнейшем интегральное преобразование

$$\hat{\psi}(f,\gamma) = \int\limits_G <-x,\gamma>\,f(-x)\,\psi(x)\,dx,\ f\in X_2(G),\ \gamma\in\Gamma,$$

будем называть преобразованием Фурье–Френеля функции ψ.

Теорема 4. *Пусть f — произвольный невырожденный характер второй степени на локально компактной коммутативной группе G и $\rho: G\to\Gamma$ — изоморфизм, ассоциированный с f. Тогда для преобразования Фурье–Френеля справедлива следующая формула обращения:*

$$\psi(x) = \overline{f(-x)}\int\limits_\Gamma <x,\gamma>\,\hat{\psi}(f,\gamma)\,d\gamma,\ x\in G.$$

Кроме того, преобразования Фурье и Фурье–Френеля связаны интегральными соотношениями

$$\hat{\psi}(\gamma) = \overline{\tau(f)}\sqrt{|\rho|}\int\limits_G f(x)\,\hat{\psi}(f,\gamma+\rho x)\,dx,\ \gamma\in\Gamma,$$

$$\hat{\psi}(f,\gamma) = \tau(f)\sqrt{|\rho|}\int\limits_G \overline{f(x)}\,\hat{\psi}(\gamma-\rho x)\,dx,\ f\in X_2(G),\ \gamma\in\Gamma.$$

Пусть для $t\in G$ и функции ψ, заданной на группе G, ψ_t обозначает сдвиг функции ψ на элемент t: $\psi_t(x)=\psi(x-t)$. Тогда

$$(\psi_t)\hat{}\,(\gamma) = <-t,\gamma>\,\hat{\psi}(\gamma),$$

т. е. операция сдвига преобразованием Фурье превращается в операцию умножения на характер. В то же время прямым вычислением легко убедиться в том, что преобразование Фурье–Френеля переводит сдвиг в более сложную операцию:

$$(\psi_t)^\wedge(f,\gamma) = <-t,\gamma>\,f(-t)\,\hat{\psi}(f,\gamma-\rho t),$$

которая в случае $f=1$ совпадает с операцией умножения на характер.

Теперь введем операцию "обобщенного сдвига" $U_t(f)$ так, чтобы для любой функции $\psi\in L^2(G)$ выполнялось соотношение

$$(U_t(f)\ \psi)^\wedge(f,\gamma) = <-t,\gamma>\,\hat{\psi}(f,\gamma).$$

Рассмотрим гомоморфизм $\alpha: G\to A(G)$, для которого

$$\alpha(t) = (t,\rho t,f(t)),\ t\in G.$$

Тогда для функции $\psi\in L^2(G)$ и представления W_2 группы Гейзенберга $A(G)$ имеем

$$(W_2(\alpha(t))\ \psi)(x) = f(t)<-x,\rho t>\psi(x-t),$$

а для функции $\psi\in L^2(\Gamma)$ и представления $\tilde{W}$, построенного с помощью характера второй степени f,

$$\begin{aligned}(\tilde{W}(\alpha(t))\,\psi)(\gamma) &= \tilde{W}(t,\rho t,f(t))\,\psi(\gamma) =\\ &= f(t)\ \tilde{W}(t,\rho t,1)\,\psi(\gamma) =\\ &= f(t)\ <t,\gamma>\ \overline{f(t)}\,\psi(\gamma) =\\ &= <t,\gamma>\,\psi(\gamma),\end{aligned}$$

т. е. $\tilde{W}(\alpha(t))$ действует на $L^2(\Gamma)$ как оператор умножения на характер.

Рассмотрим также оператор $F_{32} : L^2(G) \to L^2(G)$, сплетающий представления W_2 и $\tilde{W} : F_{32}W_2 = \tilde{W}F_{32}$.

Для любой функции $\psi \in L^2(G)$

$$(\tilde{W}(\alpha(t)) \circ F_{32})\,\psi)(\gamma) = < t, \gamma > (F_{32}\psi)(\gamma) =$$
$$= < t, \gamma > \hat{\psi}(f, -\gamma),$$
$$(F_{32} \circ W_2(\alpha(t)))\,\psi)(\gamma) = F_{32}\,(W_2(\alpha(t))\,\psi)(\gamma) =$$
$$= (F_{32}h)(\gamma) = \hat{h}(f, -\gamma),$$

где

$$h(x) = (W_2\,(\alpha(t))\,\psi)(x) =$$
$$= f(t)\ < -x, \rho t > \psi(x - t) =$$
$$= \overline{f(-x)}\, f(t - x)\, \psi(x - t).$$

Следовательно,

$$\hat{h}(f, -\gamma) = < t, \gamma > \hat{\psi}(f, -\gamma).$$

Теперь оператор обобщенного сдвига $U_t(f)$ определяем формулой

$$(U_t(f)\psi)(x) = \overline{f(-x)}\, f(t - x)\, \psi(x - t).$$

Очевидно, что при $f = 1$ справедливо соотношение $U_t(f) = T_t$, где $(T_t)\psi(x) = \psi_t(x)$ — обычный сдвиг функции ψ на элемент t. Кроме того, в случае произвольного характера второй степени f оператор обобщенного сдвига $U_t(f)$ можно записать в следующей форме:

$$U_t(f) = (f(-x)\cdot\,)^{-1} \circ T_t \circ\ (f(-x)\cdot\,),$$

где $(f(-x)\cdot\,)$ есть оператор умножения на функцию $f(-x)$.

Таким образом, доказано, что

$$(U_t(f)\psi)^{\wedge}(f, \gamma) = < -t, \gamma > \hat{\psi}(f, \gamma).$$

Другими словами, преобразование Фурье–Френеля переводит оператор обобщенного сдвига $U_t(f)$ в оператор умножения на характер.

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний относительно преобразования Фурье–Френеля в случае, когда f — произвольный характер второй степени на группе G. Тогда симметричный гомоморфизм $\rho : G \to \Gamma$, ассоциированный с f в том смысле, что

$$f(x + y) = f(x)f(y) < x, \rho y >$$

для любых $x, y \in G$, не является, вообще говоря, изоморфизмом группы G на группе Γ.

Рассмотрим замкнутую подгруппу $H = \ker\rho$. Очевидно, что для любых $x \in G$ и $y \in H$ справедливо равенство $f(x + y) = f(x)f(y)$. Так, сужение f на подгруппу H является характером на H. Обозначим этот характер через $\gamma_0 : f(x) = < x, \gamma_0 >,\ x \in H$. Тогда для любых $x \in G$ и $y \in H$ имеем равенство

$$f(x + y) = f(x)\ < y, \gamma_0 > .$$

Известно, что каждый непрерывный характер на подгруппе H можно продолжить до непрерывного характера на группе G. Рассмотрим какое-либо продолжение на группу G характера γ_0 и обозначим его снова через γ_0. Пусть $f_0 : G \to \mathbb{T}$ — характер второй степени на G, связанный с характером f соотношением

$$f(x) = f_0(x)\ < x, \gamma_0 >,\ x \in G.$$

Тогда имеем

$$\hat{\psi}(f, \gamma) = \int\limits_G < -x, \gamma + \gamma_0 > f_0(-x)\, \psi(x)\, dx = \hat{\psi}(f_0, \gamma + \gamma_0),$$

где f_0 — характер второй степени на группе G, равный единице на подгруппе H, а гомоморфизм $\rho_0 : G \to \Gamma$, ассоциированный с f_0, совпадает с гомоморфизмом ρ.

Рассмотрим аннулятор

$$H^{\perp} = \{\gamma \in \Gamma = \hat{G} : < x, \gamma > = 1 \text{ для любого } x \in H\}.$$

Очевидно, что $H^{\perp}$ есть замкнутая подгруппа группы характеров $\Gamma = G^{\wedge}$, при этом можно отождествить

$$H^{\perp} = (G/H)^{\wedge},\ \Gamma/H^{\perp} = H^{\wedge},$$

так как подгруппы $H^\perp$, $\Gamma/H^\perp$ канонически изоморфны и гомеоморфны группам характеров для G/H, H соответственно.

Для любых $x \in G$ и $t \in H$ справедливо равенство $f_0(x+t) = f_0(x)$, т. е. f_0 — функция на группе G, постоянная на каждом классе смежности $\dot{x} = x+H$ относительно подгруппы H, поэтому f_0 можно рассматривать как функцию на фактор-группе G/H, полагая $f_0(\dot{x}) = f_0(x)$ для любого $\dot{x} = x + H \in G/H$. Очевидно, что $f_0 : G/H \to \mathbb{T}$ есть характер второй степени на фактор-группе G/H, а соответствующий ему гомоморфизм $\rho_0 : G/H \to H^\perp = (G/H)^\wedge$ определяется формулой

$$\rho_0(\dot{x}) = \rho(x),\ x \in G,$$

и является изоморфизмом G/H в $H^\perp$, так как $H = \ker\rho$.

Заметим, что изоморфизм ρ не является в общем случае изоморфизмом G/H на $H^\perp$, а его образ $\rho_0(G/H) = \rho(G)$ есть подгруппа в $H^\perp$, но эта подгруппа не обязательно должна быть замкнутой подгруппой в $H^\wedge$.

Действительно, пусть $G = \mathbb{Z}$ и f — характер второй степени на $\mathbb{Z}$, заданный формулой

$$f(n) = e^{\pi i n^2 \omega},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Так как

$$f(n+m) = f(n)\, f(m)\, e^{2\pi i n m \omega},$$

гомоморфизм $\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{T} = \mathbb{Z}^\wedge$, ассоциированный с характером второй степени f, определяется соотношением

$$\rho(m) = e^{2\pi i m \omega},\ m \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что без ограничения общности можно считать, что $0 \le \omega < 1$. Рассмотрим сначала ситуацию, когда ω — положительное рациональное число. В этом случае представим ω в виде $\omega = \frac{p}{q}$, где p, q — взаимно простые натуральные числа. Тогда $H = \ker\rho = q\mathbb{Z} = \{qn : n \in \mathbb{Z}\}$ и фактор-группа $G/H = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ есть конечная группа $\{0, 1, ..., q-1\}$ с групповой операцией сложения по модулю q. Следовательно, ее группа характеров $(G/H)^\wedge = H^\perp$ является подгруппой мультипликативной группы $\mathbb{T}$, состоящей из всех корней степени q из $1 : H^\perp = \{z \in \mathbb{T} : z^q = 1\}$, при этом гомоморфизм $\rho_0 : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to H^\perp$ задается соотношением

$$\rho_0(n) = e^{2\pi i n \omega},\ n = 0, 1, ..., q-1,$$

и является изоморфизмом G/H на $H^\perp$.

Теперь предположим, что ω — иррациональное число. Тогда гомоморфизм $\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{T}$, ассоциированный с характером второй степени f, есть изоморфизм и $H = \ker\rho = \{0\}$. Кроме того, так как дробные части $x_n = \{\pi\omega\}$ образуют последовательность, равномерно распределенную на интервале $(0, 1)$, образ группы $\mathbb{Z}$ при изоморфизме ρ является плотной подгруппой окружности $\mathbb{T}$. В то же время $\rho(\mathbb{Z}) \neq \mathbb{T}$.

Рассмотрим снова общую ситуацию и предположим, что ρ_0 является изоморфизмом G/H на $H^\perp$, т. е. характер второй степени f_0 на группе G/H является невырожденным характером второй степени.

Предположим, что на G, H и G/H выбраны меры Хаара m_G, m_H и $m_{G/H}$. Пусть для $x \in G$ снова $\dot{x} = x + H$ обозначает класс смежности относительно H, содержащий элемент x. Тогда для любой непрерывной на G функции F, имеющей компактный носитель, интеграл

$$\int_H F(x+t)\, dm_H(t)$$

не изменяется при замене x на $x + t_0$ при любом $t_0 \in H$, т. е. этот интеграл является функцией, постоянной на каждом классе смежности для группы G относительно подгруппы H, поэтому его можно рассматривать как функцию на фактор-группе G/H.

Считаем, что меры Хаара на G, H и G/H выбраны так, что выполняется равенство

$$\int_H F(x)\, dm_G(x) = \int_{G/H} \left(\int_H F(x+t)\, dm_H(t) \right) dm_{G/H}(\dot{x})$$

для любой непрерывной функции F с компактным носителем.

Тогда для преобразования Фурье–Френеля функции ψ имеем

$$\hat{\psi}(f, \gamma) = \hat{\psi}(f_0\gamma_0, \gamma) = \hat{\psi}(f_0, \gamma + \gamma_0) =$$

$$= \int_G < -x, \gamma + \gamma_0 > f_0(-x)\, \psi(x)\, dm_G(x) =$$

$$= \int\limits_{G/H} f_0(-\dot{x}) \left(\int\limits_H <-x-t, \gamma+\gamma_0> \psi(x+t)\, dm_H(t) \right) dm_{G/H}(\dot{x}).$$

Рассмотрим на группе $G \times \Gamma$ функцию θ, определенную формулой

$$\theta(x,\gamma) = \int\limits_H <-t, \gamma> \psi(x+t)\, dm_H(t),$$

являющуюся неполным преобразованием Фурье функции ψ.

Очевидно, что

$$\hat{\psi}(\gamma) = \int\limits_{G/H} <-x, \gamma> \theta(x,\gamma)\, dm_{G/H}(\dot{x}),$$

при этом полезно отметить, что для каждого $\gamma \in \Gamma$ функция $x \to <-x, \gamma> \theta(x,\gamma)$ является постоянной функцией на каждом классе смежности $x+H$, поэтому ее можно рассматривать как функцию на фактор-группе G/H, и, значит, правая часть последнего равенства хорошо определена. Кроме того, из определения функции θ получаем, что для любых $y \in H$ и $\tau \in H^\perp$

$$\theta(x+y, \gamma+\tau) = <y, \gamma> \theta(x,\gamma).$$

В частности, для любого $\tau \in H^\perp$ справедливо равенство

$$\theta(x, \gamma+\tau) = \theta(x,\gamma),$$

поэтому для каждого x функция $\gamma \to \theta(x,\gamma)$ является постоянной на каждом классе смежности $\gamma + H^\perp$ группы Γ относительно подгруппы $H^\perp$. Следовательно, соотношением

$$\theta(x,\dot{\gamma}) = \theta(x,\gamma),\ \dot{\gamma} = \gamma + H^\perp,$$

определяем θ как функцию на группе $G \times (\Gamma/H^\perp)$. В то же время равенство

$$\theta(x+y,\gamma) = <y,\gamma> \theta(x,\gamma)$$

справедливо для любого $y \in H$, поэтому

$$\theta(x+y,\dot{\gamma}) = <y,\gamma> \theta(x,\dot{\gamma})$$

есть условие полуинвариантности функции θ относительно сдвигов на элементы подгруппы H.

Пусть $\gamma_1 = \gamma + \gamma_0$ и $\dot{\gamma}_1 = \gamma_1 + H^\perp$. Тогда с помощью функции θ можно записать преобразование Фурье–Френеля функции ψ в виде

$$\hat{\psi}(f,\gamma) = \hat{\psi}(f_0,\gamma_1) = \int\limits_{G/H} f_0(-\dot{x}) <-x, \gamma_1> \theta(x,\dot{\gamma}_1)\, dm_{G/H}(\dot{x}).$$

Таким образом, для фиксированного γ_1 и любого $\tau \in H^\perp$ получаем, что

$$\hat{\psi}(f_0, \gamma_1+\tau) = \int\limits_{G/H} f_0(-\dot{x}) <-x,\tau> (<-x,\gamma_1> \theta(x,\dot{\gamma}_1))\, dm_{G/H}(\dot{x}).$$

Поскольку

$$<-(x+t),\tau> = <-x,\tau><-t,\tau> = <-x,\tau>$$

для каждого $t \in H$, т. е. $<-x,\tau>$ как функция переменной $x \in G$ является функцией, постоянной на каждом классе смежности группы G относительно замкнутой подгруппы H, считаем, что

$$<-x,\tau> = <-\dot{x},\tau>$$

для любого $x \in G$, где $\dot{x} = x + H$.

Следовательно,

$$\hat{\psi}(f_0,\gamma_1+\tau) = \int\limits_{G/H} f_0(-\dot{x}) <-\dot{x},\tau> \varphi(\dot{x})\, dm_{G/H}(\dot{x}),$$

где $\varphi(\dot{x}) = <-x,\gamma_1> \theta(x,\dot{\gamma}_1)$, поэтому при фиксированном γ_1 и любом $\tau \in H^\perp$

$$\hat{\psi}(f_0,\gamma_1+\tau) = \hat{\varphi}(f_0,\tau)$$

является преобразованием Фурье–Френеля функции φ на группе G/H. Однако мы считаем, что $f_0 : G/H \to \mathbb{T}$ есть невырожденный характер второй степени и, значит, справедлива формула обращения

$$\varphi(\dot{x}) = \overline{f_0(-\dot{x})} \int\limits_{H^\perp} < \dot{x}, \tau > \hat{\varphi}(f_0, \tau)\, dm_{H^\perp}(\tau),$$

т. е.

$$< -x, \gamma_1 > \theta(x, \dot{\gamma}_1) = \\ = \overline{f_0(-x)} \int\limits_{H^\perp} < x, \tau > \hat{\psi}(f_0, \gamma_1 + \tau)\, dm_{H^\perp}(\tau),$$

откуда получаем, что

$$\theta(x, \dot{\gamma}_1) = \overline{f_0(-x)} \int\limits_{H^\perp} < x, \gamma_1 + \tau > \hat{\psi}(f_0, \gamma_1 + \tau)\, dm_{H^\perp}(\tau).$$

Теперь воспользуемся формулой обращения для неполного преобразования Фурье $\psi \to \theta$:

$$\psi(x + t) = \int\limits_{\Gamma/H^\perp} < t, \dot{\gamma}_1 > \theta(x, \dot{\gamma}_1)\, dm_{\Gamma/H^\perp}(\dot{\gamma}_1) = \\ = \overline{f_0(-(x+t))} \int\limits_{\Gamma/H^\perp} \Big(\int\limits_{H^\perp} < x + t, \gamma_1 + \tau > \times \\ \times\, \hat{\psi}(f_0, \gamma_1 + \tau)\, dm_{H^\perp}(\tau) \Big)\, dm_{\Gamma/H^\perp}(\dot{\gamma}_1) = \\ = \overline{f_0(-(x+t))} \int\limits_{\Gamma} < x + t, \gamma_1 > \hat{\psi}(f_0, \gamma_1)\, dm_{\Gamma}(\gamma_1),$$

поэтому

$$\psi(x) = \overline{f_0(-x)} \int\limits_{\Gamma} < x, \gamma_1 > \hat{\psi}(f_0, \gamma_1)\, dm_{\Gamma}(\gamma_1) = \\ = \overline{f(-x)} \int\limits_{\Gamma} < x, \gamma_1 - \gamma_0 > \hat{\psi}(f_0, \gamma_1)\, d\gamma_1 = \\ = \overline{f(-x)} \int\limits_{\Gamma} < x, \gamma > \hat{\psi}(f_0, \gamma_0 + \gamma)\, d\gamma = \\ = \overline{f(-x)} \int\limits_{\Gamma} < x, \gamma > \hat{\psi}(f, \gamma)\, d\gamma.$$

Таким образом, имеем формулу обращения для преобразования Фурье–Френеля:

$$\psi(x) = \overline{f(-x)} \int\limits_{\Gamma} < x, \gamma > \hat{\psi}(f, \gamma)\, d\gamma,\ x \in G.$$

Кроме того, воспользуемся интегральными преобразованиями, связывающими преобразования Фурье и Фурье–Френеля на группе G/H:

$$\hat{\varphi}(\gamma) = \overline{\tau(f_0)} \sqrt{|\rho_0|} \int\limits_{G/H} f_0(\dot{x})\, \hat{\varphi}(f_0, \gamma + \rho_0 \dot{x})\, dm_{G/H}(\dot{x}),$$

$$\hat{\varphi}(f_0, \gamma) = \tau(f_0) \sqrt{|\rho_0|} \int\limits_{G/H} \overline{f_0(\dot{x})}\, \hat{\varphi}(\gamma - \rho_0 \dot{x})\, dm_{G/H}(\dot{x}),$$

где преобразования Фурье и Фурье–Френеля функции φ на G/H определены формулами

$$\hat{\varphi}(\gamma) = \int\limits_{G/H} < -\dot{x}, \gamma > \varphi(\dot{x})\, dm_{G/H}(\dot{x}),\ \gamma \in H^\perp,$$

$$\hat{\varphi}(f_0, \gamma) = \int\limits_{G/H} < -\dot{x}, \gamma > f_0(-\dot{x}) \varphi(\dot{x})\, dm_{G/H}(\dot{x}),\ \gamma \in H^\perp,$$

а $|\rho_0|$ — модуль изоморфизма $\rho_0 : G/H \to H^\perp$, ассоциированного с невырожденным характером второй степени $f_0 : G/H \to \mathbb{T}$.

Следовательно, если зафиксировать $\gamma_1 \in \Gamma$ и положить

$$\varphi(\dot{x}) = <-x, \gamma_1> \theta(x, \dot{\gamma}_1) = \int\limits_H <-x-t, \gamma_1> \psi(x+t)\, dm_H(t),$$

то с помощью очевидных преобразований получим

$$\hat{\varphi}(\gamma) =$$

$$= \int\limits_{G/H} <-\dot{x}, \gamma> \left(\int\limits_H <-x-t, \gamma_1> \psi(x+t)\, dm_H(t) \right) dm_{G/H}(\dot{x}) =$$

$$= \int\limits_{G/H} \left(\int\limits_H <-x-t, \gamma_1+\gamma> \psi(x+t)\, dm_H(t) \right) dm_{G/H}(\dot{x}) =$$

$$= \int\limits_G <-x, \gamma_1+\gamma> \psi(x)\, dm_G(x) = \hat{\psi}(\gamma_1+\gamma),$$

что является преобразованием Фурье на группе G для функции ψ, вычисленным в точке $\gamma_1 + \gamma \in \Gamma$.

Аналогичным образом находим $\hat{\varphi}(f_0, \gamma)$ для указанного выбора функции φ на группе G/H

$$\hat{\varphi}(f_0, \gamma) = \int\limits_{G/H} <-\dot{x}, \gamma> f_0(-\dot{x}) \times$$

$$\times \left(\int\limits_H <-x-t, \gamma_1> \psi(x+t)\, dm_H(t) \right) dm_{G/H}(\dot{x}) =$$

$$= \int\limits_{G/H} \left(\int\limits_H <-x-t, \gamma_1+\gamma> f_0(-(x+t))\, \psi(x+t)\, dm_H(t) \right) \times$$

$$\times\, dm_{G/H}(\dot{x}) =$$

$$= \int\limits_G <-x, \gamma_1+\gamma> f_0(-x)\, \psi(x)\, dm_G(x) = \hat{\psi}(f_0, \gamma_1+\gamma),$$

являющиеся преобразованием Фурье–Френеля на группе G для функций ψ, вычисленным в точке $\gamma_1 + \gamma \in \Gamma$. Тогда

$$\hat{\psi}(\gamma_1+\gamma) = \overline{\tau(f_0)}\, \sqrt{|\rho_0|} \int\limits_{G/H} f_0(\dot{x})\, \hat{\psi}(f_0, \gamma_1+\gamma+\rho_0\dot{x})\, dm_{G/H}(\dot{x}),$$

$$\hat{\psi}(f_0, \gamma_1+\gamma) = \tau(f_0)\, \sqrt{|\rho_0|} \int\limits_{G/H} \overline{f_0(\dot{x})}\, \hat{\psi}(\gamma_1+\gamma-\rho_0\dot{x})\, dm_{G/H}(\dot{x}).$$

Так как здесь можно считать, что $\gamma_1 + \gamma$ есть произвольный элемент группы Γ, и

$$\hat{\psi}(f_0, \gamma+\gamma_0) = \hat{\psi}(f, \gamma),\ \gamma \in \Gamma,$$

где γ_0 — произвольный непрерывный характер на группе G, такой, что $f\,|_H = \gamma_0\,|_H$, то для любого $\gamma \in \Gamma$ находим соотношения

$$\hat{\psi}(\gamma) = \overline{\tau(f_0)}\, \sqrt{|\rho_0|} \int\limits_{G/H} f_0(\dot{x})\, \hat{\psi}(f, \gamma-\gamma_0+\rho_0\dot{x})\, dm_{G/H}(\dot{x}),$$

$$\hat{\psi}(f, \gamma) = \tau(f_0)\, \sqrt{|\rho_0|} \int\limits_{G/H} \overline{f_0(\dot{x})}\, \hat{\psi}(\gamma+\gamma_0-\rho_0\dot{x})\, dm_{G/H}(\dot{x}).$$

В результате доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть f — произвольный характер второй степени на группе G. Тогда для преобразования Фурье–Френеля*

$$\hat{\psi}(f, \gamma) = \int\limits_G <-x, \gamma> f(-x)\, \psi(x)\, dx,\ \gamma \in \Gamma,$$

справедлива формула обращения

$$\psi(x) = \overline{f-x} \int\limits_\Gamma <x, \gamma> \hat{\psi}(f, \gamma)\, d\gamma,\ x \in G.$$

Кроме того, если $\rho : G \to \Gamma$ — гомоморфизм, ассоциированный с f, $H = \ker\rho$ и характер второй степени f_0 на фактор-группе G/H, заданный соотношением

$$f_0(\dot{x}) = f_0(x) = f(x) <-x, \gamma_0>,\ \dot{x} = x + H \in G/H,$$

где γ_0 — такой непрерывный характер на группе G, что $f|_H = \gamma_0|_H$ является невырожденным характером второй степени на G/H, т. е. ассоциированный с f_0 гомоморфизм

$$\rho_0 : G/H \to H^\perp = (G/H)^\wedge$$

является изоморфизмом G/H на $H^\perp$, то преобразования Фурье и Фурье–Френеля функции ψ связаны следующими интегральными преобразованиями:

$$\hat{\psi}(\gamma) = \overline{\tau(f_0)}\,\sqrt{|\rho_0|}\int\limits_{G/H} <-x, \gamma_0>\, f(x)\,\hat{\psi}(f, \gamma-\gamma_0+\rho x)\,dm_{G/H}(\dot{x}),$$

$$\hat{\psi}(f, \gamma) = \tau(f_0)\,\sqrt{|\rho_0|}\int\limits_{G/H} <x, \gamma_0>\, \overline{f(x)}\,\hat{\psi}(\gamma+\gamma_0-\rho x)\,dm_{G/H}(\dot{x}).$$

Наконец, пусть f — произвольный характер второй степени на локально компактной коммутативной группе G и $U_t(f)$ — оператор обобщенного сдвига на элемент $t \in G$:

$$(U_t(f)\psi)(x) = \overline{f(-x)}\; f(t-x)\; \psi(x-t),\ x \in G.$$

Так как

$$\overline{f(-x)}\; f(t-x) = \overline{f(-x)}\; f(t)\; f(-x) <-x, \rho t> = \\ = f(t) <-x, \rho t>,$$

для любого $t \in H = \ker\rho$ получаем, что

$$\overline{f(-x)}\; f(t-x) = f(t) = <t, \gamma_0>,$$

поэтому оператор обобщенного сдвига отличается от оператора обычного сдвига на элемент $t \in H$ множителем $<t, \gamma_0>$:

$$(U_t(f)\psi)(x) = <t, \gamma_0>\psi(x-t).$$

Следовательно,

$$(T_t\psi)^\wedge(f, \gamma) = <-t, \gamma_0>\,(U_t(f)\psi)^\wedge(f, \gamma) = \\ = <-t, \gamma+\gamma_0>\,\hat{\psi}(f, \gamma),$$

т. е. оператор обычного сдвига на элемент $t \in \ker\rho$ преобразованием Фурье–Френеля переводится в оператор умножения на характер $\gamma + \gamma_0$.

ГЛАВА 2

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ–ФРЕНЕЛЯ НА ПРЯМОЙ

Пространство суммируемых (по мере Хаара) функций $L^1(G)$ является коммутативной банаховой алгеброй с инволюцией, и к ней непосредственно применима общая теория банаховых алгебр. Согласно общей теории характеры на группе G являются крайними точками выпуклого множества положительных нормированных линейных функционалов, поэтому группа характеров $\Gamma = G^\wedge$ реализуется как некоторая часть единичной сферы пространства $L^\infty(G)$, сопряженного алгебре $L^1(G)$. Указанная часть сферы не образует достаточного семейства функционалов, поэтому возникает естественный вопрос о ее расширении до достаточной совокупности, которая должна сохранять многообразную алгебраическую структуру гармонического анализа. В настоящей главе мы рассматриваем такое расширение для аддитивной группы вещественных чисел.

§ 6. О спектральном радиусе для линейного преобразования Фурье

Пусть $\mathbb{R}$ — аддитивная группа вещественных чисел и $L^1(\mathbb{R})$ есть пространство всех суммируемых (по мере Лебега) функций на прямой $\mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx$. Для $f \in L^1(\mathbb{R})$ преобразование Фурье определяем формулой

$$\hat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\lambda x} f(x)\,dx,\ \lambda \in \mathbb{R},$$

и рассматриваем равномерную норму преобразования Фурье $\hat{f}$:

$$\|\hat{f}\|_\infty = \sup\{|\hat{f}(\lambda)| :\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Кроме того, пространство $L^1(\mathbb{R})$ будем интерпретировать как банахову алгебру относительно свертки

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g(t)\,dt,\ x \in \mathbb{R}.$$

Тогда к сверточной алгебре $L^1(\mathbb{R})$ применима общая теория коммутативных банаховых алгебр [8, 12, 18], согласно которой спектральный радиус

$$r(f) = \|\hat{f}\|_\infty = \lim \sqrt[n]{\|f^{*n}\|_1}.$$

Для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ справедливо неравенство $r(f) \le \|f\|_1$. Однако при переходе к преобразованию Фурье норма, как правило, уменьшается, т.е. $\|f\|_1 > \|\hat{f}\|_\infty = r(f)$.

Рассмотрим пример. Пусть

$$D_N(t) = \sum_{|n|\le N} e^{int} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}$$

есть ядро Дирихле. Положим

$$K_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} D_N\left(\frac{2\pi x}{N}\right), & \text{если } |x| \le \frac{N}{2}, \\ 0, & \text{если } |x| > \frac{N}{2}. \end{cases}$$

Тогда $K_N \in L^1(\mathbb{R})$ и

$$\|K_N\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |K_N(x)|\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)|dt = \|D_N\|_{L^1(-\pi,\pi)},$$

поэтому справедлива оценка [6, 22]

$$\|K_N\|_1 = \frac{4}{\pi^2}\ln N + O(1) \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Теперь оценим спектральный радиус для функции K_N. Прямым вычислением получаем

$$\hat{K}_N(\lambda) = \sin\left(\frac{N\lambda}{2}\right) \sum_{|n|\le N} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n - \frac{N\lambda}{2}}.$$

Так как $\hat{K}_N$ есть непрерывная функция, для каждого $k = 0, \pm 1, ..., \pm N$ имеем

$$\hat{K}_N\left(\frac{2k\pi}{N}\right) = \lim_{\lambda \to \frac{2k\pi}{N}} \hat{K}_N(\lambda) = \lim_{\lambda \to \frac{2k\pi}{N}} \sin\left(\frac{N\lambda}{2}\right) \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi - \frac{N\lambda}{2}} =$$

$$= \lim_{\lambda \to \frac{2k\pi}{N}} \frac{\sin\left(k\pi - \frac{N\lambda}{2}\right)}{k\pi - \frac{N\lambda}{2}} = 1.$$

Если $\lambda > 2\pi$, то $\frac{N\lambda}{2} > \frac{2\pi N}{2} = \pi N$, поэтому

$$\sum_{|n|\le N} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n - \frac{N\lambda}{2}} =$$

$$= (-1)^N \left(\frac{1}{\frac{N\lambda}{2} - \pi N} - \frac{1}{\frac{N\lambda}{2} - \pi(N-1)} + \cdots + \frac{1}{\frac{N\lambda}{2} - \pi(-N)}\right),$$

где слагаемые записаны в порядке убывания абсолютных величин, и, значит,

$$\left|\sum_{|n|\le N} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n - \frac{N\lambda}{2}}\right| \le \frac{1}{\frac{N\lambda}{2} - \pi N},$$

что приводит к оценке

$$|\hat{K}_N(\lambda)| \le \frac{|\sin(\frac{N\lambda}{2})|}{\frac{N\lambda}{2} - \pi N} = \frac{|\sin(\frac{N\lambda}{2} - \pi N)|}{\frac{N\lambda}{2} - \pi N} \le 1.$$

Следовательно, $|\hat{K}_N(\lambda)| \le 1$ для всех $\lambda > 2\pi$. Аналогично доказывается неравенство $|\hat{K}_N(\lambda)| \le 1$ для всех $\lambda < -2\pi$.

Далее, если $\frac{2\pi k}{N} < \lambda < \frac{2\pi(k+1)}{N}$, $k = -N, -N+1, ..., N-1$, то $\pi k < \frac{N\lambda}{2} < \pi(k+1)$ и

$$\sum_{|n|\le N} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n - \frac{N\lambda}{2}} = (-1)^k \left(\left(\cdots - \frac{1}{\frac{N\lambda}{2} - \pi(k-1)} + \frac{1}{\frac{N\lambda}{2} - \pi k}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\pi(k+1) - \frac{N\lambda}{2}} - \frac{1}{\pi(k+2) - \frac{N\lambda}{2}} + \cdots\right)\right),$$

поэтому

$$\left|\sum_{|n|\le N} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n - \frac{N\lambda}{2}}\right| \le \frac{1}{\frac{N\lambda}{2} - \pi k} + \frac{1}{\pi(k+1) - \frac{N\lambda}{2}}.$$

В результате получаем, что

$$|\hat{K}_N(\lambda)| \le \frac{\sin\left(\frac{N\lambda}{2} - k\pi\right)}{\frac{N\lambda}{2} - k\pi} + \frac{\sin\left(\pi(k+1) - \frac{N\lambda}{2}\right)}{\pi(k+1) - \frac{N\lambda}{2}} \le 2.$$

Однако, полагая $x = \frac{N\lambda}{2} - k\pi$, для рассматриваемых λ имеем неравенство

$$|\hat{K}_N(\lambda)| \le \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x},$$

поэтому

$$|\hat{K}_N(\lambda)| \le \sup_{0<x<\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} \right) \le 1 + \sup \frac{1}{\pi - x} = 1 + \frac{2}{\pi}.$$

Таким образом, доказано неравенство

$$\|\hat{K}_N\|_\infty \le 1 + \frac{2}{\pi} \cong 1,64.$$

Рассмотрим еще одну функцию, для которой спектральный радиус строго меньше L^1-нормы.

Фиксируем $\alpha > 0$. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \exp(i\alpha x^2), & \text{если } |x| \le 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{+1} |\exp(i\alpha x^2)|\, dx = 2.$$

Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-1}^{+1} e^{i\alpha x^2 - 2\pi i \lambda x}\, dx = e^{-\frac{i(\pi\lambda)^2}{\alpha}} \int_{-1}^{+1} e^{i\alpha(x - \frac{\pi\lambda}{\alpha})^2}\, dx =$$

$$= e^{-\frac{i(\pi\lambda)^2}{\alpha}} \int_{-1-\frac{\pi\lambda}{\alpha}}^{1-\frac{\pi\lambda}{\alpha}} e^{i\alpha x^2}\, dx = e^{-\frac{i(\pi\lambda)^2}{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_a^{a+2\sqrt{\alpha}} e^{it^2}\, dt,$$

$a = -\sqrt{\alpha}\left(1 + \frac{\pi\lambda}{\alpha}\right)$.

Следовательно,

$$|\hat{f}(\lambda)| \le \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left| \int_a^{a+2\sqrt{\alpha}} e^{it^2}\, dt \right| \le \frac{C}{\sqrt{\alpha}},$$

где константа C не зависит от α, что вытекает, например, из сходимости интеграла Френеля $\int_{\mathbb{R}} \exp(it^2)\, dt$.

Таким образом,

$$\|f\|_1 = 2 > r(f) = \|\hat{f}\|_\infty$$

для достаточно больших положительных α.

В заключение этого параграфа опишем полностью класс вырожденных функций, для которых спектральный радиус совпадает с L^1-нормой.

Теорема 1. *Для суммируемой функции f равенство $r(f) = \|f\|_1$ справедливо тогда и только тогда, когда для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = e^{i(ax+b)}|f(x)| \tag{1}$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Если $a, b \in \mathbb{R}$ и справедливо равенство (1) для почти всех $x \in \mathbb{R}$, то

$$\hat{f}(\lambda) = e^{ib} \int_{\mathbb{R}} e^{i(a - 2\pi\lambda)x} |f(x)|\, dx,$$

поэтому

$$\hat{f}\left(\frac{a}{2\pi}\right) = e^{ib} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = e^{ib} \|f\|_1,$$

и, значит,

$$\|f\|_1 = \left|\hat{f}\left(\frac{a}{2\pi}\right)\right| \le \|\hat{f}\|_\infty = r(f).$$

Так как обратное неравенство справедливо для любой функции, получаем равенство $r(f) = \|f\|_1$.

Обратно, предположим, что $r(f) = \|f\|_1$. По лемме Римана–Лебега $\hat{f}(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$, поэтому непрерывная функция $|\hat{f}|$ достигает наибольшего значения в некоторой точке $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Следовательно, для некоторого $b \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\hat{f}(\lambda_0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \lambda_0 x} f(x)\, dx = e^{ib} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx.$$

Пусть $g(x) = e^{-2\pi i\lambda_0 x - ib} f(x)$. Тогда $|g(x)| = |f(x)|$ и

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,dx,$$

поэтому

$$\int_{\mathbb{R}} (|g(x)| - \mathrm{Re} g(x))\,dx = 0.$$

Так как $|g| - \mathrm{Re} g \geq 0$, отсюда следует, что $|g(x)| - \mathrm{Re} g(x) = 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$, т.е. $|g(x)| = \mathrm{Re} g(x)$ почти всюду, и, значит, $\mathrm{Im} g(x) = 0$.

Таким образом, $g(x) = |g(x)| = |f(x)|$, поэтому для $a = 2\pi\lambda_0$ получаем

$$f(x) = e^{i(ax+b)}|f(x)|$$

почти всюду на $\mathbb{R}$, что и требовалось доказать.

§ 7. О спектральном радиусе для преобразования Фурье–Френеля

Как мультипликативные нормированные функционалы на сверточной алгебре $L^1(\mathbb{R})$ плоские волны $\exp(2\pi i\lambda x)$ не образуют достаточного семейства функционалов, поэтому естественно расширить группу непрерывных характеров на $\mathbb{R}$ до мультипликативной группы $X_2(\mathbb{R})$ характеров второй степени. Напомним, что по определению непрерывная функция $f : G \to \mathbb{T}$ на локально компактной коммутативной группе G есть характер второй степени, если отображение $\varphi : G \times G \to \mathbb{T}$, заданное формулой

$$\varphi(x,y) = \frac{f(x+y)}{f(x)f(y)},\ x, y \in G,$$

является бихарактером, т.е. характером по каждой переменной (при фиксированной другой переменной). В случае группы $G = \mathbb{R}$ общий вид характера второй степени определяется вещественными числами k, λ:

$$f_{k,\lambda}(x) = e^{\pi i k x^2 + 2\pi i\lambda x},\ x \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим преобразование Фурье–Френеля для $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(k,\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi i k x^2 - 2\pi i\lambda x} f(x)\,dx,$$

которое связано с классическим преобразованием Фурье достаточно хорошей функции f соотношениями

$$\hat{f}(k,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{|k|}} e^{-\frac{\pi i}{4}\mathrm{sgn} k} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{\pi i}{k}t^2} \hat{f}(\lambda - t)\,dt, \tag{2}$$

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{|k|}} e^{\frac{\pi i}{4}\mathrm{sgn} k} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi i}{k}t^2} \hat{f}(k, \lambda - t)\,dt.$$

Отметим, что для аналога ядра Дирихле

$$D_k(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{|k|}} e^{-\frac{\pi i}{4}\mathrm{sgn} k} e^{\frac{\pi i}{k}\lambda^2}$$

имеем

$$\int_{\mathbb{R}} D_k(\lambda)\,d\lambda = 1,\ D_k(\lambda) \to \delta(\lambda) \text{ при } k \to 0,$$

и формулу (2) можно записать в виде

$$\hat{f}(k,\lambda) = (D_k * \hat{f})(\lambda).$$

Теперь по аналогии с определением спектрального радиуса $r(f) = \|\hat{f}\|_\infty$ определим спектральный радиус для преобразования Фурье–Френеля:

$$r_2(f) = \|\hat{f}\|_{2,\infty} = \sup\{|\hat{f}(k,\lambda)| : (k,\lambda) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Легко видеть, что для любой суммируемой функции

$$r(f) \leq r_2(f) \leq \|f\|_1.$$

Однако характеры второй степени

$$f_{k,\lambda}(x) = \exp(\pi i k x^2 + 2\pi i\lambda x)$$

также не образуют достаточного семейства функционалов. Далее мы покажем, что равенство $r_2(f) = \|f\|_1$ выполняется только на узком классе функций специального вида.

Следующее утверждение является аналогом известной леммы Римана–Лебега.

Лемма 1. *Для любой функции* $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi i k x^2 - 2\pi i \lambda x} f(x)\, dx \to 0 \text{ при } \sqrt{k^2+\lambda^2} \to \infty.$$

Доказательство. Так как произвольную суммируемую функцию можно с любой точностью аппроксимировать по L^1-норме ступенчатыми функциями, достаточно проверить лемму для функций вида

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \le x \le b, \\ 0, & \text{если } x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Однако для такой функции имеем

$$\hat{f}(k,\lambda) = \int\limits_a^b e^{-\pi i k x^2 - 2\pi i \lambda x}\, dx = e^{\pi i \frac{\lambda^2}{k}} \int\limits_a^b e^{-\pi i k (x+\frac{\lambda}{k})^2}\, dx =$$

$$= e^{\pi i \frac{\lambda^2}{k}} \frac{1}{\sqrt{|k|}} \int\limits_{\sqrt{|k|}(a+\frac{\lambda}{k})}^{\sqrt{|k|}(b+\frac{\lambda}{k})} e^{\mp \pi i t^2}\, dt = O\left(\frac{1}{\sqrt{|k|}}\right)$$

с равномерной оценкой по λ. Другими словами, справедливо неравенство

$$|\hat{f}(k,\lambda)| \le \frac{C}{\sqrt{|k|}},$$

где C — абсолютная константа.

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое K_0, что $|\hat{f}(k,\lambda)| < \varepsilon$ для всех k, удовлетворяющих условию $k > K_0$, и любых $\lambda \in \mathbb{R}$. Если же $|k| \le K_0$, то

$$\hat{f}(k,\lambda) = -\frac{1}{2\pi i \lambda} \int\limits_a^b e^{-\pi i k x^2} d\left(e^{-2\pi i \lambda x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i \lambda} \left(e^{-\pi i k x^2 - 2\pi i \lambda x}\Big|_a^b + 2\pi i k \int\limits_a^b x e^{-\pi i k x^2 - 2\pi i \lambda x}\, dx \right),$$

поэтому

$$|\hat{f}(k,\lambda)| \le \frac{1}{2\pi|\lambda|} \left(2 + 2\pi K_0 \int\limits_a^b |x|\, dx \right) = \frac{C_1}{|\lambda|} \to 0,\ \lambda \to \infty,$$

что доказывает лемму.

Таким образом, для преобразования Фурье–Френеля суммируемой функции

$$\hat{f}(k,\lambda) \to 0, \text{ если } \sqrt{k^2+\lambda^2} \to \infty.$$

Отсюда и в силу непрерывности функции $\hat{f}$ на $\mathbb{R}^2$ следует, что наибольшее значение для $|\hat{f}|$ достигается в некоторой точке $(k_0,\lambda_0) \in \mathbb{R}^2$: $\|\hat{f}\|_{2,\infty} = |\hat{f}(k_0,\lambda_0)|$.

Предположим дополнительно, что $r_2(f) = \|f\|_1$. Тогда

$$|\hat{f}(k_0,\lambda_0)| = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx,$$

поэтому для некоторого комплексного числа q с $|q| = 1$ получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = q \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi i k_0 x^2 - 2\pi i \lambda_0 x} f(x)\, dx.$$

В результате для функции $g(x) = q e^{-\pi i k_0 x^2 - 2\pi i \lambda_0 x} f(x)$ справедливы соотношения

$$|g(x)| = |f(x)|, \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} |g(x)|\, dx.$$

Следовательно, $g(x) = |g(x)| = |f(x)|$, и, значит,

$$|f(x)| = q e^{-\pi i k_0 x^2 - 2\pi i \lambda_0 x} f(x)$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}$, что можно записать в виде

$$f(x) = e^{i(ax^2+bx+c)} |f(x)|, \tag{3}$$

полагая $a = \pi k_0$, $b = 2\pi\lambda_0$ и $q = \exp(-ic)$. И обратно, если суммируемая функция f удовлетворяет условию (3), то для $k_0 = \frac{a}{\pi}$ и $\lambda_0 = \frac{b}{2\pi}$ получаем

$$\hat{f}(k_0, \lambda_0) = e^{ic} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx,$$

поэтому

$$|\hat{f}(k_0, \lambda_0)| = \|f\|_1,$$

и, значит,

$$\|\hat{f}\|_{2,\infty} = |\hat{f}(k_0, \lambda_0)| = \|f\|_1,$$

т. е. $r_2(f) = \|f\|_1$.

Теорема 2. *Для $f \in L^1(\mathbb{R})$ равенство $r_2(f) = \|f\|_1$ выполняется тогда и только тогда, когда для некоторых $a, b, c \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = e^{i(ax^2+bx+c)}|f(x)|$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Фиксируем $k \in \mathbb{R}$ и рассмотрим новую свертку $*_k$ функций из $L^1(\mathbb{R})$:

$$(f *_k g)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ik(x-t)t} f(x-t)\, g(t)\, dt, \qquad (4)$$

которая при $k = 0$ совпадает со сверткой $*$. Очевидно, что новая свертка линейна по каждому из сомножителей. Кроме того, она коммутативна и ассоциативна. Действительно, если в соотношении (4) выполнить замену переменной интегрирования $t = x - \tau$, то

$$(f *_k g)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ik\tau(x-\tau)} f(\tau) g(x-\tau) d\tau = (g *_k f)(x),$$

что доказывает коммутативность новой свертки.

Пусть $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$. Тогда имеем

$$((f *_k g) *_k h)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ik(x-t)t}(f *_k g)(x-t)h(t)\, dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ik(x-t)t} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ik(x-t-\tau)\tau} f(x-t-\tau) g(\tau)\, d\tau \right) h(t)\, dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ik((x-t)t+(x-t-\tau)\tau)} f(x-t-\tau) g(\tau) h(t)\, d\tau\, dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ik(x-\tau)\tau} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ik(x-\tau-t)} f(x-\tau-t) h(t)\, dt \right) g(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ik(x-\tau)\tau} (f *_k h)(x-\tau) g(\tau)\, d\tau = ((f *_k h) *_k g)(x),$$

поэтому

$$(f *_k g) *_k h = (f *_k h) *_k g.$$

Из этого свойства и коммутативности свертки $*_k$ получаем

$$(f *_k g) *_k h = (g *_k f) *_k h = (g *_k h) *_k f = f *_k (g *_k h),$$

что доказывает ассоциативность новой свертки.

Будем рассматривать $L^1(\mathbb{R})$ как банахову алгебру со сверткой $*_k$ в качестве умножения. Пусть F — мультипликативный нормированный функционал на $L^1(\mathbb{R})$. Тогда по теореме Рисса существует функция $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$, такая, что

$$F(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\, dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Кроме того, для любых $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

$$F(f *_k g) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ik(x-t)t} f(x-t)\, g(t)\, dt \right) \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ikxt} f(x) g(t) \varphi(x+t)\, dt\, dx,$$

$$F(f)F(g) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(t) \varphi(x) \varphi(t)\, dt\, dx.$$

Тогда из условия мультипликативности

$$F(f *_k g) = F(f)F(g)$$

получаем, что для почти всех x и t

$$e^{2\pi i k x t}\varphi(x+t) = \varphi(x)\varphi(t),$$

т. е. для функции $\gamma(x) = e^{\pi i k x^2}\varphi(x)$ имеем функциональное уравнение

$$\gamma(x+t) = \gamma(x)\gamma(t).$$

Следовательно, функция γ почти всюду совпадает с непрерывным характером: $\gamma(x) = e^{-2\pi i \lambda x}$, поэтому

$$\varphi(x) = e^{-\pi i k x^2 - 2\pi i \lambda x} = \overline{f_{k,\lambda}(x)}$$

является характером второй степени, и, значит, функция

$$F(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi i k x^2 - 2\pi i \lambda x} f(x)\,dx = \hat{f}(k,\lambda)$$

есть преобразование Фурье–Френеля суммируемой функции f. Таким образом, из общей теории коммутативных банаховых алгебр получаем следующую формулу для вычисления спектрального радиуса второй степени:

$$r_2(f) = \sup_{(k,\lambda)\in\mathbb{R}^2} |\hat{f}(k,\lambda)| = \sup_{(k)} \lim_{(n)} \sqrt[n]{\|f^{*_k n}\|_1},$$

где $f^{*_k n} = f *_k f *_k \cdots *_k f$ (n раз).

Теперь рассмотрим простейший случай суммируемой функции f, для которой некоторая k-я свертка мультипликативна.

Теорема 3. *Для функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ равенство*

$$\|f *_k f\|_1 = \|f\|_1^2$$

выполняется тогда и только тогда, когда для некоторых $b, c \in \mathbb{R}$

$$f(x) = e^{i(\pi k x^2 + bx + c)}|f(x)| \tag{5}$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для $f \in L^1(\mathbb{R})$ рассмотрим новую функцию $h(x) = e^{-\pi i k x^2} f(x)$. Очевидно, что $\|h\|_1 = \|f\|_1$. Кроме того, имеем

$$(h*h)(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x-t)\,h(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi i k((x-t)^2+t^2)} f(x-t)\,f(t)\,dt =$$
$$= e^{-\pi i k x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i k(x-t)t} f(x-t)\,f(t)\,dt =$$
$$= e^{-\pi i k x^2}(f *_k f)(x),$$

поэтому

$$(f *_k f)(x) = e^{\pi i k x^2}(h*h)(x),\ \|f *_k f\|_1 = \|h*h\|_1.$$

Если $\|f *_k f\|_1 = \|f\|_1^2$, то $\|h*h\|_1 = \|f\|_1^2 = \|h\|_1^2$. Так как

$$\|h*h\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} h(x-t)h(t)\,dt \right| dx,$$

$$\|h\|_1^2 = \int_{\mathbb{R}} |h(x)|\,dx \int_{\mathbb{R}} |h(t)|\,dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |h(x)|\,dx \right) |h(t)|\,dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |h(x-t)|\,dx \right) |h(t)|\,dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |h(x-t)h(t)|\,dt \right) dx,$$

из равенства $\|h*h\|_1 = \|h\|_1^2$ следует, что

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |h(x-t)h(t)|\,dt - \left| \int_{\mathbb{R}} h(x-t)h(t)\,dt \right| \right) dx = 0,$$

поэтому для почти всех $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} h(x-t)h(t)\,dt \right| = \int_{\mathbb{R}} |h(x-t)h(t)|\,dt,$$

т. е.

$$\int_{\mathbb{R}} h(x-t)h(t)\,dt = q(x)\int_{\mathbb{R}} |h(x-t)h(t)|\,dt \qquad (6)$$

для некоторой комплекснозначной функции q, удовлетворяющей условию $|q(x)| = 1$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Далее докажем, что функция q почти всюду на $\mathbb{R}$ совпадает с непрерывной функцией, поэтому можно считать, что сама функция q непрерывна и, следовательно, имеет смысл говорить о ее значении в каждой точке.

Соотношение (6) можно записать в виде

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{q(x)}h(x-t)h(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} |\overline{q(x)}h(x-t)h(t)|\,dt,$$

откуда получаем

$$\overline{q(x)}h(x-t)h(t) = |\overline{q(x)}h(x-t)h(t)| = |h(x-t)h(t)|,$$

поэтому

$$h(x-t)h(t) = q(x)|h(x-t)h(t)|. \qquad (7)$$

Однако из равенства (7) следует, что

$$h(x+y-t)h(t) = q(x+y)|h(x+y-t)h(t)|,$$
$$h(x+y-t)h(t-y) = q(x)|h(x+y-t)h(t-y)|,$$
$$h(y-t)h(t) = q(y)|h(y-t)h(t)|.$$

После деления первого равенства на второе, а затем — на третье имеем

$$\frac{1}{h(t-y)h(y-t)} = \frac{q(x+y)}{q(x)q(y)}\,\frac{1}{|h(t-y)h(y-t)|}. \qquad (8)$$

Отметим, что

$$h(t-y)h(y-t) = h(0-(y-t))h(y-t) = q(0)|h(t-y)h(y-t)|,$$

поэтому справедливо соотношение

$$\frac{1}{q(0)} = \frac{q(x+y)}{q(x)q(y)},$$

а для

$$\gamma(x) = \frac{q(x)}{q(0)}$$

имеем функциональное уравнение

$$\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y).$$

Следовательно,

$$\gamma(x) = \exp(2\pi i\lambda x)$$

для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$, поэтому

$$q(x) = q(0)e^{2\pi i\lambda x}.$$

Поскольку $|q(0)| = 1$, то $q(0) = \exp(i\alpha)$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Таким образом, доказано, что

$$h(x-t)h(t) = e^{2\pi i\lambda x + i\alpha}|h(x-t)h(t)|,$$

что удобно записать в виде

$$\left(e^{-2\pi i\lambda(x-t)}h(x-t)\right)\left(e^{-2\pi i\lambda t}h(t)\right) = e^{i\alpha}|h(x-t)h(t)|.$$

Интегрируя последнее соотношение по переменной x, а затем по переменной t, получаем

$$\left(\hat{h}(\lambda)\right)^2 = e^{i\alpha}\|h\|_1^2.$$

Отсюда, в частности, следует, что $|\hat{h}(\lambda)| = \|h\|_1$, и, значит, $r(h) = \|\hat{h}\|_\infty = \|h\|_1$, поэтому для некоторых $b, c \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $h(x) = e^{i(bx+c)}|h(x)|$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$. В результате для функции $f(x) = e^{\pi ikx^2}h(x)$ имеем

$$f(x) = e^{i(\pi kx^2+bx+c)}|f(x)|.$$

Осталось доказать, что функция q почти всюду совпадает с непрерывной функцией. Для этого соотношение

$$q(x)\,q(y)|h(t-y)\,h(y-t)| = q(x+y)\,h(t-y)\,h(y-t)$$

интегрируем по переменным y и t:

$$q(x)\int_0^\alpha\int_0^\beta q(y)\,|h(t-y)\,h(y-t)|\,dy\,dt=$$

$$=\int_0^\alpha\int_0^\beta q(x+y)\,h(t-y)\,h(y-t)\,dy\,dt,$$

а затем преобразуем правую часть:

$$\int_0^\alpha\int_0^\beta q(x+y)\,h(t-y)\,h(y-t)\,dy\,dt=$$

$$=\int_x^{\alpha+x}\int_0^\beta q(y)\,h(t-y+x)\,h(y-x-t)\,dy\,dt=$$

$$=\int_x^{\alpha+x}\int_0^\beta q(y)\,(h_{-x})(t-y)\,(h_x)(y-t)\,dy\,dt=\psi(x).$$

Она представляет собой непрерывную функцию от переменной x в силу абсолютной непрерывности интеграла и равномерной непрерывности оператора сдвига функции по L^1-норме.

Следовательно, $Aq(x)=\psi(x)$, где

$$A=\int_0^\alpha\int_0^\beta q(y)\,|h(t-y)\,h(y-t)|\,dy\,dt,$$

и при подходящем выборе α и β константа $A\neq 0$, если $f\neq 0$, поэтому $q(x)=\frac{1}{A}\psi(x)$ есть непрерывная функция. И обратно, если функция f удовлетворяет условию (5), то

$$(f*_k f)(x)=\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ik(x-t)t}\,f(x-t)\,f(t)\,dt=$$

$$=e^{i\pi kx^2+i(bx+2c)}\int_{\mathbb{R}}|f(x-t)\,f(t)|\,dt,$$

откуда получаем

$$|(f*_k f)(x)|=\int_{\mathbb{R}}|f(x-t)f(t)|\,dt,$$

что после интегрирования по x дает равенство

$$\|f*_k f\|_1=\|f\|_1^2.$$

Теорема полностью доказана.

Пусть f — произвольная суммируемая функция на прямой $\mathbb{R}$. Рассмотрим новую функцию $g_k(x)=e^{-\pi ikx^2}f(x)$ для каждого $k\in\mathbb{R}$. Тогда $\hat{f}(k,\lambda)=\hat{g}_k(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, поэтому

$$\sup_{(\lambda)}|\hat{f}(k,\lambda)|=\sup_{(\lambda)}|\hat{g}_k(\lambda)|=r(g_k),$$

где спектральный радиус для функции g_k вычисляется по стандартной формуле

$$r(g_k)=\lim_{(n)}\sqrt[n]{\|g_k^{*n}\|_1}.$$

Так как для n-х сверточных степеней справедливо соотношение

$$(f*_k f*_k\cdots*_k f)(x)=e^{\pi ikx^2}(g_k*g_k*\cdots*g_k)(x),$$

имеем

$$|(f*_k f*_k\cdots*_k f)(x)|=|(g_k*g_k*\cdots*g_k)(x)|,$$

поэтому $\|f^{*_k n}\|_1=\|g_k^{*n}\|_1$, и, следовательно,

$$r_2(f)=\sup_{(k)}r(g_k)=\sup_{(k)}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|f^{*_k n}\|_1}.$$

Для того чтобы избежать операции взятия супремума по $k\in\mathbb{R}$, воспользуемся преобразованием Фурье на плоскости $\mathbb{R}^2$. Для функции

$$\varphi(x,y)=f(x)\,\delta\left(y-\frac{x^2}{2}\right)$$

двойное преобразование Фурье имеет вид

$$\hat{\varphi}(k,\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i(\lambda x+ky)}\varphi(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\lambda x}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi iky}\delta\left(y-\frac{x^2}{2}\right)dy\right) f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\lambda x}\; e^{-\pi ikx^2} f(x)\,dx = \hat{f}(k,\lambda),$$

поэтому

$$r_2(f) = \sup_{(k,\lambda)} |\hat{\varphi}(k,\lambda)| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\varphi^{*n}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}},$$

где φ^{*n} — n-я степень функции φ относительно операции свертки на плоскости.

Здесь, по крайней мере формально, имеем

$$(\varphi*\varphi)(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x-t,y-\tau)\varphi(t,\tau)\,dt\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)f(t)\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \delta\left(y-\tau-\frac{(x-t)^2}{2}\right)\delta\left(\tau-\frac{t^2}{2}\right)d\tau\right)dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)f(t)\delta\left(y-\frac{(x-t)^2}{2}-\frac{t^2}{2}\right)dt$$

и аналогично для n-й сверточной степени функции φ

$$\left(\varphi^{*n}\right)(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x-t_1)\ldots f(t_{n-2}-t_{n-1})f(t_{n-1})\times$$

$$\times\delta\left(y-\frac{(x-t_1)^2}{2}-\ldots-\frac{(t_{n-2}-t_{n-1})^2}{2}+\frac{t_{n-1}^2}{2}\right)dt_1\ldots dt_{n-1}.$$

В частности, если f — вырожденная функция вида

$$f(x) = e^{i(ax+b)}|f(x)|,$$

то

$$\varphi^{*n}(x,y) = e^{i(ax+nb)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(x-t_1)\ldots f(t_{n-1})|\times$$

$$\times\,\delta\left(y-\frac{(x-t_1)^2}{2}-\ldots-\frac{t_{n-1}^2}{2}\right)dt_1\ldots dt_{n-1},$$

поэтому

$$\|\varphi^{*n}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-t_1)\ldots f(t_{n-1})|\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\delta\left(y-\frac{(x-t_1)^2}{2}-\ldots-\frac{t_{n-1}^2}{2}\right)dy\right)dx\,dt_1\ldots dt_{n-1} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-t_1)\ldots f(t_{n-1})|\,dx\,dt_1\ldots dt_{n-1} = \|f\|_1^n,$$

откуда следует, что

$$r_2(f) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|\varphi^{*n}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}} = \|f\|_1 = r(f).$$

Если же f — вырожденная функция вида

$$f(x) = e^{i(\pi kx^2+bx+c)}|f(x)|,$$

то в случае $k\neq 0$ невозможно исключить осциллирующие множители под знаком интеграла по переменным $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$. Это вполне объясняет тот факт, что для функций такого вида величина $r_2(f) = \|f\|_1$ строго больше спектрального радиуса $r(f) = \|\hat{f}\|_\infty$.

Разумеется, что приведенные формальные вычисления можно обосновать с помощью "сглаживания" δ-функции Дирака.

Пусть $\sigma > 0$ и $G_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Тогда $G_\sigma(x)\geq 0$ для всех $x\in\mathbb{R}$, $\int\limits_{\mathbb{R}} G_\sigma(x)\,dx = 1$ и $G_\sigma(x)\to\delta(x)$ при $\sigma\to+0$. Кроме того, прямым вычислением легко убедиться в том, что

$$\left(G_{\sigma_1}*G_{\sigma_2}\right)(x) = G_{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}(x).$$

Наконец, если T_a — оператор сдвига

$$(T_a h)(x) = h(x-a),$$

то

$$(T_a G_{\sigma_1}) * (T_b G_{\sigma_2}) = T_{a+b} G_{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}.$$

Рассмотрим для $f \in L^1(\mathbb{R})$ функцию

$$\varphi_\sigma(x,y) = f(x) G_\sigma\left(y - \frac{x^2}{2}\right).$$

Имеем

$$(\varphi_\sigma * \varphi_\sigma)(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_\sigma(x-t, y-\tau)\varphi_\sigma(t,\tau)\,dt\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)f(t)\left(\int\limits_{\mathbb{R}} G_\sigma\left(y-\tau-\frac{(x-t)^2}{2}\right) G_\sigma\left(\tau-\frac{t^2}{2}\right) d\tau\right) dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)f(t)\,(G_\sigma * G_\sigma)\left(y-\frac{(x-t)^2}{2}-\frac{t^2}{2}\right) dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)f(t)\, G_{\sqrt{2}\sigma}\left(y-\frac{(x-t)^2}{2}-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

и аналогично для φ_σ^{*n}

$$(\varphi_\sigma^{*n})(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x-t_1)\ldots f(t_{n-2}-t_{n-1})f(t_{n-1})\times$$

$$\times G_{\sqrt{n}\sigma}\left(y-\frac{(x-t_1)^2}{2}-\ldots-\frac{(t_{n-2}-t_{n-1})^2}{2}-\frac{t_{n-1}^2}{2}\right) dt_1\ldots dt_{n-1}.$$

Далее, преобразованием Фурье для функции G_σ является

$$\hat{G}_\sigma(k) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_\sigma(y) e^{-2\pi i k y}\,dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}-2\pi i k y}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y+2\pi i k\sigma^2)^2}\,dy\, e^{-2(\pi k\sigma)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2}\,dy\; e^{-2(\pi k\sigma)^2} = e^{-2(\pi k\sigma)^2},$$

поэтому двойное преобразование Фурье для функции φ_σ имеет вид

$$\hat{\varphi}_\sigma(k,\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i(\lambda x+ky)}\varphi_\sigma(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\left(\int\limits_{\mathbb{R}} G_\sigma\left(y-\frac{x^2}{2}\right) e^{-2\pi i k\left(y-\frac{x^2}{2}\right)} dy\right) e^{-\pi i k x^2 - 2\pi i\lambda x}\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\pi i k x^2 - 2\pi i\lambda x}\,dx \int\limits_{\mathbb{R}} G_\sigma(y) e^{-2\pi i k y}\,dy = \hat{f}(k,\lambda) e^{-2(\pi k\sigma)^2}.$$

Таким образом,

$$\hat{\varphi}_\sigma(k,\lambda) = \hat{f}(k,\lambda) e^{-2(\pi k\sigma)^2},$$

и, следовательно, при $\sigma \to +0$

$$\hat{\varphi}_\sigma(k,\lambda) \longrightarrow \hat{f}(k,\lambda).$$

Теорема 4. *Для функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ спектральный радиус второго порядка*

$$r_2(f) = \sup_{(k,\lambda)} |\hat{f}(k,\lambda)| = \lim_{\sigma\to+0}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\varphi_\sigma^{*n}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}}.$$

В заключение данного параграфа приводим интерпретацию свертки $*_k$ и операторов обобщенного сдвига, связанных с преобразованием Фурье–Френеля, в терминах группы Гейзенберга.

Напомним, что по определению группа Гейзенберга $A(\mathbb{R})$ есть прямое произведение $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$ с групповой операцией

$$(x,y,\theta)(t,\tau,\theta_1) = (x+t, y+\tau, e^{2\pi i x\tau}\theta\theta_1).$$

Рассмотрим лагранжеву прямую $l = \{0\} \times \mathbb{R}$ и соответствующее пространство $H(l)$ функций φ на группе $A(\mathbb{R})$, для которых

$$\varphi(x,y,\theta) = e^{2\pi i x y}\theta^{-1} f(x), \tag{9}$$

где f — функция одной переменной и $f \in L^2(\mathbb{R})$. На $H(l)$ определим унитарное представление группы $A(\mathbb{R})$ как представление левыми сдвигами:

$$(W(s_1)\varphi)(s) = \varphi(s_1^{-1}s),\ s, s_1 \in A(\mathbb{R}),$$

а затем пересадим это представление на $L^2(\mathbb{R})$ с помощью оператора $\mathbb{R} : H(l) \to L^2(\mathbb{R})$, для которого $R\varphi = f$, где φ и f связаны соотношением (9). Полученное представление $\widetilde{W} = RWR^{-1}$ действует на функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ следующим образом:

$$\widetilde{W}(x_0, 0, 1) : f(x) \to f(x - x_0),$$
$$\widetilde{W}(0, t, 1) : f(x) \to e^{-2\pi i x t} f(x),$$
$$\widetilde{W}(0, 0, \theta) : f(x) \to \theta f(x).$$

Пусть $f_{k,\lambda}$ — характер второй степени. Определим (инъективный) гомоморфизм $\alpha : \mathbb{R} \to A(\mathbb{R})$ формулой

$$\alpha(t) = \left(t, -kt, \overline{f_{k,\lambda}(t)}\right),\ t \in \mathbb{R}.$$

Если $\varphi, \psi \in H(l)$ и $R\varphi = f,\ R\psi = h$, то

$$\varphi(\alpha(t)) = \varphi\left(t, -kt, \overline{f_{k,\lambda}(t)}\right) =$$
$$= e^{2\pi i t(-kt)} f_{k,\lambda}(t) f(t) = e^{-\pi i k t^2 + 2\pi i \lambda t} f(t)$$

и аналогично

$$\psi(\alpha(t)) = e^{-\pi i k t^2 + 2\pi i \lambda t} h(t).$$

Если, кроме того, $\lambda = 0$, то

$$\varphi(\alpha(t)) = e^{-\pi i k t^2} f(t),$$
$$\psi(\alpha(t)) = e^{-\pi i k t^2} h(t).$$

Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}} (W(\alpha(t))\varphi)(\alpha(x))\psi(\alpha(t))\,dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\alpha(t)^{-1}\alpha(x))\psi(\alpha(t))\,dt =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(\alpha(x-t))\psi(\alpha(t))\,dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi i k (x-t)^2} f(x-t) e^{-\pi i k t^2} h(t)\,dt =$$
$$= e^{-\pi i k x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i k t (x-t)} f(x-t)\, h(t)\,dt = e^{-\pi i k x^2} (f *_k h)(x).$$

Если $l_k = \{(t, -kt)\ : t \in \mathbb{R}\}$ и $L_k = l_k \times \mathbb{T}$ — коммутативная замкнутая подгруппа группы $A(\mathbb{R})$, то $\alpha : \mathbb{R} \to L_k$ есть обмотка на цилиндре L_k, по которой происходит усреднение функции ψ с помощью левых сдвигов функции φ:

$$(f *_k h)(x) = e^{\pi i k x^2} \int_{\mathbb{R}} (T_t(\varphi \circ \alpha))(x)\psi(\alpha(t))\,dt.$$

Наконец, определим оператор сдвига с подкручиванием формулой

$$(A_t f)(x) = e^{-2\pi i k x t} f(x + t)$$

и положим

$$U_t = \overline{f_{k,\lambda}(t)} A_t.$$

Тогда семейство операторов обобщенного сдвига $\{U_t\ :\ t \in \mathbb{R}\}$ удовлетворяет групповому свойству

$$U_{t_1 + t_2} = U_{t_1} \circ U_{t_2},$$

а k-я свертка двух функций есть

$$(f *_k h)(x) = \int_{\mathbb{R}} (U_{-t} f)(x) \overline{f_{k,\lambda}(t)}\, h(t)\,dt.$$

§ 8. О спектральном радиусе для нелинейного преобразования Фурье

В этом параграфе мы рассматриваем нелинейные волны общего вида $\exp(2\pi i P(x))$, где $P(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ — произвольный многочлен с вещественными коэффициентами. Нелинейное преобразование Фурье суммируемой функции f есть

$$\hat{f}(P) = \hat{f}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i P(x)} f(x)\,dx,$$

а спектральный радиус n-го порядка

$$r_n(f) = \sup |\hat{f}(\mathbf{a})|,$$

где супремум берется по всевозможным $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Далее докажем, что для любой $f \in L^1(\mathbb{R})$ супремум реализуется на некотором векторе $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, $r_n(f) \le \|f\|_1$, и в этом неравенстве равенство выполняется только для вырожденных функций специального вида.

Сначала рассмотрим случай $n = 3$, т.е. случай, когда

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$$

есть многочлен третьей степени с вещественными коэффициентами.

Лемма 2. *Для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x)} f(x)\, dx \to 0, \ \text{если } \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \to \infty.$$

Доказательство. Так как любую функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$ можно с любой точностью по L^1-норме аппроксимировать ступенчатыми функциями, лемму достаточно доказать для характеристической функции произвольного промежутка.

Возьмем произвольный промежуток $[a, b]$ и рассмотрим интеграл

$$I = \int_a^b e^{-i\varphi(x)}\, dx,$$

где $\varphi(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$ и $\alpha \ne 0$. Очевидно, что функция $\varphi''(x) = 2(3\alpha x + \beta)$. Кроме того, $\varphi''(x) = 0$ только для $x_0 = -\frac{\beta}{3\alpha}$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и полагаем

$$A = [a, b] \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

Здесь $A = \varnothing$, если $a > x_0 + \varepsilon$ или $b < x_0 - \varepsilon$. Однако в любом случае справедливо неравенство

$$\left| \int_A e^{-i\varphi(x)}\, dx \right| \le 2\varepsilon.$$

Если $\alpha > 0$, то φ'' — монотонно возрастающая функция и

$$\varphi''(x) \ge \varphi''(x_0 + \varepsilon) = 6\alpha\varepsilon \ \text{ при } x \ge x_0 + \varepsilon,$$
$$\varphi''(x) \le \varphi''(x_0 - \varepsilon) = -6\alpha\varepsilon \ \text{ при } x \le x_0 - \varepsilon.$$

Если $a \ge x_0 + \varepsilon$, то $\varphi''(x) \ge 6\alpha\varepsilon$ для любых $x \in [a, b]$. Дополнительно считаем, что $\varphi'(x) \ge 0$ на промежутке $[a, b]$. Тогда при любом выборе $t \in [a, b]$ имеем

$$I = \int_a^t e^{-i\varphi(x)}\, dx + \int_t^b e^{-i\varphi(x)}\, dx,$$

где $\left| \int_a^t e^{-i\varphi(x)}\, dx \right| \le t - a$, а второй интеграл оцениваем с помощью второй теоремы о среднем.

Так как $\varphi''(x) \ge 6\alpha\varepsilon$ и $\varphi'(x) \ge 0$ на $[a, b]$, то $\varphi'(x) \ge 6\alpha\varepsilon(t - a)$ на промежутке $[t, b]$. Следовательно,

$$\int_t^b e^{-i\varphi(x)}\, dx = \frac{1}{(-i)} \int_t^b \left(e^{-i\varphi(x)}\right)' \frac{dx}{\varphi'(x)} = \frac{i}{\varphi'(t)} \int_t^\xi \left(e^{-i\varphi(x)}\right)' dx$$

для некоторого $\xi \in [t, b]$, т.е.

$$\int_t^b e^{-i\varphi(x)}\, dx = \frac{i}{\varphi'(t)} \left(e^{-i\varphi(\xi)} - e^{-i\varphi(t)}\right),$$

поэтому

$$\left| \int_t^b e^{-i\varphi(x)}\, dx \right| \le \frac{2}{\varphi'(t)} \le \frac{1}{3\alpha\varepsilon(t - a)}.$$

В результате получаем оценку

$$\left| \int_a^b e^{-i\varphi(x)}\, dx \right| \le (t - a) + \frac{1}{3\alpha\varepsilon(t - a)}.$$

Здесь правая часть неравенства на промежутке $(a,+\infty)$ минимальна в точке $t_0 = a + \frac{1}{\sqrt{3\alpha\varepsilon}}$, а при достаточно больших α имеем $t_0 < b$.

Таким образом,

$$\left| \int_a^b e^{-i\varphi(x)}\,dx \right| \le (t_0 - a) + \frac{1}{3\alpha\varepsilon(t_0 - a)} = \frac{2}{\sqrt{3\alpha\varepsilon}}.$$

Отметим, что это неравенство доказано при дополнительном предположении, что $\varphi' \ge 0$ на промежутке $[a,b]$. Для случая, когда $\varphi' \le 0$, доказательство аналогично. Если же φ' изменяет знак на $[a,b]$ в некоторой промежуточной точке c, то

$$\left| \int_a^b e^{-i\varphi(x)}\,dx \right| \le \left| \int_a^c e^{-i\varphi(x)}\,dx \right| + \left| \int_c^b e^{-i\varphi(x)}\,dx \right| \le \frac{4}{\sqrt{3\alpha\varepsilon}}.$$

Заметим, что в этих рассуждениях мы считали $\alpha > 0$. Если $\alpha < 0$, то в результате аналогичного доказательства получаем оценку

$$\left| \int_a^b e^{-i\varphi(x)}\,dx \right| \le \frac{4}{\sqrt{3|\alpha|\varepsilon}}.$$

Кроме того, если $\alpha > 0$ и $b < x_0 - \varepsilon$, то для $x \in [a,b]$ справедливо неравенство $\varphi''(x) \le -6\alpha\varepsilon$. В этой ситуации можно заменить интеграл I на комплексно сопряженную величину и функцию φ — на функцию $(-\varphi)$. То же замечание относится и к случаю $\alpha < 0$.

Наконец, в общем случае промежуток $\triangle = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ может иметь непустое пересечение положительной меры с промежутком $[a,b]$. Ограничимся рассмотрением случая, когда $\triangle \subset [a,b]$. Тогда имеем неравенство

$$\left| \int_a^b e^{-i\varphi(x)}\,dx \right| \le \left| \int_a^{x_0-\varepsilon} e^{-i\varphi(x)}\,dx \right| + \left| \int_{\triangle} e^{-i\varphi(x)}\,dx \right| + \left| \int_{x_0+\varepsilon}^b e^{-i\varphi(x)}\,dx \right|,$$

поэтому

$$\left| \int_a^b e^{-i\varphi(x)}\,dx \right| \le 2\varepsilon + \frac{8}{\sqrt{3|\alpha|\varepsilon}}.$$

В результате доказано, что $I \to 0$ при $\alpha \to \infty$ (равномерно по параметрам β и γ).

Пусть теперь $|\alpha| \le C$. Тогда для любого $x \in [a,b]$

$$|\varphi''(x)| = |6\alpha x + 2\beta| \ge 2|\beta| - 6\,C\max(|a|,|b|) = 2|\beta| - C_1.$$

Следовательно, как и в лемме Ван-дер-Корпута [13],

$$\int_a^b e^{-i\varphi(x)}\,dx = O\left(\frac{1}{\sqrt{2|\beta| - C_1}}\right)$$

с оценкой, равномерной по α и γ с $|\alpha| \le C$ и $\gamma \in \mathbb{R}$.

Если же $|\alpha|, |\beta| \le C$, то интегрированием по частям получаем

$$\int_a^b e^{-i\varphi(x)}\,dx = \frac{1}{-i\gamma}\int_a^b e^{-i(\alpha x^3 + \beta x^2)}\,d\left(e^{-i\gamma x}\right) =$$

$$= \frac{1}{-i\gamma}\left(e^{-i\varphi(x)}\Big|_a^b + i\int_a^b (3\alpha x^2 + 2\beta x) e^{-i\varphi(x)}\,dx \right),$$

поэтому

$$\left| \int_a^b e^{-i\varphi(x)}\,dx \right| \le \frac{1}{|\gamma|}\left(2 + C\int_a^b (3x^2 + 2|x|)\,dx \right) = \frac{C_2}{|\gamma|} \to 0,\ \gamma \to \infty,$$

что заканчивает доказательство леммы.

Рассмотрим преобразование Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ по характерам третьей степени:

$$\hat{f}(\mathbf{a}) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)} f(x)\,dx,\ \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3,$$

и определим спектральный радиус формулой

$$r_3(f) = \|\hat{f}\|_{3,\infty} = \sup\{|\hat{f}(\mathbf{a})| : \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\}.$$

Для нового спектрального радиуса выполняется неравенство

$$r_3(f) \le \|f\|_1.$$

Кроме того, функция $\hat{f}$ непрерывна на $\mathbb{R}^3$, а по лемме 2

$$\hat{f}(\mathbf{a}) \to 0, \text{ если } \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \to \infty.$$

Следовательно, наибольшее значение для $|\hat{f}|$ реализуется на некотором векторе $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^3$: $r_3(f) = |\hat{f}(\mathbf{a}_0)|$.

Если для суммируемой функции f выполняется равенство $r_3(f) = \|f\|_1$, то $|\hat{f}(\mathbf{a})| = \|f\|_1$ для некоторого вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, т. е.

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)} f(x)\, dx \right| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx,$$

и, значит, существует вещественное число a_0, такое, что

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)} f(x)\, dx = e^{2\pi i a_0} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx.$$

Однако тогда для функции

$$g(x) = \exp\left(-2\pi i(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)\right) f(x)$$

получаем

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, dx,$$

откуда следует, что $g(x) = |g(x)|$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$. В результате имеем следующую теорему.

Теорема 5. *Для суммируемой функции f справедливо равенство $r_3(f) = \|f\|_1$ тогда и только тогда, когда для некоторых вещественных чисел a, b, c, d*

$$f(x) = e^{i(a+bx+cx^2+dx^3)}|f(x)|$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Как и для преобразования Фурье–Френеля (по характерам второй степени), мы можем построить для функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ новую функцию

$$\varphi(x, y, z) = f(x)\, \delta(y - x^2)\, \delta(z - x^3),$$

для которой классическое преобразование Фурье в $\mathbb{R}^3$

$$\hat{\varphi}(\mathbf{a}) = \hat{\varphi}(a_1, a_2, a_3) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\pi i(a_1x + a_2y + a_3z)} \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

совпадает с нелинейным преобразованием Фурье

$$\hat{f}(\mathbf{a}) = \hat{f}(a_1, a_2, a_3) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)} f(x)\, dx.$$

Далее вычисляем спектральный радиус для функции φ в сверточной алгебре $L^1(\mathbb{R}^3)$. Точнее, δ-функции необходимо заменить аппроксимативной единицей $G_\sigma \to \delta$, $\sigma \to +0$, затем образовать новые функции $\varphi_\sigma \in L^1(\mathbb{R}^3)$

$$\varphi_\sigma(x, y, z) = f(x) G_\sigma(y - x^2) G_\sigma(z - x^3)$$

и построить сверточную n-ю степень

$$\varphi_\sigma^{*n} = \varphi_\sigma * \varphi_\sigma * \cdots * \varphi_\sigma \ (n \text{ раз}).$$

Теорема 6. *Для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ спектральный радиус третьего порядка*

$$r_3(f) = \lim_{\sigma \to +0} \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|\varphi_\sigma^{*n}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}}.$$

Теперь мы можем рассмотреть нелинейное преобразование Фурье по характерам произвольной степени. Для равномерных асимптотических оценок тригонометрических интегралов вида

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i P(x)} f(x)\, dx,$$

где $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $P(x)$ — многочлен произвольной степени, нам потребуется следующая лемма [5].

Лемма 3. *Пусть функция h имеет непрерывные производные до m-го порядка на промежутке $[a,b]$, причем для некоторого $A>0$ выполняется неравенство $|h^{(m)}(x)| \geq A$ для всех $x \in [a,b]$. Пусть E есть множество тех $x \in [a,b]$, для которых $|h'(x)| \leq B$. Тогда для меры Лебега множества E справедлива оценка*

$$\mu(E) \leq 2(m-1)\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Пусть $h(x) = \alpha_k x^k + \cdots + \alpha_1 x$ — многочлен степени $k \geq 2$ с вещественными коэффициентами, $\alpha_k \neq 0$. Тогда $h^{(k)}(x) = (k!)\alpha_k$.

В лемме 3 выбираем $m = k$, $A = (k!)|\alpha_k|$ и произвольное $B > 0$. Тогда для множества E тех $x \in [a,b]$, для которых $|h'(x)| \leq B$, имеем оценку

$$\mu(E) \leq \frac{2(k-1)}{\sqrt[k-1]{k!}}\left(\frac{B}{|\alpha_k|}\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Рассмотрим тригонометрический интеграл

$$I = \int_a^b e^{-ih(x)}\,dx.$$

Очевидно, что

$$I = \int_E e^{-ih(x)}\,dx + \int_{[a,b]\setminus E} e^{-ih(x)}\,dx,$$

и первый интеграл оценивается очевидным образом:

$$\left|\int_E e^{-ih(x)}\,dx\right| \leq \mu(E) \leq C_1\left(\frac{B}{|\alpha_k|}\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

где $C_1 = \frac{2(k-1)}{\sqrt[k-1]{k!}}$.

Теперь оценим второй интеграл. Для этого образуем множество E_1 тех $x \in [a,b]$, для которых $h'(x) \geq B$.

Поскольку $h'(x)$ — многочлен степени $k-1$, уравнение $h'(x) = B$ имеет не более чем $k-1$ решений. Кроме того, $h''(x)$ — многочлен степени $k-2$, поэтому уравнение $h''(x) = 0$ имеет не более чем $k-2$ решений. Если, кроме того, учесть концевые точки промежутка $[a,b]$, то получим не более чем $2+(k-1)+(k-2) = 2k-1$ точек, поэтому E_1 состоит не более чем из $2k-2$ промежутков, на каждом из которых $f'(x) \geq B > 0$ и f' — монотонная (убывающая или возрастающая) функция.

Пусть $[\alpha,\beta]$ есть один из таких промежутков. Тогда по второй теореме о среднем

$$\int_\alpha^\beta e^{-ih(x)}\,dx = \frac{1}{(-i)}\int_\alpha^\beta \frac{1}{h'(x)}\,d\left(e^{-ih(x)}\right) =$$

$$= \frac{1}{(-i)}\frac{1}{h'(\alpha)}\int_\alpha^\xi d\left(e^{-ih(x)}\right) = \frac{i}{h'(\alpha)}\left(e^{-ih(\xi)} - e^{-ih(\alpha)}\right)$$

для некоторого $\xi \in [\alpha,\beta]$, поэтому

$$\left|\int_\alpha^\beta e^{-ih(x)}\,dx\right| \leq \frac{2}{|h'(\alpha)|} \leq \frac{2}{B},$$

или

$$\int_\alpha^\beta e^{-ih(x)}\,dx = \frac{i}{h'(\beta)}\int_\eta^\beta d\left(e^{-ih(x)}\right),\ \alpha \leq \eta \leq \beta,$$

и, следовательно, снова получаем оценку

$$\left|\int_\alpha^\beta e^{-ih(x)}\,dx\right| \leq \frac{1}{|h'(\beta)|}|e^{-ih(\beta)} - e^{-ih(\eta)}| \leq \frac{2}{B}.$$

Таким образом,

$$\left|\int_{E_1} e^{-ih(x)}\,dx\right| \leq \frac{4(k-1)}{B}.$$

Аналогично оценивается интеграл по множеству E_2 тех точек x из промежутка $[a,b]$, для которых $h'(x) \le -B$.

Следовательно,

$$\left| \int_a^b e^{-ih(x)}\,dx \right| \le C_1 \left(\frac{B}{|\alpha_k|}\right)^{\frac{1}{k-1}} + \frac{8(k-1)}{B},$$

где

$$C_1 = \frac{2(k-1)}{\sqrt[k-1]{k!}} < 2(k-1) < 8(k-1) = C_2,$$

поэтому

$$\left| \int_a^b e^{-ih(x)}\,dx \right| \le C_2 \left(\left(\frac{B}{|\alpha_k|}\right)^{\frac{1}{k-1}} + \frac{1}{B} \right).$$

Полагая $B = \sqrt[k]{|\alpha_k|}$ и отмечая, что

$$\left(\frac{B}{|\alpha_k|}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{1}{|\alpha_k|^{1-\frac{1}{k}}}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \frac{1}{\sqrt[k]{|\alpha_k|}},$$

имеем

$$\left| \int_a^b e^{-ih(x)}\,dx \right| \le \frac{2C_2}{\sqrt[k]{|\alpha_k|}},$$

где константа C_2 не зависит от коэффициентов $\alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_1$ многочлена $h(x)$.

Теперь оценим тригонометрический интеграл в случае, когда коэффициент α_k при старшей степени многочлена $h(x)$ изменяется в ограниченной области: $|\alpha_k| \le M_k$.

Так как

$$h^{(k-1)}(x) = (k-1)!(k\alpha_k x + \alpha_{k-1})$$

и для любого $x \in [a,b]$

$$|k\alpha_k x| \le kM_k \max(|a|,|b|) = L_k,$$

получаем неравенство

$$|h^{(k-1)}(x)| \ge (k-1)!(|\alpha_{k-1}| - L_k) = A.$$

Пусть в лемме 3 $m = k-1$, $k > 2$, и для $B > 0$ множество E состоит из точек x, где $|h'(x)| \le B$. Тогда

$$\mu(E) \le 2(k-2)\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{k-2}},$$

т. е.

$$\mu(E) \le \frac{2(k-2)}{\sqrt[k-2]{(k-1)!}} \left(\frac{B}{|\alpha_{k-1}| - L_k}\right)^{\frac{1}{k-2}}.$$

Считая, что

$$|\alpha_{k-1}| - L_k \ge \frac{1}{2}|\alpha_{k-1}|,$$

т. е. $|\alpha_{k-1}| \ge 2L_k$, имеем

$$\mu(E) \le \frac{2(k-2)}{\sqrt[k-2]{(k-1)!}} 2^{\frac{1}{k-2}} \left(\frac{B}{|\alpha_{k-1}|}\right)^{\frac{1}{k-2}} \le$$

$$\le 4(k-2)\left(\frac{B}{|\alpha_{k-1}|}\right)^{\frac{1}{k-2}}.$$

Следовательно,

$$\left| \int_a^b e^{-ih(x)}\,dx \right| \le 8(k-2) \left(\left(\frac{B}{|\alpha_{k-1}|}\right)^{\frac{1}{k-2}} + \frac{1}{B} \right).$$

Однако тогда для $B = \sqrt[k-1]{|\alpha_{k-1}|}$

$$\left(\frac{B}{|\alpha_{k-1}|}\right)^{\frac{1}{k-2}} = \left(\frac{1}{|\alpha_{k-1}|^{1-\frac{1}{k-1}}}\right)^{\frac{1}{k-2}} = \frac{1}{\sqrt[k-1]{|\alpha_{k-1}|}},$$

и, значит,

$$\left| \int_a^b e^{-ih(x)}\,dx \right| \le \frac{C}{\sqrt[k-1]{|\alpha_{k-1}|}},$$

где $C = 16(k-2)$ не зависит от коэффициентов $\alpha_{k-2}, \ldots, \alpha_1$, а коэффициент α_{k-1} достаточно велик, например, $|\alpha_{k-1}| \ge 2L_k$.

Далее предполагаем, что

$$|\alpha_k| \le M_k,\ |\alpha_{k-1}| \le M_{k-1},\ m = k-2.$$

Тогда

$$h^{(k-2)}(x) = (k-2)!\left(\alpha_{k-2} + (k-1)\alpha_{k-1}x + k(k-1)\frac{\alpha_k}{2}x^2\right),$$

поэтому

$$|h^{(k-2)}(x)| \ge (k-2)!\left(|\alpha_{k-2}| - L_{k-1}\right).$$

Таким образом, для достаточно больших α_{k-2}, например, $|\alpha_{k-2}| \ge 2L_{k-1}$, снова имеем оценку аналогичного вида:

$$\left|\int_a^b e^{-ih(x)}\,dx\right| \le \frac{C}{\sqrt[k-2]{|\alpha_{k-2}|}},$$

где константа C не зависит от коэффициентов $\alpha_{k-3}, \dots, \alpha_1$, а неравенство выполняется равномерно в ограниченной области изменения параметров α_k и α_{k-1}.

В результате за конечное число шагов получаем оценки вида

$$\left|\int_a^b e^{-ih(x)}\,dx\right| \le \frac{C}{\sqrt[r]{|\alpha_r|}},\ r = 1, 2, \dots, k,$$

где константа C не зависит от выбора $\alpha_{r-1}, \dots, \alpha_1$, а неравенство справедливо в ограниченной области изменения параметров $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_k$, что доказывает следующий аналог леммы Римана–Лебега.

Теорема 7. *Для любой суммируемой функции f*

$$\int_a^b e^{-i(\alpha_k x^k + \dots + \alpha_1 x)} f(x)\,dx \to 0,\ \textit{если}\ \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_k^2} \to \infty.$$

Определим для $f \in L^1(\mathbb{R})$ нелинейное преобразование Фурье k-й степени

$$\hat{f}(a_1, a_2, \dots, a_k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i(a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k)} f(x)\,dx$$

и спектральный радиус k-го порядка

$$r_k(f) = \|\hat{f}\|_{k,\infty} = \sup|\hat{f}(a_1, a_2, \dots, a_k)|,$$

где супремум берется по всем векторам $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$. Очевидно, что спектральный радиус удовлетворяет неравенству

$$r_k(f) \le \|f\|_1.$$

Кроме того, из теоремы 7 следует, что $r_k(f)$ реализуется на некотором векторе $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$: $r_k(f) = |\hat{f}(\mathbf{a})|$. Однако тогда уже нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 8. *Для функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ равенство $r_k(f) = \|f\|_1$ выполняется тогда и только тогда, когда для некоторых вещественных чисел $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ и почти всех $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) = e^{i(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k)}|f(x)|. \tag{10}$$

Пусть f — произвольная суммируемая функция на прямой $\mathbb{R}$,

$$\varphi_\sigma(x, y_1, \dots, y_{k-1}) = f(x)\,G_\sigma(y_1 - x^2)\dots G_\sigma(y_{k-1} - x^k).$$

Тогда имеем

$$\int_{\mathbb{R}^k} |\varphi_\sigma(x, y_1, \dots, y_{k-1})|\,dx\,dy_1 \dots dy_{k-1} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \left(\int_{\mathbb{R}^{k-1}} G_\sigma(y_1 - x^2)\dots G_\sigma(y_{k-1} - x^k)\,dy_1 \dots dy_{k-1}\right) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \left(\int_{\mathbb{R}} G_\sigma(y_1 - x^2)\,dy_1\right) \dots \left(\int_{\mathbb{R}} G_\sigma(y_{k-1} - x^k)\,dy_{k-1}\right) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \left(\int_{\mathbb{R}} G_\sigma(y_1)\,dy_1\right) \dots \left(\int_{\mathbb{R}} G_\sigma(y_{k-1})\,dy_{k-1}\right) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = \|f\|_1 < +\infty,$$

поэтому $\varphi_\sigma \in L^1(\mathbb{R}^k)$, и можно найти спектральный радиус для φ_σ как для элемента сверточной алгебры $L^1(\mathbb{R}^k)$:

$$r(\varphi_\sigma) = \lim_{(n)} \sqrt[n]{\|\varphi_\sigma^{*n}\|_{L^1(\mathbb{R}^k)}},$$

а затем перейти к пределу при $\sigma \to +0$.

Теорема 9. *Для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ спектральный радиус k-го порядка*

$$r_k(f) = \lim_{\sigma \to +0} \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|\varphi_\sigma^{*n}\|_{L^1(\mathbb{R}^k)}}.$$

Из определения спектральных радиусов произвольного порядка получаем неравенства

$$\|\hat{f}\|_\infty = r(f) \le r_2(f) \le r_3(f) \le \cdots \le r_k(f) \le \cdots \le \|f\|_1,$$

причем для каждого k имеем строгое неравенство $r_k(f) < \|f\|_1$, если f не является функцией вида (10), указанного в теореме 8. Однако далее мы доказываем, что $r_k(f) \to \|f\|_1$ при $k \to \infty$.

Действительно, для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ можно по любому $\varepsilon > 0$ найти ступенчатую функцию g, такую, что норма $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Кроме того, можно считать, что носитель функции g есть объединение конечного числа дизъюнктных промежутков

$$K = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \cdots \cup [a_l, b_l],$$

где $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < \cdots < b_{l-1} < a_l < b_l$, и на каждом промежутке $[a_s, b_s]$, $s = 1, 2, ..., l$, функция g принимает постоянное ненулевое значение c_s.

Пусть $c_s = |c_s| e^{2\pi i \theta_s}$, где $\theta_s = \arg c_s$, $s = 1, 2, ..., l$. Рассмотрим функцию φ на компакте K, для которой $\varphi(x) = \theta_s$, если $a_s \le x \le b_s$. Так как φ непрерывна на K, по теореме Стоуна–Вейерштрасса ее можно с любой точностью в равномерной норме приблизить многочленами с вещественными коэффициентами, т. е. существует такая последовательность многочленов $P_1(x), P_2(x), ...$, что $P_k \to \varphi$ равномерно на K. Однако тогда по

теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получаем, что

$$\int_K e^{-2\pi i P_k(x)} g(x)\, dx = \int_K e^{2\pi i (\varphi(x) - P_k(x))} |g(x)|\, dx \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \int_K |g(x)|\, dx = \sum_{s=1}^{l} |c_s| = \|g\|_1.$$

Если $P_k(x)$ есть многочлен некоторой степени n_k

$$P_k(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n_k} x^{n_k},$$

то

$$|\hat{g}(a_1, a_2, ..., a_{n_k})| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i P_k(x)} g(x)\, dx \right| \longrightarrow \|g\|_1.$$

В то же время выполняется неравенство

$$|\hat{g}(a_1, a_2, ..., a_{n_k})| \le r_{n_k}(g) \le \|g\|_1,$$

поэтому $r_{n_k}(g) \to \|g\|_1$, и, следовательно, $\|g\|_1 - r_{n_k}(g) < \varepsilon$ для всех достаточно больших k. Отметим также, что из неравенства $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ вытекает, что

$$|r_{n_k}(f) - r_{n_k}(g)| \le \|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

Таким образом, для всех достаточно больших k имеем

$$0 \le \|f\|_1 - r_{n_k}(f) \le \|f - g\|_1 + \big|\|g\|_1 - r_{n_k}(g)\big| +$$
$$+ |r_{n_k}(g) - r_{n_k}(f)| < 3\varepsilon,$$

поэтому $r_{n_k}(f) \to \|f\|_1$.

В результате мы доказали следующую теорему.

Теорема 10. *Для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$*

$$\sup \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i P(x)} f(x)\, dx \right| = \|f\|_1,$$

где супремум берется по всевозможным многочленам $P(x)$ с вещественными коэффициентами и любой степени.

§ 9. Операторы обобщенного сдвига и коциклы в группе Гейзенберга

Свертка $*_k$, которая соответствует волне Френеля $f_{k,\lambda}(x) = \exp(\pi i k x^2 + 2\pi i \lambda x)$

$$(f *_k h)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i k t(x-t)} f(x-t)\, h(t)\, dt,\ x \in \mathbb{R},$$

а также свертки, связанные с характерами более высокой степени, например, свертка $*_\alpha$, соответствующая характеру третьей степени $\exp(\pi i \alpha x^3)$

$$(f *_\alpha h)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{3\pi i \alpha x t(x-t)} f(x-t)\, h(t)\, dt,\ x \in \mathbb{R},$$

имеют достаточно простую интерпретацию в терминах коциклов для группы Гейзенберга.

Пусть $A(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$ — группа Гейзенберга с групповой операцией

$$(x, y, \theta)(t, \tau, \theta_1) = (x + t, y + \tau, e^{2\pi i x \tau}\theta\theta_1).$$

Фиксируем $k \in \mathbb{R}$ и рассмотрим лагранжеву прямую $l_k = \{(t, -kt) : t \in \mathbb{R}\}$. Пусть $L_k = l_k \times \mathbb{T}$ — замкнутая коммутативная подгруппа группы $A(\mathbb{R})$.

Рассмотрим, кроме того, дополнительную прямую $l' = \{0\} \times \mathbb{R}$ и множество $X = l' \times \{1\} = \{(0, \tau, 1) : \tau \in \mathbb{R}\}$. Так как для каждого элемента $s = (x, y, \theta) \in A(\mathbb{R})$ имеется единственное разложение вида

$$(x, y, \theta) = (w', 1)(w, \theta),$$

где $w' \in l'$ и $w \in l_k$, т. е.

$$(x, y, \theta) = (0, y + kx, 1)(x, -kx, \theta),$$

однородное пространство $A(\mathbb{R})/L_k$, элементами которого являются левые классы смежности $sL_k = \{ss' : s' \in L_k\}$, можно отождествить с прямой $\mathbb{R}$. Действительно, если $s = (x, y, \theta) \in A(\mathbb{R})$, то левый класс $sL_k = (0, y + kx, 1)L_k$. Этот класс смежности полностью определяется числом $\pi(s) = y + kx$.

Таким образом, $A(\mathbb{R})$ есть расслоенное пространство, базой которого является прямая $\mathbb{R}$, а проекция $\pi : A(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ задается формулой

$$\pi(s) = y + kx.$$

Пусть $r : \mathbb{R} \to A(\mathbb{R})$ — сечение этого расслоения, т. е. r — отображение, для которого $\pi(r(y)) = y$ при любых $y \in \mathbb{R}$. Кроме того, для $s, s' \in A(\mathbb{R})$ и $y = \pi(s')$ формулой

$$sr(s'L_k) = r(ss'L_k)h(s, s'L_k),$$

т. е. соотношением

$$sr(y) = r(sy)h(s, y),$$

определяем отображение $h : A(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to L_k$:

$$h(s, y) = r(sy)^{-1} sr(y).$$

Если $x_0 \in eL_k$, где $e = (0, 0, 1)$ — нейтральный элемент в группе $A(\mathbb{R})$, то $\pi(x_0) = 0$. Далее считаем, что сечение r выбрано так, чтобы $r(0) = e$.

Прямым вычислением можно доказать, что

$$h(s_1 s_2, y) = h(s_1, s_2 y)h(s_2, y).$$

Кроме того, отображение h обладает следующими свойствами:

1) $h(e, y) = e$;
2) $h(r(y), 0) = e,\ h(sr(y), 0) = h(s, y)$;
3) $h(u, 0) = u,\ h(su, 0) = h(s, 0)u$ для любых $u \in L_k$.

Пусть σ — представление группы L_k в некотором линейном пространстве. Тогда коцикл α определяем соотношением

$$\alpha(s, y) = \sigma(h(s, y)),\ s \in A(\mathbb{R}),\ y \in \mathbb{R}.$$

Коцикл α имеет следующие свойства:

1) $\alpha(s_1 s_2, y) = \alpha(s_1, s_2 y)\alpha(s_2, y),\ s_1, s_2 \in A(\mathbb{R}),\ y \in \mathbb{R}$;
2) $\alpha(e, y) = 1$ для всех $y \in \mathbb{R}$;
3) $\alpha(u, 0) = \sigma(u),\ u \in L_k$.

Будем рассматривать на $A(\mathbb{R})$ функции f со значениями в пространстве линейных операторов на линейном пространстве M представления σ. Ограничимся случаем конечномерного пространства M. Тогда $f \in L^2(A(\mathbb{R}), M)$ будет означать, что в каком-нибудь (и, значит, в любом) базисе линейного пространства M все матричные элементы оператора $f(s)$ квадратично-интегрируемы по мере Хаара на группе $A(\mathbb{R})$.

Пусть $H(l_k)$ — подпространство функций $f \in L^2(A(\mathbb{R}), M)$, для которых

$$f(su) = \sigma(u^{-1})\, f(s),\ s \in A(\mathbb{R}),\ u \in L_k. \tag{11}$$

Точнее, $H(l_k)$ является замыканием подпространства гладких функций из $L^2(A(\mathbb{R}), M)$, удовлетворяющих соотношению (11).

Если $f \in H(l_k)$ и функция f^α определена формулой

$$f^\alpha(s) = \alpha(s,0)\, f(s),\ s \in A(\mathbb{R}),$$

то $f^\alpha(su) = f^\alpha(s)$ для почти всех $s \in A(\mathbb{R})$ и $u \in L_k$, поэтому f^α можно рассматривать как функцию на однородном пространстве $A(\mathbb{R})/L_k = \mathbb{R}$.

Для $s \in A(\mathbb{R})$ оператор $\rho(s)$ определяем как оператор левого сдвига:

$$(\rho(s)f)(t) = f(s^{-1}t),\ t \in A(\mathbb{R}).$$

Тогда получаем

$$(\rho(s)f)^\alpha(y) = \alpha(s, s^{-1}y)\, f^\alpha(s^{-1}y),$$

поэтому для функций g на однородном пространстве $\mathbb{R} = A(\mathbb{R})/L_k$

$$(\rho(s)g)(y) = \alpha(s, s^{-1}y)\, g(s^{-1}y)$$

есть оператор обобщенного сдвига, для которого выполняется групповое свойство

$$\rho(s_1 s_2) = \rho(s_1)\,\rho(s_2),\ s_1, s_2 \in A(\mathbb{R}).$$

Пусть $\gamma : L_k \to \mathbb{T}$ — непрерывный характер на коммутативной замкнутой подгруппе L_k группы Гейзенберга $A(\mathbb{R})$:

$$\gamma(t, -kt, \theta) = f_{k,\lambda}(t)\,\theta.$$

Рассмотрим гомоморфизм $\tau : \mathbb{R} \to L_k$, для которого

$$\tau(t) = (t, -kt, \overline{f_{k,\lambda}(t)}),\ t \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что $\gamma(\tau(t)) = 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$, т. е. $\gamma = 1$ на $\tau(\mathbb{R})$.

Наконец, пусть σ — неприводимое (одномерное) унитарное представление для L_k :

$$\sigma(u) = \gamma(u),\ u \in L_k.$$

Тогда имеем

$$\alpha(s,y) = \gamma(h(s,y)),\ s \in A(\mathbb{R}),\ y \in \mathbb{R},$$

а для $f \in H(l_k)$ справедливо равенство

$$f(su) = \overline{\gamma(u)}\, f(s),\ s \in A(\mathbb{R}),\ u \in L_k.$$

Кроме того,

$$f^\alpha(s) = \alpha(s,0)\, f(s) = \gamma(h(s,0))\, f(s)$$

и

$$(\rho(s)f)^\alpha(y) = \alpha(s, s^{-1}y)\, f^\alpha(s^{-1}y) = \gamma(h(s, s^{-1}y))\, f^\alpha(s^{-1}y),$$

поэтому для комплекснозначных функций g на однородном пространстве получаем формулу для обобщенного сдвига:

$$(\rho(s)g)(y) = \gamma(h(s, s^{-1}y))\, g(s^{-1}y).$$

Пусть $r : \mathbb{R} \to A(\mathbb{R})$ есть сечение, для которого $r(x) = (0, x, 1)$. Тогда для элемента $s = (t, \tau, \theta) \in A(\mathbb{R})$ имеем

$$sr(x) = (t, \tau, \theta)(0, x, 1) = (t, \tau + x, e^{2\pi i t x}\theta),$$

поэтому $\pi(sr(x)) = \tau + x + kt$. Кроме того,

$$r(sx) = r(\pi(sr(x))) = (0, \tau + x + kt, 1),$$
$$r(sx)^{-1} = (0, \tau + x + kt, 1)^{-1} = (0, -\tau - x - kt, 1).$$

Следовательно,

$$h(s,x) = r(sx)^{-1} s r(x) =$$
$$= (0, -\tau - x - kt, 1)(t, \tau + x, e^{2\pi i t x}\theta) = (t, -kt, e^{2\pi i t x}\theta),$$

поэтому

$$h(s,x) = (t, -kt, e^{2\pi i t x}\theta),\ s = (t,\tau,\theta) \in A(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}. \qquad (12)$$

Однако тогда для коцикла α получаем

$$\alpha(s,x) = \gamma(h(s,x)) = f_{k,\lambda}(t)\, e^{2\pi i t x}\theta. \qquad (13)$$

Далее, для элемента $s = (t,\tau,\theta) \in A(\mathbb{R})$ обратным является элемент $s^{-1} = (-t, -\tau, e^{2\pi i t\tau}\theta^{-1})$, поэтому

$$s^{-1} r(x) = (-t, -\tau, e^{2\pi i t\tau}\theta^{-1})(0, x, 1) =$$
$$= (-t, x - \tau, e^{-2\pi i t x} e^{2\pi i t\tau}\theta^{-1}),$$

и, значит,

$$s^{-1}x = \pi(s^{-1}r(x)) = x - \tau - kt.$$

Однако тогда из соотношений (12), (13) следует, что

$$h(s, s^{-1}x) = (t, -kt, e^{2\pi i t(x-\tau-kt)}\theta),$$

$$\alpha(s, s^{-1}x) = f_{k,\lambda}(t)\, e^{2\pi i t(x-\tau-kt)}\,\theta. \qquad (14)$$

Полезно отметить, что при отождествлении однородного пространства $A(\mathbb{R})/L_k$ с прямой $\mathbb{R}$ равенство $x = w_0 L_k$, где $x \in \mathbb{R}$, $w_0 = (x_0, y_0, \theta_0) \in A(\mathbb{R})$, означает, что $\pi(w_0) = y_0 + kx_0 = x$. В частности, если $x = 0$, то $0 = eL_k$ и $e = (0,0,1)$ — нейтральный элемент в группе $A(\mathbb{R})$. Следовательно, из соотношений $0 = eL_k = s^{-1}w_0 L_k$ получаем, что $sL_k = w_0 L_k$, поэтому

$$\pi(s) = \tau + kt = \pi(w_0) = y_0 + kx_0 = x.$$

В этом случае из равенства (14) вытекает, что

$$\alpha(s,0) = f_{k,\lambda}(t)\, e^{2\pi i t(x-\tau-kt)}\,\theta =$$
$$= f_{k,\lambda}(t)\, e^{2\pi i t((\tau+kt)-\tau-kt)}\theta = f_{k,\lambda}(t)\,\theta.$$

Теперь рассмотрим функцию f на группе $A(\mathbb{R})$, для которой

$$f(su) = \overline{\gamma(u)} f(s),\ s \in A(\mathbb{R}), u \in L_k.$$

Тогда

$$f(t,\tau,\theta) = f((0,\tau+kt,1)(t,-kt,\theta)) =$$
$$= \overline{\gamma(t,-kt,\theta)}\, f(0,\tau+kt,1) =$$
$$= \overline{f_{k,\lambda}(t)\theta}\, f(0,\tau+kt,1),$$

откуда

$$f(s) = \overline{f_{k,\lambda}(t)\theta}\, \psi(\pi(s)),$$

где

$$\psi(\pi(s)) = \psi(\tau + kt) = f(0, \tau + kt, 1),$$

и функцию ψ можно интерпретировать как сужение функции f на дополнительную прямую l'.

Таким образом, для $f \in H(l_k)$ имеем функцию

$$f^\alpha(s) = \alpha(s,0) f(s) = (f_{k,\lambda}(t)\theta)\ \overline{(f_{k,\lambda}(t)\theta)}\, \psi(\pi(s)) = \psi(\pi(s)),$$

постоянную на каждом левом классе sL_k, поэтому ее можно представить как функцию на прямой $\mathbb{R} = A(\mathbb{R})/L_k$.

Пусть снова $f \in H(l_k)$. Если $s = (t,\tau,\theta) \in A(\mathbb{R})$, то

$$f(s) = \overline{f_{k,\lambda}(t)}\,\theta^{-1}\psi(\tau + kt).$$

Кроме того, для элемента $s_1 = (t_1, \tau_1, \theta_1)$ обратным является элемент $s_1^{-1} = (-t_1, -\tau_1, e^{2\pi i t_1\tau_1}\theta_1^{-1})$, и

$$s_1^{-1}s = (-t_1, -\tau_1, e^{2\pi i t_1\tau_1}\theta_1^{-1})(t,\tau,\theta) =$$
$$= (t - t_1, \tau - \tau_1, e^{-2\pi i t_1(\tau-\tau_1)}\theta_1^{-1}\theta),$$

поэтому для левого сдвига получаем

$$(\rho(s_1)f)(s) = f(s_1^{-1}s) = f(t - t_1, \tau - \tau_1, e^{-2\pi i t_1(\tau-\tau_1)}\theta_1^{-1}\theta) =$$
$$= \overline{f_{k,\lambda}(t - t_1)}\, e^{2\pi i t_1(\tau-\tau_1)}\theta_1\theta^{-1}\psi(\pi(s_1^{-1}s)) =$$
$$= \overline{f_{k,\lambda}(t - t_1)}\, e^{2\pi i t_1(\tau-\tau_1)}\theta_1\theta^{-1}\psi(x - x_1),$$

где $x = \pi(s) = \tau + kt, x_1 = \pi(s_1) = \tau_1 + kt_1$. Следовательно, операция левого сдвига на функциях ψ индуцирует преобразование

$$\begin{aligned}\rho(s_1) : \psi(x) \to f_{k,\lambda}(t)\theta\ \overline{f_{k,\lambda}(t-t_1)}\ e^{2\pi i t_1(\tau-\tau_1)}\theta_1\theta^{-1}\psi(x-x_1) = \\ = e^{2\pi i k t t_1}\, e^{-\pi i k t_1^2 + 2\pi i \lambda t_1 + 2\pi i t_1(\tau-\tau_1)}\,\theta_1\psi(x-x_1) = \\ = \overline{f_{k,\lambda}(-t_1)}\ e^{2\pi i(ktt_1 + t_1(\tau-\tau_1))}\,\theta_1\psi(x-x_1),\end{aligned}$$

поэтому

$$(\rho(s_1)\psi)(x) = \overline{f_{k,\lambda}(-t_1)}\ e^{2\pi i(ktt_1 + t_1(\tau-\tau_1))}\,\theta_1\psi(x-x_1).$$

В частности, для $s = (t, 0, 1), s_1 = (t_1, 0, 1)$ получаем

$$(\rho(s_1)\,\psi)(x) = \overline{f_{k,\lambda}(-t_1)}\ e^{2\pi i k t t_1}\,\psi(x-x_1),$$

а для функции $\varphi(t) = \psi(kt)$ —

$$(\rho(t_1)\varphi)(t) = \overline{f_{k,\lambda}(-t_1)}\ e^{2\pi i k t t_1}\,\varphi(t-t_1),$$

что можно записать в виде

$$(\rho(t_1)\varphi)(t) = (U_{-t_1}\varphi)(t),$$

где

$$(U_t\varphi)(x) = \overline{f_{k,\lambda}(t)}\ e^{-2\pi i k x t}\varphi(x+t),$$

причем операторы U_t обладают групповым свойством

$$U_{t_1+t_2} = U_{t_1}\circ U_{t_2},\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Оператор обобщенного сдвига U_t соответствует волне Френеля, т. е. характеру второй степени $f_{k,\lambda}$, и его можно записать в виде

$$(U_t f)(x) = f_{k,\lambda}(x)\,\overline{f_{k,\lambda}(x+t)}\,f(x+t).$$

Аналогично, пусть $\varphi_\alpha(x) = \exp(\pi i \alpha x^3)$ — характер третьей степени и определим новый оператор V_t формулой

$$(V_t f)(x) = \varphi_\alpha(x)\,\overline{\varphi_\alpha(x+t)}\ f(x+t).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}(V_{t_2}f)(x) &= e^{\pi i\alpha x^3}e^{-\pi i\alpha(x+t_2)^3}f(x+t_2) = g(x),\\ (V_{t_1}g)(x) &= e^{\pi i\alpha x^3}e^{-\pi i\alpha(x+t_1)^3}g(x+t_1) = \\ &= e^{\pi i\alpha x^3}e^{-\pi i\alpha(x+t_1)^3}e^{\pi i\alpha(x+t_1)^3}e^{-\pi i\alpha(x+t_1+t_2)^3}f(x+t_1+t_2) = \\ &= e^{\pi i\alpha x^3}e^{-\pi i\alpha(x+(t_1+t_2))^3}f(x+(t_1+t_2)) = (V_{t_1+t_2}f)(x),\end{aligned}$$

поэтому выполняется групповое свойство

$$V_{t_1}\circ V_{t_2} = V_{t_1+t_2}.$$

По аналогии с формулой

$$(f *_k h)(x) = \int_{\mathbb{R}} (U_{-t}f)(x)\,\overline{f_{k,\lambda}(t)}\,h(t)\,dt,$$

определяющей операцию свертки $*_k$, вводим новую свертку $*_\alpha$, соответствующую характеру третьей степени $\varphi_\alpha(x) = e^{\pi i\alpha x^3}$:

$$(f *_\alpha h)(x) = \int_{\mathbb{R}} (V_{-t}f)(x)\ \overline{\varphi_\alpha(t)}\ h(t)\,dt.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}(f *_\alpha h)(x) &= e^{\pi i\alpha x^3}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi i\alpha(x-t)^3}f(x-t)e^{-\pi i\alpha t^3}\,h(t)\,dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{3\pi i\alpha(x^2t - xt^2)}f(x-t)\,h(t)\,dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{3\pi i\alpha xt(x-t)}f(x-t)\,h(t)\,dt,\end{aligned}$$

т. е.

$$(f *_\alpha h)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{3\pi i\alpha xt(x-t)}\ f(x-t)\,h(t)\,dt.$$

Можно убедиться в том, что новую свертку $*_\alpha$ и оператор обобщенного сдвига V_t также можно описать в терминах коцик-

лов на группе Гейзенберга $A(\mathbb{R})$. Для этого возьмем произвольное сечение $r : \mathbb{R} \to A(\mathbb{R})$, для которого $r(x) = (0, x, p(x))$ и $p : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ — некоторая гладкая функция, удовлетворяющая условию $p(0) = 1$. Если $w = (t_0, \tau_0, \theta_0) \in A(\mathbb{R})$, то левый класс $wL_k = (0, \tau_0 + kt_0, 1)L_k$ и $x = \pi(w) = \tau_0 + kt_0$. Для любого элемента $s = (t, \tau, \theta) \in A(\mathbb{R})$ получаем

$$sw = (t + t_0, \tau + \tau_0, e^{2\pi i t\tau_0}\theta\theta_0),$$
$$swL_k = (0, \tau + \tau_0 + k(t + t_0), 1)L_k = (0, (\tau + kt) + x, 1)L_k,$$

поэтому

$$r(sx) = r(swL_k) = (0, (\tau + kt) + x, p((\tau + kt) + x)),$$
$$sr(x) = (t, \tau, \theta)(0, x, p(x)) = (t, \tau + x, e^{2\pi i t x}\theta p(x)).$$

Однако тогда из соотношения $sr(x) = r(sx)h(s, x)$ следует, что

$$h(s, x) = r(sx)^{-1} sr(x) =$$
$$= (0, -(\tau + kt) - x, p((\tau + kt) + x)^{-1})(t, \tau + x, e^{2\pi i t x}\theta p(x)) =$$
$$= \left(t, -kt, e^{2\pi i t x}\frac{p(x)}{p((\tau + kt) + x)}\theta\right).$$

Таким образом,

$$h(s, x) = \left(t, -kt, e^{2\pi i t x}\frac{p(x)}{p((\tau + kt) + x)}\theta\right), \qquad (15)$$

$$\alpha(s, x) = \gamma(h(s, x)) = f_{k,\lambda}(t)e^{2\pi i t x}\theta\frac{p(x)}{p((\tau + kt) + x)}.$$

Кроме того, из соотношения (15) и равенства

$$s^{-1}x = (t_0 - t, \tau_0 - \tau, e^{-2\pi i t(\tau_0 - \tau)}\theta^{-1}\theta_0)$$

получаем соотношение

$$h(s, s^{-1}x) = \left(t, -kt, e^{2\pi i t(x - \tau - kt)}\frac{p(x - \tau - kt)}{p(x)}\theta\right),$$

поэтому

$$\alpha(s, s^{-1}x) = f_{k,\lambda}(t)\, e^{2\pi i t(x - \tau - kt)}\,\frac{p(x - \tau - kt)}{p(x)}\,\theta. \qquad (16)$$

Наконец, учитывая, что $p(0) = 1$, из равенства (16) имеем

$$\alpha(s, 0) = f_{k,\lambda}(t)\, p(\tau + kt)^{-1}\theta,$$

что можно записать в виде

$$\alpha(s, 0) = f_{k,\lambda}(t)\, p(\pi(s))^{-1}\theta.$$

Теперь пусть функция $f \in H(l_k)$, т.е. будем считать, что f есть функция на группе $A(\mathbb{R})$, для которой

$$f(s) = \overline{f_{k,\lambda}(t)\theta}\,\psi(\pi(s)).$$

Однако тогда получаем, что

$$f^\alpha(s) = \alpha(s, 0)\, f(s) =$$
$$= f_{k,\lambda}(t)\,\theta\, p(\pi(s))^{-1}\overline{f_{k,\lambda}(t)\theta}\,\psi(\pi(s)) = p(\pi(s))^{-1}\psi(\pi(s))$$

есть функция, постоянная на левых классах, поэтому ее можно интерпретировать как функцию на однородном пространстве $\mathbb{R} = A(\mathbb{R})/L_k$.

Таким образом, если $f \in H(l_k)$, то для любых $s = (t, \tau, \theta)$ и $x = \pi(s) = \tau + kt$ имеем

$$f^\alpha(s) = p(x)^{-1}\psi(x),$$

где $\psi(x) = f(0, x, 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим оператор левого сдвига

$$f(s) \to f(s_1^{-1}s).$$

Если

$$g(s) = f(s_1^{-1}s),$$

то

$$(\rho(s_1)f)^\alpha(s) = g^\alpha(s) = \alpha(s,0)g(s) = \\ = \alpha(s,0)\, f(s_1^{-1}s) = \alpha(s,0)\,\alpha(s_1^{-1}s,0)^{-1} f^\alpha(s_1^{-1}s).$$

Здесь воспользуемся следующим свойством коцикла α :

$$\alpha(s_1s_2,y) = \alpha(s_1,s_2y)\,\alpha(s_2,y).$$

Из этого свойства следует, что

$$\alpha(s,0) = \alpha(s_1(s_1^{-1}s),0) = \alpha(s_1(s_1^{-1}s),eL_k) = \\ = \alpha(s_1,s_1^{-1}seL_k)\,\alpha(s_1^{-1}s,eL_k) = \\ = \alpha(s_1,s_1^{-1}sL_k)\,\alpha(s_1^{-1}s,0) = \alpha(s_1,s_1^{-1}x)\,\alpha(s_1^{-1}s,0),$$

поэтому

$$(\rho(s_1)f)^\alpha(s) = \alpha(s,0)\,\alpha(s_1^{-1}s,0)^{-1} f^\alpha(s_1^{-1}s) = \\ = \alpha(s_1,s_1^{-1}x)\,\alpha(s_1^{-1}s,0)\,\alpha(s_1^{-1}s,0)^{-1} f^\alpha(s_1^{-1}s) = \\ = \alpha(s_1,s_1^{-1}x)\, f^\alpha(s_1^{-1}s),$$

где $x = \pi(s)$ представляет собой класс sL_k.

Если $s_1 = (t_1,\tau_1,\theta_1)$ и $x_1 = \pi(s_1) = \tau_1 + kt_1$, то в соответствии с формулой (16)

$$\alpha(s_1,s_1^{-1}x) = f_{k,\lambda}(t_1)\, e^{2\pi i t_1(x-x_1)}\,\frac{p(x-x_1)}{p(x)}\theta_1.$$

Следовательно, оператор $\rho(s_1)$ преобразует функцию

$$f^\alpha(s) = p(x)^{-1}\psi(x)$$

в функцию

$$\alpha(s_1,s_1^{-1}x)\, f^\alpha(s_1^{-1}s) = \\ = f_{k,\lambda}(t_1)\, e^{2\pi i t_1(x-x_1)}\,\theta_1\, p(x-x_1)p(x)^{-1}p(x-x_1)^{-1}\psi(x-x_1) = \\ = f_{k,\lambda}(t_1)\, e^{2\pi i t_1(x-x_1)}\,\theta_1\, p(x)^{-1}\psi(x-x_1) = \\ = f_{k,\lambda}(t_1)\, e^{2\pi i t_1(x-x_1)}\,\theta_1(p(x-x_1)\,p(x)^{-1})\,p(x-x_1)^{-1}\psi(x-x_1),$$

поэтому данный оператор преобразует функцию

$$\xi(x) = p(x)^{-1}\psi(x)$$

в функцию

$$f_{k,\lambda}(t_1)\, e^{2\pi i t_1(x-x_1)}\,\theta_1(p(x-x_1)\,p(x)^{-1})\,\xi(x-x_1).$$

Так, для $s_1 = (t_1,0,1)$, $s = (t,0,1)$ имеем $\tau = \tau_1 = 0$, $\theta_1 = 1$, $x = kt$, $x_1 = kt_1$, поэтому

$$(\rho(s_1)\xi)(x) = \overline{f_{k,\lambda}(-t_1)}\, e^{2\pi i k t t_1}\,(p(x-x_1)\,p(x)^{-1})\,\xi(x-x_1),$$

и, значит, для $\varphi(t) = \xi(kt)$ справедливо соотношение

$$(\rho(s_1)\varphi)(t) = \frac{p(x-x_1)}{p(x)}\,(U_{-t_1}\varphi)(t).$$

Теперь рассмотрим характер третьей степени

$$\varphi_\alpha(x) = \exp(\pi i\alpha x^3)$$

и соответствующий оператор обобщенного сдвига V_{t_1} :

$$(V_{t_1}f)(t) = e^{-3\pi\alpha i t t_1(t+t_1)}\, e^{-\pi i\alpha t_1^3}\, f(t+t_1).$$

Если сечение $r : \mathbb{R} \to A(\mathbb{R})$, заданное формулой

$$r(x) = (0,x,p(x)),$$

выбрать так, чтобы

$$p(x) = p(kt) = \exp(-\pi i\alpha t^3),$$

то получим

$$p(x-x_1)p(x)^{-1} = e^{-\pi i\alpha(t-t_1)^3}\, e^{\pi i\alpha t^3} = \\ = e^{-3\pi i\alpha t(-t_1)(t+(-t_1))}\, e^{-\pi i\alpha(-t_1)^3},$$

что совпадает с мультипликатором в обобщенном сдвиге V_{-t_1}.

Пусть оператор $W_t = W_t(\alpha, k, \lambda)$ определен формулой

$$(W_t f)(x) = e^{-3\pi i\alpha x t(x+t)}\, e^{-\pi i\alpha t^3}(U_t f)(x) = \\ = e^{-3\pi i\alpha x t(x+t)}\, e^{-\pi i\alpha t^3}\, \overline{f_{k,\lambda}(t)}\, e^{-2\pi i k x t} f(x+t).$$

Тогда W_t обладает групповым свойством

$$W_{t_1+t_2} = W_{t_1} \circ W_{t_2}$$

и, следовательно, является оператором обобщенного сдвига. Кроме того,

$$W_t(\alpha, k, \lambda) = \begin{cases} V_t(\alpha), & \text{если } k = \lambda = 0, \\ U_t(k, \lambda), & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

С помощью операторов обобщенного сдвига W_t можно построить новую операцию свертки $*_{\alpha,k}$:

$$(f *_{\alpha,k} h)(x) = \int_{\mathbb{R}} (W_{-t} f)(x)\, \overline{f_{k,\lambda}(t)\varphi_\alpha(t)}\, h(t)\, dt.$$

Новая свертка связана со свертками, соответствующими операторам обобщенного сдвига U_t и V_t, соотношениями

$$*_{0,k} = *_k, *_{\alpha,0} = *_\alpha,$$

где

$$(f *_k h)(x) = \int_{\mathbb{R}} (U_{-t} f)(x)\, \overline{f_{k,\lambda}(t)}\, h(t)\, dt,$$

$$(f *_\alpha h)(x) = \int_{\mathbb{R}} (V_{-t} f)(x)\, \overline{\varphi_\alpha(t)}\, h(t)\, dt.$$

В заключение главы отметим, что с помощью других сечений $r : \mathbb{R} \to A(\mathbb{R})$ можно построить новые операторы обобщенного сдвига, связанные с разложениями функций по характерам $\exp(2\pi i P(x))$, где $P(x)$ — многочлены степени больше трех.

ГЛАВА 3

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ГРУППЕ

В главе рассматриваются расширение группы характеров до мультипликативной группы характеров второй степени и соответствующее преобразование Фурье–Френеля, совпадающее на обычных характерах с классическим преобразованием Фурье на локально компактной коммутативной группе.

Основное внимание уделено вопросу о распространении леммы Римана–Лебега на преобразование Фурье–Френеля суммируемой функции [1–4].

Отметим, что для группы $\mathbb{R}^n$ характеры второй степени (волны Френеля по терминологии В. Ф. Осипова [20]) имеют вид

$$f(\mathbf{x}) = \exp(2\pi i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) + \pi i(A\mathbf{x}, \mathbf{x})),\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ — линейная форма, порождающая плоскую волну, а $(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$ — квадратичная форма, поэтому необходимые асимптотические свойства преобразования Фурье–Френеля суммируемой функции на $\mathbb{R}^n$ доказываются с использованием соответствующих теорем типа теорем Ван-дер-Корпута.

Для общих локально компактных коммутативных групп используются их структурные свойства, при этом основное внимание уделяется изучению преобразования Фурье–Френеля на группах вида $G = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{Z}^q \oplus H$, где H — компактная группа. Кроме того, известно, что для каждой компактной группы H существует убывающее фильтрующееся семейство замкнутых подгрупп H_α, такое, что группу H можно отождествить с проективным пределом фактор-групп H/H_α, а каждая фактор-группа $G_\alpha = H/H_\alpha$ изоморфна некоторой группе $\mathbb{T}^r \oplus F$, где F — конечная группа.

Используя это свойство произвольных компактных коммутативных групп, даем полное описание мультипликативной группы $X_2(H)$ характеров второй степени на H, что позволяет распространить лемму Римана–Лебега на группы, являющиеся проективными пределами элементарных групп вида

$$G = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{Z}^q \oplus \mathbb{T}^r \oplus F.$$

§ 10. Характеры второй степени и преобразование Фурье–Френеля на локально компактной коммутативной группе

Пусть G — локально компактная коммутативная группа и $L^1(G)$ — пространство всех суммируемых (по мере Хаара) функций на G с нормой $\|\psi\|_1 = \int\limits_G |\psi(x)|\,dx$. Пространство $L^1(G)$ будем рассматривать как банахову алгебру относительно операции свертки

$$(\psi * \varphi)(x) = \int\limits_G \psi(x-t)\,\varphi(t)\,dt,\ x \in G,$$

где правая часть определена для почти всех $x \in G$, суммируема по мере Хаара и $\|\psi * \varphi\|_1 \leq \|\psi\|_1\,\|\varphi\|_1$.

Обозначим через $\mathbb{T}$ мультипликативную группу комплексных чисел z, таких, что $|z| = 1$; характером на группе G называется непрерывный гомоморфизм $\gamma : G \to \mathbb{T}$; $\gamma(x) = < x, \gamma >$ — значение характера γ на элементе $x \in G$; $\Gamma = \hat{G}$ — группа характеров на G с групповой операцией $(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x)$.

Для $\psi \in L^1(G)$ преобразование Фурье $\hat{\psi}$ есть функция на Γ, заданная формулой

$$\hat{\psi}(\gamma) = \int\limits_G < -x, \gamma > \psi(x)\,dx,\ \gamma \in \Gamma.$$

Известно, что преобразование Фурье $\psi \to \hat{\psi}$ является инъективным линейным оператором, для которого

$$(\psi * \varphi)^{\wedge} = \hat{\psi}\hat{\varphi}.$$

Кроме того, на группе Γ (как на подмножестве пространства $L^\infty(G)$, сопряженного групповой алгебре $L^1(G)$) можно рассмотреть $*$-слабую топологию, совпадающую с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах группы G. В этой топологии Γ является локально компактной группой, для любой $\psi \in L^1(G)$ преобразование Фурье $\hat{\psi}$ есть непрерывная функция на группе Γ, а классическая лемма Римана–Лебега в

общей ситуации сверточных алгебр $L^1(G)$ для недискретных групп G утверждает, что

$$\hat{\psi}(\gamma) \to 0 \ \text{ при } \gamma \to \infty$$

в том смысле, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует компакт $E \subset \Gamma$, такой, что $|\hat{\psi}(\gamma)| < \varepsilon$ для любых $\gamma \in \Gamma \backslash E$.

Рассмотрим на подалгебре $A(\Gamma) = \{\hat{\psi} :\ \psi \in L^1(G)\} \subset C_0(\Gamma)$ две нормы:

$$\|\hat{\psi}\|_{A(\Gamma)} = \|\psi\|_1 \quad \|\hat{\psi}\|_\infty = \sup\{|\hat{\psi}(\gamma)| :\ \gamma \in \Gamma\}.$$

Очевидно, что

$$\|\hat{\psi}\|_\infty \leqslant \|\hat{\psi}\|_{A(\Gamma)}.$$

Кроме того, известно, что эти нормы на алгебре $A(\Gamma)$ эквивалентны в том и только том случае, когда группа G конечна. Отметим также, что к групповой алгебре $L^1(G)$ применима общая теория коммутативных банаховых алгебр, согласно которой вторую норму можно интерпретировать как спектральный радиус для функции $\psi \in L^1(G)$:

$$\|\hat{\psi}\|_\infty = r(\psi) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\psi^{*n}\|_1}.$$

Простое рассуждение, приводимое далее, позволяет дать полное описание класса вырожденных функций, для которых $\|\psi\|_1 = \|\hat{\psi}\|_\infty$. Если $\psi \in L^1(G)$, то $\hat{\psi} \in C_0(\Gamma)$, поэтому существует $\gamma_0 \in \Gamma$, такое, что $\|\hat{\psi}\|_\infty = |\hat{\psi}(\gamma_0)|$. Однако тогда из равенства $\|\psi\|_1 = \|\hat{\psi}\|_\infty$ получаем

$$\left| \int\limits_G < -x, \gamma_0 > \psi(x)\,dx \right| = \int\limits_G |\psi(x)|\,dx,$$

и, значит, для некоторого $a \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\int\limits_G < -x, \gamma_0 > \psi(x)\,dx = e^{ia} \int\limits_G |\psi(x)|\,dx.$$

Следовательно, для функции $g(x)=e^{-ia}<-x,\gamma_0>\psi(x)$ имеем

$$|g(x)| = |\psi(x)|, \int\limits_G g(x)\,dx = \int\limits_G |g(x)|\,dx,$$

поэтому

$$\int\limits_G (|g(x)| - \operatorname{Re} g(x))\,dx = 0.$$

Поскольку $|g| - \operatorname{Re} g \geqslant 0$, отсюда следует, что $|g(x)| - \operatorname{Re} g(x) = 0$ для почти всех $x \in G$, т. е. $\operatorname{Re} g(x) = |g(x)|$, и, значит, $\operatorname{Im} g(x) = 0$ почти всюду на G.

Таким образом, $g(x) = |g(x)| = |\psi(x)|$, поэтому

$$\psi(x) = e^{ia} < x, \gamma_0 > |\psi(x)|$$

почти всюду на G. Обратно, если функция ψ имеет такой вид, то $|\hat{\psi}(\gamma_0)| = \|\psi\|_1$, поэтому $\|\hat{\psi}\|_\infty = \|\psi\|_1$.

Теорема 1. *Для суммируемой функции ψ справедливо равенство $r(\psi) = \|\psi\|_1$ тогда и только тогда, когда для некоторых $a \in \mathbb{R}$ и $\gamma_0 \in \Gamma$ справедливо равенство*

$$\psi(x) = e^{ia} < x, \gamma_0 > |\psi(x)|$$

для почти всех $x \in G$.

Теорема 1 утверждает, что для всех суммируемых функций, отличных от функций указанного вида, справедливо строгое неравенство $r(\psi) < \|\psi\|_1$, т. е. характеры (как элементы из $L^\infty(G)$) не образуют достаточного семейства линейных непрерывных функционалов на групповой алгебре суммируемых функций. Поэтому естественно возникает вопрос о расширении группы характеров до достаточной совокупности функционалов, которая сохраняла бы многообразную алгебраическую структуру гармонического анализа. Здесь мы рассматриваем расширение группы $\Gamma = \hat{G}$ до мультипликативной группы $X_2(G)$, состоящей из всевозможных характеров второй степени [16, 26].

Напомним, что непрерывное отображение $\alpha : G \times G \to \mathbb{T}$ является бихарактером, если для любого $y \in G$ отображение $x \to \alpha(x, y)$ и для любого $x \in G$ отображение $y \to \alpha(x, y)$ являются характерами на группе G. Непрерывное отображение $f : G \to \mathbb{T}$ есть характер второй степени на группе G, если отображение

$$(x, y) \longrightarrow \frac{f(x+y)}{f(x)f(y)}$$

является бихарактером на $G \times G$, т. е. f удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(x+y+z)f(x)f(y)f(z) = f(x+y)f(y+z)f(z+x)$$

для любых $x, y, z \in G$.

Если f — характер второй степени на G, то

$$\frac{f(x+y)}{f(x)f(y)} = < x, \rho y >, \; x, y \in G,$$

где $\rho = \rho(f)$ — непрерывный гомоморфизм группы G в ее группу характеров Γ. При стандартном отождествлении $\hat{\Gamma} = G$ сопряженный гомоморфизм $\rho^* : \hat{\Gamma} \to \hat{G}$ есть гомоморфизм из G в Γ, и очевидно, что $\rho^* = \rho$. Следовательно, гомоморфизм ρ, ассоциированный с характером второй степени f, является симметричным гомоморфизмом. Если обозначить через $X_2(G)$ группу по умножению характеров второй степени, то $f \to \rho(f)$ является гомоморфизмом группы $X_2(G)$ в аддитивную группу симметричных гомоморфизмов из G в Γ. Ядром этого отображения является группа характеров $X_1(G) = \Gamma$ на G.

Для функции $\psi \in L^1(G)$ преобразование Фурье–Френеля $\hat{\psi}$ есть функция на $X_2(G)$, заданная формулой

$$\hat{\psi}(f) = \int\limits_G f(-x)\psi(x)\,dx, \; f \in X_2(G),$$

и в частном случае, когда $f = \gamma \in \Gamma \subset X_2(G)$, это преобразование совпадает с обычным преобразованием Фурье

$$\hat{\psi}(f) = \hat{\psi}(\gamma) = \int\limits_G < -x, \gamma > \psi(x)\,dx.$$

Рассмотрим на группе $X_2(G)$ две топологии:

1) $*$-слабую топологию из $L^\infty(G)$, в которой для $f_0 \in X_2(G)$ фундаментальной системой окрестностей является система множеств вида

$$V(f_0;\, \psi_1, ..., \psi_k;\, \varepsilon) = \left\{ f \in X_2(G) : |\hat{\psi}_i(f) - \hat{\psi}_i(f_0)| < \varepsilon,\ i = 1, ..., k \right\},$$

где $\varepsilon > 0$ и $\psi_1, ..., \psi_k \in L^1(G)$;

2) топологию равномерной сходимости на компактных подмножествах группы G, в которой окрестностями для f_0 являются множества вида

$$N(f_0; K; \varepsilon) = \{ f \in X_2(G) :\ |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon \text{ для любых } x \in K \},$$

где $\varepsilon > 0$ и $K \subset G$ — компактное подмножество. Отметим, что на подгруппе $\Gamma = X_1(G) \subset X_2(G)$ эти топологии совпадают [9, 25].

Пусть $V = V(f_0;\ \psi_1, \psi_2, ..., \psi_k;\ \varepsilon)$ — окрестность для функции f_0 в $*$-слабой топологии. Вследствие плотности в $L^1(G)$ непрерывных функций с компактным носителем можно считать, что все функции $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_k$ равны нулю вне некоторого компакта $K \subset G$. Если

$$0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{\max \|\psi_i\|_1}$$

и $f \in N(f_0; -K; \varepsilon')$, то для любого $i = 1, 2, ..., k$

$$|\hat{\psi}_i(f) - \hat{\psi}_i(f_0)| = \left| \int\limits_K (f(-x) - f_0(-x))\, \psi_i(x)\, dx \right| \le$$

$$\le \int\limits_K |f(-x) - f_0(-x)|\, |\psi_i(x)|\, dx \le \varepsilon' \int\limits_K |\psi_i(x)|\, dx = \varepsilon'\, \|\psi_i\|_1 < \varepsilon,$$

поэтому $N(f_0; -K; \varepsilon') \subset V$, где $-K = \{-x : x \in K\}$ — компакт, так как K — компакт. В результате доказано, что из равномерной сходимости на компактах следует $*$-слабая сходимость характеров второй степени.

Рассмотрим на множестве $G \times X_2(G)$ топологию прямого произведения, причем на $X_2(G)$ — топологию равномерной сходимости на компактах. Если $f_1, f_0 \in X_2(G)$ и $x, x_0 \in G$, то

$$|f(x) - f_0(x_0)| \le |f(x) - f_0(x)| + |f_0(x) - f_0(x_0)|.$$

Из непрерывности f_0 на G следует, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $|f_0(x) - f_0(x_0)| < \varepsilon$ для всех x из некоторой окрестности U точки x_0. Однако G — локально компактная группа, поэтому можно считать, что окрестность U имеет компактное замыкание $K = \overline{U}$.

Если $f \in N(f_0; K; \varepsilon)$, то $|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon$ для любых $x \in K$, поэтому $|f(x) - f_0(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ для любых $f \in N(f_0; K; \varepsilon)$ и $x \in U$. Следовательно, отображение $(x, f) \to f(x)$ непрерывно на прямом произведении $G \times X_2(G)$ (по совокупности переменных x и f).

Пусть $\psi \in L^1(G)$ и $f_0 \in X_2(G)$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\varphi \in L^1(G)$ с компактным носителем K, такая, что $\|\psi - \varphi\|_1 < \frac{\varepsilon}{4}$. Возьмем $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|_1}$. Тогда для любого $f_0 \in X_2(G)$ и $f \in N(f_0; -K; \varepsilon')$ получаем, что

$$\hat{\psi}(f) - \hat{\psi}(f_0) = \int\limits_G (f(-x) - f_0(-x))\, \psi(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_G (f(-x) - f_0(-x))\, (\psi(x) - \varphi(x))\, dx + \int\limits_K (f(-x) - f_0(-x))\, \varphi(x)\, dx,$$

поэтому

$$|\hat{\psi}(f) - \hat{\psi}(f_0)| \le 2\|\psi - \varphi\|_1 + \varepsilon' \|\varphi\|_1 < 2\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|_1} \|\varphi\|_1 = \varepsilon.$$

Таким образом, $|\hat{\psi}(f) - \hat{\psi}(f_0)| < \varepsilon$ для любых $f \in N(f_0; -K; \varepsilon')$, откуда следует непрерывность преобразования Фурье–Френеля на $X_2(G)$. Полезно отметить, что в приведенном доказательстве компакт K зависит от ε и функции ψ, но не зависит от выбора характера второй степени f_0, поэтому $\hat{\psi}$ является равномерно непрерывной функцией на $X_2(G)$.

Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ и $\psi \in L^1(G)$ существует компакт $K \subset G$, такой, что $|\hat{\psi}(f_1) - \hat{\psi}(f_2)| < \varepsilon$ при условии, что $f_1, f_2 \in X_2(G)$ и $|f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon'$ для любых $x \in -K$.

Если функция $\psi \in L^1(G)$, то ее преобразование Фурье–Френеля $\hat{\psi} \in C(X_2(G))$ и для любого $f \in X_2(G)$

$$|\hat{\psi}(f)| = \left| \int\limits_G f(-x)\, \psi(x)\, dx \right| \le \int\limits_G |\psi(x)|\, dx = \|\psi\|_1,$$

поэтому для спектрального радиуса второго порядка

$$r_2(\psi) = \|\hat{\psi}\|_{2,\infty} = \sup\left\{|\hat{\psi}(f)| : f \in X_2(G)\right\}$$

справедливо неравенство $r_2(\psi) \le \|\psi\|_1$. Кроме того, очевидно, что

$$r_2(\psi) \ge r(\psi) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\psi^{*n}\|_1}.$$

Предположим, что супремум реализуется на некотором характере второй степени f_0 : $r_2(\psi) = |\hat{\psi}(f_0)|$. Тогда равенство $r_2(\psi) = \|\psi\|_1$ возможно только для вырожденных функций.

Теорема 2. *Если $\psi \in L^1(G)$ и для некоторого характера второй степени f_0 справедливо равенство $|\hat{\psi}(f_0)| = \|\psi\|_1$, то существует $a \in \mathbb{R}$, такое, что*

$$\psi(x) = e^{ia}\,\overline{f_0(-x)}\,|\psi(x)|$$

для почти всех $x \in G$.

Доказательство. Если $\psi \in L^1(G)$ и существует $f_0 \in X_2(G)$, такой, что $|\hat{\psi}(f_0)| = \|\psi\|_1$, то для некоторого $a \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\int_G f_0(-x)\,\psi(x)\,dx = e^{ia}\int_G |\psi(x)|\,dx.$$

Однако тогда для функции

$$g(x) = e^{-ia} f_0(-x)\,\psi(x)$$

справедливо равенство

$$\int_G g(x)\,dx = \int_G |g(x)|\,dx,$$

поэтому $g(x) = |g(x)| = |\psi(x)|$ для почти всех $x \in G$, т. е.

$$\psi(x) = e^{ia}\overline{f_0(-x)}\,|\psi(x)|$$

почти всюду на G.

В заключение параграфа отметим, что для любой суммируемой функции ψ существует характер $\gamma_0 \in \Gamma$, такой, что

$$|\hat{\psi}(\gamma_0)| = r(\psi) = \|\hat{\psi}\|_\infty,$$

и этот факт является простым следствием из локальной компактности группы Γ, непрерывности преобразования Фурье $\hat{\psi}$ на группе Γ и абстрактного варианта классической леммы Римана–Лебега. Для получения аналогичного утверждения применительно к преобразованию Фурье–Френеля понадобится подходящий аналог классической леммы Ван-дер-Корпута.

§ 11. Оценка интеграла Фурье–Френеля

Рассмотрим характер второй степени f на локально компактной коммутативной группе G, изоморфной группе характеров $\Gamma = \hat{G}$, и предположим, что f на G невырожден в том смысле, что симметричный гомоморфизм ρ, ассоциированный с f, осуществляет изоморфизм G на Γ. Модуль изоморфизма ρ есть число $|\rho| = \frac{d(\rho x)}{dx}$, заданное формулой

$$\int_\Gamma \psi(\gamma)\,d\gamma = |\rho|\int_G \psi(\rho x)\,dx,\ \ \psi \in L^1(\Gamma).$$

Если $\rho^{-1} : \Gamma \to G$ — изоморфизм, обратный ρ, то $|\rho^{-1}| = |\rho|^{-1}$.

По крайней мере формально, преобразование Фурье для характера второй степени f есть

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G <-x,\gamma> f(x)\,dx = \int_G <-x-t,\gamma> f(x+t)\,dx =$$

$$= <-t,\gamma> f(t)\int_G <-x,\gamma-\rho t> f(x)\,dx =$$

$$= <-t,\gamma> f(t)\,\hat{f}(\gamma-\rho t),$$

откуда для любого $\gamma \in \Gamma$ и $t = \rho^{-1}\gamma$ имеем

$$\hat{f}(\gamma) = \hat{f}(0) <-t,\rho t> f(t) =$$

$$= \hat{f}(0)\,\frac{f(0)}{f(-t)f(t)}\,f(t) = \hat{f}(0)\,\overline{f(-t)},$$

и, значит,

$$\hat{f}(\gamma) = \hat{f}(0)\,\overline{f(-\rho^{-1}\gamma)}. \tag{1}$$

Следовательно,

$$f(x) = \int_\Gamma < x,\gamma > \hat{f}(\gamma)\,d\gamma = \hat{f}(0)\int_\Gamma < x,\gamma > \overline{f(-\rho^{-1}\gamma)}\,d\gamma =$$

$$= \hat{f}(0)|\rho^{-1}|^{-1}\int_G < x,\rho t > \overline{f(-t)}\,dt =$$

$$= \hat{f}(0)|\rho|\int_G < t,\rho x > \overline{f(-t)}\,dt =$$

$$= \hat{f}(0)\ |\rho|\int_G < -t,-\rho x > \overline{f(-t)}\,dt = \hat{f}(0)\ |\rho|\ \overline{\hat{f}(-\rho x)},$$

т.е.

$$f(x) = \hat{f}(0)\,|\rho|\,\overline{\hat{f}(-\rho x)}.$$

В частности, если $x = 0$, то

$$1 = f(0) = \hat{f}(0)\,|\rho|\,\overline{\hat{f}(0)} = |\rho|\,|\hat{f}(0)|^2,$$

поэтому

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{|\rho|}}\tau(f),$$

где $|\tau(f)| = 1$. Однако тогда соотношение (1) можно записать в виде

$$\hat{f}(\gamma) = \frac{\tau(f)}{\sqrt{|\rho|}}\,\overline{f(-\rho^{-1}\gamma)}, \tag{2}$$

что является преобразованием Фурье характера второй степени f на группе G. Необходимо отметить, что приведенные формальные вычисления преобразования Фурье для f имеют строгое обоснование в теории обобщенных функций на пространстве Шварца–Брюа $\mathfrak{L}$ [8, 26].

Пусть W — окрестность нуля в группе Γ и φ_W — непрерывная функция на Γ, такая, что $\varphi_W(\gamma) \geq 0$ для любых $\gamma \in \Gamma$, $\varphi_W(\gamma) = 0$ для $\gamma \notin W$ и $\int_\Gamma \varphi_W(\gamma)\,d\gamma = 1$.

Преобразование Фурье–Планшереля для функции φ_W

$$t_W(x) = \int_\Gamma < x,\gamma > \varphi_W(\gamma)\,d\gamma = \int_W < x,\gamma > \varphi_W(\gamma)\,d\gamma.$$

Очевидно, что t_W — непрерывная функция на G и

$$|t_W(x)| = \left|\int_W < x,\gamma > \varphi_W(\gamma)\,d\gamma\right| \leq \int_W \varphi_W(\gamma)\,d\gamma = 1,$$

поэтому $|t_W(x)| \leq 1$ для любых $x \in G$.

Если

$$\tilde{\varphi}_W(\gamma) = \overline{\varphi_W(-\gamma)} = \varphi_W(-\gamma),$$

то $\varphi_W * \tilde{\varphi}_W$ — суммируемая положительно определенная функция на Γ, поэтому ее преобразование Фурье

$$\varphi_W * \tilde{\varphi}_W = |t_W|^2 \in L^1(G).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и K — компактное подмножество в группе G, существует окрестность W_0 нулевого элемента в группе Γ, такая, что $|< x,\alpha > -1| < \varepsilon$ для любых $x \in K$ и $\alpha \in W_0$. Однако тогда для любой окрестности $W \subset W_0$ получаем, что для всех $x \in K$

$$|t_W(x) - 1| = \left|\int_\Gamma (< x,\alpha > -1)\varphi_W(\alpha)\,d\alpha\right| =$$

$$= \left|\int_W (< x,\alpha > -1)\varphi_W(\alpha)\,d\alpha\right| \leq$$

$$\leq \varepsilon\int_W \varphi_W(\alpha)\,d\alpha = \varepsilon.$$

В результате доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Функции t_W сходятся к функции, тождественно равной единице, равномерно на каждом компакте $K \subset G$ (предел берется по направленному по включению семейству окрестностей нуля в группе Γ).*

Лемма 2. *Для любых функций $\psi \in L^1(G)$ и $f \in X_2(G)$ справедливо равенство*

$$\lim_{(W)} \int_G f(-x)\ |t_w(x)|^2\ \psi(x)\,dx = \hat{\psi}(f).$$

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $\psi \in L^1(G)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K \subset G$, такой, что $\int\limits_{G\setminus K} |\psi(x)|\,dx < \varepsilon$. Кроме того,

$$\int_G f(-x)|t_w(x)|^2\psi(x)\,dx - \hat{\psi}(f) = \int_G f(-x)\left(|t_w(x)|^2 - 1\right)\psi(x)\,dx =$$

$$= \int_K \ldots + \int_{G\setminus K} \ldots$$

и второе слагаемое при указанном выборе компакта K можно оценить как

$$\left|\int_{G\setminus K} f(-x)\left(|t_w(x)|^2 - 1\right)\psi(x)\,dx\right| \le$$

$$\le \int_{G\setminus K} (1 - |t_w(x)|^2)|\psi(x)|\,dx \le \int_{G\setminus K} |\psi(x)|\,dx < \varepsilon.$$

По лемме 1 существует окрестность W_0, такая, что для любых окрестностей нулевого элемента $W \subset W_0$ справедливо неравенство $|1 - t_w(x)| < \varepsilon$ для $x \in K$. Так как

$$1 - |t_w(x)|^2 = (1 - t_w(x)) + t_w(x)(1 - \overline{t_w(x)})$$

и $|t_w(x)| \le 1$, то

$$0 \le 1 - |t_w(x)|^2 \le 2|1 - t_w(x)| < 2\varepsilon,\ x \in K.$$

Следовательно,

$$\left|\int_K f(-x)\left(|t_w(x)|^2 - 1\right)\psi(x)\,dx\right| \le \int_K \left(1 - |t_w(x)|^2\right)|\psi(x)|\,dx \le$$

$$\le 2\varepsilon \int_K |\psi(x)|\,dx \le 2\varepsilon \int_G |\psi(x)|\,dx = 2\varepsilon\|\psi\|_1.$$

Суммируя, получаем оценку

$$\left|\int_G f(-x)|t_w(x)|^2\psi(x)\,dx - \hat{\psi}(f)\right| \le \varepsilon(1 + 2\|\psi\|_1),$$

которая доказывает лемму. Отметим также, что приведенная оценка равномерна по $f \in X_2(G)$.

Теперь рассмотрим преобразование Фурье–Френеля функции $|t_w|^2\psi$

$$\left(|t_w|^2\psi\right)^\wedge(f) = \int_G f(-x)|t_w(x)|^2\psi(x)\,dx.$$

Интеграл в правой части равенства можно записать в виде

$$\left(g * \varphi_w * \tilde{\varphi}_w * \hat{\psi}\right)(0),$$

где g — преобразование Фурье функции $f(-x)$:

$$g(\gamma) = \int_G < -x, \gamma > f(-x)\,dx = \hat{f}(-\gamma) = \frac{\tau(f)}{\sqrt{|\rho|}}\,\overline{f(\rho^{-1}\gamma)}.$$

Обозначая $h = \varphi_w * \tilde{\varphi}_w * \hat{\psi}$, получаем

$$\left(|t_w|^2\psi\right)^\wedge(f) = (g * h)(0) = \frac{\tau(f)}{\sqrt{|\rho|}} \int_\Gamma \overline{f(-\rho^{-1}\gamma)}\ h(\gamma)\ d\gamma,$$

откуда

$$\left|\left(|t_w|^2\psi\right)^\wedge(f)\right| \le \frac{1}{\sqrt{|\rho|}} \int_\Gamma |h(\gamma)|\ d\gamma = \frac{1}{\sqrt{|\rho|}}\ \|h\|_1.$$

Учитывая, что

$$\|h\|_1 = \|\varphi_w * \tilde{\varphi}_w * \hat{\psi}\|_1 \le \|\varphi_w\|_1 \, \|\tilde{\varphi}_w\|_1 \, \|\hat{\psi}\|_1 = \|\hat{\psi}\|_1,$$

имеем оценку

$$\left|(|t_w|^2\psi)^\wedge(f)\right| \le \frac{1}{\sqrt{|\rho|}}\|\hat{\psi}\|_1. \tag{3}$$

Однако произвольная функция $\psi \in L^1(G)$ не обязательно должна иметь суммируемое преобразование Фурье. Поэтому рассматриваем дополнительно функцию $\psi_1 \in L^1(\Gamma)$, для которой норма $\|\psi - \psi_1\|_1 < \varepsilon$ и $\hat{\psi}_1 \in L^1(G)$. Такую функцию ψ_1 можно взять из пространства Шварца–Брюа $\mathfrak{L}$, называемого достаточно неопределенно "пространством бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций" [8, 26]. Тогда

$$\left|\hat{\psi}(f) - \hat{\psi}_1(f)\right| = \left|\int_G f(-x)(\psi(x) - \psi_1(x))\,dx\right| \le$$

$$\le \int_G |\psi(x) - \psi_1(x)|\,dx = \|\psi - \psi_1\|_1 < \varepsilon,$$

а для функции ψ_1 справедлива оценка (3):

$$\left|(|t_w|^2\psi_1)^\wedge(f)\right| \le \frac{1}{\sqrt{|\rho|}}\|\hat{\psi}_1\|_1.$$

Следовательно,

$$\left|\hat{\psi}(f)\right| \le \left|\hat{\psi}(f) - \hat{\psi}_1(f)\right| + \left|\hat{\psi}_1(f)\right| <$$

$$< \varepsilon + \varepsilon(1 + 2\|\psi_1\|_1) + \frac{1}{\sqrt{|\rho|}}\|\hat{\psi}_1\|_1.$$

Так как

$$\|\psi_1\|_1 \le \|\psi\|_1 + \|\psi - \psi_1\|_1 < \|\psi\|_1 + \varepsilon,$$

получаем оценку

$$\left|\hat{\psi}(f)\right| < 2\varepsilon(1 + \varepsilon + \|\psi\|_1) + \frac{1}{\sqrt{|\rho|}}\|\hat{\psi}_1\|_1.$$

В результате доказана следующая теорема:

Теорема 3. *Для любой функции* $\psi \in L^1(G)$

$$\hat{\psi}(f) = \int_G f(-x)\psi(x)\,dx \longrightarrow 0, \text{ если } |\rho| \to \infty.$$

В заключение параграфа заметим, что в частном случае $G = \mathbb{R}^n$ симметричный изоморфизм ρ, ассоциированный с невырожденным характером второй степени f на $\mathbb{R}^n$, является линейным оператором и $|\rho| = |\det A|$, где A — матричное изображение оператора ρ относительно ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$.

§ 12. О лемме Римана–Лебега для преобразования Фурье–Френеля в группе $G = \mathbb{R}^n$

Рассмотрим частный случай локально компактной коммутативной группы $G = \mathbb{R}^n$. Общий вид характера

$$\gamma \in \Gamma = \mathbb{R}^n : \ \gamma(\mathbf{x}) = \exp(2\pi i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})),$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ и $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Общий вид характера второй степени $f \in X_2(\mathbb{R}^n)$

$$f(\mathbf{x}) = e^{2\pi i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}) + \pi i(\rho\mathbf{x}, \mathbf{x})}, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывный гомоморфизм, т. е. ρ есть линейный оператор A в $\mathbb{R}^n$ и $A^* = A$, причем в случае, когда ρ является изоморфизмом, модуль изоморфизма $|\rho| = |\det A|$ — модуль определителя матричного изображения для A в ортонормированном базисе. Отметим, что $\det A = k_1 k_2 \ldots k_n$, где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — собственные числа для оператора A.

Следовательно, преобразование Фурье–Френеля функции $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ имеет вид

$$\hat{\psi}(f) = \hat{\psi}(\boldsymbol{\lambda}, \rho) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}) + \pi i(A\mathbf{x}, \mathbf{x})}\,\psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \tag{4}$$

Теорема 3 утверждает, что $\hat{\psi}(f) \to 0$ при $|\rho| \to \infty$ (равномерно по $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$).

Далее будем оперировать не модулем $|\rho|$ симметричного изоморфизма ρ, а его нормой

$$\|\rho\| = \|A\| = \max(|k_1|, |k_2|, ..., |k_n|),$$

при этом будем предполагать, что f невырожден.

Пусть S — ортогональное преобразование в $\mathbb{R}^n$. Тогда $(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (A'\mathbf{x}', \mathbf{x}')$, где $A' = SAS^{-1}$ и $\mathbf{x}' = S\mathbf{x}$. Кроме того, $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}) = (\boldsymbol{\lambda}', \mathbf{x}')$, где $\boldsymbol{\lambda}' = S\boldsymbol{\lambda}$ и $\|\boldsymbol{\lambda}'\| = \|\boldsymbol{\lambda}\| = \sqrt{(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda})}$. Наконец, обозначим

$$\psi_1(\mathbf{x}') = \psi(S^{-1}\mathbf{x}') = \psi(\mathbf{x}).$$

Следовательно, соотношение (4) можно записать в виде

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{\lambda}, \rho) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(\boldsymbol{\lambda}', \mathbf{x}') + \pi i(A'\mathbf{x}', \mathbf{x}')} \psi_1(\mathbf{x}')\, d\mathbf{x}',$$

где $d\mathbf{x}' = d\mathbf{x}$, так как мера Лебега инвариантна относительно ортогональных преобразований. Ортогональное преобразование выберем так, чтобы в стандартном базисе матричное изображение для A' стало диагональной матрицей.

Таким образом,

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{\lambda}, \rho) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{j=1}^{n} e^{-2\pi i \lambda'_j x_j + \pi i k_j x_j^2} \right) \psi(x_1, x_2, ..., x_n)\, d\mathbf{x}.$$

Известно, что $L^1(\mathbb{R}^n) = \bigotimes^n L^1(\mathbb{R})$ — тензорное произведение n экземпляров пространства $L^1(\mathbb{R})$ относительно наибольшей кросс-нормы [24]. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует функция

$$u = \sum_{r=1}^{N} \varphi_{r1} \otimes \varphi_{r2} \otimes \cdots \otimes \varphi_{rn} \tag{5}$$

из алгебраического тензорного произведения, такая, что

$$\|\psi_1 - u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon.$$

Однако тогда справедливо неравенство

$$\left| \hat{\psi}(\boldsymbol{\lambda}, \rho) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{j=1}^{n} e^{-2\pi i \lambda'_j x_j + \pi i k_j x_j^2} \right) u(x_1, x_2, ..., x_n)\, d\mathbf{x} \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\psi_1(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} = \|\psi_1 - u\|_1 < \varepsilon.$$

Таким образом, если доказать, что для каждого слагаемого в (5) соответствующий интеграл стремится к нулю, то

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{\lambda}, \rho) \to 0 \text{ при } \sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 + k_1^2 + \cdots + k_n^2} \to \infty.$$

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \in L^1(\mathbb{R})$. Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(\boldsymbol{\lambda}', \mathbf{x}) + \pi i(A'\mathbf{x}, \mathbf{x})} (\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_n)(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \lambda'_j x_j + \pi i k_j x_j^2} \varphi_j(x_j)\, dx_j \right) = \prod_{j=1}^{n} I_j.$$

Очевидно, что для каждого $j = 1, 2, ..., n$ справедлива оценка $|I_j| \leq \|\varphi_j\|_1$, поэтому в произведении $I = I_1 I_2 ... I_n$ все сомножители ограничены (равномерно по (λ'_j, k_j)), а при условии $\sqrt{\|\boldsymbol{\lambda}\|^2 + \|\mathbf{k}\|^2} \to \infty$ хотя бы одна из величин $\sqrt{{\lambda'_j}^2 + k_j^2}$ становится сколь угодно большой.

Однако в гл. 2 была доказана лемма 1, утверждающая, что для любой функции $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \lambda x + \pi i k x^2} \varphi(x)\, dx \to 0 \text{ при } \sqrt{\lambda^2 + k^2} \to \infty,$$

поэтому для любых $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \in L^1(\mathbb{R})$

$$I \to 0, \text{ если } \sqrt{\|\boldsymbol{\lambda}\|^2 + \|\mathbf{k}\|^2} \to \infty.$$

В результате доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Для любой функции $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и характеров второй степени*

$$f(x) = e^{2\pi i(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{x})+\pi i(A\mathbf{x},\mathbf{x})}$$

преобразование Фурье–Френеля

$$\hat{\psi}(f) = \hat{\psi}(\boldsymbol{\lambda}, \rho) \to 0, \text{ если } \|\boldsymbol{\lambda}\| + \|\rho\| \to \infty.$$

Как отмечалось ранее, при доказательстве теоремы 4 для $G = \mathbb{R}^n$, $n > 1$, мы использовали соответствующее утверждение для $G = \mathbb{R}^1$, доказанное в гл. 2 методом, близким к доказательству лемм типа лемм Ван-дер-Корпута. Здесь мы приводим доказательство теоремы 4 для частного случая $n = 1$.

Пусть ψ — суммируемая функция на прямой $\mathbb{R}$ и

$$f(x) = \exp(2\pi i\lambda x + \pi i k x^2)$$

есть характер второй степени общего вида. Тогда непрерывный гомоморфизм ρ, ассоциированный с f, определяется числом k и имеет вид $\rho(x) = kx$, $x \in \mathbb{R}$. Если $k \neq 0$, то характер второй степени f невырожден, а модуль изоморфизма ρ

$$|\rho| = |k|.$$

Из теоремы 3 получаем, что

$$\hat{\psi}(f) = \hat{\psi}(\lambda, k) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\lambda x+\pi i k x^2}\psi(x)\,dx \to 0,$$

если $|k| \to \infty$ (равномерно по $\lambda \in \mathbb{R}$), поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $K > 0$, такое, что $|\hat{\psi}(f)| < \varepsilon$, если $|k| > K$.

Теперь рассмотрим случай, когда $|k| \leq |K|$, и выберем достаточно большое число $A > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\int\limits_{|x|>A} |\psi(x)|\,dx < \varepsilon,$$

и, следовательно,

$$\left|\int\limits_{|x|>A} e^{-2\pi i\lambda x+\pi i k x^2}\psi(x)\,dx\right| \leq \int\limits_{|x|>A} |\psi(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Как функция двух переменных (k, x) экспонента $\exp(\pi i k x^2)$ равномерно непрерывна на прямоугольнике $[-K, K]\times[-A, A]$, поэтому существует $\delta > 0$, такое, что $|e^{\pi i k' x^2} - e^{\pi i k x^2}| < \varepsilon$ для любых $x \in [-A, A]$ при условии, что $k, k' \in [-K, K]$ и $|k - k'| < \delta$. Однако тогда существует конечный набор точек $k_1, k_2, ..., k_s \in [-K, K]$, обладающий следующим свойством: для любого $k \in [-K, K]$ существует k_j из этого набора, такое, что $|k - k_j| < \delta$, поэтому для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\left|\int\limits_{-A}^{A} e^{-2\pi i\lambda x+\pi i k x^2}\psi(x)\,dx - \int\limits_{-A}^{A} e^{-2\pi i\lambda x+\pi i k_j x^2}\psi(x)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{-A}^{A} \left|e^{\pi i k x^2} - e^{\pi i k_j x^2}\right| |\psi(x)|\,dx \leq \varepsilon \int\limits_{-A}^{A} |\psi(x)|\,dx \leq \varepsilon\,\|\psi\|_1,$$

и, значит,

$$|\hat{\psi}(f)| < \varepsilon(1 + \|\psi\|_1) + \left|\int\limits_{-A}^{A} e^{-2\pi i\lambda x+\pi i k_j x^2}\psi(x)\,dx\right|.$$

Однако по лемме Римана–Лебега

$$\int\limits_{-A}^{A} e^{-2\pi i\lambda x+\pi i k_j x^2}\psi(x)\,dx \to 0$$

при $\lambda \to \infty$, поэтому существует $N_j = N(\varepsilon, k_j) > 0$, такое, что при $|\lambda| > N_j$

$$\left|\int\limits_{-A}^{A} e^{-2\pi i\lambda x+\pi i k_j x^2}\psi(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

откуда получаем оценку

$$|\hat{\psi}(f)| < \varepsilon(2 + \|\psi\|_1), \text{ если } |k - k_j| < \delta.$$

Теперь нам остается выбрать $N = \max(N_1, N_2, ..., N_s)$. В результате при $|\lambda| > N$ и для любых $k \in [-K, K]$ выполняется неравенство

$$|\hat{\psi}(f)| < \varepsilon(2 + \|\psi\|_1).$$

Таким образом, доказано, что

$$\hat{\psi}(f) = \hat{\psi}(k, \lambda) \to 0$$

при $|\lambda| \to \infty$ (равномерно по $k \in [-K, K]$). Объединяя оба случая, получаем теорему 4 для $n = 1$.

§ 13. Преобразование Фурье–Френеля в группах $\mathbb{Z}^q$ и $\mathbb{T}^r$

Пусть $G = \mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел. Тогда группа характеров $\Gamma = \hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$. Общий вид $f \in X_2(\mathbb{Z})$ есть

$$f(n) = e^{2\pi i n\alpha + \pi i n^2 \theta},$$

где $(e^{2\pi i\alpha}, e^{\pi i\theta}) \in \mathbb{T}^2$, при этом пары $(e^{2\pi i\alpha}, e^{\pi i\theta})$ и $(-e^{2\pi i\alpha}, -e^{\pi i\theta})$ определяют один и тот же характер второй степени. Другими словами, мультипликативная группа характеров второй степени $X_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{T}^2/\{\pm(1,1)\}$.

Для $\psi \in L^1(G) = l^1(\mathbb{Z})$ и $f \in X_2(\mathbb{Z})$ преобразование Фурье–Френеля имеет вид

$$\hat{\psi}(f) = \hat{\psi}(\alpha, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i n\alpha + \pi i n^2 \theta} \psi(n),$$

где ряд в правой части равенства сходится абсолютно и равномерно по (α, θ), поэтому $\hat{\psi}(f)$ — непрерывная функция на компактной связной группе $X_2(\mathbb{Z})$.

Отметим, что для любого $f \in X_2(\mathbb{Z})$ гомоморфизм $\rho = \rho(f) : \mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ имеет вид $\rho(m) = e^{2\pi i m\theta}$, $m \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\rho(\mathbb{Z})$ является либо конечной подгруппой в $\mathbb{T}$, если θ — рациональное число, либо $\rho(\mathbb{Z})$ плотно в $\mathbb{T}$, если θ — иррациональное число, причем во втором случае последовательность $\{\rho(m)\}_{m=-\infty}^{+\infty}$ равномерно распределена на окружности $\mathbb{T}$.

Теперь возьмем группу $G = \mathbb{Z}^q$, для которой группа характеров $\Gamma = \mathbb{T}^q$. Пусть $\mathbf{e} = (e_1, e_2, ..., e_q)$ — стандартный базис в $\mathbb{Z}^q$ (над кольцом $\mathbb{Z}$). Тогда для $\mathbf{m} = (m_1, m_2, ..., m_q) \in \mathbb{Z}^q$ имеем разложение $\mathbf{m} = m_1 e_1 + m_2 e_2 + \cdots + m_q e_q$.

Если $f \in X_2(\mathbb{Z}^q)$ и $\rho = \rho(f)$ есть гомоморфизм, ассоциированный с f, то

$$\rho(\mathbf{m}) = \prod_{k=1}^{q} (\rho(e_k))^{m_k},$$

где $\rho(e_k) = (z_{1k}, z_{2k}, ..., z_{qk}) \in \mathbb{T}^q$, $1 \le k \le q$. Легко убедиться в том, что

$$< \mathbf{n}, \rho\mathbf{m} > = e^{2\pi i(\mathbf{n}, A\mathbf{m})}, \ \mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^q,$$

и в матричном виде

$$(\mathbf{n}, A\mathbf{m}) = (n_1\ n_2 \cdots n_q) \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \dots & \theta_{1q} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \dots & \theta_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{q1} & \theta_{q2} & \dots & \theta_{qq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_q \end{pmatrix},$$

где θ_{rk} определяется соотношением $z_{rk} = e^{2\pi i\theta_{rk}}$, $1 \le r, k \le q$. Кроме того, условие $\rho^* = \rho$ означает, что матрица (θ_{rk}) симметрическая.

Таким образом, характер второй степени f на группе $\mathbb{Z}^q$ определяется вектором $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_q)$ и симметрической матрицей $A = (\theta_{rk})_{1 \le r,k \le q}$, а для $\psi \in l^1(\mathbb{Z}^q)$ преобразование Фурье–Френеля имеет вид

$$\hat{\psi}(f) = \hat{\psi}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_q; \theta_{11}, \theta_{12}, ..., \theta_{qq}) = \\ = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^q} e^{-2\pi i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{n}) + \pi i(A\mathbf{n}, \mathbf{n})} \psi(\mathbf{n}),$$

где ряд в правой части равенства абсолютно и равномерно по $(\boldsymbol{\lambda}, A)$ сходится, и, значит, $\hat{\psi}(f)$ есть непрерывная функция на компактной группе $X_2(\mathbb{Z}^q)$. Если же $G = \mathbb{T}^r$ — r-мерный тор, то $\Gamma = \mathbb{Z}^r$ —дискретная группа, поэтому для любого $f \in X_2(\mathbb{T}^r)$ получаем

$$\rho(f)\,(\mathbb{T}^r) = \{0\} \subset \mathbb{Z}^r.$$

Следовательно, на связной компактной группе $\mathbb{T}^r$ не существует нетривиальных характеров второй степени, т. е.

$$X_2(\mathbb{T}^r) = \Gamma,$$

и, значит, преобразование Фурье–Френеля является обычным преобразованием Фурье на $\mathbb{T}^r$.

§ 14. О лемме Римана–Лебега для преобразования Фурье–Френеля в элементарной группе $\mathbb{R}^p \oplus \mathbb{Z}^q \oplus \mathbb{T}^r \oplus F$

Известно [8, 9, 25], что каждая локально компактная коммутативная группа есть объединение возрастающего фильтрующегося семейства открытых подгрупп, порожденных компактными окрестностями нуля (нейтрального элемента в группе). Если же группа G порождена компактной окрестностью нуля, то она представляется в виде прямого произведения групп $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{Z}^q$ при некоторых p и q и некоторой компактной группы H : $G = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{Z}^q \oplus H$. Наконец, для каждой компактной коммутативной группы H существует убывающее фильтрующееся семейство замкнутых подгрупп H_α, такое, что H отождествляется с проективным пределом фактор-групп H/H_α, а каждая факторгруппа H/H_α изоморфна некоторой группе $\mathbb{T}^r \oplus F$, где F — конечная группа.

В соответствии с указанными структурными свойствами произвольных локально компактных коммутативных групп рассмотрим сначала случай элементарной группы.

Пусть

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4 = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{Z}^q \oplus \mathbb{T}^r \oplus F.$$

Тогда группа характеров

$$\Gamma = \hat{G} = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{T}^q \oplus \mathbb{Z}^r \oplus \hat{F}.$$

Для любого характера второй степени $f \in X_2(G)$ ассоциированный с f непрерывный гомоморфизм $\rho = \rho(f) : G \to \Gamma$ симметричен. Считая, что группы $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{Z}^q$, $\mathbb{T}^r$ и F вложены в группу G канонически, гомоморфизм ρ можно записать в виде

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4,$$

где ρ_k, $k = 1, 2, 3, 4$, есть сужение ρ на подгруппу G_k. Кроме того, каждый гомоморфизм $\rho_k : G_k \to \Gamma$ можно представить в виде

$$\rho_k = \rho_{1k} + \rho_{2k} + \rho_{3k} + \rho_{4k},$$

где $\rho_{lk} : G_k \to \hat{G}_l$, $l = 1, 2, 3, 4$, и $\rho_{lk}^* = \rho_{kl}$.

Если G_k — связная группа, то ее образ $\rho_{lk}(G_k)$ есть связная подгруппа в $\hat{G}_l$. Поэтому в случае, когда $\hat{G}_l$ — дискретная группа, имеем $\rho_{lk}(G_k) = \{0\} \subset \hat{G}_l$, т. е. $\rho_{lk} = 0$. Следовательно, нулевыми являются гомоморфизмы

$$\rho_{31} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{Z}^r,\ \rho_{41} : \mathbb{R}^p \to \hat{F},\ \rho_{33} : \mathbb{T}^r \to \mathbb{Z}^r,\ \rho_{43} : \mathbb{T}^r \to \hat{F},$$

поэтому и сопряженные гомоморфизмы ρ_{13}, ρ_{14}, ρ_{34} также обращаются в нуль. Заметим, что каждый гомоморфизм

$$\rho_{13} : \mathbb{T}^r \to \mathbb{R}^p,\ \rho_{14} : F \to \mathbb{R}^p,\ \rho_{34} : F \to \mathbb{Z}^r$$

отображает компактную группу $\mathbb{T}^r$ или F в компактную подгруппу в $\mathbb{R}^p$ или $\mathbb{Z}^r$. Однако в $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{Z}^r$ не существует компактных подгрупп, отличных от $\{0\}$. Отсюда также следует, что

$$\rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{34} = 0.$$

Таким образом, семь из 16 гомоморфизмов ρ_{lk} обращаются в нуль, и, значит,

$$\begin{aligned}
&\rho_1 = \rho_{11} + \rho_{21} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{T}^q,\\
&\rho_2 = \rho_{12} + \rho_{22} + \rho_{32} + \rho_{42} : \mathbb{Z}^q \to \Gamma,\\
&\rho_3 = \rho_{23} : \mathbb{T}^r \to \mathbb{T}^q,\\
&\rho_4 = \rho_{24} + \rho_{44} : F \to \mathbb{T}^q \oplus \hat{F}.
\end{aligned}$$

Пусть f — произвольный характер второй степени на элементарной группе

$$G = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{Z}^q \oplus \mathbb{T}^r \oplus F.$$

Для любых $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_q) \in \mathbb{Z}^q$, $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_r) \in \mathbb{T}^r$ и $u \in F$ последовательно получаем

$$\begin{aligned}
&f(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{z}, u) =\\
&= f(\mathbf{x} + \mathbf{n} + \mathbf{z} + u) = f(\mathbf{x})\, f(\mathbf{n} + \mathbf{z} + u) < \mathbf{n} + \mathbf{z} + u, \rho\mathbf{x} > =\\
&= f(\mathbf{x}) f(\mathbf{n} + \mathbf{z} + u) < \mathbf{n}, \rho_{21}\mathbf{x} > =\\
&= f(\mathbf{x})\, f(\mathbf{n})\, f(\mathbf{z} + u) < \mathbf{z} + u, \rho\mathbf{n} > < \mathbf{n}, \rho_{21}\mathbf{x} > =\\
&= f(\mathbf{x})\, f(\mathbf{n})\, f(\mathbf{z})\, f(u) < u, \rho\mathbf{z} > < \mathbf{z}, \rho\mathbf{n} > < u, \rho\mathbf{n} > < \mathbf{n}, \rho_{21}\mathbf{x} > =\\
&= f(\mathbf{x})\, f(\mathbf{n})\, f(\mathbf{z})\, f(u) < \mathbf{z}, \rho_{32}\mathbf{n} > < u, \rho_{42}\mathbf{n} > < \mathbf{x}, \rho_{12}\mathbf{n} > =\\
&= f(\mathbf{x})\, f(\mathbf{n})\, f(\mathbf{z})\, f(u) < \mathbf{n}, \rho_{21}\mathbf{x} + \rho_{23}\mathbf{z} + \rho_{24}u > .
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(-\mathbf{x}-\mathbf{n}-\mathbf{z}-u) =$$
$$= f(-\mathbf{x})\, f(-\mathbf{n})\, f(-\mathbf{z})\, f(-u) < \mathbf{n}, \rho_{21}\mathbf{x} + \rho_{23}\mathbf{z} + \rho_{24}u > . \quad (6)$$

Теперь распространим лемму Римана–Лебега на преобразование Фурье–Френеля в элементарной группе.

Прежде всего отметим, что

$$L^1(G) = L^1(\mathbb{R}^p) \hat{\otimes} L^1(\mathbb{Z}^q) \hat{\otimes} L^1(\mathbb{T}^r) \hat{\otimes} L^1(F),$$

где тензорное произведение берется относительно наибольшей кросс-нормы. Следовательно, произвольную функцию $\psi \in L^1(G)$ можно аппроксимировать с любой точностью по L^1-норме на группе G элементами из алгебраического тензорного произведения, т. е. функциями вида

$$u = \sum_{r=1}^{N} \psi_{r1} \otimes \psi_{r2} \otimes \psi_{r3} \otimes \psi_{r4},$$

где $\psi_{r1} \in L^1(\mathbb{R}^p)$, $\psi_{r2} \in L^1(\mathbb{Z}^q)$, $\psi_{r3} \in L^1(\mathbb{T}^r)$, $\psi_{r4} \in L^1(F)$, $r = 1, 2, ..., N$. Поэтому можно считать, что функция ψ имеет вид

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{z}, u) = \psi_1(\mathbf{x})\, \psi_2(\mathbf{n})\, \psi_3(\mathbf{z})\, \psi_4(u).$$

Однако тогда из соотношения (6) следует, что преобразование Фурье–Френеля функции ψ имеет вид

$$\hat{\psi}(f) = \int_G f(-\mathbf{x})\, \psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} =$$

$$= \int_{\mathbb{T}^r} \int_F (f(-\mathbf{z})\, \psi_3(\mathbf{z}))\, (f(-u)\, \psi_4(u)) \left(\int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{Z}^q} (f(-\mathbf{x})\, \psi_1(\mathbf{x})) \times \right.$$

$$\left. \times\, (f(-\mathbf{n})\, \psi_2(\mathbf{n})) < \mathbf{x}, \rho_{12}(\mathbf{n}) > < \mathbf{n}, \rho_{23}(\mathbf{z}) + \rho_{24}(u) > \, d\mathbf{x}\, d\mathbf{n} \right) d\mathbf{z}\, du.$$

Обозначим I внутренний интеграл по подгруппе $\mathbb{R}^p \oplus \mathbb{Z}^q$. В этом интеграле интегрирование по подгруппе $\mathbb{Z}^q$ является на самом деле суммированием, причем

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^q} |\psi_2(\mathbf{n})| = \|\psi_2\|_{l^1(\mathbb{Z}^q)} < +\infty.$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Очевидно, что существует такое $N_0 > 0$, что

$$\sum_{||\mathbf{n}|| > N_0} |\psi_2(\mathbf{n})| < \varepsilon,$$

поэтому

$$\left| \int_{\mathbb{R}^p} \sum_{||\mathbf{n}|| > N_0} \cdots \right| \le \int_{\mathbb{R}^p} |\psi_1(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \sum_{||\mathbf{n}|| > N_0} |\psi_2(\mathbf{n})| < \varepsilon\, \|\psi_1\|_{L^1(\mathbb{R}^p)},$$

что приводит к оценке

$$\left| \int_{\mathbb{T}^r} \int_F \int_{\mathbb{R}^p} \sum_{||\mathbf{n}|| > N_0} \cdots \right| < \varepsilon\, \|\psi_1\|_1\, \|\psi_3\|_1\, \|\psi_4\|_1.$$

Оценим теперь оставшуюся часть интеграла I :

$$I_1 = \sum_{||\mathbf{n}|| \le N_0} f(-\mathbf{n})\, \psi_2(\mathbf{n})\, < \mathbf{n}, \rho_{23}(\mathbf{z}) + \rho_{24}(u) > \times$$

$$\times \left(\int_{\mathbb{R}^p} < -\mathbf{x}, -\rho_{12}(\mathbf{n}) > f(-\mathbf{x})\, \psi_1(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right).$$

Так как $\psi_1 \in L^1(\mathbb{R}^p)$, существует $R > 0$, такое, что

$$\int_{\mathbb{R}^p \setminus B} |\psi_1(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} < \varepsilon,$$

где $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : \|\mathbf{x}\| \le R\}$ — шар с центром в нуле и радиусом R. Поэтому справедлива оценка

$$\left| \sum_{||\mathbf{n}|| \le N_0} \int_{\mathbb{R}^p \setminus B} \cdots \right| \le \|\psi_2\|_1 \int_{\mathbb{R}^p \setminus B} |\psi_1(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} < \varepsilon \|\psi_2\|_1,$$

и, значит,

$$\left| \int_{\mathbb{T}^r} \int_F \sum_{||\mathbf{n}|| \le N_0} \int_{\mathbb{R}^p \setminus B} \cdots \right| < \varepsilon \|\psi_2\|_1 \|\psi_3\|_1 \|\psi_4\|_1.$$

Наконец, осталось получить оценку (равномерную по $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^q$, удовлетворяющих условию $\|\mathbf{n}\| \le N_0$) интеграла

$$J = \int\limits_B < -\mathbf{x}, -\rho_{12}(\mathbf{n}) > f(-\mathbf{x})\,\psi_1(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} =$$

$$= \int\limits_B e^{-2\pi i(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}-\rho_{12}(\mathbf{n}))+\pi i(A\mathbf{x},\mathbf{x})}\,\psi_1(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \qquad (7)$$

где $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p$ и A — линейный оператор в $\mathbb{R}^p$, соответствующий гомоморфизму $\rho_{11} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$.

Так как $\|\mathbf{n}\| \le N_0$, то $J \to 0$ при $\|A\| + \|\boldsymbol{\lambda}\| \to \infty$, что является следствием из теоремы 4. Поэтому существует $N_1 > 0$, такое, что $|J| < \varepsilon$ при $\|A\| + \|\boldsymbol{\lambda}\| > N_1$, и, следовательно,

$$\left| \int\limits_{\mathbb{T}^r} \int\limits_F \sum_{\|\mathbf{n}\| \le N_0} \int\limits_B \cdots \right| < \varepsilon \|\psi_2\|_1 \|\psi_3\|_1 \|\psi_4\|_1.$$

Если же $\|A\| + \|\boldsymbol{\lambda}\| \le N_1$, то в интеграле Фурье–Френеля $\hat{\psi}(f)$ можно в качестве внутреннего интеграла рассмотреть интеграл по подгруппе $\mathbb{T}^r$:

$$\int\limits_{\mathbb{T}^r} f(-\mathbf{z}) < \mathbf{n}, \rho_{23} z > \psi_3(\mathbf{z})\,d\mathbf{z} = \int\limits_{\mathbb{T}^r} f(-\mathbf{z}) < -\mathbf{z}, -\rho_{32}(\mathbf{n}) > \psi_3(\mathbf{z})\,d\mathbf{z}. \qquad (8)$$

Достаточно убедиться в том, что этот интеграл равномерно по $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^q$, удовлетворяющим условию $\|\mathbf{n}\| \le N_0$, можно сделать сколь угодно малым.

Действительно, на r-мерном торе $\mathbb{T}^r$ не существует характеров второй степени, отличных от плоских волн, т. е.

$$X_2(\mathbb{T}^r) = (\mathbb{T}^r)^\wedge = \mathbb{Z}^r.$$

Если для $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_r) \in \mathbb{T}^r$ положить $z_j = e^{2\pi i t_j}$, $j = 1, 2, ..., r$, то f задается вектором $\mathbf{k} = (k_1, ..., k_r) \in \mathbb{Z}^r$:

$$f(\mathbf{z}) = e^{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{t})} = e^{2\pi i(k_1 t_1 + \cdots + k_r t_r)}.$$

Следовательно, интеграл (7) можно записать в виде

$$\frac{1}{(2\pi)^r} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cdots \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-2\pi i(\mathbf{t},\mathbf{k}-\rho_{32}(\mathbf{n}))}\,\psi_3(\mathbf{z})\,dt_1 \ldots dt_r,$$

а его стремление к нулю при $\|\mathbf{k}\| \to \infty$ (равномерно по $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^q$, удовлетворяющим условию $\|\mathbf{n}\| \le N_0$) есть следствие классической леммы Римана–Лебега для r-кратных рядов Фурье.

Наконец, необходимо отметить, что в интегралах (7) и (8) присутствуют дополнительные множители $< \mathbf{x}, \rho_{12}(\mathbf{n}) >$ и $< \mathbf{z}, \rho_{32}(\mathbf{n}) >$ соответственно, поэтому $\hat{\psi}(f) \to 0$ при фиксированных гомоморфизмах ρ_{12} и ρ_{32} или равномерно на множестве характеров второй степени f с ограниченными (по норме) гомоморфизмами ρ_{12} и ρ_{32}.

В результате получаем, что для любой суммируемой функции ψ на элементарной группе G

$$\hat{\psi}(f) = \int\limits_G f(-x)\,\psi(x)\,dx \to 0,$$

если:

1) $\|A\| \to \infty$, и тогда сходимость равномерна по всевозможным изменениям параметров, определяющих характер второй степени $f \in X_2(G)$;

2) $\|\boldsymbol{\lambda}\| + \|A\| \to \infty$, и сходимость равномерна по всевозможным изменениям параметров, но при фиксированном гомоморфизме $\rho_{12} : \mathbb{Z}^q \to \mathbb{R}^p$ или по ограниченной по норме совокупности гомоморфизмов ρ_{12};

3) $\|\mathbf{k}\| \to \infty$, и сходимость равномерна по всевозможным изменениям параметров, определяющих f, но при фиксированном гомоморфизме $\rho_{32} : \mathbb{Z}^q \to \mathbb{T}^r$, или более общо, на ограниченной по норме совокупности гомоморфизмов ρ_{32}.

Таким образом, доказан следующий вариант леммы Римана–Лебега для преобразования Фурье–Френеля на элементарной группе.

Теорема 5. *Для любой суммируемой функции ψ на элементарной группе $G = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{Z}^q \oplus \mathbb{T}^r \oplus F$ и любого характера второй степени f на группе G преобразование Фурье–Френеля*

$$\hat{\psi}(f) = \int_G f(-x)\,\psi(x)\,dx \to 0,$$

если $\|A\| + \|\boldsymbol{\lambda}\| + \|\mathbf{k}\| \to \infty$, и сходимость равномерна на ограниченном по норме множестве симметричных гомоморфизмов ρ_{12} и ρ_{32}.

Заметим, что ограничение на множестве изменения гомоморфизмов ρ_{12} и ρ_{32} невозможно снять без нарушения равномерной сходимости для преобразования Фурье–Френеля, как следует из приводимых примеров.

Пусть ψ_1 — характеристическая функция некоторого шара $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : \|\mathbf{x}\| \le R\}$. Тогда при $A = 0$ интеграл (7) имеет вид

$$J = \int_B e^{-2\pi i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda} - \rho_{12}(\mathbf{n}))}\,d\mathbf{x} =$$

$$= 2\pi\,(\|\boldsymbol{\lambda} - \rho_{12}(\mathbf{n})\|)^{-\frac{p-2}{2}} \int_0^R J_{\frac{p-2}{2}}\,(2\pi r\|\boldsymbol{\lambda} - \rho_{12}(\mathbf{n})\|)^{\frac{p}{2}}\,r\,dr.$$

Если $p > 2$, то $J \to 0$ при $\|\boldsymbol{\lambda}\| \to \infty$, однако для любого (сколь угодно большого по норме) вектора $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p$ и любого ненулевого $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^q$ существует гомоморфизм $\rho_{12} : \mathbb{Z}^q \to \mathbb{R}^p$, для которого $\|\boldsymbol{\lambda} - \rho_{12}(\mathbf{n})\| < 1$. Если же, например, $p = 1$, то для $\lambda - \rho_{12}(n) \ne 0$ получаем, что

$$J = \int_{-R}^{R} e^{-2\pi i x(\lambda - \rho_{12}(n))}\,dx = \frac{\sin\,(2\pi R(\lambda - \rho_{12}(n)))}{\pi(\lambda - \rho_{12}(n))},$$

и легко видеть, что $J \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$, однако равномерная на множестве всевозможных симметричных гомоморфизмов ρ_{12} сходимость отсутствует.

В заключение параграфа рассмотрим случай, когда элементарная группа G имеет вид

$$G = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{T}^r \oplus F,$$

где F — конечная группа. Тогда для любого характера второй степени $f \in X_2(G)$ и $(\mathbf{x}, \mathbf{z}, u) = \mathbf{x} + \mathbf{z} + u \in G$ соотношение (6) имеет вид

$$f(-\mathbf{x} - \mathbf{z} - u) = f(-\mathbf{x})\,f(-\mathbf{z})\,f(-u),$$

поэтому справедлив следующий вариант леммы Римана–Лебега.

Теорема 6. *Для любой суммируемой функции ψ на элементарной группе $G = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{T}^r \oplus F$ и любого характера второй степени f на группе G преобразование Фурье–Френеля*

$$\hat{\psi}(f) = \int_G f(-x)\,\psi(x)\,dx \to 0,$$

если $\|A\| + \|\boldsymbol{\lambda}\| + \|\mathbf{k}\| \to \infty$.

§ 15. Преобразование Фурье–Френеля в компактной группе

Пусть G — компактная коммутативная группа. Рассмотрим компоненту G_0 для нейтрального элемента $0 \in G$. Другими словами, G_0 — наибольшее связное подмножество в группе G, содержащее нейтральный элемент, G_0 — замкнутое подмножество, что вытекает из следующей простой леммы.

Лемма 3. *Если E — связное подмножество в G, то его замыкание $\overline{E}$ также связно.*

Доказательство. Пусть E — связное подмножество в группе G, U_1 и U_2 — открытые подмножества в G, $V_1 = U_1 \cap \overline{E}$, $V_2 = U_2 \cap \overline{E}$. Считаем, что $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ и $V_1 \cup V_2 = \overline{E}$.

Пусть $V_1' = U_1 \cap E$ и $V_2' = U_2 \cap E$. Тогда $V_1' \cup V_2' = (V_1 \cup V_2) \cap E = E$ и $V_1' \cap V_2' \subset V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Следовательно, $V_1' \cup V_2' = E$ и $V_1' \cap V_2' = \emptyset$. Однако тогда из связности E вытекает, что $V_1' = \emptyset$ или $V_2' = \emptyset$.

Предположим, что $V_1' = \emptyset$, и рассмотрим множество

$$V_1 = V_1' \cup (U_1 \cap (\overline{E} \setminus E)) = U_1 \cap (\overline{E} \setminus E).$$

Если $V_1 \ne \emptyset$, то существует $x_0 \in V_1 = U_1 \cup (\overline{E} \setminus E)$. Отсюда следует, что x_0 — внутренняя точка для открытого множества U_1, и, значит, существует ее окрестность $W \subset U_1$. Однако $x_0 \in \overline{E} \setminus E$, поэтому найдется точка $x_1 \in E \cap W$. Это приводит к противоречию, так как $E \cap W \subset E \cap U_1 = V_1' = \emptyset$. Следовательно, $V_1 = \emptyset$, что доказывает лемму.

Таким образом, установлено, что G_0 есть замкнутое подмножество. Кроме того, для любого $x \in G_0$ множество $x - G_0 = \{x - t : t \in G_0\}$ связно и $(x - G_0) \cap G_0 \neq \emptyset$, поэтому $x - G_0 \subset G_0$ и, значит, G_0 является подгруппой группы G. Следовательно, компонента G_0 — связная замкнутая подгруппа группы G и G/G_0 есть вполне несвязная компактная группа.

Рассмотрим произвольный характер второй степени f на компактной группе G. Пусть $\rho : G \to \hat{G}$ — непрерывный гомоморфизм, ассоциированный с f. Так как G_0 — связная подгруппа, а $\hat{G}$ — дискретная группа, имеем $\rho(G_0) = \{0\} \subset \hat{G}$, поэтому ρ принимает постоянные значения на каждом классе смежности $\dot{x} = x + G_0$, $x \in G$, и, значит, его можно рассматривать как непрерывный гомоморфизм $\rho : G/G_0 \to \hat{G}$.

Если $x_0 \in G_0$ и $x \in G$, то

$$f(x_0 + x) = f(x_0)\, f(x) < x, \rho x_0 > = \; f(x_0)\, f(x),$$

так как ρ аннулирует G_0. В частности, справедливо равенство

$$f(x_0 + x_1) = f(x_0)\, f(x_1)$$

для любых $x_0, x_1 \in G_0$, т. е. сужение f на подгруппу G_0 является характером $\gamma_0 \in \hat{G}_0 : f(x) \;\; = < x, \gamma_0 >$, $x \in G_0$. Характер γ_0 можно продолжить до непрерывного характера на G.

Рассмотрим какое-нибудь его продолжение, которое снова обозначим через γ_0. Определим функцию $f_0 : G \to \mathbb{T}$ формулой

$$f(x) = < x, \gamma_0 > f_0(x), \; x \in G.$$

Легко убедиться в том, что f_0 есть характер второй степени на группе G, а соответствующий непрерывный гомоморфизм совпадает с гомоморфизмом ρ. Кроме того, $f_0 = 1$ на G_0, и, значит, f_0 принимает постоянное значение на каждом классе смежности $\dot{x} = x + G_0$, $x \in G$.

Аннулятор ${G_0}^{\perp} = \{\gamma \in \Gamma = \hat{G} : < x, \gamma > \; = 1$ для любого $x \in G_0\}$ есть подгруппа в группе Γ, которую можно отождествить с группой характеров на группе G/G_0:

$$(G/G_0)^{\wedge} = {G_0}^{\perp}, \text{ при этом } \Gamma/{G_0}^{\perp} = {G_0}^{\wedge}.$$

Наконец, f_0 (как функция на классах смежности) является характером второй степени на фактор-группе G/G_0, а соответствующий характеру f_0 непрерывный гомоморфизм совпадает с гомоморфизмом ρ, если последний трактовать как отображение фактор-группы G/G_0 в ее группу характеров $G^{\perp}$. Кроме того, на компактных группах G, G_0 и G/G_0 рассматриваются согласованные (например, нормированные на единицу) меры Хаара, поэтому для любой непрерывной комплекснозначной функции φ на группе G справедливо равенство

$$\int_G \varphi(x)\, dm_G(x) = \int_{G/G_0} \left(\int_{G_0} \varphi(x + t)\, dm_{G_0}(t) \right) dm_{G/G_0}(\dot{x}).$$

Следовательно, для любой функции $\psi \in C(G)$ (и далее для любой функции $\psi \in L^1(G)$) преобразование Фурье–Френеля

$$\hat{\psi}(f) = \int_G f(-x)\, \psi(x)\, dx =$$

$$= \int_{G/G_0} f_0(-\dot{x}) \left(\int_{G_0} < -x - t, \gamma_0 > \psi(x + t)\, dt \right) d\dot{x}. \qquad (9)$$

Если группа G разлагается в прямую сумму $G_0 \oplus (G/G_0)$, то

$$L^1(G) = L^1(G_0) \hat{\oplus} L^1(G/G_0),$$

поэтому любую функцию $\psi \in L^1(G)$ можно с любой точностью по L^1-норме аппроксимировать функциями из алгебраического тензорного произведения, и, значит, вопрос о стремлении к нулю преобразования Фурье–Френеля $\hat{\psi}(f)$ сводится к аналогичному вопросу для простых функций

$$\psi = \psi_1 \otimes \psi_2, \; \psi_1 \in L^1(G_0), \; \psi_2 \in L^1(G/G_0).$$

В этом случае каждый элемент $x \in G$ имеет вид $x = (t, \dot{x}) = t + \dot{x}$, а $\psi(x) = \psi_1(t)\, \psi_2(\dot{x})$, поэтому соотношение (9) можно записать в виде

$$\hat{\psi}(f) = \hat{\psi}_1(\gamma_0)\, \hat{\psi}_2(f_1),$$

где γ_0 и f_1 есть сужения характера второй степени f на подгруппы G_0 и G/G_0 соответственно. Здесь $\hat{\psi}_1$ есть обычное преобразование Фурье на группе G_0, поэтому утверждение, что $\hat{\psi}(f) \to 0$, сводится к аналогичному утверждению относительно $\hat{\psi}_2(f_1)$ — преобразования Фурье–Френеля на компактной вполне несвязной группе G/G_0.

Рассмотрим в общем случае расслоение $\pi : G \to G/G_0$, где $\pi(x) = \dot{x} = x + G_0$, и предположим, что существует непрерывное отображение $\sigma : G/G_0 \to G$, такое, что $\pi(\sigma(\dot{x})) = \dot{x}$ для любого $\dot{x} \in G/G_0$. Другими словами, предполагаем, что для данного расслоения существует глобальное сечение σ.

Пусть $C(G_0)$ и $C(G/G_0)$ — алгебры всех непрерывных функций на группах G_0 и G/G_0 соответственно. Очевидно, что функции из $C(G/G_0)$ можно рассматривать как непрерывные функции на группе G, постоянные на каждом классе смежности $\dot{x} = x + G$. В то же время функцию из $C(G_0)$ можно пересадить на группу G с помощью калибровки, заданной глобальным сечением σ.

Действительно, для любого $x \in G$ существует единственное $t \in G_0$, такое, что $x = \sigma(\dot{x}) + t$. Поэтому для любой функции $\psi_1 \in C(G_0)$ полагаем

$$\psi_{1\sigma}(x) = \psi_1(t) = \psi_1(x - \sigma(\pi(x)))$$

и функцию ψ на группе G называем простой функцией, если она имеет вид

$$\psi(x) = \psi_{1\sigma}(x)\, \psi_2(\dot{x}),$$

где $\psi_1 \in C(G_0)$ и $\psi_2 \in C(G/G_0)$.

Очевидно, что простые функции разделяют точки в группе G, поэтому алгебра всевозможных конечных сумм простых функций удовлетворяет всем условиям теоремы Стоуна–Вейерштрасса, согласно которой любую непрерывную функцию на группе G можно с любой точностью равномерно аппроксимировать конечными суммами простых функций. Так как $C(G)$ плотно по L^1-норме в пространстве $L^1(G)$, утверждение, что $\hat{\psi}(f) \to 0$ для суммируемых функций ψ, сводится к аналогичному утверждению для простых функций.

Далее мы считаем, что ψ есть простая функция на группе G. Тогда для любого $f \in X_2(G)$ получаем, что

$$\hat{\psi}(f) = \int_G f(-x)\, \psi_{1\sigma}(x)\, \psi_2(\dot{x})\, dx =$$

$$= \int_{G/G_0} f_0(-\dot{x})\, \psi_2(\dot{x}) \left(\int_{G_0} < -x - t, \gamma_0 > \psi_{1\sigma}(x + t)\, dt \right) d\dot{x}.$$

Так как

$$\psi_{1\sigma}(x + t) = \psi_1(x - \sigma(\dot{x}) + t)$$

и $x - \sigma(\dot{x}) \in G_0$, внутренний интеграл можно преобразовать, выполнив сдвиг переменной интегрирования t на элемент $x - \sigma(\dot{x})$:

$$\int_{G_0} < -x - t, \gamma_0 > \psi_{1\sigma}(x+t)\, dt =$$

$$= \int_{G_0} < -x - t, \gamma_0 > \psi_1(x - \sigma(\dot{x}) + t)\, dt =$$

$$= < -\sigma(\dot{x}), \gamma_0 > \int_{G_0} < -t, \gamma_0 > \psi_1(t)\, dt =$$

$$= < -\sigma(\dot{x}), \gamma_0 > \hat{\psi}_1(\gamma_0).$$

Следовательно,

$$\hat{\psi}(f) = \hat{\psi}_1(\gamma_0)\, \hat{\psi}_3(f_0),$$

где $\psi_3(\dot{x}) = < -\sigma(\dot{x}), \gamma_0 > \psi_2(\dot{x})$ — непрерывная функция на компактной вполне несвязной группе G/G_0, зависящая от выбора глобального сечения σ, а $\hat{\psi}_3$ есть ее преобразование Фурье–Френеля. Здесь снова основная проблема сводится к изучению асимптотических свойств преобразования Фурье–Френеля на вполне несвязных группах.

В заключение параграфа отметим, что требование существования глобального сечения для расслоения $\pi : G \to G/G_0$ можно ослабить до предположения локальной тривиальности расслоения. Тогда аналогичные рассуждения можно провести, предварительно воспользовавшись подходящим разложением единицы

на компактной группе G. Заметим также, что в общем случае исследование асимптотических свойств преобразования Фурье–Френеля, по-видимому, потребует привлечения достаточно тонкого аппарата когомологических групп.

§ 16. Характеры второй степени на проективном пределе компактных групп

Пусть G — компактная коммутативная группа. Тогда существует убывающее фильтрующееся семейство замкнутых подгрупп H_α, такое, что группа G отождествляется с проективным пределом фактор-групп $G_\alpha = G/H_\alpha$, а каждая фактор-группа G_α изоморфна некоторой группе $\mathbb{T}^r \oplus F$, где F — конечная группа [8, 9, 25].

Пусть Λ — частично упорядоченное множество (фильтр) индексов для указанного семейства замкнутых подгрупп H_α. Если $\alpha, \beta \in \Lambda$ и $\beta \succ \alpha$, то $H_\beta \subset H_\alpha$. Рассмотрим произвольный элемент $x_\beta \in G_\beta = G/H_\beta$. Тогда существует элемент $z \in G$, такой, что $x_\beta = z + H_\beta$, и можно образовать класс смежности $x_\alpha = z + H_\alpha$, который не зависит от конкретного представителя z для класса смежности x_β. Полагая $x_\alpha = \psi_{\alpha\beta}(x_\beta)$, получаем отображение $\psi_{\alpha\beta} : G_\beta \to G_\alpha$, которое является гомоморфизмом **на**, причем $\psi_{\alpha\gamma} = \psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\gamma}$, если $\alpha \prec \beta \prec \gamma$.

Группу G можно рассматривать как подмножество прямого произведения $\prod G_\alpha$. Если $x = (x_\alpha)$ — элемент группы G, то его компоненты связаны соотношениями $x_\alpha = \psi_{\alpha\beta}(x_\beta)$, $\alpha \prec \beta$. Кроме того, формула $x_\alpha = \psi_\alpha(x)$ определяет гомоморфизм $\psi_\alpha : G \to G_\alpha$, и имеем

$$\psi_\alpha(x) = \psi_{\alpha\beta}(\psi_\beta(x))$$

для $\alpha \prec \beta$.

Группа G является замкнутой подгруппой прямого произведения компактных групп G_α, снабженного стандартной топологией прямого произведения компактов. Фундаментальную систему окрестностей нейтрального элемента в группе G образуют множества, состоящие из точек этой группы, удовлетворяющих конечному числу условий $x_{\alpha_i} \in V_{\alpha_i}$, где V_{α_i} — окрестность нейтрального элемента в группе G_{α_i}. Однако топологию в группе G можно задать и при помощи окрестностей, каждая из которых определена только одним условием вида $x_\alpha \in V_\alpha$.

Рассмотрим для $\alpha \in \Lambda$ гомоморфизм $\psi_\alpha : G \to G_\alpha$ и образуем двойственное к ψ_α отображение ψ_α^*:

$$< \psi_\alpha(x), \gamma_\alpha > = < x, \psi_\alpha^*(\gamma_\alpha) >, \ x \in G.$$

Отображение ψ_α^* является изоморфизмом группы характеров $\hat{G}_\alpha$ на подгруппу

$$H_\alpha{}^\perp = \{\gamma \in \Gamma = \hat{G} : < x, \gamma > = 1 \text{ для любых } x \in H_\alpha\}.$$

Рассмотрим произвольный характер $\gamma \in \Gamma$. Из непрерывности гомоморфизма $\gamma : G \to \mathbb{T}$ следует, что для любой окрестности W нейтрального элемента $1 \in \mathbb{T}$ существуют индекс $\alpha \in \Lambda$ и окрестность V_α нейтрального элемента в группе G_α, такая, что $< x, \gamma > \in W$ для любых $x \in G$, удовлетворяющих условию $x_\alpha = \psi_\alpha(x) \in V_\alpha$, откуда для достаточно малой окрестности W получаем $< x, \gamma > = 1$ для любых $x \in H_\alpha$, т. е. $\gamma \in H_\alpha{}^\perp$, и можно выбрать $\gamma_\alpha = {\psi_\alpha^*}^{-1}(\gamma) \in \hat{G}_\alpha$. Таким образом, после отождествления $\hat{G}_\alpha = H_\alpha{}^\perp$, $\alpha \in \Lambda$, имеем следующее описание характеров на проективном пределе [5]:

$$\Gamma = \bigcup_{(\alpha)} G_\alpha^\wedge.$$

Аналогичное описание можно получить и для характеров второй степени.

Действительно, пусть f — характер второй степени на проективном пределе G и $\rho : G \to \Gamma$ есть симметричный гомоморфизм, ассоциированный с f, т. е.

$$f(x+y) = f(x)\, f(y) < x, \rho y >, \ x, y \in G.$$

Из непрерывности гомоморфизма ρ следует, что для любой окрестности W нейтрального элемента в группе характеров $\Gamma = \hat{G}$ существует окрестность V нейтрального элемента в группе G, такая, что $\rho(x) \in W$ для любого $x \in V$. Можно считать, что окрестность V задана только одним условием вида $x_\alpha \in V_\alpha$ для некоторого индекса $\alpha \in \Lambda$. Кроме того, так как G — компактная группа, ее группа характеров Γ дискретная, поэтому в

качестве окрестности W можно выбрать одноэлементное множество, состоящее из нейтрального элемента в группе Γ. При таком выборе W получаем, что $\rho(x) = 0$ для любого $x \in V$, поэтому ρ аннулирует подгруппу H_α, и, значит, $f(x+y) = f(x)\,f(y)$ для любых $x, y \in H_\alpha$, т. е. сужение f на подгруппу H_α является характером γ_0 на H_α. Сохраняя это обозначение, продолжаем характер γ_0 на всю группу G и определяем новый характер второй степени f_0 формулой

$$f(x) = < x, \gamma_0 > f_0(x),\ x \in G.$$

Очевидно, что $f_0(x) = 1$ для любого $x \in H_\alpha$, поэтому f_0 постоянен на каждом классе смежности относительно подгруппы H_α, и, следовательно, его можно рассматривать как характер второй степени на фактор-группе $G_\alpha = G/H_\alpha$.

В то же время характер $\gamma_0 \in \Gamma$ аннулирует некоторую подгруппу $H_{\alpha'}$, и его можно рассматривать как характер на фактор-группе $G_{\alpha'}$. Однако тогда для индекса $\alpha'' \in \Lambda$, такого, что $\alpha'' \succ \alpha$ и $\alpha'' \succ \alpha'$, исходный характер второй степени f аннулирует подгруппу $H_{\alpha''}$, поэтому он является характером второй степени на фактор-группе $G_{\alpha''}$.

В результате доказана следующая теорема.

Теорема 7. *Если G — проективный предел групп G_α, то*

$$X_2(G) = \bigcup_{(\alpha)} X_2(G_\alpha).$$

Для каждого индекса $\alpha \in \Lambda$ рассмотрим алгебру $C(G_\alpha)$ непрерывных комплекснозначных функций на компактной группе $G_\alpha = G/H_\alpha$. Если $\varphi_\alpha \in C(G_\alpha)$, то можно определить функцию $\varphi \in C(G) : \varphi(x) = \varphi_\alpha(\psi_\alpha(x))$, $x \in G$, где $\psi_\alpha(x) = x_\alpha$. Пусть $C_\alpha(G)$ есть алгебра всех таких функций, т. е. замкнутая подалгебра алгебры $C(G)$, состоящая из всевозможных непрерывных функций на группе G, принимающих постоянное значение на каждом классе смежности относительно замкнутой подгруппы H_α.

Если $\alpha, \beta \in \Lambda$ и $\varphi_1 \in C_\alpha(G)$, $\varphi_2 \in C_\beta(G)$, то $\varphi_1 \pm \varphi_2$, $\varphi_1\varphi_2 \in C_\gamma(G)$ для любого индекса γ, удовлетворяющего условиям $\gamma \succ \alpha$, $\gamma \succ \beta$. Следовательно, объединение подалгебр $C_\alpha(G)$ по всем индексам из фильтрующегося семейства Λ является подалгеброй в алгебре $C(G)$. Кроме того, легко убедиться

в том, что это объединение удовлетворяет всем условиям теоремы Стоуна–Вейерштрасса, поэтому оно равномерно плотно в $C(G)$. В то же время алгебра $C(G)$ плотна по L^1-норме в пространстве $L^1(G)$. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $\psi \in L^1(G)$ существуют индекс $\alpha \in \Lambda$ и функция $\varphi_\alpha \in C(G_\alpha)$, такая, что для функции $\varphi = \varphi_\alpha \circ \psi_\alpha$ справедливо неравенство $\|\psi - \varphi\|_{L^1(G)} < \varepsilon$.

Однако тогда для преобразования Фурье–Френеля получаем, что для любого $f \in X_2(G)$ выполняется оценка

$$\left|\hat{\psi}(f) - \hat{\psi}(\varphi)\right| = \left|\int_G f(-x)\,(\psi(x) - \varphi(x))\,dx\right| \le$$
$$\le \int_G |\psi(x) - \varphi(x)|\,dx = \|\psi - \varphi\|_1 < \varepsilon.$$

Рассмотрим преобразование Фурье–Френеля функции φ:

$$\hat{\varphi}(f) = \int_G f(-x)\,\varphi(x)\,dx =$$
$$= \int_{G_\alpha} \varphi_\alpha(x_\alpha) \left(\int_{H_\alpha} f(-x-t)\,dt \right) dx_\alpha, \qquad (10)$$

где $x_\alpha = \psi_\alpha(x) = x + H_\alpha$ — класс смежности относительно подгруппы H_α, содержащий элемент $x \in G$. Однако по теореме 7 произвольный характер второй степени f на компактной группе G является характером второй степени на некоторой фактор-группе G_β, и, значит, f принимает постоянные значения на каждом классе смежности $x + H_\beta$. Переходя к индексу $\gamma \in \Lambda$, для которого $\gamma \succ \alpha$ и $\gamma \succ \beta$, можно рассматривать f как характер второй степени на фактор-группе $G_\gamma = G/H_\gamma$, поэтому соотношение (10) записываем в виде

$$\hat{\varphi}(f) = \int_{G_\gamma} f(-x_\gamma)\,\varphi_\gamma(x_\gamma)\,dx_\gamma.$$

Каждая фактор-группа G_γ совпадает (с точностью до изоморфизма) с группой $\mathbb{T}^{n_\gamma} \oplus F_\gamma$, где F_γ — конечная группа. Для таких

групп и, более общо, для элементарных групп вида

$$\mathbb{R}^p \oplus \mathbb{Z}^q \oplus \mathbb{T}^r \oplus F,$$

где F — конечная группа, вопрос о распространении леммы Римана–Лебега уже рассматривался в § 14.

В тех случаях, когда распространение леммы Римана–Лебега возможно, преобразование Фурье–Френеля для суммируемой функции ψ является непрерывной функцией на группе характеров второй степени $X_2(G)$, которая принимает сколь угодно малые значения вне подходящего компакта, поэтому ее максимум модуля достигается на некотором характере второй степени $f_0 \in X_2(G)$. Однако тогда можно воспользоваться теоремой 2 и доказать, что при дополнительном условии

$$|\hat{\psi}(f_0)| = \|\psi\|_1$$

исходная функция имеет вырожденный вид

$$\psi(x) = e^{ia}\overline{f_0(-x)}|\psi|, \ x \in G.$$

ГЛАВА 4

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Данная глава посвящена характерам второй степени на аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$. В ней приводится полный список характеров второй степени на группе $\mathbb{Z}$ с заданным наименьшим положительным периодом, а также изучаются соответствующие суммы Гаусса. Глава завершается некоторыми приложениями к аддитивной теории чисел. В частности, подробно рассматривается задача о представлении натуральных чисел суммами квадратов целых чисел.

§ 17. Характеры второй степени на аддитивной группе целых чисел

Пусть $G = \mathbb{Z}$ — группа целых чисел со сложением в качестве групповой операции. Каждый характер γ на группе $\mathbb{Z}$ имеет вид

$$\gamma(n) = e^{2\pi i\lambda n}, \ n \in \mathbb{Z},$$

где вещественное число λ однозначно определяется характером γ при дополнительном условии $0 \le \lambda < 1$. Это позволяет отождествить характер γ с комплексным числом $z = e^{2\pi i\lambda} \in \mathbb{T}$ и, следовательно, отождествить группу характеров Γ с мультипликативной группой $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Если λ является иррациональным числом, то последовательность дробных частей $\{n\lambda\}$, $n \in \mathbb{Z}$, равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$ [14], и, значит, соответствующий характер $\gamma = e^{2\pi i\lambda}$ является элементом бесконечного порядка, а его степени образуют подгруппу, всюду плотную на окружности $\mathbb{T}$.

Рассмотрим подгруппу Λ окружности $\Gamma = \mathbb{T}$, состоящую из всевозможных элементов конечного порядка. Тогда

$$\Lambda = \{\gamma = e^{2\pi ir} : 0 \le r < 1, \ r \in \mathbb{Q}\}.$$

Другими словами, Λ состоит из тех и только тех характеров на группе $\mathbb{Z}$, которые являются периодическими функциями. Кроме того, если m — наименьший положительный период

для характера γ и $m > 1$, то

$$\gamma(n) = e^{2\pi i \frac{k}{m} n}, \ n \in \mathbb{Z},$$

где k — целое число, для которого $0 < k < m$ и $(k, m) = 1$.

Теперь рассмотрим произвольный характер второй степени f на группе $\mathbb{Z}$. В § 2 было доказано, что f имеет вид

$$f(n) = e^{\pi i \alpha n^2 + 2\pi i \lambda n}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Здесь последовательность дробных частей $\{\frac{\alpha}{2} n^2 + \lambda n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, равномерно распределена на $[0, 1]$ тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел α и λ иррационально. Поэтому при выполнении этого условия характер второй степени f не может быть периодической функцией на группе $\mathbb{Z}$. Далее мы даем полное описание периодических характеров второй степени (с точным указанием их наименьших положительных периодов).

Пусть f — произвольный характер второй степени на группе $\mathbb{Z}$, для которого

$$f(n) = z_1^{n^2} z_2^n, \ |z_1| = |z_2| = 1.$$

Если f — периодическая функция на $\mathbb{Z}$ и m — ее положительный период, т. е.

$$f(n + m) = f(n) \text{ для любых } n \in \mathbb{Z},$$

то из соотношения

$$f(n + m) = z_1^{(n+m)^2} z_2^{n+m} = \left(z_1^{2nm + m^2} z_2^m \right) f(n)$$

получаем равенство $z_1^{2nm+m^2} z_2^m = 1$, откуда при $n = 0$ имеем $z_1^{m^2} z_2^m = 1$, а при $n = 1$ — $z_1^{2m+m^2} z_2^m = 1$, что при сравнении обоих соотношений дает равенство $z_1^{2m} = 1$, и, значит, $z_1^m = \pm 1$.

Если m четное, то

$$z_1^{m^2} = (z_1^{2m})^{\frac{m}{2}} = 1,$$

поэтому $z_2^m = 1$. Если же m нечетное, то

$$1 = \left(z_1^{m^2} z_2^m \right)^2 = (z_1^{2m})^m z_2^{2m} = z_2^{2m},$$

поэтому $z_2^{2m} = 1$ и $z_2^m = \pm 1$.

Таким образом, $z_1^m = \pm 1$ и $z_2^m = 1$, если m четное, $z_2^m = \pm 1$, если m нечетное. Отметим, кроме того, что в случае нечетного m из условия $z_1^m = 1$ получаем

$$z_1^{2m+m^2} = (z_1^m)^{2+m} = 1,$$

поэтому $z_2^m = 1$. Если же m нечетное и $z_1^m = -1$, то

$$z_1^{2m+m^2} = (z_1^m)^{2+m} = (-1)^{2+m} = -1,$$

поэтому $z_2^m = -1$.

В результате для характера второй степени f с периодом m соответствующие z_1 и z_2 удовлетворяют условиям

$$z_1^m = \pm 1 \text{ и } z_2^m = 1, \text{ если } m \text{ четное},$$
$$z_1^m = z_2^m = 1 \text{ или } z_1^m = z_2^m = -1, \text{ если } m \text{ нечетное}.$$

Вместе с тем нетрудно убедиться, что эти условия являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы характер второй степени f имел период, равный m. Например, если m нечетное и $z_1^m = z_2^m = -1$, то

$$\begin{aligned} f(n + m) &= z_1^{(n+m)^2} z_2^{n+m} = f(n) z_1^{2nm+m^2} z_2^m = \\ &= f(n)(z_1^m)^{2n+m} z_2^m = f(n)(-1)^{2n+m}(-1) = \\ &= f(n)(-1)(-1) = f(n), \end{aligned}$$

поэтому m является периодом для f.

Предположим теперь, что характер второй степени f имеет два представления:

$$f(n) = z_1^{n^2} z_2^n = z_3^{n^2} z_4^n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда при замене n на $n + 1$

$$f(n+1) = z_1^{(n+1)^2} z_2^{n+1} = z_3^{(n+1)^2} z_4^{n+1},$$

поэтому $z_1^{2n+1} z_2 = z_3^{2n+1} z_4$, и, следовательно,

$$\left(\frac{z_1}{z_3} \right)^{2n} = \frac{z_3 z_4}{z_1 z_2}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Полагая $n = 1$ и $n = 0$, получаем равенства

$$\left(\frac{z_1}{z_3}\right)^2 = \frac{z_3 z_4}{z_1 z_2} = 1,$$

поэтому $\frac{z_1}{z_3} = \pm 1$, и, значит,

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{z_2}{z_4} = +1 \text{ или } \frac{z_1}{z_3} = \frac{z_2}{z_4} = -1,$$

т. е. $(z_3, z_4) = (z_1, z_2)$ или $(z_3, z_4) = (-z_1, -z_2)$.

Кроме того, справедливо и обратное утверждение: если $f(n) = z_1^{n^2} z_2^n$, то при замене $(z_1, z_2) \to (-z_1, -z_2)$ получаем характер второй степени g, для которого

$$g(n) = (-z_1)^{n^2}(-z_2)^n = (z_1^{n^2} z_2^n)(-1)^{n^2+n} =$$
$$= f(n)(-1)^{n(n+1)} = f(n),$$

так как $n(n+1)$ — четное число для каждого $n \in \mathbb{Z}$.

Снова выбираем характер второй степени f с периодом m, для которого $f(n) = z_1^{n^2} z_2^n$. Тогда для любых $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\frac{f(n_1 + n_2)}{f(n_1) f(n_2)} = z_1^{2n_1 n_2}.$$

Правую часть этого равенства можно записать в виде

$$z_1^{2n_1 n_2} = w_1^{n_1} = w_2^{n_2},$$

где $w_1 = z_1^{2n_2}$ и $w_2 = z_1^{2n_1}$. Так как f имеет период m, то $z_1^{2m} = 1$, и, следовательно,

$$w_1^m = (z_1^{2n_2})^m = (z_1^{2m})^{n_2} = 1^{n_2} = 1,$$
$$w_2^m = (z_1^{2n_1})^m = (z_1^{2m})^{n_1} = 1^{n_1} = 1.$$

Если рассматривать f как функцию на фактор-группе $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, то равенства

$$z_1^{2n_1 n_2} = w_1^{n_1} = w_2^{n_2}$$

вместе с условием

$$w_1^m = w_2^m = 1$$

означают, что f является характером второй степени на группе $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Пусть $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}(\mathrm{mod}\, m) = \{0, 1, ..., m-1\}$ — аддитивная группа со сложением по $\mathrm{mod}\, m$. Ее группу характеров $\Gamma = G^\wedge$ можно отождествить с мультипликативной группой всех корней степени m из единицы:

$$\Gamma = \{\gamma_k = e^{2\pi i \frac{k}{m}} : k = 0, 1, ..., m-1\},$$

и тогда

$$\gamma_k(n) = \gamma_k^n = e^{\frac{2\pi i k n}{m}}$$

есть значение характера γ_k на элементе $n \in \{0, 1, ..., m-1\} = G$.

Пусть $f : G \to \mathbb{T}$ — произвольный характер второй степени на группе $G = \mathbb{Z}(\mathrm{mod}\, m)$ и $\rho : G \to \Gamma$ — симметричный гомоморфизм, ассоциированный с характером второй степени f. По определению гомоморфизма ρ имеем равенство

$$f(l + n) = f(l) f(n) < l, \rho(n) >,$$

где $< l, \rho(n) >$ — значение характера $\rho(n) \in \Gamma$ на элементе $l \in G$. Кроме того, $\rho(n) = (\rho(1))^n$, поэтому гомоморфизм ρ однозначно определяется своим значением при $n = 1$. Если $\rho(1) = \gamma_k \in \Gamma$, то $\rho(n) = \gamma_k^n = e^{2\pi i \frac{kn}{m}}$, $n = 0, 1, ..., m-1$, и, значит,

$$< l, \rho(n) > = < n, \rho(l) > = e^{2\pi i \frac{k}{m} l n}$$

для любых $l, n \in \{0, 1, ..., m-1\}$. Отметим, что ρ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\rho(n) \neq \gamma_0$ для всех $n = 1, 2, ..., m-1$. Однако последнее условие выполняется тогда и только тогда, когда k и m взаимно простые числа, т. е. $(k, m) = 1$.

Таким образом, симметричный гомоморфизм $\rho : G \to \Gamma$ однозначно определяется числом $k \in \{0, 1, ..., m-1\}$ и имеет вид

$$\rho(n) = e^{2\pi i \frac{kn}{m}}, \; n = 0, 1, ..., m-1,$$

причем ρ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда k и m — взаимно простые числа.

Для того чтобы найти общий вид характера второй степени f, с которым ассоциирован заданный симметричный гомоморфизм ρ, исходим из соотношения

$$f(l+n) = f(l)f(n)\gamma_k^{ln}.$$

В результате последовательного применения этого соотношения получаем, что

$$f(n) = f(1)f(n-1)\gamma_k^{n-1} = f(1)^2 f(n-2)\gamma_k^{(n-1)+(n-2)} = \dots =$$
$$= f(1)^n \gamma_k^{(n-1)+(n-2)+\dots+1} = f(1)^n \gamma_k^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

поэтому

$$f(n) = e^{\frac{\pi i k n^2}{m}} \left(f(1)e^{-\frac{\pi i k}{m}}\right)^n, \ n = 0, 1, \dots, m-1.$$

Следовательно, характер второй степени f однозначно определяется симметричным гомоморфизмом ρ, т. е. выбором числа k, и величиной $c = f(1)e^{-\frac{\pi i k}{m}}$, по абсолютному значению равной единице. Однако выбор числа $c \in \mathbb{T}$ не является произвольным, так как правая часть последней формулы должна быть периодической функцией от $n \in \mathbb{Z}$ с периодом, равным m. Действительно, для любого $n = 0, 1, \dots, m-1$ имеем

$$1 = f(0) = f(n)f(m-n) < n, \rho(m-n) > =$$
$$= e^{\frac{\pi i k}{m}(n^2+(m-n)^2)} \left(f(1)e^{-\frac{\pi i k}{m}}\right)^m e^{\frac{2\pi i k n(m-n)}{m}} =$$
$$= \left(f(1)e^{-\frac{\pi i k}{m}}\right)^m e^{\frac{\pi i k(n^2+(m-n)^2+2n(m-n))}{m}} = c^m e^{\pi i k m},$$

что приводит к дополнительному условию на c : $c^m = (-1)^{km}$. В то же время если это условие на c выполняется, то функция f на группе $\mathbb{Z}$, заданная формулой

$$f(n) = e^{\frac{\pi i k n^2}{m}} c^n, \ n \in \mathbb{Z},$$

является для характера второй степени f, определенного только на подмножестве $\{0, 1, \dots, m-1\}$, периодическим продолжением

на $\mathbb{Z}$ с периодом, равным m, в чем легко убедиться прямой проверкой:

$$f(n+m) = e^{\frac{\pi i k(n+m)^2}{m}} c^{n+m} = f(n)e^{\frac{\pi i k(2nm+m^2)}{m}} c^n =$$
$$= f(n)e^{2\pi i k n} e^{\pi i k m} c^m = f(n)(-1)^{km} c^m = f(n).$$

Полезно отметить, что для f справедливо соотношение

$$f^m(l+n) = f^m(l)f^m(n),$$

поэтому функция $f^m : G \to \mathbb{T}$ является характером на группе G, и, значит, существует $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, такое, что

$$f^m(n) = < n, \gamma_r > = e^{\frac{2\pi i r n}{m}}.$$

Следовательно,

$$e^{\frac{2\pi i r n}{m}} = f^m(n) = e^{\pi i k n^2} c^{nm}.$$

В частности, при $n = 1$ имеем равенство

$$e^{\frac{2\pi i r}{m}} = e^{\pi i k} c^m = (-1)^{k(m-1)},$$

поэтому r должно удовлетворять сравнению

$$r \equiv \frac{1}{2} km(m-1) (\mathrm{mod}\, m).$$

Например, если k — четное число или m нечетно, то $r \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)$, поэтому $r = 0$, т. е. $f^m(n) = 1$ для любого $n \in G$.

Таким образом, если m — нечетное число, то $f^m(n) = 1$ для любого $n \in G$, т. е. значения характера второй степени f на группе G лежат в подгруппе корней степени m из единицы. Если же m — четное число, то

$$f^m(n) = (-1)^{k(m-1)n} = (-1)^{kn}.$$

В этом случае получаем, что

$$f^m(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ четное,} \\ (-1)^n, & \text{если } k \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Теорема 1. *Общий вид характера второй степени на группе* $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ *есть*

$$f(n) = f_{k,r}(n) =$$
$$= \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}} \gamma_r^n \begin{cases} 1, & \text{если } m \text{ четное,} \\ 1, & \text{если } m \text{ и } k \text{ четные,} \\ (-1)^n, & \text{если } m \text{ четное и } k \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Далее считаем, что m нечетное. В этом случае имеем

$$f(n) = \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}} \gamma_r^n = \gamma_k^{n^2} \left(\gamma_k^{\frac{m}{2}} \gamma_r\right)^n = z_1^{n^2} z_2^n,$$

где

$$z_1 = \gamma_k^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{\pi i k}{m}} \text{ и } z_2 = \gamma_k^{\frac{m}{2}} \gamma_r = (-1)^k \gamma_r,$$

причем $z_1^m = z_2^m = (-1)^k$.

В соотношении $f(n) = z_1^{n^2} z_2^n$ по заданному характеру второй степени f пара комплексных чисел z_1, z_2 определяется неоднозначно, так как пару (z_1, z_2) можно заменить на пару $(-z_1, -z_2)$. Однако в соотношении

$$f(n) = \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}} \gamma_r^n$$

по f числа k и r находят единственным образом. Действительно, если для любого n выполняется равенство

$$\gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}} \gamma_r^n = \gamma_s^{\frac{n(n+m)}{2}} \gamma_t^n,$$

то

$$k\frac{n(n+m)}{2} + nr \equiv s\frac{n(n+m)}{2} + nt (\mathrm{mod}\, m),$$

откуда при $n = 2$ получаем

$$k(2+m) + 2r \equiv s(2+m) + 2t (\mathrm{mod}\, m),$$

и, значит,

$$2(k+r) \equiv 2(s+t) (\mathrm{mod}\, m).$$

Обе части сравнения можно сократить на 2, так как m — нечетное число, поэтому

$$(k+r) \equiv (s+t) (\mathrm{mod}\, m).$$

Если же взять $n = 4$, то последовательно получаем сравнения

$$2k(4+m) + 4r \equiv 2s(4+m) + 4t (\mathrm{mod}\, m),$$
$$8k + 4r \equiv 8s + 4t (\mathrm{mod}\, m),$$
$$2k + r \equiv 2s + t (\mathrm{mod}\, m),$$

поэтому

$$(2k+r) - (k+r) \equiv (2s+t) - (s+t) (\mathrm{mod}\, m),$$
$$k \equiv s (\mathrm{mod}\, m).$$

Следовательно, $k = s$, так как считаем, что $k, s \in \{0, 1, ..., m-1\}$. После сокращения исходного равенства на общий множитель

$$\gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}} = \gamma_s^{\frac{n(n+m)}{2}}$$

получаем соотношение $\gamma_r^n = \gamma_t^n$, которое при $n = 1$ превращается в равенство $\gamma_r = \gamma_t$, откуда $r = t$, что доказывает единственность выбора пары (k, r).

Далее, фиксируем $k, r \in \{0, 1, ..., m-1\}$. Пусть

$$f(n) = \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}} \gamma_r^n$$

есть характер второй степени. Если l — произвольный положительный период для f, т. е. $f(n+l) = f(n)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, то справедливо сравнение

$$\frac{k(n+l)(n+l+m)}{2} + r(n+l) \equiv \frac{kn(n+m)}{2} + rm (\mathrm{mod}\, m),$$

и, значит,

$$kln + \frac{k}{2} l(l+m) + rl \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m).$$

Это сравнение справедливо для любого $n \in \mathbb{Z}$, поэтому

$$kl \equiv 0(\mathrm{mod}\, m),$$
$$\frac{k}{2}l(l+m) + rl \equiv 0(\mathrm{mod}\, m).$$

Решая эту систему сравнений, определяем наименьший из положительных периодов для характера второй степени f.

Сначала предполагаем, что $k = 0$. Тогда получаем сравнение

$$rl \equiv 0(\mathrm{mod}\, m).$$

Если r и m — взаимно простые числа, то $l \equiv 0(\mathrm{mod}\, m)$, и, значит, $l_{\min} = m$. Если же $(r, m) = s > 1$, то $r = sr'$, $m = sm'$ и $(r', m') = 1$. В этом случае

$$f(n) = e^{\frac{2\pi i r n}{m}} = e^{\frac{2\pi i r' n}{m'}}$$

и $l_{\min} = m' = \frac{m}{s}$.

Теперь считаем, что $k \neq 0$. Если $(k, m) = 1$, то из сравнения $kl \equiv 0(\mathrm{mod}\, m)$ имеем $l \equiv 0(\mathrm{mod}\, m)$, поэтому $l_{\min} = m$ при любом выборе числа $r \in \{0, 1, ..., m-1\}$. Если же $(k, m) = s > 1$, то справедливы разложения на множители $k = sk'$, $m = sm'$, где $(k', m') = 1$. Тогда первое сравнение системы имеет вид

$$sk'l \equiv 0(\mathrm{mod}\, sm'),$$

поэтому $k'l \equiv 0(\mathrm{mod}\, m')$, и, значит, $l \equiv 0(\mathrm{mod}\, m')$.

Следовательно, можно положить $l = am'$, где a — некоторое положительное целое число. Однако тогда второе сравнение системы имеет вид

$$\frac{sk'}{2}am'(am' + sm') + am'r \equiv 0(\mathrm{mod}\, m),$$

откуда после сокращения на m' получаем сравнение

$$\frac{sk'}{2}am'(a+s) + ar \equiv 0(\mathrm{mod}\, s).$$

Так как m нечетно и $m = sm'$, то и s — нечетное число, поэтому a и $a + s$ — числа разной четности, а их произведение $a(a+s)$ делится на 2. Следовательно,

$$(sk'm')\frac{a(a+s)}{2} \equiv 0(\mathrm{mod}\, s),$$

и, значит,

$$ar \equiv 0(\mathrm{mod}\, s).$$

Если $(r, s) = 1$, то $a \equiv 0(\mathrm{mod}\, s)$, поэтому

$$a_{\min} = s \text{ и } l_{\min} = sm' = m.$$

Если же $d = (r, s) > 1$, то $a \equiv 0(\mathrm{mod}\, \frac{s}{d})$, откуда

$$a_{\min} = \frac{s}{d},\ l_{\min} = \frac{s}{d}m' = \frac{m}{d} < m.$$

В результате доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если m нечетно и $k, r \in \{0, 1, ..., m-1\}$, то для характера второй степени*

$$f(n) = \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}}\gamma_r^n,\ n \in \mathbb{Z},$$

наименьший положительный период равен m тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1) $k = 0,\ (r, m) = 1$;
2) $k > 0,\ (k, m) = 1,\ r$ — *любое из чисел* $0, 1, ..., m-1$;
3) $k > 0,\ s = (k, m) > 1,\ (r, s) = 1$.

Теперь рассмотрим случай, когда m — четное число. Поэтому характер второй степени f имеет вид

$$f(n) = f_{k,r}(n) = \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}}\gamma_r^n \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ четное}, \\ (-1)^n, & \text{если } k \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Докажем сначала, что по характеру f с четным периодом, равным m, числа $k, r \in \{0, 1, ..., m-1\}$ определяются однозначно. Действительно, если $f = f_{k,r} = f_{s,t}$ и k, s — числа одинаковой четности, то

$$\gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}}\gamma_r^n = \gamma_s^{\frac{n(n+m)}{2}}\gamma_t^n,$$

где в случае нечетных чисел обе части равенства сокращаем на общий множитель $(-1)^n$. Следовательно, в любом случае

$$k\frac{n(n+m)}{2}+nr\equiv s\frac{n(n+m)}{2}+nt(\mathrm{mod}\, m).$$

Если k и s — четные числа, то $\frac{k}{2}$ и $\frac{s}{2}$ целые, поэтому

$$\frac{k}{2}n^2+nr\equiv\frac{s}{2}n^2+nt(\mathrm{mod}\, m).$$

Полагая $n=1$, имеем сравнение

$$\frac{k}{2}+r\equiv\frac{s}{2}+t(\mathrm{mod}\, m),$$

и, значит,

$$k+2r\equiv s+2t(\mathrm{mod}\, m).$$

Если же $n=2$, то $2(k+r)\equiv 2(s+t)$. Следовательно, одновременно выполняются два сравнения по $\mathrm{mod}\, m$:

$$k+2r\equiv s+2t,\ 2k+2r\equiv 2s+2t,$$

откуда $k\equiv s(\mathrm{mod}\, m)$, поэтому $k=s$, и, значит, $r=t$, что доказывает единственность.

Если же k и s нечетные, то умножаем обе части исходного сравнения на 2. В результате получаем сравнение

$$kn(n+m)+2nr\equiv sn(n+m)+2nt(\mathrm{mod}\, m),$$

откуда

$$kn^2+2nr\equiv sn^2+2nt(\mathrm{mod}\, m).$$

Однако тогда при $n=1$ имеем сравнение

$$k+nr\equiv s+2t(\mathrm{mod}\, m).$$

Если же в исходное сравнение подставить $n=2$, то

$$k(2+m)+2r\equiv s(2+m)+2t(\mathrm{mod}\, m),$$

откуда

$$2(k+r)\equiv 2(s+t)(\mathrm{mod}\, m).$$

Следовательно, одновременно выполняются сравнения

$$k+2r\equiv s+2t(\mathrm{mod}\, m),\ 2k+2r\equiv 2s+2t(\mathrm{mod}\, m),$$

и, значит, $k\equiv s(\mathrm{mod}\, m)$, что дает равенство $k=s$, а затем $r=t$.

Осталось рассмотреть случай, когда k и s — числа разной четности. Для определенности считаем, что k четное, а s нечетное. Тогда имеем

$$f(n)=f_{k,r}(n)=\gamma_r^{\frac{n(n+m)}{2}}\gamma_r^n=(-1)^n\gamma_s^{\frac{n(n+m)}{2}}\gamma_t^n,$$

что приводит к сравнению

$$\frac{k}{2}n(n+m)+nr\equiv\frac{m}{2}n+\frac{s}{2}n(n+m)+nt(\mathrm{mod}\, m),$$

а из последнего сравнения при $n=1$ получаем, что

$$\frac{k}{2}(1+m)+r\equiv\frac{m}{2}+\frac{s}{2}(1+m)+t(\mathrm{mod}\, m),$$
$$k(1+m)+2r\equiv m+s(1+m)+2t(\mathrm{mod}\, m),$$
$$k+2r\equiv s+2t(\mathrm{mod}\, m).$$

Если же положить $n=2$, то

$$k(2+m)+2r\equiv s(2+m)+2t+m(\mathrm{mod}\, m),$$
$$2k+2r\equiv 2s+2t(\mathrm{mod}\, m).$$

Поэтому имеем $k\equiv s(\mathrm{mod}\, m)$, и, значит, $k=s$, что невозможно, так как k и s — числа разной четности.

В результате полностью доказано, что по характеру второй степени f с четным периодом m числа k и r определяются однозначно.

Далее, пусть снова m — четное число, $k,r\in\{0,1,\ldots,m-1\}$ и k четное. Рассмотрим характер второй степени $f=f_{k,r}$. Если l — произвольный положительный период для f, то для любого $n\in\mathbb{Z}$ имеем сравнение

$$kln+\frac{k}{2}l(l+m)+rl\equiv 0(\mathrm{mod}\, m),$$

откуда получаем систему сравнений

$$kl \equiv 0(\mathrm{mod}\, m),$$
$$\frac{k}{2}l(l+m) + lr \equiv 0(\mathrm{mod}\, m).$$

Если $k = 0$, то $l_{\min} = m$ тогда и только тогда, когда $(r, m) = 1$. Если же $k > 0$, то $s = (k, m) \geq 2$, так как m и k — четные числа, и s четное. Пусть $k = sk'$, $m = sm'$, где $(k', m') = 1$.

Первое сравнение системы $kl \equiv 0(\mathrm{mod} m)$ последовательно преобразуем в сравнения

$$sk'l \equiv 0(\mathrm{mod}\, sm'),$$
$$k'l \equiv 0(\mathrm{mod}\, m'),$$

поэтому $l \equiv 0(\mathrm{mod}\, m')$, так как $(k', m') = 1$.

Таким образом, произвольный положительный период l можно записать в виде $l = am'$, где a — положительное целое число.

Возьмем теперь второе сравнение. В нем k — четное число, поэтому $\frac{k}{2}$ целое, и, значит, получаем, что

$$\frac{k}{2}l^2 + lr \equiv 0(\mathrm{mod}\, m),\ l\left(\frac{k}{2}l + r\right) \equiv 0(\mathrm{mod}\, m),$$
$$am'\left(\frac{k}{2}l + r\right) \equiv 0(\mathrm{mod}\, sm'),\ a\left(\frac{k}{2}l + r\right) \equiv 0(\mathrm{mod}\, s).$$

Отметим, что

$$\frac{k}{2}l = s\left(\frac{k'am'}{2}\right).$$

Если $k'am'$ — четное число, то $\frac{k'am'}{2}$ целое, поэтому

$$\frac{k}{2}l \equiv 0(\mathrm{mod}\, s),$$

и второе сравнение можно записать в виде

$$ar \equiv (\mathrm{mod}\, s).$$

Очевидно, что наименьшее положительное решение a для этого сравнения $a_{\min} = s$ тогда и только тогда, когда $(r, s) = 1$, а при выполнении этого условия

$$l_{\min} = a_{\min}m' = sm' = m.$$

Если $r = 0$, то

$$a_{\min} = 1,\ l_{\min} = m' < m.$$

Рассмотрим еще одну ситуацию, когда $k'am' = 2q + 1$ — нечетное число. В этом случае сравнение

$$a\left(\frac{k}{2}l + r\right) \equiv 0(\mathrm{mod}\, s)$$

можно записать в виде

$$a\left(\frac{s}{2} + r\right) \equiv 0(\mathrm{mod}\, s).$$

Если нечетное a есть решение этого сравнения, то из четности s вытекает, что $\frac{s}{2} + r$ — четное число. Если s, кроме того, делится на 4, то $\frac{s}{2}$ четное, поэтому r — четное число. Следовательно, можно записать $m = 2m_0$, $k = 2k_0$ и $r = 2r_0$, где m_0, k_0 и r_0 целые, причем m_0, k_0 четные. В результате имеем

$$f(n) = \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}}\gamma_r^n = e^{2\pi i\frac{k}{m}\frac{n(n+m)}{2} + 2\pi i\frac{r}{m}n} =$$
$$= e^{2\pi i\frac{k_0}{m_0}\frac{n(n+m_0)}{2} + 2\pi i\frac{r_0}{m_0}n}e^{2\pi i\frac{k_0}{m_0}\frac{nm_0}{2}} =$$
$$= e^{2\pi i\frac{k_0}{m_0}\frac{n(n+m_0)}{2} + 2\pi i\frac{r_0}{m_0}n}e^{\pi ik_0n} =$$
$$= \left(\gamma'_{k_0}\right)^{\frac{n(n+m_0)}{2}}\left(\gamma'_{r_0}\right)^n(-1)^{k_0n} = \left(\gamma'_{k_0}\right)^{\frac{n(n+m_0)}{2}}\left(\gamma'_{r_0}\right)^n,$$

где штрих указывает на взятие корня степени m_0 из единицы.

Таким образом, в рассматриваемом случае характер второй степени f является периодической функцией с периодом $m_0 = \frac{m}{2} < m$.

Наконец, если s не делится на 4, то $\frac{s}{2}$ нечетное, поэтому из нечетности a и сравнения

$$a\left(\frac{s}{2} + r\right) \equiv 0(\mathrm{mod}\, s)$$

получаем, что r нечетное. В данном случае можно записать

$$m = sm' = 2\left(\frac{s}{2}m'\right) = 2m_0,$$
$$k = sk' = 2\left(\frac{s}{2}k'\right) = 2k_0,$$
$$r = 2r_0 + 1,$$

где m_0, k_0 и r_0 целые, причем m_0, k_0 четные. Следовательно,

$$f(n) = \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}}\gamma_r^n = e^{2\pi i\frac{k_0}{m_0}\frac{n(n+m_0)}{2}}e^{\pi i k_0 n + 2\pi i\frac{2r_0+1}{2m_0}n} =$$
$$= e^{2\pi i\frac{k_0}{m_0}\frac{n(n+m_0)}{2}}e^{\frac{2\pi i}{m_0}\left(r_0+\frac{1+k_0m_0}{2}\right)n} =$$
$$= e^{2\pi i\frac{k_0}{m_0}\frac{n(n+m_0)}{2}}e^{2\pi i\frac{r_1}{m_0}n},$$

где $r_1 = r_0 + \frac{1+k_0m_0}{2}$ — целое число, так как k_0m_0 нечетное. В результате получаем, что f обладает периодом $m_0 = \frac{m}{2} < m$.

Остается рассмотреть случай, когда m четное, а k нечетное. В такой ситуации характер второй степени с периодом m имеет вид

$$f(n) = \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}}\gamma_r^n(-1)^n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Если l — положительный период для f, то

$$kl \equiv 0(\mathrm{mod}\, m),$$
$$\frac{k}{2}l(l+m) + l\left(r + \frac{m}{2}\right) \equiv 0(\mathrm{mod}\, m),$$

где во втором сравнении дополнительное слагаемое $\frac{lm}{2}$ возникает из множителя

$$(-1)^l = e^{\pi i l} = e^{\frac{2\pi i}{m}\frac{lm}{2}} = \gamma_1^{\frac{lm}{2}}.$$

Если $(k, m) = 1$, то из сравнения

$$kl \equiv 0(\mathrm{mod}\, m)$$

получаем, что

$$l \equiv 0(\mathrm{mod}\, m),$$

поэтому $l_{\min} = m$ при выборе любого $r \in \{0, 1, ..., m-1\}$.

Пусть $s = (k, m) > 1$. В этой ситуации

$$k = sk',\ m = sm',\ (k', m') = 1,$$

где s, k' нечетные, а m' — четное число. Первое сравнение системы сводится к сравнению

$$k'l \equiv 0(\mathrm{mod}\, m').$$

Поэтому, так как $(k', m') = 1$, имеем

$$l \equiv 0(\mathrm{mod}\, m').$$

Пусть $l = am'$, где a — положительное целое число. Тогда имеем сравнение

$$\frac{sk'}{2}am'(am' + sm') + am'\left(r + \frac{sm'}{2}\right) \equiv 0(\mathrm{mod}\, sm'),$$

поэтому

$$\frac{sk'}{2}a(a+s)m' + a\left(r + \frac{sm'}{2}\right) \equiv 0(\mathrm{mod}\, s).$$

Так как s нечетное, числа a и $a+s$ разной четности, поэтому $\frac{1}{2}a(a+s)$ — целое число, и, значит,

$$\frac{sk'}{2}a(a+s)m' \equiv 0(\mathrm{mod}\, s).$$

В результате имеем сравнение

$$a\left(r + \frac{sm'}{2}\right) \equiv (\mathrm{mod}\, s),$$

откуда

$$ar \equiv 0(\mathrm{mod}\, s),$$

поскольку m' — четное число.

Таким образом, в случае когда m четное, а k нечетное, наименьший положительный период $l_{\min} = m$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

1) $(k, m) = 1$ и r — любое из чисел $0, 1, ..., m-1$;
2) $s = (k, m) > 1$ и $(r, s) = 1$.

Теорема 3. *Если m — четное число, $k, r \in \{0, 1, ..., m-1\}$ и $k \neq 0$, то для характера второй степени*

$$f(n) = \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}} \gamma_r^n \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ четное,} \\ (-1)^n, & \text{если } k \text{ нечетное,} \end{cases}$$

наименьший положительный период равен m тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

1) $(k, m) = 1$ *и* r — *любое из чисел* $0, 1, ..., m-1$

или

2) $s = (k, m) > 1$ *и* $(r, s) = 1$.

Теоремы 2 и 3 содержат полный перечень характеров второй степени с периодом, равным m.

Теорема 4. *Пусть $m \geq 2$ и $k, r \in \{0, 1, ..., m-1\}$, а характер второй степени f определен формулой*

$$f(n) = \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}} \gamma_r^n \begin{cases} 1, & \text{если } m \text{ нечетное,} \\ 1, & \text{если } m \text{ и } k \text{ четные,} \\ (-1)^n, & \text{если } m \text{ четное и } k \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Тогда для f наименьший положительный период равен m тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

1) $k = 0$, $(r, m) = 1$;

2) $k \neq 0$, $(k, m) = 1$ *и* r — *любое из чисел* $0, 1, ..., m-1$;

3) $k \neq 0$, $s = (k, m) > 1$ *и* $(r, s) = 1$.

§ 18. Суммы Гаусса

Возьмем целое число $m \geq 2$ и пусть конечная группа $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}(\mathrm{mod}\, m)$. Очевидно, что G можно интерпретировать как множество $\{0, 1, ..., m-1\}$ с групповой операцией — сложением по $\mathrm{mod}\, m$. Тогда ее группа характеров состоит из всех корней степени m из единицы, т. е.

$$\Gamma = G^\wedge = \{\gamma_r = e^{2\pi i \frac{r}{m}} : r = 0, 1, ..., m-1\},$$

а групповая операция в Γ есть умножение: $\gamma_{r_1}\gamma_{r_2} = \gamma_{r_1+r_2}$. Наконец, значение характера $\gamma_r \in \Gamma$ на элементе $n \in G$ есть $\gamma_r(n) = \gamma_r^n = e^{2\pi i \frac{rn}{m}}$. Отметим, что характеры и, более общо,

функции на G удобно рассматривать и как периодические функции на группе $\mathbb{Z}$ с периодом, равным m.

Нормируем меру Хаара на конечной группе G условием $\mu(G) = 1$. Тогда для любой комплексной функции φ на группе G ее преобразование Фурье имеет вид

$$\hat{\varphi}(\gamma_r) = \int_G \varphi(x)\ \gamma_r(-x)\ d\mu(x) =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \varphi(n)\ \gamma_r^{-n},\ r = 0, 1, ..., m-1,$$

а формулу обращения представляем как

$$\varphi(n) = \sum_{r=0}^{m-1} \hat{\varphi}(\gamma_r)\ \gamma_r^n,\ n = 0, 1, ..., m-1.$$

Пусть $X_2(G)$ — группа характеров второй степени на G. Если $f \in X_2(G)$, то для любых $l, n \in G$ имеем

$$f(l+n) = f(l)f(n) < l, \rho(n) >,$$

где $\rho : G \to \Gamma$ — симметричный гомоморфизм, ассоциированный с f. Очевидно, что гомоморфизм ρ полностью определяется своим значением $\rho(1) = \gamma_k \in \Gamma$, так как $\rho(n) = \gamma_k^n$ для любого $n \in G$. Другими словами, ρ полностью определяется числом $k \in \{0, 1, ..., m-1\}$. Кроме того, ρ является изоморфизмом группы G на группу Γ тогда и только тогда, когда k и m — взаимно простые числа, т. е. $(k, m) = 1$. Наконец, произвольный характер второй степени определяется двумя числами $k, r \in \{0, 1, ..., m-1\}$ и имеет вид

$$f(n) = f_{k,r}(n) =$$

$$= \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}} \gamma_r^n \begin{cases} 1, & \text{если } m \text{ нечетное,} \\ 1, & \text{если } m \text{ и } k \text{ четные,} \\ (-1)^n, & \text{если } m \text{ четное и } k \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Если $f \in X_2(G)$, то его преобразование Фурье

$$g(\gamma_r) = \hat{f}(\gamma_r) = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} f(n)\gamma_r^{-n} = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} f(n+l)\gamma_r^{-(n+l)} =$$

$$= \gamma_r^{-l} f(l)\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} f(n)\gamma_k^{ln}\gamma_r^{-n} =$$

$$= \gamma_r^{-l} f(l)\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} f(n)\gamma_{r-kl}^{-n} = \gamma_r^{-l} f(l) g(\gamma_{r-kl}),$$

поэтому

$$g(\gamma_r) = g(\gamma_{r-kl})\gamma_r^{-l} f(l).$$

Взяв в качестве l решение сравнения

$$kl \equiv r (\mathrm{mod}\, m),$$

получим $\gamma_{r-kl} = \gamma_0 = 1$, и, значит,

$$g(\gamma_r) = g(1)\gamma_r^{-l} f(l).$$

Правую часть этого равенства можно преобразовать, воспользовавшись соотношением

$$1 = f(0) = f(l-l) = f(l)f(-l) < l, \rho(-l) > = f(l)f(-l)\gamma_k^{-l^2},$$

т. е.

$$f(l) = \overline{f(-l)}\gamma_k^{l^2}.$$

Следовательно,

$$g(\gamma_r) = g(1)\gamma_r^{-l} f(l) = g(1)\overline{f(-l)}\gamma_r^{-l}\gamma_k^{l^2} =$$
$$= g(1)\overline{f(-l)}\gamma_l^{kl-r} = g(1)\overline{f(-l)},$$

и, значит,

$$g(\gamma_r) = g(1)\overline{f(-l)},$$

где числа r и l связаны сравнением

$$kl \equiv r (\mathrm{mod}\, m).$$

Используя формулу обращения преобразования Фурье, имеем

$$f(n) = \sum_{r=0}^{m-1} g(\gamma_r)\gamma_r^n = \sum_{r=0}^{m-1} g(1)\overline{f(-l)}\gamma_r^n = g(1)\sum_{r=0}^{m-1}\overline{f(-l)}\gamma_{kl}^n.$$

Если дополнительно предположить, что $(k, m) = 1$, то суммирование по r можно заменить суммированием по l, так как в случае когда r пробегает полную систему вычетов по $\mathrm{mod}\, m$, а

$$kl \equiv r (\mathrm{mod}\, m),$$

решение этого сравнения l также пробегает полную систему вычетов по $\mathrm{mod}\, m$, поэтому

$$f(n) = g(1)\sum_{l=0}^{m-1}\overline{f(-l)}\gamma_{kl}^n,$$

и, значит,

$$f(n) = g(1)\overline{\sum_{l=0}^{m-1} f(-l)\gamma_{k(-l)}^n} = g(1)\overline{\sum_{l=0}^{m-1} f(l)\gamma_{kl}^n} =$$

$$= g(1)m\frac{1}{m}\overline{\sum_{l=0}^{m-1} f(l)\gamma_{-kn}^{-l}} = g(1)m\overline{g(\gamma_{-kn})}.$$

Таким образом, доказано равенство

$$f(n) = mg(1)\overline{g(\gamma_{-kn})},$$

которое при $n = 0$ дает соотношение $1 = mg(1)\overline{g(1)}$, откуда

$$|g(1)|^2 = \frac{1}{m},\ g(1) = \frac{\tau(f)}{\sqrt{m}},$$

где $\tau(f)$ — некоторое комплексное число, для которого абсолютная величина $|\tau(f)| = 1$. В этой формуле левая часть

$$g(1) = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} f(n),$$

поэтому

$$\tau(f) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{n=0}^{m-1} f(n)$$

есть сумма Гаусса для характера второй степени $f \in X_2(G)$.

Если $kl \equiv r(\mathrm{mod}\, m)$, то

$$g(\gamma_r) = \frac{\tau(f)}{\sqrt{m}} \overline{f(-l)},$$

а формулу обращения для f можно записать в виде

$$f(n) = \frac{\tau(f)}{\sqrt{m}} \sum_{l=0}^{m-1} \overline{f(-l)} \gamma_{kl}^n.$$

Теперь переходим к доказательству основного свойства сумм Гаусса. Пусть f — комплексная периодическая функция на группе $\mathbb{Z}$ с периодом, равным m, а ее сужение на $\{0, 1, ..., m-1\}$ является характером второй степени на группе $G = \mathbb{Z}(\mathrm{mod}\, m)$. Кроме того, считаем, что ассоциированный с f гомоморфизм $\rho : G \to \Gamma$ является изоморфизмом, для которого

$$\rho(1) = \gamma_k = e^{2\pi i \frac{k}{m}},$$

где $(k, m) = 1$.

Рассмотрим сумму Гаусса

$$\tau(f) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{n=0}^{m-1} f(n).$$

Предположим, что $m = m_1 m_2$ и $(m_1, m_2) = 1$. Если n_1 пробегает полную систему вычетов по $\mathrm{mod}\, m_1$, а n_2 — полную систему вычетов по $\mathrm{mod}\, m_2$, то числа $n = n_1 m_2 + n_2 m_1$ будут пробегать полную систему вычетов по $\mathrm{mod}\, m$, поэтому

$$\tau(f) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{n=0}^{m-1} f(n) = \frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}} \sum_{(n_1, n_2)} f(n_1 m_2 + n_2 m_1),$$

где

$$f(n_1 m_2 + n_2 m_1) = f(n_1 m_2) f(n_2 m_1) < n_1 m_2, \rho(n_2 m_1) >,$$
$$< n_1 m_2, \rho(n_2 m_1) > = (\gamma_k^{n_2 m_1})^{n_1 m_2} = (\gamma_k^m)^{n_1 n_2} = 1^{n_1 n_2} = 1,$$

и, значит,

$$f(n_1 m_2 + n_2 m_1) = f(n_1 m_2) f(n_2 m_1).$$

Таким образом,

$$\tau(f) = \left(\frac{1}{\sqrt{m_1}} \sum_{(n_1)} f(n_1 m_2) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{m_2}} \sum_{(n_2)} f(n_2 m_1) \right).$$

Пусть f_1 — комплексная функция на группе $\mathbb{Z}$, для которой

$$f_1(n_1) = f(n_1 m_2),\ n_1 \in \mathbb{Z}.$$

Для любого $n_1 \in \mathbb{Z}$ имеем

$$f_1(n_1 + m_1) = f((n_1 + m_1) m_2) = f(n_1 m_2 + m) = \\ = f(n_1 m_2) = f_1(n_1),$$

поэтому f_1 является периодической функцией на группе $\mathbb{Z}$ с периодом m_1. Кроме того, для любых $n_1, l_1 \in \mathbb{Z}$ получаем, что

$$f_1(n_1 + l_1) = f(n_1 m_2 + l_1 m_2) = f(n_1 m_2) f(l_1 m_2) \gamma_k^{n_1 l_1 m_2^2},$$

где

$$\gamma_k^{n_1 l_1 m_2^2} \left(e^{2\pi i \frac{k}{m}} \right)^{n_1 l_1 m_2^2} = \left(e^{2\pi i \frac{k m_2}{m_1}} \right)^{n_1 l_1},$$

поэтому необходимо рассмотреть корень степени m_1 из единицы $\gamma' = e^{\frac{2\pi i}{m_1}}$ и с его помощью образовать гомоморфизм ρ_1 для группы $G_1 = \mathbb{Z}(\mathrm{mod}\, m_1)$ в мультипликативную группу $\Gamma_1 = G_1^\wedge$, состоящую из корней степени m_1 из единицы:

$$\rho_1(l_1) = (\gamma'_{k_1})^{l_1} = (\gamma')^{k l_1},\ l_1 \in G_1,$$

где $k_1 \in \{0, 1, ..., m_1 - 1\}$ и $k_1 \equiv k m_2 (\mathrm{mod}\, m_1)$.

Следовательно,

$$\frac{f_1(n_1+l_1)}{f_1(n_1)f_1(l_1)} = < n_1, \rho_1(l_1) > = (\gamma'_{k_1})^{l_1 n_1},$$

и, значит, f_1 — характер второй степени на группе G_1 с ассоциированным изоморфизмом, заданным числом k_1, для которого $(k_1, m_1) = (km_2, m_1) = 1$.

Аналогично доказывается, что функция f_2, для которой

$$f_2(n_2) = f(n_2 m_1),$$

есть характер второй степени на группе $G_2 = \mathbb{Z}(\bmod m_2)$, а ассоциированный с f_2 гомоморфизм $\rho_2 : G_2 \to \Gamma_2 = G_2^\wedge$ является изоморфизмом, порожденным корнем степени m_2 из единицы $\gamma'' = e^{\frac{2\pi i}{m_2}}$:

$$\rho_2(l_2) = (\gamma''_{k_2})^{l_2} = (\gamma'')^{k_2 l_2},$$

где $k_2 \in \{0, 1, ..., m_2 - 1\}$ и $k_2 \equiv km_1 (\bmod m_2)$.

В результате установлено, что f_1 и f_2 являются характерами второй степени, а соответствующие суммы Гаусса

$$\tau(f_1) = \frac{1}{\sqrt{m_1}} \sum_{n=0}^{m_1-1} f_1(n) = \frac{1}{\sqrt{m_1}} \sum_{(n_1)} f(n_1 m_2),$$

$$\tau(f_2) = \frac{1}{\sqrt{m_2}} \sum_{n=0}^{m_2-1} f_2(n) = \frac{1}{\sqrt{m_2}} \sum_{(n_2)} f(n_2 m_1),$$

и, значит,

$$\tau(f) = \tau(f_1)\tau(f_2).$$

До сих пор рассматривались характеры второй степени f на группе $G = \mathbb{Z}(\bmod m)$, для которых $(k, m) = 1$, поэтому связанные с f гомоморфизмы $\rho = \rho(f) : G \to \Gamma$ являлись изоморфизмами. Теперь предполагаем, что $d = (k, m) > 1$. Тогда $k = dk_0$ и $m = dm_0$, где $(k_0, m_0) = 1$. В этом случае образуем новую функцию

$$\varphi(n) = f(n)\gamma_k^{-\frac{n(n+m)}{2}}, \ n \in \mathbb{Z},$$

для которой

$$\varphi(n+l) = f(n+l)\gamma_k^{-\frac{(n+l)(n+l+m)}{2}} =$$

$$= f(n)f(l)\gamma_k^{nl}\gamma_k^{-\frac{n(n+m)}{2} - \frac{l(l+m)}{2} - nl} =$$

$$= f(n)\gamma_k^{-\frac{n(n+m)}{2}} f(l)\gamma_k^{-\frac{l(l+m)}{2}} = \varphi(n)\varphi(l),$$

и, значит, φ является характером на группе G. Следовательно, существует $r \in \{0, 1, ..., m-1\}$, такое, что $\varphi(n) = \gamma_r^n$ для любых $n \in G$, поэтому

$$f(n) = \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}} \gamma_r^n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Отметим, что

$$\gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}} = e^{2\pi i \frac{k}{m} \frac{n(n+m)}{2}} = e^{2\pi i \frac{k_0}{m_0} \frac{n(n+dm_0)}{2}} =$$

$$= e^{2\pi i \frac{k_0}{m_0} \frac{n(n+m_0)}{2} + \pi i k_0 (d-1) n} = e^{2\pi i \frac{k_0}{m_0} \frac{n(n+m_0)}{2}},$$

если $k_0(d-1)$ — четное число. При этом дополнительном предположении комплексная функция, определенная формулой

$$f_0(n) = e^{2\pi i \frac{k_0}{m_0} \frac{n(n+m_0)}{2}}, \ n \in \mathbb{Z},$$

есть характер второй степени на группе $G_0 = \mathbb{Z}(\bmod m_0)$, а гомоморфизм $\rho_0 = \rho(f_0) : G_0 \to \Gamma_0 = G_0^\wedge$ есть изоморфизм, так как ρ_0 определяется корнем степени m_0 из единицы γ_0 и показателем k_0, взаимно простым с m_0 : $\rho_0(n) = \gamma_0^{k_0 n}$.

Сумма Гаусса для f_0 представляет собой

$$\tau(f_0) = \frac{1}{\sqrt{m_0}} \sum_{n=0}^{m_0-1} f_0(n) = \frac{1}{\sqrt{m_0}} \sum_{n=0}^{m_0-1} e^{2\pi i \frac{k_0}{m_0} \frac{n(n+m_0)}{2}} =$$

$$= \frac{1}{d\sqrt{m_0}} \sum_{n=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{k}{m} \frac{k}{m} \frac{n(n+m)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{n=0}^{m-1} \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}}.$$

Кроме того, имеем разложение

$$f_0(n) = \frac{\tau(f_0)}{\sqrt{m_0}} \sum_{l=0}^{m_0-1} \overline{f_0(-l)} (\gamma_0)^n_{k_0 l},$$

и, значит,

$$f_0(n) = \frac{\tau(f_0)}{d\sqrt{m_0}} \sum_{l=0}^{m-1} \overline{f_0(l)}\gamma_{kl}^{-n} = \frac{\tau(f_0)}{d\sqrt{m_0}} \sum_{l=0}^{m-1} \overline{\gamma_{kl}^{\frac{l(l+m)}{2}}}\gamma_{kl}^{-n}.$$

Однако тогда для исходного вырожденного характера второй степени $f(n) = f_0(n)\gamma_r^n$ получаем разложение

$$\overline{f(n)} = \frac{\overline{\tau(f_0)}}{\sqrt{dm}} \sum_{l=0}^{m-1} \gamma_k^{\frac{l(l+m)}{2}} \gamma_{kl-r}^n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Полученные разложения справедливы в случае, когда $k_0(d-1)$ четное.

Теперь считаем, что $k_0(d-1)$ нечетное, и, следовательно,

$$e^{\pi i k_0(d-1)} = -1.$$

Рассмотрим, например, случай, когда m и k четные, а k_0 — нечетное число. В этом случае имеем

$$f_0(n) = e^{2\pi i \frac{k_0}{m_0} \frac{n(n+m_0)}{2}} = (-1)^n \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}},$$

поэтому

$$\tau(f_0) = \frac{1}{\sqrt{m_0}} \sum_{n=0}^{m_0-1} f_0(n) = \frac{1}{\sqrt{dm}} \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}},$$

а для исходного характера второй степени f справедливо разложение вида

$$\overline{f(n)} = (-1)^n \frac{\overline{\tau(f_0)}}{\sqrt{dm}} \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}} \gamma_{kl-r}^n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим еще один случай, когда m и k нечетные, поэтому $d = (k, m)$ — нечетное число, и, значит, $k_0(d-1)$ четное. Таким образом, новый характер второй степени

$$f_0(n) = e^{2\pi i \frac{k_0}{m_0} \frac{n(n+m_0)}{2}} = \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}},$$

а исходный вырожденный характер второй степени f определяется формулой

$$f(n) = (-1)^n \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}} \gamma_r^n,$$

поэтому

$$\tau(f_0) = \frac{1}{\sqrt{dm}} \sum_{n=0}^{m-1} \gamma_k^{\frac{n(n+m)}{2}},$$

а для f получаем разложение

$$\overline{f(n)} = (-1)^n \frac{\overline{\tau(f_0)}}{\sqrt{dm}} \sum_{l=0}^{m-1} \gamma_k^{\frac{l(l+m)}{2}} \gamma_{kl-r}^n.$$

§ 19. О представлении натуральных чисел суммой квадратов

Фиксируем положительное целое число s. Пусть $f(n)$ для каждого положительного целого числа n обозначает число целочисленных решений уравнения $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_s^2 = n$. Тогда $1 + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ есть число точек в $\mathbb{R}^s$ с целочисленными координатами, принадлежащих шару $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_s^2 \le n$. По элементарным соображениям $f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ асимптотически совпадает с объемом s-мерного шара с радиусом $\sqrt{n}$, т. е.

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \sim C_0 n^{\frac{s}{2}} \text{ при } n \to \infty,$$

где постоянная $C_0 = C_0(s)$ равна объему s-мерного шара с радиусом $R = 1$.

Отсюда легко следует, что для $f_0(n) = n^{1-\frac{s}{2}} f(n)$

$$f_0(1) + f_0(2) + \cdots + f_0(n) \sim C_1 n \text{ при } n \to \infty.$$

Другими словами, для функции f_0 существует среднее значение

$$M(f_0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_0(n).$$

Отметим, что из существования среднего значения функции f_0 еще не следует почти периодичность функции f_0. Более того,

как будет показано далее, для некоторых s функция f_0, на самом деле, не является почти периодической.

Так или иначе, но сейчас мы попытаемся определить ее скрытые периоды. Будет доказано, что для каждого вещественного числа λ существует среднее значение функции $n \to f_0(n)e^{-2\pi i\lambda n}$, и это среднее значение равно нулю для всех иррациональных λ. Кроме того, для рациональных λ получим явную формулу для значений соответствующих коэффициентов Бора–Фурье функции f_0.

Напомним, что последовательность $x_1, x_2, x_3, ...$ вещественных чисел из промежутка $[0,1]$ равномерно распределена на этом промежутке, если для каждого $[a,b] \subset [0,1]$

$$\frac{1}{n}|E_n| \to b - a \text{ при } n \to \infty,$$

где $E_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \cap [a,b]$, а $|E_n|$ обозначает число элементов множества E_n. Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно распределена на промежутке $[0,1]$, то для достаточно широкого класса комплекснозначных функций g на $[0,1]$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(x_n) \longrightarrow \int_0^1 g(t)dt \text{ при } N \to \infty.$$

В частности, последнее соотношение верно для всех непрерывных комплекснозначных функций на $[0,1]$.

Например, для $g(x) = \exp(2\pi ikx)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, имеем

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(x_n) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ikx_n} \longrightarrow \int_0^1 e^{2\pi ikt}dt = 0.$$

Таким образом, если последовательность $x_1, x_2, x_3, ...$ равномерно распределена на промежутке $[0,1]$, то для любого ненулевого целого числа k

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ikx_n} \longrightarrow 0 \text{ при } N \to \infty.$$

Докажем, что последнее соотношение является также и достаточным условием для равномерной распределенности на промежутке $[0,1]$.

Теорема 5. *Пусть $x_1, x_2, x_3, ...$ — последовательность вещественных чисел из промежутка $[0,1]$. Если для каждого ненулевого целого числа k*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ikx_n} \longrightarrow 0 \text{ при } N \to \infty,$$

то последовательность $x_1, x_2, x_3, ...$ равномерно распределена на промежутке $[0,1]$.

Доказательство. Для любого тригонометрического полинома

$$T(x) = A + \sum_{s=1}^{l} a_s e^{2\pi ik_s x},$$

где $k_1, k_2, ..., k_l$ — ненулевые целые числа, имеем

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T(x_n) \longrightarrow A = \int_0^1 T(t)dt \text{ при } N \to \infty.$$

Отсюда следует, что для любой комплекснозначной непрерывной функции g на промежутке $[0,1]$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(x_n) \longrightarrow \int_0^1 g(t)dt \text{ при } N \to \infty,$$

так как множество всех тригонометрических полиномов всюду плотно в пространстве $C([0,1])$ всех комплекснозначных непрерывных функций на промежутке $[0,1]$.

Далее рассмотрим произвольный промежуток $[a,b] \subset [0,1]$. Пусть $h = \chi_{a,b}$ — характеристическая функция промежутка $[a,b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют вещественные непрерывные функции g_1 и g_2, такие, что $g_1(t) \leq h(t) \leq g_2(t)$ для всех $t \in [0,1]$

и $\int_0^1 (g_2(t) - g_1(t))dt < \varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\int_0^1 g_1(t)dt \le \int_0^1 h(t)dt \le \int_0^1 g_2(t)dt,$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_1(x_n) \le \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} h(x_n) \le \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_2(x_n),$$

при этом в последнем неравенстве крайние члены имеют конечные пределы $\int_0^1 g_1(t)dt$ и $\int_0^1 g_2(t)dt$, отличающиеся друг от друга меньше чем на ε.

Таким образом,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} h(x_n) \to \int_0^1 h(t)dt \text{ при } N \to \infty,$$

т. е. $\frac{|E_N|}{N} \to b - a$ при $N \to \infty$, поэтому последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ равномерно распределена на промежутке $[0, 1]$. Теорема доказана.

Пусть λ — иррациональное число и $x_n = \{\lambda n\} = \lambda n - [\lambda n]$ есть дробная часть числа λn. Тогда для любого ненулевого целого числа k

$$\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k x_n} = \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k \lambda n} = \frac{e^{2\pi i k\lambda} - e^{2\pi i k\lambda(N+1)}}{1 - e^{2\pi i k\lambda}},$$

откуда получаем

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k x_n}\right| \le \frac{1}{N|\sin \pi k\lambda|},$$

поэтому

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k x_n} \longrightarrow 0 \text{ при } N \to \infty.$$

Таким образом, по теореме 5 последовательность $x_n = \{n\lambda\}$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно распределена на промежутке $[0, 1]$.

Пусть снова λ — иррациональное число. Рассмотрим последовательность $x_n = \{n^2\lambda\}$, $n = 1, 2, \ldots$, и докажем, что для любого ненулевого целого числа k

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \lambda k n^2} \longrightarrow 0 \text{ при } N \to \infty.$$

Учитывая, что $k\lambda$ иррационально одновременно с λ, достаточно доказать, что

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \lambda n^2} \longrightarrow 0 \text{ при } N \to \infty.$$

Пусть

$$S = S_N = \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \lambda n^2}.$$

Умножая S на комплексно сопряженную величину, имеем

$$|S|^2 = \sum_{n,m=1}^{N} e^{2\pi i\lambda(n^2-m^2)} = \sum_{n,m=1}^{N} e^{2\pi i\lambda(n-m)(n+m)} =$$

$$= \sum_{m=1}^{N}\sum_{s=1-m}^{N-m} e^{2\pi i\lambda s(s+2m)} =$$

$$= \sum_{s=0}^{N-1}\sum_{m=1}^{N-s} e^{2\pi i\lambda s(s+2m)} + \sum_{s=1-N}^{-1}\sum_{m=1-s}^{N} e^{2\pi i\lambda s(s+2m)} = R_1 + R_2.$$

Оценим первое слагаемое. Имеем

$$|R_1| = \left|\sum_{s=0}^{N-1} e^{2\pi i\lambda s^2}\sum_{m=1}^{N-s} e^{4\pi i\lambda s m}\right| \le \sum_{s=0}^{N-1}\left|\frac{e^{4\pi i\lambda s} - e^{4\pi i\lambda s(N-s+1}}{1 - e^{4\pi i\lambda s}}\right|.$$

Очевидно, что для внутренней суммы одновременно выполняются два неравенства:

$$\left|\sum_{m=1}^{N-s} e^{4\pi i\lambda s m}\right| \le N - s \le N, \quad \sum_{m=1}^{N-s}\left|e^{4\pi i\lambda s m}\right| \le \frac{1}{|\sin 2\pi\lambda s|}.$$

Однако $|\sin 2\pi\lambda s| \geq 2d_s$, где d_s — расстояние от $2\lambda s$ до ближайшего целого числа, т.е. расстояние от $\{2\lambda s\}$ до ближайшего из чисел 0 и 1.

Рассмотрим произвольное $\varepsilon \in (0,1)$. Так как последовательность $y_n = \{2\lambda n\}$, $n = 1, 2, ...$, равномерно распределена на промежутке $[0,1]$, число тех $\{2\lambda s\}$ с $0 \leq s \leq N-1$, для которых $d_s < \varepsilon$, т.е. которые лежат в одном из промежутков $[0, \varepsilon)$ или $(1-\varepsilon, 1]$, для достаточно больших N меньше чем $3\varepsilon N$. Тогда

$$\left| \sum_{m=1}^{N-s} e^{4\pi i \lambda s m} \right| \leq \frac{1}{|\sin 2\pi\lambda s|} \leq \frac{1}{2d_s} \leq \frac{1}{2\varepsilon}$$

для более чем $N - 3\varepsilon N$ номеров s, а для остальных номеров s используем неравенство

$$\left| \sum_{m=1}^{N-s} e^{4\pi i \lambda s m} \right| \leq N.$$

Следовательно, для всех достаточно больших N имеем

$$\frac{|R_1|}{N^2} \leq \frac{1}{N^2}\left(\frac{N}{2\varepsilon} + N 3\varepsilon N\right),$$

поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|R_1|}{N^2} \leq 3\varepsilon,$$

и так как ε — любое число из интервала $(0,1)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|R_1|}{N^2} = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|R_2|}{N^2} = 0.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \lambda n^2} \right|^2 \leq \frac{|R_1| + |R_2|}{N^2} \longrightarrow 0 \text{ при } N \to \infty,$$

поэтому

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \lambda n^2} \longrightarrow 0 \text{ при } N \to \infty.$$

Таким образом, мы доказали, что последовательность $x_n = \{n^2\lambda\}$ равномерно распределена на $[0,1]$, если λ — иррациональное число.

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что для многочлена $P(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k$ последовательность $x_n = \{P(n)\}$, $n = 1, 2, ...$, равномерно распределена на промежутке $[0,1]$, если среди коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ имеется, по крайней мере, один иррациональный. В частности, если λ — иррациональное число, то для любого $k = 1, 2, ...$ последовательность $\{\lambda n^k\}$, $n = 1, 2, ...$, равномерно распределена на промежутке $[0,1]$.

В последующем анализе ряда Бора–Фурье для функции $f_0(n)$ также воспользуемся двумя простыми леммами об асимптотическом поведении степенных рядов.

Лемма 1. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

где $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, *и пусть ряды сходятся при* $0 < x < 1$ *и расходятся при* $x = 1$. *Если* $a_n \sim b_n$, *то* $f(x) \sim g(x)$ *при* $x \to 1-0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $\varepsilon > 0$ существует N, такое, что при $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - b_n| < \varepsilon b_n$.

Следовательно,

$$|f(x) - g(x)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N} |a_n - b_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n - b_n| x^n <$$

$$< \sum_{n=0}^{N} |a_n - b_n| + \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n x^n \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N} |a_n - b_n| + \varepsilon g(x).$$

Так как $g(x) \to \infty$ при $x \to 1-0$, при фиксированном N существует $\delta \in (0,1)$, такое, что

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n - b_n| < \varepsilon g(x) \text{ при } x \in (1-\delta, 1),$$

и, значит, $|f(x) - g(x)| < 2\varepsilon g(x)$.

Следовательно, для всех $x \in (1-\delta, 1)$ имеем

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < 2\varepsilon,$$

т. е.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \text{ при } x \to 1-0,$$

что доказывает лемму.

Лемма 2. *Пусть степенные ряды сходятся в интервале* $(0,1)$, *числа* $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, $t_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$ *неотрицательные, ряды* $s_0 + s_1 + s_2 + \cdots$ *и* $t_0 + t_1 + t_2 + \cdots$ *расходятся и* $s_n \sim t_n$. *Тогда* $f(x) \sim g(x)$ *при* $x \to 1-0$.

Доказательство. Действительно, при $0 < x < 1$ имеем

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n, \; g(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n.$$

В соответствии с леммой 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \sim \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n \text{ при } x \to 1-0,$$

поэтому $f(x) \sim g(x)$ при $x \to 1-0$. Лемма доказана.

Теперь рассмотрим функцию, равную сумме степенного ряда

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}, \; 0 < x < 1.$$

Докажем, что

$$g(x) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}} \text{ при } x \to 1-0.$$

Действительно, легко видеть, что

$$\int_1^{+\infty} x^{t^2} dt \le \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \le \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt.$$

Здесь интеграл в правой части неравенства

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-|\ln x| t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{|\ln x|}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|\ln x|}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}} \text{ при } x \to 1-0,$$

а интеграл в левой части отличается от рассмотренного интеграла на величину, равную $\int_0^1 x^{t^2} dt = O(1)$, где оценка равномерная при $x \to 1-0$.

Таким образом, доказано, что при $x \to 1-0$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \sim \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$

Пусть λ — иррациональное число. Тогда $\{\lambda n^2\}$, $n = 1, 2, \ldots$, есть равномерно распределенная на промежутке $[0,1]$ последовательность, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i \lambda k^2} = 0.$$

Отсюда следует, что при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos(2\pi\lambda k^2) \to 0, \; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin(2\pi\lambda k^2) \to 0.$$

Рассмотрим степенные ряды с неотрицательными коэффициентами:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \cos(2\pi\lambda n^2)) x^{n^2}, \; g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}.$$

Здесь можно воспользоваться леммой 2, так как

$$\sum_{k=1}^{n}(1+\cos(2\pi\lambda k^2)) = n\left(1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(2\pi\lambda k^2)\right) \sim n = \sum_{k=1}^{n} 1.$$

Согласно лемме 2 $f(x) \sim g(x)$ при $x \to 1-0$. Кроме того, уже доказано, что

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}} \text{ при } x \to 1-0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1-0}\sqrt{1-x}\, f(x) = \lim_{x\to 1-0}\sqrt{1-x}\, g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

откуда получаем

$$\lim_{x\to 1-0}\sqrt{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2\pi\lambda n^2)x^{n^2} = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{x\to 1-0}\sqrt{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(2\pi\lambda n^2)x^{n^2} = 0.$$

Таким образом,

$$\sqrt{1-x}\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i\lambda n^2}x^{n^2} \to 0 \text{ при } x \to 1-0,$$

если λ — иррациональное число, поэтому

$$\sqrt{1-x}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i\lambda n^2}x^{n^2}\right) \to 0 \text{ при } x \to 1-0,$$

откуда следует, что

$$(1-x)^{\frac{s}{2}}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i\lambda n^2}x^{n^2}\right)^s \to 0 \text{ при } x \to 1-0.$$

Отметим, что при $|z|<1$ справедливо тождество

$$\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2}\right)^s = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{n^2}\right)^s = 1+\sum_{n=1}^{\infty} f(n)z^n,$$

где $f(n)$ — число целочисленных решений уравнения

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_s^2 = n.$$

Таким образом, доказано, что

$$(1-x)^{\frac{s}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} f(n)e^{2\pi i\lambda n}x^n\right) \to 0 \text{ при } x \to 1-0.$$

Пользуясь этим асимптотическим свойством, теперь следует получить необходимую информацию о среднем значении

$$M\left(n^{1-\frac{s}{2}}f(n)e^{-2\pi i\lambda n}\right).$$

Полезно отметить, что асимптотическое поведение суммы степенного ряда при приближении к границе круга сходимости устанавливают, как правило, по тем или иным асимптотическим свойствам коэффициентов ряда или их средним значениям с помощью теорем так называемого абелева типа.

Обратная задача определения асимптотического поведения коэффициентов степенного ряда или их средних значений с помощью асимптотических свойств суммы степенного ряда решается в теоремах тауберова типа. Следующая лемма является одной из простейших теорем тауберова типа [10, 21]. Она получена Г. Харди и Д. Литтлвудом, а приводимое далее изящное доказательство принадлежит Й. Карамата.

Лемма 3. *Если степенной ряд* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ *сходится при* $0 < x < 1$, $a_n \geq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *и*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{1}{1-x} \text{ при } x \to 1-0,$$

то

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть h — вещественнозначная непрерывная функция на промежутке $[0,1]$ и $\varepsilon > 0$. Тогда по теореме Стоуна–Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций алгебраическими полиномами существуют алгебраические полиномы P и Q, такие, что $P(x) \le h(x) \le Q(x)$ для всех $x \in [0,1]$ и

$$\int_0^1 (h(x) - P(x))dx < \varepsilon, \quad \int_0^1 (Q(x) - h(x))dx < \varepsilon.$$

Легко видеть, что это утверждение остается справедливым и для функции h, имеющей в некоторой точке промежутка $[0,1]$ разрыв первого рода. В самом деле, функцию h, имеющую разрыв первого рода в некоторой точке $c \in [0,1]$, можно заменить в достаточно малой окрестности точки c линейной функцией так, что новая функция будет непрерывной на $[0,1]$, а затем воспользоваться для этой новой функции теоремой Стоуна–Вейерштрасса.

Докажем, что для функции f, удовлетворяющей условиям леммы,

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t)dt$$

и такое же соотношение верно для полинома Q.

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть случай, когда $P(x) = x^k$:

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n P(x^n) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(k+1)n} = (1-x)f(x^{k+1}) \sim$$

$$\sim (1-x)\frac{1}{1-x^{k+1}} = \frac{1}{1+x+\cdots+x^k} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^{k+1}dt = \int_0^1 P(t)dt.$$

Так как $P(x) \le h(x) \le Q(x)$ и коэффициенты $a_n \ge 0$, в интервале $(0,1)$ имеем

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n P(x^n) \le (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n h(x^n) \le$$

$$\le (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n Q(x^n),$$

откуда получаем

$$\int_0^1 P(t)dt \le \lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n h(x^n) \le$$

$$\le \overline{\lim_{x\to 1-0}}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n h(x^n) \le \int_0^1 Q(t)dt.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\int_0^1 h(t)dt - \varepsilon < \lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n h(x^n) \le$$

$$\le \overline{\lim_{x\to 1-0}}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n h(x^n) < \int_0^1 h(t)dt + \varepsilon,$$

а при $\varepsilon \to 0$

$$\int_0^1 h(t)dt = \lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n h(x^n) \le$$

$$\le \overline{\lim_{x\to 1-0}}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n h(x^n) = \int_0^1 h(t)dt,$$

т. е.

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n h(x^n) = \int_0^1 h(t)dt.$$

Положим теперь

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < e^{-1}, \\ \frac{1}{x}, & \text{если } e^{-1} \le x \le 1. \end{cases}$$

Тогда для $x_n = e^{-\frac{1}{n}}$ имеем

$$\left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \sum_{k=0}^{n} a_k = (1 - x_n) \sum_{n=0}^{\infty} a_k x_n^k h(x_n^k) \longrightarrow \int_0^1 h(t)dt = 1,$$

откуда

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} a_k \longrightarrow 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если степенной ряд* $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ *сходится при* $0 < x < 1$, $a_n \ge 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *и при* $x \to 1 - 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{1}{(1-x)^\alpha},$$

где $\alpha > 1$, *то при* $n \to \infty$

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} a_k \longrightarrow \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Доказательство. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ удовлетворяет условиям леммы. Рассмотрим новую функцию

$$f_{\alpha-1}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-2} f(t)dt,$$

которая есть "интеграл порядка $\alpha - 1$ от функции f". Интегрируя почленно, получаем

$$f_{\alpha-1}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x (x-t)^{\alpha-2} t^n dt,$$

где

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-2} t^n dt = x^{\alpha+n-1} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-2} u^n du =$$

$$= x^{\alpha+n-1} B(\alpha-1, n+1) =$$

$$= x^{\alpha+n-1} \frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)},$$

поэтому

$$f_{\alpha-1}(x) = x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} x^n \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} x^n.$$

По формуле Стирлинга

$$\Gamma(n+1) = n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ при } n \to \infty.$$

Для получения аналогичной формулы для $\Gamma(n+\alpha)$ воспользуемся асимптотической формулой для Г-функции:

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \text{ при } x \to +\infty.$$

Тогда

$$\Gamma(n+\alpha) \sim \sqrt{2\pi} (n+\alpha)^{n+\alpha-\frac{1}{2}} e^{-n-\alpha} \sim \sqrt{2\pi} (n+\alpha)^n e^{-n-\alpha}.$$

Так как

$$(n+\alpha)^n = n^n \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \sim e^\alpha n^n,$$

имеем

$$\Gamma(n+\alpha) \sim \sqrt{2\pi} n^{\alpha-\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

и, значит,

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Таким образом, согласно лемме 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} x^n \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\alpha-1}} x^n \text{ при } x \to 1-0.$$

Вместе с тем так как по условию леммы

$$f(x) \sim \frac{1}{(1-x)^{\alpha}} \text{ при } x \to 1-0,$$

имеем

$$f_{\alpha-1}(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-2}(1-t)^{-\alpha} dt \text{ при } x \to 1-0.$$

Здесь интеграл легко вычислить, если выполнить замену переменной интегрирования $u = \frac{x-t}{1-t}$. Опуская очевидные детали, приводим окончательный результат:

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-2}(1-t)^{-\alpha} dt = \frac{1}{(\alpha-1)(1-x)}.$$

Следовательно,

$$f_{\alpha-1}(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-x)} \text{ при } x \to 1-0,$$

и, значит,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\alpha-1}} x^n \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-x)} \text{ при } x \to 1-0.$$

Таким образом, согласно лемме 3, примененной к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\alpha-1}} x^n,$$

находим

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^{\alpha-1}} \longrightarrow \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \text{ при } x \to 1-0,$$

и теперь результат легко получить с помощью преобразования Абеля.

Действительно, если

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^{\alpha-1}}, \; n = 1, 2, \ldots, \text{ и } S_0 = 0,$$

то

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^{\alpha-1}} k^{\alpha-1} =$$
$$= \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1}) k^{\alpha-1} =$$
$$= \frac{S_n}{n} - \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} S_k((k+1)^{\alpha-1} - k^{\alpha-1}).$$

Заметим, что

$$(k+1)^{\alpha-1} - k^{\alpha-1} = k^{\alpha-1}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\alpha-1} - 1\right) =$$
$$= (\alpha-1)k^{\alpha-2}\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

и

$$\frac{S_k}{k} \to \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \text{ при } k \to \infty,$$

поэтому

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} S_k((k+1)^{\alpha-1} - k^{\alpha-1}) =$$
$$= \frac{\alpha-1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1} \left(1 + O(\tfrac{1}{n})\right) \sim$$
$$\sim \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1} \longrightarrow \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} dt = \frac{\alpha-1}{\alpha\Gamma(\alpha)}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} a_k \longrightarrow \frac{1}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\alpha-1}{\alpha\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)},$$

что и доказывает лемму.

Теперь уже можно доказать, что

$$M\left(n^{1-\frac{s}{2}}f(n)e^{-2\pi i\lambda n}\right)=0,$$

если λ — иррациональное число.

Действительно, уже установлено, что

$$(1-x)^{\frac{s}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}e^{2\pi i\lambda n}x^n\right)\longrightarrow 0 \text{ при } x\to 1-0,$$

поэтому при $x\to 1-0$

$$(1-x)^{\frac{s}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\cos(2\pi\lambda n)x^n\to 0,$$

$$(1-x)^{\frac{s}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\sin(2\pi\lambda n)x^n\to 0.$$

Кроме того, уже было показано, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}} \text{ при } x\to 1-0,$$

поэтому

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}f(n)x^n=\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}\right)^s\sim\pi^{\frac{s}{2}}(1-x)^{-\frac{s}{2}},$$

т. е.

$$(1-x)^{\frac{s}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}f(n)x^n\right)\longrightarrow\pi^{\frac{s}{2}} \text{ при } x\to 1-0.$$

Следовательно,

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}f(n)(1+\cos(2\pi\lambda n))x^n\sim\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{(1-x)^{\frac{s}{2}}} \text{ при } x\to 1-0.$$

Так как левая часть соотношения содержит степенной ряд с неотрицательными коэффициентами, можно воспользоваться леммой 4. В результате получаем

$$\frac{1}{n^{\frac{s}{2}}}\sum_{k=1}^{n}f(k)(1+\cos(2\pi\lambda k))\longrightarrow\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)} \text{ при } n\to\infty.$$

Аналогично из соотношения

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}f(n)x^n\sim\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{(1-x)^{\frac{s}{2}}} \text{ при } x\to 1-0$$

следует, что

$$\frac{1}{n^{\frac{s}{2}}}\sum_{k=1}^{n}f(k)\longrightarrow\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)} \text{ при } n\to\infty,$$

поэтому

$$\frac{1}{n^{\frac{s}{2}}}\sum_{k=1}^{n}f(k)\cos(2\pi\lambda k)\longrightarrow 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Точно так же доказывается, что

$$\frac{1}{n^{\frac{s}{2}}}\sum_{k=1}^{n}f(k)\sin(2\pi\lambda k)\longrightarrow 0 \text{ при } n\to\infty,$$

и, следовательно, получаем

$$\frac{1}{n^{\frac{s}{2}}}\sum_{k=1}^{n}f(k)e^{-2\pi i\lambda k}\longrightarrow 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Отсюда уже вытекает, что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^{1-\frac{s}{2}}f(k)e^{-2\pi i\lambda k}\longrightarrow 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Таким образом, доказано, что

$$M\left(n^{1-\frac{s}{2}}f(n)e^{-2\pi i\lambda n}\right)=0,$$

если λ — иррациональное число.

Рассмотрим теперь рациональное число $\lambda = \frac{h}{k} \in [0,1)$. Имеем

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} e^{2\pi i \frac{h}{k} n^2} = 1+2\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty} x^{(nk+m)^2} e^{2\pi i \frac{h}{k}(nk+m)^2} =$$

$$= 1+2\sum_{m=1}^{k} e^{2\pi i \frac{h}{k} m^2} \sum_{n=0}^{\infty} x^{(nk+m)^2}.$$

Легко видеть, что при $x \to 1-0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{(nk+m)^2} \sim \int_0^{+\infty} x^{(kt+m)^2} dt \sim \int_0^{+\infty} x^{k^2 t^2} dt =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2k\sqrt{|\ln x|}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2k\sqrt{1-x}}.$$

Следовательно, при $x \to 1-0$

$$\sqrt{1-x}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i \frac{h}{k} n^2} x^{n^2}\right) \longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} S_{hk},$$

где

$$S_{kh} = \sum_{m=1}^{k} e^{2\pi i \frac{h}{k} m^2}$$

есть сумма Гаусса. Отсюда вытекает, что при $x \to 1-0$

$$(1-x)^{\frac{s}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} f(n) e^{2\pi i \frac{h}{k} n} x^n\right) \longrightarrow \pi^{\frac{s}{2}} \left(\frac{S_{hk}}{k}\right)^s.$$

Как и в случае иррационального λ, можно воспользоваться леммой 4, предварительно построив требуемые степенные ряды с неотрицательными коэффициентами. В результате из последнего соотношения получаем следующее предельное соотношение:

$$\frac{1}{n^{\frac{s}{2}}} \sum_{m=1}^{n} f(m) e^{-2\pi i \frac{h}{k} m} \longrightarrow \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)} \left(\frac{\overline{S_{hk}}}{k}\right)^s.$$

Отсюда с помощью преобразования Абеля легко получить среднее значение

$$M\left(n^{1-\frac{s}{2}} f(n) e^{-2\pi i \frac{h}{k} n}\right).$$

Действительно, если

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} f(m) e^{-2\pi i \frac{h}{k} m},\ n = 1,2,\ldots,\ \text{и}\ S_0 = 0,$$

то

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} m^{1-\frac{s}{2}} f(m) e^{-2\pi i \frac{h}{k} m} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} (S_m - S_{m-1}) m^{1-\frac{s}{2}} =$$

$$= \frac{S_n}{n^{\frac{s}{2}}} - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} S_m \left((m+1)^{1-\frac{s}{2}} - m^{\frac{s}{2}}\right) =$$

$$= \frac{S_n}{n^{\frac{s}{2}}} - \left(1-\frac{s}{2}\right)\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \frac{S_m}{m^{\frac{s}{2}}}\left(1+O\left(\frac{1}{m}\right)\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}\left(\frac{\overline{S_{hk}}}{k}\right)^s - \left(1-\frac{s}{2}\right)\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}\left(\frac{\overline{S_{hk}}}{k}\right)^s =$$

$$= \frac{\frac{s}{2}\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}\left(\frac{\overline{S_{hk}}}{k}\right)^s = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left(\frac{\overline{S_{hk}}}{k}\right)^s.$$

Таким образом,

$$M\left(n^{1-\frac{s}{2}} f(n) e^{-2\pi i \frac{h}{k} n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} m^{1-\frac{s}{2}} f(m) e^{-2\pi i \frac{h}{k} m} =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left(\frac{\overline{S_{hk}}}{k}\right)^s,$$

т. е. ряд Бора–Фурье функции f_0 имеет следующий вид:

$$f_0(n) = n^{1-\frac{s}{2}} f(n) \sim \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left(1+\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\substack{0<h<k\\(h,k)=1}}\left(\frac{\overline{S_{hk}}}{k}\right)^s e^{2\pi i \frac{h}{k} n}\right).$$

Далее рассмотрим суммы Гаусса

$$S_{hk} = \sum_{m=1}^{k} e^{2\pi i \frac{h}{k} m^2}.$$

Пусть $k = k_1 k_2$, $(k_1, k_2) = 1$ и h — целое число, взаимно простое с k, $0 < h < k$. Тогда имеем единственное разложение вида $\frac{h}{k} = \frac{h_1}{k_1} + \frac{h_2}{k_2}$, где $(h_1, k_1) = 1$, $(h_2, k_2) = 1$, $0 < h_i < k_i$, $i = 1, 2$. Докажем, что

$$S_{hk} = S_{h_1 k_1} S_{h_2 k_2}.$$

Действительно, выражение $m_1 k_2 + m_2 k_1$ пробегает полную систему вычетов по модулю k, если m_1 и m_1 пробегают полные системы вычетов по модулям k_1 и k_2 соответственно.

Кроме того,

$$(m_1 k_2 + m_2 k_1)^2 \equiv m_1^2 k_2^2 + m_2^2 k_1^2 (\mathrm{mod}\, k).$$

Следовательно,

$$S_{hk} = \sum_{m=1}^{k} e^{2\pi i \frac{h}{k} m^2} = \sum_{m_1=1}^{k_1} \sum_{m_2=1}^{k_2} e^{2\pi i \frac{h}{k} (m_1 k_2 + m_2 k_1)^2} =$$

$$= \sum_{m_1=1}^{k_1} e^{2\pi i \frac{h k_2}{k_1} m_1^2} \sum_{m_2=1}^{k_2} e^{2\pi i \frac{h k_1}{k_2} m_2^2} =$$

$$= \sum_{m_1=1}^{k_1} e^{2\pi i \frac{h_1}{k_1} m_1^2} \sum_{m_2=1}^{k_2} e^{2\pi i \frac{h_2}{k_2} m_2^2} = S_{h_1 k_1} S_{h_2 k_2},$$

так как $h_1 \equiv h k_2 (\mathrm{mod}\, k_1)$, $h_2 \equiv h k_1 (\mathrm{mod}\, k_2)$.

Из мультипликативности сумм Гаусса следует, что функция

$$\Phi(k) = \sum_{\substack{0<h<k \\ (h,k)=1}} \left(\frac{S_{hk}}{k} \right)^s e^{2\pi i \frac{h}{k} n}$$

является мультипликативной функцией натурального аргумента, т. е. $\Phi(k_1 k_2) = \Phi(k_1)\Phi(k_2)$ при условии, что k_1 и k_2 — взаимно простые числа.

Следовательно, по крайней мере формально, можно записать разложение ряда Бора–Фурье в бесконечное произведение

$$f_0(n) \sim \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \prod_{(p)} (1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \cdots).$$

Здесь каждый p-множитель бесконечного произведения имеет интересную интерпретацию в терминах числа решений сравнений по модулям, равным степеням простого числа p. Для выяснения этого преобразуем каждую функцию $\Phi(p^t)$:

$$\Phi(p^t) = \sum_{\substack{0<h<p^t \\ (h,p)=1}} \left(\frac{S_{hp^t}}{p^t} \right)^s e^{2\pi i \frac{h}{p^t} n} =$$

$$= p^{-ts} \sum_{h=1}^{p^t} \left(\sum_{m=1}^{p^t} e^{-2\pi i \frac{h}{p^t} m^2} \right)^s e^{2\pi i \frac{h}{p^t} n} -$$

$$- p^{-(t-1)s} \sum_{h=1}^{p^{t-1}} \left(\sum_{m=1}^{p^{t-1}} e^{-2\pi i \frac{h}{p^{t-1}} m^2} \right)^s e^{2\pi i \frac{h}{p^{t-1}} n}.$$

Заметим, что

$$\sum_{h=1}^{p^t} \left(\sum_{m=1}^{p^t} e^{-2\pi i \frac{h}{p^t} m^2} \right)^s e^{2\pi i \frac{h}{p^t} n} =$$

$$= \sum_{m_1, \cdots, m_s=1}^{p^t} \sum_{h=1}^{p^t} e^{2\pi i (n - m_1^2 - \cdots - m_s^2) \frac{h}{p^t}},$$

где внутренняя сумма

$$\sum_{h=1}^{p^t} e^{2\pi i (n - m_1^2 - \cdots - m_s^2) \frac{h}{p^t}} = \begin{cases} 0, & \text{если } m_1^2 + \cdots + m_s^2 \not\equiv n (\mathrm{mod}\, p^t), \\ p^s, & \text{если } m_1^2 + \cdots + m_s^2 \equiv n (\mathrm{mod}\, p^t). \end{cases}$$

Обозначая $T(p^t)$ число решений сравнения

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + m_s^2 \equiv n (\mathrm{mod}\, p^t),$$

можно записать

$$\sum_{h=1}^{p^t}\left(\sum_{m=1}^{p^t} e^{-2\pi i\frac{h}{p^t}m^2}\right)^s e^{2\pi i\frac{h}{p^t}n} = p^t T(p^t),$$

поэтому

$$\Phi(p^t) = p^{-ts+t}T(p^t) - p^{-(t-1)s+t-1}T(p^{t-1})$$

и

$$1+\Phi(p)+\Phi(p^2)+\cdots+\Phi(p^m) = p^{-m(s-1)}T(p^m).$$

Следовательно, если ряд $1+\Phi(p)+\Phi(p^2)+\cdots$ сходится, то его сумма

$$f_p(n) = 1+\Phi(p)+\Phi(p^2)+\cdots = \lim_{m\to\infty} p^{-m(s-1)}T(p^m).$$

Рассмотрим снова ряд Бора–Фурье функции f_0 :

$$f_0(n) \sim M(f_0)\left(1+\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\substack{0<h<k\\(h,k)=1}}\left(\frac{\overline{S_{hk}}}{k}\right)^s e^{2\pi i\frac{h}{k}n}\right),$$

где

$$M(f_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_0(k) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}.$$

Так как для сумм Гаусса справедлива оценка $|S_{hk}| \le 2\sqrt{k}$, коэффициенты Бора–Фурье функции f_0

$$c_{\frac{h}{k}} = M(f_0)\left(\frac{\overline{S_{hk}}}{k}\right)^s = O\left(\frac{1}{k^{\frac{s}{2}}}\right) \quad \text{при } k\to\infty,$$

поэтому ряд Бора–Фурье сходится абсолютно, если $\frac{s}{2}-1>1$, т. е. если $s\ge 5$.

Считая, что $s\ge 5$, и обозначая $S(n)$ сумму ряда Бора–Фурье функции f_0, записываем

$$S(n) = M(f_0)\left(1+\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\substack{0<h<k\\(h,k)=1}}\left(\frac{\overline{S_{hk}}}{k}\right)^s e^{2\pi i\frac{h}{k}n}\right).$$

Очевидно, что функцию S можно определить этой формулой на всей группе $\mathbb{Z}$, при этом S — почти периодическая функция на $\mathbb{Z}$. Кроме того, если по каким-либо соображениям f_0 является почти периодической функцией натурального аргумента, то необходимо, чтобы $f_0 = S$. Полезно отметить [20, 23], что проведенный Г. Харди анализ арифметических свойств функции f, основанный на теории эллиптических тэта-функций, показывает, что $f_0(n) = n^{1-\frac{s}{2}}f(n)$ является почти периодической функцией при $5\le s\le 8$, поэтому для таких s функция f_0 совпадает с особым рядом S.

Для $s>8$ функция f_0 не является почти периодической, но близка к своему особому ряду S в том смысле, что

$$f_0(n) = S(n) + O\left(n^{1-\frac{s}{4}}\right),$$

поэтому

$$f_0(n) - S(n) \longrightarrow 0 \text{ при } n\to\infty.$$

В случае $s=3$ или $s=4$ ряд Бора–Фурье функции f_0 не является абсолютно сходящимся, а f_0 не является почти периодической. Однако можно доказать, что f_0 есть почти периодическая функция по А. Безиковичу [7, 15]. Другими словами,

$$M(|f_0|^2) < +\infty,\ M(|f_0 - S_N|^2)\to 0 \text{ при } N\to\infty,$$

где S_N — частная сумма ряда Бора–Фурье функции f_0.

Пусть теперь $f(n)$ обозначает число целочисленных решений уравнения

$$x_1^m + x_2^m + \cdots + x_s^m = n.$$

Легко показать, что

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n) \sim Cn^{\frac{s}{m}} \text{ при } n\to\infty,$$

где константа C вычисляется в явном виде. Тогда на основании элементарных соображений, связанных с преобразованием Абеля, для

$$f_0(n) = n^{1-\frac{s}{m}}f(n)$$

справедливо асимптотическое соотношение

$$f_0(1)+f_0(2)+\cdots+f_0(n) \sim C_1 n,$$

где $C_1 = M(f_0)$ также вычисляется в явном виде.

По такой же схеме, как и в случае $m = 2$, можно доказать, что для каждого $\lambda \in [0,1)$ существует среднее значение

$$c_\lambda = M(f_0(n)e^{-2\pi i\lambda n}),$$

при этом $c_\lambda = 0$, если λ — иррациональное число, а для рационального $\lambda = \frac{h}{k} \in [0,1)$

$$c_\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n} e^{-2\pi i\frac{h}{k}q} = M(f_0)\left(\frac{\overline{S_{hk}}}{k}\right)^s,$$

где

$$S_{hk} = \sum_{q=1}^{k} e^{2\pi i\frac{h}{k}q^m}.$$

В результате функции f_0 можно сопоставить ряд Бора–Фурье

$$f_0(n) \sim M(f_0)\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\substack{0<h<k\\(h,k)=1}}\left(\frac{\overline{S_{hk}}}{k}\right)^s e^{2\pi i\frac{h}{k}n}\right).$$

Так как для S_{hk} справедлива оценка

$$|S_{hk}| \le C(m)k^{1-\frac{1}{m}},$$

ряд Бора–Фурье абсолютно и равномерно сходится при $s \ge 2m+1$, поэтому его сумма $S(n)$, т.е. особый ряд для функции f_0, есть почти периодическая функция. Кроме того, как и в случае $m = 2$, функция

$$\Phi(k) = \sum_{\substack{0<h<k\\(h,k)=1}}\left(\frac{\overline{S_{hk}}}{k}\right)^s e^{2\pi i\frac{h}{k}n}$$

является мультипликативной функцией натурального аргумента. Следовательно, особый ряд $S(n)$ можно разложить в бесконечное произведение

$$S(n) = M(f_0)\prod_{(p)} f_p(n),$$

где

$$f_p(n) = 1 + \Phi(p) + \Phi(p^2) + \cdots$$

Если $T_{sm}(p^t)$ обозначает число решений сравнения

$$x_1^m + x_2^m + \cdots + x_s^m \equiv n (\mathrm{mod}\, p^t),$$

то

$$1 + \Phi(p) + \cdots + \Phi(p^t) = p^{-t(s-1)}T_{sm}(p^t),$$

поэтому

$$f_p(n) = \lim_{t\to\infty} p^{-t(s-1)}T_{sm}(p^t).$$

Отметим, что p-компонента группы $H = \Lambda^\wedge$ есть $\Lambda_p^\wedge = \mathbb{Z}_p$, а функция $f_p(n)$ допускает естественную интерпретацию в терминах p-адических решений уравнения $x_1^m + x_2^m + \cdots + x_s^m = n$. Кроме того, из плотности $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}_p$ и абсолютной сходимости ряда $1+\Phi(p)+\Phi(p^2)+\cdots$ следует, что функция f_p обладает единственным непрерывным продолжением на все $\mathbb{Z}_p$.

Особый ряд S, даже если он сходится абсолютно и равномерно и, следовательно, является почти периодической функцией на $\mathbb{Z}$, не обязательно должен совпадать с исходной функцией

$$f_0(n) = n^{1-\frac{s}{m}}f(n).$$

Равенство $f_0 = S$ выполняется только в случае, если f_0 также является почти периодической функцией.

В предлагаемой работе мы не рассматриваем более тонкие детали кругового метода Харди–Литтлвуда [11, 23]. Отметим только, что $f(n)$ можно представить с помощью формулы Коши интегралом по окружности $\mathbb{T}$, при этом по определенному правилу, предложенному Г. Харди и Д. Литтлвудом, окружность разбивается на большие и малые дуги. Сумма интегралов по большим дугам в пределе дает предполагаемый главный член асимптотической формулы для $f(n)$, равный $n^{\frac{s}{m}-1}$, а сумма интегралов по малым дугам — предполагаемый остаточный член меньшего порядка. Так, Г. Харди и Д. Литтлвуд доказали, что для $s \ge 2^m(2m+1)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{1-\frac{s}{m}}f(n) - S(n)\right) = 0.$$

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абжандадзе З.Л.* О спектральном радиусе для нелинейного преобразования Фурье // Вестн. С-Петерб. ун-та Сер. 1. 1997. Вып. 3. С. 8–10.

2. *Абжандадзе З.Л.* О спектральном радиусе для нелинейного преобразования Фурье. М., 1997. 50 с. Деп. в ВИНИТИ 10.01.97. №79-В97.

3. *Абжандадзе З.Л.* Асимптотические свойства преобразования Фурье–Френеля на локально компактных коммутативных группах. М., 1997. 36 с. Деп. в ВИНИТИ 30.10.97. №3192-В97.

4. *Абжандадзе З.Л.* Асимптотические свойства нелинейного преобразования Фурье: Труды международной конференции "Теория приближений и гармонический анализ". Тула, 1998 // Изв. Тульск. гос. ун-та. 1988. Т. 4. Вып. 1. С. 9–12.

5. *Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н.* Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука, 1987. 368 с.

6. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.

7. *Бор Г.* Почти периодические функции. М.;Л.: Гостехтеориздат, 1934. 128 с.

8. *Бурбаки Н.* Спектральные теории. М.: Мир, 1972. 184 с.

9. *Вейль А.* Интегрирование в топологических группах и его применения. М.: ИЛ, 1950. 224 с.

10. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М.: Физматгиз, 1963. 256 с.

11. *Вон Р.* Метод Харди–Литтлвуда. М.: Мир, 1985. 182 с.

12. *Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилов Г.Е.* Коммутативные нормированные кольца. М.: Физматгиз, 1960. 316 с.

13. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т.1. М.: Мир, 1965. 616 с.

14. *Кейперс Л., Нидеррейтер Г.* Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985. 408 с.

15. *Левитан Б.М.* Почти периодические функции. М.: Гостехтеориздат, 1953. 396 с.

16. *Лион Ж., Верн М.* Представление Вейля, индекс Маслова и тэтаряды. М.: Мир, 1983. 210 с.

17. *Люмис Л.* Введение в абстрактный гармонический анализ. М.: ИЛ, 1956. 252 с.

18. *Осипов В.Ф.* Введение в абстрактный гармонический анализ. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1984. 100 с.

19. *Осипов В.Ф.* Анализ Бора–Фурье на локально компактных коммутативных группах. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. 104 с.

20. *Осипов В.Ф.* Почти периодические функции Бора–Френеля. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1992. 312 с.

21. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980. 464 с.

22. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. Т.1. М.: Мир, 1985. 262 с.

23. *Grosswald E.* Representations of integers as sums of squares. Springer-Verlag. 1985. 251 p.

24. *Grothendieck A.* Produits tenzoriels topologiques et espaces nucléaires // Mem. Amer. Math. Soc. 1955. N 16. 140 p.

25. *Rudin W.* Fourier analysis on groups. NY; London: J.Wiley & Sons, 1962. 286 p.

26. *Weil A.* Sur certains groupes d'operateurs unitaires // Acta Math. 1964. Vol. 111. P.143–211.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3
ГЛАВА 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ–ФРЕНЕЛЯ 7
§ 1. Основные сведения из анализа Фурье на локально компактных коммутативных группах . . . . . —
§ 2. Характеры второй степени 15
§ 3. Группа Гейзенберга 20
§ 4. Преобразование Фурье–Френеля 29
§ 5. Преобразование Фурье–Френеля на локально компактной коммутативной группе 43
ГЛАВА 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ–ФРЕНЕЛЯ НА ПРЯМОЙ 77
§ 6. О спектральном радиусе для линейного преобразования Фурье . . . . . —
§ 7. О спектральном радиусе для преобразования Фурье–Френеля 82
§ 8. О спектральном радиусе для нелинейного преобразования Фурье 99
§ 9. Операторы обобщенного сдвига и коциклы в группе Гейзенберга 114
ГЛАВА 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ГРУППЕ 127
§ 10. Характеры второй степени и преобразование Фурье–Френеля на локально компактной коммутативной группе 128
§ 11. Оценка интеграла Фурье–Френеля 135
§ 12. О лемме Римана–Лебега для преобразования Фурье–Френеля в группе $G = \mathbb{R}^n$ 141
§ 13. Преобразование Фурье–Френеля в группах $\mathbb{Z}^q$ и $\mathbb{T}^r$ 146
§ 14. О лемме Римана–Лебега для преобразования Фурье–Френеля в элементарной группе $\mathbb{R}^p \oplus \mathbb{Z}^q \oplus \mathbb{T}^r \oplus F$ 148
§ 15. Преобразование Фурье–Френеля в компактной группе . . 155
§ 16. Характеры второй степени на проективном пределе компактных групп 160
ГЛАВА 4. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ 165
§ 17. Характеры второй степени на аддитивной группе целых чисел 165
§ 18. Суммы Гаусса 182
§ 19. О представлении натуральных чисел суммой квадратов . 191
УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ 220

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Зураб Леванович Абжандадзе
Виктор Федорович Осипов

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ–ФРЕНЕЛЯ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Редактор А. А. Гранаткина
Художественный редактор Е. И. Егорова

Лицензия ЛР № 040050 от 15.08.96

Подписано в печать 05.12.2000. Формат 60×84 1/16 Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 13.02. Тираж 500 экз. Заказ 258.
Изд-во СПбГУ. 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Типография Изд-ва СПбГУ. 199061, С.-Петербург, Средний пр., 41