Т. Г. НЕЗБАЙЛО

ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Санкт-Петербург
2007

УДК 372.8 373 5
Н44

Незбайло Т. Г.
Н44 Теория интегрирования линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — СПб. : ЧП Генкин А. Д., 2007. — 160 с. — ISBN 978-5-98947-097-6.

Книга посвящена решению проблемы интегрирования линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, в общем случае с переменными коэффициентами, произвольного порядка с позиций единого математического подхода.

Кроме алгоритма решения и соответствующих формул, приводится также много примеров, иллюстрирующих излагаемую теорию.

Книга предназначена для специалистов по высшей математике, научных сотрудников и студентов математических и технических специальностей вузов.

УДК 372.8 373 5

Научное издание

Незбайло Тиберий Георгиевич

ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Оформление обложки *Е. Н. Гозман*
Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*
Корректор *А. К. Райхчин*

Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, том 2; 95 3000 — книги и брошюры. Подписано в печать 12.12.07. Формат $60 \times 90^1/_8$. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 20. Тираж 1000 экз. Заказ № 15.

Издательство «Специальная Литература».
190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29

Отпечатано ЧП Генкин А. Д.
192007, Санкт-Петербург, наб. Обводного канала, 40

ISBN 978-5-98947-097-6

СОДЕРЖАНИЕ

Часть 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Часть 2. ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Часть 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПЕРАЦИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Условные обозначения:

N — множество натуральных чисел.

$\Gamma(n) = (n-1)!$ — полная гамма-функция, где n — натуральное число.

$\Gamma(z)$ — гамма-функция аргумента z, который в общем случае — комплексное число.

$\Gamma(\alpha, x)$ — неполная гамма-функция.

$C_j^i = C(i, j)$ — биномиальный коэффициент.

При целых j, i, $i \leqslant j$, $0 \leqslant i$ определяется формулой $C(i, j) = \dfrac{j!}{i!(j-i)!}$.

При любых значениях i, j определяется формулой $C(i, j) = \dfrac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(j+1)\,\Gamma(j-i+1)}$ или следующих из этого предельных соотношений.

$P(a, k)$ — символ Похгаммера от a по k.

Для целых k определяется формулой $P(a, k) = a(a+1) \ldots a+k-1$.

Для любых a, k определяется формулой $P(a, k) = \dfrac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$ или следующих из этого предельных соотношений.

$H([\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k], [\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k], z)$ — гипергеометрическая функция.

$Ei(a, z)$ — интегральная показательная функция.

$[f(x)]_n$ — n-кратный интеграл от функции $f(x)$ по переменной x; $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Например: $[f(x)]_0 = f(x)$, $[f(x)]_1 = \int f(x)\,dx$, $[f(z)]_2 = \iint f(z)\,dz\,dz$ и так далее.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Основы теории **дифференциального** и **интегрального исчисления** заложены независимо в трудах **И. Ньютона и Г. Лейбница** в период с **1666** по **1702** год **[1]**. И хотя с тех пор эта теория существенно обогатилась трудами многих выдающихся математиков: **И. Бернулли, Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, О. Коши, Н. И. Лобачевского** и других, она все же **содержит нерешенную до настоящего времени фундаментальную проблему: данная теория не задает математический алгоритм операции интегрирования.**

Действительно, алгоритм операции дифференцирования достаточно гладкой функции $f(x)$ определяется формулой

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}. \tag{1.1}$$

Очевидно, что таким образом функция $f(x)$ посредством правила, задаваемого формулой (1.1) (операция дифференцирования), порождает, т. е. преобразуется в новую функцию $\dfrac{d}{dx} f(x)$.

Под неопределенным интегралом, например, от этой же функции $f(x)$ понимается равенство

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{1.2}$$

где C — произвольная постоянная, $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, т. е. любая функция, удовлетворяющая равенству

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x). \tag{1.3}$$

Посредством какого математического алгоритма (т. е. последовательности каких известных математических операций) можно перейти в равенстве (1.2) от функции $f(x)$ к первообразной $F(x)$, пока современной математике неизвестно. Другими словами, неизвестна **последовательность математических действий, определяющих операцию интегрирования.** Поэтому под вычислением неопределенного интеграла от функции $f(x)$ (т. е определения первообразной $F(x)$) понимается набор математических алгоритмов, когда **искусственными** приемами: заменой переменной интегрирования, использованием формулы интегрирования по частям и т. д., производится преобразование выражения $\int f(x)\,dx$ к виду, который принадлежит к уже известному множеству интегралов (1.2). В том случае, если это удается сделать, первообразная $F(x)$ считается вычисленной, если нет, то задача нахождения заданного интеграла остается нерешенной.

В силу отсутствия такого единого общего алгоритма, нахождение $F(x)$ определяется не только (и не столько) уровнем квалификации, сколько (в первую очередь) **интуицией**, т. е. умением угадать правильную подстановку или использовать нужное преобразование, в результате которых будет достигнута искомая цель. Безусловно, существует великое (бесконечное) множество интегралов, которые до настоящего времени невозможно вычислить, используя существующие известные методы, например: $\int e^{\sin x}\,dx$ и так далее.

Изложенного достаточно, чтобы сделать вывод, что задача построения новых алгоритмов (методов) для нахождения первообразной $F(x)$ по заданной функции $f(x)$ продолжает оставаться весьма **актуальной.**

Поскольку из формул (1.1) и (1.2) следует

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x),$$

то это означает, что операция интегрирования является обратной к операции дифференцирования. Следовательно, **между этими операциями существует некая связь. В определении ее математических законов и заключается основная задача настоящей работы.**

2. n-е ПРОИЗВОДНЫЕ

2.1. Определение и вычисление производной n-го порядка

Будем предполагать (с целью простоты изложения), что все функции, о которых будет идти далее речь, являются достаточно гладкими, т. е. они необходимое число раз дифференцируемы и интегрируемы.

Известно, что производной n-го порядка от функции $f(x)$ называется такая функция $G(n, x)$, которая содержит параметр n (натуральное число) и определяется формулой

$$G(n, x) = \frac{d^n}{dx^n}f(x). \tag{2.1}$$

Функция $G(n, x)$ образует последовательность

$$G(1, x),\ G(2, x),\ G(3, x)\ldots$$

и обладает очевидными свойствами.

а) Реккурентность.

$$G(n,\ x) = \frac{\partial}{\partial x} G(n-1,\ x). \tag{2.2}$$

И как следствие:

$$G(i+k,\ x) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} G(i,\ x), \quad i = 1\ ..\ n. \tag{2.3}$$

б) Инверсия порядка.

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} G(k,\ x) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} G(n,\ x),$$

n, k — натуральные числа.

в) Свойство аддитивности.

Пусть $G_1(k,\ x)$ и $G_2(s,\ x)$ — соответственно k-я и s-я производные от функций $f(x)$, $\varphi(x)$. Тогда

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(G_1(k,\ x) + G_2(s,\ x)) = G_1(k+n,\ x) + G_2(s+n,\ x).$$

г) Свойство разложения.

Если $G_1(k,\ x)$ и $G_2(k,\ x)$ — k-е производные от функций $f(x)$, $\varphi(x)$ соответственно, то

$$G(k,\ x) = G_1(k,\ x) + G_2(k,\ x)$$

является k-й производной от функции $f(x) + \varphi(x)$.

Так как операция дифференцирования преобразует функцию $G(n,\ x)$ в $G(n+1,\ x)$, то возникает вопрос о существовании функций, инвариантных относительно операции дифференцирования, т. е. удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} G(n,\ x) = \dfrac{\partial}{\partial x} G(n,\ x), \\ G(n,\ x) = G(n+1,\ x). \end{cases}$$

Решая дифференциальное и рекуррентное уравнения, устанавливаем:

$$G(n,\ x) = Ce^x, \quad G(n,\ x) = G(0,\ x) = f(x),$$

где C — произвольная постоянная.

Следовательно, такой является только

$$f(x) = Ce^x.$$

Очевидно, что функция $G(n,\ x)$ является, в общем случае, принципиально иной, чем $f(x)$, так как она содержит дополнительный новый параметр — n. Поэтому по виду функции $f(x)$ невозможно ничего сказать о виде функции $G(n,\ x)$, например:

$$f(x) = e^{(kx)}, \ \ k \text{ — const.} \quad \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{kx} = k^n e^{kx}. \tag{2.4}$$

$$f(x) = x^m, \quad \frac{\partial^n}{\partial x^n} x^m = A_n(m)\, x^{(m-n)}, \ \ A_n(m) = \frac{m!}{(m-n)!}. \tag{2.5}$$

m — натуральное число и т. д.

Отметим, что вычисление производной n-го порядка от функции $f(x)$ в ряде случаев дает на первый взгляд «парадоксальные» результаты.

▶ **Пример.** Вычислим n-ю производную от функции $f(x) = C$, где C — произвольная постоянная. Действительно, функция $f(x) = C$ является частным случаем более общей функции

$$\phi(x) = Cx^m, \quad x \neq 0,$$

при $m = 0$.

Поэтому в соответствии с (2.5)

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(Cx^m) = C\frac{\partial^n}{\partial x^n}x^m = \frac{C\,m!\,x^{m-n}}{(m-n)!}.$$

Принимая в этом равенстве $m = 0$, получим:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}C = \frac{Cx^{-n}}{\Gamma(-n+1)}, \quad x \neq 0. \tag{2.6}$$

Действительно, при $n = 0$ отсюда имеем:

$$\frac{d^0 C}{dx^0} = \frac{C\,x^0}{\Gamma(1)}.$$

Так как

$$\frac{d^0 C}{dx^0} = C; \quad x^0 = 1, \quad (x \neq 0); \quad \Gamma(1) = 1,$$

то получаем тождество

$$C = C,$$

поэтому эта формула верна при $n = 0$.

Для всех натуральных n

$$\Gamma(-n+1) = \infty,$$

поэтому в этом случае всегда

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}C = \frac{C\,x^{-n}}{\infty} = 0; \quad x \neq 0.$$

Таким образом, формула (2.6) удовлетворяет существующему требованию (о равенстве нулю производной от любой постоянной), но определяется равенством (2.6), не тождественным нулю.

2.2. Производные n-го порядка от сложных функций

А. В том случае, если функция $f(x)$ допускает представление в виде произведения двух и более функций, например $f(x) = u(x)\,v(x)$, для вычисления производной n-го порядка от функции $f(x)$ можно воспользоваться формулой Лейбница [1]:

$$\frac{d^n}{dx^n}(u(x)\,v(x)) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\,\frac{d^i}{dx^i}(u(x))\,\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}v(x). \tag{2.7}$$

В. В том случае, если исходная функция $f(x)$ является сложной функцией, т. е. представима в виде:

$$f(x) = F(R), \quad R = R(x), \tag{2.8}$$

формула для ее производной n-го порядка имеет вид:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} F(R) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dR^k} F(R) \cdot \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C(k, s) R^s \frac{\partial^n}{\partial x^n} R^{k-s}. \tag{2.9}$$

2.3. Нормальные и особые n-е производные

Ранее было определено, что n-я производная $G(n, x)$ изменением параметра n определяет последовательность функций:

$$G(1, x), G(2, x), G(3, x) .. G(n, x).$$

В этом случае заведомо известны все функции $G(i, x)$, $i = 1 .. n$.
Расширим область определения параметра n на множество действительных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Если существует предел выражения в точке $n = 0$**

$$\lim_{n \to 0} G(n, x) = f(x),$$

а для других точек $n = k$

$$\lim_{n \to k} G(n, x) = G(k, x),$$

где $G(k, x)$ — некоторая определенная функция, то n-я производная $G(n, x)$ называется нормальной в точке $n = k$. В противном случае она называется особой n-й производной в точке $n = k$.

▶ **Пример.** n-я производная

$$G(n, x) = k^n e^{kx} \tag{2.10}$$

от функции $f(x) = e^{kx}$ является нормальной в точке $n = 0$, так как

$$\lim_{n \to 0} G(n, x) = k^0 e^{kx} = e^{kx},$$

что совпадает с исходной функцией $f(x) = e^{kx}$.
В то же время n-я производная

$$G(n, x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\, c^n}{(cx+b)^n}$$

от функции $\ln(cx + b)$ является особой при $n = 0$, так как равенство

$$\lim_{n \to 0} G(n, x) = \lim_{n \to 0} \left(\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\, c^n}{(cx+b)^n} \right)$$

не определено.
К классу функций, порождающих особые производные в точке $n = 0$, в частности относятся также функции: $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и т. д.

3. ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

3.1. Сумма производных n-го порядка

Пусть задана n-я производная $G(n, x)$ от функции $f(x)$, нормальная в точке $n = 0$.

Вычислим сумму S_n

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} G(i, x) \tag{3.1}$$

функциональной последовательности

$$G(0, x),\ G(1, x),\ G(2, x),\ G(3, x)\ldots .$$

С этой целью, дифференцируя левую и правую части равенства (3.1), имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x} S_n = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=0}^{n} G(i, x)\right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x} G(i, x) = \sum_{i=0}^{n} G(i+1, x). \tag{3.2}$$

Вычитая из (3.2) равенство (3.1), с учетом свойства (2.2), получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} S_n - S_n = \sum_{i=0}^{n} G(i+1, x) - \sum_{i=0}^{n} G(i, x) = G(n+1, x) - G(0, x). \tag{3.3}$$

Так как $G(n, x)$ — нормальная n-я производная в точке $n = 0$, то справедливо:

$$G(0, x) = f(x).$$

Поэтому равенство (3.3) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} S_n - S_n = G(n+1, x) - f(x). \tag{3.4}$$

Таким образом, получено линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции S_n.

Уравнение (3.4) имеет общее решение

$$S_n = e^x \int (G(n+1, x) - f(x)) e^{-x} dx + Ce^x, \tag{3.5}$$

C — const.

Произвольная постоянная C определяется из условия

$$[S_n]_{n=0} = f(x)$$

и в этом случае $C = 0$.

Таким образом, искомая формула (3.5) принимает вид:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} G(i, x) = e^x \int (G(n+1, x) - f(x)) e^{-x} dx.} \tag{3.6}$$

Следовательно, если параметрическая функция $G(i, x)$ является нормальной в точке $n = 0$, то формула (3.6) определяет сумму этого ряда.

Следствие. Если $G(n, x)$ — такая параметрическая функция, для которой выполнено условие

$$\lim_{n \to \infty} G(n+1, x) = 0,$$

то (3.6) преобразуется к виду:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^i}{dx^i} f(x) = -e^x \int f(x)\, e^{-x}\, dx. \tag{3.7}$$

▶ **Пример.** Пусть задана функция

$$f(x) = e^{kx},$$

где k — параметр, такой что $0 < k < 1$.

Так как в соответствии с (2.4)

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{kx} = k^n e^{kx},$$

то в этом случае

$$\lim_{i \to \infty} k^i e^{kx} = 0.$$

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^i}{\partial x^i} e^{kx} = -e^x \int e^{kx} e^{-x}\, dx \quad \text{или} \quad \sum_{i=0}^{\infty} k^i = -e^{-kx} e^x \int e^{(k-1)x}\, dx.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{\infty} k^i = \frac{1}{1-k},$$

что совпадает с известным значением.

3.2. Основная теорема

Докажем теорему, именуемую далее **«Основной теоремой»**:

Если для заданной n раз дифференцируемой функции $f(x)$ последовательность

$$f(x),\ \frac{d}{dx} f(x),\ \frac{d^2}{dx^2} f(x),\ \frac{d^3}{dx^3} f(x) \ldots$$

позволяет установить ее общее функциональное представление:

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = G(n, x),\ n \text{ — натуральное число,}$$

такое, что $G(n, x)$ является нормальной производной в точках $n = 0, -1$, то имеет место формула

$$\boxed{\int f(x)\, dx = \lim_{n \to -1} \left(\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right) + C,} \tag{3.8}$$

где C — const.

Доказательство. Так как n-я производная $G(n, x)$ от функции $f(x)$ является нормальной производной в точке $n = 0$, т. е. имеет место равенство:

$$\lim_{n \to 0} G(n, x) = f(x),$$

то будет иметь место также эквивалентное равенство

$$\lim_{n \to -1} G(n+1, x) = f(x).$$

Поэтому формула (3.6) в результате этой подстановки принимает вид:

$$\lim_{n \to -1} S_n = e^x \int (G(0, x) - f(x)) e^{-x} dx = e^x \int (f(x) - f(x)) e^{-x} dx = 0.$$

Или в эквивалентной форме:

$$\lim_{n \to -1} \left(\sum_{i=0}^{n} G(i, x) \right) = 0. \tag{3.9}$$

Представим это равенство в виде:

$$\lim_{n \to -1} \left(\sum_{i=1}^{n} G(i, x) \right) + f(x) = 0.$$

Отсюда

$$f(x) = -\lim_{n \to -1} \left(\sum_{i=1}^{n} G(i, x) \right).$$

Произведем замену индекса суммирования i на $i + 1$ в правой части этого равенства.
Это приводит к соотношению

$$f(x) = -\lim_{n \to -1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} G(i+1, x) \right). \tag{3.10}$$

Так как в силу (2.2)

$$G(i+1, x) = \frac{\partial}{\partial x} G(i, x),$$

то (3.10) благодаря дифференцируемости $G(i, x)$ принимает вид:

$$f(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\lim_{n \to -1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} G(i, x) \right) \right).$$

Правая часть этого равенства в итоге не изменится, если прибавить и отнять слагаемое $G(n, x)$:

$$f(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\lim_{n \to -1} \left(\sum_{i=0}^{n} G(i, x) - G(n, x) \right) \right).$$

В этом случае оно преобразуется к виду:

$$f(x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\lim_{n\to -1}\left(\sum_{i=0}^{n} G(i,\ x)\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\lim_{n\to -1} G(n,\ x)). \qquad (3.11)$$

Так как по формуле (3.9)

$$\lim_{n\to -1}\left(\sum_{i=0}^{n} G(i,\ x)\right) = 0,$$

то (3.11) принимает вид:

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial x}(\lim_{n\to -1} G(n,\ x)).$$

Так как

$$\lim_{n\to -1} G(n,\ x) = G(-1,\ x)$$

по условию основной теоремы (т. е. является нормальной производной), то, интегрируя это равенство, получаем искомую формулу для вычисления неопределенного интеграла (3.8).

Теорема доказана.

П р и м е ч а н и е. При отсутствии неопределенностей формула для вычисления $\int f(x)\,dx$ может употребляться в упрощенном виде:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \left\{\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right\}_{n=-1} + C.} \qquad (3.12)$$

▶ **Пример 1.** Вычислить интеграл от постоянной C

$$\int C\,dx.$$

Р е ш е н и е. Так как по формуле (2.6)

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} C = \frac{Cx^{-n}}{(-n)!}, \quad x \neq 0,$$

то искомый интеграл равен

$$\int C\,dx = \left\{\frac{Cx^{-n}}{(-n)!}\right\}_{n=-1} = Cx,$$

что соответствует табличному значению.

▶ **Пример 2.** Вычислить интеграл

$$\int x^p\,dx,$$

p — натуральное число.

Р е ш е н и е. Так как в соответствии с (2.5)

$$f(x) = x^p, \quad G(n,\ x) = \frac{p!\,x^{p-n}}{(p-n)!}, \quad n < p.$$

Поэтому

$$\int x^p\,dx = \left\{\frac{p!\,x^{p-n}}{(p-n)!}\right\}_{n=-1} = \frac{x^{p+1}}{p+1},$$

что соответствует табличному значению.

▶ **Пример 3.** Вычислить интеграл

$$\int xe^x\,dx.$$

Решение. Так как

$$\frac{d^n}{dx^n}(xe^x) = e^x(x+n),$$

то, используя (3.12), получаем:

$$\int xe^x\,dx = e^x(x-1),$$

что совпадает с табличным значением.

▶ **Пример 4.** Вычислить интеграл

$$\int \sin(ax)\,dx,$$

где a — постоянная.

Решение. Так как

$$f(x) = \sin(a\,x), \quad G(n,\, x) = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right),$$

то по формуле (3.12) имеем:

$$\int \sin(ax)\,dx = \left\{a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=-1} = -\frac{\cos(ax)}{a},$$

что соответствует табличному значению.

▶ **Пример 5.** Вычислить интеграл

$$\int \frac{1}{(ax+b)(cx+m)}\,dx,$$

где a, b, c, m — постоянные.

Решение. Вычисляя n-ю производную от функции

$$\frac{1}{(ax+b)(cx+m)},$$

получим формулу

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{1}{(ax+b)(cx+m)}\right) = \frac{n!\,(-1)^n(cx+m)^{-n-1}(a^{n+1}(ax+b)^{-n-1}(cx+m)^{n+1} - c^{n+1})}{am-bc}.$$

Так как

$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{1}{(ax+b)(cx+m)}\right)\right\}_{n=0} = \frac{1}{(ax+b)(cx+m)},$$

то по формуле (3.8) находим:

$$\lim_{n\to -1}\left(\frac{n!\,(-1)^n(cx+m)^{-n-1}(a^{n+1}(ax+b)^{-n-1}(cx+m)^{n+1} - c^{n+1})}{am-bc}\right) = \frac{-\ln(cx+m) + \ln(ax+b) - \ln a + \ln c}{am-bc}.$$

Следовательно, в итоге имеем:

$$\int \frac{1}{(ax+b)(cx+m)}\,dx = \frac{-\ln(cx+m)+\ln(ax+b)-\ln a+\ln c}{am-bc} + \text{const},$$

что соответствует табличному значению.

Примечание. Простая подстановка $n = -1$ в выражение

$$\frac{n!\,(-1)^n(cx+m)^{-n-1}\left(a^{n+1}(ax+b)^{-n-1}(cx+m)^{n+1}-c^{n+1}\right)}{am-bc}$$

дает неопределенность вида $\{\infty \cdot 0\}$, т. е. требуемый результат при этом не достигается, поэтому условие наличия предела в формуле (3.8) является существенным.

▶ **Пример 6.** Вычислить интеграл

$$\int e^{ax}x^p\,dx.$$

Решение. Известное табличное представление данного интеграла определяется формулой:

$$\int e^{ax}x^p\,dx = -\frac{(-a)^{-p}\left(x^p(-a)^p\,p\,\Gamma(p)\,(-ax)^{-p} - x^p(-a)^p e^{ax} - x^p(-a)^p\,p(-ax)^{-p}\,\Gamma(p,-ax)\right)}{a}, \qquad (3.13)$$

которая имеет весьма громоздкий вид и не удобна для практического применения.

Получим более эффективную формулу.

Так как n-я производная от подынтегральной функции равна

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(e^{ax}x^p\right) = \frac{e^{ax}\,\Gamma(p+1)\,x^{p-n}\,H([-n],[p-n+1],-ax)}{\Gamma(p-n+1)},$$

то искомый интеграл определяется формулой

$$\int e^{ax}x^p\,dx = -\frac{(-ax)^{-p}\,x^p\left(\Gamma(p+1)-\Gamma(p+1,-ax)\right)}{a}.$$

В этом виде (при вычислениях) он не только совпадает с табличным значением (3.13), но и является более компактным и эффективным при преобразованиях.

3.3. Другие формулы, вытекающие из основной теоремы

Из основной теоремы вытекает **Утверждение 3.1:** **Если $G(n, x)$ является нормальной производной в точках $n = 0, -1, -2\,..\,-s$, то s-кратный интеграл от функции $f(x)$ определяется формулой**

$$\boxed{[f(x)]_s = \lim_{n\to -s}\left(\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right) + \sum_{i=0}^{s-1}\frac{c_i x^i}{i!},} \qquad (3.14)$$

где c_i — произвольные постоянные.

Доказательство. Действительно,

$$[f(x)]_s = \left[\lim_{n\to -1}\left(\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right)\right]_{s-1} = \lim_{n\to -1}\left(\frac{d^{n-s+1}}{dx^{n-s+1}} f(x)\right).$$

Производя замену индекса n на $k + s + 1$, получаем:

$$[f(x)]_s = \lim_{k\to -s}\left(\frac{d^k}{dx^k} f(x)\right).$$

С другой стороны, поскольку $G(-k, x)$, $k = 1\,..\,s$ дифференцируемы и интегрируемы, то

$$\underbrace{\int\ldots\int}_{s} f(x)\underbrace{dx\ldots dx}_{s} = \underbrace{\int\ldots\int}_{s-1}(G(-1, x) + c_1)\underbrace{dx\ldots dx}_{s-1} = G(-s, x) + \sum_{i=0}^{s-1}\frac{c_i x^i}{i!},$$

где c_i — произвольные постоянные.

Утверждение доказано.

Примечание. При отсутствии неопределенностей s-кратный интеграл от функции $f(x)$ можно определять формулой

$$\boxed{[f(x)]_s = \left\{\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right\}_{n=-s} + \sum_{i=0}^{s-1}\frac{c_i x^i}{i!},}$$

т. е. фактически формула (3.14) является новым представлением формулы Коши и позволяет легко вычислить s-кратный интеграл, если известна производная n-го порядка от его подынтегральной функции $f(x)$.

▶ **Пример 1.** Вычислить трехкратный интеграл от постоянной C

$$\iiint C\,dx\,dx\,dx.$$

Решение. Так как

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} C = \frac{Cx^{-n}}{(-n)!},$$

то по формуле (3.14) имеем:

$$\iiint C\,dx\,dx\,dx = \left\{\frac{Cx^{-n}}{(-n)!}\right\}_{n=-3} + \sum_{i=0}^{2}\frac{c_i x^i}{i!}$$

или

$$\iiint C\,dx\,dx\,dx = \frac{Cx^3}{6} + \sum_{i=0}^{2}\frac{c_i x^i}{i!},$$

где c_i — постоянные, $i = 0, 1, 2$, что совпадает с табличным значением.

▶ **Пример 2.** Вычислить трехкратный интеграл от функции

$$f(x) = x^p.$$

Решение. Так как

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} x^p = \frac{\Gamma(p+1)\,x^{p-n}}{\Gamma(p-n+1)},$$

то по формуле (3.14) имеем:

$$\iiint x^p\,dx\,dx\,dx = \left\{\frac{\Gamma(p+1)\,x^{p-n}}{\Gamma(p-n+1)}\right\}_{n=-3} = \frac{\Gamma(p+1)\,x^{p+3}}{\Gamma(p+4)} + \sum_{i=0}^{2}\frac{c_i x^i}{i!}.$$

Результат соответствует табличному значению.

▶ **Пример 3.** Вычислить интеграл

$$\iint \frac{e^{qx}}{x^m}\,dx\,dx, \tag{3.15}$$

где q, m — произвольные параметры.

Существующими способами можно вычислить только однократный интеграл от функции $\frac{e^{qx}}{x^m}$ и только при отрицательных значениях параметра m:

$$\int \frac{e^{qx}}{x^m}\,dx = \frac{x^{-m}\left((-qx)^m\,\Gamma(-m)\,m - m(-qx)^m\,\Gamma(-m,-qx) + e^{qx}\right)}{q} + C, \quad C \text{ — const} \tag{3.16}$$

так как для положительных m он расходится (правая часть в итоге дает неопределенность вида $\{\infty - \infty\}$), т. е. правая часть для конкретных значений m неопределима без использования специальных подходов.

Р е ш е н и е. Выпишем производную n-го порядка для подынтегральной функции

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{e^{qx}}{x^m}\right) = \frac{1}{x^{m+n}\,qx\,(m-1)!}\left(e^{qx}\left((qx)^n\,H\left([m,-n],[\,],\frac{1}{qx}\right)qx\,(m-1)! + C(n,n+1)(m+n)!\,H\left([1,1,m+n+1],[2+n],\frac{1}{qx}\right)(-1)^n\right)\right).$$

Так как

$$\left\{\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{e^{qx}}{x^m}\right)\right\}_{n=0} = \frac{e^{qx}}{x^m},$$

то в этом случае

$$\int \frac{e^{qx}}{x^m}\,dx = e^{qx}q^{-1}x^{-m}\,H\left([1,m],[\,],\frac{1}{qx}\right) + C.$$

Как видим, полученное решение более компактно и эффективно, чем установленное традиционным способом (3.16), так как уже при $m = 1$ табличный интеграл расходится, а полученный нами нет.

Теперь, так как имеет место (3.14), легко установить искомое значение:

$$\iint \frac{e^{qx}}{x^m}\,dx\,dx = \frac{e^{qx}\,H\left([2,m],[\,],\frac{1}{qx}\right)x^{-m}}{q^2} + Cx + C_1, \quad C,\ C_1 \text{ — const}$$

и в общем случае для k-кратного интеграла имеем:

$$\left[\frac{e^{qx}}{x^m}\right]_k = \frac{e^{qx}\,x^{-m}\,H\left([k,m],[\,],\frac{1}{qx}\right)}{q^k} + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{c_i x^i}{i!}, \quad c_i \text{ — const}.$$

Из Утверждения 3.1 вытекает **Утверждение 3.2. Имеет место формула**

$$\int_0^x f(t)\,(x-t)^{s-1}\,dt = (s-1)!\,\lim_{n\to -s}\left(\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right) + (s-1)!\sum_{i=0}^{s-1}\frac{c_i x^i}{i!}. \tag{3.17}$$

Доказательство. Сравнивая формулу (3.14) с формулой Коши [1]:

$$[f(x)]_s = \frac{1}{(s-1)!} \cdot \int_0^x f(l)(x-l)^{s-1}dl,$$

получаем равенство (3.17).

▶ **Пример.** Вычислить интеграл

$$\int_0^x e^t (x-t)^{s-1}dt.$$

Решение. Так как

$$\frac{d^n}{dx^n} e^x = e^x,$$

то в соответствии с формулой (3.17) имеем:

$$\int_0^x e^t (x-t)^{s-1}dt = (s-1)!\, e^x - (s-1)! \sum_{i=0}^{s-1} \frac{x^i}{i!}.$$

Здесь, в частности, постоянные c_i были подобраны таким образом, чтобы это равенство выполнялось для любых натуральных s. Анализируя равенство (3.17), приходим к выводу, что справедливо **Утверждение 3.3**: **Равенство**

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \lim_{s \to -n} \left(\frac{1}{(s-1)!} \cdot \int_0^x f(l)(x-l)^{s-1} dl \right) \tag{3.18}$$

определяет формулу для вычисления n-й производной от функции $f(x)$

▶ **Пример.** Вычислить n-ю производную от функции

$$f(x) = \sqrt{ax+b}. \tag{3.19}$$

Решение. Используя формулу (3.18), имеем:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \sqrt{ax+b} = \lim_{s \to -n} \left(\left(\frac{1}{(s-1)!} \right) \cdot \left(\int_0^x \sqrt{al+b}\,(x-l)^{s-1}dl \right) \right).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \sqrt{ax+b} = \frac{\sqrt{b}\, x^{-n} H\left(\left[-\frac{1}{2}, 1 \right], [1-n], -\frac{ax}{b} \right)}{\Gamma(-n+1)}.$$

Действительно, при $n = 0$ правая часть равна

$$\sqrt{b}\, H\left(\left[-\frac{1}{2} \right], [\ ], -\frac{ax}{b} \right) = \sqrt{ax+b},$$

т. е. получаем функцию (3.19).

Совершенно аналогичным образом доказывается выполнение условия (2.2).

Доказанное позволяет по-иному интерпретировать известные формулы. В частности, это касается формулы Лейбница (2.7), а именно s-кратный интеграл от произведения двух функций $u(x)\,v(x)$ определяется по формуле

$$\boxed{[u(x)\,v(x)]_s = \lim_{n \to -s}\left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{d^i}{dx^i}(u(x))\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}v(x)\right) + \sum_{i=0}^{s-1}\frac{c_i x^i}{i!},} \tag{3.20}$$

где c_i — const.

Действительно, с учетом этого условия формула (3.14) принимает вид:

$$[u(x)\,v(x)]_s = \lim_{n \to -s}\left(\frac{d^n}{dx^n}(u(x)\,v(x))\right) + \sum_{i=0}^{s-1}\frac{c_i x^i}{i!}.$$

Тогда из формулы Лейбница (2.7) отсюда следует искомое равенство (3.20).

В частности, из (3.20) следует **формула вычисления неопределенного интеграла для произведения функций $u(x)\,v(x)$:**

$$\boxed{\int u(x)\,v(x)\,dx = \lim_{n \to -1}\left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{d^i}{dx^i}(u(x))\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}v(x)\right).} \tag{3.21}$$

Поэтому, например, интегралы вида:

$$[f(x)\,e^x]_k$$

вычисляются по формуле

$$\boxed{[f(x)\,e^x]_k = e^x \lim_{n \to -k}\left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{d^i}{dx^i} f(x)\right) + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{c_i\,x^i}{i!}.}$$

В частности,

$$\boxed{\int f(x)\,e^x\,dx = e^x \lim_{n \to -1}\left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{d^i}{dx^i} f(x)\right) + \text{const}.}$$

Аналогично, интегралы вида

$$\int f(x)\,x^k\,dx$$

определяются формулой

$$\int f(x)\,x^k\,dx = k!\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i x^{k-i}\left[\int f(x)\,dx\right]_i}{(k-i)!}\right). \tag{3.22}$$

Действительно, так как i-я производная от функции x^k равна

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i}x^k = \frac{k!\,x^{k-i}}{(k-i)!},$$

то, подставляя полученное значение в (3.21), с учетом

$$C(-1,\ i) = (-1)^i$$

(поскольку $C(-1,\ i)$ определяются как коэффициенты биномиального разложения в бесконечный ряд выражения $(1+x)^n$), получим в итоге формулу (3.22).

3.4. Вычисление определенных интегралов, имеющих особую производную

Ранее было определено, что особой производной n-го порядка от функции $f(x)$ в точке $n = 0$ называется функция $G(n,\ x)$, которая в этой точке не установлена.

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int f(x)\,dx,$$

где $G(n,\ x) = \dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ — особая n-я производная в точке $n = 0$ от функции $f(x)$.

Основным способом вычисления таких интегралов является нахождение подстановки:

$$x = \rho(t),$$

где $\rho(t)$ — необходимое число раз дифференцируемая функция, для которой выполняется условие нормальности

$$\left\{\frac{d^n}{dt^n}\rho(t)\right\}_{n=0} = \rho(t).$$

В этом случае исходный интеграл приводится к виду:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\rho(t))\frac{d}{dt}(\rho(t))\,dt.$$

Функцию $\rho(t)$ выбираем такой, при которой подынтегральная функция $f(\rho(t))\dfrac{d}{dt}\rho(t)$ имеет нормальную n-ю производную в точке $n = 0$.

▶ **Пример 1.** Вычислить интеграл

$$\int \ln(x)^2\,dx. \tag{3.23}$$

Решение. Так как

$$\frac{d^n}{dx^n}\ln(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},$$

то подынтегральная функция $\ln(x)$ имеет особую n-ю производную в точке $n = 0$, поэтому вычисление интеграла (3.23) с использованием основной теоремы невозможно.

Используя подстановку

$$x = e^t, \tag{3.24}$$

приводим интеграл (3.23) к виду:

$$\int e^t t^2\,dt.$$

С использованием формулы (3.22) этот интеграл приводится к эквивалентной форме:

$$\int e^t t^2\,dt = t^2\left(\int e^t\,dt\right) - 2t\left(\iint e^t\,dt\,dt\right) + 2\left(\iiint e^t\,dt\,dt\,dt\right).$$

Так как функция e^t инвариантна относительно операции интегрирования, то условие нормальности для нее заведомо выполнено. Следовательно

$$\int e^t\,dt = e^t,\quad \iint e^t\,dt\,dt = e^t,\quad \iiint e^t\,dt\,dt\,dt = e^t.$$

Поэтому

$$\int e^t t^2\,dt = t^2e^t - 2te^t + 2e^t.$$

С учетом формулы (3.24) отсюда следует искомое решение:

$$\int \ln(x)^2\,dx = x\ln(x)^2 - 2\ln(x)\,x + 2x,$$

что соответствует табличному значению.

▶ **Пример 2.** Вычислить интеграл

$$\int \arccos x\,dx. \tag{3.25}$$

Решение. Используем подстановку

$$x = \cos t. \tag{3.26}$$

В этом случае исходный интеграл (3.25) примет вид:

$$\int \arccos x\,dx = -\int t\sin t\,dt.$$

Используя формулу (3.22), отсюда имеем:

$$\int t\sin t\,dt = t\int \sin t\,dt - \iint \sin t\,dt\,dt.$$

Так как

$$\frac{d^n}{dt^n}\sin t = \sin\left(t + \frac{n\pi}{2}\right)$$

и

$$\left\{\frac{d^n}{dt^n}\sin t\right\}_{n=0} = \sin t,$$

то

$$\int \sin t\,dt = \left\{\sin\left(t+\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=-1} = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\iint \sin t\,dt\,dt = \left\{\sin\left(t+\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=-2} = \sin(t-\pi).$$

Таким образом, искомое значение равно

$$\int \arccos x\,dx = -t\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right) + \sin(t-\pi)$$

или окончательно, с учетом подстановки (3.26):

$$\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2}.$$

3.5. Формула для вычисления определенного интеграла

В классическом изложении вычисление определенного интеграла производится по формуле [1]:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$.

Так как в соответствии с (3.8) первообразная определяется как

$$\boxed{F(x) = \lim_{n\to -1}\left(\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right) + \mathrm{const},}$$

то это дает формулу для вычисления определенного интеграла:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \left\{\lim_{n\to -1}\left(\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right)\right\}_{[x=b]} - \left\{\lim_{n\to -1}\left(\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right)\right\}_{[x=a]},} \tag{3.27}$$

либо в упрощенном представлении (при отсутствии неопределенностей):

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \left\{\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right\}_{[n=-1,\ x=b]} - \left\{\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right\}_{[n=-1,\ x=a]}.}$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В том случае, когда вычисление неопределенного интеграла производится от сложной функции вида $u(x)\,v(x)$ или $F(R(x))$, то возникает необходимость определения значения суммы ряда (2.7) или (2.9). Безусловно, что такая задача разрешима далеко не в каждом случае.

Здесь можно воспользоваться установленной еще Ньютоном полезной особенностью некоторых конечных рядов, заключающейся в следующем.

Выражение вида

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

при целых n удовлетворяет формуле

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = (1+x)^n \tag{4.1}$$

для любых значений x.

Если осуществить переход к биномиальному ряду:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_n^k x^k,$$

то получаем формулу

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_n^k x^k = (1+x)^n, \tag{4.2}$$

которая выполняется уже при дробных и отрицательных значениях n. При этом «платой» за это является ограничение области изменения x, в которой данная формула применима.

Например, формула (4.2) выполнена при положительных действительных значениях n только для $|x| \leqslant 1$.

Применительно к нашему случаю допустим, что заданы такие две дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$, что выполняются условия:

$$\lim_{i \to 0}\left(\frac{d^i}{dx^i} u(x)\right) = u(x), \quad \lim_{i \to 0}\left(\frac{d^i}{dx^i} v(x)\right) = v(x).$$

Тогда выполняется условие

$$\lim_{n \to 0}\left(\frac{d^n}{dx^n}(u(x)\, v(x))\right) = u(x)\, v(x).$$

Следовательно, в соответствии с **Основной Теоремой**, формулой Лейбница (2.7) и на основании сделанного предположения (4.1), (4.2), получим следующие формулы:

— для вычисления интеграла от сложной функции вида $u(x)\, v(x)$:

$$\boxed{\int u(x)\, v(x)\, dx = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{d^i}{dx^i}(u(x)) \lim_{n \to -1}\left(\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} v(x)\right)}$$

и вообще для вычисления s-кратного интеграла от сложной функции вида $u(x)\, v(x)$:

$$\boxed{[u(x)\, v(x)]_s = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^i}{dx^i}(u(x)) \lim_{n \to -s}\left(C_n^i \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} v(x)\right).}$$

Для вычисления интеграла от сложной функции вида $F(R)$, где $R = R(x)$, n-я производная определяется формулой (2.9).

Тогда, поскольку

$$\lim_{n \to -1}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} F(R)\right) = \int F(R)\, dx \quad \text{и} \quad \lim_{n \to -1}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} R^{k-s}\right) = \int R^{k-s}\, dx,$$

то получаем формулу

$$\boxed{\int F(R)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dR^k} F(R) \cdot \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C(k,\ s)\, R^s \int R^{k-s}\, dx,} \tag{4.3}$$

которая позволяет произвести вычисление интеграла от сложной функции вида $F(R)$.

Аналогично, для вычисления p-кратного интеграла от функции вида $F(R(x))$ формально можно использовать формулу

$$\boxed{[F(R)]_p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dR^k} F(R) \cdot \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C(k,\ s) R^s [R^{k-s}]_p.}$$

Область определения переменной x устанавливается в каждом случае отдельно, в зависимости от вида подынтегральных функций.

▶ **Пример 1.** Вычислить интеграл

$$\int \sin(\sin x)\, dx.$$

Р е ш е н и е. Введем обозначение:

$$R = \sin x.$$

Тогда в соответствии с формулой (4.3) имеем:

$$\int \sin(\sin x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dR^k}(\sin R) \cdot \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C(k,\ s) (\sin x)^s \int (\sin x)^{k-s}\, dx.$$

Так как

$$\frac{d^k}{dR^k} \sin R = \sin\left(R + \frac{k\pi}{2}\right),$$

то искомая формула принимает вид:

$$\int \sin(\sin x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \sin\left(\sin x + \frac{k\pi}{2}\right) \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C(k,\ s) (\sin x)^s \int (\sin x)^{k-s}\, dx.$$

Она справедлива для всех x в интервале $[-1,\ 1]$.

▶ **Пример 2.** Вычислить интеграл

$$\int e^{\sin x}\, dx.$$

Р е ш е н и е. В соответствии с формулой (4.3) имеем:

$$\int e^{\sin x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dR^k}(e^R) \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C(k,\ s) (\sin x)^s \int (\sin x)^{k-s} dx, \tag{4.4}$$

где $R = \sin x$.

Так как

$$\frac{d^k}{dR^k} e^R = e^R,$$

то (4.4) принимает вид:

$$\int e^{\sin x} dx = e^{\sin x} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{k} \frac{(-1)^s C(k,\ s) (\sin x)^s \int (\sin x)^{k-s} dx}{k!}.$$

Поскольку

$$\int (\sin x)^{(k-s)} dx = \frac{1}{-s+1+k} \cdot (\sin x)^{(-s+1+k)}\ H\left(\left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{2} + \frac{k}{2} - \frac{s}{2}\right],\ \left[\frac{3}{2} + \frac{k}{2} - \frac{s}{2}\right],\ (\sin x)^2\right),$$

то итоговая формула определяется равенством

$$\int e^{\sin x} dx = e^{\sin x} \sum_{k=0}^{\infty} (\sin x)^{(1+k)} \sum_{s=0}^{k} \frac{(-1)^s C(k, s)\, H\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{k}{2} - \frac{s}{2}\right], \left[\frac{3}{2} + \frac{k}{2} - \frac{s}{2}\right], (\sin x)^2\right)}{k!\,(-s+1+k)}.$$

Она справедлива для всех x в интервале [–1, 1].

Совершенно аналогичным образом показывается, что имеет место также формула

$$\int e^{\cos x} dx = e^{\cos x} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{k} \frac{(-1)^s C(k, s)(\cos x)^s \int (\cos x)^{(k-s)} dx}{k!},$$

которая также справедлива для всех x в интервале [–1, 1].

Список литературы

1. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. — М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1962.
2. *Куваев М. Р.* Дифференциальное и интегральное исчисление. Часть 1, 2. — Томск: Изд-во ТГУ, 1973.
3. *Незбайло Т. Г.* Новая теория вычисления неопределенного интеграла. — СПб.: КОРОНА-Век, 2007.
4. СМБ, Математический анализ. Дифференцирование и интегрирование. 1978.

Часть 2. ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Условные обозначения:

ДУ — дифференциальное уравнение;
ОДУ — обыкновенное дифференциальное уравнение;
ЛОДУ — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение;
N — натуральное число;
$C(n, i)$ — биномиальный коэффициент — $C_n^i \equiv \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix}$.

В тех случаях, когда особо не оговорено, C_i, $i = 1 \,..\, N$ — произвольные постоянные.
Предполагается, что все коэффициенты ОДУ являются необходимое число раз дифференцируемыми функциями.

1) $[f(x)]_k$ — k-кратный интеграл от функции $f(x)$.

$[f(x)]_0 = f(x)$

$[f(x)]_1 = \int f(x)\,dx$

$[f(x)]_2 = \int\int f(x)\,dx\,dx$

$[f(x)]_3 = \int\int\int f(x)\,dx\,dx\,dx$

и так далее.

2) (k_1, k_2) — специальное обозначение суммы индексов от i_{k_1} до i_{k_2}

$$(k_1, k_2) = \sum_{s=k_1}^{k_2} i_s$$

Например:

$$(0, 0) = \sum_{s=0}^{0} i_s = i_0: \quad (3, 3) = \sum_{s=3}^{3} i_s = i_3: \quad (0, 1) = \sum_{s=0}^{1} i_s = i_0 + i_1: \quad (2, 7) = \sum_{s=2}^{7} i_s = i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + i_6 + i_7$$

3) $\sum\limits_{s_{q+l},\ q=[k_{q+l},\, k_q]}^{[p_{q+l},\, p_q]} G(s_q, s_{q+1}, \ldots, s_{q+l})$ — специальное обозначение последовательности сумм, вложенных друг в друга, например:

$$\sum_{s_{3,1}=[k_3,\, k_1]}^{[p_3,\, p_1]} G(s_1, s_2, s_3) = \sum_{s_3=k_3}^{p_3} \sum_{s_2=k_2}^{p_2} \sum_{s_1=k_1}^{p_1} G(s_1, s_2, s_3).$$

Пример:

$$\sum_{z_{0,3}=[-1,\, 2]}^{[0,\, 3]} G(z_0, z_1, z_2, z_3) = \sum_{z_0=-1}^{0} \sum_{z_1=0}^{1} \sum_{z_2=1}^{2} \sum_{z_3=2}^{3} G(z_0, z_1, z_2, z_3).$$

Здесь предполагается, что нижняя граница, определяемая значениями от –1 до 2, делится на значение интервала, в данном случае — 4 (3, 2, 1, 0), т. е. изменение от –1 до 2 происходит с шагом 1. То же имеет отношение и к верхней границе. В том случае, если изменения от одного значения к другому для любой границы не очевидны, то в этом случае такие значения выписываются, например:

$$\sum_{z_{0,3}=[-3,\,2,\,2]}^{[1,\,k+1,\,k+3]} G(z_0, z_1, z_2, z_3) = \sum_{z_0=-3}^{1}\ \sum_{z_1=2}^{k+1}\ \sum_{z_2=2}^{k+2}\ \sum_{z_3=2}^{k+3} G(z_0, z_1, z_2, z_3).$$

Здесь также приведен пример того случая, когда значение верхней или нижней границы не меняется.

Например:

$$\sum_{z_{3,1}=0}^{[4,\,1,\,1]} G(z_1, z_2, z_3) = \sum_{z_3=0}^{4}\ \sum_{z_2=0}^{1}\ \sum_{z_1=0}^{1} G(z_1, z_2, z_3).$$

4) $[b_{1+(0,\,s)}(x)]_{i_{0,\,l}+k_{0,\,l}} b_{k_{0,\,l}}(x)$ — обозначение последовательности вложенных друг в друга функций $b_{1+(0,\,s)}(x)$, по правилу:

$$[b_{1+(0,\,s)}(x)]_{i_{0,\,l}+k_{0,\,l}} b_{k_{0,\,l}}(x) = \left[\left[\left[\left[[b_{1+i_0+i_1+i_2+i_3,\,\ldots,\,i_s}(x)]_{i_0+k_0} b_{k_0}(x)\right]_{i_1+k_1} b_{k_1}(x)\right]_{i_2+k_2} b_{k_2}(x)\right]_{i_3+k_3} b_{k_3}(x)\ldots b_{k_{l-1}}(x)\right]_{i_l+k_l} b_{k_l}(x),$$

где подразумевается, что от функции $b_{1+(0,\,s)}(x)$ берется (i_0+k_0)-кратный интеграл. Потом это значение умножается на функцию $b_{k_0}(x)$ и от этого произведения берется (i_1+k_1)-кратный интеграл и т. д.

Например:

$$[b_{1+(0,\,0)}(x)]_{i_{0,\,0}+k_{0,\,0}} b_{k_{0,\,0}}(x) = [b_{1+i_0}(x)]_{i_0+k_0} b_{k_0}(x),$$

$$[b_{1+(0,\,1)}(x)]_{i_{0,1}+k_{0,1}} b_{k_{0,1}}(x) = \left[[b_{1+i_0+i_1}(x)]_{i_0+k_0} b_{k_0}(x)\right]_{i_1+k_1} b_{k_1}(x),$$

$$[b_{1+(0,\,4)}(x)]_{i_{0,3}+k_{0,3}} b_{k_{0,3}}(x) = \left[\left[\left[[b_{1+i_0+i_1+i_2+i_3+i_4}(x)]_{i_0+k_0} b_{k_0}(x)\right]_{i_1+k_1} b_{k_1}(x)\right]_{i_2+k_2} b_{k_2}(x)\right]_{i_3+k_3} b_{k_3}(x)$$

и так далее.

1. ВВЕДЕНИЕ

История возникновения дифференциального исчисления, начатая с введения в математику Декартом переменных величин и окончательно оформленная работами Ньютона и Лейбница примерно к 1667 году, создала к настоящему времени всесторонне развитую теорию ОДУ. Основной задачей этой теории [1] является развитие известных и построение новых способов решения краевых задач для ОДУ.

Очевидно, что решение любой из известных краевых задач для линейных ОДУ порядка m требует знания всех m его частных решений, поэтому фактически основной задачей теории ОДУ является задача интегрирования заданного ОДУ. Среди наиболее известных: метод замены зависимой и независимой переменных, метод специальных подстановок, групповой анализ, операционный метод и т. д. [1, 2, 3].

Тем не менее, к настоящему времени не установлен (не определен) общий алгоритм нахождения частных решений не только для линейных ОДУ порядка m:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i(x)\frac{\partial^{m-i}}{\partial x^{m-i}}y = 0, \text{ где } a_i(x) \text{ — заданные функции,} \tag{1.0}$$

но даже для линейных ОДУ второго порядка.

Правда, если коэффициенты ОДУ (1.0) постоянные, т. е. $a_i(x) = k_i$, $i = 0 \,..\, m$, то общее решение равно

$$y = \sum_{i=1}^{m} C_i y_i,$$

где

$$y_i = e^{(p_i x)}, \; i = 1 \,..\, m.$$

Постоянные p_i, $i = 1 \,..\, m$ являются корнями алгебраического уравнения

$$\sum_{i=0}^{m} k_i z^{(m-i)} = 0.$$

Однако это алгебраическое уравнение в символьном представлении, т. е. когда коэффициенты k_i заданы как некие произвольные параметры, до последнего времени являлось неразрешимым при $5 \leqslant m$, что не позволяло получить общее решение для ЛОДУ выше четвертого порядка (эта проблема решена в работе [7]).

Как было отмечено, к настоящему времени не решена задача нахождения частных решений даже для линейного ОДУ второго порядка:

$$a_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}y + a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}y + a_2 y = 0, \tag{1.1}$$

где $a_i(x)$, $i = 0 \,..\, 2$ — заданные функции.

Правда, считается, что таким общим методом является метод степенных рядов.

Он основан на том, что искомое решение в окрестности точки x_0 ищется в форме:

$$y = \sum_{s=0}^{\infty} b_s (x - x_0)^x, \tag{1.2}$$

где b_s — постоянные, определяемые путем подстановки в исходное ОДУ (1.1).

Однако, во-первых, представление искомого решения в форме (1.2) не является формулой, так как постоянные b_s необходимо определять путем подстановки в исходное ОДУ (1.1), что предполагает решение системы в ряде случаев сложных рекуррентных алгебраических уравнений. Во-вторых, необходимо, чтобы коэффициенты $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2$ являлись голоморфными функциями в окрестности точки x_0. При этом их еще необходимо предварительно представить через сходящиеся ряды (с центром в точке x_0), что само по себе уже изменяет вид исходного ОДУ (1.1), а следовательно, ухудшает качественную картину описываемого этим ОДУ динамического процесса. И наконец, в-третьих, коэффициенты $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2$ не должны иметь полюсов первого или второго порядка (в зависимости от условий), что прямо говорит об ограниченности этого метода [2]. Да и странно свыкнуться с тем, что разные физические процессы, описываемые существенно разными ОДУ (1.1), имеют решение одного и того же вида (1.2). Неудивительно, что такая ситуация привела к тому, что в ряде учебных пособий (например [8]) предлагается первое частное решение ОДУ (1.1) угадывать.

Изложенное достаточно убедительно говорит об актуальности построения единого алгоритма интегрирования линейных ОДУ (1.0) в общем случае с переменными коэффициентами без наложения каких-либо условий на его коэффициенты (кроме естественных: дифференцируемости и интегрируемости) и на форму представления его частного решения. В этом и заключается главная задача настоящей работы. В связи с этим необходимо рассмотреть вопрос о форме представления искомого решения.

Форма представления. Как известно, еще Лиувилль в 1841 году доказал, что решение линейного ОДУ (1.1) в общем виде невозможно получить в квадратурах. Такое представление возможно только через аналитические функции. Исходя из этого, введем определение алгоритма интегрирования линейных ОДУ (1.0).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. **Под общим алгоритмом интегрирования линейных однородных ОДУ вида (1.0), где $y = \{y_1(x), y_2(x) .. y_m(x)\}$ — искомая функция, $a_i(x)$ — заданные (необходимое число раз дифференцируемые и интегрируемые) функции, будем понимать определение искомого решения в форме $y = F(x, \alpha)$, $F(x, \alpha) = \{F_i(x, \alpha), i = 1 .. m\}$, где $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2 .. \alpha_m\}$ — аналитическая функция, представляемая в виде ряда:**

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(x),$$

$F(x, \alpha)$ — искомый функционал, $\xi_i(x)$ — некоторые функции, определяемые по формулам через коэффициенты $a_i(x)$, $i = 0 .. m$.

Из этого определения вытекает следующее:

— коэффициенты $a_i(x)$, $i = 0 .. m$ исходного ОДУ (1.0) не представляются через сходящиеся ряды в окрестности какой-либо выбранной точки x_0.

— частные решения $y_i(x)$, $i = 1 .. m$ определяются, как функции:

$$y_i(x) = F_i(x, \alpha), \quad i = 1, 2, 3 .. m. \tag{1.3}$$

вид которых устанавливается в результате строгих математических выводов.

— элементы α_k этой общей формы представляют собой ряды

$$\alpha_k = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_{k,j}(x), \quad k = 1, 2, 3 .. m$$

из функций $\xi_{k,j}(x)$, которые определяются строго установленными формулами через исходные коэффициенты: $a_k(x)$, $k = 0 .. m$.

Следовательно, задача построения общего алгоритма интегрирования линейных ОДУ вида (1.0) состоит из двух последовательных задач:

— определение формы представления функционалов $F_i(x, \alpha)$;

— определение формул для функций $\xi_{k,j}(x)$.

Очевидно, что построение общего алгоритма интегрирования линейных ОДУ с переменными коэффициентами (1.0) невозможно с позиций существующих понятий и определений, используемых современной теорией ОДУ, так как в этом случае (за свою более чем 330-летнюю историю) эта задача была бы давно решена. Поэтому общая структура новой теории интегрирования линейных ОДУ требует введения новых математических идей. Одной из них является понятие оператора Лейбница.

1.1. Оператор Лейбница

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. **Оператором Лейбница по индексу i функций u, v и параметра n от $f(i)$ называется выражение $L[f(i)]$, определяемое равенством:**

$$L[f(i)] = \sum_{i=0}^{n} f(i)\, C(n, i) \frac{\partial^i}{\partial x^i} u \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} v. \tag{1.4}$$

Следовательно, результатом воздействия оператора L на функцию $f(i)$ ($L[f(i)]$) является решение задачи нахождения суммы конечного ряда:

$$\sum_{i=0}^{n} f(i)\, C(n, i) \frac{\partial^i}{\partial x^i} u \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} v.$$

▶ **Пример.** Если $f(i) = 1$, то равенство (1.4) принимает вид:

$$L[1] = \sum_{i=0}^{n} C(n,\ i) \frac{\partial^i}{\partial x^i} u \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} v.$$

Поскольку в соответствии с формулой Лейбница:

$$\sum_{i=0}^{n} C(n,\ i) \frac{\partial^i}{\partial x^i} u \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} v = \frac{\partial^n}{\partial x^n}(u\,v), \tag{1.5}$$

то в итоге получаем искомое равенство

$$L[1] = \frac{\partial^n}{\partial x^n}(u\,v). \tag{1.6}$$

Утверждение 1.1. Воздействие оператора Лейбница по индексу i функций u, v и параметра n на функцию $f(i) = i$ определяется формулой

$$\boldsymbol{L[i] = n \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} u \right) v \right).} \tag{1.7}$$

Доказательство. В соответствии с (1.4):

$$\sum_{i=0}^{n} i\, C(n,\ i) \frac{\partial^i}{\partial x^i} u \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} v = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!\, i}{i!\,(n-i)!} \frac{\partial^i}{\partial x^i} u \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} v = \sum_{i=0}^{n} \frac{n\,(n-1)!}{(i-1)!\,(n-1-(i-1))!} \frac{\partial^i}{\partial x^i} u \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} v = n \sum_{i=0}^{n} C(n-1,\ i-1) \frac{\partial^i}{\partial x^i} u \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} v.$$

Установим значение выражения

$$\sum_{i=0}^{n} C(n-1,\ i-1) \frac{\partial^i}{\partial x^i} u \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} v.$$

Производя замену индекса суммирования i на $i + 1$ в полученном значении, устанавливаем, что

$$\sum_{i=0}^{n} C(n-1,\ i-1) \frac{\partial^i}{\partial x^i} u \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} v = \sum_{i=0}^{n-1} C(n-1,\ i) \frac{\partial^{i+1}}{\partial x^{i+1}} u \frac{\partial^{n-1-i}}{\partial x^{n-1-i}} v = \sum_{i=0}^{n-1} C(n-1,\ i) \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial x} u \right) \frac{\partial^{n-1-i}}{\partial x^{n-1-i}} v.$$

В соответствии с формулой Лейбница (1.5), где параметр n заменяется $n - 1$, а функция u на $\frac{\partial}{\partial x} u$, имеем:

$$\sum_{i=0}^{n-1} C(n-1,\ i) \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial x} u \right) \frac{\partial^{n-1-i}}{\partial x^{n-1-i}} v = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} u \right) v \right).$$

Таким образом, возвращаясь обратно, получаем формулу (1.7). Утверждение 1.1 доказано.

Аналогичным образом доказывается **Утверждение 1.2.**
Воздействие оператора Лейбница по индексу i функций u, v и параметра n на функцию $f(i) = i^2$ определяется формулой:

$$\boldsymbol{L[i^2] = n \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} u \right) v \right) + n\,(n-1) \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) v \right).}$$

Докажем общее и крайне необходимое в дальнейшем **Утверждение 1.3.**

Пусть $L[\ ]$ — оператор Лейбница по индексу i функций u, v и параметра n. Тогда для любого k из $[0, N]$ имеет место равенство

$$\boldsymbol{L[i^k] = \sum_{i=0}^{k}\sum_{s=0}^{i}\frac{(-1)^{(s+i)}s^k}{\Gamma(i-s+1)\,\Gamma(s+1)}C(n,i)\,i!\,\frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}\left(\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}u\right)v\right).} \tag{1.8}$$

Доказательство. В соответствии с определением оператора Лейбница (1.4) формула (1.8) записывается следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{n} i^k\,C(n,i)\frac{\partial^i}{\partial x^i}u\,\frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}v = \sum_{i=0}^{k}\sum_{s=0}^{i}\frac{s^k(-1)^{(s+i)}}{\Gamma(i-s+1)\,\Gamma(s+1)}C(n,i)\,i!\,\frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}\left(\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}u\right)v\right).$$

Проверим выполнение данного равенства при $k = 0$, $k = 1$. Действительно, приняв здесь $k = 0$, получаем:

$$\sum_{i=0}^{n} C(n,i)\frac{\partial^i}{\partial x^i}u\,\frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}v = \sum_{i=0}^{0}\sum_{s=0}^{i}\frac{(-1)^{(s+i)}}{\Gamma(i-s+1)\,\Gamma(s+1)}C(n,i)\,i!\,\frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}\left(\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}u\right)v\right).$$

Отсюда следует:

$$\sum_{i=0}^{n} C(n,i)\frac{\partial^i}{\partial x^i}u\,\frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}v = \frac{\partial^n}{\partial x^n}(u\,v).$$

Однако данное равенство является формулой Лейбница, следовательно, формула (1.8) включает в себя известную формулу Лейбница в качестве частного случая.

Принимая в (1.8) $k = 1$, имеем:

$$L[i] = \sum_{i=0}^{1}\sum_{s=0}^{i}\frac{s(-1)^{(s+i)}}{\Gamma(i-s+1)\,\Gamma(s+1)}C(n,i)\,i!\,\frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}\left(\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}u\right)v\right) = \sum_{s=0}^{0}\frac{s(-1)^{s}}{\Gamma(1-s)\,\Gamma(s+1)}C(n,0)\frac{\partial^n}{\partial x^n}(u\,v) + \sum_{s=0}^{1}\frac{s(-1)^{(s+1)}}{\Gamma(2-s)\,\Gamma(s+1)}C(n,1)\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right)v\right).$$

Так как в этой формуле

$$\sum_{s=0}^{0}\frac{s(-1)^{s}}{\Gamma(1-s)\,\Gamma(s+1)}C(n,0)\frac{\partial^n}{\partial x^n}(u\,v) = 0,$$

$$\sum_{s=0}^{1}\frac{s(-1)^{(s+1)}}{\Gamma(2-s)\,\Gamma(s+1)}C(n,1)\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right)v\right) = n\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right)v\right),$$

то отсюда следует:

$$L[i] = n\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right)v\right).$$

Так как эта формула совпадает с (1.7), то условие выполнено.

Допустим, что формула (1.8) справедлива для всех значений $k = p$:

$$\sum_{i=0}^{n} i^p\, C(n, i) \frac{\partial^i}{\partial x^i} u \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} v = \sum_{i=0}^{p} \sum_{s=0}^{i} \frac{s^p (-1)^{(s+i)}}{\Gamma(i-s+1)\,\Gamma(s+1)} C(n, i)\, i!\, \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} \left(\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} u \right) v \right). \tag{1.9}$$

Докажем ее справедливость для $k = p + 1$:

$$\sum_{i=0}^{n} i^{(p+1)}\, C(n, i) \frac{\partial^i}{\partial x^i} u \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} v = \sum_{i=0}^{p+1} \sum_{s=0}^{i} \frac{s^{(p+1)} (-1)^{(s+i)}}{\Gamma(i-s+1)\,\Gamma(s+1)} C(n, i)\, i!\, \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} \left(\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} u \right) v \right). \tag{1.10}$$

Действительно,

$$\sum_{i=0}^{n} i^{(p+1)}\, C(n, i) \frac{\partial^i}{\partial x^i} u \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} v = \sum_{i=0}^{n} i^p\, i\, C(n, i) \frac{\partial^i}{\partial x^i} u \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} v = \sum_{i=0}^{n} \frac{i^p\, n!\, i}{i!\,(n-i)!} \frac{\partial^i}{\partial x^i} u \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} v = \sum_{i=0}^{n} i^p\; n\, C(n-1, i-1) \frac{\partial^i}{\partial x^i} u \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} v.$$

Производя замену индекса суммирования i на $i + 1$ в этом значении, имеем:

$$\sum_{i=0}^{n} i^{(p+1)}\, C(n, i) \frac{\partial^i}{\partial x^i} u \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} v = n \sum_{i=0}^{n-1} i^p\, C(n-1, i) \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial x} u \right) \frac{\partial^{n-1-i}}{\partial x^{n-1-i}} v.$$

Так как равенство (1.9) по определению имеет место, то отсюда следует:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^p\, C(n-1, i) \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial x} u \right) \frac{\partial^{n-1-i}}{\partial x^{n-1-i}} v = \sum_{i=0}^{p} \sum_{s=0}^{i} \frac{s^p (-1)^{(s+i)}}{\Gamma(i-s+1)\,\Gamma(s+1)} C(n-1, i)\, i!\, \frac{\partial^{n-1-i}}{\partial x^{n-1-i}} \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial x} u \right) v \right).$$

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{n} i^{(p+1)}\, C(n, i) \frac{\partial^i}{\partial x^i} u \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} v = n \sum_{i=0}^{p} \sum_{s=0}^{i} \frac{s^p (-1)^{(s+i)}}{\Gamma(i-s+1)\,\Gamma(s+1)} C(n-1, i)\, i!\, \frac{\partial^{n-1-i}}{\partial x^{n-1-i}} \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial x} u \right) v \right).$$

Производя в правой части замену индекса суммирования i на $i - 1$, получаем формулу (1.10). Утверждение доказано.

Используя доказанное утверждение 1.3, докажем **Утверждение 1.4.**

Пусть $L[\ ]$ — оператор Лейбница по индексу i функций u, v и параметра n. Тогда для любого k в интервале $[0, N]$, имеет место формула

$$\boldsymbol{L[C(i-z, k)] = \frac{1}{k!} \sum_{s_0=0}^{k} \sum_{s_1=0}^{s_0} \sum_{s_2=0}^{s_1} \sum_{s_3=0}^{s_2} \frac{s_{s_3}^{s_1} (-1)^{(s_3+s_2)}}{\Gamma(s_2-s_3+1)\,\Gamma(s_3+1)} C(n, s_2)\, s_2!\, r_{k-s_0+1}(k)\, C(s_0, s_0-s_1)\,(-z)^{(s_0-s_1)} \frac{\partial^{n-s_2}}{\partial x^{n-s_2}} \left(\left(\frac{\partial^{s_2}}{\partial x^{s_2}} u \right) v \right)}, \tag{1.11}$$

где z — параметр, натуральное число.

$$
\begin{aligned}
&r_1(k) = 1\\
&r_2(k) = -\sum_{i=z}^{z+k-1}(i-z) = -C(k,\,2)\\
&r_3(k) = \sum_{i_2=z}^{z+k-1}(i_2-z)\sum_{i_1=i_2+1}^{z+k-1}(i_1-z) = \frac{k(k-1)(k-2)(3k-1)}{24}\\
&r_4(k) = -\sum_{i_3=z}^{z+k-1}(i_3-z)\sum_{i_2=i_3+1}^{z+k-1}(i_2-z)\sum_{i_1=i_2+1}^{z+k-1}(i_1-z) = -\frac{k^2(k-2)(k-3)(k-1)^2}{48}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&r_k(k) = \prod_{s=z+1}^{z+k-1}(s-z) = \Gamma(k)
\end{aligned}
$$

Доказательство. В соответствии с определением оператора Лейбница формулу (1.11) запишем в открытом виде:

$$
\sum_{i=0}^{n} C(i-z,\,k)\,C(n,\,i)\,\frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}v\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}u =
$$

$$
= \frac{1}{k!}\sum_{s_0=0}^{k}\sum_{s_1=0}^{s_0}\sum_{s_2=0}^{s_1}\sum_{s_3=0}^{s_2}\frac{s_{s_3}^{s_1}(-1)^{(s_3+s_2)}}{\Gamma(s_2-s_3+1)\,\Gamma(s_3+1)}C(n,\,s_2)\,s_2!\,r_{k-s_0+1}(k)\,C(s_0,\,s_0-s_1)(-z)^{(s_0-s_1)}\frac{\partial^{n-s_2}}{\partial x^{n-s_2}}\left(\left(\frac{\partial^{s_2}}{\partial x^{s_2}}u\right)v\right). \tag{1.12}
$$

Так как

$$
C(i-z,\,k)\,k! = \frac{(i-z)!}{(i-z-k)!} = (i-z)(i-z-1)(i-z-2)(i-z-3)\,..\,(i-z-k+1),
$$

то выражение справа определяет алгебраическое уравнение по переменной i степени k

$$
\sum_{s=1}^{k+1} r_s(k)(i-z)^{(k+1-s)},
$$

корнями которого являются числа $z,\ z+1,\ z+2\ ..\ z+k-1$.

В этом алгебраическом уравнении неизвестными являются коэффициенты $r_s(k)$. Определение этих коэффициентов производится в соответствии с теоремой Виета для алгебраических уравнений степени k так, чтобы имело место равенство:

$$
\sum_{s=1}^{k+1} r_s(k)(i-z)^{(k+1-s)} = (i-z)(i-z-1)(i-z-2)(i-z-3)\,..\,(i-z-k+1). \tag{1.13}
$$

Установим значения коэффициентов $r_s(k)$. Так как корнями уравнения (1.13) являются

$$
i_1 = z,\ \ i_2 = z+1,\ \ i_3 = z+2\ \ldots\ i_k = z+k-1,
$$

то в соответствии с теоремой Виета для алгебраических уравнений степени k коэффициенты определяются формулами:

$$
\begin{aligned}
&r_1(k) = 1\\
&r_2(k) = -\sum_{i=z}^{z+k-1}(i-z) = -C(k,\,2)\\
&r_3(k) = \sum_{i_2=z}^{z+k-1}(i_2-z)\sum_{i_1=i_2+1}^{z+k-1}(i_1-z) = \frac{k(k-1)(k-2)(3k-1)}{24}
\end{aligned} \tag{1.14}
$$

$$r_4(k) = -\sum_{i_3=z}^{z+k-1}(i_3 - z)\sum_{i_2=i_3+1}^{z+k-1}(i_2 - z)\sum_{i_1=i_2+1}^{z+k-1}(i_1 - z) = -\frac{k^2(k-2)(k-3)(k-1)^2}{48}$$

. . . .

$$r_k(k) = \prod_{s=z+1}^{z+k-1}(s - z) = \Gamma(k)$$

Таким образом, доказано, что имеет место равенство

$$C(i-z,\, k) = \frac{1}{k!}\sum_{s=1}^{k+1} r_s(k)(i-z)^{(k+1-s)}, \tag{1.15}$$

где коэффициенты $r_s(k)$ определяются формулами (1.14).

Подставляя (1.15) в выражение

$$\sum_{i=0}^{n} C(i-z,\, k)\, C(n,\, i)\, \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}(v)\, \frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}} u,$$

получим:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{s=1}^{k+1} r_s(k)(i-z)^{(k+1-s)}\, C(n,\, i)\, \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}(v)\, \frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}} u.$$

Отсюда после перегруппировки имеем:

$$\frac{1}{k!}\sum_{s=1}^{k+1} r_s(k)\sum_{i=0}^{n}(i-z)^{(k+1-s)}\, C(n,\, i)\, \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}(v)\, \frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}} u.$$

В соответствии с формулой бинома Ньютона получаем:

$$\sum_{i=0}^{n}(i-z)^{(k+1-s)}\, C(n,\, i)\, \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}(v)\, \frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}} u = \sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{k+1-s} C(k+1-s,\, l)\, i^l(-z)^{(k+1-s-l)}\, C(n,\, i)\, \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}(v)\, \frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}} u.$$

Представим полученное выражение следующим образом:

$$\sum_{l=0}^{k+1-s} C(k+1-s,\, l)(-z)^{(k+1-s-l)}\sum_{i=0}^{n} i^l\, C(n,\, i)\, \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}(v)\, \frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}} u = \sum_{l=0}^{k+1-s} C(k+1-s,\, l)(-z)^{(k+1-s-l)}\, L[i^l].$$

Так как в соответствии с формулой (1.7):

$$L[i^l] = \sum_{i=0}^{l}\sum_{s_0=0}^{i}\frac{s_0^l(-1)^{(s_0+i)}}{\Gamma(i-s_0+1)\,\Gamma(s_0+1)}\, C(n,\, i)\, i!\, \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}\left(\left(\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}} u\right) v\right),$$

то, обьединяя полученные результаты, имеем:

$$\sum_{i=0}^{n} C(i-z, k)\, C(n, i) \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}(v) \frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}} u = \frac{1}{k!} \sum_{s=1}^{k+1} r_s(k) \sum_{l=0}^{k+1-s} C(k+1-s, l)(-z)^{(k+1-s-l)} \sum_{i=0}^{l} \sum_{s_0=0}^{i} \frac{s_0^{l}(-1)^{(s_0+i)}}{\Gamma(i-s_0+1)\,\Gamma(s_0+1)} C(n, i)\, i!\, \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}\left(\left(\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}} u\right) v\right).$$

Производя замену индекса суммирования s на $s+1$ и перенумерацию, получим в итоге формулу (1.11). Утверждение 1.4 доказано.

Докажем главное свойство оператора Лейбница, которое понадобится в дальнейшем.

Утверждение 1.5. Пусть $b_0(x)$, $b_1(x)$, $b_2(x)$, ..., $b_m(x)$ заданная последовательность функций и пусть $L_{i_0, k_0}[\ ]$ — оператор Лейбница по индексу i функций $[b_{i_0}(x)]_{i_0+k_0}$, $b_{k_0}(x)$ и параметра n. Тогда имеет место равенство:

$$\sum_{i_0=0}^{m-1} L_{i_0, k_0}[C(i-z, i_0)] = \sum_{i_1=0}^{m-1} \sum_{i_0=0}^{m-1-i_1} (-1)^{i_0} C(k_0-1+i_0, k_0-1)\, C(n, i_1) \frac{\partial^{n-i_1}}{\partial x^{n-i_1}}\left([b_{i_1+i_0}(x)]_{i_0+k_0} b_{k_0}(x)\right). \quad (1.16)$$

Доказательство. С учетом доказанного ранее утверждения 1.4 формула (1.16) принимает вид:

$$\sum_{i_0=0}^{m-1}\left(\frac{1}{i_0!}\right) \sum_{s_0=0}^{i_0} \sum_{s_1=0}^{s_0} \sum_{s_2=0}^{s_1} \sum_{s_3=0}^{s_2} \frac{s_3^{s_1}(-1)^{(s_3+s_2)}}{\Gamma(s_2-s_3+1)\,\Gamma(s_3+1)} C(n, s_2)\, s_2!\, r_{1+i_0-s_0}(i_0)\, C(s_0, s_0-s_1)(-k_0)^{(s_0-s_1)} \frac{\partial^{n-s_2}}{\partial x^{n-s_2}}\left(\left(\frac{\partial^{s_2}}{\partial x^{s_2}}[b_{i_0}(x)]_{i_0+k_0}\right) b_{k_0}(x)\right) =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{m-1} \sum_{i_0=0}^{m-1-i_1} (-1)^{i_0} C(k_0-1+i_0, k_0-1)\, C(n, i_1) \frac{\partial^{n-i_1}}{\partial x^{n-i_1}}\left([b_{i_1+i_0}(x)]_{i_0+k_0} b_{k_0}(x)\right).$$

При $m=0$ равенство выполняется тождественно. Проверим эту формулу при $m=1$. Действительно, в этом случае:

$$\frac{\partial^{n}}{\partial x^{n}}\left([b_0(x)]_{k_0} b_{k_0}(x)\right) = \frac{\partial^{n}}{\partial x^{n}}\left([b_0(x)]_{k_0} b_{k_0}(x)\right).$$

Используем метод математической индукции. Допустим, что формула имеет место при $m=p$. Докажем, что равенство (1.16) выполняется и при $m=p+1$. Действительно:

$$\sum_{i_1=0}^{p} \sum_{i_0=0}^{p-i_1} (-1)^{i_0} C(k_0-1+i_0, k_0-1)\, C(n, i_1) \frac{\partial^{n-i_1}}{\partial x^{n-i_1}}\left([b_{i_1+i_0}(x)]_{i_0+k_0} b_{k_0}(x)\right) =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{p-1} \sum_{i_0=0}^{p-i_1-1} (-1)^{i_0} C(k_0-1+i_0, k_0-1)\, C(n, i_1) \frac{\partial^{n-i_1}}{\partial x^{n-i_1}}\left([b_{i_1+i_0}(x)]_{i_0+k_0} b_{k_0}(x)\right) + C(n, p) \frac{\partial^{n-p}}{\partial x^{n-p}}([b_p(x)]_{p+1} b_{p+1}(x)). \quad (1.17)$$

Аналогично

$$\sum_{i_0=0}^{p} \frac{1}{i_0!} \sum_{s_0=0}^{i_0} \sum_{s_1=0}^{s_0} \sum_{s_2=0}^{s_1} \sum_{s_3=0}^{s_2} \frac{s_3^{s_1}(-1)^{(s_3+s_2)}}{\Gamma(s_2-s_3+1)\,\Gamma(s_3+1)} C(n, s_2)\, s_2!\, r_{1+i_0-s_0}(i_0)\, C(s_0, s_0-s_1)(-k_0)^{(s_0-s_1)} \frac{\partial^{n-s_2}}{\partial x^{n-s_2}}\left(\left(\frac{\partial^{s_2}}{\partial x^{s_2}}[b_{i_0}(x)]_{i_0+k_0}\right) b_{k_0}(x)\right) =$$

$$= \sum_{i_0=0}^{p-1} \frac{1}{i_0!} \sum_{s_0=0}^{i_0} \sum_{s_1=0}^{s_0} \sum_{s_2=0}^{s_1} \sum_{s_3=0}^{s_2} \frac{s_3^{s_1}(-1)^{(s_3+s_2)}}{\Gamma(s_2-s_3+1)\,\Gamma(s_3+1)} C(n, s_2)\, s_2!\, r_{1+i_0-s_0}(i_0)\, C(s_0, s_0-s_1)(-k_0)^{(s_0-s_1)} \frac{\partial^{n-s_2}}{\partial x^{n-s_2}}\left(\left(\frac{\partial^{s_2}}{\partial x^{s_2}}[b_{i_0}(x)]_{i_0+k_0}\right) b_{k_0}(x)\right) +$$

$$+ C(n, p) \frac{\partial^{n-p}}{\partial x^{n-p}}([b_p(x)]_{p+1} b_{p+1}(x)).$$

Поскольку по определению

$$\sum_{i_1=0}^{p-1}\sum_{i_0=0}^{p-i_1-1}(-1)^{i_0}C(k_0-1+i_0,\,k_0-1)\,C(n,\,i_1)\,\frac{\partial^{n-i_1}}{\partial x^{n-i_1}}\Big([b_{i_1+i_0}(x)]_{i_0+k_0}\,b_{k_0}(x)\Big)=$$

$$=\sum_{i_0=0}^{p-1}\frac{1}{i_0!}\sum_{s_0=0}^{i_0}\sum_{s_1=0}^{s_0}\sum_{s_2=0}^{s_1}\sum_{s_3=0}^{s_2}\frac{s_3^{s_1}(-1)^{(s_3+s_2)}}{\Gamma(s_2-s_3+1)\,\Gamma(s_3+1)}C(n,\,s_2)\,s_2!\,r_{1+i_0-s_0}(i_0)\,C(s_0,\,s_0-s_1)(-k_0)^{(s_0-s_1)}\,\frac{\partial^{n-s_2}}{\partial x^{n-s_2}}\left(\left(\frac{\partial^{s_2}}{\partial x^{s_2}}[b_{i_0}(x)]_{i_0+k_0}\right)b_{k_0}(x)\right),$$

то, сравнивая полученные результаты (1.16) и (1.17), получим тождественное равенство. Утверждение доказано.

2. ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поскольку наиболее распространенными являются линейные ОДУ второго порядка, то изложим для них отдельно (с целью наибольшей наглядности) теорию интегрирования, которая адекватна общему подходу.

В соответствии с **ОПРЕДЕЛЕНИЕМ 1.1.** **Под общим алгоритмом интегрирования линейных однородных ОДУ второго порядка:**

$$g_0(x)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}y\right)+g_1(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}y\right)+g_2(x)\,y=0, \tag{2.1}$$

где $y=\{y_i(x),\ i=1,\,2\}$ — искомые функции, а $g_p(x)$ — заданные необходимое число раз дифференцируемые и интегрируемые функции, будем понимать определение формул:

$$y_i=F_i(x,\,\alpha),\ \ i,\,k=1,\,2, \tag{2.2}$$

где $F_i(x,\,\alpha)$ — функционал, $\alpha=\{\alpha_1,\,\alpha_2\}$, где α_k находятся в виде рядов:

$$\alpha_k=\sum_{j=0}^{\infty}\xi_{k,j}(x),\ \ k=1,\,2 \tag{2.3}$$

из некоторых функций $\xi_{k,j}(x)$, которые определяются по формулам через исходные коэффициенты: $g_k(x)$, $k=0,\,1,\,2$.

Таким образом, задача построения общего алгоритма решения линейных ОДУ вида (2.1) состоит из двух основных задач:

— определение функционалов $F_i(x,\,\alpha_i)$;

— определение формул для функций $\xi_{k,j}(x)$.

2.1. Вывод формы представления частных решений

Так как $g_0(x)\neq 0$, то в дальнейшем будем рассматривать однородные линейные ОДУ второго порядка в приведенной форме:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}y=a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}y+a_2(x)y, \tag{2.4}$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$ — заданные необходимое число раз дифференцируемые и интегрируемые функции.

Продифференцируем уравнение (2.4). Тогда получим:

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}y = \frac{d}{dx}(a_1(x))\frac{\partial}{\partial x}y + a_1(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}y + \left(\frac{d}{dx}a_2(x)\right)y + a_2(x)\frac{\partial}{\partial x}y. \tag{2.5}$$

Так как в правой части этого ОДУ содержится значение $\frac{\partial^2}{\partial x^2}y$, которое определено (2.4), то, подставляя его в (2.5), после приведения подобных членов получим:

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}y = \left(\frac{d}{dx}a_1(x) + a_1(x)^2 + a_2(x)\right)\frac{\partial}{\partial x}y + \left(a_1(x)a_2(x) + \frac{d}{dx}a_2(x)\right)y. \tag{2.6}$$

Продифференцируем теперь уравнение (2.6). Тогда получим:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}y = \left(\frac{d^2}{dx^2}a_1(x) + 2a_1(x)\frac{d}{dx}a_1(x) + \frac{d}{dx}a_2(x)\right)\frac{\partial}{\partial x}y + \left(\frac{d}{dx}a_1(x) + a_1(x)^2 + a_2(x)\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}y + \left(\left(\frac{d}{dx}a_1(x)\right)a_2(x) + a_1(x)\frac{d}{dx}a_2(x) + \frac{d^2}{dx^2}a_2(x)\right)y +$$
$$+ \left(a_1(x)a_2(x) + \frac{d}{dx}a_2(x)\right)\frac{\partial}{\partial x}y.$$

Снова устанавливаем, что в правой части этого уравнения находится значение $\frac{\partial^2}{\partial x^2}y$, которое определено (2.4). Подставляя его в это уравнение после приведения подобных членов, имеем: (2.7)

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}y = \left(\frac{d^2}{dx^2}a_1(x) + 3a_1(x)\frac{d}{dx}a_1(x) + 2\frac{d}{dx}a_2(x) + a_1(x)^3 + 2a_1(x)a_2(x)\right)\frac{\partial}{\partial x}y + \left(2\left(\frac{d}{dx}a_1(x)\right)a_2(x) + a_2(x)a_1(x)^2 + a_2(x)^2 + a_1(x)\frac{d}{dx}a_2(x) + \frac{d^2}{dx^2}a_2(x)\right)y$$

Продолжая далее аналогичным образом, получаем: (2.8)

$$\frac{\partial^5}{\partial x^5}y = \left(\frac{d^3}{dx^3}a_1(x) + 3\left(\frac{d}{dx}a_1(x)\right)^2 + 4a_1(x)\frac{d^2}{dx^2}a_1(x) + 3\frac{d^2}{dx^2}a_2(x) + 6a_1(x)^2\frac{d}{dx}a_1(x) + 4\frac{d}{dx}(a_1(x))a_2(x) + 5a_1(x)\frac{d}{dx}a_2(x) + a_1(x)^4 + 3a_2(x)a_1(x)^2 + a_2(x)^2\right)\frac{\partial}{\partial x}y +$$
$$+\left(3\frac{d^2}{dx^2}(a_1(x))a_2(x) + 5a_2(x)a_1(x)\frac{d}{dx}a_1(x) + 4a_2(x)\frac{d}{dx}a_2(x) + a_2(x)a_1(x)^3 + 2a_1(x)a_2(x)^2 + 3\frac{d}{dx}a_1(x)\frac{d}{dx}a_2(x) + \frac{d}{dx}a_2(x)a_1(x)^2 + a_1(x)\frac{d^2}{dx^2}a_2(x) + \frac{d^3}{dx^3}a_2(x)\right)y$$

и так далее.

Анализируя равенства (2.4), (2.6), (2.7), (2.8), устанавливаем общую закономерность, заключающуюся в том, что для ОДУ любого порядка n общая структура построения правой части остается неизменной и определяется формой

$$\frac{\partial^{2+n}}{\partial x^{2+n}}y = \alpha(x, n)\frac{\partial}{\partial x}y + \beta(x, n)y. \tag{2.9}$$

Здесь $\alpha(x, n)$, $\beta(x, n)$ — некоторые функции от независимой переменной x и определяемые параметром n, который является натуральным числом.

В дальнейшем, с целью простоты изложения примем:

$$\alpha(x, n) = \alpha(n), \beta(x, n) = \beta(n). \tag{2.10}$$

Тогда, в частности при $n = 1$, получаем:

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}y = \alpha(1)\frac{\partial}{\partial x}y + \beta(1)y. \tag{2.11}$$

Сравнивая данное равенство с (2.6), устанавливаем, что

$$\alpha(1) = \frac{d}{dx} a_1(x) + a_1(x)^2 + a_2(x), \tag{2.12}$$

$$\beta(1) = a_1(x)\, a_2(x) + \frac{d}{dx} a_2(x). \tag{2.13}$$

Снова, принимая в (2.9) $n = 2$, имеем:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} y = \alpha(2) \frac{\partial}{\partial x} y + \beta(2)\, y. \tag{2.14}$$

Сравнивая данное ОДУ с равенством (2.7), устанавливаем, что

$$\alpha(2) = \frac{d^2}{dx^2} a_1(x) + 3a_1(x) \frac{d}{dx} a_1(x) + 2 \frac{d}{dx} a_2(x) + a_1(x)^3 + 2a_1(x)\, a_2(x), \tag{2.15}$$

$$\beta(2) = 2 \frac{d}{dx} (a_1(x))\, a_2(x) + a_2(x)\, a_1(x)^2 + a_2(x)^2 + a_1(x) \frac{d}{dx} a_2(x) + \frac{d^2}{dx^2} a_2(x). \tag{2.16}$$

Продолжая аналогичным образом, можно установить и другие требуемые значения коэффициентов $\alpha(n)$, $\beta(n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. **Равенство (2.9) называется n-образом уравнения (2.4), а функции $\alpha(n)$, $\beta(n)$ называются коэффициентами n-образа.**

2.2. Свойства n-образа

Свойство 1. **n-образ (2.9) является дифференциальным уравнением порядка $n + 2$ и содержит решение ОДУ (2.4).**

Свойство очевидно, так как следует из того, что вывод уравнения n-образа (2.9) осуществлялся при условии, что исходное уравнение (2.4) является основой для последовательной череды дифференцирований правой и левой частей этого уравнения с учетом его же значения (2.4) без использования других соотношений, т. е. n-образ (2.9) получен только с помощью дифференциальной связи (2.4).

Свойство 2. **Коэффициенты n-образа $\alpha(n)$, $\beta(n)$ определяются начальными значениями**

$$\alpha(0) = a_1(x),\ \beta(0) = a_2(n). \tag{2.17}$$

Действительно, принимая в (2.9) $n = 0$, имеем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y = \alpha(0) \frac{\partial}{\partial x} y + \beta(0)\, y.$$

Сравнивая данное уравнение с исходным (2.4), получаем (2.17).

Свойство 3. **Коэффициенты n-образа $\alpha(n)$, $\beta(n)$ связаны равенствами**

$$\alpha(n+1) = \frac{\partial}{\partial x} \alpha(n) + \alpha(n)\, a_1(x) + \beta(n), \tag{2.18}$$

$$\beta(n+1) = \alpha(n)\, a_2(x) + \frac{\partial}{\partial x} \beta(n). \tag{2.19}$$

Доказательство. Действительно, произведя замену параметра n на $n+1$ в (2.9), имеем:

$$\frac{\partial^{3+n}}{\partial x^{3+n}} y = \alpha(n+1) \frac{\partial}{\partial x} y + \beta(n+1) y .$$

С другой стороны, дифференцируя уравнение (2.9), с учетом (2.4) получаем:

$$\frac{\partial^{3+n}}{\partial x^{3+n}} y = \left(\frac{\partial}{\partial x} \alpha(n) + \alpha(n) a_1(x) + \beta(n)\right) \frac{\partial}{\partial x} y + \left(\alpha(n) a_2(x) + \frac{\partial}{\partial x} \beta(n)\right) y .$$

Так как левые части этих равенств равны, то из условия равенства правых частей следуют формулы (2.18), (2.19).

Свойство 4. **Если известны частные решения y_1, y_2, то коэффициенты n-образа $\alpha(n)$, $\beta(n)$ однозначно определяются равенствами**

$$\boldsymbol{\alpha(n) = \left(\frac{1}{W}\right) \cdot \left(\left(\frac{\partial^{n+2}}{\partial x^{n+2}} y_2\right) y_1 - y_2 \frac{\partial^{n+2}}{\partial x^{n+2}} y_1\right),} \tag{2.20}$$

$$\boldsymbol{\beta(n) = \left(\frac{1}{W}\right) \cdot \left(\frac{\partial^{n+2}}{\partial x^{n+2}} y_1 \frac{\partial}{\partial x} y_2 - \frac{\partial}{\partial x} y_1 \left(\frac{\partial^{n+2}}{\partial x^{n+2}} y_2\right)\right),} \tag{2.21}$$

$$\boldsymbol{W = y_1 \frac{\partial}{\partial x} y_2 - y_2 \frac{\partial}{\partial x} y_1.}$$

Доказательство. Так как y_1, y_2 — независимые частные решения, то они должны удовлетворять равенствам

$$\frac{\partial^{2+n}}{\partial x^{2+n}} y_1 = \alpha(n)\left(\frac{\partial}{\partial x} y_1\right) + \beta(n) y_1,$$
$$\frac{\partial^{2+n}}{\partial x^{2+n}} y_2 = \alpha(n)\left(\frac{\partial}{\partial x} y_2\right) + \beta(n) y_2.$$

Тогда, решая эту алгебраическую систему уравнений, получим (2.20), (2.21).

2.3. Структура общего решения линейного ОДУ

Анализируя формулу (2.18), устанавливаем, что

$$\beta(n) = \alpha(n+1) - \frac{\partial}{\partial x} \alpha(n) - \alpha(n) a_1(x). \tag{2.22}$$

Следовательно, уравнение n-образа (2.9) может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial^{2+n}}{\partial x^{2+n}} y = \alpha(n) \frac{\partial}{\partial x} y + \left(\alpha(n+1) - \frac{\partial}{\partial x} \alpha(n) - \alpha(n) a_1(x)\right) y, \tag{2.23}$$

или, аналогично устанавливая из (2.19)

$$\alpha(n) = \frac{\beta(n+1) - \dfrac{\partial}{\partial x}\beta(n)}{a_2(x)},$$

получаем второе представление:

$$\frac{\partial^{2+n}}{\partial x^{2+n}} y = \left(\frac{\beta(n+1) - \dfrac{\partial}{\partial x}\beta(n)}{a_2(x)} \right) \frac{\partial}{\partial x} y + \beta(n) y. \tag{2.24}$$

Отсюда следует, что уравнение n-образа (2.9) полностью определяется либо значением коэффициента $\alpha(n)$, либо коэффициентом $\beta(n)$. Очевидно, что представление (2.24) может иметь особенность при $a_2(x) = 0$, поэтому в общем случае представление (2.23) более предпочтительно, так как не зависит от значения коэффициента $a_2(x)$ и исключает особые случаи. Таким образом, в дальнейшем представление (2.23) примем в качестве определяющего.

Установим рекуррентное уравнение для нахождения коэффициента $\alpha(n)$. С этой целью значение $\beta(n)$, определяемое (2.22), и следующее из него равенство

$$\beta(n+1) = \alpha(n+2) - \frac{\partial}{\partial x}\alpha(n+1) - \alpha(n+1)\, a_1(x)$$

подставим в формулу (2.19).

Тогда получим в итоге искомое рекуррентное уравнение

$$\alpha(2+n) = \alpha(n)\left(a_2(x) - \frac{d}{dx} a_1(x) \right) + 2\frac{\partial}{\partial x}\alpha(n+1) + \alpha(n+1)\, a_1(x) - \frac{\partial}{\partial x}(\alpha(n))\, a_1(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha(n). \tag{2.25}$$

Используя данное рекуррентное равенство, устанавливаются последовательно все значения функции $\alpha(n)$ для произвольных натуральных значений параметра n.

Тем не менее в этом случае изучение функции $\alpha(n)$ не даст никаких новых сведений, благодаря которым можно получить новые математические результаты.

Для этого требуется формально отклониться от установленных ограничений, поскольку только в этом случае можно получить нетривиальные закономерности. Поэтому, опираясь на эту гипотезу, формально расширим область определения параметра n на отрицательные целые числа. Оказывается, что именно такой нетривиальный, формальный подход позволит решить поставленную задачу определения общей структуры для частных решений линейного ОДУ (2.4).

Действительно, примем в (2.25) $n = -1$. Тогда получим:

$$\alpha(1) = \alpha(-1)\left(a_2(x) - \frac{d}{dx} a_1(x) \right) + 2\frac{d}{dx}\alpha(0) + \alpha(0)\, a_1(x) - \frac{d}{dx}(\alpha(-1))\, a_1(x) - \frac{d^2}{dx^2}\alpha(-1).$$

С учетом формулы (2.12) и начальных условий (2.17) отсюда получаем неоднородное ОДУ относительно неизвестной функции $\alpha(-1)$:

$$\frac{d^2}{dx^2}\alpha(-1) = -a_1(x)\frac{d}{dx}\alpha(-1) + \left(a_2(x) - \frac{d}{dx} a_1(x) \right)\alpha(-1) + 2\frac{d}{dx} a_1(x) - \frac{d}{dx} a_1(x) - a_2(x).$$

Произведем в этом уравнении подстановку:

$$\alpha(-1) = 1 + V(x), \tag{2.26}$$

где $V(x)$ — некоторая функция.

Тогда получим, после преобразований, однородное ОДУ второго порядка для нахождения функции $V(x)$:

$$\frac{d^2}{dx^2}V(x) = -\left(\frac{d}{dx}V(x)\right)a_1(x) + \left(a_2(x) - \frac{d}{dx}a_1(x)\right)V(x). \tag{2.27}$$

Докажем **Утверждение 2.1. Однородное ОДУ (2.27) является сопряженным по отношению к ОДУ (2.4).**

Доказательство. В соответствии с определением [Математическая энциклопедия. М.: изд-во «Советская Энциклопедия», 1979] для ОДУ (2.4) сопряженным является уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}Y = -\frac{\partial}{\partial x}(a_1(x)Y) + a_2(x)Y,$$

где $Y = Y(x)$ — некоторая функция.

После преобразований этого ОДУ получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}Y = -a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}Y + \left(a_2(x) - \frac{d}{dx}a_1(x)\right)Y. \tag{2.28}$$

Сравнивая (2.28) с (2.27), устанавливаем идентичность структуры этих уравнений, что и доказывает данное утверждение.

Таким образом, если ввести новые функции

$$b_1(x) = -a_1(x), \tag{2.29}$$

$$b_2(x) = a_2(x) - \frac{d}{dx}a_1(x), \tag{2.30}$$

то из (2.27) следует, что $V(x)$ является решением уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}V(x) = \left(\frac{d}{dx}V(x)\right)b_1(x) + b_2(x)V(x). \tag{2.31}$$

Однако данное ОДУ по структуре полностью совпадает с (2.4), а поскольку в соответствии с доказанным Утверждением 2.1 уравнение (2.4) является сопряженным по отношению к уравнению (2.27), то справедлива

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть

$$\frac{d^{2+n}}{dx^{2+n}}V(x) = \varepsilon(n)\frac{d}{dx}V(x) + \rho(n)V(x) \tag{2.32}$$

— уравнение n-образа ОДУ (2.31), а $\varepsilon(n)$, $\rho(n)$ — коэффициенты n-образа в которых $b_1(x)$, $b_2(x)$ определяются равенствами (2.29), (2.30).

Тогда решением уравнения (2.4) является функция

$$y_1(x) = -1 + \varepsilon(-1). \tag{2.33}$$

Доказательство. Так как структурная форма уравнений (2.4) и (2.31) совпадает, то по определению $\varepsilon(-1)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2}\varepsilon(-1) = -\frac{d}{dx}b_1(x) - b_2(x) + \varepsilon(-1)\left(b_2(x) - \frac{d}{dx}b_1(x)\right) + 2\frac{d}{dx}b_1(x) - \left(\frac{d}{dx}\varepsilon(-1)\right)b_1(x). \tag{2.34}$$

Тогда, выражая из (2.33) функцию $\varepsilon(-1)$ и подставляя ее значение в данное уравнение, получаем:

$$\frac{d^2}{dx^2}y_1(x) = -b_1(x)\frac{d}{dx}y_1(x) + \left(b_2(x) - \frac{d}{dx}b_1(x)\right)y_1(x).$$

Подставим сюда значения коэффициентов $b_1(x)$ и $b_2(x)$ в соответствии с формулами (2.29), (2.30). Тогда после преобразований получим:

$$\frac{d^2}{dx^2}y_1(x) = a_1(x)\frac{d}{dx}y_1(x) + a_2(x)y_1(x).$$

Так как данное уравнение совпадает с (2.4), то тем самым теорема доказана.

Таким образом, получена структурная форма представления первого частного решения ОДУ (2.4).

Формально структурную форму для второго частного решения можно получить, пользуясь известной формулой, выражающей второе частное решение через первое в виде:

$$y_2(x) = (-1 + \varepsilon(-1))\int\frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{(-1+\varepsilon(-1))^2}dx. \tag{2.35}$$

Однако получим другое, более простое и эффектное, представление.

Докажем **ТЕОРЕМУ 2.2: Второе частное решение $y_2(x)$ уравнения (2.4) определяется структурной формой**

$$y_2(x) = \varepsilon(-2) - x\,\varepsilon(-1) + x, \tag{2.36}$$

где $\varepsilon(-2)$ — некоторая новая функция, а $\varepsilon(-1)$ — функция, определяющая структурную форму первого частного решения (2.33).

Доказательство. Поскольку уравнение (2.32) по структурной форме полностью совпадает с уравнением (2.4), то для определения $\varepsilon(n)$ справедливо рекуррентное соотношение, по форме совпадающее с (2.25):

$$\varepsilon(2+n) = \varepsilon(n)\left(b_2(x) - \frac{d}{dx}b_1(x)\right) + 2\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon(n+1) + \varepsilon(n+1)b_1(x) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon(n)\right)b_1(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varepsilon(n). \tag{2.37}$$

Примем в данном рекуррентном уравнении значение параметра $n = -2$. Тогда получим:

$$\varepsilon(0) = \varepsilon(-2)\left(b_2(x) - \frac{d}{dx}b_1(x)\right) + 2\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon(-1) + \varepsilon(-1)b_1(x) - \left(\frac{d}{dx}\varepsilon(-2)\right)b_1(x) - \frac{d^2}{dx^2}\varepsilon(-2). \tag{2.38}$$

Так как $\varepsilon(0) = b_1(x)$, а $\varepsilon(-1)$ определяется из формулы (2.33), как

$$\varepsilon(-1) = 1 + y_1(x), \tag{2.39}$$

где функция $y_1(x)$ является решением ОДУ (2.4), то, подставляя полученные равенства в (2.38), после преобразований имеем:

$$b_1(x) = \varepsilon(-2)\left(b_2(x) - \frac{d}{dx}b_1(x)\right) + 2\frac{d}{dx}(1 + y_1(x)) + (1 + y_1(x))b_1(x) - \left(\frac{d}{dx}\varepsilon(-2)\right)b_1(x) - \frac{d^2}{dx^2}\varepsilon(-2). \tag{2.40}$$

Произведем в этом уравнении подстановку:

$$\varepsilon(-2) = y_2(x) + x\,\varepsilon(-1) - x, \tag{2.41}$$

где $y_2(x)$ — некоторая новая функция.

Тогда после преобразований (2.40) приведется к виду:

$$x\left(\frac{d^2}{dx^2}y_1(x) + b_1(x)\frac{d}{dx}y_1(x) - \left(b_2(x) - \frac{d}{dx}b_1(x)\right)y_1(x)\right) + \frac{d^2}{dx^2}y_2(x) + b_1(x)\frac{d}{dx}y_2(x) + \left(\frac{d}{dx}b_1(x) - b_2(x)\right)y_2(x) = 0.$$

Подставляя сюда (2.29), (2.30), получаем:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}y_1(x) - a_1(x)\frac{d}{dx}y_1(x) - a_2(x)y_1(x)\right)x + \frac{d^2}{dx^2}y_2(x) - a_1(x)\frac{d}{dx}y_2(x) - a_2(x)y_2(x) = 0.$$

Так как по определению $y_1(x)$ является решением (2.4), то отсюда следует равенство

$$\frac{d^2}{dx^2}y_2(x) = a_1(x)\frac{d}{dx}y_2(x) + a_2(x)y_2(x). \tag{2.42}$$

Но данное равенство тоже совпадает с (2.4), поэтому функция $y_2(x)$ также является решением ОДУ (2.4). Таким образом, теорема 2.2 доказана.

Очевидно, что полученные частные решения (2.4)

$$y_1(x) = -1 + \varepsilon(-1) \tag{2.43}$$

$$y_2(x) = \varepsilon(-2) - x\,\varepsilon(-1) + x \tag{2.44}$$

являются линейно независимыми функциями.

Действительно, вронскиан этих функций

$$\begin{bmatrix} -1 + \varepsilon(-1) & \varepsilon(2) - x\,\varepsilon(-1) + x \\ \dfrac{d}{dx}\varepsilon(-1) & \dfrac{d}{dx}(\varepsilon(-2) - x\,\varepsilon(-1) + x) \end{bmatrix} = 2\,\varepsilon(-1) - 1 + (\varepsilon(-1) - 1)\frac{d}{dx}\varepsilon(-2) - \varepsilon(-1)^2 - \left(\frac{d}{dx}\varepsilon(-1)\right)\varepsilon(-2)$$

не равен нулю, даже если $\varepsilon(-1) = \varepsilon(-2) = 0$.

Таким образом, решена первая задача построения алгоритма решения ОДУ (2.4), а именно: установлена структурная форма частных решений, представляемая формулами (2.43), (2.44).

Тогда общее решение (2.4) определяется формулой

$$y(x) = C_1(-1 + \varepsilon(-1)) + C_2(\varepsilon(-2) - x\,\varepsilon(-1) + x)$$

или в эквивалентной форме:

$$y(x) = (C_1 - C_2 x)(-1 + \varepsilon(-1)) + C_2\varepsilon(-2). \tag{2.45}$$

Следовательно, для нахождения общего решения (2.45) ОДУ (2.4) необходимо построить сопряженное ему ОДУ (2.31) с коэффициентами, определяемыми формулами (2.29), (2.30), и далее установить значения $\varepsilon(-1)$ и $\varepsilon(-2)$.

В сущности может показаться, что полученная формула для общего решения (2.45) ничего собой не представляет, так как в принципе можно задать форму искомого решения в произвольной форме. Однако в данном случае существенным фактором является возможность строгого и последовательного определения только одной функции $\varepsilon(n)$, поскольку искомые значения $\varepsilon(-1)$ и $\varepsilon(-2)$ следуют автоматически путем принятия параметром n значений $n=-1$, $n=-2$. Кроме того, для определения функции $\varepsilon(n)$ имеется рекуррентное уравнение (2.37).

В принципе, благодаря (2.35), функции $\varepsilon(-1)$ и $\varepsilon(-2)$ оказываются взаимосвязаны также формулой:

$$\varepsilon(-2)=(-1+\varepsilon(-1))\int\frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{(-1+\varepsilon(-1))^2}\,dx+x. \tag{2.46}$$

2.4. Неоднородные ОДУ

Для полноты изучения проблемы вычисления общего решения линейного ОДУ второго порядка, коснемся вопроса нахождения частного решения — $Y(x)$ неоднородного уравнения:

$$\frac{d^2}{dx^2}Y(x)+a_1(x)\frac{d}{dx}Y(x)+a_2(x)Y(x)=F(x), \tag{2.47}$$

где $F(x)$ — заданная функция.

Решение этой проблемы производится различными способами, однако все они требуют либо предварительного вычисления специальной функции, например функции Грина, либо наличия двух частных решений, т. е. требуют проведения подготовительных операций, используется также ряд других способов. Однако оказывается, что решение этой проблемы гораздо проще, т.е. для вычисления частного решения неоднородного ОДУ (2.47) не требуется выполнения предварительных операций, а только наличия одного частного решения $y(x)$ однородного ОДУ:

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)+a_1(x)\frac{d}{dx}y(x)+a_2(x)y(x)=0. \tag{2.48}$$

Докажем, что справедлива

ТЕОРЕМА. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение (2.47) имеет частное решение

$$\boldsymbol{Y(x)=y(x)\int\left(\frac{1}{y(x)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)\,dx}\cdot\int e^{\int a_1(x)\,dx}\,y(x)\,F(x)\,dx\right)dx,} \tag{2.49}$$

где $y(x)$ — нетривиальное частное решение однородного линейного ОДУ (2.48).

Доказательство. Поскольку по определению функция $Y(x)$ является решением уравнения (2.47), то, подставляя туда (2.49), после преобразований получим:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)+a_1(x)\frac{d}{dx}y(x)+a_2(x)y(x)\right)\int\frac{\int e^{\int a_1(x)\,dx}\,y(x)F(x)dx}{e^{-\int a_1(x)\,dx}\,y(x)^2}\,dx+F(x)=F(x).$$

Так как по определению функция $y(x)$ удовлетворяет (2.48), то отсюда следует тождество

$$F(x)=F(x).$$

Теорема доказана.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ n-ОБРАЗА

В соответствии с изложенным, для построения алгоритма нахождения общего решения ОДУ (2.4) необходимо установить формулы для вычисления функций $\varepsilon(-1)$, $\varepsilon(-2)$. С целью простоты изложения выполним эту задачу (не уменьшая общности) для уравнения вида:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a\,y, \tag{3.1}$$

где

$$a = a_2(x) + \frac{a_1(x)^2}{4} - \frac{\frac{d}{dx}a_1(x)}{2},$$

к которому приводится уравнение (2.4) преобразованием

$$y \to y\,e^{\frac{\int a_1(x)\,dx}{2}}.$$

Так как в данном случае $a_1(x) = 0$, то из (2.29) и (2.30) получаем:

$$b_1(x) = 0, \quad b_2(x) = a.$$

Следовательно, сопряженное уравнение равно исходному (3.1) и поэтому для нахождения общего решения этого уравнения достаточно получить значение коэффициента $\alpha(n)$ n-образа исходного уравнения (3.1):

$$\frac{d^{2+n}}{dx^{2+n}}\,y = \alpha(n)\frac{\partial}{\partial x}\,y + \beta(n)\,y. \tag{3.2}$$

Примечание. Случай, когда коэффициент $a_1(x)$ уравнения (1.1) не равен нулю, будет автоматически рассмотрен в качестве частного случая при построении теории нахождения общего решения ОДУ порядка m.

Изложим подход к нахождению коэффициента $\alpha(n)$.

Так как в соответствии с теоремой Лейбница:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(a\,y) = \sum_{i=0}^{n}\begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}(a)\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\,y, \tag{3.3}$$

то уравнение n-образа (3.2) принимает вид:

$$\sum_{i=0}^{n}\begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}(a)\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\,y = \alpha(n)\frac{\partial}{\partial x}\,y + \beta(n)\,y. \tag{3.4}$$

Так как правая часть этого равенства определяет коэффициенты $\alpha(n)$, $\beta(n)$ как некие выражения при $\frac{\partial}{\partial x}y$ и y, то представим левую часть этого равенства в виде:

$$\sum_{i=2}^{n}\begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}(a)\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\,y + \begin{bmatrix} 1 \\ n \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}(a)\,\frac{\partial}{\partial x}\,y + \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^n}{\partial x^n}\,a\,y. \tag{3.5}$$

Произведем замену индекса сумирования i на $i+2$ в выражении:

$$\sum_{i=2}^{n}\begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}}(a)\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}y. \tag{3.6}$$

Тогда оно примет вид:

$$\sum_{i=0}^{n-2}\begin{bmatrix} i+2 \\ n \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i+2}}{\partial x^{i+2}}y. \tag{3.7}$$

Так как

$$\frac{\partial^{i+2}}{\partial x^{i+2}}y=\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}(a\,y)=\sum_{i_1=0}^{i}\begin{bmatrix} i_1 \\ i \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1}}{\partial x^{i-i_1}}(a)\frac{\partial^{i_1}}{\partial x^{i_1}}y, \tag{3.8}$$

то выражение (3.7) равно

$$\sum_{i=0}^{n-2}\begin{bmatrix} i+2 \\ n \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i+2}}{\partial x^{i+2}}y=\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{i_1=0}^{i}\begin{bmatrix} i+2 \\ n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1 \\ i \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1}}{\partial x^{i-i_1}}(a)\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i_1}}{\partial x^{i_1}}y.$$

Правая часть этого равенства представляется в виде:

$$\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{i_1=2}^{i}\begin{bmatrix} i+2 \\ n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1 \\ i \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1}}{\partial x^{i-i_1}}(a)\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i_1}}{\partial x^{i_1}}y+\sum_{i=0}^{n-2}\begin{bmatrix} i+2 \\ n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}(a)\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\,y+\sum_{i=0}^{n-2}\begin{bmatrix} i+2 \\ n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}}(a)\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial}{\partial x}y.$$

Таким образом, с учетом (3.6), выражение (3.5) становится равным

$$\begin{aligned}&\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{i_1=2}^{i}\begin{bmatrix} i+2 \\ n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1 \\ i \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1}}{\partial x^{i-i_1}}(a)\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i_1}}{\partial x^{i_1}}y+\left(\sum_{i=0}^{n-2}\begin{bmatrix} i+2 \\ n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}(a)\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}a+\begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{n}}{\partial x^{n}}a\right)y+\\&+\left(\sum_{i=0}^{n-2}\begin{bmatrix} i+2 \\ n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}}(a)\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}a+\begin{bmatrix} 1 \\ n \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}a\right)\frac{\partial}{\partial x}y.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Снова произведем замену индекса суммирования i_1 на i_1+2 в выражении:

$$\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{i_1=2}^{i}\begin{bmatrix} i+2 \\ n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1 \\ i \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1}}{\partial x^{i-i_1}}(a)\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i_1}}{\partial x^{i_1}}y. \tag{3.10}$$

Тогда получим:

$$\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{i_1=0}^{i-2}\begin{bmatrix} i+2 \\ n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1+2 \\ i \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i_1+2}}{\partial x^{i_1+2}}y. \tag{3.11}$$

Данное выражение, с учетом (3.1), представляется в виде:

$$\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{i_1=0}^{i-2}\begin{bmatrix} i+2 \\ n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1+2 \\ i \end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i_1}}{\partial x^{i_1}}(a\,y).$$

Снова используя формулу Лейбница для составляющей $\frac{\partial^{i_1}}{\partial x^{i_1}}(a\,y)$, имеем:

$$\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{i_1=0}^{i-2}\sum_{i_2=0}^{i_1}\begin{bmatrix} i+2\\ n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1+2\\ i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_2\\ i_1\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i_1-i_2}}{\partial x^{i_1-i_2}}(a)\frac{\partial^{i_2}}{\partial x^{i_2}}y.$$

Данное выражение преобразуется к эквивалентной форме:

$$\left(\sum_{i=4}^{n-2}\sum_{i_1=2}^{i-2}\sum_{i_2=2}^{i_1}\begin{bmatrix} i+2\\ n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1+2\\ i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_2\\ i_1\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i_1-i_2}}{\partial x^{i_1-i_2}}(a)\frac{\partial^{i_2}}{\partial x^{i_2}}y+\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{i_1=0}^{i-2}\begin{bmatrix} i+2\\ n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1+2\\ i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0\\ i_1\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i_1}}{\partial x^{i_1}}a\right)y+$$

$$+\left(\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{i_1=0}^{i-2}\begin{bmatrix} i+2\\ n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1+2\\ i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1\\ i_1\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x^{i_1-1}}a\right)\frac{\partial}{\partial x}y.$$

Таким образом, выражение (3.9) приводится к виду:

$$\sum_{i=4}^{n-2}\sum_{i_1=2}^{i-2}\sum_{i_2=2}^{i_1}\begin{bmatrix} i+2\\ n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1+2\\ i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_2\\ i_1\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i_1-i_2}}{\partial x^{i_1-i_2}}(a)\frac{\partial^{i_2}}{\partial x^{i_2}}y+$$

$$+\left(\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{i_1=0}^{i-2}\begin{bmatrix} i+2\\ n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1+2\\ i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0\\ i_1\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i_1}}{\partial x^{i_1}}a+\sum_{i=0}^{n-2}\begin{bmatrix} i+2\\ n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0\\ i\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}(a)\cdot\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}a+\begin{bmatrix} 0\\ n\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{n}}{\partial x^{n}}a\right)y+$$

$$+\left(\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{i_1=0}^{i-2}\begin{bmatrix} i+2\\ n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1+2\\ i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1\\ i_1\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x^{i_1-1}}a+\sum_{i=0}^{n-2}\begin{bmatrix} i+2\\ n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1\\ i\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}}(a)\cdot\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}a+\begin{bmatrix} 1\\ n\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}a\right)\frac{\partial}{\partial x}y.$$

Продолжая аналогичным образом, на k-м шаге получим:

$$\sum_{i=2k}^{n-2}\sum_{i_1=2(k-1)}^{i-2}\sum_{i_2=2(k-1)}^{i_1-2}\dots\sum_{i_{k-1}=2}^{i_{k-2}-2}\sum_{i_k=2}^{i_{k-1}}\begin{bmatrix} i+2\\ n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1+2\\ i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_{k-1}+2\\ i_{k-2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_k\\ i_{k-1}\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\dots\frac{\partial^{i_{k-2}-i_{k-1}-2}}{\partial x^{i_{k-2}-i_{k-1}-2}}(a)\frac{\partial^{i_{k-1}-i_k}}{\partial x^{i_{k-1}-i_k}}(a)\frac{\partial^{i_k}}{\partial x^{i_k}}y+$$

$$+\left(\sum_{i=2k}^{n-2}\sum_{i_1=2(k-1)}^{i-2}\sum_{i_{k-1}=2}^{i_{k-2}-2}\sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-2}\begin{bmatrix} i+2\\ n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1+2\\ i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_k+2\\ i_{k-1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0\\ i_k\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\dots\frac{\partial^{i_{k-1}-i_k-2}}{\partial x^{i_{k-1}-i_k-2}}(a)\frac{\partial^{i_k}}{\partial x^{i_k}}a+\dots+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{i_1=0}^{i-2}\begin{bmatrix} i+2\\ n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1+2\\ i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0\\ i_1\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i_1}}{\partial x^{i_1}}a+\sum_{i=0}^{n-2}\begin{bmatrix} i+2\\ n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0\\ i\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}(a)\cdot\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}a+\begin{bmatrix} 0\\ n\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{n}}{\partial x^{n}}a\right)y+$$

$$+\left(\sum_{i=2k}^{n-2}\sum_{i_1=2(k-1)}^{i-2}\dots\sum_{i_{k-1}=2}^{i_{k-2}-2}\sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-2}\begin{bmatrix} i+2\\ n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1+2\\ i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_k+2\\ i_{k-1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1\\ i_k\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\dots\frac{\partial^{i_{k-1}-i_k-2}}{\partial x^{i_{k-1}-i_k-2}}(a)\frac{\partial^{i_k-1}}{\partial x^{i_k-1}}a+\dots+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=2}^{n-2}\sum_{i_1=0}^{i-2}\begin{bmatrix} i+2\\ n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} i_1+2\\ i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1\\ i_1\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x^{i_1-1}}a+\sum_{i=0}^{n-2}\begin{bmatrix} i+2\\ n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1\\ i\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}}(a)\cdot\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}a+\begin{bmatrix} 1\\ n\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}a\right)\frac{\partial}{\partial x}y. \tag{3.12}$$

Выберем такое значение k, чтобы слагаемое в (3.12)

$$\sum_{i=2k}^{n-2}\sum_{i_1=2(k-1)}^{i-2}\sum_{i_2=2(k-1)}^{i_1-2}\ldots\sum_{i_{k-1}=2}^{i_{k-2}-2}\sum_{i_k=2}^{i_{k-1}}\begin{bmatrix}i+2\\n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_1+2\\i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_{k-1}+2\\i_{k-2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_k\\i_{k-1}\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{n-i-2}}{\partial x^{n-i-2}}(a)\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\ldots\frac{\partial^{i_{k-2}-i_{k-1}-2}}{\partial x^{i_{k-2}-i_{k-1}-2}}(a)\frac{\partial^{i_{k-1}-i_k}}{\partial x^{i_{k-1}-i_k}}(a)\frac{\partial^{i_k}}{\partial x^{i_k}}y \quad (3.13)$$

приняло некое однозначное конечное значение. Для этого необходимо принять параметр $n = 2p$, где p — натуральное число.

В этом случае значение k определяется из равенства: $2k = 2p - 2$. Отсюда следует, что $k = p - 1$. При данном значении k выражение (3.13) равно нулю, поэтому (3.12) представляется в виде:

$$\left(\sum_{i=2(p-1)}^{2p-2}\sum_{i_1=2(p-2)}^{i-2}\ldots\sum_{i_{p-2}=2}^{i_{p-3}-2}\sum_{i_{p-1}=0}^{i_{p-2}-2}\begin{bmatrix}i+2\\2p\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_1+2\\i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_{p-1}+2\\i_{p-2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\i_{p-1}\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{2p-i-2}}{\partial x^{2p-i-2}}(a)\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\ldots\frac{\partial^{i_{p-2}-i_{p-1}-2}}{\partial x^{i_{p-2}-i_{p-1}-2}}(a)\frac{\partial^{i_{p-1}}}{\partial x^{i_{p-1}}}a+\ldots+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=2}^{2p-2}\sum_{i_1=0}^{i-2}\begin{bmatrix}i+2\\2p\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_1+2\\i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\i_1\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\frac{\partial^{2p-i-2}}{\partial x^{2p-i-2}}(a)\frac{\partial^{i_1}}{\partial x^{i_1}}a+\sum_{i=0}^{2p-2}\begin{bmatrix}i+2\\2p\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\i\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}(a)\cdot\frac{\partial^{2p-i-2}}{\partial x^{2p-i-2}}a+\begin{bmatrix}0\\2p\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}a+a\right)y+$$

$$+\left(\sum_{i=2(p-1)}^{2p-2}\sum_{i_1=2(p-2)}^{i-2}\ldots\sum_{i_{p-2}=2}^{i_{p-3}-2}\sum_{i_{p-1}=0}^{i_{p-2}-2}\begin{bmatrix}i+2\\2p\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_1+2\\i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_{p-1}+2\\i_{p-2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\i_{p-1}\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{2p-i-2}}{\partial x^{2p-i-2}}(a)\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\ldots\frac{\partial^{i_{p-2}-i_{p-1}-2}}{\partial x^{i_{p-2}-i_{p-1}-2}}(a)\frac{\partial^{i_{p-1}-1}}{\partial x^{i_{p-1}-1}}a+\ldots+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=2}^{2p-2}\sum_{i_1=0}^{i-2}\begin{bmatrix}i+2\\2p\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_1+2\\i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\i_1\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\frac{\partial^{2p-i-2}}{\partial x^{2p-i-2}}(a)\frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x^{i_1-1}}a+\sum_{i=0}^{2p-2}\begin{bmatrix}i+2\\2p\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}}(a)\cdot\frac{\partial^{2p-i-2}}{\partial x^{2p-i-2}}a+\begin{bmatrix}1\\2p\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}}a\right)\frac{\partial}{\partial x}y. \quad (3.14)$$

В соответствии с формулой n-образа выражение (3.13) учтено в качестве слагаемого в (3.14), поэтому (3.14) должно быть равно выражению

$$\alpha(2p)\frac{\partial}{\partial x}y+\beta(2p)y.$$

Таким образом, приравнивая коэффициенты при $\frac{\partial}{\partial x}y$ и y, получим искомые значения коэффициентов n-образа:

$$\alpha(2p)=\sum_{i=2(p-1)}^{2p-2}\sum_{i_1=2(p-2)}^{i-2}\ldots\sum_{i_{p-2}=2}^{i_{p-3}-2}\sum_{i_{p-1}=0}^{i_{p-2}-2}\begin{bmatrix}i+2\\2p\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_1+2\\i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_{p-1}+2\\i_{p-2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\i_{p-1}\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{2p-i-2}}{\partial x^{2p-i-2}}(a)\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\ldots\frac{\partial^{i_{p-2}-i_{p-1}-2}}{\partial x^{i_{p-2}-i_{p-1}-2}}(a)\frac{\partial^{i_{p-1}-1}}{\partial x^{i_{p-1}-1}}a+\ldots+$$

$$+\sum_{i=2}^{2p-2}\sum_{i_1=0}^{i-2}\begin{bmatrix}i+2\\2p\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_1+2\\i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\i_1\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\frac{\partial^{2p-i-2}}{\partial x^{2p-i-2}}(a)\frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x^{i_1-1}}a+\sum_{i=0}^{2p-2}\begin{bmatrix}i+2\\2p\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}}(a)\cdot\frac{\partial^{2p-i-2}}{\partial x^{2p-i-2}}a+\begin{bmatrix}1\\2p\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}}a;$$

$$\beta(2p)=\sum_{i=2(p-1)}^{2p-2}\sum_{i_1=2(p-2)}^{i-2}\sum_{i_{p-2}=2}^{i_{p-3}-2}\ldots\sum_{i_{p-1}=0}^{i_{p-2}-2}\begin{bmatrix}i+2\\2p\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_1+2\\i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_{p-1}+2\\i_{p-2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\i_{p-1}\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{2p-i-2}}{\partial x^{2p-i-2}}(a)\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\ldots\frac{\partial^{i_{p-2}-i_{p-1}-2}}{\partial x^{i_{p-2}-i_{p-1}-2}}(a)\frac{\partial^{i_{p-1}}}{\partial x^{i_{p-1}}}a+\ldots+$$

$$+\sum_{i=2}^{2p-2}\sum_{i_1=0}^{i-2}\begin{bmatrix}i+2\\2p\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_1+2\\i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\i_1\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i-i_1-2}}{\partial x^{i-i_1-2}}(a)\frac{\partial^{2p-i-2}}{\partial x^{2p-i-2}}(a)\frac{\partial^{i_1}}{\partial x^{i_1}}a+\sum_{i=0}^{2p-2}\begin{bmatrix}i+2\\2p\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\i\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}(a)\cdot\frac{\partial^{2p-i-2}}{\partial x^{2p-i-2}}a+\begin{bmatrix}0\\2p\end{bmatrix}\cdot\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}a+a. \quad (3.15)$$

Полученные коэффициенты заменой индекса суммирования $i \to i - 2p - 2$ можно представить в эквивалентной форме:

$$\alpha(2p+1) = 2p\frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}}(a) + \sum_{i_1=0}^{2p-2} i_1 C(2p, i_1+2)\frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x^{i_1-1}}(a)\frac{\partial^{2p-2-i_1}}{\partial x^{2p-2-i_1}}a + \sum_{i_2=0}^{2p-4}\sum_{i_1=0}^{i_2} i_1 C(2p, i_2+4)\,C(i_2+2, i_1+2)\frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x^{i_1-1}}(a)\frac{\partial^{i_2-i_1}}{\partial x^{i_2-i_1}}(a)\frac{\partial^{2p-4-i_2}}{\partial x^{2p-4-i_2}}a +$$

$$+\sum_{i_3=0}^{2p-6}\sum_{i_2=0}^{i_3}\sum_{i_1=0}^{i_2} i_1 C(2p, i_3+6)\,C(i_3+4, i_2+4)\,C(i_2+2, i_1+2)\frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x^{i_1-1}}(a)\frac{\partial^{i_2-i_1}}{\partial x^{i_2-i_1}}(a)\frac{\partial^{i_3-i_2}}{\partial x^{i_3-i_2}}(a)\frac{\partial^{2p-6-i_3}}{\partial x^{2p-6-i_3}}a +$$

$$+\sum_{i_4=0}^{2p-8}\sum_{i_3=0}^{i_4}\sum_{i_2=0}^{i_3}\sum_{i_1=0}^{i_2} i_1 C(2p, i_4+8)\,C(i_4+6, i_3+6)\,C(i_3+4, i_2+4)\,C(i_2+2, i_1+2)\frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x^{i_1-1}}(a)\frac{\partial^{i_2-i_1}}{\partial x^{i_2-i_1}}(a)\frac{\partial^{i_3-i_2}}{\partial x^{i_3-i_2}}(a)\frac{\partial^{i_4-i_3}}{\partial x^{i_4-i_3}}(a)\frac{\partial^{2p-8-i_4}}{\partial x^{2p-8-i_4}}a + \ldots;$$

$$\beta(2p+1) = 2p\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}a + \sum_{i_1=0}^{2p-2} C(2p, i_1+2)\frac{\partial^{i_1}}{\partial x^{i_1}}(a)\frac{\partial^{2p-2-i_1}}{\partial x^{2p-2-i_1}}a + \sum_{i_2=0}^{2p-4}\sum_{i_1=0}^{i_2} C(2p, i_2+4)\,C(i_2+2, i_1+2)\frac{\partial^{i_1}}{\partial x^{i_1}}(a)\frac{\partial^{i_2-i_1}}{\partial x^{i_2-i_1}}(a)\frac{\partial^{2p-4-i_2}}{\partial x^{2p-4-i_2}}a +$$

$$+\sum_{i_3=0}^{2p-6}\sum_{i_2=0}^{i_3}\sum_{i_1=0}^{i_2} C(2p, i_3+6)\,C(i_3+4, i_2+4)\,C(i_2+2, i_1+2)\frac{\partial^{i_1}}{\partial x^{i_1}}(a)\frac{\partial^{i_2-i_1}}{\partial x^{i_2-i_1}}(a)\frac{\partial^{i_3-i_2}}{\partial x^{i_3-i_2}}(a)\frac{\partial^{2p-6-i_3}}{\partial x^{2p-6-i_3}}a +$$

$$+\sum_{i_4=0}^{2p-8}\sum_{i_3=0}^{i_4}\sum_{i_2=0}^{i_3}\sum_{i_1=0}^{i_2} C(2p, i_4+8)\,C(i_4+6, i_3+6)\,C(i_3+4, i_2+4)\,C(i_2+2, i_1+2)\frac{\partial^{i_1}}{\partial x^{i_1}}(a)\frac{\partial^{i_2-i_1}}{\partial x^{i_2-i_1}}(a)\frac{\partial^{i_3-i_2}}{\partial x^{i_3-i_2}}(a)\frac{\partial^{i_4-i_3}}{\partial x^{i_4-i_3}}(a)\frac{\partial^{2p-8-i_4}}{\partial x^{2p-8-i_4}}a + \ldots.$$

Эти коэффициенты полностью определяют уравнение n-образа в виде:

$$\frac{\partial^{2p+2}}{\partial x^{2p+2}}y = \alpha(2p)\frac{\partial}{\partial x}y + \beta(2p)y. \quad (3.16)$$

4. ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ $\alpha(2p)$

Ранее было доказано, что для определения общего решения линейного ОДУ необходимо и достаточно знать только функцию $\alpha(2p)$ или $\alpha(2p+1)$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только эти функции, в частности, достаточно рассмотреть функцию $\alpha(2p)$, которая определена как функция от заданного коэффициента исходного ОДУ и ее производных, что решает поставленную задачу полного их определения.

Однако использовать эти коэффициенты в таком виде чрезвычайно сложно, поскольку они определены в виде суммы слагаемых, каждое из которых (кроме первого) является частичной суммируемой последовательностью.

Задача заключается в определении суммы этих частичных суммируемых последовательностей, как функций от параметра p, так как только в таком виде их можно использовать в рамках данной теории. Поэтому представим коэффициенты $\alpha(2p)$ в виде:

$$\alpha(2p) = \sum_{k=0}^{p-1}\xi_k(2p). \quad (4.1)$$

Здесь

$$\xi_0(2p) = 2p\,\frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}}\,a, \tag{4.2}$$

$$\xi_1(2p) = \sum_{i_1=0}^{2p-2} i_1\,C(2p,\,i_1+2)\,\frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x^{i_1-1}}(a)\,\frac{\partial^{2p-2-i_1}}{\partial x^{2p-2-i_1}}\,a, \tag{4.3}$$

$$\xi_2(2p) = \sum_{i_2=0}^{2p-4}\sum_{i_1=0}^{i_2} i_1\,C(2p,\,i_2+4)\,C(i_2+2,\,i_1+2)\,\frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x^{i_1-1}}(a)\,\frac{\partial^{i_2-i_1}}{\partial x^{i_2-i_1}}(a)\,\frac{\partial^{2p-4-i_2}}{\partial x^{2p-4-i_2}}\,a, \tag{4.4}$$

$$\xi_3(2p) = \sum_{i_3=0}^{2p-6}\sum_{i_2=0}^{i_3}\sum_{i_1=0}^{i_2} i_1\,C(2p,\,i_3+6)\,C(i_3+4,\,i_2+4)\,C(i_2+2,\,i_1+2)\,\frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x^{i_1-1}}(a)\,\frac{\partial^{i_2-i_1}}{\partial x^{i_2-i_1}}(a)\,\frac{\partial^{i_3-i_2}}{\partial x^{i_3-i_2}}(a)\,\frac{\partial^{2p-6-i_3}}{\partial x^{2p-6-i_3}}\,a, \tag{4.5}$$

$$\xi_4(2p) = \sum_{i_4=0}^{2p-8}\sum_{i_3=0}^{i_4}\sum_{i_2=0}^{i_3}\sum_{i_1=0}^{i_2} i_1\,C(2p,\,i_4+8)\,C(i_4+6,\,i_3+6)\,C(i_3+4,\,i_2+4)\,C(i_2+2,\,i_1+2)\,\frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x^{i_1-1}}(a)\,\frac{\partial^{i_2-i_1}}{\partial x^{i_2-i_1}}(a)\,\frac{\partial^{i_3-i_2}}{\partial x^{i_3-i_2}}(a)\,\frac{\partial^{i_4-i_3}}{\partial x^{i_4-i_3}}(a)\,\frac{\partial^{2p-8-i_4}}{\partial x^{2p-8-i_4}}\,a, \tag{4.6}$$

и так далее

$$\xi_s(2p) = \sum_{i_1=[i_s,\,i_1]}^{[2p-2s,\,i_1,\,i_2]} i_1\,C(2p,\,i_s+2s)\prod_{k=2}^{s-1} C(i_k+2(k-1),\,i_1+2(k-1))\,\frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x^{i_1-1}}(a)\,\frac{\partial^{i_k-i_{k-1}}}{\partial x^{i_k-i_{k-1}}}(a)\,\frac{\partial^{2p-2s-i_s}}{\partial x^{2p-2s-i_s}}\,a. \tag{4.7}$$

Анализ полученных равенств позволяет установить главное их свойство, определяемое как **Утверждение 4.1.** **Каждое слагаемое $\xi_k(2p)$, начиная с $\xi_1(2p)$, определяется предыдущим значением $\xi_{k-1}(2p)$ по формуле**

$$\xi_k(2p) = \sum_{i_k=0}^{2p-2k} \xi_{k-1}(i_k+2k-2)\,C(2p,\,i_k+2k)\,\frac{\partial^{2p-2k-i_k}}{\partial x^{2p-2k-i_k}}\,a. \tag{4.8}$$

Доказательство. Произведя замену в (4.2) индекса по формуле $p = \frac{i_1}{2}$, получим:

$$\xi_0(i_1) = i_1\,\frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x^{i_1-1}}\,a. \tag{4.9}$$

Тогда $\xi_1(2p)$ в соответствии с (4.3) можно представить в форме:

$$\xi_1(2p) = \sum_{i_1=0}^{2p-2} \xi_0(i_1)\,C(2p,\,i_1+2)\,\frac{\partial^{2p-2-i_1}}{\partial x^{2p-2-i_1}}\,a. \tag{4.10}$$

Снова производя замену параметра по формуле $p = \frac{i_2}{2}$ в (4.3), получаем:

$$\xi_1(i_2) = \sum_{i_1=0}^{i_2-2} i_1\,C(i_2,\,i_1+2)\,\frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x^{i_1-1}}(a)\,\frac{\partial^{i_2-i_1-2}}{\partial x^{i_2-i_1-2}}\,a.$$

Тогда $\xi_2(2p)$ из (4.4) можно представить следующим образом:

$$\xi_2(2p) = \sum_{i_2=0}^{2p-1} \xi_1(i_2+2)\, C(2p,\, i_2+4) \frac{\partial^{2p-4-i_2}}{\partial x^{2p-4-i_2}} a. \tag{4.11}$$

Совершенно аналогичным образом для представлений (4.5), (4.6) имеем:

$$\xi_3(2p) = \sum_{i_3=0}^{2p-6} \xi_2(i_3+4)\, C(2p,\, i_3+6) \frac{\partial^{2p-6-i_3}}{\partial x^{2p-6-i_3}} a; \tag{4.12}$$

$$\xi_4(2p) = \sum_{i_4=0}^{2p-8} \xi_3(i_4+6)\, C(2p,\, i_4+8) \frac{\partial^{2p-8-i_4}}{\partial x^{2p-8-i_4}} a. \tag{4.13}$$

Тогда для представления (4.8) имеем:

$$\xi_s(2p) = \sum_{i_s=0}^{2p-2s} \xi_{s-1}(i_s+2s-2)\, C(2p,\, i_s+2s) \frac{\partial^{2p-2s-i_s}}{\partial x^{2p-2s-i_s}} a. \tag{4.14}$$

Очевидно, что

$$\xi_{s-1}(2p) = \sum_{i_{s-1}=0}^{2p-2s+2} \xi_{s-2}(i_{s-1}+2s-4)\, C(2p,\, i_{s-1}+2s-2) \frac{\partial^{2p-2s+2-i_{s-1}}}{\partial x^{2p-2s+2-i_{s-1}}} a \tag{4.15}$$

$$\xi_{s-2}(2p) = \sum_{i_{s-2}=0}^{2p-2s+4} \xi_{s-3}(i_{s-2}+2s-6)\, C(2p,\, i_{s-2}+2s-4) \frac{\partial^{2p-2s+4-i_{s-2}}}{\partial x^{2p-2s+4-i_{s-2}}} a \tag{4.16}$$

$$\xi_2(2p) = \sum_{i_2=0}^{2p-4} \xi_1(i_2+2)\, C(2p,\, i_2+4) \frac{\partial^{2p-4-i_2}}{\partial x^{2p-4-i_2}} a$$

$$\xi_1(2p) = \sum_{i_1=0}^{2p-2} \xi_0(i_1)\, C(2p,\, i_1+2) \frac{\partial^{2p-2-i_1}}{\partial x^{2p-2-i_1}} a$$

$$\xi_0(2p) = 2p \frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}} a.$$

Подставляя последовательно в (4.14) равенства (4.15), (4.16) и так далее до (4.13), (4.12), (4.11), (4.10), (4.9), в итоге получим формулу (4.7). Утверждение 4.1 доказано.

После замены параметра p на $p + \frac{1}{2}$, формула (4.8) принимает вид:

$$\xi_k(2p+1) = \sum_{i_k=0}^{2p-2k+1} \xi_{k-1}(i_k+2k-2)\, C(2p+1,\, i_k+2k) \frac{\partial^{2p-2k-i_k+1}}{\partial x^{2p-2k-i_k+1}} a. \tag{4.17}$$

То есть получена формула для нахождения нечетных значений $\xi_k(2p+1)$.

Форму определения слагаемых $\xi_k(2p)$ в представлении (4.8) в дальнейшем будем называть **интегральной**. Очевидно, что существует и обратное представление. После проведения замены индекса суммирования по формуле: $i_k = 2p - 2k - i$ и далее после замены $k = p - s$, в формулах (4.8) и (4.17) получаем равенства:

$$\xi_{p-s}(2p) = \sum_{i=0}^{2s} \xi_{p-s-1}(2p - i - 2)\, C(2p, i) \frac{\partial^i}{\partial x^i} a, \tag{4.18}$$

$$\xi_{p-s}(2p+1) = \sum_{i=0}^{2s+1} \xi_{p-s-1}(2p - 2s - 2 + i)\, C(1 + 2p, 2p - 2s + i) \frac{\partial^{2s-i+1}}{\partial x^{2s-i+1}} a, \tag{4.19}$$

$$s = 0, 1, 2, 3, \ldots, p.$$

Данное представление будем называть **дифференциальным**. В то время как интегральное представление (4.8) позволяет определять последовательно $\xi_0(2p)$, $\xi_1(2p)$, $\xi_2(2p)$ ... $\xi_p(2p)$, то дифференциальное (4.18), (4.19) последовательно $\xi_p(2p)$, $\xi_{p-1}(2p)$, $\xi_{p-2}(2p)$ ... $\xi_0(2p)$, $\xi_p(-1 + 2p)$, $\xi_{p-1}(-1 + 2p)$ ... $\xi_0(-1 + 2p)$. Таким образом, вычислять коэффициенты n-образа можно двумя, в принципе, равноправными способами.

Проанализируем полученные результаты для слагаемых $\xi_k(2p)$:

1) Количество слагаемых $\xi_k(2p)$ конечно.
2) Известно только значение нулевого, т. е. первого слагаемого:

$$\xi_0(2p) = 2p \frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}} a.$$

3) Вычисление слагаемых $\xi_k(2p)$, $k = 1, 2, 3...$ требует нахождения частичных сумм, в соответствии с формулами (4.8), а вычисление $\xi_{p-1}(2p)$, $\xi_{p-2}(2p)$ ... $\xi_1(2p)$ по формуле (4.18) требует решения последовательно рекуррентных уравнений исходя из начального условия $\xi_p(2p) = 0$, которое необходимо установить.

Интегральный способ производится следующим образом:

— вычисление слагаемых от известного нулевого $\xi_0(2p)$ к $\xi_1(2p)$ по формуле

$$\xi_1(2p) = \sum_{i_1=0}^{2p-2} \xi_0(i_1)\, C(2p, i_1 + 2) \frac{\partial^{2p-2-i_1}}{\partial x^{2p-2-i_1}} a,$$

от $\xi_1(2p)$ к $\xi_2(2p)$ по формуле

$$\xi_2(2p) = \sum_{i_2=0}^{2p-4} \xi_1(i_2 + 2)\, C(2p, i_2 + 4) \frac{\partial^{2p-4-i_2}}{\partial x^{2p-4-i_2}} a$$

и так далее в соответствии с формулой (4.8).

Дифференциальный способ производится обратным способом, который заключается в следующем:

— используя формулу (4.18), показываем, что

$$\xi_p(2p) = 0. \tag{4.20}$$

Доказательство. Примем в (4.18) $s = 0$. Тогда она примет вид:

$$\xi_p(2p) = \xi_{p-1}(-2 + 2p)\, a.$$

Принимая

$$\xi_p(2p) = b(p),\ \xi_{p-1}(2p-2) = b(p-1),$$

получаем рекуррентное уравнение

$$b(p) = b(p-1)\,a.$$

Его решением будет функция

$$\xi_p(2p) = a^p\,\xi_0(0).$$

Так как

$$\xi_0(2p) = 2p\,\frac{\partial^{-1+2p}}{\partial x^{-1+2p}}\,a,$$

то

$$\xi_0(0) = 0,$$

поэтому

$$\xi_p(2p) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Примем в (4.18) $s = 1$. Тогда эта формула после преобразований будет иметь вид:

$$\xi_{p-1}(2p) = \xi_{p-2}(-2+2p)\,a + 2\xi_{p-2}(-3+2p)\,p\,\frac{\partial}{\partial x}\,a + \xi_{p-2}(-4+2p)\,C(2p,2)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,a. \tag{4.21}$$

Заменим параметр p на $p-2$ в формуле (4.20). Тогда получим равенство

$$\xi_{p-2}(2p-4) = 0.$$

Поскольку

$$\xi_{p-2}(2p-2) = \{\xi_{p-1}(2p)\}_{p=p-1},$$

то (4.21) примет вид:

$$\xi_{p-1}(2p) = \{\xi_{p-1}(2p)\}_{p=p-1}\,a + 2\,\xi_{p-2}(2p-3)\,p\,\frac{\partial}{\partial x}\,a. \tag{4.22}$$

Для вычисления $\xi_{p-2}(2p-3)$ воспользуемся формулой, следующей из (4.19). Принимая в ней $s = 0$, имеем:

$$\xi_p(2p+1) = \xi_{p-1}(-2+2p)(2p+1)\left(\frac{\partial}{\partial x}\,a\right) + \xi_{p-1}(-1+2p)\,a.$$

Так как в соответствии с (4.20) $\xi_{p-1}(-2+2p) = 0$, то имеем рекуррентное уравнение

$$\xi_p(2p+1) = \xi_{p-1}(-1+2p)\,a.$$

Его общее решение имеет вид:

$$\xi_p(2p+1) = \xi_0(1)\,a^p. \tag{4.23}$$

Из формулы

$$\xi_0(2p) = 2p\,\frac{\partial^{-1+2p}}{\partial x^{-1+2p}}\,a \tag{4.24}$$

при $p = \frac{1}{2}$ следует, что

$$\xi_0(1) = a,$$

тогда из (4.23) окончательно получим:

$$\xi_p(2p + 1) = a^{(p+1)}, \tag{4.25}$$

заменяя здесь параметр p на $p - 2$, имеем:

$$\xi_{p-2}(2p - 3) = a^{(p-1)}$$

и, следовательно, из (4.22) следует рекуррентное уравнение

$$\xi_{p-1}(2p) = \xi_{p-2}(-2 + 2p)\,a + 2a^{(p-1)}p\,\frac{\partial}{\partial x}a.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\xi_{p-1}(2p) = a^{(p-1)}p(p+1)\frac{\partial}{\partial x}a + \xi_{-1}(0)\,a^p. \tag{4.26}$$

Принимая в этом уравнении $p = 1$, имеем:

$$\xi_0(2) = 2\frac{\partial}{\partial x}a + \xi_{-1}(0)\,a. \tag{4.27}$$

Так как в соответствии с (4.24)

$$\xi_0(2) = 2\frac{\partial}{\partial x}a,$$

то из (4.27) находим:

$$\xi_{-1}(0) = -\frac{-2\frac{\partial}{\partial x}a + 2\frac{\partial}{\partial x}a}{a} = 0.$$

Таким образом, общая формула (4.26) имеет вид:

$$\xi_{p-1}(2p) = a^{(p-1)}p(p+1)\left(\frac{\partial}{\partial x}a\right). \tag{4.28}$$

Совершенно аналогичным подходом получаем:

$$\xi_{p-2}(2p) = \frac{1}{6}\cdot\left(2a^{(p-2)}p^2(p-1)(p+1)\frac{\partial^3}{\partial x^3}a + 4a^{(p-3)}p^2(p-1)(p-2)(p+1)\frac{\partial}{\partial x}a\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}a + a^{(p-4)}p^2(p-1)(p-2)(p-3)(p+1)\left(\frac{\partial}{\partial x}a\right)^3\right) \tag{4.29}$$

и так далее.

Выводы. Полученные формулы, в отличие от интегрального подхода, позволяют установить значение коэффициента только в одной заданной точке для каждой функции из последовательности:

$$\xi_1(2p),\ \xi_2(2p),\ \xi_3(2p)\ \ldots\ \xi_{p-1}(2p),$$

поэтому здесь параметр p не может иметь отрицательные значения, так как получаются такие значения коэффициентов, которые не существуют (например: приняв в $\xi_{p-1}(2p)$, $p = -1$, получим $\xi_{-2}(-2)$, но такие значения коэффициента не требуются для дальнейшего изложения теории, т. е. не имеют смысла). Следовательно, данный подход можно использовать для построения теории решения ДУ только при условии, что будет установлен общий член: $\xi_{p-s}(2p)$, $s = 1, 2, 3, 4\ldots$ В этом случае заменой $p = k + s$ приходим к стандартному выражению: $\xi_k(2k - 2s)$, которое уже имеет смысл и для отрицательных значений аргумента $2k - 2s$. Это в принципе определяет одинаковую по сложности задачу с интегральным подходом, которому предоставим преимущество.

Примечание. Так как формулы (4.8) и (4.18) эквивалентны, то имеет место формула

$$\sum_{i=0}^{2p-2k}\left(\xi_{k-1}(i+2k-2)\,C(2p,\,i+2k)\frac{\partial^{2p-2k-i}}{\partial x^{2p-2k-i}}a - \xi_{k-1}(2p-i-2)\,C(2p,\,2p-i)\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}a\right) = 0.$$

5. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ $\xi_k(2p)$, $k = 1, 2, 3\ldots$

Изложим практический алгоритм определения слагаемых $\xi_k(2p)$, $k = 1, 2, 3\ldots$

5.1. Нахождение слагаемого $\xi_1(2p)$

Так как $\xi_0(2p)$ известно, то в соответствии с формулой (4.8) имеем для $k = 1$

$$\xi_1(2p) = \sum_{i=0}^{-2+2p}\xi_0(i)\,C(2p,\,i+2)\frac{\partial^{2p-2-i}}{\partial x^{2p-2-i}}a. \tag{5.1}$$

Поскольку

$$\xi_0(2p) = 2p\frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}}a,$$

то подстановкой $p = \dfrac{i}{2}$ эта формула приводится к виду:

$$\xi_0(i) = i\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}}a.$$

Тогда

$$\xi_1(2p) = \sum_{i=0}^{2p-2} i\,C(2p,\,i+2)\frac{\partial^{i-1}}{\partial x^{i-1}}(a)\frac{\partial^{2p-2-i}}{\partial x^{2p-2-i}}a. \tag{5.2}$$

Вычислим значение этой суммы. Для этого произведем замену переменных индекса суммирования i на $i - 2$. Тогда (5.2) примет вид:

$$\xi_1(2p) = \sum_{i=2}^{2p}(i-2)\,C(2p,\,i)\frac{\partial^{i-3}}{\partial x^{i-3}}(a)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a.$$

Это равенство представим в виде:

$$\xi_1(2p) = \sum_{i=0}^{2p}(i-2)\,C(2p,\,i)\frac{\partial^{i-3}}{\partial x^{i-3}}(a)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a - \sum_{i=0}^{1}(i-2)\,C(2p,\,i)\frac{\partial^{i-3}}{\partial x^{i-3}}(a)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a. \tag{5.3}$$

Преобразуем первое слагаемое

$$\sum_{i=0}^{2p}(i-2)\frac{\partial^{i-3}}{\partial x^{i-3}}(a)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a=\sum_{i=0}^{2p}i\,C(2p,\,i)\frac{\partial^{i-3}}{\partial x^{i-3}}(a)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a-2\sum_{i=0}^{2p}C(2p,\,i)\frac{\partial^{i-3}}{\partial x^{i-3}}(a)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a=$$
$$=\sum_{i=0}^{2p}i\,C(2p,\,i)\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\left(\iiint a\,dx\,dx\,dx\right)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a-2\sum_{i=0}^{2p}C(2p,\,i)\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\left(\iiint a\,dx\,dx\,dx\right)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a,$$

так как в соответствии с основной теоремой (часть 1)

$$\frac{d^{-3}}{dx^{-3}}a=\iiint a\,dx\,dx\,dx.$$

Второе слагаемое из полученного равенства находим, пользуясь формулой Лейбница:

$$\sum_{i=0}^{2p}C(2p,\,i)\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\left(\iiint a\,dx\,dx\,dx\right)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a=\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(a\iiint a\,dx\,dx\,dx\right).\qquad(5.4)$$

Установим значение выражения:

$$\sum_{i=0}^{2p}i\,C(2p,\,i)\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\left(\iiint a\,dx\,dx\,dx\right)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a.\qquad(5.5)$$

Так как выражение (5.5) представляет собой воздействие оператора Лейбница функций a, $\iiint a\,dx\,dx\,dx$ и параметра $2p$ на индекс i, т. е.:

$$\sum_{i=0}^{2p}i\,C(2p,\,i)\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\left(\iiint a\,dx\,dx\,dx\right)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a=L[i],$$

то в соответствии с формулой (1.7) устанавливаем, что

$$\sum_{i=0}^{2p}i\,C(2p,\,i)\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\left(\iiint a\,dx\,dx\,dx\right)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a=2p\,\frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}}\left(a\iint a\,dx\,dx\right).\qquad(5.6)$$

Таким образом, итоговая формула для второго коэффициента принимает вид:

$$\xi_1(2p)=2p\,\frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}}\left(a\iint a\,dx\,dx\right)-2\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(a\iiint a\,dx\,dx\,dx\right)+2\iiint a\,dx\,dx\,dx\,\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}a+2p\iint a\,dx\,dx\,\frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}}a.\qquad(5.7)$$

П р и м е ч а н и е. Формально это дает также значение частичной суммы:

$$\sum_{i_1=0}^{2p-2}i_1\,C(2p,\,i_1+2)\frac{\partial^{i_1-1}}{\partial x^{i_1-1}}(a)\frac{\partial^{2p-2-i_1}}{\partial x^{2p-2-i_1}}a=2p\,\frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}}\left(a\iint a\,dx\,dx\right)-2\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(a\iiint a\,dx\,dx\,dx\right)+2\iiint a\,dx\,dx\,dx\,\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}a+2p\iint a\,dx\,dx\,\frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}}a.$$

5.2. Вычисление $\xi_2\,(2p)$

Пользуясь рекуррентной формулой (4.8), имеем:

$$\xi_2(2p)=\sum_{i_2=0}^{2p-4}\xi_1(i_2+2)\,C(2p,\,i_2+4)\,\frac{\partial^{2p-4-i_2}}{\partial x^{2p-4-i_2}}\,a. \tag{5.8}$$

Произведем замену индекса суммирования i_2 на $i-4$. Это позволяет преобразовать данную формулу к виду:

$$\xi_2(2p)=\sum_{i=4}^{2p}\xi_1(i-2)\,C(2p,\,i)\,\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\,a=\sum_{i=0}^{2p}\xi_1(i-2)\,C(2p,\,i)\,\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\,a-\sum_{i=0}^{3}\xi_1(i-2)\,C(2p,\,i)\,\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\,a. \tag{5.9}$$

Заменой параметра

$$p=\frac{i-2}{2}$$

формула (5.7) преобразуется к виду:

$$\xi_1(i-2)=\frac{\partial^{i-3}}{\partial x^{i-3}}\Big(a\iint a\,dx\,dx\Big)\,i-2\,\frac{\partial^{i-3}}{\partial x^{i-3}}\Big(a\iint a\,dx\,dx\Big)-2\,\frac{\partial^{i-2}}{\partial x^{i-2}}\Big(a\iiint a\,dx\,dx\,dx\Big)+2\iiint a\,dx\,dx\,dx\,\frac{\partial^{i-2}}{\partial x^{i-2}}\,a+i\iint a\,dx\,dx\,\frac{\partial^{i-3}}{\partial x^{i-3}}\,a-2\iint a\,dx\,dx\,\frac{\partial^{i-3}}{\partial x^{i-3}}\,a$$

или

$$\xi_1(i-2)=i\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\left(\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\right)-2\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\left(\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\right)-2\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\left(\iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\right)+2\iiint a\,dx\,dx\,dx\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\Big(\iint a\,dx\,dx\Big)+$$
$$+\,i\iint a\,dx\,dx\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\Big(\iiint a\,dx\,dx\,dx\Big)-2\iint a\,dx\,dx\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\Big(\iiint a\,dx\,dx\,dx\Big).$$

Таким образом равенство (5.9) принимает вид:

$$\xi_2(2p)=\sum_{i=0}^{2p}\left(\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\left(\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\right)i-2\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\left(\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\right)-2\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\left(\iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\right)+2\iiint a\,dx\,dx\,dx\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\Big(\iint a\,dx\,dx\Big)+\right.$$
$$\left.+\iint a\,dx\,dx\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\Big(\iiint a\,dx\,dx\,dx\Big)\,i-2\iint a\,dx\,dx\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\Big(\iiint a\,dx\,dx\,dx\Big)\,C(2p,\,i)\,\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\,a\right)-$$
$$-\sum_{i=0}^{3}\left(\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\left(\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\right)i-2\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\left(\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\right)-2\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\left(\iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\right)+2\iiint a\,dx\,dx\,dx\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\Big(\iint a\,dx\,dx\Big)+\right.$$
$$\left.+\iint a\,dx\,dx\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\Big(\iiint a\,dx\,dx\,dx\Big)\,i-2\iint a\,dx\,dx\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\Big(\iiint a\,dx\,dx\,dx\Big)\,C(2p,\,i)\,\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\,a\right). \tag{5.10}$$

Первое слагаемое в правой части (5.10) представляется в виде:

$$\sum_{i=0}^{2p}\left(\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\left(\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\right)i-2\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\left(\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\right)-2\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\left(\iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\right)+2\iiint a\,dx\,dx\,dx\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\Big(\iint a\,dx\,dx\Big)+\right.$$
$$\left.+\iint a\,dx\,dx\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\Big(\iiint a\,dx\,dx\,dx\Big)\,i-2\iint a\,dx\,dx\,\frac{\partial^{i}}{\partial x^{i}}\Big(\iiint a\,dx\,dx\,dx\Big)\,C(2p,\,i)\,\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\,a\right)=$$

$$= \sum_{i=0}^{2p} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\iiint a \iint a\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx \right) i\, C(2p,\, i) \frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\, a - 2 \sum_{i=0}^{2p} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\iiint a \iint a\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx \right) C(2p,\, i) \frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\, a -$$

$$- 2 \sum_{i=0}^{2p} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\iint a \iiint a\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx \right) C(2p,\, i) \frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\, a + 2 \iiint a\, dx\, dx\, dx \sum_{i=0}^{2p} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\iint a\, dx\, dx \right) C(2p,\, i) \frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\, a +$$

$$+ \iint a\, dx\, dx \sum_{i=0}^{2p} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\iiint a\, dx\, dx\, dx \right) i\, C(2p,\, i) \frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\, a - 2 \iint a\, dx\, dx \sum_{i=0}^{2p} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\iiint a\, dx\, dx\, dx \right) C(2p,\, i) \frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\, a.$$

Пользуясь формулой (5.6) и формулой Лейбница, нетрудно установить справедливость равенств:

$$\sum_{i=0}^{2p} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\iiint a \iint a\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx \right) i\, C(2p,\, i) \frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\, a = 2p \frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}} \left(a \iint a \iint a\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx \right), \tag{5.11}$$

$$\sum_{i=0}^{2p} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\iiint a \iint a\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx \right) C(2p,\, i) \frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\, a = \frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}} \left(a \iiint a \iint a\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx \right), \tag{5.12}$$

$$\sum_{i=0}^{2p} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\iint a \iiint a\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx \right) C(2p,\, i) \frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\, a = \frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}} \left(a \iint a \iiint a\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx \right), \tag{5.13}$$

$$\sum_{i=0}^{2p} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\iint a\, dx\, dx \right) C(2p,\, i) \frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\, a = \frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}} \left(a \iint a\, dx\, dx \right),$$

$$\sum_{i=0}^{2p} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\iiint a\, dx\, dx\, dx \right) i\, C(2p,\, i) \frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\, a = 2p \frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}} \left(a \iint a\, dx\, dx \right),$$

$$\sum_{i=0}^{2p} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\iiint a\, dx\, dx\, dx \right) C(2p,\, i) \frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\, a = \frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}} \left(a \iiint a\, dx\, dx\, dx \right).$$

Подставляя полученные значения в (5.10), в итоге имеем искомое значение $\xi_2(2p)$.

$$\xi_2(2p) = 2 \frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}} \left(p \int a \iint a \iint a\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx - a \iiint a \iint a\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx - a \iint a \iiint a\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx \right) +$$

$$+ 2p \left(\left(\iint a\, dx\, dx \right)^2 + \iint a \iint a\, dx\, dx\, dx\, dx + 2 \int a \iiint a\, dx\, dx\, dx\, dx - 2 \iiint a\, dx\, dx\, dx \int a\, dx \right) \frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}} \left(\int a\, dx \right) +$$

$$+ 2 \iint a\, dx\, dx \frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}} \left(p \int a \iint a\, dx\, dx\, dx - a \iiint a\, dx\, dx\, dx \right) + 2 \left(\iint a \iiint a\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx + \iiint a \iint a\, dx\, dx\, dx\, dx\, dx \right) \frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\, a +$$

$$+ 2 \iiint a\, dx\, dx\, dx \frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}} \left(a \iint a\, dx\, dx \right). \tag{5.14}$$

5.3. Нахождение слагаемого $\xi_3\,(2p)$

Ввиду сложности вида $\xi_2(2p)$ введем обозначения:

$$
\begin{gathered}
k_1 = \int a \iint a \iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx, \quad k_2 = -a \iiint a \iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx - a \iint a \iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx,\\
k_3 = \left(\iint a\,dx\,dx\right)^2 + \iint a \iint a\,dx\,dx\,dx\,dx + 2\int a \iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx - 2\iiint a\,dx\,dx\,dx \int a\,dx,\\
k_4 = \int a\,dx, \quad k_5 = \iint a\,dx\,dx, \quad k_6 = \int a \iint a\,dx\,dx\,dx, \quad k_7 = -a\iiint a\,dx\,dx\,dx,\\
k_8 = \iint a \iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx + \iiint a \iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx, \quad k_9 = \iiint a\,dx\,dx\,dx, \quad k_{10} = a\iint a\,dx\,dx.
\end{gathered} \tag{5.15}
$$

В этом случае формула (5.14) для $\xi_2(2p)$ принимает вид:

$$
\xi_2(2p) = 2\,\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}(p\,k_1 + k_2) + 2pk_3\,\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\,k_4 + 2k_5\,\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}(p\,k_6 + k_7) + 2k_8\,\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\,a + 2k_9\,\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\,k_{10}. \tag{5.16}
$$

Так как в соответствии с рекуррентной формулой (4.8)

$$
\xi_3(2p) = \sum_{i_3=0}^{2p-6} \xi_2(i_3 + 4)\,C\,(2p,\, i_3 + 6)\,\frac{\partial^{2p-6-i_3}}{\partial x^{2p-6-i_3}}\,a, \tag{5.17}
$$

то заменой индекса суммирования i_3 на $i - 6$ оно приводится к виду:

$$
\xi_3(2p) = \sum_{i=0}^{2p} \xi_2(i-2)\,C\,(2p,\, i)\,\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\,a - \sum_{i=0}^{5} \xi_2(i-2)\,C\,(2p,\, i)\,\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\,a. \tag{5.18}
$$

В этом случае равенство (5.16) подстановкой $p = \dfrac{i-2}{2}$ приводится к виду:

$$
\xi_2(i-2) = 2\,\frac{\partial^{i-2}}{\partial x^{i-2}}\left(\frac{k_1 i}{2} - k_1 + k_2\right) + k_3\,\frac{\partial^{i-2}}{\partial x^{i-2}}(k_4)\,i - 2k_3\,\frac{\partial^{i-2}}{\partial x^{i-2}}\,k_4 + 2k_5\,\frac{\partial^{i-2}}{\partial x^{i-2}}\left(\frac{k_6 i}{2} - k_6 + k_7\right) + 2k_8\,\frac{\partial^{i-2}}{\partial x^{i-2}}\,a + 2k_9\,\frac{\partial^{i-2}}{\partial x^{i-2}}\,k_{10}
$$

или в приведенной для вычислений форме:

$$
\begin{gathered}
\xi_2(i-2) = i\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_1\,dx\,dx\right) + 2\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint (k_2 - k_1)\,dx\,dx\right) + k_3\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_4\,dx\,dx\right) i - 2k_3\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_4\,dx\,dx\right) + k_5\,i\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_6\,dx\,dx\right) +\\
+ 2k_5\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint (k_7 - k_6)\,dx\,dx\right) + 2k_8\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint a\,dx\,dx\right) + 2k_9\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_{10}\,dx\,dx\right).
\end{gathered}
$$

Подставляя это равенство в (5.18), получим:

$$
\begin{gathered}
\xi_3(2p) = \sum_{i=0}^{2p}\left(i\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_1\,dx\,dx\right) + 2\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint (k_2 - k_1)\,dx\,dx\right) + k_3\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_4\,dx\,dx\right) i - 2k_3\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_4\,dx\,dx\right) + k_5\,i\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_6\,dx\,dx\right) +\right.\\
\left. + 2k_5\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint (k_7 - k_6)\,dx\,dx\right) + 2k_8\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint a\,dx\,dx\right) + 2k_9\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_{10}\,dx\,dx\right) C\,(2p,\, i)\,\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\,a\right) -
\end{gathered}
$$

$$-\sum_{i=0}^{5}\left(i\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_1\,dx\,dx\right)+2\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint(k_2-k_1)\,dx\,dx\right)+k_3\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_4\,dx\,dx\right)i-2k_3\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_4\,dx\,dx\right)+k_5\,i\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_6\,dx\,dx\right)+\right.$$

$$\left.+2k_5\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint(k_7-k_6)\,dx\,dx\right)+2k_8\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint a\,dx\,dx\right)+2k_9\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_{10}\,dx\,dx\right)C(2p,i)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a\right).$$

Так как

$$\sum_{i=0}^{2p} i\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_1\,dx\,dx\right)C(2p,i)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a = 2p\frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}}\left(a\int k_1\,dx\right)$$

$$2\sum_{i=0}^{2p}\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint(k_2-k_1)\,dx\,dx\right)C(2p,i)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a = 2\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(a\iint(k_2-k_1)\,dx\,dx\right)$$

$$k_3\sum_{i=0}^{2p}\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_4\,dx\,dx\right)i\,C(2p,i)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a = 2k_3p\frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}}\left(a\int k_4\,dx\right)$$

$$-2k_3\sum_{i=0}^{2p}\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_4\,dx\,dx\right)C(2p,i)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a = -2k_3\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(a\iint k_4\,dx\,dx\right)$$

$$k_5\sum_{i=0}^{2p} i\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_6\,dx\,dx\right)C(2p,i)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a = 2k_5p\frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}}\left(a\int k_6\,dx\right)$$

$$2k_5\sum_{i=0}^{2p}\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint(k_7-k_6)\,dx\,dx\right)C(2p,i)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a = 2k_5\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(a\iint(k_7-k_6)\,dx\,dx\right)$$

$$2k_8\sum_{i=0}^{2p}\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint a\,dx\,dx\right)C(2p,i)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a = 2k_8\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(a\iint a\,dx\,dx\right)$$

$$2k_9\sum_{i=0}^{2p}\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\iint k_{10}\,dx\,dx\right)C(2p,i)\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}a = 2k_9\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(a\iint k_{10}\,dx\,dx\right),$$

то после преобразований, с учетом (5.15), получаем итоговую формулу

$$\xi_3(2p) = -2\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}(q_1-pq_2)+2q_3\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(p\int a\iint a\,dx\,dx\,dx-a\iiint a\,dx\,dx\,dx\right)+2q_4\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(a\iint a\,dx\,dx\right)+2pq_5\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(\int a\,dx\right)+2q_6\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}a+$$

$$+2\iint a\,dx\,dx\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}(q_7p+q_8)+2\iiint a\,dx\,dx\,dx\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\right), \tag{5.19}$$

здесь

$$q_1 = a\iint a\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx+a\iint a\iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx+a\iiint a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx$$

$$q_2 = \int a\iint a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx$$

$$q_3 = \left(\iint a\,dx\,dx\right)^2 + \iint a \iint a\,dx\,dx\,dx\,dx + 2\int a \iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx - 2\iiint a\,dx\,dx\,dx \int a\,dx$$

$$q_4 = \iint a \iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx + \iiint a \iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx$$

$$q_5 = 2\int a \iint a \iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx + 2\int a \iiint a \iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx + \left(\iint a\,dx\,dx\right)^3 + 2\iint a \iint a\,dx\,dx\,dx\,dx \iint a\,dx\,dx +$$
$$+ 4\int a \iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx \iint a\,dx\,dx - 2\int a\,dx \iiint a \iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx - 2\int a \iint a\,dx\,dx\,dx \iiint a\,dx\,dx\,dx - 2\int a\,dx \iint a \iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx -$$
$$- 2\iiint a\,dx\,dx\,dx \int a\,dx \iint a\,dx\,dx + \iint a \iint a \iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx$$

$$q_6 = \left(\iint a\,dx\,dx\right)^2 \iiint a\,dx\,dx\,dx - 2\int a\,dx \left(\iiint a\,dx\,dx\,dx\right)^2 + 2\int a \iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx \iiint a\,dx\,dx\,dx + \iiint a \iint a \iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx +$$
$$+ \iint a \iiint a \iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx + \iint a \iint a \iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx$$

$$q_7 = \int a \iint a \iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx$$

$$q_8 = -a \iint a \iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx - a \iiint a \iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx.$$

Действуя совершенно аналогичным образом, можно установить и все последующие слагаемые $\xi_k(2p)$, $k = 4, 5, 6 .. p$.

Как видим, с увеличением номера k, вид формулы $\xi_k(2p)$ становится все более громоздким, что говорит об их значительной информационной содержательности.

5.4. Общая формула для определения коэффициентов $\xi_k(p)$

С целью упрощения, заменой параметра p на $\frac{p}{2}$, во всех формулах для $\xi_k(2p)$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ перейдем к представлению $\xi_k(p)$, $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$.

Докажем, что справедлива **ТЕОРЕМА 5.4: Функции $\xi_k(p)$, $k = 1, 2, 3$ .. определяются рекуррентной формулой**

$$\xi_k(p) = \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(p\int G_k(a)\,dx - 2P_k(a)\right) - \sum_{s=0}^{k-1} \xi_{k-s-1}(-1)\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(p\int G_s(a)\,dx - 2P_s(a)\right) - \sum_{s=0}^{k-1}\xi_{k-s-1}(-2)\frac{\partial^p}{\partial x^p}G_s(a), \tag{5.20}$$

где $\xi_s(-1) = \{\xi_s(p)\}_{p=-1}$; $\xi_s(-2) = \{\xi_s(p)\}_{p=-2}$; $G_i(a)$ — интегральный оператор, действующий на заданную функцию $a = a(x)$ в соответствии с правилами:

$$G_0(a) = a \tag{5.21}$$

$$G_1(a) = a\iint a\,dx\,dx \tag{5.22}$$

$$\boldsymbol{G_2(a) = G_1(G_1(a)) = a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx} \quad (5.23)$$

$$\boldsymbol{G_3(a) = G_1(G_1(G_1(a))) = a\iint a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx}$$

и так далее.

Оператор $P_k(a)$ при $k = 0$ определяется условием

$$\boldsymbol{P_0(a) = 0.} \quad (5.24)$$

Он действует на заданную функцию a по правилу

$$\boldsymbol{P_k(a) = \sum_{i=0}^{k-1} G_{k-i}\left(\int G_i(a)\,dx\right), \quad k = 1, 2, 3.} \quad (5.25)$$

Примечание. Здесь имеется в виду, что оператор G_{k-i} воздействует на $\int G_i(a)\,dx$, а не просто записан рядом как произведение.

Доказательство. Произведем его в два этапа.

Этап 1. Покажем, что формула (5.20) дает значения $\xi_k(p)$, которые совпадают с теми, что установлены интегральным способом. В частности, получим из (5.20) формулы (4.2), (5.7), (5.14), (5.19).

Действительно, принимая в (5.20) $k = 0$, имеем:

$$\xi_0(p) = \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(p\int G_0(a)\,dx - 2P_0(a)\right). \quad (5.26)$$

Так как в соответствии с (5.21) $G_0(a) = a$, а в соответствии с (5.24) $P_0(a) = 0$, то (5.26) принимает вид:

$$\xi_0(p) = \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(p\int a\,dx\right). \quad (5.27)$$

Так как операция интегрирования записывается через операцию дифференцирования в соответствии с основной теоремой по формуле:

$$\int a\,dx = \frac{\partial^{-1}}{\partial x^{-1}}a,$$

то (5.27) принимает вид:

$$\xi_0(p) = p\frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}}a. \quad (5.28)$$

Это полностью совпадает с известным представлением (4.2):

Примем в (5.20) $k = 1$:

$$\xi_1(p) = \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(p\int G_1(a)\,dx - 2P_1(a)\right) - \xi_0(-1)\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(p\int G_0(a)\,dx - 2P_0(a)\right) - \xi_0(-2)\frac{\partial^p}{\partial x^p}G_0(a). \quad (5.29)$$

Так как в соответствии с (5.22)

$$G_0(a) = a, \quad G_1(a) = a\iint a\,dx\,dx,$$

а в соответствии с (5.24), (5.25):

$$P_0(a) = 0 \quad P_1(a) = G_1\left(\int G_0(a)\,dx\right) = a\iiint a\,dx\,dx\,dx,$$

то, принимая в (5.28) последовательно $p = -1$, $p = -2$, получаем равенства:

$$\xi_0(-1) = -\frac{\partial^{-2}}{\partial x^{-2}}a = -\iint a\,dx\,dx, \quad \xi_0(-2) = -2\frac{\partial^{-3}}{\partial x^{-3}}a = -2\iiint a\,dx\,dx\,dx,$$

которые подставляем в (5.29), что дает:

$$\xi_1(p) = \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(p\int a\iint a\,dx\,dx\,dx - 2a\iiint a\,dx\,dx\,dx\right) + \iint a\,dx\,dx\,\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(p\int a\,dx\right) + 2\iiint a\,dx\,dx\,dx\,\frac{\partial^p}{\partial x^p}a.$$

Отсюда с учетом равенств

$$\int a\iint a\,dx\,dx\,dx = \frac{\partial^{-1}}{\partial x^{-1}}\left(a\iint a\,dx\,dx\right), \quad \int a\,dx = \frac{\partial^{-1}}{\partial x^{-1}}a$$

следует формула

$$\xi_1(p) = p\frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}}\left(a\iint a\,dx\,dx\right) - 2\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(a\iiint a\,dx\,dx\,dx\right) + 2\iiint a\,dx\,dx\,dx\,\frac{\partial^p}{\partial x^p}a + p\iint a\,dx\,dx\,\frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}}a, \tag{5.30}$$

которая полностью совпадает с (5.7), если здесь заменить параметр p на $2p$.

Снова примем в (5.20) $k = 2$:

$$\xi_2(p) = \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(p\int G_2(a)\,dx - 2P_2(a)\right) - \sum_{s=0}^{1}\xi_{k-s-1}(-1)\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(p\int G_s(a)\,dx - 2P_s(a)\right) - \sum_{s=0}^{1}\xi_{k-s-1}(-2)\left(\frac{\partial^p}{\partial x^p}G_s(a)\right). \tag{5.31}$$

Так как в соответствии с (5.22)

$$G_0(a) = a, \quad G_1(a) = a\iint a\,dx\,dx, \quad G_2(a) = a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx,$$

а в соответствии с (5.24), (5.25):

$$P_0(a) = 0, \quad P_1(a) = G_1\left(\int G_0(a)\,dx\right) = a\iiint a\,dx\,dx\,dx,$$

$$P_2(a) = G_1\left(\int G_1(a)\,dx\right) + G_2\left(\int G_0(a)\,dx\right) = a\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx + a\iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx,$$

то, принимая в (5.30) последовательно $p = -1$, $p = -2$, получаем равенства:

$$\xi_0(-1) = -\frac{\partial^{-2}}{\partial x^{-2}}a = -\iint a\,dx\,dx, \quad \xi_0(-2) = -2\frac{\partial^{-3}}{\partial x^{-3}}a = -2\iiint a\,dx\,dx\,dx,$$

$$\xi_1(-1) = -\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx - 2\int a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx + 2\iiint a\,dx\,dx\,dx\int a\,dx - \left(\iint a\,dx\,dx\right)^2,$$

$$\xi_1(-2) = -2\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx - 2\iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx + 2\iiint a\,dx\,dx\,dx\iint a\,dx\,dx - 2\iint a\,dx\,dx\iiint a\,dx\,dx\,dx,$$

которые подставляем в (5.31), что дает:

$$\xi_2(p)=\left(\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(p\int a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx-2a\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx-2a\iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\right)\right)+$$
$$+\left(\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx+2\int a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx+\left(\iint a\,dx\,dx\right)^2-2\iiint a\,dx\,dx\,dx\int a\,dx\right)\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(p\int a\,dx\right)+$$
$$+\iint a\,dx\,dx\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(p\int a\iint a\,dx\,dx\,dx-2a\iiint a\,dx\,dx\,dx\right)+\left(2\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx+2\iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\right)\frac{\partial^p}{\partial x^p}a+$$
$$+2\iiint a\,dx\,dx\,dx\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(a\iint a\,dx\,dx\right),$$

которая полностью совпадает с (5.14), если здесь заменить параметр p на $2p$.

Совершенно аналогично доказывается, что из формулы (5.20) следует формула (5.19) и другие. Для этой цели используется **ПРОГРАММА вычисления слагаемых $\xi_k(p)$, $k = 1, 2, 3 .. p-1$ по формуле:**

$$\xi_k(p)=\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(p\int G_k(a)\,dx-2P_k(a)\right)-\sum_{s=0}^{k-1}\xi_{k-s-1}(-1)\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(p\int G_s(a)\,dx-2P_s(a)\right)-\sum_{s=0}^{k-1}\xi_{k-s-1}(-2)\left(\frac{\partial^p}{\partial x^p}G_s(a)\right).$$

```
> restart:alias(y=y(x),v=v(x),a=a(x)):k:=1: #задается номер коэффициента
> dn:= proc (n::integer, w,c) local k, Ds; global resd, x: option remember; if n = 0 then resd:= w elif 0 < n then
  resd:= diff(w,`$`(x,n)) else Ds:= w:for k to -n do Ds:=int(Ds,x) end do:Ds:=Ds+sum(c[i]*x^(-n-i)/
  (-n-i)!,i=1..-n): resd:= Ds end if: RETURN(resd) end proc:
> for k from 0 to k do
> R:=z->a*int(int(z,x),x):h[0]:=a:for l from 0 to k do h[l+1]:=R(h[l]) od: l:='l':
```

$>$ for l from 0 to $k+1$ do $f_l := \int h_l\,dx$ end do; l:='l'

$>$ for m from 0 to k do for j from 0 to $k-m$ do $q_0 := f_m$; $q_{j+1} := R(q_j)$ end do end do;

$G_{k+1} :=$ add $(q_i,\ i = 1\ ..\ k+1)$;

$G_0 := 0$;

$G_{-1} := 0$;

$G_1 := a\iiint a\,dx\,dx\,dx$;

j := 'j';

$\xi_0(-1) := -\iint a\,dx\,dx$

$\xi_0(-2) := -2\iiint a\,dx\,dx\,dx$

$>$ $\xi_k(-1) :=$ expand $(-\int f_k\,dx - 2\int G\,dx +$ add $(\xi_{k-s-1}(-1)\int f_s\,dx,\ s = 0\ ..\ k-1) +$
2add $(\xi_{k-s-1}(-1)\int G_s\,dx,\ s = 0\ ..\ k-1) -$ add $(\xi_{k-s-1}(-2)\int h_s\,dx,\ s = 0\ ..\ k-1))$

```
> ξk(−2) := expand(−2∬fk dx dx − 2∬Gk dx dx + 2add(ξ[k−s−1](−1)∬fs dx dx, s = 0 .. k − 1) + 2add(ξ[k−s−1](−1)∬Gs dx dx,
  s = 0 .. k − 1) − add(ξ[k−s−1](−2)∬hs dx dx, s = 0 .. k − 1));
  s := 's';
```

$$> \xi_k(p) = \left(\frac{\partial^p}{\partial x^p}(pf_k - 2G_k)\right) - \mathrm{add}\left(\xi_{k-s-1}(-1)\left(\frac{\partial^p}{\partial x^p}(pf_s - 2G_s)\right),\ s = 0..k-1\right) - \mathrm{add}\left(\xi_{k-s-1}(-2)\left(\frac{\partial^p}{\partial x^p}\ h_s\right),\ s = 0..k-1\right)$$

```
> od:
> k := k − 1:#  печатается значение коэффициента
```

$$> \xi_k(p) = \left(\frac{\partial^p}{\partial x^p}(pf_k - 2G_k)\right) - \mathrm{add}\left(\xi_{k-s-1}(-1)\left(\frac{\partial^p}{\partial x^p}(pf_s - 2G_s)\right),\ s = 0..k-1\right) - \mathrm{add}\left(\xi_{k-s-1}(-2)\left(\frac{\partial^p}{\partial x^p}\ h_s\right),\ s = 0..k-1\right)$$

Этап 2. Нахождение искомой рекуррентной формулы.

Анализируя полученные формулы, приходим к выводу, что найденные интегральным методом формулы для $\xi_k(2p)$ можно в общем случае представить следующим образом:

$$\xi_k(2p) = \sum_{s=0}^{k} r_{k,\,s}(x)\,\frac{d^{2p}}{dx^{2p}}(f_{s,\,k}(x)),$$

где $r_{k,\,s}(x)$, $f_{s,\,k}(x)$ — искомые функции.

Отсюда следует, что поставленную задачу нужно разделить на две части, первая — это задача поиска функций $f_{s,\,k}(x)$ и вторая часть — задача поиска функций $r_{k,\,s}(x)$.

Решение первой задачи, т. е. задачи нахождения функций $f_{s,\,k}(x)$, производится путем анализа функций, входящих под знак $\frac{d^{2p}}{dx^{2p}}[\ ]$:

Представим полученные функциональные коэффициенты $f_{s,\,k}(x)$ из выражения для первых трех последовательных значений k.

$k=0 \quad p\int a\,dx;$

$k=1 \quad p\int a\,dx;\ \ p\int a\iint a\,dx\,dx\,dx - 2a\iiint a\,dx\,dx\,dx;$

$k=2 \quad p\int a\,dx;\ \ p\int a\iint a\,dx\,dx\,dx - 2a\iiint a\,dx\,dx\,dx;\ \ p\int a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx - 2a\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx - 2a\iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx;\ \ a\iint a\,dx\,dx$

$k=3 \quad p\int a\,dx;\ \ p\int a\iint a\,dx\,dx\,dx - 2a\iiint a\,dx\,dx\,dx;\ \ p\int a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx - 2a\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx - 2a\iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx;\ \ a\iint a\,dx\,dx$

Как видим, при каждом новом значении k повторяются все старые и возникают новые значения в соответствии с правилом вложения интегрального оператора $G_i(a)$:

$$G_0(a) = a \tag{5.32}$$
$$G_1(a) = a\iint a\,dx\,dx \tag{5.33}$$

$$G_2(a) = a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx = G_1(G_1(a))$$

$$G_3(a) = a\iint a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx = G_1(G_1(G_1(a)))$$

и так далее.

Кроме того, напомним, что производный от него оператор $P_k(a)$ определяется формулами

$$P_0(a) = 0, \tag{5.34}$$

$$P_k(a) = \sum_{i=0}^{k-1} G_{k-i}\left(\int G_i(a)\,dx\right), \quad k = 0, 1, 2, 3 \ldots . \tag{5.35}$$

В этом случае имеют место равенства:

$$p\int a\,dx = p\int G_0(a)\,dx$$

$$p\int a\iint a\,dx\,dx\,dx - 2a\iiint a\,dx\,dx\,dx = p\int G_1(a)\,dx - 2P_1(a)$$

$$p\int a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx - 2a\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx - 2a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx = p\int G_2(a)\,dx - P_2(a)$$

$$p\int a\iint a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx - 2a\iiint a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx - 2a\iint a\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx -$$

$$- 2a\iint a\iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx = p\int G_3(a)\,dx - P_3(a)$$

Таким образом, формально искомое значение $\xi_k(2p)$ можно представить формулой

$$\xi_k(2p) = \frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(p\int G_k(a)\,dx - P_k(a)\right) + 2\sum_{s=0}^{k-1} t_{k,\,s}\,\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(p\int G_s(a)\,dx - P_s(a)\right) + 2\sum_{s=0}^{k-1} e_{k,\,s}\,\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\,G_s(a), \tag{5.36}$$

где $t_{k,\,s}$, $e_{k,\,s}$ — искомые функциональные коэффициенты.

Для нахождения указанных коэффициентов необходимо сравнить известные полученные формулы с теми, которые ранее получены классическим способом.

Действительно, из (5.36) следует:

$$\xi_1(2p) = 2t_{1,\,1}\,\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(p\int a\iint a\,dx\,dx\,dx - a\iiint a\,dx\,dx\,dx\right) + 2e_{1,\,0}\,\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\,a + 2t_{1,\,0}\,p\,\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(\int a\,dx\right),$$

фактически по формуле (5.7)

$$\xi_1(2p) = 2\,\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(p\int a\iint a\,dx\,dx\,dx - a\iiint a\,dx\,dx\,dx\right) + 2\iiint a\,dx\,dx\,dx\,\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\,a + 2\iint a\,dx\,dx\,p\,\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(\int a\,dx\right).$$

Поэтому

$$t_{1,\,1} = 1, \quad t_{1,\,0} = \iint a\,dx\,dx, \quad e_{1,\,0} = \iiint a\,dx\,dx\,dx.$$

Снова из (5.36) получаем для $k = 2$:

$$\xi_2(2p) = 2t_{2,\,2}\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(p\int a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx - a\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx - a\iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\right) +$$
$$+\,2t_{2,\,1}\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(p\int a\iint a\,dx\,dx\,dx - a\iiint a\,dx\,dx\,dx\right) + 2p\,t_{2,\,0}\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(\int a\,dx\right) + 2e_{2,\,0}\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}a + 2e_{2,\,1}\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(a\iint a\,dx\,dx\right).$$

Фактически в соответствии с формулой (5.14):

$$\xi_2(2p) = 2\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(p\int a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx - a\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx - a\iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\right) + 2\iint a\,dx\,dx\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(p\int a\iint a\,dx\,dx\,dx - a\iiint a\,dx\,dx\,dx\right) +$$
$$+\,2p\left(\left(\iint a\,dx\,dx\right)^2 + \iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx + 2\int a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx - 2\iiint a\,dx\,dx\,dx\int a\,dx\right)\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(\int a\,dx\right) +$$
$$+\,2\left(\iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx + \iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\right)\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}a + 2\iiint a\,dx\,dx\,dx\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(a\iint a\,dx\,dx\right).$$

Поэтому

$$t_{2,\,2} = 1, \quad t_{2,\,1} = \iint a\,dx\,dx, \quad t_{2,\,0} = \left(\iint a\,dx\,dx\right)^2 + \iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx + 2\int a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx - 2\iiint a\,dx\,dx\,dx\int a\,dx$$
$$e_{2,\,0} = \iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx + \iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx, \quad e_{2,\,1} = \iiint a\,dx\,dx\,dx$$

Совершенно аналогичным способом для $k = 3$ устанавливаем значения этих коэффициентов:

$$t_{3,\,3} = 1, \quad t_{3,\,2} = \iint a\,dx\,dx, \quad t_{3,\,1} = \left(\iint a\,dx\,dx\right)^2 + \iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx + 2\int a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx - 2\iiint a\,dx\,dx\,dx\int a\,dx,$$

$$t_{3,\,0} = 2\int a\iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx + 2\int a\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx + \left(\iint a\,dx\,dx\right)^3 + 2\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\iint a\,dx\,dx +$$
$$+\,4\int a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\iint a\,dx\,dx - 2\int a\,dx\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx - 2\int a\iint a\,dx\,dx\,dx\iiint a\,dx\,dx\,dx - 2\int a\,dx\iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx -$$
$$-\,2\iiint a\,dx\,dx\,dx\int a\,dx\iint a\,dx\,dx + \iint a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx$$

$$e_{3,\,0} = \left(\iint a\,dx\,dx\right)^2 \iiint a\,dx\,dx\,dx - 2\int a\,dx\left(\iiint a\,dx\,dx\,dx\right)^2 + 2\int a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\iiint a\,dx\,dx\,dx + \iiint a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx +$$

$$+ \iint a\iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx + \iint a\iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx$$

$$e_{3,\,1} = \iint a\iiint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx + \iiint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx, \quad e_{3,\,2} = \iiint a\,dx\,dx\,dx.$$

Анализируя полученные результаты, приходим к выводам:

1. Коэффициент $t_{k,\,k} = 1$ для всех $k = 1, 2, 3\ldots$
2. Имеют место равенства:

$$\begin{aligned} t_{k,\,k-1} &= t_{k-1,\,k-2}, \\ e_{k,\,k-1} &= e_{k-1,\,k-2} \end{aligned} \tag{5.37}$$

для всех $k = 2, 3\ldots$

Это означает, что для каждого нового значения $\xi_k(2p)$ достаточно находить только значения $t_{k,\,0}$ и $e_{k,\,0}$, так как остальные коэффициенты известны из уже ранее определенных формул для $\xi_{k-1}(2p)$.

Так как $t_{k,\,0}$ является коэффициентом при $\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(\int a\,dx\right)$, а $e_{k,\,0}$ при $\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}a$, то для определения искомых формул для них воспользуемся известным равенством

$$\xi_k(2p) = \sum_{i_k=0}^{2p-2k} \xi_{k-1}(i_k + 2k - 2)\,C(2p,\, i_k + 2k)\,\frac{\partial^{2p-2k-i_k}}{\partial x^{2p-2k-i_k}}\,a.$$

Его можно заменой индекса суммирования

$$i_k = i - 2k$$

представить в эквивалентной форме:

$$\xi_k(2p) = \sum_{i=2k}^{2p} \xi_{k-1}(i-2)\,C(2p,\, i)\,\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\,a$$

или

$$\xi_k(2p) = \sum_{i=0}^{2p} \xi_{k-1}(i-2)\,C(2p,\, i)\,\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\,a - \sum_{i=0}^{2k-1} \xi_{k-1}(i-2)\,C(2p,\, i)\,\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\,a.$$

Так как искомые значения коэффициентов $t_{k,\,0}$ и $e_{k,\,0}$ определены только при $\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(\int a\,dx\right)$ и $\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}a$, то в полученной формуле первое слагаемое отбрасывается, а из второго следует:

$$\xi_{k-1}(i-2)\,C(2p,\, i)\,\frac{\partial^{2p-i}}{\partial x^{2p-i}}\,a.$$

При $i = 0$ это выражение принимает вид:

$$\xi_{k-1}(-2)\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}a.$$

В соответствии с (5.36) после приравнивания последовательно для всех s отсюда следует искомая формула

$$e_{k,\,0} = -\frac{\xi_{k-1}(-2)}{2}, \quad e_{k,\,1} = -\frac{\xi_{k-2}(-2)}{2}, \quad \ldots, \quad e_{k,\,s} = -\frac{\xi_{k-s-1}(-2)}{2}.$$

Аналогично, приняв $i = 1$, в результате тех же рассуждений для любых s получим:

$$\xi_{k-s-1}(-1)\,2p\,\frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}}a,$$

поэтому в соответствии с (5.36) устанавливаем:

$$t_{k,\,s} = -\xi_{k-s-1}(-1).$$

Таким образом, искомая формула для $\xi_p(2p)$ принимает вид:

$$\xi_k(2p) = 2\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(p\int G_k(a)\,dx - P_k(a)\right) - 2\sum_{s=0}^{k-1}\xi_{k-s-1}(-1)\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}\left(p\int G_s(a)\,dx - P_s(a)\right) - \sum_{s=0}^{k-1}\xi_{k-s-1}(-2)\frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}G_s(a).$$

Производя замену $2p$ на p, эту формулу приведем к виду:

$$\xi_k(p) = \frac{\partial^{p}}{\partial x^{p}}\left(p\int G_k(a)\,dx - 2P_k(a)\right) - \sum_{s=0}^{k-1}\xi_{k-s-1}(-1)\frac{\partial^{p}}{\partial x^{p}}\left(p\int G_s(a)\,dx - 2P_s(a)\right) - \sum_{s=0}^{k-1}\xi_{k-s-1}(-2)\frac{\partial^{p}}{\partial x^{p}}G_s(a).$$

Теорема доказана.

6. ФОРМУЛА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

На основании изложенного показано, что для линейного ОДУ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}y = ay \tag{6.1}$$

общее решение определяется формулой

$$y(x) = (C_1 - C_2x)(-1 + \alpha(-1)) + C_2\,\alpha(-2). \tag{6.2}$$

Так как

$$\alpha(-1) = \alpha(p)_{p=-1}\ \alpha(-2) = \alpha(p)_{p=-2}, \tag{6.3}$$

где

$$\alpha(p) = \sum_{k=0}^{p-1}\xi_k(p),$$

то возникает задача определения суммы конечного ряда

$$\sum_{k=0}^{p-1} \xi_k(p),$$

благодаря которому можно установить значения равенств (6.3).

Решение этой задачи возможно по аналогии с применением классического подхода, использованного еще Ньютоном для разложения, например, функций:

$$(1 + x)^m,$$

где m — некоторое действительное число, в степенные ряды:

$$\sum_{i=0}^{\infty} C(m, i)\, x^i.$$

Оказалось, что в тех случаях, когда x принадлежит интервалу сходимости ряда $\sum_{i=0}^{\infty} C(m, i)\, x^i$, то имеет место равенство

$$\sum_{i=0}^{\infty} C(m, i)\, x^i = (1 + x)^m.$$

В соответствии с этой гипотезой формула для коэффициента n-образа $\alpha(p)$ записывается в виде:

$$\alpha(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(p). \tag{6.4}$$

Следовательно, искомые формулы (6.3) принимают вид:

$$\alpha(-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(-1), \tag{6.5}$$

$$\alpha(-2) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(-2). \tag{6.6}$$

Установим значения функций $\xi_k(-1)$, $\xi_k(-2)$.

Ранее (Часть 1), при изложении теории вычисления неопределенного интеграла, было показано, что

$$\frac{d^{-s}}{dx^{-s}} f(x) = [f(x)]_s.$$

Следовательно искомые формулы для последовательного вычисления коэффициентов $\xi_k(-1)$, $\xi_k(-2)$ принимают вид:

$$\xi_0(-1) = -\iint a\, dx\, dx, \quad \xi_0(-2) = -2\iiint a\, dx\, dx\, dx, \tag{6.7}$$

$$\xi_k(-1) = -\iint G_k(a)\, dx\, dx - 2\int P_k(a)\, dx + \left(\sum_{s=0}^{k-1} \xi_{k-s-1}(-1)\left(\iint G_s(a)\, dx\, dx + 2\int P_s(a)\, dx\right)\right) - \left(\sum_{s=0}^{k-1} \xi_{k-s-1}(-2)\int G_s(a)\, dx\right), \quad k = 1,\ 2,\ 3\ ..\ N,$$

$$\xi_k(-2) = -2\left(\iiint G_k(a)\, dx\, dx\, dx + \iint P_k(a)\, dx\, dx\right) + 2\sum_{s=0}^{k-1} \xi_{k-s-1}(-1)\left(\iiint G_s(a)\, dx\, dx\, dx + \iint P_s(a)\, dx\, dx\right) - \sum_{s=0}^{k-1} \xi_{k-s-1}(-2)\iint G_s(a)\, dx\, dx.$$

Выводы. Линейное ОДУ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y = ay, \tag{6.8}$$

где a — произвольная дифференцируемая и интегрируемая функция, имеет общее решение:

$$y(x) = (C_1 - C_2 x)\left(-1 + \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(-1)\right) + C_2 \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(-2), \tag{6.9}$$

где искомые значения функций $\xi_k(-1)$, $\xi_k(-2)$, $k = 1, 2, 3 .. \infty$ определяются формулами

$$\xi_0(-1) = -\iint a\,dx\,dx, \quad \xi_0(-2) = -2\iiint a\,dx\,dx\,dx,$$

$$\xi_k(-1) = -\iint G_k(a)\,dx\,dx - 2\int P_k(a)\,dx + \sum_{s=0}^{k-1} \xi_{k-s-1}(-1)\left(\iint G_s(a)\,dx\,dx + 2\int P_s(a)\,dx\right) - \sum_{s=0}^{k-1} \xi_{k-s-1}(-2)\int G_s(a)\,dx, \quad k = 1, 2, 3 .. \infty, \tag{6.10}$$

$$\xi_k(-2) = -2\left(\iiint G_k(a)\,dx\,dx\,dx + \iint P_k(a)\,dx\,dx\right) + 2\sum_{s=0}^{k-1} \xi_{k-s-1}(-1)\left(\iiint G_s(a)\,dx\,dx\,dx + \iint P_s(a)\,dx\,dx\right) - \sum_{s=0}^{k-1} \xi_{k-s-1}(-2)\iint G_s(a)\,dx\,dx.$$

$G_i(a)$ — интегральный оператор, действующий на заданную функцию a в соответствии с правилами

$$G_0(a) = a,$$

$$G_1(a) = a\iint a\,dx\,dx,$$

$$G_2(a) = G_1(G_1(a)) = a\iint a\iint a\,dx\,dx\,dx\,dx$$

и так далее.

Оператор $P_k(a)$ при $k = 0$ определяется начальным условием

$$P_0(a) = 0$$

и действует на заданную функцию a по правилу

$$P_k(a) = \sum_{i=0}^{k-1} G_{k-i}\left(\int G_i(a)\,dx\right), \quad k = 1, 2, 3$$

Таким образом, выполнены все условия определения общего алгоритма интегрирования линейного ОДУ (6.8).

Нахождение общего решения производится следующим образом.

1. Вычисляются по формулам (6.10) $\xi_0(-1)$, $\xi_0(-2)$, $\xi_1(-1)$, $\xi_1(-2)$, ... и т. д.
2. Эти значения подставляются в формулу (6.9), которая и определяет искомое общее решение.

7. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим ряд конкретных примеров построения аналитического решения. В первую очередь, с целью показать эффективность и общность изложенной теории, рассмотрим известные «учебные» примеры.

▶ **Пример 1.** Найти общее решение линейного ОДУ:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y = xy. \tag{7.1}$$

Р е ш е н и е. В данном примере $a = x$.
Вычислим слагаемые $\xi_k(-1)$, $\xi_k(-2)$, $k = 0, 1, 2...$, пользуясь формулами (6.10).
Тогда получаем:

$$\xi_0(-1) = -\iint x\,dx\,dx = -\frac{x^3}{6}, \quad \xi_0(-2) = -2\iiint x\,dx\,dx\,dx = -\frac{x^4}{12},$$

$$\xi_1(-1) = -\iint x \iint x\,dx\,dx\,dx\,dx - 2\int x \iiint x\,dx\,dx\,dx\,dx + \left(-\frac{x^3}{6}\right)\iint x\,dx\,dx - \left(-\frac{x^4}{12}\right)\int x\,dx = -\frac{x^6}{180},$$

$$\xi_1(-2) = -2\iiint x \iint x\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx - 2\iint x \iiint x\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx + 2\left(-\frac{x^3}{6}\right)\iiint x\,dx\,dx\,dx - \left(-\frac{x^4}{12}\right)\iint x\,dx\,dx = -\frac{x^7}{280},$$

$$\xi_2(-1) = -\iint G_2(a)\,dx\,dx - 2\int P_2(a)\,dx + \sum_{s=0}^{1}\xi_{1-s}(-1)\left(\iint G_s(a)\,dx\,dx + 2\int P_s(a)\,dx\right) - \sum_{s=0}^{1}\xi_{1-s}(-2)\int G_s(a)\,dx = -\frac{x^9}{12960},$$

$$\xi_2(-2) = -2\left(\iiint G_2(a)\,dx\,dx\,dx + \iint P_2(a)\,dx\,dx\right) + 2\sum_{s=0}^{1}\xi_{1-s}(-1)\left(\iiint G_s(a)\,dx\,dx\,dx + \iint P_s(a)\,dx\,dx\right) - \sum_{s=0}^{1}\xi_{1-s}(-2)\iint G_s(a)\,dx\,dx = -\frac{x^{10}}{18144}.$$

Совершенно аналогичным образом находим:

$$\xi_3(-1) = -\frac{x^{12}}{1710720};\ \xi_4(-1) = -\frac{x^{15}}{359251200};\ \xi_5(-1) = -\frac{x^{18}}{109930867200};\ \xi_6(-1) = -\frac{x^{21}}{46170964224000}\ \text{ и так далее.}$$

$$\xi_3(-2) = -\frac{23\,x^{13}}{51891840};\ \xi_4(-2) = -\frac{41\,x^{16}}{18681062400};\ \xi_5(-2) = -\frac{89\,x^{19}}{12067966310400};\ \xi_6(-2) = -\frac{409\,x^{22}}{22808456326656000}\ \text{ и так далее.}$$

Частные решения определяются формулами

$$y_1(x) = -1 + \sum_{k=0}^{N}\xi_k(-1), \tag{7.2}$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{N}\xi_k(-2) - x\sum_{k=0}^{N}\xi_k(-1) + x, \tag{7.3}$$

где N — количество слагаемых, требуемое для получения с заданной точностью искомого решения в определенном интервале изменения независимого аргумента x.

Принимая, в частности $N = 7$, получим:

$$y_1(x) = -\left(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \frac{x^9}{12960} + \frac{x^{12}}{1710720} + \frac{x^{15}}{359251200} + \frac{x^{18}}{109930867200} + \frac{x^{21}}{46170964224000} + \frac{x^{24}}{25486372251648000}\right),$$

$$y_2(x) = x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \frac{x^{10}}{45360} + \frac{x^{13}}{7076160} + \frac{x^{16}}{1698278400} + \frac{x^{19}}{580811212800} + \frac{x^{22}}{268334780313600} + \frac{x^{25}}{161000868188160000}.$$

Отсюда следует, что искомые аналитические решения можно представить формулами

$$y_1(x) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{(3k)}}{B(k)}, \tag{7.4}$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{(3k+1)}}{H(k)}, \tag{7.5}$$

где $B(k)$ — числовая функция параметра k. В частности: $B(0) = 1$, $B(1) = 6$, $B(2) = 180$, $B(3) = 12\ 960$... и так далее.

$H(k)$ — числовая функция параметра k. В частности: $H(0) = 1$, $H(1) = 12$, $H(2) = 504$, $H(3) = 45\ 360$... и так далее.

Подставляя полученные представления в исходное ОДУ (7.1), устанавливаем рекуррентные формулы для $B(k)$ и $H(k)$. Действительно, в частности, подставляя $y_1(x)$ в ОДУ (7.1), получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{(3k)}}{B(k)}\right) = x\left(-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{(3k)}}{B(k)}\right)$$

или

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{9x^{(3k-2)}k^2}{B(k)} - \frac{3x^{(3k-2)}k}{B(k)}\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{(3k+1)}}{B(k)} = 0. \qquad (7.6)$$

Произведя замену индекса k на $k + 1$ в слагаемом:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{(3k+1)}}{B(k)},$$

получаем равенство:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{(3k+1)}}{B(k)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{(-2+3k)}}{B(-1+k)}.$$

Подставляя его в (7.6) после преобразований, имеем:

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{9k^2}{B(k)} - \frac{3k}{B(k)} - \frac{1}{B(-1+k)}\right)x^{(3k-2)} = 0.$$

Отсюда следует рекуррентное уравнение для нахождения $B(k)$.

$$B(k+1) = (9(k+1)^2 - 3k - 3)B(k).$$

Его решение, с учетом начального условия $B(0) = 1$, равно:

$$B(k) = \frac{9^k\,\Gamma\left(k + \frac{2}{3}\right)\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

Таким образом, первое частное решение (7.4) принимает вид:

$$y_1(x) = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)x^{(3k)}}{9^k\,\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)\Gamma(k+1)}\right) = -\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{BesselI}\left(-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)3^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{3}.$$

Проверкой убеждаемся, что данное решение удовлетворяет исходному ОДУ (7.1).

Совершенно аналогичным образом подставляя второе частное решение (7.4) в исходное ОДУ (7.1), получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{(3k+1)}}{H(k)}\right) = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{(3k+1)}}{H(k)}.$$

После преобразований имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{x^{(3k-1)}(3k+1)}{H(k)} + \frac{x^{(3k-1)}(3k+1)^2}{H(k)}\right) - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{(2+3k)}}{H(k)} = 0.$$

Производя замену индекса суммирования во втором слагаемом k на $k+1$, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{(2+3k)}}{H(k)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{(3k-1)}}{H(k-1)}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{(3k-1)}(3H(k-1)\,k + 9H(k-1)\,k^2 - H(k))}{H(k)\,H(k-1)} = 0.$$

Отсюда следует рекуррентное уравнение

$$H(k+1) = (3k+3+9(k+1)^2)\,H(k).$$

С учетом начального условия $H(0) = 1$ его решением является функция

$$H(k) = \frac{3\,9^k\,\Gamma\left(k+\frac{4}{3}\right)3^{\left(\frac{1}{2}\right)}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma(k+1)}{2\pi}.$$

Таким образом, второе частное решение исходного ОДУ (7.1) равно:

$$y_2(x) = 2\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{(3k+1)}}{3^{(2k+1)}\,\Gamma\left(k+\frac{4}{3}\right)\sqrt{3}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma(k+1)} = \frac{2\pi\sqrt{x}\,\mathrm{BesselI}\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right)3^{\left(\frac{5}{6}\right)}}{9\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

Проверка показала, что данное решение удовлетворяет ОДУ (7.1).
Таким образом, общее решение ОДУ (7.1) равно

$$y(x) = \frac{C_1\,\mathrm{BesselI}\left(-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)3^{\left(\frac{2}{3}\right)}\sqrt{x}}{3} + \frac{C_2\,2\pi\sqrt{x}\,\mathrm{BesselI}\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right)3^{\left(\frac{5}{6}\right)}}{9\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

Задача решена.

▶ **Пример 2.** Найти общее решение линейного ОДУ:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y = e^x y. \tag{7.7}$$

Решение. В данном примере: $a = e^x$. Вычислим слагаемые $\xi_k(-1)$, $\xi_k(-2)$, $k = 0, 1, 2...$ Тогда получаем:

а) Нулевые слагаемые $\xi_0(-1)$, $\xi_0(-2)$:

$$\xi_0(-1) = \iint e^x\,dx\,dx = -e^x, \quad \xi_0(-2) = -2\iiint e^x\,dx\,dx\,dx = -2e^x.$$

в) Первые слагаемые $\xi_1(-1)$, $\xi_1(-2)$:

$$\xi_1(-1) = -\iint e^x \iint e^x\,dx\,dx\,dx\,dx - 2\int e^x \iiint e^x\,dx\,dx\,dx\,dx + (-e^x)\iint e^x\,dx\,dx - (-2e^x)\int e^x\,dx = -\frac{e^{(2x)}}{4},$$

$$\xi_1(-2) = -2\iiint e^x \iint e^x\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx - 2\iint e^x \iiint e^x\,dx\,dx\,dx\,dx\,dx + 2(-e^x)\iiint e^x\,dx\,dx\,dx - (-2e^x)\iint e^x\,dx\,dx = -\frac{3e^{(2x)}}{4}.$$

г) Вторые слагаемые $\xi_2(-1)$, $\xi_2(-2)$:

$$\xi_2(-1) = -\iint G_2(a)\,dx\,dx - 2\int P_2(a)\,dx + \sum_{s=0}^{1}\xi_{1-s}(-1)\left(\iint G_s(a)\,dx\,dx + 2\int P_s(a)\,dx\right) - \sum_{s=0}^{1}\xi_{1-s}(-2)\int G_s(a)\,dx = -\frac{e^{(3x)}}{36},$$

$$\xi_2(-2) = -2\left(\iiint G_2(a)\,dx\,dx\,dx + \iint P_2(a)\,dx\,dx\right) + 2\sum_{s=0}^{1}\xi_{1-s}(-1)\left(\iiint G_s(a)\,dx\,dx\,dx + \iint P_s(a)\,dx\,dx\right) - \sum_{s=0}^{1}\xi_{1-s}(-2)\iint G_s(a)\,dx\,dx = -\frac{11e^{(3x)}}{108}.$$

Совершенно аналогичным образом находим:

$$\xi_3(-1) = -\frac{e^{(4x)}}{576}; \quad \xi_4(-1) = -\frac{e^{(5x)}}{14400}; \quad \xi_5(-1) = -\frac{e^{(6x)}}{518400}; \quad \xi_6(-1) = -\frac{e^{(7x)}}{25401600}; \quad \xi_7(-1) = -\frac{e^{(8x)}}{1625702400} \quad \text{и так далее.}$$

$$\xi_3(-2) = -\frac{25e^{(4x)}}{3456}; \quad \xi_4(-2) = -\frac{137\,e^{(5x)}}{432000}; \quad \xi_5(-2) = -\frac{49\,e^{(6x)}}{5184000}; \quad \xi_6(-2) = -\frac{121e^{(7x)}}{592704000}; \quad \xi_7(-2) = -\frac{761e^{(8x)}}{227598336000} \quad \text{и так далее.}$$

В этом случае частные решения определяются формулами

$$y_1(x) = -1 + \sum_{k=0}^{N}\xi_k(-1), \tag{7.8}$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{N}\xi_k(-2) - x\sum_{k=0}^{N}\xi_k(-1) + x, \tag{7.9}$$

где N — количество слагаемых, требуемое для получения с заданной точностью искомого решения в установленном интервале изменения независимого аргумента x.

Принимая в (7.8), (7.9) $N = 7$, получим:

$$y_1(x) = -1 - e^x - \frac{e^{(2x)}}{4} - \frac{e^{(3x)}}{36} - \frac{e^{(4x)}}{576} - \frac{e^{(5x)}}{14400} - \frac{e^{(6x)}}{518400} - \frac{e^{(7x)}}{25401600} - \frac{e^{(8x)}}{1625702400},$$

$$y_2(x) = (-2+x)e^x + \left(\frac{x}{4} - \frac{3}{4}\right)e^{(2x)} + \left(\frac{x}{36} - \frac{11}{108}\right)e^{(3x)} + \left(\frac{x}{576} - \frac{25}{3456}\right)e^{(4x)} + \left(-\frac{137}{432000} + \frac{x}{14400}\right)e^{(5x)} + \left(\frac{x}{518400} - \frac{49}{45184000}\right)e^{(6x)} +$$
$$+ \left(\frac{x}{25401600} - \frac{121}{592704000}\right)e^{(7x)} + \left(-\frac{761}{227598336000} + \frac{x}{1625702400}\right)e^{(8x)} + x.$$

Отсюда следует, что искомые аналитические решения можно представить формулами

$$y_1(x) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(kx)}}{B(k)}, \tag{7.10}$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{H(k)} - F(k)\right)e^{(kx)}, \tag{7.11}$$

где $B(k)$ — некоторая числовая функция параметра k. В частности: $B(0) = 1$, $B(1) = 1$, $B(2) = 4$, $B(3) = 36\ldots$ и так далее.
$H(k)$ — некоторая числовая функция параметра k. В частности: $H(0) = 1$, $H(1) = 1$, $H(2) = 4$, $H(3) = 36\ldots$ и так далее.
$F(k)$ — некоторая числовая функция параметра k. В частности: $F(0) = 0$, $F(1) = 2$, $F(2) = \frac{3}{4}$, $F(3) = \frac{25}{3456}\ldots$ и так далее.

Подставляя полученные представления в исходное ОДУ (7.7), устанавливаем рекуррентные формулы для $B(k)$, $H(k)$, $F(k)$. Действительно, в частности, для $y_1(x)$ получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(kx)}}{B(k)}\right)\right) = -e^x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(kx)}}{B(k)}$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{k^2e^{(kx)}}{B(k)} + \frac{e^{(x+kx)}}{B(k)}\right) = 0. \tag{7.12}$$

Произведем замену индекса k на $k + 1$ в слагаемом

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{(x+kx)}}{B(k)}.$$

Получаем равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{(x+kx)}}{B(k)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{(kx)}}{B(-1+k)}.$$

Подставляя его в (7.12) после преобразований, имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{k^2}{B(k)} + \frac{1}{B(-1+k)}\right)e^{(kx)} = 0.$$

Отсюда следует рекуррентное уравнение для нахождения $B(k)$.

$$B(k) = B(-1+k)\,k^2.$$

Его решение, с учетом начального условия $B(0) = 1$, равно

$$B(k) = \Gamma(k+1)^2.$$

Таким образом, частное решение (7.10) принимает вид:

$$y_1(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{(kx)}}{\Gamma(k+1)^2} = -\mathrm{BesselI}\left(0,\ 2\,(e^x)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right).$$

Проверкой убеждаемся, что данное решение удовлетворяет исходному ОДУ (7.7).
Совершенно аналогичным образом подставляя второе частное решение (7.11) в исходное ОДУ (7.7), получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{H(k)} - F(k)\right)e^{(kx)}\right) = e^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{H(k)} - F(k)\right)e^{(kx)}\right).$$

После преобразований имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left[\frac{2k}{H(k)} + \left(\frac{x}{H(k)} - F(k)\right)k^2\right]e^{(kx)}\right) = e^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{H(k)} - F(k)\right)e^{(kx)}\right).$$

Производя замену индекса суммирования во втором слагаемом k на $k+1$, получим:

$$e^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{H(k)} - F(k)\right)e^{(kx)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{(kx)}\,(x - F(k-1)\,H(k-1))}{H(k-1)}.$$

Следовательно, в итоге получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{(kx)}\,(-2k\,H(k-1) - k^2\,H(k-1)\,x + k^2\,H(k-1)\,F(k)\,H(k) + H(k)\,x - H(k)\,F(k-1)\,H(k-1))}{H(k)\,H(k-1)} = 0.$$

Отсюда следуют рекуррентные уравнения

$$-k^2 H(k-1) + H(k) = 0,$$

$$-2k\,H(k-1) + k^2 H(k-1)\,F(k)\,H(k) - H(k)\,F(k-1)\,H(k-1) = 0.$$

С учетом выполнения начальных условий $H(0) = 1$, $F(0) = 0$ они принимают вид:

$$H(k+1) = (k+1)^2\,H(k),$$

$$-2\,(k+1)\,H(k) + (k+1)^2\,H(k)\,F(k+1)\,H(k+1) - H(k+1)\,F(k)\,H(k) = 0.$$

Решением первого рекуррентного уравнения является функция

$$H(k) = \Gamma(k+1)^2.$$

В этом случае второе уравнение принимает вид:

$$F(k+1) = \frac{2k + 2 + F(k)\,\Gamma(k+2)^2}{\Gamma(k+2)^2\,(k+1)^2}.$$

Его решением является функция

$$F(k) = \frac{2\Psi(k+1) + 2\gamma}{\Gamma(k+1)^2},$$

$$\psi(x) = \frac{d\ln\Gamma(x)}{dx}.$$

Таким образом, второе частное решение исходного ОДУ (7.7) равно:

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - 2\Psi(k+1) - 2\gamma)e^{(kx)}}{\Gamma(k+1)^2}. \tag{7.13}$$

Докажем, что данный ряд сходится, используя признак Даламбера. Действительно,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(x - 2\Psi(k+2) - 2\gamma)e^{((k+1)x)}\Gamma(k+1)^2}{\Gamma(k+2)^2(x - 2\Psi(k+1) - 2\gamma)e^{(kx)}} = 0.$$

Докажем теперь, что $y_2(x)$ является решением ОДУ (7.7).
Для этого запишем его в виде:

$$y_2(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(x - 2\Psi(k+1) - 2\gamma)e^{(kx)}}{\Gamma(k+1)^2}.$$

Подставим эту функцию в ОДУ (7.7). Тогда получим:

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(x - 2\Psi(k+1) - 2\gamma)e^{(kx)}}{\Gamma(k+1)^2}\right) - e^x \sum_{k=0}^{N} \frac{(x - 2\Psi(k+1) - 2\gamma)e^{(kx)}}{\Gamma(k+1)^2}\right\} = 0.$$

Выполняя операцию дифференцирования, имеем:

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{2e^{(kx)}k}{\Gamma(k+1)^2} + \frac{(x - 2\Psi(k+1) - 2\gamma)e^{(kx)}k^2}{\Gamma(k+1)^2}\right) - e^x \sum_{k=0}^{N} \frac{(x - 2\Psi(k+1) - 2\gamma)e^{(kx)}}{\Gamma(k+1)^2}\right\} = 0. \tag{7.14}$$

Производя замену индекса суммирования k на $k-1$ во втором слагаемом

$$e^x \sum_{k=0}^{N} \frac{(x - 2\Psi(k+1) - 2\gamma)e^{(kx)}}{\Gamma(k+1)^2},$$

устанавливаем, что:

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{(-x + 2\Psi(k+1) + 2\gamma)e^{((k+1)x)}}{\Gamma(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{N+1}\left(-\frac{e^{(kx)}(x - 2\Psi(k) - 2\gamma)}{\Gamma(k)^2}\right).$$

Следовательно, равенство (7.14) принимает вид:

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{N}\left(-\frac{e^{(kx)}(x - 2\Psi(k) - 2\gamma)}{\Gamma(k)^2} + \frac{e^{(kx)}\left(x - 2\Psi(k+1) + \frac{2}{k} - 2\gamma\right)}{\Gamma(k)^2}\right) - \frac{e^{((N+1)x)}(x - 2\Psi(N+1) - 2\gamma)}{\Gamma(N+1)^2} - \lim_{k\to 0}\left(-\frac{e^{(kx)}(x - 2\Psi(k) - 2\gamma)}{\Gamma(k)^2}\right)\right\} = 0.$$

После преобразований, с учетом формулы

$$\Psi(k)k - k\Psi(k+1) + 1 = 0, \quad k = 1, 2, 3\ldots$$

получим:

$$-\lim_{N\to\infty}\frac{e^{((N+1)x)}(x-2\Psi(N+1)-2\gamma)}{\Gamma(N+1)^2}=0.$$

Так как выражение слева действительно в пределе дает ноль, то полученное тождество и доказывает, что функция (7.13) является решением ОДУ (7.7).

Таким образом, общее решение ОДУ (7.7) равно

$$y(x)=C_1\mathrm{BesselI}\left(0,\,2(e^x)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)+C_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-2\Psi(k+1)-2\gamma)e^{(kx)}}{\Gamma(k+1)^2}.$$

Задача решена.

На основании изложенного можно сделать вывод о том, что полученные для конкретных значений N частные решения y_1, y_2 позволяют, используя эвристический подход, выписать их точные решения в аналитической форме. При этом появляющиеся в этих общих формулах некие постоянные устанавливаются после подстановки этих решений в аналитической форме в исходное уравнение.

В дальнейшем, так как целью является только демонстрация самого метода, будем находить частные решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ и выписывать их аналитические представления без определения формул для возникающих постоянных (оставляем это в качестве упражнения читателям).

▶ **Пример 3.** Найти общее решение линейного ОДУ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}y\right)-\sin(x)y=0. \tag{7.15}$$

Решение. В данном примере: $a=\sin(x)$. Вычислим слагаемые $\xi_k(-1)$, $\xi_k(-2)$, $k=0,\ 1,\ 2\ldots$ Тогда получаем:

а) нулевые слагаемые $\xi_0(-1)$, $\xi_0(-2)$:

$$\xi_0(-1)=-\iint\sin(x)\,dx\,dx=\sin(x),\quad \xi_0(-2)=-2\iiint\sin(x)\,dx\,dx\,dx=-2\cos(x).$$

б) первые слагаемые $\xi_1(-1)$, $\xi_1(-2)$:

$$\xi_1(-1)=-\iint G_1(a)\,dx\,dx+2\int P_1(a)\,dx+\xi_0(-1)\iint G_0(a)\,dx\,dx-\xi_0(-2)\int G_0(a)\,dx=-\frac{9\sin(x)^2}{4}+\frac{x^2}{4}-2\cos(x)^2,$$

$$\xi_1(-2)=-2\iiint G_1(a)\,dx\,dx\,dx-2\iint P_1(a)\,dx\,dx+2\xi_0(-1)\left(\iiint G_0(a)\,dx\,dx\,dx+\iint P_0(a)\,dx\,dx\right)-\xi_0(-2)\iint G_0(a)\,dx\,dx=\frac{3\sin(x)\cos(x)}{4}-\frac{3x}{4}+\frac{x^3}{6}.$$

в) вторые слагаемые $\xi_2(-1)$, $\xi_2(-2)$:

$$\xi_2(-1)=-\iint G_2(a)\,dx\,dx-2\int P_2(a)\,dx+\sum_{s=0}^{1}\xi_{1-s}(-1)\left(\iint G_s(a)\,dx\,dx+2\int P_s(a)\,dx\right)-\left(\sum_{s=0}^{1}\xi_{1-s}(-2)\int G_s(a)\,dx\right)=$$
$$=\frac{34\sin(x)^3}{9}-\frac{\sin(x)}{12}-\frac{x^2\sin(x)}{4}-\cos(x)x+\frac{15\cos(x)^2\sin(x)}{4},$$

$$\xi_2(-2) = -2\left(\iiint G_2(a)\,dx\,dx\,dx + \iint P_2(a)\,dx\,dx\right) + 2\sum_{s=0}^{1}\xi_{1-s}(-1)\left(\iiint G_s(a)\,dx\,dx\,dx + \iint P_s(a)\,dx\,dx\right) - \sum_{s=0}^{1}\xi_{1-s}(-2)\iint G_s(a)\,dx\,dx =$$

$$= -\frac{443\cos(x)\sin(x)^2}{108} - \frac{28\cos(x)}{27} - \frac{\cos(x)\,x^2}{2} + \frac{3\sin(x)\,x}{4} - \frac{\sin(x)\,x^3}{6} - 4\cos(x)^3.$$

Совершенно аналогичным образом находим другие слагаемые:

$$\xi_3(-1) = -\frac{43\sin(x)^2}{192} - \frac{50\cos(x)^2}{27} + \frac{5x^2}{64} + \frac{7\sin(x)^2\,x^2}{8} + \frac{3\cos(x)\,x\,\sin(x)}{8} - \frac{11915\sin(x)^4}{1728} - \frac{2353\cos(x)^2\sin(x)^2}{216} + \frac{13\,x^2\cos(x)^4}{16} - \frac{x^4}{96} - 4\cos(x)^4;$$

$$\xi_4(-1) = \frac{99871\sin(x)}{103680} + \frac{80425\cos(x)^2\sin(x)^3}{3456} + \frac{x^3\cos(x)}{9} + \frac{151\sin(x)\,x^2}{576} + \frac{36733\cos(x)^2\sin(x)}{20736} - \frac{737\cos(x)\,x}{432} + \frac{7759\sin(x)^3}{11520} - \frac{113\,x^2\cos(x)^2\sin(x)}{72} -$$
$$- \frac{25x\cos(x)^3}{8} - \frac{343\sin(x)^2\,x\cos(x)}{108} + \frac{1060231\sin(x)^5}{86400} + \frac{x^4\sin(x)}{96} - \frac{x^3\cos(x)\sin(x)^2}{36} - \frac{x^3\cos(x)^3}{36} - \frac{227\sin(x)^3\,x^2}{144} + 11\sin(x)\cos(x)^4;$$

$$\xi_3(-2) = -\frac{2927\,x}{6912} + \frac{3\cos(x)\sin(x)\,x^2}{16} - \frac{18977\sin(x)\cos(x)}{6912} + \frac{7\,x^3\cos(x)^2}{24} + \frac{x^3\sin(x)^2}{3} + \frac{35x^3}{96} + \frac{17305\cos(x)\sin(x)^3}{3456} - \frac{21\cos(x)^2\,x}{16} - \frac{x^5}{120} -$$
$$- \frac{3\sin(x)^2\,x}{2} + 5\cos(x)^4\sin(x);$$

$$\xi_4(-2) = -\frac{13\cos(x)\sin(x)^2\,x^2}{48} - \frac{67\,x^3\cos(x)^2\sin(x)}{108} - \frac{1049893\cos(x)}{243000} + \frac{67\cos(x)^2\,x\sin(x)}{24} - \frac{25918963\cos(x)\sin(x)^2}{7776000} - \frac{733\cos(x)\,x^2}{288} + \frac{1343\sin(x)\,x}{6912} -$$
$$- \frac{271\sin(x)\,x^3}{864} - \frac{11255\cos(x)^3}{1944} - \frac{4667137\cos(x)\sin(x)^4}{432000} - \frac{53\,x^2\cos(x)^3}{216} + \frac{x^4\cos(x)}{16} + \frac{45\sin(x)^3\,x}{16} + \frac{\sin(x)\,x^5}{120} - \frac{8123\cos(x)^3\sin(x)^2}{432} - \frac{5\sin(x)^3\,x^3}{8} - 8\cos(x)^5$$

и так далее.

Частные решения ОДУ (7.15) определяются формулами

$$y_1(x) = -1 + \sum_{k=0}^{N}\xi_k(-1),$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{N}\xi_k(-2) - x\sum_{k=0}^{N}\xi_k(-1) + x,$$

где N — количество слагаемых, требуемое для получения с заданной точностью искомого решения в установленном интервале изменения независимого аргумента x.

Принимая, в частности $N = 4$, получим:

$$y_1(x) = \left(-\frac{1}{96} + \frac{\sin(x)}{96}\right)x^4 + \frac{x^3\cos(x)}{12} + \left(-\frac{25\sin(x)}{16} - \frac{\cos(2x)}{32} + \frac{\sin(3x)}{576} + \frac{75}{64}\right)x^2 + \left(\frac{11\cos(3x)}{864} - \frac{187\cos(x)}{32} + \frac{3\sin(2x)}{16}\right)x - \frac{132853}{13824} + \frac{256465\sin(x)}{13824} +$$
$$+ \frac{437\cos(2x)}{576} - \frac{4169\sin(3x)}{82944} + \frac{\sin(5x)}{230400} - \frac{\cos(4x)}{4608},$$

$$y_2(x) = \left(-\frac{\sin(x)}{480} + \frac{1}{480}\right)x^5 - \frac{x^4\cos(x)}{48} + \left(\frac{\cos(2x)}{96} + \frac{11\sin(x)}{24} - \frac{\sin(3x)}{1728} - \frac{21}{64}\right)x^3 + \left(-\frac{3\sin(2x)}{32} - \frac{11\cos(3x)}{1728} + \frac{163\cos(x)}{64}\right)x^2 +$$

$$+\left(\frac{\cos(4x)}{4608} + \frac{10799}{1536} - \frac{383\cos(2x)}{576} - \frac{\sin(5x)}{230400} - \frac{68201\sin(x)}{4608} + \frac{3737\sin(3x)}{82944}\right)x - \frac{25\sin(4x)}{27648} - \frac{174593\cos(x)}{6912} + \frac{2599\sin(2x)}{1728} - \frac{137\cos(5x)}{6912000} + \frac{55853\cos(3x)}{497664}.$$

Анализируя полученные значения частных решений, совсем несложно выписать общие формулы частных решений ОДУ:

$$y_1 = \left(\sum_{k=0}^{N} x^{(2k)}\left(\sum_{i=0}^{N-k}\cos x^{(2i)}\,(g_{i,k}\sin x + z_{i,k})\right)\right) + \left(\sum_{k=0}^{N-1} x^{(2k+1)}\left(\sum_{i=0}^{N-k-2}\cos x^{(2i+1)}\,(p_{i,k}\sin x + d_{i,k})\right)\right),$$

$$y_2 = \left(\sum_{k=0}^{N} x^{(2k+1)}\left(\sum_{i=0}^{N-k}\cos x^{(2i)}\,(b_{i,k}\sin x + c_{i,k})\right)\right) + \left(\sum_{k=0}^{N} x^{(2k)}\left(\sum_{i=0}^{N-k-1}\cos x^{(2i+1)}\,(r_{i,k}\sin x + q_{i,k})\right)\right),$$

здесь $g_{i,k}$, $z_{i,k}$, $p_{i,k}$, $d_{i,k}$, $b_{i,k}$, $c_{i,k}$, $r_{i,k}$, $q_{i,k}$ — постоянные, определяемые способом, изложенным аналогично в ранее приведенных примерах, а параметр N стремится к бесконечности.

▶ **Пример 4.** Найти общее решение линейного ОДУ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}y - \ln(x)y = 0. \tag{7.16}$$

Решение. В данном примере: $a = \ln(x)$. Вычислим слагаемые $\xi_k(-1)$, $\xi_k(-2)$, $k = 0, 1, 2\ldots$

Тогда получаем:

$$\xi_0(-1) = -\iint \ln(x)\,dx\,dx = -\frac{x^2\ln(x)}{2} + \frac{3x^2}{4}, \quad \xi_0(-2) = -2\iiint \ln(x)\,dx\,dx\,dx = -\frac{x^3\ln(x)}{3} + \frac{11x^3}{18},$$

$$\xi_1(-1) = -\frac{x^4\ln(x)^2}{24} + \frac{x^4\ln(x)}{9} - \frac{25x^4}{432},$$

$$\xi_1(-2) = -\frac{x^5\ln(x)^2}{30} + \frac{29x^5\ln(x)}{300} - \frac{2819x^5}{54000},$$

$$\xi_2(-1) = -\frac{x^6\ln(x)^3}{720} + \frac{113x^6\ln(x)^2}{21600} - \frac{889x^6\ln(x)}{162000} + \frac{2021x^6}{1215000},$$

$$\xi_2(-2) = -\frac{x^7\ln(x)^3}{840} + \frac{2489x^7\ln(x)^2}{529200} - \frac{7489x^7\ln(x)}{1481760} + \frac{12091561x^7}{7779240000},$$

$$\xi_3(-1) = -\frac{x^8\ln(x)^4}{40320} + \frac{127x^8\ln(x)^3}{1058400} - \frac{84061x^8\ln(x)^2}{444528000} + \frac{22059049x^8\ln(x)}{186701760000} - \frac{17351633x^8}{697019904000},$$

$$\xi_4(-1) = -\frac{x^{10}\ln(x)^5}{3628800} + \frac{3713x^{10}\ln(x)^4}{2286144000} - \frac{153541x^{10}\ln(x)^3}{45008460000} + \frac{492518029x^{10}\ln(x)^2}{151228425600000} - \frac{542779529651x^{10}\ln(x)}{381095632512000000} + \frac{7830520197209x^{10}}{342986069260800000000},$$

$$\xi_3(-2) = -\frac{x^9\ln(x)^4}{45360} + \frac{629x^9\ln(x)^3}{5715360} - \frac{2118401x^9\ln(x)^2}{12002256000} + \frac{120458131x^9\ln(x)}{1080203040000} - \frac{18046415923x^9}{762191265024000},$$

$$\xi_4(-2) = \frac{41668782325106407x^{11}}{18988148245179128400000} - \frac{x^{11}\ln(x)^5}{3991680} + \frac{69611x^{11}\ln(x)^4}{46103904000} - \frac{220052737x^{11}\ln(x)^3}{68464297440000} + \frac{137096461039x^{11}\ln(x)^2}{44282707584192000} - \frac{1393786594886281x^{11}\ln(x)}{1022930545194835200000}$$

и так далее.

Частные решения определяются формулами

$$y_1(x) = -1 + \sum_{k=0}^{N} \xi_k(-1),$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{N} \xi_k(-2) - x\sum_{k=0}^{N} \xi_k(-1) + x,$$

где N — количество слагаемых, требуемое для получения с заданной точностью искомого решения в установленном интервале изменения независимого аргумента x.

Принимая, в частности в этих формулах $N = 4$, получим:

$$y_1(x) = -\frac{x^{10}\ln(x)^5}{3628800} + \left(-\frac{x^8}{40320} + \frac{3713\,x^{10}}{2286144000}\right)\ln(x)^4 + \left(-\frac{x^6}{720} - \frac{153541\,x^{10}}{45008460000} + \frac{127\,x^8}{1058400}\right)\ln(x)^3 + \left(\frac{492518029\,x^{10}}{151228425600000} - \frac{x^4}{24} - \frac{84061\,x^8}{444528000} + \frac{113\,x^6}{21600}\right)\ln(x)^2 +$$
$$+\left(-\frac{542779529651\,x^{10}}{381095632512000000} + \frac{x^4}{9} - \frac{889\,x^6}{162000} - \frac{x^2}{2} + \frac{22059049\,x^8}{186701760000}\right)\ln(x) - 1 + \frac{7830520197209\,x^{10}}{34298606926080000000} + \frac{3x^2}{4} - \frac{25\,x^4}{432} - \frac{17351633\,x^8}{697019904000} + \frac{2021\,x^6}{1215000},$$

$$y_2(x) = \frac{x^{11}\ln(x)^5}{39916800} + \left(\frac{x^9}{362880} - \frac{31607\,x^{11}}{276623424000}\right)\ln(x)^4 + \left(\frac{x^7}{5040} + \frac{31511803\,x^{11}}{159750027360000} - \frac{71\,x^9}{7144200}\right)\ln(x)^3 +$$
$$+\left(-\frac{559\,x^7}{1058400} + \frac{75623\,x^9}{6001128000} - \frac{356133410639\,x^{11}}{2214135379209600000} + \frac{x^5}{120}\right)\ln(x)^2 + \left(\frac{x^3}{6} - \frac{13\,x^5}{900} + \frac{48179\,x^7}{111132000} + \frac{541141476663763\,x^{11}}{876797610167001600000} - \frac{20073827\,x^9}{3024568512000}\right)\ln(x) +$$
$$+\frac{17\,x^5}{3000} - \frac{508937\,x^7}{4667544000} - \frac{2847798132559381\,x^{11}}{3214924570612339200000} + x + \frac{10601083\,x^9}{8710757314560} - \frac{5x^3}{36}.$$

Анализ этих равенств показывает, что искомые аналитические решения можно представить формулами

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \ln(x)^k \sum_{i=k}^{\infty} b_{i,\,k}\, x^{(2i)}, \tag{7.17}$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \ln(x)^k \sum_{i=k}^{\infty} c_{i,\,k}\, x^{(2i+1)}, \tag{7.18}$$

где $b_{i,\,k}$, $c_{i,\,k}$ — искомые числовые функции.

Подставляя поочередно представления (7.17), (7.18) в исходное ОДУ (7.16), устанавливаем рекуррентные формулы для $b_{i,\,k}$, $c_{i,\,k}$. Опуская промежуточные вычисления, приведем рекуррентные формулы для нахождения $b_{i,\,k}$, $c_{i,\,k}$:

$$(k+3)(k+2)\,b_{i,\,k+2} + (4i-1)(k+1)\,b_{i,\,k+1} + 2i(2i-1)\,b_{i,\,k} - b_{i-1,\,k-1} = 0, \tag{7.19}$$
$$(k+2)(k+1)\,c_{i,\,k+2} + (k+1)(1+4i)\,c_{i,\,k+1} + 2i(2i+1)\,c_{i,\,k} - c_{-1+i,\,k-1} = 0. \tag{7.20}$$

Следовательно, общее решение ОДУ (7.16) определяется формулой

$$y(x) = C_1\sum_{k=0}^{\infty} \ln(x)^k \sum_{i=k}^{\infty} b_{i,\,k}\, x^{(2i)} + C_2\sum_{k=0}^{\infty} \ln(x)^k \sum_{i=k}^{\infty} c_{i,\,k}\, x^{(2i+1)},$$

где $b_{i,\,k}$ определяется рекуррентным соотношением (7.19), а $c_{i,\,k}$ — рекуррентным соотношением (7.20). Задача решена.

В дальнейшем для вычисления слагаемых $\xi_k(-1)$, $\xi_k(-2)$ будем использовать результаты, которые дает **ПРОГРАММА вычисления $\xi_k(-1)$, $\xi_k(-2)$ и частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ до номера k линейного ОДУ:**

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y = a y.$$

```
> ####################################################################
> restart:alias(y=y(x),v=v(x),a=a(x)):k:=7:a:=(x^3-1):
> a:=(x^3-1): #введите значение функционального коэффициента
> k:=7: #введите количество вычисляемых коэффициентов
> dn:= proc (n::integer, w,c) local k, Ds; global resd, x: option remember; if n = 0 then resd:= w elif 0 < n then
  resd:= diff(w,'$'(x,n)) else Ds:= w:for k to -n do Ds:=int(Ds,x) end do:Ds:=Ds: resd:= Ds end if: RETURN(resd) end
  proc:
> for k from 0 to k do
> R:=z->a*int(int(z,x),x):h[0]:=a:for l from 0 to k do h[l+1]:=R(h[1]) od: l:='l':
```

> for l from 0 to $k+1$ do $f_l := \int h_l\,dx$ end do; l:='l'

> for m from 0 to k do for j from 0 to $k-m$ do $q_0 := f_m$; $q_{j+1} := R(q_j)$ end do;

G_{k+1}:=add$(q_i,\ i = 1\ ..\ k+1)$;

$G_0 := 0$;

$G_{-1} := 0$;

$G_1 := a\iiint a\,dx\,dx\,dx$;

j:='j';

$\xi_0(-1) := -\iint a\,dx\,dx$;

$\xi_0(-2) := -2\iiint a\,dx\,dx\,dx$

> $\xi_k(-1) :=$ expand$\left(-\int f_k\,dx - 2\int G_k\,dx + \text{add}\left(\xi_{k-s-1}(-1)\int f_s\,dx,\ s = 0\ ..\ k-1\right) + 2\text{add}\left(\xi_{k-s-1}(-1)\int G_s\,dx,\ s = 0\ ..\ k-1\right) - \text{add}\left(\xi_{k-s-1}(-2)\int h_s\,dx,\ s = 0\ ..\ k-1\right)\right)$

> $\xi_k(-2) :=$ expand$\left(-2\iint f_k\,dx\,dx - 2\iint G_k\,dx\,dx + 2\text{add}\left(\xi_{k-s-1}(-1)\iint f_s\,dx\,dx,\ s = 0\ ..\ k-1\right) + 2\text{add}\left(\xi_{k-s-1}(-1)\iint G_s\,dx\,dx,\ s = 0\ ..\ k-1\right) - \text{add}\left(\xi_{k-s-1}(-2)\iint h_s\,dx\,dx,\ s = 0\ ..\ k-1\right)\right)$;

s:='s';

s:='s'

```
> a1:=add(xi[s](-1),s=0..k):
> a2:=add(xi[s](-2),s=0..k):
> od:
> Diff(y,'$'(x,2)) = a*y;
> k:=k-1:
> for l from 0 to k do Xi[l](-1):=xi[l](-1) od:for l from 0 to k do Xi[l](-2):=xi[l](-2) od:
> y[1](x)=combine(sort(-1+a1,x));
> y[2](x)=sort(expand(a2-x*a1+x),x);
> ##################################################################
```

Приведем, используя эту программу, способ решения линейных ОДУ.

▶ **Пример 5.** Найти в общем случае в аналитической форме общее решение линейного ОДУ:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y = (x^7 - 1)\,y. \tag{7.21}$$

Р е ш е н и е: Используя написанную программу и вводя равенства

$$\xi_k(-1) = \Xi_k(-1), \quad \xi_k(-2) = \Xi_k(-2) \text{ для всех } k,$$

устанавливаем искомые значения $\xi_k(-s)$, $s = 1,\ 2$ от $k = 0$ до $k = 4$:

$$\Xi_0(-1) = -\frac{x^9}{72} + \frac{x^2}{2},$$

$$\Xi_1(-1) = -\frac{x^{18}}{22032} + \frac{37\,x^{11}}{7920} - \frac{x^4}{24},$$

$$\Xi_2(-1) = -\frac{x^{27}}{15466464} + \frac{1429\,x^{20}}{115117200} - \frac{367\,x^{13}}{1235520} + \frac{x^6}{720},$$

$$\Xi_3(-1) = -\frac{x^{36}}{19487744640} + \frac{1008383\,x^{29}}{65619566812800} - \frac{1852423\,x^{22}}{2765575612800} + \frac{2083\,x^{15}}{259459200} - \frac{x^8}{40320},$$

$$\Xi_4(-1) = \frac{1138219\,x^{38}}{103793749806146400} + \frac{x^{10}}{3628800} - \frac{4259\,x^{17}}{35286451200} - \frac{x^{45}}{38585734387200} - \frac{61821827\,x^{31}}{83911021061868000} + \frac{300689\,x^{24}}{19082471728320};$$

$$\Xi_0(-2) = -\frac{x^{10}}{360} + \frac{x^3}{3},$$

$$\Xi_1(-2) = -\frac{x^{19}}{77520} + \frac{79\,x^{12}}{23760} - \frac{x^5}{30},$$

$$\Xi_2(-2) = -\frac{223\,x^{28}}{10285198560} + \frac{2207\,x^{21}}{241746120} - \frac{703\,x^{14}}{2882880} + \frac{x^7}{840},$$

$$\Xi_3(-2) = \frac{1811\,x^{16}}{259459200} - \frac{29\,x^{37}}{1522209386880} + \frac{11361673\,x^{30}}{984293502192000} - \frac{169889\,x^{23}}{304345641600} - \frac{x^9}{45360},$$

$$\Xi_4(-2) = \frac{845507\,x^{25}}{61161768360000} + \frac{x^{11}}{3991680} - \frac{1289\,x^{46}}{124778547861327360} + \frac{2741467\,x^{39}}{327769736229936000} - \frac{6385785223\,x^{32}}{10293085250255808000} - \frac{11461\,x^{18}}{105859353600},$$

$$y_1(x) = -1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} - \frac{x^8}{40320} - \frac{x^9}{72} + \frac{x^{10}}{3628800} + \frac{37\,x^{11}}{7920} - \frac{367\,x^{13}}{1235520} + \frac{2083\,x^{15}}{259459200} - \frac{4259\,x^{17}}{35286451200} - \frac{x^{18}}{22032} - \frac{1429\,x^{20}}{115117200} - \frac{1852423\,x^{22}}{2765575612800} + {}$$
$$+ \frac{300689\,x^{24}}{19082471728320} - \frac{x^{27}}{15466464} + \frac{1008383\,x^{29}}{65619566812800} - \frac{61821827\,x^{31}}{83911021061868000} - \frac{x^{36}}{19487744640} + \frac{1138219\,x^{38}}{103793749806146400} - \frac{x^{45}}{38585734387200},$$

$$y_2(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{90} - \frac{x^{11}}{39916800} - \frac{2\,x^{12}}{1485} + \frac{23\,x^{14}}{432432} - \frac{17\,x^{16}}{16216200} + \frac{47\,x^{18}}{3780691200} + \frac{x^{19}}{30780} - \frac{467\,x^{21}}{142203600} + \frac{26099\,x^{23}}{233853820200} - {}$$
$$- \frac{33907\,x^{25}}{17539036515000} + \frac{x^{28}}{23269680} - \frac{2129\,x^{30}}{556727094000} + \frac{211357451\,x^{32}}{1816426808868672000} + \frac{x^{37}}{30995213760} - \frac{73327\,x^{39}}{28179298589904000} + \frac{x^{46}}{64160092483200}.$$

Анализируя полученные решения, видим, что установить закономерности строения конструкции этого решения очень сложно. Зато легко устанавливается конструкция $\Xi_k(-1)$ и $\Xi_k(-2)$. Действительно:

$$\Xi_k(-1) = \sum_{i=0}^{k+1} b_{i,k} x^{(2(k+1)+7i)}, \quad \Xi_k(-2) = \sum_{i=0}^{k+1} c_{i,k} x^{(2k+3+7i)}.$$

В этом случае частные решения определяются формулами

$$y_1(x) = -1 + \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=0}^{k+1} b_{i,k} x^{(2(k+1)+7i)}, \tag{7.22}$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=0}^{k+1} c_{i,k} x^{(2k+3+7i)} - x \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=0}^{k+1} b_{i,k} x^{(2(k+1)+7i)} + x, \tag{7.23}$$

где N — параметр, определяющий количество слагаемых и в пределе стремящийся к бесконечности.

Анализируя (7.22) и (7.23), в итоге приходим к следующим представлениям:

$$y_1(x) = -1 + \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=0}^{k+1} b_{i,k} x^{(2(k+1)+7i)},$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=0}^{k+1} r_{i,k} x^{(2k+3+7i)} + x,$$

здесь принято, что $r_{i,k} = c_{i,k} - b_{i,k}$.

Подставляя последовательно полученные значения функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в исходное уравнение (7.21), получим искомые рекуррентные уравнения для определения числовых коэффициентов $r_{i,k}$, $b_{i,k}$:

$$b_{i-1,k-1} = (2k+2+7i)(2k+1+7i)\, b_{i,k} + b_{i,k-1},$$
$$r_{i-1,k-1} = (7i+2k+3)(2k+2+7i)\, r_{i,k} + r_{i,k-1}.$$

Таким образом, искомое общее решение исходного уравнения принимает вид:

$$y = C_1\left(-1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k+1} b_{i,k} x^{(2(k+1)+7i)}\right) + C_2\left(\sum_{k=0}^{N} \sum_{i=0}^{k+1} r_{i,k} x^{(2k+3+7i)} + x\right),$$

где числовые коэффициенты $r_{i,k}$, $b_{i,k}$ определяются приведенными выше рекуррентными уравнениями. Задача решена.

▶ **Пример 6.** Найти общее решение линейного ОДУ:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y = (x-2)\sqrt{x}\, y. \tag{7.24}$$

Р е ш е н и е. Используя написанную программу и вводя равенства

$$\xi_k(-1) = \Xi_k(-1), \quad \xi_k(-2) = \Xi_k(-2) \text{ для всех } k,$$

устанавливаем искомые значения $\xi_k(-s)$, $s = 1, 2$ от $k = 0$ до $k = 6$:

$$\Xi_0(-1) = -\frac{4\,x^{\left(\frac{5}{2}\right)}(-14+3x)}{105},$$
$$\Xi_1(-1) = -\frac{2\,x^7}{735} + \frac{8\,x^6}{315} - \frac{4\,x^5}{75},$$
$$\Xi_2(-1) = \frac{16\,x^{\left(\frac{19}{2}\right)}}{41895} - \frac{8\,x^{\left(\frac{21}{2}\right)}}{293265} - \frac{656\,x^{\left(\frac{17}{2}\right)}}{401625} + \frac{32\,x^{\left(\frac{15}{2}\right)}}{14625},$$
$$\Xi_3(-1) = \frac{2848\,x^{11}}{57432375} - \frac{32\,x^{10}}{658125} - \frac{4\,x^{14}}{26687115} + \frac{32\,x^{13}}{11437335} - \frac{32012\,x^{12}}{1762732125},$$
$$\Xi_4(-1) = -\frac{509312\,x^{\left(\frac{27}{2}\right)}}{581502796875} + \frac{7874656\,x^{\left(\frac{29}{2}\right)}}{17942850300375} + \frac{256\,x^{\left(\frac{25}{2}\right)}}{378421875} + \frac{32\,x^{\left(\frac{33}{2}\right)}}{2642024385} - \frac{16\,x^{\left(\frac{35}{2}\right)}}{30823617825} - \frac{15242768\,x^{\left(\frac{31}{2}\right)}}{144207352414125},$$
$$\Xi_5(-1) = -\frac{4\,x^{21}}{3236479871625} - \frac{245817524\,x^{17}}{38128556888296875} + \frac{405952\,x^{16}}{40123692984375} - \frac{256\,x^{15}}{39734296875} + \frac{16\,x^{20}}{462354267375} - \frac{2428744\,x^{19}}{6393192623692875} + \frac{74467936\,x^{18}}{35042386636632375},$$
$$\Xi_6(-1) = \frac{2048\,x^{\left(\frac{35}{2}\right)}}{45893112890625} - \frac{21408256\,x^{\left(\frac{37}{2}\right)}}{259800912073828125} + \frac{387460384\,x^{\left(\frac{39}{2}\right)}}{6074153637915287925} - \frac{167699021552\,x^{\left(\frac{41}{2}\right)}}{626682365752353848437 5} + \frac{370906048\,x^{\left(\frac{43}{2}\right)}}{566669225942822252 25} -$$
$$- \frac{241182752\,x^{\left(\frac{45}{2}\right)}}{2597873822637599756 25} + \frac{32\,x^{\left(\frac{47}{2}\right)}}{456343661899125} - \frac{16\,x^{\left(\frac{49}{2}\right)}}{7453613144352375};$$

$$\Xi_0(-2) = -\frac{16\,x^{\left(\frac{7}{2}\right)}(-6+x)}{315},$$
$$\Xi_1(-2) = -\frac{x^8}{630} + \frac{16\,x^7}{945} - \frac{4\,x^6}{105},$$
$$\Xi_2(-2) = -\frac{496\,x^{\left(\frac{19}{2}\right)}}{401625} + \frac{724\,x^{\left(\frac{21}{2}\right)}}{2639385} + \frac{992\,x^{\left(\frac{17}{2}\right)}}{580125} - \frac{362\,x^{\left(\frac{23}{2}\right)}}{20235285},$$
$$\Xi_3(-2) = -\frac{1376\,x^{11}}{34459425} - \frac{83\,x^{15}}{789176115} + \frac{332\,x^{14}}{157835223} - \frac{6846506\,x^{13}}{481225870125} + \frac{1376\,x^{12}}{34459425},$$
$$\Xi_4(-2) = \frac{852224\,x^{\left(\frac{27}{2}\right)}}{1486062703125} - \frac{426112\,x^{\left(\frac{29}{2}\right)}}{581502796875} - \frac{149063048\,x^{\left(\frac{33}{2}\right)}}{1755936585277875} + \frac{11992\,x^{\left(\frac{35}{2}\right)}}{1276097777955} + \frac{281041808\,x^{\left(\frac{31}{2}\right)}}{778719703036275} - \frac{5996\,x^{\left(\frac{37}{2}\right)}}{15738539261445},$$
$$\Xi_5(-2) = \frac{1264\,x^{21}}{45989238101625} + \frac{49792\,x^{17}}{5731956140625} - \frac{24896\,x^{16}}{4458188109375} - \frac{158\,x^{22}}{168627206372625} - \frac{454673894\,x^{20}}{146269517553645987 5} +$$
$$+ \frac{1430928656\,x^{19}}{805974892642544625} - \frac{23959694116\,x^{18}}{4380298329579046875},$$

$$\Xi_6(-2) = \frac{378368\,x^{\left(\frac{37}{2}\right)}}{9622256002734375} - \frac{1618888\,x^{\left(\frac{51}{2}\right)}}{970482792234112282125} - \frac{189184\,x^{\left(\frac{39}{2}\right)}}{2624251637109375} + \frac{509590676527264\,x^{\left(\frac{41}{2}\right)}}{921166106531800852307812 5} - \frac{2703289090900432\,x^{\left(\frac{43}{2}\right)}}{11775988334852481165989062 5} +$$
$$+ \frac{99432991184\,x^{\left(\frac{45}{2}\right)}}{17957773411269482550375} - \frac{1601961931352\,x^{\left(\frac{47}{2}\right)}}{207814318568072154901462 5} + \frac{3237776\,x^{\left(\frac{49}{2}\right)}}{570872230725948401 25};$$

$$
\begin{aligned}
y_1(x) = {} & -\frac{16\,x^{\left(\frac{49}{2}\right)}}{7453613144352375} + \frac{32\,x^{\left(\frac{47}{2}\right)}}{456343661899125} - \frac{241182752\,x^{\left(\frac{45}{2}\right)}}{2597873822637599756 25} + \frac{370906048\,x^{\left(\frac{43}{2}\right)}}{5666692259428222522 5} - \frac{4\,x^{21}}{3236479871625} - \frac{167699021552\,x^{\left(\frac{41}{2}\right)}}{626682365752353848437 5} + \\
& + \frac{16\,x^{20}}{462354267375} + \frac{387460384\,x^{\left(\frac{39}{2}\right)}}{607415363791528792 5} - \frac{2428744\,x^{19}}{6393192623692875} - \frac{21408256\,x^{\left(\frac{37}{2}\right)}}{259800912073828125} + \frac{74467936\,x^{18}}{350423866366 32375} - \frac{141903184\,x^{\left(\frac{35}{2}\right)}}{299085416708203125} - \\
& - \frac{245817524\,x^{17}}{381285568882968 75} + \frac{32\,x^{\left(\frac{33}{2}\right)}}{2642024385} + \frac{405952\,x^{16}}{40123692984375} - \frac{15242768\,x^{\left(\frac{31}{2}\right)}}{144207352414125} - \frac{256\,x^{15}}{39734296875} + \frac{7874656\,x^{\left(\frac{29}{2}\right)}}{17942850300375} - \frac{4\,x^{14}}{26687115} - \frac{509312\,x^{\left(\frac{27}{2}\right)}}{581502796875} + \\
& + \frac{32\,x^{13}}{11437335} + \frac{256\,x^{\left(\frac{25}{2}\right)}}{378421875} - \frac{32012\,x^{12}}{1762732125} + \frac{2848\,x^{11}}{57432375} - \frac{8\,x^{\left(\frac{21}{2}\right)}}{293265} - \frac{32\,x^{10}}{658125} + \frac{16\,x^{\left(\frac{19}{2}\right)}}{41895} - \frac{656\,x^{\left(\frac{17}{2}\right)}}{401625} + \frac{32\,x^{\left(\frac{15}{2}\right)}}{14625} - \frac{2\,x^{7}}{735} + \frac{8\,x^{6}}{315} - \frac{4\,x^{5}}{75} - \frac{4\,x^{\left(\frac{7}{2}\right)}}{35} + \frac{8\,x^{\left(\frac{5}{2}\right)}}{15} - 1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2(x) = {} & \frac{8\,x^{\left(\frac{51}{2}\right)}}{16719489917031825} - \frac{765328\,x^{\left(\frac{49}{2}\right)}}{570872230725948401 25} + \frac{1312571672\,x^{\left(\frac{47}{2}\right)}}{833257091291387950687 5} - \frac{97602780976\,x^{\left(\frac{45}{2}\right)}}{967967786314769669178 75} + \frac{2\,x^{22}}{6690472155675} + \\
& + \frac{459428946752\,x^{\left(\frac{43}{2}\right)}}{120779367536948524779375} - \frac{25216\,x^{21}}{3541171333825125} - \frac{1008305818496\,x^{\left(\frac{41}{2}\right)}}{119069649492947231203125} + \frac{66170558\,x^{20}}{958317528799756125} + \frac{256\,x^{\left(\frac{39}{2}\right)}}{24825696328125} - \frac{93944624\,x^{19}}{268658297547514875} + \\
& + \frac{101148332\,x^{\left(\frac{37}{2}\right)}}{761638571293359375} + \frac{2910672976\,x^{18}}{297860286411375187 5} - \frac{3464\,x^{\left(\frac{35}{2}\right)}}{1276097777955} - \frac{64\,x^{17}}{44730984375} + \frac{4284008\,x^{\left(\frac{33}{2}\right)}}{205868427239475} + \frac{64\,x^{16}}{74551640625} - \frac{33732368\,x^{\left(\frac{31}{2}\right)}}{432622057242375} + \frac{x^{15}}{22365315} + \\
& + \frac{256\,x^{\left(\frac{29}{2}\right)}}{1789239375} - \frac{548\,x^{14}}{789176115} - \frac{512\,x^{\left(\frac{27}{2}\right)}}{4970109375} + \frac{34414\,x^{13}}{8749561275} - \frac{128\,x^{12}}{13253625} + \frac{2\,x^{\left(\frac{23}{2}\right)}}{213003} + \frac{64\,x^{11}}{7363125} - \frac{284\,x^{\left(\frac{21}{2}\right)}}{2639385} + \frac{32\,x^{\left(\frac{19}{2}\right)}}{80325} - \frac{64\,x^{\left(\frac{17}{2}\right)}}{133875} + \frac{x^{8}}{882} - \frac{8\,x^{7}}{945} + \frac{8\,x^{6}}{525} + \\
& + \frac{4\,x^{\left(\frac{9}{2}\right)}}{63} - \frac{8\,x^{\left(\frac{7}{2}\right)}}{35} + x.
\end{aligned}
$$

Анализируя полученные частные решения, приходим к выводу, что установить по ним закономерность конструкции не просто. Поэтому подвергнем такому анализу вычисленные слагаемые $\Xi_3(-1)$ и $\Xi_3(-2)$. Это позволяет установить следующие закономерности:

$$
\Xi_k(-1) = \sum_{i=0}^{k+1} b_{i,k}\, x^{\left(\frac{5k}{2}+\frac{5}{2}+i\right)}, \quad \Xi_k(-2) = \sum_{i=0}^{k+1} c_{i,k}\, x^{\left(\frac{5k}{2}+\frac{7}{2}+i\right)},
$$

k — натуральное число.

В этом случае частные решения определяются формулами

$$
y_1(x) = -1 + \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=0}^{k+1} b_{i,k}\, x^{\left(\frac{5k}{2}+\frac{5}{2}+i\right)},
$$

$$
y_2(x) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=0}^{k+1} r_{i,k}\, x^{\left(\frac{5k}{2}+\frac{7}{2}+i\right)} + x,
$$

где $r_{i,k} = b_{i,k} - c_{i,k}$.

Подставляя полученные решения в исходное уравнение (7.24), устанавливаем рекуррентные уравнения для определения числовых коэффициентов $r_{i,k}$, $b_{i,k}$:

$$
(5k + 5 + 2i)(5k + 3 + 2i)\, b_{i,k} - 4b_{i-1,k-1} + 8b_{i,k-1} = 0, \tag{7.25}
$$

$$
(5k + 7 + 2i)(5k + 5 + 2i)\, r_{i,k} - 4r_{i-1,k-1} + 8r_{i,k-1} = 0. \tag{7.26}
$$

Таким образом, искомое общее решение ОДУ (7.40) равно

$$y = C_1\left(-1 + \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{k+1} b_{i,k}\, x^{\left(\frac{5k}{2}+\frac{5}{2}+i\right)}\right) + C_2\left(\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{k+1} r_{i,k}\, x^{\left(\frac{5k}{2}+\frac{7}{2}+i\right)} + x\right),$$

где числовые коэффициенты $r_{i,k}$, $b_{i,k}$ определяются формулами (7.25), (7.26). Задача решена.

▶ **Пример 7.** Общее решение линейного ОДУ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y = \frac{1}{(x+1)^2} y \tag{7.27}$$

определяется формулой

$$y = C_1 (x+1)^{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)} + C_2 (x+1)^{\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)}. \tag{7.28}$$

Определить частное решение и оценить эффективность схождения такого ряда по сравнению с точным решением (7.28).

Р е ш е н и е. Используя написанную программу и вводя равенства

$$\xi_k(-1) = \Xi_k(-1),\ \xi_k(-2) = \Xi_k(-2) \text{ для всех } k = 0,\ 1,\ 2\ldots,$$

устанавливаем искомые значения $\xi_k(-s)$, $s = 1,\ 2$ от $k = 0$ до $k = 6$:

$$\Xi_0(-1) = \ln(x+1),$$

$$\Xi_1(-1) = -\frac{\ln(x+1)^2}{2} - \ln(x+1) - 2,$$

$$\Xi_2(-1) = \frac{\ln(x+1)^3}{6} + \ln(x+1)^2 + 4\ln(x+1) + 6,$$

$$\Xi_3(-1) = -\frac{\ln(x+1)^3}{2} - \frac{7\ln(x+1)^2}{2} - 13\ln(x+1) - 22 - \frac{\ln(x+1)^4}{24},$$

$$\Xi_4(-1) = 46\ln(x+1) + \frac{\ln(x+1)^5}{120} + 12\ln(x+1)^2 + \frac{11\ln(x+1)^3}{6} + 80 + \frac{\ln(x+1)^4}{6},$$

$$\Xi_5(-1) = -\frac{\ln(x+1)^5}{24} - 166\ln(x+1) - 43\ln(x+1)^2 - \frac{20\ln(x+1)^3}{3} - \frac{2\ln(x+1)^4}{3} - 296 - \frac{\ln(x+1)^6}{720},$$

$$\Xi_6(-1) = 1106 + \frac{\ln(x+1)^6}{120} + 610\ln(x+1) + 157\ln(x+1)^2 + \frac{11\ln(x+1)^5}{60} + \frac{74\ln(x+1)^3}{3} + \frac{31\ln(x+1)^4}{12} + \frac{\ln(x+1)^7}{5040};$$

$$\Xi_0(-2) = 2\ln(x+1)(x+1) - 2x - 2,$$

$$\Xi_1(-2) = -4\ln(x+1)x - 4\ln(x+1) + 4x + 4,$$

$$\Xi_2(-2) = -14 - 14x + 14\ln(x+1) + 14\ln(x+1)x - \ln(x+1)^2 - \ln(x+1)^2 x + \frac{\ln(x+1)^3}{3} + \frac{\ln(x+1)^3 x}{3},$$

$$\Xi_3(-2) = 48 + 48x - 48\ln(x+1) - 48\ln(x+1)x + 4\ln(x+1)^2 + 4\ln(x+1)^2 x - \frac{4\ln(x+1)^3}{3} - \frac{4\ln(x+1)^3 x}{3},$$

$$\Xi_4(-2) = -172 - 172x + 172\ln(x+1) + 172\ln(x+1)x + \frac{\ln(x+1)^5}{60} - 16\ln(x+1)^2 - 16\ln(x+1)^2 x +$$
$$+ \frac{16\ln(x+1)^3}{3} + \frac{\ln(x+1)^5 x}{60} + \frac{16\ln(x+1)^3 x}{3} - \frac{\ln(x+1)^4}{12} - \frac{\ln(x+1)^4 x}{12},$$

$$\Xi_5(-2) = -628 + 628x - 628\ln(x+1) - 628\ln(x+1)\,x - \frac{\ln(x+1)^5}{10} + 62\ln(x+1)^2 + 62\ln(x+1)^2 x -$$
$$-\frac{62\ln(x+1)^3}{3} - \frac{\ln(x+1)^5 x}{10} - \frac{62\ln(x+1)^3 x}{3} + \frac{\ln(x+1)^4}{2} + \frac{\ln(x+1)^4 x}{2},$$
$$\Xi_6(-2) = -2326 + 2326x + 2326\ln(x+1) + 2326\ln(x+1)\,x + \frac{29\ln(x+1)^5}{60} - 239\ln(x+1)^2 - 239\ln(x+1)^2 x +$$
$$+\frac{239\ln(x+1)^3}{3} + \frac{29\ln(x+1)^5 x}{60} + \frac{239\ln(x+1)^3 x}{3} - \frac{29\ln(x+1)^4}{12} - \frac{29\ln(x+1)^4 x}{12} + \frac{\ln(x+1)^7 x}{2520} - \frac{\ln(x+1)^6 x}{360} - \frac{\ln(x+1)^6}{360} + \frac{\ln(x+1)^7}{2520}.$$

$$y_1(x) = 871 + 481\ln(x+1) + \frac{3\ln(x+1)^5}{20} + 123\ln(x+1)^2 + \frac{39\ln(x+1)^3}{2} + \frac{49\ln(x+1)^4}{24} + \frac{\ln(x+1)^6}{144} + \frac{\ln(x+1)^7}{5040},$$
$$y_2(x) = \left(-2705 + 1353\ln(x+1) - 313\ln(x+1)^2 + \frac{\ln(x+1)^5}{4} + \frac{263\ln(x+1)^3}{6} - \frac{97\ln(x+1)^4}{24} + \frac{\ln(x+1)^7}{5040} - \frac{7\ln(x+1)^6}{720}\right)x - 1834 - \frac{\ln(x+1)^6}{360} +$$
$$+ 1834\ln(x+1) + \frac{190\ln(x+1)^3}{3} + \frac{2\ln(x+1)^5}{5} - 190\ln(x+1)^2 - 2\ln(x+1)^4 + \frac{\ln(x+1)^7}{2520}.$$

Анализируя полученные решения, устанавливаем, что формула для первого решения может быть представлена в виде:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \ln(x+1)^i, \tag{7.29}$$

где b_i — искомые числовые коэффициенты.

Для определения b_i подставляем формулу (7.29) в исходное ОДУ (7.27):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i \ln(x+1)^i\right) - \frac{1}{(x+1)^2}\sum_{i=0}^{\infty} b_i \ln(x+1)^i = 0.$$

Раскрывая это равенство, получим:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(x+1)^2\ln(x+1)^2}\cdot\left(-i\,b_i \ln(x+1)^{(i+1)} - b_i \ln(x+1)^i\, i + b_i \ln(x+1)^i\, i^2\right) - \frac{1}{(x+1)^2} b_i \ln(x+1)^i\right).$$

Отсюда, используя ранее описанную методику, получаем рекуррентное уравнение

$$i(i-1)\,b_i + (-i+1)\,b_{i-1} - b_{i-2} = 0. \tag{7.30}$$

Для определения эффективности, т. е. скорости схождения частного решения (7.29), с учетом (7.30) написана **ПРОГРАММА вычисления относительной ошибки:**

$$\left|\frac{\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}y - \dfrac{1}{(x+1)^2}y}{\dfrac{1}{(x+1)^2}y}\right| \leqslant \delta$$

частного решения (7.29), где коэффициенты b_i определяются формулой (7.30).

```
> restart:N:=26:
> alias(y=y(x),a=a(x)):a:=1/(x+1)^2:yr:= diff(y,x$2)=a*y;b[0]:=871:b[1]:=481:
> for i from 0 to N do b[i+2] := (-(-i-1)*b[i+1]+b[i])/((i+2)*(i+1)) end do
> Y:=y =add(b[i]*ln(x+1)^i,i = 0.. N);
> K0:=0:K1:=10;
> dy:=expand(subs(Y,(lhs(yr)-rhs(yr))/(a*y))):for z from K0 to K1 do he(z):=evalf(subs(x=z,dy)) od:with(plots):
  s:='s':for s from K0 to K1 do if abs(he(s))<1 then print(he(s),x=s) else he(s):=(he(s)) fi od:s:='s':
  x:='x':print(yr);print(pointplot({seq([n,(he(n))],n=K0..K1)},numpoints=30,axes=BOXED,color=red,xtickmarks=20,
  ytickmarks=20,scaling=UNCONSTRAINED,title="ГРАФИК ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ""")):
```

Относительная точность для заданных значений x в интервале от –10 до 10.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}y = \frac{y}{(x+1)^2}$$

$$y = 871 + 481\ln(x+1) + 676\ln(x+1)^2 + \frac{611}{20}\ln(x+1)^3 + \frac{3185}{24}\ln(x+1)^4 + \frac{2509}{60}\ln(x+1)^5 + \frac{8203}{720}\ln(x+1)^6 + \frac{1469}{560}\ln(x+1)^7 + \frac{1339}{2520}\ln(x+1)^8 + $$
$$+ \frac{6929}{72576}\ln(x+1)^9 + \frac{56069}{3628800}\ln(x+1)^{10} + \frac{15119}{6652800}\ln(x+1)^{11} + \frac{20969}{68428800}\ln(x+1)^{12} + \frac{18269}{479001600}\ln(x+1)^{13} + \frac{739}{167650560}\ln(x+1)^{14} +$$
$$+ \frac{15943}{33530112000}\ln(x+1)^{15} + \frac{77389}{1609445376000}\ln(x+1)^{16} + \frac{62609}{13680285696000}\ln(x+1)^{17} + \frac{202607}{492490285056000}\ln(x+1)^{18} + \frac{1457}{41588068515840}\ln(x+1)^{19} +$$
$$+ \frac{37}{13054290480000}\ln(x+1)^{20} + \frac{858257}{393007247474688 0000}\ln(x+1)^{21} + \frac{1388689}{8646159444443136 0000}\ln(x+1)^{22} + \frac{374491}{3314361120369868 80000}\ln(x+1)^{23} +$$
$$+ \frac{727127}{954536002666522214 4000}\ln(x+1)^{24} + \frac{5882581}{11931700033331527680 00000}\ln(x+1)^{25} + \frac{1189777}{38778025108327464960 00000}\ln(x+1)^{26}$$

$$\begin{array}{l}
-0.,\ x = 0\\
-0.8239920116 \cdot 10^{-24},\ x = 1\\
-0.4782780812 \cdot 10^{-19},\ x = 2\\
-0.1049226610 \cdot 10^{-16},\ x = 3\\
-0.3115563645 \cdot 10^{-15},\ x = 4\\
-0.3434897659 \cdot 10^{-14},\ x = 5\\
-0.2124522542 \cdot 10^{-13},\ x = 6\\
-0.9048828483 \cdot 10^{-13},\ x = 7\\
-0.2979190031 \cdot 10^{-12},\ x = 8\\
-0.8132629957 \cdot 10^{-24},\ x = 9\\
-0.1927480134 \cdot 10^{-11},\ x = 10
\end{array}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}y = \frac{y}{(x+1)^2}.$$

Как видим, уже при $N = 26$ точность вычислений достаточна для любых практических приложений.

Для сравнения эффективности полученного решения и точного частного решения, например:

$$y = (x+1)^{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}$$

разложим это решение в ряд до $N = 26$

$$y = 1.618033988x + .4999999992x^2 + 1. + .1452538823\text{e-}3x^{22} - .6366100191\text{e-}1x^3 + .2199433523\text{e-}1x^4 - .1047795179\text{e-}1x^5 + \\ + .5906012806\text{e-}2x^6 - .3697135339\text{e-}2x^7 + .2487232093\text{e-}2x^8 - .1763714520\text{e-}2x^9 + .1301968064\text{e-}2x^{10} - .9920956424\text{e-}3x^{11} + \\ + .7756506330\text{e-}3x^{12} - .6194445006\text{e-}3x^{13} + .5036068751\text{e-}3x^{14} - .4157095473\text{e-}3x^{15} + .3476881895\text{e-}3x^{16} - .2941435132\text{e-}3x^{17} + \\ + .2513614180\text{e-}3x^{18} - .2167260109\text{e-}3x^{19} + .1883562077\text{e-}3x^{20} - .1648741623\text{e-}3^{21} - .1287199866\text{e-}3x^{23} + .1146785991\text{e-}3^{24} - \\ - .1026693003\text{e-}3x^{25}$$

Представим программу, вычисляющую относительную ошибку для этого частного решения на том же интервале изменения x от –10 до 10 для точного решения, представленного в виде ряда до 26 члена включительно:

```
> restart:
> alias(y=y(x),a=a(x)):a:=1/(x+1)^2:yr:= diff(y,x$2)=1/(x+1)^2*y;
> Y:=y=1.618033988*x+.4999999992*x^2+1.+.1452538823e-3*x^22-.6366100191e-1*x^3+.2199433523e-1*x^4-.1047795179e-1*
  x^5+.5906012806e-2*x^6-.3697135339e-2*x^7+.2487232093e-2*x^8-.1763714520e-2*x^9+.1301968064e-2*x^10-
  .9920956424e-3*x^11+.7756506330e-3*x^12-.6194445006e-3*x^13+.5036068751e-3*x^14-.4157095473e-3*x^15+
  .3476881895e-3*x^16-.2941435132e-3*x^17+.2513614180e-3*x^18-.2167260109e-3*x^19+.1883562077e-3*x^20-
  .1648741623e-3*x^21-.1287199866e-3*x^23+.1146785991e-3*x^24-.1026693003e-3*x^25:
> K0:=0:K1:=10:
> dy:=expand(subs(Y,(lhs(yr)-rhs(yr))/(a*y))):for z from K0 to K1 do he(z):=evalf(subs(x=z,dy)) od:with(plots):
  s:='s':for s from K0 to K1 do if abs(he(s))<1 then print(he(s),x=s) else he(s):=(he(s)) fi od:s:='s': x:='x':
  print(yr);print(pointplot({seq([n,(he(n))],n=K0..K1)},numpoints=30,axes=BOXED,color=red,xtickmarks=20,ytickmarks
  =20,scaling=UNCONSTRAINED,title="ГРАФИК ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ""")));
```

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}y = \frac{y}{(x+1)^2}$$

$$-0.16 \cdot 10^{-8},\ x = 0$$
$$-0.03958740349,\ x = 1$$

Выводы. Эффективность полученного нами решения выше скорости схождения точного решения более чем в пять раз. Задача решена.

▶ **Пример 8.** Получить с относительной точностью $\delta = 10^{(-4)}$:

$$\left|\frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}y\right) - ay}{ay}\right| < \delta$$

в интервале [–3; 3] оба частных решения линейного ОДУ:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y = (x^4 - 2x^2 + x - 3)\,y.$$

Р е ш е н и е: На основании разработанной теории решения линейных ОДУ второго порядка была написана еще одна **ПРОГРАММА вычисления частных решений линейного ОДУ:**

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y = ay,$$

$a = a(x)$ — заданная функция с относительной ошибкой, не превышающей значение δ**:**

$$\left| \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y\right) - ay}{ay} \right| < \delta$$

в интервале [K0, K1] изменения независимой переменной x.

```
> restart:alias(C=binomial,ex=expand,y=y(x)):
> N:=16;a[1](x):=0:a[2](x):=x^4-2*x^2+x-3:
> yr:=diff(y,x$2)=a[1](x)*diff(y,x)+a[2](x)*y;
> b[1](x):= -a[1](x):b[2](x):= a[2](x)-diff(a[1](x),x):
> for k from 0 to N do
> dn:= proc (n::integer, w) local k, Ds; global resd, x; option remember; if n = 0 then resd:=w elif 0<n then resd:=
  diff(w,'$'(x,n)) else Ds:= w; for k to -n do Ds:= int(Ds,x) end do; resd:= Ds end if; RETURN(resd) end proc:
> R:=H->add(dn(l-2,H)*b[2-l](x),l = 0.. 1):
> G[0]:=b[2](x):P(-1):=0:G[-1]:=0:
> for s to k+1 do G[s]:=R(G[s-1]) od;
```

$> P(k):=\mathrm{add}(\xi_{k-s-1}(-1)P(s),\ s=0..k-1) - \mathrm{add}(\xi_{k-s-1}(-2)G_s,\ s=0..k-1)$

$> \xi_k(-1):=\mathrm{dn}(-1,\ -\int G_k\,dx - P(k)) - \mathrm{add}(\xi_{k-s-1}(-1)\,\mathrm{dn}(-1,\ -\int G_s\,dx - P(s)),\ s=0..k-1) -$
$\mathrm{add}(\xi_{k-s-1}(-2)\,\mathrm{dn}(-1,\ G_s),\ s=0..k-1)$

$> \xi_k(-2):=\mathrm{dn}(-1,\ -2\int G_k\,dx - P(k)) - \mathrm{add}(\xi_{k-s-1}(-1)\,\mathrm{dn}(-2,\ -2\int G_s\,dx - P(s)),\ s=0..k-1) -$
$\mathrm{add}(\xi_{k-s-1}(-2)\,\mathrm{dn}(-2,\ G_s),\ s=0..k-1)$

```
> od:
> z1:=alpha(-1)=ex(ex(ex(ex(ex(ex(value(add(xi[k](-1),k=0..N)))))))):
> z2:=alpha(-2)=ex(ex(ex(ex(ex(ex(value(add(xi[k](-2),k=0..N)))))))):
> Y1:=y=-1+rhs(z1);
> K0:=-10.1:K:=10.1:
```

```
> dy:=subs(Y1,(lhs(yr)-rhs(yr))/(a[2](x)*y)):for s from K0 to K do he(s):=evalf(subs(x=s,dy)) od:with(plots):
  s:='s':for s from K0 to K do if abs(he(s))<1 then print(he(s),x=s) else he(s):=(he(s)) fi od:s:='s': x:='x':
  print(yr);print(pointplot({seq([n,(he(n))],n=K0..K)},numpoints=30,axes=BOXED,color=red,xtickmarks=20,ytickmarks=
  20,scaling=UNCONSTRAINED,title=“""")); 
> print("##############################################");
> Y2:=y=expand(rhs(z2)-rhs(z1)*x+x);
> dy:=subs(Y2,(lhs(yr)-rhs(yr))/(a[2](x)*y)):for s from K0 to K do he(s):=evalf(subs(x=s,dy)) od:with(plots):
  s:='s':for s from K0 to K do if abs(he(s))<1 then print(he(s),x=s) else he(s):=(he(s)) fi od:s:='s': x:='x':
  print(yr);print(pointplot({seq([n,(he(n))],n=K0..K)},numpoints=30,axes=BOXED,color=red,xtickmarks=20,ytickmarks=
  20,scaling=UNCONSTRAINED,title=“ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ОШИБКА"""));
> print("##############################################");
```

Используя эту программу, приводим оба частных решения исходного ОДУ, которые удовлетворяют на заданном интервале поставленным условиям. Кроме того, приводятся графики изменения относительной точности для каждого из частных решений в заданном интервале.

$$N = 10,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y = (x^4 - 2x^2 + x - 3)\, y.$$

Первое частное решение, удовлетворяющее указанным условиям, определяется формулой

$$y_1(x) = -1 + \sum_{i=1}^{N} g_i x^i,$$

где $g_1 = 0$, $g_2 = \frac{3}{2}$, $g_3 = -\frac{5}{24}$, $g_4 = \frac{1}{10}$ и т. д., согласно приведенной программе. Распечатка решения ввиду громоздкости не приводится.

Относительная ошибка этого первого частного решения, при заданных значениях независимой переменной, определяется следующими значениями в конкретных точках:

$$0.00001440608857,\ x = -3.1$$
$$-0.2477354033 \cdot 10^{-7},\ x = -2.1$$
$$-0.8060318022 \cdot 10^{-9},\ x = -1.1$$
$$0.3777416540 \cdot 10^{-9},\ x = -0.1$$
$$-0.5594933129 \cdot 10^{-8},\ x = 0.9$$
$$-0.5933001644 \cdot 10^{-8},\ x = 1.9$$
$$-.4697685561e\text{-}7,\ x = 2.9$$

"##"

Второе частное решение, удовлетворяющее указанным условиям, определяется формулой

$$y_2(x) = x + \sum_{i=3}^{N} b_i x^i,$$

где $b_3 = -\frac{1}{2}$, $b_4 = \frac{1}{12}$, $b_5 = -\frac{1}{40}$, $b_6 = -\frac{1}{40}$ и т. д., согласно программе. Здесь тоже ввиду громоздкости явный вид решения не приводится.

Относительная ошибка полученного второго частного решения, при заданных значениях независимой переменной, определяется следующими значениями:

$$0.2391000929 \cdot 10^{-5},\ x = -3.1$$
$$-0.3276463183 \cdot 10^{-7},\ x = -2.1$$
$$-0.1012319411 \cdot 10^{-8},\ x = -1.1$$
$$-0.9046644911 \cdot 10^{-47},\ x = -0.1$$
$$0.8631757216 \cdot 10^{-14},\ x = 0.9$$
$$0.2323828797 \cdot 10^{-7},\ x = 1.9$$
$$-0.5897879005 \cdot 10^{-6},\ x = 2.9$$

"##"

Как видим, полученные решения удовлетворяют на заданном интервале требуемой точности уже при десяти членах ряда. Задача решена.

▶ **Пример 9.** Получить с относительной точностью $\delta = 10^{(-5)}$:

$$\left| \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} y - a y}{a y} \right| < \delta$$

в интервале [1,3] оба частных решения линейного ОДУ:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y = x \ln(x)\, y.$$

Р е ш е н и е. Используя представленную ПРОГРАММУ, получаем для $N := 6$, что первое частное решение, удовлетворяющее поставленным требованиям, равно:

$$y_1 = -1 - \frac{1}{6} x^3 \ln(x) + \frac{5x^3}{36} - \frac{85308991709454773543 81\, x^{18}}{19341986111374012527591456768000000} - \frac{1}{180} x^6 \ln(x)^2 + \frac{47}{5400} x^6 \ln(x) - \frac{457\, x^6}{162000} + \frac{158087}{1450507012061184000} x^{21} \ln(x)^6 -$$
$$- \frac{20819858459}{949356839394044928000000} x^{21} \ln(x)^5 + \frac{6868106068749683}{298249944664033154580480000000} x^{21} \ln(x)^4 - \frac{128091145386350353 09}{936982026156526558430035968000000} x^{21} \ln(x)^3 +$$
$$- \frac{2559356429799391719648 67}{557504305563133302265871400960000000000} x^{21} \ln(x)^2 - \frac{160418588058346007732585249}{199029037086038588908916090142720000000000} x^{21} \ln(x) + \frac{227699}{5755980206592000} x^{18} \ln(x)^5 -$$
$$- \frac{831400613}{12557630150714880000} x^{18} \ln(x)^4 + \frac{434196781485847}{78902101762971734016000000} x^{18} \ln(x)^3 - \frac{14895472681408190009}{619697107246379998961664000000} x^{18} \ln(x)^2 +$$
$$+ \frac{115695755979527481162 17}{221231867286957659629314048000000 0} x^{18} \ln(x) - \frac{1}{12960} x^9 \ln(x)^3 + \frac{91}{518400} x^9 \ln(x)^2 - \frac{1199}{10368000} x^9 \ln(x) + \frac{5581\, x^9}{248832000} - \frac{1}{1710720} x^{12} \ln(x)^4 +$$
$$+ \frac{3923}{2258150400} x^{12} \ln(x)^3 - \frac{429991}{248396544000} x^{12} \ln(x)^2 + \frac{91046557}{131153375232000} x^{12} \ln(x) - \frac{328000063\, x^{12}}{3462449106124800} - \frac{1}{46170964224000} x^{21} \ln(x)^7 -$$

$$
-\frac{1}{109930867200}x^{18}\ln(x)^6-\frac{1}{359251200}x^{15}\ln(x)^5+\frac{33841}{3319481088000}x^{15}\ln(x)^4-\frac{104356993}{7668001313280000}x^{15}\ln(x)^3+\frac{394947097471}{47234888089804800000}x^{15}\ln(x)^2-
$$

$$
-\frac{57504306348079}{242472425527664640000000}x^{15}\ln(x)+\frac{3786437592072193\,x^{15}}{1527576280824287232000000}+\frac{4749781619515420629206844829\,x^{21}}{835921955761362073417447578599424000000000}.
$$

Значения относительной погрешности, для первого решения

$$
\begin{gathered}
0.5689094752\cdot 10^{-10},\ x=1.1\\
0.7943952838\cdot 10^{-9},\ x=2.1\\
0.1673119868\cdot 10^{-5},\ x=3.1
\end{gathered}
$$

"###"

Второе частное решение, удовлетворяющее поставленным требованиям:

$$
y_2=x+\frac{7653956271419821001328287 3}{485357121663778101182425496970854400000 0}x^{22}\ln(x)^3+\frac{1}{12}x^4\ln(x)-\frac{7x^4}{144}+\frac{13904886805637}{46590091331256821956608000 0}x^{22}\ln(x)^5+
$$

$$
+\frac{409044628581278169705788962367557 1}{4986448018264219539118689016924851174113280000000}x^{22}\ln(x)-\frac{166534928990201124180455100 47}{336131346269399934688704616363720704000000 0}x^{22}\ln(x)^2+\frac{1}{504}x^7\ln(x)^2-
$$

$$
-\frac{101}{42336}x^7\ln(x)+\frac{1145\,x^7}{1778112}+\frac{1}{268334780313600}x^{22}\ln(x)^7+\frac{1}{580811212800}x^{19}\ln(x)^6-\frac{609763200636373497 37}{212663267287001639230254612480000 0}x^{22}\ln(x)^4-
$$

$$
-\frac{1206249332648687}{1646846632867580411904000 00}x^{19}\ln(x)^3+\frac{480122968226858707 3}{162708447327316944696115200000 0}x^{19}\ln(x)^2+\frac{1}{45360}x^{10}\ln(x)^3-\frac{257}{6350400}x^{10}\ln(x)^2+
$$

$$
+\frac{10123}{444528000}x^{10}\ln(x)-\frac{5791\,x^{10}}{1481760000}-\frac{797868478177609\,x^{16}}{26284643275946065920000000}+\frac{1}{1698278400}x^{16}\ln(x)^5-\frac{68197}{37090400256000}x^{16}\ln(x)^4+
$$

$$
+\frac{438441901}{202513585397760000}x^{16}\ln(x)^3-\frac{36118962017}{300877326876672000 00}x^{16}\ln(x)^2+\frac{34219823279399}{1095193469831086080000 00}x^{16}\ln(x)+\frac{1}{7076160}x^{13}\ln(x)^4-
$$

$$
-\frac{13523}{38635833600}x^{13}\ln(x)^3+\frac{21332947}{70317217152000}x^{13}\ln(x)^2-\frac{2984473133}{27423714689280000}x^{13}\ln(x)+\frac{11594425933\,x^{13}}{855619898305536000}-
$$

$$
-\frac{634618227756454789951}{10599293140179503825918361600000 00}x^{19}\ln(x)+\frac{120578906286632276491549\,x^{19}}{2537470777758973215924855767040000000}-\frac{521701}{80337806954496000}x^{19}\ln(x)^5+
$$

$$
+\frac{26925528179}{277808136448647168000 0}x^{19}\ln(x)^4-\frac{2529577527686026083063905502939244 9\,x^{22}}{46074779688791388541456686516385624848806707200 0000}-\frac{20190013}{122483020482824601600 0}x^{22}\ln(x)^6.
$$

Значения относительной погрешности, для второго решения

$$
\begin{gathered}
0.,\ x=1.1\\
-0.2730613555\cdot 10^{-9},\ x=2.1\\
0.1017074219\cdot 10^{-6},\ x=3.1
\end{gathered}
$$

"###"

Задача решена.

▶ **Пример 10.** Задано линейное ОДУ:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y = \frac{\partial}{\partial x} y + x e^x y. \tag{7.31}$$

Найти его общее решение.

Р е ш е н и е. Преобразованием

$$y = Z(x) e^{\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{7.32}$$

уравнение (7.31) приводится к виду:

$$\frac{d^2}{dx^2} Z(x) = \left(\frac{1}{4} + x e^x\right) Z(x). \tag{7.33}$$

Посредством приведенной ранее программы для частных решений ОДУ (7.33) получаем:

$$Z_1(x) = -\frac{x^8}{10321920} - \frac{x^6}{46080} - \frac{x^4}{384} - \frac{x^2}{8} + \left(-\frac{x^7}{46080} + \frac{7x^6}{23040} - \frac{23x^5}{3840} + \frac{11x^4}{192} - \frac{13x^3}{24} + 3x^2 - \frac{23x}{2} + 20\right)e^x +$$
$$+ \left(-\frac{x^6}{1536} + \frac{x^5}{96} - \frac{391x^4}{3072} + \frac{117x^3}{128} - \frac{135x^2}{32} + \frac{1325x}{128} - \frac{1085}{128}\right)e^{(2x)} + \left(-\frac{x^5}{288} + \frac{5x^4}{108} - \frac{1603x^3}{5184} + \frac{923x^2}{864} - \frac{6389x}{3888} + \frac{559}{648}\right)e^{(3x)} +$$
$$+ \left(-\frac{x^4}{576} + \frac{x^3}{72} - \frac{265x^2}{6912} + \frac{899x}{20736} - \frac{2801}{165888}\right)e^{(4x)} - 1,$$

$$Z_2(x) = \frac{x^9}{92897280} + \frac{x^7}{322560} + \frac{x^5}{1920} + \frac{x^3}{24} + x + \left(\frac{x^6}{864} - \frac{17x^5}{864} + \frac{337x^4}{1728} - \frac{973x^3}{864} + \frac{9287x^2}{2592} - \frac{124525x}{23328} + \frac{97475}{34992}\right)e^{(3x)} +$$
$$+ \left(\frac{x^7}{7680} - \frac{19x^6}{7680} + \frac{199x^5}{5120} - \frac{571x^4}{1536} + \frac{335x^3}{128} - \frac{2969x^2}{256} + \frac{3539x}{128} - \frac{361}{16}\right)e^{(2x)} + \left(\frac{x^8}{322560} - \frac{x^7}{20160} + \frac{3x^6}{2560} - \frac{13x^5}{960} + \frac{x^4}{6} - \frac{5x^3}{4} + \frac{31x^2}{4} - 28x + 48\right)e^x +$$
$$+ \left(\frac{x^5}{576} - \frac{73x^4}{3456} + \frac{715x^3}{6912} - \frac{4949x^2}{20736} + \frac{125423x}{497664} - \frac{95729}{995328}\right)e^{(4x)}.$$

Отсюда следует следующее представление для искомых решений:

$$Z_1(x) = \sum_{i=0}^{k} e^{(ix)} \sum_{j=0}^{k-i} b_{i,j} x^j, \tag{7.34}$$

$$Z_2(x) = \sum_{i=0}^{k} e^{(ix)} \sum_{j=0}^{k-i} c_{i,j} x^{(j+1)}, \tag{7.35}$$

где $b_{i,j}$, $c_{i,j}$ — искомые числовые коэффициенты, k — параметр, определяющий количество слагаемых.

Для определения заданных числовых коэффициентов поочередно подставляем значения (7.34), (7.35) в ОДУ (7.33).

Таким образом, общее решение с учетом формул (7.34), (7.35) и (7.32) принимает вид:

$$y = \left(C_1 \sum_{i=0}^{N} e^{(ix)} \sum_{j=0}^{N-i} b_{i,j} x^j + C_2 \sum_{i=0}^{N} e^{(ix)} \sum_{j=0}^{N-i} c_{i,j} x^{(j+1)}\right) e^{\left(\frac{x}{2}\right)},$$

где N — достаточно большое натуральное число, в пределе стремящееся к бесконечности, а числовые коэффициенты $b_{i,j}$, $c_{i,j}$ определяются методикой, аналогичной ранее решенным примерам.

Решение приведенных примеров позволяет сделать вывод, что при использовании данного метода замена переменных необходима в основном для того, чтобы избавиться от первой производной, так как в приведенной форме (6.1) исходное ОДУ решается гораздо точнее из-за того, что уменьшается количество слагаемых в формулах для $\xi_k(-s)$, $s = 1, 2$, поскольку при вычислении те слагаемые, которые зависят от $a_1(x)$, равны нулю.

8. ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОДУ ПОРЯДКА m

8.1. Введение

В соответствии с ОПРЕДЕЛЕНИЕМ 1.1 **общее решение линейного однородного ОДУ порядка m**

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} y = \sum_{p=1}^{m} a_p(x) \frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}} y, \tag{8.1}$$

где $y = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)\}$ — искомая функция, а $a_p(x)$ — заданные функции, необходимо искать в форме

$$y = F(x, \alpha(x)), \tag{8.2}$$

где $F(x, \alpha) = \{F_1(x, \alpha), \dots, F_m(x, \alpha)\}$ — искомый функционал, $\alpha = \{\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_m(x)\}$ — аналитическая функция, представляемая в форме

$$\alpha_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_{k,j}(x), \quad k = 1, 2, 3 \,..\, m, \tag{8.3}$$

где функции $\xi_{k,j}(x)$, определяются однозначно видом исходных коэффициентов: $a_k(x)$, $k = 1, 2, 3 \,..\, m$ по установленным формулам.

Таким образом, задача построения общего алгоритма решения линейных ОДУ вида (8.1) состоит из двух основных задач:

- **определение линейной формы представления искомых частных решений (8.2);**
- **определение функций $\xi_{i,j}(x)$ из (8.3).**

Рассмотрим решение каждой задачи отдельно.

8.2. Сопряженное уравнение

Так как на примере линейного ОДУ второго порядка (6.1) была установлена определяющая связь между исходным уравнением и его сопряженным аналогом, то есть смысл общий подход к интегрированию ОДУ (8.1) начать с определения его сопряженного уравнения.

Пусть задано линейное, в общем случае неоднородное ЛДУ порядка m.

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} Z = \sum_{p=1}^{m} b_p(x) \frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}} Z, \quad Z = Z(x). \tag{8.4}$$

Докажем Утверждение 8.1.

Коэффициенты $b_k(x)$, $k = 1, 2 \,..\, m$ выражаются через коэффициенты исходного уравнения (8.1) по формуле

$$b_k(x) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \, C(m-i, m-k) \frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}} a_i(x), \; k = 1 \,..\, m.$$

Доказательство. В соответствии с определением [6] сопряженное уравнение к (8.1) имеет вид:

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} Z = \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \frac{\partial^{m-i}}{\partial x^{m-i}} (a_i(x) Z).$$

Используя формулу Лейбница, отсюда имеем:

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} Z = \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \sum_{k=0}^{m-i} C(m-i,\, k) \frac{d^{m-i-k}}{dx^{m-i-k}} (a_i(x)) \frac{\partial^k}{\partial x^k} Z.$$

Выполняя замену индекса суммирования k на $m-k$ и переставляя местами знаки сумм, получим:

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} Z = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} (-1)^i\, C(m-i,\, m-k) \frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}} (a_i(x)) \frac{\partial^{m-k}}{\partial x^{m-k}} Z.$$

Тогда, вводя новые функции $b_k(x)$, $k = 1,\ 2\ ..\ m$ по формулам

$$b_k(x) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i\, C(m-i,\, m-k) \frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}} (a_i(x)), \quad k = 1\ ..\ m, \tag{8.5}$$

устанавливаем:

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} Z = \sum_{k=1}^{m} b_k(x) \frac{\partial^{m-k}}{\partial x^{m-k}} Z.$$

Это уравнение полностью совпадает с (8.4). Утверждение доказано.

Таким образом, если задано исходное ОДУ (8.1), то всегда, используя формулы (8.5), можно установить его сопряженное уравнение (8.4) в явном виде. При этом общий вид этого уравнения совпадает с исходным (8.1).

Поскольку ОДУ (8.1) является сопряженным по отношению к ОДУ (8.4), справедливы также обратные формулы

$$a_k(x) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i\, C(m-i,\, m-k) \frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}} b_i(x), \quad k = 1\ ..\ m \tag{8.6}$$

8.3. Уравнение *n*-образа

Пусть задано линейное однородное ОДУ порядка m в приведенной форме (8.4), которое является сопряженным к (8.1). Продифференцируем уравнение (8.4) по переменной x.

$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}} Z = \sum_{p=1}^{m} \frac{d}{dx} (b_p(x)) \frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}} Z + \sum_{p=1}^{m} b_p(x) \frac{\partial^{m+1-p}}{\partial x^{m+1-p}} Z.$$

В правой части этого равенства возникает (при $p = 1$) производная $\frac{\partial^m}{\partial x^m} Z$, т. е. получаем уравнение

$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}} Z = \sum_{p=1}^{m} \frac{d}{dx} (b_p(x)) \frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}} Z + \sum_{p=2}^{m} b_p(x) \frac{\partial^{m+1-p}}{\partial x^{m+1-p}} Z + b_1(x) \frac{\partial^m}{\partial x^m} Z.$$

Заменяя здесь $\frac{\partial^m}{\partial x^m}Z$ на эквивалентное ему выражение, в соответствии с (8.4), после преобразований получим:

$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}}Z = \sum_{p=1}^{m-1}\left(\frac{d}{dx}b_p(x) + b_{1+p}(x) + b_1(x)b_p(x)\right)\frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}}Z + \left(\frac{d}{dx}b_m(x) + b_1(x)b_m(x)\right)Z.$$

Снова произведем дифференцирование этого равенства по переменной x:

$$\frac{\partial^{2+m}}{\partial x^{2+m}}Z = \sum_{p=1}^{m-1}\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}b_p(x) + \frac{d}{dx}b_{1+p}(x) + \left(\frac{d}{dx}b_1(x)\right)b_p(x) + b_1(x)\frac{d}{dx}b_p(x)\right)\frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}}Z + \left(\frac{d}{dx}b_p(x) + b_{1+p}(x) + b_1(x)\,b_p(x)\right)\frac{\partial^{1+m-p}}{\partial x^{1+m-p}}Z\right) +$$

$$+\left(\frac{d^2}{dx^2}b_m(x) + \left(\frac{d}{dx}b_1(x)\right)b_m(x) + b_1(x)\frac{d}{dx}b_m(x)\right)Z + \left(\frac{d}{dx}b_m(x) + b_1(x)b_m(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}Z\right).$$

Так как в первом слагаемом этого равенства снова возникает (при $p = 1$) производная $\frac{\partial^m}{\partial x^m}Z$, то заменяя ее на эквивалентное ему выражение, в соответствии с (8.4), после преобразований получим:

$$\frac{\partial^{2+m}}{\partial x^{2+m}}Z = \sum_{p=1}^{m-1}\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}b_p(x) + \frac{d}{dx}b_{1+p}(x) + \left(\frac{d}{dx}b_1(x)\right)b_p(x) + b_1(x)\frac{d}{dx}b_p(x)\right)\frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}}Z + \left(\frac{d}{dx}b_p(x) + b_{1+p}(x) + b_1(x)\,b_p(x)\right)\frac{\partial^{1+m-p}}{\partial x^{1+m-p}}Z\right) +$$

$$+\left(\frac{d^2}{dx^2}b_m(x) + \left(\frac{d}{dx}b_1(x)\right)b_m(x) + b_1(x)\frac{d}{dx}b_m(x)\right)Z + \left(\frac{d}{dx}b_m(x) + b_1(x)b_m(x)\right)\frac{\partial}{\partial x}Z +$$

$$+\left(\frac{d^2}{dx^2}b_1(x) + \frac{d}{dx}b_2(x) + \left(\frac{d}{dx}b_1(x)\right)b_1(x) + b_1(x)\frac{d}{dx}b_1(x)\right)\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}Z + \left(\frac{d}{dx}b_1(x) + b_2(x) + b_1(x)^2\right)\sum_{p=1}^{m}b_p(x)\frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}}Z.$$

Таким образом, справа получается одинаковое с равенством (8.4) по структуре выражение

$$\sum_{p=1}^{m}V_p(k)\frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}}Z,$$

где $V_p(k)$ — функциональные коэффициенты при производных от искомой функции.

Продолжая аналогичным образом, получаем в итоге следующее линейное ОДУ порядка $m + n$:

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^{m+n}}Z = \sum_{p=1}^{m}\alpha_p(n)\frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}}Z, \tag{8.7}$$

где $\alpha_p(n)$ — функции, определяемые аналогично описанным выше случаям, а параметр n — натуральное число, определяющее вид $\alpha_p(n)$ и новый порядок ОДУ (8.7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2. **ОДУ (8.7) называется уравнением n-образа ОДУ (8.4), а функции $\alpha_p(n)$ — называются коэффициентами уравнения n-образа.**

В дальнейшем уравнение n-образа (8.7) ОДУ (8.4) также часто будем просто называть n-образом ОДУ (8.4).

8.4. Свойства уравнения n-образа

Свойство 1. **Уравнение n-образа (8.7) является дифференциальным уравнением порядка $n + m$ и содержит все решения исходного ОДУ (8.4).**

Свойство очевидно, так как следует из того, что вывод уравнения n-образа (8.7) осуществлялся при условии, что исходное уравнение (8.4) является основой последовательной череды дифференцирований правой и левой частей этого уравнения с учетом его же начального значения (8.4). Таким образом, новое ОДУ (8.7) фактически является исходным уравнением, которое продифференцировано n раз с заменой всех возникающих при этом производных $\frac{\partial^{m+k}}{\partial x^{m+k}} Z$, $k = 1\ ..\ n$ в соответствии с формулой (8.4), т. е. ОДУ (8.4) является дифференциальной связью ОДУ (8.7), а значит все его решения удовлетворяют (8.7).

Свойство 2. **Коэффициенты n-образа $\alpha_p(n)$ определяются начальными значениями**

$$\alpha_p(0) = b_p(x), \quad p = 1\ ..\ m. \tag{8.8}$$

Действительно, принимая в (8.7) $n = 0$, имеем:

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} Z = \sum_{p=1}^{m} \alpha_p(0) \frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}} Z.$$

Так как в этом случае это ОДУ должно быть равно (8.4), получаем из условия равенства коэффициентов при одинаковых производных $\frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}} Z$ равенства (8.8).

Свойство 3. **Коэффициенты n-образа (8.7) связаны рекуррентными равенствами**

$$\alpha_p(n+1) = \frac{\partial}{\partial x} \alpha_p(n) + \alpha_{1+p}(n) + \alpha_1(n)\, b_p(x), \quad p = 1\ ..\ m-1; \tag{8.9}$$

$$\alpha_m(n+1) = \frac{\partial}{\partial x} \alpha_m(n) + b_m(x)\, \alpha_1(n). \tag{8.10}$$

Доказательство. Действительно, произведя замену параметра n на $n + 1$ в (8.7), имеем:

$$\frac{\partial^{m+n+1}}{\partial x^{m+n+1}} Z = \sum_{p=1}^{m} \alpha_p(n+1) \frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}} Z.$$

С другой стороны, дифференцируя уравнение (8.7), с учетом (8.4) получаем:

$$\frac{\partial^{m+n+1}}{\partial x^{m+n+1}} Z = \sum_{p=1}^{m-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \alpha_p(n) + \alpha_{1+p}(n) + \alpha_1(n)\, b_p(x) \right) \frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}} Z + \left(\frac{\partial}{\partial x} \alpha_m(n) + b_m(x)\, \alpha_1(n) \right) Z.$$

Так как левые части этих равенств равны, то из условия равенства правых частей следуют формулы (8.9), (8.10).

9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ОДУ

Уравнение n-образа полностью определено, если установлены формулы для всех коэффициентов $\alpha_p(n)$. Поэтому проведем анализ рекуррентных соотношений (8.9) и (8.10).

Очевидно, что с учетом начальных условий (8.8), использование рекуррентных соотношений (8.9) и (8.10) позволит установить для любых заданных натуральных значений n все требуемые значения коэффициентов $\alpha_p(n)$. Это, однако, не представляет особого интереса, так как не дает новых научных результатов, позволяющих установить алгоритм решения дифференциальных уравнений. Новые результаты, и именно в том плане, который дает ответ на вопрос о структуре конструкции общего решения однородного ОДУ, можно получить, только используя нетривиальный подход. В данном случае он заключается в том, что система рекуррентных уравнений разрешается именно для случая отрицательных значений параметра $n = -1, -2, -3 .. -m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. **Функции $\alpha_p(x)$, $p = 1, 2 .. m$, в случае, когда параметр n принимает значения $n = -1, -2, -3 .. -m$ — называются особыми функциями.**

9.1. Случай $n = -1$

Система рекуррентных уравнений (8.9), (8.10) принимает вид:

$$\alpha_p(0) = \frac{d}{dx}\alpha_p(-1) + \alpha_{1+p}(-1) + \alpha_1(-1)\, b_p(x), \quad p = 1 .. m-1; \tag{9.1}$$

$$\alpha_m(0) = \frac{d}{dx}\alpha_m(-1) + b_m(x)\,\alpha_1(-1). \tag{9.2}$$

Очевидно, что $\alpha_p(-1)$ представляют собой функции от переменной x с особым, т. е. отрицательным значением параметра $n = -1$. Из (9.1) следует:

$$\alpha_{1+p}(-1) = \alpha_p(0) - \frac{d}{dx}\alpha_p(-1) - \alpha_1(-1)\, b_p(x), \quad p = 1 .. m-1$$

или, с учетом начальных условий (8.8) $\alpha_p(0) = b_p(x)$:

$$\alpha_{1+p}(-1) = -\frac{d}{dx}\alpha_p(-1) - (-1 + \alpha_1(-1))\, b_p(x), \quad p = 1 .. m-1. \tag{9.3}$$

Поэтому

$$\alpha_m(-1) = -\frac{d}{dx}\alpha_{m-1}(-1) - (-1 + \alpha_1(-1))\, b_{m-1}(x), \tag{9.4}$$

$$\alpha_{m-1}(-1) = -\frac{d}{dx}\alpha_{m-2}(-1) - (-1 + \alpha_1(-1))\, b_{m-2}(x), \tag{9.5}$$

$$\alpha_{m-2}(-1) = -\frac{d}{dx}\alpha_{m-3}(-1) - (-1 + \alpha_1(-1))\, b_{m-3}(x), \tag{9.6}$$

$$\alpha_{m-3}(-1) = -\frac{d}{dx}\alpha_{m-4}(-1) - (-1 + \alpha_1(-1))\, b_{m-4}(x), \tag{9.7}$$

$$\alpha_{m-4}(-1) = -\frac{d}{dx}\alpha_{m-5}(-1) - (-1 + \alpha_1(-1))\, b_{m-5}(x) \tag{9.8}$$

и так далее.

Следовательно, если ввести оператор $Z_k[\ ]$, действующий на функцию $f(x)$ по правилу

$$Z_k[f(x)] = -\frac{d}{dx}f(x) - (-1 + \alpha_1(-1))\,b_k(x), \tag{9.9}$$

то формулы (9.3) можно записать в виде:

$$\alpha_{1+p}(-1) = Z_p[\alpha_p(-1)], \quad p = 1\ ..\ m-1. \tag{9.10}$$

Отметим, что оператор $Z_k[\ ]$ обладает свойством

$$Z_k[f(x)] = Z_k[f(x) + C], \tag{9.11}$$

где C — произвольная постоянная.

Таким образом, с учетом (9.9) формулы (9.4) — (9.8) принимают вид:

$$\begin{gathered}
\alpha_m(-1) = Z_{m-1}[Z_{m-1}(-1)],\\
\alpha_{m-1}(-1) = Z_{m-2}[\alpha_{m-2}(-1)],\\
\alpha_{m-3}(-1) = Z_{m-4}[\alpha_{m-4}(-1)],\\
\alpha_{m-4}(-1) = Z_{m-5}[\alpha_{m-5}(-1)].
\end{gathered}$$

Следовательно,

$$\alpha_m(-1) = Z_{m-1}[Z_{m-2}[Z_{m-3}[Z_{m-4}[Z_{m-5}[\alpha_{m-5}(-1)]]]]].$$

Поэтому в общем случае можно записать:

$$\alpha_m(-1) = Z_{m-1}[Z_{m-2}[Z_{m-3}[Z_{m-4}\ \ldots\ [Z_{m-p}[\alpha_{m-p}(-1)]]]]], \quad p = 1\ ..\ m-1.$$

Принимая здесь $p = m - 1$, получаем:

$$\alpha_m(-1) = Z_{m-1}[Z_{m-2}[Z_{m-3}\ \ldots\ [Z_4[Z_3[Z_2[Z_1[\alpha_1(-1)]]]]]]], \quad m = 2, 3, 4\ldots$$

Отсюда следует весьма важный вывод — **Утверждение 9.1.**

Все функции $\alpha_m(-1)$, $\alpha_{m-1}(-1)$, ... , $\alpha_2(-1)$ выражаются через $\alpha_1(-1)$.

Подставляя полученное значение $\alpha_m(-1)$ в (9.2) с учетом начального условия (8.8), имеем:

$$b_m(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(Z_{m-1}[Z_{m-2}[Z_{m-3}[Z_{m-4}\ldots[Z_4\,[Z_3\,[Z_2\,[Z_1\,[\alpha_1(-1)]]]]]]]])\right) + b_m(x)\,\alpha_1(-1).$$

Отсюда следует:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}(Z_{m-1}[Z_{m-2}[Z_{m-3}[Z_{m-4}\ldots[Z_4\,[Z_3\,[Z_2\,[Z_1\,[\alpha_1(-1)]]]]]]]])\right) - (-1 + \alpha_1(-1))\,b_m(x) = 0.$$

В операторной форме, с учетом (9.9), данное итоговое уравнение принимает вид:

$$Z_m[Z_{m-1}[Z_{m-2}[Z_{m-3}[Z_{m-4}\ \ldots\ [Z_4[Z_3[Z_2[Z_1[\alpha_1(-1)]]]]]]]]] = 0. \tag{9.12}$$

Воспользуемся свойством оператора $Z_k[\ ]$ (9.11). В этом случае уравнение (9.12) можно представить как:

$$Z_m[Z_{m-1}[Z_{m-2}[Z_{m-3}[Z_{m-4}\ \ldots\ [Z_4[Z_3[Z_2[Z_1[-1 + \alpha_1(-1)]]]]]]]]] = 0. \tag{9.13}$$

Введем новую функциональную переменную по формуле

$$Y(x) = -1 + \alpha_1(-1). \tag{9.14}$$

В этом случае равенство (9.13) принимает вид:

$$Z_m[Z_{m-1}[Z_{m-2}[Z_{m-3}[Z_{m-4} \ldots [Z_4[Z_3[Z_2[Z_1[Y(x)]]]]]]]]] = 0. \tag{9.15}$$

Поскольку операция воздействия на функцию $f(x)$ производится по правилу (9.9), то с учетом (9.14), она станет равна:

$$Z_k[f(x)] = -\frac{d}{dx} f(x) - Y(x) b_k(x), \quad k = 1, 2 \,..\, m. \tag{9.16}$$

Очевидно, что функция $Y(x)$ является решением дифференциального уравнения (9.15).
Установим явный вид ОДУ (9.15). Так как с учетом (9.16):

$$Z_1[Y(x)] = -\frac{d}{dx} Y(x) - Y(x) b_1(x),$$

$$Z_2[Z_1[Y(x)]] = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{d}{dx} Y(x) - Y(x) b_1(x)\right) - Y(x) b_2(x) = \frac{d^2}{dx^2} Y(x) + \frac{d}{dx}(Y(x) b_1(x)) - Y(x) b_2(x),$$

$$Z_3[Z_2[Z_1[Y(x)]]] = Z_3\left[\frac{d^2}{dx^2} Y(x) + \frac{d}{dx}(Y(x) b_1(x)) - Y(x) b_2(x)\right] = -\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2} Y(x) + \frac{d}{dx}(Y(x) b_1(x)) - Y(x) b_2(x)\right) - Y(x) b_3(x) =$$

$$= -\frac{d^3}{dx^3} Y(x) - \frac{d^2}{dx^2}(Y(x) b_1(x)) + \frac{d}{dx}(Y(x) b_2(x)) - Y(x) b_3(x),$$

$$Z_4[Z_3[Z_2[Z_1[Y(x)]]]] = Z_4\left[-\frac{d^3}{dx^3} Y(x) - \frac{d^2}{dx^2}(Y(x) b_1(x)) + \frac{d}{dx}(Y(x) b_2(x)) - Y(x) b_3(x)\right] =$$

$$= \frac{d^4}{dx^4} Y(x) + \frac{d^3}{dx^3}(Y(x) b_1(x)) - \frac{d^2}{dx^2}(Y(x) b_2(x)) + \frac{d}{dx}(Y(x) b_3(x)) - Y(x) b_4(x)$$

и так далее.

Следовательно, в раскрытом виде ОДУ (9.15) равно

$$(-1)^m \frac{d^m}{dx^m} Y(x) = (-1)^{(m-1)} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(Y(x) b_1(x)) + (-1)^{(m-2)} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}(Y(x) b_2(x)) + (-1)^{(m-3)} \frac{d^{m-3}}{dx^{m-3}}(Y(x) b_3(x)) \ldots$$

$$\ldots - \frac{d^3}{dx^3}(Y(x) b_{m-3}(x)) + \frac{d^2}{dx^2}(Y(x) b_{m-2}(x)) - \frac{d}{dx}(Y(x) b_{m-1}(x)) + Y(x) b_{m-1}(x). \tag{9.17}$$

Однако данное ОДУ является сопряженным по отношению к (8.1). Следовательно, их решения связаны формулой Грина [Математическая энциклопедия. — М.: Советская Энциклопедия, 1979. — Т. 5.]:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{k-j} (-1)^j \frac{d^j}{dx^j}(Y(x) b_{m-k}(x)) \frac{\partial^{m-k-j}}{\partial x^{m-k-j}} y = \text{const}.$$

В силу (9.14) эта формула принимает вид:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{k-j} (-1)^j \frac{d^j}{dx^j}(-1 + \alpha_1(-1)) b_{m-k}(x)) \frac{\partial^{m-k-j}}{\partial x^{m-k-j}} y_1 = \text{const}. \tag{9.18}$$

Таким образом, установлена математическая функциональная взаимосвязь между функцией $\alpha_1(-1)$ и некоторым частным точным решением ОДУ (8.4) $y = y_1$. Для того чтобы установить эту взаимосвязь через конкретные формулы, необходимо привести сопряженное ОДУ (9.17) к виду, соответствующему ОДУ (8.1).

Так как в соответствии с формулой Лейбница:

$$\frac{d^{m-k}}{d^{m-k}}(Y(x)b_k(x)) = \sum_{i=0}^{m-k} C(m-k,\, i)\frac{d^i}{dx^i}(Y(x))\frac{d^{m-k-i}}{dx^{m-k-i}}b_k(x), \quad k = 1 \,..\, m-1,$$

то ОДУ (9.17) принимает вид:

$$(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}Y(x) = (-1)^{(m-1)}\sum_{i=0}^{m-1} C(m-1,\, i)\frac{d^i}{dx^i}Y(x)\frac{\partial^{m-1-i}}{\partial x^{m-1-i}}b_1(x) + (-1)^{(m-2)}\sum_{i=0}^{m-2} C(m-2,\, i)\frac{d^i}{dx^i}Y(x)\frac{\partial^{m-2-i}}{\partial x^{m-2-i}}b_2(x) +$$

$$+ (-1)^{(m-3)}\sum_{i=0}^{m-3} C(m-3,\, i)\frac{d^i}{dx^i}Y(x)\frac{\partial^{m-3-i}}{\partial^{m-3-i}}b_3(x) + \,..\, - \left(\frac{d^3}{dx^3}(Y(x))b_{m-3}(x) + 3\frac{d^2}{dx^2}(Y(x))\frac{d}{dx}b_{m-3}(x) + 3\frac{d}{dx}(Y(x))\frac{d^2}{dx^2}b_{m-3}(x) + Y(x)\frac{d^3}{dx^3}b_{m-3}(x)\right) +$$

$$+ \frac{d^2}{dx^2}(Y(x))b_{m-2}(x) + 2\frac{d}{dx}Y(x)\frac{d}{dx}b_{m-2}(x) + Y(x)\frac{d^2}{dx^2}b_{m-2}(x) - \left(\left(\frac{d}{dx}Y(x)\right)b_{m-1}(x) + Y(x)\frac{d}{dx}b_{m-1}(x)\right) + Y(x)b_m(x).$$

Производя последовательные преобразования, в итоге получаем:

$$(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}Y(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{(m-i)}C(m-i,\, m-k)\frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}}b_i(x)\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}Y(x).$$

Данное ОДУ преобразовываем к виду:

$$\frac{d^m}{dx^m}Y(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}(-1)^i C(m-i,\, m-k)\frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}}b_i(x)\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}Y(x). \tag{9.19}$$

Таким образом, вводя функции $a_k(x)$ в соответствии с формулами

$$a_k(x) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^i C(m-i,\, m-k)\frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}}b_i(x), \tag{9.20}$$

получим новое представление ОДУ (9.19):

$$\frac{d^m}{dx^m}Y(x) = \sum_{k=1}^{m}a_k(x)\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}Y(x). \tag{9.21}$$

Однако поскольку (9.20) эквивалентно (8.6), то данное уравнение полностью соответствует ОДУ (8.1), т. е. эти уравнения эквивалентны. Следовательно, справедливо **Утверждение 9.2**:

Если определена функция $\alpha_1(-1)$ уравнения (8.4), то частное решение ОДУ (8.1) (или эквивалентного ему (9.21)) определяется формулой (9.14).

Таким образом, для определения $Y(x)$ необходимо знание функции $\alpha_1(-1)$, которая определяется значениями функций $b_k(x)$, $k = 1 .. m$, зависящими от заданных функций $a_k(x)$, $k = 1 .. m$.

Следовательно, установлена конструкция вычисления первого частного решения $Y(x) = Y_1(x)$ ОДУ (9.21) (или, что эквивалентно, (8.1)), в котором заданы коэффициенты $a_k(x)$, $k = 1 .. m$.

Вычисление этого решения производится следующим образом:

1) в соответствии с поставленной задачей решение $Y(x) = Y_1(x)$ ищется в форме, определяемой формулой (9.14), т. е.

$$Y(x) = -1 + \alpha_1(-1);$$

2) для вычисления функции $\alpha_1(-1)$ определяются коэффициенты $b_k(x)$, $k = 1 .. m$ сопряженного ОДУ (9.4), используя формулу (8.5). Решение данной задачи будет произведено далее.

9.2. Случай $n = -m$

Докажем **ТЕОРЕМУ 9.1:**

Если особые функции $\alpha_1(-i)$, $i = 1, 2, 3 .. m$ сопряженного (8.1) ОДУ (8.4) определить равенствами

$$\alpha_1(-1) = 1 + Y_1(x), \tag{9.22}$$

$$\alpha_1(-j) = \sum_{i=1}^{j} \frac{Y_{j-i+1}(x)\, x^{(i-1)}}{(i-1)!}, \quad j = 2 .. m, \tag{9.23}$$

то функции $Y_i(x)$, $i = 1, 2 .. m$ являются частными решениями ОДУ (9.21) (или, что эквивалентно, (8.1)).

Доказательство. Особые функции $\alpha_1(-i)$, $i = 1, 2, 3 .. m$ определяются из коэффициентов n-образа ОДУ:

$$\frac{d^m}{dx^m} Z = \sum_{k=1}^{m} b_k(x) \frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}} Z, \tag{9.24}$$

согласно системе рекуррентных уравнений

$$\alpha_p(n+1) = \frac{\partial}{\partial x}\alpha_p(n) + \alpha_{1+p}(n) + \alpha_1(n)\, b_p(x), \quad p = 1 .. m-1; \tag{9.25}$$

$$\alpha_m(n+1) = \frac{\partial}{\partial x}\alpha_m(n) + b_m(x)\,\alpha_1(n). \tag{9.26}$$

Предварительно приведем установленную систему рекуррентных уравнений (9.27), (9.28) к виду, при котором она будет определяться только одним рекуррентным уравнением от функции $\alpha_1(n)$. Действительно, принимая в (9.27) $p = m - 1$, имеем:

$$\alpha_{m-1}(n+1) = \frac{\partial}{\partial x}\alpha_{m-1}(n) + \alpha_m(n) + \alpha_1(n)\, b_{m-1}(x).$$

Выражаем отсюда $\alpha_m(n)$ и $\alpha_m(n + 1)$:

$$\alpha_m(n) = \alpha_{m-1}(n+1) - \frac{\partial}{\partial x}\alpha_{m-1}(n) - \alpha_1(n)\, b_{m-1}(x), \tag{9.27}$$

$$\alpha_m(n+1) = \alpha_{m-1}(n+2) - \frac{\partial}{\partial x}\alpha_{m-1}(n+1) - \alpha_1(n+1)\, b_{m-1}(x). \tag{9.28}$$

Подставляя в (9.28) после преобразований, получим:

$$\alpha_{m-1}(n+2) - 2\frac{\partial}{\partial x}\alpha_{m-1}(n+1) - \alpha_1(n+1)\,b_{m-1}(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha_{m-1}(n) - b_m(x)\,\alpha_1(n) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1(n)\,b_{m-1}(x)) = 0. \tag{9.29}$$

Как видим, данное рекуррентное уравнение не содержит функций $\alpha_m(n)$.
Снова принимаем в (9.27) $p = m - 2$. Тогда получим:

$$\alpha_{m-2}(n+1) = \frac{\partial}{\partial x}\alpha_{m-2}(n) + \alpha_{m-1}(n) + \alpha_1(n)\,b_{m-2}(x).$$

Выражаем отсюда $\alpha_{m-1}(n)$, $\alpha_{m-1}(n+1)$ и $\alpha_{m-1}(n+2)$:

$$\alpha_{m-1}(n) = \alpha_{m-2}(n+1) - \frac{\partial}{\partial x}\alpha_{m-2}(n) - \alpha_1(n)\,b_{m-2}(x),$$

$$\alpha_{m-1}(n+1) = \alpha_{m-2}(n+2) - \frac{\partial}{\partial x}\alpha_{m-2}(n+1) - \alpha_1(n+1)\,b_{m-2}(x),$$

$$\alpha_{m-1}(n+2) = \alpha_{m-2}(n+3) - \frac{\partial}{\partial x}\alpha_{m-2}(n+2) - \alpha_1(n+2)\,b_{m-2}(x).$$

Подставляя эти равенства в (9.28), после преобразований получим:

$$\alpha_{m-2}(n+3) - 3\frac{\partial}{\partial x}\alpha_{m-2}(n+2) - \alpha_1(n+2)\,b_{m-2}(x) + 3\frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha_{m-2}(n+1) - \alpha_1(n+1)\,b_{m-1}(x) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}\alpha_{m-2}(n) - b_m(x)\,\alpha_1(n) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1(n)\,b_{m-1}(x)) +$$
$$+ 2\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1(n+1)\,b_{m-2}(x)) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha_1(n)\,b_{m-2}(x)) = 0.$$

Продолжая далее аналогичным образом, в итоге на s-шаге получаем рекуррентное ОДУ:

$$\sum_{i=0}^{s+1}(-1)^i\,C(s+1,\,i)\frac{\partial^{s-i+1}}{\partial x^{s-i+1}}\alpha_{m-s}(n+i) + \sum_{j=0}^{s+1}\sum_{i=0}^{s-j}(-1)^{(s+i-1)}\frac{\partial^{s-i}}{\partial x^{s-i}}(\alpha_1(n+j)\,b_{m-s+i}(x)) = 0.$$

Примем здесь $s = m - 1$. Тогда получим ОДУ относительно $\alpha_1(p)$, $p = 1,\ 2,\ \dots$.

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{(i+m)}\,C(m,\,i)\frac{\partial^{m-i}}{\partial x^{m-i}}\alpha_1(n+i) + \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{m-1-j}(-1)^{(j+i+m-2)}\,C(m-1-i,\,j)\frac{\partial^{m-1-i-j}}{\partial x^{m-1-i-j}}(\alpha_1(n+j)\,b_{1+i}(x)) = 0. \tag{9.30}$$

Таким образом, выполнение этого ОДУ означает и выполнение исходной системы рекуррентных уравнений (9.27), (9.28).
Рассмотрим частные случаи, так как они весьма наглядно демонстрируют правильность общей теории.

Вариант $n = -2$, $m = 2$. С этой целью выделим составляющие из особых слагаемых, т. е. слагаемых вида $\alpha_1(-1)$, $\alpha_1(-2)$:

$$(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}\alpha_1(-2) + \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{(-2+i+m)}\frac{d^{m-1-i}}{dx^{m-1-i}}(\alpha_1(-2)\,b_{1+i}(x)) + (-1)^{(1+m)}\,m\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\alpha_1(-1) + \sum_{i=0}^{m-2}(-1)^{(-1+i+m)}(m-1-i)\frac{d^{m-2-i}}{dx^{m-2-i}}(\alpha_1(-1)\,b_{1+i}(x)) +$$
$$+\sum_{j=2}^{m}\sum_{i=0}^{m-1-j}(-1)^{(j+i+m-2)}\,C(m-1-i,\,j)\frac{\partial^{m-1-i-j}}{\partial x^{m-1-i-j}}(\alpha_1(-2+j)\,b_{1+i}(x)) + \sum_{i=2}^{m}(-1)^{(i+m)}\,C(m,\,i)\frac{\partial^{m-i}}{\partial x^{m-i}}\alpha_1(-2+i) = 0. \tag{9.31}$$

В данном случае получено некоторое линейное ОДУ порядка m относительно особой функции $\alpha_1(-2)$ и порядка $m-1$ относительно особой функции $\alpha_1(-1)$.

Рассмотрим некоторые частные случаи, так как они позволяют легко установить искомую конструкцию общего решения.

Пусть $m = 2$. Тогда уравнение (9.31) принимает вид:

$$\frac{d^2}{dx^2}\alpha_1(-2) - 2\frac{d}{dx}\alpha_1(-1) + \frac{d}{dx}(\alpha_1(-2)b_1(x)) - \alpha_1(-2)b_2(x) - \alpha_1(-1)b_1(x) + \alpha_1(0) = 0.$$

Так как в соответствии с свойством 1, $\alpha_1(0) = b_1(x)$, то:

$$\frac{d^2}{dx^2}\alpha_1(-2) - 2\frac{d}{dx}\alpha_1(-1) + \frac{d}{dx}(\alpha_1(-2)b_1(x)) - \alpha_1(-2)b_2(x) - \alpha_1(-1)b_1(x) + b_1(x) = 0. \tag{9.32}$$

Ранее было показано, что особая функция $\alpha_1(-1)$ определяет конструкцию первого частного решения сопряженного ОДУ (9.21), в котором коэффициенты $a_k(x)$ определяются формулами (9.20).

В соответствии с (9.14):

$$\alpha_1(-1) = 1 + Y_1(x), \tag{9.33}$$

где (в данном случае при $m = 2$) функция $Y_1(x)$ является решением ОДУ:

$$\frac{d^2}{dx^2}Y_1(x) + \left(\frac{d}{dx}Y_1(x)\right)b_1(x) + \left(\frac{d}{dx}b_1(x) - b_2(x)\right)Y_1(x) = 0. \tag{9.34}$$

Анализ ОДУ (9.25) показал, что если принять:

$$\alpha_1(-2) = Y_1(x)\,x + Y_2(x), \tag{9.35}$$

где функция $Y_2(x)$ является решением ОДУ:

$$\frac{d^2}{dx^2}Y_2(x) + \left(\frac{d}{dx}Y_2(x)\right)b_1(x) + \left(\frac{d}{dx}b_1(x) - b_2(x)\right)Y_2(x) = 0, \tag{9.36}$$

то ОДУ (9.25) при $m = 2$ принимает вид:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}Y_1(x) + \left(\frac{d}{dx}Y_1(x)\right)b_1(x) + \left(\frac{d}{dx}b_1(x) - b_2(x)\right)Y_1(x)\right)x + \frac{d^2}{dx^2}Y_2(x) + \left(\frac{d}{dx}Y_2(x)\right)b_1(x) + \left(\frac{d}{dx}b_1(x) - b_2(x)\right)Y_2(x) = 0.$$

В силу (9.27) и (9.29) данное ОДУ тождественно выполнено. Следовательно, изложенное означает, что два частных решения $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ ОДУ:

$$\frac{d^2}{dx^2}Y(x) = a_1(x)\frac{d}{dx}Y(x) + a_2(x)Y(x), \tag{9.37}$$

где

$$a_1(x) = -b_1(x), \tag{9.38}$$

$$a_2(x) = -\frac{d}{dx}b_1(x) + b_2(x) \tag{9.39}$$

определяются формулами

$$Y_1(x) = -1 + \alpha_1(-1), \tag{9.40}$$

$$Y_2(x) = \alpha_1(-2) + x(1 - \alpha_1(-1)). \tag{9.41}$$

При этом особые функции $\alpha_1(-1)$, $\alpha_1(-2)$ являются производными от коэффициентов n-образа ОДУ:

$$\frac{d^2}{dx^2} Y(x) = b_1(x) \frac{d}{dx} Y(x) + b_2(x) Y(x). \tag{9.42}$$

Вариант $m = 3$, $n = -3$. Уравнение (9.54) принимает вид:

$$-\frac{d^3}{dx^3}\alpha_1(-3) + 3\frac{d^2}{dx^2}\alpha_1(-2) - 3\frac{d}{dx}\alpha_1(-1) - \frac{d^2}{dx^2}(\alpha_1(-3)b_1(x)) + \frac{d}{dx}(\alpha_1(-3)b_2(x)) - \alpha_1(-3)b_3(x) + 2\frac{d}{dx}(\alpha_1(-2)b_1(x)) - \alpha_1(-2)b_2(x) - \alpha_1(-1)b_1(x) + \alpha_1(0) = 0.$$

С учетом начального условия: $\alpha_1(0) = b_1(x)$ это уравнение будет равно: (9.43)

$$-\frac{d^3}{dx^3}\alpha_1(-3) + 3\frac{d^2}{dx^2}\alpha_1(-2) - 3\frac{d}{dx}\alpha_1(-1) - \frac{d^2}{dx^2}(\alpha_1(-3)b_1(x)) + \frac{d}{dx}(\alpha_1(-3)b_2(x)) - \alpha_1(-3)b_3(x) + 2\frac{d}{dx}(\alpha_1(-2)b_1(x)) - \alpha_1(-2)b_2(x) - \alpha_1(-1)b_1(x) + b_1(x) = 0.$$

В качестве рабочей гипотезы примем в соответствии с (9.22), (9.23):

$$\alpha_1(-1) = 1 + Y_1(x), \tag{9.44}$$

$$\alpha_1(-2) = Y_1(x)\,x + Y_2(x), \tag{9.45}$$

$$\alpha_1(-3) = \frac{Y_1(x)\,x^2}{2} + Y_2(x)\,x + Y_3(x), \tag{9.46}$$

где функции $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $Y_3(x)$ являются решением ОДУ:

$$-\frac{d^3}{dx^3}Y(x) - \left(\frac{d^2}{dx^2}Y(x)\right)b_1(x) + \left(-2\frac{d}{dx}b_1(x) + b_2(x)\right)\left(\frac{d}{dx}Y(x)\right) + \left(\frac{d}{dx}b_2(x) - \frac{d^2}{dx^2}b_1(x) - b_3(x)\right)Y(x) = 0. \tag{9.47}$$

Подставляя (9.44), (9.45), (9.46) в (9.43), получим:

$$\left(-\frac{\frac{d^3}{dx^3}Y_1(x)}{2} - \frac{\frac{d^2}{dx^2}(Y_1(x))b_1(x)}{2} + \left(-\frac{d}{dx}b_1(x) + \frac{b_2(x)}{2}\right)\frac{d}{dx}Y_1(x) + \left(\frac{\frac{d}{dx}b_2(x)}{2} - \frac{\frac{d^2}{dx^2}b_1(x)}{2} - \frac{b_3(x)}{2}\right)Y_1(x)\right)x^2 +$$

$$+\left(-\frac{d^3}{dx^3}Y_2(x) - \left(\frac{d^2}{dx^2}Y_2(x)\right)b_1(x) + \left(b_2(x) - 2\frac{d}{dx}b_1(x)\right)\frac{d}{dx}Y_2(x) + \left(-\frac{d^2}{dx^2}b_1(x) - b_3(x) + \frac{d}{dx}b_2(x)\right)Y_2(x)\right)x - \frac{d^3}{dx^3}Y_3(x) - \left(\frac{d^2}{dx^2}Y_3(x)\right)b_1(x) +$$

$$+\left(b_2(x) - 2\frac{d}{dx}b_1(x)\right)\frac{d}{dx}Y_3(x) + \left(-\frac{d^2}{dx^2}b_1(x) - b_3(x) + \frac{d}{dx}b_2(x)\right)Y_3(x) = 0.$$

В силу того, что функции $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $Y_3(x)$ являются решением ОДУ (9.47), данное равенство выполняется тождественно.

Из системы равенств (9.44) — (9.46) находим:

$$Y_1(x) = \alpha_1(-1) - 1, \tag{9.48}$$

$$Y_2(x) = (-\alpha_1(-1) + 1)\,x + \alpha_1(-2), \tag{9.49}$$

$$Y_3(x) = \left(\frac{\alpha_1(-1)}{2} - \frac{1}{2}\right)x^2 - \alpha_1(-2)\,x + \alpha_1(-3). \tag{9.50}$$

Таким образом показано, что функции $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $Y_3(x)$, определяемые равенствами (9.48) — (9.50), являются частными решениями уравнения

$$\frac{d^3}{dx^3}Y(x) = a_1(x)\frac{d^2}{dx^2}Y(x) + a_2(x)\frac{d}{dx}Y(x) + a_3(x)\,Y(x),$$

где

$$a_1(x) = -b_1(x),$$
$$a_2(x) = -2\frac{d}{dx}b_1(x) + b_2(x),$$
$$a_3(x) = \frac{d}{dx}b_2(x) - \frac{d^2}{dx^2}b_1(x) - b_3(x),$$

а особые функции $\alpha_1(-i)$, $i = 1, 2, 3$ определяются коэффициентом n-образа $\alpha_1(n)$.

Вариант $n = -4$, $m = 4$. В равенстве (9.30) примем $n = -4$

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{(i+m)}C(m,i)\frac{\partial^{m-i}}{\partial x^{m-i}}\alpha_1(-4+i) + \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{m-1-j}(-1)^{(j+i+m-2)}C(m-1-i,j)\frac{\partial^{m-1-i-j}}{\partial x^{m-1-i-j}}(\alpha_1(-4+j)\,b_{1+i}(x)) = 0. \tag{9.51}$$

Выделим в этом уравнении составляющие из особых слагаемых, т. е. слагаемых вида: $\alpha_1(-i)$, $i = 1 \,..\, 4$,

$$(-1)^m C(m,0)\frac{d^m}{dx^m}\alpha_1(-4) + (-1)^{(1+m)}C(m,1)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\alpha_1(-3) + (-1)^{(2+m)}C(m,2)\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}\alpha_1(-2) + (-1)^{(3+m)}C(m,3)\frac{d^{m-3}}{dx^{m-3}}\alpha_1(-1) +$$
$$+\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{(-2+i+m)}C(m-1-i,0)\frac{d^{m-1-i}}{dx^{m-1-i}}(\alpha_1(-4)\,b_{1+i}(x)) + \sum_{i=0}^{m-2}(-1)^{(-1+i+m)}C(m-1-i,1)\frac{d^{m-2-i}}{dx^{m-2-i}}(\alpha_1(-3)\,b_{1+i}(x)) +$$
$$+\sum_{i=0}^{m-3}(-1)^{(i+m)}C(m-1-i,2)\frac{d^{m-3-i}}{dx^{m-3-i}}(\alpha_1(-2)\,b_{1+i}(x)) + \sum_{i=0}^{m-4}(-1)^{(1+i+m)}C(m-1-i,3)\frac{d^{m-4-i}}{dx^{m-4-i}}(\alpha_1(-1)\,b_{1+i}(x)) + \sum_{i=0}^{m}(-1)^{(i+m)}C(m,i)\frac{\partial^{m-i}}{\partial x^{m-i}}\alpha_1(-4+i) +$$
$$+\sum_{j=4}^{m}\sum_{i=4}^{m-1-j}(-1)^{(j+i+m-2)}C(m-1-i,j)\frac{\partial^{m-1-i-j}}{\partial x^{m-1-i-j}}(\alpha_1(-4+j)\,b_{1+i}(x)) = 0.$$

Полученные представления для $\alpha_1(-i)$, $i = 1 \,..\, 3$ (9.48), (9.49), (9.50) достаточно дополнить в соответствии с (9.23) представлением для $\alpha_1(-4)$, и тогда получим предполагаемую систему значений $\alpha_1(-i)$, $i = 1, 2 \,..\, 4$.

$$\alpha_1(-1) = 1 + Y_1(x), \tag{9.52}$$

$$\alpha_1(-2) = Y_1(x) + Y_2(x), \tag{9.53}$$

$$\alpha_1(-3) = \frac{1}{2} Y_1(x)\,x^2 + Y_2(x)\,x + Y_3(x), \tag{9.54}$$

$$\alpha_1(-4) = \frac{1}{6} Y_1(x)\,x^3 + \frac{1}{2} Y_2(x)\,x^2 + Y_3(x)\,x + Y_4(x), \tag{9.55}$$

где функции $Y_i(x)$, $i = 1\,..\,4$ являются решением ОДУ:

$$2\frac{d^4}{dx^4}Y(x) + \left(\frac{d^3}{dx^3}Y(x)\right)b_1(x) + \left(-b_2(x) + 3\frac{d}{dx}b_1(x)\right)\frac{d^2}{dx^2}Y(x) + \left(b_3(x) + 3\frac{d^2}{dx^2}b_1(x) - 2\frac{d}{dx}b_2(x)\right)\frac{d}{dx}Y(x) +$$
$$+\left(-b_4(x) + \frac{d^3}{dx^3}b_1(x) - \frac{d^2}{dx^2}b_2(x) + \frac{d}{dx}b_3(x)\right)Y(x) = 0. \tag{9.56}$$

Рассмотрим частные случаи, которые помогут определиться с представлением особой функции $\alpha_1(-4)$.

Вариант $m = 4$. Уравнение (9.51) с учетом начального условия: $\alpha_1(0) = b_1(x)$ принимает вид:

$$2\frac{d^4}{dx^4}\alpha_1(-4) - 8\frac{d^3}{dx^3}\alpha_1(-3) + 12\frac{d^2}{dx^2}\alpha_1(-2) - 8\frac{d}{dx}\alpha_1(-1) + \frac{d^3}{dx^3}(\alpha_1(-4)\,b_1(x)) - \frac{d^2}{dx^2}(\alpha_1(-4)\,b_2(x)) + \frac{d}{dx}(\alpha_1(-4)\,b_3(x)) - \alpha_1(-4)\,b_4(x) - 3\frac{d^2}{dx^2}(\alpha_1(-3)\,b_1(x)) +$$
$$+ 2\frac{d}{dx}(\alpha_1(-3)\,b_2(x)) - \alpha_1(-3)\,b_3(x)) + 3\frac{d}{dx}(\alpha_1(-2)\,b_1(x)) - \alpha_1(-2)\,b_2(x)) - \alpha_1(-1)\,b_1(x)) + b_1(x) = 0. \tag{9.57}$$

В качестве рабочей гипотезы примем значения особых функций, определяемых равенствами (9.52) — (9.55), с условием, что $Y_i(x)$, $i = 1\,..\,4$ являются решением (9.56). В этом случае после подстановки в (9.57) получим равенство, которое выполняется тождественно, так как функции $Y_i(x)$, $i = 1\,..\,4$ являются решением ОДУ (9.56).

Из системы равенств (9.52) — (9.55) находим:

$$Y_1(x) = \alpha_1(-1) - 1, \tag{9.58}$$
$$Y_2(x) = (-\alpha_1(-1) + 1)\,x + \alpha_1(-2), \tag{9.59}$$
$$Y_3(x) = \frac{1}{2}(\alpha_1(-1) - 1)\,x^2 - \alpha_1(-2)\,x + \alpha_1(-3), \tag{9.60}$$

$$Y_4(x) = \frac{(1 - \alpha_1(-1))\,x^3}{6} + \frac{\alpha_1(-2)\,x^2}{2} - \alpha_1(-3)\,x + \alpha_1(-4). \tag{9.61}$$

Таким образом показано, что функции $Y_i(x)$, $i = 1\,..\,4$, определяемые равенствами (9.58) — (9.61), являются частными решениями уравнения (9.56) или уравнения

$$\frac{d^4}{dx^4}Y(x) = a_1(x)\frac{d^3}{dx^3}Y(x) + a_2(x)\frac{d^2}{dx^2}Y(x) + a_3(x)\frac{d}{dx}Y(x) + a_4(x)\,Y(x), \tag{9.62}$$

где

$$a_1(x) = -\frac{1}{2}b_1(x), \tag{9.63}$$

$$a_2(x) = -\frac{1}{2}\left(-b_2(x) + 3\frac{d}{dx}b_1(x)\right),$$

$$a_3(x) = -\frac{1}{2}\left(b_3(x) + 3\frac{d^2}{dx^2}b_1(x) - 2\frac{d}{dx}b_2(x)\right),$$

$$a_4(x) = -\frac{1}{2}\left(-b_4(x) + \frac{d^3}{dx^3}b_1(x) - \frac{d^2}{dx^2}b_2(x) + \frac{d}{dx}b_3(x)\right),$$

а особые функции $\alpha_1(-i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ определяются коэффициентом n-образа $\alpha_1(n)$ для уравнения

$$\frac{d^4}{dx^4}Z = b_1(x)\frac{d^3}{dx^3}Z + b_2(x)\frac{d^2}{dx^2}Z + b_3(x)\frac{d}{dx}Z + b_4(x)Z. \tag{9.64}$$

Совершенно аналогичным образом доказывается, что функции $Y_i(x)$, $i = 1 \,..\, m$, определяемые из равенств (9.23), (9.24), являясь частными решениями (9.25), в которых $\alpha_1(-i)$, $i = 1 \,..\, m$, определяются коэффициентами n-образа ОДУ (9.26).

Таким образом, можно прийти к выводу о том, что:

Если особые функции $\alpha_1(-i)$, $i = 1, 2, 3 \,..\, m$ определить равенствами

$$\alpha_1(-1) = 1 + Y_1(x), \tag{9.65}$$

$$\alpha_1(-j) = \sum_{i=1}^{j}\frac{Y_{j-i+1}(x)\,x^{(i-1)}}{(i-1)!}, \quad j = 2 \,..\, m, \tag{9.66}$$

где функции $Y_i(x)$, $i = 1, 2 \,..\, m$ являются частными решениями ОДУ

$$\frac{d^m}{dx^m}Y(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{(-m-i)}\,C(m-i,\, m-k)\frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}}b_i(x)\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}Y(x), \tag{9.67}$$

а особые функции $\alpha_1(-i)$, $i = 1, 2, 3 \,..\, m$ являются производными от коэффициентов n-образа ОДУ

$$\frac{d^m}{dx^m}Z = \sum_{k=1}^{m}b_k(x)\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}Z, \tag{9.68}$$

то уравнение

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{(i+m)}\,C(m,\, i)\frac{\partial^{m-i}}{\partial x^{m-i}}\alpha_1(n+i) + \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{m-1-j}(-1)^{(j+i+m-2)}\,C(m-1-i,\, j)\frac{\partial^{m-1-i-j}}{\partial x^{m-1-i-j}}(\alpha_1(n+j)\,b_{1+i}(x)) = 0 \tag{9.69}$$

выполняется тождественно.

Доказательство. Принимая в (9.30) $n = -m$, получим:

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{(i+m)}\,C(m,\, i)\frac{\partial^{m-i}}{\partial x^{m-i}}\alpha_1(-m+i) + \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{m-1-j}(-1)^{(j+i+m-2)}\,C(m-1-i,\, j)\frac{\partial^{m-1-i-j}}{\partial x^{m-1-i-j}}(\alpha_1(-m+j)\,b_{1+i}(x)) = 0. \tag{9.70}$$

Так как все решения заданного ОДУ определяются только одной особой функцией $\alpha_1(-m+j)$, то в дальнейшем введем обозначение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Установим обозначение:

$$\alpha_1(-m+j) = \alpha(-m+j), \quad j = 0, 1, 2 \,..\, m-1. \tag{9.71}$$

Тогда искомая структурная форма для частных решений исходного ОДУ (8.4) принимает вид:

$$Y_i(x) = \frac{(-1)^i(1-\alpha(-1))\,x^{(i-1)}}{(i-1)!} + \sum_{k=2}^{i} \frac{(-1)^{(k+i)}\alpha(-k)\,x^{(i-k)}}{(i-k)!}, \quad i = 1, 2 \,..\, m, \tag{9.72}$$

где $\alpha(-k)$, $k = 1 \,..\, m$ — искомые функции.

Основное свойство этой формулы заключается в том, что для получения общего решения ОДУ (8.4) достаточно нахождения формулы для функции $\alpha(n)$, где n — параметр. Если известна эта функция, то особые функции $\alpha_1(-i)$, $i = 1, 2, 3 \,..\, m$ определяются обычной заменой параметра n на соответствующее отрицательное значение $-1, -2, -3 \,..\, m$ и, следовательно, в соответствии с (9.72) будут определены все частные решения ОДУ (8.4).

10. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА n-образа $\alpha(n)$

10.1. Общие положения

На основании изложенного, для нахождения общего решения ОДУ:

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} Y = \sum_{p=1}^{m} a_p(x) \frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}} Y, \quad \text{где } a_p(x) \text{ — заданные функции}, \tag{10.1}$$

необходимо выписать сопряженное ему ОДУ

$$\frac{d^m}{dx^m} R(x) = \sum_{k=1}^{m} b_k(x) \frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}} R(x), \tag{10.2}$$

где коэффициенты $b_p(x)$ определяются через заданные коэффициенты $a_p(x)$ формулами

$$b_k(x) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i C(m-i, m-k) \frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}} a_i(x).$$

Так как общее решение ОДУ (10.1) определяется равенством

$$Y = \sum_{i=1}^{m} C_i Y_i(x), \quad C_i \text{ — const}, \tag{10.3}$$

в котором частные решения характеризуются формулами

$$Y_i(x) = \frac{(-1)^i(1-\alpha(-1))\,x^{(i-1)}}{(i-1)!} + \sum_{k=2}^{i} \frac{(-1)^{(k+i)}\alpha(-k)\,x^{(i-k)}}{(i-k)!}, \quad i = 1, 2 \ldots m, \tag{10.4}$$

то особые функции $\alpha(-k)$, $k = 1, 2 \,..\, m$ определяются через значение коэффициентов n-образа для уравнения n-образа:

$$\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} R(x) = \sum_{p=1}^{m} \alpha_p(n) \frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}} R(x) \tag{10.5}$$

сопряженного уравнения (10.2).

10.2. Определение формы представления для особой функции $\alpha(n)$

Так как уравнение n-образа (10.5) можно представить в виде:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{d^m}{dx^m} R(x)\right) = \sum_{p=1}^{m} \alpha_p(n) \frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}} R(x), \tag{10.6}$$

то, учитывая исходное равенство (10.2), получим:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(b_k(x) \frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}} R(x)\right) = \sum_{p=1}^{m} \alpha_p(n) \frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}} R(x).$$

В соответствии с теоремой Лейбница:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(b_k(x) \frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}} R(x)\right) = \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_k(x)\right) \frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}} R(x)\right).$$

Тогда уравнение n-образа (10.6) принимает вид:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=1}^{m} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_k(x) \frac{d^{m+i-k}}{dx^{m+i-k}} R(x) = \sum_{p=1}^{m} \alpha_p(n) \frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}} R(x). \tag{10.7}$$

В левой части этого равенства производные порядка выше $\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} R(x)$ заменяются посредством равенства (10.2). Следовательно, поскольку левая часть будет представлять собой сумму производных $\frac{d^i}{dx^i} R(x)$, $i = 0 \,..\, m-1$, коэффициенты при которых образуют сумму некоторой последовательности функций, то формулу для коэффициентов n-образа $\alpha_p(n)$ необходимо искать в виде:

$$\alpha_p(n) = \sum_{i=0}^{N} \xi_{i,\,p}(n), \tag{10.8}$$

где $\xi_{i,\,p}(n)$ — некоторые функции с параметром n. N — натуральное число, в пределе стремящееся к бесконечности.

С учетом того, что по (9.71):

$$\alpha_1(-m+j) = \alpha(-m+j), \quad j = 0, 1, 2 \dots m-1$$

первый коэффициент n-образа будет находиться в виде:

$$\alpha(n) = \sum_{s=0}^{N} \xi_s(n), \tag{10.9}$$

$\xi_i(n)$ — искомые функции.

С учетом равенства (10.8) уравнение n-образа (10.5) примет вид:

$$\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} R(x) = \sum_{p=1}^{m} \sum_{i=0}^{N} \xi_{i,\,p}(n) \frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}} R(x).$$

Либо в эквивалентной форме:

$$\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} R(x) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{p=1}^{m} \xi_{i,\,p}(n) \frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}} R(x). \tag{10.10}$$

Левую часть равенства (10.7) представим в эквивалентном виде:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_k(x) \frac{d^{m+i-k}}{dx^{m+i-k}} R(x) = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_1(x) \frac{d^{m+i-1}}{dx^{m+i-1}} R(x) + \frac{d^n}{dx^n} (b_1(x)) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} R(x) + \sum_{i=2}^{n} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} (b_2(x)) \frac{d^{m+i-2}}{dx^{m+i-2}} R(x) +$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} \frac{d^n}{dx^n} b_2(x) \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} R(x) + \begin{bmatrix} 1 \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} b_2(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} R(x) + \sum_{i=3}^{n} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_3(x) \frac{d^{m+i-3}}{dx^{m+i-3}} R(x) + \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} \frac{d^n}{dx^n} b_3(x) \frac{d^{m-3}}{dx^{m-3}} R(x) +$$
$$+ \begin{bmatrix} 1 \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} b_3(x) \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} R(x) + \begin{bmatrix} 2 \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} b_3(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} R(x) + \ldots + \sum_{i=m}^{n} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \cdot \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_m(x) \frac{d^i}{dx^i} R(x) + \sum_{i=0}^{m-1} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \cdot \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_m(x) \frac{d^i}{dx^i} R(x).$$

Группируя по степеням $\frac{d^i}{dx^i} R(x)$, $i = 0 \,..\, m-1$, получим:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=k}^{n} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_k(x) \frac{d^{m+i-k}}{dx^{m+i-k}} R(x) + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{k} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_{m+i-k}(x) \frac{d^k}{dx^k} R(x).$$

Возвращаясь снова к (10.7) с учетом полученного результата и того факта, что правая часть (10.10) равна левой части (10.7), получаем:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=k}^{n} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_k(x) \frac{d^{m+i-k}}{dx^{m+i-k}} R(x) + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{k} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_{m+i-k}(x) \frac{d^k}{dx^k} R(x) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{p=1}^{m} \xi_{i,\,p}(n) \frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}} R(x).$$

Представим его в виде:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=k}^{n} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_k(x) \frac{d^{m+i-k}}{dx^{m+i-k}} R(x) + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{k} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_{m+i-k}(x) \frac{d^k}{dx^k} R(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{m} \xi_{i,\,p}(n) \frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}} R(x) + \sum_{p=1}^{m} \xi_{0,\,p}(n) \frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}} R(x). \tag{10.11}$$

Отсюда следует

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{k} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_{m+i-k}(x) \frac{d^k}{dx^k} R(x) = \sum_{p=1}^{m} \xi_{0,\,p}(n) \frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}} R(x).$$

Таким образом, искомое нулевое, т. е. начальное значение функции $\xi_{0,\,1}(n) = \xi_0(n)$ равно:

$$\xi_0(n) = \sum_{i=0}^{m-1} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_{i+1}(x). \tag{10.12}$$

Из (10.11) следует также и второе равенство

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=k}^{n} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_k(x) \frac{d^{m+i-k}}{dx^{m+i-k}} R(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{m} \xi_{i,\,p}(n) \frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}} R(x). \tag{10.13}$$

В слагаемом

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=k}^{n} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_k(x) \frac{d^{m+i-k}}{dx^{m+i-k}} R(x)$$

произведем замену индекса суммирования i на $i - k$. Тогда получим:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=k}^{n} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_k(x) \frac{d^{m+i-k}}{dx^{m+i-k}} R(x) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{-k+n} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}} b_k(x) \frac{d^{m+i}}{dx^{m+i}} R(x).$$

Подставляя в правую часть значение (10.2), получим:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{-k+n} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}} b_k(x) \frac{\partial^i}{\partial x^i} \sum_{k_1=1}^{m} b_{k_1}(x) \frac{d^{m-k_1}}{dx^{m-k_1}} R(x).$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{-k+n} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}} b_k(x) \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\sum_{k_1=1}^{m} b_{k_1}(x) \frac{d^{m-k_1}}{dx^{m-k_1}} R(x) \right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{-k+n} \sum_{k_1=1}^{m} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}} b_k(x) \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(b_{k_1}(x) \frac{d^{m-k_1}}{dx^{m-k_1}} R(x) \right). \tag{10.14}$$

Поскольку в соответствии с формулой Лейбница

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(b_{k_1}(x) \frac{d^{m-k_1}}{dx^{m-k_1}} R(x) \right) = \sum_{i_1=0}^{i} \begin{bmatrix} i_1 \\ i \end{bmatrix} \frac{d^{m+i_1-k_1}}{dx^{m+i_1-k_1}} R(x) \frac{d^{i-i_1}}{dx^{i-i_1}} b_{k_1}(x),$$

то в итоге для правой части (10.14) получим:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{-k+n} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}} b_k(x) \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{i_1=0}^{i} \begin{bmatrix} i_1 \\ i \end{bmatrix} \frac{d^{i-i_1}}{dx^{i-i_1}} b_{k_1}(x) \frac{d^{m+i_1-k_1}}{dx^{m+i_1-k_1}} R(x).$$

Отсюда, группируя по степеням $\frac{d^i}{dx^i} R(x)$, $i = 0 \,..\, m-1$, получим эквивалентное равенство

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{-k+n} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}} b_k(x) \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{i_1=0}^{i} \begin{bmatrix} i_1 \\ i \end{bmatrix} \frac{d^{i-i_1}}{dx^{i-i_1}} b_{k_1}(x) \frac{d^{m+i_1-k_1}}{dx^{m+i_1-k_1}} R(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{-k+n} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}} b_k(x) \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{i_1=k_1}^{i} \begin{bmatrix} i_1 \\ i \end{bmatrix} \frac{d^{i-i_1}}{dx^{i-i_1}} b_{k_1}(x) \frac{d^{m+i_1-k_1}}{dx^{m+i_1-k_1}} R(x) + \sum_{k_1=0}^{m-1} \sum_{i_1=0}^{k_1} \begin{bmatrix} i_1 \\ i \end{bmatrix} \frac{d^{i-i_1}}{dx^{i-i_1}} b_{m+i_1-k_1}(x) \frac{d^{k_1}}{dx^{k_1}} R(x).$$

В этом случае равенство (10.13) принимает вид:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{-k+n} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}} b_k(x) \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{i_1=k_1}^{i} \begin{bmatrix} i_1 \\ i \end{bmatrix} \frac{d^{i-i_1}}{dx^{i-i_1}} b_{k_1}(x) \frac{d^{m+i_1-k_1}}{dx^{m+i_1-k_1}} R(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{-k+n} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}} b_k(x) \sum_{k_1=0}^{m-1} \sum_{i_1=0}^{k_1} \begin{bmatrix} i_1 \\ i \end{bmatrix} \frac{d^{i-i_1}}{dx^{i-i_1}} b_{m+i_1-k_1}(x) \frac{d^{k_1}}{dx^{k_1}} R(x) = \sum_{i=2}^{N} \sum_{p=1}^{m} \xi_{i,p}(n) \frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}} R(x) + \sum_{p=1}^{m} \xi_{1,p}(n) \frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}} R(x). \quad (10.15)$$

Отсюда следует искомое первое значение $\xi_1(n)$:

$$\xi_1(n) = \sum_{i_1=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{n-k} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}} b_k(x) \frac{d^{i-i_1}}{dx^{i-i_1}} b_{i_1+1}(x). \quad (10.16)$$

Из (10.15) с учетом (10.16) следует равенство

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{-k+n} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}} b_k(x) \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{i_1=k_1}^{i} \begin{bmatrix} i_1 \\ i \end{bmatrix} \frac{d^{i-i_1}}{dx^{i-i_1}} b_{k_1}(x) \frac{d^{m+i_1-k_1}}{dx^{m+i_1-k_1}} R(x) = \sum_{i=2}^{N} \sum_{p=1}^{m} \xi_{i,p}(n) \frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}} R(x). \quad (10.17)$$

В левой части этого равенства снова производим замену индекса суммирования i_1 на $i_1 - k_1$. Тогда получим его новое эквивалентное представление:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{-k+n} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}} b_k(x) \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{i_1=0}^{i-k_1} \begin{bmatrix} i_1+k_1 \\ i \end{bmatrix} \frac{d^{i-i_1-k_1}}{dx^{i-i_1-k_1}} b_{k_1}(x) \frac{d^{m+i_1}}{dx^{m+i_1}} R(x).$$

Подставляя сюда значение (10.2), получим:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{-k+n} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}} b_k(x) \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{i_1=0}^{i-k_1} \begin{bmatrix} i_1+k_1 \\ i \end{bmatrix} \frac{d^{i-i_1-k_1}}{dx^{i-i_1-k_1}} b_{k_1}(x) \frac{\partial^{i_1}}{\partial x^{i_1}} \left(\sum_{k_2=1}^{m} b_{k_2}(x) \frac{d^{m-k_2}}{dx^{m-k_2}} R(x) \right). \quad (10.18)$$

С учетом формулы Лейбница имеем:

$$\frac{\partial^{i_1}}{\partial x^{i_1}} \left(b_{k_2}(x) \frac{d^{m-k_2}}{dx^{m-k_2}} R(x) \right) = \sum_{i_2=0}^{i_1} \begin{bmatrix} i_2 \\ i_1 \end{bmatrix} \frac{d^{m+i_2-k_2}}{dx^{m+i_2-k_2}} R(x) \frac{d^{i_1-i_2}}{dx^{i_1-i_2}} b_{k_2}(x).$$

Таким образом, выражение (10.18) приводится к виду:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{-k+n}\begin{bmatrix}k+i\\ n\end{bmatrix}\frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}}b_k(x)\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{i_1=0}^{i-k_1}\begin{bmatrix}i_1+k_1\\ i\end{bmatrix}\frac{d^{i-i_1-k_1}}{dx^{i-i_1-k_1}}b_{k_1}(x)\sum_{k_2=1}^{m}\sum_{i_2=0}^{i_1}\begin{bmatrix}i_2\\ i_1\end{bmatrix}\frac{d^{i_1-i_2}}{dx^{i_1-i_2}}b_{k_2}(x)\frac{d^{m+i_2-k_2}}{dx^{m+i_2-k_2}}R(x).$$

Данное выражение эквивалентно

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{-k+n}\begin{bmatrix}k+i\\ n\end{bmatrix}\frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}}b_k(x)\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{i_1=0}^{i-k_1}\begin{bmatrix}i_1+k_1\\ i\end{bmatrix}\frac{d^{i-i_1-k_1}}{dx^{i-i_1-k_1}}b_{k_1}(x)\times$$
$$\times\left(\sum_{k_2=1}^{m}\sum_{i_2=k_2}^{i_1}\begin{bmatrix}i_2\\ i_1\end{bmatrix}\frac{d^{i_1-i_2}}{dx^{i_1-i_2}}b_{k_2}(x)\frac{d^{m+i_2-k_2}}{dx^{m+i_2-k_2}}R(x)+\sum_{k_2=0}^{m-1}\sum_{i_2=0}^{k_2}\begin{bmatrix}i_2\\ i_1\end{bmatrix}\frac{d^{i_1-i_2}}{dx^{i_1-i_2}}b_{m+i_2-k_2}(x)\frac{d^{k_2}}{dx^{k_2}}R(x)\right).$$

В этом случае равенство (10.17) принимает вид:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{-k+n}\begin{bmatrix}k+i\\ n\end{bmatrix}\frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}}b_k(x)\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{i_1=0}^{i-k_1}\begin{bmatrix}i_1+k_1\\ i\end{bmatrix}\frac{d^{i-i_1-k_1}}{dx^{i-i_1-k_1}}(b_{k_1}(x))\sum_{k_2=1}^{m}\sum_{i_2=k_2}^{i_1}\begin{bmatrix}i_2\\ i_1\end{bmatrix}\frac{d^{i_1-i_2}}{dx^{i_1-i_2}}b_{k_2}(x)\frac{d^{m+i_2-k_2}}{dx^{m+i_2-k_2}}R(x)+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{-k+n}\begin{bmatrix}k+i\\ n\end{bmatrix}\frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}}b_k(x)\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{i_1=0}^{i-k_1}\begin{bmatrix}i_1+k_1\\ i\end{bmatrix}\frac{d^{i-i_1-k_1}}{dx^{i-i_1-k_1}}b_{k_1}(x)\sum_{k_2=0}^{m-1}\sum_{i_2=0}^{k_2}\begin{bmatrix}i_2\\ i_1\end{bmatrix}\frac{d^{i_1-i_2}}{dx^{i_1-i_2}}b_{m+i_2-k_2}(x)\frac{d^{k_2}}{dx^{k_2}}R(x)=$$
$$=\sum_{i=3}^{N}\sum_{p=1}^{m}\xi_{i,\,p}(n)\frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}}R(x)+\sum_{p=1}^{m}\xi_{2,\,p}(n)\frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}}R(x). \tag{10.19}$$

Отсюда следует, что искомое второе слагаемое для первого коэффициента n-образа определяется формулой

$$\xi_2(n)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{-k+n}\begin{bmatrix}k+i\\ n\end{bmatrix}\frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}}b_k(x)\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{i_1=0}^{i-k_1}\begin{bmatrix}i_1+k_1\\ i\end{bmatrix}\frac{d^{i-i_1-k_1}}{dx^{i-i_1-k_1}}b_{k_1}(x)\sum_{i_2=0}^{m-1}\begin{bmatrix}i_2\\ i_1\end{bmatrix}\frac{d^{i_1-i_2}}{dx^{i_1-i_2}}b_{1+i_2}(x). \tag{10.20}$$

Снова аналогично описанному алгоритму из (10.19) получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{-k+n}\begin{bmatrix}k+i\\ n\end{bmatrix}\frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}}(b_k(x))\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{i_1=0}^{i-k_1}\begin{bmatrix}i_1+k_1\\ i\end{bmatrix}\frac{d^{i-i_1-k_1}}{dx^{i-i_1-k_1}}(b_{k_1}(x))\sum_{k_2=1}^{m}\sum_{i_2=k_2}^{i_1}\begin{bmatrix}i_2\\ i_1\end{bmatrix}\frac{d^{i_1-i_2}}{dx^{i_1-i_2}}(b_{k_2}(x))\frac{d^{m+i_2-k_2}}{dx^{m+i_2-k_2}}R(x)=\sum_{i=3}^{N}\sum_{p=1}^{m}\xi_{i,\,p}(n)\frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}}R(x).$$

Далее аналогичным образом находим:

$$\xi_3(n)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{-k+n}\begin{bmatrix}k+i\\ n\end{bmatrix}\frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}}(b_k(x))\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{i_1=0}^{i-k_1}\begin{bmatrix}i_1+k_1\\ i\end{bmatrix}\frac{d^{i-i_1-k_1}}{dx^{i-i_1-k_1}}(b_{k_1}(x))\sum_{k_2=1}^{m}\sum_{i_2=0}^{i_1-k_2}\begin{bmatrix}i_2+k_2\\ i_1\end{bmatrix}\frac{d^{i_1-i_2-k_2}}{dx^{i_1-i_2-k_2}}(b_{k_2}(x))\sum_{i_3=0}^{m-1}\begin{bmatrix}i_3\\ i_2\end{bmatrix}\frac{d^{i_2-i_3}}{dx^{i_2-i_3}}b_{1+i_3}(x),$$

$$\xi_4(n)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{-k+n}\begin{bmatrix}k+i\\ n\end{bmatrix}\frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}}(b_k(x))\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{i_1=0}^{i-k_1}\begin{bmatrix}i_1+k_1\\ i\end{bmatrix}\frac{d^{i-i_1-k_1}}{dx^{i-i_1-k_1}}(b_{k_1}(x))\sum_{k_2=1}^{m}\sum_{i_2=0}^{i_1-k_2}\begin{bmatrix}i_2+k_2\\ i_1\end{bmatrix}\frac{d^{i_1-i_2-k_2}}{dx^{i_1-i_2-k_2}}(b_{k_2}(x))\times$$

$$\times \sum_{k_3=1}^{m} \sum_{i_3=0}^{i_2-k_3} \begin{bmatrix} i_3+k_3 \\ i_2 \end{bmatrix} \frac{d^{i_2-i_3-k_3}}{dx^{i_2-i_3-k_3}}(b_{k_3}(x)) \sum_{i_4=0}^{m-1} \begin{bmatrix} i_4 \\ i_3 \end{bmatrix} \frac{d^{i_3-i_4}}{dx^{i_3-i_4}} b_{1+i_4}(x),$$

$$\xi_5(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{-k+n} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}}(b_k(x)) \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{i_1=0}^{i-k_1} \begin{bmatrix} i_1+k_1 \\ i \end{bmatrix} \frac{d^{i-i_1-k_1}}{dx^{i-i_1-k_1}}(b_{k_1}(x)) \sum_{k_2=1}^{m} \sum_{i_2=0}^{i_1-k_2} \begin{bmatrix} i_2+k_2 \\ i_1 \end{bmatrix} \frac{d^{i_1-i_2-k_2}}{dx^{i_1-i_2-k_2}}(b_{k_2}(x)) \times$$

$$\times \sum_{k_3=1}^{m} \sum_{i_3=0}^{i_2-k_3} \begin{bmatrix} i_3+k_3 \\ i_2 \end{bmatrix} \frac{d^{i_2-i_3-k_3}}{dx^{i_2-i_3-k_3}}(b_{k_3}(x)) \sum_{k_4=1}^{m} \sum_{i_4=0}^{i_3-k_4} \begin{bmatrix} i_4+k_4 \\ i_3 \end{bmatrix} \frac{d^{i_3-i_4-k_4}}{dx^{i_3-i_4-k_4}}(b_{k_4}(x)) \sum_{i_5=0}^{m-1} \begin{bmatrix} i_5 \\ i_4 \end{bmatrix} \frac{d^{i_4-i_5}}{dx^{i_4-i_5}} b_{1+i_5}(x) \tag{10.21}$$

и так далее.

В общем случае можно записать:

$$\xi_N(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{-k+n} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}}(b_k(x)) \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{i_1=0}^{i-k_1} \begin{bmatrix} i_1+k_1 \\ i \end{bmatrix} \frac{d^{i-i_1-k_1}}{dx^{i-i_1-k_1}}(b_{k_1}(x)) \sum_{k_2=1}^{m} \sum_{i_2=0}^{i_1-k_2} \begin{bmatrix} i_2+k_2 \\ i_1 \end{bmatrix} \frac{d^{i_1-i_2-k_2}}{dx^{i_1-i_2-k_2}}(b_{k_2}(x)) \times \ldots \times$$

$$\times \sum_{k_{N-2}=1}^{m} \sum_{i_{N-2}=0}^{i_{N-3}-k_{N-2}} \begin{bmatrix} i_{N-2}+k_{N-2} \\ i_{N-3} \end{bmatrix} \frac{d^{i_{N-3}-i_{N-2}-k_{N-2}}}{dx^{i_{N-3}-i_{N-2}-k_{N-2}}}(b_{k_{N-2}}(x)) \sum_{k_{N-1}=1}^{m} \sum_{i_{N-1}=0}^{i_{N-2}-k_{N-1}} \begin{bmatrix} i_{N-1}+k_{N-1} \\ i_{N-2} \end{bmatrix} \frac{d^{i_{N-2}-i_{N-1}-k_{N-1}}}{dx^{i_{N-2}-i_{N-1}-k_{N-1}}}(b_{k_{N-1}}(x)) \sum_{i_N=0}^{m-1} \begin{bmatrix} i_N \\ i_{N-1} \end{bmatrix} \frac{d^{i_{N-1}-i_N}}{dx^{i_{N-1}-i_N}} b_{1+i_N}(x). \tag{10.22}$$

10.3. Основное свойство слагаемых ряда для особой функции $\alpha(n)$

Выпишем снова полученные значения $\xi_i(n)$, $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\xi_0(n) = \sum_{i=0}^{m-1} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_{i+1}(x),$$

$$\xi_1(n) = \sum_{i_1=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{n-k} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}}(b_k(x)) \frac{d^{i-i_1}}{dx^{i-i_1}} b_{i_1+1}(x),$$

$$\xi_2(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{-k+n} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}}(b_k(x)) \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{i_1=0}^{i-k_1} \begin{bmatrix} i_1+k_1 \\ i \end{bmatrix} \frac{d^{i-i_1-k_1}}{dx^{i-i_1-k_1}}(b_{k_1}(x)) \sum_{i_2=0}^{m-1} \begin{bmatrix} i_2 \\ i_1 \end{bmatrix} \frac{d^{i_1-i_2}}{dx^{i_1-i_2}} b_{1+i_2}(x),$$

$$\xi_3(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{-k+n} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}}(b_k(x)) \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{i_1=0}^{i-k_1} \begin{bmatrix} i_1+k_1 \\ i \end{bmatrix} \frac{d^{i-i_1-k_1}}{dx^{i-i_1-k_1}}(b_{k_1}(x)) \sum_{k_2=1}^{m} \sum_{i_2=0}^{i_1-k_2} \begin{bmatrix} i_2+k_2 \\ i_1 \end{bmatrix} \frac{d^{i_1-i_2-k_2}}{dx^{i_1-i_2-k_2}}(b_{k_2}(x)) \sum_{i_3=0}^{m-1} \begin{bmatrix} i_3 \\ i_2 \end{bmatrix} \frac{d^{i_2-i_3}}{dx^{i_2-i_3}} b_{1+i_3}(x)$$

и так далее.

Анализируя полученные формулы, в том числе общую (10.22), докажем, что справедлива **ТЕОРЕМА:**
Любые два последующих слагаемых $\xi_i(n)$, $i = 0, 1, 2 \,..\, N$ связаны равенством

$$\xi_{s+1}(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_0=0}^{n-k} \begin{bmatrix} i_0+k \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i_0-k}}{dx^{n-i_0-k}}(b_k(x))\, \xi_s(i_0), \quad s = 0, 1, 2 \,..\, N. \tag{10.23}$$

Доказательство. Проверим справедливость этой формулы для нескольких первых слагаемых. Действительно, так как

$$\xi_0(n) = \sum_{i=0}^{m-1} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_{i+1}(x), \tag{10.24}$$

а в соответствии с (10.16)

$$\xi_1(n) = \sum_{i_1=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{n-k} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}} (b_k(x)) \frac{d^{i-i_1}}{dx^{i-i_1}} b_{i_1+1}(x), \tag{10.25}$$

то примем в равенстве (10.23) $s = 0$. Тогда получим:

$$\xi_1(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_0=0}^{n-k} \begin{bmatrix} i_0+k \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i_0-k}}{dx^{n-i_0-k}} (b_k(x))\, \xi_0(i_0). \tag{10.26}$$

Выполняя подстановку в (10.24) $n = i_0$, получим:

$$\xi_0(i_0) = \sum_{i=0}^{m-1} \begin{bmatrix} i \\ i_0 \end{bmatrix} \frac{d^{i_0-i}}{dx^{i_0-i}} b_{i+1}(x).$$

Подставляя это значение в (10.26), получим:

$$\xi_1(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_0=0}^{n-k} \begin{bmatrix} i_0+k \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i_0-k}}{dx^{n-i_0-k}} (b_k(x)) \sum_{i=0}^{m-1} \begin{bmatrix} i \\ i_0 \end{bmatrix} \frac{d^{i_0-i}}{dx^{i_0-i}} b_{i+1}(x).$$

Сравнивая данную формулу с (10.25), убеждаемся в том, что они идентичны.
Снова примем в (10.25) $n = i_0$. Тогда получим:

$$\xi_1(i_0) = \sum_{i_1=0}^{m-1} \sum_{k_0=1}^{m} \sum_{i_2=0}^{i_0-k_0} \begin{bmatrix} k_0+i_2 \\ i_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \frac{d^{i_0-k_0-i_2}}{dx^{i_0-k_0-i_2}} (b_{k_0}(x)) \frac{d^{i_2-i_1}}{dx^{i_2-i_1}} b_{i_1+1}(x). \tag{10.27}$$

Принимая в (10.23) $s = 1$, получим:

$$\xi_2(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_0=0}^{n-k} \begin{bmatrix} i_0+k \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i_0-k}}{dx^{n-i_0-k}} (b_k(x))\, \xi_1(i_0).$$

Подставляя сюда (10.27), имеем:

$$\xi_2(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_0=0}^{n-k} \begin{bmatrix} i_0+k \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i_0-k}}{dx^{n-i_0-k}} (b_k(x)) \sum_{i_1=0}^{m-1} \sum_{k_0=1}^{m} \sum_{i_2=0}^{i_0-k_0} \begin{bmatrix} k_0+i_2 \\ i_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \frac{d^{i_0-k_0-i_2}}{dx^{i_0-k_0-i_2}} (b_{k_0}(x)) \frac{d^{i_2-i_1}}{dx^{i_2-i_1}} b_{i_1+1}(x). \tag{10.28}$$

Сравнивая данное значение $\xi_2(n)$ с аналогичным, полученным ранее и определяемым формулой (10.20), убеждаемся в их идентичности.

Допустим, что формула (10.23) выполнена до $s = p$. Докажем, что она имеет место и для $s = p + 1$. Действительно, формула (10.23) в этом случае принимает вид:

$$\xi_{p+2}(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_0=0}^{n-k} \begin{bmatrix} i_0 + k \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i_0-k}}{dx^{n-i_0-k}} (b_k(x))\, \xi_{p+1}(i_0). \tag{10.29}$$

Значение $\xi_{p+1}(i_0)$ определено при $s = p$. Поэтому из (10.23) имеем:

$$\xi_{p+1}(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_0=0}^{n-k} \begin{bmatrix} i_0 + k \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i_0-k}}{dx^{n-i_0-k}} (b_k(x))\, \xi_{p}(i_0).$$

Значение $\xi_p(i_0)$ также определено при $s = p - 1$. Поэтому из (10.23) имеем:

$$\xi_{p}(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_0=0}^{n-k} \begin{bmatrix} i_0 + k \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i_0-k}}{dx^{n-i_0-k}} (b_k(x))\, \xi_{p-1}(i_0).$$

Поскольку по определению до $s = p$ формула (10.23) определена, то в итоге на $(p + 1)$-м шаге имеем:

$$\xi_{1}(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_0=0}^{n-k} \begin{bmatrix} i_0 + k \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i_0-k}}{dx^{n-i_0-k}} (b_k(x))\, \xi_{0}(i_0).$$

Подставляя все эти значения последовательно в (10.29), в итоге получим:

$$\xi_{p+2}(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{-k+n} \begin{bmatrix} k + i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}} (b_k(x)) \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{i_1=0}^{i-k_1} \begin{bmatrix} i_1 + k_1 \\ i \end{bmatrix} \frac{d^{i-i_1-k_1}}{dx^{i-i_1-k_1}} (b_{k_1}(x)) \sum_{k_2=1}^{m} \sum_{i_2=0}^{i_1-k_2} \begin{bmatrix} i_2 + k_2 \\ i_1 \end{bmatrix} \frac{d^{i_1-i_2-k_2}}{dx^{i_1-i_2-k_2}} (b_{k_2}(x)) \times \ldots \times$$
$$\times \sum_{k_p=1}^{m} \sum_{i_p=0}^{i_{p-1}-k_p} \begin{bmatrix} i_{N-2} + k_{N-2} \\ i_{N-3} \end{bmatrix} \frac{d^{i_{p-1}-i_p-k_p}}{dx^{i_{p-1}-i_p-k_p}} (b_{k_p}(x)) \sum_{k_{p+1}=1}^{m} \sum_{i_{p+1}=0}^{i_p-k_{p+1}} \begin{bmatrix} i_{p+1} + k_{p+1} \\ i_p \end{bmatrix} \frac{d^{i_p-i_{p+1}-k_{p+1}}}{dx^{i_p-i_{p+1}-k_{p+1}}} (b_{k_{p+1}}(x)) \sum_{i_{p+2}=0}^{m-1} \begin{bmatrix} i_{p+2} \\ i_{p+1} \end{bmatrix} \frac{d^{i_{p+1}-i_{p+2}}}{dx^{i_{p+1}-i_{p+2}}} b_{1+i_{p+2}}(x).$$

Однако данная формула полностью совпадает с формулой (10.22) при $N = p + 2$. Теорема доказана.

Таким образом, если ввести дифференциальный оператор $\Xi_n[\;]$, действующий на функцию $f(x)$ и зависящий от параметра n в соответствии с формулой:

$$\Xi_n[f(x)] = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_0=0}^{n-k} \begin{bmatrix} i_0 + k \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i_0-k}}{dx^{n-i_0-k}} (b_k(x))[f(x)], \tag{10.30}$$

то

$$\xi_1(n) = \Xi_n[\xi_0(n)], \tag{10.31}$$
$$\xi_2(n) = \Xi_n[\Xi_{i_0}[\xi_0(n)]], \tag{10.32}$$
$$\xi_3(n) = \Xi_n[\Xi_{i_1}[\Xi_{i_0}[\xi_0(n)]]], \tag{10.33}$$
$$\xi_4(n) = \Xi_n[\Xi_{i_2}[\Xi_{i_1}[\Xi_{i_0}[\xi_0(n)]]]], \tag{10.34}$$

$$\xi_k(n) = \Xi_n[\Xi_{i_{k-2}}[\Xi_{i_{k-3}}[[[0, 0, 0]]\, \Xi_{i_2}[\Xi_{i_1}[\Xi_{i_0}[\xi_0(n)]]]]]]. \tag{10.35}$$

Следовательно, формула для первого коэффициента n-образа принимает вид:

$$\alpha(n) = \xi_0(n) + \Xi_n[\xi_0(n)] + \sum_{k=2}^{N} \Xi_n[\Xi_{i_{k-2}}[\Xi_{i_{k-3}} \ldots \Xi_{i_2}[\Xi_{i_1}[\Xi_{i_0}[\xi_0(n)]]]]]. \qquad (10.36)$$

Примечание. Очевидно, что в (10.30) при выборе соответствующего индекса не должно быть повторений, например:

$$\Xi_{i_0}[f(x)] = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_1=0}^{i_0-k} \begin{bmatrix} i_1+k \\ i_0 \end{bmatrix} \frac{d^{i_0-i_1-k}}{dx^{i_0-i_1-k}} (b_k(x))[f(x)] \qquad (10.37)$$

и так далее.

10.4. Определение слагаемых ряда для особой функции $\alpha(n)$

Как было установлено ранее, слагаемые $\xi_i(n)$, $i = 1, 2, 3 \,..\, N$ определяются формулами, которые представлены как частично суммируемые последовательности. Однако в такой форме эти коэффициенты нельзя использовать для определения искомых особых функций $\alpha(n)$, $n = -1, -2, -3 \,..\, -m$, так как невозможно установить их значение без вычисления суммы $\alpha(n)$. Таким образом, решение проблемы — **вычисление частных решений линейных ОДУ с переменными коэффициентами**, невозможно без решения задачи вычисления сумм рядов (10.31) — (10.35).

Рассмотрим последовательно решение этой задачи для слагаемых $\xi_i(n)$, $i = 0, 1, 2, 3 \,..\, N$ до момента определения общего члена этой последовательности, используя при этом ранее полученные результаты.

10.4.1. Коэффициент $\xi_0(n)$

Коэффициент $\xi_0(n)$ определяется формулой

$$\xi_0(n) = \sum_{i=0}^{m-1} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} b_{i+1}(x).$$

В соответствии с основной теоремой

$$\underbrace{\int \ldots \int}_{s} f(x) \underbrace{dx \ldots dx}_{s} = \frac{d^{-s}}{dx^{-s}} f(x),$$

поэтому $\xi_0(n)$ представим в виде:

$$\boxed{\xi_0(n) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} [b_{i+1}(x)]_i \right).} \qquad (10.38)$$

Так как параметр n не входит в пределы суммирования, то данная формула является искомой, т. е. окончательной и изменению не подлежит.

10.4.2. Коэффициент $\xi_1(n)$

Коэффициент $\xi_1(n)$ определяется формулой (10.16)

$$\xi_1(n) = \sum_{i_1=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{n-k} \begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i \end{bmatrix} \frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}} (b_k(x)) \frac{d^{i-i_1}}{dx^{i-i_1}} b_{i_1+1}(x). \qquad (10.39)$$

Для вычисления суммы этого конечного ряда по n воспользуемся формулой (10.23):

$$\xi_{s+1}(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_0=0}^{n-k} \begin{bmatrix} i_0 + k \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-i_0-k}}{dx^{n-i_0-k}} (b_k(x))\, \xi_s(i_0), \;\; s = 0,\, 1,\, 2\, ..\, N.$$

Заменой индекса суммирования $i_0 = z - k$ данная формула приводится к виду:

$$\xi_{s+1}(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{z=k}^{n} \begin{bmatrix} z \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-z}}{dx^{n-z}} (b_k(x))\, \xi_s(z-k), \;\; s = 0,\, 1,\, 2\, ..\, N.$$

Представим ее в виде:

$$\xi_{s+1}(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{z=0}^{n} \begin{bmatrix} z \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-z}}{dx^{n-z}} (b_k(x))\, \xi_s(z-k) - \sum_{k=1}^{m} \sum_{z=0}^{k-1} \begin{bmatrix} z \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-z}}{dx^{n-z}} (b_k(x))\, \xi_s(z-k), \;\; s = 0,\, 1,\, 2\, ..\, N. \tag{10.40}$$

Данная форма представления наиболее приемлема для применения формулы Лейбница, поэтому будет в дальнейшем основной для определения искомых значений слагаемых $\xi_i(n)$, $i = 1,\, 2,\, 3\, ..\, N$.

Принимая в данной формуле $s = 0$, получим:

$$\xi_1(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{z=0}^{n} \begin{bmatrix} z \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-z}}{dx^{n-z}} (b_k(x))\, \xi_0(z-k) - \sum_{k=1}^{m} \sum_{z=0}^{k-1} \begin{bmatrix} z \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-z}}{dx^{n-z}} (b_k(x))\, \xi_0(z-k). \tag{10.41}$$

В формуле (10.38) примем $n = z - k$. Тогда она примет вид:

$$\xi_0(z-k) = \frac{\partial^{z-k}}{\partial x^{z-k}} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \begin{bmatrix} i \\ z-k \end{bmatrix} [b_{i+1}(x)]_i \right).$$

Подставляя в первое слагаемое правой части (10.41) это значение, получим:

$$\xi_1(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{z=0}^{n} \begin{bmatrix} z \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-z}}{dx^{n-z}} (b_k(x)) \frac{\partial^{z-k}}{\partial x^{z-k}} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \begin{bmatrix} i \\ z-k \end{bmatrix} [b_{i+1}(x)]_i \right) - \sum_{k=1}^{m} \sum_{z=0}^{k-1} \begin{bmatrix} z \\ n \end{bmatrix} \frac{d^{n-z}}{dx^{n-z}} (b_k(x))\, \xi_0(z-k). \tag{10.42}$$

Вычислим значение суммы:

$$\sum_{z=0}^{n} \begin{bmatrix} i \\ z-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ n \end{bmatrix} \frac{\partial^{z}}{\partial x^{z}} [b_{i+1}(x)]_{i+k} \frac{d^{n-z}}{dx^{n-z}} b_k(x).$$

Для этого воспользуемся Утверждением 1.4, т. е. формулой (1.11):

$$L[C(z-k,\, i)] = \frac{1}{i!} \sum_{s_0=0}^{i} \sum_{s_1=0}^{s_0} \sum_{s_2=0}^{s_1} \sum_{s_3=0}^{s_2} \frac{s_3^{s_1} (-1)^{(s_3+s_2)}}{\Gamma(s_2 - s_3 + 1)\, \Gamma(s_3+1)} C(n,\, s_2)\, s_2!\, r_{i-s_0+1}(i)\, C(s_0,\, s_0 - s_1)(-k)^{(s_0-s_1)} \frac{\partial^{n-s_2}}{\partial x^{n-s_2}} \left(\left(\frac{\partial^{s_2}}{\partial x^{s_2}} u \right) v \right).$$

Тогда получаем:

$$\sum_{z=0}^{n}\begin{bmatrix} i \\ z-k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ n \end{bmatrix}\frac{\partial^z}{\partial x^z}[b_{i+1}(x)]_{i+k}\,\frac{d^{n-z}}{dx^{n-z}}b_k(x)=$$

$$=\frac{1}{i!}\sum_{s_0=0}^{i}\sum_{s_1=0}^{s_0}\sum_{s_2=0}^{s_1}\sum_{s_3=0}^{s_2}\frac{s_{s_3}^{s_1}(-1)^{(s_3+s_2)}}{\Gamma(s_2-s_3+1)\,\Gamma(s_3+1)}C(n,\,s_2)\,s_2!\,r_{i-s_0+1}(i)\,C(s_0,\,s_0-s_1)(-k)^{(s_0-s_1)}\,\frac{\partial^{n-s_2}}{\partial x^{n-s_2}}\left(\left(\frac{\partial^{s_2}}{\partial x^{s_2}}[b_{i+1}(x)]_{i+k}\right)b_k(x)\right).$$

Подставляя это значение в (10.42), имеем:

$$\xi_1(n)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{i!}\sum_{s_0=0}^{i}\sum_{s_1=0}^{s_0}\sum_{s_2=0}^{s_1}\sum_{s_3=0}^{s_2}\frac{s_{s_3}^{s_1}(-1)^{(s_3+s_2)}}{\Gamma(s_2-s_3+1)\,\Gamma(s_3+1)}C(n,\,s_2)\,s_2!\,r_{i-s_0+1}(i)\,C(s_0,\,s_0-s_1)(-k)^{(s_0-s_1)}\,\frac{\partial^{n-s_2}}{\partial x^{n-s_2}}\left(\left(\frac{\partial^{s_2}}{\partial x^{s_2}}[b_{i+1}(x)]_{i+k}\right)b_k(x)\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\sum_{z=0}^{k-1}\begin{bmatrix} z \\ n \end{bmatrix}\frac{d^{n-z}}{dx^{n-z}}(b_k(x))\,\xi_0(z-k).$$

Однако данная формула может быть также упрощена. Для этого воспользуемся формулой (1.16):

$$\sum_{i_0=0}^{m-1}L_{i_0,\,k_0}[C(i-z,\,i_0)]=\sum_{i_1=0}^{m-1}\sum_{i_0=0}^{m-1-i_1}(-1)^{i_0}C(k_0-1+i_0,\,k_0-1)\,C(n,\,i_1)\,\frac{\partial^{n-i_1}}{\partial x^{n-i_1}}\left([b_{i_1+i_0}(x)]_{i_0+k_0}\,b_{k_0}(x)\right).$$

После преобразований получим итоговую формулу

$$\boxed{\xi_1(n)=\sum_{i_1=0}^{m-1}\sum_{i_0=0}^{m-1-i_1}(-1)^{i_0}C(n,\,i_1)\sum_{k_0=1}^{m}C(k_0-1+i_0,\,k_0-1)\,\frac{\partial^{n-i_1}}{\partial x^{n-i_1}}\left([b_{i_1+i_0+1}(x)]_{i_0+k_0}\,b_{k_0}(x)\right)-\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_0=0}^{m-i_1}C(n,\,i_0)\,\frac{\partial^{n-i_0}}{\partial x^{n-i_0}}(b_{i_0+i_1}(x))\,\xi_0(-i_1).}\quad(10.43)$$

10.4.3. Коэффициент $\xi_2(n)$

Коэффициент $\xi_2(n)$ определяется (10.20)

$$\xi_2(n)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{-k+n}\begin{bmatrix} k+i \\ n \end{bmatrix}\frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}}(b_k(x))\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{i_1=0}^{i-k_1}\begin{bmatrix} i_1+k_1 \\ i \end{bmatrix}\frac{d^{i-i_1-k_1}}{dx^{i-i_1-k_1}}(b_{k_1}(x))\sum_{i_2=0}^{m-1}\begin{bmatrix} i_2 \\ i_1 \end{bmatrix}\frac{d^{i_1-i_2}}{dx^{i_1-i_2}}b_{1+i_2}(x).$$

Для вычисления значения суммы этого ряда воспользуемся рекуррентным соотношением (10.40), в котором примем: $s=1$:

$$\xi_2(n)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{z=0}^{n}\begin{bmatrix} z \\ n \end{bmatrix}\frac{d^{n-z}}{dx^{n-z}}(b_k(x))\,\xi_1(z-k)-\sum_{k=1}^{m}\sum_{z=0}^{k-1}\begin{bmatrix} z \\ n \end{bmatrix}\frac{d^{n-z}}{dx^{n-z}}(b_k(x))\,\xi_1(z-k).\quad(10.44)$$

Принимая в (10.43) $n=z-k$, получим:

$$\xi_1(z-k)=\sum_{i_1=0}^{m-1}\sum_{i_0=0}^{m-1-i_1}(-1)^{i_0}C(z-k,\,i_1)\sum_{k_0=1}^{m}C(k_0-1+i_0,\,k_0-1)\,\frac{\partial^{z-k-i_1}}{\partial x^{z-k-i_1}}\left([b_{i_1+i_0+1}(x)]_{i_0+k_0}\,b_{k_0}(x)\right)-\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_0=0}^{m-i_1}C(z-k,\,i_0)\,\frac{\partial^{z-k-i_0}}{\partial x^{z-k-i_0}}(b_{i_0+i_1}(x))\,\xi_0(-i_1).$$

Подставляя это значение в (10.44), имеем:

$$\xi_2(n)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{z=0}^{n}\begin{bmatrix}z\\n\end{bmatrix}\frac{d^{n-z}}{dx^{n-z}}(b_k(x))\sum_{i_1=0}^{m-1}\sum_{i_0=0}^{m-1-i_1}(-1)^{i_0}C(z-k,\,i_1)\sum_{k_0=1}^{m}C(k_0-1+i_0,\,k_0-1)\,\frac{\partial^{z-k-i_1}}{\partial x^{z-k-i_1}}\left([b_{i_1+i_0+1}(x)]_{i_0+k_0}\,b_{k_0}(x)\right)-$$

$$-\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_0=0}^{m-i_1}C(z-k,\,i_0)\,\frac{\partial^{z-k-i_0}}{\partial x^{z-k-i_0}}(b_{i_0+i_1}(x))\,\xi_0(-i_1)-\sum_{k=1}^{m}\sum_{z=0}^{k-1}\begin{bmatrix}z\\n\end{bmatrix}\frac{d^{n-z}}{dx^{n-z}}(b_k(x))\,\xi_1(z-k). \qquad (10.45)$$

Отсюда следует необходимость в определении значения суммы частичных суммируемых последовательностей:

$$\sum_{z=0}^{n}\begin{bmatrix}z\\n\end{bmatrix}C(z-k,\,i_1)\,\frac{d^{n-z}}{dx^{n-z}}(b_k(x))\,\frac{\partial^{z-k-i_1}}{\partial x^{z-k-i_1}}\left([b_{i_1+i_0+1}(x)]_{i_0+k_0}\,b_{k_0}(x)\right),$$

$$\sum_{z=0}^{n}\begin{bmatrix}z\\n\end{bmatrix}C(z-k,\,i_0)\,\frac{d^{n-z}}{dx^{n-z}}(b_k(x))\,\frac{\partial^{z-k-i_0}}{\partial x^{z-k-i_0}}\,b_{i_0+i_1}(x).$$

В соответствии с формулой (1.11) получаем:

$$\sum_{z=0}^{n}\begin{bmatrix}z\\n\end{bmatrix}C(z-k,\,i_1)\,\frac{d^{n-z}}{dx^{n-z}}(b_k(x))\,\frac{\partial^{z}}{\partial x^{z}}\Big[[b_{i_1+i_0+1}(x)]_{i_0+k_0}\,b_{k_0}(x)\Big]_{k+i_1}=$$

$$=\frac{1}{i_1!}\sum_{s_0=0}^{i_1}\sum_{s_1=0}^{s_0}\sum_{s_2=0}^{s_1}\sum_{s_3=0}^{s_2}\frac{s_{s_3}^{s_1}(-1)^{(s_3+s_2)}}{\Gamma(s_2-s_3+1)\,\Gamma(s_3+1)}C(n,\,s_2)\,s_2!\,r_{i_1-s_0+1}(i_1)\,C(s_0,\,s_0-s_1)(-k)^{(s_0-s_1)}\,\frac{\partial^{n-s_2}}{\partial x^{n-s_2}}\left(\left(\frac{\partial^{s_2}}{\partial x^{s_2}}\Big[[b_{i_1+i_0+1}(x)]_{i_0+k_0}\,b_{k_0}(x)\Big]_{k+i_1}\right)b_k(x)\right),$$

$$\sum_{z=0}^{n}\begin{bmatrix}z\\n\end{bmatrix}C(z-k,\,i_0)\,\frac{d^{n-z}}{dx^{n-z}}(b_k(x))\,\frac{\partial^{z}}{\partial x^{z}}[b_{i_0+i_1}(x)]_{k+i_0}=$$

$$=\frac{1}{i_0!}\sum_{s_0=0}^{i_0}\sum_{s_1=0}^{s_0}\sum_{s_2=0}^{s_1}\sum_{s_3=0}^{s_2}\frac{s_{s_3}^{s_1}(-1)^{(s_3+s_2)}}{\Gamma(s_2-s_3+1)\,\Gamma(s_3+1)}C(n,\,s_2)\,s_2!\,r_{i_0-s_0+1}(i_0)\,C(s_0,\,s_0-s_1)(-k)^{(s_0-s_1)}\,\frac{\partial^{n-s_2}}{\partial x^{n-s_2}}\left(\left(\frac{\partial^{s_2}}{\partial x^{s_2}}[b_{i_0+i_1}(x)]_{k+i_0}\right)b_k(x)\right),$$

Подставляя эти значения в (10.45) после преобразований с учетом формулы (1.16), в итоге получаем: (10.46)

$$\boxed{\begin{aligned}\xi_2(n)=&\sum_{i_2=0}^{m-1}\sum_{i_1=0}^{m-1-i_2}\sum_{i_0=0}^{m-1-i_1-i_2}(-1)^{(i_0+i_1)}C(n,\,i_2)\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{k_0=1}^{m}C(k_0-1+i_0,\,k_0-1)\,C(k_1-1+i_1,\,k_1-1)\,\frac{\partial^{n-i_2}}{\partial x^{n-i_2}}\left(\Big[[b_{i_2+i_1+i_0+1}(x)]_{i_0+k_0}\,b_{k_0}(x)\Big]_{i_1+k_1}b_{k_1}(x)\right)-\\&-\sum_{i_2=1}^{m}\sum_{i_1=0}^{m-i_2}\sum_{i_0=0}^{m-i_1-i_2}(-1)^{i_0}C(n,\,i_1)\sum_{k_0=1}^{m}C(k_0-1+i_0,\,k_0-1)\,\frac{\partial^{n-i_1}}{\partial x^{n-i_1}}\left([b_{i_1+i_0+i_2}(x)]_{i_0+k_0}\,b_{k_0}(x)\right)\xi_0(-i_2)-\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_0=0}^{m-i_1}C(n,\,i_0)\,\frac{\partial^{n-i_0}}{\partial x^{n-i_0}}(b_{i_0+i_1}(x))\,\xi_1(-i_1).\end{aligned}}$$

Совершенно аналогичным подходом находим: (10.47)

$$\xi_3(n) = \sum_{i_3=0}^{m-1} \sum_{i_2=0}^{m-1-i_3} \sum_{i_1=0}^{m-1-i_2-i_3} \sum_{i_0=0}^{m-1-i_1-i_2-i_3} (-1)^{(i_0+i_1+i_2)} C(n, i_3)$$

$$\sum_{k_2=1}^{m} \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{k_0=1}^{m} C(k_0-1+i_0, k_0-1)\, C(k_1-1+i_1, k_1-1)\, C(k_2-1+i_2, k_2-1) \frac{\partial^{n-i_3}}{\partial x^{n-i_3}} \left(\left[\left[[b_{i_3+i_2+i_1+i_0+1}(x)]_{i_0+k_0} b_{k_0}(x) \right]_{i_1+k_1} b_{k_1}(x) \right]_{i_2+k_2} b_{k_2}(x) \right) -$$

$$-\sum_{i_3=1}^{m} \sum_{i_2=0}^{m-i_3} \sum_{i_1=0}^{m-i_3-i_2} \sum_{i_0=0}^{m-i_3-i_1-i_2} (-1)^{(i_0+i_1)} C(n, i_2) \sum_{k_1=1}^{m} \sum_{k_0=1}^{m} C(k_0-1+i_0, k_0-1)\, C(k_1-1+i_1, k_1-1) \frac{\partial^{n-i_2}}{\partial x^{n-i_2}} \left(\left[[b_{i_2+i_1+i_0+i_3}(x)]_{i_0+k_0} b_{k_0}(x) \right]_{i_1+k_1} b_{k_1}(x) \right) \xi_0(-i_3) -$$

$$-\sum_{i_2=1}^{m} \sum_{i_1=0}^{m-i_2} \sum_{i_0=0}^{m-i_1-i_2} (-1)^{i_0} C(n, i_1) \sum_{k_0=1}^{m} C(k_0-1+i_0, k_0-1) \frac{\partial^{n-i_1}}{\partial x^{n-i_1}} \left([b_{i_1+i_0+i_2}(x)]_{i_0+k_0} b_{k_0}(x) \right) \xi_1(-i_2) - \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_0=0}^{m-i_1} C(n, i_0) \frac{\partial^{n-i_0}}{\partial x^{n-i_0}} (b_{i_0+i_1}(x))\, \xi_2(-i_1)$$

и так далее.

В общем случае, принимая $\xi_s(n) = \xi_{m,s}(n)$, можно записать для любого $s = 1, 2, 3 .. N$: (10.48)

$$\xi_{m,s}(n) = \sum_{i_{[s,0]}=0}^{[m-1,\, m-1-(s,s),\, m-1-(1,s)]} (-1)^{(0,\, s-1)} C(n, i_s) \sum_{k_{[s-1,0]}=1}^{m} \prod_{l=0}^{s-1} C(k_l-1+i_l, k_l-1) \frac{\partial^{n-i_s}}{\partial x^{n-i_s}} \left([b_{1+(0,s)}(x)]_{i_{[0,s-1]}+k_{[0,s-1]}} b_{k_{[0,s-1]}}(x) \right) -$$

$$-\sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_0=0}^{m-i_1} C(n, i_0) \frac{\partial^{n-i_0}}{\partial x^{n-i_0}} (b_{i_0+i_1}(x))\, \xi_{s-1}(-i_1) -$$

$$-\sum_{z=2}^{s} \sum_{i_{[z,0]}=[1,0]}^{[m,\, m-(z,z),\, m-(z-1,z),\, m-(1,z)]} \sum_{k_{[0,z-2]}=1}^{m} (-1)^{(0,\, z-2)} C(n, i_{z-1}) \prod_{l=0}^{z-2} C(k_l-1+i_l, k_l-1) \frac{\partial^{n-i_{z-2+1}}}{\partial x^{n-i_{z-2+1}}} \left([b_{[0,z]}(x)]_{i_{[0,z-2]}+k_{[0,z-2]}} b_{k_{[0,z-2]}}(x) \right) \xi_{s-z}(-i_z).$$

Любые коэффициенты $\xi_{m,s}(-n)$ распечатываются с помощью программы на языке Maple 10.

ПРОГРАММА печати коэффициентов $\xi_{m,s}(-n)$

```
> restart;
> m:=m:s:=3: #введите порядок ОДУ — "m" и номер коэффициента — "s".
```

$$> C0 := h \to \prod_{l=0}^{h-1} C(k_l - 1 + i_l, k_l - 1)$$

$$> P0 := h \to \sum_{i_1=1}^{m} \left(\sum_{i_0=0}^{m-i_1} C(-n, i_0) [b_{i_0+i_1}(x)]_{n+i_0} \right) \xi_{m,h-1}(-i_1)$$

```
> Ii:=h->add(i[j],j=0..h):
```

$$> C1 := h \to (-1)^{Ii(h-1)} C(-n, i_h)$$

```
> Iik:=h->i[h]+k[h]:
> B0(0):=b[1+Ii(s)](x):
> for z from 0 to s do B0(z+1) := [B0(z)]_Iik(z) b_{k_z}(x) end do; z:='z'
> R0(0):=C0(s)*[B0(s)][n+i[s]]:
> for z from 0 to s do R0(z+1) := Sum(R0(z), k_z = 1..m) end do; z:='z'
> Ii1:=h->add(i[j],j=h..z):
> Ii2:=h->add(i[j],j=h..s):
> R1(0):=C1(s)*R0(s):
> for z from 0 to s do R1(z+1) := Sum(R1(z), i_z = 0..m - Ii2(z+1)) end do; z:='z'
> R2(s):=R1(s+1)-P0(s):
> Ii2:=h->h:
> for z from 2 to s do:
> B1(0):=b[add(i[j],j=0..z)](x);
> for z0 from 0 to z-1 do B1(z0+1):=[B1(z0)][Iik(z0)]*b[k[z0]](x) od:z0:='z0':
> R3(0):=Product(C(k[l]-1+i[l],k[l]-1),l = 0.. z-2)*[B1(z-1)][n+i[z-1]];
> for z0 from 0 to z do R3(z0+1):=Sum(R3(z0),k[z0]=1..m) od;z0:='z0':
> R4(0):=(-1)^(add(i[j],j=0..z-2))*C(-n,i[z-1])*R3(z-1);
> for z0 from 0 to z do R4(z0+1):=Sum(R4(z0),i[z0]=0..m-Ii1(z0+1)) od;z0:='z0':
> R5[z]:=Sum(R4(z)*xi[m,s-z](-i[z]),i[z]=1..m);
> od:
> xi[m,s](-n)=R2(s)-add(R5[z1],z1=2..s);
> ###########################################################################################
```

Таким образом, решена задача нахождения функций $\xi_s(n)$, $s = 1,\ 2\ ..\ N$, которые полностью определяют искомое решение.

11. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОДУ. ПРИМЕРЫ

Обобщая изложенное с учетом значимости, подробно опишем алгоритм нахождения общего решения линейных ОДУ с переменными коэффициентами.

Пусть задано линейное ОДУ порядка m:

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\, Y_m = \sum_{p=1}^{m} a_p(x) \frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}}\, Y_m. \tag{11.1}$$

Здесь $Y_m = \{Y_{m,1},\ Y_{m,2}\ \dots\ Y_{m,m}\}$ — искомая функция, $a_p(x)$ — заданные функции.

Общее решение ОДУ (11.1) определяется формулой

$$Y_m = \sum_{i=1}^{m} C_i\, Y_{m,i}(x), \tag{11.2}$$

где C_i — произвольные постоянные, а частные решения $Y_{m,\,i}(x)$ характеризуются формулами

$$Y_{m,\,i}(x) = \frac{(-1)^i\,(1-\alpha_m(-1))\,x^{(i-1)}}{(i-1)!} + \sum_{k=2}^{i} \frac{(-1)^{(k+i)}\,\alpha_m(-k)\,x^{(i-k)}}{(i-k)!}. \tag{11.3}$$

Здесь

$$\alpha_m(n) = \sum_{s=0}^{N} \xi_{m,\,s}(n), \tag{11.4}$$

$\xi_{m,\,i}(n)$ — искомые функции, определяемые формулами

$$\xi_{m,\,0}(n) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\sum_{i=0}^{m-1} \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} [b_{i+1}(x)]_i\right),$$

$$\xi_{m,1}(n) = \sum_{i_1=0}^{m-1}\ \sum_{i_0=0}^{m-1-i_1} (-1)^{i_0} C(n, i_1) \sum_{k_0=1}^{m} C(k_0-1+i_0,\, k_0-1)\, \frac{\partial^{n-i_1}}{\partial x^{n-i_1}}\left([b_{i_1+i_0+1}(x)]_{i_0+k_0}\, b_{k_0}(x)\right) - \sum_{i_1=1}^{m}\ \sum_{i_0=0}^{m-i_1} C(n, i_0)\, \frac{d^{n-i_0}}{dx^{n-i_0}} (b_{i_0+i_1}(x))\, \xi_0(-i_1),$$

$$\xi_{m,2}(n) = \sum_{i_2=0}^{m-1}\ \sum_{i_1=0}^{m-1-i_2}\ \sum_{i_0=0}^{m-1-i_1-i_2} (-1)^{(i_0+i_1)} C(n, i_2) \sum_{k_1=1}^{m}\ \sum_{k_0=1}^{m} C(k_0-1+i_0,\, k_0-1)\, C(k_1-1+i_1,\, k_1-1)\, \frac{\partial^{n-i_2}}{\partial x^{n-i_2}}\left(\left[[b_{i_2+i_1+i_0+1}(x)]_{i_0+k_0}\, b_{k_0}(x)\right]_{i_1+k_1} b_{k_1}(x)\right) -$$
$$- \sum_{i_2=1}^{m}\ \sum_{i_1=0}^{m-i_2}\ \sum_{i_0=0}^{m-i_1-i_2} (-1)^{i_0} C(n, i_1) \sum_{k_0=1}^{m} C(k_0-1+i_0,\, k_0-1)\, \frac{\partial^{n-i_1}}{\partial x^{n-i_1}}\left([b_{i_1+i_0+i_2}(x)]_{i_0+k_0}\, b_{k_0}(x)\right) \xi_0(-i_2) - \sum_{i_1=1}^{m}\ \sum_{i_0=0}^{m-i_1} C(n, i_0)\, \frac{\partial^{n-i_0}}{\partial x^{n-i_0}} (b_{i_0+i_1}(x))\, \xi_1(-i_1). \tag{11.5}$$

В общем случае можно записать для любого $s = 1,\, 2,\, 3\, ..\, N$: (11.6)

$$\xi_{m,\,s}(n) = \sum_{i_{[s,0]}=0}^{[m-1,\ m-1-(s,s),\ m-1-(1,s)]} (-1)^{(0,\,s-1)}\, C(n, i_s) \sum_{k_{[s-1,0]}=1}^{m}\ \prod_{l=0}^{s-1} C(k_l-1+i_l,\, k_l-1)\, \frac{\partial^{n-i_s}}{\partial x^{n-i_s}}\left([b_{1+(0,s)}(x)]_{i_{[0,s-1]}+k_{[0,s-1]}}\, b_{k_{[0,s-1]}}(x)\right) -$$
$$- \sum_{i_1=1}^{m}\ \sum_{i_0=0}^{m-i_1} C(n, i_0)\, \frac{\partial^{n-i_0}}{\partial x^{n-i_0}} (b_{i_0+i_1}(x))\, \xi_{m,\,s-1}(-i_1) -$$
$$- \sum_{z=2}^{s}\ \sum_{i_{[z,0]}=[1,0]}^{[m,\ m-(z,z),\ m-(z-1,z),\ m-(1,z)]}\ \sum_{k_{[0,z-2]}=1}^{m} (-1)^{(0,\,z-2)}\, C(n, i_{z-1}) \prod_{l=0}^{z-2} C(k_l-1+i_l,\, k_l-1)\, \frac{\partial^{n-i_{z-2+1}}}{\partial x^{n-i_{z-2+1}}}\left([b_{(0,z)}(x)]_{i_{[0,z-2]}+k_{[0,z-2]}}\, b_{k_{[0,z-2]}}(x)\right) \xi_{m,\,s-z}(-i_z).$$

Нахождение частных решений $Y_{m,\,i}(x)$, $i = 1\, ..\, m$ производится следующим образом.

Действие 1. Вычисляются функции $b_k(x)$, $k = 1,\, 2\, ..\, m$

$$b_k(x) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i\, C(m-i,\, m-k)\, \frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}}\, a_i(x),\ \ k = 1,\, 2\, ..\, m \tag{11.7}$$

Действие 2. Вычисляются функции $\xi_{m,s}(-n)$, $s = 0, 1, 2 .. N$. матрицы:

$$\begin{bmatrix} \xi_{m,0}(-1) & \xi_{m,1}(-1) & \xi_{m,2}(-1) & . & \xi_{m,N}(-1) \\ \xi_{m,0}(-2) & \xi_{m,1}(-2) & \xi_{m,2}(-2) & . & \xi_{m,N}(-2) \\ . & . & . & . & . \\ \xi_{m,0}(-m) & \xi_{m,1}(-m) & \xi_{m,2}(-m) & . & \xi_{m,N}(-m) \end{bmatrix}.$$

Здесь N — натуральное число, определяющее количество членов ряда для достижения необходимой точности. В пределе (для вычисления аналитического решения) $N = \infty$.

Так как функции $\xi_{m,s}(n)$, $s = 0, 1, 2 .. N$ заданы формулами (11.5), то преобразуем их к виду, который определяет значения $\xi_{m,s}(-n)$, $s = 0, 1, 2 .. N$. Для этого воспользуемся фундаментальным определением операции интегрирования как операции, обратной операции дифференцирования, и наоборот. В соответствии с этим определением справедливо равенство:

$$\frac{d^{-n}}{dx^{-n}} f(x) = [f(x)]_n. \tag{11.8}$$

Таким образом, формула для $\xi_{m,0}(-n)$ устанавливается следующим образом.

Определение коэффициента $\xi_{m,0}(-n)$.

Так как

$$\xi_{m,0}(n) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\sum_{i=0}^{m-1}\begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix}[b_{i+1}(x)]_i\right),$$

то, принимая $n = -n$, получим:

$$\xi_{m,0}(-n) = \frac{\partial^{-n}}{\partial x^{-n}}\left(\sum_{i=0}^{m-1}\begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix}[b_{i+1}(x)]_i\right).$$

С учетом (11.8) окончательно имеем:

$$\boxed{\xi_{m,0}(-n) = \sum_{i=0}^{m-1}\begin{bmatrix} i \\ -n \end{bmatrix}[b_{i+1}(x)]_{i+n}.} \tag{11.9}$$

Определение коэффициента $\xi_{m,1}(-n)$.

Так как

$$\xi_{m,1}(n) = \sum_{i_1=0}^{m-1}\sum_{i_0=0}^{m-1-i_1}(-1)^{i_0}C(n, i_1)\sum_{k_0=1}^{m}C(k_0-1+i_0, k_0-1)\frac{\partial^{n-i_1}}{\partial x^{n-i_1}}\left([b_{i_1+i_0+1}(x)]_{i_0+k_0} b_{k_0}(x)\right) - \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_0=0}^{m-i_1}C(n, i_0)\frac{d^{n-i_0}}{dx^{n-i_0}}(b_{i_0+i_1}(x))\,\xi_{m,0}(-i_1),$$

то, принимая здесь $n = -n$, получим:

$$\xi_{m,1}(-n) = \sum_{i_1=0}^{m-1}\sum_{i_0=0}^{m-1-i_1}(-1)^{i_0}C(-n, i_1)\sum_{k_0=1}^{m}C(k_0-1+i_0, k_0-1)\frac{\partial^{-n-i_1}}{\partial x^{-n-i_1}}\left([b_{i_1+i_0+1}(x)]_{i_0+k_0} b_{k_0}(x)\right) - \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_0=0}^{m-i_1}C(-n, i_0)\frac{d^{-n-i_0}}{dx^{-n-i_0}}(b_{i_0+i_1}(x))\,\xi_{m,0}(-i_1).$$

С учетом (11.8) искомая формула принимает вид:

$$\boxed{\xi_{m,1}(-n) = \sum_{i_1=0}^{m-1}\sum_{i_0=0}^{m-1-i_1}(-1)^{i_0}C(-n, i_1)\sum_{k_0=1}^{m}C(k_0-1+i_0, k_0-1)\left[[b_{i_1+i_0+1}(x)]_{i_0+k_0} b_{k_0}(x)\right]_{n+i_1} - \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_0=0}^{m-i_1}C(-n, i_0)[b_{i_0+i_1}(x)]_{n+i_0}\,\xi_{m,0}(-i_1).} \tag{11.10}$$

Определение коэффициента $\xi_{m,2}(-n)$.

Так как

$$\xi_{m,2}(n) = \sum_{i_2=0}^{m-1}\sum_{i_1=0}^{m-1-i_2}\sum_{i_0=0}^{m-1-i_1-i_2}(-1)^{(i_0+i_1)}C(n,i_2)\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{k_0=1}^{m}C(k_0-1+i_0,k_0-1)\,C(k_1-1+i_1,k_1-1)\frac{\partial^{n-i_2}}{\partial x^{n-i_2}}\left(\left[[b_{i_2+i_1+i_0+1}(x)]_{i_0+k_0}b_{k_0}(x)\right]_{i_1+k_1}b_{k_1}(x)\right)-$$
$$-\sum_{i_2=1}^{m}\sum_{i_1=0}^{m-i_2}\sum_{i_0=0}^{m-i_1-i_2}(-1)^{i_0}C(n,i_1)\sum_{k_0=1}^{m}C(k_0-1+i_0,k_0-1)\frac{\partial^{n-i_1}}{\partial x^{n-i_1}}\left([b_{i_1+i_0+i_2}(x)]_{i_0+k_0}b_{k_0}(x)\right)\xi_{m,0}(-i_2)-\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_0=0}^{m-i_1}C(n,i_0)\frac{\partial^{n-i_0}}{\partial x^{n-i_0}}(b_{i_0+i_1}(x))\,\xi_{m,1}(-i_1),$$

то, принимая здесь $n=-n$, получим:

$$\xi_{m,2}(-n)=\sum_{i_2=0}^{m-1}\sum_{i_1=0}^{m-1-i_2}\sum_{i_0=0}^{m-1-i_1-i_2}(-1)^{(i_0+i_1)}C(-n,i_2)\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{k_0=1}^{m}C(k_0-1+i_0,k_0-1)\,C(k_1-1+i_1,k_1-1)\frac{\partial^{-n-i_2}}{\partial x^{-n-i_2}}\left(\left[[b_{i_2+i_1+i_0+1}(x)]_{i_0+k_0}b_{k_0}(x)\right]_{i_1+k_1}b_{k_1}(x)\right)-$$
$$-\sum_{i_2=1}^{m}\sum_{i_1=0}^{m-i_2}\sum_{i_0=0}^{m-i_1-i_2}(-1)^{i_0}C(-n,i_1)\sum_{k_0=1}^{m}C(k_0-1+i_0,k_0-1)\frac{\partial^{-n-i_1}}{\partial x^{-n-i_1}}\left([b_{i_1+i_0+i_2}(x)]_{i_0+k_0}b_{k_0}(x)\right)\xi_{m,0}(-i_2)-\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_0=0}^{m-i_1}C(-n,i_0)\frac{\partial^{-n-i_0}}{\partial x^{-n-i_0}}(b_{i_0+i_1}(x))\,\xi_{m,1}(-i_1).$$

С учетом (11.8) искомая формула принимает вид: **(11.11)**

$$\boxed{\begin{aligned}\xi_{m,2}(-n)=&\sum_{i_2=0}^{m-1}\sum_{i_1=0}^{m-1-i_2}\sum_{i_0=0}^{m-1-i_1-i_2}(-1)^{(i_0+i_1)}C(-n,i_2)\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{k_0=1}^{m}C(k_0-1+i_0,k_0-1)\,C(k_1-1+i_1,k_1-1)\left[\left[[b_{i_2+i_1+i_0+1}(x)]_{i_0+k_0}b_{k_0}(x)\right]_{i_1+k_1}b_{k_1}(x)\right]_{n+i_2}-\\&-\sum_{i_2=1}^{m}\sum_{i_1=0}^{m-i_2}\sum_{i_0=0}^{m-i_1-i_2}(-1)^{i_0}C(-n,i_1)\sum_{k_0=1}^{m}C(k_0-1+i_0,k_0-1)\left[[b_{i_1+i_0+i_2}(x)]_{i_0+k_0}b_{k_0}(x)\right]_{n+i_1}\xi_{m,0}(-i_2)-\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_0=0}^{m-i_1}C(-n,i_0)[b_{i_0+i_1}(x)]_{n+i_0}\,\xi_{m,1}(-i_1).\end{aligned}}$$

Совершенно аналогичным образом получаем:

$$\boxed{\begin{aligned}\xi_{m,3}(-n)=&\sum_{i_3=0}^{m-1}\sum_{i_2=0}^{m-1-i_3}\sum_{i_1=0}^{m-1-i_2-i_3}\sum_{i_0=0}^{m-1-i_1-i_2-i_3}(-1)^{(i_0+i_1+i_2)}C(-n,i_3)\\&\sum_{k_2=1}^{m}\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{k_0=1}^{m}\prod_{l=0}^{2}C(k_l-1+i_l,k_l-1)\left[\left[\left[[b_{1+i_0+i_1+i_2+i_3}(x)]_{i_0+k_0}b_{k_0}(x)\right]_{i_1+k_1}b_{k_1}(x)\right]_{i_2+k_2}b_{k_2}(x)\right]_{n+i_3}-\\&-\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_0=0}^{m-i_1}C(-n,i_0)[b_{i_0+i_1}(x)]_{n+i_0}\,\xi_{m,2}(-i_1)-\sum_{i_2=1}^{m}\sum_{i_1=0}^{m-i_2}\sum_{i_0=0}^{m-i_1-i_2}(-1)^{i_0}C(-n,i_1)\sum_{k_0=1}^{m}\prod_{l=0}^{0}C(k_l-1+i_l,k_l-1)\left[[b_{i_0+i_1+i_2}(x)]_{i_0+k_0}b_{k_0}(x)\right]_{n+i_1}\xi_{m,1}(-i_2)-\\&-\sum_{i_3=1}^{m}\sum_{i_2=0}^{m-i_3}\sum_{i_1=0}^{m-i_2-i_3}\sum_{i_0=0}^{m-i_1-i_2-i_3}(-1)^{(i_0+i_1)}C(-n,i_2)\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{k_0=1}^{m}\prod_{l=0}^{1}C(k_l-1+i_l,k_l-1)\left[\left[[b_{i_0+i_1+i_2+i_3}(x)]_{i_0+k_0}b_{k_0}(x)\right]_{i_1+k_1}b_{k_1}(x)\right]_{n+i_2}\xi_{m,0}(-i_3),\end{aligned}}$$

$$
\begin{gathered}
\xi_{m,4}(-n)=\sum_{i_4=0}^{m-1}\sum_{i_3=0}^{m-1-i_4}\sum_{i_2=0}^{m-1-i_3-i_4}\sum_{i_1=0}^{m-1-i_2-i_3-i_4}\sum_{i_0=0}^{m-1-i_1-i_2-i_3-i_4}(-1)^{(i_0+i_1+i_2+i_3)}C(-n,i_4)\times\\
\times\sum_{k_3=1}^{m}\sum_{k_2=1}^{m}\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{k_0=1}^{m}\prod_{l=0}^{3}C(k_l-1+i_l,k_l-1)\left[\left[\left[\left[[b_{1+i_0+i_1+i_2+i_3+i_4}(x)]_{i_0+k_0}b_{k_0}(x)\right]_{i_1+k_1}b_{k_1}(x)\right]_{i_2+k_2}b_{k_2}(x)\right]_{i_3+k_3}b_{k_3}(x)\right]_{n+i_4}-\\
-\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_0=0}^{m-i_1}C(-n,i_0)[b_{i_0+i_1}(x)]_{n+i_0}\,\xi_{m,3}(-i_1)-\sum_{i_2=1}^{m}\sum_{i_1=0}^{m-i_2}\sum_{i_0=0}^{m-i_1-i_2}(-1)^{i_0}C(-n,i_1)\sum_{k_0=1}^{m}\prod_{l=0}^{0}C(k_l-1+i_l,k_l-1)\left[[b_{i_0+i_1+i_2}(x)]_{i_0+k_0}b_{k_0}(x)\right]_{n+i_1}\xi_{m,2}(-i_2)-\\
-\sum_{i_3=1}^{m}\sum_{i_2=0}^{m-i_3}\sum_{i_1=0}^{m-i_2-i_3}\sum_{i_0=0}^{m-i_1-i_2-i_3}(-1)^{(i_0+i_1)}C(-n,i_2)\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{k_0=1}^{m}\prod_{l=0}^{1}C(k_l-1+i_l,k_l-1)\left[\left[[b_{i_0+i_1+i_2+i_3}(x)]_{i_0+k_0}b_{k_0}(x)\right]_{i_1+k_1}b_{k_1}(x)\right]_{n+i_2}\xi_{m,1}(-i_3)-\\
-\sum_{i_4=1}^{m}\sum_{i_3=0}^{m-i_4}\sum_{i_2=0}^{m-i_3-i_4}\sum_{i_1=0}^{m-i_2-i_3-i_4}\sum_{i_0=0}^{m-i_1-i_2-i_3-i_4}(-1)^{(i_0+i_1+i_2)}C(-n,i_3)\times\\
\times\sum_{k_2=1}^{m}\sum_{k_1=1}^{m}\sum_{k_0=1}^{m}\prod_{l=0}^{2}C(k_l-1+i_l,k_l-1)\left[\left[\left[[b_{i_0+i_1+i_2+i_3+i_4}(x)]_{i_0+k_0}b_{k_0}(x)\right]_{i_1+k_1}b_{k_1}(x)\right]_{i_2+k_2}b_{k_2}(x)\right]_{n+i_3}\xi_{m,0}(-i_4)
\end{gathered}
$$

и так далее.

Определение коэффициента $\xi_{m,s}(-n)$, $s=1, 2, 3 .. N$.

Так как

$$
\begin{gathered}
\xi_{m,s}(n)=\sum_{i_{[s,0]}=0}^{[m-1,\ m-1-(s,s),\ m-1-(1,s)]}(-1)^{(0,\,s-1)}C(n,i_s)\sum_{k_{[s-1,0]}=1}^{[m]}\prod_{l=0}^{s-1}C(k_l-1+i_l,k_l-1)\frac{\partial^{n-i_s}}{\partial x^{n-i_s}}\left([b_{1+(0,s)}(x)]_{i_{[0,s-1]}+k_{[0,s-1]}}b_{k_{[0,s-1]}}(x)\right)-\\
-\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_0=0}^{m-i_1}C(n,i_0)\frac{\partial^{n-i_0}}{\partial x^{n-i_0}}(b_{i_0+i_1}(x))\,\xi_{m,s-1}(-i_1)-\\
-\sum_{z=2}^{s}\sum_{i_{[z,0]}=[1,0]}^{[m,\ m-(z,z),\ m-(z-1,z),\ m-(1,z)]}\sum_{k_{[0,z-2]}=1}^{[m]}(-1)^{(0,\,z-2)}C(n,i_{z-1})\prod_{l=0}^{z-2}C(k_l-1+i_l,k_l-1)\frac{\partial^{n-i_{z-1}}}{\partial x^{n-i_{z-1}}}\left([b_{[0,z]}(x)]_{i_{[0,z-2]}+k_{[0,z-2]}}b_{k_{[0,z-2]}}(x)\right)\xi_{m,s-z}(-i_z),
\end{gathered}
$$

то, принимая $n=-n$, получим:

$$
\xi_{m,s}(-n)=\sum_{i_{[s,0]}=0}^{[m-1,\ m-1-(s,s),\ m-1-(1,s)]}(-1)^{(0,\,s-1)}C(-n,i_s)\sum_{k_{[s-1,0]}=1}^{[m]}\prod_{l=0}^{s-1}C(k_l-1+i_l,k_l-1)\frac{\partial^{-n-i_s}}{\partial x^{-n-i_s}}\left([b_{1+(0,s)}(x)]_{i_{[0,s-1]}+k_{[0,s-1]}}b_{k_{[0,s-1]}}(x)\right)-
$$

$$-\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_0=0}^{m-i_1} C(-n,\,i_0)\,\frac{\partial^{-n-i_0}}{\partial x^{-n-i_0}}(b_{i_0+i_1}(x))\,\xi_{m,\,s-1}(-i_1)-$$

$$-\sum_{z=2}^{s}\sum_{i_{[z,0]}=[1,0]}^{[m,\,m+(-z,-z),\,m+(-z+1,-z),\,m+(-1,-z)]}\sum_{k_{[0,z-2]}=1}^{[m]}(-1)^{(0,\,z-2)}\,C(-n,\,i_{z-1})\prod_{l=0}^{z-2}C(k_l-1+i_l,\,k_l-1)\,\frac{\partial^{-n-i_{z-1}}}{\partial x^{-n-i_{z-1}}}\Big([b_{(0,z)}(x)]_{i_{[0,z-2]}+k_{[0,z-2]}}\,b_{k_{[0,z-2]}}(x)\Big)\,\xi_{m,\,s-z}(-i_z).$$

С учетом (11.8) искомая формула принимает вид: (11.12)

$$\boxed{\begin{aligned}\xi_{m,s}(-n)=&\sum_{i_{[s,0]}=0}^{[m-1,\,m-1-(s,s),\,m-1-(1,s)]}(-1)^{(0,\,s-1)}\,C(-n,\,i_s)\sum_{k_{[s-1,0]}=1}^{[m]}\prod_{l=0}^{s-1}C(k_l-1+i_l,\,k_l-1)\Big[[b_{1+(0,s)}(x)]_{i_{[0,s-1]}+k_{[0,s-1]}}\,b_{k_{[0,s-1]}}(x)\Big]_{n+i_s}-\\&-\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_0=0}^{m-i_1}C(-n,\,i_0)[b_{i_0+i_1}(x)]_{n+i_0}\,\xi_{m,\,s-1}(-i_1)-\\&-\sum_{z=2}^{s}\sum_{i_{[z,0]}=[1,0]}^{[m,\,m-(z,z),\,m-(z+1,z),\,m-(1,z)]}\sum_{k_{[0,z-2]}=1}^{[m]}(-1)^{(0,\,z-2)}\,C(-n,\,i_{z-1})\prod_{l=0}^{z-2}C(k_l-1+i_l,\,k_l-1)\Big[[b_{(0,z)}(x)]_{i_{[0,z-2]}+k_{[0,z-2]}}\,b_{k_{[0,z-2]}}(x)\Big]_{n+i_{z-1}}\xi_{m,\,s-z}(-i_z).\end{aligned}}$$

Представляем программу (на языке Maple 10), печатающую коэффициенты $\xi_{m,\,s}(-n)$, $s=1,\,2,\,3\,..\,N$.

ПРОГРАММА печати коэффициентов $\xi_{m,\,s}(-n)$

```
> restart;
> m:=m:s:=3: #введите порядок ОДУ — "m" и номер коэффициента — "s".
```

$> C0 := h \to \prod_{l=0}^{h-1} C(k_l-1+i_l,\,k_l-1)$

$> P0 := h \to \sum_{i_1=1}^{m}\left(\sum_{i_0=0}^{m-i_1} C(-n,i_0)\,[b_{i_0+i_1}(x)]_{n+i_0}\right)\xi_{m,\,h-1}(-i_1)$

```
> Ii:=h->add(i[j],j=0..h):
```

$> C1 := h \to (-1)^{\mathrm{Ii}(h-1)}\,C(-n,\,i_h)$

```
> Iik:=h->i[h]+k[h]:
> B0(0):=b[1+Ii(s)](x):
```

$>$ for z from 0 to s do $B0(z+1) := [B0(z)]_{\mathrm{Iik}(z)}\,b_{k_z}(x)$ end do; z:='z'

```
> R0(0):=C0(s)*[B0(s)][n+i[s]]:
```

$>$ for z from 0 to s do $R0(z+1) := \sum_{k_z=1}^{m} R0(z)$ end do; z:='z'

```
> Ii1:=h->add(i[j],j=h..z):
> Ii2:=h->add(i[j],j=h..s):
> R1(0):=C1(s)*R0(s):
```

$>$ for z from 0 to s do $R1(z+1) := \sum_{i_z=0}^{m-1-\mathrm{Ii2}(z+1)} R1(z)$ end do; z:='z'

```
> R2(s):=R1(s+1)-P0(s):
```

```
> Ii2:=h->h:
> for z from 2 to s do:
> B1(0):=b[add(i[j],j=0..z)](x);
> for z0 from 0 to z-1 do B1(z0+1):=[B1(z0)][Iik(z0)]*b[k[z0]](x) od:z0:='z0':
> R3(0):=Product(C(k[l]-1+i[l],k[l]-1),l = 0.. z-2)*[B1(z-1)][n+i[z-1]];
> for z0 from 0 to z do R3(z0+1):=Sum(R3(z0),k[z0]=1..m) od;z0:='z0':
> R4(0):=(-1)^(add(i[j],j=0..z-2))*C(-n,i[z-1])*R3(z-1);
> for z0 from 0 to z do R4(z0+1):=Sum(R4(z0),i[z0]=0..m-Ii1(z0+1)) od;z0:='z0':
> R5[z]:=Sum(R4(z)*xi[m,s-z](-i[z]),i[z]=1..m);
> od:
> xi[m,s](-n)=R2(s)-add(R5[z1],z1=2..s);
> ####################################################################################
```

Таким образом, установлен общий алгоритм определения слагаемых $\xi_{m,s}(-n)$, $s = 1, 2, 3 .. N$, которые образуют в общем случае матрицу размера $(m \times N)$:

$$\begin{bmatrix} \xi_{m,0}(-1) & \xi_{m,1}(-1) & \xi_{m,2}(-1) & . & \xi_{m,N}(-1) \\ \xi_{m,0}(-2) & \xi_{m,1}(-2) & \xi_{m,2}(-2) & . & \xi_{m,N}(-2) \\ . & . & . & . & . \\ \xi_{m,0}(-m) & \xi_{m,1}(-m) & \xi_{m,2}(-m) & . & \xi_{m,N}(-m) \end{bmatrix}. \tag{11.13}$$

В нахождении всех значений элементов этой матрицы и заключается главная задача, так как остальное является следствием этого.

Действие 3. Вычисляются функции $\alpha_m(-k)$, $k = 1, 2 .. m$

$$\alpha_m(-k) = \sum_{s=0}^{N} \xi_{m,s}(-k), \quad k = 1, 2 .. m. \tag{11.14}$$

В общем случае, установив закономерность изменения функций $\xi_{m,s}(-k)$, можно вычислить ряды:

$$\alpha_m(-k) = \sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(-k), \quad k = 1, 2 .. m \tag{11.15}$$

и в этом случае получим точное решение исходного уравнения.

Действие 4. Вычисляются частные решения:

$$Y_{m,i}(x) = \frac{(-1)^i (1 - \alpha_m(-1))\, x^{(i-1)}}{(i-1)!} + \sum_{k=2}^{i} \frac{(-1)^{(k+i)} \alpha_m(-k)\, x^{(i-k)}}{(i-k)!}, \quad i = 1, 2 .. m. \tag{11.16}$$

Действие 5. Вычисляется относительная ошибка полученного частного решения $Y_i(x)$ на заданном интервале $[x_0, x_1]$ изменения независимой переменной x ОДУ (11.1) с заданным шагом Δx:

$$\delta(Y_{m,i}(x)) = \left| \frac{\dfrac{d^m}{dx^m} Y_{m,i}(x) - \sum\limits_{p=1}^{m} a_p(x) \dfrac{d^{m-p}}{dx^{m-p}} Y_{m,i}(x)}{a_m(x)\, Y_{m,i}(x)} \right|, \quad i = 1, 2 .. m. \tag{11.17}$$

В том случае, если она на интервале $[x_0, x_1]$ меньше заданной $\delta_z(Y_{m,i}(x))$, т. е. если имеет место равенство

$$\delta(Y_{m,i}(x)) \leqslant \delta_z(Y_{m,i}(x)),$$

то полученное частное решение $Y_{m,i}(x)$ считается установленным на этом интервале изменения x.

Действие 6. Выписывается формула для общего решения ОДУ (11.1):

$$Y_m = \sum_{i=1}^{m} C_i\, Y_{m,i}(x), \tag{11.18}$$

где C_i — произвольные постоянные.

Это позволяет приступить к решению заданной краевой задачи.

##

ПРОГРАММА (на языке MAPLE 10), вычисляющая для ОДУ порядка m:

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} y = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \frac{\partial^{m-i}}{\partial x^{m-i}} y$$

1) Значения всех коэффициентов $\xi_{m,i}(-n)$, $s = 1, 2 .. N$ матрицы:

$$\Xi_{m,n} = \begin{bmatrix} \xi_{m,0}(-1) & \xi_{m,1}(-1) & \xi_{m,2}(-1) & . & \xi_{m,N}(-1) \\ \xi_{m,0}(-2) & \xi_{m,1}(-2) & \xi_{m,2}(-2) & . & \xi_{m,N}(-2) \\ . & . & . & . & . \\ \xi_{m,0}(-m) & \xi_{m,1}(-m) & \xi_{m,2}(-m) & . & \xi_{m,N}(-m) \end{bmatrix}$$

по формулам

$$\xi_{m,0}(-n) = \sum_{i=0}^{m-1} \begin{bmatrix} i \\ -n \end{bmatrix} [b_{i+1}(x)]_{i+n},$$

$$\xi_{m,s}(-n) = \sum_{i_{[s,0]}=0}^{[m-1,\ m-1-(s,s),\ m-1-(1,s)]} (-1)^{(0,\ s-1)} C(-n, i_s) \sum_{k_{[s-1,0]}=1}^{[m]} \prod_{l=0}^{s-1} C(k_l - 1 + i_l, k_l - 1) \Big[[b_{1+(0,s)}(x)]_{i_{[0,s-1]}+k_{[0,s-1]}} b_{k_{[0,s-1]}}(x) \Big]_{n+i_s} -$$

$$- \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_0=0}^{m-i_1} C(-n, i_0) [b_{i_0+i_1}(x)]_{n+i_0}\, \xi_{m,s-1}(-i_1) -$$

$$- \sum_{z=2}^{s} \sum_{i_{[z,0]}=[1,0]}^{[m,\ m-(z,z),\ m-(z+1,z),\ m-(1,z)]} \sum_{k_{[0,z-2]}=1}^{[m]} (-1)^{(0,\ z-2)} C(-n, i_{z-1}) \prod_{l=0}^{z-2} C(k_l - 1 + i_l, k_l - 1) \Big[[b_{[0,z]}(x)]_{i_{[0,z-2]}+k_{[0,z-2]}} b_{k_{[0,z-2]}}(x) \Big]_{n+i_{z-1}} \xi_{m,s-z}(-i_z);$$

2) Значения

$$\alpha_m(-n) = \sum_{s=0}^{N} \xi_{m,s}(-n), \quad n = -1, -2 .. m;$$

3) Частные решения

$$Y_{m,\,i}(x) = \frac{(-1)^{i}\,(1-\,\alpha_m(-1))\,x^{(i-1)}}{(i-1)!} + \sum_{k=2}^{i} \frac{(-1)^{(k+i)}\,\alpha_m(-k)\,x^{(i-k)}}{(i-k)!},\;\; i = 1,\, 2\, ..\, m;$$

4) Относительную ошибку полученного решения на заданном интервале $[X_{nach},\, X_{kon}]$:

$$\Delta(Y_{m,\,i}(x)) = \left| \frac{\frac{d^m}{dx^m} Y_{m,i}(x) - \sum_{k=1}^{m} a_k(x) \frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}} Y_{m,i}(x)}{a_m(x)\, Y_{m,i}(x)} \right|,\;\; i = 1\, ..\, m;$$

5) График изменения относительной ошибки $\Delta(Y_i(x))$ на интервале $[X_{nach} = -10.01,\, X_{kon} = 10.01]$.

```
> restart;alias(y=y(x),C=binomial,Ex=expand,Q=Q(x)):
> X[nach]:=-10.01:X[kon]:=10.01:
> m:=2:#введите порядок ОДУ — "m"
> a[1](x):=0:a[2](x):=x*ln(x):a[3](x):=sqrt(x):a[4](x):=2*x:
> diff(y,x$m)=add(a[i](x)*diff(y,x$(m-i)),i=1..m-1)+a[m](x)*y;
> dsolve(%);
> N:=4:#введите количество коэффициентов- от "s=1" до "s=N".
> dn:=proc (n::integer, w) local k, Ds; global resd, x; option remember; if n=0 then resd:=w elif 0<n then
  resd:=diff(w,'$'(x,n)) else Ds:= w; for k to -n do Ds:= int(Ds,x) end do; resd:= Ds end if; RETURN(resd) end proc:
> for k0 to m do b[k0](x):=add((-1)^(i)*C(m-i,m-k0)*dn(k0-i,a[i](x)),i = 1.. k0) od;
> diff(Q,x$m)=add(b[i](x)*diff(Q,x$(m-i)),i=1..m-1)+b[m](x)*Q;
> for n to m do
> for s to N do
> C0:=h->Product(C(k[l]-1+i[l],k[l]-1),l=0..h-1):
> P0:= proc (h) options operator, arrow; Sum(Sum(C(-n,i[0])*Dn(-(n+i[0]),b[i[0]+i[1]](x)),i[0] = 0.. m-i[1])*
  xI[m,h-1](-i[1]),i[1] = 1.. m) end proc:
> Ii:=h->add(i[j],j=0..h):
> Ii1:=h->add(i[j],j=h..z):
> Ii2:=h->add(i[j],j=h..s):
> C1:= proc (h) options operator, arrow; (-1)^(Ii(h-1))*C(-n,i[h]) end proc:
> Iik:=h->i[h]+k[h]:
> B0(0):=b[1+Ii(s)](x):
> for z from 0 to s do B0(z+1):=Dn(-Iik(z),B0(z))*b[k[z]](x) od:z:='z':
> R0(0):=C0(s)*Dn(-(n+i[s]),B0(s)):
> for z from 0 to s do R0(z+1):=Sum(R0(z),k[z]=1..m) od:z:='z':
> R1(0):=C1(s)*R0(s):
> for z from 0 to s do R1(z+1):= Sum(R1(z),i[z] = 0.. m-1-Ii2(z+1)) end do; z:= 'z':
> R2(s):=R1(s+1)-P0(s):
> Ii2:=h->h:
```

```
> for z from 2 to s do:
> B1(0):=b[add(i[j],j=0..z)](x);
> for z0 from 0 to z-1 do B1(z0+1):=Dn(-(Iik(z0)),B1(z0))*b[k[z0]](x) od:z0:='z0':
> R3(0):=Product(C(k[l]-1+i[l],k[l]-1),l = 0.. z-2)*Dn(-(n+i[z-1]),B1(z-1));
> for z0 from 0 to z do R3(z0+1):=Sum(R3(z0),k[z0]=1..m) od;z0:='z0':
> R4(0):=(-1)^(add(i[j],j=0..z-2))*C(-n,i[z-1])*R3(z-1);
> for z0 from 0 to z do R4(z0+1):= Sum(R4(z0),i[z0] = 0.. m-Ii1(z0+1)) end do; z0:= 'z0':
> R5[z]:=Sum(R4(z)*xI[m,s-z](-i[z]),i[z]=1..m);
> od:
> R(m,s,n):=(xI[m,s](-n)=R2(s)-add(R5[z1],z1=2..s));
> od:
> od:z:='z':k:='k':
> Xi[m,N]=matrix([seq([seq(xi[m,s0](-n0),s0=0..N)],n0=1..m)]);
> for s0 from 0 to N do
> if s0=0 then for n0 to m do xI[m,0](-n0):=value(add(C(-n0,i0)*dn(-(n0+i0),b[i0+1](x)),i0 = 0.. m-1)) od else for
  n0 to m do xI[m,s0](-n0):=expand(eval(subs(Sum=add,Product=product,Dn=dn,rhs(R(m,s0,n0))))) od fi;
> od:
> for s0 from 0 to N do
> if s0=0 then for n0 to m do print(xi[m,s0](-n0)=xI[m,0](-n0)) od else for n0 to m do print(xi[m,s0](-n0)=
  xI[m,s0](-n0)) od fi;
> od:
> for k to m do alpha[m](-k):=add(xI[m,s](-k),s=0..N) od;k:='k':
> for i to m do R[i]:= Y(x) =collect(sort(combine(Ex(Ex(Ex((-1)^i*(1-alpha[m](-1))*x^(i-1)/(i-1)!+add((-1)^(k+i)*
  alpha[m](-k)*x^(i-k)/(i-k)!,k = 2.. i))))),x),[seq(ln(x)^(N-i),i=0..N-1),x],factor) end do;
> for i to m do Delta(i):= expand(subs(R[i],diff(Y(x),`$`(x,m))-add(a[p](x)*dn(m-p,Y(x)),p = 1.. m))/(a[m](x)*
  subs(R[i],Y(x)))); for s from X[nach] to X[kon] do he1(s):= abs(evalf(subs(x = s,Delta(i)))) end do; x:='x';
  with(plots); print(k); for s from X[nach] to X[kon] do if abs(he1(s)) <.1 then print(delta(s) = he1(s),x = s) else
  NULL end if end do; s:='s'; x:='x'; print(pointplot({seq([n, he1(n)],n = X[nach].. X[kon])},numpoints = 20,axes =
  BOXED,color = red,xtickmarks = 20,ytickmarks = 20,scaling = UNCONSTRAINED,title = "ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ")) end do:
################################################################################
```

Рассмотрим примеры решения линейных ОДУ различного порядка, начиная со второго (с целью демонстрации его применимости).

▶ **Пример 1.** Найти общее решение линейного ОДУ второго порядка:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} Y = x \frac{\partial}{\partial x} Y + \sqrt{x} Y. \tag{11.19}$$

Решение. Вычисляем коэффициенты $b_k(x)$, $k = 1, 2$ сопряженного (11.19) ОДУ:

$$b_1(x) = -a_1(x) = -x,$$
$$b_2(x) = -\frac{d}{dx} a_1(x) + a_2(x) = -1 + \sqrt{x}.$$

Вычислим слагаемые $\xi_k(x)$, $k = 0, 1, 2 .. N$.

Слагаемое $\xi_0(-n)$.
В соответствии с формулой (11.9) имеем для $m = 2$:

$$\xi_0(-n) = \sum_{i=0}^{1} \begin{bmatrix} i \\ -n \end{bmatrix} [b_{i+1}(x)]_{i+n}.$$

Отсюда получаем формулы

$$\xi_0(-1) = \int b_1(x)\,dx - \iint b_2(x)\,dx\,dx,$$
$$\xi_0(-2) = \iint b_1(x)\,dx\,dx - 2\iiint b_2(x)\,dx\,dx\,dx.$$

Таким образом, искомые значения равны

$$\xi_0(-1) = \int(-x)\,dx - \iint(-1+\sqrt{x})\,dx\,dx = -\frac{4\,x^{\left(\frac{5}{2}\right)}}{15},$$
$$\xi_0(-2) = \iint(-x)\,dx\,dx - 2\iiint(-1+\sqrt{x})\,dx\,dx\,dx = \frac{x^3}{6} - \frac{16\,x^{\left(\frac{7}{2}\right)}}{105}.$$

Слагаемое $\xi_1(-n)$.
В соответствии с формулой (11.10) получаем для $m = 2$:

$$\xi_1(-n) = \sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_0=0}^{1-i_1}(-1)^{i_0} C(-n, i_1)\sum_{k_0=1}^{2} C(k_0-1+i_0, k_0-1)\Big[[b_{i_1+i_0+1}(x)]_{i_0+k_0}\, b_{k_0}(x)\Big]_{n+i_1} - \sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_0=0}^{2-i_1} C(-n, i_0)[b_{i_0+i_1}(x)]_{n+i_0}\,\xi_0(-i_1).$$

Отсюда получаем искомые формулы

$$\xi_1(-1) = -\frac{1}{2}\left(\int b_1(x)\,dx\right)^2 - \iiint b_2(x)\,dx\,dx\,b_1(x)\,dx - \iiint b_2(x)\,dx\,b_1(x)\,dx\,dx + \iiint b_1(x)\,dx\,dx\,b_2(x)\,dx - 2\iiiint b_2(x)\,dx\,dx\,dx\,b_2(x)\,dx -$$
$$- \iiiint b_2(x)\,dx\,dx\,b_2(x)\,dx\,dx + 2\int b_1(x)\,dx\iint b_2(x)\,dx\,dx - \left(\iint b_2(x)\,dx\,dx\right)^2 - \iint b_1(x)\,dx\,dx\int b_2(x)\,dx + 2\iiint b_2(x)\,dx\,dx\,dx\int b_2(x)\,dx,$$

$$\xi_1(-2) = \frac{1}{2}\int\left(\int b_1(x)\,dx\right)^2 dx - \iiiint b_2(x)\,dx\,dx\,b_1(x)\,dx\,dx - 2\iiiint b_2(x)\,dx\,b_1(x)\,dx\,dx\,dx + \iiiint b_1(x)\,dx\,dx\,b_2(x)\,dx\,dx -$$
$$- 2\iiiiint b_2(x)\,dx\,dx\,dx\,b_2(x)\,dx\,dx - 2\iiiiint b_2(x)\,dx\,dx\,b_2(x)\,dx\,dx\,dx - \iint b_1(x)\,dx\,dx\int b_1(x)\,dx + 2\iiint b_2(x)\,dx\,dx\,dx\int b_1(x)\,dx.$$

Таким образом, искомые значения равны

$$\xi_1(-1) = -\frac{8\,x^{\left(\frac{9}{2}\right)}}{189} - \frac{x^5}{75}, \quad \xi_1(-2) = \frac{x^5}{40} - \frac{202\,x^{\left(\frac{11}{2}\right)}}{10395} - \frac{x^6}{105}.$$

Совершенно аналогичным образом получаем:

$$\xi_2(-1) = -\frac{16\,x^{\left(\frac{13}{2}\right)}}{3003} - \frac{103\,x^7}{39690} - \frac{4\,x^{\left(\frac{15}{2}\right)}}{14625}, \quad \xi_2(-2) = \frac{x^7}{336} - \frac{9049\,x^{\left(\frac{15}{2}\right)}}{4054050} - \frac{1109\,x^8}{623700} - \frac{124\,x^{\left(\frac{17}{2}\right)}}{580125},$$
$$\xi_3(-1) = -\frac{32\,x^{\left(\frac{17}{2}\right)}}{58905} - \frac{2\,x^{10}}{658125} - \frac{23974\,x^{\left(\frac{19}{2}\right)}}{416645775} - \frac{19049\,x^9}{58378320}, \quad \xi_3(-2) = -\frac{2366443\,x^{\left(\frac{21}{2}\right)}}{53469541125} - \frac{86\,x^{11}}{34459425} - \frac{746737\,x^{10}}{3405402000} - \frac{2011\,x^{\left(\frac{19}{2}\right)}}{9189180} + \frac{x^9}{3456},$$

$$\xi_4(-1) = -\frac{64\,x^{\left(\frac{21}{2}\right)}}{1382535} - \frac{8\,x^{\left(\frac{25}{2}\right)}}{378421875} - \frac{383737\,x^{11}}{12129717600} - \frac{91589\,x^{12}}{137493105750} - \frac{30321563\,x^{\left(\frac{23}{2}\right)}}{4194263373300},$$

$$\xi_4(-2) = -\frac{26632\,x^{\left(\frac{27}{2}\right)}}{1486062703125} - \frac{54932745817\,x^{\left(\frac{25}{2}\right)}}{9961375511587500} + \frac{x^{11}}{42240} - \frac{79843\,x^{12}}{3789283680} - \frac{193447\,x^{13}}{356463607500} - \frac{12395081\,x^{\left(\frac{23}{2}\right)}}{674632838880},$$

$$\xi_5(-1) = -\frac{27446369\,x^{14}}{328139428617000} - \frac{1841832823\,x^{\left(\frac{27}{2}\right)}}{2708035264935000} - \frac{4\,x^{15}}{39734296875} - \frac{128\,x^{\left(\frac{25}{2}\right)}}{37855125} - \frac{57826141\,x^{13}}{22878852796800} - \frac{29422126\,x^{\left(\frac{29}{2}\right)}}{6190283353629375},$$

$$\xi_5(-2) = -\frac{134675041993\,x^{\left(\frac{31}{2}\right)}}{33582287193439359375} - \frac{3137018107\,x^{14}}{1870082229375360} - \frac{1218965329\,x^{\left(\frac{27}{2}\right)}}{910754332488000} - \frac{1689320593\,x^{15}}{24903438778968750} - \frac{389\,x^{16}}{4458188109375} + \frac{x^{13}}{599040} - \frac{17731412543069\,x^{\left(\frac{29}{2}\right)}}{3431893091252125 5000},$$

$$\xi_6(-1) = -\frac{12765560791\,x^{\left(\frac{33}{2}\right)}}{214000230115434 26250} - \frac{4641299551073\,x^{\left(\frac{31}{2}\right)}}{890855340273498 60000} - \frac{16\,x^{\left(\frac{35}{2}\right)}}{45893112890625} - \frac{7334349511\,x^{15}}{42501868849440000} - \frac{2190648114461\,x^{16}}{284018738586382800000} -$$

$$- \frac{484620533\,x^{17}}{2104696340233987 5000} - \frac{256\,x^{\left(\frac{29}{2}\right)}}{1185622515},$$

$$\xi_6(-2) = -\frac{72126276704340979\,x^{\left(\frac{33}{2}\right)}}{1825629848822480680980000} - \frac{31215984803\,x^{\left(\frac{31}{2}\right)}}{363896953291872000} - \frac{136275177383006\,x^{\left(\frac{35}{2}\right)}}{27151279195895722054 6875} + \frac{x^{15}}{9676800} - \frac{5009151926287\,x^{16}}{437599241673834 24000} -$$

$$- \frac{44973727170989\,x^{17}}{720697549162946355 0000} - \frac{2956\,x^{\left(\frac{37}{2}\right)}}{9622256002734375} - \frac{8909310511\,x^{18}}{44776382924585812 5000}$$

и так далее.

На основании полученных значений использование эвристических методов позволяет установить следующую функциональную закономерность изменения слагаемых: $\xi_{k+1}(-1)$ и $\xi_k(-1)$.

$$\xi_s(-1) = \sum_{p=s}^{2s} b_{s,p}\, x^{\left(\frac{5}{2} + p + 3s\right)} + \sum_{p=s}^{2s-1} c_{s,p}\, x^{(6s - p + 2)}, \quad \xi_{s+1}(-1) = \sum_{p=s}^{2s} g_{s,p}\, x^{\left(\frac{5}{2} + p + 3s + 2\right)} + \sum_{p=s}^{2s} r_{s,p}\, x^{(6s + 5 - p)}. \tag{11.20}$$

$$\xi_s(-2) = \sum_{p=s}^{2s} \rho_{s,p}\, x^{\left(\frac{5}{2} + p + 3s + 1\right)} + \sum_{p=s}^{2s} \tau_{s,p}\, x^{(6s + 3 - p)}, \quad \xi_{s+1}(-2) = \sum_{p=s}^{2s} \chi_{s,p}\, x^{\left(\frac{5}{2} + \frac{2p}{2} + 3s + 3\right)} + \sum_{p=s}^{2s+1} \omega_{s,p}\, x^{(6s + 6 - p)}. \tag{11.21}$$

Здесь $b_{s,p}$, $c_{s,p}$, $g_{s,p}$, $r_{s,p}$, $\rho_{s,p}$, $\tau_{s,p}$, $\chi_{s,p}$, $\omega_{s,p}$ — искомые числовые коэффициенты.

Таким образом, искомые значения $\alpha(-1)$, $\alpha(-2)$ определяются формулами

$$\alpha(-k) = \sum_{s=0}^{\infty} (\xi_s(-k) + \xi_{s+1}(-k)), \quad k = 1,\ 2$$

или в раскрытой форме:

$$\alpha(-1) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{p=s}^{2s} b_{s,p}\, x^{\left(\frac{5}{2} + p + 3s\right)} + \sum_{p=s}^{2s-1} c_{s,p}\, x^{(6s - p + 2)} + \sum_{p=s}^{2s} g_{s,p}\, x^{\left(\frac{5}{2} + p + 3s + 2\right)} + \sum_{p=s}^{2s} r_{s,p}\, x^{(6s + 5 - p)} \right), \tag{11.22}$$

$$\alpha(-2) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{p=s}^{2s} \rho_{s,p}\, x^{\left(\frac{5}{2} + p + 3s + 1\right)} + \sum_{p=s}^{2s} \tau_{s,p}\, x^{(6s + 3 - p)} + \sum_{p=s}^{2s} \chi_{s,p}\, x^{\left(\frac{5}{2} + p + 3s + 3\right)} + \sum_{p=s}^{2s+1} \omega_{s,p}\, x^{(6s + 6 - p)} \right). \tag{11.23}$$

Искомые решения выписываются, используя формулы (11.3):

$$Y_1(x) = -1 + \sum_{s=0}^{\infty}\left(\sum_{p=s}^{2s} b_{s,\,p}\, x^{\left(\frac{5}{2}+p+3s\right)} + \sum_{p=s}^{2s-1} c_{s,\,p}\, x^{(6s-p+2)} + \sum_{p=s}^{2s} g_{s,\,p}\, x^{\left(\frac{5}{2}+p+3s+2\right)} + \sum_{p=s}^{2s} r_{s,\,p}\, x^{(6s+5-p)}\right), \qquad (11.24)$$

$$Y_2(x) = \left(1 - \sum_{s=0}^{\infty}\left(\sum_{p=s}^{2s} b_{s,\,p}\, x^{\left(\frac{5}{2}+p+3s\right)} + \sum_{p=s}^{2s-1} c_{s,\,p}\, x^{(6s-p+2)} + \sum_{p=s}^{2s} g_{s,\,p}\, x^{\left(\frac{5}{2}+p+3s+2\right)} + \sum_{p=s}^{2s} r_{s,\,p}\, x^{(6s+5-p)}\right)\right) x +$$
$$+ \sum_{s=0}^{\infty}\left(\sum_{p=s}^{2s} \rho_{s,\,p}\, x^{\left(\frac{5}{2}+p+3s+1\right)} + \sum_{p=s}^{2s} \tau_{s,\,p}\, x^{(6s+3-p)} + \sum_{p=s}^{2s} \chi_{s,\,p}\, x^{\left(\frac{5}{2}+p+3s+3\right)} + \sum_{p=s}^{2s+1} \omega_{s,\,p}\, x^{(6s+6-p)}\right). \qquad (11.25)$$

Подставляя последовательно полученные решения $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ в исходное ОДУ (11.19), устанавливаем (способом, аналогичным тому, как это делалось ранее для решения ОДУ второго порядка) рекуррентные соотношения для вычисления числовых коэффициентов.

$$b_{s,\,p} + g_{s,\,p-2} = 0, \quad r_{s,\,p+3} + c_{s,\,p} = 0, \qquad (11.26)$$
$$(p-1-6s)(p-2-6s)c_{s,\,p} + (p-1-6s)(p-2-6s)r_{s,\,p+3} + (p-6s)c_{s,\,p+2} + (-6s-5)r_{s,\,p+5} + pr_{s,\,p} = 0,$$
$$(2p+6s+5)(2p+6s+3)g_{s,\,p-2} + (2p+6s+5)(2p+6s+3)b_{s,\,p} - 2(g_{s,\,p-4} + b_{s,\,p-2})(1+2p+6s) = 0,$$

$$(12+24s-4p)c_{s,\,p}(-12+4p-24s)\tau_{s,\,p} + (12+24s-4p)r_{s,\,p+3} - 4(6s+5-p)(6s+4-p)r_{s,\,p} +$$
$$+ (-36p+80-48ps+144s^2+96s+4p^2)\tau_{s,\,p-2} - 4c_{s,\,p-2} - 4c_{s,\,p-2}(6s+3-p)(6s+4-p) + 4\omega_{s,\,p+1}(6s+5-p)(6s+4-p) +$$
$$+ (-12+4p-24s)\omega_{s,\,p+3} + 120s\tau_{s,\,p+2} = 0,$$

$$(22+12s+4p)g_{s,\,p} + (-12s-22-4p)\chi_{s,\,p} - (2p+15+6s)(13+2p+6s)b_{s,\,p+4} + (2p+15+6s)(13+2p+6s)\rho_{s,\,p+4} +$$
$$+ (22+12s+4p)b_{s,\,p+2} + (2p+15+6s)(13+2p+6s)g_{s,\,p+2} - 2\rho_{s,\,p+2}(2p+6s+11) = 0,$$

$$\tau_{s,\,p-2} - r_{s,\,p+1} + \omega_{s,\,p+1} - c_{s,\,p-2} = 0,$$
$$\rho_{s,\,p} + \chi_{s,\,p-2} - g_{s,\,p-2} - b_{s,\,p} = 0.$$

Таким образом, искомое общее решение ОДУ (11.19) определяется формулой

$$Y = \sum_{i=1}^{2} C_i\, Y_i(x), \qquad (11.27)$$

C_i — произвольные постоянные, а $Y_i(x)$, $i = 1, 2$ — определяются формулами (11.24), (11.25). При этом числовые коэффициенты в этих уравнениях находятся из рекуррентных соотношений (11.26). Задача решена.

Примечание. Вычисление относительной ошибки по формуле (11.17) для каждого решения $Y_i(x)$, $i = 1, 2$ показало, что на интервале [0, 1] эта относительная ошибка не превышает 10^{-5}, и для этого достаточно всего семи первых членов ряда. При этом искомые частные решения, вместе с данными об относительной ошибке, равны

$$Y_1(x) = -1 - \frac{4x^{\left(\frac{5}{2}\right)}}{15} - \frac{32x^{\left(\frac{17}{2}\right)}}{58905} - \frac{274740728791x^{\left(\frac{33}{2}\right)}}{21400023011543426250} - \frac{4641299551073x^{\left(\frac{31}{2}\right)}}{890855340273498600000} - \frac{x^5}{75} - \frac{4x^{20}}{4359845724609375} - \frac{64787428890700319x^{\left(\frac{35}{2}\right)}}{19085138801907653475000000} -$$
$$- \frac{64x^{\left(\frac{21}{2}\right)}}{1382535} - \frac{27446369x^{14}}{328139428617000} - \frac{8x^{\left(\frac{9}{2}\right)}}{189} - \frac{16x^{\left(\frac{13}{2}\right)}}{3003} - \frac{103x^7}{39690} - \frac{1841832823x^{\left(\frac{27}{2}\right)}}{2708035264935000} - \frac{917328514859x^{15}}{5312733606180000000} - \frac{4x^{\left(\frac{15}{2}\right)}}{14625} - \frac{2190648114461x^{16}}{28401873858638280000} -$$

$$
-\frac{779466376779397\,x^{17}}{7543231683398611200000\,0}-\frac{1883704\,x^{\left(\frac{25}{2}\right)}}{553631203125}-\frac{383737\,x^{11}}{12129717600}-\frac{91589\,x^{12}}{137493105750}-\frac{2\,x^{10}}{658125}-\frac{57826141\,x^{13}}{22878852796800}-\frac{23974\,x^{\left(\frac{19}{2}\right)}}{416645775}-\frac{1366030126\,x^{\left(\frac{29}{2}\right)}}{6190283353629375}-
$$

$$
-\frac{47043047375059\,x^{\left(\frac{37}{2}\right)}}{867538324172308288500000}-\frac{30321563\,x^{\left(\frac{23}{2}\right)}}{4194263373300}-\frac{2665769554417\,x^{19}}{922806209689076963250000}-\frac{19049\,x^{9}}{58378320}-\frac{8567183727827519\,x^{18}}{14936971490365751026200000}-\frac{235781101\,x^{\left(\frac{39}{2}\right)}}{2920266172074657656250}
$$

$$
Y_2(x)=x+\frac{8\,x^{\left(\frac{17}{2}\right)}}{133875}+\frac{79268534468269\,x^{\left(\frac{33}{2}\right)}}{6295275340767174762000}+\frac{1811897241977\,x^{\left(\frac{31}{2}\right)}}{1384390583175600000\,0}+\frac{x^{5}}{40}+\frac{464403193394629\,x^{20}}{11693150907032424298218750\,00}+\frac{11118550640490221\,x^{\left(\frac{35}{2}\right)}}{1494780101967592440000000}+
$$

$$
+\frac{9641\,x^{\left(\frac{21}{2}\right)}}{725830875}+\frac{159944443\,x^{14}}{188166168590400}+\frac{x^{3}}{6}+\frac{x^{7}}{336}+\frac{4\,x^{\left(\frac{7}{2}\right)}}{35}+\frac{34\,x^{\left(\frac{11}{2}\right)}}{1485}+\frac{533041031\,x^{\left(\frac{27}{2}\right)}}{260513253000000}+\frac{21268766413501\,x^{15}}{178507849167648000000}+\frac{2\,x^{6}}{525}+\frac{163\,x^{\left(\frac{15}{2}\right)}}{52650}+
$$

$$
+\frac{11949630192209\,x^{16}}{2056387413880800000\,00}+\frac{3528414490416646\,7\,x^{17}}{491996193561904711680000\,0}+\frac{11961461\,x^{\left(\frac{25}{2}\right)}}{6975753159375}+\frac{45649\,x^{11}}{1884960000}+\frac{12110639\,x^{12}}{1146258313200}+\frac{273341\,x^{10}}{2554051500}+\frac{4417210841\,x^{13}}{2463876455040000}+
$$

$$
+\frac{271\,x^{\left(\frac{19}{2}\right)}}{835380}+\frac{80144783183\,x^{\left(\frac{29}{2}\right)}}{490270441607446500}+\frac{1189\,x^{8}}{1455300}+\frac{2028785616907679363\,x^{\left(\frac{37}{2}\right)}}{2470418656452573126300000000}+\frac{90119\,x^{\left(\frac{23}{2}\right)}}{3227908320}+\frac{5061756253257513\,49\,x^{19}}{4600587219032651316069600000}+
$$

$$
+\frac{743661398\,x^{\left(\frac{41}{2}\right)}}{7632669839291489179687\,5}+\frac{x^{9}}{3456}+\frac{6519635286663831667\,x^{18}}{1880951965453464944040000000}+\frac{1360265524133\,x^{\left(\frac{39}{2}\right)}}{1568577018766412655000\,00}+\frac{x^{21}}{10137159333984375}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\delta(0.2)&=0.1963749884\cdot 10^{-17},\ x=0.2\\
\delta(1.2)&=0.5974263867\cdot 10^{-5},\ x=1.2
\end{aligned}\right\}\ \text{для } Y_1(x)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\delta(0.2)&=0.2507760209\cdot 10^{-17},\ x=0.2\\
\delta(1.2)&=0.3859974838\cdot 10^{-5},\ x=1.2
\end{aligned}\right\}\ \text{для } Y_2(x)
$$

Изложенное означает, что вычисление слагаемых $\xi_i(-n)$, $i = 1, 2\ ..\ N$ требует эвристического подхода. В простейшем случае полезно использование представленной выше программы, рассчитанной на вычисление частных решений линейных ОДУ вида:

$$
\frac{d^m}{dx^m}Y(x)=\sum_{p=1}^{m}a_p(x)\frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}}Y(x),
$$

где m — порядок ОДУ, $a_p(x)$ — заданные функции.

▶ **Пример 2.** Вычислить частные решения ОДУ:

$$
\frac{\partial^3}{\partial x^3}Y=\ln(x)\,Y. \tag{11.28}
$$

Р е ш е н и е. Вычисляем коэффициенты $b_k(x)$, $k = 1, 2, 3$ сопряженного (11.9) ОДУ:

$$
b_1(x)=0,\quad b_2(x)=0,\quad b_3(x)=-\ln(x).
$$

Вычислим слагаемые $\xi_k(-n)$, $k = 0,\ 1,\ 2\ ..\ N$, пользуясь приведенной Программой:

$$\xi_0(-1) = -\frac{x^3\ln(x)}{6} + \frac{11\,x^3}{36},\quad \xi_0(-2) = -\frac{x^4\ln(x)}{8} + \frac{25\,x^4}{96},\quad \xi_0(-3) = -\frac{x^5\ln(x)}{20} + \frac{137\,x^5}{1200},$$

$$\xi_1(-1) = -\frac{x^6\ln(x)^2}{720} + \frac{23\,x^6\ln(x)}{5400} - \frac{1477\,x^6}{648000},\quad \xi_1(-2) = -\frac{x^7\ln(x)^2}{840} + \frac{2711\,x^7\ln(x)}{705600} - \frac{311287\,x^7}{148176000},\quad \xi_1(-3) = -\frac{x^8\ln(x)^2}{1920} + \frac{101\,x^8\ln(x)}{57600} - \frac{1349\,x^8}{1382400},$$

$$\xi_2(-3) = -\frac{x^{11}\ln(x)^3}{887040} + \frac{11381\,x^{11}\ln(x)^2}{2276736000} - \frac{262430569\,x^{11}\ln(x)}{47333341440000} + \frac{4337898706921\,x^{11}}{262416044943360000},$$

$$\xi_2(-2) = -\frac{x^{10}\ln(x)^3}{403200} + \frac{173\,x^{10}\ln(x)^2}{16128000} - \frac{1671821\,x^{10}\ln(x)}{142248960000} + \frac{1246810127\,x^{10}}{358467379200000},$$

$$\xi_2(-1) = -\frac{x^9\ln(x)^3}{362880} + \frac{1177\,x^9\ln(x)^2}{101606400} - \frac{534073\,x^9\ln(x)}{42674688000} + \frac{78985223\,x^9}{21508042752000},$$

$$\xi_3(-3) = -\frac{x^{14}\ln(x)^4}{1117670400} + \frac{20291\,x^{14}\ln(x)^3}{4130909798400} - \frac{129227873\,x^{14}\ln(x)^2}{15904002723840000} + \frac{1482179880221\,x^{14}\ln(x)}{29390597033656320000} - \frac{11259303206003\,x^{14}}{1122186432194150400000},$$

$$\xi_3(-2) = -\frac{x^{13}\ln(x)^4}{518918400} + \frac{1297129\,x^{13}\ln(x)^3}{124664956416000} - \frac{42571146511\,x^{13}\ln(x)^2}{2495792427448320000} + \frac{631077790360889\,x^{13}\ln(x)}{59958917277018439680000} - \frac{26822303644011640 69\,x^{13}}{12861187755920455311360000000},$$

$$\xi_3(-1) = -\frac{x^{12}\ln(x)^4}{479001600} + \frac{48977\,x^{12}\ln(x)^3}{4425974784000} - \frac{3400217\,x^{12}\ln(x)^2}{189333365760000} + \frac{2080291347473\,x^{12}\ln(x)}{188939552359219200000} - \frac{270831271860293\,x^{12}}{12470010455708467200000}$$

и так далее.

Тогда искомые решения, которые образованы первыми семью значениями $\xi_k(-k)$, $k = 0,\ 1,\ 2\ ..\ 7$, определяются формулами: (11.29)

$$Y_1(x) = -\frac{\ln(x)^4 x^{12}}{479001600} + \left(-\frac{x^9}{362880} + \frac{48977\,x^{12}}{4425974784000}\right)\ln(x)^3 + \left(-\frac{x^6}{720} + \frac{1177\,x^9}{101606400} - \frac{3400217\,x^{12}}{189333365760000}\right)\ln(x)^2 +$$
$$+\left(\frac{23\,x^6}{5400} + \frac{2080291347473\,x^{12}}{188939552359219200000} - \frac{534073\,x^9}{42674688000} - \frac{x^3}{6}\right)\ln(x) + \frac{11\,x^3}{36} - \frac{270831271860293\,x^{12}}{12470010455708467200000} - 1 + \frac{78985223\,x^9}{21508042752000} - \frac{1477\,x^6}{648000},$$

$$Y_2(x) = \frac{x^{13}\ln(x)^4}{6227020800} + \left(\frac{x^{10}}{3628800} - \frac{494339\,x^{13}}{747989738496000}\right)\ln(x)^3 + \left(\frac{2250513983\,x^{13}}{2495792427448320000} + \frac{x^7}{5040} - \frac{871\,x^{10}}{1016064000}\right)\ln(x)^2 +$$
$$+\left(-\frac{883\,x^7}{2116800} + \frac{325267\,x^{10}}{426746880000} - \frac{374028577528049\,x^{13}}{770900364990237081600000} + \frac{x^4}{24}\right)\ln(x) - \frac{13\,x^4}{288} + \frac{16316172670946377\,x^{13}}{188980718046178118860800000} - \frac{29832967\,x^{10}}{153628876800000} + \frac{79361\,x^7}{444528000} + x,$$

$$Y_3(x) = -\frac{x^{14}\ln(x)^4}{87178291200} + \left(\frac{5233\,x^{14}}{130898204236800} - \frac{x^{11}}{39916800}\right)\ln(x)^3 + \left(-\frac{111280619\,x^{14}}{2329406265618432000} - \frac{x^8}{40320} + \frac{197\,x^{11}}{3073593600}\right)\ln(x)^2 +$$
$$+\left(\frac{347\,x^8}{8467200} - \frac{x^5}{120} - \frac{2784139\,x^{11}}{56800009728000} + \frac{21765605030527\,x^{14}}{944352947113040424960000}\right)\ln(x) + \frac{47\,x^5}{7200} - \frac{175478272585183\,x^{13}}{46874246283974552002560000} + \frac{622561721\,x^{11}}{56232009630720000} -,$$
$$-\frac{20921\,x^8}{1422489600} - \frac{x^2}{2}.$$

Отсюда нетрудно выписать следующие функциональные представления для искомых точных решений:

$$Y_1(x) = \sum_{i=0}^{N}\left(\sum_{k=3i}^{3N} r_{k,\,i}\, x^k\right)\ln(x)^i, \tag{11.30}$$

$$Y_2(x) = \sum_{i=0}^{N}\left(\sum_{k=3i}^{3N} \ln(x)^i\, g_{k,\,i}\, x^{(k+1)}\right), \tag{11.31}$$

$$Y_3(x) = \sum_{i=0}^{N}\left(\sum_{k=3i}^{3N} q_{k,\,i}\, x^{(k+2)}\ln(x)^i\right), \tag{11.32}$$

где $r_{k,\,i}$, $g_{k,\,i}$, $g_{k,\,i}$ — числовые коэффициенты. N — натуральное число, в пределе стремящееся к бесконечности.

Подставляя полученные функциональные значения в исходное уравнение (11.28), получаем следующие рекуррентные уравнения для искомых коэффициентов:

$$k(k-1)(k-2)r_{k,\,i} + (3k^2-6k+2)(i+1)r_{k,\,i+1} + (i+3)(i+2)(i+1)r_{k,\,i+3} + 3(i+2)(i+1)(k-1)r_{k,\,i+2} - r_{k-3,\,i-1} = 0,$$
$$3ik(i-1)g_{k,\,i} + (3k^2-1)(i-1)g_{k,\,i-1} + k(k-1)(k+1)g_{k,\,i-2} + i(i-1)(1+i)g_{k-3,\,i} - g_{k-3,\,i-3} = 0,$$
$$i(2+3k^2+6k)g_{k,\,i} + 3i(k+1)(i+1)q_{k,\,i+1} + i(i+2)(i+1)q_{k,\,i+2} + k^3q_{k,\,i-1} + 3k^2q_{k,\,i-1} + 2kq_{k,\,i-1} - q_{k-3,\,i-2} = 0.$$

Задача решена.

Примечание. В интервале изменения x от –10 до 10 относительная ошибка вычисляемых решений (11.30), (11.31), (11.32) последовательно для $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $Y_3(x)$ определяется следующими значениями:

$Y_1(x)$
$\delta(-3.2) = 0.01361087762,\ x = -3.2$
$\delta(-2.2) = 0.0005106432648,\ x = -2.2$
$\delta(-1.2) = 0.1507409925 \cdot 10^{-5},\ x = -1.2$
$\delta(-0.2) = 0.2911197268 \cdot 10^{-14},\ x = -0.2$
$\delta(0.8) = 0.4705009829 \cdot 10^{-9},\ x = 0.8$
$\delta(1.8) = 0.534002739 \cdot 10^{-6},\ x = 1.8$
$\delta(2.8) = 0.0000156381539,\ x = 2.8$
$\delta(3.8) = 0.000301726876,\ x = 3.8$
$\delta(4.8) = 0.0078713024,\ x = 4.8$
$\delta(5.8) = 0.0468762405,\ x = 5.8$

$Y_2(x)$
$\delta(-4.2) = 0.05292621898,\ x = -4.2$
$\delta(-3.2) = 0.004850226320,\ x = -3.2$
$\delta(-2.2) = 0.0001295937217,\ x = -2.2$
$\delta(-1.2) = 0.1565109996 \cdot 10^{-6},\ x = -1.2$
$\delta(-0.2) = 0.1872934287 \cdot 10^{-15},\ x = -0.2$
$\delta(0.8) = 0.1747630201 \cdot 10^{-10},\ x = 0.8$
$\delta(1.8) = 0.309035150 \cdot 10^{-8},\ x = 1.8$
$\delta(2.8) = 0.45413596 \cdot 10^{-6},\ x = 2.8$
$\delta(3.8) = 0.000101169727,\ x = 3.8$
$\delta(4.8) = 0.00155474534,\ x = 4.8$
$\delta(5.8) = 0.0061725691,\ x = 5.8$
$\delta(6.8) = 0.0069026771,\ x = 6.8$
$\delta(7.8) = 0.017802343,\ x = 7.8$
$\delta(8.8) = 0.086334797,\ x = 8.8$

$Y_3(x)$
$\delta(-4.2) = 0.02433135682,\ x = -4.2$
$\delta(-3.2) = 0.001728030305,\ x = -3.2$
$\delta(-2.2) = 0.00002730275997,\ x = -2.2$
$\delta(-1.2) = 0.2218155088 \cdot 10^{-7},\ x = -1.2$
$\delta(-0.2) = 0.2424658015 \cdot 10^{-16},\ x = -0.2$
$\delta(0.8) = 0.1627211974 \cdot 10^{-11},\ x = 0.8$
$\delta(1.8) = 0.113622098 \cdot 10^{-9},\ x = 1.8$
$\delta(2.8) = 0.37596498 \cdot 10^{-7},\ x = 2.8$
$\delta(3.8) = 0.673065013 \cdot 10^{-5},\ x = 3.8$
$\delta(4.8) = 0.0000309136272,\ x = 4.8$
$\delta(5.8) = 0.001597850951,\ x = 5.8$
$\delta(6.8) = 0.01173322970,\ x = 6.8$
$\delta(7.8) = 0.04392281537,\ x = 7.8$

Как видим, даже для первых четырех слагаемых получаем достаточно высокую точность (т. е. низкую относительную погрешность) установленных частных решений в интервале изменения x от –3 до 5.

▶ **Пример 3.** Найти частные решения ОДУ:

$$\frac{d^5}{dx^5} Y(x) = x e^{(-x)} Y(x). \tag{11.33}$$

Решение. В соответствии с формулой (14.47) вычисляем функции $b_k(x)$, $k = 1, 2 .. 5$

$$b_i(x) = 0, \; i = 1 .. 4,$$
$$b_5(x) = -xe^{(-x)}.$$

Вычислим слагаемые $\xi_k(-n)$, $k = 0, 1, 2 .. 5$, пользуясь приведенной Программой:

$$\xi_0(-1) = (5 - x) e^{(-x)}, \quad \xi_0(-2) = -5(6 + x) e^{(-x)}, \quad \xi_0(-3) = 15(7 + x) e^{(-x)}, \quad \xi_0(-4) = -35(8 + x) e^{(-x)}, \quad \xi_0(-5) = 70(9 + x) e^{(-x)},$$

$$\xi_1(-1) = -\frac{1}{32} e^{(-2x)} (20 + 10x + x^2), \quad \xi_1(-2) = \frac{15}{128} e^{(-2x)} (47 + 22x + 2x^2), \quad \xi_1(-3) = -\frac{5}{256} e^{(-2x)} (1359 + 600x + 50x^2),$$

$$\xi_1(-4) = \frac{15}{256} e^{(-2x)} (1582 + 663x + 51x^2), \quad \xi_1(-5) = -\frac{15}{2} e^{(-2x)} (35 + 14x + x^2),$$

$$\xi_2(-5) = \frac{5}{15116544} e^{(-3x)} (22808765 + 3413217x^2 + 179643x^3 + 17066085x),$$

$$\xi_2(-4) = -\frac{5}{5038848} e^{(-3x)} (2359890 + 1815173x + 376758x^2 + 20931x^3),$$

$$\xi_2(-3) = \frac{5}{1679616} e^{(-3x)} (194659 + 154347x + 33354x^2 + 1962x^3),$$

$$\xi_2(-2) = -\frac{5}{839808} e^{(-3x)} (17113 + 14031x + 3168x^2 + 198x^3),$$

$$\xi_2(-1) = \frac{1}{69984} e^{(-3x)} (670 + 570x + 135x^2 + 9x^3),$$

$$\xi_3(-5) = -\frac{5}{7739670528} e^{(-4x)} (70027060x + 24906960x^2 + 3320928x^3 + 138372x^4 + 61902395),$$

$$\xi_3(-4) = \frac{5}{660451885056} e^{(-4x)} (1502290155 + 1732241320x + 630997648x^2 + 86768880x^3 + 3772560x^4),$$

$$\xi_3(-3) = -\frac{5}{55037657088} e^{(-4x)} (28113835 + 33098272x + 12371700x^2 + 1758240x^3 + 79920x^4),$$

$$\xi_3(-2) = \frac{5}{13759414272} e^{(-4x)} (3600x^4 + 1109483 + 1336090x + 513540x^2 + 75600x^3),$$

$$\xi_3(-1) = -\frac{1}{2293235712} e^{(-4x)} (77065 + 95120x + 37680x^2 + 5760x^3 + 288x^4)$$

и так далее.

Тогда искомые решения, которые образованы первыми тремя значениями $\xi_i(-k)$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$, $i = 0, 1, 2, 3$, определяются формулами

$$Y_1(x) = \left(-\frac{785\,x^2}{47775744} - \frac{5945\,x}{143327232} - \frac{77065}{2293235712} - \frac{x^4}{7962624} - \frac{5\,x^3}{1990656}\right) e^{(-4x)} + \left(\frac{x^3}{7776} + \frac{95\,x}{11664} + \frac{5\,x^2}{2592} + \frac{335}{34992}\right) e^{(-3x)} + \tag{11.34}$$
$$+ \left(-\frac{5}{8} - \frac{5\,x}{16} - \frac{x^2}{32}\right) e^{(-2x)} - 1 + (5 + x) e^{(-x)},$$

$$Y_2(x) = \left(\frac{4195\,x^3}{95551488} + \frac{261535\,x^2}{1146617856} + \frac{x^5}{7962624} + \frac{365\,x^4}{95551488} + \frac{892855\,x}{1719926784} + \frac{5547415}{13759414272}\right)e^{(-4x)} + \left(-\frac{145\,x^3}{46656} - \frac{x^4}{7776} - \frac{26065\,x}{279936} - \frac{35\,x^2}{1296} - \frac{85565}{839808}\right)e^{(-3x)} + $$
$$+ \left(\frac{205\,x}{64} + \frac{35\,x^2}{64} + \frac{x^3}{32} + \frac{705}{128}\right)e^{(-2x)} + (-10x - 30 - x^2)\,e^{(-x)} + x,$$

$$Y_3(x) = \left(-\frac{16415\,x^4}{382205952} - \frac{x^6}{15925248} - \frac{420905\,x^3}{1146617856} - \frac{15640085\,x}{4586471424} - \frac{245\,x^5}{95551488} - \frac{11188135\,x^2}{6879707136} - \frac{140569175}{55037657088}\right)e^{(-4x)} +$$
$$+ \left(\frac{25\,x^4}{11664} + \frac{942865\,x}{1679616} + \frac{895\,x^3}{31104} + \frac{973295}{1679616} + \frac{x^5}{15552} + \frac{6565\,x^2}{34992}\right)e^{(-3x)} + \left(-\frac{6795}{256} - \frac{2205\,x}{128} - \frac{25\,x^3}{64} - \frac{495\,x^2}{128} - \frac{x^4}{64}\right)e^{(-2x)} +$$
$$+ \left(105 + 45x + \frac{15\,x^2}{2} + \frac{x^3}{2}\right)e^{(-x)} - \frac{x^2}{2},$$

$$Y_4(x) = \left(\frac{3969745\,x^4}{13759414272} + \frac{775565\,x^3}{382205952} + \frac{659252815\,x^2}{82556485632} + \frac{27215\,x^5}{1146617856} + \frac{2587009175\,x}{165112971264} + \frac{x^7}{47775744} + \frac{2503816925}{220150628352} + \frac{205\,x^6}{191102976}\right)e^{(-4x)} +$$
$$+ \left(-\frac{4655\,x^4}{279936} - \frac{655525}{279936} - \frac{137245\,x^3}{839808} - \frac{5997875\,x}{2519424} - \frac{x^6}{46656} - \frac{85\,x^5}{93312} - \frac{742615\,x^2}{839808}\right)e^{(-3x)} + \left(\frac{65\,x^4}{384} + \frac{x^5}{192} + \frac{455\,x^3}{192} + \frac{11865}{128} + \frac{2235\,x^2}{128} + \frac{4185\,x}{64}\right)e^{(-2x)} +$$
$$+ \left(-\frac{10\,x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - 280 - 30x^2 - 140x\right)e^{(-x)} + \frac{x^3}{6},$$

$$Y_5(x) = \left(-\frac{112168989125\,x}{1981355655168} - \frac{185\,x^7}{573308928} - \frac{701155625\,x^3}{82556485632} - \frac{229600625\,x^4}{165112971264} - \frac{1943605\,x^5}{13759414272} - \frac{10065795625\,x^2}{330225942528} - \frac{309511975}{7739670528} - \frac{x^8}{191102976} - \frac{20395\,x^6}{2293235712}\right)e^{(-4x)} +$$
$$+ \left(\frac{155\,x^6}{559872} + \frac{142325\,x^4}{1679616} + \frac{40242925\,x}{5038848} + \frac{x^7}{186624} + \frac{1195\,x^5}{186624} + \frac{6852725\,x^3}{10077696} + \frac{133535\,x^2}{41472} + \frac{114043825}{15116544}\right)e^{(-3x)} +$$
$$+ \left(-\frac{25305\,x}{128} - \frac{625\,x^3}{64} - \frac{30525\,x^2}{512} - \frac{5\,x^5}{96} - \frac{x^6}{768} - \frac{525}{2} - \frac{725\,x^4}{768}\right)e^{(-2x)} + \left(\frac{25\,x^3}{2} + \frac{25\,x^4}{24} + \frac{x^5}{24} + 350x + \frac{175\,x^2}{2} + 630\right)e^{(-x)} - \frac{x^4}{24}.$$

Отсюда нетрудно выписать следующие функциональные представления для искомых решений:

$$Y_{1+s}(x) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{k=0}^{i} r_{k,\,i}\, x^{(k+s)} e^{(-ix)}, \quad s = 0\,..\,4, \tag{11.35}$$

где $r_{k,\,i}$, $g_{k,\,i}$, $q_{k,\,i}$, $t_{k,\,i}$, $p_{k,\,i}$ — числовые коэффициенты. N — натуральное число в пределе, стремящееся к бесконечности.

Подставляя полученные функциональные значения в исходное уравнение (11.33), получаем следующие рекуррентные уравнения для искомых числовых коэффициентов:

$$-k(k-1)(k-2)(k-3)(1+k)\,r_{1+k,\,i} + r_{k-4,\,i}\,i^5 - 5i^4(k-3)\,r_{k-3,\,i} + r_{k-5,\,i-1} - 10i^2(k-2)(k-3)(k-1)\,r_{k-1,\,i} + 5i(k-2)(k-3)\,k(k-1)\,r_{k,\,i} +$$
$$+ 10i^3(k-2)(k-3)\,r_{k-2,\,i} = 0,$$

$$-k(k-1)(k-2)(2+k)(1+k)\,g_{1+k,\,i} + i^5 g_{k-4,\,i} - 5i^4(k-2)\,g_{k-3,\,i} + g_{k-5,\,i-1} - 10ki^2(k-1)(k-2)\,g_{k-1,\,i} + 5i(k-1)(k-2)\,k(1+k)\,g_{k,\,i} +$$
$$+ 10i^3 g_{k-2,\,i}(k-1)(k-2) = 0,$$

$$-k(k-1)(3+k)(k+2)(1+k)q_{1+k,\,i}+q_{k-4,\,i}i^5-5i^4(k-1)q_{k-3,\,i}+q_{k-5,\,i-1}-10i^2k(k-1)(1+k)q_{k-1,\,i}+5ik(k-1)(k+2)(1+k)q_{k,\,i}+$$
$$+10i^3q_{k-2,\,i}(k-1)=0,$$

$$5i(4+k)(3+k)(k+2)(1+k)t_{1+k,\,i}+i^5r_{k-3,\,i}+10i^3(k+2)(1+k)t_{k-1,\,i}-10i^2(3+k)(k+2)(1+k)t_{k,\,i}-$$
$$-(5+k)(4+k)(3+k)(k+2)(1+k)t_{k+2,\,i}-5i^4(1+k)t_{k-2,\,i}+t_{k-4,\,i-1}=0,$$

$$-(5+k)(4+k)(3+k)(k+2)(1+k)p_{1+k,\,i}+p_{k-4,\,i}i^5-5i^4(1+k)p_{k-3,\,i}+p_{k-5,\,i-1}-10i^2(3+k)(k+2)(1+k)p_{k-1,\,i}+$$
$$+5i(4+k)(3+k)(k+2)(1+k)p_{k,\,i}+10i^3(k+2)(1+k)p_{k-2,\,i}=0.$$

Задача решена.

▶ **Пример 4.** Установить функциональную структуру частных решений ОДУ:

$$\frac{d^7}{dx^7}Y(x)+\frac{d^4}{dx^4}Y(x)-x\frac{d}{dx}Y(x)-\sin x\,Y(x)=0. \tag{11.36}$$

Р е ш е н и е. Вычисляем функции $b_k(x)$, $k=1, 2\,..\,7$ сопряженного ОДУ:

$$b_i(x)=0,\ i=1, 2, 4, 5,$$
$$b_3(x)=1,\quad b_6(x)=x,\quad b_7(x)=-\sin x+1.$$

Вычислим слагаемые $\xi_k(-n)$, $n=1\,..\,7$, $k=0, 1, 2$, пользуясь приведенной Программой:

$$\xi_0(-1)=\frac{x^3}{6}-\cos x,\quad \xi_0(-2)=\frac{x^8}{40320}+\frac{x^4}{8}-7\sin x,\quad \xi_0(-3)=\frac{x^9}{51840}+\frac{x^5}{20}+28\cos x,\quad \xi_0(-4)=\frac{x^{10}}{129600}+\frac{x^6}{72}+84\sin x,$$
$$\xi_0(-5)=\frac{x^{11}}{475200}+\frac{x^7}{336}-210\cos x,\quad \xi_0(-6)=\frac{x^{12}}{2280960}+\frac{x^8}{1920}-462\sin x,\quad \xi_0(-7)=\frac{x^{13}}{13478400}+\frac{x^9}{12960}+924\cos x,$$

$$\xi_1(-1)=\frac{x^{10}}{1209600}+\frac{x^6}{320}-\frac{545x^4}{128}+\left(\frac{1}{6}x^3-27x\right)\cos x+\left(-\frac{7x^2}{2}+76\right)\sin x-\frac{1}{256}\cos 2x-\frac{141569}{256},$$

$$\xi_1(-2)=\frac{x^{15}}{163459296000}+\frac{x^{11}}{1425600}+\frac{53x^7}{20160}-\frac{679x^5}{640}+\frac{5383x^3}{128}+\frac{102123x}{256}-\frac{21}{512}\sin 2x+\left(\frac{1}{40320}x^8-\frac{7}{180}x^6+\frac{71}{8}x^4-476x^2+2901\right)\cos x+$$
$$+\left(-\frac{1}{720}x^7+\frac{7}{10}x^5-\frac{238}{3}x^3+1729x\right)\sin x,$$

$$\xi_1(-3)=\frac{x^{16}}{190207180800}+\frac{29x^{12}}{95800320}+\frac{13x^8}{11520}-\frac{2359x^6}{5760}+\frac{7735x^4}{768}+\frac{66185x^2}{256}+\frac{119}{512}\cos 2x+\frac{1215095}{512}+\left(-\frac{1}{960}x^8+\frac{7}{15}x^6-\frac{315}{8}x^4+10338\right)\sin x+$$
$$+\left(\frac{1}{51840}x^9-\frac{1}{36}x^7+\frac{53}{10}x^5-\frac{476}{3}x^3-3094x\right)\cos x,$$

$$\xi_1(-4)=\frac{29x^{17}}{12703122432000}+\frac{x^{13}}{11321856}+\frac{17x^9}{51840}-\frac{103x^7}{960}+\frac{609x^5}{640}+\frac{14175x^3}{128}-\frac{42525x}{256}+\left(\frac{1}{129600}x^{10}-\frac{1}{96}x^8+\frac{127}{72}x^6-\frac{119}{3}x^4-27240\right)\cos x+$$
$$+\left(-\frac{7}{17280}x^9+\frac{1}{6}x^7-\frac{707}{60}x^5-5460x\right)\sin x+\frac{483}{512}\sin 2x,$$

$$\xi_1(-5) = \frac{61\,x^{18}}{91462481510400} + \frac{31\,x^{14}}{1585059840} + \frac{x^{10}}{13824} - \frac{979\,x^{8}}{46080} - \frac{4907\,x^{6}}{23040} + \frac{108395\,x^{4}}{3072} - \frac{108395\,x^{2}}{1024} + \left(-\frac{7}{64800}x^{10} + \frac{1}{24}x^{8} - \frac{1883}{720}x^{6} - 65163\right)\sin x + \\ + \left(\frac{1}{475200}x^{11} - \frac{7}{2592}x^{9} + \frac{47}{112}x^{7} - \frac{119}{15}x^{5} - 9828\,x\right)\cos x - \frac{12564629}{2048} - \frac{6293}{2048}\cos 2x,$$

$$\xi_1(-6) = \frac{x^{19}}{6788231049600} + \frac{x^{15}}{285768000} + \frac{49\,x^{11}}{3801600} - \frac{31\,x^{9}}{9216} - \frac{179\,x^{7}}{1536} + \frac{45689\,x^{5}}{5120} - \frac{45689\,x^{3}}{1024} + \frac{137067\,x}{2048} + \left(-\frac{7}{316800}x^{11} + \frac{7}{864}x^{9} - \frac{7}{15}x^{7} + 18564\,x\right)\sin x - \\ - \frac{34965}{4096}\sin 2x + \left(\frac{1}{2280960}x^{12} - \frac{7}{12960}x^{10} + \frac{151}{1920}x^{8} - \frac{119}{90}x^{6} + 151795\right)\cos x,$$

$$\xi_1(-7) = \frac{67\,x^{20}}{2555569336320000} + \frac{11\,x^{16}}{20901888000} + \frac{x^{12}}{518400} - \frac{19\,x^{10}}{43200} - \frac{29\,x^{8}}{960} + \frac{28\,x^{6}}{15} - 14x^{4} + 42x^{2} + \left(-\frac{7}{1900800}x^{12} + \frac{7}{5400}x^{10} - \frac{403}{5760}x^{8} + 352716\right)\sin x + \\ + \left(\frac{1}{13478400}x^{13} - \frac{7}{79200}x^{11} + \frac{317}{25920}x^{9} - \frac{17}{90}x^{7} - 37128\,x\right)\cos x + 13545 + 21\cos 2x,$$

$$\xi_2(-7) = \frac{79\,x^{27}}{146391189406285824000000} + \frac{61\,x^{23}}{988113623777280000} + \frac{661\,x^{19}}{511113867264000} - \frac{17359\,x^{17}}{9238634496000} - \frac{12211\,x^{15}}{747242496000} + \frac{4639199\,x^{13}}{28466380800} - \frac{1862999\,x^{11}}{116785152} - \\ - \frac{17558041\,x^{9}}{11796480} + \frac{535356211\,x^{7}}{2949120} - \frac{1181402425\,x^{5}}{393216} + \frac{6556604957\,x^{3}}{393216} - \frac{735245621789\,x}{262144} + \left(\frac{67}{2555569336320000}x^{20} - \frac{59}{418784256000}x^{18} + \frac{3071}{20901888000}x^{16} - \right. \\ \left. - \frac{5791}{94348800}x^{14} + \frac{67241}{5702400}x^{12} - \frac{53953}{51840}x^{10} + \frac{358751}{11520}x^{8} + \frac{81641}{5760}x^{6} - \frac{81641}{768}x^{4} + \frac{761258729}{256}x^{2} - \frac{3886171440379}{8192}\right)\cos x + \\ + \left(-\frac{7}{2652300288000}x^{19} + \frac{11}{2115072000}x^{17} - \frac{6269}{1886976000}x^{15} + \frac{69323}{74131200}x^{13} - \frac{18673}{152064}x^{11} + \frac{2842027}{414720}x^{9} - \frac{1267061}{17920}x^{7} - \frac{215649}{5120}x^{5} + \right. \\ \left. + \frac{215649}{1024}x^{3} - \frac{152236064547}{2048}x\right)\sin x + \left(-\frac{7}{324403200}x^{12} + \frac{161}{11059200}x^{10} - \frac{5023}{3932160}x^{8} + \frac{6734357987}{524288}\right)\sin 2x + \frac{53845547}{4353564672}\cos 3x + \\ + \left(\frac{1}{3450470400}x^{13} - \frac{119}{162201600}x^{11} + \frac{18911}{106168320}x^{9} - \frac{1553}{368640}x^{7} - 1239\,x\right)\cos 2x,$$

$$\xi_2(-6) = \frac{2579\,x^{26}}{8729252405337784320000000} + \frac{157\,x^{22}}{38665315713024000} + \frac{1933\,x^{18}}{228656203776000} - \frac{1769\,x^{16}}{135862272000} + \frac{404123\,x^{14}}{697426329600} + \frac{93521\,x^{12}}{99532800} - \frac{31632469\,x^{10}}{265420800} - \\ - \frac{6055653\,x^{8}}{1310720} + \frac{2464827253\,x^{6}}{2949120} - \frac{4449630143\,x^{4}}{393216} + \frac{4924507217\,x^{2}}{131072} - \frac{27524075747}{262144} + \left(\frac{1}{583925760}x^{12} - \frac{119}{26542080}x^{10} + \frac{1501}{1310720}x^{8} - \right. \\ \left. - \frac{10871}{368640}x^{6} + \frac{1529605917}{262144}\right)\cos 2x + \left(-\frac{1}{67005480960}x^{18} + \frac{13}{435456000}x^{16} - \frac{2449}{125798400}x^{14} + \frac{8027}{1425600}x^{12} - \frac{827}{1080}x^{10} + \frac{258421}{5760}x^{8} - \frac{143641}{288}x^{6} - \right. \\ \left. - \frac{34951}{192}x^{4} - \frac{95112185}{64}x^{2} + \frac{1607459972267}{8192}\right)\sin x + \left(-\frac{7}{54067200}x^{11} + \frac{161}{1769472}x^{9} - \frac{2791}{327680}x^{7} + \frac{87357879}{131072}x\right)\sin 2x - \frac{6462295}{1451188224}\sin 3x +$$

$$+\left(\frac{1}{6788231049600}x^{19}-\frac{7}{8724672000}x^{17}+\frac{3163}{3714984000}x^{15}-\frac{6001}{16473600}x^{13}+\frac{823063}{11404800}x^{11}-\frac{2751451}{414720}x^{9}+\frac{6796817}{32256}x^{7}+\frac{1127819}{15360}x^{5}-\right.$$
$$\left.-\frac{1127819}{3072}x^{3}-\frac{69616294517}{2048}x\right)\cos x,$$

$$\xi_2(-5)=\frac{4799\,x^{25}}{369314524841213952000000}+\frac{83\,x^{21}}{37103080734720000}+\frac{47\,x^{17}}{1016249794560}-\frac{112561\,x^{15}}{1494484992000}+\frac{198007\,x^{13}}{28466380800}+\frac{22660189\,x^{11}}{5109350400}-\frac{26925581\,x^{9}}{37158912}+$$
$$+\frac{34423\,x^{7}}{5160960}+\frac{148708147\,x^{5}}{49152}-\frac{139347971\,x^{3}}{4096}+\frac{27306124909\,x}{32768}+\left(\frac{1}{121651200}x^{11}-\frac{119}{5308416}x^{9}+\frac{6305}{1032192}x^{7}-\frac{10871}{61440}x^{5}+\frac{23591351}{65536}x\right)\cos 2x-$$
$$-\frac{339227}{241864704}\cos 3x+\left(-\frac{19}{279189504000}x^{17}+\frac{7}{50544000}x^{15}-\frac{449}{5391360}x^{13}+\frac{4931}{178200}x^{11}-\frac{407567}{103680}x^{9}+\frac{1978693}{8064}x^{7}-\frac{11568721}{3840}x^{5}-\right.$$
$$\left.-\frac{481775}{768}x^{3}+\frac{7681818095}{512}x\right)\sin x+\left(-\frac{7}{11059200}x^{10}+\frac{23}{49152}x^{8}-\frac{2345}{49152}x^{6}-\frac{336800989}{131072}\right)\sin 2x+\left(\frac{61}{91462481510400}x^{18}-\frac{53}{14370048000}x^{16}+\right.$$
$$\left.+\frac{487}{121927680}x^{14}-\frac{1003}{570240}x^{12}+\frac{375211}{1036800}x^{10}-\frac{3766711}{107520}x^{8}+\frac{27766757}{23040}x^{6}+\frac{323561}{1024}x^{4}-\frac{747030459}{1024}x^{2}+\frac{311360082703}{4096}\right)\cos x,$$

$$\xi_2(-4)=\frac{4453\,x^{24}}{10340806695553990656000 0}+\frac{43\,x^{20}}{4336723722240000}+\frac{19\,x^{16}}{93405312000}-\frac{5807\,x^{14}}{16605388800}+\frac{732037\,x^{12}}{15328051200}+\frac{375539\,x^{10}}{23224320}-\frac{14248211\,x^{8}}{4128768}+$$
$$+\frac{75462193\,x^{6}}{737280}+\frac{248520959\,x^{4}}{32768}-\frac{2509967113\,x^{2}}{32768}+\frac{62459811677}{65536}+\left(\frac{29}{12703122432000}x^{17}-\frac{1}{77837760}x^{15}+\frac{1775}{124540416}x^{13}-\frac{371}{57024}x^{11}+\frac{455}{324}x^{9}-\right.$$
$$\left.-\frac{2932567}{20160}x^{7}+\frac{2153027}{384}x^{5}+\frac{416353}{384}x^{3}+\frac{1623287711}{256}x\right)\cos x+\left(\frac{1}{33177600}x^{10}-\frac{17}{196608}x^{8}+\frac{18919}{737280}x^{6}-\frac{10871}{12288}x^{4}-\frac{69003427}{65536}\right)\cos 2x+$$
$$+\left(-\frac{1}{4257792000}x^{16}+\frac{23}{47174400}x^{14}-\frac{851}{2534400}x^{12}+\frac{27127}{259200}x^{10}-\frac{140881}{8960}x^{8}+\frac{2053619}{1920}x^{6}-\frac{11636873}{768}x^{4}+\frac{89064521}{256}x^{2}-\frac{13721905749}{512}\right)\sin x+$$
$$+\left(-\frac{7}{2949120}x^{9}+\frac{23}{12288}x^{7}-\frac{35189}{163840}x^{5}-\frac{3128811}{16384}\right)\sin 2x+\frac{3745}{10077696}\sin 3x,$$

$$\xi_2(-3)=\frac{103\,x^{23}}{1077167364120207360000}+\frac{269\,x^{19}}{8109673360588800}+\frac{353\,x^{15}}{523069747200}-\frac{8711\,x^{13}}{7116595200}+\frac{34927\,x^{11}}{159667200}+\frac{381349\,x^{9}}{9289728}-\frac{62139773\,x^{7}}{5160960}+$$
$$+\frac{107733893\,x^{5}}{163840}+\frac{742719539\,x^{3}}{98304}-\frac{20718002027\,x}{65536}+\left(-\frac{1}{163840}x^{8}+\frac{161}{30720}x^{6}-\frac{11739}{16384}x^{4}+\frac{48945257}{131072}\right)\sin 2x+$$
$$+\left(\frac{1}{190207180800}x^{16}-\frac{47}{1556755200}x^{14}+\frac{661}{19160064}x^{12}-\frac{1427}{86400}x^{10}+\frac{102121}{26880}x^{8}-\frac{276279}{640}x^{6}+\frac{5092197}{256}x^{4}+\frac{42931441}{256}x^{2}-\frac{2078104777}{256}\right)\cos x+$$
$$+\left(\frac{1}{13271040}x^{9}-\frac{17}{73728}x^{7}+\frac{6309}{81920}x^{5}-\frac{10871}{3072}x^{3}-\frac{1596917}{16384}x\right)\cos 2x+$$
$$+\left(-\frac{17}{31135104000}x^{15}+\frac{43}{37065600}x^{13}-\frac{1579}{1900800}x^{11}+\frac{7093}{25920}x^{9}-\frac{297701}{6720}x^{7}+\frac{6549359}{1920}x^{5}-\frac{23393327}{384}x^{3}-\frac{654217297}{256}x\right)\sin x+\frac{49}{629856}\cos 3x,$$

$$\xi_2(-2) = \frac{x^{22}}{9366672731480064000} + \frac{53\,x^{18}}{711374856192000} + \frac{131\,x^{14}}{87178291200} - \frac{689\,x^{12}}{239500800} + \frac{73621\,x^{10}}{116121600} + \frac{49321\,x^{8}}{860160} - \frac{6638971\,x^{6}}{245760} + \frac{208428941\,x^{4}}{98304} -$$

$$- \frac{942091753\,x^{2}}{32768} + \left(\frac{1}{163459296000}x^{15} - \frac{1}{27799200}x^{13} + \frac{61}{1425600}x^{11} - \frac{8071}{362880}x^{9} + \frac{37523}{6720}x^{7} - \frac{1390901}{1920}x^{5} + \frac{6005015}{128}x^{3} - \frac{247804805}{256}x\right)\cos x -$$

$$- \frac{77}{6718464}\sin 3x - \frac{37077149193}{65536} + \left(\frac{1}{10321920}x^{8} - \frac{119}{368640}x^{6} + \frac{6317}{49152}x^{4} - \frac{10871}{1024}x^{2} + \frac{6199799}{65536}\right)\cos 2x +$$

$$+ \left(-\frac{1}{1556755200}x^{14} + \frac{1}{712800}x^{12} - \frac{553}{518400}x^{10} + \frac{3859}{10080}x^{8} - \frac{49643}{720}x^{6} + \frac{205965}{32}x^{4} - \frac{8355723}{32}x^{2} + \frac{1796605139}{1024}\right)\sin x +$$

$$+ \left(-\frac{1}{122880}x^{7} + \frac{161}{20480}x^{5} - \frac{11767}{8192}x^{3} + \frac{1539447}{32768}x\right)\sin 2x,$$

$$\xi_2(-1) = \frac{x^{17}}{11856247603200} + \frac{x^{13}}{593049600} - \frac{109\,x^{11}}{31933440} + \frac{10441\,x^{9}}{11612160} + \frac{1153\,x^{7}}{80640} - \frac{573171\,x^{5}}{20480} + \frac{17790277\,x^{3}}{6144} - \frac{674393563\,x}{8192} +$$

$$+ \left(\frac{1}{1536}x^{3} - \frac{3743}{16384}x\right)\cos 2x + \left(-\frac{21\,x^{2}}{1024} + \frac{29417}{32768}\right)\sin 2x + \left(\frac{1}{1209600}x^{10} - \frac{1}{480}x^{8} + \frac{281}{320}x^{6} - \frac{15323}{128}x^{4} + \frac{696913}{128}x^{2} - \frac{21750561}{512}\right)\cos x -$$

$$- \frac{1}{1119744}\cos 3x + \left(-\frac{1}{17280}x^{9} + \frac{1}{20}x^{7} - \frac{1869}{160}x^{5} + \frac{89959}{96}x^{3} - \frac{1363255}{64}x\right)\sin x.$$

Таким образом,

$$\alpha(-n) = \sum_{i=0}^{2} \xi_i(-n), \;\; n = 1\;..\;7$$

и частные решения при этих значениях (для данного случая) принимают вид:

$$Y_1(x) = \frac{x^{17}}{11856247603200} + \frac{x^{13}}{593049600} - \frac{109\,x^{11}}{31933440} + \frac{x^{10}}{1209600} + \frac{10441\,x^{9}}{11612160} + \frac{1153\,x^{7}}{80640} + \frac{x^{6}}{320} - \frac{573171\,x^{5}}{20480} - \frac{545\,x^{4}}{384} + \frac{17791301\,x^{3}}{6144} + \frac{10625\,x^{2}}{128} -$$

$$- \frac{674393563\,x}{8192} - \frac{141825}{256} - \frac{\cos 3x}{1119744} + \left(-\frac{x^{9}}{17280} + \frac{x^{7}}{20} - \frac{1869\,x^{5}}{160} + \frac{89959\,x^{3}}{96} - \frac{7\,x^{2}}{2} - \frac{1363255\,x}{64} + 76\right)\sin x + \left(-\frac{21\,x^{2}}{1024} + \frac{29417}{32768}\right)\sin 2x +$$

$$+ \left(\frac{x^{10}}{1209600} - \frac{x^{8}}{480} + \frac{281\,x^{6}}{320} - \frac{15323\,x^{4}}{128} + \frac{x^{3}}{6} + \frac{696913\,x^{2}}{128} - 27x - \frac{21751073}{512}\right)\cos x + \left(\frac{x^{3}}{1536} - \frac{3743\,x}{16384} - \frac{1}{256}\right)\cos 2x,$$

$$Y_2(x) = \frac{x^{22}}{9366672731480064000} - \frac{x^{18}}{101624979456000} + \frac{x^{15}}{163459296000} - \frac{x^{14}}{5448643200} + \frac{257\,x^{12}}{479001600} - \frac{x^{11}}{7983360} - \frac{3421\,x^{10}}{12902400} + \frac{111131\,x^{8}}{2580480} - \frac{x^{7}}{2016} + \frac{239081\,x^{6}}{245760} +$$

$$+ \frac{43\,x^{5}}{120} - \frac{25406529\,x^{4}}{32768} - \frac{2621\,x^{3}}{64} + \frac{1755482499\,x^{2}}{32768} + \frac{60987\,x}{64} + \frac{\cos(3x)\,x}{1119744} - \frac{37077149193}{65536} +$$

$$+ \left(-\frac{x^{14}}{1556755200} + \frac{x^{12}}{712800} - \frac{523\,x^{10}}{518400} + \frac{671\,x^{8}}{2016} - \frac{x^{7}}{720} - \frac{16493\,x^{6}}{288} + \frac{7\,x^{5}}{10} + \frac{16498\,x^{4}}{3} - \frac{455\,x^{3}}{6} - \frac{15348191\,x^{2}}{64} + 1653\,x + \frac{1796597971}{1024}\right)\sin x +$$

$$+\left(-\frac{x^7}{122880}+\frac{161\,x^5}{20480}-\frac{11599\,x^3}{8192}+\frac{755015\,x}{16384}-\frac{21}{512}\right)\sin 2x-\frac{77\sin 3x}{6718464}+\left(\frac{x^{15}}{163459296000}-\frac{x^{13}}{27799200}+\frac{67\,x^{11}}{1596672}-\frac{7261\,x^9}{362880}+\frac{x^8}{40320}+\frac{15811\,x^7}{3360}-\frac{7\,x^6}{180}-\right.$$
$$\left.-\frac{36283\,x^5}{60}+\frac{209\,x^4}{24}+\frac{2654051\,x^3}{64}-449\,x^2-\frac{473858537\,x}{512}+2901\right)\cos x+\left(\frac{x^8}{10321920}-\frac{119\,x^6}{368640}+\frac{2095\,x^4}{16384}-\frac{170193\,x^2}{16384}+\frac{x}{256}+\frac{6199799}{65536}\right)\cos 2x,$$

$$Y_3(x)=-\frac{x^{23}}{8976394701001728000}+\frac{x^{19}}{1192599023616000}-\frac{x^{16}}{1162377216000}+\frac{x^{15}}{65383718400}-\frac{179\,x^{13}}{3321077760}+\frac{x^{12}}{68428800}+\frac{137\,x^{11}}{3991680}-\frac{60683\,x^9}{6635520}+\frac{x^8}{16128}+$$
$$+\frac{9881\,x^7}{10080}-\frac{671\,x^6}{11520}-\frac{732785\,x^5}{49152}+\frac{457\,x^4}{48}-\frac{119341645\,x^3}{24576}-\frac{213701\,x^2}{512}+\frac{77\sin(3x)\,x}{6718464}+\frac{8179573583\,x}{32768}+\frac{1215095}{512}+$$
$$+\left(\frac{x^{15}}{10378368000}-\frac{x^{13}}{4118400}+\frac{1181\,x^{11}}{5702400}-\frac{3055\,x^9}{36288}+\frac{x^8}{2880}+\frac{189577\,x^7}{10080}-\frac{7\,x^6}{30}-\frac{1636317\,x^5}{640}+\frac{917\,x^4}{24}+\frac{4549099\,x^3}{24}-1691\,x^2-\frac{4413467159\,x}{1024}+10338\right)\sin x+$$
$$+\left(\frac{x^8}{491520}-\frac{161\,x^6}{61440}+\frac{11627\,x^4}{16384}-\frac{3049477\,x^2}{65536}+\frac{21\,x}{512}+\frac{48945257}{131072}\right)\sin 2x+\left(-\frac{x^{16}}{1162377216000}+\frac{x^{14}}{172972800}-\frac{49\,x^{12}}{6220800}+\frac{2057\,x^{10}}{453600}-\frac{x^9}{181440}-\frac{5167\,x^8}{3840}+\right.$$
$$\left.+\frac{x^7}{90}+\frac{894283\,x^6}{3840}-\frac{419\,x^5}{120}-\frac{777615\,x^4}{32}+\frac{1823\,x^3}{6}+\frac{1141193911\,x^2}{1024}-5995\,x-\frac{2078097609}{256}\right)\cos x+$$
$$+\left(-\frac{x^9}{46448640}+\frac{17\,x^7}{184320}-\frac{6289\,x^5}{122880}+\frac{684515\,x^3}{98304}-\frac{x^2}{512}-\frac{12587467\,x}{65536}+\frac{119}{512}\right)\cos 2x+\left(-\frac{x^2}{2239488}+\frac{49}{629856}\right)\cos 3x,$$

$$Y_4(x)=\frac{x^{24}}{1216565493594587136000}-\frac{x^{20}}{16550353797120000}+\frac{x^{17}}{11856247603200}-\frac{x^{16}}{871782912000}+\frac{x^{14}}{207567360}-\frac{x^{13}}{691891200}-\frac{2809\,x^{12}}{729907200}+\frac{10211\,x^{10}}{7257600}-$$
$$-\frac{x^9}{145152}-\frac{5226017\,x^8}{20643840}+\frac{x^7}{120}+\frac{65846557\,x^6}{2949120}-\frac{2467\,x^5}{1280}-\frac{41004777\,x^4}{65536}+144\,x^3-\frac{5681013591\,x^2}{131072}-\frac{1300145\,x}{512}+$$
$$+\left(-\frac{x^9}{2949120}+\frac{23\,x^7}{40960}-\frac{34909\,x^5}{163840}+\frac{1147231\,x^3}{49152}-\frac{21\,x^2}{1024}-\frac{73975745\,x}{131072}+\frac{483}{512}\right)\sin 2x+\left(-\frac{x^{16}}{99632332800}+\frac{x^{14}}{34594560}-\frac{73\,x^{12}}{2534400}+\frac{947\,x^{10}}{67200}-\frac{x^9}{17280}-\right.$$
$$\left.-\frac{318529\,x^8}{80640}+\frac{x^7}{20}+\frac{103751\,x^6}{144}-\frac{1379\,x^5}{120}-\frac{62392385\,x^4}{768}+\frac{5111\,x^3}{6}+\frac{7742852515\,x^2}{2048}-15798\,x-\frac{13721862741}{512}\right)\sin x+\left(\frac{x^3}{6718464}-\frac{49\,x}{629856}\right)\cos 3x+$$
$$+\left(\frac{x^{17}}{11856247603200}-\frac{x^{15}}{1556755200}+\frac{233\,x^{13}}{230630400}-\frac{9167\,x^{11}}{13305600}+\frac{x^{10}}{1209600}+\frac{181957\,x^9}{725760}-\frac{x^8}{480}-\frac{56489\,x^7}{1008}+\frac{629\,x^6}{720}+\frac{2115865\,x^5}{256}-\frac{229\,x^4}{2}-\frac{1976924225\,x^3}{3072}+\right.$$
$$\left.+\frac{9089\,x^2}{2}+\frac{462673165\,x}{32}-27240\right)\cos x+\left(\frac{x^{10}}{309657600}-\frac{17\,x^8}{983040}+\frac{18871\,x^6}{1474560}-\frac{257161\,x^4}{98304}+\frac{x^3}{1536}+\frac{18975135\,x^2}{131072}-\frac{119\,x}{512}-\frac{69003427}{65536}\right)\cos 2x+$$
$$+\frac{62459811677}{65536}+\left(-\frac{77\,x^2}{13436928}+\frac{3745}{10077696}\right)\sin 3x,$$

$$Y_5(x)=-\frac{x^{25}}{1958486116582195200000}+\frac{x^{21}}{2580350614732800000}-\frac{x^{18}}{1455084933120000}+\frac{x^{17}}{12703122432000}-\frac{x^{15}}{2594592000}+\frac{x^{14}}{7925299200}+\frac{983\,x^{13}}{2656862208}-$$
$$-\frac{435899\,x^{11}}{2554675200}+\frac{x^{10}}{1451520}+\frac{984673\,x^9}{23224320}-\frac{x^8}{960}-\frac{8121157\,x^7}{1290240}+\frac{14783\,x^6}{46080}+\frac{38041521\,x^5}{65536}-\frac{219707\,x^4}{6144}-\frac{694554729\,x^3}{32768}+\frac{9975\,x^2}{8}-\frac{7847561859\,x}{65536}+$$

$$+\left(\frac{77\,x^3}{40310784}-\frac{3745\,x}{10077696}\right)\sin 3x-\frac{12564629}{2048}+\left(\frac{x^{10}}{22118400}-\frac{23\,x^8}{245760}+\frac{11641\,x^6}{245760}-\frac{6128371\,x^4}{786432}+\frac{7\,x^3}{1024}+\frac{99006233\,x^2}{262144}-\frac{483\,x}{512}-\frac{336800989}{131072}\right)\sin 2x+$$

$$+\left(-\frac{x^{11}}{2554675200}+\frac{17\,x^9}{6635520}-\frac{699\,x^7}{286720}+\frac{457591x^5}{655360}-\frac{x^4}{6144}-\frac{25362803x^3}{393216}+\frac{119x^2}{1024}+\frac{46297389x}{32768}-\frac{6293}{2048}\right)\cos 2x+\left(\frac{x^{17}}{1154829312000}-\frac{x^{15}}{353808000}+\frac{263\,x^{13}}{80870400}-\right.$$

$$\left.-\frac{4699\,x^{11}}{2494800}+\frac{x^{10}}{129600}+\frac{469321\,x^9}{725760}-\frac{x^8}{120}-\frac{255943\,x^7}{1680}+\frac{1841\,x^6}{720}+\frac{186710663\,x^5}{7680}-285x^4-\frac{11788608239\,x^3}{6144}+10629x^2+\frac{5350920209\,x}{128}-65163\right)\sin x+$$

$$+\left(-\frac{x^{18}}{145508493312000}+\frac{x^{16}}{16982784000}-\frac{839\,x^{14}}{7925299200}+\frac{10099\,x^{12}}{119750400}-\frac{x^{11}}{9979200}-\frac{89261\,x^{10}}{2419200}+\frac{x^9}{3240}+\frac{34739\,x^8}{3360}-\frac{839\,x^7}{5040}-\frac{94379201\,x^6}{46080}+\frac{3673\,x^5}{120}+\right.$$

$$\left.+\frac{993867129\,x^4}{4096}-\frac{4061\,x^3}{2}-\frac{11396376521\,x^2}{1024}+37068\,x+\frac{311359222543}{4096}\right)\cos x+\left(-\frac{x^4}{26873856}+\frac{49\,x^2}{1259712}-\frac{339227}{241864704}\right)\cos 3x,$$

$$Y_6(x)=\frac{x^{26}}{353764439584741785600000}-\frac{x^{22}}{4407845991284736000}+\frac{x^{19}}{2027418340147200}-\frac{x^{18}}{200074178304000}+\frac{x^{16}}{35582976000}-\frac{x^{15}}{100590336000}-\frac{461\,x^{14}}{14529715200}+$$

$$+\frac{1987\,x^{12}}{111476736}-\frac{x^{11}}{15966720}-\frac{1174213x^{10}}{206438400}+\frac{x^9}{8640}+\frac{3021211x^8}{2580480}-\frac{11\,x^7}{240}-\frac{663305989x^6}{3932160}+\frac{18327\,x^5}{2560}+\frac{7088916165x^4}{524288}-\frac{1282127\,x^3}{3072}-\frac{20920090371x^2}{65536}+6202x+$$

$$+\left(-\frac{x^{11}}{194641920}+\frac{23\,x^9}{1769472}-\frac{8317\,x^7}{983040}+\frac{3833909\,x^5}{1966080}-\frac{7\,x^4}{4096}-\frac{124036721\,x^3}{786432}+\frac{483\,x^2}{1024}+\frac{106039717\,x}{32768}-\frac{34965}{4096}\right)\sin 2x+$$

$$+\left(-\frac{77\,x^4}{161243136}+\frac{3745\,x^2}{20155392}-\frac{6462295}{1451188224}\right)\sin 3x-\frac{27524075747}{262144}+\left(\frac{x^{12}}{24524881920}-\frac{17\,x^{10}}{53084160}+\frac{31457\,x^8}{82575360}-\frac{858451\,x^6}{5898240}+\frac{x^5}{30720}+\frac{31750471\,x^4}{1572864}-\right.$$

$$\left.-\frac{119\,x^3}{3072}-\frac{116186129\,x^2}{131072}+\frac{6293\,x}{2048}+\frac{1529605917}{262144}\right)\cos 2x+\left(\frac{x^5}{134369280}-\frac{49\,x^3}{3779136}+\frac{339227\,x}{241864704}\right)\cos 3x+\left(\frac{x^{19}}{2027418340147200}-\frac{x^{17}}{211718707200}+\right.$$

$$+\frac{12587\,x^{15}}{1307674368000}-\frac{55141\,x^{13}}{6227020800}+\frac{x^{12}}{95800320}+\frac{2711\,x^{11}}{591360}-\frac{x^{10}}{25920}-\frac{570947\,x^9}{362880}+\frac{1049\,x^8}{40320}+\frac{507949\,x^7}{1260}-\frac{2299\,x^6}{360}-\frac{1385049587\,x^5}{20480}+\frac{15277\,x^4}{24}+$$

$$\left.+\frac{8067942521\,x^3}{1536}-23448\,x^2-\frac{450591811577\,x}{4096}+151795\right)\cos x+\left(-\frac{x^{18}}{15243746918400}+\frac{x^{16}}{4151347200}-\frac{3947\,x^{14}}{12454041600}+\frac{3209\,x^{12}}{14968800}-\frac{x^{11}}{1140480}-\right.$$

$$\left.-\frac{641953\,x^{10}}{7257600}+\frac{x^9}{864}+\frac{1054031\,x^8}{40320}-\frac{329\,x^7}{720}-\frac{673337\,x^6}{120}+\frac{8569\,x^5}{120}+\frac{16550114803\,x^4}{24576}-4453x^3-\frac{30607293891\,x^2}{1024}+83727x+\frac{1607456187563}{8192}\right)\sin x,$$

$$Y_7(x)=-\frac{x^{27}}{6980044519498943692800000}+\frac{53\,x^{23}}{4308669456480829440000}-\frac{x^{20}}{31191051386880000}+\frac{x^{19}}{3379030566912000}-\frac{x^{17}}{529296768000}+\frac{x^{16}}{1394852659200}+$$

$$+\frac{269\,x^{15}}{108972864000}-\frac{262681\,x^{13}}{159411732480}+\frac{x^{12}}{191600640}+\frac{662197\,x^{11}}{1021870080}-\frac{x^{10}}{86400}-\frac{64160111\,x^9}{371589120}+\frac{11\,x^8}{1920}+\frac{2543261\,x^7}{73728}-\frac{73301\,x^6}{61440}-\frac{17261837111\,x^5}{3932160}+\frac{1281161\,x^4}{12288}+$$

$$+\frac{31053340361\,x^3}{131072}-\frac{12666731\,x^2}{4096}-\frac{353860773021\,x}{131072}+13545+\left(\frac{x^{12}}{1946419200}-\frac{23\,x^{10}}{14745600}+\frac{4991\,x^8}{3932160}-\frac{1841453\,x^6}{4718592}+\frac{7\,x^5}{20480}+\frac{149067209\,x^4}{3145728}-\frac{161\,x^3}{1024}-\right.$$

$$\left.-\frac{533516747\,x^2}{262144}+\frac{34965\,x}{4096}+\frac{6734357987}{524288}\right)\sin 2x+\left(\frac{77\,x^5}{806215680}-\frac{3745\,x^3}{60466176}+\frac{6462295\,x}{1451188224}\right)\sin 3x+\left(-\frac{x^6}{806215680}+\frac{49\,x^4}{15116544}-\right.$$

$$-\frac{339227\,x^2}{483729408}+\frac{53845547}{4353564572}\Bigg)\cos 3x+\Bigg(-\frac{x^{20}}{31191051386880000}+\frac{x^{18}}{2931489792000}-\frac{1091\,x^{16}}{1394852659200}+\frac{61\,x^{14}}{74131200}-\frac{x^{13}}{1037836800}-\frac{476563\,x^{12}}{958003200}+$$

$$+\frac{x^{11}}{237600}+\frac{372341\,x^{10}}{1814400}-\frac{1259\,x^9}{362880}-\frac{177545\,x^8}{2688}+\frac{263\,x^7}{240}+\frac{1099514983\,x^6}{73728}-\frac{18371\,x^5}{120}-\frac{1351342165\,x^4}{768}+9454\,x^3+\frac{614184679939\,x^2}{8192}-$$

$$-188923\,x-\frac{3886163870971}{8192}\Bigg)\cos x+\Bigg(\frac{x^{19}}{222793224192000}-\frac{x^{17}}{54286848000}+\frac{1711\,x^{15}}{62270208000}-\frac{x^{13}}{46592}+\frac{x^{12}}{11404800}+\frac{33457\,x^{11}}{3193344}-\frac{x^{10}}{7200}-\frac{1377361\,x^9}{362880}+$$

$$+\frac{79\,x^8}{1152}+\frac{664721\,x^7}{630}-\frac{5149\,x^6}{360}-\frac{22027454527\,x^5}{122880}+\frac{5363\,x^4}{4}+\frac{13777782951\,x^3}{1024}-\frac{102291\,x^2}{2}-\frac{2216400445751\,x}{8192}+352716\Bigg)\sin x+$$

$$+\Bigg(-\frac{x^{13}}{265686220800}+\frac{17\,x^{11}}{486604800}-\frac{3775\,x^9}{74317824}+\frac{294433\,x^7}{11796480}-\frac{x^6}{184320}-\frac{12712713\,x^5}{2621440}+\frac{119\,x^4}{12288}+\frac{17472185\,x^3}{49152}-\frac{6293\,x^2}{4096}-\frac{1854402333\,x}{262144}+21\Bigg)\cos 2x.$$

Анализируя полученные решения, легко устанавливаем общий структурный функциональный вид искомых частных решений:

$$Y_{1+q}(x)=\sum_{k=0}^{s}\sin(kx)\sum_{i=0}^{9s-1-(13-q)k} r_{i,k}^{q}\,x^i+\sum_{k=0}^{s}\cos(kx)\sum_{i=0}^{9s-(13-q)k} g_{i,k}^{q}\,x^i+\sum_{i=0}^{9s-(6-q)} m_i^q\,x^i,\;\; q=0\,..\,6,$$

где $r_{i,k}^{q}$ — числовые коэффициенты. Они определяются путем подстановки этих частных решений в исходное ОДУ (17.8). Задача решена.

▶ **Пример 5.** Определить частные решения $Y_i(x)$, $i=1,\,2\,..\,11$ ОДУ:

$$\frac{d^{11}}{dx^{11}}\,Y(x)-\sqrt{x^3}\,Y(x)=0, \qquad (11.37)$$

которые на интервале [–10.2, 9.8] изменения независимой переменной x дают относительную ошибку:

$$\delta(Y_i(x))=\left|\frac{\dfrac{d^{11}}{dx^{11}}Y_i(x)-\sqrt{x^3}\,Y_i(x)}{\sqrt{x^3}\,Y_i(x)}\right|,\;\; i=1,\,2\,..\,11, \qquad (11.38)$$

не превышающую $10^{(-4)}$.

Р е ш е н и е. Вычисляем коэффициенты $b_k(x)$, $k=1,\,2\,..\,7$ сопряженного ОДУ:

$$b_i(x)=0,\;\; i=1,\,2\,..\,10,$$
$$b_{11}(x)=-(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Вычислим слагаемые $\xi_k(-n)$, $n=1\,..\,11$, $k=0,\,1,\,2$, пользуясь приведенной Программой:

$$\xi_0(-1)=-\frac{2048\,(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{11}}{2635284526875},\quad \xi_0(-2)=-\frac{4096}{6468425656875}\sqrt{x^3}\,x^{12},\quad \xi_0(-3)=-\frac{16384}{62528114683125}\sqrt{x^3}\,x^{13},\quad \xi_0(-4)=-\frac{32768}{447316512733125}\sqrt{x^3}\,x^{14},$$

$$\xi_0(-5)=-\frac{32768}{2108777845741875}\sqrt{x^3}\,x^{15},\quad \xi_0(-6)=-\frac{65536}{24602408200321875}\sqrt{x^3}\,x^{16},\quad \xi_0(-7)=-\frac{1048576}{273086731023572812 5}\sqrt{x^3}\,x^{17},$$

$$\xi_0(-8) = -\frac{2097152}{4385451621731492 8125}\sqrt{x^3}\,x^{18}, \quad \xi_0(-9) = -\frac{1048576}{1997816849899902 28125}\sqrt{x^3}\,x^{19}, \quad \xi_0(-10) = -\frac{2097152}{406923747848032 7278125}\sqrt{x^3}\,x^{20},$$

$$\xi_0(-11) = -\frac{8388608}{1831156865316147 27515625}\sqrt{x^3}\,x^{21},$$

$$\xi_1(-1) = -\frac{x^{25}}{2289469627775865 69140625}, \quad \xi_1(-2) = -\frac{x^{26}}{2563329631098337 66406250}, \quad \xi_1(-3) = -\frac{3338\,x^{27}}{1906732746092498471412890625},$$

$$\xi_1(-4) = -\frac{124379\,x^{28}}{2364348605154698104551984375 00}, \quad \xi_1(-5) = -\frac{2565359\,x^{29}}{21549348715552819867202371875000},$$

$$\xi_1(-6) = -\frac{4055003\,x^{30}}{1874410805435659479573224062500 00}, \quad \xi_1(-7) = -\frac{4594343419\,x^{31}}{139746697599255592499581719979687 5000},$$

$$\xi_1(-8) = -\frac{2714906861\,x^{32}}{6318981108835905052154999512125000000}, \quad \xi_1(-9) = -\frac{185459608753\,x^{33}}{3763452117241426398430840762063500000000},$$

$$\xi_1(-10) = -\frac{30984049607633\,x^{34}}{614948075957249073503599380521175900000000 0}, \quad \xi_1(-11) = -\frac{2147483648\,x^{35}}{461950177251539267956429823107854492187 5},$$

$$\xi_2(-11) = -\frac{1508759563002340347 7784}{10236410872995234580072345275880127776320073225575137353975280761718 75}\sqrt{x^3}\,x^{46},$$

$$\xi_2(-10) = -\frac{1182749898493059365 7932}{75426185379964886379480438874906278351832118504237854187186279296875}\sqrt{x^3}\,x^{45},$$

$$\xi_2(-9) = -\frac{1239477992094923984 3384}{82423713455975632277651792418939844060391687387726787396350097656 25}\sqrt{x^3}\,x^{44},$$

$$\xi_2(-8) = -\frac{283652225813002982 72}{22091587632263637705079547686663051208896190669452368640136718 75}\sqrt{x^3}\,x^{43},$$

$$\xi_2(-7) = -\frac{373584153557782016}{38877844756928020869911211577991020132076685894528332519531 25}\sqrt{x^3}\,x^{42},$$

$$\xi_2(-6) = -\frac{1996872725777792}{3233684188462681991204071151102080059888730149862060546875}\sqrt{x^3}\,x^{41},$$

$$\xi_2(-5) = -\frac{23547989251328}{710699821640149888176718934308149463711808824145507 8125}\sqrt{x^3}\,x^{40},$$

$$\xi_2(-4) = -\frac{547018961408}{3838428617084315972703508992939735366952021069335937 5}\sqrt{x^3}\,x^{39},$$

$$\xi_2(-3) = -\frac{14789208064}{3210155354789750514805802025158679518358918457031 25}\sqrt{x^3}\,x^{38},$$

$$\xi_2(-2) = -\frac{91136}{91581874935161188133326544197062090600585937 5}\sqrt{x^3}\,x^{37},$$

$$\xi_2(-1) = -\frac{2048}{190096687899601977810323718113559895019531 25}\sqrt{x^3}\,x^{36}.$$

В этом случае:

$$\alpha(-1) = -\frac{2048\sqrt{x^3}\,x^{36}}{190096687899601977810323718113559895019531 25} - \frac{x^{25}}{2289469627775865 69140625} - \frac{2048\sqrt{x^3}\,x^{11}}{2635284526875},$$

$$\alpha(-2) = -\frac{91136}{91581874935161188133326544197062090600585937 5}\sqrt{x^3}\,x^{37} - \frac{1}{2563329631098337 66406250}x^{26} - \frac{4096}{6468425656875}\sqrt{x^3}\,x^{12},$$

$$\alpha(-3) = -\frac{14789208064}{321015535478975051480580202515867951835891845703125}\sqrt{x^3}\,x^{38} - \frac{3338}{190673274609249847141289062 5}x^{27} - \frac{16384}{62528114683125}\sqrt{x^3}\,x^{13},$$

$$\alpha(-4) = -\frac{547018961408}{38384286170843159727035089929397353669520210693359375}\sqrt{x^3}\,x^{39} - \frac{124379}{23643486051546981045519843750 0}x^{28} - \frac{32768}{447316512733125}\sqrt{x^3}\,x^{14},$$

$$\alpha(-5) = -\frac{23547989251328}{7106998216401498881767189343081494637118088241455078125}\sqrt{x^3}\,x^{40} - \frac{2565359}{21549348715552819867202371875000}x^{29} - \\ - \frac{32768}{2108777845741875}\sqrt{x^3}\,x^{15},$$

$$\alpha(-6) = -\frac{1996872725777792}{323368418846268199120407115110208005988873014986206054 6875}\sqrt{x^3}\,x^{41} - \frac{4055003}{1874410805435659479573224062500 00}x^{30} - \\ - \frac{65536}{24602408200321875}\sqrt{x^3}\,x^{16},$$

$$\alpha(-7) = -\frac{373584153557782016}{388778447569280208699112115779910201320766858945283325195 3125}\sqrt{x^3}\,x^{42} - \frac{4594343419}{1397466975992555924995817199796875000}x^{31} - \\ - \frac{1048576}{273086731023572812 5}\sqrt{x^3}\,x^{17},$$

$$\alpha(-8) = -\frac{28365222581300298272}{22091587632263637705079547686663051208896190669452368640136718 75}\sqrt{x^3}\,x^{43} - \frac{2714906861}{631898110883590505215499951212500000 0}x^{32} - \\ - \frac{2097152}{4385451621731492812 5}\sqrt{x^3}\,x^{18},$$

$$\alpha(-9) = -\frac{123947799209492398433 84}{824237134559756322776517924189398440603916873877267873963500976562 5}\sqrt{x^3}\,x^{44} - \\ - \frac{185459608753}{376345211724142639843084076206350000000 0}x^{33} - \frac{1048576}{1997816849899902281 25}\sqrt{x^3}\,x^{19},$$

$$\alpha(-10) = -\frac{11827498984930593657932}{754261853799648863794804388749062783518321185042378541871862792968 75}\sqrt{x^3}\,x^{45} - \\ - \frac{30984049607633}{614948075957249073503599380521175900000000 00}x^{34} - \frac{2097152}{406923747848032727812 5}\sqrt{x^3}\,x^{20},$$

$$\alpha(-11) = -\frac{150875956300234034777 84}{102364108729952345800723452758801277763200732255751373539752807617187 5}\sqrt{x^3}\,x^{46} - \\ - \frac{2147483648}{461950177251539267956429823107854492187 5}x^{35} - \frac{8388608}{1831156865316147275156 25}\sqrt{x^3}\,x^{21}.$$

Тогда искомые решения определяются формулами

$$Y_1(x) = -\frac{2048\sqrt{x^3}\,x^{36}}{1900966878996019778103237181135598950195312 5} - \frac{x^{25}}{228946962777586569140625} - \frac{2048\sqrt{x^3}\,x^{11}}{2635284526875} - 1,$$

$$Y_2(x) = \frac{1024(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{37}}{124551349911819215861324100108004443216796875} + \frac{x^{26}}{214294357159821028715625 0} + \frac{2048(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{12}}{14230536445125} + x,$$

$$Y_3(x) = -\frac{8192(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{38}}{193092051415924842995837715799018316893769531125} - \frac{4x^{27}}{11985177261152847534595 3125} - \frac{1024(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{13}}{58955079558375} - \frac{x^2}{2},$$

$$Y_4(x) = \frac{2048(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{39}}{112794250174068161028176787324670819409830078125} + \frac{x^{28}}{509957542288268218628859375} + \frac{1024(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{14}}{609202488769875} + \frac{x^3}{6},$$

$$Y_5(x) = -\frac{1024(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{40}}{1483583388901541331119243317434331488084486328125} - \frac{x^{29}}{98591791509065188934912812 50} - \frac{256(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{15}}{1827607466309625} - \frac{x^4}{24},$$

$$Y_6(x) = \frac{512(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{41}}{21272703788230602757276599524615077005260009765625} + \frac{x^{30}}{209557451588094025064085937500} + \frac{256(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{16}}{24602408200321875} + \frac{x^5}{120},$$

$$Y_7(x) = -\frac{1024(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{42}}{130632728512230376525899974766880856570947145507 8125} - \frac{x^{31}}{4807247939430876934970131406250} - \frac{128(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{17}}{182057820682381875} - \frac{x^6}{720},$$

$$Y_8(x) = \frac{32(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{43}}{132697161447454385988117884815874583891646924804 6875} + \frac{x^{32}}{117636184870779106173386745000000} + \frac{128(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{18}}{2923634414487661875} + \frac{x^7}{5040},$$

$$Y_9(x) = -\frac{8(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{44}}{113293617702620666847063576258129993707033106738 28125} - \frac{x^{33}}{3046158050338069486174014660000000} - \frac{16(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{19}}{6308895315473375625} - \frac{x^8}{40320},$$

$$Y_{10}(x) = \frac{4(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{45}}{2021355965080201415693444957945005168975216086621 09375} + \frac{x^{34}}{82984156576290514076765393160000000} + {}$$

$$+ \frac{16(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{20}}{116263927956580779375} + \frac{x^9}{362880},$$

$$Y_{11}(x) = -\frac{16(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{46}}{300223730668180600380317353417233867786298101013 18359375} - \frac{x^{35}}{2367754467530028254907708228750000000} - {}$$

$$- \frac{8(x^3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}x^{21}}{1137364512618725015625} - \frac{x^{10}}{3628800}.$$

Непосредственное вычисление относительной ошибки для полученных частных решений (17.12) показало, что все они удовлетворяют поставленному условию (11.38). С целью экономии места приведем вычисленные значения относительной ошибки для первого частного решения $Y_1(x)$:

Первое частное решение

$\delta(-10.2) = 0.2273782166 \cdot 10^{-5},\ x = -10.2$
$\delta(-9.2) = 0.1724022946 \cdot 10^{-6},\ x = -9.2$
$\delta(-8.2) = 0.9709498590 \cdot 10^{-8},\ x = -8.2$
$\delta(-7.2) = 0.3758685307 \cdot 10^{-9},\ x = -7.2$
$\delta(-6.2) = 0.8833793128 \cdot 10^{-11},\ x = -6.2$
$\delta(-5.2) = 0.6271561989 \cdot 10^{-13},\ x = -5.2$
$\delta(-4.2) = 0.2533403403 \cdot 10^{-16},\ x = -4.2$
$\delta(-3.2) = 0.9451027597 \cdot 10^{-21},\ x = -3.2$
$\delta(-2.2) = 0.7468027920 \cdot 10^{-27},\ x = -2.2$
$\delta(-1.2) = 0.1003811413 \cdot 10^{-36},\ x = -1.2$
$\delta(-0.2) = 0.6621863738 \cdot 10^{-66},\ x = -0.2$
$\delta(0.8) = 0.2501669389 \cdot 10^{-43},\ x = 0.8$
$\delta(1.8) = 0.4027854924 \cdot 10^{-30},\ x = 1.8$
$\delta(2.8) = 0.6319030462 \cdot 10^{-23},\ x = 2.8$
$\delta(3.8) = 0.5865651511 \cdot 10^{-18},\ x = 3.8$
$\delta(4.8) = 0.3022483817 \cdot 10^{-14},\ x = 4.8$
$\delta(5.8) = 0.1233801170 \cdot 10^{-11},\ x = 5.8$
$\delta(6.8) = 0.8572904007 \cdot 10^{-10},\ x = 6.8$
$\delta(7.8) = 0.2753898252 \cdot 10^{-8},\ x = 7.8$
$\delta(8.8) = 0.5642758111 \cdot 10^{-7},\ x = 8.8$
$\delta(9.8) = 0.8247551309 \cdot 10^{-6},\ x = 9.8$

Задача решена.

▶ **Пример 6.** Определить частные решения $Y_i(x)$, $i = 1, 2 .. 13$ ОДУ:

$$\frac{d^{13}}{dx^{13}} Y(x) - e^{(4x)} Y(x) = 0, \tag{11.39}$$

которые на интервале $[-\infty, 5]$ изменения независимой переменной x дают относительную ошибку:

$$\delta(Y_i(x)) = \left| \frac{\frac{d^{13}}{dx^{13}} Y_i(x) - e^{(4x)} Y_i(x)}{e^{(4x)} Y_i(x)} \right|, \quad i = 1, 2 .. 13 \tag{11.40}$$

не превышающую $10^{(-4)}$.

Р е ш е н и е. В соответствии с формулой (14.47) вычисляем функции $b_k(x)$, $k = 1, 2 .. 13$

$$b_i(x) = 0, \quad i = 1, 2 .. 12,$$
$$b_{13}(x) = e^{(4x)}.$$

Вычислим слагаемые $\xi_k(-n)$, $n = 1 .. 13$, $k = 0, 1, 2 .. N$ пользуясь приведенной Программой:

$$\xi_0(-1) = -\frac{1}{67108864} e^{(4x)},$$
$$\xi_0(-2) = -\frac{13}{268435456} e^{(4x)},$$
$$\xi_0(-3) = -\frac{91}{1073741824} e^{(4x)},$$
$$\xi_0(-4) = -\frac{455}{4294967296} e^{(4x)},$$
$$\xi_0(-5) = -\frac{455}{4294967296} e^{(4x)},$$
$$\xi_0(-6) = -\frac{1547}{17179869184} e^{(4x)},$$
$$\xi_0(-7) = -\frac{4641}{68719476736} e^{(4x)},$$
$$\xi_0(-8) = -\frac{12597}{274877906944} e^{(4x)},$$
$$\xi_0(-9) = -\frac{62985}{2199023255552} e^{(4x)},$$
$$\xi_0(-10) = -\frac{146965}{8796093022208} e^{(4x)},$$
$$\xi_0(-11) = -\frac{323323}{35184372088832} e^{(4x)},$$
$$\xi_0(-12) = -\frac{676039}{140737488355328} e^{(4x)},$$
$$\xi_0(-13) = -\frac{676039}{281474976710656} e^{(4x)},$$
$$\xi_1(-1) = -\frac{1}{36893488147419103232} e^{(8x)},$$
$$\xi_1(-2) = -\frac{39}{295147905179352825856} e^{(8x)},$$
$$\xi_1(-3) = -\frac{793}{2361183241434822606848} e^{(8x)},$$
$$\xi_1(-4) = -\frac{11193}{18889465931478580854784} e^{(8x)},$$
$$\xi_1(-5) = -\frac{61607}{75557863725914323419136} e^{(8x)},$$
$$\xi_1(-6) = -\frac{35217}{37778931862957161709568} e^{(8x)},$$
$$\xi_1(-7) = -\frac{2227589}{2417851639229258349412352} e^{(8x)},$$
$$\xi_1(-8) = -\frac{15643563}{19342813113834066795298816} e^{(8x)},$$
$$\xi_1(-9) = -\frac{199012021}{309485009821345068724781056} e^{(8x)},$$
$$\xi_1(-10) = -\frac{1163645223}{2475880078570760549798248448} e^{(8x)},$$
$$\xi_1(-11) = -\frac{6326776729}{19807040628566084398385987584} e^{(8x)},$$
$$\xi_1(-12) = -\frac{32281129881}{158456325028528675187087900672} e^{(8x)},$$
$$\xi_1(-13) = -\frac{4641}{37778931862957161709568} e^{(8x)}.$$

В этом случае искомые частные решения принимают вид:

$$Y_1(x) = -1 - \frac{e^{(4x)}}{67108864} - \frac{e^{(8x)}}{36893488147419103232},$$

$$Y_2(x) = x + \left(\frac{x}{67108864} - \frac{13}{268435456}\right) e^{(4x)} + \left(\frac{x}{36893488147419103232} - \frac{39}{295147905179352825856}\right) e^{(8x)},$$

$$Y_3(x) = -\frac{x^2}{2} + \left(-\frac{x^2}{134217728} + \frac{13x}{268435456} - \frac{91}{1073741824}\right) e^{(4x)} + \left(-\frac{x^2}{73786976294838206464} + \frac{39x}{295147905179352825856} - \frac{793}{2361183241434822606848}\right) e^{(8x)},$$

$$Y_4(x) = \frac{x^3}{6} + \left(\frac{x^3}{402653184} - \frac{13\,x^2}{536870912} + \frac{91\,x}{1073741824} - \frac{455}{4294967296}\right)e^{(4x)} + \\ + \left(\frac{x^3}{221360928884514619392} - \frac{39\,x^2}{590295810358705651712} + \frac{793\,x}{2361183241434822606848} - \frac{11193}{188894659314785808547840}\right)e^{(8x)},$$

$$Y_5(x) = -\frac{x^4}{24} + \left(-\frac{x^4}{1610612736} + \frac{13\,x^3}{1610612736} - \frac{91\,x^2}{2147483648} + \frac{455\,x}{4294967296} - \frac{455}{4294967296}\right)e^{(4x)} + \\ + \left(-\frac{x^4}{885443715538058477568} + \frac{13\,x^3}{590295810358705651712} - \frac{793\,x^2}{4722366482869645213696} + \frac{11193\,x}{188894659314785808547840} - \frac{61607}{75557863725914323419136}\right)e^{(8x)},$$

$$Y_6(x) = \frac{x^5}{120} + \left(\frac{x^5}{8053063680} - \frac{13\,x^4}{6442450944} + \frac{91\,x^3}{6442450944} - \frac{455\,x^2}{8589934592} + \frac{455\,x}{4294967296} - \frac{1547}{17179869184}\right)e^{(4x)} + \\ + \left(\frac{x^5}{4427218577690292387840} - \frac{13\,x^4}{2361183241434822606848} + \frac{793\,x^3}{14167099448608935641088} - \frac{11193\,x^2}{37778931862957161709568} + \\ + \frac{61607\,x}{75557863725914323419136} - \frac{35217}{37778931862957161709568}\right)e^{(8x)},$$

$$Y_7(x) = -\frac{x^6}{720} + \left(-\frac{x^6}{48318382080} + \frac{13\,x^5}{32212254720} - \frac{91\,x^4}{25769803776} + \frac{455\,x^3}{25769803776} - \frac{455\,x^2}{8589934592} + \frac{1547\,x}{17179869184} - \frac{4641}{68719476736}\right)e^{(4x)} + \\ + \left(-\frac{x^6}{265633114661417543270400} + \frac{13\,x^5}{118059162071741130342400} - \frac{793\,x^4}{56668397794435742564352} + \frac{3731\,x^3}{37778931862957161709568} - \\ + \frac{61607\,x^2}{151115727451828646838272} + \frac{35217\,x}{37778931862957161709568} - \frac{2227589}{2417851639229258349412352}\right)e^{(8x)},$$

$$Y_8(x) = \frac{x^7}{5040} + \left(\frac{x^7}{338228674560} - \frac{13\,x^6}{193273528320} + \frac{91\,x^5}{128849018880} - \frac{455\,x^4}{103079215104} + \frac{455\,x^3}{25769803776} - \frac{1547\,x^2}{34359738368} + \frac{4641\,x}{68719476736} - \frac{12597}{274877906944}\right)e^{(4x)} + \\ + \left(\frac{x^7}{185943180262992280289280} - \frac{13\,x^6}{708354972430446782054400} + \frac{793\,x^5}{283341988972178712821760} - \frac{3731\,x^4}{151115727451828646838272} + \\ + \frac{61607\,x^3}{453347182355485940514816} - \frac{35217\,x^2}{75557863725914323419136} + \frac{2227589\,x}{2417851639229258349412352} - \frac{15643563}{19342813113834066795298816}\right)e^{(8x)},$$

$$Y_9(x) = -\frac{x^8}{40320} + \left(-\frac{x^8}{2705829396480} + \frac{13\,x^7}{1352914698240} - \frac{91\,x^6}{773094113280} + \frac{91\,x^5}{103079215104} - \frac{455\,x^4}{103079215104} + \frac{1547\,x^3}{103079215104} - \frac{4641\,x^2}{137438953472} + \\ + \frac{12597\,x}{274877906944} - \frac{62985}{2199023255552}\right)e^{(4x)} + \left(-\frac{x^8}{148754544210393824231424 0} + \frac{13\,x^7}{495848480701312747438080} - \frac{793\,x^6}{170005193383307227693056 0} + \\ + \frac{3731\,x^5}{755578637259143234191360} - \frac{61607\,x^4}{181338872942194376205926 4} + \frac{11739\,x^3}{75557863725914323419136} - \frac{2227589\,x^2}{483570327845851669882470 4} + \\ + \frac{15643563\,x}{19342813113834066795298816} - \frac{199012021}{309485009821345068724781056}\right)e^{(8x)},$$

$$
\begin{aligned}
Y_{10}(x) = {} & \frac{x^{9}}{362880} + \Biggl(\frac{x^{9}}{24352464568320} - \frac{13\,x^{8}}{10823317585920} + \frac{13\,x^{7}}{773094113280} - \frac{91\,x^{6}}{618475290624} + \frac{91\,x^{5}}{103079215104} - \frac{1547\,x^{4}}{412316860416} + \frac{1547\,x^{3}}{137438953472} - \\
& - \frac{12597\,x^{2}}{549755813888} + \frac{62985\,x}{2199023255552} - \frac{146965}{8796093022208} \Biggr) e^{(4x)} + \Biggl(\frac{x^{9}}{133879089789354441808281600} - \frac{13\,x^{8}}{3966787845610501979504640} + \\
& + \frac{793\,x^{7}}{1190036353683150593851392} - \frac{3731\,x^{6}}{453347182355485940514816} + \frac{61607\,x^{5}}{906694364710971881029632} - \frac{11739\,x^{4}}{30223145490365729367654\,4} + \\
& + \frac{2227589\,x^{3}}{14507109835375550096474112} - \frac{15643563\,x^{2}}{38685626227668133590597632} + \frac{199012021\,x}{309485009821345068724781056} - \frac{1163645223}{2475880078570760549798248448} \Biggr) e^{(8x)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_{11}(x) = {} & -\frac{x^{10}}{3628800} + \Biggl(-\frac{x^{10}}{243524645683200} + \frac{13\,x^{9}}{97409858273280} - \frac{13\,x^{8}}{6184752906240} + \frac{13\,x^{7}}{618475290624} - \frac{91\,x^{6}}{618475290624} + \frac{1547\,x^{5}}{2061584302080} - \frac{1547\,x^{4}}{549755813888} + \\
& + \frac{4199\,x^{3}}{549755813888} - \frac{62985\,x^{2}}{4398046511104} + \frac{146965\,x}{8796093022208} - \frac{323323}{35184372088832} \Biggr) e^{(4x)} + \Biggl(-\frac{x^{10}}{13387908978935444180828160\,0} + \frac{13\,x^{9}}{357010906104945178155417\,60} - \\
& - \frac{793\,x^{8}}{9520290829465204750811136\,0} + \frac{533\,x^{7}}{453347182355485940514816\,0} - \frac{61607\,x^{6}}{544016618826583128617779\,20} + \frac{11739\,x^{5}}{151115727451828646838272\,0} - \\
& - \frac{2227589\,x^{4}}{5802843934150220038589644\,8} + \frac{5214521\,x^{3}}{38685626227668133590597632} - \frac{199012021\,x^{2}}{618970019642690137449562112} + \\
& + \frac{1163645223\,x}{2475880078570760549798248448} - \frac{6326776729}{19807040628566084398385987584} \Biggr) e^{(8x)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_{12}(x) = {} & \frac{x^{11}}{39916800} + \Biggl(\frac{x^{11}}{2678771102515200} - \frac{13\,x^{10}}{974098582732800} + \frac{13\,x^{9}}{55662776156160} - \frac{13\,x^{8}}{4947802324992} + \frac{13\,x^{7}}{618475290624} - \frac{1547\,x^{6}}{12369505812480} + \\
& + \frac{1547\,x^{5}}{24748779069440} - \frac{4199\,x^{4}}{2199023255552} + \frac{20995\,x^{3}}{4398046511104} - \frac{146965\,x^{2}}{17592186044416} + \frac{323323\,x}{35184372088832} - \frac{676039}{140737488355328} \Biggr) e^{(4x)} + \\
& + \Biggl(\frac{x^{11}}{147266998768289885989109760\,0} - \frac{13\,x^{10}}{357010906104945178155417600} + \frac{793\,x^{9}}{8568261746518684275730022\,40} - \frac{533\,x^{8}}{362677745884388752411852\,80} + \\
& + \frac{8801\,x^{7}}{544016618826583128617779\,20} - \frac{3913\,x^{6}}{302231454903657293676544\,0} + \frac{2227589\,x^{5}}{2901421967075110019294822\,40} - \frac{5214521\,x^{4}}{15474250491067253436239052\,8} + \\
& + \frac{199012021\,x^{3}}{185691005892807041234868633\,6} - \frac{1163645223\,x^{2}}{4951760157141521099596496896} + \frac{6326776729\,x}{19807040628566084398385987584} - \frac{32281129881}{158456325028528675187087900672} \Biggr) e^{(8x)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_{13}(x) = {} & -\frac{x^{12}}{479001600} + \Biggl(-\frac{x^{12}}{32145253230182400} + \frac{13\,x^{11}}{1071508441006080\,0} - \frac{13\,x^{10}}{556627761561600} + \frac{13\,x^{9}}{44530220924928} - \frac{13\,x^{8}}{4947802324992} + \frac{221\,x^{7}}{12369505812480} - \\
& - \frac{1547\,x^{6}}{16492674416640} + \frac{4199\,x^{5}}{10995116277760} - \frac{20995\,x^{4}}{17592186044416} + \frac{146965\,x^{3}}{52776558133248} - \frac{323323\,x^{2}}{70368744177664} + \frac{676039\,x}{140737488355328} - \frac{676039}{281474976710656} \Biggr) e^{(4x)} + \\
& + \Biggl(-\frac{x^{12}}{1767203985219478631869317120\,0} + \frac{13\,x^{11}}{392711996715439695970959360\,0} - \frac{793\,x^{10}}{856826174651868427573002240\,0} + \frac{533\,x^{9}}{3264099712959498771706675\,20} - \\
& - \frac{8801\,x^{8}}{4352132950612665028942233\,60} + \frac{559\,x^{7}}{302231454903657293676544\,0} - \frac{2227589\,x^{6}}{17408531802450660115768934\,40} + \frac{5214521\,x^{5}}{77371252455336267181195264\,0} -
\end{aligned}
$$

$$- \frac{199012021\,x^4}{742764023571228164939474534 4} + \frac{387881741\,x^3}{4951760157141521099596496896} - \frac{6326776729\,x^2}{39614081257132168796771975168} +$$

$$+ \frac{32281129881\,x}{158456325028528675187087900672} - \frac{4641}{37778931862957161709568}\Bigg) e^{(8x)},$$

Непосредственное вычисление относительной ошибки для полученных частных решений показало, что все они удовлетворяют поставленному условию (11.40). С целью экономии места приведем вычисленные значения относительной ошибки для первого частного решения $Y_1(x)$:

$\delta(-10.2) = 0.9876897758 \cdot 10^{-55},\ x = -10.2$
$\delta(-9.2) = 0.2944261721 \cdot 10^{-51},\ x = -9.2$
$\delta(-8.2) = 0.8776720523 \cdot 10^{-48},\ x = -8.2$
$\delta(-7.2) = 0.2616303513 \cdot 10^{-44},\ x = -7.2$
$\delta(-6.2) = 0.7799090840 \cdot 10^{-41},\ x = -6.2$
$\delta(-5.2) = 0.2324876217 \cdot 10^{-37},\ x = -5.2$
$\delta(-4.2) = 0.6930358324 \cdot 10^{-34},\ x = -4.2$
$\delta(-3.2) = 0.2065910701 \cdot 10^{-30},\ x = -3.2$
$\delta(-2.2) = 0.6158393020 \cdot 10^{-27},\ x = -2.2$
$\delta(-1.2) = 0.1835791080 \cdot 10^{-23},\ x = -1.2$
$\delta(-0.2) = 0.5472416047 \cdot 10^{-20},\ x = -0.2$
$\delta(0.8) = 0.1631303644 \cdot 10^{-16},\ x = 0.8$
$\delta(1.8) = 0.4862752358 \cdot 10^{-13},\ x = 1.8$
$\delta(2.8) = 0.1448017033 \cdot 10^{-9},\ x = 2.8$
$\delta(3.8) = 0.4078519634 \cdot 10^{-6},\ x = 3.8$
$\delta(4.8) = 0.0003031082538,\ x = 4.8$
$\delta(5.8) = 0.02107510366,\ x = 5.8$

Задача решена.

Выводы. Возникает вопрос: как наилучшим образом использовать преобразование переменных, чтобы максимально облегчить процесс решения ОДУ? Ответ на этот вопрос однозначен: необходимо преобразованием переменных избавляться от производных порядка $\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}Y(x)$. Опыт решения многочисленных линейных ОДУ показал, что отсутствие этой производной существенно ускоряет процесс определения искомого решения с заданной точностью. Например: пусть задано линейное ОДУ:

$$\frac{d^2}{dx^2}Y(x) - x\frac{d}{dx}Y(x) - x^2\,Y(x) = 0.$$

На интервале [–10.2; 10.2] изменения независимой переменной x, используя только первые пять слагаемых $\xi_i(-k)$, $k = 1, 2$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, вычислим частные решения $Y_i(x)$, $i = 1, 2$ и их относительные ошибки $\delta(x_i)$ в каждой точке заданного интервала.

$$Y_1(x) = -\frac{x^{20}}{8089804800} - \frac{5267\,x^{18}}{555761606400} - \frac{54287\,x^{16}}{186810624000} - \frac{199\,x^{14}}{43243200} - \frac{571\,x^{12}}{11975040} - \frac{41\,x^{10}}{113400} - \frac{3\,x^8}{1120} - \frac{x^6}{90} - \frac{x^4}{12} - 1$$

$\delta(-1.2) = 0.0008710744155,\ x = -1.2$
$\delta(-0.2) = 0.1002411666 \cdot 10^{-10},\ x = -0.2$
$\delta(0.8) = 0.00001304234665,\ x = 0.8$
$\delta(1.8) = 0.04092510073,\ x = 1.8$

$$Y_2(x) = \frac{x^{21}}{25662873600} + \frac{182177\,x^{19}}{49691625984000} + \frac{41257\,x^{17}}{296406190080} + \frac{9979\,x^{15}}{3592512000} + \frac{9781\,x^{13}}{283046400} + \frac{41\,x^{11}}{134400} + \frac{119\,x^9}{51840} + \frac{13\,x^7}{1008} + \frac{3\,x^5}{40} + \frac{x^3}{6} + x$$

$\delta(-1.2) = 0.001779916264,\ x = -1.2$
$\delta(-0.2) = 0.6797179871 \cdot 10^{-9},\ x = -0.2$
$\delta(0.8) = 0.00005683642779,\ x = 0.8$
$\delta(1.8) = 0.04755209583,\ x = 1.8$

Производя подстановку

$$Y(x) = Z(x)\,e^{\left(\frac{x^2}{4}\right)},$$

приведем это ОДУ к виду:

$$\frac{d^2}{dx^2}Z(x) = \frac{Z(x)\,(-2 + 5x^2)}{4}.$$

Используя ту же программу, вычислим искомые частные решения $Z_i(x)$, $i = 1, 2$, используя также только первые пять слагаемых:

$$Z_1(x) = -\frac{125\,x^{20}}{331358404608} + \frac{1007525\,x^{18}}{182111963185152} - \frac{369071\,x^{16}}{2678117105664} + \frac{150511\,x^{14}}{111588212736} - \frac{1769\,x^{12}}{68124672} + \frac{21601\,x^{10}}{116121600} - \frac{1721\,x^{8}}{645120} + \frac{71\,x^{6}}{5760} - \frac{11\,x^{4}}{96} + \frac{x^{2}}{4} - 1$$

$\delta(-3.2) = 0.0084184799,\ x = -3.2$

$\delta(-2.2) = 0.000344861968,\ x = -2.2$

$\delta(-1.2) = 0.9886333 \cdot 10^{-10},\ x = -1.2$

$\delta(-0.2) = 0.7689107508 \cdot 10^{-15},\ x = -0.2$

$\delta(0.8) = 0.1511631525 \cdot 10^{-10},\ x = 0.8$

$\delta(1.8) = 0.578832713 \cdot 10^{-5},\ x = 1.8$

$\delta(2.8) = 0.00245727593,\ x = 2.8$

$$Z_2(x) = \frac{125\,x^{21}}{1051151302656} - \frac{3593285\,x^{19}}{3460127300517888} + \frac{655873\,x^{17}}{15175996932096} - \frac{456691\,x^{15}}{1673823191040} + \frac{24709\,x^{13}}{2656862208} - \frac{4891\,x^{11}}{116121600} + \frac{6641\,x^{9}}{5806080} - \frac{131\,x^{7}}{40320} + \frac{31\,x^{5}}{480} - \frac{x^{3}}{12} + x$$

$\delta(-3.2) = 0.02330519447,\ x = -3.2$

$\delta(-2.2) = 0.0000225601438,\ x = -2.2$

$\delta(-1.2) = 0.32505420 \cdot 10^{-10},\ x = -1.2$

$\delta(-0.2) = 0.6828845697 \cdot 10^{-16},\ x = -0.2$

$\delta(0.8) = 0.619307551 \cdot 10^{-12},\ x = 0.8$

$\delta(1.8) = 0.24388445 \cdot 10^{-6},\ x = 1.8$

$\delta(2.8) = 0.00331525789,\ x = 2.8$

Как видим, в первом случае относительная ошибка меньше 0.1 только на интервале [–1.2, 1.8], в то время как во втором случае она находится в интервале [–3.2, 2.8], при этом преобразованное уравнение дает более низкую относительную ошибку для искомых решений, что и подтверждает сделанный вывод. Следовательно, это позволяет получить с более высокой точностью требуемое решение при меньшем числе вычислений.

12. НЕОДНОРОДНОЕ ОДУ

Общепринятые способы определения частного решения неоднородного ОДУ

$$\frac{d^m}{dx^m} Y(x) + \sum_{p=1}^{m} b_p(x) \frac{d^{m-p}}{dx^{m-p}} Y(x) = F(x) \qquad (12.1)$$

не отличаются простотой и совершенством, так как для определения частного решения неоднородного ОДУ в общем случае требуется знание вронскиана, т. е. всех частных решений однородного ОДУ. Частное решение также определяется через специальные функции, например функцию Грина, или иными методами [Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: изд. фирма «Физико-математическая литература», 2001. — 576 с.].

Фактически, для того чтобы выписать формулу для частного решения неоднородного ОДУ порядка m, достаточно знания $m - 1$ частных решений, что избавляет от необходимости вычисления (пусть и по известной формуле) еще одного решения. Так выше была доказана теорема, что неоднородное ОДУ второго порядка (5.28) имеет частное решение, определяемое формулой (5.29), т. е. определяет искомое частное решение на основе знания всего одного частного решения однородного ОДУ в формульном варианте.

Изложим общий подход к нахождению формул для частного решения линейного неоднородного ОДУ на примере ОДУ третьего порядка. Для этого докажем **ТЕОРЕМУ**:

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ — независимые частные решения однородного ОДУ третьего порядка:

$$\frac{d^3}{dx^3} Y(x) + b_1(x) \frac{d^2}{dx^2} Y(x) + b_2(x) \frac{d}{dx} Y(x) + b_3(x) Y(x) = 0, \qquad (12.2)$$

т. е. имеют место равенства

$$\boldsymbol{\frac{d^3}{dx^3} y_i(x) + b_1(x) \frac{d^2}{dx^2} y_i(x) + b_2(x) \frac{d}{dx} y_i(x) + b_3(x) y_i(x) = 0, \ \ i = 1, 2,}$$

тогда частное решение неоднородного ОДУ

$$\boldsymbol{\frac{d^3}{dx^3} Y(x) + b_1(x) \frac{d^2}{dx^2} Y(x) + b_2(x) \frac{d}{dx} Y(x) + b_3(x) Y(x) = F(x)} \qquad \textbf{(12.3)}$$

определяется формулой

$$\boldsymbol{Y(x) = y_2(x) \int \frac{d}{dx}\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right) \int \frac{e^{\left(-\int b_1(x)\,dx\right)}}{\frac{d}{dx}\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right)^2 y_2(x)^3} \int e^{\left(-\int b_1(x)\,dx\right)} \frac{d}{dx}\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right) y_2(x)^2 F(x)\,dx\,dx\,dx.} \qquad \textbf{(12.4)}$$

Доказательство. Частное решение неоднородного ОДУ (12.3) будем искать в виде:

$$y = B(x) \int Z(x) \int V(x) \int m(x) F(x)\,dx\,dx\,dx, \qquad (12.5)$$

где $B(x)$, $Z(x)$, $V(x)$, $m(x)$ — искомые функции.

Подставляя (12.5) в неоднородное ОДУ (12.3), получим после преобразований:

$$\left(b_1(x) \frac{d^2}{dx^2} B(x) + b_2(x) \frac{d}{dx} B(x) + \frac{d^3}{dx^3} B(x) + b_3(x) B(x)\right) \int Z(x) \int V(x) \int m(x) F(x)\,dx\,dx\,dx +$$

$$+ \left(3 \frac{d^2}{dx^2}(B(x))\, Z(x) + B(x) \frac{d^2}{dx^2} Z(x) + 2 b_1(x) \frac{d}{dx}(B(x))\, Z(x) + b_1(x) B(x) \frac{d}{dx} Z(x) + 3 \frac{d}{dx}(B(x)) \frac{d}{dx} Z(x) + B(x) Z(x) b_2(x)\right) \int V(x) \int m(x) F(x)\,dx\,dx +$$

$$+ \left(B(x) Z(x) \frac{d}{dx} V(x) + 3 \frac{d}{dx}(B(x))\, Z(x) V(x) + B(x) Z(x) b_1(x) V(x) + 2 \frac{d}{dx}(Z(x))\, B(x) V(x)\right) \int m(x) F(x)\,dx +$$

$$+ B(x) Z(x) V(x) m(x) F(x) = F(x).$$

Отсюда следует необходимость выполнения равенств:

$$\frac{d^3}{dx^3} B(x) + b_1(x) \frac{d^2}{dx^2} B(x) + b_2(x) \frac{d}{dx} B(x) + b_3(x) B(x) = 0, \qquad (12.6)$$

$$3 \frac{d^2}{dx^2}(B(x))\, Z(x) + B(x) \frac{d^2}{dx^2} Z(x) + 2 b_1(x) \frac{d}{dx}(B(x))\, Z(x) + b_1(x) B(x) \frac{d}{dx} Z(x) + 3 \frac{d}{dx}(B(x)) \frac{d}{dx} Z(x) + B(x) Z(x) b_2(x) = 0, \qquad (12.7)$$

$$B(x) Z(x) \frac{d}{dx} V(x) + 3 \frac{d}{dx}(B(x))\, Z(x) V(x) + B(x) Z(x) b_1(x) V(x) + 2 \frac{d}{dx}(Z(x))\, B(x) V(x) = 0, \qquad (12.8)$$

$$B(x) Z(x) V(x) m(x) = 1. \qquad (12.9)$$

Очевидно, что функция $B(x)$ является решением однородного ОДУ (12.2), т. е. $B(x) = y_1(x)$. В этом случае равенство (12.6) данной системы выполняется тождественно. Второе равенство, т. е. (12.7) выполняется, если принять

$$Z(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right), \tag{12.10}$$

где $y_2(x)$ — второе частное решение ОДУ (12.2).

В этом случае равенство (12.7) выполнено тождественно, а из (12.8) получаем:

$$V(x) = \frac{C_1}{y_1(x)^3\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)\right)^2 e^{\left(\int b_1(x)\,dx\right)}}, \tag{12.11}$$

C_1 — произвольная постоянная.

Благодаря равенствам (12.10) и (12.11) из (12.9) получим:

$$m(x) = \frac{e^{\left(\int b_1(x)\,dx\right)}\left(\left(\frac{d}{dx}y_2(x)\right)y_1(x) - y_2(x)\frac{d}{dx}y_1(x)\right)}{C_1}.$$

Подставляя установленные значения функций $B(x)$, $Z(x)$, $V(x)$, $m(x)$, $F(x)$ в (12.5), получим (12.4). Теорема доказана.

Совершенно аналогичным образом можно получить новые формульные представления для частного решения неоднородного ОДУ, в принципе, для уравнения любого порядка.

Совершенно аналогичным образом доказывается **ТЕОРЕМА: Неоднородное ОДУ четвертого порядка**

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}y + b_1(x)\frac{\partial^3}{\partial x^3}y + b_2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}y + b_3(x)\frac{\partial}{\partial x}y + b_4(x)\,y = F(x)$$

имеет частное решение

$$y = y_3\int\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_2}{y_3}\right)\int\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_1}{y_2}\right)\int\frac{e^{\left(\int b_1\,dx\right)}\int e^{\left(\int b_1\,dx\right)}y_3^3\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_1}{y_2}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_2}{y_3}\right)\right)^2 F(x)\,dx}{\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_1}{y_2}\right)\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_2}{y_3}\right)\right)^3 y_3^4}\,dx\,dx\,dx,$$

здесь y_1, y_2, y_3 — частные решения однородного ОДУ

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}y + b_1(x)\frac{\partial^3}{\partial x^3}y + b_2(x)\frac{\partial^3}{\partial x^3}y + b_3(x)\frac{\partial}{\partial x}y + b_4(x)\,y = 0.$$

ТЕОРЕМА. Неоднородное ОДУ пятого порядка

$$\frac{\partial^5}{\partial x^5}y + b_1(x)\frac{\partial^4}{\partial x^4}y + b_2(x)\frac{\partial^3}{\partial x^3}y + b_3(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}y + b_4(x)\frac{\partial}{\partial x}y + b_5(x)\,y = F(x)$$

имеет частное решение

$$y = y_4 \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_3}{y_4}\right) \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_2}{y_3}\right) \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_1}{y_2}\right) \int \frac{e^{\left(\int b_1\,dx\right)} \int e^{\left(\int b_1\,dx\right)} y_4^4 \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_1}{y_2}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_2}{y_3}\right)\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_3}{y_4}\right)\right)^3 F(x)\,dx}{\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_1}{y_2}\right)\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_2}{y_3}\right)\right)^3 \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_3}{y_4}\right)\right)^4 y_4^5}\,dx\,dx\,dx\,dx.$$

Очевидно, пользуясь приведенными формулами, легко по аналогии выписать общую формулу для неоднородного ОДУ (12.1):

Утверждение. **Частное решение неоднородного линейного ОДУ**

$$\frac{d^m}{dx^m} Y(x) + \sum_{s=1}^{m} b_s(x) \frac{d^{m-s}}{dx^{m-s}} Y(x) = F(x)$$

определяется формулой

$$Y(x) = y_{m-1} \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_{m-2}}{y_{m-1}}\right) \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_{m-3}}{y_{m-2}}\right) \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_{m-4}}{y_{m-3}}\right) \ldots$$

$$\ldots \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_2}{y_3}\right) \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_1}{y_2}\right) \int \frac{e^{\left(\int b_1(x)\,dx\right)} \int e^{\left(\int b_1(x)\,dx\right)} \left(\prod_{i=0}^{m-3} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_{i+1}}{y_{i+2}}\right)\right)^{(1+i)}\right) \left(y_{m-1}\right)^{m-1} F(x)\,dx}{\left(\prod_{i=0}^{m-3} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_{i+1}}{y_{i+2}}\right)\right)^{(2+i)}\right) \left(y_{m-1}\right)^{m}}\,dx\,dx\,dx \ldots dx\,dx\,dx,$$

где $y = \{y_i, i = 1, 2 \,..\, m-1\}$ являются частными решениями однородного линейного ОДУ:

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} y + \sum_{s=1}^{m} b_s(x) \frac{\partial^{m-s}}{\partial x^{m-s}} y = 0.$$

Как видим, в отличие от общепринятого подхода частное решение неоднородного линейного ОДУ требует для своего нахождения только $m - 1$ частных решений.

Список литературы

1. Большой энциклопедический словарь. Математика. Научное изд. «Большая Российская энциклопедия». — М., 1998.
2. *Есипов А. А., Сазонов Л. И., Юдович В. И.* Дифференциальные уравнения. — М.: «Вузовская книга», 2001.
3. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: «Физико-математическая литература», 2001.
5. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — СПб.: «Лань», 2003.
6. Математическая энциклопедия. М.: Изд. «Советская Энциклопедия», 1984. — Т. 1—5.
7. *Незбайло Т. Г.* Теория нахождения корней алгебраических уравнений (в символьном представлении). — СПб.: КОРОНА-Век, 2007.
8. *Пантелеев А. В., Якимова А. С., Босов А. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах: учеб. пособие. — М.: Высшая школа, 2001.