

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ВОСТОЧНОУКРАИНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ**

Ю.М. НЕФЁДОВ

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Луганск – 2003

УДК 62 – 52 (075.8)
Н 58

Рекомендовано Вченою Радою СНУ ім. В.Даля
як навчальний посібник

Відповідальний редактор:

Грібанов В.М., професор, завідувач кафедри прикладної математики
Східноукраїнського національного університету ім. Володимира Даля

Рецензенти:

Грібанов В.М., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля.

Леві Л.І., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фізико-математичних дисциплін Луганського національного аграрного університету

Нефьодов Ю.М.

Н 58

Теорія керування: Навчальний посібник. – Луганськ:
Вид-во СНУ ім. В.Даля, 2003. – 228 с., табл. 2, іл. 54,
бібліогр. 18 назв.

ISBN 966-590-424-8

У навчальному посібнику викладені основи теорії керування і методи побудови оптимального керування системами, що описуються звичайними диференціальними рівняннями. Послідовно розглянуті загальні питання теорії керування: динамічні характеристики лінійних систем, властивості стійкості, керованості і спостерігатимості систем, методи побудови оптимального керування на основі варіаційного числення, принципу максимуму і динамічного програмування. Для ілюстрації основних методів приведені приклади.

Для студентів університетів, що спеціалізуються в області прикладної математики.

УДК 62 – 52 (075.8)

ISBN 966-590-424-8

© Нефьодов Ю.М.

© Східноукраїнський національний
університет імені Володимира Даля.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вопросы теории управления изучаются студентами различных университетов Украины на таких специальностях, как прикладная математика, информатика, компьютерные технологии, автоматика, робототехника и многих других.

Настоящее учебное пособие основано на курсах лекций по теории управления, которые автор читал в разные годы на математических специальностях Восточноукраинского национального университета и инженерно-технических специальностях других высших учебных заведений. Содержание учебного пособия определено программой курса «Теория управления» для специальностей «Прикладная математика» и «Информатика». Предполагается, что читатель знаком с основами теории дифференциальных уравнений, операционного исчисления и вариационного исчисления.

В первой главе дается понятие динамической управляемой системы и основной цели управления.

Во второй главе рассмотрены динамические характеристики линейных систем управления, вводятся понятия передаточной функции и частотных характеристик.

Третья глава содержит общие вопросы устойчивости динамических систем и конкретные критерии устойчивости систем управления.

В четвертой главе содержатся сведения по управляемости, наблюдаемости и идентификации линейных систем управления.

Пятая глава посвящена методам классического вариационного исчисления в приложении к оптимальным системам управления.

В шестой главе рассмотрен неклассический вариационный метод оптимального управления – принцип максимума Понтрягина, дан анализ особенностей этого метода.

В седьмой главе изложен метод динамического программирования и его применение для построения оптимального управления дискретными и непрерывными динамическими системами.

В учебном пособии использованы общепринятые в теории управления обозначения.

В конце книги приведен список литературы, содержащий лишь те работы, которые непосредственно использованы в пособии и могут дополнять ее при изучении теории и методов управления.

Глава 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ УПРАВЛЕНИИ

В настоящей главе начинается изучение задачи об управлении объектами, движения которых описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Рассматриваются простые примеры систем управления. Обсуждается линеаризация уравнений движения. Формулируются основные задачи об управлении, которое переводит объект управления из одного заданного состояния в другое в течение определенного промежутка времени.

1.1. Примеры систем управления и их математические модели

Реальные системы управления, как правило, достаточно сложны. Приведенные ниже примеры используются в основном для иллюстрации задач теории управления. Поэтому рассматриваемые системы управления отличаются максимальной простотой и наглядностью.

Пример 1.1. Предположим, что некоторая материальная точка A массы m может двигаться только по прямой линии, вдоль которой на точку действует сила $f(t)$. Положение точки A характеризуется координатой $x = x(t)$ (рис. 1.1).

Пусть известны граничные условия, т.е. положение точки A в начальный t_0 и конечный t_1 моменты времени t , соответственно

$$x(t_0) = x^{(0)}, \quad x(t_1) = x^{(1)}, \quad (1.1)$$

а также начальная и конечная скорости точки A

$$x'(t_0) = 0, \quad x'(t_1) = 0. \quad (1.2)$$

Если пренебречь силами сопротивления движению, то согласно второму закону Ньютона уравнение движения точки A можно представить в следующем виде

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = f(t), \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = u(t), \quad (1.3)$$

где $u(t) = f(t)/m$.

При решении задач управления принято пользоваться понятиями *фазового пространства* и *фазовых координат*.

Введем следующие обозначения $x_1(t) = x(t)$ и $x_2(t) = x'(t)$. Тогда уравнение (1.3) можно записать в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = u(t). \end{cases} \quad (1.4)$$

Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных, называется *нормальной*. Так что система (1.4) представлена в нормальной форме.

Переменные $x_1(t)$ и $x_2(t)$ являются фазовыми координатами двумерного фазового пространства (*фазовой плоскости*). Время t в явном виде не входит. При изменении t изображающая точка (x_1, x_2) перемещается по фазовой плоскости, прочерчивая линию, которая называется *фазовой траекторией* (рис.1.2).

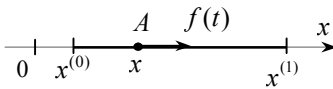


Рис. 1.1.

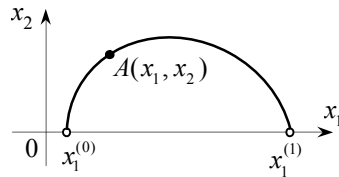


Рис. 1.2.

Фазовые координаты дают возможность записать граничные условия (1.1) и (1.2) в следующем виде

$$\begin{aligned} x_1(t_0) = x_1^{(0)} = x^{(0)}, \quad x_2(t_0) = x_2^{(0)} = 0, \\ x_1(t_1) = x_1^{(1)} = x^{(1)}, \quad x_2(t_1) = x_2^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

Фазовые траектории по существу являются графической интерпретацией решения системы дифференциальных уравнений (1.4) с краевыми условиями (1.5).

Задание граничных условий (1.5) и выбор возможного управления $u(t)$ определяют единственным образом непрерывное движение или

фазовую траекторию $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$. Вектор $x(t)$ называется *фазовым вектором*. Показателем качества процесса управления (или критерием оптимальности) является числовое значение некоторого функционала $J = J(x(t), u(t))$.

На основе (1.4) и (1.5) можно сформулировать несколько задач оптимального управления движением точки A , которые будут отличаться критериями оптимальности и видом ограничений.

Задача оптимального быстрогодействия. В этом случае критерием оптимальности является время переходного процесса $T = t_1 - t_0$, т.е. t_1 — нефиксированная величина и функционал имеет вид

$$J = T_{\min} = \min_{u(t)} (t_1 - t_0) = \min_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} dt. \quad (1.6)$$

Необходимо найти оптимальные управление $u(t)$ и траекторию $x(t)$, удовлетворяющие (1.4), (1.5) и доставляющие минимум функционалу (1.6). При этом могут быть дополнительные условия, например, ограничение на управление $|u(t)| \leq 1$.

Задача оптимальной производительности. В этом случае критерием оптимальности является наибольшее расстояние $x_1^{(1)} - x_1^{(0)}$ за определенное время $T = t_1 - t_0$, т.е. функционал имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} x_2(t) dt \rightarrow \max. \quad (1.7)$$

Необходимо найти оптимальные процесс управления $u(t)$ и траекторию $x(t)$, удовлетворяющие (1.4), начальным условиям $x_1(t_0) = x_1^{(0)}$, $x_2(t_0) = x_2^{(0)} = 0$, конечным условиям $x_2(t_1) = x_2^{(1)} = 0$ и доставляющие максимум функционалу (1.7). При этом могут быть дополнительные условия, например, ограничение на управление $|u(t)| \leq 1$.

Задача оптимальной экономичности. В этом случае критерием оптимальности является расход энергии за определенное время. Функционал имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} u^2(t) dt \rightarrow \min. \quad (1.8)$$

Необходимо найти оптимальные процесс управления $u(t)$ и траекторию $x(t)$, удовлетворяющие системе (1.4), начальным условиям $x_1(t_0) = x_1^{(0)}$, $x_2(t_0) = x_2^{(0)} = 0$, конечным условиям $x_1(t_1) = x_1^{(1)}$, $x_2(t_1) = x_2^{(1)} = 0$ и доставляющие минимум функционалу (1.8). При этом могут быть дополнительные условия, например, ограничение на управление $|u(t)| \leq 1$.

Можно, варьируя условия, поставить еще ряд задач.

Пример 1.2.

Движение плоского маятника, подвешенного к точке опоры при помощи жесткого невесомого стержня (рис. 1.3), как известно [7], описывается уравнением

$$J_m \frac{d^2 \vartheta}{d\tau^2} + b \frac{d\vartheta}{d\tau} + mgl \sin \vartheta = M(\tau), \quad (1.9)$$

где l – длина жесткого стержня маятника, m – масса, сосредоточенная в конце стержня, $J_m = ml^2$ – момент инерции, g – гравитационная постоянная (ускорение силы тяжести), $b \geq 0$ – коэффициент демпфирования, τ – время, $M(\tau)$ – внешний управляющий момент, $\vartheta = \vartheta(\tau)$ – угол отклонения стержня от точки устойчивого равновесия.

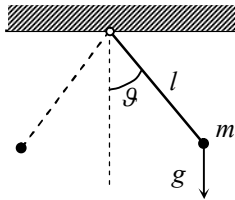


Рис.1.3.

Если сделать замену переменной $\tau = t \cdot \sqrt{\frac{J_m}{mgl}}$, то уравнение (1.9) можно привести

к виду

$$\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + \beta \frac{d\varphi(t)}{dt} + \sin \varphi(t) = u(t), \quad (1.10)$$

где $\varphi(t) = \vartheta(\tau)$, $\beta = \frac{b}{\sqrt{J_m mgl}}$, $u(t) = \frac{M(\tau)}{mgl}$.

Введем следующие обозначения: $x_1(t) = \varphi(t)$ – угол отклонения маятника, $x_2(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$ – скорость изменения угла отклонения маятника. Тогда уравнение (1.10) запишется в виде эквивалентной системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -\sin x_1(t) - \beta x_2(t) + u(t). \end{cases} \quad (1.11)$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ маятник отклонен на угол $x_1(0) = x_1^{(0)}$ и имеет начальную скорость $x_2(0) = x_2^{(0)}$. Будем также считать, что функция $u(t)$ – управляющий момент, выбором которого можно влиять на движение маятника, удовлетворяет ограничению

$$|u(t)| \leq \gamma, \quad \gamma = \text{const} > 0, \quad t \geq 0. \quad (1.12)$$

Здесь возможны, например, следующие постановки задач управления: выбрать управление $u(t)$, удовлетворяющее условиям (1.12), так, чтобы:

1. За минимальное время T остановить маятник в одной из точек устойчивого равновесия, т.е. добиться выполнения условий

$$x_1(T) = 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad x_2(T) = 0.$$

2. За минимальное время T добиться выполнения условия

$$x_1^2(T) + x_2^2(T) \leq \varepsilon,$$

где ε – заданное число.

3. К заданному моменту T необходимо, чтобы выполнялось равенство $x_2(T) = 0$, а величина $x_1(T)$ была максимально возможной (задача о накоплении возмущений) и т. д.

При изучении малых колебаний маятника можно полагать, что $\sin \varphi \approx \varphi$, и тогда уравнение (1.10) и эквивалентная ему система (1.11) становятся линейными, и будут иметь вид

$$\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + \beta \frac{d\varphi(t)}{dt} + \varphi(t) = u(t)$$

и соответственно система уравнений (1.11):

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) - \beta x_2(t) + u(t). \end{cases} \quad (1.13)$$

Пример 1.3.

Рассмотрим материальную точку массы m , движущуюся в вертикальной плоскости (x_1, x_2) в поле силы тяжести (рис. 1.4). Предположим, что в качестве управляющего воздействия к точке m приложена реактивная сила f , возникающая в результате отделения от m частиц с элементарной массой dm_1 . Тогда масса точки является величиной переменной $m(t)$ и ее движение можно описать векторным уравнением Мещерского [9]

$$m(t) \frac{dv^0(t)}{dt} = f(t) + p(t). \quad (1.14)$$

В уравнении (1.14) $m(t) = m_0 + m_1(t)$, где $m_0 = \text{const}$ – неизменная часть массы точки, $m_1(t) \geq 0$ – реактивная масса точки;

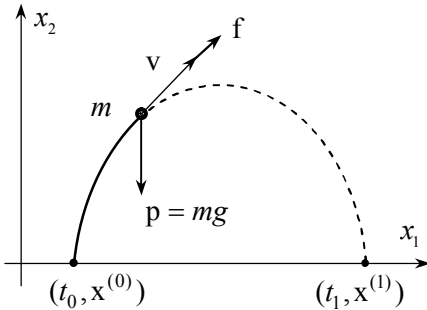


Рис. 1.4.

$$f(t) = v(t) \frac{dm_1(t)}{dt};$$

$$v(t) = v^1(t) - v^0(t);$$

$v^0(t)$ – вектор абсолютной скорости точки m ; $v^1(t)$ – вектор скорости частицы dm_1 в момент $t + dt$ после ее отделения, так что $v(t) = v^1(t) - v^0(t)$ – есть вектор относительной скорости отделяющейся частицы, $p(t) = m(t)g$ – вес.

Проецируя уравнение (1.14) на горизонтальную и вертикальную оси координат, получим следующие уравнения движения:

$$\begin{cases} m(t) \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = \frac{dm(t)}{dt} v_1(t), \\ m(t) \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = \frac{dm(t)}{dt} v_2(t) - m(t)g, \end{cases} \quad (1.15)$$

где $v_1(t)$ и $v_2(t)$ – проекции вектора $v(t)$ на оси x_1 и x_2 . Допуская, что абсолютная величина вектора $v(t)$ задана и, вводя соответствующие

обозначения, запишем систему уравнений (1.15) в нормальной форме, т.е. в виде системы четырех уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_3(t), & \frac{dx_2(t)}{dt} = x_4(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} = u_1(t), & \frac{dx_4(t)}{dt} = u_2(t) - g, \end{cases} \quad (1.16)$$

где $u_1(t) = \frac{dm(t)}{dt} \cdot \frac{|v|\cos\alpha}{m(t)}$, $u_2(t) = \frac{dm(t)}{dt} \cdot \frac{|v|\sin\alpha}{m(t)}$, α – угол между

вектором $v(t)$ и осью x_1 (рис.1.4). В матричной форме система (1.16) запишется следующим образом:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + z, \quad (1.17)$$

где

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}.$$

Так же, как в примерах 1.1 и 1.2 в примере 1.3 можно ввести соответствующий критерий качества процесса управления, сформулировать ряд задач оптимального управления.

Рассмотрим еще один пример простой системы управления, на основании которого в следующих разделах настоящего издания легко иллюстрировать методы построения процесса управления.

Пример 1.4.

Рассмотрим электрический двигатель постоянного тока. При этом пренебрежем реакцией якоря двигателя, магнитным рассеянием, влиянием вихревых токов. Управление скоростью вращения (или углом поворота) вала двигателя может производиться со стороны питания цепи якоря или обмотки возбуждения (рис. 1.5). На рисунке приняты следующие обозначения: $u_{\text{я}}, i_{\text{я}}$ – напряжение и ток якоря; $u_{\text{в}}, i_{\text{в}}$ – напряжение и ток возбуждения.

Предположим, что регулируемой величиной является угол поворота вала двигателя $\varphi(t)$.

На основании законов механики можно записать уравнение для моментов:

$$J_o \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = M_{ep}(t) - M_c(t), \quad (1.18)$$

где J_o – момент инерции вала двигателя (с учетом нагрузки);

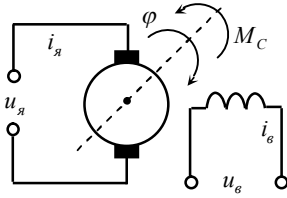


Рис. 1.5.

$M_{ep}(t) = C i_a(t) \Phi_o(i_f)$ – момент вращения, C – коэффициент пропорциональности, который определяется конструкцией двигателя, и $\Phi_o(i_f)$ – полезный результирующий магнитный поток; $M_c(t)$ – момент сопротивления, зависящий от скорости вращения двигателя.

При управлении двигателем со стороны якоря с ростом напряжения питания якоря u_a скорость вращения вала двигателя $\omega = d\varphi/dt$ растет.

Преобразуем уравнение (1.18) к виду

$$\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = u(t) - z(t), \quad (1.19)$$

где $u(t) = M_{ep}(i_a(t))/J_o$ – управление; $z(t) = M_c(t)/J_o$ – возмущение.

Приведем уравнение (1.19) в нормальную форму:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = u(t) - z(t), \end{cases} \quad (1.20)$$

где введены новые переменные $x_1(t) = \varphi(t)$, $x_2(t) = d\varphi(t)/dt = \omega(t)$.

Характерной чертой рассмотренных примеров является линейность уравнений движения. Следует заметить, что многие управляемые системы описываются нелинейными уравнениями. Однако изучение задач управления линейными системами по многим причинам является полезным. Об этом подробно будет сказано в следующем параграфе.

1.2. Системы управления и их уравнения

Слово «система» в терминологических словарях определяется как «совокупность объектов, связанных какими-либо формами взаимодействия или взаимозависимости». Поскольку мы будем касаться только количественной характеристики систем, то понятие системы будет иметь конкретное содержание. Точнее, предполагается, что каждый объект, представляющий собой часть системы, характеризуется конечным числом определенных величин и что взаимоотношение между величинами, можно выразить некоторой четко определенной математической формой. В системах управления объекты (элементы) называются *звеньями*, а управляемая части системы – *объектом управления* (объект управления может состоять из нескольких звеньев).

Таким образом, под *системой* будем понимать совокупность соединенных между собой звеньев, являющихся компонентами системы.

Согласно приведенному определению, систему можно рассматривать как отдельное звено, и, наоборот, произвольное отдельное звено можно рассматривать как систему. Это означает, что представление системы в виде совокупности звеньев дело совершенно условное. Но такая

условность позволяет во многих случаях свести задачу анализа системы в целом к ряду задач анализа определенного количества отдельных звеньев и, таким образом, упростить исследования.

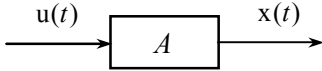


Рис.1.6.

Предположим, что объект управления A (рис. 1.6) описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = f_j(x(t), u(t)) \quad (j = \overline{1, n}), \quad (1.21)$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ – вектор выходных переменных, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$ – вектор входных переменных.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что при некоторых условиях дифференциальное уравнение n -го порядка можно преобразовать в нормальную систему уравнений (1.21) и наоборот (см. примеры разд. 1.1). В терминах систем управления это означает, что объект управления с вектором выходных переменных $x(t)$ может быть формально представлен в виде совокупности отдельных звеньев с выходными сигналами $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ и наоборот. Поскольку общие методы исследования систем управления построены для нормальной формы

уравнений, то, как правило, предпочтение будем отдавать нормальной форме дифференциальных уравнений.

Уравнения (1.21) в общем случае являются нелинейными. Соответствующие им системы управления называются *нелинейными системами управления*. Исследование нелинейных систем управления связано с большими трудностями.

Многие системы управления могут описываться линейными уравнениями вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (1.22)$$

где $A(t)$, $B(t)$ – функциональные матрицы, элементы которых зависят от t :

$$A(t) = \{a_{ij}(t)\}, B(t) = \{b_{ik}(t)\} \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}; k = \overline{1, m}). \quad (1.23)$$

Системы управления, описываемые уравнениями (1.22), называются *линейными*. Линейные системы интересны сами по себе. Но главное, что многие нелинейные системы могут быть исследованы на основании построенных специальным образом линейных уравнений, описывающих поведение нелинейных систем с определенной степенью точности.

Допустим, что установившийся процесс в системе управления имеет место при некоторых постоянных значениях $x(t) = x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, $u(t) = u^0 = (u_1^0, \dots, u_m^0)$ и $x'(t) = (x')^0 = ((x_1')^0, \dots, (x_n')^0)$. Тогда уравнения установившегося состояния согласно (1.21) будут

$$(x_j')^0 = f_j(x^0, u^0) = f_j^0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (1.24)$$

Необходимо, определить состояние $x^0 + \Delta x(t)$ системы (1.21) при условии, что она находится под действием управления $u^0 + \Delta u(t)$.

Если известно, что малому приращению управления соответствует малое приращение координат системы, а функции $f_1(x(t), u(t))$, ..., $f_n(x(t), u(t))$ в уравнениях (1.21) обладают *непрерывными частными производными по всем аргументам в окрестности точек*, соответствующих заданному режиму, то поставленный вопрос может быть решен с определенной степенью точности при помощи линейных уравнений (1.22). Действительно, на основании сказанного можно записать равенства

$$(x_j')^0 + \Delta x_j' = f_j(x^0 + \Delta x, u^0 + \Delta u) \quad (j = \overline{1, n}). \quad (1.25)$$

Допуская возможность разложения функций $f_j(x^0 + \Delta x, u^0 + \Delta u)$ в ряд по степеням указанных малых отклонений (по формулам Тейлора) и отбрасывая члены разложения более высокого порядка малости, можем представить уравнения (1.25) в следующем виде

$$(x'_j)^0 + \Delta x'_j = f_j^0 + A(t)\Delta x + B(t)\Delta u \quad (j = \overline{1, n}), \quad (1.26)$$

где

$$\begin{aligned} A(t) &= \left\{ \partial f_i / \partial x_j \right\} \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}), \\ B(t) &= \left\{ \partial f_i / \partial u_k \right\} \quad (i = \overline{1, n}; k = \overline{1, m}). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Элементы матриц в общем случае являются переменными от времени t , т.к. установившийся процесс в системе управления определяется переменными значениями $x^0(t)$, $u^0(t)$. Если установившийся процесс изменяется медленно по сравнению с динамическими свойствами системы управления, то все частные производные в (1.27) представляют собой некоторые постоянные коэффициенты.

Вычтя из уравнений (1.26) почленно соответствующие уравнения (1.24) установившегося состояния, получим искомое линеаризованное уравнение динамики системы управления в виде

$$\frac{d\Delta x_j}{dt} = A(t)\Delta x + B(t)\Delta u \quad (j = \overline{1, n}), \quad (1.28)$$

Уравнения (1.28) относительно неизвестных Δx и Δu являются *линейными дифференциальными уравнениями* типа (1.22). В приведенных уравнениях частные производные от функций $f_j(x(t), u(t))$ определяются в некоторой текущей точке (x^0, u^0) .

Для упрощения записи значок Δ перед переменными x_j и u_i в дальнейшем будет опускаться в предположении, что эти переменные представляют собой малые отклонения от некоторого установившегося состояния и линеаризация уравнений уже проделана.

Исследование линейных систем имеет большое значение по следующим причинам:

1) Имеется много динамических систем, движение которых описывается линейными уравнениями (например, линейные электрические цепи, механические системы классической механики, линейные объекты регулирования и т. д.).

2) Линейная теория имеет законченный вид, можно привлечь к исследованию сильный аппарат *линейной алгебры* и *функционального ана-*

лиза. Разработаны достаточно эффективные численные методы решения линейных задач.

3) С помощью линейной теории можно изучать нелинейные динамические системы в окрестности их номинальных траекторий. Это позволяет заменить трудную нелинейную проблему более доступной для исследования линейной задачей. Если линеаризация выполнена разумно, то часто удастся из решения вспомогательной задачи извлечь полезную информацию для решения исходной проблемы. Однако линеаризация системы должна всякий раз обосновываться.

С учетом этих замечаний в дальнейшем будут рассматриваться линейные системы. Среди линейных систем управления следует выделить *линейные системы с постоянными параметрами*. Такие системы (или отдельные звенья) описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами в нормальной форме

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad (1.29)$$

где $A = \{a_{ij}\} \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n})$, $B = \{b_{ik}\} \quad (i = \overline{1, n}; k = \overline{1, m})$, причем $a_{ij} = \text{const}$, $b_{ik} = \text{const}$.

Пример 1.5.

Рассмотрим линеаризацию на примере звена, описываемого следующим дифференциальным уравнением в стандартной форме:

$$F(x(t), x'(t), x''(t), u(t), u'(t)) = 0, \quad (1.30)$$

где $x(t)$ – выходная величина; $u(t)$ – входная величина; $x'(t)$, $x''(t)$, $u'(t)$ – производные по времени.

Пусть заданному установившемуся режиму соответствуют

$$x = x^0; x' = (x')^0; x'' = (x'')^0 = 0; u = u^0; u' = (u')^0 = 0. \quad (1.31)$$

Обозначим отклонения через Δx , $\Delta x'$, $\Delta x''$, Δu , $\Delta u'$. Тогда в динамическом режиме $x = x^0 + \Delta x$; $x' = (x')^0 + \Delta x'$; $x'' = (x'')^0 + \Delta x''$; $u = u^0 + \Delta u$; $u' = (u')^0 + \Delta u'$. Подставим эти выражения в (1.30) и, рассматривая F как функцию от независимых переменных x , x' , x'' , u и u' , разложим ее в ряд Тейлора в точке (1.31) и отбросим малые члены более высокого порядка, чем отклонения. Тогда (1.30) примет вид

$$F(x^0, (x')^0, 0, u^0, 0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^0 \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^0 \Delta x' + \left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)^0 \Delta x'' +$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^0 \Delta u + \left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)^0 \Delta u' = 0, \quad (1.32)$$

где через $(\partial F/\partial x)^0$, ..., $(\partial F/\partial u')^0$ для краткости обозначены частные производные, взятые по независимым переменным x , ..., u' . В выражения частных производных вместо всех переменных подставлены их постоянные значения в соответствии с (1.31).

Когда в системе устанавливается заданный режим, уравнение (1.30) принимает вид $F(x^0, (x')^0, 0, u^0, 0) = 0$. Вычтя это уравнение из (1.32), получим искомое уравнение звена в отклонениях:

$$a_0 \Delta x'' + a_1 \Delta x' + a_2 \Delta x = b_0 \Delta u' + b_1 \Delta u,$$

или, отбрасывая Δ , запишем уравнение для возмущенного движения в следующем виде

$$a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = b_0 \frac{du}{dt} + b_1 u, \quad (1.33)$$

где $a_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)^0$; $a_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^0$; $a_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^0$; $b_0 = -\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)^0$; $b_1 = -\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^0$.

Если время t явно не входит в исходное уравнение (1.33), то коэффициенты линеаризованного уравнения (1.33) являются постоянными.

1.3. Принципы управления. Постановка задачи об управлении

Из рассмотренных примеров в параграфе 1.1 видно, что каждая система управления может быть представлена двумя основными частями: управляемым объектом и источником управления.

Управляемыми объектами могут быть: живые организмы, коллективы людей, производственные предприятия, космические станции, технологические процессы, отдельные станки, машины. Общим во всех этих случаях является то, что мы можем управлять объектом, т.е. влиять на его поведение.

Как правило, переход управляемого объекта из начального состояния в конечное состояние можно осуществлять различными способами. Поэтому возникает вопрос о выборе наиболее рационального пути перехода, т.е. о нахождении наилучшего с определенной точки зрения способа управления объектом.

Для решения поставленной задачи управления объектом предназначено *управляющее устройство* (источник управления).

Уточним основные понятия, которые были введены в параграфе 1.1 при рассмотрении примеров.

Предположим, что объект подвержен управляющим воздействиям $u_1(t), \dots, u_m(t)$, которые будем трактовать как компоненты m -мерного вектора $u(t) = \{u_j(t)\} \ (j = \overline{1, m})$. Вектор $u(t)$ называется *управлением* или *векторной функцией управления*.

Систему управления схематически можно представить объектом управления A и некоторым устройством B , которое управляет объектом A , что можно изобразить с помощью структурной схемы (рис. 1.7).

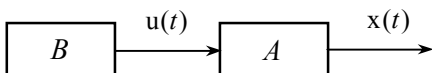


Рис.1.7.

Вектор $u(t) = \{u_j(t)\} \ (j = \overline{1, m})$

называют также вектором *выходных переменных* по отношению к объекту A . Состояние управляемого объекта в каждый момент времени t характеризуется

выходными величинами $x_1(t), \dots, x_n(t)$, связанными с его динамикой (например, координаты объекта, скорость объекта и т.п.). Величины $x_1(t), \dots, x_n(t)$ являются *выходными переменными* системы. Кроме того, вектор $x = \{x_i\} \ (i = \overline{1, n})$ называется *фазовым вектором*, а его компоненты – *фазовыми координатами* объекта управления.

Определение 1.1. *Фазовым вектором* объекта управления называется всякий вектор $x(t) = \{x_j(t)\} \ (j = \overline{1, n})$, который обладает следующими свойствами:

1. Компоненты $x_j(t)$ характеризуют текущее состояние объекта.
2. При выбранном возможном управлении $u(t)$ каждое начальное состояние $x(t_0) = x^{(0)}$ единственным образом определяет значения $x(t) = x(t, t_0, x^{(0)})$ для всех рассматриваемых моментов времени t .

В дальнейшем будем считать (если не оговорено противное), что фазовое состояние $x(t)$ объекта управления A в произвольный момент времени $t > t_0$ определяется полностью и однозначно его известным начальным состоянием $x(t_0)$ и управлением $u(t)$ при $t \geq t_0$. Пару векторных функций $\{u(t), x(t)\}$ называют *процессом управления*.

На рис. 1.7 не отображены внутренние характеристики объекта управления A и управляющего устройства B . Между тем в каждом конкретном случае характеристики системы должны быть известными.

С математической точки зрения внутреннее устройство объекта управления определяется уравнениями движения данного объекта. Для различных систем соответствующие уравнения имеют различную природу, это могут быть алгебраические уравнения, обыкновенные и в частных производных дифференциальные уравнения, интегральные уравнения и т.п. В дальнейшем будем рассматривать системы управления безотносительно к их конкретному содержанию и инженерному воплощению, а поэтому под словами «заданный объект управления» будем понимать *известный* способ преобразования входного сигнала $u(t)$ в выходной $x(t)$. Закон преобразования сигналов называют *уравнением объекта*, *оператором объекта* и т.п.

Широко распространенные непрерывные системы управления описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями вида (1.22).

В зависимости от того, входит или нет время t явно в уравнения системы разделяют на стационарные и нестационарные. Система управления, которая описывается дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, называется *нестационарной*. Уравнения (1.22) описывают *линейную нестационарную систему управления*.

Системы управления называются *стационарными*, если они описываются уравнениями, не зависящими явно от времени. Это означает, что свойства системы со временем не изменяются. Линейные стационарные системы описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами вида (1.29).

В большинстве случаев искомые управления $u_j(t)$ ($j = \overline{1, m}$) должны обеспечивать экстремум некоторых функций или *функционалов*, определенных на множестве допустимых траекторий и управлений. Как правило, эти функционалы связаны с определенными характеристиками объекта управления, такими как время перехода системы из одного состояния в другое, энергия управляющего сигнала (тяга ракеты, количество топлива), экономический показатель производства и т.п.

Не вникая в конкретное содержание этих функционалов, будем называть их *критериями качества* объекта управления или *критериями оптимальности*.

Обобщая сказанное, приходим к заключению, что задача управляющего устройства или в целом системы управления состоит в приведении объекта управления в требуемое состояние. Выполнение этой за-

дачи может осуществляться различными путями, т.е. существует множество управлений $u(t)$ и соответствующих им траекторий $x(t)$, приводящих систему к одному и тому же требуемому состоянию. В большинстве случаев из множества возможных управлений $u(t)$, приводящих объект управления к требуемому состоянию, нужно выбрать те управления, которые выполняют свою функцию наилучшим способом. В одном случае наилучший способ управления заключается в быстрейшем приведении системы к заданному состоянию, в другом – это связывается с минимизацией энергии управления, в третьем – это минимизация отклонения текущей траектории системы от заданной траектории и т.п.

Процесс управления, который обеспечивает экстремум критерия качества объекта управления, называется *оптимальным процессом управления*.

Система, обладающая оптимальным процессом управления, называется *оптимальной системой управления*. В частности, системы управления, критерий качества которых есть минимальное время перехода системы из одного состояния в другое, называются системами, *оптимальными по быстродействию*. Проблемы исследования такого рода систем носят название *задач о быстродействии*.

Поскольку все системы управления, которые используются в различных сферах человеческой деятельности, в принципе предназначены осуществлять управление наилучшим способом, то *главной задачей теории управления можно считать исследование оптимальных систем управления*.

Рассмотрим теперь вопрос о том, какие функции в системе управления должно выполнять управляющее устройство B (рис.1.7). На схеме показано, что управляющее устройство посылает на объект управления A управляющий сигнал $u(t)$. Этот сигнал можно создать в устройстве B в том случае, когда имеется информация о цели управления. Иначе говоря, когда известны критерий качества объекта управления, оператор объекта управления, начальное состояние объекта, а также те ограничения, которым должны удовлетворять входные и выходные сигналы системы.

Можно определить два различных типа систем управления.

Первый тип систем управления характеризуется тем, что их объекты управления имеют точно определенные операторы (уравнения), они не подвергаются воздействию случайных возмущений и, таким образом, движение указанных объектов определено точно и однозначно на всем временном промежутке функционирования системы. Для этих систем критерий качества объекта также является детерминированной величиной. Кроме того, все каналы связи управляющего устройства и объекта

управления этого типа систем защищены от каких-либо случайных воздействий. При таких предположениях имеется возможность рассчитать оптимальное управление $u^*(t)$ заблаговременно, еще до начала функционирования системы. Таким образом задача состоит в создании такого управляющего устройства B , которое смогло бы реализовать подачу рассчитанного управления $u^*(t)$ на объект управления A . Системы управления такого типа называются *системами программного управления* или *системами без обратной связи* (незамкнутыми системами).

Практическое применение систем программного управления ограничено в связи с целым рядом причин, связанных с процессом управления. Например, если сигнал управления $u(t)$ зависит от текущего состояния объекта управления A , которое заранее неизвестно, то информация о величине $x(t)$ на основании измерений в текущий момент времени t должна поступать на управляющее устройство B . Следовательно, система управления в данном случае должна иметь дополнительные линии связи, по которым поступает необходимая информация к управляющему устройству B .

Второй тип систем управления характеризуется наличием обратной связи. Линия связи, по которой выходной сигнал $x(t)$ объекта управления поступает в управляющее устройство B , называется *линией обратной связи*. В соответствии с этим система управления называется *замкнутой*

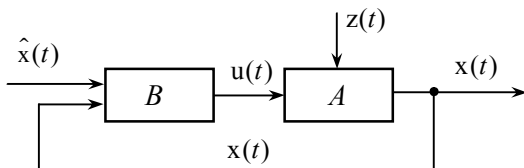


Рис. 1.8.

системой управления, или *системой управления с обратной связью* (рис. 1.8).

Существует много причин, объясняющих, почему наличие в системе только программного управления является недостаточным. Например, при создании систем управления приходится допускать некоторую неточность их работы. Это может быть из-за ограниченной точности изготовления их компонент или параметры систем могут изменять свои свойства со временем из-за старения, изменения температурных условий, атмосферных явлений и т. п. В результате, при управлении даже достаточно простыми процессами динамические характеристики систем могут быть известными только приближенно. Кроме того, имеют место

внешние возмущения $z(t)$, которые часто не подлежат контролю и заранее не могут быть скомпенсированы. В том случае, когда на объект управления действует некоторое случайное возмущение $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_q(t))$, то его можно изобразить так, как показано на рис.1.8.

Процесс управления с обратной связью наблюдается везде: в живых организмах, в кибернетических устройствах, в общественной жизни и т.п.

Замкнутые системы управления являются мощным средством управления объектами в условиях действия на них случайных возмущений. Случайные воздействия проникают в системы управления различными путями. Среди них можно указать, например, на несовершенство линий передачи сигналов, из-за чего к проходящим по ним сигналам присоединяются случайные помехи. Кроме того, случайные возмущения могут оказывать влияние непосредственно на объект управления, причем случайные возмущения могут носить как внешний, так и внутренний характер. Все эти изменения отклоняют объект управления от его расчетной траектории движения. Но благодаря наличию линии обратной связи, управляющее устройство имеет возможность учитывать возникшие отклонения и давать соответствующую коррекцию движению.

Сделаем некоторые замечания относительно функции управления $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$. В общем случае функция управления не может принимать произвольные значения, а подчиняется некоторым ограничениям. Это явление совершенно естественно, поскольку параметры управления являются величинами, отражающими определенные характеристики окружающей среды, такие как температура, сила тока, напряжение, скорость, количество топлива, угол поворота руля, количество сырья и т.п. Поэтому параметры управления реальных систем не могут принимать произвольные значения, т.к. они определяются конструкцией объекта и устройства управления и условиями эксплуатации всей системы. В общем случае считают, что в пространстве R^m переменных $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ задано некоторое множество U_t , и параметры управления $u_1, u_2, \dots, u_m$ в каждый момент времени t должны принимать только такие значения, при которых вектор $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$ принадлежит множеству U_t . Множество $U_t \in R^m$ называют *областью допустимых управлений*, или *областью управления*.

Область допустимых управлений может быть m -мерным параллелепипедом

$$\alpha_1 \leq u_1 \leq \beta_1, \quad \alpha_2 \leq u_2 \leq \beta_2, \quad \alpha_m \leq u_m \leq \beta_m, \quad (1.34)$$

m -мерным шаром

$$(u_1 - \alpha_1)^2 + (u_2 - \alpha_2)^2 + \dots + (u_m - \alpha_m)^2 \leq r^2, \quad (1.35)$$

или некоторым другим геометрическим образом более сложной природы, характеризующимся равенством

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_m) = 0,$$

или неравенством

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_m) \leq 0,$$

В соотношениях (1.34) и (1.35) величины α_i и β_i представляют собой некоторые постоянные, а $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_m)$ – вектор-функцию.

Ограничения могут быть наложены не только на параметры управления, но и на координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ объекта управления. Ограничения осуществляются при помощи определенных равенств или неравенств, которые определяют собой некоторую n -мерную область X_t в пространстве R^n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ так, что конец вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяющий положение фазовой точки системы, в произвольное время t принадлежит области $X_t \in R^n$. Область X_t называется *областью возможных состояний системы*. Иногда ограничения на функцию $x(t)$ налагаются с помощью функционалов. В общем случае встречаются ограничения, которые налагаются на функционалы от вектор-функций $x(t)$ и $u(t)$, например,

$$L_\mu(x(t), u(t)) \in L_\mu \quad (\mu = \overline{1, k}), \quad (1.36)$$

где L_μ – допустимая область изменения функционала L_μ .

Ограничения типа (1.36) также определяют собой множество допустимых управлений движения объекта.

Относительно характера изменения параметров управления следует сделать еще одно существенное замечание. В теории управления установлено, что параметры управления являются *кусочно-непрерывными функциями*. Значение кусочно-непрерывного управления $u_i(t)$ в точках разрыва не играет существенной роли, а поэтому для определенности будем в дальнейшем предполагать, что функции $u_i(t)$ в точках разрыва непрерывны справа. Кроме того, будем считать, что параметры управле-

ния $u_i(t)$ непрерывны на концах отрезка $t_0 \leq t \leq t_1$, на котором они заданы.

Возникает вопрос: чем вызвана необходимость введения кусочно-непрерывных управлений? Нельзя ли обойтись только непрерывными управлениями? Дело в том, что оптимальные управления $u^*(t)$ для многих систем являются кусочно-непрерывными, и поэтому решение задачи оптимизации систем в классе непрерывных функций не существует. Чтобы более четко уяснить себе это обстоятельство, рассмотрим некоторую разрывную функцию $u^*(t)$ (рис. 1.9), являющуюся по предположению

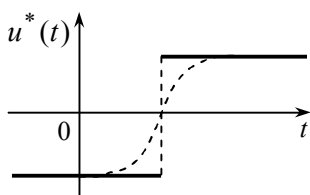


Рис. 1.9.

единственным *оптимальным управлением* некоторой системы управления. Построим другую функцию, близкую к функции $u^*(t)$, но непрерывную (на рис. 1.9 – это штриховая линия). Какую бы близкую к оптимальному управлению непрерывную функцию мы не взяли,

всегда можно построить другую непрерывную функцию, которая будет еще ближе к оптимальному управлению, но не совпадающую с $u^*(t)$. Таким образом, в классе непрерывных функций в этом случае просто не существует оптимального управления. Другими словами, задача оптимизации в классе непрерывных функций не будет иметь решения.

Кусочно-непрерывные управления позволяют для широкого класса систем получить точное математическое решение задачи оптимизации. Детально этот вопрос будет рассмотрен в разделах 6 и 7 данного издания. Кроме того, как оказалось, кусочно-непрерывные функции позволяют осуществлять достаточно удобную техническую реализацию процесса управления.

Ознакомление со структурной схемой систем управления с обратной связью дает возможность уточнить способ математического описания *критериев оптимальности*. Не прибегая к конкретному содержанию разнообразных систем управления, будем полагать, что критерий оптимальности систем есть функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} G(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \text{extr}. \quad (1.37)$$

Если объект управления находится под влиянием случайного процесса $z(t)$, то за критерий оптимальности системы управления выбирают математическое ожидание первичного критерия, т. е.

$$J = M\{J_1\} = M\left\{\int_{t_0}^{t_1} G(x(t), u(t), z(t), t) dt\right\}.$$

Определив основные элементы и понятия системы управления, можем сформулировать основные задачи управления.

Представим, что уравнения движения имеют вид:

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \quad (j = \overline{1, n}). \quad (1.38)$$

Одна из основных задач об управлении формулируется следующим образом.

Задача 1. Заданы уравнения движения (1.38), отрезок времени $[t_0, t_1]$, начальное и конечное значения $x(t_0) = x^{(0)} = \{x_j^{(0)}\}$, $x(t_1) = x^{(1)} = \{x_j^{(1)}\}$ ($j = \overline{1, n}$) фазового вектора управляемого объекта. Требуется найти возможное управление $u(t)$, переводящее систему (1.38) из состояния $x(t_0) = x^{(0)}$ в состояние $x(t_1) = x^{(1)}$.

Требуется, следовательно, найти функции $u_i(t)$ ($i = \overline{1, m}$) при $t \in [t_0, t_1]$, подстановка которых в уравнения (1.38) даст решение $x(t, t_0, x^{(0)}, u)$, удовлетворяющее краевому условию $x^{(1)} = x(t_1, t_0, x^{(0)}, u)$. Условия существования решений $x(t, t_0, x^{(0)}, u)$ изучаются в курсе *обыкновенных дифференциальных уравнений* [16] и здесь не обсуждаются.

Задача об управлении часто имеет не одно решение $u(t)$. В выборе функций $u_i(t)$, удовлетворяющих условиям задачи, возможен большой произвол. В то же время конкретные проблемы обычно содержат дополнительные требования наилучшего (в том или ином смысле) качества процесса. Требование построения наилучшего или, иначе говоря, *опти-*

мального управления $u(t)$ процессом может формулироваться в весьма разнообразных формах.

В конкретных задачах, как правило, выбирается некоторая величина, характеризующая затраты ресурсов на осуществление процесса управления. Обычно требуется достичь желаемого результата так, чтобы эта величина не превосходила некоторых заданных границ, или так, чтобы ее значение оказалось минимальным. Эта величина называется *критерием оптимальности управления* и обозначается J , например, (1.37). Будем предполагать, что величина J имеет смысл и неотрицательна для любого возможного управления $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

Сформулируем теперь общую задачу об оптимальном управлении при минимальном значении критерия J .

Задача 2. Заданы уравнения движения (1.38), отрезок времени $[t_0, t_1]$, начальное и конечное значения $x(t_0) = x^{(0)} = \{x_j^{(0)}\}$, $x(t_1) = x^{(1)} = \{x_j^{(1)}\}$ ($j = \overline{1, n}$) фазового вектора управляемого объекта и выбран критерий оптимальности J , оценивающий управление. Среди возможных управлений $u(t)$ требуется найти оптимальное управление $u^*(t)$, переводящее систему из состояния $x(t_0) = x^{(0)}$ в состояние $x(t_1) = x^{(1)}$, при котором критерий оптимальности J принимает экстремальное значение.

Таким образом, задача 2 – это задача об оптимальном управлении, которое определяется двумя условиями:

1. Оптимальное управление $u^*(t)$ является возможным.
2. Управление $u^*(t)$, которое позволяет решить задачу 1, обладает свойством

$$J(u^*) \leq J(u),$$

каково бы ни было другое возможное управление $u(t)$, также решающее задачу 1.

Глава 2

ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Настоящая глава посвящена различным характеристикам – носителям информации о свойствах линейных систем управления.

Наиболее информативными являются временные характеристики, которые оказываются удобными при определении реакций системы на те или иные воздействия.

Кроме временных характеристик рассмотрены частотные характеристики систем. Дано понятие передаточной функции системы.

Показаны особенности исследования многомерных систем управления.

2.1. Временные характеристики линейных одномерных систем

Пусть система управления описывается дифференциальным уравнением n -го порядка

$$\begin{aligned} a_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t) x = \\ = b_0(t) \frac{d^m u}{dt^m} + b_1(t) \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_m(t) u, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $x = x(t)$ – выходная переменная системы; $u = u(t)$ – управление.

Для линейных одномерных систем (2.1) существуют определенные характеристики, которые отображают как свойства самих систем, так и свойства проходящих через них сигналов.

Одна из таких характеристик носит название *единичной переходной функции* $x(t) = h(t, \xi)$ и представляет собой реакцию системы (выходной сигнал) на ступенчатый единичный входной сигнал (функцию Хевисайда)

$$u(t) = 1(t - \xi) = \begin{cases} 0, & t < \xi \\ 1, & t \geq \xi \end{cases} \quad (2.2)$$

при условии, что до подачи этого сигнала система находилась в состоянии покоя. Единичная переходная функция системы $h(t, \xi)$ является решением уравнения (2.1)

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^{n-i} h(t, \xi)}{dt^{n-i}} = \sum_{i=0}^m b_i(t) \frac{d^{m-i} 1(t - \xi)}{dt^{m-i}}, \quad (2.3)$$

при нулевых начальных условиях: $h|_{\xi=0} = h'|_{\xi=0} = \dots = h^{(n-1)}|_{\xi=0} = 0$.

Иначе говоря, единичная переходная функция $h(t, \xi)$ есть функция, описывающая реакцию системы (звена) на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях. Для системы с постоянными параметрами переходная функция обозначается $h(t)$.

Другой характеристикой линейных систем является так называемая *импульсная переходная функция* $x(t) = w(t, \xi)$. Она представляет собой реакцию системы на входной сигнал в виде единичного импульса $\delta(t - \xi)$:

$$u(t) = \delta(t - \xi) = \begin{cases} 0, & t \neq \xi, \\ \infty, & t = \xi, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \xi) dt = 1 \quad (2.4)$$

при условии, что до подачи этого сигнала система находилась в состоянии покоя. Функция $\delta(t - \xi)$ называется *дельта-функцией Дирака*. В соответствии с этим определением импульсная переходная функция системы есть решение уравнения (2.1)

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^{n-i} w(t, \xi)}{dt^{n-i}} = \sum_{i=0}^m b_i(t) \frac{d^{m-i} \delta(t - \xi)}{dt^{m-i}}, \quad (2.5)$$

при нулевых начальных условиях $w|_{\xi=0} = w'|_{\xi=0} = \dots = w^{(n-1)}|_{\xi=0} = 0$.

Как правило, δ -функцию отождествляют с пределом функциональной последовательности $\delta_\varepsilon(t - \xi)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, удовлетворяющей условиям

$$\delta_\varepsilon(t - \xi) \begin{cases} = 0, & |t - \xi| > \varepsilon, \\ \neq 0, & |t - \xi| \leq \varepsilon, \end{cases} \quad \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \delta_\varepsilon(t - \xi) dt = 1. \quad (2.6)$$

Такая интерпретация δ -функции позволяет вложить определенное реальное содержание в понятие входного единичного импульса. Дейст-

вительно, в качестве последовательности функций $\delta_\varepsilon(t - \xi)$ можно взять, например, функции

$$\delta_\varepsilon(t - \xi) = \begin{cases} 0, & |t - \xi| > \varepsilon, \\ \frac{1}{2\varepsilon}, & |t - \xi| \leq \varepsilon, \end{cases} \quad (2.7)$$

При достаточно малых значениях величины ε функция (2.7) близка к функции (2.4). А это означает, что под единичным импульсом $\delta(t - \xi)$ можно приближенно понимать прямоугольный импульс $\delta_\varepsilon(t - \xi)$ достаточно малой ширины и высокой интенсивности. Иначе говоря, физически единичный импульс можно представить как очень узкий импульс,

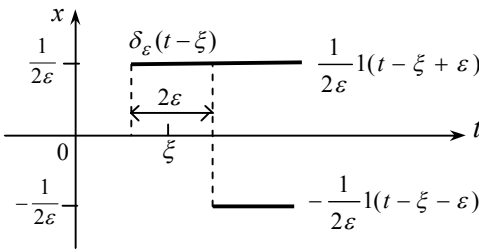


Рис. 2.1.

ограничивающий единичную площадь. Математически он описывается *дельта-функцией* $\delta(t)$, являющейся одной из *обобщенных функций*. Теория обобщенных функций — раздел *функционального анализа*. Известно, что в рамках теории обобщенных функций любые

встречающиеся в приложении функции (в том числе и δ -функция) обладают производными любого порядка.

Образование единичного импульса можно представить как действие двух ступенчатых сигналов $\frac{1}{2\varepsilon} \cdot 1(t - \xi + \varepsilon)$ и $-\frac{1}{2\varepsilon} \cdot 1(t - \xi - \varepsilon)$, интенсивности $1/(2\varepsilon)$ и $-1/(2\varepsilon)$ соответственно, смещенных во времени один относительно другого на величину 2ε (рис. 2.1). Исходя из сказанного, будем иметь равенство

$$\delta_\varepsilon(t - \xi) = \frac{1(t - \xi + \varepsilon) - 1(t - \xi - \varepsilon)}{2\varepsilon}. \quad (2.8)$$

Отсюда при $\varepsilon \rightarrow 0$ находим связь между единичным импульсом и единичным ступенчатым сигналом

$$\delta(t - \xi) = \frac{d}{d\xi} 1(t - \xi). \quad (2.9)$$

Аналогичная связь существует между единичной переходной и импульсной переходной функциями системы. Действительно, найдем реакцию $w(t, \xi)$ рассматриваемой линейной системы (2.5) на входной сигнал вида (2.8). Для этого рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^{n-i} w_\varepsilon(t, \xi)}{dt^{n-i}} = \sum_{i=0}^m b_i(t) \frac{d^{m-i}}{dt^{m-i}} \left(\frac{1(t - \xi + \varepsilon) - 1(t - \xi - \varepsilon)}{2\varepsilon} \right),$$

сравнивая которое с уравнением (2.3), приходим к выводу, что функцию $w_\varepsilon(t, \xi)$ можно представить в виде

$$w_\varepsilon(t, \xi) = \frac{1}{2\varepsilon} h(t, \xi - \varepsilon) - \frac{1}{2\varepsilon} h(t, \xi + \varepsilon), \quad (2.10)$$

где $h(t, \xi - \varepsilon)$ и $h(t, \xi + \varepsilon)$ – переходные функции системы, соответствующие входным сигналам $1(t - \xi + \varepsilon)$ и $1(t - \xi - \varepsilon)$.

Переходя в равенстве (2.10) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, находим

$$w(t, \xi) = \frac{d}{d\xi} h(t, \xi), \quad (2.11)$$

что соответствует исходному утверждению.

Следует отметить, что при решении практических задач, как правило, δ -функция и ее производные встречаются только на промежуточных этапах. В окончательном результате они или отсутствуют, или фигурируют под знаком интеграла в произведении с какой-либо «обычной» функцией. Поэтому нет прямой необходимости отвечать на вопрос, что такое δ -функция, а достаточно ответить на вопрос, что означает интеграл от произведения δ -функции или какой-либо ее производной и обычной функции. Таким образом, δ -функцию можно определить так: δ -функция есть функция, которая обладает следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \xi) dt = \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} \delta(t - \xi) dt = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \xi) \varphi(t) dt = \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} \delta(t - \xi) \varphi(t) dt = \varphi(\xi), \quad (2.12)$$

Производные от дельта-функции можно определить по следующим соотношениям:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t-\xi) \varphi(t) dt = \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \delta'(t-\xi) \varphi(t) dt = -\varphi'(\xi),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(m)}(t-\xi) \varphi(t) dt = \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \delta^{(m)}(t-\xi) \varphi(t) dt = (-1)^m \varphi^{(m)}(\xi)$$

, (2.13)

где ε – произвольное положительное число; $\varphi(t)$ – обычная функция, обладающая m -й производной; $\delta^{(m)}(t-\xi)$ – m -я производная по времени от дельта-функции.

2.2. Связь между входным и выходным сигналами системы управления

Исследование свойств единичной переходной и импульсной переходной функций линейной системы имеет существенное значение, поскольку эти функции тесно связаны с реакцией системы на произвольный входной сигнал. В частности, выходной сигнал системы, как ее реакция на некоторый входной сигнал, может быть установлен точно при помощи простой интегральной зависимости с помощью единичной переходной или импульсной переходной функций этой системы. Чаще всего используется импульсная переходная функция, поэтому ниже основное внимание будет уделено именно *импульсной переходной функции*.

Сначала рассмотрим одномерную линейную систему с переменными параметрами, описывающуюся уравнением

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^{n-i} x(t)}{dt^{n-i}} = u(t). \quad (2.14)$$

Найдем интегральную связь между входным $u(t)$ и выходным $x(t)$ сигналами этой системы в случае, когда до момента подачи входного сигнала система находилась в покое. Принимая за начало отсчета времени момент подачи входного сигнала, начальные условия запишем в виде

$$\left. \frac{d^i x(t)}{dt^i} \right|_{t=0} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \quad (2.15)$$

Пусть $\varphi_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) линейно-независимые решения однородного уравнения

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^{n-i} x(t)}{dt^{n-i}} = 0. \quad (2.16)$$

Как известно из *теории дифференциальных уравнений* [16], решение неоднородного уравнения (2.14) при условии (2.15) может быть представлено в виде

$$x(t) = \int_0^t g(t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad (2.17)$$

при этом

$$g(t, \tau) = \frac{(-1)^{n-1}}{a_0(\tau) \Delta(\tau)} \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1(\tau) & \varphi_2(\tau) & \dots & \varphi_n(\tau) \\ \varphi'_1(\tau) & \varphi'_2(\tau) & \dots & \varphi'_n(\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(\tau) & \varphi_2^{(n-2)}(\tau) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(\tau) \end{vmatrix}, \quad (2.18)$$

где $\Delta(\tau)$ – определитель Вронского:

$$\Delta(\tau) = \begin{vmatrix} \varphi_1(\tau) & \varphi_2(\tau) & \dots & \varphi_n(\tau) \\ \varphi'_1(\tau) & \varphi'_2(\tau) & \dots & \varphi'_n(\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(\tau) & \varphi_2^{(n-1)}(\tau) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(\tau) \end{vmatrix}. \quad (2.19)$$

Для выяснения содержания функции $g(t, \tau)$ рассмотрим случай, когда входной сигнал системы (2.14) есть δ -функция, т. е.

$$u(t) = \delta(t - \xi), \quad (0 < \xi < t). \quad (2.20)$$

Соответственно равенству (2.17) и основному свойству δ -функции, заключающемуся в том, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \xi) dt = f(\xi), \quad (2.21)$$

(здесь $f(t)$ – произвольная интегрируемая на каждом конечном отрезке времени функция), имеем

$$x(t) = \int_0^t g(t, \tau) \delta(\tau - \xi) d\tau = g(t, \xi). \quad (2.22)$$

Это значит, что функция $g(t, \xi)$ представляет собой реакцию системы на единичный импульс в точке ξ , т.е. $g(t, \xi)$ является *импульсной переходной функцией* рассматриваемой системы и совпадает с $w(t, \xi)$.

Найдем теперь импульсную переходную функцию $w(t, \xi)$ в более общем случае, когда она является решением уравнения (2.5). Для этого правую часть уравнения (2.5) достаточно считать входным сигналом $u(t)$ системы, описывающейся уравнением (2.14), и воспользоваться интегральной формулой (2.17). Это дает

$$w(t, \xi) = \int_0^t g(t, \tau) \left(\sum_{i=0}^m b_i(\tau) \frac{d^{m-i} \delta(t - \xi)}{d\tau^{m-i}} \right) d\tau. \quad (2.23)$$

На основании свойства δ -функции Дирака (2.13) в точке ξ имеет место следующее равенство:

$$(-1)^i \frac{d^i f(\xi)}{d\xi^i} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d^i \delta(t - \xi)}{dt^i} dt, \quad (2.24)$$

где $f(t)$ – произвольная функция, интегрируемая на всяком конечном отрезке и i раз дифференцируемая всюду, за исключением конечного числа точек. В равенстве (2.24) пределы интегрирования можно заменить произвольными конечными числами, важно только, чтобы точка ξ принадлежала отрезку интегрирования.

Поскольку точка ξ в равенстве (2.23) принадлежит отрезку $[0, t]$, то для преобразования правой части равенства (2.23) можно воспользоваться формулой (2.24). В результате получим

$$w(t, \xi) = \sum_{m=0}^m (-1)^{m-i} \frac{d^{m-i}}{d\xi^{m-i}} [g(t, \xi) b_i(\xi)]. \quad (2.25)$$

Формула (2.17) отображает связь между выходным и входным сигналами системы, описываемой уравнением (2.14). Ниже установим аналогичную формулу для системы, описываемой более общим уравнением

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^{n-i} x(t)}{dt^{n-i}} = \sum_{i=0}^m b_i(t) \frac{d^{m-i} u(t)}{dt^{m-i}}. \quad (2.26)$$

Как и ранее, предполагаем, что до подачи входного сигнала система находилась в покое. Решение системы (2.26) находим при начальных условиях (2.15).

Используя свойство (2.21) δ -функции, входной сигнал системы запишем в виде

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) \delta(t - \xi) d\xi. \quad (2.27)$$

Умножим уравнение (2.5) на $u(\xi)$ и проинтегрируем по ξ в пределах от $-\infty$ до ∞ . В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^{n-i}}{dt^{n-i}} \int_{-\infty}^{\infty} w(t, \xi) u(\xi) d\xi = \\ = \sum_{i=0}^m b_i(t) \frac{d^{m-i}}{dt^{m-i}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \xi) u(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Нетрудно видеть, что на основании равенства (2.27) каждый из интегралов правой части уравнения (2.28) дает значение входного сигнала $u(t)$, а поэтому правая часть этого уравнения тождественно совпадает с правой частью уравнения (2.26). Вычитая уравнение (2.28) из уравнения (2.26), получим

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^{n-i}}{dt^{n-i}} \left[x(t) - \int_{-\infty}^{\infty} w(t, \xi) u(\xi) d\xi \right] = 0. \quad (2.29)$$

Выражение, записанное в квадратных скобках, на основании начальных условий (2.15) и (2.5) в точке $t = 0$ обращается в нуль, а поскольку оно удовлетворяет однородному линейному уравнению (2.29), то

$$x(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} w(t, \xi) u(\xi) d\xi. \quad (2.30)$$

Ранее предполагалось, что за начало отсчета времени t принят момент подачи на вход системы сигнала $u(t)$. Это означает, что $u(t) \equiv 0$ при $t < 0$, а поэтому

$$w(t, \xi) u(\xi) \equiv 0 \quad \text{при} \quad \xi < 0.$$

Система, находящаяся в покое, не выходит из этого состояния раньше, чем на ее вход поступает единичный импульс $\delta(t - \xi)$, а поэтому $w(t, \xi) \equiv 0$ при $t < \xi$, т.е. справедливым является соотношение

$$w(t, \xi) u(\xi) \equiv 0 \quad \text{при} \quad \xi > t.$$

(это условие известно под названием *условия физической реализуемости системы*).

Учитывая последние замечания, формулу (2.30) можем записать в виде

$$x(t) = \int_0^t w(t, \xi) u(\xi) d\xi, \quad (2.31)$$

что и требовалось определить для уравнения (2.14).

Подобно импульсным переходным функциям единичные переходные функции также используются для установления связи выходного сигнала с входным сигналом системы. Соответствующую интегральную формулу можно получить из формулы (2.31), если вместо импульсной переходной функции $w(t, \xi)$ подставить ее выражение через единичную переходную функцию $h(t, \xi)$ по формуле (2.11). Проинтегрировав полученное выражение по частям, найдем

$$x(t) = h(t, 0)u(0) - \int_0^t h(t, \xi) u'(\xi) d\xi. \quad (2.32)$$

В заключение отметим свойства переходных и импульсных переходных функций *линейных одномерных систем с постоянными коэффициентами*. Основное свойство, которое отличает их от аналогичных функций линейных систем с переменными параметрами, состоит в том, что они становятся функциями одной переменной – разности между переменным моментом времени t и моментом ξ подачи входного импульса. Таким образом, для линейных систем с постоянными параметрами имеют место соотношения

$$h(t, \xi) = h(t - \xi) \quad \text{и} \quad w(t, \xi) = w(t - \xi). \quad (2.33)$$

Доказательство этого факта осуществляется на основании использования формул (2.18), (2.25) и известных линейно-независимых решений однородного уравнения (2.16), которые в данном случае представляются через корни λ_i характеристического уравнения в виде $e^{\lambda_i t}$.

Основное интегральное соотношение (2.30), связывающее выходной и входной сигналы линейной системы с постоянными параметрами, принимает вид

$$x(t) = \int_0^t w(t - \xi) u(\xi) d\xi. \quad (2.34)$$

Путем замены переменной интегрирования последнее соотношение можно представить так:

$$x(t) = \int_0^t w(\xi) u(t - \xi) d\xi. \quad (2.35)$$

2.3. Преобразование Лапласа. Передаточная функция

Как видно из предыдущего параграфа, одной из задач исследования систем управления является задача установления зависимости между входным $u(t)$ и выходным $x(t)$ сигналами системы. В свою очередь эта задача сводится к нахождению решения $x(t)$ некоторого дифференциального уравнения, для чего необходимо выполнить определенную последовательность математических операций над функцией $u(t)$. При этом упомянутая последовательность операций часто бывает достаточно сложной.

Рассмотрим преобразование Лапласа, которое будет использовано при рассмотрении систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Преобразование Лапласа, его свойства и область применений являются предметом исследования *операционного исчисления* [17].

Основное содержание интегральных преобразований, в том числе и преобразования Лапласа, заключается во взаимно-однозначном переходе от одного класса функций (например, от $x(t)$), который называется классом *оригиналов*, к другому классу функций (например, к $X(p)$), который называется классом *изображений*. В новом классе функций существенно изменяется природа математических операций. Например, интегрирование дифференциального уравнения в классе оригиналов может свестись к нахождению корней алгебраического уравнения в классе изображений. Такой способ дает возможность упростить нахождение решения исходной задачи. Однако не все функции допускают то или иное интегральное представление. В теории управления приходится иметь дело с вещественными функциями.

Определение 2.1. *Оригиналом по Лапласу* называется вещественная функция $x(t)$ вещественного аргумента t , которая удовлетворяет условиям:

1) $x(t)$ – однозначная непрерывная или кусочно-непрерывная функция вместе с производными до n – го порядка на всей оси t ;

2) $x(t) = 0$ при $t < 0$;

3) существуют такие числа $M > 0$ и $\alpha > 0$, что для $t > 0$

$$|x(t)| < M e^{\alpha t}$$

(точная нижняя грань α_0 чисел α называется *показателем роста функции $x(t)$*).

Определение 2.2. *Изображением функции-оригинала $x(t)$ по Лапласу* называется функция $X(p)$ комплексного переменного $p = \sigma + j\omega$, которая определяется при помощи интеграла Лапласа

$$X(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t) dt. \quad (2.36)$$

Теорема 2.1. *Если функция $x(t)$ – оригинал с показателем роста α_0 , то интеграл $X(p)$ сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, является в ней аналитической функцией и в этой области $\lim_{p \rightarrow \infty} X(p) = 0$.*

Теорема 2.2. *Если функция $X(p)$ аналитическая в области $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, в этой области $\lim_{p \rightarrow \infty} X(p) = 0$ и интеграл*

$\int_{-\infty}^{\infty} |X(\sigma + j\omega)| d\omega$ *сходится, то функция $X(p)$ есть изображение, а ее оригинал будет*

$$2\pi j x(t) = \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(p) e^{pt} dp. \quad (2.37)$$

Доказательство теорем 2.1 и 2.2 можно найти в [17].

То, что $X(p)$ является изображением $x(t)$, а оригинал $x(t)$ имеет изображение $X(p)$, записывается так

$$X(p) \leftrightarrow x(t) \quad \text{и} \quad x(t) \leftrightarrow X(p),$$

или

$$X(p) = L\{x(t)\} \quad \text{и} \quad x(t) = L^{-1}\{X(p)\}$$

где L – символ оператора Лапласа, L^{-1} – символ обратного преобразования Лапласа.

Соотношение

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(p) e^{pt} dp, \quad (2.38)$$

определяющее по известному изображению его *оригинал* (в точках непрерывности последнего), называют *обратным преобразованием Лапласа*. В нем интеграл берется вдоль прямой, параллельной мнимой оси, на расстоянии $\sigma = \operatorname{Re} p > \alpha_0$ от нее.

Остановимся на основных свойствах преобразования Лапласа.

1) *Свойство линейности*. Для любых постоянных α и β :

$$L\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha L\{x_1(t)\} + \beta L\{x_2(t)\}.$$

2) *Дифференцирование оригинала*. Если производная $x'(t)$ является функцией-оригиналом, т.е. удовлетворяет указанным выше трем условиям определения 2.1, то $L\{x'(t)\} = pX(p) - x(0)$, где $X(p) = L\{x(t)\}$, $x(0) = \lim_{t \rightarrow +0} x(t)$. Если n -я производная $x(t)$ является функцией-оригиналом, то

$$L\{x^{(n)}(t)\} = p^n X(p) - p^{n-1}x(0) - p^{n-2}x'(0) - \dots - x^{(n-1)}(0),$$

где $x^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} x^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Если начальные условия нулевые, т.е. $x(0) = x'(0) = x^{(2)}(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$, то последняя формула принимает вид $L\{x^{(n)}(t)\} = p^n X(p)$. Таким образом, при нулевых начальных условиях дифференцированию оригинала соответствует умножение изображения на p .

3) *Интегрирование оригинала*. Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p :

$$L\left\{\int_0^t x(t) dt\right\} = \frac{X(p)}{p}.$$

4) *Теорема запаздывания*. Для любого положительного числа τ

$$L\{x(t - \tau)\} = e^{-p\tau} L\{x(t)\} = e^{-p\tau} X(p).$$

5) *Теорема о свертке* (теорема умножения изображений). Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – оригиналы, а $X_1(p)$ и $X_2(p)$ – их изображения, то

$$X_1(p) \cdot X_2(p) \leftrightarrow \int_0^t x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t x_1(t-\tau) x_2(\tau) d\tau.$$

Интеграл правой части равенства называют *сверткой функций* $x_1(t)$ и $x_2(t)$ и обозначают $x_1(t) * x_2(t)$:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_0^t x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t x_1(t-\tau) x_2(\tau) d\tau.$$

6) *Теоремы о предельных значениях*. Если $x(t)$ – оригинал, а $X(p)$ – его изображение, то $x(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pX(p)$ и при существовании предела $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$, т.е. $x(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p)$.

7) *Теорема разложения*. Если $X(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ дробно – рациональная функция, причем степень полинома числителя меньше степени полинома знаменателя, то ее оригиналом является умноженная на $1(t)$ функция

$$x(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \left[X(p) (p - p_k)^{n_k} e^{pt} \right], \quad (2.39)$$

где p_k – корни уравнения $B(p) = 0$, а n_k – их кратности и l – число различных корней. Если все корни уравнения простые, то эта формула разложения принимает вид

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}$$

где n – степень полинома $B(p)$, $B'(p_k) = \left. \frac{dB}{dp} \right|_{p=p_k}$.

Пример 2.1.

Пусть изображение $X(p) = \frac{4(p+1)}{p(p+2)^2}$.

Пользуясь формулой разложения, определить оригинал.

Решение. Согласно принятым обозначениям:

$$A(p) = 4(p+1); \quad B(p) = p(p+2)^2.$$

Функция $X(p)$ имеет полюсы (т.е. корни уравнения $B(p) = 0$) $p_1 = 0$, $p_2 = -2$. Полюс p_1 является простым, а полюс p_2 – кратным, имея кратность $n_2 = 2$. На основании теоремы разложения (2.39) имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=1}^2 \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \left[\frac{4(p+1)}{p(p+2)^2} (p - p_k)^{n_k} e^{pt} \right] = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{4(p+1)}{p(p+2)^2} (p-0) e^{pt} \right] + \lim_{p \rightarrow -2} \frac{d}{dt} \left[\frac{4(p+1)}{p(p+2)^2} (p+2)^2 e^{pt} \right] = \\ &= \frac{4}{4} e^0 + \lim_{p \rightarrow -2} \frac{d}{dt} \left[\frac{4(p+1)}{p} e^{pt} \right] = 1 + (2t-1) e^{-2t} \end{aligned}$$

Таким образом, $x(t) = 1 + (2t-1) e^{-2t}$.

Для простейших дробно-рациональных функций на основании формулы разложения (2.39) можно построить более простые формулы определения оригиналов.

Пусть

$$X(p) = \frac{a_0 p + a_1}{p^2 + b_1 p + b_2},$$

где a_0 , a_1 , b_1 , b_2 – постоянные вещественные числа.

Знаменатель дроби изображения $X(p)$ можно представить в виде

$$p^2 + b_1 p + b_2 = (p + h)^2 + \omega^2 = \left(p + \frac{b_1}{2} \right)^2 - \left(\frac{b_1^2}{4} - b_2 \right).$$

Возможны три случая.

1. Корни знаменателя комплексные, т.е. $b_1^2/4 - b_2 < 0$. Тогда

$$\frac{a_0 p + a_1}{p^2 + b_1 p + b_2} \leftrightarrow a_0 e^{-ht} \cos \omega t + \frac{a_1 - a_0 h}{\omega} e^{-ht} \sin \omega t,$$

где $h = b_1/2$, $\omega = \sqrt{b_1^2/4 - b_2}$. Эти обозначения использованы в 2 и 3.

2. Корни знаменателя вещественные, т.е. $b_1^2/4 - b_2 > 0$. Тогда

$$\frac{a_0 p + a_1}{p^2 + b_1 p + b_2} \leftrightarrow A e^{-(h-\omega)t} + B e^{-(h+\omega)t},$$

где $A = (a_0(\omega - h) + a_1)/2\omega$, $B = (a_0(\omega + h) - a_1)/2\omega$.

3. Корни знаменателя равные, т.е. $b_1^2/4 - b_2 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{a_0 p + a_1}{p^2 + b_1 p + b_2} &= \frac{a_0 p + a_1}{(p + h)^2} = \\ &= \frac{a_0(p + h)}{(p + h)^2} + \frac{a_1 - a_0 h}{(p + h)^2} \leftrightarrow a_0 e^{-ht} + (a_1 - a_0 h) t e^{-ht}. \end{aligned}$$

Преобразования Лапласа широко используются для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот математический аппарат можно непосредственно использовать для вычисления импульсной переходной матрицы следующим образом. Используем принятое обозначение для преобразования Лапласа функции $x(t)$: $L\{x(t)\} = X(p)$. Тогда, согласно теории этого преобразования, если функция $x(t)$ дифференцируема, то

$$L\{x'(t)\} = p L\{x(t)\} - x^{(0)} = p X(p) - x^{(0)}$$

где $x^{(0)} = x(0)$.

Рассмотрим стационарную однородную систему

$$x'(t) = A x(t), \quad x(0) = x^{(0)}$$

и ее преобразование Лапласа

$$p X(p) - x^{(0)} = A X(p)$$

Тогда

$$p X(p) - A X(p) = x^{(0)} \quad \text{или} \quad (p E - A) X(p) = x^{(0)}.$$

Матрица $(p E - A)$ является характеристической матрицей матрицы A , которая является неособенной при всех $p \neq \lambda_i$, где λ_i — характеристические числа матрицы A . Следовательно, выражение $X(p) = (p E - A)^{-1} x^{(0)}$ имеет смысл при всех $p \neq \lambda_i$. Взяв обратное преобразование Лапласа, найдем

$$x(t) = L^{-1}\{X(p)\} = L^{-1}\{(p E - A)^{-1} x^{(0)}\} = e^{At} x^{(0)}.$$

Таблица 2.1.

Соответствие некоторых оригиналов и изображений преобразования Лапласа.

Название свойства или функции	Оригинал	Изображение по Лапласу
Функция Хевисайда	$\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq 0 \\ 0, & \text{если } t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{p}$
Правило дифференцирования оригинала	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p)$
Правило интегрирования оригинала	$\int \int \dots f(t) dt^n$	$\frac{F(p)}{p^n}$
Степенная функция	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
Экспонента	$e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{p + \lambda}$
Смещенная экспонента	$\frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$	$\frac{1}{p(p + \lambda)}$
Синусоида	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
Косинусоида	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
Затухающая синусоида	$e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p + \gamma)^2 + \omega^2}$
Затухающая косинусоида	$e^{-\gamma t} \cos(\omega t)$	$\frac{p + \gamma}{(p + \gamma)^2 + \omega^2}$
Гиперболический синус	$e^{-\gamma t} \operatorname{sh}(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p + \gamma)^2 - \omega^2}$
Гиперболический косинус	$e^{-\gamma t} \operatorname{ch}(\omega t)$	$\frac{p + \gamma}{(p + \gamma)^2 - \omega^2}$

Последовательность вычислений такова:

1. Вычисление обратной матрицы $(pE - A)^{-1}$.
2. С помощью таблиц обратного преобразования Лапласа (Таблица 2.1) определение элементов переходной матрицы

$$e^{At} = L^{-1} \left\{ (pE - A)^{-1} \right\}.$$

Пример 2.2.

Пусть система $\frac{dx}{dt} = Ax(t)$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Построить импульсную переходную матрицу.

Характеристическая матрица: $(pE - A) = \begin{pmatrix} p & -1 \\ -3 & p-2 \end{pmatrix}$.

Вычисляем обратную матрицу. При этом определитель исходной матрицы: $\Delta = p(p-2) - 3 = (p+1)(p-3)$. После несложных преобразований обратная матрица будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} (pE - A)^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{p-2}{(p+1)(p-3)} & \frac{1}{(p+1)(p-3)} \\ \frac{3}{(p+1)(p-3)} & \frac{p}{(p+1)(p-3)} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4(p+1)} + \frac{1}{4(p-3)} & -\frac{1}{4(p+1)} + \frac{1}{4(p-3)} \\ -\frac{3}{4(p+1)} + \frac{3}{4(p-3)} & \frac{1}{4(p+1)} + \frac{3}{4(p-3)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пользуясь таблицей обратного преобразования Лапласа (Таблица 2.1), получим

$$e^{At} = L^{-1} \left\{ (pE - A)^{-1} \right\} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3e^{-t} + e^{3t} & -e^{-t} + e^{3t} \\ -3e^{-t} + 3e^{3t} & e^{-t} + 3e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим линейную систему управления с постоянными коэффициентами, описывающуюся уравнением

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^{n-i} x(t)}{dt^{n-i}} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^{m-i} u(t)}{dt^{m-i}}, \quad (2.40)$$

и до момента $t = 0$ подачи управляющего сигнала находящуюся в покое, т.е. при нулевых начальных условиях

$$x^{(i)}(0) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \quad (2.41)$$

Предположим, что функции $x(t)$ и $u(t)$ удовлетворяют условиям существования оригинала. Применим к уравнению (2.40) преобразование Лапласа (2.36). Используя при этом известные соотношения операционного исчисления, находим

$$\sum_{i=0}^n a_i p^{n-i} X(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^{m-i} U(p), \quad (2.42)$$

где $X(p) \leftrightarrow x(t)$, $U(p) \leftrightarrow u(t)$.

Введем обозначения

$$Q(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^{n-i}, \quad R(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^{m-i}, \quad W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}.$$

Тогда равенство (2.42) можно записать в виде

$$Q(p)X(p) = R(p)U(p) \quad \text{или} \quad X(p) = W(p)U(p). \quad (2.43)$$

Функция $W(p)$ называется *передаточной функцией системы*.

Формула (2.43) устанавливает связь между изображением по Лапласу $X(p)$ выходного сигнала и изображением по Лапласу $U(p)$ входного сигнала системы. Вообще говоря, формула (2.43) должна быть использована для нахождения оригинала $x(t)$ в соответствии с формулой (2.37). Но иногда можно анализировать выходной сигнал $x(t)$ непосредственно по его изображению $X(p)$. В этом случае используется передаточная функция $W(p)$.

При описании систем управления широко используют *символическую форму* записи линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим, например, уравнение, содержащие входные переменные $u(t)$ и $z(t)$, выходную переменную $x(t)$ и их соответствующие производные:

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = b_0 u'(t) + b_1 u(t) + c_0 z(t). \quad (2.44)$$

Введем для операции дифференцирования обозначение p , т.е.

$$\frac{d}{dt} \equiv p; \quad \frac{d^i}{dt^i} \equiv p^i.$$

Используя его, уравнение (2.44) можно записать в виде

$$a_0 p^2 x + a_1 p x + a_2 x = b_0 p u + b_1 u + c_0 z. \quad (2.45)$$

При записи и преобразовании дифференциальных уравнений оператор (операцию дифференцирования) p можно рассматривать как алгебраический сомножитель, а выражение px – как произведение, не обладающее свойством коммутативности: нельзя вместо px писать xp . Учитывая это замечание, перепишем (2.45), вынеся x и u за скобки:

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)x = (b_0 u + b_1)u + c_0 z. \quad (2.46)$$

Введем обозначения $Q(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2$, $R_1(p) = b_0 p + b_1$, $R_2(p) = c_0$. С помощью этих обозначений уравнение (2.46) можно записать в более компактной форме:

$$Q(p)x = R_1(p)u + R_2(p)z. \quad (2.47)$$

В уравнении (2.47) $Q(p)$ (дифференциальный оператор при выходной величине) называют *собственным оператором*, а $R_1(p)$ и $R_2(p)$ (дифференциальные операторы при входных величинах) – *операторами воздействия*.

Отношение оператора воздействия к собственному оператору называют *передаточной функцией* или *передаточной функцией в операторной форме*.

Звено, описываемое уравнением (2.44) или, что то же самое, уравнениями (2.45) – (2.47), можно характеризовать двумя передаточными функциями: передаточной функцией $W_1(p)$ по входной величине u , т.е.

$$W_1(p) = \frac{R_1(p)}{Q(p)} = \frac{b_0 p + b_1}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}, \quad (2.48)$$

и передаточной функцией $W_2(p)$ по входной величине z , т.е.

$$W_2(p) = \frac{R_2(p)}{Q(p)} = \frac{c_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}. \quad (2.49)$$

Используя передаточные функции, уравнение (2.44) можно записать в виде

$$x = W_1(p)u + W_2(p)z. \quad (2.50)$$

Это уравнение представляет собой условную, более компактную форму записи исходного уравнения (2.44). Уравнения (2.46), (2.47) и (2.50) называют уравнениями в *символической* или *операторной* форме записи.

Передаточная функция в операторной форме совпадает с передаточной функцией в форме изображений Лапласа при нулевых начальных условиях.

Определение 2.3. *Передаточной функцией* или *передаточной функцией в форме изображений Лапласа* называют отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях.

Если звено (система) имеет несколько входов, то при определении передаточной функции относительно какой-либо одной входной величины остальные величины полагают равными нулю.

Найдем передаточные функции в форме изображений Лапласа для звена, описываемого уравнением (2.44).

Перейдем в обеих частях этого уравнения к изображениям Лапласа:

$$L\{a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x\} = L\{b_0 u' + b_1 u + c_0 z\}.$$

Используя свойства линейности и дифференцирования оригинала, при нулевых начальных условиях получим

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) X(p) = (b_0 p + b_1) U(p) + c_0 Z(p), \quad (2.51)$$

где $X(p) = L\{x(t)\}$, $U(p) = L\{u(t)\}$, $Z(p) = L\{z(t)\}$.

Полагая последовательно $Z(p) = 0$ и $U(p) = 0$ и определяя каждый раз отношение выходной величины к входной, получим

$$W_1(p) = \frac{X(p)}{U(p)} = \frac{b_0 p + b_1}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}; \quad (2.52)$$

$$W_2(p) = \frac{X(p)}{Z(p)} = \frac{c_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}. \quad (2.53)$$

Сравнивая выражения (2.48) и (2.52), (2.49) и (2.53) видим, что передаточные функции в форме изображений Лапласа и в операторной форме полностью совпадают.

Сходство между передаточными функциями в форме изображения Лапласа и в операторной форме чисто внешнее. Оно имеет место только в случае стационарных систем. Если система является *нестационарной*, т.е. коэффициенты в (2.44) зависят от времени, формулы (2.52) и (2.53) неверны.

Используя передаточные функции (2.52) и (2.53), уравнение (2.44) в изображениях Лапласа можно записать

$$X(p) = W_1(p)U(p) + W_2(p)Z(p). \quad (2.54)$$

Это уравнение, как и уравнение (2.51), адекватно исходному дифференциальному уравнению (2.44) только при нулевых начальных условиях. Если начальные условия не равны нулю, то уравнениями (2.51) и (2.54) как математическими описаниями звена пользоваться нельзя.

Следует иметь в виду, что при ненулевых начальных условиях передаточные функции не всегда представляют исчерпывающие характеристики системы управления. Кроме того, если собственный оператор и оператор воздействия системы имеют общие множители (нули), то они при вычислении передаточной функции сокращаются. И в этом случае по передаточной функции системы нельзя восстановить ее дифференциальное уравнение и получить описание процессов в ней при произвольных начальных условиях.

Вясним содержание передаточной функции $W(p)$. Для этого обратимся к интегральной формуле (2.35). Обозначим через $W(p)$ изображение по Лапласу импульсной переходной функции $w(t)$. Тогда по *теореме о свертке* можно записать

$$x(t) = \int_0^t w(\xi) u(t - \xi) d\xi \rightarrow X(p) = W(p) U(p). \quad (2.55)$$

Сравнивая формулы (2.52) и (2.55), приходим к выводу, что $W_1(p) = W(p)$, т.е. передаточная функция линейной системы есть не что иное, как *изображение по Лапласу импульсной переходной функции* этой же системы.

Для линейных систем справедлив *принцип суперпозиции*, который можно сформулировать следующим образом: *реакция системы на несколько одновременно действующих входных сигналов равна сумме реакций на каждый сигнал в отдельности*. Это позволяет изучать системы отдельно с каждым входным сигналом.

2.4. Преобразование Фурье. Частотные характеристики

Преобразование Фурье – одно из интегральных преобразований, тесно связанное с преобразованием Лапласа.

Определение 2.4. Функция $x(t)$ действительного аргумента t называется *оригиналом по Фурье*, если она однозначна, непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода и абсолютно интегрируема на всей числовой оси.

Определение 2.5. Изображением по Фурье функции-оригинала $x(t)$ называется функция $X(\omega)$ действительного аргумента ω , которая определяется интегралом

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.56)$$

Функция-оригинал по Фурье удовлетворяет следующему соотношению:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.57)$$

Соотношения (2.56) и (2.57) называются соответственно *прямым и обратным преобразованиями Фурье*.

Если функция $x(t) = 0$ для всех $t < 0$, то прямое преобразование Фурье принимает вид

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2.58)$$

которое формально с точностью до обозначений совпадает с прямым преобразованием Лапласа (2.36) при условии, что $p = -j\omega$.

Применив преобразование Фурье (2.58) к линейной одномерной системе управления, которая определяется уравнением (2.40) и начальными условиями (2.41), получим

$$Q(j\omega) X(j\omega) = R(j\omega) U(j\omega), \quad (2.59)$$

где $X(j\omega)$ и $U(j\omega)$ – изображения Фурье функций $x(t)$ и $u(t)$; и соответствующие многочлены

$$Q(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n;$$

$$R(j\omega) = b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m.$$

Равенство (2.59) можно записать в виде

$$X(j\omega) = W(j\omega) U(j\omega).$$

Функция $W(j\omega)$ называется *комплексной частотной характеристикой* системы, или *частотной передаточной функцией*, или *амплитудно-фазовой характеристикой*. Частотная передаточная функция $W(j\omega)$ есть изображение Фурье импульсной переходной функции $w(t)$. Как видим, функция $W(j\omega) = R(j\omega)/Q(j\omega)$, т. е. комплексная

частотная характеристика совпадает с передаточной функцией, в которую вместо переменной p подставлена переменная $j\omega$.

Комплексную частотную характеристику можно представить в одной из двух форм

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}; \quad W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega).$$

Функция $A(\omega)$ называется *амплитудной частотной* характеристикой системы, $\varphi(\omega)$ – *фазовой частотной* характеристикой системы, $U(\omega)$ – *действительной частотной* характеристикой системы (не путать с изображением $U(j\omega)$ функции управления $u(t)$), $V(\omega)$ – *мнимой частотной* характеристикой системы.

Комплексная частотная характеристика $W(j\omega)$ представляет собой отношение установившейся реакции $x(t, \omega)$ системы к данному входному сигналу вида $u(t, \omega) = e^{j\omega t}$. Тогда амплитудная частотная характеристика $A(\omega)$ есть

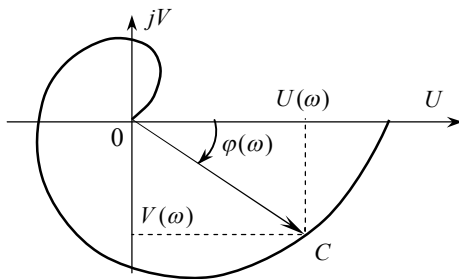


Рис. 2.2.

отношение амплитуды установившегося выходного гармонического сигнала к амплитуде входного гармонического сигнала с частотой ω . Аналогично $\varphi(\omega)$ – разность фаз выходного и входного гармонических сигналов.

На комплексной плоскости (рис.2.2) частотная передаточная функция $W(j\omega)$

определяется вектором OC , длина которого равна $A(\omega)$, и аргументом $\varphi(\omega)$ (углом, образованным этим вектором с положительным направлением действительной полуоси). Кривую, которую описывает конец этого вектора при изменении частоты от 0 до ∞ (иногда от $-\infty$ до ∞), называют *амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ)*.

Частотную передаточную функцию называют также *амплитудно-фазовой частотной функцией*. Ее действительную часть $U(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega)$ и мнимую часть $V(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega)$ называют соответственно *вещественной* и *мнимой частотной функцией*. График вещественной частотной функции (кривая зависимости $U = U(\omega)$) – *веще-*

ственной частотной характеристикой, а график мнимой частотной функции $V = V(\omega)$ – мнимой частотной характеристикой.

Модуль $A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$ называют амплитудной частотной функцией, ее график – амплитудной частотной характеристикой.

Аргумент $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg(V(\omega)/U(\omega))$ называют фазовой частотной функцией, ее график – фазовой частотной характеристикой.

Вообще говоря, действительная $U(\omega)$ и мнимая $V(\omega)$ частотные характеристики находятся в определенной зависимости. Для достаточно широкого класса систем такая зависимость оказывается однозначной. В этом случае системы называются минимально-фазовыми. Для минимально-фазовых систем справедливы соотношения [6]

$$U(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\xi)}{\xi - \omega} d\xi, \quad V(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi)}{\xi - \omega} d\xi,$$

где под интегралами следует понимать их главные значения по Коши.

Амплитудная $A(\omega)$ и фазовая $\varphi(\omega)$ частотные характеристики удовлетворяют аналогичным равенствам, а именно:

$$\ln A(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - \omega} d\xi, \quad \varphi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln A(\xi)}{\xi - \omega} d\xi.$$

Кроме перечисленных частотных характеристик при исследовании систем управления используют так называемую логарифмическую частотную характеристику (ЛЧХ), которая представляет собой натуральный логарифм комплексной частотной характеристики

$$\ln W(i\omega) = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega).$$

В практике используются логарифмическая амплитудная частотная функция [13] следующего вида:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|.$$

График зависимости логарифмической амплитудной частотной функции $L(\omega)$ от логарифма частоты $\lg \omega$ называют логарифмической амплитудной частотной характеристикой (ЛАЧХ). При построении ЛАЧХ по оси абсцисс откладывают частоту в логарифмическом масштабе: на отметке, соответствующей значению $\lg \omega$, пишут само значение ω , а не значение $\lg \omega$, а по оси ординат – значение $L(\omega)$.

Логарифмической фазовой частотной характеристикой (ЛФЧХ) называют график зависимости фазовой частотной функции $\varphi(\omega)$ от ло-

гарифма частоты $\lg \omega$. При его построении по оси абсцисс, как и при построении ЛАЧХ, на отметке, соответствующей значению $\lg \omega$, пишут значение ω .

Величина $L(\omega)$ выражается в *децибелах*, а единицей измерения логарифма частоты в ЛЧХ является *декада*. Декадой называют интервал, на котором частота изменяется в 10 раз. При изменении частоты в 10 раз говорят, что она изменилась на одну декаду.

Ось ординат при построении ЛЧХ проводят через произвольную точку, а не через точку $\omega = 0$. Частоте $\omega = 0$ соответствует бесконечно удаленная точка: $\lg \omega \rightarrow -\infty$ при $\omega \rightarrow 0$.

Главным достоинством ЛАЧХ является возможность построения их во многих случаях практически без вычислительной работы. Например, когда частотная передаточная функция может быть представлена в виде произведения сомножителей, то результирующая ЛАЧХ находится суммированием ординат ЛАЧХ отдельных сомножителей. Кроме того, точная ЛАЧХ может быть заменена приближенной – *асимптотической* ЛАЧХ, представляющей собой совокупность отрезков прямых линий с наклонами, кратными величине 20 дб/дек .

Частотные характеристики имеют вполне определенный физический смысл. При гармоническом воздействии в устойчивых системах после окончания переходного процесса, выходная величина также изменяется по гармоническому закону, но с другими амплитудой и фазой. При этом отношение амплитуд выходной и входной величин равно модулю, а сдвиг фазы – аргументу частотной передаточной функции. И, следовательно, амплитудная частотная характеристика показывает изменение отношения амплитуд, а фазовая частотная характеристика – сдвиг фазы выходной величины относительно входной в зависимости от частоты входного гармонического воздействия.

Частотные характеристики используют для описания как устойчивых, так и неустойчивых систем. Но в последнем случае они не имеют такого ясного физического смысла.

2.5. Элементарные звенья и их характеристики

В зависимости от характера процессов преобразования сигналов, происходящих в отдельных звеньях системы, различают несколько типов так называемых элементарных звеньев. Тип звена определяется, таким образом, не природой физических процессов, которые в нем проис-

ходят, и не инженерным решением его, а законом, который связывает входной $u(t)$ и выходной $x(t)$ сигналы звена.

Звенья, передаточные функции которых имеют вид простых дробей, называют *элементарными* звеньями. Рассмотрим основные типы элементарных звеньев с описанием их временных и частотных характеристик, а также изобразим графически некоторые их характеристики.

Звено усиления (пропорциональное, статическое) характеризуется соотношением

$$x(t) = k u(t), \quad (2.60)$$

где k – произвольное действительное число.

Как видно из равенства (2.60), выходной сигнал звена усиления равен входному сигналу, умноженному на постоянную величину k , которая называется коэффициентом усиления.

Единичная переходная функция звена усиления равняется произведению коэффициента усиления на единичную ступенчатую функцию (рис. 2.3,а)

$$h(t) = k 1(t).$$

Импульсная переходная функция равняется произведению коэффициента усиления на δ -функцию

$$w(t) = k \delta(t).$$

Передаточная функция равна коэффициенту усиления $W(p) = k$.

Комплексная частотная характеристика для этого звена совпадает с передаточной функцией $W(j\omega) = k$.

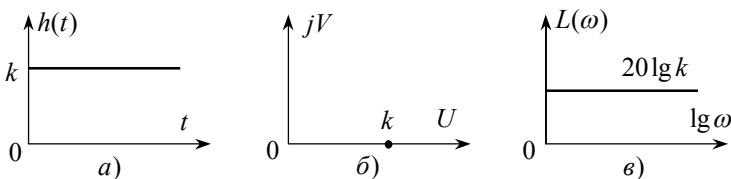


Рис. 2.3.

Другие частотные характеристики представляются так:

$$U(\omega) = k, \quad V(\omega) = 0 \quad (\text{рис.2.3,б}); \quad A(\omega) = k;$$

$$\varphi(\omega) = 0, \quad L(\omega) = 20 \lg k \quad (\text{рис.2.3,в}).$$

Интегрирующее звено характеризуется тем, что скорость изменения выходного сигнала пропорциональна входному сигналу, т. е.

$$\frac{dx(t)}{dt} = k u(t), \quad k = \text{const}.$$

Для звена интегрирования имеем следующие характеристики:

- единичная переходная функция (рис.2.4,а) $h(t) = k t \, 1(t)$;
- импульсная переходная функция $w(t) = k \, 1(t)$;
- передаточная функция $W(p) = k/p$;
- частотные характеристики: $W(j\omega) = k/j\omega$,
 $U(\omega) = 0$, $V(\omega) = -k/\omega$, (рис.2.4,б); $A(\omega) = k/\omega$,
 $\varphi(\omega) = -\pi/2$, $L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega$ (рис.2.4,в).

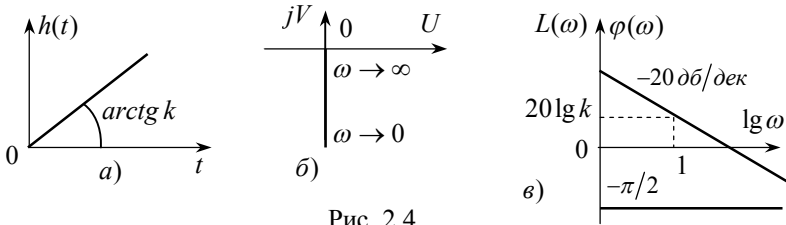


Рис. 2.4.

Примером звена интегрирования может быть электрический двигатель, емкость, наполняющаяся жидкостью, конденсатор.

Апериодическое звено описывается уравнением

$$T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k u(t) \quad (T = \text{const} > 0, \quad k = \text{const}).$$

Временные характеристики апериодического звена имеют вид:

- единичная переходная функция (рис.2.5,а)
 $h(t) = k (1 - e^{-t/T}) \cdot 1(t)$;
- импульсная переходная функция $w(t) = (k/T) e^{-t/T} \cdot 1(t)$;
- передаточная функция $W(p) = k/(Tp + 1)$.

Частотные характеристики $W(j\omega) = k \frac{1 - jT\omega}{1 + T^2\omega^2}$,

$$U(\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2}, \quad V(\omega) = -\frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}, \quad (\text{рис.2.5,б})$$

$$A(\omega) = k / \sqrt{1 + T^2\omega^2},$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg(T\omega), \quad L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2} \quad (\text{рис.2.5,в}).$$

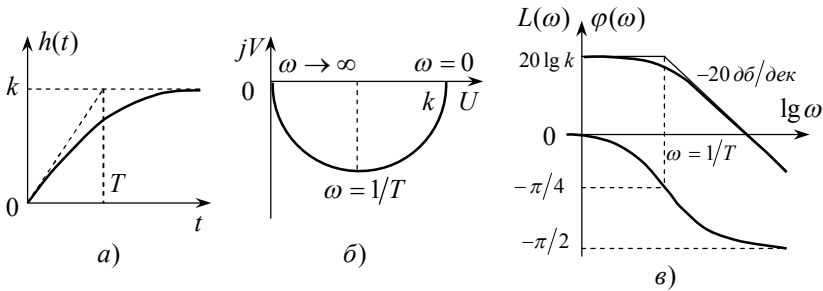


Рис. 2.5.

В качестве примеров физических объектов, реализующих апериодическое звено, можно взять электрическую RC -цепочку, гидромеханическую систему и т.п.

Колебательное звено. Колебательное звено определяется уравнением второго порядка

$$T^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k u(t), \quad (2.61)$$

где $T = \text{const} > 0$, $0 < \xi < 1$, $k = \text{const}$.

Это звено имеет следующие характеристики:

- единичная переходная функция

$$h(t) = k \left[1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \right] \cdot 1(t), \quad (\text{рис. 2.6, а}),$$

где $\alpha = \frac{\xi}{T}$, $\beta = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}$, $\varphi = \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$;

- импульсная переходная функция

$$w(t) = \frac{k(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t \cdot 1(t);$$

- передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}; \quad (2.62)$$

- частотные характеристики

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 - T^2\omega^2) - j2\xi T\omega}, \quad A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}};$$

$$U(\omega) = \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}, \quad V(\omega) = \frac{-2k\xi T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2},$$

(рис.2.6,б);

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2},$$

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2},$$

(рис.2.6,в).

Здесь величина β называется *собственной частотой* колебательного звена, а α – коэффициентом затухания.

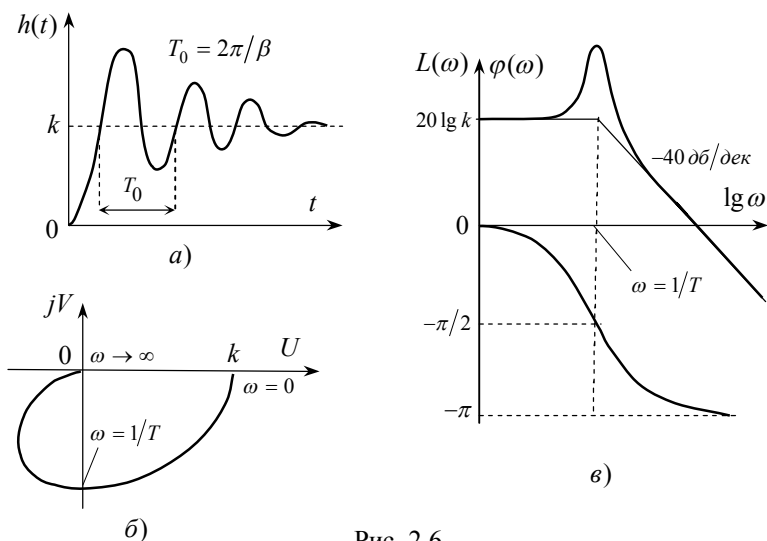


Рис. 2.6.

Если $\xi \geq 0$, то передаточную функцию (2.62) можно представить в виде

$$W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

где
$$T_{1,2} = \frac{T}{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}.$$

Получилось аperiodическое звено второго порядка, которое можно представить как последовательное соединение двух аperiodических звеньев первого порядка.

Дифференцирующее звено. Так называется элементарное звено, которое описывается уравнением

$$x(t) = k \frac{du(t)}{dt}, \quad k = \text{const}.$$

Основные характеристики этого звена:

- единичная переходная функция $h(t) = k \delta(t)$, где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака;
- импульсная переходная функция $w(t) = k \delta^{(1)}(t)$, где $\delta^{(1)}(t)$ – так называемая дельта-функция первого порядка, представляющая собой первую производную от функции Дирака;
- передаточная функция $W(p) = kp$;
- частотные характеристики

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= jk\omega, \quad U(\omega) = 0, \quad V(\omega) = k\omega, \\ A(\omega) &= k\omega, \quad \varphi(\omega) = \pi/2, \quad L(\omega) = 20 \lg(k\omega). \end{aligned}$$

Реально дифференцирующее звено. Уравнение реально дифференцирующего звена имеет вид

$$T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k \frac{du(t)}{dt} \quad (T = \text{const} > 0, \quad k = \text{const}).$$

Временные и частотные характеристики реально дифференцирующего звена можно записать так:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{k}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \cdot 1(t), \quad w(t) = \frac{k}{T} \delta(t) - \frac{k}{T^2} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \cdot 1(t), \\ W(p) &= \frac{kp}{Tp+1}; \quad W(j\omega) = k\omega \frac{T\omega + j}{1 + T^2\omega^2}, \quad U(\omega) = \frac{kT\omega^2}{1 + T^2\omega^2}, \\ V(\omega) &= \frac{k\omega}{1 + T^2\omega^2}, \quad A(\omega) = \frac{k\omega}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}, \\ \varphi(\omega) &= \arctg\left(\frac{1}{T\omega}\right), \quad L(\omega) = 20 \lg \frac{k\omega}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}. \end{aligned}$$

Частотные характеристики дифференцирующего и реально дифференцирующего звеньев строятся аналогично уже рассмотренным характеристикам интегрирующего, апериодического, колебательного звеньев (рис. 2.4 – 2.6).

Звено запаздывания. Такое название используется для звена, которое осуществляет операцию сдвига сигнала на постоянную величину τ и характеризуется соотношением

$$x(t) = u(t - \tau).$$

Это звено имеет следующие характеристики:

$$h(t) = 1(t - \tau), \quad w(t) = \delta(t - \tau), \quad W(p) = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) e^{-pt} dt = e^{-p\tau}.$$

Естественными звеньями запаздывания могут быть различные устройства передачи сигналов в системах связи, транспортные системы передачи материалов и энергии, в которых естественно ограничены скорости распределения и передвижения. Например, наблюдается запаздывание электромагнитных сигналов в системах связи со спутниками и космическими кораблями; запаздывание распределения давления газа в длинных трубопроводах и т. п.

Звено-сумматор. Такое название имеет звено, выходным сигналом $x(t)$ которого есть сумма входных сигналов $u_1(t), \dots, u_m(t)$, т.е.

$$x(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t)$$

На схемах звено-сумматор обозначают знаком $\otimes$ или

вертикальным отрезком, у которого с одной стороны изображены входные сигналы, а с другой – выходной сигнал.

Приведенные выше определения элементарных звеньев касаются только линейных систем управления с постоянными параметрами. Для систем управления других типов (нелинейных, линейных с переменными параметрами и т. п.) подобная классификация не применяется, хотя почти всегда имеется возможность достаточно сложную систему управления представить в виде некоторого количества простейших звеньев и называть их элементарными.

2.6. Характеристики систем при различных соединениях звеньев

Отдельные звенья систем управления можно соединить друг с другом различными способами. Рассмотрим три способа соединения: последовательное, параллельное и антипараллельное.

Интерес представляет задача об определении *импульсной переходной функции* и *передаточной функции* той части системы, которая состоит из n звеньев, если соответствующие характеристики отдельных звеньев известны. Все другие характеристики можно определить на основании приведенных выше формул по этим двум функциям.

З а м е ч а н и е. Если речь идет о передаточной функции или частотных характеристиках, то это автоматически означает, что рассматриваются линейные системы с постоянными коэффициентами, для которых указанные характеристики определены. Если же упомянутая задача решается для переходных функций, то это одновременно будет означать, что рассматривается более общий случай – линейные системы с переменными параметрами.

Последовательное соединение звеньев характеризуется тем, что выходной сигнал первого звена является входным сигналом второго звена, выходной сигнал второго звена является входным сигналом третьего и т. д.

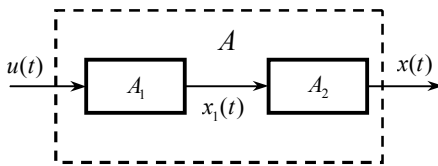


Рис. 2.7.

Пусть имеем два последовательно соединенных звена A_1 и A_2 (рис. 2.7) с передаточными функциями $W_1(p)$ и $W_2(p)$. Через

$W(p)$ обозначим передаточную функцию всей системы A . На основании определений, введенных в параграфе 2.3 запишем

$$X_1(p) = W_1(p)U(p); \quad X(p) = W_2(p)X_1(p), \quad (2.63)$$

где $X_1(p)$, $U(p)$, $X(p)$ – изображения Лапласа соответствующих сигналов системы.

Из уравнений (2.63) находим

$$X(p) = W_1(p)W_2(p)U(p),$$

что дает возможность записать

$$W(p) = W_1(p)W_2(p).$$

Аналогичный прием позволяет распространить этот результат на произвольное число n последовательно соединенных звеньев. Таким образом, будем иметь

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p).$$

Это означает, что передаточная функция последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций составляющих.

Предположим, что нам известны импульсные переходные функции $w_1(t, \xi)$ и $w_2(t, \xi)$ звеньев A_1 и A_2 соответственно. Следует найти импульсную характеристику $w(t, \xi)$ системы A как целой.

Напомним, что $w_1(t, \xi)$ – это выход первого звена, когда на его вход подан единичный импульс $\delta(t - \xi)$. Одновременно с этим $w_1(t, \xi)$ есть вход второго звена, а поэтому его выход $w(t, \xi)$ на основании формулы (2.31) можно представить в виде

$$w(t, \xi) = \int_0^t w_2(t, \tau) w_1(\tau, \xi) d\tau.$$

Поскольку для $\tau < \xi$ $w_1(\tau, \xi) \equiv 0$, то

$$w(t, \xi) = \int_{\xi}^t w_2(t, \tau) w_1(\tau, \xi) d\tau, \quad (2.64)$$

что и является искомым выражением.

Формулу (2.64) можно распространить по аналогии на конечное количество n звеньев системы. В этом случае имеем

$$w(t, \xi) = \int_{\xi}^t \int_{\xi}^{\tau_{n-1}} \dots \int_{\xi}^{\tau_2} w_n(t, \tau_{n-1}) w_{n-1}(\tau_{n-1}, \tau_{n-2}) \dots w_1(\tau_1, \xi) d\tau_1 \dots d\tau_{n-1}.$$

Параллельное соединение звеньев системы характеризуется тем, что входные сигналы всех звеньев равны между собой, а выходной сигнал

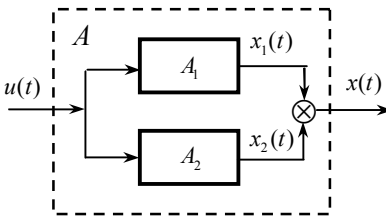


Рис. 2.8.

$x(t)$ равен сумме выходных сигналов каждого звена. Схематичное изображение такого соединения приведено на рис. 2.8 для случая двух звеньев.

Передаточная функция $W(p)$ параллельно соединенной системы равна сумме передаточных функций $W_i(p)$

звеньев, которые ее составляют. Действительно, в случае двух звеньев имеем равенства

$$X_1(p) = W_1(p)U(p); \quad X_2(p) = W_2(p)U(p),$$

сложив которые, получим

$$X(p) = X_1(p) + X_2(p) = [W_1(p) + W_2(p)]U(p).$$

Отсюда

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p).$$

Аналогично для n звеньев

$$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p),$$

что и требовалось доказать.

В случае параллельного соединения импульсная переходная функция системы равна также сумме импульсных переходных функций составляющих звеньев, т. е.

$$w(t, \xi) = \sum_{i=1}^n w_i(t, \xi)$$

Представим, что $u(t) = \delta(t - \xi)$, тогда $x_1(t) = w_1(t, \xi)$, а $x_2(t) = w_2(t, \xi)$ и, таким образом, выход $w(t, \xi)$ системы равен сумме функций $w_1(t, \xi)$ и $w_2(t, \xi)$.

Антипараллельное соединение двух звеньев определяется тем, что выходной сигнал $x(t)$ первого звена становится входным сигналом второго звена, а выходной сигнал

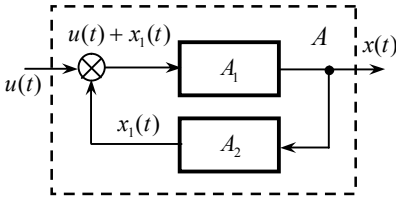


Рис. 2.9.

второго звена, а выходной сигнал $x_1(t)$ второго звена в виде суммы с входным сигналом $u(t)$ попадает на вход первого звена (рис. 2.9). При этом за выходной сигнал всей системы принимается выходной сигнал первого звена. Передаточная функция $W(p)$ двух антипараллельно соединенных звеньев с

передаточными функциями $W_1(p)$ и $W_2(p)$ определяется по формуле

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)W_2(p)}. \quad (2.65)$$

Действительно, согласно определению антипараллельного соединения имеем соотношения

$$X(p) = W_1(p)[U(p) + X_1(p)]; \quad X_1(p) = W_2(p)X(p).$$

Исключим из них промежуточную переменную $X_1(p)$. Тогда

$$X(p) = W_1(p)U(p) + W_1(p)W_2(p)X(p)$$

или

$$X(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)W_2(p)} U(p).$$

Последнее равенство позволяет записать соотношение (2.65), т.е. передаточную функцию системы A .

Импульсная переходная функция $w(t, \xi)$ двух антипараллельно соединенных звеньев с импульсными переходными функциями $w_1(t, \xi)$ и $w_2(t, \xi)$ определяется решением интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$w(t, \xi) = w_1(t, \xi) + \int_{\xi}^t w(\tau, \xi) d\tau \int_{\tau}^t w_1(t, \eta) w_2(\eta, \tau) d\eta. \quad (2.66)$$

Для доказательства этого факта рассмотрим соотношения между сигналами отдельных звеньев, предполагая, что входной сигнал всей системы $u(t) = \delta(t - \xi)$. На выходе звена A_2 согласно равенству (2.31) имеем

$$x_1(t, \xi) = \int_{\xi}^t w_2(t, \tau) w(\tau, \xi) d\tau,$$

где $w(\tau, \xi)$ – выходной сигнал первого звена и одновременно импульсно-переходная функция всей системы.

На входе первого звена при этом получим сигнал

$$\delta(t - \xi) + x_1(t, \xi) = \delta(t - \xi) + \int_{\xi}^t w_2(t, \tau) w(\tau, \xi) d\tau,$$

а поэтому на выходе этого звена будем иметь

$$w(t, \xi) = \int_0^t w_1(t, \eta) \left[\delta(\eta - \xi) + \int_{\xi}^{\eta} w_2(\eta, \tau) w(\tau, \xi) d\tau \right] d\eta. \quad (2.67)$$

Первый интеграл правой части равенства (2.67) на основании свойства дельта-функции равен $w_1(t, \xi)$. Второй интеграл преобразуем, меняя порядок интегрирования. Такое преобразование приводит к уравнению (2.66).

Уравнение (2.66) в отдельных случаях несколько упрощается. Это наблюдается, например, в *следающих системах* и *системах стабилизации*, когда звено A_2 представляет собой звено усиления с постоянным или

переменным коэффициентом $k(t)$ усиления. В этом случае импульсная характеристика звена A_2 будет

$$w_2(t, \xi) = k(\xi) \delta(t - \xi).$$

Поэтому

$$\int_{\tau}^t w_1(t, \eta) w_2(\eta, \tau) d\eta = \int_{\tau}^{\eta} w_1(t, \eta) k(\tau) \delta(\eta - \tau) d\eta = k(\tau) w_1(t, \tau).$$

В связи с этим уравнение (2.67) принимает вид

$$w(t, \xi) = w_1(t, \xi) + \int_{\xi}^t k(\tau) w(\tau, \xi) w_1(t, \tau) d\tau.$$

Антипараллельное соединение звеньев A_1 и A_2 можно рассматривать как обобщение замкнутой системы с обратной связью. Поэтому звено A_2 называют звеном *обратной связи*, а канал связи от выхода A_1 к звену-сумматору – каналом обратной связи. Звено A_1 называют звеном *прямой связи*, а канал от звена-сумматора к $x(t)$ – каналом прямой связи. Иногда различают понятия *положительной* и *отрицательной* обратной связи, зависящей от знака коэффициента передачи обратной связи.

2.7. Характеристики линейных многомерных систем. Формула Коши.

В теории управления большой интерес представляет структура решений конкретных уравнений. В связи с этим основной темой в этом разделе будет исследование свойств импульсной переходной матрицы системы линейных дифференциальных уравнений.

Напомним, что линейная многомерная непрерывная система описывается уравнением (1.22)

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t). \quad (2.68)$$

Рассмотрим соответствующую ей однородную систему уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \quad (2.69)$$

где $A(t)$ – матрица $n \times n$, составленная из непрерывных функций.

На два основных вопроса:

1) существует ли решение уравнения (2.69), проходящее через заданную точку $x^{(0)} = x(t_0)$?

2) если такое решение существует, то является ли оно единственным?

теория дифференциальных уравнений дает положительные ответы [16].

Поскольку вопрос *существования* связан с конструктивным построением решения, а это, вообще говоря, нельзя реализовать с помощью элементарных функций, начнем со второго, более простого вопроса – *единственности*.

Теорема 2.3. Если $A(t)$ – матрица $n \times n$, элементы которой непрерывные функции времени, определенные на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, то имеет место единственное решение системы (2.69), которое определено на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$ и принимает значение $x^{(0)}$ при $t = t_0$.

Согласно этой теореме каждому вектору начальных условий соответствует одно и только одно решение дифференциального уравнения, и тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между пространством R^n и множеством решений уравнения (2.69).

Теорема 2.4. Множество всех решений уравнения (2.69) образует n -мерное векторное пространство над полем вещественных чисел.

Доказательство можно найти в [16].

Пользуясь свойством множества решений уравнения (2.69), которое определено в теореме 2.4, введем следующее важное определение.

Определение 2.6. Матрица $\Phi(t)$ размером $(n \times n)$ называется *фундаментальной матрицей* системы (2.69) тогда и только тогда, когда в ее столбцах стоят n линейно независимых решений этой системы.

Определитель любой фундаментальной матрицы называют *определителем Вронского*. Согласно теореме 2.4 определитель Вронского не обращается в нуль ни в одной точке интервала $t_0 \leq t \leq t_1$, и, следовательно, фундаментальная матрица при любом значении t является *неособенной матрицей*. Поскольку каждый столбец этой матрицы удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.69), то, значит, сама матрица $\Phi(t)$ удовлетворяет дифференциальному матричному уравнению

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \quad (2.70)$$

с начальным условием $\Phi(t_0) = \Phi^{(0)}$, где $\Phi^{(0)}$ – неособенная вещественная матрица.

Справедливо и обратное утверждение.

Если $\Phi(t)$ удовлетворяет этому матричному уравнению и является неособенной матрицей при всех $t_0 \leq t \leq t_1$, то все столбцы ее линейно независимы и, следовательно, $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица. Таким образом, можно дать еще одно определение фундаментальной матрицы.

Определение 2.7. Матрица $\Phi(t)$ является *фундаментальной матрицей* уравнения (2.69) тогда и только тогда, когда $\Phi(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению (2.70) при начальном условии $\Phi(t_0) = \Phi^{(0)}$, где $\Phi^{(0)}$ – неособенная вещественная матрица.

Поскольку определитель фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ не обращается в нуль ни в одной точке, то при любом фиксированном t_0 существует обратная матрица $\Phi^{-1}(t_0)$ и имеет смысл следующее определение.

Определение 2.8. Если $\Phi(t)$ – какая-либо фундаментальная матрица уравнения (2.69), то

$$w(t, t_0) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0)$$

для всех $t, t_0, t \in [t_0, t_1]$ называется *импульсной переходной матрицей* уравнения (2.69).

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства импульсной переходной матрицы:

- 1) $w(t_0, t_0) = \Phi(t_0) \Phi^{-1}(t_0) = E$ при любом t_0 .
- 2) $w(t, t_0) = w(t, t_1) w(t_1, t_0)$ при любых $t_0 \leq t \leq t_1$.
- 3) $|w(t, t_0)| \neq 0$ при любых (t_0, t) .
- 4) $w^{-1}(t, t_0) = w(t_0, t)$. Действительно,

$$\begin{aligned} w^{-1}(t, t_0) &= [\Phi(t) \Phi^{-1}(t_0)]^{-1} = [\Phi^{-1}(t_0)]^{-1} [\Phi(t)]^{-1} = \\ &= \Phi(t_0) \Phi^{-1}(t) = w(t_0, t). \end{aligned}$$

Заметим, что импульсная переходная матрица – это такая фундаментальная матрица, которая удовлетворяет начальному условию $\Phi(t_0) = E$. Поэтому согласно определению 2.7 импульсную переходную матрицу можно определить как решение матричного дифференциального уравнения

$$w'(t, t_0) = A(t) w(t, t_0), \quad w(t_0, t_0) = E.$$

Свойства импульсной переходной матрицы $w(t, t_0)$ определяют структурные свойства решений линейного однородного уравнения. В дальнейшем будет показано, что решение неоднородного уравнения тоже можно легко получить, зная импульсную переходную матрицу.

Заметим, что существование решения уравнения (2.69) эквивалентно существованию импульсной переходной матрицы. Решение этого уравнения не выражается, вообще говоря, в элементарных функциях. Поэтому, для доказательства существования решения (2.69) это решение строится с помощью некоторой итерационной процедуры и доказывается ее сходимость через сходимость временных матричных функций [1].

Рассмотрим формальное построение решения уравнения (2.69). Это уравнение равносильно интегральному уравнению

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(\sigma_1) x(\sigma_1) d\sigma_1.$$

Заменяя здесь $x(\sigma_1)$ суммой

$$x(\sigma_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{\sigma_1} A(\sigma_2) x(\sigma_2) d\sigma_2$$

будем иметь

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(\sigma_1) x(t_0) d\sigma_1 + \int_{t_0}^t A(\sigma_1) d\sigma_1 \int_{t_0}^{\sigma_1} A(\sigma_2) x(\sigma_2) d\sigma_2.$$

Повторяя эту процедуру неограниченное число раз, получим формальное представление решения в виде ряда. Из этого ряда можно выделить выражение импульсной переходной функции, которая представляется разложением в *ряд Пеано*:

$$w(t, t_0) = E + \int_{t_0}^t A(\sigma_1) d\sigma_1 + \int_{t_0}^t A(\sigma_1) \int_{t_0}^{\sigma_1} A(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 + \dots \quad (2.71)$$

Если матрица A – постоянная матрица, то имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.5. *Если система (2.69) – стационарная система, т.е. $x'(t) = Ax(t)$, то импульсная переходная функция имеет следующий вид: $w(t, t_0) = \exp(A(t - t_0))$.*

Доказательство. Так как постоянную A можно вынести за знак интеграла, то ряд Пеано (2.71) в этом случае принимает вид

$$w(t, t_0) = E + A \int_{t_0}^t d\sigma_1 + A^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\sigma_1} d\sigma_2 d\sigma_1 + A^3 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\sigma_1} \int_{t_0}^{\sigma_2} d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 + \dots$$

После вычисления всех интегралов имеем

$$w(t, t_0) = E + A(t - t_0) + A^2 \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \dots + A^n \frac{(t - t_0)^n}{n!} + \dots \quad (2.72)$$

Этот ряд по определению обозначают через $w(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = \exp(A(t-t_0))$ и называют *матричной экспонентой*, имея в виду его аналогию с рядом экспоненты.

Матричная экспонента обладает рядом полезных свойств:

1) Если A – диагональная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad e^A = \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & e^{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Это свойство следует из определения e^A .

2) Если P – какая-то неособенная квадратная матрица, то

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P.$$

Действительно, по определению имеем

$$e^{P^{-1}AP} = E + P^{-1}AP + (P^{-1}AP)^2/2! + \dots = P^{-1} \left[E + A + (A)^2/2! + \dots \right] P.$$

3) Справедливо правило

$$e^{At} e^{A\sigma} = e^{A(t+\sigma)}.$$

Тем не менее, вообще говоря, неверно, что $e^A e^B = e^{A+B}$. Это равенство выполняется лишь в том случае, если матрицы A и B коммутативны, т.е. $AB = BA$.

4) Дифференцирование матричной экспоненты по времени осуществляется по обычному правилу дифференцирования экспоненты

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{At}) &= \frac{d}{dt} \left(E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} \dots \right) = \\ &= A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2!} \dots = A e^{At} = e^{At} A. \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо в силу того, что квадратная матрица коммутирует с любым своим многочленом.

Рассмотрим решение *неоднородного уравнения* (2.68).

Полезно провести аналогию с линейными алгебраическими уравнениями. Вспомним, что общее решение матричного уравнения $Ax = b$ состоит из двух частей: частного решения этого уравнения и элемента x , принадлежащего *ядру* матрицы A , т.е. удовлетворяющего однородному уравнению $Ax = 0$. Другими словами, оно является суммой частного решения x_1 и решения однородного уравнения x_2 . Перепишем уравнение (2.68) в виде

$$[pE - A(t)]x(t) = B(t)u(t), \quad p = \frac{d}{dt}.$$

Отличие от алгебраических уравнений состоит в необходимости вводить начальные условия. Эти начальные условия жестко фиксируют решение однородного уравнения, которое нам уже известно, $x(t) = w(t, t_0)x^{(0)}$. Остается найти частное решение неоднородного уравнения. Пусть $A = 0$, тогда имеем

$$x'(t) = B(t)u(t),$$

и, интегрируя, получим

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t B(\sigma)u(\sigma)d\sigma.$$

Преобразуем теперь уравнение (2.68), введя замену переменной $z(t) = w(t_0, t)x(t)$, где $w(t_0, t)$ – импульсная переходная матрица для A . Это преобразование исключает зависимые переменные справа и дает

$$z'(t) = w^{-1}(t, t_0)B(t)u(t) = w(t_0, t)B(t)u(t)$$

Отсюда сразу получим

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t w(t_0, \sigma)B(\sigma)u(\sigma)d\sigma$$

и далее

$$\begin{aligned} x(t) &= w(t, t_0) \left[x(t_0) + \int_{t_0}^t w(t_0, \sigma)B(\sigma)u(\sigma)d\sigma \right] = \\ &= w(t, t_0)x^{(0)} + \int_{t_0}^t w(t, \sigma)B(\sigma)u(\sigma)d\sigma. \end{aligned}$$

Полученное равенство называют *формулой Коши* или *формулой вариации постоянных*. Прделанные вычисления позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2.6. (формула Коши). Если $w(t, t_0)$ – импульсная переходная матрица для (2.69), т.е. $x'(t) = A(t)x(t)$, то единственное решение уравнения (2.68) при начальном условии $x(t_0) = x^{(0)}$ дается формулой

$$x(t) = w(t, t_0)x^{(0)} + \int_{t_0}^t w(t, \sigma)B(\sigma)u(\sigma)d\sigma. \quad (2.73)$$

В стационарном случае $w(t, t_0) = \exp(A(t - t_0))$ и эта формула имеет вид

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x^{(0)} + \int_{t_0}^t e^{A(t-\sigma)}B(\sigma)u(\sigma)d\sigma. \quad (2.74)$$

Пример 2.2.

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение в нормальной форме

$$x'(t) = Ax(t),$$

где $x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$

Найти решение при заданных начальных условиях $x(t_0) = x^{(0)}$.

Решение.

Импульсная переходная матрица для этой системы удовлетворяет уравнению

$$\begin{pmatrix} w'_{11}(t, t_0) & w'_{12}(t, t_0) \\ w'_{21}(t, t_0) & w'_{22}(t, t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_{11}(t, t_0) & w_{12}(t, t_0) \\ w_{21}(t, t_0) & w_{22}(t, t_0) \end{pmatrix}$$

при начальном условии $w(t_0, t_0) = E$.

Ряд (2.72) для вычисления $w(t, t_0)$ в этом примере легко суммируется потому, что выявляется закономерность суммирования матриц A^i :

$A^i = (-1)^{\frac{i-1}{2}} A$ для i нечетных и $A^i = (-1)^{\frac{i}{2}} E$ для $i \geq 2$ четных. Например,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и т.д.}$$

Простое вычисление показывает, что

$$w(t, t_0) = \begin{pmatrix} \cos(t - t_0) & \sin(t - t_0) \\ -\sin(t - t_0) & \cos(t - t_0) \end{pmatrix},$$

где использованы разложения тригонометрических функций в ряд Тейлора

$$\cos(t - t_0) = 1 - \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \frac{(t - t_0)^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{(t - t_0)^{2k}}{2k!} \pm \dots,$$

$$\sin(t - t_0) = (t - t_0) - \frac{(t - t_0)^3}{3!} + \frac{(t - t_0)^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{(t - t_0)^{2k+1}}{(2k+1)!} \pm \dots$$

Следовательно,

$$x_1(t) = x_1^{(0)} \cos(t - t_0) + x_2^{(0)} \sin(t - t_0),$$

$$x_2(t) = -x_1^{(0)} \sin(t - \tau) + x_2^{(0)} \cos(t - \tau).$$

Пример 2.3.

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t),$$

где $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Необходимо построить общее решение при следующих начальных условиях $x(0) = x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} \end{pmatrix}^T$.

Решение.

Вычисление импульсной переходной матрицы (2.72) дает

$$w(t, 0) = e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу Коши (2.2.74)

$$x(t) = e^{At} x^{(0)} + \int_0^t e^{A(t-\sigma)} B u(\sigma) d\sigma,$$

получим общее решение системы

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} + t x_2^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t - \sigma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u(\sigma) \end{pmatrix} d\sigma$$

или

$$x_1(t) = x_1^{(0)} + t x_2^{(0)} + \int_0^t (t - \sigma) u(\sigma) d\sigma,$$

$$x_2(t) = x_2^{(0)} + \int_0^t u(\sigma) d\sigma.$$

Заметим, что несмотря на внешнюю простоту выражения для переходной матрицы в стационарной системе, вычисление функции e^{At} может оказаться сложной задачей.

При исследовании линейных преобразований в евклидовых пространствах определяется *сопряженное преобразование*, связанное с данным преобразованием как преобразование, которое обеспечивает равенство скалярных произведений $\langle y, L(x) \rangle$ и $\langle x, L^*(y) \rangle$ [1].

Определение 2.9. Две системы, описываемые уравнениями

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \quad (2.75)$$

и

$$\frac{dy(t)}{dt} = -A^*(t)y(t), \quad (2.76)$$

называются *сопряженными*, где $A^*(t)$ – сопряженная матрица к $A(t)$.

Вариационные задачи, общая теория двухточечной граничной задачи, существование и единственность периодических решений – исследование всех этих вопросов связано с исследованием свойств сопряженных уравнений.

Основное свойство сопряженного уравнения заключается в том, что оно представляет решение исходного дифференциального уравнения в обратном времени.

Теорема 2.7. Если $w(t, t_0)$ – импульсная переходная матрица для системы (2.75), тогда $w^*(t_0, t)$ будет импульсной переходной матрицей для сопряженной системы (2.76).

Доказательство. Продифференцируем по времени t следующее равенство $w^{-1}(t, t_0)w(t, t_0) = E$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} [w^{-1}(t, t_0)w(t, t_0)] = \\ &= \frac{d}{dt} [w^{-1}(t, t_0)] w(t, t_0) + w^{-1}(t, t_0) \frac{d}{dt} w(t, t_0) = \\ &= \left[\frac{d}{dt} w^{-1}(t, t_0) + w^{-1}(t, t_0) A(t) \right] w(t, t_0). \end{aligned}$$

Поскольку матрица $w(t, t_0)$ – неособенная, имеем

$$\frac{d}{dt} w^{-1}(t, t_0) = -w^{-1}(t, t_0) A(t)$$

или

$$\frac{d}{dt} [w^{-1}(t, t_0)]^* = -A^*(t) [w^{-1}(t, t_0)]^*.$$

Используя свойство импульсной переходной матрицы $w^{-1}(t, t_0) = w(t_0, t)$, получим

$$\frac{d}{dt} w^*(t_0, t) = -A^*(t) w^*(t_0, t).$$

Дифференциальное уравнение $x'(t) = A(t)x(t)$ называется *самосопряженным*, если для всех t имеет место равенство $A(t) = -A^*(t)$. Такие системы очень важны при изучении, например, проблем механики. Гармонический осциллятор – наиболее простой пример самосопряженного уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Импульсная переходная матрица самосопряженной системы обладает замечательным свойством. Она является *ортогональной* матрицей. Свойство ортогональности доказывает следующая теорема.

Теорема 2.8. *Если w – импульсная переходная матрица самосопряженной системы, то выполняется условие ортогональности $w^*(t, t_0)w(t, t_0) = E$ для всех t и t_0 .*

Доказательство. Чтобы проверить свойство ортогональности матрицы $w^*(t, t_0)$ в случае, когда система $x'(t) = A(t)x(t)$ – самосопряженная, заметим, что поскольку $A(t) = -A^*(t)$, то

$$\frac{d}{dt} [w^*(t, t_0)w(t, t_0)] = w^*(t, t_0) [A^*(t) + A(t)] w(t, t_0) = 0$$

Значит, $w^*(t, t_0)w(t, t_0) = \text{const}$, но по определению импульсной переходной матрицы $w^*(t_0, t_0) = E$, следовательно,

$$w^*(t, t_0)w(t, t_0) = E$$

и требуемый результат получается сразу.

О значении понятия импульсной переходной матрицы в различных вопросах теории линейных систем свидетельствует число терминов, используемых для обозначения матрицы $w(t, t_0)$. Например, импульсную переходную матрицу называют матрицантом, нормированной фундаментальной матрицей, матрицей Коши.

Существует ряд способов построения импульсной переходной матрицы.

Импульсную переходную матрицу можно строить, суммируя ряд Пеано. А также можно вычислять, интегрируя одно из матричных уравнений. Это целесообразно делать с помощью компьютера. Часто более удобным оказывается интегрирование сопряженного дифференциального уравнения.

При решении обыкновенных дифференциальных уравнений широко применяются методы операционного исчисления непосредственно для вычисления импульсной переходной матрицы (см. пример 2.2).

Глава 3

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В этой главе рассматривается проблема устойчивости системы управления. Одной из задач, решаемой управляющим устройством, является задача обеспечения устойчивости движения управляемого объекта.

Установить, является ли движение данного объекта устойчивым даже в том случае, когда известны уравнения движения объекта и эти уравнения линейны, вообще говоря, непросто.

Основным методом определения устойчивости является прямой (или второй) метод Ляпунова. Кроме этого метода, рассмотрены достаточно эффективные алгебраические и частотные критерии устойчивости линейных систем управления.

3.1. Постановка задачи устойчивости по Ляпунову

Под устойчивостью состояния равновесия динамической системы понимают ее способность возвращаться (с определенной точностью) в это состояние после исчезновения внешних сил, которые вывели систему из равновесия. Если система неустойчива, то она не возвращается в состояние равновесия, из которого ее вывели, т.е. либо удаляется от него, либо совершает вокруг него недопустимо большие колебания.

Под устойчивостью движения динамической системы понимают обычно такое свойство этого движения, когда малые отклонения начальных условий приводят к малым отклонениям от начальной траектории движения.

Наглядно устойчивость равновесия представлена на рис. 3.1, где изображен шар, расположенный в некотором углублении (рис. 3.1,а), на некоторой выпуклой поверхности (рис. 3.1,б), на плоскости (рис. 3.1,в).

Положение равновесия шара характеризуется точкой A_0 . В случае, изображенном на рис. 3.1,а, при всяком отклонении шара от положения равновесия, например, в точку A_1 он будет стремиться снова вернуться к положению равновесия – в точку A_0 (при отсутствии сил тре-

ния) или к некоторой конечной области, окружающей положение равновесия, например в точку A_2 (при наличии сил трения). Такое положение равновесия устойчиво. Случай, изображенный на рис. 3.1,б, соответствует неустойчивому положению равновесия. На рис. 3.1,в состояние равновесия устойчиво лишь до тех пор, пока отклонение не вышло за некоторую границу, определяемую, например, точкой B . Выйдя за эту границу, шар уже не вернется в точку A_0 , а будет двигаться вправо от точки B либо все время удаляясь, либо до нового состояния равновесия в зависимости от формы поверхности, т.е. в конечном счете, в зависимости от уравнений движения шара.

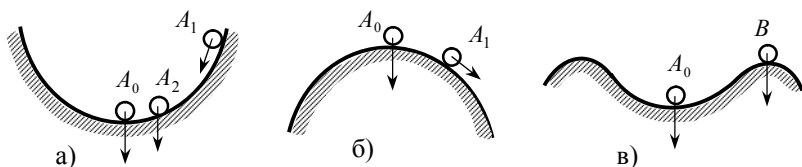


Рис. 3.1.

Поэтому в общем случае (например, при рассмотрении нелинейных систем) вводят понятие *устойчивости «в малом»*, «в большом», «в целом». Система устойчива «в малом», если констатируют лишь факт наличия области устойчивости, но не определяют каким-либо образом ее границы. Систему называют устойчивой «в большом», когда определены границы области устойчивости, т.е. определены границы области начальных отклонений, при которых система возвращается в исходное состояние, и выяснено, что реальные начальные отклонения принадлежат этой области. В том случае, когда система возвращается в исходное состояние при любых начальных отклонениях, систему называют *устойчивой «в целом»*. Устойчивость «в целом» для определенного класса нелинейных систем называют *«абсолютной» устойчивостью*.

Так, например, случай, изображенный на рис. 3.1,а, соответствует устойчивости «в целом», а случай, изображенный на рис. 3.1,в, может соответствовать либо устойчивости «в большом», либо устойчивости «в малом». Очевидно, что система, устойчивая «в целом», будет устойчива «в большом» и «в малом». А система, устойчивая «в большом», будет устойчива и «в малом».

Для того чтобы дать определение устойчивости равновесия, вводят понятие невозмущенного состояния равновесия, соответствующего состоянию покоя в точке A_0 на рис. 3.1,а, и возмущенного состояния,

ответствующего, например, точке A_1 , в которую внешняя сила привела шар и затем прекратила свое действие. Система будет устойчивой, если из возмущенного состояния она перейдет в некоторую заданную область, окружающую невозмущенное состояние равновесия.

В рассмотренном выше примере с шаром вопрос об устойчивости решается довольно просто. Однако следует заметить, что в общем случае далеко не всегда ясно, при каких условиях равновесное положение системы будет устойчивым.

Понятие устойчивости можно распространить и на общий случай, когда в качестве невозмущенного состояния рассматривают не положение равновесия системы, а ее движение; например, движение системы по некоторой заданной траектории.

Допустим, что заданное движение системы при отсутствии возмущений должно определяться некоторым законом изменения независимых координат $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. По аналогии со случаем равновесия положения, заданное движение называют *невозмущенным движением*. Внешние возмущения, действующие на систему, вызовут отклонение действительного движения системы от заданного. Действительное движение системы называют *возмущенным движением*. Пусть действительное движение системы определяется независимыми координатами $x_1^1(t), x_2^1(t), \dots, x_n^1(t)$. В общем случае $x_1^1(t) \neq x_1(t)$, $x_2^1(t) \neq x_2(t)$, ..., $x_n^1(t) \neq x_n(t)$.

Определение 3.1. Заданное невозмущенное движение называется *устойчивым*, если после приложения внешних сил (возмущений), которые затем снимают, возмущенное движение по истечении некоторого времени войдет в заданную область $|x_i^1(t) - x_i(t)| \leq \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i = \text{const}$ – заданные величины, $i = 1, 2, \dots, n$.

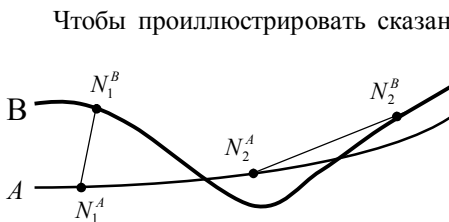


Рис. 3.2.

Чтобы проиллюстрировать сказанное, предположим, что невозмущенное движение происходит по траектории A , а возмущенное движение происходит по траектории B (рис. 3.2). Возьмем на этих траекториях две произвольные точки N_1^A и N_1^B , отвечающие одному и

тому же моменту времени t . При устойчивом движении траектория B должна быть близка к траектории A .

Следует заметить, что близость траекторий A и B является необходимым условием устойчивости движения, но не достаточным. Действительно, расстояние между точками N^A и N^B , отвечающими одному и тому же моменту времени, может возрастать не только для расходящихся, но и для близких траекторий. Таковы, например, точки N_2^A и N_2^B (рис. 3.2).

Впервые строгое определение устойчивости было дано русским ученым А. М. Ляпуновым в 1892 г. в работе «Общая задача об устойчивости движения». Отсутствие такого определения часто приводило к недоразумениям, так как движение, устойчивое в одном смысле, может оказаться неустойчивым при другом понимании этих слов, и наоборот. Определение устойчивости А. М. Ляпунова оказалось настолько удачным и наилучшим образом удовлетворяющим многим техническим задачам, что оно в настоящее время принято как основное.

Поскольку мы рассматриваем только линейные динамические системы, то термины: движение системы, траектория движения, решение системы дифференциальных уравнений – будем считать эквивалентными.

Пусть движение системы управления описывается дифференциальными уравнениями, которые могут быть приведены к виду

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + z(t), \quad (3.1)$$

где $x(t)$ – вектор фазовых координат n -го порядка, $A(t)$ – матрица порядка $(n \times n)$, $z(t)$ – n - мерный вектор внешнего воздействия (возмущения или управления).

Дадим определение устойчивости движения по Ляпунову.

Определение 3.2. Решение $x(t)$, $t_0 \leq t < \infty$, системы (3.1) называется *устойчивым по Ляпунову* или просто *устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что при любом $x^1(t_0)$, удовлетворяющем условию

$$\|x^1(t_0) - x(t_0)\| \leq \delta,$$

справедливо неравенство

$$\|x^1(t) - x(t)\| < \varepsilon \text{ при всех } t \in [t_0, \infty).$$

Определение 3.3. Устойчивое решение $x(t)$ называется *асимптотически устойчивым*, если $\lim_{t \rightarrow \infty} x^1(t) \rightarrow x(t)$.

Согласно данному определению для любой ε -окрестности устойчивого решения $x(t)$, как бы мала эта окрестность ни была, всегда существует такая δ -окрестность начальных условий, что любое решение $x^1(t)$, начинающееся в этой окрестности, не выйдет из ε -окрестности траектории $x(t)$ при всех t .

Для асимптотически устойчивого решения любое решение, начинающееся в δ -окрестности начальных условий, будет асимптотически сближаться с решением $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Например, система $x''(t) + x(t) = 0$ является просто устойчивой. Система $x'(t) + x(t) = 0$, очевидно, асимптотически устойчива, а система $x'(t) - x(t) = 0$ – неустойчива.

Следует обратить внимание на то, что устойчивость (и асимптотическая устойчивость) решения неоднородной системы вовсе не предполагает ограниченности этого решения. Например, решение уравнения $x'(t) + x(t) = 1 - t$ при $0 \leq t < \infty$, которое имеет вид $x(t) = x(0)e^{-t} + t$, является асимптотически устойчивым при $t \rightarrow \infty$, но неограниченным. В то же время, поскольку в определении устойчивости «возмущение» траектории движения задано в начальный момент времени, а согласно формуле Коши вектор начальных условий $x^{(0)}$ входит в решение аддитивно в виде члена $w(t, t_0)x^{(0)}$, то устойчивость системы целиком определяется свойствами импульсной переходной матрицы и справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Для устойчивости (асимптотической устойчивости) всех решений линейной системы (3.1) необходимо и достаточно, чтобы было устойчиво (асимптотически устойчиво) какое-либо решение однородного уравнения.

Доказательство сразу следует из формулы Коши и определений 3.1, 3.2.

Таким образом, исследование вопроса устойчивости линейной неоднородной системы сводится к исследованию решения однородной системы, которое целиком определяется матрицей системы $A(t)$ и имеет вид

$$x(t) = w(t, t_0)x(t_0),$$

где $w(t, t_0)$ – импульсная переходная матрица, соответствующая матрице $A(t)$.

Рассмотрим три возможных случая.

1) $w(t, t_0)$ – ограниченная матрица в интервале $[t_0, \infty)$, т. е. существует такое число M , что

$$|w_{ij}(t, t_0)| \leq M \quad (i, j = \overline{1, n}) \quad \text{при } t \geq t_0.$$

Здесь через $w_{ij}(t, t_0)$ обозначен ij -й элемент переходной матрицы. В этом случае из формулы $x(t) = w(t, t_0)x(t_0)$ следует, что

$$\|x(t)\| \leq n^2 M \max_i |x_i(t_0)|$$

и условие устойчивости выполняется, если взять, например, $\delta < \varepsilon / (n^2 M)$. Тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ устойчиво.

2) $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t, t_0) = 0$. В этом случае матрица $w(t, t_0)$ ограничена в интервале $t_0 \leq t < \infty$ и потому, как уже было выяснено, движение устойчиво. Кроме того, из вида решения следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} w(t, t_0)x^{(0)} = 0$$

при любом $x^{(0)}$. Движение асимптотически устойчиво.

3) $w(t, t_0)$ – неограниченная матрица в интервале $t_0 \leq t < \infty$. Это означает, что по крайней мере одна из функций $w_{ij}(t, t_0)$, например, $w_{pq}(t, t_0)$, не ограничена в интервале $t_0 \leq t < \infty$. Возьмем начальные условия $x_1^{(0)} = 0, \dots, x_p^{(0)} \neq 0, \dots, x_n^{(0)} = 0$. Тогда

$$x_q(t) = w_{qp}(t, t_0)x_p^{(0)}$$

и каким бы малым по модулю ни было $x_p^{(0)}$, функция $x_q(t)$ будет неограниченна. Движение неустойчиво.

Исследование переходной матрицы позволяет, таким образом, решить вопрос об устойчивости системы. Однако переходную матрицу не всегда просто получить, поэтому чаще всего выводится суждение об устойчивости по матрице $A(t)$.

Для исследования устойчивости систем А. М. Ляпунов рассмотрел два подхода или два метода. *Первый метод Ляпунова* основан на исследовании

довании устойчивости систем, использующий решения этих систем или их оценки. *Второй метод Ляпунова* является наиболее общим методом исследования устойчивости. Он основан на построении и исследовании специальных функций Ляпунова.

3.2. Условия устойчивости линейных систем управления

Пусть движение системы управления описывается уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)), \quad (3.2)$$

где $x(t)$ – n -мерный вектор состояния системы, $F(x(t))$ – вектор-функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности решения.

Когда известно общее решение дифференциальных уравнений движения (3.2), можно непосредственно решить вопрос об устойчивости невозмущенного движения. Однако, как правило, исследование устойчивости движения производят не путем анализа общего решения, а методами, основанными на качественном анализе дифференциальных уравнений возмущенного движения, которым удовлетворяют отклонения (вариации) $\Delta x_i(t)$.

Предположим, что правая часть нелинейной динамической системы (3.2) является непрерывной вектор-функцией со своими частными производными до второго порядка включительно. Тогда в результате разложения в степенной ряд Тейлора по степеням $\Delta x_i(t)$ и выделения уравнения относительно вариаций, получим уравнение (3.2) в следующем виде:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = A\Delta x + R(\Delta x(t)), \quad (3.3)$$

где $R(\Delta x(t)) = \{R_i(\Delta x_1(t), \dots, \Delta x_n(t))\}$ ($i = \overline{1, n}$) – совокупность членов в степени выше первой; $A = \{a_{ik}\} = \{\partial F_i / \partial \Delta x_k\}$ ($i, k = \overline{1, n}$) – матрица, коэффициенты которой в общем случае являются функциями времени t , в частности, они могут быть постоянными. В дальнейшем, если не будет оговорено особо, будем считать коэффициенты a_{ik} постоянными.

Для сокращения записи воспользуемся следующими обозначениями $x_i(t) = \Delta x_i(t)$.

С учетом введенных обозначений уравнение (3.3) можно представить в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = a_{i1}x_1(t) + \dots + a_{in}x_n(t) + R_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (3.4)$$

Уравнения (3.4) называют *дифференциальными уравнениями возмущенного движения*.

Если отклонения x_i достаточно малы, то, пренебрегая остатком разложения $R_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, получим *линеаризованную систему уравнений*

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = a_{i1}x_1(t) + a_{i2}x_2(t) + \dots + a_{in}x_n(t) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (3.5)$$

называемую *системой уравнений первого приближения*.

Во многих случаях устойчивость движения исследуют по уравнениям первого приближения. Это объясняется не только простотой метода, но также и тем, что знания процессов, происходящих в реальных системах, позволяют надежно определять только первые линейные члены. Однако на основании уравнений первого приближения можно дать иногда неверное заключение об устойчивости движения. Поэтому, естественно, возникает вопрос об определении условий, при выполнении которых по уравнениям первого приближения можно дать правильные ответы об устойчивости движения. Эту важную и принципиальную для теории управления задачу впервые поставил и решил А. М. Ляпунов.

Системе уравнений (3.5) соответствует *характеристическое уравнение*, которое можно записать следующим образом:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.6)$$

Из (3.6) можно найти его корни $\lambda_i \quad (i = \overline{1, n})$, которые в общем случае имеют вид $\lambda_i = \alpha_i \pm j\omega_i$, где α_i и ω_i вещественные и мнимые части корней соответственно.

Для исследования устойчивости систем по их линеаризованным уравнениям принципиально важны следующие теоремы А. М. Ляпунова, которые приведем без доказательства.

Теорема 3.2. Если вещественные части всех корней λ_i характеристического уравнения (3.6) первого приближения отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Теорема 3.3. Если среди корней λ_i характеристического уравнения (3.6) первого приближения имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво.

Если среди корней характеристического уравнения имеется один или несколько нулевых корней, а вещественные части остальных корней отрицательны, то этот случай называют *критическим*. Как показал Ляпунов, в критическом случае устойчивость (неустойчивость) невозмущенного движения не может быть оценена по уравнениям первого приближения, так как она зависит от вида нелинейной функции $R_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и в этом случае требуется рассмотрение дифференциальных уравнений возмущенного движения в их исходном виде.

Теоремы Ляпунова имеют большое значение, так как они позволяют судить об устойчивости нелинейных систем по их линеаризованным уравнениям (уравнениям первого приближения).

Покажем, как на основе изложенного выше определения устойчивости А.М. Ляпунова можно найти условия устойчивости линейных (линеаризованных) систем управления.

Характеристическое уравнение (3.6) после раскрытия определителя можно записать в следующем виде:

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (3.7)$$

где a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) – коэффициенты характеристического многочлена, выраженные при раскрытии определителя (3.6) через элементы матрицы A системы уравнений (3.5).

Полученное алгебраическое уравнение (3.7), как и уравнение (3.6), называют *характеристическим уравнением*. Его корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ будут определять характер переходного процесса в системе.

В том случае, когда свободное движение системы управления описывается одним дифференциальным уравнением вида

$$a_0 \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x(t) = z(t), \quad (3.8)$$

то характеристическое уравнение (3.7) получается, если в левой части уравнения (3.8) заменить оператор дифференцирования d/dt на λ , а

правую часть (внешнее воздействие или управление) уравнения (3.8) приравнять нулю, т.е. $z(t) = 0$:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (3.9)$$

Решение характеристического уравнения (3.9) содержит n корней. Корни характеристического уравнения системы уравнений (3.5) или дифференциального уравнения (3.8) с постоянными коэффициентами могут быть вещественными, комплексными попарно сопряженными, мнимыми попарно сопряженными, нулевыми. В общем случае

$$\lambda_i = \alpha_i + j\omega_i. \quad (3.10)$$

На рис. 3.3 показаны возможные положения корней на комплексной плоскости корней λ при

$$\lambda_1 = \alpha_1; \lambda_2 = \alpha_2 + j\omega_2; \lambda_3 = \alpha_2 - j\omega_2; \lambda_4 = 0;$$

$$\lambda_5 = -\alpha_5; \lambda_6 = -\alpha_6 + j\omega_6; \lambda_7 = -\alpha_6 - j\omega_6.$$

Если все корни разные, то их называют *простыми*. Если среди корней есть одинаковые, то их называют *кратными*.

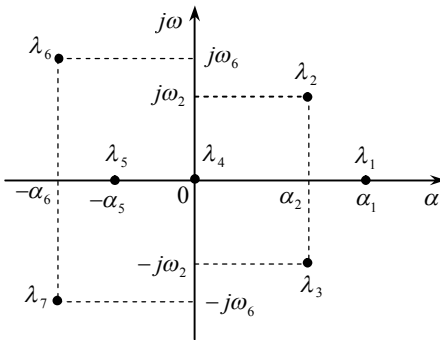


Рис. 3.3.

Обычно корни с отрицательными вещественными частями принято называть *левыми*, поскольку они в комплексной плоскости корней расположены слева от мнимой оси, а корни с положительными вещественными частями — *правыми* корнями.

Условие устойчивости линейной системы формулируется следующим образом: для того чтобы линейная система была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения (3.7) были левыми.

Указанное условие устойчивости легко пояснить, рассматривая решение однородного уравнения (3.8) (при $z(t) = 0$), которое при отсутствии кратных корней имеет вид

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}, \quad (3.11)$$

где λ_i – корни характеристического уравнения (3.7); C_i – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Заметим, что корни характеристического уравнения λ_i , зависят только от вида левой части дифференциального уравнения (3.8) линейной системы. Постоянные интегрирования C_i зависят и от вида правой ее части $z(t)$, поэтому быстрота затухания и форма переходного процесса определяются как левой, так и правой частями дифференциального уравнения. Однако, в связи с тем, что в понятие устойчивости входит только факт наличия или отсутствия затухания переходного процесса, устойчивость линейной системы не зависит от вида правой части дифференциального уравнения и определяется только характеристическим уравнением (3.9).

Поскольку характер переходного процесса в линейной системе определяют только по виду левой части дифференциального уравнения (3.8), то для определения качественной картины переходных процессов практически безразлично, записать ли исходное дифференциальное уравнение для управляющего или возмущающего воздействия.

Вещественным корням характеристического уравнения $\lambda_i = \alpha_i$ в (3.11) соответствуют слагаемые, представляющие собой экспоненты $C_i e^{\alpha_i t}$. Очевидно, что отрицательным (левым) корням $\alpha_i < 0$ соответствуют затухающие экспоненты (рис. 3.4,а), положительным (правым) корням $\alpha_i > 0$ – возрастающие экспоненты (рис. 3.4,б) и при нулевых корнях $\alpha_i = 0$ слагаемые представляют собой прямые, параллельные оси времени (рис. 3.4,в).

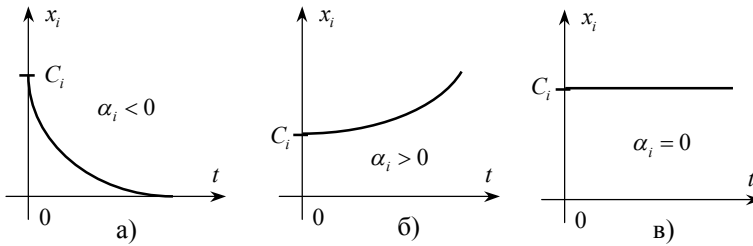
Комплексные корни характеристического уравнения всегда попарно сопряженные: $\lambda_i = \alpha_i + j\omega_i$ и $\lambda_{i+1} = \alpha_i - j\omega_i$. Слагаемые, определяемые этими корнями в (3.11), могут быть при использовании известной формулы Эйлера $e^{\pm j\omega_i t} = \cos \omega_i t \pm j \sin \omega_i t$ представлены в виде $C_i e^{(\alpha_i + j\omega_i)t} + C_{i+1} e^{(\alpha_i - j\omega_i)t} = A_i e^{\alpha_i t} \sin(\omega_i + \psi_i)$, где A_i ψ_i – новые постоянные.

В этом случае при $\alpha_i < 0$ получаются затухающие колебания (рис. 3.4,г), при $\alpha_i > 0$ – расходящиеся колебания (рис. 3.4,д) и при $\alpha_i = 0$ – незатухающие колебания (рис. 3.4,е). Для устойчивости и в этом случае

необходимо выполнение условия $\alpha_i < 0$. В общем случае среди корней характеристического уравнения (3.9) могут быть кратные корни. Если имеется r кратных корней λ_i , то в (3.11) появятся слагаемые вида

$$(C_{i,r-1}t^{r-1} + \dots + C_{i1}t + C_{i0})e^{\lambda_i t}.$$

$x_i = C_i e^{\alpha_i t}$ — для рис. а, б, в.



$x_i = A_i e^{\alpha_i t} \sin(\omega_i t + \psi_i)$ — для рис. г, д, е.

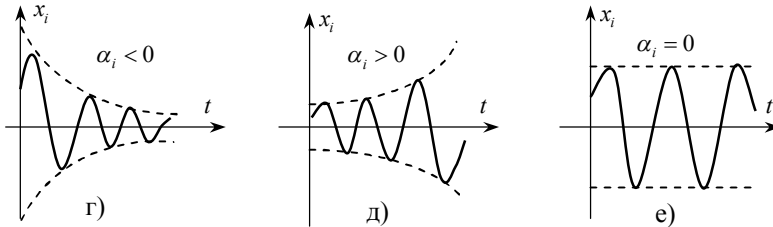


Рис. 3.4.

Если комплексно-сопряженные корни $\lambda_i = \alpha_i \pm j\omega_i$ имеют отрицательную вещественную часть $\alpha_i < 0$, то множитель $e^{\lambda_i t}$ будет с течением времени убывать. Множитель в скобках неограниченно растет, поэтому мы имеем неопределенность типа $(\infty \cdot 0)$. Однако известно, что $e^{-|\alpha_i|t}$ быстрее стремится к нулю, чем выражение $C_{i,r-1}t^{r-1}$, поэтому при $\alpha_i < 0$ эта группа слагаемых с течением времени также стремится к нулю.

Таким образом, видно, что в общем случае для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (3.7) были левыми.

Определение 3.4. Для любой устойчивой системы число $\alpha > 0$, определенное равенством

$$\max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{Re} \lambda_i = -\alpha,$$

называется *степенью устойчивости*.

Вычисление корней не сложно лишь для характеристического уравнения первой и второй степеней. Существуют общие выражения для корней уравнений третьей и четвертой степеней, но эти выражения громоздки и практически малопригодны. Общие выражения для корней уравнений более высоких степеней вообще невозможно написать через коэффициенты характеристического уравнения. Поэтому большое значение приобретают правила, которые позволяют определять устойчивость системы без вычисления корней. Эти правила называют *критериями устойчивости*. С помощью критериев устойчивости можно не только установить, устойчива система или нет, но и выяснить, как влияют на устойчивость те или иные параметры и структурные изменения в системе.

Критерии устойчивости могут быть разделены на *алгебраические* и *частотные*. С математической точки зрения все критерии устойчивости эквивалентны, однако целесообразный выбор того или иного критерия устойчивости при решении конкретных задач позволяет провести исследование устойчивости наиболее простым путем.

3.3. Алгебраические критерии устойчивости

Алгебраические критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости системы по коэффициентам характеристического уравнения

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (3.12)$$

Из алгебраических критериев устойчивости наиболее широкое распространение получил критерий устойчивости Рауса–Гурвица.

Прежде чем познакомиться с ними, заметим, что *необходимым условием устойчивости* системы любого порядка является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения (3.12):

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_n > 0.$$

Действительно, в соответствии с *теоремой Виета* уравнение (3.12) можно представить в виде произведения множителей, содержащих корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$:

$$D(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0. \quad (3.13)$$

Если все корни характеристического уравнения будут отрицательны, то все множители выражения (3.13) будут иметь вид

$$(\lambda + |\alpha_1|)(\lambda + |\alpha_2|) \dots (\lambda + |\alpha_n|) = 0, \quad (3.14)$$

где $\lambda_i = -|\alpha_i|$ – значения корней.

Производя перемножение в (3.14), получим (3.12), в котором все коэффициенты будут определяться положительными членами $|\alpha_i|$ выражения (3.14), т.е. будут положительны.

Если характеристическое уравнение (3.12) имеет комплексные корни с отрицательными вещественными частями, то оно может быть представлено в виде

$$a_0(\lambda + |\alpha_1|)(\lambda + |\alpha_2| - j\omega_2)(\lambda + |\alpha_2| + j\omega_2) \dots (\lambda + |\alpha_n|) = 0$$

или

$$a_0(\lambda + |\alpha_1|)[(\lambda + |\alpha_2|)^2 + \omega_2^2] \dots (\lambda + |\alpha_n|) = 0. \quad (3.15)$$

Уравнение (3.15) также приводится к виду уравнения (3.12) с положительными коэффициентами.

Для систем первого и второго порядков необходимое условие устойчивости является и достаточным, поскольку в этом случае при положительных коэффициентах характеристического уравнения все его корни являются левыми. Однако *для систем третьего и высших порядков положительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым условием устойчивости, но не достаточным*. В этом случае все вещественные корни характеристического уравнения (если они есть) левые, комплексные же корни могут быть и правыми.

Критерий устойчивости Рауса–Гурвица позволяет по коэффициентам характеристического уравнения (3.12) без вычисления его корней сделать вывод об устойчивости системы.

Этот критерий устойчивости был в 1977 г. предложен английским математиком Э. Раусом в виде некоторого алгоритма. В 1895 г. немецким математиком А. Гурвицем был разработан алгебраический критерий устойчивости в форме определителей, составляемых из коэффициентов характеристического уравнения системы. Оба критерия связаны между собой, поэтому критерий Гурвица часто называют критерием Рауса–Гурвица.

Рассмотрим матрицу $(n \times n)$, составленную из коэффициентов характеристического полинома (3.12):

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix},$$

называемую *матрицей Гурвица*. На главной диагонали этой матрицы расположены коэффициенты характеристического многочлена от a_1 до a_n . Строки слева от главной диагонали дополняют коэффициентами характеристического уравнения с последовательно возрастающими индексами, а строки справа – коэффициентами с последовательно убывающими индексами. На место коэффициентов с индексами больше n (n – порядок характеристического уравнения) и меньше нуля проставляют нули.

Приведем матрицу Гурвица к треугольному виду с помощью следующих преобразований, не меняющих знаков ее диагональных миноров. Вычтем из второго, четвертого и т.д. столбцов соответственно первый, третий и т.д. столбцы, предварительно умноженные на a_0/a_1 . Нетрудно видеть, что в полученной матрице, элементы которой мы обозначим через c_{ij} , все элементы первой строки, кроме первого, являются нулями. Снова преобразуем матрицу, вычитая из третьего, пятого и т.д. столбцов соответственно второй, четвертый и т.д. столбцы, предварительно умноженные на c_{23}/c_{22} . В полученной матрице все элементы первых двух строк, расположенные правее диагональных, равны нулю. Продолжая этот процесс далее, мы придем к треугольной матрице n -го порядка, называемой *матрицей Рауса*:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & \dots & 0 \\ r_{21} & r_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}.$$

Главные диагональные миноры определителя матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = |a_1|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} \quad (3.16)$$

называются *определителями Гурвица*.

Коэффициенты, стоящие на главной диагонали матрицы Рауса, связаны с определителями Гурвица соотношениями

$$r_{11} = \Delta_1, \quad r_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad r_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \quad \dots, \quad r_{nn} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \quad (3.17)$$

или, что то же самое,

$$\Delta_1 = r_{11}, \quad \Delta_2 = r_{11}r_{22}, \quad \dots, \quad \Delta_n = r_{11}r_{22}\dots r_{nn}$$

Необходимые и достаточные условия отрицательности вещественных частей корней характеристического многочлена (т.е. *устойчивости системы управления*) формулирует следующая теорема.

Теорема 3.4. *Для того чтобы система управления была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы при $a_0 > 0$ все определители Гурвица (3.16) были положительными, или чтобы были положительными все диагональные элементы матрицы Рауса (3.17).*

Доказательство этой теоремы можно найти в [1].

Раскрывая, например, определители Гурвица для характеристических уравнений первого, второго, третьего и четвертого порядков, можно получить следующие условия устойчивости:

1) для уравнения первого порядка ($n=1$), т.е. $a_0\lambda + a_1 = 0$, при $a_0 > 0$ условие устойчивости $a_1 > 0$;

2) для уравнения второго порядка ($n=2$), т.е. $a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, при $a_0 > 0$ условия устойчивости $a_1 > 0$, $a_2 > 0$;

3) для уравнения третьего порядка ($n=3$), т.е. $a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$, при $a_0 > 0$ условия устойчивости

$$\begin{aligned} a_1 &> 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \\ a_1a_2 - a_0a_3 &> 0; \end{aligned} \quad (3.18)$$

4) для уравнения четвертого порядка ($n=4$), т.е. $a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$, при $a_0 > 0$ условия устойчивости

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0,$$

$$a_3(a_1a_2 - a_3) - a_1^2a_4 > 0. \quad (3.19)$$

Таким образом, необходимым и достаточным условием устойчивости для систем первого и второго порядков является положительность коэффициентов характеристического уравнения. Для уравнения третьего и четвертого порядков кроме положительности коэффициентов необходимо соблюдение дополнительных неравенств (3.18) и (3.19).

При $(n = 5)$ число подобных дополнительных неравенств возрастает, процесс раскрытия определителей становится довольно трудоемким и громоздким. Поэтому при $n \geq 5$ переходят к численным методам с использованием ЭВМ.

Из последнего определителя $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$ (3.16), видно, что при $a_n > 0$ для проверки устойчивости системы достаточно найти только определители Гурвица от Δ_1 до Δ_{n-1} . Если все определители Гурвица низшего порядка положительны, то система находится *на границе устойчивости*, когда главный определитель равен нулю:

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} = 0.$$

Последнее равенство возможно в двух случаях: $a_n = 0$ или $\Delta_{n-1} = 0$. В первом случае система находится на границе аperiodической устойчивости (один из корней характеристического уравнения равен нулю); во втором случае – на границе колебательной устойчивости (два комплексно-сопряженных корня характеристического уравнения находятся на мнимой оси).

Используя критерий Гурвица, можно при заданных параметрах системы принять за неизвестный какой-либо один параметр (например, коэффициент усиления, постоянную времени и т.д.) и определить его предельное (критическое) значение, при котором система будет находиться на границе устойчивости.

Доказано [1], что в том случае, когда все коэффициенты характеристического уравнения (3.12) положительны ($a_0 > 0$, $a_1 > 0$, ..., $a_n > 0$), из того факта, что положительны все определители $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5, \dots$ с нечетными индексами, следует и положительность определителей Гурвица $\Delta_2, \Delta_4, \Delta_6, \dots$ с четными индексами, и наоборот.

Поэтому в тех случаях, *когда выполнены необходимые условия устойчивости, т.е. $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, ..., $a_n > 0$, то для устойчивости достаточно чтобы среди определителей Гурвица $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ были по-*

ложительны все определители с четными (или же все определители с нечетными) индексами.

Последняя формулировка критерия устойчивости называется *критерием устойчивости Ляенара-Шипара*. Таким образом, для того чтобы система управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\begin{cases} a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_n > 0, \\ \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_5, \dots, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_n > 0, \\ \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_6, \dots \end{cases}$$

Эта форма критерия требует раскрытия меньшего числа определителей, чем обычный критерий Гурвица.

Рассмотренные критерии требуют знания коэффициентов характеристического полинома системы управления. Эта задача может оказаться сложной в вычислительном плане. Поэтому важно иметь подход, который позволил бы оценивать устойчивость матрицы системы управления, минуя вычисление коэффициентов ее характеристического полинома. Такой подход связан с *прямым методом Ляпунова*, которому посвящен последний параграф этой главы.

Если система управления нестационарная, то задача исследования устойчивости матрицы $A(t)$ в общем случае не может быть сведена к существенно менее сложной задаче, чем задача вычисления импульсной переходной матрицы.

3.4. Частотные критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости систем автоматического управления по виду их частотных характеристик. Эти критерии являются графоаналитическими и получили широкое распространение, так как позволяют сравнительно легко исследовать устойчивость систем высокого порядка, а также имеют простую геометрическую интерпретацию и наглядность.

В основе частотных критериев устойчивости лежит следствие из известного в теории функций комплексного переменного *принципа аргумента*, который кратко излагается ниже.

Пусть дан некоторый полином n -й степени $D(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$. Этот полином (см. (3.13)) можно представить в

виде $D(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$, где $\lambda_i = \alpha_i + j\omega_i$ – корни уравнения $D(\lambda) = 0$.

На комплексной плоскости λ каждый корень геометрически может быть изображен вектором, проведенным из начала координат к точке λ_i (рис. 3.5,а). Длина этого вектора равна модулю комплексного числа λ_i , т.е. $|\lambda_i|$, а угол, образованный вектором с положительным направлением действительной оси, – аргументу или фазе комплексного числа λ_i , т.е. $\text{Arg } \lambda_i$.

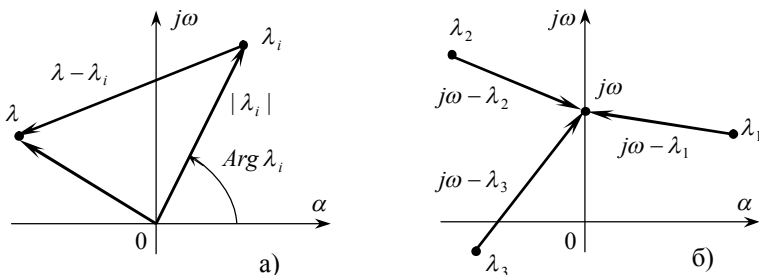


Рис. 3.5.

Величины $(\lambda - \lambda_i)$ геометрически изображаются векторами, проведенными из точки λ_i к произвольной точке λ (рис. 3.5,а). В частном случае при $\lambda = j\omega$ получим

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2) \dots (j\omega - \lambda_n). \quad (3.20)$$

Концы элементарных векторов $(j\omega - \lambda_i)$ будут находиться на мнимой оси в точке $\lambda = j\omega$ (рис. 3.6,б).

В выражении (3.20) $D(j\omega)$ представляет собой вектор, равный произведению элементарных векторов $(j\omega - \lambda_i)$.

Модуль этого вектора равен произведению модулей элементарных векторов

$$|D(j\omega)| = a_0 |j\omega - \lambda_1| |j\omega - \lambda_2| \dots |j\omega - \lambda_n|, \quad (3.21)$$

а аргумент или фаза его равна сумме аргументов элементарных векторов:

$$\begin{aligned} \text{Arg } D(j\omega) = & \text{Arg } (j\omega - \lambda_1) + \text{Arg } (j\omega - \lambda_2) + \dots + \\ & + \text{Arg } (j\omega - \lambda_n). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Принято считать вращение против часовой стрелки положительным. Тогда при изменении ω от $-\infty$ до ∞ каждый элементарный вектор повернется на угол π , если его начало, т.е. корень λ_i , расположено

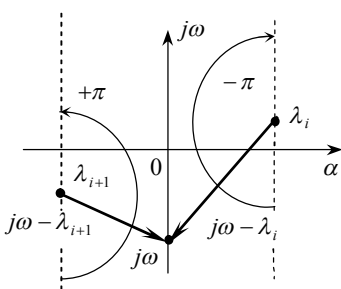


Рис. 3.6.

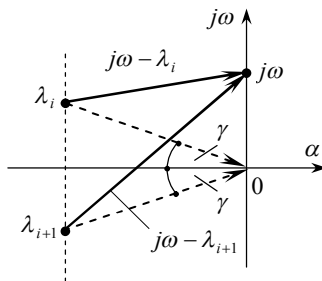


Рис. 3.7.

слева от мнимой оси, и на угол $-\pi$, если корень расположен справа от мнимой оси (рис. 3.6).

Предположим, что полином $D(\lambda)$ имеет m правых корней и $n - m$ левых.

Тогда при изменении ω от $-\infty$ до ∞ изменение аргумента вектора $D(j\omega)$, как суммы углов поворота векторов $(j\omega - \lambda_i)$, равно

$$\Delta \text{Arg } D(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = \pi(n - m) - \pi m = \pi(n - 2m). \quad (3.23)$$

Отсюда вытекает следующее правило: *изменение (приращение) аргумента $D(j\omega)$ при изменении частоты ω от $-\infty$ до ∞ равно разности между числом левых и правых корней уравнения $D(\lambda) = 0$, умноженной на π .*

Очевидно, что при изменении частоты ω от 0 до ∞ изменение аргумента вектора $D(j\omega)$ будет вдвое меньше:

$$\Delta \text{Arg } D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = (\pi/2)(n - 2m). \quad (3.24)$$

Каждый из векторов $(j\omega - \lambda_i)$, соответствующих вещественным корням, повернется теперь на угол $\pi/2$ или $-\pi/2$.

Векторы $[j\omega - (\alpha_i + j\omega_i)]$, $[j\omega - (\alpha_i - j\omega_i)]$, которые составляют пару, соответствующую, например, двум комплексно-сопряженным корням, повернутся: один — на угол $\pi/2 + \gamma$, а другой на $\pi/2 - \gamma$, где γ - угол, образованный вектором, проведенным от корня в начало координат, с осью абсцисс (рис. 3.7). Общее приращение аргумента произведения этих векторов при изменении ω от 0 до ∞ равно

$$\pi/2 + \gamma + \pi/2 - \gamma = \pi.$$

В основу всех частотных критериев устойчивости положено уравнение (3.23), определяющее приращение аргумента $D(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$, или (3.24) – при изменении ω от 0 до $+\infty$.

Критерий устойчивости Михайлова. Этот критерий устойчивости, сформулированный в 1938 г. советским ученым А.В. Михайловым, является, по существу, геометрической интерпретацией принципа аргумента и позволяет судить об устойчивости системы на основании рассмотрения некоторой кривой, называемой *кривой Михайлова*.

Пусть дано характеристическое уравнение системы (3.12). Левую часть характеристического уравнения называют характеристическим полиномом

$$D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n. \quad (3.25)$$

Если подставить в этот полином чисто мнимое значение $\lambda = j\omega$, то получим комплексный полином

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n = \\ &= X(\omega) + jY(\omega) = D(\omega)e^{j\psi(\omega)}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где

$$\begin{aligned} X(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots, \\ Y(\omega) &= \omega(a_{n-1} - a_{n-3}\omega^2 + a_{n-5}\omega^4 - \dots) \end{aligned}$$

называют соответственно вещественной и мнимой функциями Михайлова; функции $D(\omega)$ и $\psi(\omega)$ представляют собой модуль и фазу (аргумент) вектора $D(j\omega)$.

При изменении частоты ω вектор $D(j\omega)$, изменяясь по величине и направлению, будет описывать своим концом в комплексной плоскости некоторую кривую, называемую *кривой (годографом) Михайлова*.

В соответствии с (3.24) угол поворота вектора $D(j\omega)$ вокруг начала координат при изменении частоты ω от 0 до ∞ равен

$$\Delta \text{Arg } D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = (\pi/2)(n-2m).$$

Отсюда определяем число правых корней полинома $D(\lambda)$, т.е.

$$m = \frac{\pi n/2 - \Delta \text{Arg } D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty}}{\pi}. \quad (3.27)$$

Из (3.27) видно, что число правых корней m будет равно нулю при одном единственном условии

$$\Delta \text{Arg } D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \pi n/2. \quad (3.28)$$

Условие (3.28) является необходимым, но не достаточным условием устойчивости. Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все n корней характеристического уравнения были левыми. Иначе говоря, среди них не должно быть корней, лежащих на мнимой оси и обращающих в нуль комплексный полином $D(j\omega)$, т.е. должно выполняться еще одно условие

$$D(j\omega) \neq 0. \quad (3.29)$$

Формула (3.28) представляет математическое выражение критерия устойчивости Михайлова: *для того чтобы система управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы вектор кривой Михайлова $D(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ повернулся, нигде не обращаясь в нуль, вокруг начала координат против часовой стрелки на угол $\pi n/2$, где n – порядок характеристического уравнения.*

Заметим, что для устойчивых систем кривая Михайлова начинается при $\omega = 0$ на вещественной положительной полуоси, поскольку все коэффициенты характеристического уравнения положительны и $D(0) = a_n > 0$. Кроме того, для устойчивых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, фаза (аргумент) $\psi(\omega)$ с ростом частоты ω должна возрастать монотонно, т.е. вектор $D(j\omega)$ должен поворачиваться только против часовой стрелки, поскольку с ростом частоты монотонно возрастают имеющие одинаковые (положительные) знаки фазы элементарных векторов $(j\omega - \lambda_i)$, являющиеся слагаемыми фазы вектора $D(j\omega)$ (см. (3.22)).

Учитывая сказанное выше, критерий устойчивости Михайлова можно сформулировать следующим образом: *для устойчивости системы управления необходимо и достаточно, чтобы кривая (годограф) Михайлова при изменении частоты ω от 0 до ∞ , начинаясь при $\omega = 0$ на вещественной положительной полуоси, обходила только против ча-*

совой стрелки последовательно n квадрантов координатной плоскости, где n – порядок характеристического уравнения.

Кривая Михайлова для устойчивых систем всегда имеет плавную спиралевидную форму, причем конец ее уходит в бесконечность в том квадранте координатной плоскости, номер которого равен степени характеристического уравнения.

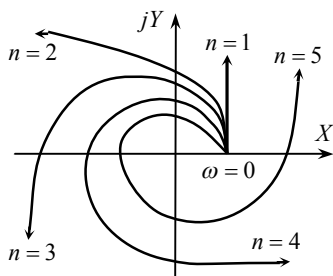


Рис. 3.8.

На рис. 3.8 показаны типичные кривые Михайлова для устойчивых систем, описываемых уравнениями, начиная от первого ($n=1$) и кончая пятым ($n=5$) порядком. Для удобства сравнения коэффициенты a_n во

всех случаях приняты одинаковыми.

Признаком неустойчивости системы является нарушение числа и последовательности пройденных кривой Михайлова квадрантов координатной плоскости, вследствие чего угол поворота вектора $D(j\omega)$ оказывается меньше, чем $\pi n/2$. Число правых корней неустойчивой системы можно определить по (3.27).

На рис. 3.9 показаны примеры кривых Михайлова для неустойчивых и нейтральных систем. При $\omega=0$ кривая Михайлова ($n=3$) начинается на отрицательной вещественной полуоси; система неустойчива. Для уравнения порядка $n=5$ кривая Михайлова находится вся в одном квадранте (этому соответствует характеристическое уравнение $D(\lambda) = \lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_4 = 0$); система неустойчива. Для уравнения порядка $n=4$ нарушена последовательность прохождения квадрантов, кривая Ми-

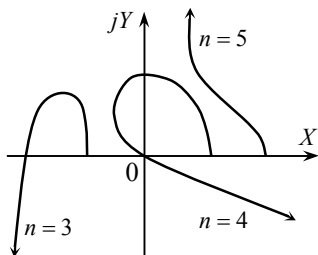


Рис. 3.9.

хайлова при ω_k проходит через начало координат, т.е. в характеристическом уравнении имеются чисто мнимые корни $\pm j\omega_k$; система находится на границе колебательной устойчивости.

Анализируя годографы Михайлова, можно установить следующее следствие из критерия устойчивости Михайлова. При последовательном прохождении кривой Михайлова квадрантов координатной плоскости

вещественная и мнимая оси пересекаются ею поочередно. В точках пересечения кривой Михайлова с вещественной осью обращается в нуль мнимая функция Михайлова $Y(\omega)$, а в точках пересечения кривой с мнимой осью обращается в нуль вещественная функция $X(\omega)$. Поэтому значения частот, при которых происходит пересечение кривой с вещественной или мнимой осью, должны являться корнями уравнений

$$X(\omega) = 0 ; \quad (3.30)$$

$$Y(\omega) = 0 . \quad (3.31)$$

Вещественную $X(\omega)$ и мнимую $Y(\omega)$ функции Михайлова можно представить графически в виде кривых (рис. 3.10). Точки пересечения этих кривых с осью абсцисс дают значения корней уравнений (3.30) и (3.31). Если значения $\omega_0, \omega_2, \omega_4, \dots$ есть корни уравнения (3.31), а $\omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots$ — уравнения (3.30), причем $\omega_0 < \omega_2 < \omega_4 < \omega_2 < \omega_4 < \dots, \omega_1 < \omega_3 < \omega_5 < \dots$, то для устойчивой системы обязательно соблюдение неравенства $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \omega_5 < \dots$.

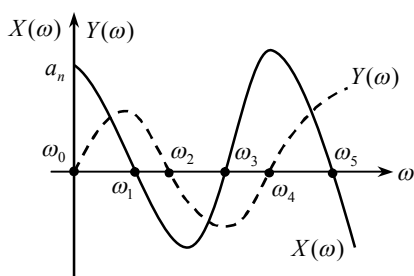


Рис. 3.10.

В связи с указанным следствием можно привести еще одну формулировку критерия устойчивости Михайлова: *система, управления будет устойчива тогда и только тогда, когда вещественная $X(\omega)$ и мнимая $Y(\omega)$ функции Михайлова, приравненные нулю, имеют все действительные и перемежающиеся корни, причем общее число*

этих корней равно порядку характеристического уравнения n , и при $\omega = 0$ удовлетворяются условия $X(0) > 0, Y'(0) > 0$

На рис. 3.10 приведен пример графиков $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ для устойчивой системы.

Построение кривой Михайлова практически производится либо методом контрольных точек, либо методом вспомогательных годографов. Первый метод сводится к определению ряда точек кривой Михайлова, соответствующих фиксированным значениям частоты ω , включая (обязательно) частоты точек пересечения кривой с осями координат, которые находятся как корни уравнений (3.30) и (3.31). При втором методе пред-

варительно определяют годографы отдельных звеньев системы и по ним строят искомую кривую Михайлова, применяя правила умножения и сложения векторов.

Критерий устойчивости Найквиста. Этот частотный критерий ус-

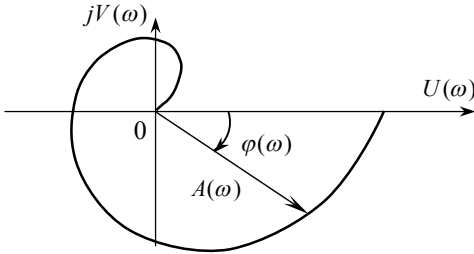


Рис. 3.11.

тойчивости, разработанный в 1932 г. американским ученым Г. Найквистом, позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по виду амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_n}, \quad m \leq n. \quad (3.32)$$

Подставляя в (3.32) $p = j\omega$, получаем частотную передаточную функцию разомкнутой системы:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{c_0 (j\omega)^n + c_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + c_n} = \\ &= U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \end{aligned}$$

где $U(\omega)$ и $V(\omega)$ – действительная и мнимая части частотной передаточной функции соответственно; модуль $A(\omega)$ и фаза $\varphi(\omega)$ частотной передаточной функции равны

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \quad \psi(\omega) = \text{Arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}.$$

Если изменять частоту ω от $-\infty$ до ∞ , то вектор $W(j\omega)$ будет меняться по величине и фазе. Кривую, описываемую концом этого вектора в комплексной плоскости, называют амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы. Амплитудно-фазовая характеристика симметрична относительно вещественной оси, поэтому обычно вычерчивают только ту часть ее, которая соответствует положительным частотам $\omega > 0$ (рис. 3.11).

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\begin{aligned} W_1(p) &= 1 + W(p) = 1 + R(p)/Q(p) = \\ &= (Q(p) + R(p))/Q(p) = D(p)/Q(p), \end{aligned} \quad (3.33)$$

где $D(p) = Q(p) + R(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$ – характеристический полином замкнутой системы; $Q(p) = c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_n$ – характеристический полином разомкнутой системы; $R(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m$ – полином степени m .

Подставляя в (3.33) $p = j\omega$, получим

$$W_1(j\omega) = 1 + W(j\omega) = D(j\omega)/Q(j\omega). \quad (3.34)$$

Пусть характеристическое уравнение замкнутой системы $D(p) = 0$ имеет m правых корней и $n - m$ левых корней, а характеристическое уравнение разомкнутой системы $Q(p) = 0$ имеет l правых и $n - l$ левых корней.

Обычно рассматривают только положительные частоты. Поэтому при изменении частоты ω от 0 до ∞ изменение угла поворота вектора $W_1(j\omega)$ на основе принципа аргумента будет

$$\Delta \text{Arg} W_1(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \Delta \text{Arg} D(j\omega) - \Delta \text{Arg} Q(j\omega) = \pi(l - m). \quad (3.35)$$

Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были левыми, т.е. $m = 0$. Отсюда суммарный поворот вектора $W_1(j\omega)$ устойчивой системы вокруг начала координат должен быть равен

$$\Delta \text{Arg} W_1(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \pi l, \quad (3.36)$$

где l – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Таким образом, если разомкнутая система является неустойчивой и имеет l правых корней, то замкнутая система будет устойчива тогда и только тогда, когда амплитудно-фазовая характеристика вспомогательной функции $W_1(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ охватывает начало координат в положительном направлении $l/2$ раз.

Заметим, что число оборотов вектора $W_1(j\omega)$ вокруг начала координат равно числу оборотов вектора $W(j\omega)$ вокруг точки $(-1, j0)$.

На основании сказанного вытекает следующая формулировка кри-

терия устойчивости Найквиста: если разомкнутая система управления неустойчива, то, для того чтобы замкнутая система управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы $W(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ охватывала точку $(-1, j0)$ в положительном направлении $l/2$ раз, где l – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

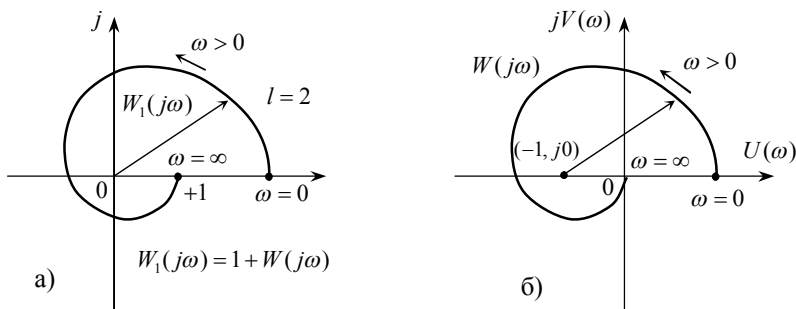


Рис. 3.12.

На рис. 3.12,а показана амплитудно-фазовая характеристика $W_1(j\omega)$ устойчивой замкнутой системы, которая в разомкнутом состоянии была неустойчива и имела число правых корней $l=2$ (рис. 3.12,б) – соответствующая амплитудно-фазовая характеристика $W(j\omega)$.

При сложной форме характеристики $W(j\omega)$ могут возникнуть затруднения при определении числа ее оборотов вокруг критической точки $(-1, j0)$. В этом случае для суждения об устойчивости удобно применять «правило переходов», предложенное Я. 3. Цыпкиным.

Переход характеристики $W(j\omega)$ через отрезок вещественной оси $(-\infty, -1)$ при возрастании ω называют *положительным*, если он происходит сверху вниз, и *отрицательным*, если он происходит снизу вверх. Тогда критерий Найквиста можно сформулировать так: для устойчивости замкнутой системы управления необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы $W(j\omega)$ через отрезок вещественной оси $(-\infty, -1)$ при изменении час-

тоты ω от 0 до ∞ была равна $l/2$, где l – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

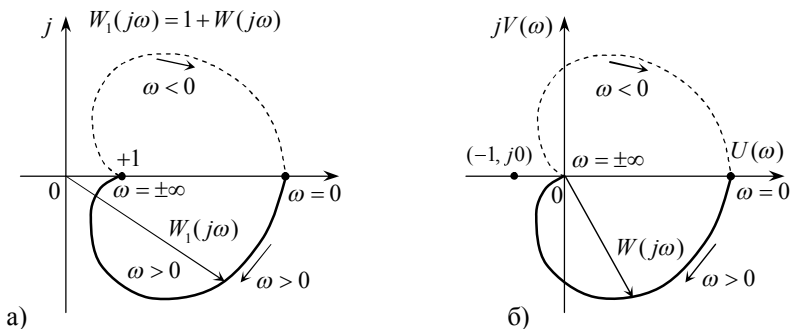


Рис. 3.13.

Если система управления в разомкнутом состоянии устойчива, т.е. $l = 0$, то приращение аргумента вектора $W_1(j\omega)$ равно нулю:

$$\Delta \text{Arg} W_1(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \pi l = 0$$

Это означает, что для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы амплитудно-фазовая характеристика $W_1(j\omega)$ не охватывала начало координат (рис. 3.13,а), а амплитудно-фазовая характеристика $W(j\omega)$ не охватывала точку с координатами $(-1, j0)$, (рис. 3.13,б).

Таким образом, для этого наиболее часто встречающегося на практике случая получаем следующую формулировку критерия Найквиста: *если разомкнутая система управления устойчива, то замкнутая система управления будет устойчива, если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы $W(j\omega)$ не охватывает точку $(-1, j0)$.*

Одним из достоинств критерия Найквиста является то, что он может быть применен и в тех практически важных случаях, когда неизвестны уравнения некоторых звеньев системы либо даже неизвестно уравнение всей разомкнутой системы в целом, но амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы может быть получена экспериментально.

В инженерной практике широкое применение получил анализ устойчивости систем управления, основанный на применении логарифмических частотных характеристик разомкнутой системы. Это объясняется тем, что построение логарифмических частотных характеристик, особенно асимптотических логарифмических частотных характеристик, значительно проще, чем построение годографа амплитудно-фазовых характеристик [13].

3.5. Второй метод Ляпунова

В теории устойчивости наиболее общим методом исследования систем управления является второй (прямой) метод Ляпунова или *метод функций Ляпунова*. Этот метод применяется при исследовании самых различных систем дифференциальных уравнений, линейных и нелинейных, в обыкновенных и частных производных. В основе метода – построение специальных функций, позволяющих получить достаточные условия устойчивости системы.

Рассмотрим систему управления

$$\frac{dx}{dt} = F(x, u(x)), \quad (3.37)$$

соответствующую системе (3.2).

Предположим, что для системы (3.37) существует такая совокупность управлений $u(x)$, при которых в определенной области

$$\|x\| \leq h \quad (3.38)$$

выполняются условия существования решения уравнения (3.37). Кроме этого, полагаем, что функция

$$F(x, u(x))$$

аналитическая по x , т.е. в окрестности любой точки области (3.38) представляется степенным рядом, и удовлетворяет условию

$$F(0, u(0)) = 0.$$

Рассмотрим непрерывную функцию $V(x)$, обладающую следующими свойствами: а) $V(0) = 0$; б) $V(x)$ – однозначная функция в области (3.38); в) $\partial V(x)/\partial x_j$ – непрерывные функции по x в области (3.38).

Определение 3.5. Функция $V(x)$ называется *положительно-определенной*, если для некоторого $h > 0$ в области $\|x\| \leq h$ выполняется условие $V(x) > 0$, $\|x\| \neq 0$.

Определение 3.6. Функция $V(x)$ называется *положительно–постоянной*, если для некоторого $h > 0$ в области $\|x\| \leq h$ выполняется условие $V(x) \geq 0$.

Аналогично вводятся понятий отрицательно–определенной и отрицательно–постоянной функций.

Определение 3.7. Функция $V(x)$ называется *знакопеременной*, если в области $\|x\| \leq h$ при сколь угодно малом $h > 0$ она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Функции $V(x)$, имеющие указанные выше свойства, часто называются *функциями Ляпунова*.

Примером положительно–определенной функции Ляпунова может служить квадратичная форма

$$V(x) = x^T D x ,$$

где D – квадратная симметрическая матрица, для которой выполняются *неравенства Сильвестра*

$$d_{11} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ . & . & . \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} > 0 .$$

Сформулируем несколько теорем Ляпунова, доказательство которых приводится, например, в работе [3]. Функция $V(x) = V(x(t))$.

Теорема 3.5. Если для системы дифференциальных уравнений (3.37) можно определить такую положительно–определенную функцию $V(x)$, чтобы ее полная производная по t в силу системы (3.37)

$$\frac{dV(x)}{dt} = \nabla^T V(x) \cdot F(x, u(x)) = W(x) \quad (3.39)$$

являлась функцией отрицательно–постоянной, то программное движение $x(t) \equiv 0$ системы (3.37) устойчиво по Ляпунову.

Здесь $\nabla^T V(x) = (\partial V / \partial x_1, \dots, \partial V / \partial x_n)$.

Теорема 3.6. Если для системы (3.37) выполняются условия теоремы 3.5 и при этом $W(x)$ – отрицательно–определенная функция, то программное движение $x(t) \equiv 0$ является асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Теорема 3.7. Если для системы (3.37) можно найти такую функцию $V(x)$, что функция $W(x)$, заданная соотношением (3.39), является

ся отрицательно–определенной, а сама функция $V(x)$ не будет положительно–постоянной, т.е. в сколь угодно малой области $\|x\| \leq h$ может принимать отрицательные значения, то программное движение $x(t) \equiv 0$ системы (3.37) неустойчиво по Ляпунову.

Уяснить смысл функций Ляпунова и сформулированных в приведенных выше теоремах условий устойчивости легко с помощью понятий фазового пространства.

Пример 3.1.

Для простоты возьмем систему второго порядка ($n = 2$). Уравнения для нее имеют следующий общий вид

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2). \end{cases} \quad (3.40)$$

Возьмем положительно–определенную функцию Ляпунова в виде

$$V = a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2, \quad (3.41)$$

где a и b – произвольно заданные вещественные числа. Будем придавать величине V возрастающие постоянные значения: $V = 0$, $V = c_1$, $V = c_2$, $V = c_3$, ... , что означает

$$\begin{aligned} a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 &= 0, \\ a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 &= c_1, \\ a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 &= c_2, \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Первое из этих выражений соответствует одной точке $x_1 = x_2 = 0$ (началу координат фазового пространства), а остальные – эллипсам (поверхностям эллипсоидов) в фазовом пространстве, причем каждый последующий эллипс (эллипсоид) содержит внутри себя целиком предыдущий (рис. 3.14).

Возьмем теперь производную от функции Ляпунова (3.41) по времени. Согласно (3.39)

$$\frac{dV}{dt} = 2a^2 x_1 F_1(x_1, x_2) + 2b^2 x_2 F_2(x_1, x_2) = W(x_1, x_2),$$

где функции F_1 , F_2 берутся из заданных уравнений системы управления (3.40).

Если полученная таким путем функция $W(x_1, x_2)$ окажется отрицательно–определенной, т.е. если

$$\frac{dV}{dt} < 0 \quad (3.42)$$

во всех точках исследуемого фазового пространства, кроме одного только начала координат, где $dV/dt = 0$ (при $x_1 = x_2 = 0$), то при любых начальных условиях изображающая точка M (рис. 3.14) вследствие

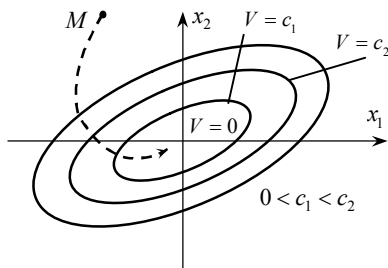


Рис. 3.14.

(3.42) будет двигаться в сторону уменьшения значения V , т.е. будет пересекать эллипсы (эллипсоиды), изображенные на рис. 3.14, извне внутрь. В результате с течением времени изображающая точка M будет стремиться к началу координат $(0, 0)$ фазового пространства, не выходя за пределы тех эллипсов (эллипсоидов),

в которые она проникла.

Это и означает затухание всех отклонений x_1, x_2 в переходном процессе с течением времени. Таким образом, установлена устойчивость данной системы управления, что иллюстрирует справедливость теоремы для системы второго порядка (в случае знакоопределенной функции $W(x_1, x_2)$).

Отсюда вытекает справедливость теоремы и в общем случае. Рассуждения остаются аналогичными, только вместо двух уравнений (3.40) будет n уравнений.

Справедливость теоремы 3.7 иллюстрируется геометрически следующим образом. Пусть для какой-нибудь заданной системы второго порядка ($n = 2$) найдена такая знакопеременная функция $V(x_1, x_2)$, для которой производная

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} F_1(x_1, x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2} F_2(x_1, x_2) = W(x_1, x_2)$$

оказалась знакоопределенной положительной. Пусть при этом линии $V(x_1, x_2)$ на фазовой плоскости располагаются, как указано на рис. 3.15, где линии AB и CD соответствуют значениям $V = 0$ и разделяют те области, внутри которых $V > 0$ и $V < 0$.

Возьмем изображающую точку M , как показано на рис. 3.15. Поскольку там $V < 0$ и везде

$$W(x_1, x_2) = \frac{dV}{dt} > 0,$$

то изображающая точка M с течением времени будет двигаться и пере-

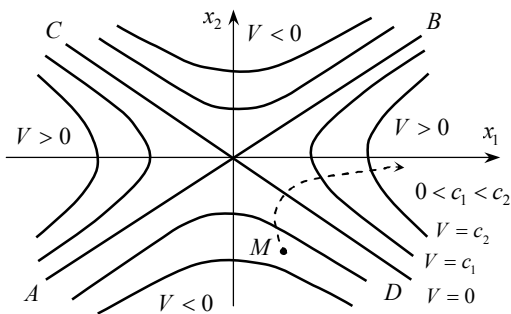


Рис. 3.15.

секать линии $V = c$, переходя от меньших значений c к большим. Она может при этом лишь временно приблизиться к началу координат, но в конце концов будет неограниченно удаляться от начала координат. Это соответствует расходящемуся процессу, т.е. *неустойчивости* системы. Аналогично

можно показать справедливость теоремы и для системы любого порядка n , проводя те же рассуждения для n -мерного фазового пространства.

Ниже приводятся теоремы, связанные с исследованием устойчивости системы управления (3.37) по первому приближению. Эти теоремы имеют смысл в том случае, если уравнение (3.37) можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu(x) + R(x, u(x)), \quad (3.43)$$

где компоненты вектор – функции $R(x, u(x))$ при $x \rightarrow 0$ имеют порядок малости не ниже второго, матрицы A и B имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} \partial F_1 / \partial x_1 & \dots & \partial F_1 / \partial x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial F_n / \partial x_1 & \dots & \partial F_n / \partial x_n \end{pmatrix}_{x=0}, \quad B = \begin{pmatrix} \partial F_1 / \partial u_1 & \dots & \partial F_1 / \partial u_m \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial F_n / \partial u_1 & \dots & \partial F_n / \partial u_m \end{pmatrix}_{x=0}.$$

Кроме этого, предполагается, что вектор управления зависит от фазовых координат (т.е. система управления с обратной связью)

$$u(x) = Cx.$$

Теорема 3.8. Если программное движение $x(t) \equiv 0$ системы первого приближения

$$\frac{dx}{dt} = (A + BC)x$$

является асимптотически устойчивым по Ляпунову, то такое движение асимптотически устойчиво также для системы (3.43), независимо от вида нелинейных функций $R(x, u(x))$.

Теорема 3.9. Если среди корней характеристического уравнения

$$\det(A + BC - \lambda E) = 0 \quad (3.44)$$

найдется хотя бы один с положительной вещественной частью, то программное движение $x(t) \equiv 0$ системы (3.43) является неустойчивым по Ляпунову, независимо от вида нелинейных функций $R(x, u(x))$.

Теорема 3.10. Если характеристическое уравнение (3.44) не имеет корней с положительными вещественными частями, но имеет корни с нулевыми вещественными частями, то в зависимости от характера нелинейных функций $R(x, u(x))$ программное движение $x(t) \equiv 0$ системы (3.43) может быть как устойчивым, так и неустойчивым по Ляпунову.

Определение 3.8. Программное движение $x(t) \equiv 0$ системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x, u(x)) + z(t, x) \quad (3.45)$$

называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что лишь только $\|x(t_0)\| \leq \delta_1$, $\|z(t, x)\| \leq \delta_2$ при $t \geq t_0$ и $\|x\| \leq \varepsilon$ для координат траектории системы осуществляется неравенство $\|x(t)\| \leq \varepsilon$ ($t \geq t_0$).

Теорема 3.11. Если для системы (3.37) выполняются условия теоремы 3.6, то программное движение $x(t) \equiv 0$ системы (3.45) является устойчивым при постоянно действующих возмущениях.

З а м е ч а н и е . Приведенные выше результаты исследований систем управления основаны на понятии локальной устойчивости движения, когда начальные возмущения системы полагаются достаточно малыми. Однако в реальных системах возмущения начальных условий могут достигать значительных величин. В этом случае целесообразно использовать понятие устойчивости в целом [3].

Определение 3.9. Программное движение $x(t) \equiv 0$ системы (3.37) называется *асимптотически устойчивым в целом*, если оно устойчиво по Ляпунову и при произвольных начальных значениях $x(t_0)$ из фазового пространства X_t для решения $x(t)$ системы уравнений (3.37) осуществляется условие $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$.

Определение 3.10. Функция Ляпунова $V(x)$, определенная при всех $x \in X_t$, допускает *бесконечно большой нижний предел*, если для произвольного $M > 0$ существует такое $K > 0$, что выполняется неравенство $V(x) > M$ при $\|x(t)\| > K$, т.е. если $V(x) \rightarrow \infty$ при $\|x\| \rightarrow \infty$.

Теорема 3.12. Если для системы (3.37), заданной в фазовом пространстве X_t , существует положительно–определенная функция Ляпунова $V(x)$, которая допускает бесконечно большой нижний предел, и при этом функция $W(x)$, заданная формулой (3.39), отрицательно–определенная в X_t , то программное движение $x(t) \equiv 0$ системы (3.37) является асимптотически устойчивым в целом.

При исследованиях устойчивости системы управления, правая часть которой явно зависит от t , т.е.

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x, u(x)) \quad (3.46)$$

используют понятие функции Ляпунова, зависящей от t :

$$V(t, x), \quad V(t, 0) \equiv 0, \quad t > t_0, \quad \|x\| \leq h. \quad (3.47)$$

Функцию (3.47) называют положительно–определенной, если существует такая положительно–определенная функция $V_1(x)$, для которой выполняется неравенство $V(t, x) \geq V_1(x)$.

Если функция $V(t, x)$ может принимать положительные и нулевые значения при $t > t_0$, $\|x\| \neq 0$, то она называется положительно-постоянной.

Аналогично вводятся понятия отрицательно-определенной и отрицательно-постоянной функций.

Определение 3.11. Функция $V(t, x)$ допускает *бесконечно малый верхний предел*, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что в области $\|x\| < \delta$ для всех $t \geq t_0$ выполняется неравенство $|V(t, x)| < \varepsilon$.

Теорема 3.13. Если можно найти такую положительно-определенную функцию $V(t, x)$, что ее полная производная по t в силу системы (3.46)

$$\frac{dV(t, x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla^T V(t, x) \cdot X(t, x, u(t, x)) = W(t, x) \quad (3.48)$$

является функцией отрицательно-постоянной, то программное движение $x(t) \equiv 0$ системы (3.46) будет устойчивым по Ляпунову.

Теорема 3.14. Если для системы (3.46) выполняются условия теоремы 3.13 и при этом функция $V(t, x)$ допускает бесконечно малый верхний предел, а функция $W(t, x)$ является отрицательно-определенной, то программное движение $x(t) \equiv 0$ системы (3.46) будет асимптотически устойчивым по Ляпунову.

З а м е ч а н и е. Задача о нахождении функции Ляпунова, которая для данной системы дала бы *необходимое и достаточное* условие устойчивости, весьма сложна и практически пока неразрешима. Это объясняется тем, что при заданных в форме (3.37) уравнениях системы управления можно подобрать несколько различных вариантов функции $V(x)$, поскольку требуется только знакоопределенность ее и ее производной. Различные варианты функции $V(x)$, удовлетворяющие теореме Ляпунова, могут дать соответственно различные варианты условий устойчивости для одной и той же системы управления. При этом одни из них будут шире, другие уже, последние могут входить в первые как частный случай и т. д.

Поэтому, вообще говоря, теорема Ляпунова обеспечивает получение достаточных условий устойчивости, которые не всегда будут и необходимыми, т.е. при выполнении условий теоремы система наверняка

будет устойчивой, но эти условия могут не охватывать всей области устойчивости системы по параметрам. В самом деле, если выбрана функция $V(x)$, удовлетворяющая теореме, то еще нет уверенности в том, что нельзя подобрать другой вариант функции $V(x)$, который бы еще более полно охватывал область устойчивости данной системы.

Пример 3.2.

Для линейных систем вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i = \overline{1, n}) \quad (3.49)$$

функции Ляпунова представляют собой квадратичные формы координат, коэффициенты которых находятся сравнительно несложно. Задаемся квадратичной формой с неопределенными коэффициентами

$$V(x) = \sum_{k,l=1}^n d_{kl} x_k x_l \quad (3.50)$$

и находим коэффициенты d_{kl} из условия

$$\frac{dV(x)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = -C \sum_{i=1}^n x_i^2 = W(x), \quad (3.51)$$

где C – любая постоянная, т.е. функция $W(x)$ задана. Подставляя в (3.51) выражения dx_i/dt из исходных уравнений движения (3.49) и выражения dV/dx_i , из продифференцированного уравнения (3.50), сравниваем коэффициенты при одинаковых членах $x_k x_l$ в левой и правой частях, получаем систему алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов d_{kl} .

Иногда функцию Ляпунова в виде квадратичной формы удастся отыскать и для нелинейных систем, близких к линейным. Если нелинейность обусловлена введением в линейную систему одного безынерционного нелинейного звена со статической характеристикой $x_{i+1} = \varphi(x_i)$, принадлежащих к классу $(0, k)$, то функцию Ляпунова во многих случаях удастся построить в виде «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности»:

$$V(x) = x^T D x + b \int_0^x \varphi(\xi) d\xi,$$

где D – квадратная положительно–определенная симметрическая матрица, $\varphi(x)$ – нелинейность класса $(0, k)$, который определяется тем, что характеристики лежат в острых углах, образованных осью x и проходящим через начало координат лучом с угловым коэффициентом k , лежащим в первом и третьем квадрантах.

Пример 3.3.

Проверить устойчивость равновесия в системе (рис. 3.16,а), имеющей передаточную функцию линейной части $W(p) = 1/p^2$ и безынерционное нелинейное звено (рис. 3.16,б).

При $u(t) = 0$ уравнения движения системы имеют вид

$$d^2x/dt = -\varphi(x). \quad (3.52)$$

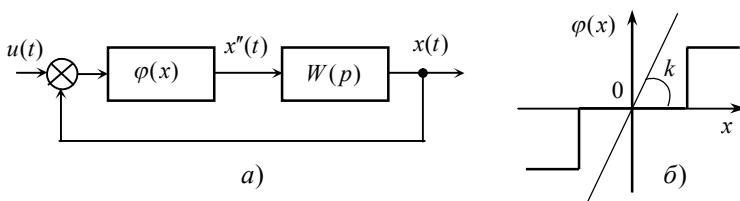


Рис. 3.16.

Переходим к нормальной форме, вводя новые переменные $x_1 = x$, $x_2 = dx_1/dt$. Тогда (3.52) заменяется системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -\varphi(x_1). \end{cases}$$

Возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} \varphi(\xi) d\xi.$$

Находим производную функции V

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} = \varphi(x_1) \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} = \varphi(x_1)x_2 - x_2\varphi(x_1) \equiv 0.$$

Производная dV/dt тождественно равна нулю во всем фазовом пространстве, что в соответствии с теоремой 3.5 является признаком устойчивости (не асимптотической) по Ляпунову.

Глава 4

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

При анализе системы управления важным вопросом является исследование таких ее свойств, как управляемость и наблюдаемость.

Система управляема, если существует возможность перевода объекта управления из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. При этом должна существовать возможность определения состояния объекта (свойство наблюдаемости) по измеренным значениям выходных переменных. Понятия, связанные с этими свойствами, и необходимые критерии были введены Р. Калманом.

Настоящая глава посвящена основным результатам исследования управляемости и наблюдаемости в линейных системах. Эти проблемы имеют общую природу, которая проявляется в форме правила двойственности между управлением и наблюдением.

4.1. Задача об управляемости систем.

Критерий управляемости

Рассмотрим задачу об управляемости многомерными системами, функционирование которых описывается нормальной системой линейных дифференциальных уравнений. Система уравнений в матричной форме имеет следующий вид:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (4.1)$$

где $x(t)$, $u(t)$ – векторы-столбцы размерности n и m соответственно; $A(t)$, $B(t)$ – матрицы размерности $(n \times n)$ и $(n \times m)$ соответственно.

Определение 4.1. Система (4.1) называется *вполне управляемой*, если для двух произвольных точек $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$ области допустимых решений фазового пространства $X_t \subset R^n$ и двух произвольных значений t_0 и t_1 аргумента t существует такая функция управления $u(t)$

($t \in [t_0, t_1]$), при которой решение уравнения (4.1) удовлетворяет условиям $x(t_0) = x^{(0)}$ и $x(t_1) = x^{(1)}$.

Начнем с простейшего случая, когда матрица $A(t)$ в уравнении системы (4.1) равна нулевой матрице. Тогда динамика системы задана уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = B(t)u(t), \quad x(t_0) = x^{(0)}. \quad (4.2)$$

Предположим, что $x(t_0)$ и $B(t)$ известны, и поставим задачу выбора такого управления $u(t)$, которое обеспечивало бы в момент времени $t = t_1$ при $t_1 > t_0$ выполнение условия $x(t_1) = x^{(1)}$.

Интегрирование уравнения движения системы (4.2) дает

$$x(t_1) = x^{(0)} + \int_{t_0}^{t_1} B(t)u(t) dt.$$

Заметим, что выражение

$$L(u) = \int_{t_0}^{t_1} B(t)u(t) dt \quad (4.3)$$

можно рассматривать как линейное преобразование, которое ставит в соответствие каждому элементу $u(t)$ *гильбертова* пространства $C^m[t_0, t_1]$ элемент пространства R^n . Формально

$$L(u): C^m[t_0, t_1] \rightarrow R^n, \quad u(t) \rightarrow x(t_1).$$

Поскольку нужно выбрать управление $u(t)$, которое удовлетворяло бы условию

$$x^{(1)} = x(t_1) = x^{(0)} + \int_{t_0}^{t_1} B(t)u(t) dt,$$

то, очевидно, если $x^{(1)} - x^{(0)}$ лежит в области значений линейного преобразования $L(u)$, тогда желаемый перевод системы в $x^{(1)}$ возможен. В противном случае – нет. Чтобы сформулировать эту задачу в общем виде, введем соответствующие определения.

Если $B(t)$ – матрица ($n \times m$), составленная из непрерывных функций времени, определенных на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, то преобразование

$L(u):C^m[t_0, t_1] \rightarrow R^n$, определяемое формулой (4.3), является линейным преобразованием.

Говорят, что $x^{(1)}$ принадлежит области значений этого преобразования, если существует элемент $u_1(t)$ в пространстве $C^m[t_0, t_1]$ такой, что

$$L(u_1) = \int_{t_0}^{t_1} B(t) u_1(t) dt = x^{(1)}.$$

Таким образом, чтобы проверить, является ли состояние управляемым, необходимо установить, принадлежит ли это состояние области значений оператора $L(u)$, преобразующего бесконечномерное пространство в конечномерное. Этот оператор не может быть записан с помощью конечной матрицы, и проверка названного условия затруднительна. К счастью, можно построить линейное преобразование, отображающее n -мерное пространство в n -мерное, область значений которого в точности совпадает с областью значений оператора $L(u)$. Это построение формулирует следующая лемма.

Лемма 4.1. Вектор $x^{(1)}$ размерности n лежит в области значений оператора

$$L(u) = \int_{t_0}^{t_1} B(t) u(t) dt$$

только тогда, когда он принадлежит области значений линейного преобразования

$$D(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} B(t) B^T(t) dt \quad (4.4)$$

Необходимость. Если $x^{(1)}$ принадлежит области значений, т.е. $x^{(1)} \in \text{range } D(t_0, t_1)$, то существует вектор $z^{(1)}$ такой, что $D(t_0, t_1) z^{(1)} = x^{(1)}$. Определим $u(t)$ по формуле $u(t) = B^T(t) z^{(1)}$, тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} B(t) u(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} B(t) B^T(t) dt z^{(1)}.$$

Достаточность. Если $x^{(1)}$ не лежит в области значений оператора $D(t_0, t_1)$, то существует вектор $x^{(2)}$ такой, что $D(t_0, t_1) x^{(2)} = 0$ и скалярное произведение $\langle x^{(2)}, x^{(1)} \rangle \neq 0$.

Можно указать, например, следующий способ построения вектора $x^{(2)}$. Так как $D(t_0, t_1)$ – симметрический оператор, он расщепляет пространство R^n в прямую сумму

$$R^n = X = \text{range } D(t_0, t_1) \oplus \ker D(t_0, t_1),$$

где $\ker D(t_0, t_1)$ – ядро оператора $D(t_0, t_1)$. Пусть размерность ядра $D(t_0, t_1)$ отлична от нуля и пусть r – размерность области значений $D(t_0, t_1)$ (r – равно рангу матрицы D). Выберем в R^n базис $e_1, e_2, \dots, e_r, \dots, e_n$ такой, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_r$ лежат в области значений $D(t_0, t_1)$. Пусть $x^{(1)}$ не лежит в области значений $D(t_0, t_1)$ и его представление в выбранном базисе имеет вид

$$x^{(1)} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_r e_r + \dots + \alpha_n e_n,$$

причем $\alpha_r, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n$ не все равны нулю. В качестве вектора $x^{(2)}$ можно взять, например, вектор

$$x^{(2)} = \alpha_{r+1} e_{r+1} + \alpha_{r+2} e_{r+2} + \dots + \alpha_n e_n.$$

Ясно, что $x^{(2)} \neq 0$, по предположению, и кроме того,

$$\langle x^{(2)}, x^{(1)} \rangle = \alpha_{r+1}^2 + \alpha_{r+2}^2 + \dots + \alpha_n^2 > 0.$$

Предположим, что вектор $x^{(1)} \notin \text{range } D(t_0, t_1)$ и одновременно является управляемым. Из управляемости $x^{(1)}$ следует, что существует $u_1(t)$ такое, что

$$\int_{t_0}^{t_1} B(t) u_1(t) dt = x^{(1)},$$

тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} (x^{(2)})^T B(t) u_1(t) dt = \langle x^{(2)}, x^{(1)} \rangle \neq 0,$$

но

$$(x^{(2)})^T D(t_0, t_1) x^{(2)} = \int_{t_0}^{t_1} [(x^{(2)})^T B(t)] [B^T(t) x^{(2)}] dt = 0.$$

Так как матрица $B(t)$ непрерывна, то из

$$(x^{(2)})^T D(t_0, t_1) x^{(2)} = \int_{t_0}^{t_1} \|B^T(t) x^{(2)}\|^2 dt = 0$$

следует, что $B^T(t) x^{(2)} \equiv 0$ при всех $t \in [t_0, t_1]$, а это противоречит условию

$$\int_{t_0}^{t_1} (x^{(2)})^T B(t) u_1(t) dt \neq 0.$$

Следствие. Управление $u(t)$, которое переводит систему (4.2) из состояния $x^{(0)}$ при $t = t_0$ в $x^{(1)}$ при $t = t_1$, существует тогда и только тогда, когда вектор $(x^{(1)} - x^{(0)})$ лежит в области значений линейного преобразования (4.4).

При этом одно из управлений, осуществляющее этот перевод, имеет вид $u(t) = B^T(t) z$, где z является любым решением уравнения

$$D(t_0, t_1) z = x^{(1)} - x^{(0)}.$$

Доказательство. То, что управление $u(t) = B^T(t) z$ переводит состояние $x^{(0)}$ в $x^{(1)}$ проверено при доказательстве необходимости условий леммы 4.1. Обратно. Если управление $u(t)$, переводящее $x^{(0)}$ в $x^{(1)}$, существует, то вектор $(x^{(1)} - x^{(0)})$ принадлежит области значений линейного преобразования (4.3) в силу формулы Коши. Но по данной лемме вектор $(x^{(1)} - x^{(0)})$ принадлежит области значений этого преобразования тогда и только тогда, когда он лежит в области значений преобразования (4.4).

Перейдем теперь к линейной системе общего вида, когда $A(t) \neq 0$. Здесь результат, аналогичный только что приведенному следствию леммы, формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 4.1. (критерий управляемости). Для линейной системы (4.1)

$$dx(t)/dt = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

тогда и только тогда существует управление $u(t)$, которое переводит систему из состояния $x^{(0)}$ при $t = t_0$ в состояние $x^{(1)}$ при $t = t_1 \geq t_0$, когда вектор $x^{(0)} - w(t_0, t_1)x^{(1)}$ принадлежит области значений линейного преобразования

$$D(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} w(t_0, t) B(t) B^T(t) w^T(t_0, t) dt. \quad (4.5)$$

Более того, если $\hat{x}$ — какое-либо решение уравнения

$$D(t_0, t_1) \hat{x} = x^{(0)} - w(t_0, t_1) x^{(1)},$$

то $u(t)$, заданное формулой $u(t) = -B^T(t) w^T(t_0, t_1) \hat{x}$, является одним из управлений, обеспечивающих указанный переход.

Доказательство. Рассмотрим линейное преобразование уравнений системы управления с помощью замены переменной

$$z(t) = w(t_0, t) x(t).$$

Тогда $x(t) = w(t, t_0) z(t)$ и

$$w(t, t_0) z'(t) + w'(t, t_0) z(t) = A(t) w(t, t_0) z(t) + B(t) u(t).$$

По одному из свойств импульсной переходной матрицы $w(t, t_0)$:

$$w'(t, t_0) = A(t) w(t, t_0), \quad w(t_0, t_0) = E.$$

Следовательно,

$$w(t, t_0) z'(t) = B(t) u(t).$$

Умножая это равенство слева на $w(t_0, t)$, получим

$$z'(t) = w(t_0, t) B(t) u(t).$$

Из предыдущей леммы известно, что множество значений, которые может принимать вектор $z(t_1) - z(t_0)$, принадлежит области значений матрицы

$$D(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} w(t_0, t) B(t) B^T(t) w^T(t_0, t) dt.$$

Чтобы завершить желаемый переход потребуем, чтобы

$$z(t_1) - z(t_0) = w(t_0, t_1) x^{(1)} - w(t_0, t_0) x^{(0)} = w(t_0, t_1) x^{(1)} - x^{(0)}.$$

Отсюда следует, что желаемое преобразование возможно тогда и только тогда, когда $[x^{(0)} - w(t_0, t_1) x^{(1)}]$ лежит в области значений $D(t_0, t_1)$. Из

следствия предыдущей леммы вытекает, что одно из управлений, обеспечивающее заданное преобразование системы, имеет вид

$$u(t) = -B^T(t) w^T(t_0, t) \hat{x},$$

где $\hat{x}$ удовлетворяет равенству

$$D(t_0, t_1) \hat{x} = x^{(0)} - w(t_0, t_1) x^{(1)}.$$

Следствие. Если при некотором t_0 и любых t_1 матрица $D(t_0, t_1)$ имеет максимальный ранг, то линейная система управляема.

Матрица $D(t_0, t_1)$ играет важную роль в теории управления линейных систем. Эта матрица обладает следующими основными свойствами:

- 1) Матрица $D(t_0, t_1)$ – симметрическая.
- 2) Матрица $D(t_0, t_1)$ – неотрицательно определенная для $t_1 \geq t_0$.
- 3) Матрица $D(t_0, t_1)$ удовлетворяет линейному матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} D(t, t_1) = A(t) D(t, t_1) + D(t, t_1) A^T(t) - B(t) B^T(t), \quad D(t_1, t_1) = 0.$$

- 4) Матрица $D(t_0, t_1)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$D(t_0, t_1) = D(t_0, t) + w(t_0, t) D(t, t_1) w^T(t_0, t).$$

- 5) С расширением области интегрирования ранг матрицы $D(t_0, t_1)$ не убывает.

Доказательство этих свойств можно найти в [1].

Матрицу $D(t_0, t_1)$ называют иногда *грамианом управляемости*.

Дело в том, что структура этой матрицы напоминает структуру матрицы Грама для системы функций n -мерного пространства. Следующая теорема поясняет использование этого термина.

Теорема 4.2. Пусть $f_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) – элементы пространства $C^m[t_0, t_1]$. Пусть, далее, $F(t)$ – матрица размером $(n \times m)$, строками которой являются $f_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$). Определим матрицу

$$D(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} F(t) F^T(t) dt.$$

Векторы $f_1, f_2, \dots, f_n$ линейно независимы на $[t_0, t_1]$ тогда и только тогда, когда $(n \times n)$ -матрица $D(t_0, t_1)$ – неособенная.

Матрицу $D(t_0, t_1)$ называют *грамианом* системы функций $f_1, f_2, \dots, f_n$.

В *стационарном* случае критерий управляемости принимает простую и компактную форму. Пусть задана система управления:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.6)$$

Составим матрицу U_n размеров $(n \times m \cdot n)$, первые m столбцов которой совпадают со столбцами матрицы B , вторые m столбцов совпадают со столбцами матрицы AB и т. д., последние m столбцов матрицы U_n образованы матрицей $A^{n-1}B$. Матрицу U_n записывают так:

$$U_n = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B). \quad (4.7)$$

Управляемость *стационарной* системы связана со свойствами матрицы U_n . Докажем следующую лемму.

Лемма 4.2. Если ранг матрицы $(B, AB, A^2B, \dots, A^{p-1}B)$ равен рангу матрицы $(B, AB, A^2B, \dots, A^{p-1}B, A^pB)$, то дальнейшее прибавление столбцов вида $A^{p+i}B$ ($i = 1, 2, \dots$) не увеличивает ранга матрицы.

Доказательство. Если выполняется указанное в условии леммы равенство, то все столбцы матрицы A^pB являются линейными комбинациями столбцов матрицы $(B, AB, A^2B, \dots, A^{p-1}B)$. Но тогда и все столбцы матрицы $A^{p+1}B = A A^pB$ тоже линейно выражаются через столбцы матрицы $(B, AB, A^2B, \dots, A^{p-1}B)$, и следовательно, при любом $i \geq 1$ добавление слева к этой матрице элементов вида $A^{p+i}B$ не увеличивает ее ранга.

Из доказанной леммы, в частности, следует, что прибавление каждого последующего элемента вида A^pB либо увеличивает ранг матрицы на некоторое постоянное число, либо не меняет ранга. В последнем случае прибавление всех последующих столбцов вида $A^{p+i}B$ не будет увеличивать ранга матрицы.

Сформулируем теперь основной результат теории линейных стационарных систем.

Теорема 4.3. (критерий управляемости стационарной системы). *Линейная стационарная n -мерная система (4.6) управляема тогда и только тогда, когда*

$$\text{rank } U_n = \text{rank} (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) = n. \quad (4.8)$$

Достаточность. Пусть система не является управляемой, а ранг $U_n = n$. Тогда найдется вектор $x^{(1)} \neq 0$, лежащий в ядре оператора $D(t_0, t_1)$ и такой, что при любом t выполнено равенство $(x^{(1)})^T D(t_0, t) B \equiv 0$. Поскольку система стационарная, не нарушая общности, положим $t_0 = 0$. Тогда $(x^{(1)})^T D(t_0, t) B \equiv 0$ при любом $t \geq 0$. Дифференцируя это тождество по t $(n-1)$ раз и полагая $t = 0$, получим

$$(x^{(1)})^T B = 0, (x^{(1)})^T AB = 0, (x^{(1)})^T A^2B = 0, \dots, (x^{(1)})^T A^{n-1}B = 0$$

или

$(x^{(1)})^T (B, AB, \dots, A^{n-1}B) = 0$ и одновременно $(x^{(1)})^T \neq 0$. Но ненулевой вектор может быть ортогонален всем столбцам матрицы U_n в том и только в том случае, когда ранг $U_n < n$. Полученное противоречие доказывает достаточность условий теоремы.

Необходимость. Пусть все состояния управляемы, а ранг $U_n < n$. Если ранг $U_n < n$, то существует вектор $z \neq 0$, ортогональный всем столбцам матрицы U_n , т.е.

$$z^T B = 0, z^T AB = 0, z^T A^2B = 0, \dots, z^T A^{n-1}B = 0.$$

По теореме Кэли – Гамильтона, согласно которой каждая квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена, имеем

$$z^T (A^n + \lambda_{n-1}A^{n-1} + \dots + \lambda_1 A + \lambda_0) B = 0$$

и значит, $z^T A^n B = 0$. Но тогда, в силу доказанной леммы 4.2, равенство $z^T A^p B = 0$ выполняется при любом $p \geq 0$. Так как все состояния управляемы, то управляемо и состояние z , т.е.

$$0 = w(t, 0)z + \int_0^t w(t, \sigma) B u_z(\sigma) d\sigma.$$

Для стационарной системы известен явный вид импульсной переходной матрицы: $w(t, t_0) = \exp(A(t - t_0))$, поэтому

$$0 = e^{At} z + \int_0^t e^{A(t-\sigma)} B u_z(\sigma) d\sigma = e^{At} \left[z + \int_0^t e^{-A\sigma} B u_z(\sigma) d\sigma \right]$$

или

$$z = - \int_0^t e^{-A\sigma} B u_z(\sigma) d\sigma$$

Умножая это равенство слева на z^T , получим

$$z^T z = \|z\|^2 = - \int_0^t z^T \left(E - A\sigma + A^2 \frac{\sigma^2}{2!} - \dots \right) B u_z(\sigma) d\sigma.$$

Но $z^T A^p B = 0$ при любом $p \geq 0$, следовательно, правая часть этого равенства равна нулю. Это противоречит предположению, что $z \neq 0$.

Согласно доказанной теореме свойство управляемости системы полностью определяется алгебраическими свойствами пары матриц A и B . Именно, если матрица U_n составленная указанным выше образом, имеет полный ранг, то система управляема. В противном случае можно построить неуправляемое состояние.

Так как управляемость стационарной системы определяется только алгебраическими свойствами пары матриц A и B , то часто говорят просто об управляемости пары матриц $\{A, B\}$.

Используя результат леммы 4.2, перепишем критерий управляемости стационарной системы в следующем виде.

Следствие. *Линейная стационарная система управляема тогда и только тогда, когда $\text{rank}(B, AB, A^2B, \dots, A^{p-r}B) = n$, где r – ранг матрицы B .*

Замечание. В случае, если вектор управления в системе (4.6) одномерный, матрица B имеет вид столбца b , а поэтому необходимое и достаточное условие вполне управляемости принимает форму

$$\det(b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b) \neq 0. \quad (4.9)$$

Соотношения (4.8) и (4.9) называются условиями *вполне управляемости* стационарных систем.

Пример 4.1.

Линейная система управления описывается следующей нормальной системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Исследовать управляемость системы. Если система управляема, то построить одно из управлений, переводящее систему из состояния $(0, x^{(0)})$ в состояние $(t_1, 0)$.

Решение.

В соответствии с условием (4.8) для вполне управляемости n -мерной динамической стационарной системой необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости $U_n = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)$ равнялся n . Построим матрицу управляемости исходной системы $U_2 = (B, AB)$.

Вычислим следующее произведение:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Таким образом,

$$\text{rank } U_2 = \text{rank}(B, AB) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

и система управляема.

Известно, что если система управляема, то грамиан управляемости $D(t_0, t)$ имеет полный ранг, т.е. равный n , при любом $t > 0$ и для стационарной системы определяется по следующей формуле:

$$D(0, t) = \int_0^t e^{A\sigma} B B^T e^{A^T \sigma} d\sigma.$$

Задачу о выборе управления, которое переводит систему в заданное состояние за фиксированное время, называют *задачей финитного управления*. Одно из многих управлений, переводящих систему из состояния $(0, x^{(0)})$ в состояние $(t_1, 0)$ можно определить по формуле

$$u(t) = -B^T w^T(0, t) D^{-1}(0, t_1) x^{(0)}, \quad (4.10)$$

где $w^T(0, t)$ – импульсная переходная матрица исходной системы управления; $D^{-1}(0, t_1)$ – матрица, обратная грамиану управляемости.

Управление (4.10) отличается от множества возможных управлений тем, что оно имеет наименьшую евклидову норму [9].

Вычисляем импульсную переходную матрицу. Используя обратное преобразование Лапласа:

$$w(0, t) = e^{At} = L^{-1}\{(pE - A)^{-1}\} = L^{-1}\left\{\begin{pmatrix} p & -1 \\ 0 & p \end{pmatrix}^{-1}\right\} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем грамиан управляемости:

$$D(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt = \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2t_1^3 & 3t_1^2 \\ 3t_1^2 & 6t_1 \end{pmatrix}$$

Определитель $\Delta = |D(0, t_1)| = \frac{t_1^4}{2}$. Тогда обратная матрица–грамиан:

$$D^{-1}(0, t_1) = \frac{2}{t_1^4} \begin{pmatrix} 6t_1 & -3t_1^2 \\ -3t_1^2 & 2t_1^3 \end{pmatrix}.$$

Подставляя в формулу (4.10) импульсную переходную матрицу $w(0, t)$ и матрицу $D^{-1}(0, t_1)$, находим одно из управлений исходной системы при заданных начальных и конечных условиях:

$$\begin{aligned} u_{x^{(0)}}(t) &= -(0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \frac{2}{t_1^4} \begin{pmatrix} 6t_1 & -3t_1^2 \\ -3t_1^2 & 2t_1^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{6}{t_1^2} - \frac{12}{t_1^3} t \right) x_1^{(0)} + \left(\frac{6}{t_1^2} - \frac{4}{t_1} t \right) x_2^{(0)}; \end{aligned}$$

или окончательно

$$u_{x^{(0)}}(t) = \frac{6}{t_1^2} \left(x_2^{(0)} - \frac{2}{t_1} x_1^{(0)} \right) t + \frac{2}{t_1} \left(\frac{3}{t_1} x_1^{(0)} - 2x_2^{(0)} \right).$$

В общем случае с понятием управляемости связано понятие *достижимости*. Понятие достижимости является точным аналогом понятия управляемости, если изменить направление времени. Иначе говоря, достижимость – это управляемость в «обратном времени».

Определение 4.2. Событие $(t_0, x^{(0)})$ линейной системы (4.1)

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

называется *достижимым из состояния* $x^{(1)}$, если найдется такое $t_{-1} \leq t_0$ и такое входное воздействие $u(t)$, $t \in [t_{-1}, t_0]$, что оно переводит систему из состояния $x^{(1)}$ при $t = t_{-1}$ в состояние $x^{(0)}$ при $t = t_0$.

Критерий достижимости совпадает с критерием управляемости с точностью до направления времени. Оператор достижимости $D(t_{-1}, t_0)$ отличается от оператора управляемости $D(t_0, t_1)$ (4.5) лишь диапазоном интегрирования одной и той же подынтегральной функции. Ясно, что в нестационарной системе из управляемости не следует достижимость, а из достижимости не следует управляемость.

Для стационарной системы можно показать, что из управляемости следует достижимость, и обратно [1].

4.2. Наблюдаемость в линейных системах управления

При функционировании реальных систем управления важным является процесс определения координат вектора состояния системы в определенные моменты времени t . Можно произвольно менять состояние замкнутой системы в том случае, если все компоненты вектора состояния доступны для измерения.

На практике, как правило, не все компоненты вектора состояния доступны для измерения (например, потому, что часть переменных состояния в принципе нельзя измерить). Обычно выходными величинами объекта служат лишь отдельные компоненты вектора состояния, либо линейные комбинации этих компонент. В связи с этим в теории управления рассматриваются так называемые *задачи о наблюдаемости*, основным содержанием которых является установление алгоритмов определения части или всех координат системы при условии, что известна другая часть координат или некоторые функции от этих координат, а также математическая модель системы управления в виде системы дифференциальных уравнений.

Пусть система управления описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t), \end{cases} \quad (4.11)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ – непрерывные матрицы порядка $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(p \times n)$ соответственно; $y(t)$ – p -вектор выходных (измеряемых) координат системы управления.

Наша цель состоит в том, чтобы для системы (4.11) восстановить вектор состояния $x(t)$ или найти оценку этого вектора $\hat{x}(t)$ по данным о входной $u(t)$ и выходной $y(t)$ переменным системы. Близость оценки $\hat{x}(t)$ к истинному вектору состояния $x(t)$ понимается, по крайней мере, в двух смыслах: либо как стремление ошибки оценки к нулю, т.е. $x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, либо как точное совпадение вектора состояния $x(t)$ и вектора оценки $\hat{x}(t)$ в момент $t = t_0$ после наблюдения выходных переменных объекта в течение конечного отрезка времени $[t_{-1}, t_0]$ при $t_{-1} < t_0$ или $[t_0, t_1]$ при $t_1 > t_0$.

В нестационарной линейной системе различают следующие две задачи об оценке текущего состояния системы: *задача наблюдаемости* и *задача идентифицируемости* системы управления.

Задачей наблюдения называют задачу оценки состояния системы в момент времени t_0 по известным входным и выходным воздействиям, измеренным в *будущем*, т.е. по данным $u(t)$ и $y(t)$ при $t \geq t_0$.

Задачей идентификации называют задачу определения состояния системы в момент времени t_0 по данным о входных и выходных величинах, измеренных в *прошлом*, т.е. по данным $y(t)$ и $u(t)$ при $t \leq t_0$.

Часто не делают различия между задачей наблюдения и задачей идентификации, объединяя оба эти понятия термином *наблюдаемость*. Иногда определяют наблюдаемую систему как систему, в которой по прошлым значениям выходных величин можно судить о состоянии в настоящий момент времени. Этого определения мы и будем придерживаться.

Определение 4.3. Задача нахождения вектора $x(t)$ состояния системы (4.11) или отдельных его компонент по известной на некотором промежутке $[t_0, t_1]$ функции

$$y(t) = C(t)x(t), \quad (4.12)$$

где $C(t)$ – известная прямоугольная матрица размерности $(p \times n)$, называется *задачей наблюдаемости линейной системы* (4.11). При этом $y(t)$ – функция выхода системы (4.11).

Определение 4.4. Если задача наблюдаемости для системы (4.11) имеет решение, то система называется *полностью наблюдаемой* или *частично наблюдаемой* в зависимости от того, все или часть компонент вектора $x(t)$ удается установить.

Определение 4.5. Пара матриц $A(t)$, $C(t)$ называется *наблюдаемой*, если можно решить задачу о наблюдаемости для системы (4.11) по известному вектору выхода (4.12).

Рассмотрим вначале наиболее простое решение задачи о наблюдаемости однородной системы (4.11) при $u(t) = 0$ и достаточные условия наблюдаемости пары матриц $A(t)$, $C(t)$.

Теорема 4.4. Пусть для каждого значения $t \in [t_0, t_1]$ существуют и известны $n - 1$ производные от вектора выхода (4.12) системы (4.11). Тогда для существования решения задачи о наблюдаемости системы (4.11) в фиксированной точке t в виде линейной комбинации от значений $y(t)$ и ее производных $y'(t)$, $y''(t)$, ..., $y^{(n-1)}(t)$ достаточно, чтобы

$$\text{rank } H_n(t) = n, \quad (4.13)$$

где

$$H_n(t) = \left(C_1^T(t), C_2^T(t), \dots, C_n^T(t) \right), \quad (4.14)$$

$$C_1(t) = C(t), \quad C_{i+1}(t) = C_i(t)A(t) + \frac{dC_i(t)}{dt} \quad (i = \overline{1, n-1}).$$

Доказательство. Продифференцируем $n - 1$ раз соотношение (4.12), тогда получим n равенств

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1(t)x(t) \\ y'(t) &= \left[\frac{dC_1(t)}{dt} + C_1(t)A(t) \right] x(t) = C_2(t)x(t), \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n-1)}(t) &= \left[\frac{dC_{n-1}(t)}{dt} + C_{n-1}(t)A(t) \right] x(t) = C_n(t)x(t), \end{aligned}$$

рассматриваемых как система линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора $x(t)$. Для существования решения данной системы достаточно, чтобы ранг ее матрицы равнялся n .

Но ранг этой матрицы равен рангу сопряженной матрицы, т.е. рангу матрицы $H_n(t)$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 1. В частном случае, когда вектор выхода является скалярной величиной, т.е. если $C(t) = c(t)$ – n -мерная вектор–функция, соотношение (4.14) примет вид

$$\det H_n(t) = \det \left(c_1^T(t), c_2^T(t), \dots, c_n^T(t) \right) \neq 0, \quad (4.15)$$

где $c_1(t) = c(t)$, $c_{i+1}(t) = \frac{dc_i(t)}{dt} + c_i(t)A(t) \quad (i = \overline{1, n-1})$.

З а м е ч а н и е 2. В случае, если система (4.11) стационарна и $C(t) = \text{const}$, то матрица (4.14) H_n примет вид

$$H_n = \left(C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T \right)$$

или

$$H_n^T = \begin{pmatrix} C \\ C A \\ \dots \\ C A^{n-1} \end{pmatrix},$$

а формула (4.15) при $c(t) = \text{const}$:

$$\det H_n = \det \left(c^T, A^T c^T, \dots, (A^T)^{n-1} c^T \right) \neq 0.$$

При этом фазовые координаты можно определить следующим образом:

$$x(t) = H_n^{-1} = \begin{pmatrix} c \\ c A \\ \dots \\ c A^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

З а м е ч а н и е 3. Решение задачи о наблюдаемости при использовании значений вектора выхода и его производных иногда становится неудобным для практического применения в конкретных системах управления, поскольку при этом требуется вычислять производные от заданной функции, что сопряжено с большими трудностями.

Рассмотрим другой подход к задаче наблюдаемости систем [1].

Покажем теперь, что ненаблюдаемые фазовые координаты $x(t)$ можно точно восстановить по данным наблюдения выходных координат $y(t)$ на конечном отрезке времени. Эта задача аналогична задаче вы-

числения управления, переводящего любое состояние линейной управляемой системы в начало координат.

Пусть система задана матрицами $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и известно входное воздействие $u(t)$ для $t \in [t_0, t_1]$.

Тогда ясно, что выход такой системы (согласно формулы Коши) может быть выражен в виде

$$y(t) = C(t) w(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} C(t) w(t, \sigma) B(\sigma) u(\sigma) d\sigma,$$

где второе слагаемое (интегральная часть) не зависит от $x(t_0)$ и может быть вычислено единственным образом по известным $B(t)$, $C(t)$ и $u(t)$. Поэтому для того, чтобы судить о $x(t_0)$ по данным о выходе системы, достаточно рассматривать однородную систему

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \\ y(t) = C(t)x(t). \end{cases} \quad (4.16)$$

Лемма 4.3. Пусть $C(t)$ – матрица $(p \times n)$, элементы которой непрерывны на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$. Тогда ядро преобразования $L: R^n \rightarrow C^p[t_0, t_1]$, определенного соотношениями $L(x(t)) = C(t)x(t)$, совпадает с ядром преобразования

$$M(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} C^T(t) C(t) dt.$$

Доказательство. Если $x(t_0) = x^{(0)}$ принадлежит ядру преобразования $M(t_0, t_1)$, то $M(t_0, t_1)x^{(0)} = 0$, и, следовательно, $(x^{(0)})^T M(t_0, t_1)x^{(0)} = 0$. Поэтому

$$\int_{t_0}^{t_1} (x^{(0)})^T C^T(t) C(t) x^{(0)} dt = \int_{t_0}^{t_1} \|C(t)x^{(0)}\|^2 dt = 0$$

Поскольку $C(t)$ – непрерывная функция, то $C(t)x^{(0)} = 0$ при любом $t \in [t_0, t_1]$ и поэтому $C(t)x^{(0)} \equiv 0$. Обратно, если $C(t)x^{(0)} = 0$, то

$C^T(t)C(t)x^{(0)} = 0$ и поэтому интеграл $\int_{t_0}^{t_1} C^T(t)C(t)x^{(0)}dt$ равен нулю.

Значит, $M(t_0, t_1)x^{(0)} = 0$.

Теорема 4.5. Если матрицы линейной системы (4.16) заданы на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, то можно определить $x(t_0)$ с точностью до постоянного вектора, который лежит в ядре оператора

$$M(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} w^T(t, t_0) C^T(t) C(t) w(t, t_0) dt.$$

В частности, $x(t_0)$ можно определить единственным образом, если матрица $M(t_0, t_1)$ – неособенная. Более того, нельзя отличить, зная $y(t)$ при $t_0 \leq t \leq t_1$, начальное состояние $x^{(01)}$ от начального состояния $x^{(02)}$, если вектор $x^{(01)} - x^{(02)}$ лежит в ядре оператора $M(t_0, t_1)$.

Доказательство. Согласно уравнению системы (4.16) имеем $y(t) = C(t)w(t, t_0)x(t_0)$.

Умножив это равенство слева на $w^T(t, t_0) C^T(t)$, получим

$$w^T(t, t_0) C^T(t) y(t) = w^T(t, t_0) C^T(t) C(t) w(t, t_0) x(t_0).$$

Интегрируя теперь на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, получим следующее выражение:

$$\int_{t_0}^{t_1} w^T(t, t_0) C^T(t) y(t) dt = M(t_0, t_1) x(t_0)$$

Так как левая часть этого равенства известна (функцию $y(t)$ мы измеряем на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$), то значение $x(t_0)$ может быть определено с точностью до аддитивно добавленного постоянного вектора, лежащего в ядре оператора $M(t_0, t_1)$. Если же матрица $M(t_0, t_1)$ – неособенная, то

$$x(t_0) = M^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} w^T(t, t_0) C^T(t) y(t) dt, \quad (4.17)$$

и, таким образом, вектор $x(t_0)$ определен однозначно.

Предположим теперь, что $x^{(01)} - x^{(02)}$ лежит в ядре оператора $M(t_0, t_1)$. Пусть $y^{(1)}(t)$ и $y^{(2)}(t)$ – выходные величины, соответствующие начальным условиям $x^{(01)}$ и $x^{(02)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \|y^{(1)}(t) - y^{(2)}(t)\|^2 dt &= \int_{t_0}^{t_1} \|C(t)w(t, t_0)x^{(01)} - C(t)w(t, t_0)x^{(02)}\|^2 dt = \\ &= (x^{(01)} - x^{(02)})^T \int_{t_0}^{t_1} w^T(t, t_0) C^T(t) C(t) w(t, t_0) dt (x^{(01)} - x^{(02)}) = \\ &= (x^{(01)} - x^{(02)})^T M(t_0, t_1) (x^{(01)} - x^{(02)}) = 0. \end{aligned}$$

Значит, $y^{(1)}(t) = y^{(2)}(t)$ при $t_0 \leq t \leq t_1$, и потому $x^{(01)}$ и $x^{(02)}$ неразличимы.

Роль матрицы $M(t_0, t_1)$ аналогична роли матрицы $D(t_0, t_1)$, которую мы называли грамианом управляемости. По аналогии матрицу $M(t_0, t_1)$ называют *грамианом наблюдаемости*. Основные свойства этой матрицы подобны свойствам матрицы $D(t_0, t_1)$:

- 1) Матрица $M(t_0, t_1)$ – симметрическая.
- 2) Матрица $M(t_0, t_1)$ – неотрицательно определенная для $t_1 \geq t_0$.
- 3) Матрица $M(t_0, t_1)$ удовлетворяет линейному матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} M(t, t_1) = -A^T(t) M(t, t_1) + M(t, t_1) A(t) - C^T(t) C(t), \quad M(t_0, t_0) = 0.$$

- 6) Матрица $M(t_0, t_1)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$M(t_0, t_1) = M(t_0, t) + w^T(t, t_0) D(t, t_1) w(t, t_0).$$

Пример 4.2.

Пусть стационарная линейная система управления описывается следующими дифференциальными уравнениями в нормальной форме:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t); \end{cases}$$

где
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Исследовать управляемость и наблюдаемость системы.

Решение.

Построим матрицу управляемости исходной системы

$$U_3 = (B, AB, A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^2B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица U_3 содержит линейно независимые столбцы, например, 1-ый, 2-ой и 3-ий. Следовательно, $\text{rank } U_3 = \text{rank}(B, AB, A^2B) = 3$ и система управляема.

Матрица наблюдаемости

$$H_3 = (C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где
$$A^T C^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (A^T)^2 C^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В матрице H_3 1-ый, 3-ой и 5-ый столбцы линейно независимые. Таким образом, $\text{rank } H_3 = \text{rank}(C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T) = 3$ и система управления наблюдаема, т.е. по измеряемой фазовой координате $y_1(t) = x_1(t)$ путем несложных преобразований можно восстановить ненаблюдаемые фазовые координаты $x_2(t)$ и $x_3(t)$.

4.3. Двойственность задач управляемости и наблюдаемости

Для нестационарных систем управления, как было сказано, наряду с понятиями управляемости и наблюдаемости рассматриваются понятия достижимости и восстанавливаемости [1, 6, 14].

В общем случае, понятие восстанавливаемости дополняет понятие управляемости, а понятие наблюдаемости дополняет понятие достижимости. Говорят, что достижимость двойственна наблюдаемости, а управляемость двойственна восстанавливаемости.

Для стационарных систем понятия управляемости и достижимости совпадают и достаточно применения понятия управляемости. Аналогично, неразличимы понятия наблюдаемости и восстанавливаемости, поэтому пользуются только понятием наблюдаемости.

Остановимся на стационарном случае. Тем более что для общего (нестационарного) случая исследования вопросов двойственности принципиально не отличаются.

При исследовании линейных преобразований в евклидовых пространствах определяется *сопряженное* преобразование. Связанное с данным преобразованием сопряженное преобразование обеспечивает равенство скалярных произведений $\langle \tilde{x}, Ax \rangle = \langle A^T \tilde{x}, x \rangle$, справедливое для любой вещественной $(m \times n)$ -матрицы A и любых векторов $x \in R^n$, $\tilde{x} \in R^m$ [6].

Определение 4.6. Система уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = -A^T \tilde{x}(t) + C^T \tilde{u}(t), \\ \tilde{y}(t) = B^T \tilde{x}(t) \end{cases} \quad (4.18)$$

называется *сопряженной* к системе

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (4.19)$$

где A , B , C – матрицы размеров $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(p \times n)$ соответственно. Векторы $\tilde{u}(t)$ и $u(t)$ имеют размерности $(p \times 1)$ и $(m \times 1)$ соответственно.

В стационарном случае импульсная переходная матрица системы имеет вид $w(t, t_0) = \exp(A(t - t_0))$ и операторы $D(t_0, t_1)$, $M(t_0, t_1)$ можно представить так:

$$D(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{-A(t-t_0)} B(t) B^T(t) e^{-A^T(t-t_0)} dt,$$

$$M(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{-A^T(t-t_0)} C^T(t) C(t) e^{-A(t-t_0)} dt.$$

Так как оператор $D(t_0, t_1)$ достигает полного ранга при любом $t_1 \geq t_0$ в том и только в том случае, когда пара матриц $\{A, B\}$ является управляемой, то и оператор $M(t_0, t_1)$ достигает полного ранга при любом $t_1 \geq t_0$ тогда и только тогда, когда пара матриц $\{A, C\}$ является управляемой. Но если оператор $M(t_0, t_1)$ имеет полный ранг, то ни одно состояние, кроме нулевого, не принадлежит ядру этого оператора и, следовательно, система является наблюдаемой. Следовательно, имеет место следующая теорема.

Теорема 4.6. *Пара постоянных матриц $\{A, C\}$ определяет наблюдаемую систему тогда и только тогда, когда пара матриц $\{A^T, C^T\}$ определяет управляемую систему.*

Таким образом, окончательно двойственность управляемости и наблюдаемости можно выразить следующей теоремой.

Теорема 4.7. *Линейная стационарная система (4.19) является наблюдаемой тогда и только тогда, когда двойственная ей система (4.18) является управляемой. И наоборот, система (4.19) является управляемой тогда и только тогда, когда система (4.18) является наблюдаемой.*

Двойственность задач управления и задач оценки состояния позволяет воспользоваться результатами, полученными при решении задачи управления с помощью обратной связи в стационарной системе, для решения задачи построения оценки состояния этой системы. Эти вопросы подробно рассмотрены в [1].

Глава 5

МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В теории вариационного исчисления разработан универсальный математический аппарат для решения экстремальных задач в функциональных пространствах. Этот аппарат позволяет решать широкий круг оптимизационных задач, в том числе и задачи оптимального управления.

В настоящей главе рассматриваются вопросы применения методов классического вариационного исчисления к решению различных задач оптимального управления.

5.1. Задача оптимального управления как вариационная задача

Задачей вариационного исчисления является задача отыскания функций, доставляющих экстремальное (максимальное или минимальное) значение определенным величинам, которые зависят от этих функций и называются *функционалами*. Функционал можно рассматривать как функцию особого рода, в которой роль независимой переменной играет другая функция.

Задача синтеза (построения) оптимального управления формулируется как вариационная задача. При этом кроме уравнений объекта управления должны быть заданы ограничения на управление и фазовые координаты, краевые условия и выбран критерий оптимальности.

Пусть уравнение объекта задается в нормальной форме

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t) \quad (5.1)$$

или в скалярном виде

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x(t), u(t), t) \quad (j = \overline{1, n}),$$

где $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ – фазовый вектор; $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T$ – вектор управления. Известно, что любое уравнение, разрешимое относительно старшей производной, можно преобразовать к равносильной нормальной системе уравнений.

На управление и фазовый вектор могут быть наложены ограничения в виде конечных соотношений – равенств, неравенств. Их в общем виде можно записать так:

$$u(t) \in U_t, \quad x(t) \in X_t. \quad (5.2)$$

Здесь U_t и X_t – некоторые заданные множества, зависящие, вообще говоря, от времени, причем $U_t \subseteq R^m$ и $X_t \subseteq R^n$. В (5.2) первое соотношение называется *ограничением на управление*, второе соотношение – *ограничением на фазовый вектор* или *фазовым ограничением*. Ограничения на управление и фазовый вектор могут быть не разделены, и в общем случае записаны в виде

$$(u(t), x(t)) \in V_t, \quad V_t \subseteq R^{n+m}.$$

Краевые (граничные) условия – ограничения на фазовый вектор в начальный t_0 и конечный t_1 моменты времени в общем виде можно записать так:

$$x(t_0) \in X_0, \quad x(t_1) \in X_1. \quad (5.3)$$

Вектор $x(t_0)$ называют *левым*, а вектор $x(t_1)$ – *правым* концом траектории. Краевые условия имеют вид (5.3), если ограничения на левый и правый конец траектории *разделены*. В противном случае они записываются в виде

$$(x(t_0), x(t_1)) \in V_0, \quad V_0 \subset R^{2n}$$

Критерий оптимальности, который является числовым показателем качества системы, задается в виде функционала

$$J = J(u(t), x(t)). \quad (5.4)$$

Задача оптимального управления формулируется следующим образом:

Определение 5.1. При заданных уравнении объекта управления (5.1), ограничениях (5.2) и краевых условиях (5.3) требуется найти такое управление $u^*(t)$ и фазовую траекторию $x^*(t)$, при которых критерий (5.4) принимает *минимальное* (или *максимальное*) значение. Тогда управление $u^*(t)$ и траектория $x^*(t)$ называются *оптимальными*.

В дальнейшем для определенности примем, что функционал (5.4) минимизируется. Задачу максимизации выбором нового критерия $J_1 = -J$ всегда можно свести к задаче минимизации.

В зависимости от вида ограничений (5.2), вида краевых условий (5.3), времени начала и окончания процесса управления, а также критерия

оптимальности (5.4) выполняется *классификация задач оптимального управления*.

1. По виду *ограничений* различают задачи:

а) классического типа, когда ограничения задаются в виде равенства

$$\varphi_i(x, u, t) = 0 \quad (i = \overline{1, k}); \quad (5.5)$$

б) неклассического типа, когда ограничения задаются в виде неравенств

$$\varphi_i(x, u, t) \leq 0 \quad (i = \overline{1, k}). \quad (5.6)$$

К классическому типу относятся также изопериметрические задачи, т.е. задачи с *изопериметрическими ограничениями*:

$$\int_{t_0}^{t_1} f_{n+j}(x, u, t) dt = b_j \quad (j = \overline{1, l}). \quad (5.7)$$

Введением дополнительных переменных от изопериметрических ограничений всегда можно избавиться. Достаточно вместо изопериметрических ограничений (5.7) в условие задачи ввести следующие уравнения и краевые условия:

$$x'_{n+j} = f_{n+j}(x, u, t), \quad x_{n+j}(t_0) = 0, \quad x_{n+j}(t_1) = b_j \quad (j = \overline{1, l})$$

Формально задачи неклассического типа введением дополнительных переменных можно преобразовать к задачам классического типа. Действительно, ограничения (5.6) можно заменить ограничениями типа равенств

$$\varphi_i(x, u, t) + u_{m+i}^2 = 0 \quad (i = \overline{1, k}).$$

Задачи оптимального управления неклассического типа могут иметь ограничения вида

$$\int_{t_0}^{t_1} f_{n+r}(x, u, t) dt \leq c_r \quad (r = \overline{1, s}).$$

Введением дополнительных переменных эти ограничения могут быть заменены соотношениями

$$x'_{n+r} = f_{n+r}(x, u, t), \quad x_{n+r}(t_0) = 0, \quad x_{n+r}(t_1) \leq c_r \quad (r = \overline{1, s}).$$

2. По виду *краевых условий* различают задачи:

а) с фиксированными (закрепленными) концами траектории, когда каждое из множеств X_0 и X_1 состоит из одной точки, т.е. $x(t_0) = x^{(0)}$, $x(t_1) = x^{(1)}$, $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$ – заданные точки;

б) с подвижным правым концом (X_1 состоит более чем из одной точки), с подвижным левым концом (X_0 состоит более чем из одной точки), с подвижными концами (оба конца подвижны);

с) со свободным правым концом (X_1 совпадает со всем фазовым пространством, т.е. правый конец траектории без ограничений).

3. По времени начала и окончания процесса различают задачи:

а) с фиксированным временем, когда начальный t_0 и конечный t_1 моменты времени фиксированы;

б) с нефиксированным временем, когда один из моментов времени t_0 или t_1 не фиксирован.

4. По критерию оптимальности различают:

а) задачу Больца; при этом критерий имеет вид

$$J = g_0(x(t_0), x(t_1), t_0, t_1) + \int_{t_0}^{t_1} G(x, u, t) dt$$

б) задачу Лагранжа; при этом критерий имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} G(x, u, t) dt;$$

с) задачу Майера; при этом критерий имеет вид

$$J = g_0(x(t_0), x(t_1), t_0, t_1).$$

Задача Майера в частном случае, когда функционал имеет вид $J = (t_1 - t_0)$, называется задачей максимального (оптимального) быстрого действия.

Задачи Больца, Лагранжа и Майера эквивалентны в том смысле, что путем преобразования переменных можно от одной задачи перейти к другой.

5.2. Необходимые и достаточные условия экстремума функционала

Основной вопрос вариационного исчисления – вывод необходимых условий экстремума (для определенности – минимума). Условия существования экстремума определяются классом задачи оптимального управления.

Задача с закрепленными концами траекторий и фиксированным временем.

Предположим, что на некоторой *гладкой* одномерной кривой $x(t)$, проходящей через точки $x^{(0)} = x(t_0)$ и $x^{(1)} = x(t_1)$, достигается *слабый* *относительный* (локальный) минимум функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} G(x, x', t) dt, \quad (5.8)$$

где функция $G(x, x', t)$ предполагается непрерывной и имеющей по всем аргументам непрерывные частные производные до второй включительно.

Определим, каким условиям должна удовлетворять функция $x(t)$, чтобы на ней достигался минимум функционала (5.8). Предположим, что такая функция найдена. Сравним значения функционалов для *близких* к $x(t)$ функций. Близкие функции определяются малостью расстояния между самими функциями и их производными. Для функционала (5.8) должны выполняться условия близости самих функций и их первых производных. Известно, что малое изменение аргумента функции называется приращением. Аналогично малое изменение функции принято называть ее *вариацией*.

Для сравнения значений функционала придадим функции $x(t)$ вариацию $x(t) + \alpha h(t)$, где $\alpha \in R$, а $h(t)$ – произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условиям $\alpha h(t_0) = 0$ и $\alpha h(t_1) = 0$, т.е. варьируемая кривая должна проходить через концы интервала.

Определим приращение функционала J :

$$\Delta J = J(\alpha) - J = \int_{t_0}^{t_1} G(x + \alpha h, x' + \alpha h', t) dt - \int_{t_0}^{t_1} G(x, x', t) dt. \quad (5.9)$$

Разложим ΔJ в ряд Тейлора по степеням α :

$$\Delta J = \alpha \frac{dJ}{d\alpha} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{d^2 J}{d\alpha^2} + \frac{\alpha^3}{3!} \frac{d^3 J}{d\alpha^3} + \dots. \quad (5.10)$$

Первый член разложения (5.10) обозначается $\delta J = \alpha \frac{dJ}{d\alpha}$ и называется *первой вариацией*. Таким образом, первая вариация – главная, ли-

нейная часть приращения функционала J . Второй член – обозначается

$\delta^2 J = \frac{\alpha^2}{2} \frac{d^2 J}{d\alpha^2}$ и называется *второй вариацией*. Вторая вариация нелинейная.

При α , стремящемся к нулю, члены, содержащие квадрат и более высокие степени α , убывают быстрее, чем линейный член. Поэтому знак приращения функционала при малых значениях α совпадает со знаком линейного члена, т.е. при малых α $\Delta J \approx \delta J$. В то же время, согласно предположению о том, что на кривой $x(t)$ достигается минимум функционала, разность ΔJ не может быть отрицательной, т.е.

$$\Delta J \approx \delta J = \alpha \frac{dJ}{d\alpha} \geq 0. \quad (5.11)$$

Для того, чтобы неравенство (5.11) выполнялось при любых α и положительных, и отрицательных, необходимо равенство

$$\frac{dJ}{d\alpha} = 0, \quad (5.12)$$

и тем самым $\delta J = 0$ (если $dJ/d\alpha > 0$, то при положительных и достаточно малых α будет $\Delta J \approx \alpha(dJ/d\alpha) > 0$, при отрицательных и достаточно малых α $\Delta J < 0$). Следовательно, необходимым условием экстремума является *равенство нулю первой вариации функционала*.

Раскрывая производную $dJ/d\alpha$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\alpha} G(x + \alpha h, x' + \alpha h', t) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \frac{d(x + \alpha h)}{d\alpha} + \frac{\partial G}{\partial x'} \frac{d(x' + \alpha h')}{d\alpha} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial G}{\partial x} h + \frac{\partial G}{\partial x'} h' \right) dt \end{aligned}$$

Таким образом, приращение ΔJ можем представить в виде

$$\Delta J \approx \delta J = \alpha \frac{dJ}{d\alpha} = \alpha \int_{t_0}^{t_1} (G_x h + G_{x'} h') dt, \quad (5.13)$$

где приняты следующие обозначения:

$$G_x = \frac{\partial G(x, x', t)}{\partial x}; \quad G_{x'} = \frac{\partial G(x, x', t)}{\partial x'}.$$

Проинтегрируем второй член подынтегрального выражения в (5.13) по частям:

$$\int_{t_0}^{t_1} G_{x'} h' dt = G_{x'} h(t) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} h(t) \frac{d}{dt} G_{x'} dt .$$

Так как $h(t)$ обращается в нуль в точках t_0 и t_1 , то

$$\int_{t_0}^{t_1} G_{x'} h' dt = - \int_{t_0}^{t_1} h(t) \frac{d}{dt} G_{x'} dt .$$

В результате

$$\delta J = \alpha \int_{t_0}^{t_1} \left(G_x - \frac{d}{dt} G_{x'} \right) h(t) dt . \quad (5.14)$$

Теперь к выражению (5.14) применим лемму Лагранжа, которая утверждает: *если непрерывная функция $M(t)$ обладает тем свойством, что $\int_a^b M(t) h(t) dt = 0$ для любой гладкой функции $h(t)$, то обязательно $M(t) = 0$ для всех $t \in [a, b]$.*

На основании леммы Лагранжа из равенства (5.14) можно сделать важный вывод: если $x(t)$ доставляет экстремум функционалу (5.9), то необходимо, чтобы

$$G_x - \frac{d}{dt} G_{x'} = 0 . \quad (5.15)$$

Уравнение (5.15) называется *уравнением Эйлера*. Оно играет центральную роль в вариационном исчислении. С его помощью можно определить функцию, на которой может достигаться экстремум. Решения уравнения Эйлера называются *экстремалиями*. Общее решение его содержит две постоянные интегрирования, для определения которых требуется удовлетворение двух условий. Как правило, в качестве таких условий задаются значения функции $x(t)$ в начале и конце интервала: $x(t_0)$ и $x(t_1)$.

Выполнив полное дифференцирование по t второго члена уравнения (5.15) с учетом того, что $G_{x'} = G_{x'}(x(t), x'(t), t)$, получим

$$\frac{d}{dt}G_{x'} = \frac{\partial G_{x'}}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial G_{x'}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial G_{x'}}{\partial x'} \frac{dx'}{dt},$$

и уравнение Эйлера (5.15) можно записать в следующем виде:

$$G_x - G_{x't} - G_{x'x} x' - G_{x'x'} x'' = 0, \quad (5.16)$$

где

$$G_{x't} = \frac{\partial^2 G(x, x', t)}{\partial x' \partial t}, \quad G_{x'x} = \frac{\partial^2 G(x, x', t)}{\partial x' \partial x}, \quad G_{x'x'} = \frac{\partial^2 G(x, x', t)}{\partial x' \partial x'}.$$

Из (5.16) следует, что в общем случае уравнение Эйлера является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка и поэтому его решить нелегко. Следует заметить, что вывод уравнения Эйлера через лемму Лагранжа можно считать корректным, если заранее предполагается, что у функции $x(t)$, на которой достигается экстремум, непрерывны как первая производная $x'(t)$, так и вторая производная $x''(t)$.

Уравнение Эйлера можно проинтегрировать лишь в некоторых частных случаях [11].

З а м е ч а н и я .

1. Уравнению Эйлера должен удовлетворять сколь угодно малый отрезок функции $x(t)$. Каждый кусок экстремали тоже является экстремалью. Обратное утверждение неверно: кривая, составленная из кусков экстремалей, может в целом и не доставлять экстремума [11].

2. Выполнение уравнения Эйлера является только необходимым условием экстремума. Экстремали могут иногда не доставлять ни максимума, ни минимума подобно тому, как в дифференциальном исчислении точки, где производная обращается в нуль, могут и не быть экстремальными, а являться, например, точками перегиба. Однако, если уравнение Эйлера вообще не может выполняться ни для одной функции (является противоречивым), то это говорит о том, что для данного функционала не существует экстремума в классе кусочно-гладких функций.

3. Формулу (5.16) можно записать в виде

$$x'' = \frac{G_x - G_{x't} - G_{x'x} x'}{G_{x'x'}}.$$

Но для всех функционалов (за исключением вырожденных) $G_{x'x'}$ не равно нулю тождественно и может обращаться в нуль лишь в отдельных точках. За вычетом этих точек по этой формуле можно вычислить значение второй производной. Таким образом, экстремаль невырожденного функционала всегда является гладкой линией, имеющей непрерывную вторую производную.

Изломы кривой, доставляющей экстремум, могут быть лишь в отдельных точках, где либо $G_{x'x'} = 0$, либо сама функция $G(x, x', t)$ терпит разрыв.

В случае многомерной системы *необходимыми условиями* экстремума функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} G(x, x', t) dt$$

на множестве непрерывно дифференцируемых функций $x(t) \in R^n$ с фиксированными конечными значениями $x(t_0) = x^{(0)}$, $x(t_1) = x^{(1)}$ при условии двойной дифференцируемости по всем своим аргументам функции $G(x, x', t)$ являются уравнения Эйлера

$$\frac{\partial G}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial x'_j} = 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Решение уравнений Эйлера (5.15) или (5.16) определяет собой возможную экстремаль функционала J . Чтобы ответить на вопрос о характере экстремума на заданной экстремали, необходимо проверить выполнение *достаточного условия экстремума – условия Лежандра*. Это условие позволяет различать максимум и минимум.

Действительно, как показывает разложение (5.10), если первая вариация обращается в нуль, то, поскольку при достаточно малом α члены высшего порядка убывают быстрее, чем квадратичный член, знак приращения функционала ΔJ совпадает со знаком второй вариации:

$$\delta^2 J = \frac{\alpha^2}{2} \left[G_{xx} h^2 + 2G_{xx'} h h' + G_{x'x'} (h')^2 \right].$$

Поэтому в случае минимума $\delta^2 J \geq 0$, в случае максимума $\delta^2 J \leq 0$. С учетом (5.8) очевидно, что

$$\begin{aligned}\frac{d^2 J}{d\alpha^2} &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d^2}{d\alpha^2} G(x + \alpha h, x' + \alpha h', t) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [G_{xx} h^2 + 2G_{xx'} h h' + G_{x'x'} (h')^2] dt.\end{aligned}$$

Второй член вариации можно преобразовать, применив интегрирование по частям, с учетом того, что $h(t_0) = 0$ и $h(t_1) = 0$:

$$2 \int_{t_0}^{t_1} G_{xx'} h h' dt = \int_{t_0}^{t_1} G_{xx'} dh^2 = G_{xx} h^2 \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} G_{xx'} h^2 dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} G_{xx'} h^2 dt.$$

Следовательно,

$$\frac{d^2 J}{d\alpha^2} = 2 \int_{t_0}^{t_1} (P h^2 + R \cdot (h')^2) dt,$$

где

$$P = \frac{1}{2} \left(G_{xx} - \frac{d}{dt} G_{xx'} \right); \quad R = \frac{1}{2} G_{x'x'}.$$

Но так как $h(t)$ – произвольная функция, то для того, чтобы выполнялось неравенство $\frac{d^2 J}{d\alpha^2} \geq 0$, необходимо $G_{x'x'} \geq 0$. Действительно, легко подобрать такую функцию $h(t)$, чтобы $[h(t)]^2$ было мало, а $[h'(t)]^2$ велико. Для такой функции знак второй вариации будет совпадать со знаком $G_{x'x'}$, и мы приходим к следующему необходимому условию (*условию Лежандра*):

– для того, чтобы кривая $x(t)$ доставляла минимум функционалу $J = \int_{t_0}^{t_1} G(x, x', t) dt$, должно выполняться неравенство $G_{x'x'} \geq 0$; для максимума – необходимо $G_{x'x'} \leq 0$.

Для многомерной системы *достаточным условием* минимума функционала, т.е. *условием Лежандра*, является условие положительности квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^n G_{x'_i x'_j}(x, x', t) h_i h_j \geq 0 \quad \text{при } t \in [t_0, t_1] \quad (5.17)$$

и произвольных $h_i \left(\sum_{i=1}^n h_i^2 \neq 0 \right)$. Иначе говоря, если на экстремали $x(t)$

диагональные миноры определителя квадратичной формы (5.17) неотрицательны, т.е.

$$G_{x'x'} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} G_{x'_1 x'_1} & G_{x'_1 x'_2} \\ G_{x'_2 x'_1} & G_{x'_2 x'_2} \end{vmatrix} \geq 0, \dots, \begin{vmatrix} G_{x'_1 x'_1} & \dots & G_{x'_1 x'_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{x'_n x'_1} & \dots & G_{x'_n x'_n} \end{vmatrix} \geq 0$$

и отрезок $[t_0, t_1]$ не содержит точек, сопряженных с t_0 , то экстремаль $x(t)$ доставляет минимум функционалу (5.8).

Задача с подвижными концами траектории.

Задача с подвижными концами траектории является более сложной. В этом случае вариация функционала зависит от вариации искомой функции $x(t)$ и от вариации ее концов. В общем случае в качестве границ могут выступать многомерные кривые и поверхности.

Рассмотрим одномерную задачу с функционалом (5.8) и подвижными концами. С учетом приращения функции $x(t) + h(t)$ и ее концов $t_0 + \delta t_0$ и $t_1 + \delta t_1$ приращение функционала представим в следующей форме:

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{t_0 + \delta t_0}^{t_1 + \delta t_1} G(x + h, x' + h', t) dt - \int_{t_0}^{t_1} G(x, x', t) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [G(x + h, x' + h', t) - G(x, x', t)] dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} G(x + h, x' + h', t) dt - \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} G(x + h, x' + h', t) dt. \end{aligned}$$

Здесь первый интеграл – *вариация кривой*, а два последних – *вариации концов*.

Предположим, что приращения h , h' , δt_0 , δt_1 бесконечно малые. Тогда линейная часть приращения функционала, т.е. *первая вариация*, будет иметь следующий вид:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} (G_x h + G_{x'} h') dt + G \Big|_{t=t_1} \delta t_1 - G \Big|_{t=t_0} \delta t_0. \quad (5.18)$$

Второй член подынтегрального выражения в формуле (5.18) проинтегрируем по частям, в результате чего получим:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left(G_x - \frac{d}{dt} G_{x'} \right) h dt + G_{x'} h \Big|_{t_0}^{t_1} + G \Big|_{t=t_1} \delta t_1 - G \Big|_{t=t_0} \delta t_0.$$

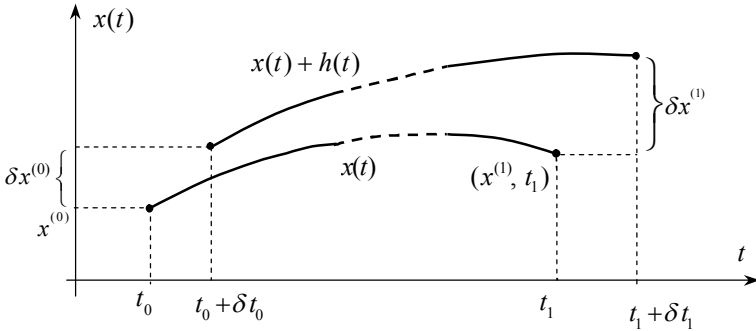


Рис. 5.1.

С точностью до бесконечно малых высшего порядка можно написать (рис. 5.1):

$$h(t_0) = \delta x^{(0)} - x' \delta t_0; \quad h(t_1) = \delta x^{(1)} - x' \delta t_1;$$

и тогда окончательно получим:

$$\begin{aligned} \delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left(G_x - \frac{d}{dt} G_{x'} \right) h dt + G_{x'} \Big|_{t=t_1} \delta x^{(1)} + (G - x' G_{x'}) \Big|_{t=t_1} \delta t_1 - \\ - G_{x'} \Big|_{t=t_0} \delta x^{(0)} - (G - x' G_{x'}) \Big|_{t=t_0} \delta t_0, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где есть интегральный член, зависящий от вариации кривой внутри первоначального интеграла, и – члены вне интеграла, зависящие от вариации концов.

Пусть, например, требуется определить экстремум функционала среди кривых $x(t)$, концы которых могут перемещаться по двум кривым $x = \varphi(t)$ и $x = \vartheta(t)$. Предположим, что такая экстремаль найдена. Тогда интегральный член в формуле (5.19) обращается в нуль и

$$\begin{aligned}\delta J = & G_{x'} \Big|_{t=t_1} \delta x^{(1)} + (G - x' G_{x'}) \Big|_{t=t_1} \delta t_1 - \\ & - G_{x'} \Big|_{t=t_0} \delta x^{(0)} - (G - x' G_{x'}) \Big|_{t=t_0} \delta t_0.\end{aligned}$$

Так как с точностью до бесконечно малых высшего порядка

$$\delta x^{(0)} = \varphi'(t) \delta t_0; \quad \delta x^{(1)} = \vartheta'(t) \delta t_1,$$

то условие экстремума функционала $\delta J = 0$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\delta J = & (G_{x'} \vartheta' + G - x' G_{x'}) \Big|_{t=t_1} \delta t_1 - \\ & - (G_{x'} \varphi' + G - x' G_{x'}) \Big|_{t=t_0} \delta t_0 = 0.\end{aligned}\tag{5.20}$$

Так как δt_0 и δt_1 – независимые друг от друга приращения, то из (5.20) следует

$$\begin{cases} \vartheta' G_{x'} + G - x' G_{x'} \Big|_{t=t_1} = 0 \\ \varphi' G_{x'} + G - x' G_{x'} \Big|_{t=t_0} = 0 \end{cases}\tag{5.21}$$

Условия (5.21) называются *условиями трансверсальности*. Условия трансверсальности позволяют найти положение концов экстремали.

Задача на условный экстремум.

Весьма часто встречаются вариационные задачи, когда функции доставляющие экстремум функционалу, сами подчинены некоторым дополнительным условиям (*уравнениям связи*). Такие задачи называются задачами на условный экстремум.

Рассмотрим функционал вида

$$J = \int_{t_0}^{t_1} G(x, x', t) dt,\tag{5.22}$$

где $x = x(t) \in R^n$ – непрерывный вектор, компоненты которого зависимые переменные. Характер зависимости указанных переменных определяется уравнениями связи. Для задач управления – это уравнения системы управления (*дифференциальные уравнения связи*) вида

$$\varphi_i(x, x', t) = 0 \quad (i = \overline{1, n}),\tag{5.23}$$

называемых *дифференциальными связями*. Задачу с дифференциальными связями называют *общей задачей Лагранжа*.

Для решения вариационной задачи в этом случае используется метод *неопределенных множителей Лагранжа*, суть которого состоит в том, что уравнения Эйлера составляются для вспомогательной функции, т.е. *функции Лагранжа*,

$$L = G(x, x', t) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \varphi_i(x, x', t), \quad (5.24)$$

где $\psi_i(t)$ – неопределенные множители Лагранжа, *зависящие* от времени t .

Если условия, которым подчинены искомые функции, заданы в виде определенных интегралов (*интегральные уравнения связи*) вида

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi_i(x(t), x'(t), t) dt = c_i = \text{const} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (5.25)$$

где c_i – заданные величины, то для решения задачи также составляется функция Лагранжа

$$L = G(x(t), x'(t), t) + \sum_{i=1}^n \psi_i \varphi_i(x(t), x'(t), t), \quad (5.26)$$

где ψ_i – неопределенные множители Лагранжа, *не зависящие* от времени t . Вариационная задача при условиях (5.25) носит название *изопериметрической задачи*.

Уравнения Эйлера для функции (5.24) (или (5.26)) имеют вид

$$\frac{dL}{dx_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'_i} = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (5.27)$$

Для нахождения функции $x(t)$ и множителей $\psi_i(t)$ (или ψ_i) вместе с уравнениями (5.27) используются уравнения связи (5.23) (или (5.25)). Постоянные интегрирования общего решения системы уравнений определяются граничными условиями

$$x(t_0) = x^{(0)}, \quad x(t_1) = x^{(1)}.$$

Уравнения (5.27) для задач на условный экстремум часто называют *уравнениями Эйлера–Лагранжа*.

Аналогично, при любой другой постановке задачи поиска экстремали можно вывести условия, позволяющие однозначно найти решение.

Рассмотрим кратко некоторые частные постановки задач оптимального управления и подходы к их решению.

Задача с функционалом, зависящим от производных высших порядков.

Пусть функционал имеет вид:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} G(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) dt. \quad (5.28)$$

Тогда экстремаль должна удовлетворять уравнению Эйлера–Пуассона

$$G_x - \frac{d}{dt} G_{x'} + \frac{d^2}{dt^2} G_{x''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} G_{x^{(n)}} = 0. \quad (5.29)$$

Вывод необходимого условия экстремума (5.29) аналогичен выводу уравнения Эйлера (5.15). При этом условие (5.29) представляет собой дифференциальное уравнение $2n$ порядка. Произвольные постоянные $(2n)$, входящие в его решение, определяются из граничных условий.

Если концы не закреплены, то выводится условие трансверсальности для функционалов, зависящих от производных высшего порядка.

Достаточное условие экстремума определяется условием Лежандра, которое для функционала (5.28) имеет следующий вид:

- если экстремаль доставляет минимум функционалу (5.28), то необходимо, чтобы $G_{x^{(n)}x^{(n)}} \geq 0$;
- если экстремаль доставляет максимум функционалу (5.28), то необходимо, чтобы $G_{x^{(n)}x^{(n)}} \leq 0$;
- если $G_{x^{(n)}x^{(n)}} \equiv 0$, то это означает, что функционал (5.28) – вырожденный.

Задачи, экстремали которых имеют изломы.

Существуют функционалы, экстремум которых достигается в классе кривых, имеющих изломы в отдельных точках [11]. В этом случае определяется решение уравнения Эйлера таким образом, чтобы выполнялись условия Вейерштрасса–Эрдмана, которые позволяют определить недостающие произвольные постоянные в уравнениях экстремалей и тем самым согласовать экстремали в точках разрыва.

Например, положим для простоты, что кривая, доставляющая экстремум функционалу $J = \int_{t_0}^{t_1} G(x, x', t) dt$ имеет один излом в точке τ , находящейся между t_0 и t_1 . Этот интеграл представляется в виде суммы двух интегралов

$$J = \int_{t_0}^{\tau} G(x, x', t) dt + \int_{\tau}^{t_1} G(x, x', t) dt$$

и вычисляется вариация каждого из них в отдельности. В этом случае при $t = \tau$ и $x(t) = x(\tau)$ имеем $x'_{t=\tau-0} \neq x'_{t=\tau+0}$. На каждом из отрезков $[t_0, \tau]$ и $[\tau, t_1]$ кривые $x(t)$ являются экстремалими; следовательно, интегральный член формулы (5.19) обращается в нуль и

$$\begin{cases} \delta J_1 = G_{x'}|_{t=\tau-0} \delta x_0 + (G - x'G_{x'})|_{t=\tau-0} \delta t_0, \\ \delta J_2 = G_{x'}|_{t=\tau+0} \delta x_0 + (G - x'G_{x'})|_{t=\tau+0} \delta t_0, \end{cases}$$

где символ $t = t_0 - 0$ означает, что производные берутся при t , стремящемся к точке t_0 слева, а символ $t = t_0 + 0$ — что они берутся при t , стремящемся к точке t_0 справа.

Необходимым условием экстремума является равенство нулю первой вариации, т.е. $\delta J = \delta J_1 + \delta J_2 = 0$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} & (G_{x'}|_{t=\tau-0} - G_{x'}|_{t=\tau+0}) \delta x_0 + \\ & + [(G - x'G_{x'})|_{t=\tau-0} - (G - x'G_{x'})|_{t=\tau+0}] \delta t_0 = 0, \end{aligned}$$

откуда вследствие произвольности δx_0 и δt_0 вытекают следующие условия

$$\begin{cases} G_{x'}|_{t=\tau-0} = G_{x'}|_{t=\tau+0}, \\ (G - x'G_{x'})|_{t=\tau-0} = (G - x'G_{x'})|_{t=\tau+0}. \end{cases}$$

Эти условия называются *условиями Вейерштрасса–Эрдмана*. Они позволяют определить те произвольные постоянные, которые не определяются из уравнений Эйлера.

Условия Вейерштрасса–Эрдмана позволяют уточнить смысл теоремы Эйлера. Теорема Эйлера утверждает, что если экстремум существует и достигается в классе кусочно-гладких функций, то он достигается только на экстремальных. Однако экстремалей бесчисленное множество, и, вообще говоря, теорема Эйлера оставляет открытой возможность того, что кривая, доставляющая экстремум, составляется из дуг экстремалей, соответствующих различным значениям постоянной интегрирования и сопрягающихся с изломом, или же составляется из различных решений уравнения Эйлера, если оно имеет несколько решений.

Условия Вейерштрасса–Эрдмана позволяют устранить эту неопределенность. Изломы могут быть лишь в том случае, если или $G_{x'x'} = 0$, или же сама функция G терпит разрыв, и угол излома может быть лишь таким, чтобы удовлетворялись условия Вейерштрасса–Эрдмана.

Кривая, составленная из решений уравнений Эйлера таким образом, чтобы выполнялись условия Вейерштрасса–Эрдмана, называется *ломаной экстремалью*.

5.3. Каноническая форма уравнений Эйлера–Лагранжа

Рассмотрим общую задачу Лагранжа (оптимизации системы управления):

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, u, t), \quad i = \overline{1, n}, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m; \quad (5.30)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} G(x, u, t) dt \rightarrow \min. \quad (5.31)$$

Уравнения Эйлера для функционала (5.31) имеют вид

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial x_i'} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Каноническая форма уравнений Эйлера является обобщением оптимизации систем управления, которые относятся к задачам на условный экстремум.

Введем новые переменные $\psi_i(t) = \frac{\partial G}{\partial x'_i}$, $i = \overline{1, n}$. Построим функцию Лагранжа следующего вида:

$$L(x, u, \psi, t) = G(x, u, t) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) (x'_i - f_i(x, u, t)).$$

Тогда можно рассмотреть новую задачу в виде функционала

$$\bar{J} = \int_{t_0}^{t_1} L(x, u, \psi, t) dt \rightarrow \min.$$

Применяя уравнения Эйлера к этому функционалу, получим уравнения Эйлера в следующем виде:

$$\begin{cases} L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{x'_i} = 0, & i = \overline{1, n}; \\ L_{u_j} - \frac{d}{dt} L_{u'_j} = 0, & j = \overline{1, m}; \\ L_{\psi_i} - \frac{d}{dt} L_{\psi'_i} = 0, & i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (5.32)$$

Рассмотрим каждую производную последней системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial G}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, & \frac{\partial L}{\partial x'_i} &= \psi_i(t), & i &= \overline{1, n}; \\ \frac{\partial L}{\partial u_j} &= \frac{\partial G}{\partial u_j} - \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial u_j}, & \frac{\partial L}{\partial u'_j} &= 0, & j &= \overline{1, m}; \\ \frac{\partial L}{\partial \psi_i} &= \frac{dx_i}{dt} - f_i(x, u, t), & \frac{\partial L}{\partial \psi'_i} &= 0, & i &= \overline{1, n}. \end{aligned}$$

С учетом этих выражений уравнения Эйлера принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\partial G}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, & i = \overline{1, n}; \\ -\frac{\partial G}{\partial u_j} + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial u_j} = 0, & j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Эта система решается совместно с дифференциальными уравнениями связи (5.30) исходной задачи.

Введем следующие обозначения: $f_0(x, u, t) = -G(x, u, t)$; $\psi_0(t) = 1$.

Тогда уравнения Эйлера можно записать в компактной форме:

$$\begin{cases} \frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{k=0}^n \psi_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, & i = \overline{1, n}; \\ \sum_{k=0}^n \psi_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial u_j} = 0, & j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Введем новую функцию $H(x, u, \psi) = \sum_{k=0}^n \psi_k(t) f_k(x, u)$, которая

называется *функцией Гамильтона*.

Дифференцируя функцию Гамильтона по всем переменным, получим уравнения Эйлера в канонической форме:

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_k}, & k = 0, 1, \dots, n; \\ \frac{d\psi_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, & k = 0, 1, \dots, n; \\ \frac{\partial H}{\partial u_j} = \sum_{k=0}^n \psi_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial u_j} = 0, & j = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (5.33)$$

Условие $\partial H / \partial u_j = 0$ является *необходимым условием* экстремума функции Гамильтона.

Из последней системы уравнений (5.33) определяются переменные $x(t)$, $u(t)$, $\psi(t)$ – *экстремали* (оптимальное решение) исходной задачи (5.30) – (5.31).

Пример 5.1.

Рассмотрим задачу об оптимальном управлении электроприводом, динамика которого описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \end{cases} \quad (5.34)$$

где $x_1(t)$ – угол поворота вала электродвигателя и $x_2(t)$ – скорость поворота.

Необходимо определить оптимальный процесс перевода системы (5.34) из одной точки фазового пространства

$$x_1(t_0) = 0, \quad x_2(t_0) = 0, \quad (5.35)$$

в другую заданную точку фазового пространства

$$x_1(t_1) = \alpha_0, \quad x_2(t_1) = 0 \quad (5.36)$$

за фиксированный отрезок времени $T = (t_1 - t_0)$, затрачивая при этом минимум энергии управляющего сигнала, т.е. функционалом минимизации, является интеграл

$$J = \int_{t_0}^{t_1} u^2(t) dt \rightarrow \min.$$

Для построения конкретных временных диаграмм предположим, что $t_0 = 0$, $t_1 = T$.

Решение.

Для определения оптимального управления $u^*(t)$ и оптимальной фазовой траектории $x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t))$ воспользуемся уравнениями Эйлера (5.32).

Составим функцию Лагранжа

$$L(x, u, \psi) = u^2(t) + \psi_1(t)(x_1'(t) - x_2(t)) + \psi_2(t)(x_2'(t) - u(t)).$$

Получаем задачу безусловной оптимизации с теми же граничными условиями (5.35) и (5.36) в виде функционала

$$\bar{J} = \int_{t_0}^{t_1} L(x, u, \psi) dt \rightarrow \min. \quad (5.37)$$

Применяем уравнения Эйлера

$$\begin{cases} L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{x_i'} = 0, & i = 1, 2; \\ L_u - \frac{d}{dt} L_{u'} = 0; \\ L_{\psi_i} - \frac{d}{dt} L_{\psi_i'} = 0, & i = 1, 2. \end{cases}$$

к функционалу (5.37). Вычисляем соответствующие производные уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 0, & \frac{\partial L}{\partial x'_1} &= \psi_1(t), & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'_1} \right) &= \frac{d\psi_1}{dt}, \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= -\psi_1(t), & \frac{\partial L}{\partial x'_2} &= \psi_2(t), & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'_1} \right) &= \frac{d\psi_2}{dt}, \\
\frac{\partial L}{\partial u} &= 2u(t) - \psi_2(t), & \frac{\partial L}{\partial u'} &= 0, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u'} \right) &= 0, \\
\frac{\partial L}{\partial \psi_1} &= x'_1(t) - x_2(t), & \frac{\partial L}{\partial \psi_2} &= x'_2(t) - u(t).
\end{aligned}$$

Подставляя найденные величины в уравнения Эйлера, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \psi'_1(t) = 0, & \psi'_2(t) + \psi_1(t) = 0, & 2u(t) - \psi_2(t) = 0, \\ x'_1(t) - x_2(t) = 0, & x'_2(t) - u(t) = 0. \end{cases} \quad (5.38)$$

Решая систему (5.38), последовательно находим:

$$\begin{aligned}
\psi_1(t) &= C_1, & \psi_2(t) &= -C_1 t + C_2, \\
u(t) &= -\frac{C_1}{2} t + \frac{C_2}{2}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$x_2(t) = -\frac{C_1}{4} t^2 + \frac{C_2}{2} t + C_3, \quad (5.40)$$

$$x_1(t) = -\frac{C_1}{12} t^3 + \frac{C_2}{4} t^2 + C_3 t + C_4. \quad (5.41)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 , C_2 , C_3 и C_4 в (5.39) – (5.41) используем граничные условия (5.35) и (5.36) при $t_0 = 0$, $t_1 = T$. После несложных вычислений находим:

$$C_1 = 24\alpha_0/T^3, \quad C_2 = 12\alpha_0/T^2, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0.$$

Следовательно, для заданных граничных условий можно окончательно записать уравнения оптимальных процессов $u^*(t)$, $x_2^*(t)$ и $x_1^*(t)$

$$\begin{aligned}
u^*(t) &= -\frac{12\alpha_0}{T^3} t + \frac{6\alpha_0}{T^2}, & x_2^*(t) &= -\frac{6\alpha_0}{T^3} t^2 + \frac{6\alpha_0}{T^2} t, \\
x_1^*(t) &= -\frac{2\alpha_0}{T^3} t^3 + \frac{3\alpha_0}{T^2} t^2. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Графики $u^*(t)$ и $x_2^*(t)$, соответствующие формулам (5.42), приведены на рис. 5.2.

Как видно из рис. 5.2, управляющее воздействие $u^*(t)$ (ток якоря двигателя) должно меняться по линейному закону, а скорость поворота вала двигателя $x_2^*(t)$ – по параболе, где α_0 – заданный угол поворота вала двигателя.

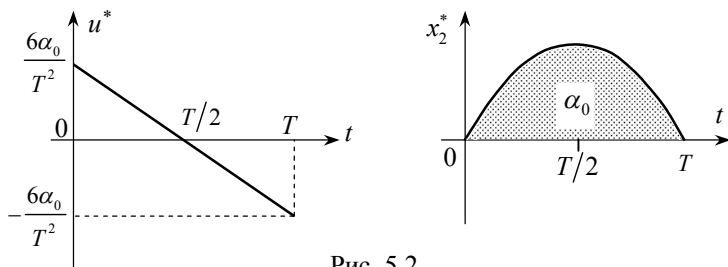


Рис. 5.2.

Пример 5.2.

На основании примера 5.1 при той же постановке задачу оптимального управления рассмотрим влияние ограничения по скорости в следующем виде

$$|x_2(t)| \leq \chi, \quad \chi > 0 \quad (5.43)$$

на решение задачи.

Таким образом, можем исследовать решение задачи в примере 5.1 с учетом условия (5.43). Из (5.42) следует, что решение относительно переменной $x_2^*(t)$ должно удовлетворять условию

$$x_2^*(t) = -\frac{6\alpha_0}{T^3}t^2 + \frac{6\alpha_0}{T^2}t < \chi. \quad (5.44)$$

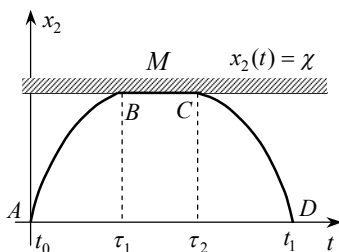


Рис. 5.3.

Если условие (5.44) не выполняется, то $u^*(t)$, $x_2^*(t)$ и $x_1^*(t)$ не являются решениями поставленной задачи. Иначе говоря, если имеет место условие $\chi < (3\alpha_0)/(2T)$, то оптимальная траектория $x_2(t)$ состоит из трех частей (рис. 5.3): одна часть AB лежит вне запрещенной области M и поэтому имеет форму квадратной параболы (5.40)

$$x_2(t) = -\frac{C_1}{4}t^2 + \frac{C_2}{2}t + C_3;$$

вторая часть CD также принадлежит области допустимых значений для $x_2(t)$ и поэтому будет иметь форму квадратной параболы, но с другими коэффициентами:

$$x_2(t) = -\frac{\bar{C}_1}{4}t^2 + \frac{\bar{C}_2}{2}t + \bar{C}_3;$$

третья часть BC (рис. 5.3) совпадает с границей области M , поэтому

$$x_2(t) = \chi$$

и соединяет первые две части.

Обозначим через τ_1 и τ_2 те моменты времени t , когда сопрягаются указанные части оптимальной траектории. Эти моменты пока еще неизвестны и подлежат определению.

В соответствии с (5.39) - (5.41) оптимальный процесс имеет вид:

1) на отрезке времени $[t_0, \tau_1]$:

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{C_1}{2}t + \frac{C_2}{2}, \\ x_2(t) &= -\frac{C_1}{4}t^2 + \frac{C_2}{2}t + C_3, \\ x_1(t) &= -\frac{C_1}{12}t^3 + \frac{C_2}{4}t^2 + C_3t + C_4; \end{aligned} \quad (5.45)$$

2) на отрезке времени $[\tau_2, t_1]$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= -\frac{\bar{C}_1}{2}t + \frac{\bar{C}_2}{2}, \\ \tilde{x}_2(t) &= -\frac{\bar{C}_1}{4}t^2 + \frac{\bar{C}_2}{2}t + \bar{C}_3, \\ \tilde{x}_1(t) &= -\frac{\bar{C}_1}{12}t^3 + \frac{\bar{C}_2}{4}t^2 + \bar{C}_3t + \bar{C}_4; \end{aligned} \quad (5.46)$$

3) на отрезке времени $[\tau_1, \tau_2]$:

$$\hat{u}(t) = 0, \quad \hat{x}_2(t) = \chi, \quad \hat{x}_1(t) = \chi t + \hat{c}_4. \quad (5.47)$$

Система соотношений (5.45) – (5.47) показывает, что оптимальный процесс управления определяется девятью произвольными постоянными

интегрирования и двумя параметрами τ_1, τ_2 моментов сопряжения. Они находятся из граничных условий (5.35), (5.36)

$$x_1(t_0) = 0, \quad x_2(t_0) = 0; \quad x_1(t_1) = \alpha_0, \quad x_2(t_1) = 0;$$

и условий сопряжения участков траектории

$$\tilde{x}_1(\tau_1) = x_1(\tau_1), \quad \tilde{x}_2(\tau_1) = x_2(\tau_1) = \chi;$$

$$\hat{x}_1(\tau_2) = \tilde{x}_1(\tau_2), \quad \hat{x}_2(\tau_2) = \tilde{x}_2(\tau_2) = \chi;$$

$$\hat{x}_1'(\tau_1) = \chi, \quad \tilde{x}_1'(\tau_2) = \chi;$$

$$\hat{x}_2'(\tau_1) = 0, \quad \tilde{x}_2'(\tau_2) = 0;$$

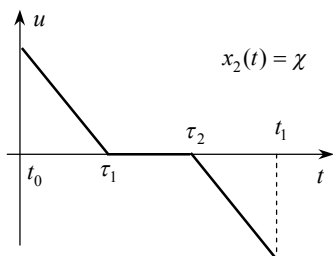


Рис. 5.4.

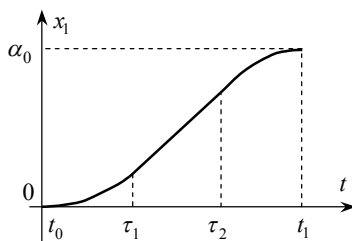


Рис. 5.5.

На рис. 5.4, 5.5 изображены графики функций $u^*(t)$ и $x_1^*(t)$.

5.4. Применение уравнений Эйлера при ограничениях на управление

Рассмотрим линейную систему управления:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) + b_i u(t), \quad i = \overline{1, n} \quad (5.48)$$

(некоторые из коэффициентов b_i могут быть равны нулю), а функционалом, экстремум которого нам надлежит определить, является время достижения системой положения равновесия, т. е.

$$J = \int_0^T dt; \quad x_j(T) = 0 \quad (j = \overline{1, n}),$$

и ограничения наложены только на управление $u(t)$.

Данную задачу о быстродействии сводим, согласно правилу построения функции Лагранжа, к задаче о минимуме линейного функционала

$$\int_0^T L dt = \int_0^T \left[1 + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \left(x_i' - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) - b_i u(t) \right) \right] dt \quad (5.49)$$

при граничных условиях $x_j(0) = x_j^{(0)}$; $x_j(T) = 0$ ($j = \overline{1, n}$) и ограничении по модулю $|u(t)| \leq 1$.

Необходимым условием экстремума, достигаемого не на границе области, является выполнение системы уравнений Эйлера

$$\begin{cases} L_{x_i} - \frac{d}{dt} L_{x_i'} = 0, \quad i = \overline{1, n}; \\ L_u = - \sum_{i=1}^n \psi_i(t) b_i = 0. \end{cases} \quad (5.50)$$

Но второе уравнение в (5.50) может выполняться лишь в особом случае, когда

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(t) b_i = 0, \quad (5.51)$$

т.е. когда функции $\psi_i(t)$ линейно зависимы – связаны между собой линейным соотношением (5.51).

Следовательно, за исключением особого случая, экстремалей внутри области не существует. Следовательно, экстремум может достигаться на границе области, где $|u| = 1$, т. е. либо $u = +1$, либо $u = -1$. Поскольку в функцию Лагранжа L не входит производная $u'(t)$, то, экстремум может достигаться на разрывной функции $u(t)$, скачком переходящей от значения $u = +1$ к значению $u = -1$ и обратно (рис. 5.6). Для полного определения функции $u(t)$ достаточно теперь найти абсциссы точек разрыва $t_1, t_2, \dots, t_k$ (рис. 5.6).

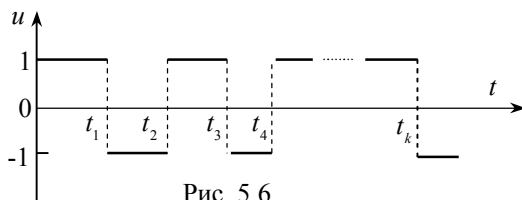


Рис. 5.6.

Таким образом, функционал (5.49) на самом деле является функцией от переменных $t_1, t_2, \dots, t_k$ (координат точек разрыва) и можно обычными методами дифференциального исчисления

искать значения $t_1, t_2, \dots, t_k$ доставляющие экстремум функции L .

Задачу вариационного исчисления на этом можно считать решенной: мы свели ее к задаче принципиально более простой – задаче на экстремум конечного числа переменных.

Однако на практике отыскать точки разрыва методами дифференциального исчисления нелегко, особенно если учесть, что число их неизвестно.

Для их нахождения применим следующий прием: условие $|u|=1$ эквивалентно условию

$$\int_0^T u^{2k} dt = T, \quad \text{где } k \rightarrow \infty. \quad (5.52)$$

Действительно, если $|u| > 1$, то $u^{2k} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ и интеграл стремится к бесконечности; если же, наоборот, хотя на небольшом участке $|u| < 1$, то $u^{2k} \rightarrow 0$ и значение интеграла будет меньше T . Поэтому задача об экстремуме функционала (5.49) при условии $|u|=1$ эквивалентна изопериметрической задаче: найти экстремум функционала (5.49) при условии (5.52).

Для этой изопериметрической задачи функция Лагранжа имеет вид

$$L_1 = 1 + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \left(x'_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) - b_i u(t) \right) + \psi_0 u^{2k},$$

и в качестве уравнений Эйлера получаем следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi'_i + \sum_{j=1}^n \psi_j a_{ij} = 0 \quad (i = \overline{1, n}); \end{array} \right. \quad (5.53)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_u = -\sum_{i=1}^n \psi_i b_i + 2k\psi_0 u^{2k-1} = 0. \end{array} \right. \quad (5.54)$$

Из уравнения (5.54) следует, что

$$u = \sqrt[2k-1]{\sum_{i=1}^n \frac{\psi_i b_i}{2k\psi_0}},$$

но при $k \rightarrow \infty$ корень степени $2k-1$ из любого числа A совпадает по знаку с этим числом, т.е. $\sqrt[2k-1]{A} = 1$, если $A > 1$, и $\sqrt[2k-1]{A} = -1$, если $A < 1$.

Символически это записывается так: $u = \text{sign } A = \text{sign} \sum_{i=1}^n \frac{\psi_i b_i}{2k\psi_0}$, где символ sign означает, что $u = +1$, если $A > 0$, и $u = -1$, если $A < 0$.

Можно доказать общую теорему о числе переключений от $u = +1$ к $u = -1$ в линейных системах [11].

Теорема 5.1. (Об n интервалах). Для линейной системы n -го порядка (5.48), у которой все корни характеристического уравнения действительны, оптимальное по быстродействию управление $u(t)$ (управление в кратчайшее время переводящее систему из одного состояния в другое: из $x(0)$ в $x(T)$), будет содержать не более $(n-1)$ переключений, т.е. не более n интервалов постоянства $u = +1$ или $u = -1$.

Эта теорема используется при расчетах оптимального по быстродействию управления для линейных систем, так как позволяет свести вариационную задачу к задаче на экстремум функции $(n-1)$ переменных.

Пример 5.3.

Рассмотрим задачу оптимального быстродействия следующей системы управления

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = u(t) \end{cases} \quad (5.55)$$

при ограничении на управление $|u(t)| \leq 1$. Предполагается, что граничные условия заданы. Определить экстремаль $u(t)$.

Решение.

Полагая, что экстремалью является кусочно-постоянная функция $|u(t)| = 1$, введем еще одно условие (5.52)

$$\int_0^T u^{2k} dt = T, \quad \text{где } k \rightarrow \infty. \quad (5.56)$$

При указанных условиях требуется решить задачу о быстродействии системы (5.55), т.е. минимизировать выражение

$$\int_0^T dt = T \rightarrow \min. \quad (5.57)$$

Следовательно, подынтегральная функция $G=1$ функционала (5.57).

Таким образом, функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, u, \psi) = 1 + \psi_0 u^{2k}(t) + \psi_1(t)(x_1'(t) - x_2(t)) + \psi_2(t)(x_2'(t) - u(t)),$$

где ψ_0 – множитель Лагранжа, не зависящий от времени, а $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ – функции времени. В качестве экстремалей должны быть найде-

ны функции $u(t)$, $x_1(t)$ и $x_2(t)$, поэтому составляем уравнения Эйлера для каждой из неизвестных

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u'} \right) = \psi_0 2k u^{2k-1}(t) - \psi_2(t) = 0, \quad (5.58)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x_1'} \right) = -\frac{d\psi_1(t)}{dt} = 0, \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x_2'} \right) = -\psi_1(t) - \frac{d\psi_2(t)}{dt} = 0, \quad (5.60)$$

Из уравнения (5.58) следует, что

$$u(t) = \sqrt[2k]{\psi_2(t)/(2k\psi_0)}. \quad (5.61)$$

Заметим, что при целом $k \rightarrow \infty$ для любого числа A справедливы следующие равенства

$$\sqrt[2k]{A} = \begin{cases} +1, & \text{если } A > 0; \\ -1, & \text{если } A < 0. \end{cases}$$

Это равенство по определению функции $\text{sign } A$ можно переписать в виде

$$\sqrt[2k]{A} = \text{sign } A, \text{ где } k \rightarrow \infty.$$

С учетом этого запишем закон оптимального управления (5.61):

$$u(t) = \text{sign}(\psi_2(t)/(2k\psi_0)). \quad (5.62)$$

Так как k и ψ_0 постоянные величины, то поведение функции $u(t)$ определяется только изменением функции $\psi_2(t)$. Из (5.59) следует, что $\psi_1 = C_1 = \text{const}$, а из (5.60) находим

$$\psi_2(t) = -C_1 t + C_2, \quad (5.63)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, которые можно найти из граничных условий задачи.

Подставляя (5.63) в (5.61), получим окончательно

$$u(t) = \text{sign}(1/k(a_2 - a_1 t)), \quad (5.64)$$

где $a_1 = C_1/2\psi_0$, $a_2 = C_2/2\psi_0$, $k > 0$.

Из (5.64) видно, что управление $u(t)$ может сменить знак не более одного раза, т.е. может содержать не более двух интервалов постоянства.

Глава 6

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

Принцип максимума является специальным методом решения задач оптимального управления. Этот метод разработан в 1956–1961 годах Л.С. Понтрягиным и его сотрудниками.

Главным достоинством принципа максимума является то, что класс искомых экстремалей включает в себя *кусочно-непрерывные* функции. В этом смысле принцип максимума является расширением классического вариационного исчисления. Во многих прикладных задачах на управление накладывается ограничение в виде неравенства. Часто оптимальное управление имеет разрыв. Такие задачи эффективно решаются с помощью *принципа максимума Понтрягина*.

Доказательство всех положений принципа максимума является достаточно трудоемким, основано на функциональном анализе, его можно найти в [12].

Настоящая глава посвящена некоторым вопросам применения принципа максимума Понтрягина для решения линейных задач оптимального управления с ограниченными управлениями.

6.1. Особенности вывода принципа максимума

Напомним основные положения классического вариационного исчисления. Вариации функционалов считались непрерывными и линейными. Переменные, входящие в функционал или в уравнения связи ограничений не имели.

В практических задачах управления эти условия не всегда соблюдаются. Известно, что управляющие воздействия, которые входят в функционалы, могут быть кусочно-непрерывными, т.е. претерпевать разрывы первого рода. При некоторых условиях не только управляющие воздействия, но и координаты объекта, в частности производные, претерпевают разрывы. На фазовые координаты и управления, как правило, накладываются ограничения. Это соответствует тому, что координаты и управления могут изменяться в некоторых замкнутых областях и даже находиться на границах этих областей. А это значит, что нарушаются условия непрерывности.

Нарушение основных условий, на которых строится классическое вариационное исчисление, не позволяет решать широкий круг задач

управления такими простыми способами, какие были описаны в гл.5. Эти трудности позволяет преодолеть принцип максимума.

Рассмотрим следующую постановку задачи управления. Пусть требуется перевести систему управления

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, u) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (6.1)$$

где $x(t)$ – n -мерный вектор фазового пространства и $u(t) \in U_t$ – m -мерный вектор управления, принадлежащий допустимому множеству кусочно-непрерывных функций замкнутого множества $U_t \subset R^m$.

Ставится задача – найти управление $u(t)$, переводящее систему из состояния $x(t_0) = x^{(0)}$ в состояние $x(t_1) = x^{(1)}$ за время $(t_1 - t_0)$ и доставляющее минимум функционалу

$$J = \int_{t_0}^{t_1} G(x, u) dt. \quad (6.2)$$

В число фазовых координат включаем еще одну переменную x_0 , характеризующую текущее значение функционала (6.2), т.е.

$$x_0(t) = \int_{t_0}^t G(x, u) d\sigma, \quad x_0(t_1) = J_1.$$

Тогда систему (6.1) можно записать в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\tilde{x}, u) \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad \text{где } f_0(x, u) = G(x, u), \quad (6.3)$$

и ей будет соответствовать $(n+1)$ -мерное фазовое пространство.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию решения задачи (6.3). Для наглядности предположим, что $n = 2$.

Допустим, применено управление $u(t)$. Тогда $\tilde{x}(t) \in R^3$ будет решением системы уравнений (6.3) при известных начальных условиях. Представим это решение графически в трехмерном фазовом пространстве (рис. 6.1). Начальное значение координат при $t = t_0$: $x_0(t_0) = 0$, $x_1(t_0) = x_1^{(0)}$, $x_2(t_0) = x_2^{(0)}$; конечное значение при $t = t_1$: $x_0(t_1) = J$, $x_1(t_1) = x_1^{(1)}$, $x_2(t_1) = x_2^{(1)}$. Проведем через точку $(0, x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ прямую J , параллельную оси x_0 . Рассмотрим процесс управления, в результате которого получим две траектории. Одну траекторию $x(t)$ в плоскости

x_1, x_2 которая в момент t_0 исходит из начальной точки $(0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ и в момент t_1 проходит через точку $(0, x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$. Другую траекторию

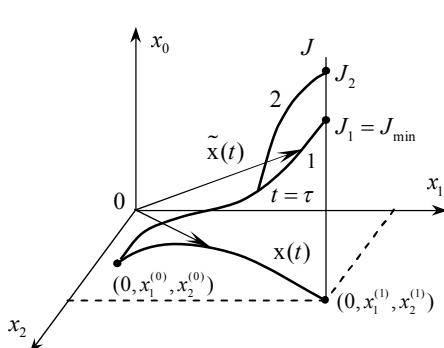


Рис. 6.1.

$\tilde{x}(t)$ — в пространстве всех координат, которая исходит из начальной точки $(0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ и пересекает при $t=t_1$ прямую J . Так как на прямой J откладывается значение функционала J , то фазовая траектория, пересекая прямую J , даст значение функционала прямой J_1 в момент t_1 . Для оптимального

управления отрезок $J_1 = J_{\min}$, т.е. должен иметь экстремальное значение. Рис. 6.1 дает графическое толкование решения системы (6.3).

Теперь найдем в пространстве R^{n+1} оптимальные траектории и соответствующие им управления. Для этого воспользуемся тем же приемом, которым пользовались в классическом вариационном исчислении.

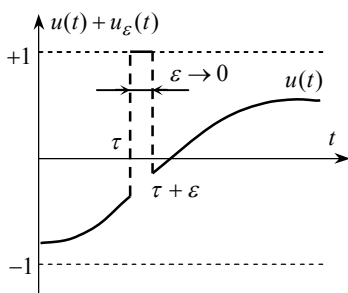


Рис. 6.2.

Однако здесь появляется следующая особенность. Кроме непрерывных управлений, нужно рассматривать и кусочно-непрерывные управления. Это значит, что вариация функции, и в частности $u(t)$, может быть большой из-за разрывов первого рода, поэтому будет большой и вариация функционала. В линейном плане такие вариации рассматривать уже нельзя и это сильно усложняет задачу.

Однако авторами принципа максимума для доказательства всех теорем была использована так называемая *игольчатая* вариация или вариация Макшейна. Смысл ее состоит в следующем.

Как и при выводе уравнения Эйлера, к предполагаемой экстремали $u(t)$ добавляется вариация $u_\varepsilon(t)$, вычисляется соответствующая первая вариация функционала δJ , и из равенства этой вариации нулю выводятся необходимые условия оптимальности $u(t)$. Характерна форма вариации

ции при выводе принципа максимума (рис. 6.2). Это импульс в момент $t = \tau$ бесконечно малой длительности ε , но конечной, произвольной высоты $u(\tau)$. Единственное условие, которое наложено на величину $u(\tau)$ – это требования ограничения $u(\tau) \in U$. Например, если $|u| \leq 1$, то $-1 \leq u(\tau) \leq +1$. Вариация такого вида названа *игольчатой вариацией*. Так как импульс действует очень короткое время, то вариация функционала δJ будет малой. Поэтому приращения функционала можно рассматривать в линейном плане, а это упрощает задачу.

Важно отметить, что игольчатая вариация существенно отличается от вариаций, с помощью которых выводится уравнение Эйлера. Последние должны были представлять собой гладкие функции, в то время как игольчатая вариация является «скачкообразной». Использование скачкообразных вариаций позволяет включить в класс отыскиваемых экстремалей кусочно-непрерывные функции. А между тем, именно кусочно-непрерывные функции являются экстремалами во многих задачах оптимального управления.

Итак, предположим, что найдено оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ и ему соответствует оптимальная траектория $\tilde{x}(t)$, которая показана на рис. 6.1 (линия 1). В момент времени t_1 оптимальная траектория проходит через точку с координатами $(x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ и отсекает на линии J отрезок $J_{\min}$.

В момент времени $t = \tau$ ($t_0 \leq \tau \leq t_1$) вводится игольчатая вариация длительностью ε . В результате вариации дальнейшее движение отличается от оптимального (линия 2, рис. 6.1). На линии J новая (варьируемая) траектория отсечет отрезок J_2 . Новый отрезок $J_2 > J_{\min}$, т.к. $J_{\min}$ отсекается оптимальной траекторией. Далее вводится, как и в классическом вариационном исчислении, понятие вариации фазовой траектории $\delta \tilde{x}(t)$ и вариации функционала $\delta J|_{t=t_1} = J_2 - J_{\min} = \delta x_0^{(1)} > 0$.

В следующем параграфе проведено доказательство теоремы принципа максимума. Теорема включает те или иные условия принципа максимума в зависимости от постановки задачи. Разобрав доказательство одного из вариантов основной теоремы принципа максимума, можно вывести аналогичные условия для других вариантов постановки задачи.

6.2. Теорема принципа максимума

Все варианты основной теоремы принципа максимума относятся к системам, поведение которых можно описать дифференциальными уравнениями в *нормальной форме*. Совокупность необходимых условий принципа максимума определяется постановкой задачи.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления.

Определить вектор-функции $u^*(t)$ и $x^*(t)$ на временном интервале $t \in [t_0, t_1]$, доставляющие минимум функционалу

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t)) dt, \quad (6.4)$$

при условиях

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)), \quad x(t) \in R^n, \quad (6.5)$$

$$u(t) \in U_t \subset R^m, \quad (6.6)$$

$$x(t_0) = x^{(0)}, \quad x(t_1) \in X^{(1)} \subset R^n, \quad (6.7)$$

где U_t – замкнутое множество допустимых управлений класса кусочно-непрерывных функций. Функции $f_0(x, u)$, $f(x, u) = (f_1(x, u), f_2(x, u), \dots, f_n(x, u))$ и их частные производные по переменной x непрерывны по совокупности переменных. В (6.4) для удобства записи последующих преобразований введено новое обозначение подынтегральной функции $f_0 = G$.

Задача (6.4) – (6.7) требует дополнительных пояснений и преобразований, что облегчит вывод условий оптимальности решения.

В число фазовых координат системы управления (6.5) включается еще одна величина x_0 , характеризующая текущее значение функционала (6.4), т.е.

$$x_0(t) = \int_{t_0}^t f_0(x(\sigma), u(\sigma)) d\sigma, \quad x_0(t_1) = J.$$

Дифференциальное уравнение для координаты x_0 запишется так

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = f_0(x(t), u(t)). \quad (6.8)$$

Добавляя уравнение (6.8) в (6.5), окончательно запишем систему уравнений задачи оптимального управления в координатной форме

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x(t), u(t)) \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (6.9)$$

Важную роль в принципе максимума играет *функция Гамильтона*

$$H(x, u, \psi) = \sum_{i=0}^n \psi_i(t) f_i(x, u), \quad (6.10)$$

где переменные $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$ – вспомогательные переменные, которые по аналогии с канонической формой уравнений Эйлера-Лагранжа (п. 5.3) определяются следующей системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H(x, u, \psi)}{\partial x_i} = -\sum_{j=0}^n \psi_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (6.11)$$

Из выражений (6.9) и (6.10) следует, что

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H(x, u, \psi)}{\partial \psi_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (6.12)$$

т.к. $\partial H / \partial \psi_i = f_i(x, u)$.

Из сравнения систем уравнений (6.11) и (6.12) можно заметить определенную симметрию. Уравнения такого вида *называют канонически сопряженными*. В теории управления систему уравнений (6.11) принято называть *сопряженной системой*.

Далее, условие $x(t_1) \in X^{(1)} \subset R^n$ из (6.7) определяет задачу оптимального управления с *подвижным правым концом*. Это условие может быть задано множеством

$$X^{(1)} = \{x \in R^n \mid \varphi_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, k}\}, \quad (6.13)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ – функции, непрерывно дифференцируемые в пространстве R^n .

Возможен случай, когда $X^{(1)} = R^n$, тогда имеет место задача оптимального управления *со свободным правым концом*.

Время управления $(t_1 - t_0)$ может быть фиксированным или нефиксированным.

Пусть пара функций $u^*(t)$, $x^*(t)$ является решением сформулированной задачи, причем траектория $x^*(t)$ начинается в точке $x^{(0)}$ и заканчивается в точке $x^{(1)} \in X^{(1)}$.

Следовательно, допустимое управление $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ должно быть таким, чтобы точка, описывающая состояние системы, из заданного начального состояния $x(t_0) = x^{(0)}$ к конечному моменту времени $t = t_1$ попала на множество $X^{(1)} \subset R^n$, т.е. чтобы выполнялись равенства

$$\varphi_j(x(t_1)) = 0 \quad (j = \overline{1, k}), \quad (6.14)$$

и при этом был бы достигнут минимум функционала (6.4).

Поскольку рассматривается задача с подвижным правым концом, то, как и в задаче классического вариационного исчисления, требуется выполнение условий *трансверсальности*, т.е. выполнение граничных условий для вспомогательных функций ψ_i ($i = \overline{1, n}$) на правом конце траектории. Они заключаются в требовании ортогональности вектора $\psi^*(t_1)$ множеству $X^{(1)}$ в точке $x^{(1)}$.

Рассмотрим эти условия более подробно. Уравнение гиперплоскости P_i , касательной в точке $x^*(t_1)$ к поверхности, которая задана уравнением $\varphi_i(x(t)) = 0$ ($i = \overline{1, k}$), имеет вид

$$\langle \nabla \varphi_j(x^*(t_1)), x - x^*(t_1) \rangle = 0,$$

где $\nabla \varphi_j(x^*(t_1))$ – вектор–градиент функции φ_j в точке $x^*(t_1)$.

Пересечение $P = \bigcap_{i=1}^k P_i$ представляет собой линейное множество, касательное к $X^{(1)}$ в точке $x^*(t_1)$. Тогда условие трансверсальности заключается в ортогональности вектора $\psi^*(t_1)$ этому линейному множеству, т.е.

$$\langle \psi^*(t_1), x - x^*(t_1) \rangle = 0 \quad \text{для всех } x \in P.$$

Иначе говоря, в точке $x = x^*(t_1)$ (как и в любой другой точке множества P) достигает минимума линейная функция

$$c(x) = \langle \psi^*(t_1), x \rangle - \langle \psi^*(t_1), x^*(t_1) \rangle$$

при линейных ограничениях-равенствах

$$\langle \nabla \varphi_j(x^*(t_1)), x \rangle - \langle \nabla \varphi_j(x^*(t_1)), x^*(t_1) \rangle = 0 \quad (j = \overline{1, k}).$$

Последнее условие согласно общей теореме о глобальном минимуме задачи условной минимизации [7], имеет место тогда и только тогда, когда найдутся такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ что

$$\psi^*(t_1) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla \varphi_i(x^*(t_1)) = 0_n,$$

где $0_n = (0, 0, \dots, 0)$ – нулевой вектор n -го порядка.

Полагая $\alpha_i = -\lambda_i$ ($i = \overline{1, k}$), условие трансверсальности окончательно сформулируем следующим образом: существуют числа α_i ($i = \overline{1, k}$) такие, что

$$\psi^*(t_1) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \nabla \varphi_i(x^*(t_1)). \quad (6.15)$$

При $\varphi_i(x(t)) \equiv 0$ ($i = \overline{1, k}$) следует условие трансверсальности для задачи со свободным правым концом траектории: $\psi^*(t_1) = 0_n$.

Для задачи с подвижным левым концом $x^{(0)} \in X^{(0)}$, где $X^{(0)}$ имеет вид (6.13), условие трансверсальности формулируется аналогично: существуют такие числа α_j ($j = \overline{1, k}$), что

$$\psi^*(t_0) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \nabla \varphi_j(x^*(t_0)), \quad \varphi_j(x^*(t_0)) = 0 \quad (j = \overline{1, k}).$$

Если в задаче подвижными являются оба конца, то условия трансверсальности нужно аналогично записать как для левого, так и для правого концов.

В рассматриваемой задаче целевой функционал подлежит минимизации на множестве допустимых управлений, переводящих управляемую систему из заданной точки фазового пространства на заданное множество $X^{(1)}$.

Необходимое условие, которому должно удовлетворять управление $u_j(t)$ ($j = \overline{1, m}$) для того, чтобы быть оптимальным, формулируется в виде теоремы о максимуме.

Теорема 6.1. Если управление $u^*(t)$ и траектория $x^*(t)$ доставляют минимум функционалу (6.4) при уравнениях связи (6.5), ограничениях на управление (6.6) и краевых условиях (6.7), то существует такая непрерывная вектор-функция $\psi^*(t) = (\psi_0^*(t), \psi_1^*(t), \dots, \psi_n^*(t))$, удовлетворяющая сопряженной системе уравнений (6.11) и условиям трансверсальности (6.15), что при каждом $t \in [t_0, t_1]$ функция Гамильтона (6.10) $H(x^*(t), u^*(t), \psi^*(t))$ достигает в точке $u^*(t)$ максимума по всем $u(t) \in U_t$.

Доказательство.

Центральным понятием, позволяющим построить необходимые условия минимума функционала, является понятие игольчатого варьирования управления, которое имеет следующую конструкцию (рис. 6.2):

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} v & \text{при } t \in [\tau, \tau + \varepsilon), \\ u^*(t) & \text{при } t \notin [\tau, \tau + \varepsilon), \end{cases} \quad (6.16)$$

где τ – заданная точка непрерывности функции $u^*(t)$, ε – произвольное положительное число такое, что $t_0 < \tau + \varepsilon < t_1$, а постоянная v такова, что $v \in U_t$. Разность $\delta u(t) = u_\varepsilon(t) - u^*(t)$ называется *игольчатой вариацией управления*.

Рассмотрим вариацию фазовой траектории системы (6.9). Фазовой траектории $x_\varepsilon(t)$ соответствует управление $u_\varepsilon(t)$, а $x^*(t)$ соответствует $u^*(t)$. Тогда определим *вариацию фазовой траектории*

$$h(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x_\varepsilon(t) - x^*(t)}{\varepsilon} = \left(\frac{dx_\varepsilon}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}. \quad (6.17)$$

Содержательный смысл вариации $h(t)$ состоит в том, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ выражение $\varepsilon h(t)$ является главной линейной частью приращения фазовой траектории, возникающего вследствие игольчатого варьирования управления.

Так как $x_\varepsilon(t)$ и $x^*(t)$ удовлетворяют уравнениям (6.9):

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = f(x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)), \quad (6.18)$$

$$\frac{dx^*}{dt} = f(x^*(t), u^*(t)), \quad (6.19)$$

то имеют место следующие соответствующие решения

$$\begin{aligned} x_\varepsilon &= x_\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t f(x_\varepsilon(\sigma), u_\varepsilon(\sigma)) d\sigma, \\ x^* &= x^*(t_0) + \int_{t_0}^t f(x^*(\sigma), u^*(\sigma)) d\sigma. \end{aligned}$$

Вычитая из первого равенства второе, деля на ε и переходя к пределу с учетом (6.17), получим

$$h(t) = h(t_0) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^t \frac{1}{\varepsilon} (f(x_\varepsilon, u_\varepsilon) - f(x^*, u^*)) d\sigma.$$

Из определения $u_\varepsilon(t)$ (6.16) видно, что для любого $t < \tau$

$$x_\varepsilon(t) - x^*(t) = 0$$

и, следовательно,

$$h(t) = 0, \text{ если } t \in [t_0, \tau). \quad (6.20)$$

При значениях $t \geq \tau$ получим

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} (f(x_\varepsilon, u_\varepsilon) - f(x^*, u^*)) dt + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tau+\varepsilon}^t \frac{1}{\varepsilon} (f(x_\varepsilon, u_\varepsilon) - f(x^*, u^*)) d\sigma. \end{aligned}$$

Заметим, что для любого $t \geq \tau$

$$|x_\varepsilon(t) - x^*(t)| = O(\varepsilon). \quad (6.21)$$

Из непрерывности функции $x_\varepsilon(t)$ следует, что $x_\varepsilon(t) - x^*(t) = 0$ при $t = \tau$. Далее $x_\varepsilon(t)$ изменяется на интервале $[\tau, \tau + \varepsilon]$, следуя уравнению (6.18), где $u_\varepsilon(t) \neq u^*(t)$. В силу того, что интервал имеет длину $O(\varepsilon)$, получаем оценку (6.21) для $t = \tau + \varepsilon$. А на интервале $(\tau + \varepsilon, t]$ изменение функций $x_\varepsilon(t)$ и $x^*(t)$ происходит снова согласно одному и тому же уравнению. И поэтому (6.21) можно рассматривать как следст-

вие теоремы о непрерывной зависимости решения системы дифференциальных уравнений от начальных условий.

Используя теорему о конечных приращениях, условия непрерывности функции $f(x, u)$ и непрерывности частных производных $f'_x(x, u)$, а также тот факт, что при $t > \tau + \varepsilon$, $u_\varepsilon(t) = u^*(t)$, получаем, что для $t > \tau$

$$h(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[f(x^*(\tau), v) - f(x^*(\tau), u^*(\tau)) + O(\varepsilon) \right] + \\ + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tau+\varepsilon}^t \left[f'_x(x^*, u^*) \frac{x_\varepsilon(\sigma) - x^*(\sigma)}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \right] d\sigma$$

или, после перехода к пределу,

$$h(t) = \left[f(x^*(\tau), v) - f(x^*(\tau), u^*(\tau)) \right] + \int_{\tau}^t f'_x(x^*, u^*) h(\sigma) d\sigma. \quad (6.22)$$

Из сравнения (6.20) и (6.22) видно, что вариация фазовой траектории $h(t)$ – разрывная функция. При $t_0 \leq t < \tau$ $h(t) = 0$, а при $t \geq \tau$ $h(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$h'(t) = f'_x(x^*, u^*) h(t)$$

с начальными условиями

$$h(\tau) = h(\tau^+) = f(x^*(\tau), v) - f(x^*(\tau), u^*(\tau)),$$

или, в координатной форме,

$$\frac{dh_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x^*, u^*)}{\partial x_j} h_j(t), \quad (6.23)$$

$$h_i(\tau) = f_i(x^*(\tau), v) - f_i(x^*(\tau), u^*(\tau)) \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (6.24)$$

Для того чтобы $x^*(t)$ и $u^*(t)$ доставляли минимум функционалу $J(x, u)$, необходимо, чтобы вариация функционала

$$\delta J(x, u, \delta x, \delta u) = J(x_\varepsilon, u_\varepsilon) - J(x^*, u^*) \geq 0,$$

т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [J(x_\varepsilon, u_\varepsilon) - J(x^*, u^*)] \geq 0$$

или с учетом конкретного вида функционала (6.4)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} [f_0(x_\varepsilon, v) - f_0(x^*, u^*)] dt +$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tau+\varepsilon}^{t_1} \frac{1}{\varepsilon} [f_0(x_\varepsilon, u^*) - f_0(x^*, u^*)] dt \geq 0. \quad (6.25)$$

Функция $f_0(x, u)$ – непрерывна по x и u , поэтому первый предел в (6.25) согласно следствию *первой интегральной теоремы о среднем* можно записать в виде

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} [f_0(x_\varepsilon, v) - f_0(x^*, u^*)] dt = f_0(x^*(\tau), v) - f_0(x^*(\tau), u^*(\tau)).$$

Во втором пределе (6.25) после разложения подынтегральной функции в степенной ряд в точке x^* ее можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{\varepsilon} [f_0(x_\varepsilon, u^*) - f_0(x^*, u^*)] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_0(x^*, u^*)}{\partial x_i} \cdot \frac{(x_{\varepsilon i} - x_i^*)}{\varepsilon} + O(\varepsilon)$$

Таким образом, переходя к пределу в (6.25) получим

$$f_0(x^*(\tau), v) - f_0(x^*(\tau), u^*(\tau)) + \int_{\tau}^{t_1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_0(x^*, u^*)}{\partial x_i} h_i(t) dt \geq 0. \quad (6.26)$$

Принимая во внимание (6.23), (6.11), $\psi_0^* = -1$ и то, что f_i не зависит от x_0 , находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=0}^n \psi_i^*(t) h_i(t) \right) &= \sum_{i=0}^n \frac{d\psi_i^*}{dt} h_i + \sum_{i=0}^n \psi_i^* \frac{dh_i}{dt} = \\ &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi_j^* \frac{\partial f_j(x^*, u^*)}{\partial x_i} h_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_0(x^*, u^*)}{\partial x_i} h_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi_j^* \frac{\partial f_j(x^*, u^*)}{\partial x_i} h_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_0(x^*, u^*)}{\partial x_i} h_i. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее равенство, с учетом условия трансверсальности $\psi_j^*(t_1) = 0$ ($j = \overline{1, n}$) получаем:

$$\sum_{i=0}^n \psi_i^*(t) h_i(t) = - \int_t^{t_1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_0(x^*(\sigma), u^*(\sigma))}{\partial x_i} h_i(\sigma) d\sigma.$$

Полагая $t = \tau$, на основании (6.24) имеем

$$\int_{\tau}^{t_1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_0(x^*(\sigma), u^*(\sigma))}{\partial x_i} h_i(\sigma) d\sigma =$$

$$= \sum_{i=1}^n \psi_i^*(\tau) \left[f_i(x^*(\tau), u^*(\tau)) - f_i(x^*(\tau), v) \right].$$

С учетом последнего равенства неравенство (6.26) перепишем в виде

$$f_0(x^*(\tau), v) - f_0(x^*(\tau), u^*(\tau)) + \sum_{i=1}^n \psi_i^*(\tau) f_i(x^*(\tau), u^*(\tau)) -$$

$$- \sum_{i=1}^n \psi_i^*(\tau) f_i(x^*(\tau), v) \geq 0$$

или, т.к. $\psi_0^* = -1$,

$$\sum_{i=1}^n \psi_i^* f_i(x^*, u^*) - \psi_0^* f_0(x^*, u^*) \geq \sum_{i=1}^n \psi_i^* f_i(x^*, v) - \psi_0^* f_0(x^*, v),$$

где $\psi_i^* = \psi_i^*(\tau)$, $x^* = x^*(\tau)$, $u^* = u^*(\tau)$.

Используя выражение функции Гамильтона (6.10), последнее условие можно представить в следующем виде:

$$H(x^*(\tau), u^*(\tau), \psi^*(\tau)) \geq H(x^*(\tau), v, \psi^*(\tau)).$$

В силу произвольности выбора $v \in U_t$ это означает справедливость равенства

$$H(x^*(\tau), u^*(\tau), \psi^*(\tau)) = \max_{v \in U} H(x^*(\tau), v, \psi^*(\tau)) \quad (6.27)$$

в каждой точке непрерывности функции u^* .

Теперь предположим, что t – произвольная точка разрыва функции u^* . Очевидно, существует последовательность точек $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ вида $\tau_k \rightarrow (t+0)$, $\tau_k \in [t_0, t_1]$, $k=1, 2, \dots$, причем в каждой точке τ_k функция u^* непрерывна. Таким образом, можно записать

$$H(x^*(\tau_k), u^*(\tau_k), \psi^*(\tau_k)) \geq H(x^*(\tau_k), v, \psi^*(\tau_k))$$

для каждого $v \in U_t$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$ и учитывая непрерывность функций H , x^* , ψ^* , а также непрерывность слева функции u^* , получаем требуемое условие:

$$H(x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)) \geq H(x^*(t), v, \psi^*(t)) \text{ для всех } v \in U_t.$$

6.3. Линейная система оптимального быстрогодействия

Рассмотрим линейную автономную систему управления, заданную дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad (6.28)$$

где A и B – постоянные матрицы размерности $(n \times n)$ и $(n \times m)$ соответственно, $x(t) \in R^n$. Допустимыми управлениями здесь являются кусочно-непрерывные функции $u(t)$, определенные на различных промежутках вида $[0, T]$, где $0 \leq T \leq \tau$ (τ – фиксированное положительное число), и удовлетворяющие условию $u(t) \in U \in R^m$ для всех $t \in [0, T]$. Начальным состоянием системы является точка $x^{(0)} \in R^n$, а конечным – точка $x^{(1)} \in R^n$. Каждому допустимому управлению $u(t)$, согласно (6.28), отвечает соответствующая кусочно-непрерывная дифференцируемая траектория $x(t)$.

Линейная задача оптимального быстрогодействия состоит в определении среди всех допустимых управлений, переводящих систему (6.28) из начального состояния $x^{(0)}$ в состояние $x^{(1)}$, такого управления, которое осуществляет этот переход за наименьшее возможное время, т.е. управления, которое минимизирует функционал

$$J(u(t)) = \int_0^T dt = T \rightarrow \min. \quad (6.29)$$

Минимальное время управления также подлежит определению. Эта задача представляет собой частный случай задачи оптимального управления с закрепленными концами и нефиксированным временем, когда система управления является линейной и в формуле (6.2) $G(x, u) \equiv 1$.

Согласно теореме 6.1, запишем принцип максимума (6.27) для сформулированной задачи. Составим функцию Гамильтона:

$$H(x, u, \psi) = \psi_0 + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) + \sum_{k=1}^m b_{ik} u_k(t) \right)$$

или в скалярной форме

$$H(x, u, \psi) = \psi_0 + \langle \psi(t), Ax(t) + Bu(t) \rangle. \quad (6.30)$$

Пусть пара функций $u^*(t)$, $x^*(t)$ является оптимальным решением линейной задачи оптимального быстродействия. Сопряженная система (6.11) в данном случае принимает вид

$$\psi'_i(t) = - \sum_{j=1}^n \psi_j(t) a_{ji} \quad (i = \overline{1, n}),$$

или в векторной форме

$$\psi'(t) = -A^T \psi(t), \quad (6.31)$$

где A^T – транспонированная матрица A .

Условие максимума (6.27) принимает вид

$$\begin{aligned} & \psi_0^* + \langle \psi^*(t), Ax^*(t) \rangle + \langle \psi^*(t), Bu^*(t) \rangle = \\ & = \max_{u \in U} \left[\psi_0^* + \langle \psi^*(t), Ax^*(t) \rangle + \langle \psi^*(t), Bu(t) \rangle \right], \end{aligned}$$

что равносильно равенству

$$\langle \psi^*(t), Bu^*(t) \rangle = \max_{u \in U} \langle \psi^*(t), Bu(t) \rangle, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6.32)$$

Сформулируем принцип максимума применительно к рассматриваемой линейной задаче оптимального быстродействия:

Если $u^(t)$, $x^*(t)$ – оптимальное решение линейной задачи оптимального быстродействия, то существует ненулевое решение $\psi^*(t) = (\psi_1^*(t), \psi_2^*(t), \dots, \psi_n^*(t))^T$ линейной однородной системы дифференциальных уравнений (6.31) такое, что выполняется условие максимума (6.32).*

Рассмотрим задачу наискорейшего перевода линейной системы (6.28) из точки $x^{(0)}$ в положение равновесия, т.е. будем считать, что $x^{(1)} = 0_n$. В качестве области управления U возьмем многомерный параллелепипед

$$U = \left\{ u \in R^m \mid \alpha_i \leq u_i \leq \beta_i, i = \overline{1, m} \right\}, \quad (6.33)$$

где α_i , β_i – заданные числа. Будем считать, что начало координат 0_m принадлежит параллелепипеду (6.33), но не является его вершиной, т.е. существует отрезок в U , параллельный какой-нибудь координатной оси пространства R^m , внутри которого содержится начало координат.

В случае линейной задачи максимального быстродействия принцип максимума представляет собой не только необходимое, но и достаточное

условие, оптимальности. Однако при этом линейная система должна удовлетворять *условию общности положения* или *условию нормальности*.

Прежде, чем формулировать это условие, напомним понятие инвариантного подпространства. Некоторое подпространство Y векторного пространства X является *инвариантным* относительно преобразования A , если для любого вектора $y \in Y$ вектор Ay снова принадлежит подпространству Y (т.е. преобразованием A подпространство Y переводится в себя). Инвариантное подпространство называется *собственным*, если оно не совпадает со всем пространством X . Имеет место следующий факт (который нетрудно доказать); *вектор $a \in X$ в том и только в том случае принадлежит собственному инвариантному подпространству относительно преобразования A , если векторы $a, Aa, \dots, A^{n-1}a$ линейно зависимы.* (Здесь n – размерность пространства X).

Тогда условие общности положения можно сформулировать следующим образом:

если u – вектор, параллельный произвольному ребру многогранника U , то вектор bu не принадлежит никакому собственному инвариантному подпространству относительно преобразования A .

Иначе говоря, если u – вектор, параллельный ребру многогранника U , то векторы $bu, Abu, \dots, A^{n-1}bu$ линейно независимы. Невыполнение условия общности положения означает, что хотя бы для одного ребра многогранника U эти векторы линейно зависимы, т.е. определитель n -го порядка, составленный из координат этих векторов, обращается в нуль. Так как в многограннике U имеется конечное число ребер, то можно выписать лишь конечное число таких определителей. Условие общности положения означает, что ни один из этих определителей не обращается в нуль.

Практически условие общности положения означает, что система (6.28) должна быть вполне управляема по каждой компоненте вектора $u(t)$, т.е. $\text{rank}(b_i, Ab_i, \dots, A^{n-1}b_i) = n \quad (i = \overline{1, m})$.

Теорема 6.2 (Достаточное условие). *Дополнительно к сделанным предположениям (6.33) будем считать, что система (6.28) удовлетворяет условиям общности положения. Если допустимое управление $u^*(t)$ переводит систему (6.28) из состояния $x^{(0)}$ в состояние $x^{(1)} = 0_n$ и вместе с соответствующей ему траекторией $x^*(t)$ и некоторой вектор-функцией $\psi^*(t)$ удовлетворяет принципу максимума, то $u^*(t)$ –*

оптимальной управление, а $x^*(t)$ – оптимальная траектория в линейной задаче оптимального быстрогодействия.

Доказательство. Предположим противное: допустимое управление $u^*(t)$ вместе с соответствующей траекторией $x^*(t)$ и ненулевой вектор-функцией $\psi^*(t)$ удовлетворяют всем условиям принципа максимума, но $u^*(t)$ не является оптимальным управлением. Это означает, что существует допустимое управление $\hat{u}(t)$, которое переводит систему (6.28) из состояния $x^{(0)}$ в начало координат 0_n за время $\bar{T}$ меньшее, чем время T , соответствующее управлению $u^*(t)$: $\bar{T} < T$. Обозначим через $\hat{x}(t)$ траекторию, отвечающую управлению $\hat{u}(t)$.

Поскольку $u^*(t)$ и $x^*(t)$ удовлетворяют уравнению (6.28), а функция $\psi^*(t)$ удовлетворяет (6.31), находим

$$\begin{aligned} d\langle \psi^*, x^* \rangle / dt &= \langle d\psi^* / dt, x^* \rangle + \langle \psi^*, dx^* / dt \rangle = \\ &= -\langle A^T \psi^*, x^* \rangle + \langle \psi^*, Ax^* + Bu^* \rangle = \langle \psi^*, Bu^* \rangle. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Отсюда, интегрируя в пределах от 0 до $\bar{T}$, получаем

$$\langle \psi^*(\bar{T}), x^*(\bar{T}) \rangle - \langle \psi^*(0), x^*(0) \rangle = \int_0^{\bar{T}} \langle \psi^*(t), Bu^*(t) \rangle dt.$$

Аналогично можно найти

$$\langle \psi^*(\bar{T}), \hat{x}(\bar{T}) \rangle - \langle \psi^*(0), \hat{x}(0) \rangle = \int_0^{\bar{T}} \langle \psi^*(t), B\hat{u}(t) \rangle dt.$$

Следовательно, учитывая равенство $\hat{x}(\bar{T}) = 0_n$, можно записать

$$\begin{aligned} \langle \psi^*(\bar{T}), x^*(\bar{T}) \rangle &= \left[\langle \psi^*(\bar{T}), x^*(\bar{T}) \rangle - \langle \psi^*(0), x^*(0) \rangle \right] - \left[\langle \psi^*(\bar{T}), \hat{x}(\bar{T}) \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \langle \psi^*(0), \hat{x}(0) \rangle \right] = \int_0^{\bar{T}} \left[\langle \psi^*(t), Bu^*(t) \rangle - \langle \psi^*(t), B\hat{u}(t) \rangle \right] dt. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Так как для функции $u^*(t)$ выполняется условие максимума, то

$$\langle \psi^*(t), Bu^*(t) \rangle \geq \langle \psi^*(t), B\hat{u}(t) \rangle, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Поэтому подынтегральная функция в (6.35) неотрицательна, а значит, неотрицателен и сам интеграл, т.е.

$$\langle \psi^*(\bar{T}), x^*(\bar{T}) \rangle \geq 0. \quad (6.36)$$

С другой стороны, интегрируя (6.34) в пределах от $\bar{T}$ до T , получаем

$$\langle \psi^*(\bar{T}), x^*(\bar{T}) \rangle = \langle \psi^*(\bar{T}), x^*(\bar{T}) \rangle - \langle \psi^*(T), x^*(T) \rangle = - \int_{\bar{T}}^T \langle \psi^*(t), Bu^*(t) \rangle dt. \quad (6.37)$$

Из выполнения для функции $u^*(t)$ условия максимума (6.32) при $u = 0_m \in U$ следует

$$\langle \psi^*(t), Bu^*(t) \rangle \geq \langle \psi^*(t), B \cdot 0_m \rangle = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6.38)$$

Поэтому равенство (6.37) влечет неравенство $\psi^*(\bar{T}) x^*(\bar{T}) \leq 0$, которое вместе с (6.36) дает

$$\langle \psi^*(\bar{T}), x^*(\bar{T}) \rangle = \int_{\bar{T}}^T \langle \psi^*(t), Bu^*(t) \rangle dt = 0.$$

Здесь подынтегральная функция согласно неравенству (6.38) неотрицательна, а значит, равенство интеграла нулю влечет

$$\langle \psi^*(t), Bu^*(t) \rangle \equiv 0, \quad \bar{T} \leq t \leq T.$$

Отсюда и из равенства (6.32) следует, что линейная функция $\langle \psi^*(t), Bu \rangle$ переменного u в точке $u = 0_m$ достигает на множестве U своего наибольшего значения, равного нулю.

Согласно предположениям теоремы, существует отрезок, принадлежащий U , который параллелен некоторой координатной оси и содержит 0_m внутри себя. Обозначим концы этого отрезка через $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ и будем считать, что он параллелен i -й координатной оси. В силу доказанного линейная функция $c(u) = \langle \psi^*(t), Bu \rangle$ в точке $u = 0_m$ достигает максимума, равного нулю, $\bar{T} \leq t \leq T$. В этом случае $c(u) = 0$ для всех точек отрезка, соединяющего точки $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, в частности для $u = u^{(1)}$, $u = u^{(2)}$:

$$\langle \psi^*(t), Bu^{(1)} \rangle = \langle \psi^*(t), Bu^{(2)} \rangle = 0, \quad \bar{T} \leq t \leq T.$$

Отсюда

$$\langle \psi^*(t), B(u^{(1)} - u^{(2)}) \rangle = 0, \quad \bar{T} \leq t \leq T.$$

Так как у вектора $u^{(1)} - u^{(2)}$ только i -я компонента отлична от нуля, то из последнего равенства получаем

$$\langle \psi^*(t), B e^{(i)} \rangle = 0, \quad \bar{T} \leq t \leq T. \quad (6.39)$$

Дифференцируя последнее равенство по t , находим

$$\langle d\psi^*(t)/dt, B e^{(i)} \rangle = -\langle A^T \psi^*(t), B e^{(i)} \rangle = 0,$$

$$\text{или} \quad \langle \psi^*(t), A B e^{(i)} \rangle = 0, \quad \bar{T} \leq t \leq T. \quad (6.40)$$

Аналогично, последовательно дифференцируя, получаем равенства

$$\langle \psi^*(t), A^{j-1} B e^{(i)} \rangle = 0 \quad (j = 3, \dots, n), \quad \bar{T} \leq t \leq T. \quad (6.41)$$

Равенства (6.39)–(6.41) означают, что вектор $\psi^*(t)$ ортогонален каждому вектору системы векторов $\{B e^{(i)}, A B e^{(i)}, \dots, A^{n-1} B e^{(i)}\}$ при всех $t \in [\bar{T}, T]$. Но данная система векторов образует базис в пространстве R^n , что является критерием управляемости системы. Следовательно, $\psi^*(t) \equiv 0_n$, $\bar{T} \leq t \leq T$. Это противоречит тому, что ψ^* – ненулевое решение системы (6.31).

При решении задач оптимального управления важно заранее знать, что найденная с помощью принципа максимума *экстремаль Понтрягина* (т.е. управление, удовлетворяющее всем условиям принципа максимума) единственна и, кроме того, что оптимальное управление существует. В таком случае процедура поиска оптимального управления упрощается: нужно найти какую-нибудь экстремаль Понтрягина; она и будет оптимальным управлением. В следующем ниже утверждении [12] сформулированы условия, гарантирующие единственность экстремали Понтрягина и существование оптимального управления в линейной задаче оптимального быстрогодействия; кроме того, раскрывается структура оптимального управления.

Теорема 6.3. Будем считать, что выполнены все предположения теоремы 6.2 и, кроме того, начало координат 0_n является внутренней точкой параллелепипеда U вида (6.33) (последнее заведомо выполняется, если $\alpha_i < 0$, $\beta_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$).

1. Пусть для $x^{(0)} \in R^n$ существует некоторое допустимое управление, переводящее систему (6.28) из этой точки в начало координат 0_n . Тогда существует единственное допустимое управление u^* , которое

переводит систему из $x^{(0)}$ в 0_n и удовлетворяет условиям принципа максимума; это управление u^* является оптимальным. Каждая компонента вектор-функции u^* представляет собой кусочно-постоянную функцию, принимающую значения α_i или β_i (см. равенство (6.33)). При этом если все собственные числа матрицы A оказываются вещественными, то компоненты вектор-функции u^* имеют не более чем n промежутков постоянства.

II. Пусть вещественные части всех собственных чисел матрицы A отрицательны. Тогда для каждого начального состояния $x^{(0)} \in R^n$ существует единственное допустимое управление u^* , обладающее всеми свойствами, указанными в первой части теоремы.

В первой части теоремы утверждается, что если систему (6.28) из точки $x^{(0)}$ можно перевести в начало координат 0_n , то из $x^{(0)}$ возможен и оптимальный в смысле быстрогодействия переход в начало координат. При этом оптимальное управление может быть найдено с помощью принципа максимума. А именно, отыскав какую-нибудь экстремаль Понтрягина u^* , переводящую систему из $x^{(0)}$ в 0_n , можно быть уверенным в том, что других экстремалей нет и, кроме того, что эта экстремаль является оптимальным управлением. Более того, в теореме описана структура оптимального управления – это вектор-функция с кусочно-постоянными компонентами, имеющими конечное число точек разрыва. Эти точки разрыва называют *точками переключения* управления. В них происходит скачкообразное изменение какой-нибудь компоненты управления от наименьшего до наибольшего возможного значения или наоборот. Если все собственные числа матрицы A вещественны, то, как утверждает теорема, у каждой компоненты вектор-функции u^* точек переключения не может быть больше чем $n - 1$.

При выполнении всех предположений первой части теоремы в фазовом пространстве R^n могут быть точки, из которых перевести систему (6.28) в начало координат невозможно. Однако если вещественные части всех собственных чисел матрицы A отрицательны, то в силу второй части теоремы из любой точки фазового пространства система может быть переведена в начало координат оптимальным в смысле быстрогодействия

образом. При этом оптимальное управление находят также с помощью принципа максимума и оно имеет указанную выше структуру.

6.4. Примеры построения оптимального управления

При решении задач с помощью принципа максимума удобно придерживаться следующего алгоритма:

1. Записываем уравнения объекта в виде системы уравнений первого порядка (6.5), не забыв уравнение для функционала (6.8):

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x(t), u(t)) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

2. Составляем функцию Гамильтона H :

$$H(x, u, \psi) = \sum_{i=0}^n \psi_i(t) f_i(x, u).$$

3. Определяем значение u , максимизирующее функцию H , из системы уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (6.42)$$

Возможно, что максимум H достигается на границе допустимой области управлений, тогда для некоторых j равенство (6.42) может не выполняться при ненулевой функции $\psi(t)$.

В уравнениях (6.42) для определения $u_j(t)$ содержится $(2n + m + 2)$ неизвестных: $(n + 1)$ функций $x_i(t)$, $(n + 1)$ функций $\psi_i(t)$ и m функций $u_j(t)$. Для их определения имеются m уравнений (6.42), $(n + 1)$ уравнений исходной системы (6.9) и осталось составить еще $(n + 1)$ уравнений для функций $\psi_i(t)$ вида (6.11).

4. Составляем уравнения (6.11) для определения $\psi(t)$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (6.43)$$

Из совместного решения названных $(2n + m + 2)$ уравнений находим оптимальное управление $u_j(t)$.

Особенностью принципа максимума является то, что вариационная задача нахождения функции $u(t)$, минимизирующей функционал J ,

заменена более простой задачей математического анализа нахождения параметра u , доставляющего максимум вспомогательной функции $H(u)$. Отсюда, как было сказано ранее, и название метода – *принцип максимума*.

Напомним, что, используя теорему о максимуме, мы отыскиваем решение не в классе кусочно-гладких функций, а в более широком классе кусочно-непрерывных функций.

Пример 6.1.

Система управления описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t). \end{cases} \quad (6.44)$$

Требуется определить управление $u(t)$, обеспечивающее быстрейший перевод системы из состояния $x_1(t_0) = x_1^{(0)}$, $x_2(t_0) = x_2^{(0)}$ в начало координат $x_1(t_1) = 0$, $x_2(t_1) = 0$ при условии, что управление должно удовлетворять ограничению $|u| \leq a$.

Решение.

Функционал процесса управления: $J = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 = T \rightarrow \min$.

Таким образом, *полная* исходная система уравнений объекта будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = 1, \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t). \end{cases}$$

Составляем функцию Гамильтона (6.10)

$$H = \sum_{i=0}^2 \psi_i(t) f_i(x_1, x_2, u) = \psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Из последнего выражения видно, что H достигнет максимального значения, если

$$u = a \operatorname{sign} \psi_2.$$

Для вспомогательных функций $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ составим систему сопряженных уравнений (6.43)

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \end{cases}$$

решая которую, найдем $\psi_1 = C_1$, $\psi_2 = -C_1 t + C_2$. Следовательно, оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t) = \text{sign}(-C_1 t + C_2),$$

т.е. управление с течением времени не более чем один раз меняет знак.

Поскольку линейная функция $-C_1 t + C_2$ на любом промежутке $[t_0, t_1]$ меняет знак не более одного раза, то какова бы ни была начальная точка $x^{(0)}$, соответствующее оптимальное управление является кусочно-постоянной функцией, принимающей значение $+1$ или -1 и имеющей не более двух интервалов постоянства.

Для отрезка времени, на котором $u(t) = +1$ из системы (6.44) находим уравнение

$$\frac{dx_1}{dx_2} = x_2,$$

после интегрирования которого получим семейство кривых

$$x_1 = 0.5 x_2^2 + C,$$

где C – произвольная постоянная интегрирования.

По этим кривым происходит движение изображающей точки системы при $u = +1$. На рис. 6.3 эти траектории изображены с указанием направления движения (из второго уравнения системы (6.44) видно, что с возрастанием t координата x_2 возрастает, поэтому движение изображающей точки происходит снизу вверх).

Интегрируя систему уравнений (6.44) при $u = -1$ по аналогии с предыдущим, получим семейство траекторий (рис. 6.4)

$$x_1 = -0.5 x_2^2 + C.$$

В каждом из семейств траекторий имеется лишь одна полудуга параболы, по которой изображающая точка может приблизиться к началу

координат. На рисунках эти дуги обозначены через L_{+1} и L_{-1} (индексы равны значениям управлений, при которых происходит указанное движение).

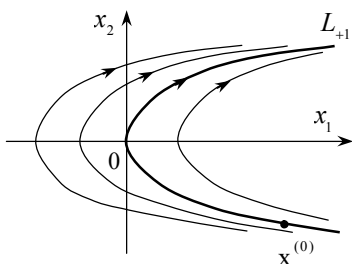


Рис. 6.3.

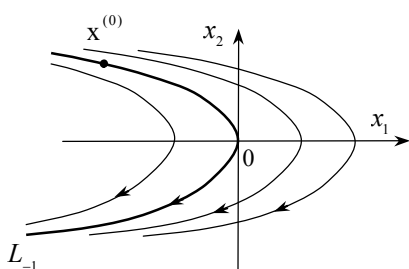


Рис. 6.4.

Если изображающая точка $x^{(0)}$ в начальный момент времени лежит на дуге L_{+1} , то оптимальное управление u^* , приводящее систему из точки $x^{(0)}$ в начало координат за минимальное время, равно $+1$, а траектория системы совпадает с некоторым куском линии L_{+1} (рис.6.3). Если точка $x^{(0)}$ лежит на дуге L_{-1} , то $u^* = -1$ и траектория системы расположена на L_{-1} (рис. 6.4). Только в этих двух случаях оптимальное управление постоянно (в смысле знака) в течение всего времени движения. Во всех других случаях расположения начальной точки $x^{(0)}$ на плоскости X оптимальное управление u^* меняет свое значение либо с $+1$ на -1 , либо с -1 на $+1$. Оптимальные траектории в этих случаях также состоят из двух частей – одна часть совпадает с куском параболы семейства $x_1 = 0.5x_2^2 + C$ (если вначале $u^* = +1$), по которому движение происходит до момента пересечения ее с линией L_{-1} , а другая часть совпадает с куском линии L_{-1} от упомянутой точки пересечения до начала координат. Аналогичный переход фазовой точки происходит на линию L_{+1} , если вначале $u^* = -1$. На рис. 6.5 изображено все семейство фазовых траекторий рассматриваемой системы.



Рис. 6.5.

($u^* = +1$). Отсюда видно, что на линии L_{-1} L_{+1} происходит переключение знака управления. Благодаря такому свойству, эту линию называют *линией переключения*.

Пример 6.2.

Пусть система управления описывается уравнениями вида

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + u_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = u_2, \end{cases} \quad (6.45)$$

где u_1, u_2 — компоненты вектора управления, удовлетворяющие условиям

$$|u_1| \leq 1 \text{ и } |u_2| \leq 1. \quad (6.46)$$

Требуется решить задачу наискорейшего перевода этой системы из произвольной точки x фазового пространства в начало координат.

Решение.

По критерию управляемости исходная система (6.45) управляема по каждой компоненте управления. Можно применить принцип максимума, который в данном случае является необходимым и достаточным условием оптимальности, т.к. эта задача о максимальном быстродействии с начальным состоянием $x^{(0)}$ и конечным состоянием $x^{(1)} = 0$.

Построим решение указанной задачи оптимального управления в соответствии с принципом максимума. Функция H здесь имеет вид

$$H = \psi_0 + \psi_1(t)x_2(t) + \psi_1(t)u_1(t) + \psi_2(t)u_2(t). \quad (6.47)$$

Из условия максимума (6.32) и в силу (6.46) получим

$$\begin{cases} u_1 = \text{sign } \psi_1 & \text{при } \psi_1 \neq 0, \\ u_2 = \text{sign } \psi_2 & \text{при } \psi_2 \neq 0. \end{cases} \quad (6.48)$$

Функции ψ_1, ψ_2 определяются как ненулевое решение сопряженной системы уравнений, которая в этом случае принимает вид

$$d\psi_1/dt = 0, \quad d\psi_2/dt = -\psi_1. \quad (6.49)$$

Общее решение этой системы можно записать так:

$$\psi_1 = C_1, \quad \psi_2 = -C_1 t + C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные интегрирования.

Проанализируем полученный результат.

1) При $C_1 > 0$ и $C_2 > C_1 t^{(0)}$ функция $\psi_1 > 0$, а функция ψ_2 меняет знак, переходя от положительных значений к отрицательным. Таким образом, из (6.48), получаем:

$$u_1 = +1; \quad u_2 \text{ вначале равно } +1, \text{ а затем } -1.$$

$$2) \text{ При } C_1 > 0 \text{ и } C_2 < C_1 t : \quad u_1 = +1; \quad u_2 = -1.$$

$$3) \text{ При } C_1 < 0 \text{ и } C_2 > C_1 t :$$

$$u_1 = -1; \quad u_2 \text{ вначале равно } -1, \text{ а затем } +1.$$

$$4) \text{ При } C_1 < 0 \text{ и } C_2 < C_1 t : \quad u_1 = -1; \quad u_2 = +1.$$

5) При $C_1 = 0$ функция $\psi_1 \equiv 0$, поэтому в выражении (6.47) u_1 можно положить равным любому допустимому значению. Значение же управления u_2 в зависимости от знака постоянной C_2 может быть равно либо $+1$, либо -1 . Таким образом, в этом случае u_1 – произвольное допустимое; $u_2 = \text{const} = \pm 1$.

Эти результаты позволяют заключить, что оптимальные траектории системы (6.45) можно построить при управлениях $u_1 = \pm 1, u_2 = \pm 1$. Подставляя последовательно указанные управления в систему (6.45) и интегрируя ее, получим четыре семейства траекторий, из которых можно построить оптимальную траекторию, ведущую в начало координат. Например, подставляя в (6.45) $u_1 = +1, u_2 = +1$, получим

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + 1, \\ \frac{dx_2}{dt} = 1, \end{cases}$$

откуда находим $\frac{dx_1}{dx_2} = x_2 + 1$. После интегрирования этого уравнения

определим семейство траекторий $x_1 = 0.5 (x_2 + 1)^2 + C$, одна из которых при $C = -0.5$ проходит через начало координат. Полученное семейство траекторий изображено на рис. 6.6. На этом же рисунке пунктиром изображено семейство траекторий, соответствующее управлению $u_1 = +1$ и $u_2 = -1$.

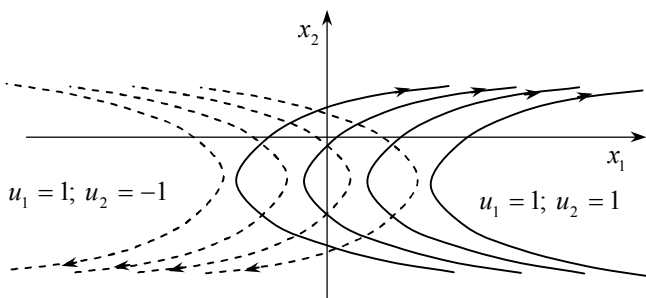


Рис. 6.6.

Аналогично, подставляя в уравнения (6.45) управления $u_1 = -1$ и $u_2 = -1$, а также $u_1 = -1$ и $u_2 = +1$, после интегрирования получаем соответственно два семейства фазовых траекторий. Эти фазовые траектории изображены на рис. 6.7.

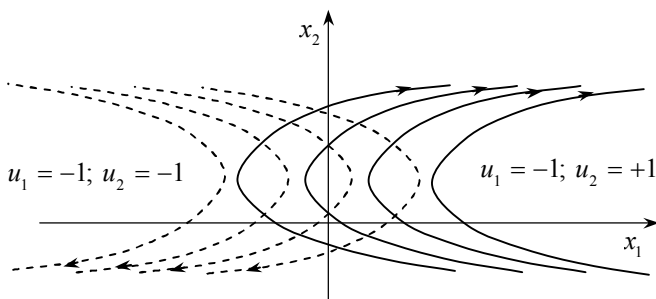


Рис. 6.7.

На всех семействах траекторий можно выделить те траектории, которые проходят через начало координат. Те части выделенных траекто-

рий, которые оканчиваются в начале координат называются *линиями переключений*.

Эти линии представлены на рис. 6.8. На рисунке приняты следующие обозначения: линии L_{-1-1} соответствует часть фазовой траектории при $u_1 = -1$ и $u_2 = -1$, линии L_{+1-1} – при $u_1 = +1$ и $u_2 = -1$, линии L_{-1+1} – при $u_1 = -1$ и $u_2 = +1$, линии L_{+1+1} – при $u_1 = +1$ и $u_2 = +1$.

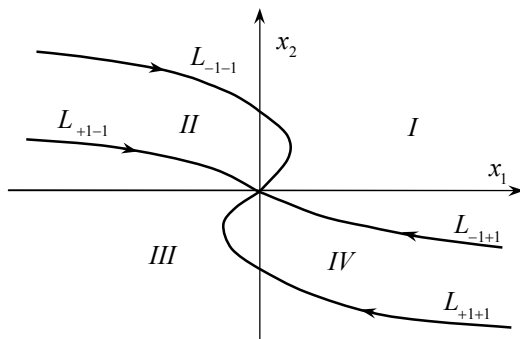


Рис. 6.8.

Изображающая точка, начальное положение которой не лежит на одной из линий переключения, должна перемещаться согласно принципу максимума вдоль одной из линий семейств траекторий в соответствии с системой уравнений (6.45) при определенных значениях управлений u_1 и u_2 до пересечения с одной из линий переключения (рис. 6.8). В момент пересечения происходит переключение управления и движение в дальнейшем будет происходить вдоль линии переключения в начало координат.

Пример 6.3.

Пусть система управления описывается уравнениями вида

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = \omega x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -\omega x_1(t) + u(t). \end{cases} \quad (6.50)$$

Это система с мнимыми собственными значениями $-j\omega$, $+j\omega$ и с одним входным управлением (гармонический осциллятор с одним входом).

Задача состоит в том, чтобы найти допустимое управление, удовлетворяющее условию $|u(t)| \leq 1$, которое переводит систему (6.50) из любого начального состояния $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ в начало координат за минимальное время.

Решение.

Составим функцию Гамильтона H

$$H(x, u, \psi) = \psi_0 + \omega \psi_1(t) x_2(t) + \psi_2(t)(u(t) - \omega x_1(t)). \quad (6.51)$$

Управление, сообщающее абсолютный максимум функции H , равно

$$u^*(t) = \text{sign} \psi_2(t). \quad (6.52)$$

Переменные $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \omega \psi_2(t), \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} - \omega \psi_1(t), \end{cases} \quad (6.53)$$

интегрируя которую, в частности, можно получить

$$\psi_2(t) = \beta \sin(\omega t + \alpha), \quad (6.54)$$

$$\psi_1(t) = -\beta \cos(\omega t + \alpha),$$

где α, β – постоянные.

Таким образом, подставляя (6.54) в (6.52), оптимальный закон управления представится в виде формулы

$$u(t) = \text{sign} [\beta \sin(\omega t + \alpha)],$$

анализируя которую, получим следующие выводы (свойства):

а) Оптимальное управление должно быть кусочно-постоянной функцией времени и переключаться между двумя значениями $u(t) = +1$ и $u(t) = -1$.

б) Оптимальное управление может оставаться неизменным не дольше, чем в течение π/ω единиц времени.

с) Верхней границы числа переключений не существует (это обстоятельство существенно отличает системы с комплексными характеристическими значениями от систем с действительными характеристическими значениями).

Продолжим исследование рассматриваемой системы, решив задачу поиска оптимального управления. Для этого найдем решение системы

уравнений (6.50) при $u(t) \equiv +1$. Подбирая постоянные интегрирования из условия $x(t_0) = x^{(0)}$, получим

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (x_1^{(0)} - \omega^{-1}) \cos \omega(t - t_0) + x_2^{(0)} \sin \omega(t - t_0) + \omega^{-1}; \\ x_2(t) &= -(x_1^{(0)} - \omega^{-1}) \sin \omega(t - t_0) + x_2^{(0)} \cos \omega(t - t_0), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \omega x_1(t) &= (\omega x_1^{(0)} - 1) \cos \omega(t - t_0) + \omega x_2^{(0)} \sin \omega(t - t_0) + 1; \\ \omega x_2(t) &= -(\omega x_1^{(0)} - 1) \sin \omega(t - t_0) + \omega x_2^{(0)} \cos \omega(t - t_0). \end{aligned}$$

Возведя обе части последних двух уравнений в квадрат и почленно сложив их, после упрощений найдем

$$(\omega x_1(t) - 1)^2 + (\omega x_2(t))^2 = (\omega x_1^{(0)} - 1)^2 + (\omega x_2^{(0)})^2. \quad (6.55)$$

Это уравнение представляет собой уравнение траектории системы (6.50) на фазовой плоскости (x_1, x_2) . В системе координат $(\omega x_1, \omega x_2)$ указанная траектория представляет собой окружность с центром в точке $(1, 0)$ и радиусом $\sqrt{(\omega x_1^{(0)} - 1)^2 + (\omega x_2^{(0)})^2}$. Считая точку $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ переменной, равенство (6.55) можно интерпретировать как семейство траекторий, описываемых системой (6.50) под действием управления $u(t) \equiv +1$.

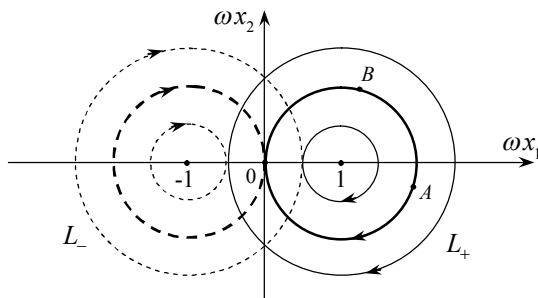


Рис. 6.9.

С помощью аналогичных рассуждений легко показать, что уравнение

$$(\omega x_1(t) + 1)^2 + (\omega x_2(t))^2 = (\omega x_1^{(0)} - 1)^2 + (\omega x_2^{(0)})^2 \quad (6.56)$$

представляет собой семейство траекторий, описываемых системой (6.50) под действием управления $u(t) \equiv -1$. Оба семейства изображены на рис.

6.9. Здесь выделены две окружности L_+ и L_- , проходящие через начало координат; других окружностей семейств (6.55) и (6.56), которые проходили бы через точку $(0, 0)$, нет. Отсюда заключаем, что под действием постоянного управления $u(t) \equiv +1$ ($u(t) \equiv -1$) можно перевести систему (6.50) в начало координат только тогда, когда ее начальное состояние $\omega x^{(0)}$ принадлежит линии L_+ (L_-). При этом соответствующее движение будет оптимальным, если точка $\omega x^{(0)}$ принадлежит той части окружности, которая расположена ниже (выше) оси ωx_1 , включая точки на самой оси. Если же точка $\omega x^{(0)} \in L_+$ ($\omega x^{(0)} \in L_-$) расположена выше (ниже) оси ωx_1 , то соответствующее движение не оптимально. Действительно, время перехода системы из точки B (рис. 6.9) в начало координат по линии L_+ ($u(t) \equiv +1$) можно определить выражением

$$t_\beta = \frac{\cup BAO}{\omega} \geq \frac{\pi}{\omega},$$

что противоречит отмеченному выше свойству (2) оптимального управления.

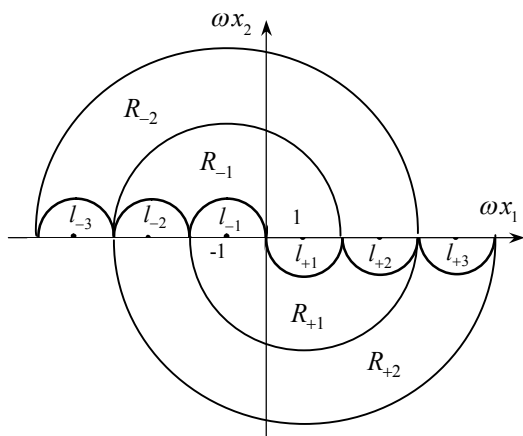


Рис. 6.10.

Обозначим часть окружности L_+ (L_-), расположенную ниже (выше) оси ωx_1 через l_{+1} (l_{-1}). Время перехода системы (6.50) из точки $\omega x^{(0)}$ линии l_{+1} (l_{-1}) в начало координат под действием постоянного управления $u(t) \equiv +1$ ($u(t) \equiv -1$) не больше, чем π/ω . Поэтому данное управление (удовлетворяющее

принципу максимума) и соответствующая ему траектория будут оптимальными.

Итак, если $\omega x^{(0)} \in l_{+1}$, то $u^*(t) \equiv +1$, если $\omega x^{(0)} \in l_{-1}$, то $u^*(t) \equiv -1$. Чему же равно оптимальное управление $u^*(t)$ для точек $\omega x^{(0)}$, не принадлежащих l_{+1} и l_{-1} ?

Обозначим через R_{-1} (R_{+1}) множество точек $\omega x^{(0)}$, из которых систему (6.50) можно перевести на линию l_{+1} (l_{-1}) под действием управления $u(t) \equiv -1$ ($u(t) \equiv +1$) за время, не превосходящее π/ω единиц. Множество R_{-1} (R_{+1}) состоит из дуг окружностей семейства (6.56), (6.55), т.е. с центром в точке $(-1, 0)$ $((1, 0))$ длиной π радиан, заканчивающихся в точках кривой l_{+1} (l_{-1}). Множества R_{-1} и R_{+1} изображены на рис. 6.10.

Обозначим через l_{-2} (l_{+2}) множество точек $\omega x^{(0)}$, из которых система достигает линии l_{+1} (l_{-1}) при $u(t) \equiv -1$ ($u(t) \equiv +1$) ровно за π/ω единиц времени. Кривая l_{-2} (l_{+2}) представляет собой полуокружность, расположенную выше (ниже) оси ωx_1 , радиуса 1 с центром в точке $(-3, 0)$ $((3, 0))$. Кривые l_{-2} и l_{+2} показаны на рис. 6.10.

Отсюда, учитывая необходимость и достаточность принципа максимума, для определения оптимального управления получаем соотношения

$$u^* \equiv \begin{cases} -1, & \text{если } \omega x^{(0)} \in R_{-1} \text{ или } \omega x^{(0)} \in l_{-1}; \\ +1, & \text{если } \omega x^{(0)} \in R_{+1} \text{ или } \omega x^{(0)} \in l_{+1}. \end{cases}$$

Обозначим через R_i ($i = 2, 3, \dots$) совокупность точек $\omega x^{(0)}$, из которых система (6.50) под действием управления $u(t) \equiv -1$ достигает линии l_{+i} за время не больше, чем π/ω единиц; здесь l_{+i} полуокружность, расположенная ниже оси ωx_1 , радиуса 1 с центром в точке $(2i-1, 0)$. Аналогично через R_i обозначим множество точек $\omega x^{(0)}$, из которых система (6.50) под действием управления $u(t) \equiv +1$ достигает линии l_{-i} за время, не превосходящее π/ω единиц времени; здесь l_{-i} полуокружность, расположенная выше оси ωx_1 , радиуса 1 с центром в точке $(-2i+1, 0)$.

Пусть l является объединением линий l_{+i} и l_{-i} ($i=1, 2, \dots$) (рис. 6.11), т.е.

$$l = \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} l_{+i} \right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} l_{-i} \right] = l_+ \cup l_-.$$

Эту линию l целесообразно назвать линией переключения управлений, так как она отделяет множества R_{+i} , где $u(t) \equiv +1$ от множества R_{-i} где $u(t) \equiv -1$.

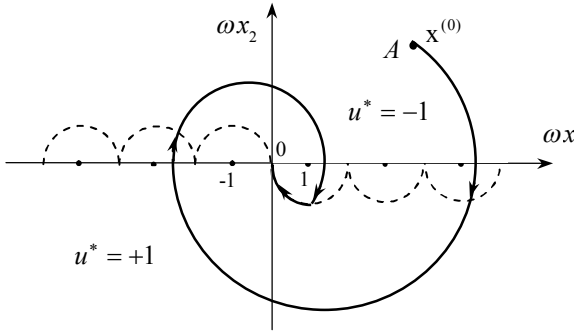


Рис. 6.11.

Если положить

$$R_- = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{-i}; \quad R_+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{+i},$$

то R_- будет представлять собой множество точек, расположенных выше линии переключения l , а R_+ – множество точек, расположенных ниже линии l .

Теперь для определения оптимального управления, как функции состояния системы, имеем

$$u^*(x^{(0)}) = \begin{cases} -1, & \text{если } \omega x^{(0)} \in R_- \cup l_{-1}; \\ +1, & \text{если } \omega x^{(0)} \in R_+ \cup l_{+1}. \end{cases}$$

Для наглядного представления о характере оптимального движения системы (6.50) на рис. 6.11 показана оптимальная траектория, ведущая систему в начало координат.

Глава 7

МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Динамическое программирование применяется в двух не исключающих друг друга направлениях.

С одной стороны, с его помощью решают задачи, связанные с непрерывными процессами оптимального управления, и тогда он представляет собой один из приемов решения вариационных задач, равноценный принципу максимума Понтрягина. В методе динамического программирования органически присутствует способ численного решения непрерывных вариационных задач: необходимо лишь заменить непрерывный процесс дискретным с соответствующим малым интервалом дискретности.

С другой стороны, динамическое программирование позволяет решать задачи, дискретные по самой своей природе, т.е. не преобразованные из соответствующих непрерывных задач. Эта особенность имеет большое значение, например, для экономической кибернетики, которая связана с дискретными процессами.

Кроме того, следует отметить применимость динамического программирования к задачам оптимального перебора. Динамическое программирование в этом случае выступает как некоторый оптимальный метод перебора вариантов.

7.1. Принцип оптимальности Беллмана

Пусть в n -мерном пространстве состояний R^n задано некоторое множество X для всех $t \in [t_0, t_1]$, а в m -мерном пространстве управлений R^m – некоторое множество U (в приложениях особо важен случай замкнутого множества U). Рассмотрим управляемую систему

$$x'(t) = f(x, u, t) \text{ и функционал } J = \int_{t_0}^{t_1} G(x, u, t) dt + g(x(t_1)), \text{ опреде-}$$

ленные в точках $(x, u, t) \in X_t \times U_t \times [t_0, t_1]$.

Будем считать, что задача оптимального управления заключается в определении такого допустимого (кусочно-непрерывного) управления

$u^*(t) \in U_t \in R^m$, $t \in [t_0, t_1]$ называемого *оптимальным управлением*, чтобы соответствующая ему траектория $x^*(t) = x^*(t, u^*)$, $t \in [t_0, t_1]$, называемая *оптимальной траекторией* рассматриваемой системы управления, удовлетворяла условию $x^*(t) \in X_t \subset R^n$ для всех $t \in [t_0, t_1]$ и функционал $J^* = J(u^*)$ принимал свое минимальное значение или значение точной нижней грани.

Пару функций $u^*(t)$ и $x^*(t)$ назовем решением рассматриваемой задачи оптимального управления или *оптимальным решением*.

Приведенную выше задачу можно сформулировать более кратко: найти минимум функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} G(x, u, t) dt + g(x(t_1)) \quad (7.1)$$

при условиях

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_1]; \quad (7.2)$$

$$x(t) \in X_t \in R^n, \quad t \in [t_0, t_1]; \quad (7.3)$$

$$u(t) \in U_t \subset R^m, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (7.4)$$

Условие (7.3) называется ограничением на фазовые координаты системы, или просто *фазовым ограничением*. Иногда X_t совпадает с пространством R^n при всех $t \in [t_0, t_1]$; тогда задача (7.1) – (7.4) называется задачей оптимального управления без ограничений на фазовые координаты. В этом случае условие (7.3) не записывается.

При $t = t_0$ начальная точка траектории $x^{(0)} = x(t_0)$ принадлежит множеству $X_0 \subset X_{t_0}$. Аналогично, при $t = t_1$ конечная точка траектории $x^{(1)} = x(t_1) \in X_1 \subset X_{t_1}$. При этом X_0 (X_1) может состоять из одной точки. Тогда говорят, что в задаче (7.1) – (7.4) левый (правый) конец возможных траекторий закреплен. Если же X_0 (X_1) совпадает со всем пространством X_{t_0} (X_{t_1}), то задача (7.1) – (7.4) называется задачей со свободным левым (правым) концом траектории. В том случае, когда X_0 (X_1) представляет собой некоторую гиперповерхность в пространстве X_{t_0} (X_{t_1}), то задача (7.1) – (7.4) называется задачей с подвижным левым (правым) концом

траектории. Наконец, отметим, что *многообразия* X_0 и X_1 могут зависеть от времени t .

В приведенной постановке задачи оптимального управления моменты времени t_0 и t_1 в общем случае считаются неизвестными: они зависят от управления и наряду с ним подлежат определению. В этом случае задачу (7.1) – (7.4) называют задачей со свободным временем. В частности, если $J(x, u, t) \equiv 1$ и $g(x) \equiv 0$, то $J = t_1 - t_0$ и задача (7.1)– (7.4) становится известной *задачей оптимального быстрогодействия*. Если же в задаче (7.1) – (7.4) оба момента времени t_0 и t_1 заданы, то задача называется *задачей с закрепленным временем*.

В приложениях часто встречается так называемая *автономная задача оптимального управления*. Этот термин применяется в том случае, когда в задаче (7.1) – (7.4) $J(x, u, t) \equiv J(x, u)$, $f(x, u, t) \equiv f(x, u)$, а мно-

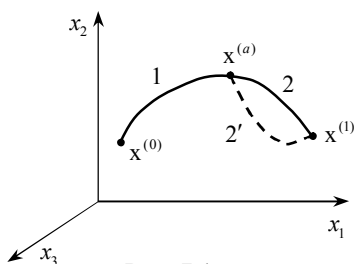


Рис. 7.1.

гообразия X_0 , X_1 и множество X_t не зависят от времени. Видим, что постановка задачи оптимального управления совпадает с постановкой задачи, рассмотренной в гл. 6, для решения которой применялся принцип максимума Понтрягина.

Задача (7.1) – (7.4) является задачей оптимального управления непрерывной системой с сосредоточенными параметрами. Однако в теории оптимального управления рассматриваются аналогичные задачи для дискретно-непрерывных систем, дискретных систем, для систем с изопериметрическими условиями, для систем с распределенными параметрами и т.п.

В настоящей главе изложены основные положения метода динамического программирования Р. Беллмана, который применим для систем различного типа.

Метод динамического программирования является следствием так называемого *принципа оптимальности*, сформулированного Р. Беллманом и осуществляемого для достаточно широкого класса задач оптимального управления. Принцип оптимальности для задачи (7.1) – (7.4) может быть сформулирован следующим образом.

Рассмотрим в фазовом пространстве оптимальную траекторию, изображенную на рис. 7.1 сплошной линией $x^{(0)}$ - $x^{(1)}$. Разделим ее на два участка, обозначенные цифрами 1 и 2. Будем для простоты считать, что состояние $x^{(1)}$ фиксировано. *Принцип оптимальности* утверждает, что если вся траектория оптимальна, то участок 2 тоже оптимален. Это значит, что если состояние системы определяется точкой $x^{(a)}$ при $t = t_a$, то независимо от того, по какой траектории система пришла в эту точку, ее дальнейшее движение будет происходить по участку 2. Такая независимость последующего движения от предыстории является характерной особенностью случайных (марковских) процессов без последствия.

Если допустить, что участок 2 не является оптимальным, то существует другой участок 2' с началом в точке $x^{(a)}$, который будет оптимальным. Но тогда вместо траектории 1-2 существует другая траектория 1-2', на которой достигается экстремум. Это противоречит исходному предположению о том, что траектория 1-2 оптимальна.

Целесообразно напомнить, что обычная экстремаль (в случае невырожденного функционала) представляет собой как бы единую цепь, каждое звено-участок которой является также экстремалью. По существу, Беллман с помощью принципа оптимальности расширил класс допустимых экстремалей, потребовав, чтобы только *конечный* участок оптимальной траектории был оптимален.

Для более полного представления принципа оптимальности рассмотрим еще одну его формулировку. Оптимальное решение $u^*(t)$, $x^*(t)$ при $t \in [t_0, t_1]$ задачи (7.1) – (7.4) совпадает при $t > t_a$ с оптимальным решением задачи, отличающейся от (7.1) – (7.4) лишь тем, что начальный момент времени фиксирован и совпадает с t_a и начальная точка фазовой траектории фиксирована и совпадает с $x^*(t_a)$, т.е.

$$\inf_{u(t), x(t)} \left\{ \int_{t_a}^{t_1} G(x, u, t) dt + g(x(t_1)) \right\} = \int_{t_a}^{t_1} G(x^*, u^*, t) dt + g(x^*(t_1)), \quad (7.5)$$

где t_a и $x^*(t_a)$ – фиксированы, а U_t – множество допустимых управлений $u(t) \in U_t$ при $t > t_a$, которым отвечают, в силу (7.2), всевозможные

траектории $x(t)$ с начальной точкой $x^*(t_a)$, удовлетворяющие условию $x(t) \in X_t$ при $t > t_a$.

Для задач оптимального управления типа (7.1) – (7.4) справедливость принципа оптимальности устанавливается достаточно просто на основании свойств аддитивности интеграла как функции интервала интегрирования. В самом деле, если значение функционала (7.1) на оптимальном решении задачи (7.1) – (7.4) обозначить через J^* , то получим

$$J^* = \inf_{u(t), x(t)} J(u) = \int_{t_0}^{t_1} G(x^*, u^*, t) dt + g(x^*(t_1)) =$$

$$= \left\{ \int_{t_0}^{t_a} G(x^*, u^*, t) dt \right\}_1 + \left\{ \int_{t_a}^{t_1} G(x^*, u^*, t) dt + g(x^*(t_1)) \right\}_2 = J_1^* + J_2^*, \quad (7.6)$$

где $u(t) \in U_t$, $x(t) \in X_t$ при $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$ и $t_{\min}, t_{\max}$ – минимально и, соответственно, максимально возможные моменты времени t , для которых рассматриваемая задача имеет смысл, а t_a – произвольная точка из промежутка $[t_0, t_1]$.

Рассмотрим задачу (7.1) – (7.4) при условии, что $t_0 = t_a$ и $x(t_a) = x^*(t_a)$. Решение этой задачи обозначим через $\tilde{u}(t)$, $\tilde{x}(t)$, $t \in [t_a, \tilde{t}_1]$. Предположим, вопреки принципу оптимальности, что это решение не совпадает с $u^*(t)$, $x^*(t)$, при $t > t_a$. Тогда

$$\bar{J} = \int_{t_a}^{\tilde{t}_1} G(\tilde{x}, \tilde{u}, t) dt + g(\tilde{x}(\tilde{t}_1)) < J_2^*.$$

Построим допустимое для задачи (7.1) – (7.4) управление в виде

$$u_*(t) = \begin{cases} u^*(t) & \text{при } t_0 \leq t < t_a, \\ \tilde{u}(t) & \text{при } t_a \leq t \leq \tilde{t}_1. \end{cases} \quad (7.7)$$

Соответствующая этому управлению траектория системы (7.2) представится функцией

$$x_*(t) = \begin{cases} x^*(t) & \text{при } t_0 \leq t < t_a, \\ \tilde{x}(t) & \text{при } t_a \leq t \leq \tilde{t}_1. \end{cases} \quad (7.8)$$

Для решения (7.7), (7.8) задачи (7.1) – (7.4) будем иметь неравенство

$$J_* = J(u_*) = J_1^* + \bar{J} < J_1^* + J_2^* = J^*,$$

указывающее, что решение $u^*(t)$, $x^*(t)$ не является оптимальным. Это противоречие доказывает справедливость принципа оптимальности.

Следует помнить, что принцип оптимальности – это *необходимое* условие оптимальности, т.е. он справедлив не для всевозможных задач оптимального управления.

7.2. Многошаговая задача оптимизации

Многие математические модели дискретных и непрерывных задач оптимизации можно сформулировать в виде *многошаговой задачи оптимизации*, в рамках которой процесс поиска решения представляется как последовательность некоторых этапов (шагов). Для решения таких задач целесообразно использовать *метод динамического программирования*.

Предположим, что состояние некоторого процесса описывается вектором $x = (x_1, \dots, x_n)$, т.е. точкой x пространства R^n , которое называется *фазовым пространством*.

Будем считать, что процесс является N -шаговым, т.е. его эволюция происходит в N этапов по следующей схеме:

$$\begin{array}{ccccccc} x^{(0)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & x^{(k-1)} & \rightarrow & x^{(k)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & x^{(N)} \\ \text{Начальное} & & & & k\text{-ый шаг} & & & & & & \text{Конечное} \\ \text{состояние} & & & & & & & & & & \text{состояние} \end{array}$$

Переход между состояниями на k -ом шаге совершается в соответствии с *уравнением состояний*

$$x^{(k)} = f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)}),$$

где $u^{(k)} \in R^m$ – m -мерный *вектор управления*, выбираемый на этом шаге, а $f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)})$ – заданная n -мерная вектор-функция аргументов $x \in R^n$ и $u \in R^m$. Таким образом, предполагается, что состояние, в которое переходит процесс на k -м шаге, полностью определяется только начальным состоянием $x^{(k-1)}$ этого шага и выбранным на нем управлением $u^{(k)}$, но не зависит от «предыстории» процесса до k -го шага.

Числовым критерием оптимизации k -го шага является частичная целевая функция $J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)})$ этого шага, а весь процесс характеризуется целевой функцией

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}),$$

где $\hat{x} = \{x^{(0)}, \dots, x^{(N)}\}$ – набор состояний, называемый *фазовой траекторией* процесса, а $\hat{u} = \{u^{(0)}, \dots, u^{(N)}\}$ – совокупность векторов управлений, которая называется *управлением* процессом.

На фазовую траекторию и управление процессом налагаются ограничения

$$x^{(k)} \in X_k, \quad k=0,1,\dots, N; \quad u^{(k)} \in U_k(x^{(k-1)}), \quad k=1,2,\dots, N,$$

где X_k и $U_k(x^{(k-1)})$ – заданные множества в пространствах R^n и R^m соответственно, причем множество U_k зависит, вообще говоря, от начального состояния k -го шага $x^{(k-1)}$. Ограничения на начальное и конечное состояния процесса $x^{(0)} \in X_0$ и $x^{(N)} \in X_N$ называют *начальными* и *конечными условиями*, причем во многих случаях множества X_0 и X_N , содержат по одной точке (начало и конец фазовой траектории).

Таким образом, многошаговая задача оптимизации формулируется в следующем виде:

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) \rightarrow \min (\max), \quad (7.9)$$

$$x^{(k)} = f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)}), \quad k=1,2,\dots, N; \quad (7.10)$$

$$x^{(k)} \in X_k, \quad k=0,1,\dots, N; \quad (7.11)$$

$$u^{(k)} \in U_k(x^{(k-1)}), \quad k=1,2,\dots, N, \quad (7.12)$$

т.е. в ней требуется найти оптимальное управление процессом $\hat{u}^* = \{u^{*(0)}, \dots, u^{*(N)}\}$ и соответствующую ему оптимальную фазовую траекторию $\hat{x}^* = \{x^{*(0)}, \dots, x^{*(N)}\}$, удовлетворяющие ограничениям

(7.10) – (7.12) и доставляющие минимум (максимум) целевой функции (7.9).

На основании принципа оптимальности следует вывод о том, что при поиске оптимального решения многошаговой задачи оптимизации (7.9) – (7.12) выбор управления $u^{(k)}$ на каждом шаге, независимо от его начального состояния $x^{(k-1)}$, должен быть направлен на оптимизацию не только данного, но и всех оставшихся шагов.

Рассмотренное свойство оптимальной траектории N -шагового процесса подсказывает следующую стратегию его оптимизации:

– сначала оптимизируется последний, N -ый шаг, затем два последних шага, затем три последних шага и т.д., вплоть до первого, начального шага. Такой подход лежит в основе метода динамического программирования. Опишем его дискретный вариант.

Прежде всего, отметим, что в формулировке многошаговой задачи оптимизации (7.9) – (7.12) ограничения (7.11) при $k = 1, \dots, N$ на фазовую траекторию можно включить в ограничения на выбор управлений, заменив соотношения (7.11) для $k \neq 0$ и (7.12) следующим эквивалентным ограничением:

$$u^{(k)} \in \bar{U}_k(x^{(k-1)}) = \left\{ u^{(k)} \in \bar{U}_k(x^{(k-1)}) \mid f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)}) \in X_k \right\},$$

$$k = 1, \dots, N. \quad (7.13)$$

Будем последовательно строить оптимальные управление и траекторию N -шагового процесса от конца к началу, т.е. рассмотрим сначала оптимизацию только N -го шага, затем только шагов $N-1$ и N и т.д., пока не дойдем до первого шага процесса.

При реализации такого подхода возникает следующее затруднение. Приступая к оптимизации завершающих шагов процесса, начиная с k -го мы не знаем, из какого состояния x^{k-1} эти шаги должны начинаться, так как искомая оптимальная траектория $\hat{x}^*$ а значит, и ее промежуточное состояние еще не известны. Поэтому приходится просматривать все возможные начальные состояния $x^{k-1} \in X_{k-1}$ завершающей части процесса и для каждого из них строить оптимальное управление $\hat{u}^*(k) =$

$= \{u^{*(k)}, \dots, u^{*(N)}\}$ и оптимальную траекторию $\hat{x}^*(k) = \{x^{*(k-1)}, x^{*(k)}, \dots, x^{*(N)}\}$ последних $N - k + 1$ шагов.

Рассмотрим подробнее определение $\hat{u}^*(k)$ и $\hat{x}^*(k)$ для произвольного начального состояния $x^{(k-1)} \in X_{k-1}$ завершающих шагов процесса, начинающихся с k -го шага. При $\hat{u}(k) = \hat{u}^*(k)$, $\hat{x}(k) = \hat{x}^*(k)$ целевая функция $J_k(\hat{x}(k), \hat{u}(k)) = \sum_{i=k}^N J_i(x^{(i-1)}, u^{(i)})$ рассматриваемых шагов принимает минимальное значение J_k^* , зависящее от $x^{(k-1)}$: $J_k^* = J_k^*(x^{(k-1)})$. Функцию $J_k^*(x^{(k-1)})$ называют *функцией Беллмана* последних $N - k + 1$ шагов процесса и обозначают через $B_k(x^{(k-1)})$.

Для $k = N$ имеем

$$B_N(x^{(N-1)}) = \min_{u^{(N)} \in U_N(x^{(N-1)})} J_N(x^{(N-1)}, u^{(N)}). \quad (7.14)$$

Найдем рекуррентное соотношение, связывающее между собой функции Беллмана $B_k(x^{(k-1)})$ и $B_{k+1}(x^{(k)})$, $k = 1, \dots, N - 1$. Для этого оптимизируем k -ый шаг для начального состояния $x^{(k-1)}$ согласно принципу оптимальности. Пусть на последних $N - k$ шагах при всех $x^{(k)} \in X_k$ подобная оптимизация уже проведена, и функция Беллмана $B_{k+1}(x^{(k)})$ этих шагов известна. Если на k -м шаге с начальным состоянием $x^{(k-1)}$ выбрать управление $u^{(k)}$, то процесс перейдет в состояние $x^{(k)}$ (начальное для последних $N - k$ шагов) в соответствии с уравнением (7.10): $x^{(k)} = f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)})$, а минимум $J_{k+1}^*(x^{(k)})$ целевой функции последних $N - k$ шагов станет равным $B_{k+1}[f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)})]$.

Учитывая вклад и k -го шага в значение целевой функции заключительных $N - k + 1$ шагов, соответствующее оптимальному завершению процесса из состояния $x^{(k-1)}$, получаем:

$$\begin{aligned} J_k^*(x^{(k-1)}) &= B_k(x^{(k-1)}) = \\ &= \min_{u_k \in U_k(x^{(k-1)})} \left\{ B_{k+1}[f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)})] + J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) \right\}, \end{aligned}$$

$$k = 1, \dots, N - 1. \quad (7.15)$$

Иллюстрация к выводу этой формулы приведена на рис. 7.2.

$$\begin{array}{c} \overbrace{J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)})} \quad \overbrace{B_{k+1}[f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)})]} \\ \dots x^{(k-1)} \xrightarrow{u^{(k)}} x^{(k)} = f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)}) \longrightarrow x^{(k+1)} \longrightarrow \dots \longrightarrow x^{(N)} \\ \underbrace{\hspace{15em}} \\ B_k(x^{(k-1)}) \end{array}$$

Рис. 7.2.

Соотношения (7.14) и (7.15), позволяющие последовательно найти функции $B_N(x^{(N-1)})$, $B_{N-1}(x^{(N-2)})$, ..., $B_1(x^{(0)})$, называются *уравнениями Беллмана*.

Находя функции Беллмана $B_k(x^{(k-1)})$, $k = N, N-1, \dots, 1$ из (7.14) и (7.15), мы одновременно определим и управления $u^{*(k)}(x^{(k-1)})$, которым отвечают минимальные значения соответствующих величин $Z_N = J_N(x^{(N-1)}, u^N)$ и $Z_k = B_{k+1}[f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)})] + J_k(x^{(k-1)}, u^k)$, $k = N, N-1, \dots, 1$ из правых частей равенств (7.14) и (7.15):

$$Z_N[x^{(N-1)}, u^{*(N)}(x^{(N-1)})] = \min_{u^{(N)} \in U_N(x^{(N-1)})} Z_N[x^{(N-1)}, u^{(N)}], \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} Z_k[x^{(k-1)}, u^{*(k)}(x^{(k-1)})] &= \min_{u^{(k)} \in U_k(x^{(k-1)})} Z_k[x^{(k-1)}, u^{(k)}], \\ k &= N, N-1, \dots, 1. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Управления $u^{*(k)}(x^{(k-1)})$, $k = 1, \dots, N$ называются *условными оптимальными управлениями*, а процесс их нахождения – *условной оптимизацией*. Отметим, что управления $u^{*(k)}(x^{(k-1)})$, найденные в соответствии с (7.17), удовлетворяют принципу оптимальности, т.е. с учетом начального состояния $x^{(k-1)}$ k -го шага управление $u^{*(k)}(x^{(k-1)})$ является оптимальным не только для этого шага, но и для следующих за ним $N - k$ шагов.

Таким образом, в результате условной оптимизации находятся функции Беллмана $B_k(x^{(k-1)})$ и условные оптимальные управления

$u^{*(k)}(x^{(k-1)})$, $k=1, \dots, N$. После этого можно осуществить *безусловную оптимизацию*, т.е. определить искомые оптимальное управление процессом $\hat{u}^* = \{u^{*(1)}, \dots, u^{*(N)}\}$ и оптимальную фазовую траекторию $\hat{x}^* = \{x^{*(1)}, \dots, x^{*(N)}\}$ следующим образом.

Так как функция Беллмана $B_1(x^{(0)})$ для каждого начального состояния $x^{(0)} \in X_0$ равна минимальному значению целевой функции N шагов, т.е. всего процесса, начатого из этого состояния, то оптимальное начальное условие процесса $x^{*(0)} \in X_0$ находится из соотношения

$$B_1(x^{*(0)}) = \min_{x^{(0)} \in X_0} B_1(x^{(0)}) \quad (7.18)$$

(если множество X_0 состоит из единственной точки $x^{(0)}$, то $x^{*(0)} = x^{(0)}$).

Далее, используя найденные условные оптимальные управления, а также уравнения состояний (7.10), последовательно находим $u^{*(1)}$, $x^{*(1)}$, $u^{*(2)}$, $x^{*(2)}$, ..., $u^{*(N)}$, $x^{*(N)}$ из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} u^{*(1)} &= u^{*(1)}(x^{*(0)}), & x^{*(1)} &= f^{(1)}(x^{*(0)}, u^{*(1)}), \\ u^{*(2)} &= u^{*(2)}(x^{*(1)}), & x^{*(2)} &= f^{(2)}(x^{*(1)}, u^{*(2)}), \\ &\dots & \dots & \\ u^{*(N)} &= u^{*(N)}(x^{*(N-1)}), & x^{*(N)} &= f^{(N)}(x^{*(N-1)}, u^{*(N)}), \end{aligned} \quad (7.19)$$

На основании приведенных преобразований строится алгоритм метода динамического программирования.

Приведем пример построения математической модели и решения многошаговой задачи оптимизации.

Пример 7.1.

Решить задачу о кратчайшем пути в ориентированном графе, изображенном на рис. 7.3, как многошаговую задачу оптимизации. Дуги графа обозначены буквами от a до q . Вершины графа обозначены заглавными буквами от A до G и S, T .

Каждой дуге соответствует определенная длина, которую укажем в скобках: $a(3)$, $b(5)$, $c(2)$, $d(7)$, $e(8)$, $f(20)$, $g(6)$, $h(7)$, $i(10)$, $j(3)$, $k(12)$, $l(9)$, $m(12)$, $n(10)$, $o(5)$, $p(4)$, $q(6)$.

Решение.

Сформулируем данную задачу, как многошаговую задачу оптимизации. Процесс выбора пути в данном графе можно представить как трехшаговый (рис. 7.3). Под состоянием $x^{(k-1)}$ процесса будем понимать начальную вершину k -го шага выбора пути. Для рассматриваемого графа ограничения (7.11) на фазовую траекторию имеют вид

$$\begin{aligned} x^{(0)} \in X_0 = \{S\}; \quad x^{(1)} \in X_1 = \{A, B, C\}; \quad x^{(2)} \in X_2 = \{D, E, F, G\}; \\ x^{(3)} \in X_3 = \{T\}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

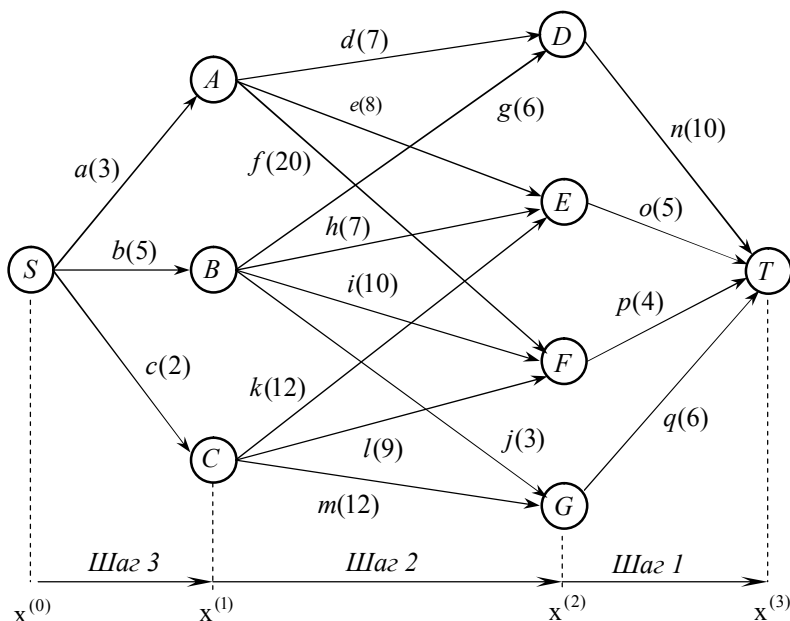


Рис. 7.3.

Управлением $u^{(k)}$ на k -м шаге считаем выбранную дугу, исходящую из начальной вершины $x^{(k-1)}$ этого шага. Из рис.7.3 определяем ограничения (7.12) на управления:

$$u^{(1)} \in U_1 = \{a, b, c\};$$

$$\begin{aligned}
 u^{(2)} \in U_2 &= \begin{cases} \{d, e, f\} & \text{при } x^{(1)} = A, \\ \{g, h, i, j\} & \text{при } x^{(1)} = B, \\ \{k, l, m\} & \text{при } x^{(1)} = C; \end{cases} \\
 u^{(3)} \in U_3 &= \begin{cases} \{n\} & \text{при } x^{(2)} = D, \\ \{o\} & \text{при } x^{(2)} = E, \\ \{p\} & \text{при } x^{(2)} = F, \\ \{q\} & \text{при } x^{(2)} = G. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

Уравнение состояния (7.10) на каждом шаге определяется из рис. 7.3. Оно указывает состояние (вершину) $x^{(k)} \in X_k$, в которую приводит путь из вершины $x^{(k-1)}$, если на k -м шаге выбрано управление (дуга) $u^{(k)} \in U_k$. Например, для $x^{(1)} = B$, $u^{(2)} = g$ имеем $x^{(2)} = f^{(2)}(B, g) = D$ (см. рис. 7.3).

В качестве частичной целевой функции k -го шага $J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)})$ возьмем длину $|u^{(k)}|$ выбранной на этом шаге дуги $u^{(k)}$ (эти значения указаны в скобках у каждой дуги в условии задачи). Тогда целевая функция процесса запишется в виде

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^3 |u^{(k)}|.$$

Таким образом, математическая модель нашей задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
 J(\hat{x}, \hat{u}) &= \sum_{k=1}^3 |u^{(k)}| \rightarrow \min, \\
 x^{(k)} &= f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)}), \quad k = 1, 2, 3; \\
 x^{(k)} &\in X_k, \quad k = 0, 1, 2, 3; \\
 u^{(k)} &\in U_k(x^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, 3,
 \end{aligned}$$

где X_k и U_k определяются соотношениями (7.20) и (7.21), а функции $J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)})$ находятся с помощью рис. 7.3.

Рассмотрим реализацию метода динамического программирования.

Этап условной оптимизации.

В соответствии с (7.14) и (7.16) на первом шаге, начиная с вершины T , при $k = N = 3$ находим условное оптимальное управление $u^{*(3)}(x^{(2)})$ и функцию Беллмана

$$B_3(x^{(2)}) = \min_{u^{(3)} \in U_3(x^{(2)})} J_3(x^{(2)}, u^{(3)}).$$

Используя результат первого шага определяем $u^{*(2)}(x^{(1)})$ и $B_2(x^{(1)})$ с помощью (7.17) и (7.15) при $k = 2$. Например, для $x^{(1)} = \{C\}$ (см. рис 7.3):

$$\begin{aligned} B_2(x^{(1)}) &= \min_{u_2 \in U_k(x^{(1)})} \left\{ B_3[f^{(2)}(x^{(1)}, u^{(2)})] + J_2(x^{(1)}, u^{(2)}) \right\} = \\ &= \min \{5 + 12, 4 + 9, 6 + 12\} = 13, \end{aligned}$$

т.е. $u^{*(2)}(x^{(1)} = C) = (l = 9)$. Аналогично на этом шаге

при $x^{(1)} = \{A\}$: $B_2(x^{(1)}) = 13$, $u^{*(2)}(x^{(1)}) = (e = 8)$;

при $x^{(1)} = \{B\}$: $B_2(x^{(1)}) = 9$, $u^{*(2)}(x^{(1)}) = (j = 3)$.

И, наконец, с помощью результатов второго шага и формул (7.15) и (7.17) определяем $B_1(x^{(0)})$ и $u^{*(1)}(x^{(0)})$ при $k = 1$.

Результаты построения условного оптимального процесса приведены в таблице 7.1.

Таблица 7.1.

Шаг	G	F	E	D	C	B	A	S
1	$T 6$	$T 4$	$T 5$	$T 10$				
2					$F 13$	$G 9$	$E 13$	
3								$B 14$

Этап безусловной оптимизации.

Так как множество X_0 состоит из единственной точки $x^{(0)} = \{S\}$, то с учетом формул (7.19) и в соответствии с таблицей 7.1 последовательно находим:

$$u^{*(1)} = 5, x^{*(1)} = B, u^{*(2)} = 3, x^{*(2)} = G, u^{*(3)} = 6, x^{*(3)} = T.$$

Таким образом, оптимальное управление $\hat{u}^* = \{b(5), j(3), q(6)\}$ и оптимальная траектория $\hat{x}^* = \{S, B, G, T\}$, которым соответствует значение целевой функции

$$J_{\min}(\hat{x}^*, \hat{u}^*) = \sum_{k=1}^3 |u^{*(k)}| = b + j + q = 5 + 3 + 6 = 14.$$

7.3. Функциональное уравнение Беллмана

Задача с фиксированным временем и свободным правым концом траектории.

Рассмотрим задачу оптимального управления:

- найти минимум функционала

$$J = J(u) = \int_{t_0}^{t_1} G(x, u, t) dt + g(x(t_1)) \quad (7.22)$$

- на решениях задачи Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x^{(0)} \quad (7.23)$$

- при ограничениях

$$u = u(t) \in U_t, \quad x(t) \in X_t, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (7.24)$$

где t_0 и t_1 – фиксированные моменты времени. Как и ранее здесь предполагаем непрерывность функций G , g , вектор-функции f по переменным (x, u) и выполнимость *условий Литшица* для компонентов вектора f по переменной u ; все эти функции и функция $u(t)$ считаются кусочно-непрерывными по переменной $t \in [t_0, t_1]$.

Определим необходимые условия оптимальности, для чего фиксируем произвольное значение $t \in [t_0, t_1]$ и некоторую произвольную точку $x = x(t) \in X_t$. Рассмотрим задачу оптимального управления, совпадающую с задачей (7.22) – (7.24), если в ней вместо t_0 и $x^{(0)}$ подставить величины t и $x = x(t)$ (назовем – *задача α*). Решение этой задачи обозначим через $u^*(\tau, x)$, $x^*(\tau)$, $t \leq \tau \leq t_1$ при условии $u(\tau) \in U_\tau$. Минимум соответствующего функционала обозначим через $B(x, t)$. Тогда можем записать

$$\begin{aligned}
B(x, t) &= \min_{u(\tau), x(t)} \left\{ \int_t^{t_1} G(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + g(x(t_1)) \right\} = \\
&= \left\{ \int_t^{t_1} G(x^*(\tau), u^*(\tau, x), \tau) d\tau + g(x^*(t_1)) \right\}. \quad (7.25)
\end{aligned}$$

Возьмем из промежутка (t, t_1) произвольную точку $t + \Delta t$, а из множества $X_{t+\Delta t}$ некоторую точку $x(t + \Delta t)$ и рассмотрим задачу β , отличающуюся от предыдущей задачи лишь начальными данными, которые есть $t + \Delta t$ и $x(t + \Delta t)$ (эта задача получается из задачи (7.22) – (7.24) путем механической замены t_0 и $x^{(0)}$ величинами $t + \Delta t$ и $x(t + \Delta t)$). Минимум соответствующего функционала обозначим через $B(x(t + \Delta t), t + \Delta t)$, т.е.

$$\begin{aligned}
B(x(t + \Delta t), t + \Delta t) &= \min_{u(\tau), x(t+\Delta t)} \left\{ \int_{t+\Delta t}^{t_1} G(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + g(x(t_1)) \right\} = \\
&= \int_{t+\Delta t}^{t_1} G(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau, x(t + \Delta t)), \tau) d\tau + g(\hat{x}(t_1)), \quad (7.26)
\end{aligned}$$

где $\hat{u}(\tau, x(t + \Delta t))$, $\hat{x}(\tau)$ – решение задачи β на промежутке $t + \Delta t \leq \tau \leq t_1$.

Теперь в качестве $x(t + \Delta t)$ выберем не произвольное значение, а то состояние системы (7.23), в которое она попадает из точки $x = x(t)$, двигаясь по оптимальной траектории $x^*(\tau)$ задачи α , в момент $\tau = t + \Delta t$, т.е. в качестве $x(t + \Delta t)$ выберем значение $x^*(t + \Delta t)$. В соответствии с принципом оптимальности решение задачи β при $x(t + \Delta t) = x^*(t + \Delta t)$ совпадает с решением задачи α на промежутке $t + \Delta t \leq \tau \leq t \leq t_1$. Поэтому имеем

$$B(x^*(t + \Delta t), t + \Delta t) = \int_{t+\Delta t}^{t_1} G(x^*(\tau), u^*(\tau, x), \tau) d\tau + g(x^*(t_1)). \quad (7.27)$$

Возвратимся к равенству (7.25) и представим его в виде

$$B(x, t) = \int_t^{t+\Delta t} G(x^*(\tau), u^*(\tau, x), \tau) d\tau + \int_{t+\Delta t}^{t_1} G(x^*(\tau), u^*(\tau, x), \tau) d\tau + g(x^*(t_1)). \quad (7.28)$$

Сопоставляя последнее выражение с равенством (7.27), найдем

$$B(x, t) = \int_t^{t+\Delta t} G(x^*(\tau), u^*(\tau, x), \tau) d\tau + B(x^*(t+\Delta t), t+\Delta t). \quad (7.29)$$

Последнее слагаемое в равенстве (7.29) можно несколько видоизменить. Тогда

$$B(x, t) = \int_t^{t+\Delta t} G(x^*(\tau), u^*(\tau, x), \tau) d\tau + B(x^*(t+\Delta t, u^*(\tau)), t+\Delta t). \quad (7.30)$$

Равенство (7.30) соблюдается лишь при оптимальном управлении $u^*(\tau)$ из области допустимых управлений. При любом другом управлении $u(\tau) \in U_\tau$, $t \leq \tau \leq t+\Delta t$ правая часть равенства (7.30) может только увеличиться. Поэтому

$$B(x, t) = \min_{u(\tau), x(t)} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} G(x(\tau), u(\tau, x), \tau) d\tau + B(x(t+\Delta t, u(\tau)), t+\Delta t) \right\}. \quad (7.31)$$

Уравнение (7.31) называют *уравнением Беллмана в интегральной форме* для задачи Коши.

Задача с фиксированными концами траектории и свободным временем для автономной системы

Пусть требуется определить минимум функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} G(x, u) dt + g(x(t_1)) \quad (7.32)$$

— на решениях задачи

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, u), \quad x(t_0) = x^{(0)}, \quad x(t_1) = x^{(1)}, \quad (7.33)$$

— при условиях

$$u = u(t) \in U_t, \quad x = x(t) \in X_t, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (7.34)$$

В этой задаче моменты времени t_0 и t_1 не заданы и подлежат определению вместе с определением оптимального управления и оптимальной траектории.

Минимальное значение функционала (7.32) при указанных условиях можно считать независимым от начального момента времени t_0 , а функцией лишь начального состояния $x^{(0)}$ системы. Обозначив это значение через $B(x^{(0)})$, получим

$$B(x^{(0)}) = \min_{u(\tau), x(\tau)} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} G(x, u) d\tau + g(x(t_1)) \right\}, \quad (7.35)$$

где $u(\tau) \in U_\tau$, $x(\tau) \in X_\tau$, $\tau \in [t_0, t_1]$.

Равенство (7.35) можно переписать в виде

$$S(x^{(0)}) = \min_{u(\tau), x(\tau)} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} G(x, u) d\tau + \min_{u(\tau), x(\tau)} \left[\int_{t_0+\Delta t}^{t_1} G(x, u) d\tau + g(x(t_1)) \right] \right\}, \quad (7.36)$$

где Δt – такое произвольное число, что $t_0 + \Delta t < t_1$ и $t_0 \leq \tau \leq t_0 + \Delta t$.

Согласно принципу оптимальности, из (7.36) получим

$$B(x^{(0)}) = \min_{u(\tau), x(\tau)} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} G(x, u) d\tau + B(x(t_0 + \Delta t, u(\tau))) \right\}, \quad (7.37)$$

где $x(t_0 + \Delta t, u(\tau))$ – фазовое состояние системы в момент $t_0 + \Delta t$, в которое она перемещается из точки $x^{(0)}$ под действием управления $u(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t_0 + \Delta t$.

Поскольку приведенные рассуждения применимы не только к начальной точке $x^{(0)}$, но и к любой точке x фазовой траектории, то

$$B(x) = \min_{u(\tau), x(\tau)} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} G(x, u) d\tau + B(x(t + \Delta t, u(\tau))) \right\}, \quad (7.38)$$

при условии $t_0 \leq t \leq \tau \leq t_0 + \Delta t \leq t_1$

Равенство (7.38) называется *уравнением Беллмана в интегральной форме* для задачи со свободным временем применительно к автономной системе управления.

Задача о быстродействии для автономной системы

Пусть требуется перевести систему

$$dx(t)/dt = f(x, u) \quad (7.39)$$

из одной заданной точки $x(t_0) = x^{(0)}$ в другую заданную точку $x(t_1) = x^{(1)}$ за минимально возможное время $T = t_1 - t_0$ так, чтобы были соблюдены условия

$$u(t) \in U_t, \quad x(t) \in X_t, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (7.40)$$

Полагая в равенстве (7.32) $G \equiv 1$, $g \equiv 0$ замечаем, что сформулированная задача о быстродействии представляет собой частный случай задачи (7.32) – (7.34), поскольку при этом $J = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0$. Функция $B(x)$

в данном случае будет иметь смысл минимального времени достижимости точки $x^{(1)}$ системой (7.39) из точки x . Это минимальное время обозначим через $T(x)$. Теперь из уравнения (7.38) получаем необходимые и достаточные условия оптимальности в виде

$$T(x) = \min_{u(\tau), x(\tau)} \left\{ \Delta t + T(x(t + \Delta t, u(\tau))) \right\}, \quad (7.41)$$

при $u(\tau) \in U_\tau$, $x(\tau) \in X_\tau$, $t_0 \leq t \leq \tau \leq t + \Delta t \leq t_1$

Уравнение (7.41) называется *уравнением Беллмана в интегральной форме для задачи о быстродействии автономной системы*.

7.4. Дифференциальное уравнение Беллмана.

Дополнительно к условиям, наложенным ранее на функции G , f и $u(t)$ будем считать, что G , f – непрерывны по (x, u, t) ; $u(t)$ – непрерывны по t , а $B(x, t)$ имеет непрерывные частные производные $\partial B / \partial t$, $\partial B / \partial x = \nabla^T B = (\partial B / \partial x_1, \dots, \partial B / \partial x_n)$; $B(x)$ имеет непрерывные частные производные $\partial B / \partial x$; $T(x)$ имеет непрерывные частные производные $\partial T / \partial x = \nabla^T T = (\partial T / \partial x_1, \dots, \partial T / \partial x_n)$.

При этих предположениях уравнения (7.31), (7.38), (7.41) можно записать в виде

$$B(x, t) = \min_{u(\tau), x(\tau)} \left\{ G(x(\tau), u(\tau), \tau) \Delta t + B(x, t) + \frac{\partial B(x, t)}{\partial t} \Delta t + \right. \\ \left. + \nabla^T B(x, t) \cdot (x(t + \Delta t, u(\tau)) - x) + O(\Delta t) \right\};$$

$$B(x) = \min_{u(\tau), x(\tau)} \left\{ G(x(\tau), u(\tau)) \Delta t + B(x) + \right. \\ \left. + \nabla^T B(x) \cdot (x(t + \Delta t, u(\tau)) - x) + O(\Delta t) \right\};$$

$$T(x) = \min_{u(\tau), x(\tau)} \left\{ \Delta t + T(x) + \nabla^T T(x) \cdot (x(t + \Delta t, u(\tau)) - x) + O(\Delta t) \right\}.$$

Здесь τ – некоторое фиксированное значение и $t_0 \leq t \leq \tau \leq t + \Delta t \leq t_1$; $O(\Delta t)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δt .

Предполагая, что множества U_τ , X_τ непрерывны по τ в смысле Хаусдорфова расстояния, т.е.

$$\lim_{\tau \rightarrow t+0} U_\tau = U_t, \quad \lim_{\tau \rightarrow t+0} X_\tau = X_t, \quad t, \tau \in [t_0, t_1],$$

перейдем к пределу в полученных равенствах при $\Delta t \rightarrow 0$, предварительно поделив их на Δt . При этом учтем, что величины $B(x, t)$, $B(x)$ и $T(x)$, стоящие в правых частях равенств, могут быть вынесены за знак $\min$ и взаимно уничтожены с соответствующими величинами, стоящими в левых частях равенств. Учитывая также, что при $\Delta t \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 0$, а поэтому

$$u(\tau) \rightarrow u(t), \quad x(\tau) \rightarrow x(t), \quad x(t + \Delta t, u(\tau)) \rightarrow x(t), \\ \frac{x(t + \Delta t, u(\tau)) - x(t)}{\Delta t} \rightarrow x'(t),$$

получим уравнения

$$-\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} = \min_{u(t)} \left\{ G(x, u, t) + \nabla^T B(x, t) \cdot x'(t) \right\}; \quad (7.42)$$

$$\min_{u(t)} \left\{ G(x, u) + \nabla^T B(x) \cdot x'(t) \right\} = 0; \quad (7.43)$$

$$\min_{u(t)} \nabla^T B(x) \cdot x'(t) = -1, \quad (7.44)$$

которые, должны выполняться в каждой точке оптимального решения при $u(t) \in U_t$ и $t \in [t_0, t_1]$.

Если учесть, что $x(t)$ точка фазовой траектории системы (7.23) или (7.33), то уравнения (7.42) – (7.44) приобретают форму

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} &= \min_{u(t)} \{ G(x, u, t) + \nabla^T B(x, t) \cdot f(x, u, t) \}; \\
\min_{u(t)} \{ G(x, u) + \nabla^T B(x) \cdot f(x, u) \} &= 0; \\
\min_{u(t)} \{ \nabla^T T(x) \cdot f(x, u) \} &= -1,
\end{aligned}$$

в которой они называются *дифференциальными уравнениями Беллмана* для соответствующей задачи. Функции $B(x, t)$, $B(x)$ и $T(x)$ называются *функциями Беллмана*.

В соответствии с определением функций $B(x, t)$, $B(x)$ и $T(x)$ можем записать очевидные начальные условия

$$B(x, t_1) = g(x), \quad (7.45)$$

$$B(x^{(1)}) = g(x^{(1)}), \quad (7.46)$$

$$T(x^{(1)}) = 0. \quad (7.47)$$

Задачу (7.42), (7.45) или (7.43), (7.46) или (7.44), (7.47) называют задачей Коши – Беллмана.

Решить задачу Коши – Беллмана (7.42), (7.45) – это значит найти такие функции $u(t, x)$ и $B(x, t)$, на которых при любых $t \in [t_0, t_1]$ и $x \in X_t$ выражение в фигурных скобках правой части уравнения (7.42) достигает минимума; найденный минимум указанного выражения должен равняться левой части уравнения (7.42); функция $B(x, t)$ должна удовлетворять условию (7.45). Аналогичное утверждение касается и других задач Коши – Беллмана. Как видно, решение какой-либо задачи Коши – Беллмана в общем случае достаточно сложный процесс.

Однако в ряде частных случаев эту задачу можно свести к обычной задаче Коши или краевой задаче для уравнения в частных производных относительно функций $B(x, t)$, $B(x)$ или $T(x)$. Это становится возможным, например, тогда, когда $u(t, x)$ и знак $\min$ удастся исключить из уравнения (7.42) или (7.44). Пусть, например, u и x не стеснены никакими ограничениями; тогда минимум фигурной скобки уравнения (7.42) достигается там, где ее частные производные по компонентам вектора u обращаются в нуль, т.е.

$$\frac{\partial G}{\partial u_j} + \nabla^T B(x, t) \cdot \frac{\partial f}{\partial u_j} = 0 \quad (j = \overline{1, m}). \quad (7.48)$$

Выражая компоненты вектора u из системы (7.48) через x , t , $\partial S/\partial x$ и подставляя в (7.42), получим, вообще говоря, нелинейное уравнение в частных производных первого порядка для $B(x, t)$, которое следует решать с учетом начального условия (7.45).

Возможны и другие случаи, когда задачу Коши – Беллмана удастся свести к обычной задаче Коши или смешанной краевой задаче для нелинейного уравнения в частных производных первого порядка.

Пример 7.1.

Пусть требуется определить минимум функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} u^2(t) dt + x(t_1) \quad (7.49)$$

при условиях: $x'(t) = g(x) + u(t)$; $x(t_0) = x^{(0)}$; $x(t_1)$ – не задано; t_0 , t_1 – заданы; $x(t)$, $u(t)$ – скалярные функции, не стесненные никакими ограничениями.

Составляя уравнение Беллмана (7.42), отметим, что

$$f(x, u, t) = g(x) + u(t); \quad G(x, u, t) = u^2(t);$$

$$B(x, t) = \min_u \int_t^{t_1} u^2(\tau) d\tau + x(t_1).$$

Уравнение (7.42) принимает вид

$$-\frac{\partial B}{\partial t} = \min_{u(t)} \left\{ u^2(t) + \frac{\partial B}{\partial x} (g(x) + u(t)) \right\}. \quad (7.50)$$

Образует производную по u от выражения, стоящего в фигурных скобках, и приравняем его нулю:

$$2u(t) + \partial B/\partial x = 0,$$

откуда

$$u^*(t) = -\frac{\partial B}{2\partial x}. \quad (7.51)$$

Подставляя найденное выражение для u в уравнение (7.50), получим для функции Беллмана $B(x, t)$ следующее нелинейное уравнение в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} + g(x) \frac{\partial B(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial B(x, t)}{\partial x} \right)^2 = 0. \quad (7.52)$$

Решение уравнения (7.52) следует подчинить условию

$$B(x, t_1) = x(t_1).$$

После определения функции $B(x, t)$ по формуле (7.51) находим оптимальное управление.

Пример 7.2.

Заменяем функционал предыдущего примера следующим:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} G(t) dt.$$

На управления наложим ограничение $|u| \leq 1$. Остальные условия оставим без изменения. Уравнение (7.42) в этом случае принимает вид

$$-\frac{\partial B}{\partial t} = \min_{|u| \leq 1} \left\{ G(x) + \frac{\partial B}{\partial x} g(x) + \frac{\partial B}{\partial x} u(t) \right\}. \quad (7.53)$$

Как видим, минимум фигурной скобки достигается при условии

$$u^*(t) = -\text{sign}\{\partial B / \partial x\}.$$

Подставляя полученное выражение для u в уравнение (7.53), найдем следующее уравнение в частных производных относительно функции Беллмана:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + G(x) + \frac{\partial B}{\partial x} g(x) - \left| \frac{\partial B}{\partial x} \right| = 0.$$

Начальное значение определяется равенством $B(x, t_1) = 0$.

Пример 7.3.

Решим задачу о быстродействии двумерной линейной системы управления

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = u(t). \end{cases} \quad (7.54)$$

Требуется определить оптимальное управление $u^*(t)$ из области допустимых управлений $|u(t)| \leq 1$, переводящее систему (7.54) из заданной точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ фазового пространства в начало координат $x^{(1)} = (0, 0)$ за минимальное время. Начальный момент времени t_0 примем равным нулю, конечный момент t_1 обозначим через T , причем минимальное его значение будем обозначать через T^* .

В соответствии с уравнением Беллмана (7.44) имеем

$$\min_{|u| \leq 1} (\nabla^T T \cdot f) = -1,$$

или

$$\min_{|u| \leq 1} \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial T}{\partial x_2} u \right) = -1. \quad (7.55)$$

Отсюда находим управление

$$u^*(t) = -\text{sign} \{ \partial T^* / \partial x_2 \}, \quad (7.56)$$

при котором уравнение (7.55) приобретает вид

$$\frac{\partial T^*}{\partial x_1} x_2 - \left| \frac{\partial T^*}{\partial x_2} \right| = -1. \quad (7.57)$$

Решение уравнения (7.57) нужно подчинить условию

$$T^*(0, 0) = 0. \quad (7.58)$$

Интегрируя уравнение (7.57) при условии (7.58), находим

$$T^*(x_1, x_2) = \begin{cases} 2\sqrt{x_2^2/2 + x_1} + x_2 & \text{при } \partial T^* / \partial x_2 > 0, \\ 2\sqrt{x_2^2/2 - x_1} - x_2 & \text{при } \partial T^* / \partial x_2 < 0. \end{cases} \quad (7.59)$$

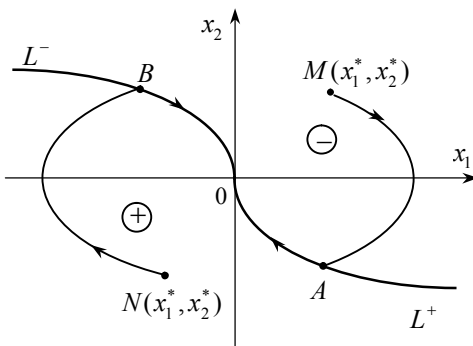


Рис. 7.4.

Равенство (7.56) указывает на то, что искомое оптимальное управление может быть равно либо $+1$, либо -1 , причем переход от одного управления к другому осуществляется на линии, где $\partial T^* / \partial x_2$ обращается в нуль. Поэтому для окончательного решения задачи требуется

построить области, где $\partial T^* / \partial x_2 > 0$ и $\partial T^* / \partial x_2 < 0$, и линию $\partial T^* / \partial x_2 = 0$, которая разделяет эти области и является *линией переключения управления*.

Для этого из (7.59) находим

$$\frac{\partial T^*}{\partial x_2} = \begin{cases} \frac{\sqrt{x_2^2/2 + x_1 + x_2}}{\sqrt{x_2^2/2 + x_1}} & \text{при } \frac{\partial T^*}{\partial x_2} > 0, \\ \frac{\sqrt{x_2^2/2 - x_1 - x_2}}{\sqrt{x_2^2/2 - x_1}} & \text{при } \frac{\partial T^*}{\partial x_2} < 0, \end{cases}$$

откуда заключаем, что значение выражения $\partial T^*/\partial x_2 \rightarrow 0$ при условии

$$(x_1, x_2) \rightarrow L^+ \left\{ L^+ : x_2 < 0, x_1 = \frac{x_2^2}{2} \right\},$$

$$(x_1, x_2) \rightarrow L^- \left\{ L^- : x_2 > 0, x_1 = -\frac{x_2^2}{2} \right\}.$$

Линия $L = L^+ + L^-$ на фазовой плоскости образует *линию переключения* (рис. 7.4). По разные стороны от данной линии управление системой имеет различные знаки.

Полученные данные позволяют описать оптимальное движение рассматриваемой системы, а именно: если изображающая точка системы в начальный момент находится в точке M , то оптимальное движение происходит в соответствии с уравнением (7.54) при $u^* = -1$ до точки A . Дальнейшее движение осуществляется по траектории, определяемой тем же уравнением (7.54) при $u^* = +1$. Эта траектория переводит изображающую точку в начало координат. Если же положение системы в начальный момент времени соответствует точке N , то оптимальное управление составит последовательность $u^* = +1$, $u^* = -1$ соответственно на траекториях NB и BO .

7.5. Взаимосвязь методов оптимального управления

Сопоставление методов оптимизации систем управления (принципа максимума, метода динамического программирования и классического вариационного исчисления) показывает, что между ними существует тесная связь. Более того, для ряда задач оптимизации эти методы, по существу, совпадают.

В частности, можно показать, что при некоторых дополнительных предположениях *принцип максимума следует из метода динамического*

программирования. Докажем это утверждение на одной задаче частного характера.

Пусть требуется найти минимум функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} G(x, u) dt \quad (7.60)$$

при условиях

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)), \quad (7.61)$$

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x^{(0)}, \quad x(t_1) = x^{(1)}; \\ u &= u(t) \in U_t, \quad t \in [t_0, t_1], \end{aligned} \quad (7.62)$$

где t_0 , $x^{(0)}$, $x^{(1)}$ фиксированы, а t_1 свободно.

Эта задача, по сути, совпадает с задачей, рассмотренной в гл. 6 (п.6.2), из которой следует, что функция, определенная равенством

$$B(x) = \min_{u(\tau)} \int_t^{t_1} G(x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad (7.63)$$

где $u(\tau) \in U_t$, $\tau \in [t, t_1]$, удовлетворяет уравнению Беллмана (7.43):

$$\min_{u(t)} \left\{ G(x(t), u(t)) + \nabla^T B(x) \cdot f(x(t), u(t)) \right\} = 0. \quad (7.64)$$

При выводе этого уравнения предполагалась непрерывность функций G , f и непрерывность всех частных производных.

Введем скалярную функцию $x_0(t)$, определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_0}{dt} = G(x, u)$$

и начальным условием

$$x_0(t_0) = 0,$$

а также обозначения

$$G(x, u) = f_0(x, u), \quad \hat{x}^T = (x_0, x_1, \dots, x_n),$$

$$\hat{f}^T(x, u) = (f_0(x, u), f_1(x, u), \dots, f_n(x, u)),$$

$$x_0 + B(x) = \bar{B}(x).$$

Уравнение Беллмана (7.64) теперь можно записать так:

$$\min_{u(t)} \left\{ \nabla^T \bar{B}(\hat{x}) \cdot \hat{f}(x, u) \right\} = 0. \quad (7.65)$$

С учетом того, что $\min(+a) = -\max(-a)$ уравнение (7.65) запишется в виде

$$\max_{u(t)} \left\{ -\nabla^T \bar{B}(\hat{x}) \cdot \hat{f}(x, u) \right\} = 0. \quad (7.66)$$

Сделаем дополнительные предположения относительно функций $\bar{B}(\hat{x})$, а именно: будем считать, что $\bar{B}(\hat{x})$ обладает вторыми непрерывными производными $\partial^2 \bar{B}(\hat{x}) / \partial x_i \partial x_j$ ($i, j = 0, 1, \dots, n$), а $\hat{f}(x, u)$ – первыми непрерывными производными $\partial f_i(x, u) / \partial x_j$ ($i = 0, 1, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, n$). Тогда функция

$$g(x, u) = \nabla^T \bar{B}(\hat{x}) \cdot \hat{f}(x, u)$$

обладает непрерывными производными

$$\frac{\partial g(\hat{x}, u)}{\partial x_k} = \sum_{i=0}^n \frac{\partial^2 \bar{B}(\hat{x})}{\partial x_i \partial x_k} f_i(x, u) + \sum_{i=0}^n \frac{\partial \bar{B}(\hat{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_k}. \quad (7.67)$$

На оптимальном решении $\hat{x}^*(t)$, $\hat{u}^*(t)$ рассматриваемой задачи (7.60) – (7.62) в силу (7.66) следующая функция обращается в нуль:

$$g(\hat{x}^*(t), u^*(t)) \equiv 0.$$

В точках $\hat{x}(t)$, $u(t)$, не принадлежащих в данный момент времени t оптимальным решениям, функция $g(\hat{x}, u)$ удовлетворяет неравенству

$$g(\hat{x}(t), u(t)) \leq 0.$$

Таким образом, функция $g(\hat{x}, u)$ в точках, принадлежащих оптимальному решению $\hat{x}^*(t)$, $\hat{u}^*(t)$ достигает максимума, а поэтому ее непрерывные производные (7.67) обращаются в нуль:

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial^2 \bar{B}(\hat{x}^*(t))}{\partial x_i \partial x_k} f_i(x^*(t), u^*(t)) + \sum_{i=0}^n \frac{\partial \bar{B}(\hat{x}^*(t))}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_i(x^*(t), u^*(t))}{\partial x_k} = 0$$

$$(k = 0, 1, \dots, n; \quad t \in [t_0, t_1]). \quad (7.68)$$

Учитывая уравнения движения системы (7.61), равенство (7.68) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{B}(\hat{x}^*(t))}{\partial x_k} \right) = - \sum_{i=0}^n \frac{\partial \bar{B}(\hat{x}^*(t))}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_i(x^*(t), u^*(t))}{\partial x_k} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Вводя обозначение

$$\frac{\partial \bar{B}(\hat{x}^*(t))}{\partial x_k} = \psi_k(t) \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

замечаем, что функции $\psi_k(t)$ удовлетворяют системе сопряженных уравнений

$$\frac{d\psi_k(t)}{dt} = - \sum_{i=0}^n \frac{\partial f_i(x^*(t), u^*(t))}{\partial x_k} \psi_i(t) \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

а уравнение Беллмана (7.66) приобретает вид

$$\max_{u(t)} \left\{ \psi^T(t) \cdot \hat{f}(x^*(t), u(t)) \right\} = 0, \quad (7.69)$$

где $u(t) \in U_t$, $\psi^T(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$, $t \in [t_0, t_1]$.

Условие (7.69) совпадает с принципом максимума для задачи о быстройдействии.

Следует, однако, напомнить, что вывод условия максимума (7.69) осуществлен при дополнительных предположениях относительно дифференцируемости функции $B(x)$.

Рассмотрим связь *динамического программирования и классического вариационного исчисления*.

С помощью метода динамического программирования можно вывести необходимые условия экстремума для функционалов классического вариационного исчисления.

Пусть, например, требуется найти минимум функционала:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} G(x(t), x'(t), t) dt \quad (7.70)$$

при условиях

$$x(t_0) = x^{(0)}, \quad x(t_1) = x^{(1)}, \quad x(t) \in X_t.$$

Эту задачу можно рассматривать как частный случай задачи оптимального управления (7.1) – (7.4), а именно: найти минимум функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} G(x(t), u(t), t) dt$$

при условиях

$$x'(t) = u(t), \quad x(t_0) = x^{(0)}, \quad x(t_1) = x^{(1)}, \quad u(t) \in U_t, \quad x(t) \in X_t,$$

где $t_0, t_1, x^{(0)}, x^{(1)}$ – заданные точки.

Введем функцию Беллмана

$$B(x, t) = \min_{u \in U} \int_{t_0}^{t_1} G(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau$$

и запишем уравнение Беллмана (7.42), которое в данном случае принимает вид

$$-\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} = \min_{u \in U} \left\{ G(x, u, t) + \frac{\partial B(x, t)}{\partial x} \cdot u \right\}. \quad (7.71)$$

Минимум фигурной скобки достигается в «точке» u , в которой

$$\frac{\partial G(x, u, t)}{\partial u} + \frac{\partial B(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (7.72)$$

Значение $u = u(t)$ выражается из уравнения (7.72) и подставляется в (7.71); тогда знак $\min$ можно опустить. Получим

$$\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} + G(x, u, t) + \frac{\partial B(x, t)}{\partial x} u = 0. \quad (7.73)$$

Дифференцируя уравнение (7.72) по t и уравнение (7.73) по x , найдем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial G(x, u, t)}{\partial u} + \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x^2} u = 0; \quad (7.74)$$

$$\frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial t \partial x} + \frac{\partial G(x, u, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x^2} u = 0. \quad (7.75)$$

Наконец, вычитая равенство (7.74) из равенства (7.75) и заменяя $u(t)$ на $x'(t)$, получим классическое уравнение Эйлера, совпадающее с уравнением (5.16)

$$\frac{\partial G(x, x', t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G(x, x', t)}{\partial x'} = 0 \quad (7.76)$$

и представляющее собой одно из необходимых условий экстремума функционала (7.60).

Следует отметить, что для получения уравнения Эйлера (7.76) мы вынуждены были предположить существование и непрерывность второй смешанной производной функции $B(x, t)$ по x и t и существование второй производной этой функции по x , что, как известно, выполняется далеко не всегда.

Из уравнения Беллмана можно вывести и другие условия экстремума для функционалов классического вариационного исчисления.

Покажем, как из *принципа максимума можно получить известные условия классического вариационного исчисления*.

Рассмотрим вариационную задачу: среди всех непрерывных кривых $x = x(t)$ ($t \in [t_0, t_1]$), имеющих кусочно-непрерывные производные $x'(t)$ и удовлетворяющих условиям $x(t_0) = x^{(0)}$ (левый конец закреплен), $x(t_1) = x^{(1)} \in X_1$ (правый конец закреплен, подвижен или свободен в зависимости от вида области X_1), найти такую, которая сообщает минимум функционалу

$$J = \int_{t_0}^{t_1} G(x, x', t) dt. \quad (7.77)$$

Предположим, что функция $G(x, x', t)$ непрерывна и имеет непрерывные производные $G_x, G_{x'}, G_t, G_{x't}, G_{x'x}, G_{x'x'}$ при $x \in X_t, x' \in X'_t, t \in [t_0, \infty)$.

Имея в виду применить к этой задаче принцип максимума, сформулируем ее как задачу оптимального управления:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} G(x, u, t) dt;$$

$$x'(t) = u(t), \quad x(t_0) = x^{(0)}, \quad x(t_1) = x^{(1)} \in X_1;$$

$$u(t) \in U \equiv R^n \quad (t \in [t_0, t_1]).$$

Следуя принципу максимума, выпишем функцию Гамильтона

$$\begin{aligned} H(\bar{\psi}(t), x(t), u(t), t) &= \bar{\psi}^T(t) \cdot \hat{f}(x(t), u(t), t) = \\ &= \psi_0(t) G(x(t), u(t), t) + \psi^T(t) u(t), \end{aligned} \quad (7.78)$$

где $\bar{\psi}(t)$ – вектор-функция с компонентами $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, ..., $\psi_n(t)$, удовлетворяющими сопряженной системе

$$\frac{d\psi_0(t)}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\psi^T(t) G_x(x(t), u(t), t) \\ (t \in [t_0, t_1]). \quad (7.79)$$

Если через $x^*(t)$, $u^*(t)$ обозначить оптимальный процесс рассматриваемой системы, а через $\bar{\psi}^*(t)$ – решение системы (7.79), соответствующее оптимальному процессу, то в силу принципа максимума должно выполняться условие

$$\psi_0(t) G(x^*(t), u^*(t), t) + \psi^{*T}(t) u^*(t) = \\ = \max_{u \in U} [\psi_0(t) G(x^*(t), u(t), t) + \psi^{*T}(t) u(t)] \\ \text{при } t \in [t_0, t_1]. \quad (7.80)$$

Согласно постановке задачи область допустимых управлений совпадает со всем пространством U_t , поэтому максимум функции H достигается в точке, где $\frac{\partial H}{\partial u} \equiv 0$ ($t \in [t_0, t_1]$), т.е. при условии

$$\psi_0(t) G_u(x^*(t), u^*(t), t) + \psi^*(t) = 0 \quad (t \in [t_0, t_1]). \quad (7.81)$$

Из первого уравнения системы (7.79) следует $\psi_0(t) \equiv \text{const}$, а из соотношения (7.81) легко заключить, что $\psi_0(t) \neq 0$ (в противном случае было бы $\psi_0(t) \equiv 0$). Без ограничения общности можно положить $\psi_0(t) = -1$. Тогда соотношения (7.78) – (7.81) примут вид

$$H(\bar{\psi}(t), x(t), u(t), t) = -G(x(t), u(t), t) + \psi^T(t) u(t); \quad (7.82)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = G_x(x(t), u(t), t) \quad (t \in [t_0, t_1]); \quad (7.83)$$

$$-G(x^*(t), u^*(t), t) + \psi^{*T}(t) u^*(t) = \\ = \max_{u \in U} [-G(x^*(t), u(t), t) + \psi^{*T}(t) u(t)] \quad (t \in [t_0, t_1]). \\ \psi^*(t) = G_x(x^*(t), u^*(t), t) \quad (t \in [t_0, t_1]). \quad (7.84)$$

Из уравнения (7.83) можем записать

$$\frac{d\psi^*(t)}{dt} = G_x(x^*(t), u^*(t), t). \quad (7.85)$$

Теперь, дифференцируя равенство (7.84) по t , из соотношения (7.85) получим

$$\frac{d}{dt} G_u(x^*(t), u^*(t), t) - G_x(x^*(t), u^*(t), t) = 0. \quad (7.86)$$

Если учесть, что $u(t) = x'(t)$, то равенство (7.86) представляет собой не что иное, как условие Эйлера в классическом вариационном исчислении.

Приведенные выше выкладки позволяют установить еще одно необходимое условие экстремума функционала (7.77), а именно, условие Лежандра

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 G(x^*(t), u^*(t), t)}{\partial u_i \partial u_j} \xi_i \xi_j \geq 0 \quad (7.87)$$

при любых ξ_i, ξ_j и $t \in [t_0, t_1]$.

В самом деле, необходимым условием максимума функции $H(\psi^*(t), x^*(t), u(t), t)$ при $u(t) = u^*(t)$ является неположительность квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t), t)}{\partial u_i \partial u_j} \xi_i \xi_j \leq 0 \quad (t \in [t_0, t_1]),$$

которое с учетом равенства (7.82) совпадает с условием (7.87).

Аналогично можно показать, что из принципа максимума следуют другие необходимые условия экстремума функционала (7.77), известные в классическом вариационном исчислении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. – 424 с.
2. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
3. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. – 224 с.
4. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. – 408 с.
5. *Брайсон А., Хо Ю-иш* Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. М.: Мир, 1972. – 544 с.
6. *Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф.* Основы теории управления. – Киев: Выща школа, 1975. – 328 с.
7. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. – 520 с.
8. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. – 496 с.
9. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
10. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем.. М.: Наука, 1971. – 424 с.
11. *Петров Ю.П.* Вариационные методы теории оптимального управления. – Л.: Энергия, 1977. – 280 с.
12. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
13. Теория автоматического управления / Под ред. *А.А. Воронова*. Ч.1. Теория линейных систем автоматического управления. М.:Высш.шк., 1986. – 367 с.
14. Теория автоматического управления / Под ред. *А.А. Воронова*. Ч.2. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления. М.:Высш.шк., 1986. – 504 с.
15. *Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г.* Методы теории автоматического управления. М.: Наука, 1971.
16. *Швед О.П.* Дифференциальные уравнения. Уч.пос. – Луганск: изд. ВУГУ, 2000. – 259 с.
17. *Швед О.П., Кучма В.Я.* Операційне обчислення. Уч.пос. – Луганськ: вид-во СНУ ім. В. Даля, 2002. – 256 с.
18. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. – 375 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ УПРАВЛЕНИИ.....	4
1.1. Примеры систем управления и их математические модели...	4
1.2. Системы управления и их уравнения.....	12
1.3. Принципы управления. Постановка задачи об управлении...	16
2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ.....	26
2.1. Временные характеристики линейных одномерных систем..	26
2.2. Связь между входным и выходным сигналами системы управления.....	30
2.3. Преобразование Лапласа. Передаточная функция.....	35
2.4. Преобразование Фурье. Частотные характеристики.....	46
2.5. Элементарные звенья и их характеристики	50
2.6. Характеристики систем при различных соединениях звеньев.....	56
2.7. Характеристики линейных многомерных систем. Формула Коши.....	61
3. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ.....	72
3.1. Постановка задачи устойчивости по Ляпунову.....	72
3.2. Условия устойчивости линейных систем управления.....	78
3.3. Алгебраические критерии устойчивости.....	84
3.4. Частотные критерии устойчивости.....	89
3.5. Второй метод Ляпунова.....	100
4. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ.....	110
4.1. Задача об управляемости систем. Критерий управляемости..	110
4.2. Наблюдаемость в линейных системах управления.....	122
4.3. Двойственность задач управляемости и наблюдаемости.....	130
5. МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	132
5.1. Задача оптимального управления как вариационная задача..	132
5.2. Необходимые и достаточные условия экстремума функционала.....	136
5.3. Каноническая форма уравнений Эйлера-Лагранжа.....	148

5.4. Применение уравнений Эйлера при ограничениях на управление.....	155
6. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА.....	160
6.1. Особенности вывода принципа максимума	160
6.2. Теорема принципа максимума	164
6.3. Линейная система оптимального быстрогодействия.....	173
6.4. Примеры построения оптимального управления.....	180
7. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.....	193
7.1. Принцип оптимальности Беллмана.....	193
7.2. Многошаговая задача оптимизации.....	198
7.3. Функциональное уравнение Беллмана.....	207
7.4. Дифференциальное уравнение Беллмана.....	211
7.5. Взаимосвязь методов оптимального управления	217
Литература.....	225

Навчальне видання

НЕФЬОДОВ ЮРІЙ МИХАЙЛОВИЧ

ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ

російською мовою

Редактор *З. І. Андропова*
Техн. редактор *Т. М. Драговоз*
Оригінал-макет автора

Підписано до друку

Формат 60х84 1/16. Папір типогр. Гарнітура Times.
Друк офсетний. Умов. друк. арк. 13,2. Обл. вид. арк. 13,9
Тираж 300 екз. Вид. № 735. Замов. № 125 Ціна договірна.

Видавництво

Східноукраїнського національного університету
імені Володимира Даля
91034, м. Луганськ, кв. Молодіжний, 20а

Адреса видавництва: 91034, м. Луганськ, кв. Молодіжний, 20а

Телефон: 8 (0642) 46-13-04. **Факс:** 8 (0642) 46-13-64

E-mail: uni@vugu.lugansk.ua

http: <http://vugu.lugansk.ua>