РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ

М. И. Нечепуренко

ИТЕРАЦИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИВМиМГ

Новосибирск 1997

УДК 517

Нечепуренко М.И. Итерации вещественных функций и функциональные уравнения. – Новосибирск, 1997. – 228 с.

В книге излагаются основы итерационного исчисления и методов решения функциональных уравнений. Справочная часть содержит таблицы итераций, таблицы конечных сумм функций и сводку решений конкретных функциональных уравнений.

Книга адресована прежде всего научным работникам, занимающимся приложениями, и студентам.

Nechepurenko M.I. Iterations of real functions and functional equations. – Novosibirsk, 1997. – 228 p.

The book presents a basis of iterative calculus and methods of solution of the functional equations. The reference part contains tables of iterations, tables of the finite sums of functions and summary of solutions of concrete functional equations.

The book is addressed, first of all, to scientific researchers engaged in applications and students of universities.

Оформлено в системе LaTeX, макрос NCC

Предисловие

В книгу включены факты, группирующиеся вокруг двух понятий: итерации функций и функциональных уравнений. Для заданной функции f ее n-й итерацией f^n называется функция, определяемая рекуррентными соотношениями

$$f^0(x) = x, \quad f^1(x) = f(x), \quad f^2(x) = f(f^1(x)), \ldots, f^n(x) = f(f^{n-1}(x)).$$

Функциональные уравнения понимаются в узком смысле – это соотношения, содержащие лишь суперпозиции известных и неизвестных функций.

Понятия функциональных уравнений и итераций взаимно проникающие: нахождение n-й итерации может быть сведено к решению функциональных уравнений, а решения функциональных уравнений, в свою очередь, иногда могут быть выражены через итерации функций. Например, уравнение

$$f(x) - \frac{1}{2}f(\sin x) = \sin x, \qquad -\infty < x < +\infty,$$

относительно неизвестной функции f имеет единственное ограниченное решение

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{2^{n-1}}.$$

Здесь $\sin^n x$ – n-я итерация: $\sin^n x = \underbrace{\sin(\ldots(\sin}_{n \text{ раз}} x)\ldots)$.

• Кратко об истории вопроса. Первые публикации по итерациям функций известны: работа М. Кондорсе в Acta Academiae Imperialis Petropolitanae (1777 г.), в которой было дано без доказательства разложение трех функций, являющихся итерациями, и работа Л. Эйлера в том же номере журнала, в которой было дано доказательство этих разложений и выведены некоторые свойства итераций.

Первые работы по функциональным уравнениям были ориентированы на *характеризацию* определенных функций или классов функций. Л. Эйлер сформулировал и исследовал уравнения для однородных функций

$$F(xz, yz) = z^k F(x, y).$$

Ж. Даламбер, С. Пуассон, О. Коши, Ж. Дарбу рассматривали уравнение

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

в связи с обоснованием закона сложения сил в механике. О. Коши нашел непрерывные решения решения следующих четырех уравнений:

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \qquad f(x+y)=f(x)\cdot f(y),$$
$$f(xy)=f(x)+f(y), \qquad f(xy)=f(x)\cdot f(y).$$

Первое из этих уравнений К. Гаусс использовал для обоснования нормального закона распределений вероятностей. Н.И. Лобачевский при определении угла параллельности (в геометрии Лобачевского) рассматривал уравнение

$$(f(x))^2=f(x-y)f(x+y), \qquad 0\le y\le x.$$

Н. Абель нашел решение уравнения с несколькими неизвестными функциями –

$$g(x)+g(y)=h(xf(y)+yf(x)),$$

и рассмотрел решение системы уравнений

$$\begin{aligned} F(x,F(y,z)) &= F(y,F(z,x))=F(z,F(x,y)) \\ &= F(x,F(z,y))=F(y,F(x,z))=F(z,F(x,y)). \end{aligned}$$

Частные функциональные уравнения изучали Х.В. Пексидер, Д.М. Синцов, А.Р. Швейцер, С. Пинхерле, Э. Пикар, Ч. Беббидж и др.

Г. Лейбниц, И. Барроу, П. Ферма развили методы решения уравнений в конечных разностях, систематическое изложение которых было дано Б. Тейлором и А.А. Марковым.

Ч. Беббидж рассмотрел несколько типов уравнений и ввел понятие общего решения.

Одновременно развивалась теория итераций. Понятие итерации уточняли Ч. Беббидж, Рамюс, Р. Гоппэ, М. Коркин, Дж. Фарк, И. Лемэре.

Р. Гоппэ распространил итерационный показатель на произвольные вещественные, а А. Ливенцов – на произвольные комплексные числа. Э. Шрёдер нашел итерации различных функций и предложил представление итераций интерполяционным (по показателю) рядом Л. Эйлера. Л. Бетхер и Дж. Фарк рассматривали итерации как группу однопараметрических преобразований, а М. Коркин – дифференциальные уравнения итераций

$$\frac{\partial f^y(z)}{\partial y}=\lambda(f^y(z)), \qquad \frac{\partial f^y(z)}{\partial y}=\lambda(z)\frac{\partial f^y(z)}{\partial z}.$$

Г. Кёниг и Л. Ле изучали решения уравнений Э. Шрёдера и Н. Абеля

$$f(\varphi(x))=\alpha f(x), \qquad f(\varphi(x))=\beta+f(x)$$

(φ – известная функция, α и β – известные константы) и рассмотрели связь их решения с представлением итераций. М. Коркин нашел формальные разложения итераций в окрестности неподвижной точки. Методы теории функций комплексного переменного к проблемам итерации применяли Э. Шрёдер, Греви, И. Лемерей, И. Аристов, А. Бетхер, Г. Кёниг.

• Приведем примеры задач (решавшихся уже в двадцатом веке), в которых естественно возникают как функциональные уравнения, так и итерации функций.

Теория разложения случайных величин на независимые слагаемые. Теоремы Леви–Хинчина о представлении логарифма безгранично делимой характеристической функции:

$$\ln\varphi(u) = i\gamma u + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iu\beta} - 1 - \frac{iu\beta}{1+\beta^2}\right)\frac{1+\beta^2}{\beta^2}dG(\beta),$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$, а G – неубывающая функция ограниченной вариации, – является основной в теории безгранично делимых законов. Ее доказательство, а также изучение некоторых смежных вопросов иногда основываются на решении ряда функциональных уравнений. В доказательстве Иогансена [1966] (в изложении Линника, Островского [1972]) рассмотрены, в частности, следующие уравнения:

$$2f(x) + 2f(y) = f(x+y) + f(x-y),$$

$$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y),$$

$$2f(x) = f(x+y) + f(x-y) - 2xB(y),$$

$$2f(x)\cos\beta y = f(x+y) + f(x-y) - 2xB(y),$$

$$2f(x) = f(x+y) + f(x-y) - 2f(y)\cos\beta x,$$

$$2f(x) = f(x+y) + f(x-y) + c(1-\cos\beta y)\sin\beta x.$$

Для каждого из этих уравнений найдены общие, непрерывные на вещественной оси решения.

Ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона относится к процессам размножения и превращения частиц в предположении, что одни частицы превращаются в другие независимо друг от друга. Первоначальная формулировка, данная Гальтоном, – задача о вырождении фамилий – сводится к следующей. Пусть p_0, $p_1, \ldots$ – вероятности отцу иметь 0, 1, ...сыновей. Определяется вероятность того, что в r-м поколении будет данное число потомков, в частности, нуль (вырождение мужской линии). Эта модель использована в теории химических цепных реакций, в изучении размножения электронов в электронном умножителе, в теории ядерных реакций, в теории космических лучей и в генетике.

Процесс Гальтона–Ватсона – это однородная цепь Маркова $(Z_n : n = 0, 1, \ldots)$ с неотрицательными целочисленными состояниями Z_n, интерпретируемыми как число частиц популяции в n-м поколении; $Z_0 = 1$. Переходные вероятности $p_{ik} = P(Z_{n+1} = k | Z_n = i)$ однозначно определяются при предположении, что частица, существующая в n-м поколении, производит j частиц в $(n+1)$-м поколении с вероятностью (не зависящей от номера поколения), равной

$$P(Z_1 = j) = p_j, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots; \qquad \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1.$$

Дополнительно предполагается, что $p_0 + p_1 < 1$ и $p_i \neq 1$ при всех i.

Вводится производящая функция вероятностей p_i:

$$f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j, \qquad s \in \mathbb{C}, \qquad |s| \leq 1.$$

Тогда производящая функцию распределения Z_n равна

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(Z_n = j) s^j = f^n(s),$$

где функция f^n – n-я итерация функции f.

Характеристиками рассматриваемого процесса являются:

* Первые два момента случайной величины Z_n. Далее $m = EZ_1$, $\sigma^2 = DZ_1$.
* Вероятность вырождения

  $$q = P(Z_n \to 0) = \lim_{n \to \infty} f^n(0)$$

  при $m \leq 1$ равна единице, а при $m > 1$ – единственному корню уравнения $s = f(s)$, меньшему единицы.
* Асимптотика вероятности $f^n(0) = P(Z^n = 0)$ при $n \to \infty$: если $m > 1$ и $q > 0$, то

  $$f^n(0) = q - d(f'(q))^n + O\Big((f'(q))^{2n}\Big),$$

  где d – положительная константа.
* Предельное распределение: если $m > 1$ и $\sigma_1^2 < \infty$, то случайная величина $W_n = Z_n / m^n$ сходится почти, наверное, к случайной величине W, для которой

  $$EW = 1, \qquad DW = \frac{\sigma^2}{m(m-1)}.$$

  При этом преобразование Лапласа $\varphi(s) = Ee^{-sW}$, $\operatorname{Re} s \geq 0$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\varphi(ms) = f(\varphi(s)), \qquad \varphi'(0) = -1,$$

которое имеет единственное решение на классе характеристических функций.

Пусть $m < 1$ и $\sigma_1^2 < \infty$. Тогда для каждого $j = 1, 2, \ldots$ пределы

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n = j | Z_n \neq 0) = b_j$$

существуют, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = 1$, а производящая функция $g(s) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j s^j$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$g(f(s)) = mg(s)+1-m, \quad |s| \leq 1.$$

Функция g имеет вид $g(s) = 1 + (s-1)\vartheta(s)$, где $\vartheta(s)$ – непрерывная функция и $\vartheta(1) = g'(1)$. Уравнение имеет единственное решение такого типа.

Псевдослучайные числа. Методы Монте–Карло численного решения некоторых математических задач основаны на возможности получения последовательности чисел $x_1, x_2, \ldots$, кажущихся случайными, как будто числа x_n выбираются равновероятно и независимо из множества $\{\frac{0}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}\}$. Такие числа называются псевдослучайными. Обычно используются рекуррентные методы генерации псевдослучайных чисел, при которых число x_n зависит от нескольких предыдущих уже сформированных чисел. В простейшем случае

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad n \geq 0.$$

Данная последовательность полностью определена при фиксированной функции f и выбранном значении начального члена последовательности x_0, так что в действительности эта последовательность не является случайной.

Наиболее популярны линейные конгруентные методы вида

$$x_{n+1} = ax_n + \frac{c}{m} \pmod 1,$$

где a, c, m — целые константы.

Последовательности такого вида, начиная с некоторого номера m, входят в цикл, так что числа $x_m, \ldots, x_{m+p-1}$ различны, а $x_{m+p}=x_m$ (следовательно, и $x_{n+p}=x_n$ при всех $n \geq m$). Хорошие генераторы формируют последовательности с большими периодами p и генерируемые ими числа удовлетворительно проходят статистическую проверку на независимость, случайность и равномерность. Для линейных конгруентных методов это достигается подходящим выбором значений a, c, m и x_0.

В связи со сказанным актуальна задача исследования и максимизации периодов циклов в рекуррентных последовательностях.

Отметим, что на базе генераторов псевдослучайных числовых последовательностей строятся генераторы других псевдослучайных объектов: векторов, матриц, функций, потоков, полей, графов и пр. Они также широко используются при компьютерном моделировании, например при имитации стохастических процессов, протекающих в сложных технических, природных и социальных системах.

Уравнения гидравлического поля. Н.М. Герсеванов [1950] предложил общую схему сведения ряда задач по фильтрации грунтовых вод к решению функциональных уравнений.

Установившееся течение грунтовых вод (в плоской задаче) описывается гидромеханической сеткой, состоящей из двух систем ортогонально пересекающихся кривых: эквипотенциальных кривых (гидравлический напор $\alpha =$const) и линий тока (расход воды $\beta =$const). Пусть x, y – точки пересечения этих кривых:

$$x = \varphi(\alpha, \beta), \qquad y = \psi(\alpha, \beta).$$

Из теории фильтрации следует

$$x + iy = f(\alpha + i\beta),$$

где f – аналитическая функция. Если $\overline{f}$ – функция, сопряженная f, то

$$x = \frac{f(\alpha + i\beta) + \overline{f}(\alpha - i\beta)}{2}, \qquad y = \frac{f(\alpha + i\beta) - \overline{f}(\alpha - i\beta)}{2}.$$

Условия на границах фильтрационного потока приводят к системе линейных функциональных уравнений в конечных разностях относительно функций f и $\overline{f}$.

Н.М. Герсеванов рассмотрел, в частности, следующие задачи фильтрации: (1) под шпунтовым рядом; (2) из открытых русел в грунт; (3) через перемычки при непроницаемом основании; (4) через стенки в глубоких колодцах; (5) в насыпи на дренажном основании.

Кроме нахождения гидромеханических сеток был также решен ряд оптимизационных задач.

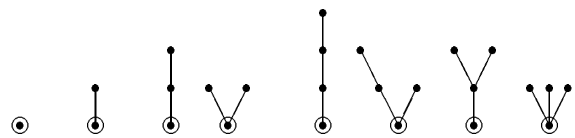
Задачи перечисления в теории графов заключаются в оценке числа теоретикографовых объектов определенного класса. Решение этих задач часто основывается на использовании производящих функций.

Например, пусть T_p – число корневых деревьев порядка p (рис. 0.1). Производящая функция для корневых деревьев

$$T(x) = \sum_{p=1}^{\infty} T_p x^p = x \prod_{p=1}^{\infty} (1 - x^p)^{-T_p}$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$T(x) = x \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T(x^k)}{k}\right).$$



а б в г

Рис. 0.1. Примеры корневых деревьев: а – (T_1=1), б – (T_2=1), в – (T_3=2), г – (T_4=4)

Единственное решение этого уравнения – аналитическая в нуле функция с ненулевым радиусом сходимости.

Из функционального уравнения нетрудно получить рекуррентную и асимптотическую формулы для T_p.

Проблемы Гильберта. В своем докладе "Математические проблемы" на Международном конгрессе в Париже в 1900 г. Д. Гильберт дважды коснулся вопросов, связанных с решением функциональных уравнений.

Пятая проблема (связанная с функциональными уравнениями, описывающими групповое свойство конечных непрерывных групп преобразований) сформулирована в виде: "Насколько результаты, полученные в предположении дифференцируемости рассматриваемых функций, остаются в силе при новых условиях, без этого предположения?"

Д. Гильберт отмечает, что "функциональные уравнения ... не содержат в себе ничего такого, что требовало бы дифференцируемости входящих в них функций". Поясним ситуацию. С известными функциями, входящими в уравнение, связаны области их определения и значений. Операции суперпозиции, образующие уравнение, диктуют лишь области определения и значений неизвестных функций. Тем не менее, например, непрерывные решения уравнений Коши оказываются аналитическими.

Если ничего не предполагать, то решение может оказаться патологическим, например, в случае уравнения Коши такими оказываются решения Гамела (с графиком, всюду плотным на плоскости). Другой пример – уравнение для функции Вейерштрасса. Есть уравнения, имеющие единственными решениями константы, а есть уравнения вообще не имеющие решения.

В первоначальной формулировке пятая проблема Д. Гильберта была решена положительно.

Тринадцатая проблема (связанная с задачами номографии, но выходящая далеко за их пределы) была сформулирована так: "Показать, что уравнение седьмой степени

$$f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$$

не разрешимо с помощью каких-либо непрерывных функций, зависящих от двух аргументов".

А.Н. Колмогоров доказал, что любая непрерывная функция n переменных представима в виде суперпозиции непрерывных функций трех переменных. В.И. Арнольд снизил число переменных в этой теореме до двух и тем самым опроверг гипотезу Д. Гильберта. А.Н. Колмогоров снизил число переменных до одного при допустимости использования функции суммирования $2n+1$ переменной. Вклад в решение этой проблемы внесли А.Г. Витушкин, Н.К. Бари, А. Виман, Л.А. Бассалыго и др. Все результаты, полученные при этом, могут быть переформулированы как утверждения о существовании непрерывных решений некоторых функциональных уравнений.

Методы, наработанные при решении тринадцатой проблемы, еще не адаптированы к другим задачам, связанным с решением функциональных уравнений.

• В настоящее время исследования в области теории итераций и функциональных уравнений проводятся во многих исследовательских центрах: в институтах математики в Белграде (Югославия), Киеве, Санкт–Петербурге; в университетах Гамильтона и Ватерлоо (Канада), Тулузы и Нанте (Франция), Граце (Австрия), Барселоны (Испания), Штутгардта (Германия), Копенгагена (Дания); в университете Луизваля, Техасском техническом университете, Иллинойском технологическом институте и в институте Куранта (США), в университетах Дебрецена (Венгрия) и Окаяме (Япония) и др. Состоялись десятки Международных конференций по итерациям и функциональным уравнениям.

В последние десятилетия увеличилось число публикаций по рассматриваемому направлению. Это не дань моде и связано, скорее всего, с общей интенсификацией научных исследований и востребованностью такого сорта моделей, а также с дальнейшей математизацией естественных и общественных наук. На рис. приведена статистика числа публикаций с 1900 г. по десятилетиям (цифры занижены, так как учитывались лишь работы, содержащиеся в списке литературы).

• О содержании книги. Книга носит обзорный характер. Первоначальную цель – написать справочник по функциональным уравнениям – удалось достичь лишь частично, так как многие из опубликованных работ оказались недоступны.

Рассматриваемая проблематика ограничена в книге вещественным случаем, хотя известны интересные результаты о функциональных уравнениях для комплекснозначных функций и об уравнениях в общих алгебраических системах.

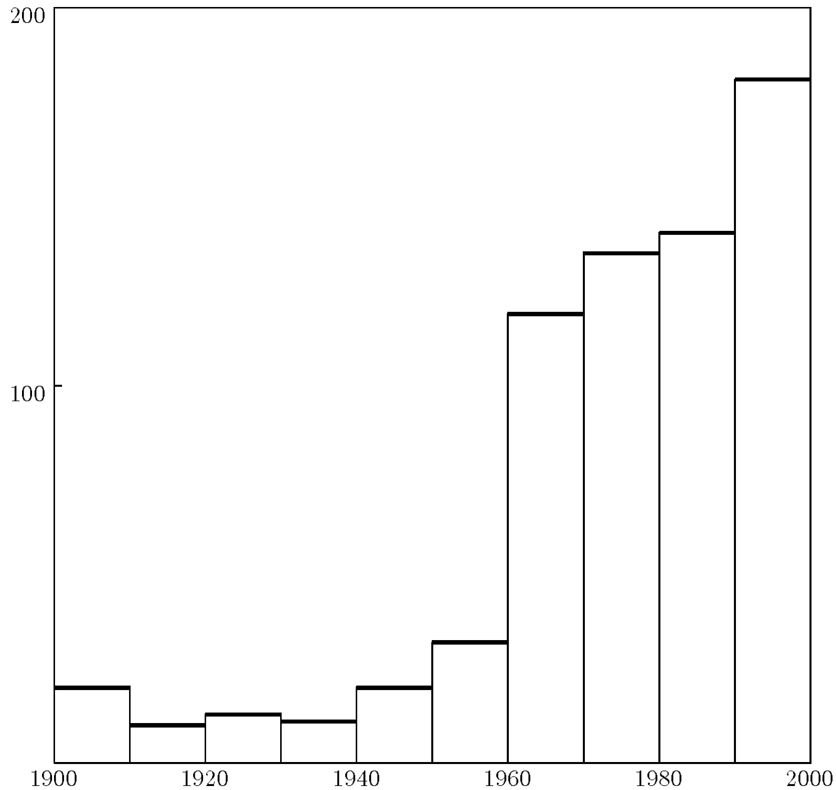


Рис. 0.2. Работы по функциональным уравнениям и итерациям (число публикаций)

Имеются и другие пробелы. Задачи решения функциональных уравнений непосредственно связаны с задачами итерирования функций, а изучение сходимости итераций, по крайней мере в аналитическом случае, требует привлечения методов теории функций комплексного переменного. В последние десятилетия в теории динамических систем возник интерес к каскадам (в частности, итерациям одномерных отображений): на простейших моделях удалось наблюдать и исследовать многие вопросы хаотичности, сходимости и устойчивости динамических систем. Некоторые из этих результатов, например по символическим динамикам, следовало бы отразить в книге.

В первой главе (совместно с приложениями А, Б и Д) уточняются необходимые для дальнейшего терминология и понятия. Во второй главе излагаются основные факты теории итераций вещественных функций. В третьей главе приведен полный перечень функций (их, к сожалению, немного), итерации которых можно представить в конечном виде через суперпозиции элементарных функций.

Четвертая глава целиком посвящена уравнениям в конечных разностях. В приложении Г предложен вариант операционного исчисления, ориентированный на решение разностных уравнений с непрерывной переменной. В пятой главе дается обзор основных подходов, используемых при решении различных функциональных уравнений.

В главах с шестой по восьмую приведена достаточно представительная выборка результатов решения разнообразных функциональных уравнений. Сюда вошли классические уравнения Даламбера, Гаусса, Коши, Лобачевского; рекуррентные уравнения для ортогональных многочленов; уравнения, определяющие классы некоторых специальных функций; различные уравнения, встречающиеся в приложениях и теоретических исследованиях; формулы суммирования конечных сумм функций; чисто иллюстративные примеры. В связи с необходимостью систематизации информации о функциональных уравнениях, возникает задача их классификации. Один из возможных подходов излагается в приложении В (см. также монографию Кучмы [M10].

Книгу заключает список литературы по итерационному исчислению и функциональным уравнениям. Подробная библиография на 1969 г. содержится в монографии Кучмы [M11].

• Хочу отметить всех принявших участие в подготовке книги.

В составлении библиографии и отбору результатов по функциональным уравнениям участвовали Л.Н. Постникова и Е.А. Кужелева. Н.Н. Мирошникова квалифицированно и добросовестно уточнила библиографические ссылки. Я признателен им за помощь.

Я благодарю С.Б. Покровского за многие уточнения транскрипции имен иностранных авторов и беру на себя ответственность за все оставшиеся неточности.

Я благодарен Л.И. Бессильных за требовательность, внимательность и терпение при редактировании: удалось устранить многие огрехи и улучшить оформление исходного текста на NCC–LATEX.

• Надеюсь, что в представленном виде книга будет интересна как введение в рассматриваемую проблематику итерирования функций и решения функциональных уравнений.

Книга адресована прежде всего научным работникам, занимающимся приложениями, и студентам. Для математиков может быть интересным разнообразие типов функциональных уравнений, рассмотренных различными авторами и представленных здесь в третьей части, а также характер полученных при этом результатов.

Я предполагаю в будущем существенно переработать и пополнить как теоретическую, так и справочную части книги. Любые замечания и рекомендации по содержанию и форме изложения материала будут мной приняты с благодарностью.

Часть I

ИТЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава 1

Предварительные понятия и обозначения

В данной главе уточняются некоторые понятия и вводятся обозначения, которые в дальнейшем используются без ссылок и пояснений.

1.1. Теоретикомножественные обозначения

• Обычные обозначения:

$x \in E$ – x является элементом множества E;
$\varnothing$ – пустое множество (не содержит элементов);
$|E|$ – число элементов множества E;
$E = F$ – равенство множеств E и F означает совпадение их элементных составов;
$E \subset F$ – множество E – часть (подмножество) множества F, т.е. $x \in E$ влечет $x \in F$, при этом не исключается равенство $E = F$;
$\{a, \ldots, d\}$ – множество перечисленных в фигурных скобках элементов;
$\{x :\ Q(x)\}$ – множество всех x, для которых высказывание $Q(x)$ истинно, например, $E = \{x :\ x \in E\}$;
$E \cap F$, $E \cup F$ и $E \setminus F$ – пересечение, объединение и разность множеств;
$\mathcal{P}(E)$ – множество всех частей (подмножеств) множества E, включая пустое множество.

• *Декартово произведение множеств:*

$(a, \ldots, d)$ – упорядоченное множество (*набор*) перечисленных элементов $a, \ldots, d$;
$E \times F = \{(x, y) :\ x \in E,\ y \in F\}$ – множество упорядоченных пар (x, y) элементов $x \in E$ и $y \in F$ (декартово или прямое произведение множеств E и F);
$E^n = \{(x_1, \ldots, x_n) :\ x_j \in E,\ 1 \leq j \leq n\}$ – декартова степень множества E.

• Пусть каждому $i \in I$ поставлен в соответствие элемент $a_i \in E$:

$(a_i : i \in I)$ – *индексированное семейство* элементов a_i множества E;
$\{a_i : i \in I\}$ – множество значений индексированного семейства $(a_i : i \in I)$. Два различных индексированных семейства элементов могут иметь совпадающие множества значений.

• Далее в основном рассматриваются числовые множества. Обозначения вещественных интервалов (замкнутого, открытого и полуоткрытых): $[\alpha, \beta]$, (α, β), $[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$.

Обозначение *стандартных множеств*:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \ldots\}$;
$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;
$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;
$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$;
$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

1.2. Функции

• Пусть E и F – два множества, не обязательно различные. Запись $f : E \to F$ означает, что $E \neq \emptyset$ и f – *функция из* E *в* F (или *отображение* E *в* F).

Функция $f : E \to F$ каждому элементу $x \in E$ ставит в соответствие единственный элемент $y \in F$, обозначаемый через $f(x)$. В этом случае пишут $f : x \mapsto y$ и говорят, что

- функция f отображает элемент x в элемент y;
- переменная y есть функция переменной x (y зависит от x);
- элемент x – аргумент функции или независимая переменная, а элемент y – зависимая переменная;
- элемент $y = f(x)$ – значение функции в точке x или *образ* элемента x при отображении f, а элемент x – *прообраз* элемента y.

• Равенство $f = g$ двух функций из E в F означает, что $f(x) = g(x)$ для каждого $x \in E$.

• Для $X \subset E$ множество

$$f(X) = \{y \in F : \ y = f(x) \text{ для некоторого } x \in X\}$$

называется *образом множества* X при отображении $f : E \to F$.

В частности,
$$f(\emptyset) = \emptyset.$$

• Множество E называется *областью определения* функции $f : E \to F$, а образ $f(E)$ множества E, т.е. множество всех значений функции, называется ее *областью значений*.

• Для функции $f : E \to F$ соответствие $X \mapsto f(X)$ можно рассматривать как функцию $\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$ (распространение отображения с исходной области определения на множество ее подмножеств). Использование единого обозначения для функции из E в F и функции из $\mathcal{P}(E)$ в $\mathcal{P}(F)$ не вызывает недоразумений. Об отображении $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$ говорят, что оно является *множественным расширением* отображения $f : E \to F$, при этом исходное отображение $f : E \to F$ называется *точечным.*

Иногда в отличие от f ее множественное расширение обозначается через $\tilde{f}$ или $f^{[1]}$.

• Для образов множеств $A, B \subset E$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B), \\ f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B), \\ f(A \setminus B) &\subset f(A) \setminus f(B), \\ A \subset B &\implies f(A) \subset f(B), \\ A \neq \emptyset &\iff f(A) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

• Множество $X \subset E$ называется [полным] *прообразом* множества $Y \subset F$ при отображении $f : E \to F$, если X содержит те и только те элементы $x \in F$, для которых $f(x) \in Y$. Этим определено отображение $f^{-1} : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ называемое *обратным* к множественному расширению f:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in E : \ f(x) \in Y\}.$$

В частности,
$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

• Для произвольного отображения $f : E \to F$ и множеств $A, B \subset F$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} f^{-1}(A \cap B) &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B), \\ f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \\ f^{-1}(A \setminus B) &= f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B), \\ A \subset B &\implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B), \\ f^{-1}(B) \neq \emptyset &\implies B \neq \emptyset. \end{aligned}$$

• Для произвольного отображения $f : E \to F$ и множеств $A \subset E$ и $B \subset F$ выполняются соотношения

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap f(E)),$$

$$f^{-1}(G \cap F) = f^{-1}(G \cap f(E)),$$

$$A \subset f^{-1}(f(A)), \qquad f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

• Пусть $f : E \to F$ и $A \subset E$. Функция (отображение) $g : A \to F$, удовлетворяющая $g(x) = f(x)$ при всех $x \in A$, называется *сужением* f *на* A и обозначается $g = f|_A$.

Если g – сужение f на A, то f называется *расширением* g на E.

• *Каноническим отображением* множества A в E, где A – часть E, называется функция $h : A \to E$ такая, что $h(x) = x$ при всех $x \in A$. Пусть $f : E \to F$ – любая другая функция. Тогда

$$f|_A(x) = f(h(x)) \text{ для всех } x \in A.$$

• *Графиком функции* $f : E \to F$ называется множество

$$\Gamma_f = \{(x, y) : \ y = f(x), \ x \in E\}.$$

• Функция $f : E \to F$ называется *отображением на* или *сюръекцией из* E *на* F (*сюръективным отображением* E *на* F), если $f(E) = F$ (рис.1.1.а).

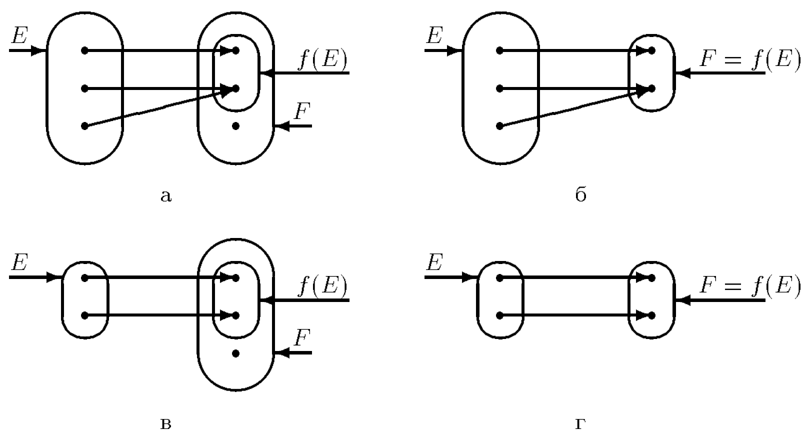


Рис. 1.1. Примеры отображений: а – отображение общего типа, б – сюръекция, в – инъекция, г – биекция

Отображение сюръективно тогда и только тогда, когда каждый элемент $y \in F$ имеет по крайней мере один прообраз:

$$\Big|\{x \in E : \ f(x) = y\}\Big| \geq 1 \text{ для всех } y \in F.$$

Функция f – сюръекция тогда и только тогда, когда

$$f(f^{-1}(Y)) = Y \text{ для всех } Y \subset F.$$

Если f – сюръекция, то

$$f^{-1}(X) \neq \emptyset \iff X \neq \emptyset.$$

• Функция $f : E \to F$ называется *инъекцией* (*инъективным* или *взаимно однозначным отображением*) E *в* F, если каждый элемент $y \in F$ имеет не более одного прообраза:

$$\Big|\{x \in E : \ f(x) = y\}\Big| \leq 1 \text{ для всех } y \in F,$$

т.е. если $f(a) \neq f(b)$ для любых различных a и b из множества F (рис. 1.1.б).

Функция f – инъекция тогда и только тогда, когда

$$f^{-1}(f(X)) = X \text{ для всех } X \subset E.$$

Если $f : E \to F$ – инъекция и $A, B \subset E$, то

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B),$$
$$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B).$$

• Функция, являющаяся одновременно и сюръекцией и инъекцией, называется *биекцией* (*биективным отображением*), рис. 1.1.г.

Отображение биективно тогда и только тогда, когда каждый элемент $y \in F$ имеет ровно один прообраз:

$$\Big|\{x \in E : \ f(x) = y\}\Big| = 1 \text{ для всех } y \in F.$$

Функция f – биекция тогда и только тогда, когда

$$f^{-1}(f(X)) = X, \ f(f^{-1}(Y)) = Y \text{ для всех } X \subset E, \ Y \subset F.$$

• Если функция $f : E \to F$ – биекция, то

$$y = f(x) \Longleftrightarrow \{x\} = f^{-1}(\{y\}).$$

Тем самым определена точечная функция $f^{-1} : F \to E$, называемая *обратной* функции f, такая, что

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Следовательно,

$$f^{-1}(f(x)) = x,\ f(f^{-1}(y)) = y \text{ для всех } x \in E,\ y \in F.$$

Использование единого обозначения для функции обратной биекции и функции, обратной ее множественному расширению не вызывает недоразумений.

• Отображение $f : E \to E$ называется *отображением E в себя* или *преобразованием E*.

Биективное преобразование множества называется *подстановкой*.

1.3. Суперпозиция функций

• Пусть $f : E \to F$, $g : G \to H$. Если $f(E) \cap G \neq \emptyset$, то *суперпозиция* (композиция) $g \circ f$ (или просто gf) определяется как отображение

$$g \circ f : f^{-1}(f(E) \cap G) \to H$$

такое, что $g \circ f(x) = g(f(x))$ для любого $x \in f^{-1}(f(E) \cap G)$.

Область значений композиции равна $g(f(E) \cap G)$.

Операция суперпозиции поясняется на рис. 1.2.

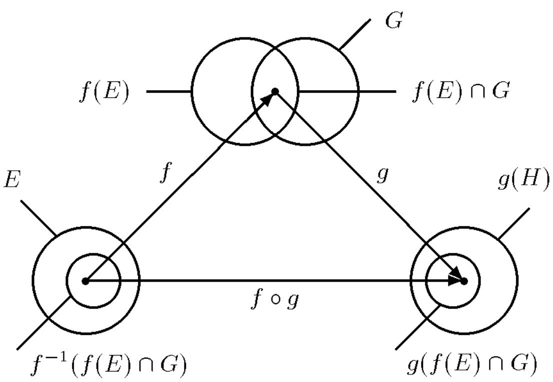


Рис. 1.2. Суперпозиция функций общего типа: $f : E \to f(E)$, $g : G \to g(G)$

• Представление $h = gf$ называется *факторизацией* отображения h. В этом случае для множественных расширений функций выполняются соотношения

$$h(A) = g(f(A)) \ \text{ для всех } A \subset E,$$

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C) \cap F) \ \text{ для всех } C \subset G.$$

• Если $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$, то

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

(ассоциативность операции суперпозиции). Это отображение E в H обозначается через $h \circ g \circ f$ или кратко hgf.

• Пусть $f : E \to F$, $g : F \to E$. Если fg и gf – биекции, то f и g – также биекции. Если при этом $gf = 1_E$ (тождественное отображение), то $g = f^{-1}$.

• Обозначим типы отображений следующим образом:

b – биекция;
i – инъекция, но не биекция;
s – сюръекция, но не биекция;
? – тип не определен.

Пусть α и β – типы отображений g и f. Тогда запись $\alpha \circ \beta$ означает тип суперпозиции $g \circ f$. Выполняются соотношения:

$$\begin{array}{lll} s \circ s = s, & s \circ i = ?, & s \circ b = s, \\ i \circ s = ?, & i \circ i = i, & i \circ b = i, \\ b \circ s = s, & b \circ i = i, & b \circ b = b. \end{array}$$

• Функция $\varphi : X \to X$ называется *сопряженной* с функцией $\psi : Y \to Y$ (φ сопряжена с ψ), если существует биекция $h : X \to Y$ такая, что $h\varphi = \psi h$, т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array}$$

• Если функции $\varphi : X \to X$ и $\psi : Y \to Y$ сопряжены, т.е. $h\varphi = \psi h$, то решения $f : X \to X$ и $g : Y \to Y$ уравнений $f\varphi = \varphi f$ и $g\psi = \psi g$, соответственно, попарно сопряжены: $hf = gh$. Для таких функций коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & Y & & \\
X \arrow[ur, "h"] \arrow[d, "\varphi"] & X \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi"] & Y \arrow[ul, "g"'] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"] & Y \arrow[d, "\psi"] \\
X & X \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "h"] & Y \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

• Если функции $\varphi : X \to X$ и $\psi : Y \to Y$ сопряжены, т.е. $h\varphi = \psi h$, то решения $f : X \to Z$ и $g : Y \to Z$ уравнений $f\varphi = f$ и $g\psi = g$, соответственно, связаны попарно соотношениями $f = gh$. Для таких функций коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "h"'] & & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "h"] \\
& Z & \\
Y \arrow[rr, "\psi"] \arrow[ur, "g"] & & Y \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

1.4. Итерации функций

1.4.1. Целые неотрицательные показатели

• Пусть $f : D \to D$ – некоторая функция. Функции f^n, определяемые равенствами

$$f^0(x) = x, \qquad f^1(x) = f(x),$$
$$f^2(x) = f(f^1(x)), \ldots, f^n(x) = f(f^{n-1}(x)),$$

называются соответственно нулевой, первой, второй,..., n–й *итерациями* функции f.

Функция f называется *итерируемой*, переход от f к f^n – *итерированием*, а индекс n в f^n – *показателем итерации* или *итерационным показателем*.

Итерационный показатель иногда называют индексом итерации, а вместо f^n часто применяется обозначение f_n или $f^{[n]}$. Далее будет использоваться запись итерационного показателя только верхним индексом. Поэтому, например, $\sin^2(x)$ будет означать $\sin(\sin x)$, а не $(\sin x)^2$.

Итерация f^n при целом $n \geq 1$ является n-кратной суперпозицией функции f, т.е.

$$f^n = \underbrace{f \cdots f}_{n \text{ раз}},$$

а итерация f^0 равна по определению тождественному отображению 1_D для произвольной функции f.

• *Основные свойства* итераций при целых неотрицательных показателях:

$$f^0 = 1_D, \qquad f^1 = f, \qquad f^m \circ f^n = f^{m+n}.$$

Простейшие следствия этих определяющих свойств:

$$f^0 f^m = f^m f^0 = f^m, \qquad f f^m = f^m f = f^{m+1}, \qquad (f^m)^n = f^{mn}.$$

• Множество $\{f^n : n \geq 0\}$ итераций функции $f : D \to D$ относительно операции суперпозиции образует циклическую полугруппу $[f]_{\mathbb{N}}$ преобразований множества D, порожденную одним преобразованием. Эта коммутативная полугруппа содержит *единицу* $1_D = f^0$.

• Следует различать семейство итераций $(f^n : n \geq 0)$ и множество $\{f^n : n \geq 0\}$ различных функций этого семейства, так как возможно, что две итерации с различными показателями именуют одну и ту же функцию.

Например, пусть $D = \mathbb{R}$, $f(x) = -x$, $f^n(x) = (-1)^n x$. Здесь семейство итераций является бесконечной последовательностью чередующихся функций, т. е.

$$(f^n) = (1_R, -1_R, 1_R, \ldots), \qquad |(f^n : n \geq 0)| = \infty.$$

Различные функции этого семейства образуют множество

$$\{f^n\} = \{1_R, -1_R\}, \qquad |\{f^n : n \geq 0\}| = 2.$$

• Если $f^m = f^n$ для некоторых $m \neq n$, то множество $\{f^n\}$ конечно; существует минимальное $l \geq 1$ такое, что $f^l = 1_D$; функции $f^0, f^1, \ldots, f^{l-1}$ различны и

$$\{f^n\} = \{f^0, f^1, \ldots, f^{l-1}\}.$$

При этом равенство $f^m = f^n$ имеет место тогда и только тогда, когда $m-n$ кратно l.

• Рассмотрим процесс итерирования функций

$$f : D_1 \to E_1, \qquad E_1 = f(D_1),$$

у которых область значений не содержится в области определения, т. е. $f(D_1) \not\subset D_1$.

Если $D_1 \cap f(D_1) = \emptyset$, то вторая и последующие итерации не определены.

Пусть $n \geq 2$ и

$$f^m : D_m \to E_m = f^m(D_m), \qquad 1 \leq m \leq n.$$

Выполняются соотношения:

$$D_m = f^{-1}(E_1 \cap D_{m-1}), \qquad D_m \subset D_{m-1}, \qquad 2 \leq m \leq n;$$
$$E_m = f(E_{m-1} \cap D_1), \qquad D_m \subset D_{m-1}, \qquad 2 \leq m \leq n.$$

Таким образом, если D_n непусто, то итерации $f^1, \ldots, f^n$ одновременно определены на множестве D_n. Множество

$$D_\infty = \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m$$

является максимальным, на котором все итерации с целыми неотрицательными показателями определены одновременно и, следовательно, могут рассматриваться совокупно.

В процессе итерирования возможны следующие коллизии:

1. Если при некотором $n \geq 2$ окажется $D_1 \cap E_m \neq \emptyset$ для $1 \leq m \leq n$, но $D_1 \cap E_n = \emptyset$, то итерации $f^0, \ldots, f^n$ определены (каждая в соответствующей области), а f^{n+1} и итерации с большими индексами – нет.
2. Все $D_m \neq \emptyset$, итерации f^m определены при всех $m \geq 0$, однако множество D_∞ пусто.

В практических вычислениях удобно непосредственно использовать равенства

$$
\begin{aligned}
D_n &= \{x : x \in D_1,\ f^1(x) \in D_1,\ f^2(x) \in D_1, \ldots, f^{n-1}(x) \in D_1\}, \\
E_n &= \{f(x) : x \in D_1,\ f^1(x) \in D_1, \ldots, f^{n-1}(x) \in D_1\}.
\end{aligned}
$$

• **Пример.** Пусть $f(x) = \ln x$, $D_1 = (0, +\infty)$. Тогда для $n \geq 1$ найдем $f^n(x) = (\ln)^n(x)$, $D_n = (a_n, +\infty)$, $a_{n+1} = \exp(a_n)$, $a_1 = 0$. Очевидно, что $D_\infty = \emptyset$.

1.4.2. Произвольные целые показатели

• Для биекций $f : D \to D$ итерации с целыми отрицательными показателями определяются равенствами

$$f^{-n} = (f^{-1})^n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

т. е. как итерации обратной функции.

• Для произвольных целых показателей выполняются все *свойства итераций*, приведенные в п. 1.4.1. В частности, для всех целых показателей $(f^n)^{-1} = f^{-n}$.

• Иногда вместо $f^n(x)$ используется обозначение $f(x; n)$. При этом основные свойства итерации для произвольных целых показателей имеют вид

$$f(x; 0) = x, \qquad f(x; 1) = f(x), \qquad f(x; -1) = f^{-1}(x),$$

$$f(f(x; m); n) = f(x; m + n).$$

• Множество $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ итераций функции $f : D \to D$ относительно операции суперпозиции образует циклическую группу $[f]_{\mathbb{Z}}$ преобразований множества D, порожденную одним преобразованием. Как всякая циклическая группа она коммутативна и содержит *единицу* $1_D = f^0$.

• Для произвольных целых показателей, так же как и в случае неотрицательных целых, если $f^m = f^n$ для некоторых $m \neq n$, то множество $\{f^n\}$ конечно; существует минимальное $l \geq 1$ такое, что $f^l = 1_D$; функции $f^0, f^1, \ldots, f^{l-1}$ различны и

$$\{f^n\} = \left\{f^0, f^1, \ldots, f^{l-1}\right\}.$$

При этом равенство $f^m = f^n$ имеет место тогда и только тогда, когда $m-n$ кратно l.

1.4.3. Графики итераций

• Графики итераций $y = f^n(x)$ строятся по графику функции $y = f(x)$ и прямой $y = x$, называемой *осью итераций*.

На рис. 1.3.а для итерационной последовательности $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$, показан результат построения на графике функции f точек P_0, P_1, $P_2, \ldots$ с абсциссами x_0, x_1, $x_2, \ldots$.

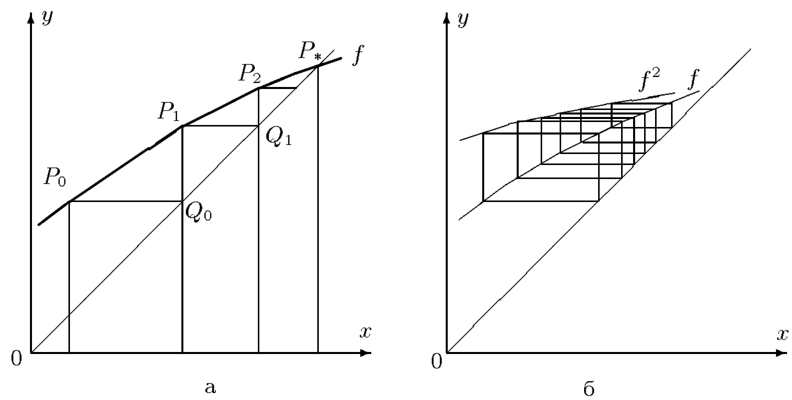


Рис. 1.3. Примеры графических построений по графику функции f: а – рекуррентной последовательности $x_{n+1} = f(x_n)$, б – графика функции f^2

Порядок построения графика следующий:

1. Через точку $P_0 = (x_0, x_1)$, где $x_1 = f(x_0)$, проводим горизонтальную прямую. Она пересечет ось итераций в точке $Q_0 = (x_1, x_1)$.
2. Через точку Q_0 проводим вертикальную прямую. Она пересечет график функции f в точке $P_1 = (x_1, x_2)$, где $x_2 = f(x_1)$.

Повторяя операции 1, 2 получим на графике функции f последовательность точек

$$P_0 = (x_0, f(x_0)), \qquad P_1 = (x_1, f(x_1)), \qquad P_2 = (x_2, f(x_2)), \ldots.$$

В дальнейшем будем приводить упрощенные графики, показывая на них лишь переходы между кривыми $y = f(x)$ и $y = x$ по ломаной $P_0Q_0P_1Q_1\ldots$, т.е. строя векторы

$$P_0Q_0, \quad Q_0P_1, \quad P_1Q_1, \quad Q_1P_2, \ldots.$$

Указанные построения могут оборваться в момент прихода к уже пройденной ранее точке P_i (зацикливание итерационной последовательности). В частности, построения вообще вырождаются, если начать с неподвижной точки, например, с точки P_* на рис. 1.3.а.

• На рис. 1.3.б показан результат построения нескольких точек графика функции $y = f^2(x)$.

Для некоторого x отрезки P_0Q_0 и Q_0P_1, определяемые точками

$$P_0 = (x, f(x)), \qquad Q_0 = (f(x), f(x)), \qquad P_1 = (f(x), f^2(x)),$$

достраиваются до прямоугольника $P_0Q_0P_1R$. При этом точка $R = (x, f^2(x))$, очевидно, лежит на графике функции $y = f^2(x)$.

• Данный способ непосредственно обобщается на построение графика суперпозиции двух функций $y = g(x)$ и $y = f(x)$. Аналогично предыдущему строится прямоугольник по вершинам

$$(x, f(x)), \quad (f(x), f(x)), \quad (f(x), g(f(x))).$$

Четвертая вершина $(x, g(f(x)))$ лежит на графике суперпозиции $g \circ f$. Так, график функции f^3 можно построить по графикам функций f и f^2 $(f^3 = f \circ f^2)$, а график функции f^4 – по графику функции f^2 $(f^4 = f^2 \circ f^2)$.

• Наиболее экономичные способы построения графика итераций высокого порядка f^n – из графика функции f, т.е. способы с минимальным числом промежуточных графиков, аналогичны быстрым методам вычисления больших степеней чисел.

Схема

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & 2 & \to & 3 & \to & 6 & \to & 9 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 4 & & 5 & \to & 10 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 8 & & 7 & & & & \end{array}$$

(начало "степенного дерева") определяет порядок быстрого вычисления степеней чисел, в нашем случае – быстрого построения графиков итерированных функций. Например, график функции f^9 по этой схеме строится в последовательности

$$1 \to 2 \to 3 \to 6 \to 9$$

с построением промежуточных графиков функций f, f^2, f^3, f^6. Впрочем в этом случае возможны и другие экономичные способы, не включенные в "степенное дерево", например,

$$1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 9.$$

Глава 2

Теория итераций

2.1. Сходимость итерационных последовательностей

2.1.1. Неподвижные точки. Циклы

• Пусть значения членов итерационной последовательности $x_1, x_2, \ldots$, где $x_{n+1} = f(x_n)$, циклически повторяются с периодом $p \geq 1$, т.е. последовательность имеет вид

$$x_1, x_1, x_1, \ldots \text{ при } p = 1$$

или

$$x_1, \ldots, x_p, x_1, \ldots, x_p, \ldots \text{при } p > 1.$$

Здесь все числа $x_1, \ldots, x_p$ различны. Число p называется периодом или порядком цикла, а сам цикл – p-циклом. Цикл записывается набором

$$(x_1, \ldots, x_p).$$

Наборы

$$(x_1, \ldots, x_p),\ (x_2, \ldots, x_p, x_1), \ldots, (x_p, x_1, \ldots, x_{p-1})$$

обозначают один и тот же цикл, т.е. начальный элемент итерационной последовательности не фиксируется.

Примеры циклов приведены на рис. 2.1.

• Цикл длины единица образует точка a такая, что $f(a) = a$. Она называется *неподвижной* точкой функции (отображения) f. Неподвижная точка функции является одновременно неподвижной точкой всех ее итераций.

Неподвижные точки функции лежат на пересечении графика функции и оси итераций.

Пара точек, образующих цикл второго порядка, симметричны относительно оси итераций.

• Точка a называется неподвижной точкой порядка p функции f, если она входит в p-цикл, порожденный этой функцией, т.е. $f^p(a) = a$ и $f^j(a) \neq a$ при $1 \leq j < p$.

Неподвижная точка порядка p является неподвижной точкой итераций f^{pm} при всех целых неотрицательных m.

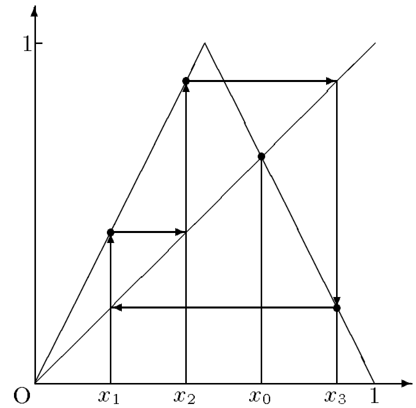


Рис. 2.1. Примеры циклов: 1-цикл – (x_0), 3-цикл – (x_1, x_2, x_3)

• Определим на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}_+$ отношение: m предшествует n $(m \preceq n)$, если для всякой непрерывной на вещественной прямой функции существование цикла порядка m влечет существование цикла порядка n. Такое отношение упорядочивает $\mathbb{N}_+$, при этом

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec \ldots \prec 3 \cdot 2 \prec 5 \cdot 2 \prec 7 \cdot 2 \prec \ldots$$
$$\ldots \prec 3 \cdot 2^2 \prec 5 \cdot 2^2 \prec 7 \cdot 2^2 \prec \ldots \prec \ldots \prec 2^2 \prec 2 \prec 1,$$

точнее

$$\begin{aligned} &(2m+1)2^p \prec (2n+1)2^q && \text{при} \quad 0 \le p < q \ \text{ или} \\ & && \text{при} \quad 0 \le p = q, \ \ m < n; \\ &(2m+1)2^p \prec 2^q && \text{при} \quad p, q \ge 0, \ \ m \ge 1; \\ &2^p \prec 2^q && \text{при} \quad 0 \le q < p. \end{aligned}$$

В частности, если непрерывная на некотором интервале функция f имеет цикл нечетного порядка, отличный от единицы, то она имеет циклы всех бо́льших нечетных порядков, циклы любых четных порядков и неподвижные точки.

Между любыми двумя точками цикла порядка $k > 1$, порожденного непрерывной на некотором интервале функцией, лежит хотя бы одна точка некоторого цикла порядка $l < k$.

Шарковский [1964]

Если для непрерывного отображения f можно найти точки a, b, c, d, такие, что $b = f(a)$, $c = f(b)$, $d = f(c)$ и $d \le a < b < c$, то это отображение имеет циклы любого порядка и несчетное множество непериодических траекторий.

Ли, Йорке [1975]

2.1.2. Сходимость к неподвижной точке

Любое решение x_* уравнения $x = f(x)$ называется неподвижной точкой функции (или отображения) f.

• Отображение $f : D \to \mathbb{R}$ называется *нерастягивающим* на множестве $D_0 \subset D \subset \mathbb{R}$, если

$$|f(x) - f(y)| \le |x - y| \text{ при всех } x, y \in D_0,$$

и *строго нерастягивающим* на D_0, если

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \text{ при всех } x \ne y, \ \ x, y \in D_0.$$

Нерастягивающие и строго нерастягивающие отображения непрерывны.

Строго нерастягивающее отображение может иметь не более одной неподвижной точки, так как иначе

$$|x_* - y_*| = |f(x_*) - f(y_*)| < |x_* - y_*|.$$

Строгой нерастяжимости недостаточно для существования неподвижной точки.

Пример (Ортега, Рейнбалдт):

$$f(x) = \begin{cases} x + \exp(-x/2) & \text{при} \quad x \ge 0, \\ \exp(x/2) & \text{при} \quad x \le 0. \end{cases}$$

• Если f – нерастягивающее отображение на отрезке $I \subset \mathbb{R}$ и $f(I) \subset I$, тогда f имеет единственную неподвижную точку в I тогда и только тогда, когда последовательность

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{2.1}$$

ограничена по крайней мере для одной точки $x_0 \in I$.

• Отображение $f : D \to \mathbb{R}$ называется *сжимающим* (или *сжатием*) на множестве $D_0 \subset D \subset \mathbb{R}$, если существует $\alpha < 1$ такое, что

$$|f(x) - f(y)| < \alpha|x - y| \text{ при всех } x, y \in D_0.$$

Всякое сжатие – строго нерастягивающее отображение.

Если f – сжатие на замкнутом множестве D_0 и $f(D_0) \subset D_0$, то f имеет единственную неподвижную точку в D_0.

• *Теорема Брауэра.* Если функция f непрерывна на отрезке $I \subset \mathbb{R}$ и $f(I) \subset I$, то f имеет неподвижную точку в I.

Единственность неподвижной точки не гарантируется.

Пример: $f(x) = x$ при всех $x \in I$.

• *Теорема Лерэ–Шаудера.* Если функция f непрерывна на открытом интервале $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, и $f(x) \neq \lambda x$ при любых $\lambda > 1$ и $x \in I$, то f имеет неподвижную точку в замыкании I.

• Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и

$$|f^2(x) - f(x)| \leq \lambda |f(x) - x|,$$

где $0 \leq \lambda < 1$. Тогда существует неподвижная точка x_* функции f, последовательность (2.1) сходится, начиная с произвольного x_0 и

$$|x_n - x_*| \leq (1 - \lambda)^{-1} \lambda |x_n - x_{n-1}|.$$

• *Теорема Канторовича.* Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ монотонна на D, $x_0 \leq y_0$, $[x_0, y_0] \subset D$, $x_0 \leq f(x_0)$, $y_0 \geq f(x_0)$. Тогда для последовательностей

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad y_{n+1} = f(y_n), \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

при $n \to \infty$ выполнены соотношения $x_n \uparrow x_*$, $y_n \downarrow y_*$ и $x_* \leq y_*$. Если f непрерывна на $[x_0, y_0]$, то $x_* = f(x_*)$, $y_* = f(y_*)$ и любая неподвижная точка из $[x_0, y_0]$ лежит в $[x_*, y_*]$.

• Пусть f – непрерывна, строго монотонно возрастает при $0 \leq x \leq d$, $f(0) = 0$ и $f(x) < x$ при $0 < x \leq d$. Тогда последовательность $x_0 = x$, $x_n = f(x_{n-1})$ строго убывает и $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^n(x) = 0$. Неравенство $0 < x < y \leq d$ влечет $0 < x_n < y_n < d$ для каждого $n > 0$.

• Если отображение $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывно, и

$$(f(a) - a)(f(b) - b) \leq 0,$$

то f имеет неподвижную точку на $[a, b]$.

• Множество E называется областью притяжения неподвижной точки x_* функции f, если последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ сходится к x_*, начиная с произвольного $x_0 \in E$.

Множество E называется областью притяжения p-цикла функции f, если последовательность $x_{n+1} = f^p(x_n)$, начинающаяся с произвольного $x_0 \in E$, сходится к одной из неподвижных точек, входящих в рассматриваемый цикл.

• Пусть функция $f : I \to I$ непрерывно дифференцируема на открытом интервале $I \subset \mathbb{R}$.

Если $a = f(a) \in I$ и $|f'(a)| < 1$, то неподвижная точка a притягивающая: существует окрестность точки a, входящая в ее область притяжения.

Если точки $a_1, \ldots, a_p \in I$ образуют p-цикл функции f и

$$|f'(a_1) \ldots f'(a_n)| < 1,$$

то этот цикл притягивающий: существуют окрестности I_i точек a_i, $i = 1, \ldots, p$, такие, что множество $\bigcup_{i=1}^{p} I_i$ входит в область притяжения цикла.

На рис. 2.2 представлено поведение последовательностей (2.1), начинающихся с точек, достаточно близких к неподвижной точке a, при $f'(a) \neq 0$, $|f'(a)| \neq 1$.

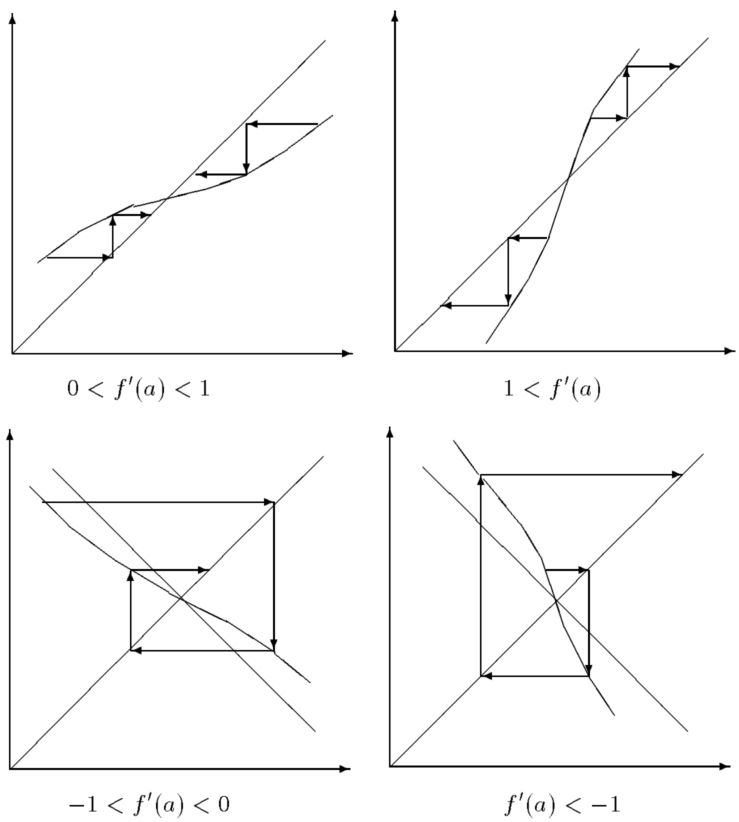


Рис. 2.2. Итерационные последовательности $x_{n+1} = f(x_n)$ в окрестности неподвижной точки $a = f(a)$. Случай $0 < |f'(a)| \neq 1$

По характеру поведения итерационного процесса в окрестности неподвижной точки случаи, изображенные на рисунке, могут быть названы одномерными аналогами "устойчивого узла" $(0 < f'(a) < 1)$, "устойчивого фокуса" $(-1 < f'(a) < 0)$, "неустойчивого узла"$(1 < f'(a))$, "неустойчивого фокуса" ($f'(a) < -1$); "предельному циклу" отвечал бы случай притягивающего цикла ($|f'(a_1) \dots f'(a_p)| < 1$).

• Итерационные последовательности вида $x_{n+1} = f(x_n)$ могут сходиться с произвольной заданной скоростью $|x_n - x_*| = \omega(n)$. Функция f может быть построена в явном виде при заданной функции ω. Аналогичное утверждение верно для сходимости итерационных последовательностей к предельным циклам.

Обозначим через Ω_d множество непрерывных строго убывающих на $[0, +\infty]$ функций ω таких, что $\omega(0) = d > \omega(+\infty) = 0$. Функции из Ω_d здесь будут использованы для характеризации скорости сходимости итерационных последовательностей к предельным точкам.

О сходимости к предельной точке. Для заданной функции $\omega \in \Omega_d$ существует определенная на некотором отрезке $[a, b]$ непрерывная вещественная функция f такая, что уравнение

$$x = f(x)$$

имеет единственный корень $c \in (a, b)$, к которому последовательность

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

начинающаяся с произвольного $x_0 \in [a, b]$, сходится со скоростью

$$|x_n - c| = \omega(\tau + n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.2}$$

где τ определяется только выбором x_0. При этом можно указать такое $x_0 \in [a, b]$, что равенства (2.2) выполняются с $\tau = 0$.

Нечепуренко [1997a]

Примеры сходимостей с конкретными скоростями.

1. Медленная сходимость:

$$\omega(x) = \frac{1}{\ln(e + x)}, \qquad d = 1, \quad c = 0;$$

$$f(x) = \begin{cases} \left(\ln(1 + e^{1/x})\right)^{-1} & \text{при} \quad 0 < |x| \le 1, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

2. Быстрая сходимость:

$$\omega(x) = d^{m^x}, \qquad 0 < d < 1, \quad m > 2, \quad c = 0;$$

$$f(x) = x \cdot |x|^{m-1}, \quad -d \le x \le d.$$

О сходимости к предельному циклу. Для заданных $d_i > 0$ и функций $\omega_i \in \Omega_{d_i}$, $i = 1, \ldots, m$, существует определенная на некотором отрезке $[a, b]$ непрерывная вещественная функция h, имеющая на (a, b) устойчивый m-цикл

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_m, \qquad h(c_1) = c_2, \ldots, h(c_{m-1}) = c_m, \quad h(c_m) = c_1,$$

к которому последовательность

$$x_{n+1} = h(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

начинающаяся с произвольного $x_0 \neq c_1$, выбранного из некоторого отрезка $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, сходится со скоростью

$$\begin{aligned} &|x_{mn} - c_1| = \omega_1(\tau + n), \\ &|x_{mn+1} - c_2| = \omega_2(\tau + n), \\ &\vdots \\ &|x_{mn+m-1} - c_m| = \omega_m(\tau + n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где τ определяется только выбором x_0. При этом можно указать такое $x_0 \in [\alpha, \beta]$, что равенства (2.3) выполняются с $\tau = 0$.

Отметим, что из (2.3) следует, что сходимость к точкам предельного цикла отдельных подпоследовательностей $x_{in} \to c_i$ может происходить с существенно различными скоростями.

Нечепуренко [1997a]

• Приведем некоторые результаты по асимптотике итерационной последовательности в окрестности неподвижной точки.

Пусть $f(0) = 0$, $0 < f(x) < x$ при $0 < x < d$ и

$$f(x) = x - ax^k + bx^l + o(x^l),$$

где $1 < k < l$ и $a, b > 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{k-1}} f^n(x) = ((k-1)a)^{-\frac{1}{k-1}}, \qquad 0 < x < d.$$

Полиа, Сеге [1925]

Частный случай:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \sin^n x = \sqrt{3}, \qquad x > 0.$$

• Пусть $f(0) = 0$, $0 < f(x) < x$ при $0 < x < d$ и

$$f(x) = \lambda x + ax^k + bx^l + o(x^l),$$

где $1 < k < l$ и $0 < \lambda < 1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x) - \lambda^n x}{\lambda^n} = \frac{ax^k}{\lambda - \lambda^k}, \qquad 0 < x < d.$$

Полиа, Сеге [1925]

2.2. Представление итераций. Целочисленный показатель

2.2.1. Итерации сопряженных функций

• *Теорема Беббиджа.* Пусть функции $f : X \to X$ и $g : Y \to Y$ сопряжены, т.е. существует биекция $h : X \to Y$ такая, что

$$f(x) = h^{-1}(g(h(x))).$$

Тогда, если g^n – n-я итерация функции g, то n-я итерация функции f определяется равенством

$$f(x) = h^{-1}(g^n(h(x))).$$

• Пусть $\alpha > 0$. Если $g(x) = \alpha x$, то $g^n(x) = \alpha^n x$. Функция f, сопряженная с g равенством $\chi \circ f = g \circ \chi$, имеет итерации вида

$$f^n(x) = \chi^{-1}(\alpha^n \cdot \chi(x)).$$

Биекция χ удовлетворяет *уравнению Шрёдера*

$$\chi(f(x)) = \alpha \cdot \chi(x).$$

• Если $g(x) = x + \beta$, то $g^n(x) = x + n\beta$. Функция f, сопряженная с g равенством $\lambda \circ f = g \circ \lambda$, имеет итерации вида

$$f^n(x) = \lambda^{-1}(\lambda(x) + n\beta).$$

Биекция λ удовлетворяет *уравнению Абеля*

$$\lambda(f(x)) = \lambda(x) + \beta.$$

• Некоторые факты о решении уравнений Абеля и Шрёдера приведены в п. 2.3. В третьей главе приведены итерации $f^n(x)$, представимые выражениями, содержащими переменные x и n и суперпозиции элементарных функций. Все эти функции сопряжены с функцией $g(x) = \alpha \cdot x$. Их список весьма ограничен. В связи с этим возникает задача изучения итераций специальных функций, к которым можно было бы свести нахождение итераций широкого класса других функций.

Например, итерации произвольного многочлена второй степени

$$f(x) = ax^2 + 2bx + c$$

выражаются через итерации функции вида $g(x; \beta) = x^2 + \beta$:

$$f^n(x) = \frac{1}{a} g^n(ax+b; ac+b-b^2) - \frac{b}{a}.$$

Улам [1964] поставил вопрос об исследовании условий сопряженности функций $h \circ f = g \circ h$ в случае непрерывности h. Например, является ли произвольный многочлен, отображающий интервал $(0,1)$ в себя, сопряженным с соответствующей кусочно–линейной функцией? Так, многочлен $g(x) = 4x(1-x)$ сопряжен с функцией

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } 0 \le x \le 1/2, \\ 2(1-x) & \text{при } 1/2 \le x \le 1, \end{cases}$$

с помощью

$$h(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}.$$

2.2.2. Разложение в степенной ряд

• Пусть функция f в некоторой окрестности неподвижной точки $a = f(a)$ представима рядом

$$f(x) = a + \sum_{j=1}^{\infty} a_j (x-a)^j \qquad (2.4)$$

с ненулевым радиусом сходимости. Для любого натурального N существует окрестность U точки a, в которой все итерации f^n для целых $0 \le n \le N$ определены и также допускают представление

$$f^n(x) = a + \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} (x-a)^j. \qquad (2.5)$$

Для итераций $f^0(x) = x$ и $f^1(x) = f(x)$ имеем

$$\begin{aligned} &A_{1j} = a_j && \text{при } j \ge 1; \\ &A_{01} = 1, \quad A_{0j} = 0 && \text{при } j > 1. \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Коэффициенты A_{nj} однозначно определяются по коэффициентам a_j с помощью формальных степенных рядов (даже в случае расходимости (2.4) и (2.5)) из (2.6) и соотношений

$$f(f^n(x)) = f^n(f(x)).$$

• Обозначим:

$$N_{jp}(a_1, \ldots, a_p) = j! \sum_{\left\{ \substack{i_1 + \ldots + i_p = j \\ 1 i_1 + \ldots + p i_p = p} \right\}} \frac{a_1^{i_1} \ldots a_p^{i_p}}{i_1! \ldots i_p!}, \qquad 1 \le j \le p,$$

где индексы i_k неотрицательны. Для $n, p \ge 1$ выполняются соотношения

$$A_{n+1,p} = \sum_{j=1}^{p} A_{nj} N_{jp}(a_1, \ldots, a_p). \tag{2.7}$$

В частности,

$$\begin{aligned}
A_{n+1,1} &= a_1 A_{n1}, \\
A_{n+1,2} &= a_2 A_{n1} + a_1^2 A_{n2}, \\
A_{n+1,3} &= a_3 A_{n1} + 2a_1 a_2 A_{n2} + a_1^3 A_{n3}, \\
A_{n+1,4} &= a_4 A_{n1} + (2a_1 a_3 + a_2^2) A_{n2} + 3a_1^2 a_2 A_{n3} + a_1^4 A_{n4}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Отсюда могут быть определены все коэффициенты A_{np}. Например, из (2.8) и (2.6) следует

$$A_{n1} = a_1 A_{n-1,1} = \ldots = a_1^{n-1} A_{11} = a_1^n. \tag{2.9}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
A_{n2} &= a_2 a_1^{n-1} + A_{n-1,2} a_1^2 \\
&= a_2 a_1^{n-1}(1 + a_1) + A_{n-2,2} (a_1^2)^2 \ldots \\
&= a_2 a_1^{n-1}(1 + a_1 + \ldots + a_1^{n-2}) + A_{12} (a_1^2)^{n-1} \\
&= a_2 a_1^{n-1}(1 + a_1 + \ldots + a_1^{n-1}).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Более простым является следующий путь. Из соотношения (2.7) находится первый (по индексу p) ненулевой коэффициент A_{np}, а далее используются следующие соотношения:

$$\sum_{j=1}^{p} A_{nj} N_{jp}(a_1, \ldots, a_p) = \sum_{j=1}^{p} a_j N_{jp}(A_{n1}, \ldots, A_{np}), \qquad n, p \geq 1. \tag{2.11}$$

• Из (2.11) для $p \geq 2$ следует

$$(a_1^p - a_1) A_{np} = \sum_{j=2}^{p} a_j N_{jp}(A_{n1}, \ldots, A_{np}) - \sum_{j=1}^{p-1} A_{nj} N_{jp}(a_1, \ldots, a_m).$$

Если $a_1 \neq 0$ и $|a_1| \neq 1$, то, учитывая (2.9), последовательно найдем:

$$\begin{aligned}
A_{n1} &= a_1^n, \\
A_{n2} &= \frac{a_1^{2n} - a_1^n}{a_1^2 - a_1} a_2, \\
A_{n3} &= \frac{a_1^{3n} - a_1^n}{a_1^3 - a_1} a_3 + 2\frac{(a_1^{2n} - a_1^n)(a_1^n - a_1)}{(a_1^3 - a_1)(a_1^2 - a_1)} a_2^2.
\end{aligned}$$

Явные выражения для A_{np} при $p \geq 4$ громоздки.

• Если $a_1 = 1$, то $A_{n1} = 1$ и первые три уравнения в (2.11) обращаются в тождество. Коэффициент A_{n2} можно найти из (2.10), а далее использовать (2.11):

$$A_{n1} = 1,$$

$$A_{n2} = na_2,$$

$$A_{n3} = na_3 + n(n-1)a_2^2.$$

Явные выражения для A_{np} при $p \geq 4$ громоздки.

• При $a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$, $a_m \neq 0$, первым отличным от нуля коэффициентом является A_{n,m^n}.

• Вычисление коэффициентов ряда (2.5) было проведено Коркиным [1882] (частные случаи ранее рассмотрены Кейлом и Шрёдером). Следующий достаточный признак сходимости ряда (2.5) дан Бирюк [1995].

Ряд (2.4) имеет ненулевой радиус сходимости тогда и только тогда, когда существуют константы $A, B > 0$ такие, что $|a_j| \leq AB^{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots$. При этих условиях ряд (2.4) сходится при $|x-a| < 1/B$, а ряд (2.5) – при $|x-a| < r_n$, где

$$r_n = \begin{cases} \dfrac{A-1}{B(A^n-1)}, & \text{если } A \neq 1; \\ \dfrac{1}{nB}, & \text{если } A = 1. \end{cases}$$

Скорость сходимости характеризуется неравенством

$$|f^n(x) - a - \sum_{j=1}^{p} A_{nj}(x-a)^j| \leq$$

$$\leq \begin{cases} \dfrac{A^n \left(\frac{A^n-1}{A-1}\right)^p B^p |x-a|^{p+1}}{1 - \frac{A^n-1}{A-1} B|x-a|}, & \text{если } A \neq 1; \\ \dfrac{(nB)^p |x-a|^{p+1}}{1 - nB|x-a|}, & \text{если } A = 1. \end{cases}$$

2.3. Итерации с дробными показателями

2.3.1. Итерации в теории ветвящихся процессов

Рассмотрим пример задачи, в которой по существу требуется рассмотрение итераций f^σ с произвольными $\sigma \geq 0$.

Простейшая задача из теории ветвящихся процессов ставится следующим образом (см., например, Севастьянов [1971]). Рассматривается марковский процесс $\mu(t) \in \mathbb{N}$ (число частиц в момент времени t) в фазовом пространстве $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$. Вероятности

$$P_{ij}(t) = P\{\mu(t+\tau) = j \,|\, \mu(\tau) = i\}$$

перехода за время t из состояния i в состояние j не зависят от момента τ начала перехода (однородность процесса) и удовлетворяют условиям

$$P_{ij}(t) \geq 0, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = 1, \qquad P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(s) P_{ki}(t-s),$$

для всех $i, j \in \mathbb{N}$, $0 \leq s \leq t \in [0, \infty)$;

$$P_{ii}(0) = 1, \quad P_{ij}(0) = 0 \quad \text{при } j \neq i.$$

Процесс называется ветвящимся, если

$$P_{ij}(t) = \sum_{k_1+\ldots+k_i=j} P_{1k_1}(t) \ldots P_{1k_i}(t).$$

Предполагается выполненным условие непрерывности $\lim_{t\downarrow 0} P_{ii}(t) = 1$.

Пусть $\mu(0) = 1$ (процесс начинается с одной частицы). При этом условии обозначим

$$P_n(t) = P_{1n}(t), \qquad P_n(t) \geq 0, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1.$$

Очевидно, что $P_1(0) = 1$ и $P_n(0) = 0$ при $n \neq 1$.

Введем производящую функцию

$$F(t; z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n.$$

Она удовлетворяет функциональному уравнению

$$F(t+s; z) = F(t; F(s; z))$$

и начальному условию

$$F(0; z) = z.$$

Обозначим $p_n = P_n(1)$ (вероятность появления n частиц в момент времени равный единице) и рассмотрим производящую функцию

$$f(z) = F(1; z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1.$$

Тогда при целых $t = m$

$$F(m; z) = f^m(z)$$

– m-я итерация функции f.

Функция f не позволяет восстановить вероятности $P_n(t)$ для нецелых t.

В теории ветвящихся процессов предполагаются заданными плотности вероятностей перехода $\pi_n = P_n'(0)$, $n = 0, 1, \ldots$, т.е.

$$\begin{aligned} P_1(t) &= 1 - \pi_1 t + o(t), \\ P_n(t) &= \pi_n t + o(t), \qquad n \neq 1, \end{aligned}$$

и рассматривают производящую функцию

$$\varphi(z) = \pi_0 - \pi_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \pi_n z^n.$$

Обычно полагают

$$\pi_1 = \sum_{n \neq 1} \pi_n, \qquad \pi_0 > 0, \qquad \pi_n \geq 0.$$

При этих условиях $\varphi(0) = \pi_0 > 0$ и $\varphi(z) > 0$ в некоторой окрестности точки $z = 0$.

Функция $F(t; z)$ непрерывна по t равномерно по $|z| \leq 1$ и по $t \in [0, \infty)$. При $t \downarrow 0$ выполняется

$$F(t; z) = z + t\varphi(z) + o(t)$$

равномерно по $|z| \leq 1$.

Производящая функция $F(t; z)$ является решением любой из следующих двух эквивалентных задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \varphi(F), \qquad & F(0; z) = z; \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \varphi(z)\frac{\partial F}{\partial z}, \qquad & F(0; z) = z. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Отметим, что $\varphi(z) = \left.\dfrac{\partial F(t; z)}{\partial t}\right|_{t=0}$ (инфинитизимальный оператор однопараметрической непрерывной группы преобразований $F(t; \cdot)$).

При любом $|z| < 1$ существует решение уравнения (2.12), которое является аналитической функцией в $|z| < 1$ и разлагается в ряд по степеням z с неотрицательными коэффициентами.

Обозначим $h(u) = \int_0^u \frac{d\eta}{\varphi(\eta)}$. В некоторой окрестности O_0 нуля этот интеграл конечен, функции h и обратная к ней h^{-1} существуют. Для z и t, близких к нулю, выполняется $z \in O_0$ и $F(t; z) \in O_0$. Из уравнения (2.12) следует

$$h(F(t; z)) - h(z) = t$$

или

$$F(t; z) = h^{-1}(t + h(z)).$$

Очевидно, что функция h связана с функцией $f(z) = F(1; z)$ функциональным уравнением Абеля

$$h(f(z)) = 1 + h(z).$$

2.3.2. Семейство дробных итераций. Итерации Шрёдера

• Семейство функций $(f^\sigma; \sigma \geq 0)$ называется полугруппой итераций функции $f;\ D \to D$, если

$$f^0(x) = x, \qquad f^1(x) = f(x), \qquad f^\sigma(f^\tau(x)) = f^{\sigma+\tau}(x) \tag{2.13}$$

для всех $\sigma, \tau \geq 0$.

Аналогично, семейство функций $(f^\sigma; \sigma \in \mathbb{R})$ называется группой итераций функции $f;\ D \to D$, если свойство (2.13) выполняется для всех $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$. В этом случае говорят также о семействе дробных итераций (функции f).

• Существование семейства дробных итераций заданной функции f тесно связано с решением функциональных уравнений Шрёдера

$$\chi(f(x)) = \alpha \cdot \chi(x) \tag{2.14}$$

и Абеля

$$\lambda(f(x)) = \lambda(x) + \beta. \tag{2.15}$$

Если при $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ уравнение (2.14) имеет решение χ и существует обратная функция χ^{-1}, то функции

$$f^\sigma(x) = \chi^{-1}(\alpha^\sigma \chi(x))$$

образует семейство дробных итераций.

Аналогично, если при $\beta \neq 0$ уравнение (2.15) имеет решение λ и существует обратная функция λ^{-1}, то функции

$$f^\sigma(x) = \lambda^{-1}(\lambda(x) + \sigma\beta)$$

также образует семейство дробных итераций.

Взаимосвязь этих двух семейств итераций:

$$\chi(x) = e^{\lambda(x)}, \qquad \alpha = e^\beta.$$

• Для уравнения (2.14) существует бесконечно много непрерывных строго возрастающих решений χ для каждого множителя $0 < \alpha < 1$. Можно определить χ как произвольную непрерывную строго возрастающую положительную на интервале $f(d) \le x \le d$ функцию, удовлетворяющую (2.14). Тогда χ однозначно определится на интервале $0 < x \le d$ (см. п. 2.3.6).

• Пусть f^σ – семейство дробных итераций функции $f; D \to D$. Для каждого $\alpha > 0$, $\alpha \ne 1$ и произвольного x_0 из области D определим функцию φ равенством

$$\varphi(\alpha^\sigma) = f^\sigma(x_0), \qquad \sigma > 0,$$

т. е.

$$\varphi(y) = f^{\frac{\ln y}{\ln \alpha}}(x_0).$$

Если существует функция $\chi(x) = \varphi^{-1}(x)$, обратная функции φ, то она удовлетворяет уравнению Шрёдера (2.14).

• Если для данного множителя $\alpha > 0$ функция φ удовлетворяет уравнению

$$f(\varphi(t)) = \varphi(\alpha t),$$

φ аналитична в точке $t = 0$, $\varphi'(0) \ne 0$ и $\chi(z) = \varphi^{-1}(z)$, то χ аналитична в $z = \xi = \varphi(0)$ и выполняется (2.14). При этом функции

$$f^\sigma(x) = \chi^{-1}\left(\alpha^\sigma \chi(x)\right)$$

аналитичны в точке ξ при каждом σ и образуют семейство дробных итераций функции f.

2.3.3. Итерации Кёнига

• *Теорема Кёнига.* Если $f(0) = 0$, f аналитична в нуле,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \qquad |z| < R,$$

и $0 < a_1 < 1$, то существует предел

$$\chi(z) = \lim_{n\to\infty} a_1^{-n} f^n(z),$$

являющийся аналитической функцией в некоторой окрестности нуля, $\chi'(0) = 1$. При этом функция χ – решение уравнения Шрёдера с множителем a_1.

Кёниг [1884]

• Условие аналитичности в теореме Кёнига можно ослабить, заменив его на условие

$$f(z) = a_1 z + O(|z|^{1+\delta}), \qquad z \to 0,$$

в окрестности нуля для некоторого $\delta > 0$. Это, однако, не гарантирует существование обратной функции χ^{-1}.

Кнесер [1950]

Пример (Секереш [1959]):

$$f(z) = \frac{z}{2} + \frac{1}{3\pi} z^2 \sin\frac{\pi}{|z|}, \qquad z \neq 0, \qquad f(0) = 0.$$

Здесь $\chi(x) = 2^{-m}$ при $2^{-m} \le x < 2^{-m} + \dfrac{1}{3} 2^{-2m}$.

• Пусть f – непрерывная функция, строго возрастающая при $0 < x \le d$, $0 < f(x) < x$. Пусть, кроме того, f дифференцируема на $(0, d)$ и

$$f'(x) = a + O(x^\delta), \qquad x \downarrow 0, \tag{2.16}$$

где $0 < a < 1$, $\delta > 0$. Тогда существует предел

$$\chi(x) = \lim_{n\to\infty} a^{-n} f^n(x), \tag{2.17}$$

являющийся непрерывной строго возрастающей на интервале $0 < x \le d$ функцией, дифференцируемой на $(0, d)$. Функции

$$f^\sigma(x) = \chi^{-1}(a^\sigma \chi(x)), \tag{2.18}$$

образуют семейство дробных итераций, причем

$$f^\sigma(x) = a^\sigma x + O(x^{1+\delta}), \qquad x \downarrow 0. \tag{2.19}$$

Кёниг [1884], Кнесер [1950]

• Пусть для функции f выполняются условия приведенного выше утверждения. Функцию χ называют *функцией Шрёдера* функции f, если χ положительна, непрерывна, строго монотонна при $0 < x \le d$ и

$$\chi(f(x)) = \alpha \chi(x)$$

для некоторой константы $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. При $0 < \alpha < 1$ функция Шрёдера возрастает и $\lim_{x\downarrow 0} \chi(x) = 0$, а при $\alpha > 1$ она убывает и $\lim_{x\downarrow 0} \chi(x) = \infty$.

Итерации Шрёдера (2.18) непрерывны и строго убывают по σ,

$$\lim_{\sigma\to\infty} f^\sigma(x) = 0$$

для каждого x из $(0, d]$.

Обратно, пусть заданы итерации Шрёдера f^σ и $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. Соотношение

$$\chi_0(f^\sigma(d)) = \alpha^\sigma$$

полностью определяет функцию Шрёдера χ_0. Любая другая функция Шрёдера χ, связанная с семейством f^σ, имеет вид

$$\chi(x) = c(\chi_0(x))^\beta, \qquad c > 0, \qquad \beta \neq 0.$$

Отметим, что условие (2.16) не является необходимым для существования функции, обратной пределу Кёнига (2.17).

• Существование семейства дробных итераций Шрёдера с асимптотическим свойством (2.19) влечет существование семейства итераций Кёнига. Оба семейства идентичны, в частности, (2.19) однозначно характеризует итерации Кёнига.

Пусть f – непрерывна и строго возрастает при $0 < x \leq d$, $0 < f(x) < x$; функция f имеет семейство итераций Шрёдера, которые удовлетворяют асимптотическому соотношению

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x} f^\sigma(x) = a^\sigma, \qquad 0 < a < 1, \tag{2.20}$$

для каждого $\sigma > 0$. Если χ – функция Шрёдера с множителем a, порождающая семейство итераций f^σ, то

$$\chi(x) = \chi(d) \lim_{n\to\infty} (f_n(x)/f_n(d)).$$

Функция Шрёдера

$$\chi(x) = \lim_{n\to\infty} (f_n(x)/f_n(d)),$$

если она существует для $0 < x \leq d$, называется *главной функцией Шрёдера* для f. Она принадлежит множителю

$$a = \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x} f(x),$$

и нормализована равенством $\chi(d) = 1$.

• Следуя Секерешу, функцию f будем называть *регулярной* относительно итерирования, если она имеет семейство итераций Шрёдера, удовлетворяющих условию (2.20) для каждого $\sigma > 0$, а значит, и для $\sigma < 0$.

Дробные итерации, удовлетворяющие асимптотическому соотношению (2.20), сами регулярны и однозначно определяются функцией f.

• Если χ – функция Шрёдера, принадлежащая множителю α, и $c, \beta > 0$, то

$$\chi_*(x) = c(\chi(x))^\beta$$

– также функция Шрёдера, принадлежащая множителю α^β. Итерации, определяемые по χ_* и χ, совпадают.

Беббидж [1815]

• Пусть χ – функция Шрёдера, принадлежащая множителю α, и $\lambda(x) = \ln \chi(x)/\ln a$. Тогда функция

$$\chi_*(x) = \chi(x) g(\lambda(x)) \tag{2.21}$$

при произвольной функции g периода единица также удовлетворяет уравнению Шрёдера, с тем же множителем α.

Беббидж [1815]

Всякие две функции Шрёдера, принадлежащие одному и тому же множителю, связаны соотношением (2.21).

• Пусть f непрерывна, строго возрастает при $0 < x \le d$ и $0 < f(x) < x$; производная $f'(x)$ существует при $0 < x < d$ и для соответствующих вещественных чисел $\mu > 1$, $a > 0$ и $\delta > 0$

$$f'(x) = \mu a x^{\mu-1} + O(x^{\mu-1+\delta}), \qquad x \downarrow 0.$$

Тогда предел

$$\chi(x) = \lim_{n\to\infty} \mu^{-n} \ln(1/f^n(x)) \tag{2.22}$$

существует, является непрерывной строго возрастающей для $0 < x \le d$ функцией Шрёдера с множителем μ, дифференцируемой при $0 < x < d$. Кроме того, функции

$$f^\sigma(x) = \chi^{-1}(\mu^\sigma \xi(x))$$

являются дробными итерациями функции f и

$$f^\sigma(x) = a^{\frac{\mu^\sigma - 1}{\mu - 1}} x^{\mu^\sigma}(1 + O(x^\delta)), \qquad x \downarrow 0,$$

для $\sigma > 0$.

Секереш [1959]

• Пусть f – непрерывная, строго возрастающая при $0 < x \le d$ функция, $0 < f(x) < x$, и пусть f имеет семейство итераций f^σ, которые удовлетворяют соотношению

$$\lim_{x\downarrow 0} x^{-\mu^\sigma} f^n(x) = a^{\frac{\mu^\sigma - 1}{\mu - 1}}, \qquad \mu > 1, \qquad a > 0,$$

для каждого положительного σ. Пусть χ будет функцией Шрёдера с множителем μ, порождающей семейство f^σ. Тогда

$$\chi(x) = \chi(d) \lim_{n\to\infty} (\ln f^n(x)/\ln f^n(d)).$$

Секереш [1959]

2.3.4. Итерации Леви

• Пусть функция f строго возрастает и непрерывна при $0 \le x \le d$, $f(0) = 0$; $f(x) < x$ при $0 < x < d$; производная $f'(x)$ существует и имеет ограниченную вариацию в интервале $0 < x < d$, причем $\lim_{x\downarrow 0} f'(x) = 1$. Тогда для каждых $x, y \in (0, d]$ существует предел

$$\lambda_y(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - y_n}{y_{n-1} - y_n}, \qquad x_n = f^n(x), \qquad y_n = f^n(y).$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1} - x_n}{y_{n-1} - y_n} = 1,$$

то $\lambda_x(y) = -\lambda_y(x)$. Для фиксированного y $\lambda(x) = \lambda_y(x)$ – монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая уравнению Абеля $\lambda(f(x)) = \lambda(x) - 1$.

Леви [1928]

Если функция λ строго монотонна и непрерывна так, что существует обратная функция λ^{-1}, то

$$f^\sigma(x) = \lambda^{-1}(\lambda(x) - \sigma)$$

– семейство итераций Шрёдера функции f.

Следуя Леви, будем называть каждое непрерывное строго монотонное решение уравнения Абеля *логарифмом итераций* функции f.

Если λ – логарифм итераций функции f и a – вещественное число, то $\lambda_\star(x) = \lambda(x) + a$ – также логарифм итераций. При этом семейство итераций, порожденных $\lambda_\star$, идентично с семейством, порожденным λ.

• Функция λ называется *главным логарифмом* итераций f, если λ – логарифм итераций, и существует положительная, строго возрастающая последовательность γ_n такая, что

$$\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x) - f^n(d)}{\gamma_n}.$$

Нормализация функции λ такова, что $\lambda(d) = 0$. Из соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x) - f^{n+1}(x)}{\gamma_n} = 1$$

для каждого $0 < x \le d$ следует

$$\lambda_y(x) = \lambda(x) - \lambda(y).$$

Два главных логарифма итераций отличаются только выбором константы d, и они эквивалентны.

Итерации, порожденные главным логарифмом, определяются по функции f однозначно.

• Пусть f – непрерывная, строго возрастающая при $0 < x \leq d$ функция, и $0 < f(x) < x$; производная $f'(x)$ существует при $0 < x < d$, и для некоторых вещественных $a > 0$, β, δ, $0 < \delta < \beta$, выполняется

$$f'(x) = 1 - a(\beta + 1)x^{\beta} + O(x^{\beta+\delta}), \qquad x \downarrow 0.$$

Тогда, если $y = y_0$ – неподвижная точка из интервала $0 < y \leq d$, то предел

$$\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} a^{1/\beta}(\beta n)^{1+1/\beta}(f^n(x) - f^n(y))$$

существует и является непрерывной, строго возрастающей при $0 < x \leq d$ и дифференцируемой при $0 < x < d$ функцией. Кроме того функции

$$f^{\sigma}(x) = \lambda^{-1}(\lambda(x) - \sigma)$$

являются дробными итерациями функции f и

$$f^{\sigma}(x) = x - a\sigma x^{\beta+1} + O(x^{\beta+1}), \qquad x \downarrow 0.$$

Функция λ – главный логарифм итераций, и

$$\gamma_n = a^{-1/\beta}(\beta n)^{-1-1/\beta}.$$

Секереш [1959]

• Пусть f – непрерывная, строго возрастающая при $0 < x \leq d$ функция и $0 < f(x) < x$; f имеет семейство итераций Шрёдера f^{σ}, которые удовлетворяют асимптотическому соотношению

$$\lim_{x\downarrow 0} x^{-\beta-1}(x - f^{\sigma}(x)) = \sigma a, \qquad a > 0, \qquad \beta > 0,$$

для каждого положительного σ. Если при этом λ – логарифм итераций порождающий семейство f^{σ}, то он – главный логарифм итераций f.

Секереш [1959]

2.3.5. Интерполяционный ряд Эйлера

• Обозначим через Δ оператор конечной разности по переменной y, т.е. $\Delta F(y) = F(y+1) - F(y)$ (см. п. 4.1).

Интерполяционный ряд Ньютона для функции $F(y)$ с узлами интерполяции $0, 1, 2, \ldots$ имеет вид

$$F(y) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \binom{y}{k} \Delta^k F(0).$$

Фиксируя x, для итераций $f^y(x)$ имеем (в символической записи)

$$\Delta f^y(x) = f^{y+1}(x) - f^y(x) = (f-1)f^y(x),$$
$$\Delta^2 f^y(x) = f^{y+2}(x) - 2f^{y+1}(x) + f^y(x) = (f-1)^2 f^y(x).$$

Вообще,

$$\Delta^n f^y(x) = (f-1)^n f^y(x)$$

или, полагая $y = 0$,

$$\Delta^n f^y(x)\Big|_{y=0} = (f-1)^n(x).$$

(Иногда вместо $\Delta^n f^y(x)\Big|_{y=0}$ пишут $\Delta^n f^0(x)$).

Таким образом, интерполяционный ряд Ньютона для функции $f^y(x)$ (интерполяция по целым значениям итерационного показателя y) имеет в символической записи вид

$$f^y(x) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \binom{y}{k} (f-1)^k(x) = (1 + (f-1))^y(x)$$

или

$$f^y(x) \simeq x + \binom{y}{1}(f(x) - x) + \binom{y}{2}(f^2(x) - 2f(x) + x) + \ldots. \tag{2.23}$$

Это разложение, в связи с произвольными вещественными итерационными показателями, рассматривал Шрёдер [1871] (сходимость не изучалась).

• Обозначим через $f(y;x)$ ряд Ньютона для $f^y(x)$, рассматриваемый как формальный степенной ряд по переменной y. Ряд $f(y;x)$ обладает свойствами

$$f(0;x) = x, \qquad f(1;x) = f(x), \qquad f(\sigma; f(\tau;x)) = f(\sigma+\tau;x)$$

для всех $\sigma, \tau \geq 0$.

Таким образом, в случае абсолютной сходимости ряд Ньютона решает задачу интерполяции $f^y(x)$ по натуральным итерациям $f^0(x)$, $f^1(x)$, $f^2(x)$, ...

• Из теории сходимости ряда Ньютона $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \binom{z}{k}$ (см. Гельфонд [M5]) известно, что он обладает абсциссой абсолютной сходимости, равной

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln \sum_{k=0}^{n} |a_n|}{\ln n}.$$

Для ряда (2.23)

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln \sum_{k=0}^{n} |(f-1)^n(x)|}{\ln n}.$$

Отсюда следует, например, что ряд (2.23) абсолютно сходится при всех $y > 0$, если выполняется следующее условие: для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n выполняется

$$\sum_{k=0}^{n} |(f-1)^n(x)| < n^{1+\varepsilon}.$$

(Бирюк [1996, не опубликовано]).

Тривиальными примерами функций с абсолютно сходящимися рядами Ньютона для их итераций являются $f(x) = ax$ при $0 < a < 2$ и $f(x) = \lambda \sin x$ при $0 < \lambda < 1$.

2.3.6. Непрерывные монотонные решения уравнений Абеля и Шрёдера

• Пусть функция f непрерывна и строго возрастает на вещественном отрезке $[0, R]$ и $0 = f(0) < f(x) < x \le R$. Тогда она представима в виде

$$f(x) = \omega(1 + \omega^{-1}(x)), \tag{2.24}$$

где ω – непрерывная строго убывающая на $[0, +\infty]$ функция, такая, что $\omega(0) = R$, $\omega(+\infty) = 0$, а ω^{-1} – функция, обратная ω. (см., например, Секереш [1959], Нечепуренко [1997б]).

В другой формулировке: пусть функция f удовлетворяет приведенным выше условиям. Тогда существует непрерывное строго убывающее на $[0, R]$ решение $\lambda : [0, R] \to [0, +\infty]$ уравнения Абеля

$$\lambda(f(y)) = \lambda(y) + 1, \tag{2.25}$$

причем $\lambda(0) = +\infty$, $\lambda(R) = 0$. Функция $\chi(y) = e^{\lambda(y)}$ является решением уравнения Шрёдера

$$\chi(f(y)) = e \cdot \chi(y). \tag{2.26}$$

Доказательство состоит в построении общего непрерывного строго убывающего решения уравнения Абеля (2.25).

Определим функцию ω на $[0, +\infty]$ равенством

$$\omega(y) = f^{[y]}(\omega_0(\{y\})), \tag{2.27}$$

где $[y]$ и $\{y\}$ – целая и дробная части числа y, а ω_0 – непрерывная строго убывающая на $[0, 1)$ функция, такая, что $\omega_0(0) = R$, $\omega_0(1-0) = f(R)$.

На интервалах $[n, n+1)$, $n = 0, 1, \dots$, функция ω равна

$$\omega(y) = f^n(\omega_0(y-n)), \qquad n \le y < n+1,$$

а значит, непрерывна и строго убывает как суперпозиция непрерывных строго возрастающих функций и одной непрерывной строго убывающей функции. В целых точках функция ω также непрерывна:

$$\omega(n-0) = f^{n-1}(\omega_0(1-0)) = f^{n-1}(f(R)) = f^n(R),$$
$$\omega(n) = f^n(\omega_0(0)) = f^n(R).$$

Следовательно, функция ω непрерывна и строго убывает на всем интервале $[0, +\infty)$. Осталось доопределить значение $\omega(+\infty) = 0$ (по непрерывности).

Таким образом, отображение $\omega : [0, +\infty] \to [0, R]$ – инъекция, и существует обратное отображение $\omega^{-1} : [0, R] \to [0, +\infty]$, причем $\omega^{-1}(0) = +\infty$, $\omega^{-1}(R) = 0$. Из (2.27) следует, что функция ω удовлетворяет функциональному уравнению

$$\omega(y+1) = f(\omega(y)), \ \text{для} \ \ 0 \le y \le +\infty.$$

Полагая здесь $x = \omega(y)$, что эквивалентно $y = \omega^{-1}(x)$, приходим к (2.24). Замена $\lambda(x) = \omega^{-1}(x)$ и $y = \lambda(x)$ приводит к уравнению (2.25) и, после замены $\chi(y) = e^{\lambda(y)}$ – к уравнению (2.26).

2.3.7. Аналитические решения уравнения Шрёдера

• *Теорема Кёнига.* Если функция f имеет сходящийся степенной ряд

$$f(z) = \xi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-\xi)^n, \qquad |z-\xi| < R > 0,$$

и $a_1 \ne 0$, $|a_1| \ne 1$, тогда уравнение Шрёдера имеет решение

$$\chi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-\xi)^n, \qquad b_1 = 1, \qquad |z-\xi| < R_1 > 0, \tag{2.28}$$

для любого определения a_1^σ такого, что

$$a_1^1 = a_1, \quad a_1^\sigma a_1^\tau = a_1^{\sigma+\tau}.$$

Функции f^σ из семейства дробных итераций функции f аналитичны при $z = \xi$:

$$f^{\sigma}(z) = \xi + \sum_{n=1}^{\infty} a_p^{(\sigma)} (z-\xi)^p, \qquad |z-\xi| < R_\sigma > 0. \tag{2.29}$$

Отметим, что коэффициенты $a_p^{(\sigma)}$ однозначно определяются из соотношения

$$f^{\sigma}(f(z)) = f(f^{\sigma}(z))$$

и $a_1^{(\sigma)} = a_1^{\sigma}$. Каждое определение a_1^{σ} дает формальный степенной ряд (2.29), сходящийся для некоторого $z \neq 0$.

• В случае $|f'(\xi)| = |a_1| = 1$ сходимость ряда (2.28) зависит от аргумента числа a_1. Например, если

$$\liminf_{n\to\infty} |\sqrt[n]{a_1^n - 1}| = 0,$$

то существует функция f с расходящимся рядом (2.28).

Кремер [1938]

Однако, если

$$\ln |a_1^n - 1| = O(\ln n), \qquad n \to \infty,$$

то ряд (2.28) сходится для каждой f с $f(\xi) = \xi$, $f'(\xi) = a_1$.

Сигель [1942]

В случае $a_1 = 0$ ряд (2.29) обыкновенно расходится.

• Для функции

$$f(z) = z + \sum_{p=m}^{\infty} a_p (z-\xi)^p, \quad m > 1, \quad a_m \neq 0, \quad |z-\xi| < R > 0, \tag{2.30}$$

уравнение Шрёдера не имеет даже формального степенного решения вида (2.28). В этом случае формальный ряд (2.29) для итераций определяется однозначно, однако, он может расходиться при любом нецелом z. Пример (Бейкер И.Н.): $f(z) = e^z - 1$.

Глава 3

Итерации отдельных функций

В приведенных далее формулах используются обозначения: n – для итерационного показателя и x – для аргумента итерируемой функции. Предполагается, что итерационный показатель целочислен, а аргументы функций вещественны. Область определения функций иногда уточняется.

Некоторые приводимые формулы остаются справедливыми для произвольных вещественных и даже комплексных итерационных показателей, а также для комплекснозначных функций комплексного переменного. Ряд формул, естественно, обобщается (иногда с сохранением записи) на многомерный случай. Все это, разумеется, требует специального рассмотрения.

Большинство формул общеизвестны. В п. 3.5 используются примеры Севастьянова [1971].

3.1. Многочлены

3.1.1. $\boldsymbol{f(x) = x + b}$; $\qquad f^n(x) = x + bn.$

3.1.2. $\boldsymbol{f(x) = ax}$; $\qquad f^n(x) = a^n x.$

3.1.3. $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$, $\quad a \neq 1$; $\qquad f^y(x) = a^y\left(x + \dfrac{b}{a-1}\right) - \dfrac{b}{a-1}.$

3.1.4. $\boldsymbol{f(x) = ax^m}$, $\quad m \neq 1.$

Степенная функция, см. 3.4.1. При $m = 1$ функция вырождается в линейную.

3.1.5. $\boldsymbol{f(x) = (2x-1)^2}$;

$$f^n(x) = \begin{cases} (\cos(2^n \arccos(2x-1)) + 1))/2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ (\operatorname{ch}(2^n \operatorname{Arch}(2x-1)) + 1))/2 & \text{при } x \leq 0 \text{ или } x \geq 1, \end{cases}$$

$\operatorname{Arch} t = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}).$

3.1.6. $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 1}$;

$$f^n(x) = \begin{cases} \cos(2^n \arccos x) & \text{при } |x| \leq 1, \\ \operatorname{ch}(2^n \operatorname{Arch} x) & \text{при } |x| \geq 1. \end{cases}$$

3.1.7. $\boldsymbol{f(x) = 4x(1-x)}$;

$$f^n(x) = \begin{cases} \left(\sin(2^n \arcsin\sqrt{x})\right)^2 & \text{при } 0 \le x \le 1, \\ -\left(\operatorname{sh}(2^n \operatorname{Arsh}\sqrt{-x})\right)^2 & \text{при } x \le 0, \\ 1 + \left(\operatorname{sh}(2^n \operatorname{Arsh}\sqrt{x-1})\right)^2 & \text{при } x \ge 1, \end{cases}$$

$$\operatorname{Arsh} t = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right).$$

3.1.8. $\boldsymbol{f(x) = 4x(1+x)}$;

$$f^n(x) = \begin{cases} -\left(\sin(2^n \arcsin\sqrt{-x})\right)^2 & \text{при } -1 \le x \le 0, \\ \left(\operatorname{sh}(2^n \operatorname{Arsh}\sqrt{x})\right)^2 & \text{при } x \ge 0, \\ -1 - \left(\operatorname{sh}(2^n \operatorname{Arsh}\sqrt{-x-1})\right)^2 & \text{при } x \le -1. \end{cases}$$

3.1.9. $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + 2x}$; $\quad f^n(x) = \dfrac{(1+ax)^{2^n} - 1}{a}.$

3.2. Дробно-линейные функции

3.2.1. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

При $c = 0$ функция f вырождается в линейную.
При $c \ne 0$ функция f приводится к следующему виду.

3.2.2. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{ax+b}{x+d}}$.

При $ad = b$ функция f вырождается в константу.
При $ad \ne b$, $a + d = 0$, см. п. 3.2.3.
При $ad \ne b$, $a + d \ne 0$, $(a-d)^2 + 4b = 0$, см. п. 3.2.7.
Пусть $ad \ne b$, $a + d \ne 0$, $(a-d)^2 + 4b \ne 0$. Тогда

$$f^n(x) = \frac{p(x-q) - r^n q(x-p)}{x - q - r^n(x-p)}.$$

Здесь p и q – корни уравнения $x(x+d) = ax + b$:

$$p = \frac{a - d - \sqrt{(a-d)^2 + 4b}}{2},$$

$$q = \frac{a - d + \sqrt{(a-d)^2 + 4b}}{2}, \quad r = \frac{q+d}{p+d}.$$

В других обозначениях

$$f^n(x) = \mu \operatorname{tg}\Bigl(\operatorname{arctg}\frac{x-\nu}{\mu} + yh\Bigr) + \nu,$$

где

$$\mu = i\frac{\sqrt{(a-d)^2+4b}}{2}, \qquad \nu = \frac{a-d}{2}, \qquad h = -\operatorname{arctg}\frac{2\mu}{a+d}.$$

Аристов [1900]

В вещественной форме:
при $(a-d)^2+4b<0$, полагая

$$\mu = \frac{\sqrt{-(a-d)^2-4b}}{2}, \qquad \nu = \frac{a-d}{2}, \qquad \operatorname{tg} h_0 = \frac{2\mu}{a+d},$$

получим

$$f^n(x) = \mu \operatorname{tg}\Bigl(\operatorname{arctg}\frac{x-\nu}{\mu} - nh_0\Bigr) + \nu;$$

а при $(a-d)^2+4b>0$, полагая

$$\mu_0 = \frac{\sqrt{(a-d)^2+4b}}{2}, \qquad \nu = \frac{a-d}{2}, \qquad \operatorname{tg} h_1 = \frac{2\mu_0}{a+d},$$

получим

$$f^n(x) = \mu_0 \operatorname{th}\Bigl(\operatorname{Arth}\frac{x-\nu}{\mu_0} + nh_1\Bigr) + \nu.$$

3.2.3. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{ax+b}{x-a}}$, $\quad a^2+b\neq 0;$

$$f^n(x) = \begin{cases} x & \text{при } n=2m,\\ f(x) & \text{при } n=2m+1.\end{cases}$$

3.2.4. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x+b}{1-bx}}$, $\quad b=\operatorname{tg} h\neq 0;$ $\qquad f^n(x) = \dfrac{x+\operatorname{tg} nh}{1-x\operatorname{tg} nh}.$

3.2.5. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{ax}{1+cx}}$, $\quad a\neq 1, \quad c\neq 0;$ $\qquad f^n(x) = \dfrac{a^n x}{1-\dfrac{1-a^n}{1-a}cx}.$

3.2.6. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x}{m-(m-1)x}}$, $\quad m\neq 0,\, 1;$ $\quad f^n(x) = \dfrac{x}{x-(x-1)m^n}.$

3.2.7. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{ax+b}{x+d}}$, $\quad a+d\neq 0, \quad (a-d)^2+4b=0$, что влечет $ad\neq b$;

$$f^n(x) = \frac{(a+d)x + n((a-d)x+2b)}{a+d+n(2x-a+d)}.$$

В других обозначениях, полагая $a = p+q$, $d = p-q$ и, следовательно, $b = -q^2$, приходим к следующему уравнению.

3.2.8. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{(p+q)x - q^2}{x+p-q}}$, $\quad p \neq 0;\qquad f^n(x) = \dfrac{(px+q(x-q)n}{p+(x-q)n}.$

3.2.9. $\boldsymbol{f(x) = -\dfrac{d^2}{4(x+d)}}$; $\qquad f^n(x) = -\dfrac{d}{2}\cdot\dfrac{dn+2(n-1)x}{d(n+1)+2nx}.$

3.2.10. $\boldsymbol{f(x) = a - \dfrac{a^2}{4x}}$; $\qquad f^n(x) = \dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{2(n+1)x - an}{2xn - a(n-1)}.$

3.2.11. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x}{1+cx}}$; $\qquad f^n(x) = \dfrac{x}{1+cxn}.$

3.3. Рациональные функции

3.3.1. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x^2-a}{2x+b}}$, $\quad b^2 \neq 4a;\qquad f^n(x) = \dfrac{q(x+p)^{2^n} - p(x+q)^{2^n}}{(x+q)^{2^n} - (x+p)^{2^n}}.$

Здесь

$$p = \frac{b - \sqrt{b^2-4a}}{2},\qquad q = \frac{b+\sqrt{b^2-4a}}{2}.$$

При $b^2 = 4a$ функция вырождается в линейную.

Островский [1960], Нечепуренко [1961]

3.3.2. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x^2}{2x+b}}$, $\quad b \neq 0;\qquad f^n(x) = \dfrac{bx^{2^n}}{(x+b)^{2^n} - x^{2^n}}.$

При $b = 0$ функция вырождается в линейную.

3.3.3. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{ax^2+2x}{1-bx^2}}$, $\quad a, b \neq 0;\quad f^n(x) = q\dfrac{(px+q)^{2^n} - (x+q)^{2^n}}{p(x+q)^{2^n} - (px+q)^{2^n}}.$

Здесь

$$q = \frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2b},\qquad p = bq^2.$$

3.3.4. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}}$; $\qquad f^n(x) = \operatorname{tg}(2^n \operatorname{arctg} x).$

3.3.5. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x}}$; $\qquad f^n(x) = \operatorname{ctg}(2^n \operatorname{arcctg} x).$

3.3.6. $\boldsymbol{f(x) = x\dfrac{3-x^2}{1-3x^2}}$; $\quad f^n(x) = \operatorname{tg}(3^n \operatorname{arctg} x)$.

3.3.7. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x^2}{2-x^2}}$; $\quad f^n(x) = \left(\operatorname{ch}\left(2^n \operatorname{Arch}\dfrac{1}{x}\right)\right)^{-1}$.

3.3.8. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}}$; $\quad f^n(x) = \left(\operatorname{th}\left(2^n \operatorname{Arth}\dfrac{1}{x}\right)\right)^{-1}$.

3.4. Степенная функция

3.4.1. $\boldsymbol{f(x) = ax^p}$, $\quad p \neq 1, \quad x > 0; \qquad f^n(x) = a^{\frac{p^n-1}{p-1}} x^{p^n}$.

При $p = 1$ функция вырождается в линейную.

3.5. Иррациональности

3.5.1. $\boldsymbol{f(x) = (ax^m + b)^{1/m}}$, $\quad a \neq 1$;

$$f^n(x) = \left(a^n\left(x^m + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}\right)^{1/m}.$$

3.5.2. $\boldsymbol{f(x) = (x^m + b)^{1/m}}$, $\quad b > 0; \qquad f^n(x) = (x^m + bn)^{1/m}$.

3.5.3. $\boldsymbol{f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}}$, $\quad -1 \le x \le 1; \qquad f^n(x) = \sin 2^n \arcsin x$.

3.5.4. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}}$; $\qquad f^n(x) = \operatorname{tg}(2^{-n} \operatorname{arctg} x)$.

3.5.5. $\boldsymbol{f(x) = 1 - \left(e^{-\alpha a}(1-x)^{-\alpha} + \dfrac{\lambda}{a}\cdot(1-e^{-\alpha a})\right)^{-1/\alpha}}$,
$0 < \alpha < 1, \quad \lambda > \max(0, a)$;

$$f^n(x) = 1 - \left(e^{-\alpha a n}(1-x)^{-\alpha} + \frac{\lambda}{a}\cdot(1-e^{-\alpha a n})\right)^{-1/\alpha}.$$

3.5.6. $\boldsymbol{f(x) = 1 - (\alpha\lambda + (1-x)^{-\alpha})^{-1/\alpha}}$, $\quad 0 < \alpha < 1, \ \lambda > 0$;

$$f^n(x) = 1 - (\alpha\lambda n + (1-x)^{-\alpha})^{-1/\alpha}.$$

3.5.7. $\boldsymbol{f(x) = x\cdot\left(e^{\lambda k} - (e^{\lambda k} - 1)x^k\right)^{-1/k}}$, $\quad \lambda > 0$;

$$f^n(x) = x \cdot \left(e^{\lambda kn} - (e^{\lambda kn} - 1)x^k\right)^{-1/k}.$$

3.5.8. $\boldsymbol{f(x) = 1 - \left(1 - p + p(1-x)^{\beta}\right)^{1/\beta}}$, $\quad \beta > 0,\ \ 0 < p < 1;$

$$f^n(x) = 1 - \left(1 - p^n + p^n(1-x)^{\beta}\right)^{1/\beta}$$

3.5.9. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x}{(m - (m-1)x^k)^{1/k}}}$, $\quad k > 0;$

$$f^n(x) = \frac{x}{(m^n - (m^n - 1)x^k)^{1/k}}.$$

Часть II

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

А. Пуанкаре принадлежат слова: “Я не знаю, что такое функциональные уравнения”. Действительно, термин *функциональные уравнения* всеобъемлющ: его используют и для уравнений в абстрактных функциональных пространствах, и для различного типа уравнений (дифференциальных, интегральных и др.) в конкретных пространствах функций.

Как уже отмечалось во введении, в данной монографии рассматриваются функциональные уравнения только в узком смысле: это соотношения, содержащие лишь конечное число суперпозиций известных и неизвестных функций. Такими являются, например, уравнения в конечных разностях, но ими не являются уравнения, образованные с помощью операций дифференцирования, интегрирования, lim, inf, sup.

В данной части предлагается обзор ряда методов решения уравнений в конечных разностях и некоторых других типов функциональных уравнений. Из монографий по этим вопросам можно рекомендовать [М5, М3, М7, М11, М12, М15]. Из методов операционного исчисления для решения линейных конечно-разностных уравнений с постоянными коэффициентами представлен только подход, развитый Бергом [1961] (случай дискретной переменной). Один из вариантов операционного исчисления, ориентированного на конечно-разностные уравнения с непрерывной переменной, изложен в прил. Д.

Глава 4

Уравнения в конечных разностях

4.1. Конечные разности

4.1.1. Определения и свойства

• Пусть функция f определена в точках x и $x+h$.

Сдвигом (смещением) f в точке x при приращении аргумента (шаге) h называется величина

$$E_h f(x) = f(x+h).$$

Разностью первого порядка функции f в точке x при приращении аргумента (шаге) h называется величина

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$

Очевидно, что $\Delta_h f(x) = E_h f(x) - f(x)$.

При $h=1$ вместо E_h и Δ_h пишут просто E и Δ:

$$Ef(x) = f(x+1), \qquad \Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

• Для целых $n > 1$ рекуррентно определяется сдвиг функции на n шагов $E_h^n f(x)$ и разность n-го порядка $\Delta_h^n f(x)$:

$$\begin{aligned} &E_h^n f(x) = E_h(E_h^{n-1} f(x), && \Delta_h^n f(x) = \Delta_h^{n-1} f(x+1) - \Delta_h^{n-1} f(x), \\ &E_h^1 f(x) = E_h f(x), && \Delta_h^1 f(x) = \Delta_h f(x). \end{aligned}$$

Предполагается, что функция f определена в точках x, $x+h, \ldots,$ $x+nh$. Полагают

$$E_h^0 f(x) = \Delta_h^0 f(x) = f(x).$$

• *Разностная формула Лагранжа* –

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+jh). \tag{4.1}$$

Интерполяционная формула Эйлера –

$$E_h^n f(x) = f(x+nh) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \Delta_h^j f(x). \tag{4.2}$$

Выполняются равенства:

$$\Delta_h(u(x)v(x)) = E_h u(x)\cdot\Delta_h v(x) + v(x)\Delta_h u(x),$$

$$E_h(\Delta_h u(x)\cdot\Delta_h v(x)) = \Delta_h E_h u(x)\cdot\Delta_h E_h v(x),$$

$$E_h\Delta_h f(x) = \Delta_h E_h f(x).$$

• Следует различать выражение $(\Delta_h f)(g(x))$ (значение конечной разности функции f в точке $g(x)$) и выражение $\Delta_h f(g(x))$ (конечную разность суперпозиции функций):

$$\begin{aligned}(\Delta_h f)(g(x)) &= f(g(x)+h) - f(g(x)),\\ \Delta_h f(g(x)) &= f(g(x+h)) - f(g(x)).\end{aligned}$$

Например,

$$\begin{aligned}(\Delta f)(1-x) &= f(2-x) - f(1-x),\\ \Delta f(1-x) &= f(-x) - f(1-x).\end{aligned}$$

4.1.2. Операторная интерпретация

• Сдвиги и разности функции удобно интерпретировать как действие операторов E_h и Δ_h на функцию. Для целочисленного показателя $n \geq 1$ степень оператора определяется как его n-кратное применение. Нулевая степень оператора, по определению, равна тождественному оператору I.

Операторы E_h и Δ_h аддитивны и однородны:

$$\begin{aligned}&\Delta_h(f+g) = \Delta_h(f) + \Delta_h(g), \qquad &\Delta_h(\alpha f) = \alpha\Delta_h(f),\\ &E_h(f+g) = E_h(f) + E_h(g), \qquad &E_h(\alpha f) = \alpha E_h(f).\end{aligned}$$

В операторной форме

$$\begin{aligned}&\Delta_h^0 = E_h^0 = I, \Delta_h = E_h - I,\\ &\Delta_h E_h = E_h\Delta_h = E_h^2 - E_h = \Delta_h^2 + \Delta_h,\\ &\Delta_h^n = (E_h - I)^n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\tbinom{n}{j}E_h^j,\\ &E_h^n = (\Delta_h + I)^n = \sum_{j=0}^{n}\tbinom{n}{j}\Delta_h^j.\end{aligned}$$

При отличных от целых $r > 0$ формально

$$E_h^r = (I+\Delta_h)^r = I + \binom{r}{1}\Delta_h^1 + \binom{r}{2}\Delta_h^2 + \dots.$$

• Выполняется формальное соотношение

$$E_h = e^{hD} = I + hD + \frac{h^2}{2!}D^2 + \dots, \qquad D = \frac{d}{dx}.$$

Это операторное представление ряда Тейлора.

4.2. Рекуррентные последовательности и уравнения

4.2.1. Определение

• Последовательность $f(0), f(1), \dots$ элементов некоторого множества Y называется рекуррентной или возвратной последовательностью m-го порядка, если ее члены связаны соотношением

$$f(n+m) = F(n, f(n), \dots, f(n+m-1)), \qquad n = 0, 1, \dots, \tag{4.3}$$

где второй аргумент функции $F(n, \beta_0, \dots, \beta_{m-1})$ *существен*, т.е. существуют $n, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ такие, что

$$F(n, \beta', \beta_1, \dots, \beta_{m-1}) \neq F(n, \beta'', \beta_1, \dots, \beta_{m-1})$$

при некоторых $\beta' \neq \beta''$.

Уравнение (4.3), называемое рекуррентным или разностным уравнением m-го порядка на множестве X, позволяет вычислять все члены последовательности, если заданы ее первые m членов $f(0) = \beta_0, \dots, f(m-1) = \beta_{m-1}$ (начальные условия, при которых решается уравнение (4.3)).

• Существует функция Φ такая, что

$$f(n) = \Phi(n, \beta_0, \dots, \beta_{m-1})$$

для всех $n = 0, 1, \dots$.

Функция Φ может быть определена рекурсивно равенствами

$$\begin{aligned}
&\Phi(0, \beta_0, \dots, \beta_{m-1}) = \beta_0,\\
&\quad\vdots\\
&\Phi(m-1, \beta_0, \dots, \beta_{m-1}) = \beta_{m-1},\\
&\Phi(j+m, \beta_0, \dots, \beta_{m-1}) =\\
&\qquad F(j, \Phi(j, \beta_0, \dots, \beta_{m-1}), \dots, \Phi(j+m-1, \beta_0, \dots, \beta_{m-1})),
\end{aligned}$$

для $j = 0, 1, \dots$.

Примеры:

1. Геометрическая прогрессия $f(n+1) = qf(n)$ и арифметическая прогрессия $g(n+1) = g(n) + d$ – рекуррентные последовательности первого порядка; $f(n) = q^n f(0)$, $g(n) = g(0) + nd$ $(n \geq 0)$.
2. Числа Фибоначи $f(n{+}2) = f(n) + f(n{+}1)$ (обычно $f(0) = 0$, $f(1) = 1$) – рекуррентные последовательности второго порядка;

$$f(n) = \frac{f(1)}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] + \frac{f(0)}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right].$$

• Рекуррентная последовательность m-го порядка (4.3) может быть определена рекуррентным уравнением первого порядка для m-мерных векторов из множества Y^m.

Рассмотрим m последовательностей

$$\begin{array}{l} u_1(0), u_1(1), \ldots, u_1(j), \ldots, \\ \vdots \\ u_m(0), u_m(1), \ldots, u_m(j), \ldots \end{array} \tag{4.4}$$

таких, что

$$u_1(n) = f(n), \ldots, u_m(n) = f(n+m), \qquad n \geq 0.$$

Уравнение (4.3) приводится к системе уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} &u_1(n+1) = u_2(n), \\ &\vdots \\ &u_{m-1}(n+1) = u_m(n), \\ &u_m(n+1) = F(n, u_1(n), \ldots, u_m(n)). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Система уравнений (4.5) позволяет вычислять все члены последовательностей (4.4), если заданы их первые члены

$$u_1(0) = f(0), \ldots, u_m(0) = f(m-1).$$

В векторной форме, обозначая

$$U_n = [u_1(n), \ldots, u_m(n)]^T,$$

систему (4.5) можно переписать в виде векторного рекуррентного уравнения первого порядка

$$U(n+1) = H(n, U(n)), \tag{4.6}$$

где

$$H(n, U) = \begin{bmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_m \\ F(n, u_1, \ldots, u_m) \end{bmatrix}, \qquad U = [u_1, \ldots, u_m]^T.$$

Все члены последовательности $U(0)$, $U(1)$,... могут быть вычислены из уравнения (4.6), если задан ее первый член $U(0)$. При

$$U(0) = [\beta_0, \ldots, \beta_{m-1}]^T$$

члены исходной последовательности определятся из

$$f(n) = u_1(n) = \mathrm{pr}_1\, U(n)$$

(первая проекция вектора U_n).

Пример. Для чисел Фибоначчи определяющее уравнение второго порядка эквивалентно двумерному векторному уравнению (4.6) первого порядка, где $U(n) = [u_1(n), u_2(n)]^T$,

$$H(n, U) = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 + u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = AU.$$

Пусть $U(0) = [\beta_0, \beta_1]^T$. Тогда $U(n) = A^n U(0)$.

4.2.2. Линейные рекуррентные уравнения с произвольными коэффициентами

• Линейное рекуррентное уравнение для последовательности $f(0)$, $f(1), \ldots$ имеет вид

$$f(n+m) + a_1(n) f(n+m-1) + \ldots + a_m(n) f(n) = b(n). \tag{4.7}$$

Предполагается, что величины $a_1(n), \ldots, a_m(n)$ и $b(n)$ конечны при всех n.

Число m называется порядком уравнения (4.7), если $a_m(n) \neq 0$ хотя бы при одном значении n.

Решением уравнения (4.7) называется функция, принимающая конечные значения и удовлетворяющая уравнению (4.7) при всех $n = 0, 1, \ldots$. Каждое решение уравнения (4.7) однозначно определяется заданием значений первых m членов последовательности

$$f(0) = \beta_0, \ldots, f(m-1) = \beta_{m-1}, \tag{4.8}$$

остальные значения $f(n)$ находятся из соотношения (4.7).

• Общее решение неоднородного уравнения (4.7) есть сумма частного и общего решений однородного (приведенного) уравнения

$$f(n+m) + a_1(n)f(n+m-1) + \ldots + a_m(n)f(n) = 0. \tag{4.9}$$

• Если правая часть в уравнении (4.7) равна $b(n) = b_1(n) + b_2(n)$, а $f_1(n)$ и $f_2(n)$ – решения уравнения (4.7) при правой части, равной $b_1(n)$ и $b_2(n)$ соответственно, то решение $f(n)$ уравнения (4.7) с правой частью $b(n)$ равно $f(n) = f_1(n) + f_2(n)$.

Если $f_1(n), \ldots, f_p(n)$ – решения однородного уравнения (4.9), то их взвешенная сумма

$$g(n) = c_1 f_1(n) + \ldots + c_p f_p(n),$$

где $c_1, \ldots, c_p$ – постоянные, будет также решением этого уравнения.

Решения однородного уравнения (4.9) $f_1(n), \ldots, f_p(n)$, $n \geq 0$ называются линейно независимыми, если для любых $c_1, \ldots, c_p$, одновременно не равных нулю, равенство

$$c_1 f_1(n) + \ldots + c_p f_p(n) = 0,$$

хотя бы для одного $n \geq 0$ не выполняется.

Уравнение (4.9) всегда имеет систему m линейно независимых решений (фундаментальную систему): достаточно взять

$$f_i(n) = \delta_{in} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = n, \\ 0 & \text{при } i \neq n. \end{cases}$$

• Пусть $f_1, \ldots, f_m$ – решения однородного уравнения (4.9). Обозначим

$$D(n) = \begin{vmatrix} f_1(n) & \ldots & f_m(n) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ f_1(n+m-1) & \ldots & f_m(n+m-1) \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$D(n+1) = (-1)^m D(n) a_m(n)$$

и при $n \geq 1$

$$D(n) = (-1)^{m \cdot n} \prod_{i=0}^{n-1} a_m(i) D(0).$$

Если $a_m(n) \neq 0$ при всех n, то определитель $D(n)$ или равен нулю при всех $n \geq 0$, или отличен от нуля при всех $n \geq 0$.

Если решения $f_1, \ldots, f_m$ линейно зависимы, то $D(n) = 0$ при всех $n \geq 0$.

Если $f_1, \ldots, f_m$ – система m линейно независимых решений однородного уравнения (4.9), и $a_m(n) \neq 0$ при всех n, то $D(n) \neq 0$ при всех $n \geq 0$.

• Если $f_1, \ldots, f_m$ – линейно независимые решения однородного уравнения (4.9), $a_m(n) \neq 0$ и $D(0) \neq 0$, то его общее решение выражается формулой

$$f_{\text{о}}(n) = c_1 f_1(n) + \ldots + c_m f_m(n),$$

где $c_1, \ldots, c_m$ – произвольные постоянные.

Для решения однородного уравнения, удовлетворяющего начальным условиям $f(0) = \beta_0$, …, $f(m-1) = \beta_{m-1}$, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &c_1 f_1(0) + \ldots + c_m f_m(0) = \beta_0, \\ &\ \vdots \\ &c_1 f_1(m-1) + \ldots + c_m f_m(m-1) = \beta_{m-1}. \end{aligned}$$

Так как $D(0) \neq 0$, то c_i находятся единственным образом и искомое решение однородного уравнения равно

$$f_{\text{оч}}(n) = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & f_1(n) & \ldots & f_m(n) \\ \beta_0 & f_1(0) & \ldots & f_m(0) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \beta_{m-1} & f_1(m-1) & \ldots & f_m(m-1) \end{vmatrix}}{D(0)}. \tag{4.10}$$

• *Метод Лагранжа* (*вариации постоянных*). Пусть известны m линейно независимых решений $f_1(n), \ldots, f_m(n)$ однородного уравнения (4.9) и $a_m(n) \neq 0$ при всех n. Частное решение линейного неоднородного рекуррентного уравнения (4.7) можно найти в виде

$$f(n) = C_1(n) f_1(n) + \ldots + C_m(n) f_m(n),$$

полагая

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} f_i(n+j) \Delta C_i(n) = 0, \qquad j = 1, \ldots, m-1; \\ &\sum_{i=1}^{m} f_i(n+m) \Delta C_i(n) = b(n). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Здесь $\Delta C_i(n) = C_i(n+1) - C_i(n)$. После решения системы (4.11) линейных алгебраических уравнений относительно $\Delta C_i(n)$ каждое $C_i(n)$ находится путем суммирования (см. п. 4.3.3).

Частное решение неоднородного уравнения (4.7), отвечающее нулевым начальным условиям $f(0) = \ldots = f(m-1) = 0$, может при этом быть явно записано в виде

$$f_{но}(n) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{n-m} \dfrac{D_n(j+1)}{D(j+1)} b(j), & m \le n, \\ 0, & 0 \le n < m. \end{cases} \tag{4.12}$$

где

$$D_n(j+1) = \begin{vmatrix} f_1(j+1) & \ldots & f_m(j+1) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ f_1(j+m-1) & \ldots & f_m(j+m-1) \\ f_1(n) & \ldots & f_m(n) \end{vmatrix}.$$

Определитель $D_n(j+1)$ получается из $D(j+1)$ замещением последней строки $[f_1(j+m), \ldots, f_m(j+m)]$ строкой $[f_1(n), \ldots, f_m(n)]$. Отметим, что $D_n(j+1) = 0$ при $n - m + 1 \le j \le n - 1$.

Частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (4.8), равно

$$f_{нч}(n) = f_{оч}(n) + f_{но}(n), \tag{4.13}$$

где $f_{оч}$ и $f_{но}$ определяются по (4.10) и (4.12).

• Для уравнения первого порядка ($m = 1$) частное решение неоднородного уравнения (4.7) при начальном условии $f(0) = \beta_0$ равно

$$f_{нч}(n) = \frac{\beta_0}{f_1(0)} f_1(n) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b(j)}{f_1(j+1)} f_1(n), \qquad n \ge 1. \tag{4.14}$$

(Если положить, что сумма равна нулю при верхней границе индекса суммирования меньшей нижней границы, то данная формула остается справедливой и при $n = 0$).

Пример (Самарский, Николаев). Рассмотрим уравнение

$$f(n+1) - e^{2n} f(n) = 6n^2 e^{n(n+1)}.$$

Общее решение однородного уравнения

$$g(n+1) - e^{2n} g(n) = 0$$

равно $g(n) = Ce^{n(n-1)}$, т.е. $f_1(n) = e^{n(n-1)}$. Частное решение неоднородного уравнения, отвечающее нулевым начальным условиям, по формуле (4.14) равно

$$f_{\text{но}}(n) = e^{n(n-1)} \sum_{t=0}^{n-1} \frac{6t^2 e^{t(t+1)}}{e^{(t+1)t}} = n(n-1)(2n-1)e^{n(n-1)}.$$

Таким образом, общим решением неоднородного уравнения будет

$$f_{\text{н}}(n) = (C + n(n-1)(2n-1))e^{n(n-1)}.$$

4.2.3. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

• Общее решение линейного однородного рекуррентного уравнения m-го порядка

$$f(n+m) + a_1 f(n+m-1) + \ldots + a_m f(n) = 0, \qquad n \geq 0, \tag{4.15}$$

с постоянными коэффициентами $a_1, \ldots, a_m$ ($a_m \neq 0$) имеет вид

$$\begin{aligned} f_{\text{о}}(n) \ = \ & (c_{11} + nc_{12} + \ldots + n^{k_1-1} c_{1k_1})\lambda_1^n + \ldots + \\ & (c_{s1} + nc_{s2} + \ldots + n^{k_s-1} c_{sk_s})\lambda_s^n, \end{aligned} \tag{4.16}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ – различные корни характеристического уравнения

$$\lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$

кратности которых равны $k_1, \ldots, k_s$ соответственно; $c_{s1}, \ldots, c_{sk_s}$ – произвольные постоянные.

Пример. *Числа Фибоначчи.* Характеристическое уравнение – $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, его корни – $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Поэтому общее решение есть

$$f(n) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

• Рассмотрим вопрос выделения вещественных линейно независимых решений в случае комплексных корней характеристического уравнения.

Пусть коэффициенты характеристического уравнения вещественны. Тогда наряду с комплексным корнем λ кратности k у него должен быть также комплексно-сопряженный корень λ^* той же кратности. Входящие в общее решение (4.16) однородного уравнения члены, соответствующие этим корням, будут

$$\begin{aligned} & (c'_{11} + nc'_{12} + \ldots + n^{k-1} c'_{1k})\lambda^n + \\ & (c''_{11} + nc''_{12} + \ldots + n^{k-1} c''_{1k})(\lambda^*)^n = \\ & (a_{11} + na_{12} + \ldots + n^{k-1} a_{1k})|\lambda|^n \cos \varphi n + \\ & (b_{11} + nb_{12} + \ldots + n^{k-1} b_{1k})|\lambda|^n \sin \varphi n, \end{aligned}$$

где $\lambda = |\lambda|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Вещественные решения

$$|\lambda|^n\cos\varphi n, n|\lambda|^n\cos\varphi n, \ldots, n^{k-1}|\lambda|^n\cos\varphi n,$$
$$|\lambda|^n\sin\varphi n, n|\lambda|^n\sin\varphi n, \ldots, n^{k-1}|\lambda|^n\sin\varphi n$$

линейно независимы.

В случае вещественного корня соответствующий ему член в (4.16) веществен.

• *Метод вариации постоянных.* Решение рекуррентного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$f(n+m) + a_1 f(n+m-1) + \ldots + a_m f(n) = b(n), \qquad n \geq 0 \tag{4.17}$$

может быть найдено из (4.16), как и в общем случае линейных уравнений с произвольными коэффициентами (п. 7.2.2), методом вариации постоянных.

• *Матричный метод.* В векторной форме (п. 7.2.1) уравнение (4.17) эквивалентно векторному уравнению

$$U(n+1) = AU(n) + B(n),$$

где $U(n) = [f(n), \ldots, f(n+m-1)]^T$, $B(n) = [0, \ldots, 0, b(n)]^T$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{O} & & 0 & 1 \\ -a(1) & \cdots & -a(m-1) & -a(m) \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения при данном $U(0) = [f(0), \ldots, f(m-1)]^T$ равно

$$U_{\text{нч}}(n) = A^n U_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-i-1} B(i).$$

4.2.4. Методы операционного исчисления

Операционные (операторные) исчисления развиваются для различных классов функций (в том числе для различных областей их определения) и различных основных операторов. Ряд операционных методов основывается и обосновывается на интегральных преобразованиях (прежде всего на преобразованиях Лапласа). "Чисто операторные" методы базируются на различных понятиях свертки (Микусинский [1956]). Обзор публикаций по операционным методам на 1964 г. дан в работе Диткина, Прудникова [1966].

Здесь излагается подход, специально разработанный для произвольных функций, определенных в точках 0, 1, 2, ... (Берг [1961]).

• Пусть N – множество функций $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Сумма функций и умножение функций на вещественные числа определяются обычным образом.

Свертка (произведение) определяется по формуле

$$(f * g)(n) = \sum_{j=0}^{n} f(n-j)g(j) - \sum_{j=0}^{n-1} f(n-1-j)g(j).$$

Здесь вторая сумма равна нулю при $n = 0$. Свертка ассоциативна, коммутативна, дистрибутивна и не имеет делителей нуля, т.е. N – коммутативное кольцо без делителей нуля.

Кольцо N может быть расширено до поля отношений обычным образом по следующей схеме. Рассмотрим множество пар (f, g), где $f, g \in N$ и $g \neq 0$. Две пары (f, g) и (f_1, g_1) называют эквивалентными и пишут $(f, g) \sim (f_1, g_1)$, если $f * g_1 = f_1 * g$. Введенное отношение есть эквивалентность. Множество пар разбивается на классы эквивалентных пар. Класс пар, эквивалентных паре (f, g), обозначают через $\dfrac{f}{g}$ или f/g и называют оператором. Очевидно, что $\dfrac{f}{g} = \dfrac{f_1}{g_1}$ тогда и только тогда, когда $f * g_1 = f_1 * g$. Определим сумму и произведение операторов равенствами

$$\frac{f}{g} + \frac{f_1}{g_1} = \frac{f * g_1 + f_1 * g}{g * g_1}, \qquad \frac{f}{g} \cdot \frac{f_1}{g_1} = \frac{f * f_1}{g * g_1},$$

для $g * g_1 \neq 0$. Множество M операторов образует коммутативное поле.

Функция, тождественно равная единице, является единицей кольца N, а значит, и поля операторов. Эту функцию можно не отличать от числа единица, если сложение функции с числом понимать обычным образом.

Множество чисел $\mathbb{R}$ вкладывается во множество N функций, а множество N функций, в свою очередь, вкладывается во множество M операторов, если положить

$$f = \frac{f}{1}.$$

Тогда вместо $f * g$ (свертка) можно писать $f \cdot g$ (умножение операторов). Отметим, что

$$\frac{f}{f} = 1, \qquad \frac{0}{f} = 0$$

для любой функции $f \in N$. Пусть $p = \dfrac{f}{g}$ и $g = \dfrac{f_1}{g_1}$. Определим частное операторов равенством

$$\frac{p}{q} = \frac{f * g_1}{g * f_1}.$$

Дроби можно сокращать:

$$\frac{pr}{qr} = \frac{p}{q}.$$

Если для оператора p существует функция $f \in N$ такая, что $p = f$, то говорят, что оператор p приводим к функции (есть оператор–функция).

Оператор $\frac{f}{g}$ приводим к функции тогда и только тогда, когда или $g(0) \neq 0$, или при некотором $m \geq 1$

$$g(0) = \ldots = g(m-1), \qquad g(m) \neq 0, \qquad f(0) = \ldots = f(m-1) = 0.$$

Зафиксируем независимую целочисленную переменную ν. Пусть $f(\nu) = A$ – соотношение, определяющее функцию f с помощью выражения A, содержащего переменную ν и принимающего вещественные значения. Для обозначения функции $\nu \mapsto f(\nu)$ (и соответствующего оператора) будем использовать и символ f, и выражение $\langle A \rangle$.

Например, $\langle \sin \nu \rangle$ означает то же, что и sin, $\langle \nu^2 \rangle$ – функция $f : \nu \mapsto \nu^2$; $\langle \nu \rangle$ – тождественное отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Имеет место равенство

$$\langle \nu \rangle * f = \left\langle \sum_{j=0}^{\nu} (\nu - j) f(j) - \sum_{j=0}^{\nu-1} (\nu - 1 - j) f(j) \right\rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{\nu-1} f(j) \right\rangle.$$

В связи с этим оператор $\langle \nu \rangle = 1/s$ называется оператором суммирования. Оператор s не приводим к функции.

Пусть $f = \Delta F$. Тогда

$$\langle \nu \rangle * \Delta F = F - F(0)$$

или, так как $s = 1/\langle \nu \rangle$,

$$\Delta F = s(F - F(0)).$$

На множестве функций f, удовлетворяющих $f(0) = 0$, оператор s совпадает с разностным оператором

$$sf = \Delta f.$$

В общем случае

$$\Delta^n f = s^n f - (s\Delta^{n-1} f + \ldots + s^{n-1} \Delta f + s^n f)(0).$$

• Приведем ряд других равенств:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{s^n} &= \left\langle \frac{(\nu)_n}{n!} \right\rangle, \qquad n \geq 1;\\
\frac{1}{s^n} f &= \left\langle \sum_{i=1}^{\nu} \frac{(i-1)_{n-1}}{(n-1)!} f(\nu-i) \right\rangle;\\
\frac{s}{(s-a)^{n+1}} &= \left\langle \frac{(\nu)_n}{n!} (1+a)^{\nu-n} \right\rangle \quad \text{при } a \neq -1;\\
\frac{1}{(s+1)^p} &= \theta_p, \text{ где } \theta_p(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu < p,\\ 1 & \text{при } \nu \geq p; \end{cases}\\
\frac{1}{s^2+a^2} &= \left\langle \frac{1-(1+a^2)^{\nu/2}\cos\varphi\nu}{a^2} \right\rangle;\\
\frac{s}{s^2+a^2} &= \left\langle \frac{(1+a^2)^{\nu/2}\sin\varphi\nu}{a} \right\rangle.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

• Для любой функции $f \in N$ имеет место разложение

$$f = s \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(j)}{(s+1)^{j+1}}.$$

Если полагать здесь s комплексным числом, то данное равенство (в случае сходимости ряда) ставит в соответствие функции f аналитическую функцию $f^*(s)$ комплексного переменного s. Произведению $f*g$ отвечает обычное произведение $f^*(s)g^*(s)$, константы сохраняются.

• Пример. Рассмотрим уравнение

$$\Delta^2 f(n) - 3\Delta f(n) + 2f(n) = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

при начальных условиях $f(0) = 0$, $\Delta f(0) = 1$. Имеем

$$
\begin{aligned}
&\langle \Delta^2 f(\nu) \rangle = s^2 f - s\Delta f(0) - s^2 f(0) = s^2 f - s,\\
&\langle \Delta f(\nu) \rangle = sf - sf(0) = sf.
\end{aligned}
$$

Исходное уравнение в операторном виде равно

$$(s^2 f - s) - 3sf + 2f = 0$$

или

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{s}{s^2-3s+2} = \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-1} \\
&= \left\langle 2\frac{(1+2)^\nu}{2} - \frac{(1+1)^\nu - 1}{1} \right\rangle = \langle 3^\nu - 2^\nu \rangle.
\end{aligned}
$$

Таким образом, $f(n) = 3^n - 2^n$.

4.3. Обыкновенные разностные уравнения

4.3.1. Общий случай

• *Разностным уравнением* называется соотношение

$$G_1\left(t, g(t), \Delta_h g(t), \ldots, \Delta_h^m g(t)\right) = 0, \qquad t \in T, \tag{4.18}$$

где G_1 – известная и g – искомая функции, t – независимая переменная, $\Delta_h^j g(t)$ – разность j-го порядка функции g в точке t с шагом $h > 0$. Уравнение рассматривается на множестве T значений переменной t, содержащем наряду с каждой точкой t и все точки $t+h$, $t+2h, \ldots$.

Уравнение (4.18) заменой независимой переменной и неизвестной функций приводится к виду

$$G_2(x, f(x), \Delta f(x), \ldots, \Delta^m f(x)) = 0, \quad x \in X \tag{4.19}$$

(переход к единичному шагу). Достаточно положить $t = hx$, $g(hx) = f(x)$, $X = \{t/h : \ t \in T\}$. Тогда

$$\Delta_h g(t) = g(t+h) - g(t) = g(h(x+1)) - g(hx) = \Delta f(x)$$

и вообще $\Delta_h^i g(t) = \Delta^i f(x)$. Множество X наряду с каждой точкой x содержит все точки $x+1$, $x+2$, … .

Другая эквивалентная форма разностных уравнений получается заменой конечных разностей их выражением через значения функции в соответствующих точках. Это приводит к уравнению

$$G_3(x, f(x), \ldots, f(x+m)) = 0, \quad x \in X, \tag{4.20}$$

где H – заданная функция. Обратно, уравнение (4.20) с помощью формул (4.2) может быть приведено к виду (4.19).

• Будем предполагать, что уравнение (4.20) может быть разрешено относительно $f(x+m)$, и рассматривать только уравнения вида

$$f(x+m) = F(x, f(x), \ldots, f(x+m-1)), \qquad x \in X. \tag{4.21}$$

Дополнительно предполагается, что второй аргумент функции F в правой части уравнения существен. Число m в этом случае называется порядком уравнения (4.21).

Если значение выражения $F(x, y, y_1, \ldots, y_{m-1})$ не зависит от y, то порядок уравнения (4.21) может быть понижен заменой (сдвигом) независимой переменной.

Пример. Уравнение $f(x+4) = x^2 + f(x+3)$ имеет порядок единица, а не четыре, так как приводится к виду $f(x+1) = = (x-3)^2 + f(x)$.

• *Решением уравнения* (4.21) называется функция, определенная (конечная) на соответствующем множестве и обращающая на нем соотношение (4.21) в тождество.

• *Дискретный случай.* Если

$$X = \{a, a+1, \ldots\},$$

где a фиксировано, то, обозначая $f(a+n) = f_n$ и полагая в (4.21) $x = a + n$, приходим к уравнению

$$f_{m+n} = F(a+n, f_n, \ldots, f_{n+m-1}), \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Таким образом, последовательность $f_0, f_1, \ldots$ является рекуррентной последовательностью m-го порядка (см. п. 7.2). При произвольно задаваемых начальных условиях

$$f_0 = f(a), \quad f_1 = f(a+1), \ldots, f_{m-1} = f(a+m-1)$$

уравнение имеет единственное решение.

• *Случай* $X = [a, \infty)$. Зафиксируем $\tau \in [0, 1)$. На множестве

$$X_\tau = \{a + \tau + j : \ j = 0, 1, \ldots\}$$

из уравнения (4.21) следует, что последовательность значений $f_n = f(a + \tau + n)$ является рекуррентной m-го порядка. Она единственным образом определяется по заданным начальным значениям

$$f(a+\tau), f(a+\tau+1), \ldots, f(a+\tau+m-1).$$

Аналогично при других τ. Таким образом, уравнение (4.21) имеет единственное решение при (произвольно задаваемых) начальных значениях функции f на интервале $[a, a+m)$.

• Существует функция $\Phi : X \times Y^n \to Y$ такая, что решение уравнения (4.21) имеет вид

$$f(x) = \Phi(x, \omega_0(x), \ldots, \omega_{m-1}(x)), \qquad a \le x,$$

где ω_i – функции периода единица, определяемые начальными условиями

$$\omega_i(\tau) = f(a + i + \tau), \qquad 0 \le \tau < 1, \qquad i = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Функция Φ может быть определена рекурсивно равенствами

$$\begin{aligned}
\Phi(x, f_0, \ldots, f_{m-1}) &= f_0 \text{ при } a \le x < a+1;\\
&\vdots\\
\Phi(x, f_0, \ldots, f_{m-1}) &= f_{m-1} \text{ при } a+m-1 \le x < a+m;\\
\Phi(x, f_0, \ldots, f_{m-1}) &= F(x-m, \Phi(x-m, f_0, \ldots, f_{m-1}), \ldots,\\
&\qquad \Phi(x-1, f_0, \ldots, f_{m-1})) \text{ при } a+m \le x.
\end{aligned}$$

4.3.2. Линейные разностные уравнения первого порядка

• Линейным разностным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$f(x+1) = p(x)f(x) + \varphi(x), \qquad x \ge 0, \tag{4.22}$$

где p и φ – известные функции, функция p тождественно не равна нулю.

Уравнение называется неоднородным, если функция φ тождественно не равна нулю. Уравнение

$$f(x+1) = p(x)f(x), \qquad x \ge 0, \tag{4.23}$$

называется однородным или приведенным.

Общее решение неоднородного уравнения представимо в виде суммы некоторого произвольного частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного.

• Общее решение однородного уравнения равно

$$f_\text{o}(x) = \omega(x) \prod_{1 \le i \le [x]} p(x-j), \tag{4.24}$$

где ω – произвольная периодическая функция периода единица, $[x]$ – целая часть числа x, а произведение $\prod$ по пустому множеству индексов полагается равным единице. Решение (4.24) является частным решением однородного уравнения, соответствующим начальному условию

$$f_\text{o}(x) = \omega(x), \qquad 0 \le x < 1.$$

Одно из частных решений неоднородного уравнения есть

$$f_{\text{но}}(x) = \sum_{1 \le i \le [x]} \varphi(x-i) \prod_{1 \le j \le i-1} p(x-j), \tag{4.25}$$

где сумма $\sum$ по пустому множеству индексов полагается равной нулю. Оно отвечает нулевым начальным условиям

$$f_{\text{но}}(x) = 0, \qquad 0 \le x < 1.$$

Общее решение неоднородного уравнения может быть записано в виде

$$f_{\text{н}}(x) = \sum_{1 \le i \le [x]} \varphi(x-i) \prod_{1 \le j \le i-1} p(x-j) + \omega(x) \prod_{1 \le i \le [x]} p(x-j), \tag{4.26}$$

где ω – произвольная периодическая функция периода единица. Данное решение принимает на интервале $[0, 1)$ значение

$$f_{н}(x) = \omega(x), \qquad 0 \le x < 1. \tag{4.27}$$

В силу периодичности функция

$$\omega(x) = f_{\text{н}}(\{x\}), \qquad 0 \le x, \tag{4.28}$$

где $\{x\}$ – дробная часть числа x. (Отметим, что соотношения (4.26) и (4.28) следуют из (4.22), если последовательно выразить $f(x)$ через $f(x-1)$, затем $f(x-1)$ через $f(x-2)$ и т. д.).

Таким образом, уравнение (4.22) при произвольном задании значений неизвестной функции f на интервале $[0, 1)$ (начальные условия) имеет единственное решение, определяемое равенствами (4.26) и (4.27).

• Если известно частное решение $f_1(x)$ однородного уравнения (4.23), то решение неоднородного уравнения (4.22) при начальных условиях (4.27) может быть записано в виде

$$f(x) = \left(\frac{\omega(x)}{f_1(0)} + \sum_{j=1}^{[x]} \frac{\varphi(x-k)}{f_1(x-k+1)} \right) f_1(x).$$

4.3.3. Суммирование функций

• Задача решения разностного уравнения

$$\Delta f(x) = \varphi(x), \qquad x \ge 0 \tag{4.29}$$

тесно взаимосвязана с задачей нахождения сумм вида

$$\sum_{i=m}^{n} \varphi(t+i).$$

Сумма

$$f(x) = \sum_{j=1}^{[x]} \varphi(x-j) = \sum_{j=0}^{[x]-1} \varphi(\{x\}+j)$$

является единственным решением уравнения (4.29), удовлетворяющим начальному условию

$$f(x) = 0, \quad 0 \le x < 1.$$

Обратно, если f – произвольное решение уравнения (4.29), то

$$\sum_{j=1}^{[x]} \varphi(x-j) = f(x) - f(\{x\}).$$

Отдельные примеры решений уравнений вида (4.29) собраны в п. 6.2 в виде таблиц пар функций β и f таких, что $\Delta f = \beta$. Они могут быть использованы при нахождении конкретных конечных сумм, в частности, сумм вида

$$\sum_{j=m}^{n} \beta(x+j) \;=\; f(x+n+1) - f(x+m),$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \beta(j) \;=\; f(n) - f(0).$$

• Для некоторых элементарных функций φ сумма $\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(j)$ как функция n не обязательно является элементарной. Например, уравнения $\Delta f(x) = 1/x$ и $\Delta f(x) = \ln x$ не имеют решений в элементарных функциях (см. п. 6.2).

• *Формула суммирования по частям* (*преобразование Абеля*):

$$\sum_{j=m}^{n} u(j)\Delta v(j) \;=\; u(n+1)v(n+1) - u(m)v(m) - \sum_{j=m}^{n} v(j+1)\Delta u(j).$$

• *Формула суммирования Эйлера–Маклорена*. Если производная $\varphi^{(p)}(x)$ конечна и интегрируема на $[0,n]$, то

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(j) = \int_0^n \varphi(t)dt + S_{n,p-1} + R_{n,p}, \tag{4.30}$$

где

$$S_{n,p} = \sum_{i=1}^{p} \frac{B_i}{i!} \left(\varphi^{i-1}(n) - \varphi^{i-1}(0)\right), \qquad S_{n,0} = 0,$$

$$R_{n,p} = \frac{1}{p!} \int_0^n (B_p - B_p(1-\{x\}))\, \varphi^{(p)}(x)dx, \qquad n, p = 1, 2, \ldots .$$

Здесь $\{x\}$ – дробная часть x; $B_n(t)$ и B_n – многочлены и числа Бернулли (см. прил. A).

Формула (4.30) может быть также записана в виде

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(j) = \int_0^n \varphi(t)dt + S_{n,p} + R'_{n,p},$$

где

$$R'_{n,p} = \frac{(-1)^{p-1}}{p!} \int_0^n B_p(\{x\})\varphi^{(p)}(x)dx, \qquad n, p = 1, 2, \ldots .$$

Так как $B_i = 0$ при i нечетном и большем единицы, то обычно формула (4.30) используется для четных p.

Если φ – многочлен степени меньшей p, то остаточные члены $R_{n,p}$ и $R'_{n,p}$ равны нулю.

При использовании формулы Эйлера–Маклорена (в теориях расходящихся и асимптотических рядов, в теории квадратурных формул и пр.) возникает задача оценки остаточного члена.

Приведем пример таких оценок. Если функция f имеет на $[0, n]$ кусочно-непрерывную производную $f^{(p)}$ и

$$|f^{(p)}(x)| \le K_{n,p} \text{ для } 0 \le x \le n,$$

то

$$|R'_{n,p}| \le nK_{n,p} \frac{|B_p|}{p!}, \qquad |R_{n,p}| \le nK_{n,p}C_p,$$

$$C_p = \frac{1}{p!} \int_0^1 |B_p(t) - B_p|dt = \begin{cases} \dfrac{|B_p|}{p!} & \text{при } p \text{ четном,} \\[2ex] \dfrac{4}{(p+1)!}(1 - 2^{-p+1})|B_{p+1}| & \text{при } p \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Оценка достижима на рассматриваемом классе функций.

4.3.4. Линейные уравнения произвольного порядка

• Линейным разностным уравнением m-го порядка называется уравнение вида

$$f(x+m)+a_1(x)f(x+m-1)+\ldots+a_m(x)f(x)=b(x), \quad x\geq 0, \quad (4.31)$$

где $a_1,\ldots,a_m, b$ – заданные функции; функция a_m тождественно не равна нулю.

Общее решение неоднородного уравнения (4.31) (т.е. уравнения, в котором функция b тождественно не равна нулю) есть сумма общего решения однородного (приведенного) уравнения

$$f(x+m)+a_1(x)f(x+m-1)+\ldots+a_m(x)f(x)=0, \quad x\geq 0, \quad (4.32)$$

и любого частного решения неоднородного уравнения.

Каждое решение уравнения (4.31) однозначно определяется заданием значения решения на интервале $[0,m)$.

• Если правая часть в уравнении (4.31) равна $b(x)=b_1(x)+b_2(x)$, а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – решения уравнения (4.31) при правой части, равной $b_1(x)$ и $b_2(x)$ соответственно, то решение $f(x)$ уравнения (4.31) с правой частью $b(x)$ равно $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$.

Если $f_1,\ldots,f_p$ – любые решения однородного уравнения, то их линейная комбинация вида

$$f(x)=\omega_1(x)f_1(x)+\ldots+\omega_p(x)f_p(x),$$

где ω_i – произвольные функции периода единица, также является решением этого уравнения.

Решения $f_1,\ldots,f_m$ однородного уравнения называются линейно независимыми (образуют фундаментальную систему), если соотношение

$$\omega_1(x)f_1(x)+\ldots+\omega_m(x)f_m(x)=0,$$

где ω_i – произвольные функции периода единица, возможно лишь при $\omega_1(x)=\ldots=\omega_m(x)=0$ тождественно.

• Пусть функции $f_1,\ldots,f_m$ – решения однородного уравнения (4.32). Обозначим

$$D(t)=\begin{vmatrix} f_1(t) & \ldots & f_1(t+m-1) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ f_m(t) & \ldots & f_m(t+m-1) \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$(-1)^m D(x)\cdot a_m(x)=D(x+1)$$

и

$$(-1)^{m[x]}D(x) = \prod_{i=0}^{[x]-1} a_m(x-i)D(\{x\}),$$

где $[x]$ – целая, а $\{x\}$– дробная части числа x.

Если $a_m(x) \neq 0$ при всех $x \geq 0$, то определитель $D(x)$ или равен нулю при всех $x \geq 0$, или отличен от нуля при всех $x \geq 0$.

Если решения $f_1, \ldots, f_m$ однородного уравнения линейно зависимы, то $D(x) = 0$ при всех $x \geq 0$.

Если $f_1, \ldots, f_m$ – система линейно независимых решений однородного уравнения, и $a_m(x) \neq 0$ при всех $x \geq 0$, то $D(x) \neq 0$ при всех $x \geq 0$.

• Если $f_1, \ldots, f_m$ – линейно независимые решения однородного уравнения (4.32), и $D(t) \neq 0$ при всех $0 \leq t < 1$, то его общее решение имеет вид

$$f_o(x) = \omega_1(x)f_1(x) + \ldots + \omega_m(x)f_m(x),$$

где ω_i – произвольные периодические функции периода единица.

• *Метод вариации постоянных* (*метод Лагранжа*). Если известны m линейно независимых решений приведенного уравнения (4.32), то общее решение неоднородного линейного разностного уравнения (4.31) можно найти в виде

$$f(x) = C_1(x)f_1(x) + \ldots + C_m(x)f_m(x).$$

Функции $\Delta C_i(x) = C_i(x{+}1) - C_i(x)$ вычисляются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} f_i(x+i)\Delta C_i(x) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m{-}1; \\ &\sum_{i=1}^{m} f_i(x+i)\Delta C_i(x) = f(x). \end{aligned} \tag{4.33}$$

После решения данной системы относительно $\Delta C_i(x)$ функции $C_i(x)$ находятся путем суммирования (см. п. 7.3.3, сравни с п. 7.2.2).

Решение неоднородного уравнения при начальных условиях

$$f(j+t) = \omega_j(t), \qquad j = 0, \ldots, m{-}1, \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{4.34}$$

равно

$$f_{\text{нч}}(x) = f_{\text{оч}}(x) + f_{\text{но}}(x), \tag{4.35}$$

где

$$f_{\text{оч}}(x) = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & f_1(x) & \ldots & f_m(x) \\ \omega_0(x) & f_1(\{x\}) & \ldots & f_m(\{x\}) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \omega_{m-1}(x) & f_1(\{x\}+m-1) & \ldots & f_m(\{x\}+m-1) \end{vmatrix}}{D(\{x\})} \tag{4.36}$$

– решение однородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (4.34), а

$$f_{\text{но}}(x) = \sum_{i=m}^{[x]} \frac{D_x(x-i+1)}{D(x-i+1)} b(x-i) \tag{4.37}$$

– частное решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями

$$f_{\text{но}}(x) = 0, \qquad 0 \le x < m.$$

Определитель

$$D_x(t+1) = \begin{vmatrix} f_1(t+1) & \ldots & f_m(t+1) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ f_1(t+m-1) & \ldots & f_m(t+m-1) \\ f_1(x) & \ldots & f_m(x) \end{vmatrix}$$

получается из определителя $D(t+1)$ замещением последней строки $[f_1(t+m), \ldots, f_m(t+m)]$ строкой $[f_1(x), \ldots, f_m(x)]$. Отметим, что $D_x(t+1) = 0$ при $x - m + 1 \le t \le x - 1$.

4.3.5. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами

• Общее решение линейного однородного разностного уравнения m-го порядка

$$f(x+m) + a_1 f(x+m-1) + \ldots + a_m f(x) = 0, \qquad x \ge 0, \tag{4.38}$$

с постоянными коэффициентами $a_1, \ldots, a_m$ ($a_m \ne 0$) имеет вид

$$\begin{aligned} f(x) \;=\; & \Big(\omega_{11}(x) + x\omega_{12}(x) + \ldots + x^{k_1-1}\omega_{1k_1}(x)\Big)\lambda_1^x + \ldots + \\ & \Big(\omega_{s1}(x) + x\omega_{s2}(x) + \ldots + x^{k_s-1}\omega_{sk_s}(x)\Big)\lambda_s^x, \end{aligned} \tag{4.39}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ – различные корни характеристического уравнения

$$\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$

кратность которых равна $k_1, \ldots, k_s$ соответственно; $\omega_{ij}(x)$ – периодические функции периода единица, $1 \le j \le k_i$; $\sum_{i=1}^{s} k_i = m$.

• Решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$f(j+t) = \omega_j(t), \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1, \quad 0 \le t < 1,$$

могут быть найдены, как и в случае произвольных коэффициентов, по формулам (4.35)–(4.37).

• Рассмотрим вопрос выделения вещественных линейно независимых решений в случае комплексных корней характеристического уравнения.

Пусть коэффициенты характеристического уравнения вещественны. Тогда наряду с комплексным корнем λ кратности k у него должен быть также комплексно-сопряженный корень λ^* той же кратности. Входящие в общее решение (4.39) однородного уравнения члены, соответствующие этим корням, будут

$$\begin{aligned}
&\left(\omega'_{11}(x) + x\omega'_{12}(x) + \ldots + x^{k-1}\omega'_{1k}(x)\right)\lambda^x +\\
&\left(\omega'_{21}(x) + x\omega'_{22}(x) + \ldots + x^{k-1}\omega''_{2k}(x)\right)(\lambda^*)^x =\\
&(\omega_{11} + x\omega_{12} + \ldots + x^{k-1}\omega_{1k})|\lambda|^x \cos\varphi x +\\
&(\omega_{21} + x\omega_{22} + \ldots + x^{k-1}\omega_{2k})|\lambda|^x \sin\varphi x,
\end{aligned}$$

где $\lambda = |\lambda|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Вещественные решения

$$\begin{gathered}
|\lambda|^x\cos\varphi x,\ \ x|\lambda|^x\cos\varphi x, \ldots,\ \ x^{k-1}|\lambda|^x\cos\varphi x,\\
|\lambda|^x\sin\varphi x,\ \ x|\lambda|^x\sin\varphi x, \ldots,\ \ x^{k-1}|\lambda|^x\sin\varphi x
\end{gathered}$$

линейно независимы.

В случае положительного корня λ соответствующий ему член в (4.39) веществен. Остается рассмотреть случай отрицательного корня.

Соответствующее отрицательному корню $-|\lambda|$ слагаемое в общем решении (4.39) однородного уравнения равно

$$\begin{aligned}
&(\omega'_1(x) + x\omega'_2(x) + \ldots + x^{k-1}\omega'_k(x))(-|\lambda|)^x =\\
&(\omega_1(x) + x\omega_2(x) + \ldots + x^{k-1}\omega_k(x))|\lambda|^x\cos\pi x +\\
&(\omega''_1(x) + x\omega''_2(x) + \ldots + x^{k-1}\omega''_k(x))|\lambda|^x\sin\pi x.
\end{aligned}$$

Решения $x^j\cos\pi x$ и $x^j\sin\pi x$ линейно зависимы (в смысле определения, данного в п. 4.3.4, например,

$$\omega_1(x)x^j\cos\pi x + \omega_2(x)x^j\sin\pi x = 0$$

при $\omega_1(x) = \cos 2\pi x - 1$, $\omega_2(x) = \sin 2\pi x$). Вещественные решения

$$|\lambda|^x \cos \pi x, x|\lambda|^x \cos \pi x, \ldots, x^{k-1}|\lambda|^x \cos \pi x$$

линейно независимы.

• Уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеют вид

$$f(x+2) + a_1 f(x+1) + a_2 f(x) = b(x), \qquad x \geq 0, \tag{4.40}$$

где $a_2 \neq 0$.

Общее решение однородного уравнения

$$f(x+2) + a_1 f(x+1) + a_2 f(x) = 0$$

равно

$$f_{\text{од}}(x) = \omega_1(x) f_1(x) + \omega_2(x) f_2(x),$$

где f_1 и f_2 – его линейно независимые решения, а ω_i – произвольные периодические функции периода единица.

Так как характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

имеет корни

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}, \qquad \lambda_2 \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2},$$

то в качестве линейно независимых решений однородного уравнения могут быть взяты

$$f_1(x) = \lambda_1^x, \quad f_2(x) = \lambda_2^x \quad \text{при } \lambda_1 \neq \lambda_2 \qquad (a_1^2 \neq 4a_2),$$
$$f_1(x) = \lambda^x, \quad f_2(x) = x\lambda^x \quad \text{при } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \ \ (a_1^2 = 4a_2).$$

Может оказаться удобным выбор линейно независимых решений в виде

$$f_1(x) = \frac{\lambda_2\lambda_1^x - \lambda_1\lambda_2^x}{\lambda_2 - \lambda_1}, \qquad f_2(x) = \frac{\lambda_2^x - \lambda_1^x}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Эти решения обладают свойствами: они вещественны при произвольных λ_1 и λ_2, а при $\lambda_2 \to \lambda_1 = \lambda$ сходятся к функциям

$$f_1(x) = (1-x)\lambda^x, \qquad f_2(x) = x\lambda^{x-1},$$

являющимся линейно независимыми решениями однородного уравнения.

В табл. 4.1 приведены линейно независимые решения однородного уравнения, имеющие явную вещественную форму. Угол φ находится из соотношений

$$\cos\varphi = -\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2a_2},$$

т.е.

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right).$$

Таблица 4.1

$f_1(x)$	$f_2(x)$	Дискриминант
λ_1^x	λ_2^x	$a_1^2 > 4a_2$
$a_2^{x/2}\cos\varphi x$	$a_2^{x/2}\sin\varphi x$	$a_1^2 < 4a_2$
$a_2^{x/2}$	$xa_2^{x/2}$	$a_1^2 = 4a_2,\ a_1 < 0$
$a_2^{x/2}\cos\pi x$	$a_2^{x/2}x\cos\pi x$	$a_1^2 = 4a_2,\ a_1 > 0$

Решения неоднородного уравнения находятся методом Лагранжа из общего решения однородного уравнения:

$$f(x) = C_1(x)f_1(x) + C_2(x)f_2(x).$$

Уравнения (4.33) переходят в

$$f_1(x+1)\Delta C_1(x) + f_2(x+1)\Delta C_2(x) = 0,$$
$$f_1(x+2)\Delta C_1(x) + f_2(x+2)\Delta C_2(x) = b(x).$$

Отсюда

$$\Delta C_1(x) = -\frac{f_2(x{+}1)b(x)}{D}, \qquad \Delta C_2(x) = -\frac{f_1(x{+}1)b(x)}{D},$$
$$D = \begin{vmatrix} f_1(x{+}1) & f_2(x{+}1) \\ f_1(x{+}2) & f_2(x{+}2) \end{vmatrix},$$

$$f_{\text{но}}(x) = \sum_{j=1}^{[x]-1} \frac{\begin{vmatrix} f_1(x{-}j) & f_2(x{-}j) \\ f_1(x) & f_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1(x{-}j) & f_2(x{-}j) \\ f_1(x{-}j{+}1) & f_2(x{-}j{+}1) \end{vmatrix}}\, b(x{-}j).$$

Решение однородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$f_{\text{оч}}(t) = \omega_0(t), \qquad f_{\text{оч}}(t{+}1) = \omega_1(t), \qquad 0 \le t < 1, \tag{4.41}$$

равно

$$f_{\text{оч}}(x) = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & f_1(x) & f_2(x) \\ \omega_0(\{x\}) & f_1(\{x\}) & f_2(\{x\}) \\ \omega_1(\{x\}) & f_1(\{x\}{+}1) & f_2(\{x\}{+}1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1(\{x\}) & f_2(\{x\} \\ f_1(\{x\}{+}1) & f_2(\{x\}{+}1) \end{vmatrix}}.$$

Здесь ω_0 и ω_1 – периодические функции периода единица. Решение неоднородного уравнения с начальными условиями (4.41) будет

$$f_{\text{нч}}(x) = f_{\text{оч}}(x) + f_{\text{но}}(x).$$

Глава 5

Некоторые методы решения

5.1. Сведение к уравнениям в конечных разностях

Рассмотрим функциональные уравнения вида

$$f^n(x) = F\left(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right), \tag{5.1}$$

где F – известная, а f – неизвестная функции; второй аргумент функции F зна́чим.

Рассматриваемый здесь метод решения состоит в замене независимой переменной x на z и неизвестной функции f на u по формулам

$$x = u(z), \qquad f(x) = u(z+1).$$

Следовательно, $u(z+1) = f(u(z))$ и

$$f^2(x) = f\left(u(z+1)\right) = u(z+2), \ldots, f^n(x) = u(z+n).$$

Уравнение (5.1) переходит в

$$u(z+n) = F\left(u(z), \ldots, u(z+n-1)\right).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$u(z) = \varphi\left(z, \omega_1(z), \ldots, \omega_n(z)\right),$$

где φ_i – произвольные функции периода единица (см. п. 4.3.1).

Поэтому решение уравнения (5.1) можно представить в виде следующей системы двух совместных уравнений:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(z, \omega_1(z), \ldots, \omega_n(z)), \\ f(x) &= \varphi\left(z+1, \omega_1(z), \ldots, \omega_n(z)\right). \end{aligned}$$

Исключая z, приходим к решению f исходного уравнения.

Пример. Функциональное уравнение

$$f(f(x)) - 4f(x) + 3x = 0$$

подстановкой $x = u(z)$, $f(x) = u(z+1)$ приводится к уравнению в конечных разностях

$$u(z+2) - 4u(z+1) + 3u(z) = 0.$$

Общее решение этого уравнения (см. п. 4.3.5) есть

$$u(z) = \omega_1(z) + \omega_2(z)3^z,$$

где ω_i – произвольные функции периода единица. Следовательно,

$$\begin{aligned} x &= \omega_1(z) + \omega_2(z)3^z, \\ f(x) &= \omega_1(z) + \omega_2(z)3^{z+1}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Это – решение исходного уравнения в параметрическом виде.

Упростим зависимость x и z, полагая константами функции ω_1 и ω_2:

$$x = \omega_1 + \omega_2 3^z, \qquad f(x) = \omega_1 + 3\omega_2 3^z.$$

Исключая z при $\omega_2 \neq 0$, найдем частное решение

$$f(x) = 3x - 2\omega_1 = 3x + C, \tag{5.3}$$

где C – произвольная постоянная.

Другое частное решение, содержащееся в (5.2) (например, при $\omega_2(z) \equiv 0$, $\omega_1(z) = -\operatorname{ctg} \pi z$, $0 < z < 1$):

$$f(x) = x. \tag{5.4}$$

Проверка показывает, что функции (5.3) и (5.4) исчерпывают все решения вида $f(x) = ax + b$.

5.2. Замена переменных и функций

Сюда относятся чисто искусственные приемы, использующие специфику уравнений и основывающиеся на заменах независимых переменных и функций.

5.2.1. Простые примеры

• Уравнение

$$xf(1-x) + f(x) = p. \tag{5.5}$$

Предполагается, что функция f определена в области, содержащей вместе с каждым x также и $1-x$. Замена x на $1-x$ дает

$$(1-x)f(x) + f(1-x) = p. \tag{5.6}$$

Умножая (5.6) на x и вычитая из (5.5) найдем

$$f(x) = \frac{p(1-x)}{x^2 - x + 1}.$$

• Уравнение

$$xf\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = p, \qquad x \neq 0.$$

Предполагается, что функция f определена в области, содержащей вместе с каждым x также и $1/x$. Заменяя x на $1/x$ найдем

$$\frac{1}{x}f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = p.$$

Поэтому

$$f(x) = p - xf\left(\frac{1}{x}\right) = p - x\left(p - \frac{1}{x}f(x)\right),$$

что возможно лишь при $p = 0$.

Рассмотрим уравнение

$$xf\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0. \tag{5.7}$$

Если $f(x) = \omega(x)$ при $x > 1$, то при $0 < x < 1$

$$f(x) = -xf\left(\frac{1}{x}\right) = -x\omega\left(\frac{1}{x}\right). \tag{5.8}$$

Аналогично, если $f(x) = \omega(x)$ при $x < -1$, то при $-1 < x < 0$ также приходим к равенству (5.8).

При $x = 1$ из (5.7) следует $f(1) = 0$. Если $x = -1$, то равенство (5.7) выполняется при любом конечном значении $f(-1)$.

Таким образом,

$$f(x) = \begin{cases} \omega(x) & \text{при } x \in (-1,0) \cup (0,1), \\ -x\omega(1/x) & \text{при } |x| > 1, \\ 0 & \text{при } x = 1, \\ C & \text{при } x = -1, \end{cases}$$

где C – произвольная постоянная, а ω – произвольная конечная функция.

Решение непрерывно на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ тогда и только тогда, когда функция ω непрерывна на $[-1,0) \cup (0,1]$ и $\omega(1) = 0$.

• Уравнение

$$f(\beta(x)) - f(-\beta(x)) = \alpha(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{5.9}$$

где функция α и биекция β заданы.

Подстановка $y = \beta(x)$ переводит (5.9) в эквивалентное

$$f(y) - f(-y) = \alpha \circ \beta^{-1}(y), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{5.10}$$

Данное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $\alpha \circ \beta^{-1}$ – нечетная функция, т. е. функция α имеет вид $\alpha(x) = \psi \circ \beta(x)$, где ψ – нечетная функция.

Общее решение уравнения (5.10), а значит, и (5.9) есть

$$f(y) = \omega(y) + \alpha \circ \beta^{-1}(y)/2,$$

где ω – произвольная четная функция.

5.2.2. Уравнения Коши. Непрерывные решения

Функциональные уравнения вида

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{5.11}$$

$$f(x+y) = f(x)f(y), \tag{5.12}$$

$$f(xy) = f(x) + f(y), \tag{5.13}$$

$$f(xy) = f(x)f(y), \tag{5.14}$$

называются, соответственно, первым, вторым, третьем и четвертым уравнениями Коши.

• Пусть f – непрерывное решение первого уравнения Коши. Из (5.11) следует $f(mx) = mf(x)$ для целых $m > 0$. Если $n > 0$ также целое, то

$$nf\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{n}{n}\right) = mf(1),$$

т. е. $f(p) = pf(1)$ для всех рациональных p. Пусть теперь x – произвольное положительное число и $\lim p_n = x$ при $n \to \infty$, где p_n рациональны. Так как f непрерывна, то

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(p_n) = f(1) \lim_{n\to\infty} p_n = f(1)x.$$

Из (5.11) при $y = -x$ следует $f(x) + f(-x) = 0$, т. е. функция f нечетна, в частности, $f(0) = 0$. Следовательно, равенство $f(x) = xf(1)$ должно выполняться при всех вещественных x.

Подстановка показывает, что функция $f(x) = Ax$, действительно, является решением первого уравнения Коши при произвольном выборе константы A. Других непрерывных решений у уравнения нет.

• Решение f второго уравнения Коши (5.12) неотрицательно, так как $f(x) = (f(x/2))^2$. Если $f(x_0) = 0$ при некотором x_0, то и всюду

$f(x) = f(x - x_0)f(x_0) = 0$. Поэтому или $f(x) \equiv 0$, или $f(x) > 0$ при всех x.

Положим $g(x) = \ln f(x)$. Логарифмируя равенство (5.12) получим $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Если f непрерывна, то g также непрерывна. Следовательно, $g(x) = Ax$ при некотором A и, таким образом, непрерывное решение второго уравнения Коши или тривиально $f(x) \equiv 0$), или имеет вид $f(x) = e^{Ax}$, где константа A произвольна.

• Рассмотрим непрерывное решение f третьего уравнения Коши (5.13) при положительных значениях аргумента. Положим $f(x) = g(\ln x)$. Тогда при всех $x, y > 0$

$$g(\ln x + \ln y) = f(xy) = f(x) + f(y) = g(\ln x) + g(\ln y).$$

Замена $s = \ln x$, $t = \ln y$ приводит к $g(s+t) = g(s) + g(t)$ для всех вещественных s, t. Следовательно, $g(s) = As$.

Таким образом, единственными непрерывными решениями третьего уравнения Коши являются функции $f(x) = A \ln x$, где константа A произвольна.

Так как из уравнения (5.13) следует $f(0) = 0$, то тривиальное решение является единственным непрерывным на всей вещественной оси.

• Решение f четвертого уравнения Коши (5.14) при $x > 0$ неотрицательно, так как $f(x) = (f(\sqrt{x}))^2$. Для $x, y > 0$ положим $x = e^s$, $y = e^t$ и $g(s) = f(e^s)$. Тогда

$$g(s+t) = f(e^{s+t}) = f(e^s)f(e^t) = g(s)g(t).$$

Следовательно, или $g(s) \equiv 0$, или $g(s) = e^{As}$. Отсюда при $x > 0$ или $f(x) = e^{A \ln x} = x^A$, здесь A – произвольная константа, в частности, $f(x) \equiv 1$ при $A = 0$. Это – единственные непрерывные решения четвертого уравнения Коши на интервале $(0, \infty)$. Так как $f(0) = (f(0))^2$, то непрерывными решениями уравнения на интервале $[0, \infty)$ являются или $f(x) \equiv 0$, или $f(x) \equiv 1$, или $f(x) = x^A$, $A > 0$.

Для произвольных вещественных x, так как $(f(-1))^2 = f(1) \in \{0, 1\}$ и $f(-x) = f(-1)f(x)$, возможны следующие три случая. При $f(1) = 0$, $f(-1) = 0$: $f(x) \equiv 0$. При $f(1) = f(-1) = 1$: f – четна, т.е. $f(x) \equiv 1$ или $f(x) = |x|^A$, $A > 0$. При $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$: f – нечетна, т.е. $f(0) = 0$ и $f(x) = x \cdot |x|^{A-1}$, $A > 0$. Все перечисленные функции и только они являются непрерывными решениями уравнения на интервале $(-\infty, +\infty)$.

5.2.3. Уравнения Коши. Разрывные решения Гамела

Общий вид непрерывного решения уравнения $f(x+y) = f(x) + f(y)$ был известен Лежандру [1791], Гауссу [1809], Коши [1821]. Многими авторами линейность решения была показана при предположениях более слабых, чем непрерывность (см., например, п. 7.2.11).

Общее решение первого уравнения Коши было найдено Гамелем [1905]. Его конструкция получена при условии справедливости аксиомы Цермела (аксиомы выбора): для любого семейства множеств можно выбрать из каждого множества, входящего в систему, по единственному представителю и объединить их всех в одно множество. Гамел показал, что если аксиома выбора справедлива, то существуют базисы $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ вещественных чисел такие, что каждое вещественное число может быть единственным образом представлено в виде конечной суммы

$$x = a\alpha + b\beta + \ldots + l\lambda$$

с рациональными коэффициентами $a, b, \ldots, l$. Тогда, задав произвольным образом значения функции на базисе, получим

$$f(x) = af(\alpha) + bf(\beta) + \ldots + lf(\lambda).$$

Подстановка показывает, что такая функция, действительно, удовлетворяет уравнению Коши.

Функции, удовлетворяющие уравнению Коши, называются аддитивными. Они, таким образом, не обязательно являются линейными.

Каждое решение Гамела, отличное от непрерывного, имеет патологический характер: на произвольном интервале оно принимает произвольные значения (в том числе сколь угодно большие и сколь угодно малые) в несчетном множестве точек, а его график всюду плотен на плоскости.

Тем не менее, каждое решение первого уравнения Коши выпукло.

Аналогично строятся разрывные решения других функциональных уравнений Коши.

5.2.4. Уравнение Даламбера

Уравнение Даламбера [1769] имеет вид

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

При $y = 0$ имеем или $f(0) = 1$, или $f(x) \equiv 0$. Пусть f – нетривиальное решение и $f(0) = 1$.

При $y = x$ из уравнения найдем $f(2x) + 1 = 2(f(x))^2 \geq 0$. Отсюда или $f(1) = b > 1$, или $-1 \leq f(1) = b \leq 1$. В первом случае найдется c такое, что $b = \operatorname{ch} c$, во втором – найдется c, для которого $b = \cos c$.

Пусть $b = \operatorname{ch} c$. Тогда $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \operatorname{ch}\dfrac{c}{2}$ и, по индукции, $f\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = \operatorname{ch}\dfrac{c}{2^n}$. Покажем по индукции, что $f\left(\dfrac{k}{2^n}\right) = \operatorname{ch}\left(c\dfrac{k}{2^n}\right)$. Пусть это соотношение верно при $1 \le k \le m$. Положим в исходном уравнении $x = \dfrac{m}{2^n}$, $y = \dfrac{1}{2^n}$. Тогда

$$f\left(\frac{m+1}{2^n}\right) = 2f\left(\frac{m}{2^n}\right)f\left(\frac{1}{2^n}\right) - f\left(\frac{m-1}{2^n}\right) =$$
$$= 2\operatorname{ch}\left(c\frac{m}{2^n}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{c}{2^n}\right) - \operatorname{ch}\left(c\frac{m-1}{2^n}\right) = \operatorname{ch}\left(c\frac{m+1}{2^n}\right).$$

Если $x \ge 0$ произвольно и $\dfrac{m}{2^n} \to x$, при $x \to \infty$, то из непрерывности f следует $f(x) = \operatorname{ch}(cx)$.

Из исходного уравнения при $x = 0$ имеем $f(-x) = f(x)$. Таким образом, непрерывное решение уравнения Даламбера, удовлетворяющее $f(x) > 1$, должно иметь при всех x вид $f(x) = \operatorname{ch}(cx)$. Проверка показывает, что эта функция, действительно, является решением.

Случай $-1 \le f(x) \le 1$ рассматривается аналогично.

5.2.5. Уравнения Лобачевского и Йенсена

Уравнение Лобачевского имеет вид

$$f(x+y)f(x-y) = (f(x))^2.$$

Если $f(0) = 0$, то $f(x) \equiv 0$. Действительно, $(f(x))^2 = f(2x)f(0)$. Можно положить $f(0) = 1$. Всякое другое решение будет отличиться от такого умножением на константу. Так как $f(x) = (f(x/2))^2/f(0) > 0$, то, логарифмируя, приводим уравнение Лобачевского к виду

$$2g(x) = g(x+y) + g(x-y),$$

где $g(x) = \ln f(x)$. Подстановка $x + y = \xi$, $x - y = \eta$ приводит последнее уравнение к *уравнению Йенсена*

$$g\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) = \frac{g(\xi)+g(\eta)}{2}.$$

Если g – решение уравнения Йенсена, то оно удовлетворяет соотношению

$$g\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{g(\xi)+g(0)}{2},$$

а значит, и $g(\xi+\eta) + g(0) = g(\xi) + g(\eta)$. Полагая $g(\xi) = h(\xi) + g(0)$, приходим к первому уравнению Коши

$$h(\xi+\eta) = h(\xi) + h(\eta).$$

Таким образом, общее решение уравнения Йенсена имеет вид

$$g(\xi) = A(\xi) + B,$$

где A – произвольная аддитивная функция, а B – произвольная константа.

Отсюда следует, что общее решение уравнения Лобачевского есть

$$f(x) = e^B \cdot e^{A(\xi)} = c \cdot \rho(\xi),$$

где ρ – произвольная экспоненциальная функция, а c – произвольная константа.

5.2.6. Уравнения Кантора

Приводимые здесь элементарные решения даны Синцовым [1903].

• *Первое уравнение Кантора*

$$f(x, z) = f(x, y) + f(y, z), \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{5.15}$$

f – неизвестная функция, конечная на $\mathbb{R}^2$.

Так как

$$f(x, y) = f(x, a) - f(y, a),$$

то

$$f(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y), \tag{5.16}$$

где $\varphi(x) = f(x, a)$ при некотором фиксированном a и всех вещественных x. Отсюда следует, что каждое решение уравнения (5.15) имеет вид (5.16). Обратно, как показывает проверка, решение (5.16) при произвольной конечной функции φ удовлетворяет уравнению (5.15) и, следовательно, является его общим решением.

• Аналогично решается *второе уравнение Кантора*

$$f(x, z) = f(x, y) f(y, z), \qquad x, y \in \mathbb{R}, \tag{5.17}$$

f – неизвестная функция, конечная на $\mathbb{R}^2$.

Решение этого уравнения или всюду равно нулю, или всюду отлично от нуля. Действительно, если $f(a, b) = 0$ при некоторых a и b, то

$$f(x, z) = f(x, a) f(a, z) = f(x, a) f(a, b) f(b, z) = 0$$

при всех x, z.

Пусть теперь функция f всюду отлична от нуля. Тогда, фиксируя любое a, найдем

$$f(x, y) = \frac{f(x, a)}{f(y, a)} = \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}.$$

Проверка подстановкой показывает, что эта функция является общим нетривиальным решением уравнения (5.17) при произвольных конечных всюду отличных от нуля функций φ.

5.2.7. Подход Беббиджа

Беббидж [1815] дал примеры построения по частным решениям новых решений, содержащих произвольную функцию.

• Для уравнения $f(x) = f(\alpha(x))$, если существует функция ψ такая, что $\psi(\alpha^2(x)) = \psi(x)$, функция

$$f(x) = \rho\left(\psi(x), \psi(\alpha(x))\right)$$

является решением уравнения при произвольной симметрической функции ρ.

Конкретные примеры приведены в пп. 6.4.7 и 6.4.8.

• Для уравнения $f(x) = \beta(x) \cdot f(\alpha(x))$, если известно частное решение g и функция ψ такая, что $\psi(\alpha^2(x)) = \psi(x)$,

$$f(x) = g(x) \cdot \rho\left(\psi(x), \psi(\alpha(x))\right)$$

является решением уравнения при произвольной симметрической функции ρ.

Для того же уравнения, если g – частное решение, а функция β удовлетворяет уравнению $\beta(x) = \beta(\alpha(x))$, функция

$$f(x) = g(x) \cdot \rho(\beta(x))$$

является решением уравнения при произвольной функции ρ.

Конкретные примеры приведены в пп. 6.5.6 и 6.5.1.

5.2.8. Результаты Ацеля

Методом замены переменных и функций Ацель исследовал некоторые уравнения общего вида, например,

$$f(x+y) = F\left(f(x), f(y)\right), \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = F\left(f(x), f(y)\right).$$

Некоторые из этих результатов приведены в части III (см. пп. 7.2.10 и 7.2.18).

5.3. Аналитические методы

5.3.1. Сведение к дифференциальным уравнениям

• Одним из простейших примеров является нахождение дифференцируемого решения первого уравнения Коши:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Дифференцируя обе части уравнения по переменной x, найдем $f'(x+y) = f'(x)$. Следовательно, $f'(x) = c$ и $f(x) = cx + b$, где c и b – константы. Поскольку $f(0) = 0$, то $b = 0$ и общим дифференцируемым решением уравнения является функция $f(x) = cx$.

• *Однородные функции.* Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, область определения которой вместе с каждой точкой $(x_1, \ldots, x_n)$ содержит все точки $(tx_1, \ldots, tx_n)$ при всех $t > 0$, называется однородной функцией степени k, если удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, \ldots, x_n),$$

где $t > 0$ вещественно.

Дифференцируя уравнение по t и по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$, получим

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} x_i \, \frac{\partial f(u_1, \ldots, u_n)}{\partial u_i} = k t^{k-1} f(x_1, \ldots, x_n), \\ &t \, \frac{\partial f(u_1, \ldots, u_n)}{\partial u_i} = t^k \, \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}, \end{aligned} \tag{5.18}$$

где $u_i = tx_i$. Исключая из равенств (5.18) производные $\dfrac{\partial f(u_1, \ldots, u_n)}{\partial u_i}$, приходим к уравнению Эйлера

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = k f(x_1, \ldots, x_n). \tag{5.19}$$

Если область E определения функции f – открытое множество и функция f непрерывно дифференцируема на E, то f является однородной функцией степени k тогда и только тогда, когда она удовлетворяет на E уравнению Эйлера.

В случае, когда область E содержится в области

$$\{(x_1, \ldots, x_n) : \; x_1 > 0, \ldots, \; x_n > 0\}$$

и вместе с каждой точкой $(x_1, \ldots, x_n)$ содержит точки $(tx_1, \ldots, tx_n)$ при всех $t > 0$, общее решение уравнения (5.19) имеет вид

$$f(x_1,\dots,x_n)=x_1^k\varphi\Big(\frac{x_2}{x_1},\dots,\frac{x_n}{x_1}\Big),$$

где φ – произвольная функция, определенная на множестве

$$\Big\{(t_2,\dots,t_n):\ t_2=\frac{x_2}{x_1},\dots,t_n=\frac{x_n}{x_1};\ (x_1,\dots,x_n)\in E\Big\}.$$

5.3.2. Разложение в ряд Тейлора

• При определенных условиях решение функционального уравнения может быть найдено разложением в степенной ряд.

Например, для уравнения

$$f(z)=F\left(z,f(\alpha(z))\right) \tag{5.20}$$

имеет место следующий результат (Смайдор [1967]). Пусть:

1) существуют числа a и b такие, что $\alpha(a)=a$, $F(a,b)=b$;
2) функция α аналитична в некоторой окрестности точки a, причем $|\alpha'(a)|<1$;
3) функция F аналитична в некоторой окрестности точки (a,b), причем $|F_b'(a,b)|<1$.

Тогда формальное решение

$$f(x)=b+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(x-a)^n \tag{5.21}$$

уравнения (5.20) имеет положительный радиус сходимости.

По поводу формальных степенных рядов см. прил. Б.

Формальное решение получается подстановкой разложений

$$\alpha(x)=a+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-a)^n,$$

$$F(x,y)=b+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i+j=n}F_{ij}(x-a)^i(y-b)^j$$

и разложения (5.21) в уравнение (5.20). Пусть $u=x-a$ и

$$v=f(\alpha(x))-b=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(\alpha(x)-a)^n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_mu^m\right)^n.$$

Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n u^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=n} F_{ij} u^i \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Big(\sum_{m=1}^{\infty} a_m u^m \Big)^n \right)^j.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях u, найдем

$$\begin{aligned} c_1 &= F_{10} + F_{01} c_1 a_1, \\ c_2 &= F_{01}(c_1 a_2 + c_2 a_1^2) + F_{20} + F_{11} c_1 a_1 + F_{02} c_1^2 a_1^2, \ldots. \end{aligned}$$

Отсюда, так как $F_{01} a_1 \neq 1$, последовательно определим коэффициенты $c_1, c_2, \ldots$.

• Кучма [1969] исследовал существование аналитических решений линейных уравнений вида

$$f(\varphi(z)) - \psi(z) f(z) = \chi(z),$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= z^p F(z), \qquad F(0) \neq 0, \qquad p \geq 2, \\ \psi(z) &= z^q G(z), \qquad G(0) \neq 0, \qquad q \geq 1, \\ \chi(z) &= z^s H(z), \qquad H(0) \neq 0, \qquad s \geq 0, \end{aligned}$$

а функции F, G и H аналитичны в окрестности нуля.

5.4. Рекуррентные процедуры

5.4.1. Итерирование ядра

• Рассмотрим уравнение

$$f(2x) = (f(x))^2, \qquad x \geq 1.$$

Отметим, что $f(x) = (f(x/2))^2 \geq 0$.

Итерируя ядро $\alpha(x) = 2x$ m раз, получим

$$f(2^n x) = \left(f(2^{n-1} x)\right)^2 = \ldots = (f(x))^{2^n}.$$

Для $y = 2^n x$ выберем n так, чтобы было $1 \leq x < 2$, и зададим функцию $f(x) = \varphi(x)$ произвольно на отрезке $[1, 2)$. Тогда $f(y) = (\varphi(x))^{2^n}$, где $1 \leq y 2^{-n} = x < 2$. Это дает $2^n \leq y < 2^{n+1}$ или $n \leq \dfrac{\ln y}{\ln 2} < n+1$, т. е. $n = \left[\dfrac{\ln y}{\ln 2}\right]$ (квадратные скобки – символ целой части). Отсюда $2^n = y 2^{\left\{\frac{\ln y}{\ln 2}\right\}}$ и $x = 2^{-\left\{\frac{\ln y}{\ln 2}\right\}}$ (фигурные скобки – символ дробной части). Таким образом,

$$f(y) = \left(\varphi\left(2^{-\left\{\frac{\ln y}{\ln 2}\right\}}\right)\right)^{y2^{\left\{\frac{\ln y}{\ln 2}\right\}}} = \left(\rho\left(\frac{\ln y}{\ln 2}\right)\right)^{y},$$

где ρ – произвольная неотрицательная функция периода единица.

• Пусть в уравнении

$$f(\alpha(x)) - f(x) = \gamma(x),$$

$x \in I = (a, b)$, $a < \alpha(x) < x$ на I, функция α непрерывна и строго возрастает на I.

Уравнение имеет непрерывное решение на I тогда и только тогда, когда функция γ непрерывна на I, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma(\alpha^n(x))$ сходится. При этом

$$f(x) = f(a) - \sum_{n=0}^{\infty} \gamma(\alpha^n(x)). \tag{5.22}$$

(Сравни с п. 6.5.21).

Необходимость непрерывности функции γ очевидна. Если f – решение, то

$$f(\alpha^{m+1}(x)) - f(\alpha^m(x)) = \gamma(\alpha^m(x)), \qquad m = 0, 1, \ldots.$$

Следовательно,

$$f(\alpha^{n+1}(x)) - f(x) = \sum_{m=0}^{n} \gamma(\alpha^m(x)).$$

Для любого $x \in I$ при $n \to \infty$ имеем $\alpha^{n+1}(x) \to a$ и $f(\alpha^n(x)) \to f(a)$. Это влечет сходимость ряда в правой части и равенство (5.22).

5.4.2. Непрерывные решения уравнения $f^n(x) = \beta(x)$

Следующее построение дано Кучмой [1964].

Пусть в уравнении $f^n(x) = \beta(x)$ функция β непрерывна и строго возрастает на $[a, b]$, $\beta(a) = a$, $\beta(b) = b$, $\beta(x) < x$ на (a, b).

Выберем на (a, b) узлы $x_0, \ldots, x_{n-1}$ так, что $\beta(x_0) < x_{n-1} < \ldots < x_1 < x_0$. Положим $x_{m+n} = \beta(x_m)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Тогда последовательность x_m при $m \geq 0$ убывающая и $x_m \downarrow a$ при $m \to +\infty$; последовательность x_{-m} при $m \geq 0$ возрастающая и $x_m \uparrow b$ при $m \to +\infty$.

Выберем произвольные непрерывные возрастающие функции $\varphi_1, \ldots,$ φ_{n-1}, определенные, соответственно, на отрезках $[x_1, x_0], \ldots,$ $[x_{n-1}, x_{n-2}]$, такие, что $\varphi_i(x_{i-1}) = x_i$ при всех $i = 1, \ldots, n-1$.

Для $x \in [x_{m+n}, x_{m+n-1}]$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, положим

$$\varphi_{m+n} = \beta\left(\varphi_{m+1}^{-1}(\varphi_{m+2}^{-1}(\ldots(\varphi_{m+n-1}^{-1}(x))\ldots))\right).$$

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, совпадающая на $[x_m, x_{m-1}]$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, с функцией φ_m для всех $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, является непрерывным решением уравнения. В таком виде может быть представлено произвольное непрерывное строго возрастающее решение.

5.5. Метод инвариантов

• Метод инвариантов построения решений функциональных уравнений вида

$$f(\alpha(x, f(x))) = F(x, f(x)), \tag{5.23}$$

в частности,

$$f(\alpha(x)) = F(x, f(x)),$$

подробно рассмотрен в монографии Г.П. Пелюха и А.Н. Шарковского [M15]. В уравнении (5.23) f – неизвестная, а α и F – заданные функции. Далее рассматривается случай

$$f : U \to V, \qquad \alpha : U \to U, \qquad F : U \times V \to V,$$

где $U, V \subset \mathbb{R}$ (в [M15] – $V \subset \mathbb{R}^n$).

• Отображение

$$S : (x, y) \mapsto (\alpha(x, y), F(x, y))$$

из $U \times V$ в $U \times V$ называется *характеристическим отображением* функционального уравнения (5.23). Оно отображает график решения Γ_f в себя: $S(\Gamma_f) \subset \Gamma_f$. Здесь

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : \ x \in U\} \subset U \times V.$$

Действительно. Пусть $x_0 \in U$ и $y_0 = f(x_0)$, т.е. $(x_0, y_0) \in \Gamma_f$. Если $x_1 = \alpha(x_0, y_0) \in U$ и, согласно уравнению (5.23), $y_1 = f(x_1) = F(x_0, y_0)$, то

$$(x_1, y_1) = (\alpha(x_0, y_0), F(x_0, y_0)) \in \Gamma_f.$$

• Множество $A \subset \mathbb{R}^2$ называется *функциональным* (в [M15] – t-множеством), если $(a, y_1), (a, y_2) \in A$ влечет $y_1 = y_2$ (каждому a соответствует не более одного y такого, что $(a, y) \in A$).

Множество $A \subset U \times V$ называется *инвариантным* относительно отображения S, если $S(A) = A$.

Каждое инвариантное относительно отображения S функциональное множество A является решением уравнения (5.23) в том смысле, что оно содержится в некотором графике Γ_f решения уравнения, т.е. $A \subset \Gamma_f$.

• Функция $\varphi : U \times V \to \mathbb{R}$ называется *инвариантом* характеристического отображения S, если $\varphi \circ S(x, y) = \varphi(x, y)$ при всех $(x, y) \in U \times V$, т.е. если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "S"] \arrow[dr, "\varphi"'] & U \times V \arrow[d, "\varphi"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Очевидно, что $\varphi \circ S^n(x, y) = \varphi(x, y)$, т.е. инвариант – это функция, принимающая постоянное значение на каждой траектории отображения S. Инварианты характеристических отображений аналогичны первым интегралам в теории дифференциальных уравнений (они постоянны вдоль траекторий, порождаемых отображениями).

Если φ – инвариант отображения S, то множество $S = \{(x, y) : \varphi(x, y) = c\}$ инвариантно относительно отображения S при любом c. Существование инвариантов характеристического отображения не гарантирует существования решений функционального уравнения, так как соответствующие инвариантные множества могут оказаться нефункциональными.

Непрерывные инварианты характеристического отображения существуют не всегда или не в таком количестве, чтобы выразить через них произвольное непрерывное решение.

• **Пример**. Для уравнения $f(x + a) = f(x) + b$ характеристическое отображение есть $S(x, y) = (x + a, y + b)$. Функция $\varphi(x, y) = ay - bx$ инвариантна при этом отображении, т.е. $\varphi \circ S(x, y) = \varphi(x, y)$. Поэтому множество

$$A = \{(x, y) : \; ay - bx = c\}$$

инвариантно относительно характеристического отображения при любом c:

$$\begin{aligned} S(A) &= \{(x + a, y + b); \; ay - bx = c\} = \\ &= \{(\xi, \eta) : \; a(\eta - b) - b(\xi - a) = c\} = A. \end{aligned}$$

Это функциональное множество, следовательно, $A \subset \Gamma_f$ и A является графиком решения $y = (c + bx)/a$.

• Если для отображения S существует функция $\psi : U \times V \to V$ и число λ такое, что $\psi \circ S = \lambda\psi$, тогда λ называется *собственным числом*, а ψ – *собственной функцией* отображения S.

• Пусть $\lambda \neq 1$ – положительное собственное число отображения S, а ψ – соответствующая положительная собственная функция. Тогда функция $\varphi(x, y) = \omega\left(\dfrac{\ln \psi(x, y)}{\ln \lambda}\right)$, где ω – периодическая функция периода единица, является инвариантом отображения.

• Пусть отображение S циклическое, т.е. S^m – тождественное отображение при некотором $m > 1$. Возьмем произвольную функцию $\chi : U \times V \to W$ и образуем функции $u_i(x, y) = \chi(S^{i-1}(x, y))$, $i = 1, \ldots, m$. При любой симметрической функции $\eta : W^m \to \mathbb{R}$ функция

$$\varphi(x, y) = \eta(u_1(x, y), \ldots, u_m(x, y))$$

является инвариантом отображения.

• **Пример.** Характеристическое отображение $S(x, y) = (a - x, b - y)$ функционального уравнения $f(a - x) = b - f(x)$ циклическое: $S^2(x, y) = (x, y)$. Для произвольной функции χ положим

$$u_1(x, y) = \chi(x, y), \qquad u_2(x, y) = \chi \circ S(x, y) = \chi(a - x, b - y).$$

Если η – симметрическая функция, то $\eta(\chi(x, y), \chi(a - x, b - y))$ – инвариант.

Так, при $\eta(u_1, u_2) = u_1 u_2$, $\chi_1(x, y) = x$ и $\chi_2(x, y) = y$ имеем два инварианта: $\varphi_1(x, y) = x(a - x)$, $\varphi_2(x, y) = y(b - y)$. При произвольной функции Φ множество

$$\{(x, y) :\, \Phi(x(a - x), y(b - y)) = c\}$$

инвариантно относительно отображения S. Решение функционального уравнения свелось к решению квадратного уравнения $y(b - y) = \rho(ax - x^2)$, где функция ρ произвольна.

• Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ – инварианты отображения S, то произвольная функция $\Phi(\varphi_1(x, y), \ldots, \varphi_n(x, y))$ – также инвариант отображения S.

Функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ называются независимыми, если ни одна из них не может быть представлена в виде функции остальных.

Характеристическое отображение, действующее в $\mathbb{R}^2$, не может иметь более двух независимых инвариантов.

• Пусть отображение S имеет положительные собственные числа λ_1, λ_2 и положительные собственные функции ψ_1, ψ_2. Тогда функция

$$\varphi(x, y) = \frac{(\psi_2(x, y))^{\ln \lambda_1}}{(\psi_2(x, y))^{\ln \lambda_1}}$$

является инвариантом отображения.

• **Пример**. Характеристическое отображение $S(x, y) = (ax, by)$ функционального уравнения $f(ax) = bf(y)$, $a, b > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, имеет собственные числа $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b$ и соответствующие собственные функции $\psi_1(x, y) = x$, $\psi_2(x, y) = y$. Поэтому функция

$$\varphi(x, y) = \psi_2(x, y) \cdot \psi_1(x, y)^{-\ln \lambda_1 / \ln \lambda_2} = yx^{-\ln b / \ln a}$$

– инвариант отображения S. Другой инвариант –

$$\varphi_2(x, y) = \omega\left(\frac{\ln \psi_1(x, y)}{\ln \lambda_1}\right) = \omega\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right),$$

где ω – произвольная периодическая функция периода единица. Множество

$$A = \left\{(x, y) : \ yx^{-\ln b / \ln a} = \omega\left\{\frac{\ln x}{\ln a}\right\}\right\}$$

инвариантно относительно S и функционально. Следовательно, решение функционального уравнения имеет вид

$$f(x) = x^{\frac{\ln b}{\ln a}} \omega\left\{\frac{\ln x}{\ln a}\right\}.$$

• Если для характеристического отображения S существуют отображения $\psi : U, V \to W$ и $\tilde{S} : W \to W$, где $W \subset \mathbb{R}$ или $W \subset \mathbb{R}^2$, такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\psi"'] & U \times V \arrow[d, "\psi"] \\
W \arrow[r, "\tilde{S}"] & W
\end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. $\psi \circ S = \tilde{S} \circ \psi$, то $\tilde{S}$ называется *фактором*, а ψ – *ковариантом* характеристического отображения S.

Коварианты, как и инварианты, позволяют находить инвариантные множества характеристического отображения, а значит, и решения функционального уравнения.

• Если фактор $\tilde{S}$ – тождественное отображение из W в W, и $\psi : U \times V \to W$ – ковариант характеристического отображения S, то произвольное отображение $\rho : W \to \mathbb{R}$ порождает инвариант $\rho \circ \psi$:

$$\rho \circ \psi \circ S = \rho \circ \tilde{S} \circ \psi = \rho\psi.$$

• Если функция $\tilde{\varphi} : W \to \mathbb{R}$ – инвариант фактора $\tilde{S} : W \to W$, т.е. $\tilde{\varphi} \circ \tilde{S} = \tilde{\varphi}$, а $\psi : U \to W$ – ковариант отображения S, то $\tilde{\varphi} \circ \psi$ – инвариант отображения S:

$$\tilde{\varphi} \circ \psi \circ S = \tilde{\varphi} \circ \tilde{S} \circ \psi = \tilde{\varphi} \circ \psi.$$

• Если $\tilde{A}$ – множество, инвариантное относительно отображения $\tilde{S}$, то его прообраз $A = \psi^{-1}(\tilde{A})$ – инвариантное множество отображения S.

• Пусть для характеристического отображения S существует биекция $H : U \times V \to U \times V$ и отображение $\tilde{S} : U \times V \to U \times V$ такие, что $S = H^{-1} \circ \tilde{S} \circ H$, т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r, "H"] \arrow[dd, "S"'] & U \times V \arrow[dd, "\tilde{S}"] \arrow[dr, "\tilde{\varphi}"] & \\
 & & V \\
U \times V \arrow[r, "H"] & U \times V \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Если при этом $\tilde{\varphi}$ – инвариант отображения $\tilde{S}$, то $\varphi = \tilde{\varphi} \circ H$ – инвариант отображения S:

$$\varphi \circ S = \tilde{\varphi} \circ H \circ H^{-1} \circ \tilde{S} \circ H = \tilde{\varphi} \circ \tilde{S} \circ H = \tilde{\varphi} \circ H = \tilde{\varphi}.$$

• Пример. Отображение $S(x, y) = (ax, by^{\beta})$ – характеристическое для функционального уравнения

$$f(ax) = b(f(x))^{\beta}, \qquad a, b, \beta > 0, \qquad a, \beta \neq 1, \qquad f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+.$$

Для отображений

$$H(x, y) = \left(x, \ln y + \frac{\ln b}{\beta - 1}\right), \qquad \tilde{S}(x, y) = (ax, \beta y)$$

выполняется $S = H^{-1} \circ \tilde{S} \circ H$. Фактор $\tilde{S}$ имеет инварианты

$$\tilde{\varphi}_1(x, y) = \left\{\frac{\ln x}{\ln a}\right\}, \qquad \tilde{\varphi}_2(x, y) = y \cdot x^{-\frac{\ln \beta}{\ln a}}.$$

Поэтому функции $\varphi_i = \tilde{\varphi}_i \circ H$ – инварианты отображения S:

$$\varphi_1(x,y) = \left\{\frac{\ln x}{\ln a}\right\}, \qquad \varphi_2(x,y) = \left(\ln y + \frac{\ln b}{\beta - 1}\right) \cdot x^{-\frac{\ln \beta}{\ln a}}.$$

Решение функционального уравнения найдется из

$$\left(\ln f(x) + \frac{\ln b}{\beta - 1}\right) x^{-\frac{\ln \beta}{\ln a}} = \left\{\frac{\ln x}{\ln a}\right\}.$$

Отсюда

$$f(x) = \exp\left(x^{\frac{\ln \beta}{\ln a}} \cdot \left\{\frac{\ln x}{\ln a}\right\} - \frac{\ln b}{\beta - 1}\right).$$

Часть III

ОТДЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В данной части приводится сводка решений конкретных функциональных уравнений. Хотя представленный материал и носит справочный характер, это далеко не полный обзор задач, рассмотренных в литературе. Представлены классические уравнения и их модификации, уравнения, определяющие отдельные классы функций, и их возможные представления, другие уравнения различной сложности (уравнения Абеля и Шредера рассмотрены в гл. 5). Преследовалась основная цель – показать разнообразие функциональных уравнений и возможных форм представления результатов решения уравнений.

Уравнения (системы уравнений) классифицированы с единственной целью – облегчить их поиск. Основные признаки, по которым проведена классификация: число уравнений в рассматриваемой системе; число неизвестных функций; максимальное число аргументов (валентность) неизвестных функций; число независимых переменных в уравнении. *Рекурсивными* названы уравнения, в записи которых хотя бы один аргумент неизвестной функции является выражением, содержащим значение неизвестной функции. Эта классификация непосредственно не связана ни с методами решения, ни с критериями существования и единственности решений.

Известен ряд систем классификации функциональных уравнений. Возможно, первую из них предложил Швейцер [1919].

В соответствии с одной из классификаций (Давиденко [1985]) уравнения вида

$$F(x, f(x), f(\alpha_1(x)), \ldots, f(\alpha_n(x))) = 0$$

относят к функциональным уравнениям первого порядка и $(n+1)$-го класса (неизвестная функция одной переменной входит в уравнение с различными аргументами – данными функциями $x, \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$, называемыми иногда ядрами уравнения), а уравнения вида

$$F(x, f(x), \ldots, f^{n+1}(x)) = 0$$

– к функциональным уравнениям $(n+1)$-го порядка и первого класса (в уравнение входят $n+1$ итерации $f, \ldots, f^{n+1}$ неизвестной функции). Такая классификация не согласована с общепринятой классификацией уравнений в конечных разностях.

Используются следующие обозначения (возможно с индексами):

f, g, h	– неизвестные вещественные функции,
F, G, α, β, γ	– заданные вещественные функции,
a, b, c, p, q, r	– заданные вещественные константы,
x, y, z, ξ, η, ζ	– независимые вещественные переменные,
m, n	– целочисленные переменные,
φ, ψ, χ, ρ	– произвольные функции,
ω	– произвольные периодические функции периода единица,
A, B, C, σ, τ	– произвольные константы.

Все отклонения и ограничения, используемые в отдельных задачах, оговариваются.

Глава 6

Одна независимая переменная

6.1. Рекуррентные последовательности функций

Ортогональные многочлены (полиномы) удовлетворяют уравнениям вида

$$f_{n+1}(x) = (a_n x + b_n) f_n(x) - c_n f_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

при заданных $f_0(x)$ и $f_1(x)$. Соотношение ортогональности с весом w на интервале (a, b) имеет вид

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x) w(x) dx = 0, \qquad m \neq n.$$

При фиксированном x последовательность многочленов $f_n(x)$ является рекуррентной числовой последовательностью.

Ниже приводится ряд систем ортогональных многочленов, их явные выражения и/или производящие функции (см., например, Бэйтман, Эрдейи [1953]).

6.1.1. $\boldsymbol{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta) f_{n+1}(x) = (2+\alpha+\beta+1)((2+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)x+\alpha^2-\beta^2) f_n(x) - 2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2) f_{n-1}(x)}$, $\qquad \alpha > -1, \ \beta > -1.$

Частное решение – *многочлены Якоби*

$$f_0(x) = 1, \qquad f_1(x) = ((2+\alpha+\beta)x + \alpha - \beta)/2, \qquad f_n(x) = P_n^{(\alpha,\beta)};$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-n} \sum_{m=0}^{n} \binom{n+\alpha}{m} \binom{n+\beta}{n-m} (x-1)^{n-m} (x+1)^m,$$

ортогональные на $(-1, 1)$ с весом $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$. Производящая функция –

$$2^{\alpha+\beta} R^{-1} (1 - z + R)^{-\alpha} (1 + z + R)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) z^n,$$

где $R = \sqrt{1 - 2xz + z^2}$.

6.1.2. $\boldsymbol{(n+1) f_{n+1}(x) = 2(n+\lambda) x f_n(x) - (n+2\lambda-1) f_{n-1}(x)}$, $\lambda > -1/2$, $\lambda \neq 0$ (частный случай 6.1.1 при $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$).

Частное решение – (*ультрасферические*) *многочлены Гегенбауэра*

$$f_0(x)=1, \qquad f_1(x)=\frac{\lambda(2\lambda+1)^2}{2}x, \qquad f_n(x)=C_n^\lambda(x);$$
$$\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_n C_n^\lambda(x)=(2\lambda)_n P_n^{(\alpha,\alpha)}(x), \qquad \alpha=\lambda-\frac{1}{2},$$

ортогональные на $(-1,1)$ с весом $w(x)=(1-x^2)^{\lambda-1/2}$. Производящая функция –

$$\left(1-2xz+z^2\right)^{-\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(x)z^n.$$

6.1.3. $\boldsymbol{(n+1)f_{n+1}(x)=(2n+1)xf_n(x)-nf_{n-1}(x)}$
(частный случай 6.1.2 при $\lambda=1/2$ и 6.1.1 при $\alpha=\beta=0$).

Частное решение – *многочлены Лежандра* (*сферические*)

$$f_0(x)=1, \qquad f_1(x)=x, \qquad f_n(x)=P_n(x);$$
$$P_n(x)=2^{-n}\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m\binom{n}{m}\binom{2n-2m}{n}x^{n-2m},$$

ортогональные на $(-1,1)$ с весом $w(x)=1$. Производящая функция –

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n.$$

6.1.4. $\boldsymbol{f_{n+1}(x)=2xf_n(x)-f_{n-1}(x)}$
(частный случай 6.1.2 при $\lambda\to 1$.

Частное решение – *многочлены Чебышева первого рода*

$$f_0(x)=1, \quad f_1(x)=x, \quad f_n(x)=T_n(x);$$
$$T_n(x)=\cos n\arccos x \ \text{ при } \ -1\le x\le 1,$$

ортогональные на $(-1,1)$ с весом $w(x)=1/\sqrt{1-x^2}$. Производящая функция –

$$\frac{1-z^2}{1-2xz+z^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x)z^n. \tag{6.1}$$

Многочлены Чебышева первого рода удовлетворяют уравнениям

$$1+2T_{2n}(x)=2(T_n(x))^2,$$
$$T_{n+1}(x)-T_{n-m}(x)=2T_m(x)T_n(x), \qquad n\ge m.$$

Другое частное решение – *многочлены Чебышева второго рода*

$$f_0(x) = 1, \qquad f_1(x) = 2x, \qquad f_n(x) = U_n(x),$$
$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}};$$

ортогональные на $(-1, 1)$ с весом $w(x) = \sqrt{1-x^2}$. Производящая функция –

$$\frac{1}{1-2xz+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) z^n. \tag{6.2}$$

Многочлены Чебышева связаны соотношениями

$$\begin{aligned}
&2(1-x^2)(U_{n-1}(x))^2 = 1 - 2T_{2n}(x),\\
&2T_n(x)U_{n-1}(x) = U_{2n-1}(x),\\
&2(1-x^2)(U_{n-1}(x))^2 = 1 - 2T_{2n}(x),\\
&U_{n+m-1}(x) + U_{n-m-1}(x) = 2T_m(x)U_{n-1}(x),\\
&U_{n+m-1}(x) - U_{n-m-1}(x) = 2T_n(x)U_{m-1}(x),\\
&T_{n+m}(x) - T_{n-m}(x) = 2(x^2-1)U_{m-1}(x)U_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

6.1.5. $\boldsymbol{(n+1)f_{n+1}(x) - (2n+\alpha+1-x)f_n(x) + (n+\alpha)f_{n-1}(x) = 0}$, $\alpha > -1$.

Частное решение – *обобщенные многочлены Лагерра*

$$f_0(x) = 1, \qquad f_1(x) = 1 + \alpha - x, \qquad f_n(x) = L_n^{\alpha}(x),$$
$$L_n^{\alpha}(n) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{(-x)^m}{m!},$$

ортогональные на $(0, \infty)$ с весом $w(x) = x^{\alpha} e^{-x}$. Производящая функция –

$$(1-z)^{-\alpha-1} \exp\frac{xz}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) z^n. \tag{6.3}$$

6.1.6. $\boldsymbol{f_{n+1}(x) - 2xf_n(x) + 2nf_{n-1}(x) = 0}$.

Частное решение – *многочлены Эрмита*

$$f_0(x) = 1, \qquad f_1(x) = 2x, \qquad f_n(x) = H_n(x),$$
$$H_n(x) = n! \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m (2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!},$$

ортогональные на $\mathbb{R}$ с весом $w(x) = \exp(-x^2)$. Производящая функция –

$$\exp(2xz - z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!}.$$

6.1.7. $\boldsymbol{(n+1)f_{n+1}(x) - xf_n(x) + nf_{n-1}(x) = 0}$.

Частное решение – многочлены

$$f_0(x) = 1, \qquad f_1(x) = x, \qquad f_n(x) = \varphi_n(x),$$

ортогональные на $\mathbb{R}$ с весом $w(x) = \left(2 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x\right)^{-1}$. Производящая функция –

$$\frac{\exp(x \operatorname{arctg} z)}{\sqrt{1+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) z^n. \tag{6.4}$$

Данные многочлены относятся к многочленам Мейкснера и являются частным случаем многочленов Поллачека.

Нечепуренко [1985]

6.2. Суммы функций

Частные решения f уравнений вида

$$f(x+1) - f(x) = \beta(x)$$

представлены ниже в виде таблиц пар функций β и f. Общие решения при этом имеют вид $f_{\text{об}} = f(x) + \omega(x)$, где ω – произвольная периодическая функция периода единица.

Знание функций f таких, что $\Delta f = \beta$, позволяет находить конечные суммы вида

$$\sum_{j=1}^{[x]} \beta(x-j) = f(x) - f(\{x\}),$$

где $[x]$ и $\{x\}$ – целая и дробная части числа x.

Общие формулы

$\beta(x) = \Delta f(x)$	$f(x)$
$a\beta(x)$	$af(x)$
$\beta(x+a)$	$f(x+a)$
$\beta(a-x)$	$-f(a-x+1)$
$\beta_1(x) + \beta_2(x)$	$f_1(x) + f_2(x)$
$\beta(x)\gamma(x), \qquad \Delta\gamma(x) = 0$	$f(x)\gamma(x)$
$\Delta^n \beta(x)$	$\Delta^n f(x)$
$\beta([x]), \qquad [x]$ – целая часть x	$f([x])$
$\beta(\gamma(x)), \qquad \Delta\gamma(x) = 1$	$f(\gamma(x))$
$\beta(\gamma(x)), \qquad \Delta\gamma(x) = -1$	$-f(\gamma(x)+1)$
$\beta^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x)$
$\displaystyle\int_a^x \beta(t)dt$	$\displaystyle\int_a^x f(t)dt - (x-a)\int_a^{a+1} f(t)dt$
	$\displaystyle\int_a^x [x-t]\beta(t)dt, \qquad [x]$ – целая часть x
$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\beta(t)dt,$	$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)dt + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\int_a^{a+1} B_n(t-x)f(t)dt$
$n \geq 1$	$\displaystyle\int_a^x \frac{B_n(x-t) - B_n(\{x-t\})}{n!}\beta(t)dt$
$\dfrac{\partial^n \beta(p,x)}{\partial p^n}$	$\dfrac{\partial^n f(p,x)}{\partial p^n}$
$\displaystyle\int_a^b \beta(p,x)dp,$	$\displaystyle\int_a^b f(p,x)dp$

Конкретные функции

$\beta(x) = \Delta f(x)$	$f(x)$
1	x
x	$\frac{x(x-1)}{2}$
$2x+1$	x^2
x^2	$\frac{x(x-1)(2x-1)}{6}$
$x(x-1)$	$\frac{x(x-1)(x-2)}{3}$
$(2x+1)^2$	$\frac{x(4x^2-1)}{3}$
x^3	$\left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2$
$x^n, \quad n \geq 0$	$\frac{B_{n+1}(x)}{n+1}, \quad B_n(x)$ – полином Бернулли
$(x)_n, \quad n \geq 1$	$\frac{(x)_{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}, \quad x > 0$	$\psi(x) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t} dt,$
$\frac{ax+b}{x+d}$	$ax + (b-ad)\psi(x+d)$
$\frac{1}{x(x+1)}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x(x+2)}$	$-\frac{2x+1}{2x(x+1)}$
$\frac{1}{x^2+1}, \quad x > 0$	$-\int_0^1 \frac{e^{-tx}\sin t}{1-e^{-t}} dt$
$\frac{x}{x^2+1}, \quad x > 0$	$-\gamma + \int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-tx}\cos t}{1-e^{-t}} dt$
$\frac{1}{(p+xq)(p+(x+1)q)}$	$-\frac{1}{q(p+xq)}$

Продолжение табл. Конкретные функции

$\beta(x)=\Delta f(x)$		$f(x)$
$\dfrac{1}{(p+xq)\dots(p+(x+l+1)q)}$		$-\dfrac{1}{(l+1)q(p+xq)\dots(p+(x+l)q)}$
a^x,	$a\neq 1$	$\dfrac{1}{a-1}a^x$
xa^x,	$a\neq 1$	$\dfrac{a^x}{a-1}\left(x-\dfrac{a}{a-1}\right)$
$\ln x$,	$x>0$	$\ln\Gamma(x)$
$x\ln x$,	$x>0$	$\int_1^x \ln\Gamma(t)dt+\dfrac{x(x-1)}{2}-\dfrac{x}{2}\ln 2\pi$
$x\Gamma(x)$,	$x>0$	$\Gamma(x)$
$\dfrac{1}{(x+1)\Gamma(x)}$,	$x>0$	$-\dfrac{1}{\Gamma(x+1)}$
$\dfrac{x-2}{\Gamma(x)}$,	$x>0$	$-\dfrac{x-1}{\Gamma(x)}$
$\dfrac{x^2+px-p-2}{\Gamma(x+1)}$,	$x>0$	$-\dfrac{x+p+1}{\Gamma(x)}$
$\sin 2bx$,	$b\neq\pi m$	$-\dfrac{\cos(2x-1)b}{2\sin b}$
$\sin 2\pi mx$		$x\sin 2\pi mx$
$\cos 2bx$,	$b\neq\pi m$	$\dfrac{\sin(2x-1)b}{2\sin b}$
$\cos 2\pi mx$		$x\cos 2\pi mx$
$[\sin bx]^2$,	$b\neq\pi m$	$\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin(2x-1)b}{4\sin b}$
$(\sin\pi mx)^2$		$\dfrac{x}{2}(\sin\pi mx)^2$
$[\cos bx]^2$,	$b\neq\pi m$	$\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin(2x-1)b}{4\sin b}$
$(\cos\pi mx)^2$		$\dfrac{x}{2}(\cos\pi mx)^2$

Окончание табл. Конкретные функции

$\beta(x) = \Delta f(x)$	$f(x)$
$x\sin 2bx, \quad b \neq \pi m$	$\dfrac{\sin 2bx}{4(\sin b)^2} - \dfrac{x\cos(2x-1)b}{2\sin b}$
$x\sin 2\pi mx$	$\dfrac{x(x-1)}{2}\sin 2\pi mx$
$x\cos 2bx, \quad b \neq \pi m$	$\dfrac{\cos 2bx}{4(\sin b)^2} + \dfrac{x\sin(2x-1)b}{2\sin b}$
$x\cos 2\pi mx$	$\dfrac{x(x-1)}{2}\cos 2\pi mx$
$a^x\sin bx, \quad a>0,\ a\neq 1$	$\dfrac{a\sin(x-1)b - \sin bx}{a^2 - 2a\cos b + 1}a^x$
$a^x\cos bx, \quad a>0,\ a\neq 1$	$\dfrac{a\cos(x-1)b - \cos bx}{a^2 - 2a\cos b + 1}a^x$
$\dfrac{1}{\cos px\cos p(x+1)}, \quad p\neq \pi m$	$\dfrac{\operatorname{tg} px}{\sin p}$
$\dfrac{1}{\sin px\sin p(x+1)}, \quad p\neq \pi m$	$-\dfrac{\operatorname{ctg} px}{\sin p}$
$\operatorname{sh}(a+2bx), \quad b>0$	$\dfrac{\operatorname{ch}(a-b+2bx)}{2\operatorname{sh} b}$
$\operatorname{ch}(a+2bx), \quad b>0$	$\dfrac{\operatorname{sh}(a-b+2bx)}{2\operatorname{sh} b}$
$x\operatorname{sh} 2bx, \quad b>0$	$\dfrac{\operatorname{sh} 2bx}{4(\operatorname{sh} b)^2} - \dfrac{x\operatorname{ch}(2x-1)b}{2\operatorname{sh} b}$
$x\operatorname{ch} 2bx, \quad b>0$	$\dfrac{\operatorname{ch} 2bx}{4(\operatorname{sh} b)^2} + \dfrac{x\operatorname{sh}(2x-1)b}{2\operatorname{sh} b}$
$a^x\operatorname{sh} bx, \quad a>0,\ a\neq 1, e^{-b}, e^b$	$\dfrac{a\operatorname{sh}(x-1)b - \operatorname{sh} bx}{a^2 - 2a\operatorname{ch} b + 1}a^x$
$a^x\operatorname{ch} bx, \quad a>0,\ a\neq 1, e^{-b}, e^b$	$\dfrac{a\operatorname{ch}(x-1)b - \operatorname{ch} bx}{a^2 - 2a\operatorname{ch} b + 1}a^x$

6.3. $f(x+p) = F(x, f(x))$

6.3.1. $f(x+T) - f(x) = 0$, $\quad T > 0$.

Общее решение – произвольная периодическая функция периода T:

$$f(x) = \omega(x/T).$$

6.3.2. $f(x+T) + f(x) = 0$, $\quad T > 0$.

Общее решение – произвольная *антипериодическая функция* периода T:

$$f(x) = (-1)^{[x/T]}\omega(x/T).$$

Антипериодическая функция периода T является периодической функцией периода $2T$.

6.3.3. $f(x+p) - f(x) = ax + b$, $\quad p \neq 0$.

Общее решение –

$$f(x) = \frac{a}{2p}x^2 + \left(\frac{b}{p} - \frac{a}{2}\right)x + \omega\left(\frac{x}{p}\right).$$

6.3.4. $f(x+p) - qf(x) = ax + b$, $\quad p \neq 0,\ 0 < q \neq 1$.

Общее решение –

$$f(x) = \frac{ax}{1-q} + \frac{b(1-q) - ap}{(1-q)^2} + q^{x/p}\omega(x/p).$$

6.3.5. $f(x+p) + qf(x) = ax + b$, $\quad p \neq 0,\ 0 < q$.

Общее решение –

$$f(x) = \frac{ax}{1+q} + \frac{b(1+q) - ap}{(1+q)^2} + (-q)^{[x/p]}\omega(x/p).$$

6.3.6. $f(x+1) + f(x) = 2x^n$.

Общее решение –

$$f(x) = E_n(x) + \rho(x),$$

где E_n – многочлен Эйлера степени n (см. приложение), ρ – произвольная антипериодическая функция периода 2.

6.3.7. $f(x+1) - qf(x) = x^n$.

Частное решение –

$$f(x) = \frac{1}{1-q} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{P_k(q) x^{n-k}}{(q-1)^k}.$$

Функции $P_k(q)$ определяются рекуррентными формулами

$$P_m(q) = \frac{1}{1-q} \sum_{k=0}^{m-k} \binom{m}{k} P_k(q).$$

Их производящая функция –

$$\frac{q-1}{q - e^{z(q-1)}} \sum_{m=0}^{\infty} P_m(q) \frac{z^m}{m!}.$$

Частные значения: $P_0(q) = P_1(q) = 1$, $P_2(q) = 1 + q$.

6.3.8. $\boldsymbol{f(x+1) - f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k}$.

Частное решение неоднородного уравнения –

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \frac{B_{k+1}(x)}{k+1},$$

где $B_m(x)$ – полиномы Бернулли.

6.3.9. $\boldsymbol{f(x+1) - x f(x) = 0}$, $\quad x > 0$.

Общее решение –

$$f(x) = \Gamma(x)\omega(x).$$

6.3.10. $\boldsymbol{f(x+1) - x f(x) = a^x e^{-a}}$, $\quad a > 0$, $x > 0$.

Частное решение – *неполная гамма-функция*

$$f(x) = \Gamma(x, a) = \int_a^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

(см. приложение).

6.3.11. $\boldsymbol{f(x+1) - x^x f(x) = 0}$, $\quad x > 0$.

Единственное решение на классе логарифмически выпуклых функций второго порядка есть

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1^1 2^2 \cdots n^n)(n+1)^{\frac{x(n+1)}{2}}(n+x)^{\frac{x(n+x)}{2}}}{x^x (x+1)^{x+1}\cdots(x+n)^{x+n}}.$$

Лупас А. и Л. [1980]

6.3.12. $\boldsymbol{f(x+1) - \Gamma(x) f(x) = 0}$, $\quad x > 0$.

Единственное решение на классе логарифмически выпуклых функций второго порядка есть

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\Gamma(1)\cdots\Gamma(n))\Gamma^{x/2}(n+1)\Gamma^{x/2}(n+x)}{\Gamma(x)\Gamma(x+1)\cdots\Gamma(x+n)}.$$

Лупас А. и Л. [1980]

6.3.13. $\boldsymbol{f(x+1) = \dfrac{f(x)}{f(x)+1}}$, $\quad x > 0,\ f : (0,\infty) \to (0,\infty)$.

Единственное выпуклое решение, удовлетворяющее $f(1) = 1$, есть

$$f(x) = 1/x.$$

Кучма [1964]

Общее решение равно $f(x) = (x + \omega(x))^{-1}$, где $\omega(x) > -x$ при всех $x > 0$.

6.3.14. $\boldsymbol{f(x+1) = \dfrac{f(x)}{1+\beta(x) f(x)}}$.

Решение на интервале $(0,\infty)$. Пусть $\beta : (0,+\infty) \to (0,1]$, $0 < \beta(y) < \beta(x) < \beta(0) = 1$ при $0 < x < y$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \beta(x) = a \geq 0$.

Единственное выпуклое решение непрерывно и

$$f(x) = \frac{1}{ax+\varphi(x)}, \text{ где } \varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\beta(m) - \beta(x+m)\right).$$

Байрактарович [1978]

Решение на $\mathbb{R}$. Пусть $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $0 \leq a \leq \beta(y) \leq \beta(x) \leq b \leq +\infty$ при $-\infty < x < y < +\infty$, $\varphi(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \beta(x) = a$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \beta(x) = b$.

Функции

$$f_1(x) = \frac{1}{ax+\varphi(x)}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{bx+\psi(x)},$$

где

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\beta(k) - \beta(x+k)), \qquad \psi(x) = \sum_{k=-1}^{-\infty} (\beta(x+k) - \beta(k)),$$

являются решениями уравнения.

Байрактарович [1981a]

6.4. $f(\alpha(x)) = F(f(x))$

6.4.1. Функция f – *четна*, если в области ее определения $f(-x) = f(x)$.

Четная функция представима в виде

$$f(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2}.$$

6.4.2. Функция f – *нечетна*, если в области ее определения $f(-x) = -f(x)$.

Нечетная функция представима в виде

$$f(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2}.$$

6.4.3. $f(a - x) = f(x), \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

Общее решение имеет вид

$$f(x) = \varphi\left(x - \frac{a}{2}\right),$$

где φ – произвольная четная функция.

6.4.4. $f(x^2) = f(x)$.

Общее решение –

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{при } x = 0, \\ \omega_1\left(\dfrac{\ln|\ln|x||}{\ln 2}\right) & \text{при } 0 < |x| < 1, \\ B & \text{при } |x| = 1, \\ \omega_2\left(\dfrac{\ln\ln|x|}{\ln 2}\right) & \text{при } 0 < |x|, \end{cases}$$

где ω_i – четные периодические функции периода единица.

6.4.5. $f(x^2) = (f(x))^2, \quad x > 1.$

Общее решение –

$$f(x) = \exp\left(\ln x \cdot \omega\left(\frac{\ln\ln x}{\ln 2}\right)\right).$$

6.4.6. $f(2x^2 - 1) = 2f(x)$.

Общее непрерывное решение –

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Arch}|x| \cdot \omega\left(\dfrac{\ln \operatorname{Arch}|x|}{\ln 2}\right) & \text{при } x < -1, \\ 0 & \text{при } -1 \le x \le 1, \\ \operatorname{Arch} x \cdot \omega\left(\dfrac{\ln \operatorname{Arch} x}{\ln 2}\right) & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Пелюх, Шарковский [M15]

6.4.7. $\boldsymbol{f(1/x) = f(x)}$, $\quad x > 0$.

Общее решение –

$$f(x) = \varphi(x, 1/x),$$

где φ – произвольная симметрическая функция. Беббидж [1815]

6.4.8. $\boldsymbol{f\left(\dfrac{x}{ax-1}\right) = f(x)}$.

Общее решение –

$$f(x) = \varphi\left(x, \frac{x}{ax-1}\right),$$

где φ – произвольная симметрическая функция. Беббидж [1815]

6.4.9. $\boldsymbol{f(\alpha(x)) = \alpha(f(x))}$,
где $\alpha(x) = \beta^{-1}(1 + \beta(x))$, β – биекция.

Общее решение –

$$f(x) = \beta^{-1}(\beta(x) + \omega(\beta(x))).$$

6.4.10. $\boldsymbol{f(ax) = f(x)}$, $0 < a \ne 1$.

Общее решение –

$$f(x) = \begin{cases} \omega_1\left(\dfrac{\ln|x|}{\ln a}\right) & \text{при } x < 0, \\ A & \text{при } x = 0, \\ \omega_2\left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right) & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

6.4.11. $\boldsymbol{f(ax) = -f(x)}$, $0 < a \ne 1$.

Общее решение –

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^{\left[\frac{\ln |x|}{\ln a}\right]}\omega_1\left(\frac{\ln |x|)}{\ln a}\right) & \text{при } x < 0, \\ A & \text{при } x = 0, \\ (-1)^{\left[\frac{\ln x}{\ln a}\right]}\omega_2\left(\frac{\ln x)}{\ln a}\right) & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

6.4.12. $\boldsymbol{f(x^a) = -f(x)}$, $\quad a > 0,\ \ 0 < x < 1.$

Подстановкой $f(x) = g(\ln x)$ уравнение сводится к конечно–разностному. Общее решение –

$$f(x) = \omega\left(\frac{\ln\ln(1/x)}{\ln a}\right).$$

6.4.13. $\boldsymbol{f(\alpha(x)) = f(x)}$.

Общее решение исходного уравнения определяется равенством

$$f(x) = \varphi(f_0(x), f_0(\alpha(x))),$$

где φ – симметрическая функция.

Беббидж [1815]

6.4.14. $\boldsymbol{f(\alpha(x)) = bf(x)}$,
$\alpha : [0, a) \to [0, a)$, $0 < a \leq +\infty$ $f : [0, a) \to \mathbb{R}$.

Если выполняются условия

α – непрерывна и строго возрастает на $[0, a)$,
$\alpha(0) = 0$ и $0 < \alpha(x) < x$ для $x \in (0, a)$,
$\dfrac{\alpha(x)}{x}$ – монотонная функция в $(0, a)$, $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\alpha(x)}{x} = b,\ \ 0 < b < 1,$

то существует предел отношений Кёнига

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n(x)}{b^n}, \qquad x \in [0, a),$$

являющийся решением уравнения.

Сенета [1969]

В приведенных условиях, без предположения о монотонности функции $\dfrac{\alpha(x)}{x}$ и выполнении неравенства $0 < b < 1$, решение существует, причем $\dfrac{f(x)}{x}$ монотонна в $(0, a)$ и

$$f(x) = C \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x)}{f^n(d)},$$

где C – произвольная константа, $d \in (0, a)$.

Кучма [1964]

6.4.15. $\boldsymbol{f(\alpha(x)) = \beta(f(x))}$,
α, β – убывающие функции на $[a, b]$, $\alpha([a, b]) \subset [a, b]$,
β – инволюция, т.е. $\beta(\beta(x)) = x$ на $[a, b]$.

Пусть $\alpha(c) = c$ для некоторого $c \in (a, b)$. Тогда общее монотонное решение есть

$$f(x) = \begin{cases} \rho(x) & \text{для } x \in [a, c], \\ \beta\left(\rho(\alpha(x))\right) & \text{для } x \in [c, b], \end{cases}$$

где $\rho : [a, b] \to [a, b]$ – произвольная монотонная функция, такая, что

$$\rho(c) = \beta(\rho(c)), \quad \rho(\alpha(\alpha(x))) = \rho(x) \quad \text{для } x \in [a, c].$$

Если при этом ρ – инъекция, то решение f строго монотонно.

Смайдор [1974]

6.4.16. $\boldsymbol{f(3x) = 3f(x) - 4f^3(x)}$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

Кроме констант $0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}$ единственным аналитическим решением является семейство функций $f(x) = \sin Ax$, где A – произвольная постоянная.

Эрхарт [1967]

6.4.17. $\boldsymbol{f(\alpha(x)) = f(x)}$,
$Q \subset \mathbb{R}$, $\alpha : Q \to Q$ – биекция, $f : Q \to B$.

Приводимое далее решение основывается на том, что функция f принимает постоянные значения на каждой орбите функции α, а совокупность всех орбит образует разбиение множества Q.

Пусть C – некоторое сечение множества орбит. Обозначим для каждого $x \in A$:

$[x] = \{\alpha^m(x) : \ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ – орбита, содержащая x;

$\{x\}_C = [x] \cap C]$ – представитель в C орбиты, содержащей x.

Общее решение уравнения имеет вид $f(x) = \psi(\{x\}_C)$.

6.4.18. $\boldsymbol{f(nx) = (f(x))^n}$, $\quad x > 0$.

Общее решение –

$$f(x) = \exp\left(x\omega\left(\frac{\ln x}{\ln n}\right)\right).$$

Синцов [1903]

6.4.19. $\boldsymbol{f(ax) = b(f(x))^p}$, $\quad a, b, p > 0,\ \ p \neq 1,\ \ x > 0.$

Общее неотрицательное решение имеет вид

$$f(x) = \exp\left(\frac{\ln b}{1-p} + x^{\frac{\ln p}{\ln a}}\,\omega\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)\right).$$

Пелюх, Шарковский [М15]

6.4.20. $\boldsymbol{f(nx) = T_n(f(x))}$;
T_n – полиномы Чебышева первого рода, $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}$,
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0) = 1$.

Подстановкой $f(x) = g(\ln x)$ уравнение сводится к конечно–разностному. Единственное решение, имеющее в окрестности нуля асимптотическое разложение $f(x) = 1 + sx^2/2 + o(x^2)$ при $x \to 0$, где $s \in \mathbb{R}$, есть

$$f(x) = \cos x\sqrt{-s} \ \text{ при } s \leq 0 \ \text{ и } f(x) = \operatorname{ch} x\sqrt{s} \text{ при } s > 0.$$

Дьяк [1982]

6.5. $\boldsymbol{F(x, f(x), f(\varphi(x))) = 0}$

6.5.1. $\boldsymbol{f\left(\frac{1}{x}\right) = -xf(x)}$, $\quad x \neq 0.$

Общее решение –

$$f(x) = \frac{x-1}{x}\varphi\left(x, \frac{1}{x}\right).$$

Беббидж [1815]

6.5.2. $\boldsymbol{f(x^2) = \frac{1}{1+x}f(x)}$.

Частное решение – $f(x) = 1/(1-x)$.

6.5.3. $\boldsymbol{f(\alpha(x)) = f(x)}$, $\quad \alpha^2(x) = x.$

Общее решение – $f(x) = \rho(x) + \rho(\alpha(x))$.

6.5.4. $\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{x}f\left(\frac{1}{x}\right)}$, $\quad x > 1.$

Единственное решение –

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}.$$

Уиттекер, Ватсон

6.5.5. $\boldsymbol{f(x) + f(x^a) = x}$, $\quad a > 1,\ 0 < x < 1;\ f : (0, 1) \to \mathbb{R}.$

Два частных решения:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x - x^a + x^{a^2} - x^{a^3} + \cdots, \\ f_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(1 + a^n)} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^n, \qquad f_i(1 - 0) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Разность $h(x) = f_1(x) - f_2(x)$ удовлетворяет однородному уравнению $h(x) + h(x^a) = 0$ (см. п. 6.4.12), т.е. общее решение рассматриваемого уравнения может быть записано в виде

$$f(x) = f_i(x) + \omega\left(\frac{\ln\ln(1/x)}{\ln a}\right).$$

Харди [1949]

6.5.6. $\boldsymbol{f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1-2x}{1-x^2} \cdot f(x)}$, $\quad x > 1.$

Общее решение –

$$f(x) = (1 + x)\varphi\left(\frac{x^2}{x-1}\right).$$

Беббидж [1815]

6.5.7. $\boldsymbol{f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right) = (1 + z^2) f(z)}$, $\quad |z| < 1.$

Частное решение –

$$f(z) = \frac{1}{2z} \ln \frac{1+z}{1-z} = 1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} + \frac{z^6}{7} + \cdots.$$

Полиа, Сеге [1925]

6.5.8. $\boldsymbol{f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = (1 + x) f(x)}$, $\quad x \geq 0.$

Частное решение –

$$f(z) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 x^6 + \cdots.$$

Гаусс [1809]

6.5.9. $\boldsymbol{f(x) - a f(bx) = a \cos(b\pi x)}$, $\quad 0 < a < 1,\ ab > 1.$

Частное решение –

$$f(x) = W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

– *функция Вейерштрасса* (не дифференцируемая ни в одной точке).

Харди [1916]

6.5.10. $\boldsymbol{f(\alpha(x)) + f(x) = \beta(x)}$, $\quad \alpha^2(x) \equiv x,\ \beta(\alpha(x)) \equiv \beta(x)$.

Общее решение –

$$f(x) = \varphi(x) - \varphi(\alpha(x)) + \frac{\beta(x)}{2}.$$

6.5.11. $\boldsymbol{f(\alpha(x)) - f(x) = \beta(x)}$, $\quad \alpha^2(x) \equiv x,\ \beta(\alpha(x)) \equiv -\beta(x)$.

Общее решение –

$$f(x) = \varphi(x) + \varphi(\alpha(x)) - \frac{\beta(x)}{2}.$$

6.5.12. $\boldsymbol{f(x) - f(\sin x) = \beta(x)}$.

Непрерывное решение существует тогда и только тогда, когда функция β непрерывна, $\beta(0) = 0$ и сходится ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \beta(\sin^m x).$$

При этом

$$f(x) = f(0) + \sum_{m=0}^{\infty} \beta(\sin^m x).$$

6.5.13. $\boldsymbol{f(1-x) - f(x) = \pi \operatorname{ctg} \pi x}$, $\quad x > 0$.

Частное решение – *пси-функция*

$$f(x) = \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

6.5.14. $\boldsymbol{f(2x) = b \cos x \cdot f(x)}$, $\quad b, x > 0$.

Общее решение –

$$f(x) = x^{\frac{\ln b}{\ln 2} - 1} \sin x \cdot \omega\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right).$$

Пелюх, Шарковский [M15]

6.5.15. $\boldsymbol{f(z) = (1 - qz) f(qz)}$, $\quad 0 < |q| < 1$.

Частное решение –

$$f(z) = \prod_{m=1}^{\infty}(1 - q^m z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{m(m+1)/2}}{(1-q)(q^2-1)\cdots(q^n-1)} z^m,$$

$$\frac{1}{f(z)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(qz)^m}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}.$$

Полиа, Сеге [1925]

Общее решение –

$$f(z) = \frac{1}{2z} \ln \frac{1+z}{1-z} \cdot \omega \left(\frac{\ln \ln \dfrac{1+z}{1-z}}{\ln C} \right).$$

6.5.16. $\boldsymbol{f(z) = f(qz) - 1 + \prod_{m=1}^{\infty}(1 - q^m z)}$.

Частное решение –

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1-q^m}(1-z)(1-qz)\cdots(1-q^{m-1}z) =$$
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1-q^m} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{m(m+1)/2} z^m}{(q-1)(q^2-1)\cdots(q^{m-1}-1)},$$
$$f(q^{-n}) = -n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Полиа, Сеге [1925]

6.5.17. $\boldsymbol{f(ax) = be^{qt} f(x)}$, $\quad a \neq 1,\ b, q, x > 0)$.

Общее решение –

$$f(x) = x^{\exp\left(\ln x \frac{\ln b}{\ln a} + \frac{q}{a-1} x\right)} \cdot \omega\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right).$$

Пелюх, Шарковский [M15]

6.5.18. $\boldsymbol{f(ax) = bf(x) + \sum_{i=0}^{n} d_i x^i}$, $\quad a \neq 1,\ a, b, x > 0.$

Частные решения:
если $b \neq a^i$, $0 \le i \le n$, то

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{d_i}{a^i - b} x^i,$$

если $b = a^m$, $0 \le m \le n$, то

$$f(x) = \sum_{0=i\neq m}^{n} \frac{d_i}{a^i - b} x^i + \frac{d_m}{b \ln a} x^m \ln x.$$

Общее решение –

$$f(x) = g(x) + \exp\left(\ln x \frac{\ln b}{\ln a}\right) \omega\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right).$$

Пелюх, Шарковский [M15]

6.5.19. $\boldsymbol{f(\alpha(x)) + f(x) = \gamma(x)}$, $\quad a \le x \le b,\ \ \alpha(a) = a,\ \ \alpha(b) = b,$ $\alpha(x) > x$ и α – непрерывна и строго возрастает на (a, b), $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R},\ \ \lim\limits_{x\uparrow b} \gamma(x) = \gamma(b)$.

Решение представимо рядом

$$f(x) = \frac{1}{2}\gamma(b) + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\gamma(\alpha^i(x)) - \gamma(b)\right).$$

В случае расходимости ряда возможно использование некоторого регулярного метода суммирования.

Маленица [1980]

6.5.20. $\boldsymbol{f(\alpha(x)) - f(x) = \gamma(x)}$, $\quad \alpha : I \to I$ и $\gamma : I \to \mathbb{R}$ – функции, заданные на вещественном интервале I, $\ x \in I$.

Единственным решением, удовлетворяющим $\lim_{n\to\infty} f(\alpha^n(x)) = 0$, является

$$f(x) = -\sum_{i=0}^{\infty} \gamma(\alpha^i(x)).$$

Сходимость данного ряда необходима и достаточна для существования решения.

Кучма [1987]

6.5.21. $\boldsymbol{f(\alpha(x)) - q f(x) = \gamma(x)}$, $\quad q \neq 0,\ x \in I = (a, b],\ a < \alpha(x) < x$ на I, функция α – непрерывна и строго возрастает на I, функция γ имеет ограниченную вариацию на I.

Если $|q| > 1$, то существует единственное решение

$$f(x) = -\sum_{i=0}^{\infty} q^{-i-1} \gamma[\alpha^i(x)].$$

Если $0 < |q| < 1$, то для любого $x_0 \in I$ и любой функции f_0, имеющей ограниченную вариацию на $[\alpha(x_0), x_0]$, удовлетворяющих условию

$$f_0(\alpha(x_0)) = qf_0(x_0) + \gamma(x_0),$$

существует одна функция f ограниченной вариации на I, удовлетворяющая уравнению, и ее ограничение на $[\alpha(x_0), x_0]$ совпадает с f_0.

Если $q = 1$, $\lim\limits_{x \to a+0} \gamma(x) = 0$ и существует точка $x_0 \in I$ такая, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma(\alpha^n(x_0))$ сходится, то уравнение имеет однопараметрическое семейство решений

$$f(x) = C - \sum_{n=0}^{\infty} \gamma[\alpha^n(x)],$$

для которых существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

Матковский, Ждун [1974]

6.5.22. $\boldsymbol{f(\alpha(x)) + \beta(x) f(x) = \gamma(x)}$, $\quad x \in I = (a, b]$.

Если $\gamma(x) \geq 0$, $\beta(x) > 0$ на I, $\varphi(I) \subset I$ и существует

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\gamma(\alpha^i(x))}{\prod\limits_{j=1}^{i} \beta(\alpha^i(x))} \text{ для каждого } x \in I,$$

то существует по крайней мере одно решение уравнения, имеющее постоянный знак в I:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\gamma(\alpha^i(x))}{\prod\limits_{j=0}^{i} \beta(\alpha^i(x))}.$$

Бурек [1968]

6.5.23. $\boldsymbol{f[\alpha(x)] = \beta(x) f(x) + \gamma(x)}$.

Пусть α непрерывна и строго возрастает в промежутке $I = (a, b]$, $a < \alpha(x) < x$ при $x \in I$ (случай $a = -\infty$ не исключается); β, γ – функции ограниченной вариации на I, монотонные в окрестности точки a, $\beta(a + 0) = 1$, $\gamma(a + 0) = 0$.

Пусть, кроме того,

$$G_0(x) = 1, \qquad G_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} \beta(\alpha^i(x)),$$

$$G(x) = \lim_{n \to \infty} G_n(x) = \prod_{i=0}^{\infty} \beta(\alpha^i(x)) \neq 0, \quad x \in I,$$

и ряд

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma(\alpha^n(x))}{G_{n+1}(x)}$$

сходится на I. Тогда общее решение ограниченной вариации равно

$$f(x) = \frac{A}{G(x)} - H(x).$$

Ждун [1985a]

Пусть $x \in I = [0, a]$, $a > 0$; функция $\alpha : I \to \mathbb{R}$ непрерывна и строго возрастает в I, $0 < \alpha(x) < x$ в $(0, a)$; $\alpha(x) = x - x^{k-1}u(x)$, $k > 0$, где $u : I \to \mathbb{R}$ – непрерывная на I функция, $u_0 = u(0) > 0$; функции $\beta, \gamma : I \to \mathbb{R}$ непрерывны на I, $\beta(x) \neq 0$ на I. Если существуют числа r, s, p, ρ, $\delta > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} \beta(x) &= 1 + rx^{k+p}u(x) + O(x^{k+p+\rho}), && x \to +0, \\ \gamma(x) &= sx^{k+p}u(x) + O(x^{k+p+\delta}), && x \to +0, \end{aligned}$$

то уравнение для $t \in \mathbb{R}$ имеет однопараметрическое семейство решений:

$$f_t(x) = t\left(\prod_{i=0}^{\infty} \beta(\alpha^i(x))\right)^{-1} - \sum_{i=0}^{\infty} \gamma(\alpha^i(x)) \left(\prod_{i=0}^{i} \beta(\alpha^i(x))\right)^{-1}, \qquad x \in I.$$

Хочевский [1976]

6.5.24. $f(x) = \gamma(x) + \beta(x) f(\alpha(x))$.

Пусть $x \in [a, b]$, $\alpha : [a, b] \to [a, b]$ строго возрастает, $\alpha(a) = a$, функции β, γ имеют ограниченную вариацию на $[a, b]$, $||\beta|| = \sup\limits_{x \in [a,b]} |\beta(x)| + \operatorname*{Var}\limits_{[a,b]} \beta < 1$.

Единственное решение f ограниченной вариации на $[a, b]$ представляется рядом

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \beta(\alpha^i(x))\gamma(\alpha^k(x)) + \gamma(x),$$

сходящимся по норме $||\cdot||$.

Дьяк [1986]

6.5.25. $f(x^2) = (1 + x) f(x) - x$.

Частные решения: $f(x) = x$, $f(x) = 1$.

6.5.26. $f(x^2) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 (f(x))^2$.

Частное решение – $f(x) = (1 - x)^2$.

Полиа, Сеге [1925]

6.6. $F(f(x), f(\alpha(x)), \dots, f(\gamma(x))) = 0$

6.6.1. $(f(\sin x))^2 + (f(\cos x))^2 = 1, \quad f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$.

Общее решение есть

$$f(x) = \varphi(x)\rho(x).$$

Здесь $\varphi : [-1, 1] \to [0, 1]$ и

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x) & \text{при } 0 \le x < 1/\sqrt{2}, \\ 1/\sqrt{2} & \text{при } x = 1/\sqrt{2}, \\ \sqrt{1 - \Big(\varphi_0(\sqrt{1-x^2})\Big)^2} & \text{при } 1/\sqrt{2} < x \le 1, \\ \varphi(-x) & \text{при } -1 \le x < 0, \end{cases}$$

а

$$\varphi_0 : [0, 1/\sqrt{2}) \to [0, 1], \qquad \rho : [-1, 1] \to \{-1, 1\}$$

– произвольные функции.

Общее непрерывное решение определяется аналогично при дополнительных предположениях, что непрерывная функция φ_0 удовлетворяет равенству

$$\varphi_0(1/\sqrt{2} - 0) = 1/\sqrt{2},$$

а функция ρ постоянна на каждом из открытых интервалов, составляющих множество $\{t : \ t \in [-1, 1], \ \varphi(t) > 0\}$.

Каждое полиномиальное решение или является одной из констант $f_1(x) \equiv 1/\sqrt{2}$, $f_2(x) \equiv -1/\sqrt{2}$, или содержит только нечетные степени аргумента

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k 2^{2k} \frac{2m+1}{2k+1} \binom{n+k}{2k} x^{2k+1}.$$

Браун, Хевитт [1978]

6.6.2. $(f(\operatorname{ch} x))^2 - (f(\operatorname{sh} x))^2 = 1$.

Общее решение –

$$f(x) = \varphi(x)\,\rho(x).$$

Здесь

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x) & \text{при } 0 \le x < 1, \\ \sqrt{1 + \Big(\varphi_0(\sqrt{x^2-1})\Big)^2} & \text{при } \sqrt{n} \le x < \sqrt{n+1}, n \ge 1, \\ \varphi(-x) & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

Функции $\varphi_0 : [0,1) \to [0,\infty)$ и $\rho : \mathbb{R} \to \{-1,1\}$ произвольны.

Полиномиальные решения $f(x) = x$ и $f(x) = -x$.

Браун, Хевитт [1978]

6.6.3. $\boldsymbol{f(x) + f(x+1) = 2f(2x) - \ln 2}, \quad x > 0.$

Частное решение –

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(x/2)}{\Gamma(x/2)}.$$

6.6.4. $\boldsymbol{f(x) = f(ax) + f(bx+a)}, \quad a, b > 0, \ a + b = 1.$

Абсолютно непрерывное решение уравнения линейно:

$$f(x) = C \cdot (x - a).$$

Существуют непрерывные нелинейные решения. Например, в случае $a = b = \dfrac{1}{2}$ таким решением является

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sin(2^n \pi x).$$

Штейнмец [1982]

6.6.5. $\boldsymbol{f\left(\frac{z}{2}\right) f\left(\frac{1-z}{2}\right) = f(z)}, \quad z \in \mathbb{C}.$

Общее решение – $f(z) = 1$.

Харуки [1985]

6.6.6. $\boldsymbol{f(x + \alpha(x)) = f(x) + f(\alpha(x))},$
$x \geq 0$, $\alpha : [0,\infty] \to \mathbb{R}$ – непрерывная строго возрастающая функция, $\alpha(0) = 0$.

Общее дифференцируемое справа в нуле решение –

$$f(x) = C \cdot x.$$

Ждун [1971, 1972]

6.6.7. $\boldsymbol{f(x) = f(x+1) + f(x(x+1))}, \quad x > 0.$

Если $f(x)$ удовлетворяет одному из следующих условий:

1) функция $xf(x)$ монотонна на множестве $S = (a, \infty)$, $a > 0$;
2) функция $x^2 f(x)$ выпукла (вогнута) на S;
3) функция $f(x)$ сохраняет знак и $1/f(x)$ выпукла (вогнута) на S;
4) функция $f(1/x)$ выпукла (вогнута) на $(0, a)$,

то решение имеет вид

$$f(x) = f(1)x^{-1}.$$

Ярчик [1991]

6.6.8. $\boldsymbol{f(x) = af(ax) + (1-a)f(1-(1-a)x)}, \quad a > 0.$

Если $f(x)$ интегрируема по Риману, то $f(x) \equiv A$.

Коминек [1986]

6.6.9. $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} f\left(\frac{x+i}{k}\right)}, \quad k = 2, 3, \ldots, \;\; x \in (0, 1).$

Любое непрерывное решение системы уравнений имеет вид

$$f(x) = a \operatorname{ctg} \pi x + b.$$

Егер [1986]

6.6.10. $\boldsymbol{f(x) = x \cdot \exp\Big(\sum_{m=1}^{\infty} f(x^m)/m\Big)}.$

Единственное аналитическое в нуле решение –

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m x^m.$$

Производящая функция для коэффициентов –

$$f(x) = x\prod_{p=1}^{\infty}(1 - x^p)^{-T_p}.$$

Рекуррентная формула для коэффициентов –

$$T_{p+1} = p^{-1}\sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{d/k} d \cdot T_d\Big)T_{p-k+1}.$$

Кэлли [1889], Пойа [1937]

6.7. Уравнения с рекурсиями

6.7.1. $\boldsymbol{f(f(x)) = 0}.$

Общее непрерывное решение –

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{при } x \le a, \\ 0 & \text{при } a \le x \le b, \\ \varphi_2(x) & \text{при } b \le x, \end{cases}$$

где $0 \in [a, b]$, а φ_1 и φ_2 – произвольные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_1(a) = 0, \quad a \le \varphi_1(x) \le b \quad \text{при } x \le a,$$
$$\varphi_2(b) = 0, \quad a \le \varphi_2(x) \le b \quad \text{при } b \le x.$$

Пелюх, Шарковский [1974]

Общее решение –

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in S, \\ \varphi(x) & \text{при } x \notin S, \end{cases}$$

где S – произвольное множество вещественных чисел, содержащее нуль, $0 \in A$, а φ – произвольная функция $\mathbb{R} \setminus S \to S$.

6.7.2. $\boldsymbol{f(f(x)) = f(x)}$.

Функция f является решением тогда и только тогда, когда $f(\mathbb{R}) = S$ и $f(x) = x$ для всех $x \in S$. Множество S произвольно. Значения функции f на множестве $\mathbb{R} \setminus S$ произвольны.

Непрерывная функция f является решением тогда и только тогда, когда $f(x) = x$ для всех x, удовлетворяющих $\inf_{\mathbb{R}} f \le x \le \sup_{\mathbb{R}} f$. Значения $f(x)$ при других значениях x произвольны.

6.7.3. *Уравнение Фейгенбаума*:
$\boldsymbol{f(f(ax)) = -af(x)}, \quad 0 < a = -f(1) < 1.$

Уравнение не имеет мероморфного решения f, удовлетворяющего условию $f(0) = 1$.

Кристенсен, Фишер [1994].

6.7.4. $\boldsymbol{f(f(x)) = \dfrac{af(x)}{f(x) - a}}$.

Частное решение –

$$f(x) = \frac{ax}{x - a}.$$

6.7.5. $\boldsymbol{f(x^2 - 2f(x)) = (f(x))^2}$.

Частные решения:

$$f(x) \equiv 0, \qquad f(x) \equiv 1, \qquad f(x) = x^2, \qquad f(x) = x^2/4.$$

Ратти, Лин [1990]
Пелюх, Шарковский [M15]

6.7.6. $\boldsymbol{f(x) + f^{-1}(x) = 2x}, \quad f : [a, b] \to [a, b].$

Если f – гомеоморфизм, то данное уравнение эквивалентно уравнению 6.7.7 (подстановка $x = f(y)$).

Ратти, Лин [1990]

6.7.7. $\boldsymbol{f(f(x)) - 2f(x) + x = 0}$.

Если $f : [a, b] \to [a, b]$ – биекция, то $f(x) = x$.

Ратти, Лин [1990]

6.7.8. $\boldsymbol{T(x, f^k(x)) = f^{k+1}(x)}$;
k – натуральное число, T – строгая t-норма, $x \in [0,1]$, $f : [0,1] \to [0,1]$ – непрерывная биекция.

Общее решение –

$$f(x) = t^{-1}\left(\frac{1 + c_k}{c_k} \cdot t(x)\right),$$

где c_k – единственное положительное решение уравнения

$$c_k = \left(\frac{1 + c_k}{c_k}\right)^k.$$

Алсина [1989]

6.7.9. $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} c_k f^k(x) = 0}$, $c_k \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} c_k = 0$,
$f : [0,1] \to [0,1]$ – биекция.

Непрерывные решения: либо $f(x) = x$, либо $f^2(x) = x$.

Мукерья, Ратти [1983]

Глава 7

Несколько независимых переменных

7.1. $F(x, y, f(x), f(\alpha(x, y))) = 0$

7.1.1. $\beta(x)f(y) = \beta(y)f(x)$.

Общее решение – $f(x) = A\beta(x)$.

7.1.2. $(x - y)f(x)f(y) = xf(x) - yf(y)$.

Общее решение –

$$f(x) \equiv 0, \qquad f(x) \equiv 1, \qquad f(x) = \frac{A}{x + A}.$$

7.1.3. $f(x + y) = f(x) + ax + by$.

Общее решение – $f(x) = bx + ay + C$.

Ацель [1956]

7.1.4. $f(x + y) = (f(x))^y$.

Уравнение не имеет решений, отличных от $f(x) \equiv 1$ и $f(x) \equiv 1$.

Ацель [1956]

7.1.5. $f(x + y) = f(x)e^y$.

Общее непрерывное, строго монотонное решение – $f(x) = A \cdot e^y$.

Ацель [1956]

7.1.6. $f(xy) = (f(x))^y$.

Общее решение – $f(x) = e^{\sigma x}$.

Ацель [1956]

7.1.7. $f(x + y) = G(f(x), y)$.

Общее решение существует тогда и только тогда, когда G хотя бы при одном значении a удовлетворяет условию

$$G(a, x + y) = G(G(a, x), y).$$

Общее решение имеет вид $f(x) = G(a, x - C)$.

Если, кроме того, G строго монотонна по обеим переменным, то общее решение непрерывно и строго монотонно.

Ацель [1956]

7.2. $F(f(x), f(y), f(\alpha(x,y))) = 0$

7.2.1. $\boldsymbol{f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+a^2 f(x)f(y)}}, \quad a \neq 0.$

Общее непрерывное и строго монотонное решение –

$$f(x) = \frac{1}{a}\,\mathrm{th}\,qx,$$

где q – произвольная постоянная.

Бейкер [1954]

7.2.2. $\boldsymbol{f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}}.$

Общее непрерывное и строго монотонное решение –

$$f(x) = \mathrm{tg}\,qx,$$

где q – произвольная постоянная.

Каччополи [1928], Сас [1952, 1953]

7.2.3. $\boldsymbol{f(\alpha(x,y)) = F(f(x), f(y))}.$

Непрерывное, строго монотонное решение существует только тогда, когда непрерывные, строго монотонные функции α, F бисимметричны.

В частности, если одна из функций α или F ассоциативна, то решение существует тогда и только тогда, когда и другая ассоциативна.

Ацель [1956]

7.2.4. $\boldsymbol{f\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right) = f(x) + f(y)}, \quad |x|, |y| \leq 1.$

Общее непрерывное и строго монотонное решение –

$$f(x) = A \cdot \arccos x.$$

Ацель [1956]

7.2.5. $\boldsymbol{f\left(xy + \sqrt{(x^2-1)(x^2-1)}\right) = f(x) + f(y)}, \quad |x|, |y| \geq 1.$

Общее непрерывное и строго монотонное решение –

$$f(x) = A \cdot \mathrm{Arch}\, x.$$

Ацель [1956]

7.2.6. $\boldsymbol{f((a+x)(b+y)c) = (p+f(x))(q+f(y))r}.$

Уравнение имеет единственное нетривиальное решение $f(x) = A \cdot x$ тогда и только тогда, когда

$$a, b, r \neq 0, \qquad A = \frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{c}{r} \neq 0.$$

Лосонжи [1970]

7.2.7. $f(ax + by + c) = af(x) + bf(y) + c$.

Общее непрерывное решение –

$$f(x) = \begin{cases} Ax + B & \text{при} \quad a + b = 1, \quad c = 0, \\ x + B & \text{при} \quad a + b = 1, \quad c \neq 0, \\ Ax + \dfrac{Ac - c}{a + b - 1} & \text{при} \quad a + b \neq 1. \end{cases}$$

Ацель [1956]

7.2.8. $f(ax + by + c) = G(f(x), f(y))$.

Непрерывное и строго монотонное решение существует тогда и только тогда, когда G – непрерывная, строго монотонная функция, удовлетворяющая уравнению бисимметрии

$$G(G(x, y), G(u, v)) = G(G(x, u), G(y, v)).$$

Если f – одно из частных решений, то все другие решения имеют один из следующих видов:

$$\begin{array}{lll} f(Ax + B), & \text{если} & a + b = 1, \quad c = 0; \\ f(x + B), & \text{если} & a + b = 1, \quad c \neq 0; \\ f\left(Ax + \dfrac{Ac - c}{a + b - 1}\right), & \text{если} & a + b \neq 1. \end{array}$$

Ацель [1956]

7.2.9. $f(x + y) = f(x)^{\ln f(y)}, \quad f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$.

Общее непрерывное и строго монотонное решение –

$$f(x) = e^{q^x},$$

где произвольная постоянная $q > 0$.

Ацель [1956]

7.2.10. $f(x + y) = G(f(x), f(y))$.

Непрерывное, строго монотонное решение существует тогда и только тогда, когда G – непрерывная, строго возрастающая по каждому аргументу функция, удовлетворяющая уравнению ассоциативности

$$G(G(x,y),u) = G(x, G(y,u)), \qquad x, y, u \in \mathbb{R}.$$

Условия, наложенные на G, эквивалентны существованию непрерывной строго возрастающей функции $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такой, что

$$G(x,y) = g_{-1}(g(x) + g(y)).$$

Общее непрерывное строго монотонное решение имеет вид

$$f(x) = \varphi(cx),$$

где φ – любое частное непрерывное строго монотонное решение, а c – произвольная постоянная.

Качополли [1928], Ацель [1949,1956]

7.2.11. *Первое уравнение Коши*:
$\boldsymbol{f(x+y) = f(x) + f(y)}$.

Функция, удовлетворяющая этому уравнению, называется *аддитивной*.

Общее непрерывное решение – $f(x) = A \cdot x$.

Лежандр [1791], Гаусс [1809], Коши [1821]

То же на каждом классе функций:

– непрерывных в одной точке,
– монотонных в одной точке,
– ограниченных на некотором сколь угодно малом интервале,

Дарбу [1880]

– измеримых на множестве положительной меры,

Серпинский [1920]

– мажорируемых измеримой функцией,

Серпинский [1924], Островский [1929], Кестельман [1947]

По поводу разрывных аддитивных функций см. п. 5.2.

7.2.12. *Второе уравнение Коши*:
$\boldsymbol{f(x+y) = f(x)f(y)}$.

Функция, удовлетворяющая этому уравнению, называется *экспоненциальной*. Общее решение, отличное от тривиального $f(x) \equiv 0$, имеет вид

$$f(x) = \exp A(x),$$

где A – произвольная аддитивная функция (см. п. 7.2.11).

Общее непрерывное решение – $f(x) = \exp(C \cdot x)$.

Коши [1821]

7.2.13. $\boldsymbol{f(x+y)=af(x)f(y)}, \quad a\neq 0.$

Подстановкой $f(x)=g(x)/a$ уравнение приводится ко второму уравнению Коши (см. п. 7.2.12).

Все непрерывные решения, отличные от тривиального $f(x)\equiv 0$, имеют вид

$$f(x)=\frac{1}{a}e^{\sigma x}.$$

7.2.14. $\boldsymbol{f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)}.$

Подстановка $f(x)=g(x)-1$ приводит ко второму уравнению Коши (см. п 7.2.12). Все решения, отличные от константы $f(x)\equiv -1$, имеют вид

$$f(x)=e^{A(x)}-1.$$

где A – произвольная аддитивная функция (см. п. 7.2.12).

7.2.15. $\boldsymbol{f(x-y)=f(x)f(y)}.$

Единственные непрерывные решения – $f(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 1$.

7.2.16. *Уравнение Йенсена*:

$$\boldsymbol{f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}}.$$

Общее решение – $f(x)=A(x)+B$, где A – произвольная аддитивная функция (см. п. 7.2.11).

Йенсен [1906]

7.2.17. $\boldsymbol{f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{f(x)f(y)}}.$

Общее непрерывное и строго монотонное решение –

$$f(x)=A\cdot q^{x},$$

где A, $q\geq 0$ произвольны.

Ацель [1956]

7.2.18. *Обобщенное уравнение Йенсена*:

$$\boldsymbol{f\left(\frac{x+y}{2}\right)=G(f(x),f(y))}.$$

Непрерывное строго монотонное решение существует тогда и только тогда, когда G – непрерывная, строго возрастающая по каждому аргументу функция, удовлетворяющая одному из следующих двух эквивалентных условий:

1) уравнению косой автодистрибутивности

$$G(G(x,y),u) = G(G(x,u), G(u,y));$$

2) уравнениям рефлексивности $G(x,x)=x$, симметричности $G(x,y)=G(y,x)$ и бисимметричности

$$G(G(x,y), G(u,v)) = G(G(x,u), G(y,v)).$$

Кнастер [1949]

Другим необходимым и достаточным условием существования непрерывного строго возрастающего решения является существование непрерывной строго монотонной функции g такой, что

$$G(x,y) = g^{-1}\Bigl(\frac{g(x)+g(y)}{2}\Bigr).$$

Рыль–Нардзевский [1949]

Общее непрерывное строго монотонное решение имеет вид

$$f(x) = \varphi(Ax+B),$$

где φ – любое непрерывное строго монотонное решение. Ацель [1956]

7.2.19. *Третье уравнение Коши:*
$\boldsymbol{f(xy) = f(x) + f(y)}, \quad x, y > 0.$

Функция, удовлетворяющая этому уравнению, называется *логарифмической*. Общее решение –

$$f(x) = A(\ln x),$$

где A – произвольная аддитивная функция (см. п. 7.2.11).

Общее непрерывное решение – $f(x) = C \cdot \ln x$.

Коши [1821]

7.2.20. *Четвертое уравнение Коши:*
$\boldsymbol{f(xy) = f(x)f(y)}, \quad x, y > 0.$

Функция, удовлетворяющая этому уравнению, называется *мультипликативной*. Общее решение –

$$f(x) = \exp(A(\ln x)),$$

где A – произвольная аддитивная функция (см. п. 7.2.11).

Общее непрерывное решение – $f(x) = x^C$.

Коши [1821]

7.2.21. $\boldsymbol{f(xy) = af(x)f(y) + f(x) + f(y)}, \quad x, y > 0, \ a \neq 0.$

Общие непрерывные решения –

$$f(x) \equiv 0, \qquad f(x) = a^{-1}(x^p - 1).$$

Константа p произвольна.

7.2.22. $\boldsymbol{f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)}, \quad xy < 1.$

Каждое решение f, удовлетворяющее одному из условий:

1) дифференцируема в некоторой точке,
2) непрерывна в некоторой точке,
3) ограничена на интервале положительной длины,
4) монотонна на интервале положительной длины,
5) измерима на интервале положительной длины,

имеет конечную производную в точке $x = 0$ и

$$f(x) = f'(0) \operatorname{arctg} x.$$

Крстичи, Мутян, Ворническу [1983a], [1983б]

7.2.23. $\boldsymbol{f(x) + f(y) = f(\beta(x, y))},$
где $\beta(x,y) = \dfrac{a_1xy + a_2(x+y) + a_3}{b_1xy + b_2(x+y) + b_3}$, $|a_1|+|a_2| > 0$, $|b_1|+|b_2| > 0$.

Решение – $f(x) \equiv 0$. Фенье [1987]

7.2.24. $\boldsymbol{f(x) + f(y) = f(\beta(x, y))},$
где $\beta(x,y) = \dfrac{xy(bc-a)+(x+y)ab(1-c)+ab(ac-b)}{xy(c-1)+(x+y)(b+ac)+(a^2c-b^2)}$, $c(b-a) \neq 0$.

Решение –

$$f(x) = A \cdot \log\left|\frac{c(x-a)}{(x-b)}\right|.$$

Фенье [1987]

7.2.25. $\boldsymbol{f(x) + f(y) = f(\beta(x, y))},$
где $\beta(x,y) = \dfrac{(ac+1)xy - a^2c(x+y) + a^2(ac-1)}{cxy - (ac-1)(x+y) + a(ac-2)}$.

Решение –

$$f(x) = A \cdot \left(\frac{1}{a-x} - c\right).$$

Фенье [1987]

7.3. $F(f(x), f(y), f(\alpha(x,y)), f(\beta(x,y))) = 0$

7.3.1. $f(x+y) + f(x-y) = af(x)$.

Общие решения – $f(x) \equiv 0$ при $a \neq 2$ и $f(x) = A(x) + B$ при $a = 2$. Здесь A – произвольная аддитивная функция (см. п. 7.2.11).

7.3.2. $f(x+y) + f(x-y) = af(y)$.

Общие решения – $f(x) \equiv 0$ при $a \neq 2$ и $f(x) \equiv A$ при $a = 2$.

7.3.3. $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$.

Любое непрерывное решение (оно четно) имеет вид

$$f(x) = Ax^2.$$

7.3.4. $f(x+y-xy) + f(xy) = f(x) + f(y)$.

Решение имеет вид

$$f(x) = Ax + B,$$

если оно удовлетворяет одному из следующих условий:

1) непрерывно в точке $x = 0$,
2) непрерывно в точке $x = 1$,
3) для некоторого a непрерывно в точках $x = a$ и $x = (a+1)/(a-1)$,
4) интегрируемо в $(0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Святок [1968]

Общее решение –

$$f(x) = \varphi(x-1) + f(1),$$

где φ – произвольная аддитивная функция (см. п. 7.2.11).

Дарочи [1971]

7.3.5. $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$.

Подстановкой $g(x) = f(x)/2$ приводится к уравнению Даламбера (п. 7.3.6).

7.3.6. *Уравнение Даламбера*: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

Частные решения – константы 0 и 1. Все другие непрерывные решения имеют вид

$$f(x) = \cos Ax \quad \text{или} \quad f(x) = \operatorname{ch} Ax.$$

Даламбер [1778], Пуассон [1811], Коши [1821]

7.3.7. $(x-y)f(x)f(y) = xf(x) - yf(y)$.

Общее решение –

$$f(x) \equiv 0, \quad f(x) \equiv 1, \quad f(x) = \frac{A}{x+A}.$$

7.3.8. $\boldsymbol{f(x+y)+f(x-y)=2ax(1-\cos by)+2f(x)\cos by}$.

Общее непрерывное решение –

$$f(x) = A\sin bx + ax.$$

Иогансен [1966]

7.3.9. $\boldsymbol{f(x+y)+f(x-y)=2f(y)+2f(x)\cos by}$.

Общее непрерывное решение –

$$f(x) = A(2-\cos bx).$$

Иогансен [1966]

7.3.10. $\boldsymbol{f(x+y)+f(x-y)=2f(y)+2f(x)\,\mathrm{ch}\, by}$.

Общее непрерывное решение –

$$f(x) = A(2-\mathrm{ch}\, bx).$$

Иогансен [1966]

7.3.11. $\boldsymbol{f(x+y)+f(x-y)=2f(x)-2a(1-\cos by)\sin bx}$.

Общее непрерывное решение –

$$f(x) = Ax + a\sin bx.$$

Иогансен [1966]

7.3.12. $\boldsymbol{f(x+y+2a)+f(x-y+2a)=2f(x)f(y)}, \quad a \neq 0$.

Измеримые решения – $f(x) \equiv 0$ и $f(x) = g(x-2A)$, где g – произвольное решение периода $4a$ уравнения Даламбера (см. п. 7.3.6).

Канаппан [1968]

7.3.13. $\boldsymbol{f(x+y+a)f(x-y+a)=[f(x)]^2+[f(y)]^2-1}, \quad a \neq 0$.

Единственные измеримые решения –

$$f(x) = \pm\cos\frac{n\pi x}{a}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Этигсон [1974]

7.3.14. $\boldsymbol{f(x+y+a)f(x-y+a)=f^2(x)-f^2(y)}, \quad a \neq 0$.

Общее решение –

$$f(x) = g(x-a),$$

где g – произвольное решение функционального уравнения

$$g(x+y)g(x-y) = g^2(x) - g^2(y).$$

Измеримые решения имеют вид

$$f(x) \equiv 0, \qquad f(x) = A\sin\frac{2\pi x}{a}, \qquad f(x) = -A\sin\frac{(2k+1)\pi x}{a},$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$. Канаппан [1969]

7.4. Уравнения с рекурсиями

7.4.1. $f(x+f(y)) = f(x) + f(-f(x)+x+y)$.

Все непрерывные решения имеют вид

$$f(x) = \frac{1}{B}\ln(1+e^{Bx}), \quad f(x) \equiv 0, \quad f(x) = x,$$
$$f(x) = \frac{1}{2}(x+|x|), \qquad f(x) = \frac{1}{2}(x-|x|),$$

где $B \neq 0$.

Ацель, Бенц [1975], Дарочи [1980]

7.4.2. $f\left(x+y\sqrt{f(x)}\right) + f\left(x-y\sqrt{f(x)}\right) = 2f(x)f(y)$.

Непрерывные в окрестности нуля неотрицательные решения

$$f(x) \equiv 0, \qquad f(x) = 1 + Ax^2,$$

где $A \geq 0$. Калиг, Матковский [1994]

7.4.3. $f(x+yf(x)) + f(x-yf(x)) = 2f(x)f(y)$.

Отличные от константы, непрерывные в окрестности нуля решения –

$$f(x) = Ax^2 + 1,$$

где $A \geq 0$. Калиг, Матковский [1994]

7.5. Другие уравнения с несколькими независимыми переменными

7.5.1. $f(xy) = f(x)\beta(y) + f(y)\beta(x)$, $\quad x, y > 0,\ \ \beta, f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Уравнение имеет единственное ненулевое решение f, если β – положительная мультипликативная функция (см. п. 7.2.20). При этом

$$f(x) = \frac{\beta(x)}{L(x)},$$

где L – ненулевая логарифмическая функция (см. п. 7.2.19).

Каниццо [1984]

7.5.2. $\boldsymbol{f(x+y)+f(y-x)=2f(x)\cos y}$.

Общее решение – $f(x) = A\cos x + B\sin x$.

Качмаж [1924]

7.5.3. $\boldsymbol{f(x)(1+f(2y))=f(y)(f(x+y)+f(x-y))}$, $\quad x \le y$.

Все непрерывные решения имеют один из следующих видов:

1) $f(x) \equiv 0$,
2) $f(x) = 1 + Ax$,
3) $f(x) = \cos Bx + A\sin Bx$,
4) $f(x) = \operatorname{ch} Bx + a \operatorname{sh} Bx$.

Лайко [1995]

7.5.4. $\boldsymbol{f(x+ay)-f(x+a)-f(ay+1)=}$
$\boldsymbol{f(y+ax)-f(y+a)-f(ax+1)}$, $\qquad a, x, y > 0$.

Общее решение –

$$f(x) = \phi(x^2) + \psi(x) + A,$$

Здесь ϕ, ψ – аддитивные функции (см. п. 7.2.11), A – действительная константа.

Макса [1987]

7.5.5. $\boldsymbol{f(xy)+f(x(1-y))=f(x)\,(f(y)+f(1-y))}$, $\quad x, y \in [0,1]$.

Если $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ является решением уравнения, то либо f мультипликативна на $[0,1]$ (см. п. 7.2.20), либо f – сужение на $[0,1]$ аддитивной функции (см. п. 7.2.11).

Макса [1987]

7.5.6. *Уравнение Вайзовича*:

$$\boldsymbol{2f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{xy}{1+y}\right) + f\left(\frac{x}{1+y}\right) - f\left(\frac{y}{1+y}\right) - f\left(\frac{1}{1+y}\right)},$$

$x, y > 0$, $\ f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Общее измеримое решение –

$$f(x) = A \cdot \ln 2x + B\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Лайко [1972]

7.5.7. $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} f(x_i y_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) + \sum\limits_{j=1}^{m} f(y_j);$
$x_1, \ldots, x_n \in \Gamma_n, \quad y_1, \ldots, y_m \in \Gamma_m, \quad n \geq 2, \; m \geq 3,$
$\Gamma_n = \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \; x_i \geq 0, \; \sum\limits_{i1}^{n} x_i = 1\Big\}.$

Общее, ограниченное на измеримом множестве положительной меры решение $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ –

$$f(x) = \begin{cases} Ax + B + Cx \log x & \text{при} \quad x \in (0,1], \\ B & \text{при} \quad x = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Макса [1981]

7.5.8. $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} f(x_i y_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^a \sum\limits_{j=1}^{n} f(y_j) + \sum\limits_{j=1}^{n} y_j^b \sum\limits_{i=1}^{m} f(x_i),$
$m \geq 3, \; n \geq 2; \; a, b \in \mathbb{R}, \; a, b \neq 1; \; x_i, y_j \in [0,1], \; \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1.$

Общее решение $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ есть

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) + A(x^a - x^b) & \text{при} \quad a \neq b, \\ \varphi(x) + x^a L(x) & \text{при} \quad a = b, \end{cases}$$

где φ – произвольная аддитивная функция, $\varphi(1) = 0$ (см. п. 7.2.11); $L : [0,1] \to \mathbb{R}$ – логарифмическая на $(0,1]$ функция, $L(0) = 0$ (см. п. 7.2.19).

Лосонжи, Макса [1981]

7.6. Неизвестные функции нескольких переменных

7.6.1. $\boldsymbol{f(x,y) = f(y,x)}$.

Функция, удовлетворяющая данному уравнению, называется *симметрической* (коммутативной). Такие функции представимы в виде

$$f(x,y) = \frac{\varphi(x,y) + \varphi(y,x)}{2}.$$

7.6.2. $\boldsymbol{f(x,y) = -f(y,x)}$.

Функция, удовлетворяющая данному уравнению, называется *антисимметрической* (антикоммутативной, кососимметрической). Такие функции представимы в виде

$$f(x,y) = \frac{\varphi(x,y) - \varphi(y,x)}{2}.$$

7.6.3. *Уравнение Лобачевского*:
$\boldsymbol{(f(x))^2 = f(x+y)f(x-y)}$.

Общее непрерывное решение – $f(x) = B \cdot e^{\sigma x}$.

Лобачевский [1840]

Общее решение – $f(x) = Be^{A(x)}$, где A – произвольная аддитивная функция (см. п. 7.2.11).

7.6.4. $\boldsymbol{f(x+y,z)f(x,y) = f(x,y+z)}$, $\quad x,y,z \geq 0, \ \ x+y+z \leq 1;$
$f : \{(x,y) : \ x,y \geq 0; \, x+y \leq 1\} \to [0,1]$.

Общее решение имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{g(x+y)} & \text{при } x, x+y \in I_s, \ \ s \in \Gamma, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Здесь $(I_s : s \in \Gamma)$ – произвольное непересекающееся семейство интервалов из $[0,1]$, а $g : \bigcup\limits_{s \in \Gamma} I_s \to \mathbb{R}$ – произвольная функция, не обращающаяся в нуль.

Ацель, Форте, Нг [1974]

7.6.5. *Первое уравнение Кантора*:
$\boldsymbol{f(x,y) + f(y,z) = f(x,z)}$.

Общее решение

$$f(x,y) = \rho(x) - \rho(y),$$

где функция ρ произвольна.

Синцов [1903]

7.6.6. *Второе уравнение Кантора*:
$\boldsymbol{f(x,y)f(y,z) = f(x,z)}$.

Если $f(x,x) = 0$ при всех x, то уравнение имеет только тривиальное решение.

Если существует a такое, что $f(a,a) \neq 0$, то общее решение уравнения имеет вид

$$f(x,y) = \frac{\rho(x)}{\rho(y)},$$

где ρ – произвольная функция, не обращающаяся в нуль.

Синцов [1903]

7.6.7. $\boldsymbol{f(x,y)f(u,v) - f(x,u)f(y,v) + f(x,v)f(y,u) = 0}$.

Общее решение уравнения имеет вид

$$f(x,y) = \varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x).$$

Синцов [1903]

7.6.8. $\boldsymbol{f(xy,z) + f(yz,x) + f(zx,y) = 0}$.

Решения, непрерывные в $\mathbb{R}^2$, исключая точку $(0,0)$, имеют вид

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \varphi(xy)\ln\frac{x}{y^2} && \text{при} \quad x>0, \quad y>0;\\
f(x,y) &= \psi(xy)\ln\frac{-x}{y^2} && \text{при} \quad x<0, \quad y>0;\\
f(x,y) &= \varphi(xy)\ln\frac{-x}{y^2} && \text{при} \quad x<0, \quad y<0;\\
f(x,y) &= \psi(xy)\ln\frac{x}{y^2} && \text{при} \quad x>0, \quad y<0;\\
f(x,y) &= -2A - B\ln|x| && \text{при} \quad x\neq 0, \quad y=0;\\
f(x,y) &= A + B\ln|y| && \text{при} \quad x=0, \quad y\neq 0.
\end{aligned}$$

Докович [1961]

7.6.9. $\boldsymbol{f(x+y,z) + f(y+z,x) + f(z+x,y) = 0}$.

Общее непрерывное решение –

$$f(x,y) = (x-2y)\varphi(x+y),$$

где φ – произвольная непрерывная функция. Докович [1961]

7.6.10. $\boldsymbol{f(\beta^{-1}(\beta(x)+\beta(y)),z) + f(\beta^{-1}(\beta(y)+\beta(z)),x) +}$
$\boldsymbol{f(\beta^{-1}(\beta(z)+\beta(x)),y) = 0}$,
где β – непрерывная, строго монотонная функция.

Общее непрерывное решение –

$$f(x,y) = (\beta(x) - 2\beta(y))\varphi(\beta(x)+\beta(y)),$$

где φ – произвольная непрерывная функция.

Докович [1961]

7.6.11. $\boldsymbol{f(x+y,z) + f(x-y,z) - 2f(y,z) =}$
$\boldsymbol{f(x,y+z) + f(x,y-z) - 2f(x,y)}$.

Общее дважды непрерывно дифференцируемое решение –

$$f(x,y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) - 2\varphi(x) - 2\varphi(y),$$

где φ – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Эбанкс [1989]

7.6.12. $\boldsymbol{f(x,u)+(1-x)^p(1-u)^q f\left(\frac{y}{1-x},\frac{v}{1-u}\right)=}$
$\boldsymbol{f(y,v)+(1-y)^p(1-v)^q f\left(\frac{x}{1-y},\frac{u}{1-v}\right)}$;
$(x,y),(u,v)\in\{(x,y):\ x,y\in[0,1),\ x+y\le 1\}$;
$p\ne 0$, $q\ne 0$, $p\ne 1$ или $q\ne 1$.

Общее решение –

$$f(x,u)=ax^pu^q-b(1-x)^p(1-u)^q+b,\qquad x,u\in[0,1].$$

Ацель [1981]

7.6.13. *Уравнение косой автодистрибутивности*:
$\boldsymbol{f(f(x,y),z)=f(f(x,z),f(y,z))}$.

Общее непрерывное и строго возрастающее по каждому аргументу решение есть

$$f(x,y)=\beta^{-1}(\beta(x)+\beta(y)),$$

где β – произвольная непрерывная и строго возрастающая функция.

Рыль–Нардзевский [1949], Кнастер [1949]

7.6.14. $\boldsymbol{f(x,y,z)=f(f(x,y,t),t,z)}$.

Пусть функции $g:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ и $h:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ таковы, что

$$G(x,y)=z\Longleftrightarrow x=H(z,y). \tag{7.2}$$

Тогда

$$f(x,y,z)=H(G(x,y),z)$$

является решением уравнения.

Лисеи [1988]

Глава 8

Несколько неизвестных. Системы уравнений

8.1. Две неизвестные функции

8.1.1. $\boldsymbol{f(x+y,z) = g(y+z,x) + g(z+x,y)}$.

Общее непрерывное решение –

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{2y-x}{3}\varphi(x+y) + \psi(x+y),\\
g(x,y) &= 2\psi(x+y) - \frac{2y-x}{3}\varphi(x+y),
\end{aligned}
$$

где φ, ψ – произвольные непрерывные функции.

Святок [1965б]

8.1.2. $\boldsymbol{f(x+y)g(x+y) = (f(x)g(y) + g(x)f(y))^2}$.

Все нетривиальные решения имеют вид

$$
f(x) = A\cdot\varepsilon(x)e^{\varphi(x)}, \qquad g(x) = \frac{1}{4A}\cdot\varepsilon(x)e^{\varphi(x)},
$$

где $a > 0$, $|\varepsilon(x)| = 1$ и φ – произвольная аддитивная функция (см. п. 7.2.11).

Святок [1965б]

8.1.3. $\boldsymbol{[f(x+y)]^2 = [f(x)g(y) + f(y)g(x)]^2}$.

Все непрерывные решения имеют вид:

1) $f(x) = Ce^{\sigma x}$, $g(x) = \dfrac{1}{2}e^{\sigma x}$;
2) $f(x) = Cxe^{\sigma x}$, $g(x) = e^{\sigma x}$;
3) $f(x) = Ce^{\sigma x}\sin\tau x$, $g(x) = e^{\sigma x}\cos\tau x$;
4) $f(x) = Ce^{\sigma x}\operatorname{sh}\tau x$, $g(x) = e^{\sigma x}\operatorname{ch}\tau x$.

Святок [1965а]

8.1.4. $\boldsymbol{\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = g\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}$, $\quad x,y \in I,\ x \neq y,\ f,g : I \to \mathbb{R}$, I – вещественный интервал положительной длины.

Общее решение –

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C, \qquad g(x) = 2Ax + B.$$

Ацель, Кучма [1989]

8.1.5. $\displaystyle\boldsymbol{\frac{xf(x) - yf(y)}{x - y} = g\left(\frac{x+y}{2}\right)}$, $x, y \in I$, $x \neq y$, $f, g : I \to \mathbb{R}$, I – вещественный интервал положительной длины.

Общее решение –

$$f(x) = Ax + B, \qquad g(x) = B.$$

Ацель, Кучма [1989]

8.1.6. $\displaystyle\boldsymbol{\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = g\,(\sqrt{xy}\,)}$, $x, y \in I$, $x \neq y$, $f, g : I \to \mathbb{R}$, I – интервал положительной длины из $(0, +\infty)$ или $(-\infty, 0)$.

Общее решение имеет вид

$$f(x) = \frac{A}{x} + B + Cx, \qquad g(x) = C - \frac{A}{x^2}.$$

Ацель, Кучма [1989, 1991]

8.1.7. $\displaystyle\boldsymbol{\frac{xf(x) - yf(y)}{x - y} = g\,(\sqrt{xy}\,)}$, $x, y \in I$, $x \neq y$, $f, g : I \to \mathbb{R}$, I – интервал положительной длины из $(0, +\infty)$ или $(-\infty, 0)$.

Общее решение имеет вид

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C, \qquad g(x) = C - x^2.$$

Ацель, Кучма [1989, 1991]

8.1.8. $\displaystyle\boldsymbol{f(x)g(y-x) = f\left(\frac{y}{2}\right)g\left(\frac{y}{2}\right) - f\left(x - \frac{y}{2}\right)g\left(x - \frac{y}{2}\right)}$.

Все непрерывные решения имеют вид:

1) $f(x) = A\cos\tau x + B\sin\tau x$, $g(x) = C\sin\tau x$;
2) $f(x) = A\,\mathrm{ch}\,\tau x + B\,\mathrm{sh}\,\tau x$, $g(x) = C\,\mathrm{sh}\,\tau x$;
3) $f(x) = Ax + B$, $g(x) = Cx$;
4) $f(x) \equiv 0$, g – произвольна;
5) $g(x) \equiv 0$, f – произвольна.

Крстичи [1976]

8.1.9. $\boldsymbol{f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)}$.

Все решения имеют вид:

1) $f(x) \equiv 0$, $g(x)$ – произвольная функция;
2) $f(x) = Ae^{\sigma x}$, $g(x) = \frac{1}{2}e^{\sigma x}$;
3) $f(x) = Ae^{\sigma x}\,\mathrm{sh}\,\tau x$, $g(x) = e^{\sigma x}\,\mathrm{ch}\,\tau x$;
4) $f(x) = Ae^{\sigma x}\sin\tau x$, $g(x) = e^{\sigma x}\cos\tau x$;
5) $f(x) = Axe^{\sigma x}$, $g(x) = e^{\sigma x}$.

Гиркояжу [1963]

8.2. Три и более неизвестных функций

8.2.1. $f(x+y) = g(x) + h(y)$.

Общее непрерывное решение –

$$f(x) = A \cdot x + B + C, \qquad g(x) = A \cdot x + B, \qquad h(x) = A \cdot x + C.$$

Пексидер [1903]

Общее решение –

$$f(x) = A(x) + B + C, \qquad g(x) = A(x) + B, \qquad h(x) = A(x) + C,$$

где A – произвольная аддитивная функция (см. п. 7.2.11).

8.2.2. $f(x+y) = g(x)h(y)$.

Непрерывные решения имеют вид:

1) $f(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$, h – произвольна;
2) $f(x) \equiv 0$, $h(x) \equiv 0$, g – произвольна;
3) $f(x) = AB \cdot e^{\sigma x}$, $g(x) = A \cdot e^{\sigma x}$, $h(x) = B \cdot e^{\sigma x}$.

Пексидер [1903]

Общее решение:

1) $f(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$, h – произвольна;
2) $f(x) \equiv 0$, $h(x) \equiv 0$, g – произвольна;
3) $f(x) = AB \cdot D(x)$, $g(x) = A \cdot D(x)$, $h(x) = B \cdot D(x)$, где D – произвольная экспоненциальная (см. п. 7.2.12).

8.2.3. $f(xy) = g(x) + h(y)$, $\quad x, y > 0$.

Общее непрерывное решение –

$$f(x) = C \cdot \ln x + A + B, \quad g(x) = C \cdot \ln x + A, \qquad h(x) = C \cdot \ln x + B.$$

Пексидер [1903]

Общее решение –

$$f(x) = L(x) + A + B, \qquad g(x) = L(x) + A, \qquad h(x) = L(x) + B,$$

где L – произвольная логарифмическая функция (см. п. 7.2.19).

8.2.4. $f(xy) = g(x)h(y)$, $\quad x, y > 0$.

Непрерывные решения имеют вид:

1) $f(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$, h – произвольна;
2) $f(x) \equiv 0$, $h(x) \equiv 0$, g – произвольна;
3) $f(x) = AB \cdot x^{\sigma}$, $g(x) = A \cdot x^{\sigma}$, $h(x) = B \cdot x^{\sigma}$.

Пексидер [1903]

Общее решение:

1) $f(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$, h – произвольна;
2) $f(x) \equiv 0$, $h(x) \equiv 0$, g – произвольна;
3) $f(x) = AB \cdot M(x)$, $g(x) = A \cdot M(x)$, $h(x) = B \cdot M(x)$, где M – произвольная мультипликативная функция (см. п. 7.2.20).

8.2.5. $\boldsymbol{f(x+y) + g(xy) = h(x) + h(y)}$, $\quad x, y > 0$.

Если f, g, h являются решением уравнения, то существуют аддитивные функции φ, ψ (см. п. 7.2.11) и логарифмическая функция χ (см. п. 7.2.19) такие, что

$$f(x) = \varphi(x^2) + \psi(x) + A, \quad g(x) = \chi(x) - 2\varphi(x) + B,$$
$$h(x) = \varphi(x^2) + \psi(x) + \chi(x) + (A+B)/2.$$

Макса [1978]

8.2.6. *Уравнение Бертолино*:
$$\boldsymbol{f(x, y+z) = g(y)h(z) + f(x, y)}.$$

Все непрерывные решения имеют вид:

1) $f(x,y) = \varphi(x) + ABy$, $g(x) \equiv A$, $h(x) = Bx$;
2) $f(x,y) = \varphi(x) + A^2B(1 - e^{\sigma y})$, $g(x) = Ae^{\sigma x}$, $h(x) = AB(1 - e^{\sigma}x)$;
3) $f(x,y) = \varphi(x)$, $g(x) \equiv 0$, $h(x) = \psi(x)$;
4) $f(x,y) = \varphi(x)$, $g(x) = \psi(x)$, $h(x) \equiv 0$.

8.2.7. $\boldsymbol{f(ax + by + c) = g(x) + h(y)}$.

Общее решение –

$$f(x) = Cx - Cc + A + B, \quad g(x) = Cax + A, \qquad h(x) = Cbx + B.$$

Стамате [1964]

8.2.8. $\boldsymbol{f(ax + by + c) = g(x)h(y)}$.

Общее решение –

$$f(x) = ABe^{\sigma(x-c)}, \quad g(x) = Ae^{\sigma ax}, \quad h(x) = Be^{\sigma bx}.$$

8.2.9. $\boldsymbol{f(ax + by + c) = p^{xy} g(x)h(y)}$.

Кроме тривиальных имеется следующее решение:

$$f(x) = ABp^{\frac{(x-c)^2}{2ab}} e^{\tau(x-c)}, \quad g(x) = Ap^{\frac{ax^2}{2b}} e^{a\tau x}, \quad h(x) = Bp^{\frac{bx^2}{2a}} e^{b\tau x}.$$

Стамате [1964]

8.2.10. *Уравнение типа Пифагора*:
$$\boldsymbol{(\exp(f(x,y)))^2 = (g(x,y))^2 + (h(x,y))^2}.$$

Действительные гармонические в $\mathbb{R}^2$ решения имеют вид

$$f(x,y) = \ln|\varphi(z)|, \quad g(x,y) = \operatorname{Re}\varphi(z), \quad h(x,y) = \operatorname{Im}\varphi(z),$$

где φ – произвольная целая функция, $z = x + iy$. Харуки [1990]

8.2.11. $\boldsymbol{f[(x^c + y^c)^{1/c}] = h(x)g(y)}$, $\quad x > 0,\ c \neq 0.$

Если $f(x)$ обладает измеримой мажорантой на некотором множестве положительной меры, то решения имеют вид:

1) $h(x) = A\exp(\sigma x^c)$, $g(x) = B\exp(\sigma x^c)$, $f(x) = AB\exp(\sigma x^c)$;
2) $f(x) \equiv= 0$, $h(x) = 0$, $g(x)$ – произвольно;
3) $f(x) \equiv= 0$, $g(x) = 0$, $f(x)$ – произвольно.

Янардан [1978]

8.2.12. $\boldsymbol{f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) = q\prod_{i=1}^{n} f_i(b_i x_i) + a}$, $\quad n \geq 1,$
$q, a, b_1, \ldots, b_n \neq 0$ – вещественные константы.

Общее решение –

$$f(x) \;=\; q\exp(\sigma x + \sum_{i=1}^{n}\sigma_i) + a,$$

$$f_i(x) \;=\; \exp\Big(\sigma\cdot\frac{x}{b_i} + \sigma_i\Big), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Мартич [1978]

8.2.13. $\boldsymbol{\prod_{i=1}^{n} f_i(b_i x_i) = f\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i| + a\Big)}$, $\quad n \geq 1,$
$a, b_1, \ldots, b_n \neq 0$ – вещественные константы.

Общее решение –

$$f(x) = \Big(\prod_{i=1}^{n}\sigma_i\Big)e^{c|x-a|},$$

$$f_i(x) = \sigma_i\exp\Big(\sigma\Big|\frac{x}{b_i}\Big|\Big), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Мартич [1978]

8.2.14. $\boldsymbol{f(\prod_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(b_i x_i) + a}$, $\quad n \geq 2,$
$a \neq 0,\ b_1, \ldots, b_n > 0,\ x_1, \ldots, x_n > 0,\ f, f_1, \ldots, f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}.$

Общее решение –

$$f(x) = C\ln x + \sum_{i=1}^{n} C_i - \frac{a}{n-1},$$
$$f_i(x) = C\ln\frac{x}{b_i} + C_i - \frac{a}{n-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Мартич [1978]

8.2.15. $\boldsymbol{f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)\exp\Big(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j\Big)}, \quad n \geq 2;$
$x_1, \ldots, x_n > 0; \quad f, f_1, \ldots, f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}.$

Общее решение –

$$f(x) = (Cx + \sum_{i=1}^{n} C_i)e^x, \quad f_i(x) = (Cx + C_i)e^x, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Мартич [1978]

8.2.16. $\boldsymbol{f\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a}\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)}, \quad n \geq 1;$
$a \geq 0, \quad x_1, \ldots, x_n > 0, \quad f, f_1, \ldots, f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}.$

Общее решение –

$$f(x) = C(x^2 - a) + \sum_{i=1}^{n} C_i, \quad f_i(x) = Cx^2 + C_i, \ \ i = 1, \ldots, n.$$

Мартич [1978]

8.2.17. $\boldsymbol{f(x)g(y) = f_1(x+y)g_1(x/y)}, \quad x, y > 0.$

Нигде не обращающиеся в нуль решения f, g, f_1, g_1 имеют вид

$$f(x) = A\exp(\varphi(x) + L_1(x)), \qquad g(x) = B\exp(\varphi(x) + L_2(x)),$$
$$f_1(x) = C\exp(\varphi(x) + L_1(x) + L_2(x)),$$
$$g_1(x) = D\exp\left(L_1\Big(\frac{x}{1+x}\Big) + L_2\Big(\frac{1}{1+x}\Big)\right).$$

Здесь $AB = CD \neq 0$, φ – аддитивная функция (см. п. 7.2.11), а L_1, L_2 – логарифмические функции (см. п. 7.2.19).

Бейкер [1976a]

8.2.18. $\boldsymbol{f(\xi x, \eta y) + g(\xi y, \eta x) = (x+y)f_1(\xi, \eta) + (\xi + \eta)g_1(x, y)},$
$\xi, \eta, x, y \in I = (0, 1], \quad f, g, f_1, g_1 : I^2 \to \mathbb{R}.$

Общее решение –

$$f(\xi,\eta)=l(\xi,\eta)+(C-B)(\xi-\eta)+\psi(\xi\eta),$$
$$g(\xi,\eta)=l(\xi,\eta)-(C+B)(\xi-\eta)-\psi(\xi\eta),$$
$$f_1(\xi,\eta)=l(\xi,\eta)-(B+A)\xi+(B-A)\eta,$$
$$g_1(\xi,\eta)=l(\xi,\eta)+(A+C)\xi+(A-C)\eta,$$

где $l(\xi,\eta)=\xi(L_1(\eta)-L_2(\xi))+\eta(L_1(\xi)-L_2(\eta))$, ψ – произвольная функция на I; L_1, L_2 – логарифмические функции на I (см. п. 7.2.19).

Каннапан, Саху, Жон [1993]

8.2.19. $\boldsymbol{f(x)g(y)=f_1(ax+by)g_1(cx+dy)}$.

Единственным решением является

$$f(x)=Ae^{\alpha x^2+\beta x},\qquad g(x)=Be^{\gamma x^2+\delta x},$$
$$f_1(x)=Ce^{\mu x^2+\nu x}\qquad g_1(x)=De^{\rho x^2+\sigma x},$$

где

$$AB=CD\neq 0,\qquad \alpha^2\mu+c^2\rho=\alpha,\qquad ab\mu+cd\rho=0,$$
$$a\nu+c\sigma=\beta,\qquad b^2\mu+d^2\rho=\gamma,\qquad b\nu+d\sigma=\delta.$$

Бейкер [1974]

8.2.20. $\boldsymbol{f(x+y)+g(xy)=f_1(x)+g_1(y)}$.

Общее решение –

$$f=\varphi(x^2)+\psi(x)+A,\qquad g=-2\varphi(x)+B+C,$$
$$f_1=\varphi(x^2)+\psi(x)+C,\qquad g_1=\varphi(x^2)+\psi(x)+A+B.$$

где φ и ψ – произвольные аддитивные функции (см. п. 7.2.11).

Канарран, Саху [1993]

8.2.21. $\boldsymbol{f(x+y+qxy)+g(xy)=f_1(x)+g_1(y)}$, $\quad q\neq 0$.

Общее решение –

$$f=\varphi(qx)+A,\qquad g=\varphi(-q^2x)+B+C,$$
$$f_1=\varphi(qx)+C,\qquad g_1=\varphi(qx)+A+B,$$

где φ – произвольная аддитивная функция (см. п. 7.2.11).

Канарран, Саху [1993]

8.2.22. $\boldsymbol{f(x)g(y)=\prod_{i=1}^{n}h_i(a_ix+b_iy)}$.

Решение –

$$f(x) = e^{P(x)}, \qquad g(x) = e^{Q(x)}, \qquad h_i = e^{R_i(x)},$$

где $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ – многочлены степени не выше n.

Бейкер [1974]

8.3. Системы уравнений

8.3.1. $\boldsymbol{f(x) = f(-x) = f(1/x)}, \quad x \neq 0.$

Частное решение –

$$f(x) = \varphi\left(\frac{1 - ax^2 + x^4}{1 + ax^2 + x^4}\right).$$

Беббидж [1815]

8.3.2. $\boldsymbol{f(x) = f(-x) = f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)}, \quad |x| > 1.$

Частное решение –

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x^2}{x^2 - 1}\right).$$

Беббидж [1815]

8.3.3. $\boldsymbol{f(x) = f(\alpha(x)) = f(\beta(x)) = \ldots = f(\nu(x))}.$

Если $f_0, \ldots, f_n$ – решение системы уравнений

$$\begin{aligned}
&f_0(x) = f_0(\alpha(x))\\
&f_1 \circ f_0(x) = f_1 \circ f_0(\alpha(x))\\
&\ldots\\
&f_n \circ \ldots \circ f_0(x) = f_n \circ \ldots \circ f_0(\nu(x)),
\end{aligned}$$

то $f(x) = \varphi(f_n \circ \ldots \circ f_0(x))$ – решение исходной системы.

Беббидж [1815]

8.3.4. $\boldsymbol{f(x^2) = (f(x))^2, \quad f(x+1) = f(x) + 1}.$

Общее решение – $f(x) = x$. Волкман [1983]

8.3.5. $\boldsymbol{f(x+1) = f(x) + 1, \quad f(\alpha(x)) = \alpha(f(x))}.$

Предполагается, что итерации заданной функции $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\alpha_n(x) - \alpha_n(y)| = \infty,$$

для всех x, $y > a$, $x \neq y$.

Общее ограниченное на некотором отрезке $[b, b+1]$ решение есть $f(x) = x$.

Волкман Л. и П. [1985]

8.3.6. $\boldsymbol{f(f(x)) = x, \quad f(x+1) = \dfrac{f(x)}{f(x)+1}}$.

Единственное решение – $f(x) = 1/x$. Волкман [1988]

8.3.7. $\boldsymbol{f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)}$,
$\boldsymbol{g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)}$.

При дополнительных условиях:

1) f и g непрерывны,
2) f и g положительны на $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$,
3) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

единственными решениями являются функции

$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \cos x.$$

Давиденко [1985]

8.3.8. $\boldsymbol{f(x+s, y+t) = f(x,y)f(s,t) - g(x,y)g(s,t)}$,
$\boldsymbol{g(x+s, y+t) = f(x,y)g(s,t) + f(s,t)g(x,y)}$.

Единственное непрерывное решение –

$$f(x,y) = e^{\sigma x} \cos \sigma y, \qquad g(x,y) = e^{\sigma x} \sin \sigma y.$$

8.3.9. $\boldsymbol{f(x,x) = x, \quad f(x,y) + f(y,x)}$,
$\boldsymbol{f(f(x,y), f(u,v)) = f(f(x,u), f(y,v))}$.

Все непрерывные строго возрастающие по каждой переменной решения имеют вид

$$f(x,y) = g^{-1}\left(\frac{g(x) + g(y)}{2}\right),$$

где g – непрерывная строго возрастающая функция.

Кнастер [1949]

8.3.10. $\boldsymbol{f_1(g_1(x)) + f_2(g_2(x)) + f_3(g_3(x)) = \beta(x)}$.

При любой непрерывной функции β уравнение имеет абсолютно непрерывные решения f_i, g_i, $i = 1, 2, 3$.

Бари [1930]

8.3.11. $\boldsymbol{f(g(x)+h(y))=\beta(x,y)}, \quad |x|,|y|\le 1.$

Существуют непрерывные функции β такие, что уравнение не имеет непрерывных решений f, g, h.

Примеры: $\beta(x,y)=\min(x,y), \quad \beta(x,y)=xy.$

Арнольд [1957а]

8.3.12. $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{5} f_i(g_i(x)+h_i(y))=\beta(x,y)} \quad x,y\in[0,1].$

При любой непрерывной функции β уравнение имеет непрерывные решения f_i, g_i, h_i, $i=1,\ldots,5$.

Существуют непрерывные, монотонные и стандартные (не зависящие от β) функции g_i, h_i такие, что при любой непрерывной функции β уравнение имеет непрерывные решения f_i, $i=1,\ldots,5$.

Колмогоров [1957]

8.3.13. $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(x,y)f_i(\alpha_i(x,y))=\beta(x,y)}.$

При любых непрерывных функциях α_1, …, α_n и непрерывно дифференцируемых функциях $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ существует аналитическая функция β такая, что уравнение не имеет непрерывных решений $f_1,\ldots,f_n$.

Витушкин [1964а, 1964б]

8.3.14. $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{3} f_i(\alpha_i(x,y))=\beta(x,y)}, \quad x,y\in[0,1].$

Для любых непрерывных функциях α_1, α_2, α_3 существует непрерывная функция β такая, что уравнение не имеет непрерывных решений f_1, f_2, f_3.

Бассалыго [1966]

8.3.15. $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{5} f_i\Big(g\Big(x+\frac{j-1}{6}\Big)+h\Big(y+\frac{j-1}{6}\Big)\Big)=\beta(x,y)}.$

При любой непрерывной функции β существуют непрерывные решения $f_1,\ldots,f_5$, g, h уравнения такие, что g, h строго монотонны и удовлетворяют условию Гёльдера с любым показателем $0<\gamma<1$:

$$|g(y)-g(x)|\le c(\gamma)|y-x|^{\gamma}$$

. Витушкин, Хенкин [1967]

8.3.16. $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{f_i(g_i(x), h_i(y)) = \beta(x, y)}, \quad x, y \in [0, 1].$

Существуют непрерывные функции β такие, для которых уравнение не имеет непрерывных решений f_i, g_i, h_i, $i = 1, \ldots, 4$.

Досс [1963]

8.3.17. $\displaystyle\sum_{i=1}^{9} \boldsymbol{f_i(g_i(x, y), z) = \beta(x, y, z)}, \quad x, y, z \in [0, 1].$

При любой непрерывной функции β уравнение имеет непрерывные решения f_i, g_i, $i = 1, \ldots, 9$.

Арнольд [1957б, 1962]

8.3.18. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f_i(g_i(x_1, \ldots, x_{n-1}), h_i(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n) =}$
$\boldsymbol{\beta(x_1, \ldots, x_n)}, \quad n \geq 4, \quad x_1, \ldots, x_n \in [0, 1].$

При любой непрерывной функции β уравнение имеет непрерывные решения f_i, g_i, h_i, $i = 1, \ldots, n$.

Колмогоров [1956]

8.3.19. $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n+1} \boldsymbol{f_i\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(x_j)\Big) = \beta(x_1, \ldots, x_n)}, \quad x_1, \ldots, x_n \in [0, 1].$

Существуют непрерывные функции α_{ij} такие, что для любой непрерывной функции β решения $f_1, \ldots, f_{2n+1}$ уравнения существуют.

Такие функции α_{ij} найдутся среди функций, удовлетворяющих условию Липшица.

При $n = 1$ смотри также п. 8.3.10.

Арнольд [1957б], Колмогоров [1956, 1957]

Приложения

Приложение А

Некоторые константы и функции

Здесь приведены константы и функции, неоднократно встречающиеся в основном тексте.

• **Константа Эйлера** (Эйлера–Маскерони).

$$C = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right] = 0.57721\,56649\,01532\,5\ldots .$$

Другое обозначение – γ.

• **Числа Эйлера**. Производящая функция –

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2e^z}{e^{2z}+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{x^n}{n!}, \qquad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Частные значения:

$$E_{2n+1} = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots;$$
$$E_0 = 1, \qquad E_2 = -1, \qquad E_4 = 5, \qquad E_6 = -61, \ldots .$$

Рекуррентная формула –

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{2n}{2m} E_{2m} = 0.$$

• **Числа Бернулли**. Производящая функция –

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}, \qquad |z| < 2\pi.$$

Частные значения:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}.$$

Явная формула –

$$B_{2n} = 2(-1)^{n+1}(2n)!\sum_{m=1}^{\infty}(2\pi m)^{-2n}, \qquad n = 1, 2, \ldots;$$
$$B_{2n+1} = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Рекуррентная формула –

$$B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n+1}{m}B_m.$$

• **Убывающая факториальная функция (факториальный многочлен).**

$$(x)_m = x(x-1)\ldots(x-m+1), \quad m \geq 1; \qquad (x)_0 = 1.$$

Свойства:

$$(x)_m = \binom{x}{m}m!; \qquad (x)_{p+q} = (x)_p(x-p)_q;$$
$$(x)_m = \Gamma(x+1)/\Gamma(x-m+1), \qquad x \neq m-1, m-2, \ldots .$$

При целочисленном аргументе

$$(n)_m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad \text{при} \quad 0 \leq m \leq n;$$
$$(n)_n = n!; \quad (n)_m = 0 \quad \text{при} \quad m > n.$$

Биномиальная *теорема Вандермонда* –

$$(x+y)_n = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(x)_m(y)_{n-m}.$$

Другие обозначения $(x)_m$: $x^{[m]}$ и $x^{(m)}$.

• **Биномиальные коэффициенты** $\binom{x}{m}$. Производящая функция –

$$(1+t)^x = \sum_{m=0}^{\infty}\binom{x}{m}t^m$$

(биномиальный ряд). Свойства:

$$\binom{x}{m} + \binom{x}{m+1} = \binom{x+1}{m+1}, \qquad \binom{x}{m} = \frac{(x)_m}{m!}.$$

Целочисленные аргументы:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \qquad (1+t)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} t^m$$

(бином Ньютона).

Другие обозначения: для $\binom{n}{m}$ – C_n^m; для $\binom{x}{m}$ – $C(x, m)$.

• **Многочлены Эйлера.** Рекуррентное соотношение –

$$E_n(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(x) = 2x^n.$$

Производящая функция –

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(x)}{n!} t^n.$$

Частные значения:

$$E_0(x) = 1, \qquad E_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$E_2(x) = x(x-1), \qquad E_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}.$$

Некоторые соотношения:

$$E_n(x+1) + E_n(x) = 2x^n, \qquad E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x).$$

• **Гамма–функция** Эйлера. Определение:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad \operatorname{Re} z > 0;$$

$\Gamma(z)$ – аналитическая функция, имеющая особенности в точках $z = 0, -1, -2, \ldots$ (полюсы первого порядка); $1/\Gamma(z)$ – целая функция первого порядка.

Гамма–функция удовлетворяет функциональным уравнениям:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad z \neq 0, -1, -2, \ldots;$$

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin \pi z}, \qquad z \neq 0, \pm1, \pm2, \ldots;$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \qquad z \neq 0, \pm1, \pm2, \ldots;$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}+z)\Gamma(\frac{1}{2}-z) = \frac{\pi}{\cos \pi z}, \qquad 2z \neq \pm1, \pm3, \pm5, \ldots;$$

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\pi^{1/2}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right), \qquad 2z \neq 0, -1, -2, \ldots.$$

При целочисленном аргументе $\Gamma(n+1) = n!$, $n = 0, 1, \ldots$.

• **Многочлены Бернулли.** Производящая функция –

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{z^n}{n!},\qquad |z|<2\pi.$$

Частные значения:

$$B_0(x)=1,\qquad B_1(x)=x-\frac{1}{2},$$

$$B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},\qquad B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x.$$

Явное выражение –

$$B_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{1}B_m x^{n-m}.$$

Рекуррентная формула –

$$B_n(x)=x^n-\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n+1}{m}B_m(x).$$

Многочлены Бернулли удовлетворяют функциональным уравнениям:

$$B_n(1-x)=(-1)^nB_n(x),$$

$$B_n(1-x)=B^n(x)+nx^{n-1},\qquad n=1,2,\ldots,$$

$$B_n(mx)=m^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1}B^n\left(x+\frac{k}{m}\right),\qquad m,n=1,2,\ldots.$$

• **Пси–функция** Гаусса.

Определение:

$$\psi(z)=\frac{d\ln\Gamma(z)}{dz}=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)},$$

$\psi(z)$ – мераморфная функция, имеющая особенности в точках $z=0,-1,-2,\ldots$ (полюсы первого порядка).

Пси–фунуция удовлетворяет функциональным уравнениям:

$$\psi(z)=\psi(1+z)-\frac{1}{z},$$

$$\psi(z)-\psi(-z)=-\pi\,\mathrm{ctg}(\pi z)-z^{-1},$$

$$\psi(1+z)-\psi(1-z)=z^{-1}-\pi\,\mathrm{ctg}(\pi z),$$

$$\psi(z)-\psi(1-z)=-\pi\,\mathrm{ctg}(\pi z).$$

При целочисленном аргументе

$$\psi(n+1)=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-C,$$

где C – константа Эйлера.

Приложение Б

Алгебра Коши формальных степенных рядов

• **Последовательности.** Пусть K – кольцо вещественных или комплексных чисел. Рассмотрим коммутативное кольцо $\overline{K}$ бесконечных последовательностей чисел из K. Равенство последовательностей $a = (a_0, a_1, \ldots)$ и $b = (b_0, b_1, \ldots)$ означает, что $a_m = b_m$ при всех $m = 0, 1, \ldots$. Сумма $a + b$ и произведение (свертка) $a \cdot b$ последовательностей определяются следующим образом:

$$c = a + b \text{ эквивалентно } c_m = a_m + b_m, \;\; m = 0, 1, \ldots;$$

$$c = a \cdot b \text{ эквивалентно } c_m = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}, \;\; m = 0, 1, \ldots .$$

Нулем и единицей кольца $\overline{K}$ являются последовательности

$$\mathbf{o} = (0, 0, 0, \ldots), \qquad \mathbf{e} = (1, 0, 0, \ldots).$$

Элемент $-a$ кольца $\overline{K}$, где

$$-a = (-a_0, -a_1, \ldots),$$

является обратным по сложению к элементу a.

Кольцо $\overline{K}$ является областью целостности, т.е. оно не имеет делителей нуля: если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $a \cdot b \neq 0$.

Определим операции сложения и умножения элементов a кольца $\overline{K}$ и чисел λ из K равенствами

$$\lambda + a = (\lambda + a_0, a_1, a_2, \ldots),$$
$$\lambda a = (\lambda a_0, \lambda a_1, \ldots).$$

Кольцо K можно считать вложенным в кольцо $\overline{K}$, если отождествить число λ и последовательность $(\lambda, 0, 0, \ldots)$. Далее вместо $\mathbf{o}$ и $\mathbf{e}$ пишем 0 и 1.

Элемент $a^{-1} = (c_0, c_1, \ldots)$ из $\overline{K}$ является обратным по умножению к элементу a тогда и только тогда, когда $a_0 \neq 0$ и

$$c_n = a_0^{-1} \sum_{1 \cdot i_1 + \ldots + n \cdot i_n = n} \frac{(i_1 + \ldots + i_n)!}{i_1! \ldots i_n!} \prod_{j=1}^{n} \left(-\frac{a_j}{a_0}\right)^{i_j}. \qquad (Б.1)$$

• **Формальным рядом**, соответствующим последовательности a, будем называть выражение

$$A(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m, \tag{Б.2}$$

где x – формальная переменная, которую можно интерпретировать в $\overline{K}$, определив $x = (0, 1, 0, \ldots)$. Тогда $x^k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, $k = 1, 2, \ldots$. В последовательности x^k единица стоит на $(k+1)$-м месте. Полагая $x^0 = (1, 0, \ldots)$, получим (Б.2).

Пусть $B(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$ – другой формальный ряд. По определению:

$$A(x) = B(x) \quad \text{эквивалентно} \quad a_m = b_m, \quad m = 0, 1, \ldots;$$

$$A(x) + B(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m + b_m) x^m;$$

$$A(x) \cdot B(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} \right) x^m.$$

Множество $K[x]$ формальных степенных рядов образует коммутативное кольцо с нулем 0 и единицей 1. Это кольцо изоморфно кольцу последовательностей $\overline{K}$.

• **Степень формального ряда.** Если $A(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$, то

$$(A(x))^p = \sum_{m=0}^{\infty} a_{pn} x^n,$$

где

$$a_{pn} = \sum_{k=1}^{p \wedge n} \binom{p}{k} a_0^{p-k} \sum_{\left\{ \substack{k_1 + \ldots + k_n = k \\ 1 \cdot k_1 + \ldots + n \cdot k_n = n} \right\}} \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!} a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n}.$$

Здесь $p \wedge n = \min(p, k)$. Первые из этих коэффициентов следующие:

$$a_{p0} = a_0^p, \qquad a_{p1} = p a_0^{p-1} a_1, \qquad a_{p2} = p a_0^{p-1} a_2 + \binom{p}{2} a_0^{p-2} 2 a_1^2,$$

$$a_{p3} = p a_0^{p-1} a_3 + \binom{p}{2} a_0^{p-2} 2 a_1 a_2 + \binom{p}{3} a_0^{p-3} a_1^3,$$

$$a_{p4} = p a_0^{p-1} a_4 + \binom{p}{2} a_0^{p-2} (2 a_1 a_3 + a_2^2) + \binom{p}{3} a_0^{p-3} 3 a_1^2 a_2 + \binom{p}{4} a_0^{p-4} a_1^4.$$

Частный случай (формула бинома Ньютона) –

$$(1 + \lambda x)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \lambda^k x^k.$$

• **Деление формальных степенных рядов.** Элемент

$$(A(x))^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m,$$

является обратным по умножению к элементу $A(x)$ тогда и только тогда, когда $a_0 \neq 0$, а его коэффициенты c_n определяются по (Б.1).

• **Подстановка ряда в ряд.** Пусть

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Тогда

$$B(A(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

где

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \sum_{\left\{ \substack{k_1+\ldots+k_n=k \\ 1\cdot k_1+\ldots+n\cdot k_n=n} \right\}} \frac{k!}{k_1!\ldots k_n!} a_1^{k_1}\ldots a_n^{k_n}.$$

• **Дифференцирование формальных степенных рядов.** Для

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

по определению,

$$DA(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n, \qquad D^n A(x) = D(D^{n-1}A(x)).$$

Выполняются свойства:

$$\begin{aligned}
&D(A(x)+B(x)) = DA(x) + DB(x),\\
&D(A(x)\cdot B(x)) = A(x)\cdot DB(x) + B(x)\cdot DA(x),\\
&D((A(x))^n) = n(A(x))^{n-1}\cdot DA(x),\\
&D((A(x))^{-n}) = -n(A(x))^{-n-1}\cdot DA(x).
\end{aligned}$$

• Если в (Б.2) x – переменная, принимающая комплексные значения, и ряд имеет ненулевой радиус сходимости, то функция $A(x)$ называется производящей функцией последовательности $(a_0, a_1, \ldots)$.

Если какое либо соотношение выполняется для сходящихся числовых рядов, то оно выполняется и для формальных.

Подробно вопросы теории и применений характеристических функций и формальных степенных рядов изложены, например, в монографиях Риордана [1963], Егорычева [1977], Сачкова [1982].

Приложение B

Об одном подходе к классификации функциональных уравнений

• *S-формулой* (или S-выражением) будем называть выражение, образованное суперпозицией известных и неизвестных функций. Далее будем говорить просто о формулах, имея в виду S-формулы. Таким образом:

1) произвольная переменная является формулой;
2) если φ – m-арная функция, а $A_1, \ldots, A_2$ – формулы, то $\varphi(A_1, \ldots, A_2)$ – формула.

Каждой формуле поставим в соответствие тип ее структуры.

• Вначале по формуле строится помеченное дерево – ее *структурный граф* (S-граф), называемый в информатике деревом Канторовича. Висячие вершины соответствуют переменным, входящим в формулу. Каждой переменной соответствует столько висячих вершин, сколько раз переменная встречается в формуле. Внутренние вершины дерева, в том числе корневая, соответствуют функциям, встречающимся в записи формулы. Каждому вхождению функции в формулу соответствует своя вершина.

Каждая переменная или функция, входящая в формулу, подставлена в аргумент некоторой другой функции (исключение – внешняя функция формулы, которой соответствует корневая вершина). Эту связь будем отражать в S-графе дугой. Входные дуги каждой вершины упорядочены так же, как аргументы функции, которой она соответствует. Очевидно, что каждая формула имеет единственный структурный граф.

Пусть формула A построена из переменных $x_1, \ldots, x_m$ и функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и пусть ν_i – арность функции φ_i. S-граф формулы A будем обозначать через $\Gamma(x_1, \ldots, x_m; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

• Переименование (подстановку) конечного числа имен будем называть правильным, если оно биективно.

Два S-графа: $\Gamma'_A(x_1, \ldots, x_m; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ и $\Gamma''_B(y_1, \ldots, y_m; \psi_1, \ldots, \psi_n)$ – будем называть изоморфными, если существуют правильные переименования имен переменных $y_i \to x_j$ и имен функций $\psi_i \to \varphi_j$, а также такие перестановки аргументов функций (т.е. переупорядочения входных дуг вершин), что граф $\Gamma''_B(y_1, \ldots, y_m; \psi_1, \ldots, \psi_n)$ преобразуется в граф $\Gamma'_A(x_1, \ldots, x_m; \varphi_1, \ldots, n)$.

• Класс графов, изоморфных S-графу Γ формулы A, будем называть *типом структуры* формулы A. Тип структуры формул можно положить в основу классификации функциональных уравнений.

Приложение Г

Об одной аксиоматике операционного исчисления

Различные варианты аксиоматизации операционного исчисления были даны Славиковским [1956], Беллертом [1957] и Биттнером [1961].

Ниже приводится аксиоматика операционного исчисления применительно к оператору умножения на фиксированный неделитель нуля. Рассмотрена операция свертки, обобщающая на непрерывную переменную свертку Берга [1961] (см. п. 4.2.4), определенную им для дискретной переменной. Построено операционное исчисление конечных разностей на классе произвольных функций, конечных на $[0, \infty)$.

Здесь ограничимся рассмотрением только алгебры операторов, а вопросов анализа (пределов, непрерывности, рядов и пр.) касаться не будем.

Г.1. Числа и функции

Пусть A – ассоциативно–коммутативная алгебра над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, т.е. на множестве A определены операции сложения и умножения элементов и операция умножения элементов на комплексные числа таким образом, что для произвольных $x, y, z \in A$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ выполняются следующие аксиомы:

(A1) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
(A2) существуют элемент $\mathbf{o}$, называемый нулем, и элемент $\mathbf{e}$, называемый единицей, такие, что $x + \mathbf{o} = x$, $x \cdot \mathbf{e} = x$;
(A3) $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$;
(A4) для любого элемента x существует элемент $-x$, называемый противоположным, такой, что $x + (-x) = \mathbf{o}$.
(A5) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;
(A6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
(A7) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $\alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y$;
(A8) $1\mathbf{e} = \mathbf{e}$.

Алгебра $\mathbb{C}$ изоморфно вкладывается в алгебру A, если отождествить число α и элемент $\alpha\mathbf{e}$ (в частности, число 0 и элемент $\mathbf{o}$, число 1 и элемент $\mathbf{e}$) и определить операцию сложения числа и элемента тождеством $\alpha + x = \alpha\mathbf{e} + x$. При этом можно использовать единый символ "$\cdot$" (или опускать его) для операций умножения и единый символ "$+$"

для операций сложения (числа с числом, числа с элементом и элемента с элементом).

Далее элементы алгебры A будем называть *функциями*, а элементы вида $\alpha\mathbf{e}$ – *константами* или *числами*.

Г.2. Операторы s и d

• Умножение на некоторую функцию $s \in A$ произвольной функции $x \in A$ можно рассматривать как действие оператора $s : A \to A$ (называемого обычно оператором умножения), отображающего x в sx, т. е. $s(x) = s \cdot x$.

Будем предполагать, что в алгебре A выполняются следующие дополнительные аксиомы:

(A9) существует элемент s такой, что уравнение $x - \alpha sx = 1$ разрешимо относительно $x \in A$ при каждом $\alpha \in \mathbb{C}$;

(A10) оператор умножения s имеет левый обратный $d : A \to A$, т.е. $d(sx) = x$ при всех x;

(A11) $d(x + y) = d(x) + d(y)$, $d(\alpha x) = \alpha\, dx$ при всех $x, y \in A$;

(A12) $d(1) = 0$;

(A13) если $d(x) = 0$ и $d(y) = 0$, то $d(xy) = 0$.

В дальнейших пунктах строится операционное исчисление для s, d и некоторых других, связных с ними, операторов. Интерпретация: s – оператор интегрирования или суммирования, d – оператор дифференцирования или разностный оператор.

Приведем некоторые свойства введенных операторов.

• $d(0) = 0$, $d(s) = 1$;

Доказательство непосредственно следует из A11 и A10.

• Функции s и $(1 - \alpha s)$ – неделители нуля.

Доказательство. Пусть s – делитель нуля. Тогда $sx_0 = 0$ при некотором $x_0 \neq 0$. Но $x_0 = d(sx_0) = d(0) = 0$. Противоречие.

Если $(1 - \alpha s)$ – делитель нуля, то $(1 - \alpha s)x_0 = 0$ при некотором $x_0 \neq 0$. Возьмем любое решение уравнения $(1 - \alpha s)x = 1$. Тогда $0 = (1 - \alpha s)xx_0 = x_0$, т. е. $x_0 = 0$. Противоречие.

• Решение e_α уравнения $x - \alpha sx = 1$ единственно.

Доказательство. Если y – другое решение, то $(1 - \alpha s)(y - e_\alpha) = 0$, что влечет $y = e_\alpha$.

• Функция e_α – неделитель нуля.

Доказательство. Если e_α – делитель нуля, то $e_\alpha x_0 = 0$ при некотором $x_0 \neq 0$. Из определения e_α следует $e_\alpha x_0 - \alpha s e_\alpha x_0 = x_0$ т.е. $x_0 = 0$. Противоречие.

• $d(xy) = xd(y) + yd(x) - sd(x)d(y)$.

Доказательство. Так как $d(x - sd(x)) = d(x) - d(x) = 0$ и, аналогично, $d(y - sd(x)) = 0$, то $0 = d((x - sd(x))(y - sd(y))) = d(xy) - xd(y) - yd(x) + sd(x)d(y)$.

• **Определение**. Обозначим через A_d множество

$$A_d = \{x :\ d(x) = 0,\ x \in A\}.$$

A_d – подалгебра алгебры A.

Выполняется тождество

$$d(bx) = bd(x) \quad \text{для всех} \quad b \in A_d, \quad x \in A.$$

Г.3. Рациональные операторы

• **Определение**. Обозначим через $\mathbb{C}_s$ множество всех многочленов относительно s:

$$\mathbb{C}_s = \left\{ \sum_{i=o}^{n} \alpha_i s^i :\ n \geq 0,\ \alpha_i \in \mathbb{C},\ \alpha_n = 1 \right\}, \qquad s \in A.$$

Множество $\mathbb{C}_s$ не содержит делителей нуля. В частности, операторы $1, s, s^2, \ldots$ линейно независимы и не являются делителями нуля.

Доказательство. Достаточно разложить произвольный многочлен n-й степени на элементарные множители:

$$\sum_{i=o}^{n} \alpha_i s^i = \prod_j (s - \beta_j)^{k_j}, \qquad \sum_j k_j = n,$$

а каждый из них является неделителем нуля.

Множество $\mathbb{C}_s$ – подалгебра алгебры A. Алгебра $\mathbb{C}$ изоморфно вложена в $\mathbb{C}_s$.

• **Определение**. Обозначим через $A|\mathbb{C}_s$ *алгебру частных* алгебры A относительно подалгебры $\mathbb{C}_s \subset A$.

Алгебра частных строится обычным образом. $A|\mathbb{C}$-парой называется выражение (x, a), где $x \in A$, $a \in \mathbb{C}_s$, $a \neq 0$. Пары (x, a) и (y, b), по определению, эквивалентны, если $xb = ya$.

$A|\mathbb{C}_s$-дробью или просто дробью называется класс эквивалентностей $A|\mathbb{C}_s$-пар:

$$\frac{x}{a} = \{(y, b): \ xb = ya\}.$$

Равенство дробей $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$ означает $xb = ya$.

Операции в $A|\mathbb{C}_s$ определяются равенствами

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{xb + ay}{ab}, \qquad \alpha\frac{x}{a} = \frac{\alpha x}{a}, \qquad \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} = \frac{xy}{ab}.$$

Результат операций не зависит от выбора конкретных представителей классов.

Алгебра $A|\mathbb{C}_s$ – ассоциативно–коммутативная алгебра над полем $\mathbb{C}$. Нуль в ней – дробь $\dfrac{0}{1}$, равная $\dfrac{0}{a}$, а единица – дробь $\dfrac{1}{1}$, равная $\dfrac{a}{a}$, при любой не равной нулю функции $a \in \mathbb{C}_s$.

Алгебра A вкладывается в алгебру $A|\mathbb{C}_s$, если отождествить элемент $x \in A$ с элементом $\dfrac{x}{1} \in A|\mathbb{C}_s$.

• Определение. Обозначим через $\mathbb{C}_s|\mathbb{C}_s$ алгебру дробей вида $\dfrac{b}{a}$, где $a, b \in \mathbb{C}_s$. Дроби $\dfrac{x}{a} \in A|\mathbb{C}_s$ будем называть *рациональными операторами*, а дроби $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{C}_s|\mathbb{C}_s$ – *s-операторами*.

Имеются следующие вложения алгебр:

$$\mathbb{C} \subset \mathbb{C}_s \subset \mathbb{C}_s|\mathbb{C}_s \subset A|\mathbb{C}_s, \qquad \mathbb{C}_s \subset A \subset A|\mathbb{C}_s.$$

Алгебра $\mathbb{C}_s|\mathbb{C}_s$ – поле. Каждый ее отличный от нуля элемент $\dfrac{b}{a}$ обратим: $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-1} = \dfrac{a}{b}$. Поле $\mathbb{C}$ вложено в поле $\mathbb{C}_s|\mathbb{C}_s$.

• **Определение**. О рациональном операторе r будем говорить, что он *приводим* к

- ⋆ s-оператору, если $r \in \mathbb{C}_s|\mathbb{C}_s$;
- ⋆ оператору–функции или просто функции, если $r \in A$;
- ⋆ числу, если $r \in \mathbb{C}$.

• Каждый s-оператор может быть приведен к каноническому виду – линейной комбинации *элементарных* s-операторов:

$$1,\ s^m,\ \frac{1}{s^m},\ \frac{1}{(s-\alpha)^m},\quad m \geq 1.$$

Операторы 1, s^m и $\dfrac{1}{(s-\alpha)^m} = e_\alpha^m$ – функции.

Операторы $\dfrac{1}{s^m}$ не приводимы к функции.

Доказательство. Если $\dfrac{1}{s^m} = a$ и $a \in A$, то $s^m a = 1$, $s^{m-1}a = d(s^m a) = d(1) = 0$. Отсюда следует $s^{m-1}a = 0$, что противоречит $s^m a = 1$.

Г.4. Операторы p и k

• Как уже отмечалось, оператор s необратим в A, и оператор d является лишь левым обратным к s, т. е. выражение $d(sx)-sd(x)$, равное $x-sd(x)$, тождественно не равно нулю.

• **Определение**. Оператор $k : A \to A$, определяемый равенством

$$k(x) = x - sd(x)$$

будем называть *граничным*.

• Для всех $x, y \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$ выполняются соотношения

$$k(x+y) = k(x) + k(y), \qquad k(\alpha x) = \alpha k(x) \qquad k(xy) = k(x)k(y),$$

$$k(1) = 1, \qquad k(e_\alpha) = 1, \qquad k(sx) = 0, \qquad d(k(x)) = 0.$$

Доказательство следует из свойств операторов s и d, в частности,

$$k(xy) = xy - sd(xy) = (x - sd(x))(y - sd(x)) = k(x)k(y).$$

• **Определение**. Через p обозначим s-оператор, обратный в алгебре $\mathbb{C}_s|\mathbb{C}_s$ оператору s, т. е. $p = \dfrac{1}{s}$.

• Выполняется тождество

$$d^n(x) = p^n x - p^n k(x) - p^{n-1}k(d(x)) - \dots - pk(d^{n-1}(x)), \qquad n \geq 1.$$

Доказательство. Из определения оператора k следует

$$d(x) = px - pk(x),$$

т. е. тождество верно при $n = 1$. По индукции найдем

$$\begin{aligned} d^{n+1}(x) &= d(d^n x) = pd^n x - pk(d^n x) = \\ &= p^{n+1}x - p^{n+1}k(x) - p^n k(d(x)) - \dots - p^2 k\left(d^{n-1}(x)\right) - pk(d^n(x)). \end{aligned}$$

Таким образом, доказываемое тождество верно при всех $n \geq 1$.

Г.5. Решение некоторых уравнений

• Уравнение $sx = 1$ не разрешимо в алгебре A.

Доказательство. Если уравнение разрешимо, то $x = d(sx) = d(1) = 0$. Это противоречит $sx = 1$.

• Уравнение $sx = r$ при $r \in A|\mathbb{C}_s$ имеет единственное операторное решение $x = \dfrac{r}{s}$, которое приводимо к

- ⋆ s-оператору, если $r = \dfrac{bc}{a}$, где $a, b \in \mathbb{C}_s$;
- ⋆ функции, если $r = bs$, где $b \in A$;
- ⋆ числу, если $r = \alpha s$, где $\alpha \in \mathbb{C}$.

• Уравнение $x - \alpha sx = 1$ имеет единственное s-операторное решение $x = \dfrac{1}{1 - \alpha s}$, которое приводимо к функции $x = e_\alpha$.

Формулы сложения и умножения для функции e_α:

$$e_{\alpha+\beta} = \frac{e_\alpha e_\beta}{e_\alpha + e_\beta - e_\alpha e_\beta}, \qquad e_{\alpha\beta} = \frac{se_\alpha e_\beta}{se_\alpha e_\beta - (e_\alpha - 1)(e_\beta - 1)}.$$

• Уравнение $x - \alpha sx = r$ при $\alpha \in \mathbb{C}$, $r \in A|\mathbb{C}_s$, всегда имеет единственное операторное решение $x = \dfrac{r}{1 - \alpha s} = e_\alpha r$, которое приводимо к

- ⋆ s-оператору, если $r \in \mathbb{C}_s|\mathbb{C}_s$;
- ⋆ функции, если $r \in A$;
- ⋆ числу, если $r = \dfrac{\beta}{e_\alpha}$, где $\beta \in \mathbb{C}$.

• Уравнение $ax = r$ при $a \in \mathbb{C}_s$, $r \in A|\mathbb{C}_s$, всегда имеет единственное операторное решение $x = \dfrac{r}{a} \in A|\mathbb{C}_s$, которое приводимо к

- ⋆ s-оператору, если $r \in \mathbb{C}_s|\mathbb{C}_s$;
- ⋆ функции, если $r = ab$, где $b \in A$;
- ⋆ числу, если $r = \alpha a$, где $\alpha \in \mathbb{C}$.

• Общее решение уравнения $d(x) = a$ при $a \in A$ имеет вид $x = b + sa$, где $b \in A_d$ произвольно.

Доказательство. Ищем решение в виде $x = y + sa$. Тогда $d(y) = 0$, что эквивалентно $y \in A_d$.

• Система уравнений $d(x) = u$, $x - sd(x) = v$ разрешима относительно $x \in A$ тогда и только тогда, когда $d(v) = 0$. При этом $x = v + su$.

Доказательство. Необходимость условия $d(v) = 0$ следует из второго уравнения: $d(v) = d(x - sd(x)) = 0$. Поэтому, $x = v + sd(x) = v + su$. Проверка решения: $d(x) = d(v) + u = u$, $x - sd(x) = v + su - su = v$.

• Общее решение уравнения $x - sd(x) = 0$ есть $x = su$, где $u \in A$ произвольно.

Доказательство. Пусть x – решение и $d(x) = u$. Из $x - sd(x) = 0 = v$ и из п. 1.5.7 следует $x = 0 + su = su$. Проверка решения: $x - sd(x) = su - sd(su) = su - su = 0$.

• Общее решение $x \in A$ уравнения $d(x) - \alpha x = 0$ имеет вид $x = e_\alpha v$, где $v \in A_d$ произвольно.

Доказательство. Пусть x – решение. Обозначим $u = d(x)$, и пусть $v = x - sd(x) = x - \alpha sx$. Тогда $d(v) = d(x) - \alpha x = 0$ и, следовательно, $v \in A_d$. Согласно п. 1.5.7 $x = v + su$. Подставляя в исходное уравнение, получим

$$0 = d(v + su) - \alpha(v + su) = u - \alpha su - \alpha v.$$

Отсюда и из п. 1.5.4 следует $u = \alpha e_\alpha v$. Значит,

$$x = v + \alpha s e_\alpha v = v(1 + \alpha s e_\alpha) = v e_\alpha.$$

• Уравнение $d^2 f = a$ при граничных условиях $k(f) = \omega_0$, $k(df) = \omega_1$ приводится к

$$p^2 f - p^2 k f - pk\, df = a.$$

Решение –

$$f = \frac{a + p^2\omega_0 + p\omega_1}{p^2} = s^2 a + \omega_0 + s\omega_1.$$

• Уравнение $d^2 f - f = a$ при граничных условиях $k(f) = \omega_0$, $k(df) = \omega_1$ приводится к

$$p^2 f - p^2 k f - pk\, df - f = a.$$

Решение –

$$\begin{aligned} f \;&=\; \frac{a + p^2\omega_0 + p\omega_1}{p^2 - 1} = \frac{e_1 - e_1}{2} a + \frac{e_1 + e_1}{2}\omega_0 + \frac{e_1 - e_1}{2}\omega_1 = \\ &=\; \frac{1}{2} e_1(a + \omega_0 + \omega_1) - \frac{1}{2} e_{-1}(a - \omega_0 + \omega_1). \end{aligned}$$

Г.6. Операционное исчисление конечных разностей

• *Алгебра функций.* В качестве алгебры A возьмем множество всех конечных вещественных или комплекснозначных функций вещественной переменной на полуоси $[0, \infty)$. Операцию сложения двух функций, операции умножения функции на число и сложения функции с числом определим обычным образом.

Операцию умножения (свертки) двух функций определим равенством

$$(fg)(t) = \sum_{i+j=[t]} f(\{t\}+i)g(\{t\}+j) - \sum_{i+j=[t]-1} f(\{t\}+i)g(\{t\}+j).$$

Здесь и далее $[\,]$ и $\{\,\}$ – символы целой и дробной частей. Сумма предполагается равной нулю, если множество значений индексов, по которым проводится суммирование, пусто. Для упрощения записей все индексы суммирования предполагаются по умолчанию неотрицательными. В частности, из последнего равенства следует, что

$$(fg)(t) = f(t)g(t) \ \text{ при } \ 0 \le t < 1,$$

$$(fg)(t) = \sum_{j=0}^{[t]} f(t-j)g(\{t\}+j) - \sum_{j=0}^{[t]-1} f(t-1-j)g(\{t\}+j) \ \text{ при } \ [t] \ge 1.$$

Выполнение аксиом А1–А8 (см. п. Г.1) легко проверяется. Нулем и единицей в алгебре A являются функции, тождественно равные, соответственно, нулю и единице на множестве $[0+\infty)$.

Функцию будем обозначать или ее именем, например f, или выражением, определяющим ее значения $f(t)$, для чего зафиксируем стандартное обозначение аргумента t и будем писать $f = \langle f(t) \rangle$.

В алгебре A имеются делители нуля, т.е. возможно $fg = 0$ при $f \ne 0$ и $g \ne 0$, например,

$$f(t) = 1 - g(t) = \begin{cases} 0, & t \text{ – рационально;} \\ 1, & t \text{ – иррационально.} \end{cases}$$

• *Оператор суммирования.* Пусть $s = \langle [t] \rangle$, тогда

$$(sf)(t) = \sum_{j=1}^{[t]} f(t-j).$$

В частности, $(sf)(t) = 0$ при $0 \le t < 1$.

В связи с этим оператор умножения на s будем называть оператором суммирования. Наряду с оператором s будем также рассматривать и оператор

$$p = \frac{1}{s}.$$

По определению, $s^0 = 1$, $s^1 = s$. Непосредственно проверяется выполнение равенства

$$(s^n f)(t) = \sum_{n \le j \le [t]} \binom{j-1}{n-1} f(t-j) \text{ при } n \ge 1.$$

Уравнение $f - \alpha s f = 1$ относительно функции f разрешимо, т.е. выполняется аксиома A9. Данное конечно-разностное уравнение

$$f(t) - \alpha \sum_{j=1}^{[t]} f(t-j) = 1$$

однозначно разрешимо при произвольном граничном условии $f(t) = \omega(t)$, $0 \le t < 1$.

• *Оператор конечной разности*

$$(\Delta f)(t) = f(t+1) - f(t)$$

является левым обратным к оператору s:

$$\Delta s f(t) = \Delta \sum_{j=1}^{[t]} f(t-j) = \sum_{j=1}^{[t]+1} f(t+1-j) - \sum_{j=1}^{[t]} f(t-j) = f(t),$$

т.е. выполняется аксиома A10 и, как легко видеть, аксиомы A11–A13.

Далее вместо символа d (в соответствии с прил. Г.2) будет использоваться символ Δ.

• *Граничный оператор.* Полагаем

$$k(f) = f - s\Delta,$$

следовательно,

$$k(f)(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{[t]} (f(t-j+1) - f(t-j)) = f(\{t\}).$$

• *Некоторые формулы операционного исчисления.* Вычисления показывают, что

$$\frac{1}{p^n}\langle t \rangle = \left\langle \frac{[t]_{(n)}}{n!} \right\rangle, \qquad e_\alpha = \left\langle (1+\alpha)^{[t]} \right\rangle.$$

Положим

$$e_{\alpha+i\beta} = c_{\alpha,\beta} + is_{\alpha,\beta}.$$

Тогда

$$c_{\alpha,\beta} = \left\langle \left((1+\alpha)^2+\beta^2\right)^{[t]/2} \cos\varphi[t] \right\rangle,$$

$$s_{\alpha,\beta} = \left\langle \left((1+\alpha)^2+\beta^2\right)^{[t]/2} \sin\varphi[t] \right\rangle,$$

где

$$\cos\varphi = \frac{1+\alpha}{\sqrt{(1+\alpha)^2+\beta^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{(1+\alpha)^2+\beta^2}}.$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\frac{1}{p-\alpha} = \frac{e_\alpha - 1}{\alpha}, \qquad \frac{1}{(p-\alpha)^2} = \frac{(e_\alpha-1)^2}{\alpha^2};$$

$$\frac{p}{(p-\alpha)(p-\beta)} = \frac{e_\beta - e_\alpha}{\beta-\alpha}, \qquad \frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)} = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha e_\beta - \beta e_\alpha}{\alpha\beta(\beta-\alpha)};$$

$$\frac{p}{(p-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{s_{\alpha,\beta}}{\beta}, \qquad \frac{1}{(p-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{(1-c_{\alpha,\beta})\beta + \alpha s_{\alpha,\beta}}{\beta(\alpha^2+\beta^2)}.$$

Приложение Д

Терминология теории динамических систем

Изложение здесь основных понятий теории динамических систем следует работе: Д.И. Аносов, С.Х. Бронштейн, В.З. Гринес "Гладкие динамические системы". Ч. II. "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления". Т. 1 (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР), Москва, 1985. – С. 151–242.

Д.1. Каскады и потоки

• В теории динамических систем (ТДС) *динамическая система* (ДС) – однопараметрическая группа (или полугруппа) преобразований некоторого множества M. Каждому $t \in T$ сопоставлено отображение $f^t : M \to M$ так, что выполняется групповое свойство

$$f^t \circ f^s = f^{t+s} \ \text{ для всех } \ t, s \in T; \qquad f^0 = 1_M. \tag{Д.1}$$

Множество M называется *фазовым пространством*, его элементы – *фазовыми точками*, переменная t – *временем*. Прямое произведение $T \times M$ называется расширенным фазовым пространством.

В приложениях ДС описывает эволюцию моделируемой замкнутой физической системы, т.е. изменение ее состояний со временем: из состояния x система за время t переходит в состояние $f^t x$. Групповое (полугрупповое) свойство (*Д*.1) отражает замкнутость (автономность, изолированность) системы: переход из состояния $f^s x$ в состояние $f^{s+t} x$ за время от s до $s+t$ происходит так же, как если бы он происходил за время от 0 до t.

Обычно предполагается, что фазовое пространство M совпадает с $\mathbb{R}^n$ или является многообразием в $\mathbb{R}^n$ (гладким, хаусдорфовым, со счетной базой, связным и без края). Для вопросов, рассматриваемых здесь, достаточно ограничиться случаем, когда M – область на числовой прямой, т.е. конечный или бесконечный интервал.

• В зависимости от множества T динамическая система называется:

каскад – если $T = \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
полукаскад – если $T = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$,
поток – если $T = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$,
полупоток – если $T = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Такая классификация, а также определения непрерывности и гладкости динамических систем сведены в табл. Д.1.

Таблица Д.1. Определение ДС

Динамические системы			
с дискретным временем		с непрерывным временем	
Каскад	Полукаскад	Поток	Полупоток
это – однопараметрическая			
группа	полугруппа	группа	полугруппа
преобразований в некотором множестве M. Каждому			
$t \in \mathbb{Z}$	$t \in \mathbb{N}$	$t \in \mathbb{R}$	$t \in \mathbb{R}_+$
сопоставлено отображение $g^t : M \to M$ и выполняется свойство (*Д*.1)			
ДС – непрерывна, если			
f – гомеоморфизм	отображение f непрерывно	$f^t x$ непрерывно по (t, x)	
ДС – гладкая, если			
f – диффеоморфизм.	f – гладкое отображение	$f^t x$ гладко зависит от (t, x).	

Здесь:

f – **гомеоморфизм** означает, что функция f – биекция и f и f^{-1} непрерывны;

f – **гладкое отображение** означает, что функция f непрерывно дифференцируема;

f – **диффеоморфизм** означает, что функция f – биекция и обе функции f и f^{-1} непрерывно дифференцируемы.

Для полукаскада и каскада при $t \in \mathbb{N}$ отображение f^t является t-й итерацией функции f, где $f(x) = f^1(x)$, а для каскада при $t \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ – $|t|$-й итерацией функции f^{-1}, обратной функции f.

• Если поток гладкий,то существует $v(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f^t x$ – гладкое векторное поле на M (*поле фазовой скорости, производящее поле однопараметрической группы* f^t). В некоторых приложениях это – скорость, с которой поток сдвигает точки x с места. Поле фазовой скорости полностью определяет (порождает) поток: $f^t x_0$ при фиксированном x_0 и переменном t является решением дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным значением x_0, т.е.

$$f^t x_0 = x(t), \qquad \dot{x}(t) = v(x(t)), \quad x(0) = x_0.$$

Д.2. Траектории. Инвариантные множества

• При фиксированном x функция $t \mapsto a^t x$ называется *движением* точки x. (*Фазовой*) *траекторией* данной ДС, точки x или движения $t \mapsto f^t x$ называется образ этого отображения, т.е. множество $\{f^t x : \ t \in T\}$ состояний ДС, при условии, что в момент $t = 0$ ее состояние есть x_0.

Для каскада (и полукаскада) траектория – дискретное (не более чем счетное) множество. Для непрерывного потока траектория – линия, за исключением случая, когда x – положение равновесия, т.е. когда $f^t x$ при всех t (точка покоя).

В теории дифференциальных уравнений траектории называются фазовыми кривыми, положения равновесия – особыми точками (нули векторного поля фазовой скорости). В гладком случае траектория – интегральная кривая поля направлений.

Каждая траектория разбивается на положительную и отрицательную полутраектории. Множество $\{f^t x : \ t \geq t_0\}$ называется *положительной полутраекторией*, а множество $\{f^t x : \ t \leq t_0\}$ – *отрицательной*. Точка $x_0 = f^{t_0} x$ – *начальная точка* (начало) обеих полутраекторий, которые *исходят* из нее, или являются полутраекториями этой точки (а также и данной системы). При данном начале x_0 можно считать $t_0 = 0$ и заменить x на x_0.

• Траектория *периодическая*, если она является траекторией *периодического движения*, т.е. если $f^{t+\tau} x = f^t x$ при всех t и некотором $\tau \neq 0$. Такие τ называются *периодами* данного движения и точки x. При этом x называют периодической точкой данной системы и отображения (для каскада). Все периоды кратны *минимальному периоду* $\tau_0 > 0$.

Периодические траектории называют *циклами*.

Иногда к периодичности относят случай, когда $f^t x$ не зависит от τ. При этом $\tau_0 = 0$. Для каскада такая точка x – *неподвижная точка* (этого каскада и порождающего отображения), а для потока x – положение равновесия. Для потока часто неподвижные точки исключают из случая периодичности.

Периодическую траекторию называют *замкнутой траекторией* (она – замкнутая линия, если f^t непрерывно зависит от t).

Для периодических траекторий (включая положение равновесия потока) полутраектория совпадает с самой траекторией.

• *Инвариантным множеством* (*инвариантным многообразием*) системы называется множество $A \subset M$, состоящее целиком из траекторий, т. е. удовлетворяющее

$$f^t A = A \text{ при всех } t \in T.$$

Для каскада $f^k: \ k \in Z$ это эквивалентно

$$f^{-1}(A) = A, \qquad f(A) = A.$$

Для каскада при выполнении только условия $f(A) = A$, говорят о f-инвариантности.

В полугрупповом случае рассматриваются также следующие виды инвариантности:

1) $(f^t)^{-1}A = A$, $t \in T$ – двусторонняя инвариантность,
2) $f^t A = A$ – полуинвариантность, положительная инвариантность, инвариантность в положительном направлении.

• Замкнутое инвариантное множество A фазового пространства называется асимптотически устойчивым множеством или *аттрактором* (притягивающим), если выполняются свойства:

1. A устойчиво по Ляпунову, т. е. для любой его окрестности U найдется такая его окрестность V, что любая положительная полутраектория, начинающаяся в V, целиком содержится в U.
2. Если точка x достаточно близка к A, то $\rho(f^t x, A) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Пересечение конечного числа аттракторов – аттрактор.

Литература по итерациям и функциональным уравнениям

Основные монографии и обзоры

[M1] **Ацель Я.** Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений // Успехи мат. наук. – 1956. – **11**, № 3(69). – 3–68.

[M2] (**Ацель**) Aczél J. Vorlesungen über Funktionalgleichung und ihre Anwendungen. – Basel–Stuttgart, 1961.

[M3] (**Ацель, Домбре**) Aczél J., Dhombres J. Functional equations in several variables. – Cambridge: University Press, 1989.

[M4] (**Буль**) Boole G. A treatist on the calculus of finite differences. – Cambridge, 1860.

[M5] **Гельфонд А.О.** Исчисление конечных разностей. – М.: ГИФМЛ, 1952.

[M6] **Герсеванов Н.М.** Итерационное исчисление и его приложения. – Л.: Машстройиздат, 1950.

[M7] (**Канаппан**) Kannappan P. Theory of functional equations // Matsci. Rept. Inst. Math. Sce. – 1968. – № 48. (69.1266)

[M8] (**Гермэнеску**) Chermanescu M. Ecuatii functionale. – Bucaresti, 1960.

[M9] (**Колле, Экман**) Collet P., Eckman J.P. Iterated maps on the interval as dynamical systems. – Basel, Boston, Stuttgart: Birkhauser, 1980.

[M10] (**Кучма**) Kuczma M. A survey of the theory of functional equations // Publ. Elektrotechn. fak. / Univ.Beogradu. Ser. Mat. Fiz. – 1964. – № 130. (65.5611)

[M11] (**Кучма**) Kuczma M. Functional equations in a single variable / Monogr. math. PAN, № 46.. – Warszawa, 1968. (68.7612; 69.668)

[M12] (**Кучма, Хочевский , Гер**) Kuczma M., Choczewski B., Ger R. Iterative functional equations // Math. and Appl. Encycl. – Cambridge: Univ. Press. – 1990. – **32**. (91.964к)

[M13] **Марков А.А.** Исчисление конечных разностей. – Одесса, 1910.

[M14] **Маркушевич А.И.** Возвратные последовательности. – М.: Наука, 1975.

[M15] **Пелюх Г.П., Шарковский О.М.** Введение в теорию функциональных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1974. (74.1Б6)

[M16] **Петухов В.Р.** К теории итерационных функциональных уравнений. – М., 1978. – 12 с. – (Препринт / АН СССР. Ин-т теор. и эксперим. физ.; 92). (78.12Б7)

[M17] (**Пикар**) Picard Ch.É. Leçons sur quelques equations fonctionnelles avec des applications á divers problémes d'analyse et de physique mathématique. – Paris: Ganthier–Villars, 1950.

[M18] **Соколов Ю.Д.** Лiнiйнi рiзницевi рiвняння. – Киев: Вид. УАН, 1935.

[M19] (**Таргонский**) Targoński G. Topics in iteration theory. – Göttingen, Zürich: Vandenhoeck and Ruprecht, 1981.

[M20] (**Ярчик**) Jarczyk W. A recurrent method of solving iterative functional equations // Pr. nauk USl. Katowicach. – 1991. (92.5Б4)

Приводимая далее библиография содержит более 700 наименований (не только цитированной литературы). Большинство из этих работ посвящены функциональным уравнениям. Работы по итерационному исчислению (их не много) представляют в основном исторический интерес. Включение ряда работ связано с используемым математическим аппаратом. Практически не представлены работы по комплексным динамикам. Соответствующие ссылки имеются, например, в работах Макмуллена [1994], Бергвейлера [1993] и в монографии Колле, Экмана [M9].

Код в конце некоторых ссылок означает, что работа прореферирована в РЖ "Математика". Например, (92.5Б4) указывает на 19**92** год, № **5**, раздел **Б**, номер реферата **4**.

Абель (Abel N.H.)

[1826a] Untersuchung der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Grössen x und y wie $f(x,y)$, weiche die Eigenschaft haben, dass $f[z,f(x,y)]$ eine symmetrisch Function von x, y und z ist // J. Reine und Angew. Math. –№ 1. – 11–15.

[1826б] Untersuchung über die Heihe $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\dots$ // J. Reine und Angew. Math. –№ 1. – 311–339.

[1827] Ueber die Functionen, die der Gleichung $\varphi x+\varphi y=\psi[xfy+yfx]$ genugthun // J. Reine und Angew. Math.– № 2. – 386–394.

[1881] Oeuvres completes. – № 1–2. – Christiania.

Абель Ю. (Abel U.)

[1982] Sur les groupes d'iteration monotones // Publ. Math. Debrecen. – **29**. – 65–71.

Августинович (Augustynowicz A.)

[1985] Existence of a solution of some functional equation // Demonstr. math. – **18**, № 3. – 845–852. (86.10Б14)

Адамар (Hadamard J.S.)

[1944] Two works on iteration and related questions // Bull. of the Amer. Math. Soc. – **50**, № 2. – 67–75.

Адамашек (Adamaszek I.)

[1988] Solution of the generalized translation equation on some structures // Zesz. nauk. Univ. jagiall. Acta Math. – **27**. – 51–60. (89.7б6)

[1995] On generalized sine and cosine functions // Demonstr. math. – **28**, № 2. – 263–270. (96.12б9)

Азимов (Asimov D.)

[1967] Fractionale iterated functions // Techn. Engng. News. – **49**, № 1. – 69–71. (67.12б5)

Александер (Alexander D.S.)

[1996] An episodic history of complex dynamics from Schröder to Faton and Julia // Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo. – № 44. – 57–83. (97.9а24)

Александер, Блейр, Рубель (Alexander J.R., Blair Ch.E., Rubel L.A.)

[1995] Approximate versions of Cauchy's functional equation // J. Math. – **39**, № 2. – 278–287. (96.1б10)

Алсина (Alsina C.)

[1989] On some iterative functional equations involving t-norms // Eur. Conf. iterat. theory (ECII 87). Caldes de Matavella, 20–26 Sept., 1987. – Singapore. – 407–412. (91.9б7)

Аль–Саламы Н. и В. (Al–Salam N.A., Al–Salam W.A.)

[1979] On a functional equation // Can. Math. Bull. – **22**, № 2. – 235–237. (79.11б12)

Ангелутэ (Angheluţă Th.)

[1961a] On ecuatie functionala pentru sinus si alta pentru sinus iperbolic // Bull. sti. Inst. politehn. Cluj. – № 4. – 37–40.

[1961б] Ecuatie functională a logaritmulua // Там же. – 41–44.

Анчик (Anczyk L.)

[1969] On differentiable solutios of Böttcher's functional equation // Ann. pol. math. – **21**, № 2. – 217–221. (69.11б16)

Аристов И.И.

[1900] Об итерации функций // Изв. физ.-мат. общества при Казанском ун-те. Сер. 2. – № 10. – 14–49; 85–131.

Арнольд В.И.

[1957a] О представимости функций двух переменных в виде $x[\varphi(x)+\psi(y)]$ // Успехи мат. наук. – **12**, № 2. – 119–121.

[1957б] О функциях трех переменных // Докл. АН СССР. – **114**, № 4. – 679-681.

[1959] О представимости непрерывных функций трех переменных суперпозициями непрерывных функций двух переменных // Мат. сб. – **48(90)**, № 1. – 3–74.

[1962] О представлении непрерывных функций трех переменных суперпозициями непрерывных функций двух переменных // Мат. сб. – **56(98)**, № 3. – 392.

Аромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г.

[1988] Парадоксы мира нестационарных структур // Компьютеры и нелинейные явления. – М.: Знание.

Ацель[1] (Aczél J.)

[1948а] On mean values // Bull. Amer. Math. Soc. – **54**. – 392–400.

[1948б] Ueber eine klasse von funktionalgleichungen // Commun. Math. Helv. – **21**. – 247–256.

[1948в] Sur une équation fonctionnelle // Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe des Sci. – **2**. – 257–262.

[1949] Sur les operatios définies pour nombres réels // Bull. Soc. math. Fr. – **76**. – 59–64.

[1950а] Függvényegyenletek az alkalmazott matematikában // MTA III. Osztály Közleményei.– **1**. – 131–142.

[1950б] Ueber einparametrige transformationen // Publ. math. – **1**. – 243–247.

[1951] Többváltozós föggvényegyenletek. I // Mat. lap. – **2**. – 99–117.

[1952а] Bemerkungen über die Multiplikation von Vektoren und Quaternionen // Acta math. hung. – **3**, № 4. – 309–316.

[1952б] Többváltozós föggvényegyenletek II. // MTA AMI Közleményei. – **1**. – 311–333.

[1952в] On composed Poisson distributions III // Acta math. hung. – **3**. – 219–224.

[1953] Grundriss einer allgemeinen behandlung von eingen funktionalgleichungtypen // Publ. math. – **3**. – 119–132.

[1965] The general solution of two functional equations by reduction to functions additive in two variables and with the aid of Hamel Bases // Glas. mat.–fis., astronom. – **20**, № 1–2. – 65–72.

[1981] Notes on generalized information functions // Aequat. math. – **22**, № 1. – 97–107. (82.1Б15)

[1984] On history, applications and theory of functional equations // Funct. Equat. History, Appl. and Theory. – D. Reidel Publ. Co. – 3–12. (85.6Б12)

[1992] Monotonic solutions of the homogeneity equation and of similar functional equations. (Preliminary report): [Pap.] 29th Int. symp. Funct. Equat. Wolfville, June 3–10, 1991 // Aequat. math. – **43**, № 2–3. – 265–267. (93.8Б10)

Ацель, Алсина (Aczél J., Alsina C.)

[1994] On building indices // Util. Math. – **45**. – 17–31. (95.8Б11)

Ацель, Бенц (Aczél J., Benz W.)

[1975] Über das harmonische produkt und eine koruspondierende funktionalgleichung // Abh. Math. semin. Univ. Hamburg.– **43**. – 3–10. (76.4Б12)

Ацель, Гроно (Aczél J., Gronau D.)

[1988] Iteration, translation, commuting and differential equations // Ber. Math.–statist. Sek. Forschugsges. Joanneum. – № 285–296; 285/1–285/6. (88.12Б8)

Ацель, Кальмар, Микусинский (Aczél J., Kalmár L., Mikusinski J.G.)

[1951] Sur l'équation de translation // Stud. math. – **12**. – 112–116.

Ацель, Кучма (Aczél J., Kuczma M.)

[1989] On two mean value properties and functional equations associated with them // Aequat. math. – **38**, № 2–3. – 216–235. (90.11Б5)

[1991] On two related types of functional equations describing mean value properties // Zesz. nauk. Math.–fiz. (PS). – № 64. – 27–35. (92.3Б4)

[1]=Акцель=Ацел.

Ацель, Нг (Aczél J., Ng C.T.)

[1981] On general information functions // Util. Math. – **19**. – 157–170. (82.1б12)

Ацель, Форте, Нг (Aczél J., Forte B., Ng C.T.)

[1974] On a triangular functional equation and some applications, in particular to the generalized theory of informationassociated with them // Aequat. math. – **11**, № 1. – 11–30. (75.4б9)

Байгер (Bajger M.)

[1994] Iterative Pexider equation // Publ. Math. Debrecen. – **44**, № 1–2. – 67–77. (96.10б23)

[1996] On a generalized Pexider equation connected with the iteration theory // Publ. Math. Debrecen. – **48**, № 1–2. 77–88. (96.11а459)

Бакелли, Паганони (Bacchelli B., Paganoni L.)

[1979] Extension of solutions of some functional equations // Boll. Unione mat. ital. – **16**, № 3. – 1000–1012. (80.6б63)

Байракторович (Bajraktarevic M.)

[1953а] Sur certaines suites itérées // C.r. Acad. sci. – **236**, № 9. – 881–883. (55.1329)

[1953б] Sur certaines suites itérées. II // C.r. Acad. sci. –**236**, № 10. – 988–989. (55.1329)

[1953в] Sur certaines suites itérées. III // C.r. Acad. sci. – **236**, № 11. – 1125–1127. (55.1329)

[1953г] Sur les solutions d'une équation fonctionnelle // Hrvatsko Prirodoslovne Drustvo. Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. 2. – **8**. – 297–300. (59.504)

[1954] Sur certaines suites itérées // Djela. Nauč. društvo NR BiH. – **4**. – 33. (57.1524)

[1955] Sur les itérées continues et leur application á la recherche des fonctions limites de certaines suites itérées // Publs Inst. math. Acad. serbe sci. – **8**. – 13–22. (57.1530)

[1957а] Sur une solution monotone d'une équation fonctionnelle // Publs Inst. math. Acad. serbe sci. – **11**. – 43–52. (58.9939)

[1957б] Sur une équation fonctionnelle // Glasnik Mat.-Fiz. Astron. – **12**, № 3. – 201–205. (58.9938)

[1958а] Sur une généralisation de certaines suites itérées // Publs Inst. math. Acad. serbe sci. – **12**. – 27–38. (60.3179)

[1958б] Sur une équation fonctionnelle aux valeurs moyennes // Glasnik Mat.-Fiz. Astron. – **13**, № 4. – 243–248. (60.9081)

[1960] Sur une solution de l' équation fonctionnelle $\varphi(x) + \varphi[f(x)] = F(x)$ // Glasnik Mat.-Fiz. Astron. – **1**, № 2. – 91–98. (61.10б351)

[1963] Sur l'existence des solutions continues monotones de l'equation fonctionnelle $\varphi[x] + \varphi[f_\varphi(x)] = F(x)$ // Publ. Inst. math. – 1962 (1963). – **2**, № 16. – 75–80.

[1965а] Solution generale de l'equation fonctionnelle $f^N(x) = g(x)$ // Publ. Inst. math. Nouvelle ser. – **5**, № 19. – 115–124.

[1965б] Sur la solution generale de l'equation fonctionnelle $f^{N-m}hf^m x = gx$ // Там же. – 125–132.

[1973а] Sur les solutions de l'equation fonctionnelle $f^{m_{n-1}}gf^{m_{n-2}}g\cdots gf^{m_0}x = g^{n-1}x$ // Rad. Akad. nauka i umjetn. BiH. Od. Prirod. i mat. nauka. – **45**, № 12. – 49–59. (82.4б18)

[1973б] Sur la solution generale de l'equation fonctionnelle $fgfx = gx$ // Там же. – **45**, № 12. – 5–23. (82.4б17)

[1978] Sur les solutions convexes d'une equation fonctionnelle // Rad. Akad. nauka i umjetn. BiH. Od. Prirod. i mat. nauka. – – **61**. – 5–20.

[1981a] Sur une solution continue concave (convexe) de l'equation fonctionnelle $f(x+1) = f(x)/\{1+\varphi(x)f(x)\}$ // Rad. Akad. nauka i umjetn. BiH. Od. Prirod. i mat. nauka. – **68**. – 5–18. (82.9Б12)

[1981б] Sur une solution de l'equation fonctionnelle $\varphi fx - \varphi x = hx$ determinee par une solution de l'equation d'Abel et par une serie (divergente) // Там же. – 41–52.

Балинт (Balint S.)

[1972] Über die iterativen Funktionalgleichungen ersten Ranges // An. Univ. Timisoara. Sti. Mat. – **10**, № 2. – 155–166. (74.1Б7)

Бари (Bari N.)

[1930] Memoire sur la representation finie des fonctions continues // Mat. Ann. – **103**. – 145–248, 598–653.

Баркату М.А., Ришар–Жюнг Ф.

[1997] Формальные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений // Программирование. – № 1. – 24–42. (97.9a246)

Барон (Baron K.)

[1973] On the continuous solutions of a non-linear functional equation of the first order // Ann. pol. math. – **28**, № 2. – 201–205. (74.4Б23)

[1989] On the continuous solutions of the Golab–Schinzel equation // Aequationes Math. – **38**, № 2–3. – 155–162.

[1991] On a problem of Z.Daroczy // Zesz. nauk. Mat.–fiz. PS. – № 64. – 51–54. (92.3Б5)

[1993] M.Kuczmás papers on iterative functional equations: [Pap.] Austr.–pol. semin. funct. equat. Iterat. Theory. Graz. Oct. 24–26, 1991 // Graz. math. Ber. – № 316. – 1–6. (94.2Б9)

Барон, Симон (Baron K, Simon A.)

[1994] On approximate solutions of an iterative functional equation // Pr. nauk. USl. Katowicach. Ann. math. siles. – **8**. – 79–84. (96.10Б16)

Бартломийчик (Bartlomiejczyk L.)

[1995] Some remarks on the Daróczy equation // Pr. nauk. USl. Katowicach. Ann. math. siles. – **9**. – 47–63. (96.11Б6)

Бассалыго Л.А.

[1966] О представлении непрерывных функций двух переменных при помощи непрерывных функций одного переменного // Вест. МГУ. – № 1. – 58-63. (66.7Б115)

Бассанини (Bassanini P.)

[1986] Sopra un'equazione funzionale che si presenta in problemi di transmissione // Boll. Unione mat. Ital. – № 3. – 435–441. (87.12Б7)

Бауэр (Bauer H.)

[1987] Mittelwerte und Funktinalgleichungen // Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.–natur–wiss. R. – 1986 (1987). – 1–9.

Бахвалов С.В.

[1950] О приведении функции к виду определителя Массо // Уч. зап. Обл. пед. ин-та. – **15**; Труды кафедр. физ.-мат. фак-та. – М. –**1**. – 177–187.

[1954[О номограммах с бинарными полями // Уч. зап. Обл. пед. ин-та. – **21**. – 73–80.

Бахвалов Н.С.

[1956] О представлении функции $z = f(x,y)$ в виде $f(x,y) = \frac{A(x)-B(y)}{Cx-D(z)}$ // Учен. зап. Обл. пед. ин-та. – **39**; Труды кафедры мат. – М. – **3**. – 67–69.

Беббидж[2] (Babbage Ch.)

[1815] An essay towards the calculs of function // Philosophical Transactions of the royal society of London. – 389–423.

Безивен (Bézivin J.–P.)

[1990] Sur les equations fonctionnelles aux itérées // Aequat. math. – **39**, № 1. – 68–77. (94.7Б6)

Безивен, Грамэн (Bézivin J.–P., Gramain F.)

[1996] Solutions entiéres d'un systéme d'équations aux différences // Ann. Inst. Fourier. – **46**, № 2. – 465–491. (97.7Б309)

Безикович Я.С.

[1939] Исчисление конечных разностей. – Л.: Изд. ЛГУ.

Бейкер (Baker J.A.)

[1954] Einstein–numbers // Amer. Math. Mon. – **61**. – 39–41.

[1974] On the functional equation $f(x)g(y) = \prod_{i=1}^{n} h_i(a_i x + b_i y)$ // Aequat. math. – **11**, № 2, 3. – 154–162. (75.6Б4)

[1976a] On the functional equation $f(x)g(x) = p(x+y)q(x/y)$ // Aequat. math. – **14**, № 1–2. – P. 249–250. (76.10Б12)

[1976б] On the functional equation $f(x)g(y) = p(x+y)q(x/y)$ // Aequat. math. – **14**, № 3. – 493–506. (77.3Б9)

[1993] On the functional equation of Aczel and Chung // Aequat. math. – **46**, № 1–2. – 99–111. (94.11Б7)

Бейтмен, Эрдейи (Bateman H., Erdélyi A.)

[1953] Higher transcendental functions. **1**. – NY–Toronto–London: Mc. Graw–Hill Book Company, Inc. (Русский перевод: Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973).

Беллерт (Bellert S.)

[1957] On foundations of operational calculus // Bull. Acad. polon. sci. Ser. math., astron. et phys. – **5**, № 9. – 855–858.

Беллман (Bellman R.)

[1952] The iteration of power series in two variables // Duke Math. J. – **19**. – 339–347.

Бенц (Benz W.)

[1981] Die heavisidefunktion als spezielle Lösung ihrer funktionalgleichung // Aequat. math. – **23**, № 2, 3. – 151–155. (83.7Б7)

[1992] On the functional equation of distance preservance: [Pap.] 29th Int. symp. Funct. Equat., Wolfville, June 3–10, 1991 // Aequat. mat. – **43**, № 2, 3. – 266–267. (93.8Б12)

---

[2] =Бэббидж =Бэббедж.

Берг (Berg L.)

[1961] Zur operatorenrechnung für functionen einer diskreten veränderlichen // Stud. math. – **20**, № 3. – 227–243. (63.4б60)

[1989] Über die translationsgleichung // Wiss. Beitr. M.–Luther–Univ., Halle–Wittenberg. M. – № 58. – 19–28. (90.9б8)

[1991] Fünf mehrdimensionale funktionalgleichungen // Mitt. math. Ges. Hamburg. – **12**, № 3. – 697–703. (92.7б5)

[1993] The local structure of the solutions of the multidimensional translation equation // Aequat. math. – **46**, № 1–2. – 164–173. (94.1Iб8)

Бергвейлер (Bergweiler W.)

[1993] Iteration of meromorphic functions // Bull. Amer. Math. Soc. – **29**, № 2. – 151–188.

Бернштейн (Bernstein F.)

[1907] Ueber das Gauss'sche Fehlergesetz // Math. Ann. – **64**. – 417–447.

Бернштейн, Дойч (Bernstein F., Doetsch G.)

[1915] Zur theorie der konvessen funktionen // Math. Ann. – **76**. – 514–526.

Бетхер[3] (Böttcher L.E.)

[1897] Zasadnicze podstawy teoryi iteracyi // Pamietnik Towarzystwa Politechnicznego we Lwówie. – 4–54.

[1898] Beiträge zu der theorie der iterationsrechuung / Inaugural–Dissertation zur Erlang. d. Doctorwürde. – Leipzig.

[1898] Przyczynki do teoryi rachunku iteracyjnego (Автореферат) // Wiadomości mat. S. Dickstein. – **2**. 224-229.

[1900] Zasady racbunku iteracyjnego // Prace Mat.–fiz. – 1899-1900. – **10**. – 65–101; **12**. – 95–113; **13**. – 353–371.

[1903] Главнейшие законы сходимости итераций и приложение их к анализу // Изв. физ.–мат. общества. Казанский ун-т. Сер. 2. – **13**, № 1. – 1–37.

Бирюк С.А.

[1995] Ряд Тейлора для итераций регулярных функций // Тр. ВЦ СО РАН. Сер. Системное моделирование. – Новосибирск. – Вып. 3(21). – 1–16.

Битнер Х.А.

]1935] Необходимые и достаточные условия анаморфозируемости функций трех переменных // Номогр. сб. – М.-Л. – 77–104.

Битнер (Bitner R.)

]1959] On certain axiomatics for the operational calculus // Bull. Acad. polon. sci. Ser. math., astron. et phys. – **7**, № 1. – 1–9.

]1961] Operational calculus in linear spaces // Studia math. – **20**, № 1. – 1–18.

Блануша (Blanuša D.)

[1970] The functional equation $f(x+y-xy)+f(xy)=f(x)+f(y)$ // Aequat. math. – **5**, № 1. – 63–67. (71.9б10)

Богданов Ю.С.

[1961] О функциональном уравнении $x^n = t$ // Докл. АН БССР. – **5**, № 6. – 235–237. (62.3б18)

[3]=Бётхер.

Борель (Borel E.)

[1896] Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard sur les fonctions entières // Compt. Rend. – **122**. – 1045–1048.

Борелли (Borelli F.C.)

[1980] Some classes of solutions of the functional equation $f(L+x) = f(L) + f(x)$ // Riv. Mat. Univ. Parma. – **6**. – 37–45. (81.11Б23)

[1989] Solutions of a non-homogeneous Cauchy equation // Rad. mat. – **5**, № 2. – 213–222. (90.9Б9)

Борелли, Форти (Borelli F.C., Forti G.L.)

[1985] Costruzione delle soluzioni per classe di equazioni funzionali per funzioni di due variabili // Boll. Unione mat. Ital. – **B4**, № 3. – 813–828. (86.8Б9)

[1995] On a general Hyers-Ulam stability result // Int. J. Math. and Math. Sci. – **18**, № 2. – 229–236. (96.10Б6)

Браун, Хевитт (Brown G., Hewitt E.)

[1978] The functional equation $[f(\sin(x))]^2 + [f(\cos(x))]^2 = 1$ // Комплексный анализ и его приложения. – М. – 81–87. (78.10Б11)

Брауэр (Brauer G.)

[1961] Functional inequalities // Amer. Math. Mon. – **68**, № 7. – 638–642.

Брздек (Brzdek J.)

[1991] On the solutions of the functional equation $f(xf(y)^l + yf(x)^k) = tf(x)f(y)$ // Publ. Math. – **38**, № 3–4. – 175–185. (92.2Б5)

[1992] On a generalization of the Cauchy functional equation: [Pap.] 29th Int. Symp. Funct. Equat., Wolfville, June 3-10, 1991 // Aequat. math. – **43**, № 2–3. – 268. (93.8Б14)

[1993] Some remarks on solutions of the functional equation $f(x + f(x)^n y) = tf(x)f(y)$ // Publ. Math. Debrecen. – **43**, № 1–2. – 147–160. (94.5Б11)

[1995] On some conditional functional equations of Golab–Schinzel type // Ann. math. siles. – **9**. – 65–80. (96.11Б7)

[1995] On continuous solutions of some functional equations // Glas. mat. – **30**, № 2. – 261–267. (96.10Б13)

[1996] The Cauchy and Jensen differences on semigroups // Publ. Math. Debrecen. – **48**, № 1–2. – 117–136. (97. 9а153)

Бригс (Briggs K.)

[1995] Formal solution of functional equations via algorithmic differentiation // Austral. Math. Soc. Gaz. – **22**, № 2. – 64–67. (96.7Б7)

Бриллюэ–Белюо (Brilouët–Belluot N.)

[1992] On the solutions of the functional equation: $f(f(y)^k x + f(x)^l y) = \lambda f(x)f(y)$ // Publ. Math. Debrecen. – **41**, № 3–4. – 213–223. (93.5Б5)

Бруски, Калоджеро (Bruschi M., Calogero F.)

[1990] General analytic solution of certain functional equations of addition type // SIAM J. Math. Anal. – **21**, № 4. – 1019–1030. (91.9Б5)

Бруэйн (Bruijn N.G.)

[1979] An asymptotic problem on iterated functions // Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. – **A82**, № 2. – 105–110. (79.10Б6)

Брыдак (Brydak D.)

[1979] On functional inequalities in a single variable // Rozpr. mat. – № 160. – 48. (79.11б9)

[1983] Monotonic solutions of a nonlinear functional equation // Rev. roum. math. pures et appl. – **28**, № 9. – 789–793. (84.3б10)

Брыдак, Хочевский (Brydak D., Choczewcki B.)

[1976] Continuous solutions of functional inequality of second order // Demonstr. math. – **9**, № 2. – 221–228. (76.11б17)

[1978] Application of functional inequalities to determining one parameter families of solutions of a functional equation // Gen. Inequalites. 1. Proc. 1st Int. Conf., Oberwolfach, 1976. – Basel–Stuttgart. – 191–197. (79.6б11)

Бу Рим Чо (Boo Rim Choe)

[1992] A functional equation of Pexider type // Funkc. ekvacioj. – **35**, № 2. – 255–259. (94.7б11)

Бук (Buck R.C.)

[1972] On the functional equation $\varphi(x) = g(x)\varphi(\beta(x)) + u(x)$ // Proc. Amer. Math. Soc. – **31**, № 1. – 159–161. (72.9б12)

Бурдон (Bourdon P.S.)

[1996] The second iterate of a map with dense orbit // Proc. Amer. Math. Soc. – **124**, № 5. – 1577–1581. (96.11а458)

Бурек (Burek J.)

[1968] Über einseiting beschränkte Lösungen linearer Funktionalgleichung // Ann. pol. math. – **21**, № 1. – 67–72. (69.7б7)

Буркарт (Burkart U.)

[1983] Verallgemeinerte Schroederleichung und Prä-Schroederleichungen // Ann. pol. math. – **40**, № 2. – 109–114. (84.3б11)

Валорский (Walorski J.)

[1987] On a functional inequality // Aequat. math. – **32**, № 2, 3. – 213–215. (88.2б7)

[1997] Convex solutions of the Schróder equation in Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – **125**, № 1. – 153–158. (97.8б645)

Ванг (Wang Y.)

[1995] Two-scale dilation equations and the cascade algorithm // Random and Comput. Dyn. – **3**, № 4. – 289–307. (96.10б223)

Ванг, Агарвал (Wang P.J.Y., Agarwal R.P.)

[1996] On the oscillation of an mth order perturbed nonlinear difference equation // Arch. Math. – **32**, № 1. – 13–27. (97.9б227)

Васич (Vasic P.M.)

[1982] Note on a functional equation proposed by M. Bertolino // Publ. Elektrotechn. fak. Ser. Mat. i fiz. / Univ. Beogradu. – № 735–762. – 99–100. (84.10б4)

Васич, Миловановичи (Vasic P.M., Milovanovic G.V., Milovanovic I.Z.)

[1978] Some considerations on functional inequalities. (I) // Publ. Elektrotehn. fak. Ser. Mat. i fis. / Univ. Beogradu. – № 602–633. – 159–162. (80.11б4)

Васич, Яник (Vasic P.M., Janic R.R.)

[1969a] Sur quelques equations fonctionnelles du type de Pexider // Publ. Elektrotehn. fak. Ser. Mat. i fis. / Univ. Beogradu. – № 274–301. – 33–45. (70.7Б10)

[1969б] Generalisation d'une equation fonctionnelle // Там же. – 47–52. (70.7Б9)

Вегржик (Wegrzyk R.)

[1977] Continuous solutions of a linear homogenous functional equation // Ann. pol. math. – **35**, № 1. – 15–20. (88.10Б5)

Винце (Vincze E.)

[1962] Über eine Verallgemeinerung der Pexiderschen Functionalgleichungen // Stud. Univ. Babes–Bolyai. Math.-Phys. – **7**. – 103–106.

[1964] Verallgemeinerung eines Satres Über associative Functionen von mehreren Veränderlichen // Publ. Math. Debrecen. – **8**. – 68–74.

Витушкин А.Г.

[1964a] Некоторые свойства линейных суперпозиций гладких функций // Докл. АН СССР. – **156**, № 5. – 1003–1006.

[1964б] Доказательство существования аналитических функций многих переменных, не представимых линейными суперпозициями непрерывно дифференцируемых функций меньшего числа переменных // Докл. АН СССР. – **156**, № 6. – 1258–1261.

Витушкин А.Г., Хенкин Г.М.

[1967] Линейные суперпозиции функций // Успехи мат. наук. – **22**, вып. 1(133). – 77–124.

Вольтерра (Volterra V.)

[1931] Lecons sur la Théorie Mathématique de la Lutte sur la Vie. – Paris: Gauthier-Villars. (85.7Б9)

Воронцов Н.Н.

[1989] О доказательстве существования аналитического решения одного нелинейного функционального уравнения // Матер. 12 конф. мол. ученых Ун-та дружбы народов: мат., физ., химия. Москва, 17-22 апр., 1989. – М.: Ун-т дружбы народов. – Ч. 1. – 94–96. (83.7Б6)

Вукман (Vukman J.)

[1987] D'Alembertova funkcionalma enacba // Obz. mat. in fiz. – **34**, № 3. – 75–77. (87.9Б10)

Галуа (Galois E.)

[1897] Note sur la résolution des équations numériques // Oeuvres Mathe'm. – **13**.

Гамел[4] (Hamel G.)

[1905] Eine Basis aller Zahlen und unstetigen Lösungen der Funktional gleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$ // Math. Ann. – **60**. – 459–462.

Гаусс (Gauss C.F.)

[1809] Theoria motus corporum coelestium. – Hamburg.

[4]=Гамель=Хамел.

Геберт (Gebert H.)

]1995] A direct proof of a theorem of K. Baron // Ann. math. siles. – **9**. – 101–103. (96.1Б8)

Георгиу (Gheorghiu O.E.)

[1964] Über eine Klasse von Funktionalgleichungen // Enseign. math. – **10**, № 3–4. – 245–247. (65.3Б35)

[1974] Über einege rechteckförmige Funktionalgleichungen // Bull. math. Soc. sci. math. RSR. – 1972 (1974), **16**, № 4. – 429–436. (75.8Б11)

Гер Ж. (Ger J.)

[1985а] On analytic solutions of the equation $\varphi(f(x)) = g(x, \varphi(x))$. III // Pr. nauk USl. Katowicach. Ann. math. siles. – № 1. – 93–102. (86.9Б5)

[1985б] On analytic solutions of the nonlinear functional equation // Pr. nauk USl. Katowicach. Ann. math. siles. – № 1. – 103–115.

Гер Р. (Ger R.)

[1993] M. Kuczma's papers on functional equations in several variables: [Pap.] Austr.–Pol. Semin. Funct. Equat. Iterat. Theory. Graz., Oct. 24–26, 1991 // Graz. math. Ber. – № 316. – 17–28. (94.2Б10)

Гер, Саблик (Ger J., Sablik M.)

[1994] On Jensen equation on a graph // Zesz. Nauk. Mat.-fis. PSI. – № 68. – 41–52. (96.9Б14)

Гер, Шемрл (Ger R., Šemrl P.)

[1996] The stability of the exponential equation // Proc. Amer. Math. Soc. – **124**, № 3. – 779–787. (96.10Б7)

Геринг (Hering R.H.)

[1994] Asymptotically smooth functional equations // Int. Conf. Funct. Differ. Equat. and Appl., Moscow, Aug. 14–21, 1994: Abstr. – M., 35. (95.1Б2)

Герсеванов Н.М.

[1935] О графическом способе решения функциональных уравнений // Номографический сб. – М.–Л., 4–12.

[1941] О некоторых приложениях операции дробного и комплексного итерирования // Докл. АН СССР. – **31**. – 835–836.

[1943] О некоторых приемах решения функциональных уравнений с помощью итераций // Докл. АН СССР. – **39**. – 227–230.

Гиргензон (Girgensohn R.)

[1993] Functional equations and nowhere differentiable functions // Aequat. math. – **46**, № 3. – 243–256. (94.1Б9)

[1994] Nowhere differentiable solutions of a system of functional equations // Aequat. math. – **47**, № 1. – 89–99. (95.8Б6)

Гиркояжу (Ghircoiasiu N.)

[1961] Asupra unei ecuatii functionale cu trei functii necunoscute // Bull. stiiht. Inst. politehn. Cluj. – **4**. – 55–65. (64.7Б13)

[1963] O clasa de ecuatii functionale // Stud. Univ. Babes–Bolyai. Math.-phys. – **8**, № 1. – 55–71. (65.2Б47)

[1964] Ecuatia functionala a tangentei // Bull. stiiht. Inst. politehn. Cluj. – **7**. – 43–49. (65.3Б32)

Гостицкая (Goscicka K.)

[1990] On commutable functionas and Abel's equations // Zesz. nauk. AGH im. Stanislawa Staszica. Opusc. math. – № 6. – 59–76. (92.2б6)

Грасси, Инверници (Grassi F., Invernizzi S.)

[1995] Logistic dynamics with distributed lags // Rend. Ist. mat. Univ. Trieste. – **27**, № 1–2. – 157–170. (97.8б228)

Греви (Grévy A.)

[1894] Êtude sur les équations fonctionnelles // Ann. Sci. Ecole Norm. (3). – 11. – 249–323; – 1896. –13. –295–338.

Гроно (Gronau D.)

[1983a] Two iterative functional equations for power series // Aequat. math. – **25**, № 2, 3. – 233–246. (84.5б8)

[1983б] Two iterative functional equations for power series // Там же. – 318–319. (84.5б16)

[1985] Über die multiplikative Translations gleichung und idempotente Potenzreihen-vektoren // Aequat. math. – **28**, № 3. – 312–320. (85.12б24)

Гроно, Саблик (Gronau D., Sablik M.)

[1994] A functional equation arising from an asymptotic formula for iterates // Pr. nauk. USl. Katowicach. Ann. math. siles. – № 8. – 173–187. (96.10б19)

Гросс (Gross F.)

[1969] Entire solutions of the functional equation $\alpha(\beta(z)) = \alpha(\gamma(z)) + c$ // J. Indian Math. Soc. – 1968 (1969). – **32**, № 3–4. – 199–206. (70.5б9)

Гросс, Чун-Чун (Gross F., Chung-Chun Y.)

[1974] On periodic solutions of a functional equation // Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis. mat. e natur. – **56**, № 6. – 873–875. (76.6б5)

Гросс, Осгуд (Gross F., Osgood C.F.)

[1987] Further results on Fermat type equations and a characterization of the Chebyshev polynomials // J. Math. Anal. and Appl. – **121**, № 2. – 317–324. (87.7б6)

Гржаслевич (Grzaslewicz A.)

[1979] Some remarks to additive functions // Math. Jap. – **23**, № 5. – 573–578. (79.9б4)

Гумовский, Мира (Gumowski I., Mira C.)

[1964] Sur une solution particuliere explicite de l'equation fonctionnelle de Schroder // C. r. Acad. sci. – **259**, № 25. – 4476–4479. (65.8б10)

Давиденко Д.В.

[1985] Функциональные уравнения // Математическая энциклопедия. – М.: Изд. "Советская энциклопедия". – **5**. – 698–700; 700–705.

Даламбер (D'Alembert J.L.R.)

[1769] Mémoire sur les principes de mécanique // Hist. Acad. Sci. – Paris, 1769 (1778).

Данкевич (Dankiewicz K.)

[1989] On a approximate solutions of a functional equation in the class of differentiable functions // Ann. pol. math. – **49**, № 3. – 247—252. (89.11б5)

Дарбу (Darboux J.G.)

[1875] Sur la composition des forces en statique // Bull. sci. math. (1). – **9**. – 281–288.

[1880] Sur la théoréme fondamental de la géometrie projective // Math. Ann. – **17**. – 55–61.

Дарочи (Daroczy Z.)

[1962] Über die Funktionalgleichung $\varphi[\varphi(x)y] = \varphi(x)\varphi(y)$ // Acta Univ. Debrecen. Ser. Phys. et chim. – **8**. – 125–132. (64.7б15)

[1969] Über die Funktionalgleichung $f(xy)+f(x+y-xy) = f(x)+f(y)$ // Publ. Math. Debrecen. – **16**, № 1–4. – 129–132. (71.6б4)

[1971] On the general solution of the functional equation $f(x+y-xy)+f(xy) = f(x)+f(y)$ // Aequat. mat. – **6**, № 2, 3. – 130–132. (72.4б13)

[1980] Über die stetigen Lösungen der Aczel–Benz'chen Funktionalgleichung // Abh. math. Semin. Univ. Hamburg. – **50**. – 210–218. (81.4б9)

Дарсов, Фрэнк (Darsow W.F., Frank M.J.)

[1983] Associative functions and Abel–Schröder systems // Publ. math. – **30**, № 3–4. – 253–272. (84.9б5)

Диамон (Diamond P.)

[1971] Fractional iteration and a generalized Abel's equation in two variables // Aequat. math. – **6**, № 1. – 11–23. (72.2б17)

Диткин В.А., Прудников А.П.

[1966] Операционное исчисление // Итоги науки. Математический анализ. 1964. – М: ВИНИТИ. – 7–75.

Дитор (Ditor S.Z.)

[1979] Some binary representation of real numbers and odd solutions of the functional equation $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ // Aequat. math. – **19**, № 2, 3. – 160–182. (80.6б6)

Дмитриев А.А., Шапиро А.П.

[1979] Об одном функциональном уравнении теории обучения. – Владивосток. – 19 с. – (Препринт / ДНЦ АН СССР. Ин-т автоматики и процессов управления). (80.4б12)

[1982] Об одном функциональном уравнении теории обучения // Успехи мат. наук. – **37**, № 4. – 155–156. (82.12б6)

Домбрес (Dhombres J.G.)

[1977] Iteration lineaire d'ordre deux // Publ. Math. Debrecen. – **24**, № 3–4. – 277–287. (78.10б9)

Досс (Doss R.)

[1963] On the representation of the continuous functions of two variables by means of addition and continuous of one variables // Colloq. Math. – **10**, № 2. – 249–259.

Древняк, Калиновский (Drewniak J., Kalinowski J.)

[1977] Les relations entre les equations pre-Schroder. II // Ann. pol. math. – **33**, № 3. – 287–292. (77.9б4)

Дубикайтис (Dubikajtis L.)

[1964] Sur une caractersation de la fonction sinus // Ann. pol. math. – **16**, № 1. – 117–120. (65.8б9)

[1969] Sur certaines equations fonctionnelles verifiees par la fonction $\varphi(x) = x^{-1}$ // Ann. pol. math. – **22**, № 2. – 199–205. (70.5б11)

Дубикайтис, Ференс, Гер, Кучма (Dubikajtis L., Ferens C., Ger R., Kuczma M.)

[1973] On Mikusinski's functional equation // Ann. pol. math. – **28**, № 1. – 39–47. (73.11б7)

Дубровский В.М.

[1954] О методе итераций // Успехи мат. наук. – **9**, № 3 (61). – 127–133. (55.5086)

Дудек (Dudek Z.)

[1992] On a certain functional equation associated with the paraconcave entropies // Demonstr. math. – **25**, № 4. – 809–815. (94.369)

Дхармадхикачи (Dharmadhikari S.W.)

[1965] On the functional equation $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ // Amer. Math. Mon. – **72**, № 8. – 847–851. (66.8620)

Дьяк (Dyjak C.)

[1982] On a characterization of trigonometrical and hyperbolic functions by functional equations // Publ. Inst. math. – **32**. – 45–48. (83.1063)

[1986] BV-solution of a linear functional equations // Publ. Math. – **33**, № 1–2. – 83–85. (87.167)

[1990] BV-solution of nonlinear functional equations of higher order // Demonstr. math. – **23**, № 2. – 417–423. (92.167)

Дьяк, Матковский (Dyjak C., Matkowski J.)

[1987] BV–solution of nonlinear functional equations // Glas. mat. – **22**, № 2. – 335–342. (89.2615)

Дюфренуа, Писот (Dufresnoy J., Pisot C.)

[1963] Sur la relation fonctionnelle $f(x+1) - f(x) = \varphi(x)$ // Bull. Soc. Math. Belg. – **15**, № 3. – 259–270. (64.9622)

Евлампиев Н.П., Филиппов И.Е.

[1990] Периодическое решение линейного функционального уравнения с переменным коэффициентом // Исслед. по прикл. мат. – **17**. – 46–50. (91.562)

Егер (Jäger R.)

[1986] Charakterisierung des Cotangens mit Replikativität // Manuscr. math. – **56**, № 2. – 167–175. (86.1268)

Егорычев Г.П.

[1977] Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. – Новосибирск: Наука.

Жан (Zhang W.)

[1990] Discussion of the differentiable solutions of the iterated equation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^i(x) = F(x)$ // Nonlinear Anal., Theory, Meth. and Appl. – **15**, № 4. – 387–398. (91.563)

Ждун (Zdun M.C.)

[1971] On the uniqueness of solutions of the functional equation $\varphi(x + f(x)) = \varphi(x) + \varphi(f(x))$ // Aequat. math. – **7**, № 1. – 124–128. (72.8611)

[1972] On the uniqueness of solutions of the functional equation $\varphi(x + f(x)) = \varphi(x) + \varphi(f(x))$ // Aequat. math. – **8**, № 3. – 229–232. (73.768)

[1974] Sur la solution generale de l'equation fonctionnelle $\varphi(x)\varphi(f(x)) = 0$ // Rocz. PTM. Ser. 1. – **18**, № 1. – 123–128. (75.4611)

[1976а] Solutions of bounded variation of a linear homogeneous functional equation // Зб. рад. Мат. ин-т. – № 1. – 81–83. (77.366)

[1976б] Solutions of bounded variation of a linear homogeneous functional equation in the indeterminate case // Aequat. math. – **14**, № 1–2. – 143–158. (76.11616)

[1977a] Differentiable fractional iteration // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. Astron. et Phys. – **25**, № 7. – 643–646. (78.5б8)

[1977б] On integrable solutions of Abel's functional equation // Glas. mat. Ser. 3. – **12**, № 1. – 49–59. (78.3б11)

[1977в] Some remarks on the continuous solutions of finite variation of a linear functional equation // Rev. roum. math. pures et appl. – **22**, № 6. – 863–869. (78.3б12)

[1985a] Note on solutions of bounded variation of a linear non-homogeneous functional equation // Mathematice (RSR). – **27**, № 1. – 79–89. (86.12б11)

[1985б] Note on solutions of bounded variation of a linear non-homogeneous functional equation // Anal. Numer. et Theor. Approxim. – **27**(50), № 1. – 79–89. (86.4б17)

[1985в] On embedding of homeomorphisme of the circle in a continuous flow, Iteration theory and its functional equations (Proceedings Schloss Hofen, 1984) // Lect. Notes Math. 1163. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 218–231.

[1991a] On diffeomorphic solutions of simultaneous Abel's equations // Arch. Math. – **27A**. – 123–131. (92.1б3)

[1991б] On continuous iteration groups of fixed-point tree mappings in $\mathbb{R}^n$ space // European Conference on Iteration Theory (Batschuns, 1989). World Sci. – NY: Publishing, River Edge. – 362–368.

[1992] On the orbits of disjoint groups of continuous functions // Rad. mat. – **8**, № 1. – 41–48.

[1993] The structure of iteration groups of continuous functions // Aequat. math. – **46**. – 19–37.

Жолли (Jolley I.B.W.)

[1960] Summation of Series. – NY: Dover Publications.

Жон (Zhong J.[5])

[1995] On a generalized functional equation of Abel // Huanan ligong daxue xuebao. Ziran kexue ban = J. S. China Univ. Technol. Natur. Sci. – **23**, № 9. – 9–15. (96.11б14)

[1996] On the functional equations $\Sigma_{i=1}^{s} F_i(a_i x + \beta_i y) = \Sigma_{k=1}^{n} P_x(x) q_k(y)$ III // Там же. – **24**, № 6. – 119–123. (97.7б18)

Жон, Каннапан, Нг, Саху (Chung J.K., Kannappan P.L., Ng C.T., Sahoo P.K.)

[1989] Measures of distance between probability distributions // J. Math. Anal. Appl. – **139**. – 280–292.

Жон, Эбанкс, Нг, Саху (Chung J.K., Ebanks B.R., Ng C.T., Sahoo P.K.)

[1994] On a functional equation connected with Rao's quadratic entropy // Proc. Amer. Math. Soc. – **120**, № 3. – 843–848. (94.8б3)

[1995] On a quadratic-trigonometric functional equation and some applications // Trans. Amer. Math. Soc. – **347**, № 4. – 1131–1161. (96.3б17)

Жон, Эбанкс, Нг, Саху, Зен (Chung J.K., Ebanks B.R., Ng G.T., Sahoo P.K., Zeng W.B.)

[1995] On generalized rectangular and rhombic functional equations // Publ. Math. Debrecen. – **47**, № 3–4. – 249–270. (96.10б30)

[5]=Zhong J.

Жордан (Jordan Ch.)

[1947] Calculs of finite differences. – NY: Chelsea Publishing Company.

Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.

[1988] Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. – М.: Наука.

Заславский Г.М., Сынах В.С.

[1970] О свойствах перемешивания одного преобразования, возникающего в нелинейных колебаниях // Изв. вузов. Радиофизика. – **13**, № 4. – 604–607.

Зигель[6] (Siegel C.L.)

[1942] Iteration of analytic functions // Ann. Math. – **43**. – 607–616.

Зурек–Этгенс (Zurek-Etgens M.)

[1979] La definition et le prolongement de la solution de l'equation de translation // Demonstr. math. – **12**, № 4. – 889–902. (80.12Б6)

Иенсен[7] (Jensen J.L.W.V.)

[1906] Sur les fonctions convexes et les inégalite's entre les valeurs moyennes // Acta math. – **30**. – 179–193.

Изенкраэ (Isenkrahe C.)

[1888] Über die Anwendung iterirter Functionen zur Darstellung der Wurzeln algebraischer und transcendenter Gleichungen // Math. Ann. – **XXXI**. – 309.

[1897] Dar Verfahren der Functionswiederholung, seine geometrische Veranschaulichung und algebraische Anwendung. – Leipzig.

Иогансен (Johansen S.)

[1966] An application of extreme-point methods to the representation of infinitely divisible distributions // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. – **5**. – 304–316.

Исаакс (Isaacs R.)

[1950] Iterates of fractional order // Can. J. Math. – **2**. – 409–416.

Кейриес, Дарсоу, Франк (Kairies H., Darsow W.F., Frank M.J.)

[1988] Functional equations for a function of van der Warden type // Rad. mat. – **4**, № 2. – 361–374. (89.8Б6)

Калич, Матковский (Kahlig P., Matkowske J.)

[1994] On some extensions of the Golab–Schinzel functional equation // Pr. nauk. USl. Katowicach. Ann. math. siles. – № 8. – 13–31. (96.10Б14)

Калич, Швайгер (Kahlig P., Schwaiger J.)

[1994] Transforming the functional equation of Golab–Schinzel into one of Cauchy // Pr. nauk. USl. Katowicach. Ann. math. siles. – № 8. – 33–38. (96.10Б15)

Камински (Kaminski A.)

[1996] On a generalization of the entropy equation // Zesz. nauk. Mat.-fiz. PSI. – № 72. – 99–110. (96.11Б10)

---

[6] =Седжел.

[7] =Йенсен.

Каниццо (Cannizzo A.)

[1984] Sullèquazione funzionale $f(xy) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$ // Rend. semin. mat. / Univ. e Politecn. Torino. – **42**, № 3. – 153–164. (86.8Б10)

[1994] Analytic Kernels for integral representation of solutions of a functional equation // Boll. Unione mat. Ital. B. – **8**, № 4. – 929–946. (95.7Б5)

Каннапан (Kannappan P.L.)

[1965] On the functional equation $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ // Amer. Math. Mon. – **72**, № 4. – 374–377. (66.5Б6)

[1968а] A functional equation for the cosine // Can. Math. Bull. – **11**, № 3. – 495–498. (69.8Б13)

[1968б] On cosine and sine functional equations // Ann. pol. math. – **20**, № 3. – 245–249. (69.5Б11)

[1969] On sine functional equation // Stud. sci. math. hung. – **4**, № 1–4. – 331–333. (70.5Б6)

[1980] On directed divergence, inaccuracy and a functional equation connected with Abel. II // Period. math. hung. – **11**, № 3. – 213–219. (81.3Б6)

[1982] Information functions on open domain. IV // Math. Repts Acad. Sci. Can. – **4**, № 4. – 207–212. (83.2Б10)

[1992] Characterization of polynomials: [Pap] 29th Int. Symp. Funct. Equat., Wolfville, June 3–10, 1991 // Aequat. math. – **43**, № 2, 3. – 273. (93.8Б22)

Каннапан, Саху (Kannappan P.L., Sahoo P.K.)

[1992] Kullback–Leibler type distance measures between probability distributions // J. Nath. Phy. Sci. – **26**. – 443–454.

[1993] Cauchy difference – a generalization of Hosszu functional equation // Proc. Nat. Acad. Sci. India. – **A 63**, № 3. – 541—550. (94.11Б10)

Каннапан, Саху, Жон (Kannappan P.L., Sahoo P.K., Chung J.K.)

[1993] On a functional equation associated with the symmetric divergence measures // Util. Math. – **44**. – 75–83. (94.7Б12)

[1994] An equation associated with the distance between probability distributions // Pr. nauk. USl. Katowicach. Ann. math. siles. – № 8. – 39–58. (96.10В18)

Канторович Л.В.

[1948] О методе Ньютона для функциональных уравнений // Докл. АН СССР. – **59**, № 7. – 1237–1240.

Каренская (Karenska Z.)

[1970] On the functional equation $F(x \cdot y) = F(x) \cdot F(y)$ // An. Univ. Timisoara. Sti. Mat. – **8**, № 1. – 47–50. (71.12Б8)

Качмаж (Kaczmarz St.)

[1924] Sur l'équations fonctionnelle $f(x) + f(x+y) = \varphi(y)f(x+\frac{y}{2})$ // Fundam. Math. – **6**. – 122–129.

Каччополи (Cacciopoli R.)

[1928] L'equazione funzionale, f(x+y)=F[f(x),f(y)] // Ciornale Battaglini. – **3**. – № 66. – 1–6.

Кац (Kac M.)

[1937] Une remarque sur les equations fonctionnelles // Comment. Math. helv. – **9**. – 170–171.

Кенжегулов Х.К., Шарковский А.Н.

[1965] О свойствах множества предельных точек итерационной последовательности непрерывной функции // Волж. мат. сб. – Изд-во Куйбышевского пед. ин-та. – Вып. 3. – 343–348.

Кестельман (Kestelman H.)

[1947] On the fonctional equation $f(x+y) = f(x) + f(y)$ // Fundam. Math. – **3**. – 144–147. (Reprod. 1962. – **34**). (63.6Б15)

Кечкич (Kečkič J.D.)

[1981] A few remarks on automorphic functions // Publ. Inst. math. – **30**. – 69–71. (83.2Б11)

[1984] On general solutions of some functional equations // Publ. Inst. math. – **35**. – 75–77. (85.6Б21)

Кёниг (Koenigs G.)

[1883] Recherches sur les substitutions uniformes // Bull. sci. math. (2). – **VII**. – 340.

[1884] Recherches sur les intégrales de certaines équationes fonctionnelles // Ann. de l'Ec. Norm. (3). – **I**. – 3–41.

[1885] Nouvelles recherches sur les intégrales de certaines équationes fonctionnelles // Ann. de l'Ec. Norm. (3). – **II**. – 385.

Кизеветтер (Kiesewetter H.)

[1965] Über die arctan-funktionalgleichung, ihre mehrdeutigen, stetigen Lösungen und eine nichtstetige gruppe // Wiss. Z. Friedrich–Schiller–Univ. Jena. Math.-naturwiss. Reihe. – 14, № 5. – 417–421. (67.9Б17)

Киу (Qiu H.)

[1994] II. On meromophic solutions of functional equation $f(z^2) = q(f(x))$ // J. Nanuing. Univ. Math. Biquarterly. – **11**, № 1. – 94–100. (95.8Б14)

Кнастер (Knaster B.)

[1949] Sur une équivalence pour les fonctions // Colloq. Math. – **2**. – 1–4.

Кнесер (Kneser H.)

[1950] Reelle analytisèhe Lösungen der Gleichung $\phi\{\phi(x)\} = e^x$ und verwandte Funktionalgleichungen // J. reine angew. Math. – **187**. – 56–57.

Кноп (Knop J.)

[1991] Lip $\hat{C}$-solution depending on an arbitrary function on a function equation // Zesz. nauk. Mat. – № 22. – 89–96. (92.6Б8)

Ковалевский Н.П.

[1992] К аналитической структуре решений функциональных и функционально-дифференциальных уравнений // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. наук. – № 2. – 15–17. (93.1Б6)

Койфман (Coifman R.)

[1964a] Sur l'equation fonctionnelle d'Abel-Schröder et l'iteration continue // C. r. Acad. sci. – **258**, № 7. – 1976–1977. (64.11Б15)

[1964б] Sur l'equation fonctionnelle d'Abel–Schröder et l'iteration continue // Там же. – № 22. – 5324–5325. (65.1Б18)

[1965] Sur l'unicite des solutions de l'equation D'Abel–Schröder et l'iteration continue // J. Austral. Math. Soc. – **5**, № 1. – 36–47. (65.1Б9)

Койфман, Кучма (Coifman R.R., Kuczma M.)

[1969] On asymptotically regular solutions of a linear functional equation // Aequat. math. – **2**, № 2–3. – 332–336. (70.1б4)

Колелла, Хейл (Colella D., Heil Ch.)

[1994] Characterizations of scaling functions: continuous solutions // SIAM J. Matrix Anal. and Appl. – **15**, № 2. – 496–518. (95.1б1)

Коллет, Экман (Collet P., Eckmann J.P.)

[1980] Iterated maps on the interval as dynamical systems. – Basel–Boston–Stuttgart–Birkhauser.

Коллинс (Collins E.A.Ch.L.)

[1827] Nouvelles recherches sur la theorie des puissances fonctionales. – Paris: Gauthier–Villars.

Колмогоров А.Н.

[1956] О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных // Докл. АН СССР. – **108**, № 2. – 179–182.

[1957] О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и сложения // Докл. АН СССР. – **114**, № 5. – 953–956.

Колмановский В.Б., Шейхет Л.Е.

[1996] Асимптотическое поведение некоторых систем с дискретным временем // Автомат. и телемех. – № 12. – 58–66. (97.8б230)

Коминек (Kominek Z.)

[1974] A uniqueness criterion for fractional iteration // Ann. pol. math. – **30**, № 2. – 191–203. (75.1б11)

[1986] On the functional equations $\varphi(x) = \alpha\varphi(\alpha x) + (1-\alpha)\varphi(1-(1-\alpha)x)$ // Bull. math. Soc. sci. math. RSR. – **30**, № 4. – 327–334. (87.9б8)

Кондорсе (Condorcet M.J.A.N. d')

[1777] Sur quelques series infinies, dont la somme peut entre exprimée par de fonction analytiques d'une forme particuliere // Acta Acad. Sci. Petropolitanae. – **I**. – 34–38.

Кордилевский, Кучма (Kordylewski J., Kuczma M.)

[1959] On the functional equation $F(x, \varphi(x), \varphi[f(x)]) = 0$ // Ann. pol. math. – **7**. – 21–32.

[1960] On some linear functional equations. I, II // Ann. pol. math. –**9**, № 2. – 119–136.

Коржак, Магда (Korczak J., Migda M.)

[1995] Comparison theorems for difference equations // Fasc. math. – № 25. – 75–80. (97.8б229)

Коркин (Korkine M.A.)

[1882] Sur un probléme d'interpolation // Bull. sci. math. (2). – **6**. – 228–242.

Корнштедт (Kornstaedt H.-J.)

[1975] Funktionalungleichungen und iterationsverfahren // Aequat. math. – **13**, № 1–2. – 21–45. (76.7б10)

Костржевский (Kostrzewski T.)

[1993] Existence and uniqueness of $BC[a,b]$ solutions of nonlinear functional equation // Demonstr. math. – **26**, № 1. – 61–74. (94.3Б10)

[1993] BC-solutions of nonlinear functional equation – a nonuniqueness case // Demonstr. math. – **26**, № 2. – 275–285. (96.3Б19)

Костырко (Kostyrko P.)

[1987] O jednej metode riešenia funkcionalnych rovnic // Mat. obz. – **29**. – 65–71. (90.9Б7)

[1989] Generalized Jensen's and Lobatchewski's functional equations and their local forms // Rad. mat. – **5**, № 1. – 5–13. (90.2Б9)

Кофман (Kaufman A.)

[1968] Introduction a la combinatorique en vue des applications. – Paris: Dunod. (Пер.: Введение в прикладную комбинаторику. – М.: Наука, 1975).

Кох (Koh E.L.)

[1994] On Hosszu's functional equation in distributions // Proc. Amer. Math. Soc. – **112**. – 1123–1143.

Кох, Рен (Koh E.L., Ren G.)

[1994] On the solutions of the functional equation $f(x+y)+g(xy)=h(x)+k(y)$ // Integr. Transforms and Spec. Funct. – **2**, № 2. – 117–130. (95.8Б10)

Кошар (Coshard M.)

[1982] Etudem des solutions de l'equation fonctionnelle de Feigenbaum // Asterisque. – № 98, 99. – 143–162. (83.12Б5)

Коши (Cauchy A.L.)

[1821] Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. 1. Analyse algébrique. – Paris: Debure; Qeuvres complètes. Ser. 2. – **3**. – 98–105, 220.

Крапеж, Тейлор (Krapež A., Taylor M.A.)

[1985] On the Pexider equation // Aequat. math. – **28**. – 170–189.

Кржешовяк–Дыбец (Krzeszowiak–Dybiec Z.)

[1980] Existence of differentiable solutions of a system of functional equations of first order // Ann. pol. math. – **37**, № 2. – 119–129. (81.2Б11)

Кристенсен, Фишер (Christensen J.P.R., Fischer P.)

[1994] Linear independence of iterates and meromorphic solutions of functional equations // Pros. Amer. Math. Soc. – **120**, № 4. – 1137–1143. (94.11Б5)

Крстичи (Crstici B.)

[1976] Quélques remarques sur une equation fonctionnelle liee avec l'equation fonctionnelle de Jensen–Carmichael // Publ. Elektrotehn. fak. Ser. Mat. i Fis. / Univ. Beogradu. – 1976 (1977). – № 544–576. – 56–58. (77.11Б12)

Крстичи, Гэвута, Неагу (Crstici B., Găwuta P., Neagu M.)

[1988] About a functional inequality // Lucr. semin. mat. i fiz. Inst. politehn. Timisoara. – № noiem. – 66–68. (94.3Б12)

Крстичи, Мутян, Ворническу (Crstici B., Muntean I., Vornicescu N.)

[1983a] General solution of the arctangent functional equation // An. Numer. Theor. approxim. – **12**, № 2. – 113–123. (85.6Б20)

[1983б] General solution of the arctangent functional equation // Prepr. Bades–Bolyai Univ. fac. Math. Res. semin. – № 2. – 45–50. (84.10Б6)

Крюппель (Krüppel M.)

[1980] Ein eindeutigkeitssatz für stetige Lösungen von funktionalgleichungen // Publ. math. – **27**, № 3–4. – 201–215. (81.7Б10)

Кубо (Kubo T.)

[1990] Inequalities of the form $f(g(x)) \geq f(x)$ // Math. Mag. – **63**, № 5. – 346–348. (91.9Б6)

Кубо, Вакил (Kubo T., Vakil R.)

[1996] On Conway's recursive sequence // Discrete Math. – **152**, № 1–3. – 225–252. (97.8В214)

Кулявик (Kulawik M.)

[1980] Rozwiazania polciagle i ciagie pewnego rownania funkcyjnego // Zesz. nauk. PSl. – № 608. – 65–77. (81.2Б12)

Курепа (Kurepa S.)

[1964] The Cauchy functional equation and scalar product in vector spaces // Glas. mat.–fiz. astronom. – **19**. – 23–36.

[1965] Remarks on the Cauchy functional equation // Publ. Inst. math. Nouvelle ser. – **5**(19). – 85–88.

Кучко Л.П.

[1986а] Линейные функциональные уравнения от одной переменной // Теория функций, функц. анализ и их прил. – № 46. – 48–51. (86.8Б13)

[1986б] О существовании и единственности локальных решений функциональных уравнений // Функц. анализ и его прил. – **20**, № 4. – 83–84. (87.3Б2)

[1987] Функциональные уравнения с вырожденным преобразованием аргумента // Вестн. Харьк. ун-та. – № 298. – 98–101. (87.8Б7)

Кучма (Kuczma M.)

[1959а] On convex solutions of the functional equation $g[\alpha(x)] - g(x) = \varphi(x)$ // Publs math. – **6**,№ 1–2. – 40–47. (60.7791)

[1959б] On the functional equation $\varphi(x) + \varphi[f(x)] = F(x)$ // Ann. polon. math. – **6**, № 3. – 281–287. (60.12998)

[1959в] Note on convex functions // Ann. Univ. scient. budapest. Sec. math. – **2**. – 25-26. (61.11Б235)

[1960а] General solution of a functional equation // Ann. pol. math. – **8**, № 2. – 201–207. (61.3Б368)

[1960б] On continous solutions of a functional equation // Ann. polon. math. – **8**, № 2. – 209–214. (61.3Б369)

[1960в] Remarks on some functional equations // Ann. polon. math. –**8**, № 3. – 277–284. (61.9Б349)

[1960г] On the form of solutions of some functional equations // Ann. polon. math. – **9**, № 1. – 55–63. (61.11Б254)

[1961а] On some functional equations containing iterations of the unknown function // Ann. pol. math. – **11**, № 1. – 1–5. (63.8Б9)

[1961б] On the functional equation $\varphi^n(x) = g(x)$ // Ann. pol. math. – **2**. – 161–175.

[1961в] Sur une equation fonctionnelle // Mathematica (RPR). – **3**, № 1. – 79–87. (62.12Б13)

[1961г] A uniqueness theorem for a linear functional equation // Glas. mat.–fiz. i astron. – **16**, № 3–4. – 177–181. (63.2Б14)

[1961д] General solution of the functional equation $\varphi[f(x)] = G(x, \varphi(x))$ // Ann. pol. math. – **9**, № 3. – 275–284. (61.12б279)

[1961е] On monotonic solutions of a functional equation. I // Ann. polon. math. – **9**, № 3. – 295–297. (61.11б253)

[1961ж] On monotonic solutions of a functional equation. II // Ann. polon. math. – **10**, № 2. – 161–166. (63.8б12)

[1961з] Równania funkcyjne i ich znaczenie we wspólczesnej mathematyce // Roczn. Polsk. towarz. mat. Ser. 1. – **6**. –175–211. (62.9б13)

[1962а] O pewnyck rownaniach funkcyjnych, ktorych rozwiazania sa przedstawialne prsy pomocy funkcyi gamma Eulera // Zesz. nauk. Wyzsza szkola ped. Katowicach. – № 3. – 71–88. (69.5б15)

[1962б] On a recurrence relation // Colloq. math. – **9**, № 1. – 105–108. (63.4б222)

[1962в] A remark on commutable functions and continuous iterations // Proc. Amer. Math. Soc. – **13**, № 6. – 847–850. (63.9б4)

[1962г] On the functional equation $f(x+y) = f(x) + f(y)$ // Fundam. math. – **50**, № 4. – 387–391. (63.5б18)

[1964а] Note on Schröder's functional equation // J. Austral. Math. Soc. – **4**, № 2. – 149–151. (65.2б45)

[1964б] On a characterization of the cosine // Ann. pol. math. – **16**, № 1. – 53–57. (65.8б8)

[1964в] Sur une equation fonctionnelle qui caracterise la fonction $f(x) = x^{-1}$ // Publ. Inst. math. – **4**. – 121–124. (65.7б13)

[1965а] On convex solutions of Abel's functional equation // Bull. Pol. Acad. Sci. Math., astron. et phis. – **13**, № 9. – 645–648. (66.8б22)

[1965б] Bemerkungen über die Klassifikation der Funktionalgleichungen // Rocz. PTM. Ser. 1. – **9**. – 169–183.

[1967а] Sur l'equation fonctionnelle de Böttcher // Mathematica (RSR). – **8**, № 2. – 279–285. (68.2б17)

[1967б] Un theoreme d'unicite pour l'equation fonctionnelle de Bötcher // Mathematica (RSR). – **9**, № 2. – 285–293. (68.8б13)

[1968] Analytic solutions of a linear functional equation // Ann. pol. math. – **21**, № 3. – 297–303.

[1969] Fractional iteration of differentiable functions // Ann. pol. math. – **22**, № 2. – 217–227. (70.5б8)

[1970] Problems of uniqueness in the theory of functional equations in a single variable // Zesz. nauk. Uniw. jagiall. Pr. mat. – **223**, № 14. – 41–48. (71.5б13)

[1970] Единственность решений функциональных уравнений с одной переменной // Дифференц. уравнения с отклоняющимся аргументом. – Киев, 187–199. 78.8б2)

[1971] Remarks concerning the general solution of a functional equation // Bull. Sti. si tehn. Inst. politehn. Timisoara. Ser. Mat.-fiz.-mec. teor. si appl. – **16**, № 2. – 155–165. (74.2б9)

[1972] Special solutions of a functional equation // Ann. pol. math. – **27**, № 1. – 29–32. (73.4б12)

[1973] A contribution to the theory of fractional iteration of diffentiable functions // Demonstr. math. – **6**, № 1. – 181–189. (74.9б15)

[1976а] Various aspects of the functional equation of Schröder // Colloq. int. CNRS. – № 229. – 245–257. (77.7б4)

[1976б] Regularly varying solutions of a linear functional equation // J. Austral. Math. Soc. – **22**, № 2. – 135–143. (77.5б4)

[1977а] On some alternative functional equations // Aequat. math. – **16**, № 3. – 322. (78.7б5)

[1977б] General continuous solution of a linear homogenous functional equation // Ann. pol. math. – **35**, № 1. – 21–25. (78.8б7)

[1979] Non–negative continuous solutions of a functional inequality // Ann. pol. math. – **36**, № 1. – 73–84. (79.11б8)

[1980] Regular fractional iteration of convex functions // Ann. pol. math. – **38**, № 1. – 95–100. (81.5б17)

[1987] On some properties of solutions of a functional equation // Zesz. nauk. AGH. im. Stanislawa Staszica. Opusc. math. – № 3. – 37–41. (88.11б8)

[1988] A generic property of a linear functional equation // Zesz. nauk. AGH. im. Stanislawa Staszica. Opusc. math. – № 4. – 139–144. (89.11б6)

[1992] On a functional equation occurring in astrophysics // Math. Pannon. – **3**, № 2. – 17–27. (92.9б17)

Кучма, Вопенка (Kuczma M., Vopenka P.)

[1961] On the functional equation $\lambda[f(x)]\lambda(x) + A(x)\lambda(x) + B(x) = 0$ // Ann. Univ. sci. budapest. Sec. Math.– 1960, 1961. – **3–4**. – 123–133. (62.12б16)

Кучма, Матковский (Kuczma M., Matkowski J.)

[1972] Solutions of a functional equation in a special class of functions // Ann. pol. math. – **26**, № 3. – 287–293. (73.2б8)

Кучма, Смайдор (Kuczma M., Smajdor A.)

[1968] Fractional iteration in the class of convex functions // Bull. Pol. Acad. Sci. Math., astron. et phys. – **16**, № 9. – 717–720. (69.5б7)

[1971] Regular fractional iteration // Bull. Pol. Acad. Sci. Math., astron. et phys. – **19**, № 3. – 203–207. (71.11б21)

Лайко (Lajkó K.)

[1972] On the solution of a functional equation F.Vajzovic // Мат. вест. – **9**, № 4. – 347–349. (73.11б6)

[1979] Remark to a paper by J.A.Baker // Aequat. math. – **19**, № 2, 3. – 227–231. (80.4б4)

[1980] On the functional equation $f(x)g(x) = h(ax + by)k(cx + dy)$ // Period. Math. Hung. – **11**, № 3. – 187–195. (81.3б7)

[1989] Differences // Publ. Math., Debrecen. – **36**, № 1-4. – 157–160. (91.1б5)

[1994а] Functional equations in the spectral theory of random fields. I.// Publ. Math. Debrecen. – **44**, № 3–4. – 395–399.

[1994б] Functional equations in the spectral theory of random fields. II // Publ. Math. Debrecen. – **45**, № 3–4. – 415–421. (96.10в84)

[1995] Functional equations in the spectral theory of random fields. III // Publ. Math. Debrecen. – **46**, № 1–2. – 195–201. (96.10в85)

Лайтох (Laitoch M.)

[1992] On functional equation $\varphi\varphi(x) = x,\ x \in (-\infty, \infty)$ // Acta Univ. Palack. olomuc. Fac. rerum natur. Math. – **105**, № 31. – 83–100. (94.3б13)

Ламперти, О'Брайен (Lamperti J., O'Brien G.)

[1972] On a functional equation related to iteration // Aequat. math. – **8**, № 1–2. – 109–112. (73.269)

Ландау (Landau G.)

[1929] Darstellung und Begr"undung einiger neuerer Ergebnisse der Funnktionentheorie. – Berlin: Springer.

Ларсен, Крус (Larsen R., Cruz S.)

[1970] The functional equation $f(t)f(s)g(ts) = g(t)g(s)$ // Aequat. math. – **5**, № 1. – 47–53. (71.969)

Леви (Lévy P.)

[1928] Fonctions á croissance réguliére et itération d'ordre fractionnaire // Ann. math. pura appl. (4). – **5**. – 270–296.

Лё (Leau L.)

[1897б] Sur les équations fonctionnells á une ou á plusieurs variables // Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse. – **11**. – 1–110.

Лемэрэ (Lémeray I.)

[1894] Sur les condition de convergence de certaines developpements vers les racines des équations // Ass. Fr. Congrés de Caén.

[1895a] Un théoréme sur les fonctions itératives // Bull. Soc. Math. Fr. – **XXIII**.

[1895б] Sur les fonctions itératives et sur une nouvelle fonction // Ass. Fr., Congr. de Bordeaux.

[1896] Sur les recines de l'équation $x = a^x$ // Nouv. Ann. de Math. (3). – **XY**.

[1897a] I. Sur la dérivee des fonctions itératives au point limite // Bull. Soc. Math. Fr. – **XXY**.

[1897б] II. Dérivée des fonctions ite'ratives par rapport a l'indice d'itération // Там же. – **XXY**.

[1897в] I. Sur la convergence des substitutions uniformes // Nouv. Ann. de Math. (3). – **XYI**.

[1897г] II. Sur les recines de l'équation $x = a^x$ // Там же. – **XYI**.

[1897д] III. Racines de quelques équations transcendantes // Там же. – **XYI**.

[1898a] Sur la convergence des substitutions uniformes // Там же. – **XYI**.

[1898б] Sur quelques algorithmes généraux et sur l'itération // Bull. Soc. Math. – **XXYI**.

[1898в] Le quatriéme algorithme naturel // Proc. Edinburgh Math. Soc. – **XYI**.

Леонтьев А.Ф.

[1979] Конечных разностей исчисление // Математическая энциклопедия. – М.: Изд. "Советская энциклопедия". – **2**, – 1026–1032.

Лесняк (Leśniak Z.)

[1993] On homeomorphic and diffeonorphic solutions of a the Abel equation on the plane // Ann. pol. math. – **58**, № 1. – 7–18. (94.2б8)

[1994] On simultaneous Abel inequalities // Opusc. Math. – **14**. – 107–115. (96.10б31)

[1995] On the system of the Abel equations on the plane // Ann. math. siles. – № 9. – 105–122. (96.11б9)

Летак (Letac G.)

[1978] Cauchy functional equation again // Amer. Math. Mon. – **85**, № 8. – 663–664. (79.7Б7)

Ливенцов А.И.

[1876а] О функциональных индексах // Мат. сб. – **YIII**. – 277–284.

[1876б] Опыт систематического изложения функционального счисления с одним независимым переменным // Мат. сб. – **8**. – 80–162.

Лилло (Lillo J.C.)

[1964] The functional equation $f^n(x) = g(x)$ // Ark. Mat. – **5**(26). – 357–361.

[1967] The functional equation $f^2(x) = g(x)$ // Ann. pol. math. – **19**, № 2. – 123–135. (68.5Б24)

Лин В.Я.

[1976] О суперпозициях алгебраических функций // Функц. анализ и его прил. – **10**, № 3. – 205–206.

Линник Ю.В., Островский И.В.

[1972] Разложения случайных величин и векторов. – М.: Наука.

Липанов А.М.

[1995] Многопараметрический траекторный метод решения систем функциональных уравнений // Докл. РАН. – **343**, № 2. – 153–155. (96.3Б20)

Лисеи (Lisei G.)

[1988] On the functional equation $\varphi(x,y,z) = \varphi(\varphi(x,y,t),t,z)$ // Riv. mat. sci. Econ. e soc. – **11**, № 1–2. – 3–9. (91.1Б8)

Лобачевский Н.И. (Lobatschewsky N.I.)

[1840] Geometrische Untersuchungen zur Teorie der Parallelinien. – Berlin.

Лоран (Laurent H.)

[1890] Traité d'Analyse. **6**. Calcul intégral. – Paris: Gauthier–Villars.

Лори, Кинг (Lawrie J.B., King A.C.)

[1994] Exact solution to a class of functional difference equations with application to a moving contact line flow // Eur. J. Appl. Math. – **5**, № 2. – 141–157. (96.3Б12)

Лосонжи (Losonczi L.)

[1970] Über die Funktionalgleichung $f[(a+x)(b+y)c] = [A+f(x)][B+f(y)]C$ ihre mehrdeutigen, stetigen Lösungen und eine nichtstetige Gruppe // Nehezipari Müsz. Egyet. Közl. – **30**. – 263–266. (70.12Б6)

[1989] On a functional equation of sum form // Publ. math. – **36**, № 1–4. – 167–177. (91.2Б6)

[1990] Local solutions of functional equations // Glas. mat. – **25**, № 1. – 57–67. (91.11Б5)

[1991] On a functional equation of sum form with three unknown functions // Period. Math. Hung. – **23**, № 3. – 199–209. (92.9Б17)

[1994а] Solution of (2,2)-type sum form functional equations with several unknown functions // Aequat. math. – **47**, № 2, 3. – 191–202. (95.8Б8)

[1994б] Measurable solutions of a (2,2)-type sum form functional equation // Aequat. math. – **47**, № 2, 3. – 203–222. (95.8Б9)

[1994в] Measurable solutions of a (2,2)-type nonlinear functional equation of sum form with several unknown functions // Publ. Math. Debrecen. – **44**, № 1–2. – 79–103. (96.10Б24)

Лосонжи, Макса (Losonczi L., Maksa G.)

[1981] The general solution of functional equation of information theory // Glas. mat. – **16**, № 2. – 261–266. (82.9Б7)

Лоясевич (Lojasiewicz S.)

[1951] Solution generale de l'equation fonctionnele $f^n(x) = g(x)$ // Ann. pol. math. – **24**. – 88–91.

Лундберг, Нг (Lundberg A., Ng Ch.T.)

[1975] Uniqueness theorems for the representation $\varphi(f(x)g(y)+h(y))$ // Aequat. math. – **13**, № 1–2. – 77–87. (76.5Б6)

Лупа (Lupa M.)

[1993] On solutions of a functional equation in a special class of functions // Demonstr. math. – **26**, № 1. – 137–147. (94.3Б11)

Лупас А. и Л. (Lupas A., Lupas L.)

[1980] Asupra unor functii speciale // Lucr. semin. itiner. ecuatii funct., aproxim. si convexit. Timisoara. 7, 8 noiem. – **1**, 55–68. (83.7Б8)

Льюис (Lewis D.C.)

[1939] Formal power series transformations // Duke Math. J. – **5**. – 794–805.

Лысенко С.А.

[1995] О функциональном уравнении $f(p(z)) = g(q(z))$, где f и g – мероморфные функции, p и q – полиномы // Мат. физ., анал., геом. – **2**, № 1. – 68–86. (96.11Б15)

Люхт (Lucht L.)

[1979] Zur gaubschen funktionalgleichung für die gamma-funktion auf multiplikativen zahlenmengen // Abh. math. semin. Univ. Hamburg. – **79**. – 183–188. (80.4Б10)

Люхтер (Luchter J.)

[1995] On a certain finctional equation // Zesz. nauk. Mat.-fiz. PSl. – № 74. – 41–52. (96.11Б11)

Магницкий Н.А.

[1996] О стабилизации неподвижных точек хаотических отображений // Докл. РАН. – **351**, № 2. – 175–177. (97.9Б499)

Майор, Торренс (Mayor G., Torrens J.)

[1994] De Rham systems and the solution of a class of functional equations // Aequat. math. – **47**, № 1. – 43–49. (95.8Б3)

Макай (Makai I.)

[1969] Über invertierbare Lösungen der additiven Cauchy-Funktionalgleichung // Publ. math. – **16**, № 1–4. – 239–243. (71.6Б3)

Маккирнан (McKiernan M.)

[1963] Variational aspects of the Abel and Schroder functional equations // Can. Math. Bull. – **6**, № 2. – 257–265. (64.6Б17)

Макмуллен (McMullen C.)

[1994] Frontiers in complex dynamics // Bull. Amer. Math. Soc. – **31**, № 2. – 154–172.

Макса (Maksa G.)

[1977] On the functional equation $f(x+y)+g(xy)=h(x)+h(y)$ // Publ. math. – **24**, № 1–2. – 25–29. (78.11Б13)

[1981] On the bounded solution of a functional equation // Acta Math. Hung. – **37**, № 4. – 445–450. (82.1Б13)

[1987] The general solution of a functional equation arising in information theory // Acta Math. Hung. – **49**, № 1–2. – 213–217. (87.7Б5)

Макшан (McShane N.)

[1961] On the periodicity of homeomorphisms of the real line // Amer. Math. Mon. – **68**, № 6. – 562–563. (62.3Б6)

Маленица (Malenica M.)

[1980] O rješenju funkcionalne jednačine $\varphi(x)+\varphi[f(x)]=F(x)$ // Rad. Akad. nauka i umjetn. BiH. Od. prirod. i mat. nauka. – **66**, № 19. – 103–109. (81.2Б15)

[1981a] O rješenju funkcionalne jednačine $\varphi(x)+\varphi(f(x))=F(x)$ i neki specijalni primjeri regularnih transformacija // Rad. Akad. nauka i umjetn. BiH Od. tehn. nauka. – **68**. – 127–132. (82.9Б11)

[1981б] On some solution of equation $\varphi(x)+\varphi(f(x))=F(x)$ under the solution that F satisfies $F(f^p(x))=F(x)$ // Publ. Inst. math. – **29**. – 139–144. (82.9Б10)

[1982] O jednom rješenju jednačine $\varphi(f(x))+\varphi(x)=F(x)$ kada funkcija F zadovoljava usiov $F(f(x))=F(x)$ // Rad. Akad. nauka i umjetn. BiH. Od. prirod.i mat. nauka. – **69**, № 20. – 17–21. (83.8Б13)

[1983] On the solutions of the functional equation $\varphi(f(x))+\varphi(x)=F(x)$ using θ-summability // Glas. mat. – **18**, № 2.– 305–315. (84.7Б5)

[1986] Primjena $[\theta]$-zbirljivosti na rješavanje funkcionalne jednačine $\varphi(x)+\varphi^2(x)=F(x)$ // Rad. Akad. nauka i umjetn. BiH. Od. tehn. nauka. – **10**. – 139–143. (87.1Б9)

[1993] On the solutions of the functional equation $x(t)+A(t)x(f(t))=F(t)$ // Мат. вест. – **45**, № 1–4. – 1–5. (95.8Б13)

Маленица, Перич (Malenica M., Perič V.)

[1988] O jednom rješenju funkcionalne jednačine $\varphi(x)+\varphi(f(x))=G(x)$ // Rad. Akad. nauka i umjetn. BiH. Od. tehn. nauka. – **12**. – 91–99. (89.8Б8)

Мартич (Martic B.)

[1978] Quelques equations fonctionnelles contenant plusieurs fonctions inconnues // Rad. Akad. nauka i umjetn. BiH. Od. prirod. i mat. nauka. – **61**. – 159–163. (80.3Б10)

Мартич, Янич (Martic B., Janic R.)

[1978] Sur quelques generalisations des equations fonctionnelies // Publ. Elektrotehn. fak. Ser. Mat. i fis. / Univ. Beogradu. – № 602–633. – 223–228. (80.11Б15)

Марцегалли (Marzegalli S.P.)

[1994] One-parameter system of functional equation // Aequat. math. – **47**, № 1. – 50–59. (95.8Б4)

Матковский (Matkowski J.)

[1970] On meromorphic solutions of a functional equation // Zesz. nauk. Uniw. jagiall. Pr. mat. – **223**, № 14. – 53–54. (71.5Б10)

[1973] On Lipschitzian solutions of a functional equation // Ann. pol. math. – **28**, № 2. – 135 -139. (74.4Б24)

[1985] Cauchy functional equation on a restricted domain and commuting functions // Lect. Notes Math. – № 1163. – 101–106. (86.10Б18)

Матковский, Никодем (Matkowski J., Nikodem K.)

[1993] Solutions of some functional inequalities connected with convex functions // Math. Repts Acad. Sci. Can. – **15**, № 2, 3. – 114–118. (94.1Б9)

Матковский, Ждун (Matkowski J., Zdun M.)

[1974] Solutions of bounded variation of a linear functional equation // Aequat. math. – **10**, № 2, 3. – 223–235. (75.3Б5)

Медина (Medina R.)

[1996] Asymtotic properties of solutions of nonlinear difference equations // J. Comput. and Appl. Math. – **70**, № 1. – 57–66. (97.8Б225)

Мидура (Midura S.)

[1968] Sur les solutions de l'equation de translation // Aequat. math. – **1**. – 77–84

Мидура, Такор (Midura S., Takor J.)

[1973] Sur les iterations avec un parametre reel des fonctions sous-modules // Demonstr. math. – **6**, № 1. – 271–287. (74.9Б6)

Микусинский (Mikusinski J.)

[1953] Rachunek Operatorów. Warszawa. (Пер.: Операторное исчисление. – М.: ИИЛ). (57.2475K)

Мильс, Шульц (Milles S.J., Schultz H.J.)

[1978] Some functional equations for the calculus student // Two-Year Coll. Math. J. – **9**, № 4. – 205–209. (79.3Б5)

Миок (Mioc V.)

[1966] Rezolvarea unor ecuatii functionale ou functii reale si parametri reali // Bull. Sti. si tehn. Inst. politehn. Timisoara. – **11**, № 2. – 395–402. (68.3Б12)

Моравец (Morawiec J.)

[1994] On bounded solutions of a problem of R. Schilling // Pr. nauk. USl. Katowicach. Ann. math. siles. – № 8. – 97–101.

Моснер (Moszner Z.)

[1974] Sur les solutions d'une equation fonctionnelle // Aequat. math. – **11**, № 2, 3. – 270–272. (75.7Б10)

[1975a] Sur les solutions d'une equation fonctionnelle. II // Aequat. math. – **12**, № 1. – 118. (75.11Б7)

[1975б] Sur les solutions d'une equation fonctionnelle. III // Aequat. math. – **13**, № 3. – 269–273. (76.9Б7)

[1980] Sur l'equation $f(x)f(y)f(-x-y) = g(x)g(y)g(-x-y)$ // Aequat. math. – **21**, № 1. – 20–32. (81.4Б10)

[1991] Sur une forme de la solution de l'equation de translation // Math. Repts Acad. Sci. Can. – **13**, № 6. – 285–290. (92.9Б14)

[1992] Sur des solutions globales et des solutions locales de l'equation de translation // Math. Repts Acad. Sci. Can. – **14**, № 5. – 219–224. (94.3Б8)

[1994] Sur les fonctions de pluralité // Aequat. math. – **47**, № 2, 3. – 175–190. (95.8Б7)

Мукерья, Ратти (Mukherjea A., Ratti J.S.)

[1983] On a functional equation involving iterates of a bijection on the unit interval // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. – **7**, № 8. – 899–908. (84.1Б5)

Мюллер (Müller W.)

[1987] Die functionalgleichung des geometrischen Mittels // Prax. Math. – 1989. – **31**, № 8. – 465–466. (90.8Б8)

Набейа (Nabeya S.)

[1974] On the functional equation $f(p+qx+rf(x)) = a+bx+cf(x)$ // Aequat. math. – **11**, № 2, 3. – 199–211. (75.6Б3)

Навроцкий (Nawrocki J.)

[1979] On the existence of C^r solutions of a functional equation // Demonstr. math. – **12**, № 4. – 1027–1041. (80.11Б19)

[1984] On the existence of C^r solutions of a functional equation containing a superposition of the unknown function // Demonstr. math. – **17**, № 4. – 897–905. (86.4Б18)

Неамту (Neamtu N.)

[1995] About Lobochevsky's functional equations on C // Bull. Sti. si tehn. Univ. tehn. Timisoara. Ser. Mat.-fiz. – **40**, № 1–2. – 16–21. (96.11Б13)

Нетто (Netto)

[1896] Vorlesungen über Algebra. – Berlin: Springer–Verlag.

Нечепуренко М.И.

[1962] О точной оценке скорости сходимости метода Ньютона // Тр. Моск. физ.-тех. ин-та "Исследования по механике и прикладной математике". – М.: Оборонгиз. – Вып. 9. – 101–104.

[1985] Об одной системе многочленов Поллачека–Мейкснера // Системное моделирование в информатике. – Новосибирск, 79–87.

[1997а] Примеры итерационных последовательностей, сходящихся с заданной скоростью // Тр. ИВМиМГ СО РАН. Сер. Системное моделирование. – Новосибирск. – Вып. 4(22). – 113–122.

[1997б] Уравнение Абеля и обобщенные сжатия // Там же. – 123–129.

Нёрлунд (Nörlund N.)

[1924] Differenzenrechnung. – Berlin: Springer-Verlag.

Нг (Ng Ch.T.)

[1985] On a functional equation related to income inequality measures // Aequat. math. – **28**, № 1–2. – 161–169. (85.7Б10)

[1973] On the functional equation $f(x)+\sum_{i=1}^{n} g_i(y_i) = h(T(x, y_1, y_2, \ldots, y_n))$ // Ann. pol. math. – **27**, № 3. – 329–336. (73.12Б7)

Нивен (Niven I.)

[1969] Formal power series // Amer. Math. Mon. – **76**, № 8. – 871–889.

Никитин В.Г.

[1983] Периодические решения функционального уравнения $\sum_{k=-\nu}^{\nu} a_k u(q^k t) = f(t)$ // Теория упр. и методы оптимиз. Матер. 3 науч. конф. мол. ученых и спец. фак. вычисл. мат. и кибернет., Казань, июнь, 1983. – Казань, 29–33. – Деп. ВИНИТИ 7.12.1983. № 6633-83. (84.3Б9)

[1984] Однозначная разрешимость функционального уравнения $u(t) - a\,u(\alpha t) = f(t)$ в пространстве периодических функций // Исслед. по прикл. мат. – Казань. – № 11/1. – 96–109. (85.10б7)

[1992] Разрешимость линейного функционального уравнения в классе рядов, порожденных итерациями // Исслед. по прикл. мат. – Казань. – № 19. – 94–101. (94.3б14)

Никифоров, Уваров (Nukiforov A.F., Uvarov V.B.)

[1993] Polynomial solutions of hypergeometric type difference equations and their classification // Integr. Transforms and Spec. Funct. – **1**, № 3. – 223–249. (95.2б2)

Новаковская, Вербовский (Nowakowska W., Werbowski J.)

[1994] Oscillation of solutions of functional equations // Abstr. Invit. Lect. and Short Commun. Deliv. 5th Int. Colloq. Differ. Equat. Plovdiv, Aug. 18–23, 1994. – Plovdiv. – 161. (95.1б3)

Оприс (Opris G.)

[1980] Sur certaines equations functionnelles // Mathematica (RSR). – **2**, № 2. – 257–260. (83.2б13)

Ортега, Рейнболдт (Ortega J.M., Rheinboldt W.C.)

[1970] Iterative solution of nonlinear equations in several variables. – NY & W.: Academic press. (Пер.: Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М: Мир, 1975).

Островский (Ostrowski A.M.)

[1929] Mathematische miszellen XIY. Ueber die funktionalgleichung der exponentialfunktion und verwandter funktionalgleichungen // Jahresberich d. deutschen Math. Vereinigung. – **3**. – 54–62.

[1960] Solutions of equations and systems of equation. – NY & L.: Academic Press. (Пер.: Решение уравнений и систем уравнений. – М.: ИИЛ, 1963.)

Оттавиани (Ottaviani G.)

[1957] Sulla risoluzione di una equazione con il meyodo di iterasione // Scritti Mat. onore Fillipo Sibiriani, Bologua. – 195–199. (58.2447)

Паганони Л. (Paganoni L.)

[1971] Esistenza di soluzioni per una classe generale di equazioni funzionali // Rend. Ist. lombardo. Accad. sci. e lett. – **A105**, № 5. – 891–906. (72.11б17)

Паганони М. (Paganoni M.S.)

[1984] Sulle soluzioni di un'equazione funzionale di ordine n // Rend. semin. mat. / Univ. e Politecn. Torino. – **42**, № 3. – 165–177. (86.8б11)

[1994] One-parameter system of functional equations // Aequat. math. – **47**, № 1. – 50–59. (95.8б4)

Пан (Pan Y.)

[1994] On the existence of L^1 scaling functions // J. Math. and Phys. Sci. – **28**, № 2. – 55–74. (95.10б8)

Пексидер (Pexider H.W.)

[1903] Notiz über Funktionaltheoreme // Monatshefte für Math. und Phys. – **14**. – 293–301.

Пелюх Г.П.

[1969] О гладких решениях нелинейных функциональных уравнений в резонансном случае // Тр. семинара по дифференциальным и интегральным уравнениям. – Киев: ИМ АН УССР. – Вып. 1. – 312–314. (70.11Б21)

[1970] О гладких решениях системы нелинейных функциональных уравнений // Тр. семинара по мат. физике и нелинейным колебаниям. – Киев: ИМ АН УССР. – Вып. 3 – 236–242. (70.11Б22)

[1973] Общее решение одного класса линейных функциональных уравнений // Нелинейные колебания и устойчивость движения. – Киев. – 194–198. (75.7Б8)

[1978] О C^r-решениях нелинейных функциональных уравнений со многими отклонениями аргумента // Укр. мат. ж. – **30**, № 1. – 79–85. (78.10Б12)

[1980] О построении общего решения одного класса нелинейных функциональных уравнений в критическом слое // Качествен. исслед. дифференц.-функц. ур-ний. – Киев. – 111–115. (81.6Б11)

[1983] Об одном нелинейном функциональном уравнении m-го порядка // Приближ. и качеств. методы теории дифференц.-функц. уравнений. – Киев. – 76–83. (84.7Б8)

[1996] О периодических решениях разностных уравнений с непрерывным аргументом // Укр. мат. ж. – **48**, № 1. – 140–145. (96.12Б270)

Пелюх Г.П., Шарковский О.М.

[1970] Характеризація елементарних та спеціальних функцій за допомогую функціональних співвідношень // Докл. АН УРСР. – № 11. – 994–998. (71.4Б2)

Перрон (Perron O.)

[1942] Ueber eine, für die Invariantentheorie wichtige Funktionalgleichung // Math. Z. – **48**. – 136–172.

Пинхерле (Pincherle S.)

[1906] Funktionaloperationen und Gleichungen // Encyklopädie der Math. Wissenschaften. – Leipzig. – **2**.

[1912] Êquations et opérations fonctionnelles // Encyclopédie des Sci. Math. – Paris. – **2**.

Полиа[8] (Pólya G.)

[1936] // Zeitschrift für Kristallographie. (A). – **93**. – 415–443.

[1937] Kombinatorische anzahlbestimmungen für grunnen, graphen, und chemische verbindungen //Acta math. – **68**. – 145–253.

Полиа, Сеге (Pólya G., Szego G.)

[1925] Aufgaben und Lehrsätce aus der Analysis. B. 1. – Berlin: Verlag–Springer. (Пер.: Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 1. – М.: ГИТТЛ, 1956).

Поп (Popa Gh.)

[1987] Citeva probleme de ecuatii si inecuatii functionale // Semin. teor. struct. Univ. Timisoara. – № 44. – 1–10. (89.2Б17)

Пу (Pu H.W., Pu H.H.)

[1987] On solutional of the Cauchy's functional equation // Rev. roum. math. pures et appl. – **32**, № 3. – 269–271. (87.9Б9)

[8]=Пойа.

Пуассон (Poisson S.D.)

[1811] Traité de mécanique. – Paris. –**1**.

Рамюс (Ramus)

[1832] Remarques sur l'équation $\varphi f(x) = \varphi(x)\dfrac{d\,f(x)}{dx}$ // J. für die Reine und Angewandte Mathematik von Crelle. – **IX**. – 359–361.

Рао, Сапатинас, Шанбхаг (Rao C.R., Sapatinas T., Shanbhag D.N.)

[1994] The integrated Cauchy functional equation: Some comments on recent papers // Adv. Appl. Probab. – **26**, № 3. – 825–829. (95.8Б12)

Ратти, Лин (Ratti J.S., Lin Y.F.)

[1990] A functional equation involving f and f^{-1} // Colloq. Math. – **60-61**, № 2. – 519–523. (91.1Б7)

Раузенбергер (Rausenberger O.)

[1884] Lehrbuch der Theory der periodischen Funktionen. – Leipzig: Teubner.

Регис, Вуц (Reghis M., Vuc L.)

[1966] Sur les equations fonctionnelles iteratives. 1 // Publ. math. – **13**,№ 1–4. – 25–38. (67.10Б21)

Ридел, Сахо (Riedel T., Sahoo P.K.)

[1995] On a generalization of a functional equation associated with the distance between the probability distributions // Publ. Math. Debrecen. – **46**, № 1–2. – 125–135. (96.12в13)

Риордан (Riordan J.)

[1963] An Introduction to Combinatorial Analysis. – NY: Wiley, 1958. (Пер.: Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. – М.: ИИЛ, 1963).

Розмус–Хмура (Rozmus-Chmura M.)

[1967] Sur l'equation fonctionelle $\varphi(x+1) = f[\varphi(x)]$ // Мат. вен. – **4**, № 1. – 75–78. (68.5Б23)

[1968] Les solutions convexes de l'equation fonctionelle $q[\alpha(x)] - q(x) = \varphi(x)$ // Publ. math. – **15**, № 1–4. – 45–48. (69.11Б15)

[1985] Regular solutions of some functional equations in the indeterminate case // Pr. nauk. USl. Katowicach. Ann. math. siles. – № 1. – 120–129. (86.9Б7)

Розновский (Roznowski M.)

[1973] Rozwiazania przyblizone rownania funkcyjnego $\varphi^k(x) = f(x)$ // Pr. nauk. USl. Katowicach. – № 30. – 53–73. (74.4Б27)

Романенко Е.Ю., Шарковский А.Н.

[1973] О решениях переопределенной системы функциональных уравнений // Метод интегральных многообразий в нелинейных дифференциальных уравнениях. – Киев: ИМ АН УССР. – 220–232. (74.4Б28)

Роскэу (Roscâu H.)

[1961] Asupra ecuatiilor functionale care caracterizeazâ functiile trigonometrice inverse si hiperbolice inverse // Bul. Sti. Inst. politehn. Cluj. – **4**. – 71–76. (64.7Б11)

Рохберг, Рубель (Rochberg R., Rubel L.A.)

[1992] A functional equation // Indiana Univ. Math. J. – **41**, № 2. – 363–376. (93.5Б6)

Р.–Салинас (R.–Salinas B.)

[1967] Sobre la ecuacion funcional $f(x+y) = f(x)f(y)$ y las funciones a^x y $\log_a x$ // Actas 5 Reun. anual mat. esp. Valencia, 1964. – Madrid. – 16–33. (68.8Б11)

Рыль–Нардзевский (Ryll–Nardzewski C.)

[1949] Sur les moyennes // Stud. math. – **11**. – 31–37.

Рыфф (Ryff J.V.)

[1978] The functional equation $F(ax)+F(bx+a) = F(bx)+F(ax+b)$, entire and almost pereiodic solutions // J. reine und ägew. Math. – **302**. – 116–136. (79.4Б8)

Саблик (Sablik M.)

[1985] Note on a Cauchy conditionaland equation // Rad. mat. – **1**, № 2. – 241–245. (86.8Б12)

[1987] Generating solutions of some Cauchy and cosine functional equation // Aequat. math. – **32**, № 2, 3. – 216–226. (88.2Б8)

[1990] The continuous solution of a functional equation of Abel // Aequat. math. – **39**, № 1. – 19–39. (94.7Б5)

Саблик, Урбан (Sablik M., Urban P.)

[1985] On the solutions of the equation $f(xf(y)^k + yf(x)^l) = f(x)f(y)$ // Demonstr. math. – **18**, № 3. – 863–867. (86.10Б13)

Савич (Savic B.)

[1981] A new proceeding for solving of certain class of functional equations // Мат. вест. – **5**, № 2. – 221–224. (83.3Б10)

Сакович Г.Н.

[1970] Об уравнении $f(x, y-z) + f(y, z-x) + f(z, x-y) = 0$ и одном обобщении понятия выпуклости // Mehezipari Müsz. Tgyet. Közl. – **30**. – 281–283. (71.1Б9)

Самага (Samaga H.-J.)

[1995] Über fraktale Strukturen in Kreisgeometrien // Mitt. math. Ges. Hamburg. – **14**. – 121–131.

Самарский А.А., Николаев Е.С.

[1978] Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука.

Самко С.Г., Умархаджиев С.М.

[1984] Об одном функциональном уравнении с бесконечной группой сдвигов // Мат. анализ и его прил. – Грозный. – 11–14. (86.1Б5)

Сансери (Sancery)

[1862] Be la méthode des substitutions successives pour la calcul des racines des équations // Nouv. Ann. de Math. (2). – **1**. – 305.

Сасс (Szász P.)

[1952] Neue Bestimmung des Parallelenwinkds in der hyperbolischen Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln // Acta sci. math. – **14**. – 247–251.

[1953] A hiperbolikus trigonometria uj sikbeli elöállitása a klasszikus segédeszközökkel // MTA III, Osztály Közleményei 3. – 527–533.

Сачков В.Н.

[1982] Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука.

Святок (Swiatak H.)

[1965a] On the equation $[f(x+y)]^2 = [f(x)g(y)+f(y)g(x)]^2$ // Zesz. nauk. Uniw. jagiell. – № 102. – 97–104. (66.6Б17)

[1965б] On the equation $f(x+y)g(x+y) = [f(x)g(y)+f(y)g(x)]^2$ // Там же. – 105–106. (66.6Б16)

[1968] Remarks on the functional equation $f(x+y-xy)+f(xy) = f(x)+f(y)$ // Aequat. math. – **1**, № 3. – 239–241. (69.8Б14)

[1970] On two functional equation connected with the equation $\varphi(x+y)+\varphi(x-y) = 2\varphi(x)+2\varphi(y)$ // Aequat. math. – **5**, № 1. – 3–9. (71.9Б11)

[1979] On an equation of information theory // Aequat. math. – **19**, № 1. – 117. (80.1Б11)

Севастьянов Б.А.

[1971] Ветвящиеся процессы. – М.: Наука.

Секелиди (Székelyhidi L.)

[1991] On functional equations analoguous to partial differential equations : [Pap.] Semin. "Contrib. Theory. funct. Equat." Debrecen–Graz, Apr. 12–13, 1991 // Graz. math. Ber. – № 315. – 84–85. (92.9Б13)

[1995] Stability properties of functional equations in several variables // Publ. Math. Debrecen. – **47**, № 1–2. – 95–100. (96.10Б29)

Секереш (Szekeres G.)

[1958] Regular iteration of real and complex function // Acta math. – **100**. – 203–258. (70.3Б13)

Сенета (Seneta E.)

[1969] On Koenigs' rations for iterates of real functions // J. Austral. Math. Soc. – **10**, № 1–2. – 207–213. (70.3Б13)

Серпинский (Sierpinski W.)

[1920a] Sur l'equation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)+f(y)$ // Fundam. Math. – **1**. – 116–122.

[1920б] Sur les fonctions convexes mesurable // Там же. – 125–129.

[1924] Sur une propriete des functions de M.Hamel // Fundam. Math. – **5**. – 334–336.

Си (Si J.)

[1995] On analytic solutions of the equation of invariant curves // Math. Repts. Acad. Sci. Can. – **17**, № 1. – 49–52. (96.1Б9)

Сигал (Segal S.L.)

[1985] On Nathanson's functional equation // Aequat. math. – **28**, № 1–2. – 114–123. (85.7Б7)

Сидоров Ю.В.

[1995] Четные и нечетные функции // Тез. докл. междунар. конф. "Функц. пространства, теория приближ., нелинейн. анал.", посвящ. 90-летию акад. С.М. Никольского, Москва, 27 апр.–3 мая. – М. – 249–250. (95.11Б12)

Сечко (Sieczko A.)

[1993] Nonuniqueness case for AC^{R-1}-solution of a nonlinear functional equation // Demonstr. math. – **26**, № 3–4. – 751–753. (96.10Б8)

Сикора (Sykorá A.)

[1904] O rovnicich ukonovych // Casopis. – **33**. – 181–198.

Симич, Раденович (Simić S., Radenović S.)

[1994] On locally subadditive functions // Мат. вест. – **46**, № 3–4. – 89–92. (95.10б7)

[1995] A functional inequalite // 9 Kongr. mat. Jugosl. Petrovac, May 22-27, 1995. JUMC'95. – Rez.–Podgorica. – 79. (97.8б14)

Симо (Simo C.)

[1978] A note on the iteration of exponentials // Publ. Secc. mat. Univ. auton. – Barcelona. – № 10. – 99–103. (79.11б5)

Синцов Д.М.

[1903] Заметки по функциональному исчислению // Изв. физ.-мат. общ. при Казанском ун-те. Вторая серия. – **XIII**, № 1. – 46–72.

Славиковский В.

[1956] Обобщение операционного исчисления Микусинского // Bull. Acad. polon. sci. Ser. math., astron. et phys. – **4**, № 10. – 633–638.

Смайдор А. (Smajdor A.)

[1974] Note on a functional equation // Ann. pol. math. – **30**, № 1. – 57–61. (74.12б2)

[1994] On a functional equation // Pr. nauk. USl. Katowicach. Ann. math. siles. – № 8. – 217–226. (96.10б20)

Смайдор В. (Smajdor W.)

[1967] On the existence and uniqueness of analytic solutions of the functional equation $\varphi(z) = h(z, \varphi[f(z)])$ // Ann. pol. math. – **19**, № 1. – 37–45. (68.1б19)

[1972] Solutions of the Schröder equation // Ann. pol. math. – **27**, № 1. – 61–65. (73.4б13)

[1993] Local set-valued solutions of the Jensen and Pexider functional equations // Publ. Math. Debrecen. – **43**, № 3–4. – 255–263. (96.10б21)

[1994] On Jensen and Pexider functional equations // Opusc. Math. – **14**. – 169–178. (96.10б32)

Смолл (Small D.B.)

[1971] On the functional equation $F(u) + F(1-u) + F(u/1-u)$, $u \in [0, 1/2]$ // Aequat. math. – **6**, № 1. – 115–116. (71.12б6)

Смольянова Е.Г.

[1995] φ-инварианты функций и расширение класса уравнений $f(f(x)) = x$ // 24 Огарев. чтения: Тез. докл. науч. конф., Саранск, 4–9 дек.,1995. Ч. 3. – Саранск. – 23. (96.9б15)

Соколов Е.И.

[1980] Исследование функционального уравнения $f(\sqrt[n]{x^n + y^n}) = F(g(x), h(y), l(x), k(y))$ над кольцом непрерывных функций над R // Общ. алгебра и дискретн. геометрия. Мат. науки. – Кишинев. – 99–107. (80.12б5)

Стамате (Stamate I.)

[1964] Functional equations containing several unknown functions // Mathematica (RPR). – **6**, № 1. – 131–137. (66.5б7)

Стеткар (Stetkær H.)

[1994] On a signed cosine equation of n summands // Prepr. Ser. Mat. inst. Aarhus Univ. – № 1. – 1–8. (94.7Б4)

[1995] Wilson a functional equation on C. // Prepr. Ser. Mat. inst. Aarhus Univ. – № 1. – 1–25. (95.6Б10)

Стопа (Stopa M.)

[1987] On a linear iterative functional inequality of the third order // Zesz. nauk. AGH. Opusc. Math. – № 3. – 117–126. (88.11Б9)

[1994] On the form of solutions of some iterative functional inequality // Publ. Math. Debrecen. – **45**, № 3–4. – 371–377. (96.10Б28)

[1995] On the form of solutions of the iterative functional equation of the n-th order // Demonstr. math. – **28**, № 3. – 655–634. (96.10Б9)

Су, Ву (Su Y., Wu W.)

[1994] Singular points near an X_0–breaking double singular fold in Z_2-symmetric nonlinear equations // Dongbei Shuxue = Northeast. Math. J. – **10**, № 3. – 385–395. (96.1Б11)

Сурьянараяна (Suryanarayana D.)

[1981] Note on the functional equation $S(m,n)F[n/(m,n)] = F(n)h[n/(m,n)]$ // Aequat. math. – **23**, № 1. – 123–124. (83.2Б15)

Суто (Suto O.)

[1913] On some classes of functional equations // Tohoku Math. J. – **3**. – 47–61.

Сю (Hsu Ih-ching)

[1986] Wanted: the general solution or else // Amer. Math. Mon. – **93**, № 5. – 371–372.

Табор (Tabor J.)

[1976] On the translation equation occurring in the iteration theory // Demonstr. math. – **9**, № 1. – 119–127. (77.1Б6)

[1988] A Pexider equation on a small category // Opusc. Math. – **4**. – 299–305.

[1991] Cauchy and Jensen equations on a restricted domain almost everywhere // Publ. Math. Debrecen. – **39**, № 3–4. – 219–235. (93.3Б3)

Такачи (Takaci D.)

[1995] Postupak za resavanje differencne jednacine u polju operatora Mikusińskog // 9 Kongr. mat. Jugosl. Petrovac, May 22-27, 1995. JUMC'95. – Rez.–Podgorica. – 112. (97.9Б204)

Тамари (Tamari D.)

[1949] Caractérisation des semi-groupes á un paramétre // C. r. Acad. Sc. – **28**. – 1092–1094.

Таннери (Tannery J.)

[1886] Introduction á la théorie des fonctions d'une variable. – Paris.

Таргонский (Targoński G.)

[1994] Functional equations connected with phantom iterates // Opusc. Math. – **14**. – 179–182. (96.10Б33)

Таубер, Нейгауз (Täuber J., Neuhaus N.)

[1978] Über die monotonen Lözungen der auf Mengen verallgemeinerten Jensenfunktia nalgleichung // Rev. roum. math. pures et appl. – **23**, № 2. – 309–312. (78.11Б16)

Тейлор (Taylor M.A.)

[1980] A Pexider equation for functions defined on a semigroup // Acta math. Acad. sci. hung. – **36**. – 211–213.

Ткаченко В.И.

[1996] Про экспоненціальну дихотомію лінійних різницевих рівиянь // Укр. мат. ж. – **48**, № 10. – 1409–1416. (97.9б206)

Тодоров (Todorov P.G.)

[1989] On certain functional equations in the theory of queues // Науч. тр. мат. Пловдив. унив. – **27**, № 3. – 25–38. (92.3б7)

Трон (Thron W.J.)

[1960] Sequences generated by iteration // Trans. Amer. Math. Soc. – **96**, № 1. – 38–53. (61.8б326)

Трихук (Tryhuk V.)

[1995] Functional equations and a theoretical model of DLTS // Appl. Math. – **40**, № 6. – 473–482. (96.10б34)

Тудоси (Tudosie C.)

[1990] On a functional equation // Bull. Sti. Inst. politehn. Cluj–Napoca. Ser. arhit.–constr. – **33**. – 17–20. (93.1б4)

Турдза (Turdza E.)

[1974] On a functional inequality with the n-th iterate of the unknown function // Zesz. nauk. Uniw. jagiell. Pr. mat. – **16**. – 189–194.

[1978] Comparison theorems for a function inequality // Gen. Inequalities. 1. Proc. 1st Int. Conf., Oberwolfach, 1976. – Basel, Stuttgart. – 199–211. (79.7б9)

[1979] The solutions of an inequality for the n-th iterate of a function // Amer. Math. Mon. – **86**, № 4. – 281–283. (79.11б10)

[1982] Set stability for a functional equation of iterative type // Demonstr. math. – **15**, № 2. – 443–448. (83.6б16)

[1984] The stability of an iterative linear equation // Gen. Inequalities 4. Memoriam Edwin F. Beckenbach. 4th Int. Conf. Oberwolfach, 8–14 May, 1983. – Basel. – 277–285. (85.12б18)

Улам (Ulam S.M.)

[1964] A collection of mathematical problems // Los Alamos Scientific Laboratory. – New Mexica. (Пер.: Улам С. Нерешенные математические задачи. – М.: Наука, 1964).

Уолкер (Walker P.L.)

[1988] A class of functional equations which have entire solutions // Bull. Austral. Math. Soc. – **38**, № 3. – 351–356. (89.8б5)

[1991] On the solutions of an Abelian functional equation // J. Math. Anal. and Appl. – **155**, № 1. – 93–110. (91.10б3)

Урбан (Urban P.)

[1983] Continuons solution of the functional equation $f(xf^k(y) + yf^l(x)) = f(x)f(y)$ // Demonstr. math. – **16**, № 4. – 1019–1025. (84.11б6)

Фальколини (Falcolini C.)

[1987] Some solutions of Feigenbaum's functional equation // Boll. Unione mat. Ital. – **A1**, № 2. – 153–161. (88.3б7)

Фаркас (Farcas J.)

[1884] Sur les fonctions iteratives // J. Math. Pures. Appl. – **3**, 10. – 101–108.

Фату (Fatou P.)

[1919] Menoire sur les équations fonctionnelles // Bull. sci. math. France. – **47**. – 161–271.

[1920] Sur les équations fonctionnelles (Troisiéme mémoire) // Bull. sci. math. France. – **48**. 33–94; – 208–314.

Фейгенбаум (Feigenbaum M.)

[1978] Quantitative universality for a elass of nonlinear transformations // J. Statist. Phys. – **19**, № 1. – 25–52. (79.6в297)

[1980] Universal behavior in nonlinear systems // Los Alamos Sci. – **1**, № 1. – 4–27. (Пер.: Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физ. наук. – 1983. – Т. 141, вып. 2. – 343–374).

Феллер (Feller W.)

[1960] An introduction to probability theory and its applications. I, II. – NY, L.: John Wiley& Sons, Inc. (Пер.: Введение в теорию вероятностей и ее приложение. I, II. – M.: Мир, 1973).

Феньё (Fenyö I.)

[1979] The solution of a function equation by Laplace transformation // Proc. conf. General funct. and oper. calc. Varna, 1975. – Sofia. – 97–100. (80.4б11)

Феньё, Паганони (Fenyö I., Paganoni L.)

[1987] Su una regola di addizione razionale // Rend. semin. mat. / Univ. e Politecn. Torino. – **45**, № 3. – 105–116. (90.7б8)

Фёрг–Роб (Förg–Rob W.)

[1988] On differentiable solutions of the translation equation // Ber. Math.–statist. Sek. Forschungsges. Joanneum. – **14**, № 285–296. – 287/1–287/18. (88.12б10)

[1992] On a generalization of D'Alembert's cosine equation. [Pap.] 29th Int. Symp. Funct. Equat. Wolfville, June 3–10, 1991 // Aequat. math. – **43**, № 2–3. – 269. (93.8б15)

[1994] On a problem of R.Schilling. I. // Math. Pannon. – **5**, № 1. – 29–65. (96.10б11)

Фёрг–Роб, Швайгер (Förg–Rob W., Schwaiger J.)

[1991] On a generalization of the cosine equation. [Pap.] Semin. "Contrib. Theory Funct. Equat." Debrecen–Graz, Apr. 12–13, 1991 // Graz. math. Ber. – № 315. – 25–34. (92.9б10)

[1993] On the stability of a system of functional equations characterizing generalized hyperbolic and trigonometric functions // Aequat. math. – **45**, № 2–3. – 285–296. (94.1б6)

Фикрет (Fikret V.)

[1968] On solution of one functional equation // Мат. вест. – **5**, № 1. – 25–28. (69.1б10)

Филипеску, Георгиу (Filipescu A.,Gheorghiu Em.O.)

[1984] Iterative functional equations which characterize straight lines and parabolas // Lucr. semin. mat. si fiz. Inst. politehn. Timisoara. – Noiem. – 41–42. (86.10б10)

Флетт (Flett T.M.)

[1963] Continuous solutions of the functional equation $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ // Amer. Math. Mon. – **70**, № 4. –392–397. (64.1б14)

Фолькман Л. и П. (Volkmann L., Volkmann P.)

[1985] Über die Charakterisierung der Funktion $f(x) = x$ durch Funktionalgleichungen // Aequat. math. – **28**, № 1–2. – 151–155. (85.7б9)

Фолькман (Volkmann P.)

[1983] Caracterisation de la fonction $f(x) = x$ par un systeme de deux equations fonctionnelles // Math. Repts Acad. Sci. Can. – **5**, № 1. – 27–28. (83.7б6)

[1988] Charakterisierung der Funktion $1/x$ durch Funktionalgleichungen // Ann. pol. math. – **48**, № 1. – 91–94. (88.10б5)

Форти (Forti G.L.)

[1980] Existence and stability theorems for a class of a functional equations // Aequat. math. – **20**, № 2–3. – 293–294. (80.11б23)

[1984] Redundancy conditions for the functional equation $f(x+h(x)) = f(x)+f(h(x))$ // Z. Anal. und Anwend. – **3**, № 6. – 549–554. (85.7б12)

[1985] The general solution of a functional equation in two variables // Aequat. math. – **29**, № 1. – 7–13. (86.4б14)

Фреше (Fréchet M.)

[1913] Pri la funkcia $f(x+y) = f(x)+f(y)$ // L'enseignement Math. – **15**. – 390–393.

[1914] A propos d'un article sur l'équation fonctionelle $f(x+y) = f(x)+f(y)$ // L'enseignement Math. – **16**. – 136–159.

[1932] Solution continue la plus generale d'une équation fonctionnelle de la theorie des probabilites en chaine // Bull. Soc. math. France. – **60**. – 242–280.

Фробениус (Frobenius G.)

[1897] Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen // J. Reine und Angew. Math. – **84**. – 1–63.

Хавройд (Howroyd T.)

[1964] The solutions of some functional equations // Canad. Math. Bull. – **7**, № 2. – 279–282. (65.2б46)

Хайдуков П.А.

[1958] Об отыскании функций по заданной итерации // Уч. зап. Бурятск. пед. ин-та. – Вып. 15. – 3–28.

Хайерс (Hyers D.H.)

[1941] On the stability of the linear functional equation // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – **27**. – 222–224.

Хайерс, Улам (Hyers D.H., Ulam S.M.)

[1952] Approximately convex functions // Proc. Amer. Math. Soc. – **3**. – 821–828.

Хаммер (Hammer C.)

[1992] On the function equation $f(x+y)+f(x-y)-2f(x)-2f(y)+b[f(xy)-f(x)f(y)] = 0$ // Math. Repts Acad. Sci. Can. – **14**, № 4. – 121–124. (93.5б4)

Харди (Hardy G.H.)

[1949] Divergent series. – Oxford: Clorendon Press. (Пер.: Расходящиеся ряды. – М.: ИИЛ, 1951).

Харди, Литтльвуд[9]**, Полиа** (Hardy G.H., Littlewoode J.E., Pólya G.)

[1934] Inequalities. – London: Cambridge University Press. (Пер.: Неравенства. – М.: ИИЛ, 1948).

Харрис (Harris T.E.)

[1948] Branching processes // Proc. Amer. Math. Soc. – **19**. – 474–494.

Харуки С. (Haruki S.)

[1982] On the general solution of the triangle mean value equation // Aequat. math. – **25**, № 1. – 118–119. (84.2Б14)

Харуки Х. (Haruki H.)

[1976] A functional equation connected with the sine addition theorem // Port. math. – **35**, № 1–2. – 75–79. (77.12Б1)

[1985] A proof of Euler's identity by a functional equation // Aequat. math. – **28**, № 1–2. – 138–143. (85.7Б8)

[1990] A new Pythagorean functional equation // Aequat. math. – **40**, № 2, 3. – 271–280. (94.7Б9)

[1992] On a new functional equation for Jacobi's elliptic sine function $sn(z;k)$ // Rend. semin. mat. / Univ. e Politecn. Torino. – **50**, № 2. – 153–163. (95.6Б11)

Харуки, Рассиас (Haruki H., Rassias Th.)

[1995] New generalizations of Jensen's functional equation // Proc. Amer. Math. Soc. – **123**, № 2. – 495–503. (97.7Б17)

[1995] A new functional equation of Pexider type related to the complex exponential function // Trans. Amer. Math. Soc. – **347**, № 8. – 3111–3119. (96.3Б18)

[1995] A new analogue of Gauss' functional equation // Int. J. Math. and Math. Sci. – **18**, № 4. – 749–756. (96.11Б5)

Хачатрян С.А.

[1990] Некоторые функциональные уравнения со сдвигом в классе бесконечно дифференцируемых функций. – Ереван: Ер. политехн. ин-т. – Деп. Арм. НИИНТИ 16.02.90, № 8-Ар90.

Хемминг (Hamming R.W.)

[1962] Numerical Methods for scientists and Engineers. – NY, San Francisco, Toronto: Mc Graw–Hill Book Company, Inc. (Пер.: Численные методы для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968).

Холл, Вольф (Hall P., Wolff Rodney C.L.)

[1995] Properties of invariant distributions and Lyapunov exponents for chaotic logistic maps // J. Roy. Statist. Soc. B. – **57**, № 2. – 439–452. (96.11в185)

Хорадам (Horadam A.F.)

[1996] Generalized Jacobsthal representation sequence γ_n // Notes Number Theory and Discrete Math. – **2**, № 3. – 5–11. (97.7в235)

Хосу (Hosszu M.)

[1963] Egy alternativ függvenyegyenletröl. Oblath Richard emlekenek ajanlva // Mat. lapok. – **14**, № 1–2. – 98–102. (64.7Б14)

[9] =Литтлвуд.

Хочевский (Choczewski B.)

[1963] On differentiable solutions of a functional equation // Ann. pol. math. – **13**, № 2. – 133–138. (64.5Б12)

[1968] Some theorems on the existence of a one-parameter family of C^1 solutions of a linear functional equation // Mathematice (RSR). – **10**, № 1. – 47–52. (69.5Б14)

[1969] Regular solutions of a linear functional equation in the indeterminate case containing iterations of the unknown function // Ann. pol. math. – **21**, № 3. – 257–265. (70.1Б5)

[1970] Regular solutions of a linear functional equation of the first order // Nehezi-pari Müsz. Egyet. Közl. – **30**. – 255–262. (71.1Б8)

[1976] Asymptotic properties of solutions of a linear functional equation and linear recurrence equations // Colloq. int. CNRS. – № 229. – 67–73. (77.7Б2)

[1984] Stability of some iterative functional equations // Gen. Inequalities 4. Memoriam Edwin F. Beckenbach. 4th Int. Conf. Oberwolfach, 8–14 May, 1983. – Basel. – 249–255. (85.12Б17)

[1988] Note on disontinuous solutions of a functional equation // Zesz. nauk Univ. jagiall. Acta mat. – **27**. – 281–283. (89.7Б7)

Хочевский, Кучма (Choczewski B., Kuczma M.)

[1966] On the "indeterminate case" in the theory of a linear functional equation // Fund. Math. – **58**, № 2. – 163–175. (67.3Б18)

Червик (Czerwik S.)

[1970] On sign preserving solutions of a functional equation // Zesz. nauk Univ. jagiall. Pr. mat. – **223**, № 14. – 79–81. (71.5Б16)

[1973] On the dependence on a parameter of solutions of a linear functional equation // Pr. nauk. USl. Katowicach. – № 30. – 25–30. (74.6Б2)

[1974] On the existence and uniqueness of convex solutions of a functional equation in the indeterminate case // Ann. pol. math. – **30**, № 1. – 5–8. (74.12Б7)

[1976] On the existence of a Lipschitz solution of a functional equation // Мат. вест. – **13**, № 1. – 40–51. (76.10Б15)

Чермак (Čermák J.)

[1995] Note on sinultaneous solutions of a system of Schröder's equations // Math. bohem. – **120**, № 3. – 225–236. (96.10Б12)

Чеховский (Czechowski A.)

[1979] Regularne rozwiazania rownania Schrödera // Zesz. Nauk. PS1. – № 560. – 251–262.

Шадрин Г.А., Шустов О.И., Беляева А.С.

[1975] Разложение функции в ряд Фурье, определяемый функциональным уравнением // Вычисл. мат. и мат. физ. – Вып. 1. – 184–201. (76.10Б10)

Шандор (Sandor J.)

[1988] On Certain functional equations // Prepr.: Res. Semin. / Babes–Bolyai Univ. Fac. Math. and Phys. – № 6. – 285–288. (89.3Б10)

Шапиро А.П., Лупанов С.П.

[1983] Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии. – М.: Наука.

Шарковский А.Н.

[1960] Необходимые и достаточные условия сходимости одномерных итерационных процессов // Укр. мат. ж. – **12**, № 4. – 484–486.

[1961] О решении одного класса функциональных уравнений // Укр. мат. ж. – **13**, № 3. – 86–94. (62.4Б12)

[1964] Существование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. ж. – **16**, № 1. – 61–71.

[1965] О циклах и структуре непрерывного отображения // Укр. мат. ж. – **17**, № 3. – 104–111.

[1968] Об условиях единственности для функциональных уравнений // Тр. семинара по мат. физике и нелинейным колебаниям. – Киев: Наукова думка. – Вып. 2. – 262–268. (69.10Б8)

[1970] Гладкие решения функциональных и дифференциально-разностных уравнений // Тр. междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – Киев: Наукова думка. – **1**. – 598–602. (71.4Б309)

[1973] Характеризация косинуса // Aequat. math. – **9**, № 2–3. – 121–128. (74.5Б8)

[1974] О функциональных и дифференциально-функциональных уравнениях, у которых отклонение аргумента зависит от неизвестной функции // Функциональные и дифференциально–разностные уравнения. – Киев: Наукова думка. – 148–155. (75.4Б320)

[1977] Классические функциональные уравнения: основные понятия, методы и результаты // Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. – Киев. – 290–297. (78.6Б7)

[1961] О приводимости непрерывной функции действительного переменного и структуре неподвижных точек соответствующего итерационного процесса // Докл. АН СССР. – **139**, № 5. – 1067–1070. (62.8Б175)

Шаршанов А.А

[1959] Обобщение теоремы Флоке на нелинейные уравнения // Укр. мат. ж. – **11**, № 4. – 61–71.

[1963] О решении задачи об аналитической итерации в инвариантной области, содержащей неподвижную точку // Тр. междунар. симпоз. по нелинейным колебаниям. – Киев. – 481–495.

Шватт (Schwatt I.J.)

[1970] An identity // Amer. Math. Mon. – **77**, № 2. – 168.

Швейцер А. (Schweitzer A.R.)

[1919] On the history of functional equations // Bull. Amer. Math. Soc. – **25**. – 439.

Швейцер В. (Schweizer B.)

[1961] Remarks on a functional equation // J. Indian Math. Soc. – 1959 (1961). – **23**, № 3–4. – 97–99. (62.6Б21)

Шехольм (Sjóholm H.)

[1996] Differensekvationer pa nytt sätt // Normat. – **44**, № 2. – 65–70. (97.9Б205)

Шиммак (Schimmack R.)

[1908] Axiomatische Untersuchungen über die Vektoraddition: Dissertation. – Halle.

Шлейермахер, Таргонский (Schleiermacher A., Targonski J.)

[1995] On functions with quasi-companion // Demonstr. math. – **28**, № 3. – 707–724. (96.10Б5)

Шлейфер Р.Г.

[1971] О решениях функционального уравнения // Уч. зап. Рязанского гос. пед. ин-та. – **102**. – 132–139. (72.9б9)

Шмейдель (Schmeidel E.)

[1993] Asymptotic behaviour of solutions of the second order difference equations // Demonstr. math. – **26**, № 3–4. – 811–819. (96.10б231)

Шрёдер[10] (Schroeder E.)

[1870] Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gieichungen // Math. Ann. – **2**. – 317–365.

[1871] Über iterirte Funktionen // Math. Ann. – **3**. – 296–322.

Штейнмец (Steinmetz N.)

[1982] On the functional equation $\varphi(x) = \varphi(px) + \varphi(qx + p)$ // Math. Repts Acad. Sci. Can. – **4**, № 6. – 367–371. (83.6б13)

Эбанкс (Ebanks B.R.)

[1989] Differentiable solution of a functional equation of Szekelyhidi // Util. Math. – **36**. – 197–199. (90.11б6)

Эбанкс, Каннапан, Нг (Ebanks B.R., Kannappan P.L.,Ng C.T.)

[1988] Recursive inset entropies of multiplicative type on open domains // Aequat. math. – **36**. – 268–293.

Эбанкс, Нг (Ebanks B.R., Ng C.T.)

[1996] Characterizations of quadratic differences // Pabl. Math. Debrecen. – **48**, № 1–2. – 89–102. (97.9a155)

Эверетт, Улам (Everett C.J., Ulam S.M.)

[1948] Multiplicative Systems. 1 // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – **34**. – 403–405.

Эвинг, Утц (Ewing G.M., Utz W.R.)

[1953] Continuous solutions of the functional equation $f^n(x) = f(x)$ // Canadian. J. Math. – **5**. –101–103.

Эйлер (Euler L.)

[1777] De formulis exponentialibus replicatis // Acta Acad. Sci. Petropolitanae. – **I**. – 39.

Эрдёш (Erdös J.)

[1959] A remark on the paper "On some functional equations" by S. Kurepa // Glas. mat.–fiz., astronom. (2). – **14**. – 3–5.

Эрхарт (Ehrhart E.)

[1967] Un exemple simple d'equation functionnelle // Rev. math. spec. – **77**, № 12. – 605–606. (68.8б10)

Этигсон (Etigson L.B.)

[1974] A cosine functional equation with restricted argument // Aequat. math. – **11**, № 1. – 118. (75.4б8)

[10]=Шредер.

Эчеди (Ecsedi E.)

[1974] Az $f(ax + by)g(cx + dy) = h(x)k(y)$ függvenyegyenlet nem folytonos megoldasainak egy osztalyarol // Magy. tud. akad. Mat. es fiz. tud. oszt. közl. – **22**, № 1. – 3–10. (75.7б9)

Юркат (Jurkat W.B.)

[1965] On Cauchy's functional equation // Proc. Amer. Math. Soc. – **16**, № 4. – 683–686. (66.6б10)

Ягги (Jaggi E.)

[1900] Sur les substitutions uniformes et le probléme de Babbage // Nouvelles Ann. Math. Sér. III. – **XIX**. – 483–489.

[1901a] Sur les notions de fonction compléte et de fonction periodique // Nouvelles Ann. Math. Sér. IV. – **I**. – 146–163.

[1901б] Sur les substitutions á une vâriable et les fonctions qu'elles laissent invariables // Там же. – 450–465.

[1901в] Propriétes générales des substitutions á une vâriable et des fonctions qu'elles laissent invariables // Там же. – 529–548.

[1902] Détermination des fonctions d'une vâriable qui admettent les substitutions d'un groupe quelconque donné et seulement ces substitutions // Nouvelles Ann. Math. Sér. IV. – **II**. – 368–383.

Ядренко (Yadrenko M.I.)

[1983] Spectral Theory of Random Fields, Optimization software. – NY: INC, Publications Division.

Яковска–Сувальская (Jakowska–Suwalska K.)

[1985] On dependence of Lipschitzian solution of nonlinear functional equation on an arbitrary function // Pr. nauk. USl. Katowicach. Ann math. siles. – № 1. – 116–119. (86.10б15)

[1990] Rozwiazania neieliniowego rownania funkcyjnego spelniajace warunek Lipschitza // Zesz. nauk. Mat.–fiz. – № 52. – 121–128. (92.3б3)

Янардан (Janardan K.G.)

[1978] A new functional equation analogous to Cauchy–Pexider functional equation and its application // Biometr. J. – **20**, № 4. – 323–328. (79.4б7)

Янг С. (Yang C.-C.)

[1976] On the functional equation $p(f(z)) = a(z)\sin\alpha(z) + b(z)$ // Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis. mat. e natur. – **61**, № 1–2. – 49–53. (78.9б4)

Янг Я. (Yang Y.)

[1994] Solution of a functional equation and applications // J. Funct. Anal. – **119**. – 281–297.

Яник, Печарик (Janic R.R., Pečaric J.E.)

[1990] Note on some nonlinear functional equations // Facta Univ., Niš. Ser. Math. and Inf. – № 5. – 81–84. (92.1б10)

Янковский (Jankowski T.)

[1983] On solution of a functional equation of order r in a special class of functions // Мат. вест. – **35**, № 3. – 231–240. (84.10б5)

Ярай (Járai A.)

[1992] Hölder continuos solutions of functional equations // Math. Repts Acad. Sci. Can. – **14**, № 5. – 213–218. (94.3Б7)

[1993] On Hölder continuous of functional equations // Publ. Math. Debrecen. – **43**, № 3–4. – 359–365. (96.10Б22)

[1994a] On continuous solutions of functional equations // Publ. Math. Debrecen. – **44**, № 1–2. – 115–122. (96.10Б25)

[1994б] On Lipschitz property of solutions of functional equations // Aequat. math. – **47**, № 1. – 69–78. (95.8Б5)

Ярай, Макса (Járai A., Maksa Gt.)

[1995] The measurable solutions of a functional equations of C.Alsina and Garsia-Roig J.L. // Math. Repts Acad. Sci. Can. – **17**, № 1. – 7–10. (96.1Б8)

Ярчик (Jarczyk W.)

[1987] Generic properties of some iterative functional equations // Ann. pol. math. – **47**, № 3. – 361–367. (88.8Б4)

[1988] On continuous functions which are additive on their graphs // Ber. Math.–statist. Sek. Forschungsges. Joanneum. – № 285–296. – 292/1–292/66. (88.12Б13)

[1990] Existence and uniqueness of continuous solutions of nonlinear functional equations are generic properties // Pr. nauk USl. Katowicach. Ann. math. siles. – № 3. – 32–40. (91.1Б10)

[1991a] On a problem of Z.Daroczy // Pr. Nauk. USl. Katowicach. Ann. math. siles. – № 5. – 83–90. (92.11Б5)

Ярчик, Лоскот, Ждун (Jarczyk W., Loskot K., Zdun M.C.)

[1994] Commuting functions and simultaneous Abel equations // Ann. pol. math. – **60**, № 2. – 119–135. (95.10Б9)

Содержание