Р. З. Муратов

МУЛЬТИПОЛИ И ПОЛЯ ЭЛЛИПСОИДА

МИСиС

2015

УДК 517.985:534.2.537
ББК 22.3
М91

Муратов Р.З.

М91 Мультиполи и поля эллипсоида. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2015. – 524 с.

Монография посвящена теории стационарных и квазистационарных полей эллипсоидального тела — проблематике, востребованной многими физическими и техническими приложениями. Изложение материала построено на исключительном использовании декартовых координат. Значительная часть монографии содержит сведения, не излагавшиеся прежде в книжной литературе. Рассмотрены: внешние и внутренние объемные и поверхностные (простой и двойной слой) потенциалы эллипсоида, эллиптического цилиндра и эллиптического диска для степенны́х распределений заряда; мультипольные представления электростатического и скалярного магнитного потенциалов эллипсоида с полиномиальными плотностями заряда или тока соответственно; задачи об эллипсоиде в различных внешних неоднородных статических полях; задачи об эквивалентных источниках; низкочастотное рассеяние акустических и электромагнитных полей на эллипсоиде и эллиптическом диске.

Книга адресована физикам, специализирующимся в акустике, астрофизике, гидродинамике, радиофизике, теории упругости, электродинамике, теории дифракции, теории ускорителей и др.

УДК 517.985:534.2.537
ББК 22.3

ISBN 978-5-600-01057-4

Оглавление

Предисловие

Об эллипсоиде до́лжно говорить... гиперболами.

Предлагаемая монография посвящена аналитической теории статических и низкочастотных полей эллипсоидального тела. По сравнению с нашей первой книгой [518], вышедшей в 1976 году и рассматривавшей только ньютоновы (кулоновы) потенциалы *неоднородного* эллипсоида, в данной книге рассматриваются и поля эллипсоида, находящегося во внешнем *неоднородном* статическом (электрическом) или квазистатическом (акустическом или электромагнитном) поле.

Сразу отметим, что на протяжении всей книги изложение построено на использовании декартовых (а не криволинейных эллипсоидальных[1]) координат. Мотивы такого выбора пояснены во Введении.

Книга состоит из Введения, пяти частей и Приложений. В первых трех частях речь идет о стационарных полях и их источниках (зарядах и электрических токах), причем описывающие их формулы являются точными. В двух последних частях рассматриваются низкочастотные поля, которые описываются в квазистатическом приближении. Важные вспомогательные вопросы математического и физического характера, а также таблицы размагничивающих факторов эллипсоида вынесены в Приложения. Довольно большой (не претендующий на полноту) список литературы, который построен по алфавитному принципу, включает и работы, выполненные в эллипсоидальных координатах, и позволяет, по мнению автора, составить представление о вкладе в данную проблематику представителей различных эпох и стран, а также о научно-технических мотивах, побудивших их к участию в этой деятельности. Несмотря на наличие частей, в книге принята сплошная нумерация глав и параграфов. Номер формулы «привязан» к номеру параграфа.

Первая часть представляет собой существенно переработанный и обновленный материал книги [518]. Поскольку ньютоновы потенциалы и квазистатические поля эллипсоида выражаются в конечном счете через так называемые *внутренние и внешние потенциальные факторы эллипсоида*, являющиеся эллиптическими интегралами, то изложение начинается с установления свойств этих факторов. Сюда относятся, в частности, рекуррентные и асимптотические формулы, которые даны как для трехосного эллип-

[1] Как известно, координатными поверхностями в этом случае являются семейства софокусных эллипсоидов и однополостных и двуполостных гиперболоидов. Учитывая это, нетрудно уловить игру слов, присутствующую в эпиграфе. Использованный в качестве эпиграфа афоризм принадлежит физику (и музыкальному композитору) Ю. В. Богомолову, который, как и автор книги, является учеником М. Л. Левина (см. [526]).

соида, так и для его вырожденных (сфероид) и предельных (эллиптический цилиндр, эллиптический диск) форм. Что касается непосредственно самих потенциалов эллипсоида, то основное внимание уделено тем из них, которые создаются степенны́ми объемными ($\varrho \sim x^\alpha y^\beta z^\gamma$) или соответствующими им поверхностными распределениями источников. Такие потенциалы мы называем *феррерсовыми* по имени их первого исследователя. Феррерсовы потенциалы эллипсоида объемных, поверхностных (простой слой) и поверхностных (двойной слой) распределений источников рассматриваются здесь по отдельности: потенциалам каждого из указанных трех видов распределений отведена самостоятельная глава. Попутно в изложение включены и потенциалы предельных форм эллипсоида, причем в случае эллиптического диска даны даже формулы для потенциалов, обусловленных распределениями квадруполей.

Вторая часть книги имеет дело с потенциалами стационарных полей в точках, находящихся вне ограниченной области пространства, где распределены источники. Как известно, такие потенциалы (гравитационный, скалярный электростатический или псевдоскалярный магнитный) можно описывать их мультипольными разложениями. Привлекательность любых формул, выраженных в терминах мультипольных моментов, связана с универсальностью[1] этих формул. В данной книге, благодаря определению мультипольных моментов на основе *оператора Ефимова*, указанные разложения выражены не, как обычно практикуется, в сферических координатах и функциях, а приводятся в тензорном виде. Однако наиболее любопытным результатом, впервые излагаемом в книжной литературе, является *теория мультипольного представления потенциалов эллипсоида*. Оказывается, что помимо мультипольного разложения потенциала, которое в случае эллипсоида всегда дается бесконечным рядом, для *полиномиальных распределений*[2] источников существует точная формула записи наружного потенциала эллипсоида, выраженная в терминах конечного (зависящего от степени полинома) числа мультипольных моментов, а значит, состоящая из конечного числа слагаемых. При вырождении эллипсоида в шар эта формула совпадает с мультипольным разложением потенциала шара, которое, как известно, в случае полиномиальных распределений источников дается конечным рядом.

Третья часть монографии — это демонстрация на примере стационарных задач об эллипсоиде того, как «работает» теория, представленная в первых двух частях. Во-первых, здесь рассматривается в разных вариантах задача о диэлектрическом эллипсоиде в неоднородном внешнем статическом поле. Внешнее поле — это невозмущенное поле первичных источников (зарядов). Поэтому заряды могут находиться не только вне, но и внутри тела (случай заряженного эллипсоида). Такие задачи, равно как и многие задачи последующих частей книги, удобно решать, обращаясь к интегральным уравнениям электродинамики, большим проповедником и энтузиастом использования которых был Н. А. Хижняк [561,562]. Решения некоторых из представленных электростатических задач простой заменой электрических величин соответствующими магнитными величинами дают решения анало-

[1] Универсальность, правда, не включает в себя автоматического предельного перехода от трехмерных формул к двумерным, поскольку соответствующие мультипольные моменты вводятся по-разному (см. § 67).

[2] В частности, для рассмотренных в первой части книги степенны́х распределений.

гичных магнитостатических задач[1]. Во-вторых, в этой части применительно к эллипсоиду впервые рассмотрен круг задач (выдвинутых в свое время Я. И. Френкелем [101, 102]) об *адекватных*, или *эквивалентных*, *источниках*. Так называют неодинаковые источники, создающие совпадающие наружные поля. Решение указанных задач (для зарядов и токов в эллипсоиде) обосновывается и строится на основе теории, изложенной во второй части монографии.

Четвертая часть книги посвящена рассеянию звука. В ней дан вывод интегральных уравнений акустики неоднородной идеальной жидкости, рассмотрены их модификации, соответствующие различным условиям на границе объемного рассеивателя (звукопроницаемое, акустически жесткое и акустически мягкое тела) и плоского рассеивателя (акустически жесткий и акустически мягкий диски). Если, как в нашем случае, рассеиваемая волна является плоской, то весьма полезно использовать известные свойства амплитуды рассеяния: теорему взаимности, оптическую теорему и обобщенную оптическую теорему. Весь этот арсенал применяется сначала для получения общих «рабочих» формул для задач низкочастотной дифракции, а затем вместе с результатами первой части книги привлекается к рассмотрению конкретных скалярных задач НЧ рассеяния звука на эллипсоиде. Отметим также, что поскольку при низкочастотном воздействии звукового поля на объемное препятствие возможен резонанс (монопольный), отдельная глава отведена рассмотрению свободных колебаний (пульсаций) эллипсоида.

Акустическая (скалярная) дифракция справедливо считается более простой в математическом отношении по сравнению с дифракцией векторных (электромагнитных или эластодинамических) волн. Примером служит рассмотренный в § 80 экстремально простой случай НЧ рассеяния на эллипсоиде. Однако в отличие от электро- и эластодинамики акустика не обладает статическим пределом, что затрудняет формулировку общего определения ее мультипольных моментов. Именно этим обстоятельством объясняется то, что рассеянное поле в формулах этой части книги, будучи фактически мультипольным, осталось не выраженным через мультипольные моменты.

Пятая часть книги по сравнению с четвертой отличается бо́льшим разнообразием обсуждаемых задач о рассеянии низкочастотного (на этот раз электромагнитного) поля на эллипсоидальном теле. Сначала обсуждается квазистационарная задача о магнитной поляризуемости проводящего тела, находящегося в однородном периодическом внешнем поле[2]. В рамках квазистационарности приближенное аналитическое рассмотрение этой задачи для эллипсоида удается (что и сделано) в двух противоположных предельных случаях малых и больших частот. Далее рассмотрена задача Рэлея–Стивенсона о НЧ рассеянии плоской волны свободного пространства на эллипсоиде, диэлектрическая и магнитная проницаемости которого отличаются от их значений в окружающей среде. Затем переход к предельным ($\mu \to 0$, $\varepsilon \to \infty$) значениям проницаемостей вещества эллипсоида доставляет решение задачи для идеального проводника. Наконец, предельный пере-

[1] Если под потенциалом понимать потенциал скоростей, то некоторые решения соответствуют гидродинамической задаче обтекания твердого эллипсоида неоднородным потоком идеальной жидкости.

[2] Аналитическое решение этой задачи для шара было дано М. А. Дивильковским [453] (см. также [484] § 59).

ход к нулевому значению одной из осей эллипсоида дает результаты по НЧ рассеянию на идеально проводящем эллиптическом диске.

Отдельно исследуется рассеяние НЧ поля на малом эллипсоидальном неидеальном проводнике. Особенности этой задачи связаны с комплексностью диэлектрической проницаемости и учетом дисперсии. Для наводимых в эллипсоиде электрического и магнитного дипольных моментов найдены аналитические выражения для первых двух членов низкочастотных разложений, из которых следует, что для электрического момента параметром разложения является отношение частоты к проводимости, а для магнитного момента — квадрат отношения размера тела к толщине скин-слоя. Вычислены и компоненты тензора электрического квадрупольного момента. В качестве примера рассмотрена пондеромоторная сила, действующая на эллипсоид в поле плоской волны.

Пятая часть включает также приближенную теорию дифракции на малых телах, находящихся в областях, где возбуждающее поле проходит через нуль и существенно неоднородно. Примером такой ситуации является рассмотренная задача дифракции волноводных полей на экранных препятствиях (малых дисках и отверстиях в перегородках). Решение проблемы достигается тем, что хорошо известным из теории возбуждения волноводов общим формулам (справедливым для тел произвольных размеров и формы) для амплитуд волн вторичного поля удается, опираясь на результаты решения статической задачи об эллипсоиде в неоднородном поле, придать вполне конкретный вид, учитывающий как форму и ориентацию рассеивателя, так и структуру рассеиваемого поля. Иллюстрацией метода служит разбор конкретных примеров рассеяния волн в волноводах с прямоугольным и круговым сечениями на металлическом эллиптическом диске или на эллиптическом отверстии в идеально проводящей перегородке.

Наконец, в последней главе этой части построена общая теория, описывающая собственные и вынужденные квазистатические колебания однородного и изотропного плазменного сгустка, имеющего форму трехосного эллипсоида. Для колебаний дипольного, квадрупольного и октупольного типов получены замкнутые аналитические представления для частот, радиационных постоянных затухания и мультипольных моментов, включая магнитные и тороидный моменты поляризационных токов, обусловленные несферичностью сгустка. Найдена сила, действующая на сгусток в поле плоской падающей волны, и показано, что в случае двойного резонанса эта сила имеет боковую составляющую того же порядка, что и продольная.

Более детальное представление о содержании и структуре книги можно получить, ознакомившись с довольно подробным оглавлением.

Книга (в особенности первые три ее части, где даны точные решения, и Приложения) может использоваться и в справочных целях. Этому, наряду с оглавлением, отчасти помогают, выполняя навигационные функции, список таблиц и предметный указатель.

В данной монографии значительное место занимает изложение результатов (включая недавние), в получении которых участвовал ее автор. Многолетним занятием этой проблематикой благодарный автор обязан своему учителю и соавтору ряда ключевых публикаций — Михаилу Львовичу Левину (1921 – 1992).

Автор глубоко признателен Б. М. Болотовскому за очень полезные обсуждения вопросов, получивших освещение в книге, а также А. Г. Виноградову и С. П. Ефимову за неоднократное и поучительное сотрудничество, что нашло отражение не только в совместных публикациях, но и во всех пяти частях монографии.

Р. Муратов

Список таблиц

Условные обозначения

a, b, c — полуоси базисного эллипсоида

$a_{(i)}$ — полуось эллипсоида, лежащая на оси координаты x_i

$\mathfrak{c}$ — скорость света

$$D \equiv D(x,y) = \sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}$$

$\widehat{\mathbf{D}} = 2\,\mathbf{r}(\mathbf{r}\,\boldsymbol{\nabla}) - r^2\boldsymbol{\nabla} + \mathbf{r}$ — оператор С. П. Ефимова

$$\widehat{\mathfrak{D}} \equiv \frac{a^2+u}{a^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{b^2+u}{b^2}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{c^2+u}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\widehat{d}^{(\alpha\beta\gamma)}_{ij\,k} \equiv \frac{\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha-2i}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{\beta-2j}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)^{\gamma-2k}}{i!\,j!\,k!\,(\alpha-2i)!\,(\beta-2j)!\,(\gamma-2k)!}$$

$$\widehat{\partial}_a \equiv -\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\cdots}{a}\right) = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a}\,\frac{\partial}{\partial a}$$

$\hat{F}^{(k)} = k+2-\left\langle x\dfrac{\partial}{\partial x}\right\rangle$ — оператор Ферререса

$I_{i_1\ldots i_n}$ — тензор «моментов инерции» n-го ранга

$\mathfrak{I}$ — вектор намагничения

i, j, k, l, m, n, p, q, r — неотрицательные целые числа

$\mathbf{i}$ — поверхностная плотность тока

$\mathfrak{i}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda}$ — тензор парциальных «моментов инерции» гомеоида

$\mathfrak{i}_{j_1\ldots j_\nu} \equiv \mathfrak{i}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\nu}$ — первый неисчезающий тензор парциальных «моментов инерции» гомеоида

$\widetilde{\mathfrak{i}}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda}$ — тензор парциальных «моментов инерции» эллипсоида

$\widetilde{\mathfrak{i}}_{j_1\ldots j_\nu} \equiv \widetilde{\mathfrak{i}}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\nu}$ — первый неисчезающий тензор парциальных «моментов инерции» эллипсоида

$\mathbf{j}$ — плотность тока

$\mathscr{L}_{00}(\xi)$ — логарифмический потенциальный фактор эллиптического цилиндра

$M_{lmn}^{(i,e)}$ — потенциальные факторы эллипсоида:

$$M_{lmn} \equiv M_{lmn}^{(i)} \text{ — внутренние } (i)$$

$$\mathscr{M}_{lmn}(\xi) \equiv M_{lmn}^{(e)} \text{ — внешние } (e)$$

$$\left.\begin{aligned} M_a &\equiv M_{100}, \\ M_b &\equiv M_{010}, \\ M_c &\equiv M_{001} \end{aligned}\right\} \text{ — размагничивающие факторы эллипсоида}$$

$$M_0 \equiv M_{000}$$

M — продольный размагничивающий фактор сфероида

$M_{lm}^{(i,e)}$ — потенциальные факторы эллиптического цилиндра:

$$M_{lm} \equiv M_{lm}^{(i)} \text{ — внутренние } (i)$$

$$\mathscr{M}_{lm}(\xi) \equiv M_{lm}^{(e)} \text{ — внешние } (e)$$

$\mathfrak{M}$ — вектор магнитного дипольного момента

$\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_n}$ — тензор магнитного мультипольного момента n-го ранга

$\mathfrak{m}_{i_1\ldots i_\nu} \equiv \mathfrak{m}_{i_1\ldots i_\nu}^{(\nu)}$

$\mathfrak{m}_{i_1\ldots i_l}^{(\nu)}$ — парциальные магнитные мультипольные моменты поверхностных токов эллипсоида

$\widetilde{\mathfrak{m}}_{i_1\ldots i_\nu} \equiv \widetilde{\mathfrak{m}}_{i_1\ldots i_\nu}^{(\nu)}$

$\widetilde{\mathfrak{m}}_{i_1\ldots i_l}^{(\nu)}$ — парциальные магнитные мультипольные моменты объемных токов эллипсоида

N_{lm} — внутренние потенциальные факторы эллиптического диска

$\mathscr{N}_{lmn}(\xi)$ — внешние потенциальные факторы эллиптического диска

$\mathbf{P}$ — вектор поляризации

$$P(\mathbf{r}, u) \equiv 1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u}$$

$$p = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}$$

$$p_2 = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{-1/2}$$

$$Q(u) = \sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}$$

$\mathbf{Q}$ — вектор электрического дипольного момента

$Q_{i_1\ldots i_n}$ — тензор электрического мультипольного момента n-го ранга

$$q(u) = \sqrt{(a^2+u)\,(b^2+u)}$$

$q_{j_1\ldots j_\nu} \equiv q^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\nu}$

$q^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda}$ — тензор парциального электрического мультипольного момента гомеоида

$\widetilde{q}_{j_1\ldots j_\nu} \equiv \widetilde{q}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\nu}$

$\widetilde{q}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda}$ — тензор парциального электрического мультипольного момента эллипсоида

$$R \equiv |\,\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

$$S_{i,j,\ldots,k} = \frac{(-2)^{i+j+\ldots+k}}{(2i)!\,(2j)!\cdots(2k)!}$$

α, β, γ, λ, μ, ν — неотрицательные целые числа

Δ — оператор Лапласа

$\Delta_2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — двумерный оператор Лапласа

δ_{ij} — символ Кронекера

ε_{klm} — совершенно антисимметричный единичный псевдотензор

$\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})$ — ядро мультипольного момента (симметричный неприводимый тензор n-го ранга)

$\varkappa_{\alpha,\beta;\,2\nu+1}(x,y)$ — плотность распределения квадруполей на поверхности эллиптического диска

ξ — эллипсоидальная координата

$$\Pi_{lmn} = (2l-1)!!\,(2m-1)!!\,(2n-1)!!$$

$\varrho(\mathbf{r})$ — плотность объемного распределения заряда

$$\varrho_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \varrho_0\;(x/a)^\alpha (y/b)^\beta (z/c)^\gamma$$

$\varrho^{(\nu)}(\mathbf{r})$ — парциальная плотность объемного распределения заряда

$\sigma(\mathbf{r})$ — плотность поверхностного (простой слой) распределения заряда

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \varrho_0\;(x/a)^\alpha (y/b)^\beta (z/c)^\gamma\, p$$

$\sigma^{(\nu)}(\mathbf{r})$ — парциальная плотность поверхностного распределения заряда

$\tau(\mathbf{r})$ — плотность поверхностного (двойной слой) распределения источников

$$\tau_{\alpha\beta\gamma} = \tau_0\,(x/a)^\alpha (y/b)^\beta (z/c)^\gamma$$

$\varphi_{i_1\ldots i_\nu}(\mathbf{r})$ — тензор-потенциал эллипсоида

Φ — потенциал электростатического поля, порожденного объемным распределением заряда

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \int\limits_V \frac{\varrho_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV'$$

$\Phi^{(\nu)}$ — парциальный потенциал эллипсоида
$\widetilde{\Phi}$ — псевдоскалярный потенциал магнитного поля, порожденного объемным распределением стационарного электрического тока
$\widetilde{\Phi}^{(\nu)}$ — парциальный магнитный потенциал эллипсоида
Ξ — потенциал поверхностного распределения квадруполей (на эллиптическом диске)

Υ — потенциал поверхностного (двойной слой) распределения источников

Ψ — потенциал поверхностного (простой слой) распределения заряда

$$\Psi_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \int\limits_S \frac{\sigma_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dS'$$

$\Psi^{(\nu)}$ — парциальный потенциал гомеоида
$\widetilde{\Psi}$ — псевдоскалярный потенциал магнитного поля, порожденного поверхностным распределением стационарного электрического тока
$\widetilde{\Psi}^{(\nu)}$ — парциальный магнитный потенциал гомеоида
$\psi_{i_1\ldots i_\nu}(\mathbf{r})$ — тензор-потенциал гомеоида
$\boldsymbol{\nabla}$ — оператор Гамильтона

$\nabla_k \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_k}$

$[K]$ — целая часть положительного числа K

$\big\langle \ldots \big\rangle$ — оператор циклического сложения (сумма трех членов циклической перестановки)
$\langle\!\langle \ldots \rangle\!\rangle$ — оператор специальной симметризации

$\overset{\circ}{=}$ — символ, заменяющий знак равенства в так называемых «условных равенствах»

Введение

1. Три литературных источника

Представим себе, что требуется найти в *аналитическом* виде некоторое классическое физическое (гравитационное, электрическое, магнитное, акустическое, электромагнитное,...) поле, порождаемое заданными источниками, которые непрерывно распределены в некоторой заданной конечной односвязной области пространства. Данность такова, что геометрически наиболее сложной границей указанной области пространства, допускающей (при выполнении ряда дополнительных условий) решение проблемы, является поверхность трехосного эллипсоида. Что касается источников, то они могут быть скалярными (плотность массы или заряда) или векторными (плотность электрического тока), могут быть распределены по объему и (или) по поверхности (простой или двойной слой) эллипсоида, могут быть первичными или вторичными, могут, наконец, быть постоянными или переменными во времени. К этому следует добавить довольно большое разнообразие допустимых законов распределения плотности источников (от однородного и слоисто-неоднородного распределения до распределения, полиномиально зависящего от координат).

Предлагаемая книга и посвящена аналитической теории потенциалов и полей, создаваемых источниками, непрерывно распределенными в эллипсоидальном объекте. При этом речь идет об одиночном эллипсоиде, находящемся в пространстве, которое, как правило, считается свободным от присутствия иных тел. Все обсуждаемые задачи — линейны.

Круг вопросов, рассматриваемых в книге, восходит к четырем классическим задачам (математической) физики. Две из них относятся к теории потенциала (задача о ньютоновом потенциале эллипсоида и задача об эллипсоидальном магнетике во внешнем статическом поле), а две другие — к теории дифракции на малых телах (задача о низкочастотном рассеянии звуковой волны на эллипсоидальном объекте и аналогичная электромагнитная задача). Последовательность, в которой перечисле ны задачи, соответствует логической связи между ними и хронологическому порядку публикации их первоначальных решений.

Симметризованное выражение для ньютонова потенциала однородного эллипсоида, впервые найденное Родригом [299][1], было использовано Пуассоном [279] для решения магнитостатической задачи об эллипсоиде в однородном внешнем поле. В свою очередь Рэлей [351], опираясь на результаты Пуассона в изложении Максвелла [239], дал (в первом приближении) реше-

[1] Силу тяготения ранее определил Гаусс [106].

ния обеих задач о низкочастотном рассеянии на эллипсоиде. Таким образом, уже в этих трех статьях XIX века была установлена тесная связь, с одной стороны, между «вакуумными» и макроскопическими задачами теории потенциала [279] и, с другой стороны, между макроскопическими задачами теории потенциала и теории низкочастотного рассеяния [351], приведшая в случае эллипсоида к получению замкнутых аналитических результатов (точных — в статическом случае и приближенных — в дифракционном случае). Обратим внимание и на то, что в указанных работах шла речь о гравитационном, магнитостатическом, акустическом и электромагнитном полях трехосного эллипсоида. Если, как иногда практикуется, использовать для характеристики работ [279, 299, 351] набор ключевых слов, то в него войдут термины: «эллипсоид», «статика», «однородный».

2. Специфика

Отметим еще две особенности, касающиеся упомянутых работ и имеющие непосредственное отношение к данной книге. Во-первых, в них рассматриваются стационарные [279,299] или квазистационарные [351] поля, поэтому вне эллипсоида первичные поля в [299] или вторичные поля в [279, 351] являются мультипольными полями. При этом в отличие, скажем, от однородного шара даже статическое поле вне однородного эллипсоида всегда представляет собой суперпозицию полей бесконечного числа отличных от нуля статических мультиполей. В данной книге варианты описания статических мультипольных полей эллипсоида и использование их свойств — это предмет специального рассмотрения.

Во-вторых, и это уже методический аспект, в работах [279,299,351] исследование полей эллипсоида проведено в декартовых координатах. В случае работ [279, 299] иного и не могло быть, поскольку эллипсоидальные координаты и эллипсоидальные спецфункции были введены позднее, благодаря исследованиям Ламе [200, 201]. С тех пор использование эллипсоидальных координат и функций Ламе в задачах теории потенциала, а позднее и эллипсоидальных волновых функций в скалярных задачах теории дифракции получило широкое (можно сказать — преимущественное) распространение. Между тем продолжает существовать и направление, в котором статические и дифракционные задачи о трехосном эллипсоиде рассматриваются в декартовых координатах. Примерами высокой продуктивности «картезианского» подхода являются исследования Ферререса [99][1], Дайсона [88], Стивенсона [343], Чандрасекхара, подытоженные в его книге [56], и другие. Все результаты (как старые, так и новые) вошедшие в предлагаемую книгу, также добыты с помощью декартовых координат. Обращение к последним освобождает от значительных трудностей, связанных с рассмотрением громоздких и все еще недостаточно изученных собственных функций (возникающих при разделении переменных в уравнениях Лапласа или Гельмгольца в эллипсоидальных координатах[2] или их вырожденных формах), позволяет естественным образом учитывать свойства симметрии задачи, в частности, равноправие декартовых направлений, делает сравнительно простым

[1] Примечательно, что одновременно с [99] вышла книга Ферререса [100], в которой притяжение неоднородного эллипсоида рассматривается и в терминах функций Ламе.

[2] Уравнения Максвелла (векторное уравнение Гельмгольца) в эллипсоидальных координатах не разделяются [252].

переход от формул для трехосного эллипсоида к аналогичным формулам для его частных и предельных форм (сохраняя единообразной форму представления результатов), обеспечивает возможность в необходимых случаях (например, при использовании мультипольного описания) прибегать к стандартной тензорной записи[1].

Отказ от использования эллипсоидальных координат потребовал в нашем случае некоторых компенсирующих усовершенствований, в частности, введения *трехиндексных обозначений* для описания исследуемых величин. С помощью таких обозначений облегчается получение и запись аналитических результатов в общем виде, упрощается учет свойств симметрии задачи, например, благодаря возможности циклической или взаимной замены этих индексов. Трехиндексная запись пригодна и используется и для тензорных величин, но может быть реализована лишь по отношению к той совокупности тензорных индексов, по которым тензор симметричен. Трехиндексное описание наружных ньютоновых (кулоновых) потенциалов эллипсоида привело к обнаружению их так называемого — *мультипольного представления.*

Следует отметить, что «словарный запас» (эллипсоид, мультиполи, статика, динамика, однородный, неоднородный) ключевой терминологии, относящейся к данной монографии, допускает качественно новые словосочетания («статика – неоднородный», «мультиполи – статика», «динамика – однородный», «динамика – неоднородный» и «мультиполи – динамика»), с которыми связано основное содержание данной монографии.

3. Эллипсоидальная модель

Начиная с Ньютона, к различным постановкам задачи об эллипсоиде обращалось большое число исследователей. Среди них, помимо уже названных, немало имен крупнейших математиков и естествоиспытателей XVIII—XX вв. Причины столь настойчивого и неувядающего интереса к эллипсоиду как к модели реального односвязного тела следует искать, по-видимому, не только в уже отмечавшейся «аналитичности» этой модели и в ее геометрических достоинствах: фактической (невырожденной) трехмерности, выражаемой тремя осями («длина», «ширина», «высота») и многообразии охватываемых этой моделью объемных и плоских фигур (эллиптический цилиндр, круглый цилиндр, эллиптическая «игла», бесконечно длинная полоса нулевой толщины и конечной ширины, вытянутый сфероид, шар, сплющенный сфероид, эллиптический диск, круглый диск), включающим и двумерные тела, и тела с ребрами. Симметрия трехосного эллипсоида, гладкость его поверхности и анизотропия формы делают его хорошей моделью для исследования реального объекта, причем моделью востребованной с постоянно расширяющейся «областью потребления». При этом простран-

[1] Сказанное не следует воспринимать как антагонистическое противопоставление двух возможностей описания. Эллипсоидальные координаты незаменимы для получения результатов общематематического характера, при анализе свойств возникающих спецфункций. С их помощью, в частности, были установлены формулы Лиувилля [7, 220]. Декартовы координаты часто удобнее при рассмотрении конкретных физических задач. Привлекательность декартового описания побудила Нивена [264] представить результаты Ламе [201] (полувековой давности) в терминах декартовых координат. Теория эллипсоидальных гармоник Нивена вошла в авторитетные математические руководства [146, 401]. Ее изложение можно найти и в недавней книге [72].

ственные масштабы, на которых в современной физике «примеряют» эллипсоидальную модель, простираются от «мешка» для кваркония («ellipsoidal bag model for heavy quark system») [274,392] до размеров Вселенной [52]. Не будем забывать, однако, что здесь нас интересует востребованность указанной модели в задачах, связанных с теориями потенциала и низкочастотной дифракции[1].

Возвращаясь к аналитичности эллипсоидальной модели, подчеркнем, что в отличие от других тел[2], эллипсоид уникален в том отношении, что его ньютоновы потенциалы в области, занимаемой создающими их источниками (плотности которых *полиномиально* зависят от декартовых координат), сами являются *полиномиальными* функциями декартовых координат (свойство, открытое Феррерсом [99] в 1877 г).

Проще всего реализовать наше знание точных выражений для полиномиальных ньютоновых потенциалов эллипсоида, если при решения соответствующих задач теории потенциала или низкочастотной дифракции исходить из соответствующих им интегральных (интегродифференциальных) уравнений. Обращение к интегральным уравнениям дает ряд преимуществ. Во-первых, применение интегральных уравнений не требует при нахождении внутренних полей одновременного отыскания наружных полей и последующего сшивания обоих решений на границе. В итоге существенно уменьшается число неизвестных. Во-вторых, внутренняя область, к которой интегральные уравнения сводят решение краевой задачи, является в случае статических полей как раз той областью, где потенциалы эллипсоида полиномиальны. Поэтому, если заданное первичное поле тоже полиномиально, то решение задачи сводится к решению системы линейних алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются коэффициенты полиномов, описывающих внутреннее поле. В-третьих, по известному внутреннему полю, с помощью простых квадратур, вычисляется поле снаружи. При этом расчет наружных полей в потенциальных задачах и квазистатических полей ближней зоны в дифракционных задачах облегчается благодаря использованию псевдополиномиальных выражений для внешних ньютоновых потенциалов эллипсоида, запись которых отличается от формул для внутренних потенциалов лишь заменой внутренних потенциальных факторов на внешние факторы, являющиеся функциями координат точки наблюдения. Что касается дифракционных полей дальней зоны, то они даются еще более простыми интегралами от внутреннего поля.

Прежде чем перейти к указанию направлений исследований, для которых эллипсоидальная модель актуальна, поделимся двумя наблюдениями.

а) Обычно учет анизотропии тела с помощью эллипсоидальной модели уточняет (не меняя порядка величины) оценку какого-либо эффекта, полученную на модели шара. Существует, однако, немало примеров, часть из которых обсуждается в книге, когда в отличие от эллипсоида модель шара оказывается непригодной даже для грубой оценки явления.

б) Нередко рассмотрение какой-либо совершенно конкретной задачи об эллипсоиде сопровождается дополнительным исследованием, приводящем

---

[1] Поэтому примечательное использование эллипсоида для установления реалистичного портрета А. С. Пушкина [468] лежит, к сожалению, вне проблематики данной книги.

[2] Например, экзотических конфигураций, образующихся в результате пересечения координатных поверхностей различных систем криволинейных координат, в которых работает метод разделения переменных [68].

к установлению новых математических или физических результатов общего характера. В качестве примеров укажем на работы [99, 207, 342, 343, 529].

4. Направления исследований

1. Уже в Книге [261], которая считается родоначальницей теоретической физики и в которой сформулированы законы динамики, закон всемирного тяготения и исследуются траектории планет и комет, поднимаются вопросы о гравитационном притяжении эллипсоидального небесного тела (Земли) и о возможных равновесных формах небесных тел (в рамках модели вращающейся гравитирующей жидкости). Таким образом, первоначальный интерес к притяжению эллипсоида исходил (в связи с разработкой **теории фигур равновесия вращающейся жидкости**) от небесной механики и гидродинамики. Развитие этой теории (в том числе применительно к эллипсоидальным фигурам равновесия) связано с именами Маклорена [228], Якоби [160], Римана [294], Лиувилля [220], Дирихле [82], Дедекинда [75], Пуанкаре [277], Ляпунова [507], Стеклова [337, 338] и многих других (см., например, [424]). Указанной проблематике посвящено немало книг (или значительных их фрагментов) и обзоров: давно известных [23, 278, 357, 358], не столь давних [7, 8, 164, 199, 219, 225, 276, 547] и сравнительно недавних [29, 56, 128, 206, 412, 477].

В работах последнего времени в этом классе задач учитывается влияние магнитного поля [172, 176, 479, 565, 566], строятся математические модели [564]. Современные астрофизические исследования, связанные с эллипсоидальной геометрией, посвящены эллипсоидальной модели Вселенной [52], эллиптическим галактикам [80, 81, 95], эллипсоидальной магнитопаузе [364]. Наряду с теорией равновесных форм гравитирующей жидкости теперь развивается и теория равновесных форм (в том числе эллипсоидальных) гравитирующей *сжимаемой среды* [382, 424, 445, 539], которая строится с учетом коллективных эффектов. Родственные исследования касаются лабораторной (заряженной или нейтральной) плазмы эллипсоидальной конфигурации [86, 482].

2. Теория эллипсоидальных фигур равновесия опирается, естественно, на формулы, описывающие их **ньютоновы потенциалы**. Первоначально речь шла об однородных телах, а основные результаты, как отчасти уже указывалось, принадлежат Маклорену [228], Айвори [158], Гауссу [106], Родригу [299], Пуассону [281], Лежандру [207], Дирихле [82]. Изложение теории потенциала однородного эллипсоида можно найти в многочисленных математических и физических руководствах (см., например, [174, 179, 257, 354, 396, 456, 464, 508, 512, 548, 567]).

Остановимся подробнее на работах, посвященных потенциалам *неоднородного* эллипсоида.

Начало исследованиям потенциалов неоднородного эллипсоида положила работа Грина [121]. Вопрос о притяжении эллипсоида рассматривается в ней в весьма общей постановке: закон притяжения выбран в форме обратной пропорциональности произвольной целой степени расстояния, эллипсоид задан в n-мерном пространстве, плотность источников представлена как произведение двух сомножителей, из которых первый — простая алгебраическая величина, обращающаяся в нуль на границе эллипсоида, а второй — целая рациональная функция декартовых координат. Хотя предложенная Грином окончательная форма записи потенциалов эллипсоида впоследствии не утвердилась, его работа сохраняет не только историческую ценность[1].

Силы притяжения слоисто-неоднородного эллипсоида во внешней и внутренней областях были вычислены Пуассоном [282]. Изучению гравитационных свойств замкнутых слоев (так называемых «гомеоидов»), образованных подобными и подобно расположенными эллипсоидальными поверхностями, и их связи с притяжением сплошного эллипсоида посвящена работа Шаля [60][2], опубликованная в 1840 г. Упомянем также [103].

Следующей работой, в которой изучается притяжение неоднородного эллипсоида, был мемуар Кели [55], где, как и у Грина, рассматриваются многомерные пространства и выводятся формулы для потенциалов некоторых видов неоднородного эллипсоида при общих предположениях о характере закона притяжения.

В цикле работ, в которых исследуются потенциалы неоднородного эллипсоида, важнейшей является статья Ферререса [99], вышедшая в 1877 г. Не увлекаясь n-мерными обобщениями и опираясь на результаты Айвори, Пуассона и теорему единственности решения, Ферререс строит простой и плодотворный метод определения ньютоновских потенциалов эллипсоидального тела, плотность которого имеет вид степенной функции координат. Его работа насыщена красивыми идеями, эффективными правилами, неожиданными аналогиями между потенциалами тел различной формы или между потенциалами тела и его гомотетической оболочки и содержит многочисленные конкретные примеры. По существу, теория Ферререса охватывает почти все случаи объемных и поверхностных распределений источников, которые в области, занимаемой источниками, приводят к *полиномиальности* ньютоновских потенциалов. В работе Ферререса, однако, не приводится ни окончательная общая формула для потенциалов эллипсоида при произвольной степенной зависимости от координат его плотности, ни — тем более — еще более общая формула, дающая потенциал эллипсоида при произвольном законе распределения массы.

Заслуга в получении такой формулы принадлежит Дайсону [88]. В результате рассмотрения простейших случаев Дайсон «угадывает» искомое решение, а затем подтверждает его непосредственной проверкой. Окончательные формулы для потенциала эллипсоида с произвольным распределением источников представлены в терминах введенных Дайсоном операторов дифференцирования, что обеспечило компактность записи. Работами Ферререса и Дайсона задача сведения исходных тройных интегралов, описывающих потенциалы неоднородного эллипсоида, к сумме однократных интегралов (в общем случае — эллиптических) была в принципе решена.

Среди других статей этого периода, в которых рассматриваются потенциалы неоднородного эллипсоида, отметим работы Нивена [263] и Гобсона [144], посвященные вычислению некоторых интегралов по поверхности и объему эллипсоида и применению их для разложения потенциала в ряды, а также работы Гобсона [145] и Рауса [306] , близкие по характеру своих обобщений к [55, 121]. Раусу [307] принадлежит также первое систематиче-

---

[1] См. сноску 2 на стр. 28

[2] Потенциалы «фокалоида», т. е. слоя, образованного софокусными эллипсоидами, рассматривались в ряде работ. Укажем, например, [62].

ское изложение теории потенциалов тяготения неоднородного эллипсоида, включающее результаты Ферререса и Дайсона.

Следует отметить,что формулы Ферререса и Дайсона, выражающие потенциал эллипсоида, несмотря на их эстетические достоинства и компактность, неудобны для практического использования. Это неудобство отчасти связано с тем, что декартовы координаты точки наблюдения разбросаны по различным сомножителям соответствующих выражений. Вполне приемлемой является форма представления потенциала, которая в случае однородного эллипсоида была (с точностью до обозначений) предложена Родригом:

$$\Phi(\mathbf{r})=2\pi\varrho_0\left\{\mathscr{M}_{000}(\xi)-\mathscr{M}_{100}(\xi)\,x^2-\mathscr{M}_{010}(\xi)\,y^2-\mathscr{M}_{001}(\xi)\,z^2\right\}.$$

Здесь $\xi > 0$ — параметр, «перебирающий» наружные (координатные) эллипсоиды,

$$\frac{x^2}{a^2+\xi}+\frac{y^2}{b^2+\xi}+\frac{z^2}{c^2+\xi}=1,$$

софокусные базовому, которому соответствует значение $\xi = 0$.

Преобразование формул Ферререса и Дайсона к практически удобному виду (подобного предложенному Родригом), относящееся к случаю произвольной степенной зависимости объемной плотности эллипсоида от декартовых координат $(\varrho \sim x^l y^m z^n)$, дано в [209, 491, 516, 517]. Вывод аналогичных формул для потенциалов простого слоя (*потенциалов неоднородного гомеоида*) представлен в книге [518]. Все указанные формулы выражены в терминах внутренних и внешних потенциальных факторов эллипсоида, для которых получены рекуррентные соотношения [492]. Аналогичные результаты получены для неоднородного эллиптического цилиндра и его гомотетической оболочки [517, 518].

Найденные попутно некоторые полезные комбинаторные следствия теории Ферререса отражены в [493, 516, 518], а также в приложении к [524]. Уже после выхода книги [518] были найдены выражения для потенциалов неоднородного эллипсоидального двойного слоя [520], а также получены формулы для ньютоновых потенциалов неоднородного эллиптического диска [495, 497][1].

Следует отметить, что внешние и внутренние статические и квазистатические поля эллипсоида выражаются соответственно через внешние $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$ и внутренние $M_{lmn} = \mathscr{M}_{lmn}(0)$ потенциальные факторы эллипсоида, которые, в свою очередь, с помощью рекуррентных формул выражаются через размагничивающие факторы (коэффициенты деполяризации) эллипсоида: $M_a \equiv M_{100}$, $M_b \equiv M_{010}$ и $M_c \equiv M_{001}$. Исследованию свойств потенциальных и размагничивающих факторов эллипсоида посвящены работы [27, 66, 266, 328, 344, 405, 417, 421, 492].

Новые результаты в теории потенциала эллипсоида не сводятся к одному только совершенствованию формул Ферререса и Дайсона. Были обнаружены [521], например, так называемые *мультипольные представления* наружных ньютоновых (кулоновых) потенциалов неоднородного эллипсоида и простого эллипсоидального слоя (гомеоида) и построена общая теория [460–462, 525] таких представлений. Позднее были обнаружены [529, 532]

[1] В 2001 г. появилась статья [286], значительный объем которой включает результаты работ [210, 492, 495, 497, 518, 525] без ссылок на эти работы.

аналогичные мультипольные представления для псевдоскалярных потенциалов магнитного поля, создаваемого объемными или поверхностными электрическими токами в эллипсоидальном теле. Общие формулы мультипольного представления магнитного потенциала эллипсоида даны в [529]. Попутно отметим работы, анализирующие магнитостатические [311, 543] и электростатическое [142] поля сверхпроводящего эллипсоида.

Укажем также на некоторые результаты, связанные с использованием криволинейных координат[1]. Так, для случая однородного тела в [152, 394, 395] потенциалы сфероида выражены в сфероидальных координатах, а в [248] потенциалы трехосного эллипсоида рассматриваются в эллипсоидальных координатах. Разложение потенциала по эллипсоидальным гармоникам обсуждается в работах [105, 115, 129, 143, 222, 335]. Эти гармоники (функции Ламе), введенные в статьях [200,201][2], излагаются и исследуются во множестве работ (см., например, [10,11,21,24,46–50,67,69,72,125,146,149, 182, 222, 230, 264, 295, 296, 332, 334, 352, 359, 387, 401, 465]).

Математиков традиционно интересует также проблема обобщения теории ньютоновых потенциалов эллипсоида на иные геометрии (см., например, [94]) и многомерные пространства [171,322], при этом особое внимание проявляется к ключевым результатам [51, 177, 418, 427, 475]. Продолжают свое развитие подходы, основанные как на аналитических (символьных) методах [363], так и на численных методах [61, 218, 542].

3. В **теории ускорителей элементарных частиц** для упрощения учета собственного пространственного заряда пучка аппроксимируют плотные сгустки ускоряемых частиц заряженными эллипсоидами [439] или эллиптическими цилиндрами [472]. В рамках этих моделей принимается в расчет неоднородность сгустка [310], ведется поиск самосогласованных решений [25, 426, 440, 536], исследуется влияние неоднородных внешних магнитных полей [58,419], изучаются и другие родственные проблемы (см., например, [2, 89, 256, 324, 362, 415, 416, 568, 569]).

4. Ньютоновы (кулоновы) потенциалы эллипсоида находят применения и в **физике атомного ядра**. В 1950 г. Джеймсом Рейнуотером [290] (см. также [291]) была предложена сфероидальная модель ядра[3]. Включение в теоретическое описание учета деформации ядра как целого, наряду с учетом особенностей вращательного движения ядра и других теоретических тонкостей [33, 254], позволило объяснить многие из накопившихся экспериментальных данных.

Нахождению электростатических сил внутри возмущенных ядер в рамках капельной модели посвящены работы [170, 301, 302]. Для вытянутых (эллипсоидальных и сфероидальных) ядер рассмотрение распространяется и на нестатические явления (мультипольные резонансы) [163].

---

[1] Заметим, что сами эллипсоидальные координаты вводятся по-разному, что, в свою очередь, приводит к разноликости возникающих спецфункций. Можно различать «французские» [7, 201, 220, 278] и «английские» [100, 146, 401] предпочтения, что, к сожалению, вызывает трудности «перевода», т. е. сопоставления результатов.

[2] Здесь уместно привести высказывание Феррерса о работе Грина [121], содержащееся в начале гл. 6 книги [100] и касающееся этих функций: «They have been treated of by Lamé, in his *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les fonctions isothermes*, and were virtually introduced by Green, in his memoir *On the Determination of the Exterior and Interior Attractions of Ellipsoids of Variable Densities*».

[3] Первое указание на возможную несферичность возмущенных ядер содержится в работе Н. Бора и Дж. Уилера [34].

5. **К задаче об эллипсоидальном теле, помещенном во внешнее статическое поле**, как уже указывалось, первым обратился Пуассон [279]. Он рассмотрел случай, когда вещество эллипсоида является однородным изотропным магнетиком, причем внешнее магнитное поле тоже однородно. Джонс [167] обобщил этот результат[1] на случай анизотропного диэлектрика (см. также [3, 327]). Однородный диэлектрический эллипсоид в неоднородном (полиномиально зависящем от декартовых координат) внешнем поле рассмотрен в [494] (см. также [495]). В [494] разбирается и случай «самополяризации» эллипсоида под действием равномерно распределенных по его объему зарядов. Аналогичные задачи о слоисто–неоднородном диэлектрическом эллипсоиде, где границы слоев софокусны, а каждый слой однороден и имеет собственную диэлектрическую проницаемость, исследовались в [521,522] (см. также [15,326,406]). Особенности задачи о ферритном эллипсоиде во внешнем поле, связанные со специфическими свойствами вещества тела, рассматриваются в [214, 388][2].

Включенные в данную книгу электростатические и магнитостатические задачи указанного типа служат и иллюстрацией использования теории ньютоновых потенциалов эллипсоида в физических приложениях.

6. Родственными к кругу задач, о которых говорилось в п. 5, являются (не рассматриваемые в данной монографии) проблемы **статической теории упругости** (эластостатики). Сюда относится так называемая *контактная задача*, рассмотренная Г. Герцем [140][3]. Другие относящиеся сюда проблемы связаны с механикой разрушения и касаются исследования концентрации напряжений у эллипсоидальных дефектов и включений в упругой среде. Соответствующие исследования проведены в работах [1, 13, 92, 93, 109, 112, 181, 226, 260, 287, 288, 297, 341, 390, 391, 399, 474, 505, 538]. В частности, Эшелби [92, 93] построил эффективный метод определения влияния эллипсоидальных включений на напряженно-деформированнное состояние упругих изотропных сред, охватывающий геометрически различные (иглообразные, дискообразные и порообразные) дефекты.

Результаты эластостатики находят эффективное применение в динамических задачах теории упругости (см., например, [104, 243, 244, 393]).

7. К описанному в п. 5 классу задач математически примыкают (не рассматриваемые в данной монографии) известные примеры привлечения формул для ньютоновых потенциалов в **гидродинамических задачах**: о потенциальном течении несжимаемой идеальной жидкости вокруг эллипсоида (см. [199], §§ 103–116; [63]), о силе сопротивления, действующей на медленно движущийся в вязкой жидкости эллипсоид ([199], § 339), о волновом сопротивлении эллипсоида, движущегося под поверхностью тяжелой жидкости ([549], с. 474), о вращающемся эллипсоиде [247]. Дополним этот перечень также относящимися сюда работами [16, 165, 178, 355, 543].

Динамика заряженной капли представляет интерес не только в связи с упомянутой выше капельной моделью ядра, но и как проблема электрогид-

---

[1] Решения однотипных электростатических и магнитостатических задач обсуждаемого вида различаются только обозначениями, а случай проводящего тела получается из решения для диэлектрического тела в результате предельного перехода ($\varepsilon \to \infty$).

[2] Родственные проблемы электро- и магнитостатики обсуждаются в работах [96, 169, 270, 273, 340, 444, 552].

[3] См. также [485] § 9.

родинамики. Такого рода вопросы обсуждаются, например, в [303, 304, 448, 572].

8. Сравнительно недавно разрабатываемый круг стационарных задач, составляют задачи, целью которых является отыскание **адекватных источников**. Адекватными, или эквивалентными, называют несовпадающие системы источников, создающие совпадающие внешние поля. Решение любой такого рода задачи единственно, если речь идет о нахождении поверхностного распределения источников, адекватного заданному объемному или иному поверхностному распределению. Соответствующие результаты, относящиеся к распределениям источников в эллипсоидальных и шаровых областях пространства, опубликованы в [523, 524, 527, 528, 532] и представлены в данной книге. Эти результаты получены на основе использования мультипольных представлений потенциалов эллипсоида и мультипольных разложений потенциалов шара.

9. Остановимся более подробно на приложениях теории потенциала эллипсоида в **низкочастотной дифракции**. С точки зрения теории интерес к проблемам низкочастотной дифракции вызван рядом обстоятельств.

Во-первых, малочисленностью случаев точного решения задач, формулируемых на основе скалярного или векторного уравнения Гельмгольца. Сами эти решения, найденные методом разделения переменных, представляют собой бесконечные ряды по собственным функциям соответствующей краевой задачи, хорошо сходящиеся лишь при достаточно низких частотах. Практическое использование таких решений для большинства конфигураций дифрагирующих тел, исключая случаи шара и круглого цилиндра, затрудняют сложная зависимость собственных функций от волнового числа, а в случае трехосного эллипсоида — еще и недостаточная разработанность самой теории эллипсоидальных волновых функций. Таким образом, становятся актуальными, с одной стороны, дальнейшее развитие приближенных методов решения задач дифракции на конкретных телах в случаях, когда оказываются менее эффективными или отказывают вообще методы точного решения[1], а с другой стороны, отыскание таких приемов исследования, которые, не будучи «привязанными» к конкретной геометрии, позволяли бы выявлять некие общие дифракционные свойства рассеивателей. Эти общетеоретические запросы оказывается возможным удовлетворить уже в рамках теории низкочастотной дифракции.

Во-вторых, низкие частоты являют собой тот диапазон, в котором еще не теряют своего значения представления и закономерности, характерные для статических явлений, и в то же время уже действуют динамические законы волновой физики. Такой симбиоз открывает интересные возможности при решении дифракционных задач и в конечном счете способствует упрощению анализа и облегчает интерпретацию результатов. Если пока не касаться особых и представляющих самостоятельный интерес ситуаций, в которых формирование квазистатических характеристик рассеивателя принципиально определяется действием динамических факторов (например, монопольные резонансы — в акустике, токи Фуко или мультипольные резонансы — в электродинамике), то решение задачи дифракции сводится математически к построению для искомой функции ряда теории возмущений по сте-

[1] Как, например, в случае дифракции электромагнитных волн на трехосном эллипсоиде, когда, как показал Мёглих [252], уравнения Максвелла не разделяются в эллипсоидальных координатах.

пеням малого параметра kL (k — волновое число, L — характерный размер рассеивающего объекта), причем коэффициенты ряда находятся на основе решений соответствующих задач теории потенциала. Поэтому, наряду с исследованием отмеченных выше сугубо динамических задач, становится актуальным расширение круга конкретных статических задач, поддающихся точному или, хотя бы, приближенному решению.

Необходимо отметить особую заинтересованность теории в решении проблем низкочастотной дифракции в аналитической форме, очевидные достоинства которой связаны с большой общностью, высокой информативностью и возможностью надежного физического истолкования результатов. Другими словами, аналитическое выражение обеспечивает весьма полезной качественной информацией, которая не может быть получена чисто численными методами.

Своим возникновением в качестве самостоятельного раздела общедифракционной теории низкочастотная дифракция обязана пионерским исследованиям Рэлея, к которым, кроме уже названной статьи [351], относятся более ранние работы [348–350]. Заслуга Рэлея состоит не только в том, что он первым поставил и в первом приближении решил двумерные и трехмерные, акустические и электромагнитные задачи о рассеянии на малом отверстии (в трехмерном случае — эллиптическом) в бесконечно тонком плоском экране и на малом теле (эллиптическом цилиндре и эллипсоиде), показав связь этих задач с их аналогами в электростатике или в гидродинамике обтекания. Применительно к проблемам низкочастотной дифракции приоритет Рэлея распространяется и на обнаружение соответствия (более поздние, общие и строгие формулировки которого известны как теорема Бабине, или принцип двойственности) между рассеянием на диске и рассеянием на аналогичной формы отверстии в экране, и на успешное использование метода интегральных уравнений. Детальный обзор вклада Рэлея в теорию рассеяния дан Тверским [367].

Деятельность продолжателей дела Рэлея в области НЧ дифракции можно подразделить (соответствии с решаемыми целевыми задачами) на следующие группы:

а. *Исследования, в которых построена общая схема метода возмущений, позволяющая находить высшие приближения в решении дифракционной задачи.* Применительно к задачам дифракции на малом отверстии в экране такая схема впервые была предложена Баукампом как в акустическом [38], так и в электромагнитном случае [40, 41]. Методика Баукампа строилась на использовании интегральных уравнений. К этому же — экранному — циклу следует отнести работы [28, 91, 97, 234, 289, 451].

Общий метод решения электромагнитной задачи дифракции на малом объемном рассеивателе как проницаемом, так и идеально проводящем построен в статье Стивенсона [342]. Этот метод связан с использованием уравнений Максвелла в дифференциальной форме. Некоторые погрешности, обнаруженные в [342] и касающиеся, во-первых, постановки задачи для идеального проводника и, во-вторых, вопроса о продолжении полей из квазистатической зоны в волновую, были скорректированы Клейнманом в работах [185] и [186]. Низкочастотное рассеяние плоской электромагнитной волны на (ε, μ)–эллипсоиде рассмотрено Стивенсоном в [343][1].

[1] См. также [166, 271, 553].

Дассиос [70] показал, что методом, аналогичным методу Стивенсона, можно решать, используя уравнения Гельмгольца, и скалярную задачу НЧ рассеяния на звукопроницаемом объемном рассеивателе. Иллюстрацией метода служит в [70] решение в криволинейных координатах задачи о трехосном эллипсоиде[1]. Более простые схемы решения задач рассеяния на телах с акустически мягкой (условие Дирихле) и акустически жесткой (условие Неймана) границей описаны в [253] и [183].

Подход, использующий вместо дифференциальных уравнений интегральные, имеет важные преимущества: уменьшение числа неизвестных, полиномиальность (в области интегрирования) искомых функций и др. В абстрактной операторной форме исследование возможностей и особенностей метода возмущений применительно к интегральным уравнениям теории дифракции проведено в [265] (см. также [120, 147]). Метод последовательных приближений при решении задачи электромагнитного рассеяния на малом проницаемом теле с помощью интегральных уравнений макроскопической электродинамики, эквивалентных уравнениям Максвелла и содержащих объемные интегралы, был развит Н. А. Хижняком [559–562]. Аналогичная методика для скалярных задач, использующая интегральные уравнения акустики неоднородной идеальной жидкости, построена А. Г. Виноградовым и автором [435], при этом выявлен не имеющий аналога в электродинамике случай, когда независимо от конфигурации рассеивателя нахождение последовательных приближений становится элементарным [436]. Иллюстрацией метода служит приведенное в [530] решение задачи о звукопроницаемом трехосном эллипсоиде. Решение задачи об эллипсоиде с акустически мягкой границей дано в [531].

До сих пор перечислялись работы, в которых рассеивающие тела считались непоглощающими. В задачах дифракции электромагнитных волн случай рассеивателя с конечной проводимостью интересен не только с точки зрения возможности учета потерь, но и как требующий отдельного рассмотрения пример простейшей диспергирующей среды рассеивателя, описываемой комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$. Решение соответствующей квазистационарной задачи о шаре в переменном поле построено М. А. Дивильковским [453]. Обобщение НЧ метода Стивенсона на случай учета конечной проводимости рассеивателя дал Ван Бладэл [371, 376]. Подход, связанный с интегральными уравнениями, развит М. Л. Левиным и автором [496]. В указанной статье, которой предшествовал расчет магнитной поляризуемости эллипсоида [487, 515] (см. также [551]), рассмотрена задача о проводящем эллипсоиде в НЧ электромагнитном поле[2].

Ядром интегральных уравнений, на основе которых строится метод возмущений в упомянутых выше работах, всегда служит функция Грина свободного пространства для скалярного уравнения Гельмгольца, а ядром результирующих — квазистатических — уравнений становится, естественно, аналогичная функция Грина уравнения Лапласа. Клейнман [183] (см. также [9, 14]) вывел интегральные уравнения, которые содержат интегралы по всему пространству вне рассеивателя и ядром которых является статическая функция Грина, удовлетворяющая требуемым условиям на гра-

[1] О некоторых неточностях, допущенных в [70] см. в § 79.

[2] Следует иметь в виду, что получение решения задачи дифракции на поглощающем теле фактически делает известным и решение задачи о флуктуационном тепловом поле соответствующего тела [500].

нице тела. Решение этих уравнений сводит вычисление последовательных членов низкочастотного разложения к простой итерационной процедуре, не связанной со свойственным другим методам чередующимся раздельным рассмотрением квазистатических и волновых полей. Используя метод Клейнмана [183], Слиман [329–331] рассмотрел НЧ рассеяние звука на эллипсоидальном препятствии с мягкой границей. Успешная реализация метода Клейнмана при рассмотрении сложных конкретных проблем осуществлена в работах [131, 132].

Отметим большой вклад в теорию НЧ дифракции Ван Бладэла [376,378], Сениора [315–319] и Дассиоса [71, 73].

Что касается задач о НЧ рассеянии на эллипсоиде, то обобщения и учет новых факторов при их постановке касались вида падающей волны [59, 216, 272], анизотропии вещества рассеивателя и окружающей среды [150, 151, 162, 231, 284, 409, 410, 506], экзотических (полидисперсность, киральность и др.) особенностей рассеивателя [196–198, 283].

b. *Работы, в которых упрощение анализа низкочастотных проблем достигается с помощью теорем взаимности электростатики и стационарной электродинамики.* Использование таких теорем полезно в двух отношениях. Во-первых, общая (не связанная с конкретной геометрией тела) формулировка теорем взаимности при применении ее к общим формулам теории НЧ дифракции приводит к результатам, справедливым для рассеивателя произвольной формы. Примером могут служить работы Ван Бладэла [372–374], посвященные низкочастотной дифракции звука на отверстии в мягком или жестком экране и на непроницаемом объемном препятствии. Во-вторых, при рассмотрении конкретных задач теории потенциала или тех квазистатических задач, к которым сводится нахождение последовательных приближений в дифракционной проблеме, удачное использование теорем взаимности существенно упрощает как промежуточные аналитические выкладки, так и окончательный вид результата. Сказанное иллюстрируют работы М. Л. Левина и автора [495, 496].

c. *Работы, в которых упрощение исследования низкочастотных проблем достигается благодаря использованию фундаментальных результатов теории рассеяния.* Речь идет о трех «жемчужинах» теории рассеяния — теореме взаимности, оптической теореме и обобщенной оптической теореме, являющихся по существу аналитическими следствиями явления интерференции падающих и дифрагированных волн и закона сохранения энергии. Как и статические теоремы взаимности, теоремы теории рассеяния позволяют получать общие результаты, но в отличие от первых, они описывают свойства амплитуды рассеяния и поэтому в рассматриваемых низкочастотных задачах «работают» не в ближней, а в волновой зоне. Применение оптической теоремы упрощает получение НЧ разложения для полного сечения рассеяния, в особенности в тех случаях, когда ряд по степеням k для амплитуды рассеяния начинается с членов нулевой степени [404, 531]. Совместное же применение обобщенной оптической теоремы и теоремы взаимности в задачах НЧ дифракции на теле, имеющем центр симметрии, позволяет [70, 366, 459] непосредственно находить четные члены квазистатического ряда для амплитуды рассеяния, если известны предыдущие.

d. *Работы, в которых анализируются ситуации, связанные с определяющей ролью различных динамических механизмов на картину рассеяния и его характеристики.* Сюда относятся статьи, исследующие квазистатические резонансы: монопольные [345, 402, 407, 499, 544] – в акустике, мультипольные [210, 223, 233, 389, 420, 422, 442, 443, 488–490, 494, 498, 504] – в электродинамике.

К этой группе отнесем также работы [189, 375], которые посвящены особенностям рассеяния, вызванным динамикой (в обычном механическом смысле слова) самого дифрагирующего тела, т. е. его возвратно–поступательным или вращательным движением.

e. *Работы, в которых изучаются возможности или демонстрируется эффективность вариационных методов.* В общедифракционных обзорах [40, 148] вариационные подходы к задачам рассеяния — в частности, метод стационарного представления (вариационный принцип Левина и Швингера [211–213]) — обсуждаются достаточно подробно. Показательно, что уже в основополагающих работах «отладка» метода производилась на основе низкочастотных результатов. В данной монографии вариационная техника не используется, поэтому мы ограничимся здесь лишь указанием некоторых работ [4, 65, 403, 481, 540, 556, 558], в которых вариационные методы привлекаются непосредственно к низкочастотным задачам.

f. *Работы, посвященные нахождению первого члена низкочастотного разложения.* К этой группе относятся статьи [78, 173, 187, 190, 191, 217, 317, 318,320,339], в которых рассеяние акустической или электромагнитной волны предложено описывать с помощью тензоров (поляризуемости или присоединенных масс) и скаляров, зависящих только от геометрии рассеивателя. Тем самым для широкого класса рассеивающих тел решение дифракционной задачи сводится к вычислению (аналитическому или численному) этих скалярных и тензорных величин. Сюда же относится исследование таких ситуаций, когда становятся неприменимыми представления [28] о рассеянном поле как о поле переизлучения электрического и магнитного дипольных моментов, индуцированных в рассеивателе первичной волной. Примером может служить рассмотренная М. Л. Левиным и автором [495] дифракция волноводных полей на малых дисках, находящихся в «узловых» областях поля. Наконец, к этой же группе исследований отнесем работы, в которых дано сопоставление рэлеевского рассеяния на прямоугольных (плоских или объемных) препятствиях с рассеянием на препятствиях овальных [78, 90, 138, 139, 289], а также работы, анализирующие роль оболочки рассеивателя на формирование дифракционной картины [141, 191].

g. *Работы, в которых изучается НЧ рассеяние упругих волн.* Мы ограничимся здесь указанием лишь нескольких работ (см. [74, 124, 202, 203]), имея в виду, что с более подробной библиографией можно познакомиться, обратившись к специальной литературе, информация о которой содержится в следующем подпункте.

h. *Обзорные работы, диссертации, монографии, справочники.* Последовавший за работой Рэлея [351] поток многочисленных публикаций, продолжающийся и в наши дни, требовал систематизации накопленных результатов, обобщающего анализа применяемых методик, корректировки направлений дальнейших исследований. Соответствующая библиография представлена обзорами [40, 184, 188, 192, 367, 371, 376, 408], диссертациями (например, [119, 293, 514, 520, 573]), сборниками [42, 45, 194, 384], монографиями [20,73,77,84,148,175,250,380,381,478], акустическими, дифракционными, радиолокационными и оптическими справочниками [42,76,135–137,305,308].

Отметим, что [73,384] включают сведения о НЧ рассеянии упругих волн. Что касается результатов исследований дифракции на трехосном эллипсоиде, то в подавляющем большинстве указанных (в этом подпункте) источников они не представлены, что и побудило нас специально указывать соответствующие ссылки в предыдущих подпунктах.

i. *Работы, связанные с математическим обоснованием приближения низких частот в теории дифракции, и исследования волновых спецфункций.* Доказательства существования конечного радиуса сходимости низкочастотных разложений (помимо работ Магнуса, Вейля, Мюллера, Лейса и Вернера, отмеченных в обзорах [40, 183]) можно найти и в более поздних статьях [9, 14, 184, 397], но эти доказательства относятся только к непроницаемым рассеивателям. Пример точной оценки радиуса сходимости дан в работе Дарлинга и Сениора [68].

Краевые задачи математической теории дифракции, решаемые в соответствующих криволинейных координатах, нуждаются в отвечающих геометрии задач специальных функциях. Укажем некоторые литературные источники, в которых исследуются эллипсоидальные [12, 17, 18, 332, 554, 555] и сфероидальные [215, 242, 347, 476] волновые функции.

Завершая беглый обзор работ по НЧ дифракции, отметим, что в нем осознанно почти не представлены двумерные задачи рассеяния, поскольку они не рассматриваются и в данной книге.

5. Области применения

Уже указывалось, что в данной монографии все обсуждаемые вопросы, включая низкочастотное рассеяние, так или иначе связаны с одиночным эллипсоидальным телом. Это не означает, однако, что результаты, полученные для одиночного тела, не представляют интереса, когда речь идет о нескольких телах или даже об ансамбле таких тел. Так, результаты теории низкочастотного рассеяния на одиночном препятствии используются при построении более сложных теорий, описывающих рассеяние на ансамбле независимых частиц в приближении однократного рассеяния (см., например, [381, 541, 570]).

Поэтому в многочисленных и разнообразных физических и технических приложениях, в которых электромагнитные или акустические волны (генерируемые естественными или искусственными источниками, а затем рассеянные некими препятствиями) используются в диагностических целях, результаты Рэлея и их обобщения находят широкое применение. Например, теория электромагнитного рассеяния при низких частотах используется в **астрофизике** при изучении рассеяния света звезд межзвездной и межпланетной пылью [381] и при исследовании атмосфер планет ([414], гл. 8) ; в **физике атмосферы** в связи с метеорологическими проблемами изучения тумана, дождя и облаков, а также аэрозолей вулканических извержений и лесных пожаров с помощью оптических средств и радиолокации [35, 122, 298, 381, 425, 467, 469]; в **физике моря** при разработке оптических методов исследования морской воды [571]; в **радиолокации** и **технике СВЧ**[1] в связи с применением малых зондов и эллиптических

[1] Низкочастотным задачам дифракции родственны теории излучения малых тел (например, теория тонких и щелевых антенн [486, 501, 502]).

апертур [255, 308]; в **физической химии** при изучении рассеяния света коллоидальными и макромолекулярными системами [175].

Результаты скалярной теории НЧ дифракции находят применение в **гидроакустике**. В качестве примера укажем на эхолокацию скоплений косяков рыб [157, 398], где основной вклад в рассеяние обусловлен рыбьими пузырями. Другой пример — интерес, проявляемый к рассеянию звука на воздушных пузырьках (см. [157,398], а также [383]).

Результаты по НЧ дифракции на эллипсоиде активно используются в **биологии** и **медицине**. Речь идет об изучении воздействия НЧ электромагнитных полей на организм взрослого человека [87,133,235,236] и ребенка [267], о применении оптических методов анализа биологических жидкостей (сюда относится, например, исследование эритроцитов в крови [64,246] или магнитных бактерий в вязкой жидкости [336]). Необходимость расширения арсенала диагностической аппаратуры активизировала исследования волнового воздействия и на отдельные органы (например, на желудок [156]) или части тела (например, на голову [32, 126]) в том числе в рамках эллипсоидальной модели (см. также [110, 155, 323]).

К числу новейших применений теории статических и квазистатических полей эллипсоида относится использование результатов этой теории при разработке и создании новых **композитных и метаматериалов**. Создание такого рода материалов, обладающих весьма востребованными необычными и уникальными (иногда – экзотическими) механическими (прочность, жесткость, трещиностойкость и т. п.) и электромагнитными (проводимость, эффективные диэлектрическая и магнитная проницаемости, оптические параметры и т. п.) характеристиками, стимулируется потребностями современной техники. Из относящейся к этой проблематике обширной литературы мы ограничимся указанием лишь небольшого списка источников (см. [85, 123, 134, 168, 229, 232, 240, 241, 249, 292, 321, 385, 423, 431, 433, 434, 437, 534]), дополнив этот список работами, в которых изучаются свойства **наночастиц эллипсоидальной формы** и метаматериалов, использующих такие частицы в качестве включений (см. [98, 111, 113, 127, 130, 224, 227, 258, 269, 284, 293, 325, 386, 432, 504, 551, 553]).

Укажем еще один теоретически и экспериментально активно изучаемый необычный макроскопический квантовый объект — **конденсат Бозе–Эйнштейна** (см., например, [275,471,537]). В теоретическом исследовании [368–370] конденсата Бозе–Эйнштейна эллипсоидальной формы, построенном с учетом дипольного взаимодействия, используются формулы ньютонова потенциала неоднородного эллипсоида. Конденсаты Бозе–Эйнштейна иногда называют пятым (наряду с твердым, жидким, газообразным и плазменным) состоянием вещества. Уместно заметить, что формулы, описывающие поля эллипсоида, оказываются востребованными для всех этих состояний.

Завершим Введение двумя замечаниями. Во-первых, указанными направлениями исследований и областями применения (границы между которыми не всегда внятны), конечно же, не исчерпывается их полный перечень. А во-вторых, систематическое на протяжении многих десятилетий возникновение новых областей применения, порождаемое развитием науки и техники, объясняет столь долго сохраняющийся интерес исследователей к проблематике, которой посвящена предлагаемая книга.

Часть I

ПОТЕНЦИАЛЫ

Глава 1
Потенциальные факторы

§ 1. Геометрические параметры эллипсоида

1.1. Эллипсоидальная координата ξ

На протяжении большей части книги мы будем иметь дело с уединенным симметричным заданным телом (эллипсоидом или его вырожденными и предельными формами). Поэтому расположение и ориентацию декартовой системы координат будем выбирать таким образом, чтобы уравнение границы тела имело каноническую форму. Само заданное тело будем называть *базисным*[1].

В канонической форме уравнение границы базисного эллипсоида с полуосями a, b, c имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1.1}$$

Семейство эллипсоидальных поверхностей, софокусных с эллипсоидом (1.1), описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1, \tag{1.2}$$

содержащим вещественный параметр ξ, который может принимать любое значение в диапазоне

$$-\min\{a^2, b^2, c^2\} \leqslant \xi < \infty. \tag{1.3}$$

При $\xi = 0$ поверхность (1.2) совпадает с базисным эллипсоидом (1.1). Любая поверхность (1.2), соответствующая $\xi > 0$, находится в области пространства, внешней по отношению к базисному эллипсоиду. Отрицательные значения ξ, лежащие в интервале $0 > \xi > -\min\{a^2, b^2, c^2\}$ соответствуют эллипсоидам, софокусным с базисным эллипсоидом и расположенным во внутренней области последнего. Наконец, предельное значение

$$\xi = -\min\{a^2, b^2, c^2\}$$

[1] При этом, как физический объект, базисное тело может быть «овеществленным» (газ, жидкость, твердое тело, плазма) и неовеществленным (полость в среде, объем или поверхность с заданным распределением электрических зарядов или токов).

соответствует вырождению эллипсоидальной поверхности в плоский эллиптический диск. Так, если минимальной из полуосей эллипсоида (1.1) является полуось c, то предельный эллиптический диск дается формулами

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1, \qquad z=0. \tag{1.4}$$

Заметим, что введенный формулами (1.2) и (1.3) параметр ξ полностью идентичен одной из трех ортогональных эллипсоидальных координат (см., например, [24]). Поэтому в дальнейшем параметр ξ будем называть *эллипсоидальной координатой*.

1.2. Расстояние от центра до касательной плоскости

Удобно ввести функцию

$$P(\mathbf{r},u)\equiv 1-\frac{x^2}{a^2+u}-\frac{y^2}{b^2+u}-\frac{z^2}{c^2+u}\,. \tag{1.5}$$

Уравнение

$$P(\mathbf{r},u)=0, \tag{1.6}$$

если выбрать в качестве u конкретное значение ξ из диапазона (1.3), т. е. задать полуоси эллипсоида, представляет собой уравнение поверхности последнего в декартовых координатах. Если же считать заданной произвольную точку (x,y,z) пространства, то (1.6) становится кубическим уравнением относительно u, причем наибольший корень этого уравнения, принадлежащий как раз диапазону (1.3), является эллипсоидальной координатой ξ точки (x,y,z).

Рассмотрим эллипсоидальную поверхность (1.2) (или, что то же самое, $P(\mathbf{r},\xi)=0$). Если в произвольной точке, принадлежащей этой поверхности и характеризуемой радиусом-вектором $\mathbf{r}=\{x,y,z\}$, провести касательную плоскость, то длина перпендикуляра $p\,(\xi)$, опущенного из центра эллипсоида на касательную плоскость, очевидно, равна

$$p\,(\xi)=\mathbf{r}\,\mathbf{n}(\xi), \tag{1.7}$$

где $\mathbf{n}(\xi)$ — единичный вектор внешней нормали к касательной плоскости (а значит, и к поверхности (1.2)) в точке $\mathbf{r}$.

Поскольку градиент $\dfrac{\partial\xi}{\partial\mathbf{r}}$ перпендикулярен поверхности (1.2) постоянного значения ξ и (в соответствии с правилами дифференцирования неявной функции) равен

$$\frac{\partial\xi}{\partial\mathbf{r}}=-\,\frac{\partial P}{\partial\mathbf{r}}\Big/\frac{\partial P}{\partial\xi}=\left\{\frac{2x}{(a^2+\xi)\,P'_\xi},\frac{2y}{(b^2+\xi)\,P'_\xi},\frac{2z}{(c^2+\xi)\,P'_\xi}\right\}, \tag{1.8}$$

где

$$P'_\xi\equiv\frac{\partial P}{\partial\xi}=\frac{x^2}{(a^2+\xi)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\xi)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\xi)^2}\,, \tag{1.9}$$

то

$$\mathbf{n}(\xi)=-\,\frac{\partial\xi}{\partial\mathbf{r}}\Big/\left|\frac{\partial\xi}{\partial\mathbf{r}}\right|=\left\{\frac{x}{(a^2+\xi)\sqrt{P'_\xi}},\frac{y}{(b^2+\xi)\sqrt{P'_\xi}},\frac{z}{(c^2+\xi)\sqrt{P'_\xi}}\right\}. \tag{1.10}$$

Таким образом, из (1.7) с учетом (1.2) получаем

$$p\,(\xi) = \frac{1}{\sqrt{P'_\xi}} = \left[\frac{x^2}{(a^2+\xi)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\xi)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\xi)^2}\right]^{-1/2}. \qquad (1.11)$$

В частности, для базисного эллипсоида (1.1) расстояние от центра до касательной плоскости равно

$$p \equiv p\,(0) = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}, \qquad (1.12)$$

а единичный вектор нормали к поверхности (1.1) в точке (x, y, z) есть

$$\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}(0) = \left\{\frac{x}{a^2}\,p\,,\, \frac{y}{b^2}\,p\,,\, \frac{z}{c^2}\,p\right\}. \qquad (1.13)$$

Выражение (1.11) позволяет придать формуле (1.8) окончательный вид

$$\frac{\partial\xi}{\partial\mathbf{r}} = 2p\,(\xi)\,\mathbf{n}(\xi) = \left\{\frac{2x}{a^2+\xi}\,p^2(\xi),\ \frac{2y}{b^2+\xi}\,p^2(\xi),\ \frac{2z}{c^2+\xi}\,p^2(\xi)\right\}. \qquad (1.14)$$

1.3. Средний квадрат расстояния от центра до поверхности

Некоторые интегральные геометрические характеристики трехосного эллипсоида выражаются через эллиптические интегралы. К их числу относится, например, площадь поверхности эллипсоида с полуосями $a > b > c$, характеризуемая известной формулой Лежандра[1]:

$$S = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[c^2 F(\psi,\varkappa) + (a^2-c^2)E(\psi,\varkappa)\right], \qquad (1.15)$$

где

$$F(\psi,\varkappa) = \int\limits_0^\psi \frac{d\chi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\chi}}, \qquad E(\psi,\varkappa) = \int\limits_0^\psi \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\chi}\,d\chi \qquad (1.16)$$

— неполные эллиптические интегралы (см., например, [161, 447]) первого и второго рода соответственно, модуль $\varkappa$ и аргумент ψ которых равны

$$\varkappa = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}, \qquad \psi = \arccos\frac{c}{a}. \qquad (1.17)$$

Ключевую роль в математическом описании полей эллипсоида играет другая характеристика, также имеющая размерность площади. Речь идет об усредненном по телесному углу квадрате радиуса-вектора точки, лежащей на поверхности эллипсоида. Обозначим эту характеристику посредством M_0. Так что

$$M_0 = \frac{1}{4\pi}\int r^2 d\Omega. \qquad (1.18)$$

[1] См. далее (2.8).

Для вычисления интеграла (1.18) выразим r^2 с помощью уравнения поверхности эллипсоида в сферических координатах:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}. \tag{1.19}$$

Благодаря симметрии эллипсоида и четности подынтегральной функции, интегрирование по углам сводится к одному октанту.

$$M_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} d\theta\sin\theta\int\limits_0^{\pi/2}\left[\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)\sin^2\theta + \frac{\cos^2\theta}{c^2}\right]^{-1} d\varphi.$$

С помощью замены $w = \operatorname{tg}\varphi$ получаем

$$M_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} d\theta\sin\theta\int\limits_0^{\infty}\left[\left(\frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)w^2 + \frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\theta}{a^2}\right]^{-1} dw =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2}\left[\left(\frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\theta}{a^2}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\right]^{-1/2}\sin\theta\, d\theta.$$

Последующая замена $u = c^2\operatorname{tg}^2\theta$ позволяет преобразовать выражение для M_0 к окончательному симметричному виду

$$M_0 = \frac{abc}{2}\int\limits_0^{\infty}\frac{du}{Q(u)}, \tag{1.20}$$

где

$$Q(u) \equiv \sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}. \tag{1.21}$$

Эллиптический интеграл (1.20) нетрудно привести к нормальной лежандровой форме. Так, при $a > b > c$

$$M_0 = \frac{abc}{\sqrt{a^2-c^2}}\,F(\psi,k), \tag{1.22}$$

где неполный эллиптический интеграл первого рода

$$F(\psi,k) = \int\limits_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{1.23}$$

причем

$$k = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \qquad \psi = \arccos\frac{c}{a}. \tag{1.24}$$

Таким образом, в интеграле (1.22) модуль k не совпадает, а аргумент ψ совпадает со значениями (1.17).

Из геометрического смысла M_0 ясно, что в случае шара[1] $(c = b = a)$

$$M_0 = a^2. \tag{1.25}$$

[1] Здесь не приводится вид M_0 при вырождении эллипсоида в сфероид. Соответствующие выражения сразу следуют из формул (2.10), (2.11), (2.13) и (2.15).

Особое значение величины M_0 для задачи об эллипсоиде связано с тем, что она играет роль производящей функции, на основе которой в теорию вводится целый класс интегральных характеристик, необходимых для количественного описания потенциалов и полей эллипсоида.

§ 2. Размагничивающие факторы эллипсоида

2.1. Трехосный эллипсоид

Введем в рассмотрение дифференциальные операторы

$$\widehat{\partial}_a = -\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\cdots}{a}\right), \qquad \widehat{\partial}_b = -\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\cdots}{b}\right), \qquad \widehat{\partial}_c = -\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\cdots}{c}\right). \tag{2.1}$$

Заметим, что действие операторов (2.1) на величины, не зависящие от a, b и c, не приводит к нулевому результату. Однократное применение к (1.20) одного из этих операторов приводит к несобственным интегралам

$$\begin{gathered} M_a = \frac{abc}{2}\int\limits_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)\,Q(u)}, \quad M_b = \frac{abc}{2}\int\limits_0^\infty \frac{du}{(b^2+u)\,Q(u)}, \\ M_c = \frac{abc}{2}\int\limits_0^\infty \frac{du}{(c^2+u)\,Q(u)}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Согласно сложившейся терминологии, величины M_a, M_b, M_c называют *размагничивающими факторами* (или *коэффициентами деполяризации*) *эллипсоида.*

Из формул (2.2) следует, что факторы M_a, M_b, M_c являются постоянными положительными безразмерными величинами, зависящими от формы, но не от объема эллипсоида.

Из (2.2) следует также, что

$$0 < M_a < M_b < M_c < 1 \quad \text{при} \quad a > b > c\,. \tag{2.3}$$

Можно показать, что выполняются и более сильные неравенства

$$aM_a < bM_b < cM_c \qquad \text{при} \qquad a > b > c\,. \tag{2.4}$$

Следующий аналогичный шаг — и, как нетрудно проверить, неравенства изменяют направление:

$$a^2M_a > b^2M_b > c^2M_c \qquad \text{при} \qquad a > b > c\,. \tag{2.5}$$

Как и M_0, интегралы (2.2) для трехосного эллипсоида являются эллиптическими. Представление размагничивающих факторов эллипсоида через эллиптические интегралы первого и второго рода в нормальной лежандровой форме осуществлено самим Лежандром[1] в работе [207] и имеет вид

$$M_a = \frac{abc}{\sqrt{a^2-c^2}\,(a^2-b^2)}\left\{F(\psi,k) - E(\psi,k)\right\},$$

[1] Точности ради, отметим, что коэффициенты, с которыми оперировал Лежандр, множителем 4π отличаются от используемых здесь M_a, M_b и M_c.

$$M_b = -\frac{abc\,F(\psi,k)}{\sqrt{a^2-c^2}\,(a^2-b^2)} + \frac{abc\sqrt{a^2-c^2}\,E(\psi,k)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)} - \frac{c^2}{b^2-c^2}\,, \tag{2.6}$$

$$M_c = -\frac{abc\,E(\psi,k)}{\sqrt{a^2-c^2}\,(b^2-c^2)} + \frac{b^2}{b^2-c^2}\,,$$

если $a > b > c$. При этом модуль k и аргумент ψ неполных эллиптических интегралов $F(\psi,k)$ и

$$E(\psi,k) = \int\limits_0^{\psi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \tag{2.7}$$

даются выражениями (1.24). Формулы (2.6) позволяют вычислять размагничивающие факторы эллипсоида, в частности, используя таблицы неполных эллиптических интегралов.

Эти формулы полезны и в тех случаях, когда в терминах M_a, M_b, M_c желательно выразить иные интегральные характеристики эллипсоида, для которых известны представления через лежандровы эллиптические интегралы. Например, для эллипсоида с полуосями $a>b>c$ площадь поверхности (1.15) можно записать в виде [487][1]

$$S = 2\pi\left\{(a^2+b^2)\overline{M}_a + (a^2+c^2)\overline{M}_b + (b^2+c^2)\overline{M}_c\right\}\,. \tag{2.8}$$

Здесь $\overline{M}_a$, $\overline{M}_b$, $\overline{M}_c$ — размагничивающие факторы вспомогательного эллипсоида, полуоси которого $\bar a = a$, $\bar b = ac/b$, $\bar c = c$ связаны такими же неравенствами $\bar a>\bar b>\bar c$, что и a, b, c. Введение вспомогательного эллипсоида вызвано отмеченным выше различием модулей $\varkappa$ и k эллиптических интегралов (1.15) и (2.6).

Безразмерность размагничивающих факторов эллипсоида, их сложная зависимость (2.6) от $F(\psi,k)$ и $E(\psi,k)$, делают целесообразным создание таблиц непосредственно самих коэффициентов M_a, M_b, M_c. Подобные таблицы и графики, естественно, существуют [266, 344, 405, 518]. Подробные таблицы размагничивающих факторов эллипсоида даны в Приложении Н к данной книге.

Между размагничивающими факторами эллипсоида существуют простые соотношения

$$M_a + M_b + M_c = 1\,, \tag{2.9}$$

$$a^2M_a + b^2M_b + c^2M_c = M_0\,, \tag{2.10}$$

которые в иных обозначениях впервые были установлены Лежандром в упоминавшейся уже работе [207].

Равенство (2.9) нетрудно проверить, используя формулы (2.6).

Для доказательства (2.10) заметим, что входящий в выражение (1.20) интеграл

$$I \equiv \int\limits_0^{\infty} \frac{du}{Q(u)} = \frac{2}{abc}\,M_0$$

[1] Интерес к численному вычислению площади поверхности трехосного (и даже n–осного) эллипсоида сохраняется [154, 208].

является однородной (степени $-1/2$) функцией переменных a^2, b^2, c^2. Следовательно, по теореме Эйлера об однородных функциях, имеет место равенство

$$a^2 \frac{\partial I}{\partial a^2} + b^2 \frac{\partial I}{\partial b^2} + c^2 \frac{\partial I}{\partial c^2} = -\frac{1}{2} I.$$

Выполняя дифференцирование и записывая результат на основе (1.20) и (2.2) в терминах M_0, M_a, M_b и M_c, получаем (2.10).

Если одна из осей эллипсоида велика или мала по сравнению с остальными, то вместо (2.6) можно использовать приближенные выражения. Так, для сильно вытянутого эллипсоида $(a \gg b \sim c)$ имеют место формулы

$$M_a \approx \frac{bc}{a^2} \left(\ln \frac{4a}{b+c} - 1 \right),$$

$$M_b \approx \frac{c}{b+c} - \frac{bc}{2a^2} \ln \frac{4a}{b+c} + \frac{bc\,(3b+c)}{4a^2(b+c)},$$

причем выражение для M_c получается взаимной заменой $b \leftrightarrow c$ в последнем приближенном равенстве.

Для сильно сплющенного эллипсоида, когда $a \geqslant b \gg c$, приближенные формулы имеют вид

$$\begin{aligned} M_a &\approx \frac{c}{a} \frac{\sqrt{1-k^2}}{k^2} (\boldsymbol{K} - \boldsymbol{E}) - \frac{c^2}{a^2}, \\ M_b &\approx \frac{c}{a} \frac{\boldsymbol{E} - (1-k^2)\boldsymbol{K}}{k^2\sqrt{1-k^2}} - \frac{c^2}{a^2} \frac{1}{1-k^2}, \\ M_c &\approx 1 - \frac{c\boldsymbol{E}}{a\sqrt{1-k^2}} + \frac{c^2}{a^2} \frac{2-k^2}{1-k^2}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{E}$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно, модуль k которых равен $k = \sqrt{1-(b/a)^2}$.

Для размагничивающих факторов эллипсоида почти сферической формы $(0 \leqslant 1 - b/a \ll 1,\ 0 \leqslant 1 - c/a \ll 1)$ имеют место приближенные формулы

$$M_a = \frac{1}{3} + \frac{2}{15a}(b + c - 2a) - \frac{1}{105a^2}\big(10a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 10ab - 10ac - 8bc\big) + \ldots,$$

$$M_b = \frac{1}{3} + \frac{2}{15a}(a + c - 2b) + \frac{1}{105a^2}\big(5a^2 + 18b^2 - 9c^2 - 32ab + 22ac - 4bc\big) + \ldots.$$

Выражение для M_c получается из выражения для M_b с помощью взаимной замены $b \leftrightarrow c$.

2.2. Сфероиды и шар

Если две оси эллипсоида равны между собой, то он становится телом вращения, называемым сфероидом. Для сфероида интегралы (2.2) перестают быть эллиптическими и выражаются через элементарные функции. Будем называть *продольным* размагничивающим фактором сфероида M тот из коэффициентов M_a, M_b, M_c, который соответствует оси вращения. Остальные коэффициенты равны друг другу, и, в соответствии с (2.9), их можно выразить через продольный размагничивающий фактор:

$$M_{\perp} = \frac{1}{2}\,(1 - M). \tag{2.12}$$

Для сплющенного сфероида $(a{=}b{>}c)$ с эксцентриситетом

$$e = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} \tag{2.13}$$

продольный размагничивающий фактор M_c равен

$$M = \frac{1}{e^2}\left(1 - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\,\arcsin e\right) = \frac{1+e^2}{e^3}\,(e - \operatorname{arctg} e). \tag{2.14}$$

В случае сильно сплющенного сфероида $(\varepsilon \equiv c/a \ll 1)$

$$M = \left(1 + 2\,\varepsilon^2 + \frac{8}{3}\,\varepsilon^4 + \frac{16}{5}\,\varepsilon^6 + \frac{128}{35}\,\varepsilon^8 + \ldots\right) - \\ - \frac{\pi\varepsilon}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\,\varepsilon^2 + \frac{15}{8}\,\varepsilon^4 + \frac{35}{16}\,\varepsilon^6 + \frac{315}{128}\,\varepsilon^8 + \ldots\right).$$

Если форма сплющенного сфероида близка к сферической $(e \ll 1)$, то

$$M = \frac{1}{3} + \frac{2e^2}{15}\left(1 + \frac{4}{7}\,e^2 + \frac{8}{21}\,e^4 + \ldots\right). \tag{2.15}$$

Для вытянутого сфероида $(a > b = c)$ с эксцентриситетом (2.13) продольный размагничивающий фактор M_a равен

$$M = \frac{1-e^2}{2e^3}\left(\ln\frac{1+e}{1-e} - 2e\right) = \frac{1-e^2}{e^3}\,(\operatorname{Arth} e - e). \tag{2.16}$$

Если сфероид сильно вытянут $(\varepsilon \equiv c/a \ll 1)$, то

$$M = \varepsilon^2\left[\left(1 + \frac{3}{2}\,\varepsilon^2 + \frac{15}{8}\,\varepsilon^4 + \frac{35}{16}\,\varepsilon^6 + \ldots\right)\ln\frac{2}{\varepsilon} - \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{5}{4}\,\varepsilon^2 + \frac{47}{32}\,\varepsilon^4 + \frac{319}{192}\,\varepsilon^6 + \ldots\right)\right].$$

Если же форма вытянутого сфероида мало отличается от шара $(e \ll 1)$, то

$$M = \frac{1}{3} - \frac{2e^2}{15}\left(1 + \frac{3}{7}\,e^2 + \frac{5}{21}\,e^4 + \ldots\right). \tag{2.17}$$

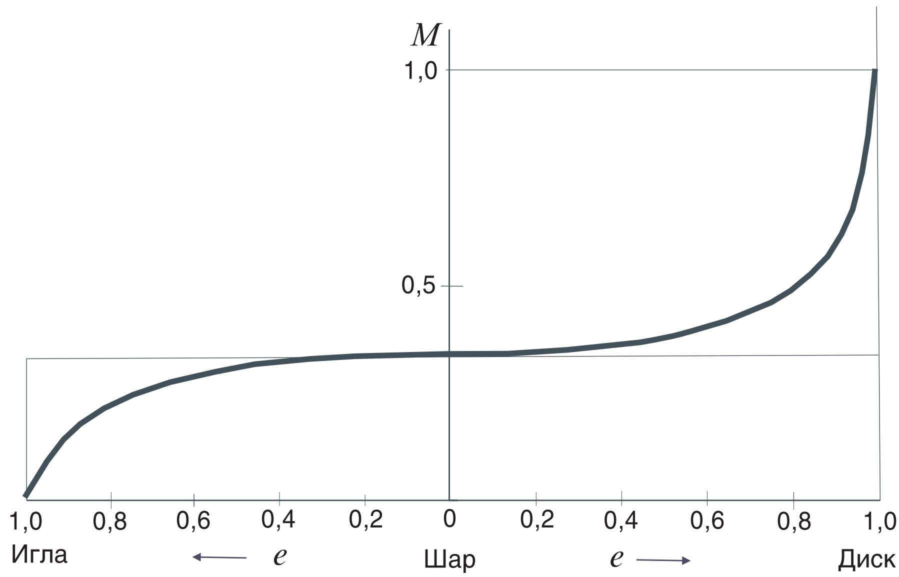

Рис. 1.

На рис. 1 дан график зависимости M от e, построенный по формулам (2.14) и (2.16).

При вырождении эллипсоида в шар $(a=b=c)$, когда, по соображениям симметрии, должны выполняться равенства $M_a = M_b = M_c$, из (2.9) получаем

$$M = 1/3\,. \tag{2.18}$$

§ 3. Внутренние потенциальные факторы эллипсоида

3.1. Трехосный эллипсоид

Будем называть *внутренними потенциальными факторами эллипсоида* величины[1]

$$M_{lmn} = \left(\widehat{\partial}_a\right)^l \left(\widehat{\partial}_b\right)^m \left(\widehat{\partial}_c\right)^n M_0\,. \tag{3.1}$$

Здесь операторы $\widehat{\partial}_a$, $\widehat{\partial}_b$ и $\widehat{\partial}_c$ определены формулами (2.1), а l, m, n — целые неотрицательные числа. Сумму $l+m+n$, характеризующую размерность фактора, назовем *весом потенциального фактора*. В частности, факторы единичного веса $M_{100} = M_a$, $M_{010} = M_b$, $M_{001} = M_c$ суть обычные размагничивающие факторы эллипсоида, а фактор нулевого веса $M_{000} = M_0$.

Очевидно, что

$$M_{lmn} = \Pi_{lmn} \frac{abc}{2} \int\limits_0^\infty \frac{du}{Q(u)(a^2+u)^l(b^2+u)^m(c^2+u)^n}\,, \tag{3.2}$$

[1] Изложение опирается на работы [209, 492].

где

$$\Pi_{lmn} = (2l-1)!!\,(2m-1)!!\,(2n-1)!!\,, \tag{3.3}$$

а $Q(u)$ дается выражением (1.21).

Через внутренние потенциальные факторы (3.2) и рассматриваемые в следующем параграфе внешние потенциальные факторы эллипсоида выражаются потенциалы и поля внутри и снаружи эллипсоида. Для фактического использования формул для потенциалов и полей нужно знать значения соответствующих потенциальных факторов. Это осуществляется с помощью рекуррентных формул, позволяющих выразить все потенциальные факторы через затабулированные размагничивающие факторы M_a, M_b, M_c .

Так, для факторов с весом 2 из определения (3.2) следуют формулы[1]

$$\begin{gathered}\left(a^2-b^2\right) M_{110}=M_{010}-M_{100}\,, \quad \left(b^2-c^2\right) M_{011}=M_{001}-M_{010}\,,\\ \left(c^2-a^2\right) M_{101}=M_{100}-M_{001}\,.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Если применить оператор $\left(\widehat{\partial}_a\right)^l\left(\widehat{\partial}_b\right)^m\left(\widehat{\partial}_c\right)^n$ к соотношениям (2.9), (2.10) и (3.4) и учесть, что

$$\begin{aligned}\left(\widehat{\partial}_a\right)^l a^2 M_{ij\,k} &= -2l M_{i+l-1,j,\,k} + a^2 M_{i+l,j,\,k}\,,\\ \left(\widehat{\partial}_b\right)^m b^2 M_{ij\,k} &= -2\,m\,M_{i,j+m-1,\,k} + b^2 M_{i,j+m,k}\,,\\ \left(\widehat{\partial}_c\right)^n c^2 M_{ij\,k} &= -2n M_{i,j,\,k+n-1} + c^2 M_{i,j,\,k+n}\,,\end{aligned} \tag{3.5}$$

то мы получим систему общих рекуррентных соотношений

$$M_{l+1,m,n} + M_{l,m+1,n} + M_{l,m,n+1} = \frac{\Pi_{lmn}}{a^{2l} b^{2m} c^{2n}}\,, \tag{3.6}$$

$$a^2 M_{l+1,m,n} + b^2 M_{l,m+1,n} + c^2 M_{l,m,n+1} = (2l+2m+2n+1) M_{lmn}\,, \tag{3.7}$$

$$\left(a^2-b^2\right) M_{l+1,m+1,n} = (2l+1) M_{l,m+1,n} - (2m+1) M_{l+1,m,n}\,, \tag{3.8}$$

$$\left(b^2-c^2\right) M_{l,m+1,n+1} = (2m+1) M_{l,m,n+1} - (2n+1) M_{l,m+1,n}\,, \tag{3.9}$$

$$\left(c^2-a^2\right) M_{l+1,m,n+1} = (2n+1) M_{l+1,m,n} - (2l+1) M_{l,m,n+1}\,. \tag{3.10}$$

Очевидно, что формулы (3.8)–(3.10) не «работают» в случае факторов вида M_{k00}, у которых два из трех индексов равны нулю. Такие факторы необходимо предварительно преобразовывать с помощью (3.6) или (3.7).

Таким образом, произвольный внутренний потенциальный фактор эллипсоида M_{lmn} может быть выражен в конечном счете через размагничивающие факторы.

---

[1] Соотношения, эквивалентные (3.4), встречаются у Рауса [307] и использовались Стивенсоном [343] наряду с формулами, соответствующими частному случаю соотношений (3.6)–(3.10) для потенциальных факторов, максимальный вес которых равен двум. В иных обозначениях частные случаи некоторых формул (3.6)–(3.10) даны в книге Чандрасекхара [56].

3.2. Сильно сплющенный эллипсоид

Рассмотрим более детально вопрос о потенциальных факторах сильно сплющенного эллипсоида [495]. Речь идет о получении для M_{lmn} разложений, обобщающих при $c \ll \min\{a,b\}$ формулы (2.11).

Начнем с фактора вида M_{lm0}. Его выражение (после замены переменной интегрирования $u=t^2-c^2$ в (3.3)) можно представить в форме

$$M_{lm0} = \Pi_{lm0}\, abc \int\limits_c^\infty (a^2+t^2-c^2)^{-l-\frac{1}{2}}\,(b^2+t^2-c^2)^{-m-\frac{1}{2}}\,dt\,. \tag{3.11}$$

Разложения биномов подынтегрального выражения по степеням c^2 переводят (3.11) в

$$M_{lm0} = \sum_{j=0}^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{c^{2j+2k+1}}{(2j)!!\,(2k)!!}\, Q_{l+j,\,m+k}(c)\,, \tag{3.12}$$

где

$$Q_{lm}(c) = \Pi_{lmo}\, ab \int\limits_c^\infty (a^2+t^2)^{-l-\frac{1}{2}}\,(b^2+t^2)^{-m-\frac{1}{2}}\,dt\,. \tag{3.13}$$

В свою очередь разложение $Q_{lm}(c)$ имеет вид

$$\begin{aligned} Q_{lm}(c) = N_{lm} - c\,T_{lm} + \frac{c^3}{6}\,(T_{l+1,m}+T_{l,m+1}) - \\ - \frac{c^5}{40}\,(T_{l+2,m}+2T_{l+1,m+1}+T_{l,m+2}) + O(c^7)\,. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Здесь

$$T_{lm} = \frac{\Pi_{lm0}}{a^{2l}b^{2m}}\,, \tag{3.15}$$

а N_{lm} — потенциальные факторы эллиптического диска, по определению (подробнее см. § 5), равные

$$N_{lm} = \Pi_{lm0}\, ab \int\limits_0^\infty (a^2+t^2)^{-l-\frac{1}{2}}\,(b^2+t^2)^{-m-\frac{1}{2}}\,dt\,. \tag{3.16}$$

Подстановка (3.14) в (3.12) приводит окончательно к следующему разложению:

$$\begin{aligned} M_{lm0} = cN_{lm} - c^2T_{lm} + \frac{c^3}{2}\,(N_{l+1,m}+N_{l,m+1}) - \\ - \frac{c^4}{3}\,(T_{l+1,m}+T_{l,m+1}) + \frac{c^5}{4!!}\,(N_{l+2,m}+2N_{l+1,m+1}+N_{l,m+2}) - \\ - \frac{c^6}{5!!}\,(T_{l+2,m}+2\,T_{l+1,m+1}+T_{l,m+2}) + \ldots\,. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Из (3.17) и соотношения (3.6) можно последовательно получать разложения и для M_{lmn} с отличными от нуля последними индексами. Например,

$$M_{lm1} = T_{lm} - c(N_{l+1,m} + N_{l,m+1}) + c^2(T_{l+1,m} + T_{l,m+1}) - \\ - \frac{c^3}{2}(N_{l+2,m} + 2N_{l+1,m+1} + N_{l,m+2}) + \frac{c^4}{3}(T_{l+2,m} + 2\,T_{l+1,m+1} + T_{l,m+2}) - \\ - \frac{c^5}{4!!}(N_{l+3,m} + 3N_{l+2,m+1} + 3N_{l+1,m+2} + N_{l,m+3}) + \ldots, \quad (3.18)$$

$$M_{lm2} = c^{-2}T_{lm} - (T_{l+1,m} + T_{l,m+1}) + c(N_{l+2,m} + 2N_{l+1,m+1} + N_{l,m+2}) - \\ - c^2(T_{l+2,m} + 2\,T_{l+1,m+1} + T_{l,m+2}) + \frac{c^3}{2}(N_{l+3,m} + 3N_{l+2,m+1} + 3N_{l+1,m+2} + \\ + N_{l,m+3}) - \frac{c^4}{3}(T_{l+3,m} + 3\,T_{l+2,m+1} + 3\,T_{l+1,m+2} + T_{l,m+3}) + \ldots. \quad (3.19)$$

Легко видеть, что правая часть (3.6) есть старший член разложения для M_{lmn} при $n \geqslant 1$.

Ниже для нескольких внутренних потенциальных факторов M_{lmn} (веса $l+m+n \leqslant 3$) сильно сплющенного эллипсоида приводятся их разложения по степеням c.

Таблица разложений M_{lmn} при $c \ll \min\{a, b\}$

$$M_{000} = cN_{00} - c^2 + \frac{c^3}{2}(N_{10} + N_{01}) - \frac{c^4}{3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right),$$

$$M_{100} = cN_{10} - \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^3}{2}(N_{20} + N_{11}) - \frac{c^4}{3}\left(\frac{3}{a^4} + \frac{1}{a^2b^2}\right),$$

$$M_{001} = 1 - c\,(N_{10} + N_{01}) + c^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - \\ - \frac{c^3}{2}(N_{20} + 2N_{11} + N_{02}) + \frac{c^4}{3}\left(\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2b^2} + \frac{3}{b^4}\right),$$

$$M_{110} = cN_{11} - \frac{c^2}{a^2b^2} + \frac{c^3}{2}(N_{21} + N_{12}),$$

$$M_{101} = \frac{1}{a^2} - c\,(N_{20} + N_{11}) + c^2\left(\frac{3}{a^4} + \frac{1}{a^2b^2}\right) - \frac{c^3}{2}(N_{30} + 2N_{21} + N_{12}),$$

$$M_{200} = cN_{20} - 3\frac{c^2}{a^4} + \frac{c^3}{2}(N_{30} + N_{21}),$$

$$M_{002} = \frac{1}{c^2} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + c\,(N_{20} + 2N_{11} + N_{02}) - \\ - c^2\left(\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2b^2} + \frac{3}{b^4}\right) + \frac{c^3}{2}(N_{30} + 3N_{21} + 3N_{12} + N_{03}),$$

$$M_{111} = \frac{1}{a^2b^2} - c\,(N_{21} + N_{12}) + \frac{3c^2}{a^2b^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - \frac{c^3}{2}\,(N_{31} + 2N_{22} + N_{13})\,,$$

$$M_{210} = cN_{21} - \frac{3c^2}{a^4b^2} + \frac{c^3}{2}\,(N_{31} + N_{22})\,,$$

$$M_{201} = \frac{3}{a^4} - c\,(N_{30} + N_{21}) + \frac{3c^2}{a^4}\left(\frac{5}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - \frac{c^3}{2}\,(N_{40} + 2N_{31} + N_{22})\,,$$

$$M_{102} = \frac{1}{a^2c^2} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + c\,(N_{30} + 2N_{21} + N_{12}) - \\ - \frac{3c^2}{a^2}\left(\frac{5}{a^4} + \frac{2}{a^2b^2} + \frac{1}{b^4}\right) + \frac{c^3}{2}\,(N_{40} + 3N_{31} + 3N_{22} + N_{13})\,,$$

$$M_{300} = cN_{30} - 15\frac{c^2}{a^6} + \frac{c^3}{2}\,(N_{40} + N_{31})\,,$$

$$M_{003} = \frac{3}{c^4} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \left(\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2b^2} + \frac{3}{b^4}\right) - \\ - c\,(N_{30} + 3N_{21} + 3N_{12} + N_{03}) + 3c^2\left(\frac{5}{a^6} + \frac{3}{a^4b^2} + \frac{3}{a^2b^4} + \frac{5}{b^6}\right) - \\ - \frac{c^3}{2}\,(N_{40} + 4N_{31} + 6N_{22} + 4N_{13} + N_{04})\,.$$

Недостающие формулы могут быть получены из выписанных перестановкой индексов и одновременной заменой $a \leftrightarrow b$.

3.3. Сфероид и шар

Если эллипсоид вырождается в сфероид $(a = b \neq c)$, то, как видно из определения (3.2),

$$M_{lmn} = M_{mln}\,. \tag{3.20}$$

Другое соотношение

$$\frac{M_{l+1,m,n}}{2l+1} = \frac{M_{l,m+1,n}}{2m+1} \tag{3.21}$$

следует из (3.8). Решая совместно систему уравнений (3.6), (3.7) и (3.21) относительно $M_{l+1,m,n}$, $M_{l,m+1,n}$, $M_{l,m,n+1}$, находим

$$2\,\frac{l+m+1}{2l+1}\,(a^2-c^2)M_{l+1,m,n} = -\frac{\Pi_{lmn}}{a^{2l+2m}c^{2n-2}} + (2l+2m+2n+1)M_{lmn}, \tag{3.22}$$

$$(a^2-c^2)M_{l,m,n+1} = \frac{\Pi_{lmn}}{a^{2l+2m-2}c^{2n}} - (2l+2m+2n+1)M_{lmn}. \tag{3.23}$$

Выражение для $M_{l,m+1,n}$ в силу (3.20) получается из (3.22) взаимной заменой $l \leftrightarrow m$. Таким образом, формулы (3.20), (3.22) и (3.23) позволяют в конечном счете выразить внутренние факторы M_{lmn} через продольный размагничивающий фактор сфероида $M = M_{001}$. В частности, для внутренних потенциальных факторов с весом, равным 2 и 3, будем иметь

$$M_{101} = \frac{3M-1}{2(a^2-c^2)}, \qquad M_{110} = \frac{3a^2(1-M)-2c^2}{8a^2(a^2-c^2)},$$
$$M_{200} = 3M_{110}, \qquad M_{002} = \frac{a^2-3c^2M}{c^2(a^2-c^2)}; \tag{3.24}$$

$$M_{111} = \frac{-7a^2+2c^2+15a^2M}{8a^2(a^2-c^2)^2}, \qquad M_{102} = \frac{2a^2+3c^2-15c^2M}{2c^2(a^2-c^2)^2},$$
$$M_{210} = \frac{15a^4(1-M)+8c^4-18a^2c^2}{16a^4(a^2-c^2)^2}, \qquad M_{201} = 3M_{111}, \tag{3.25}$$
$$M_{300} = 5M_{210}, \qquad M_{003} = \frac{3}{c^4} - 2M_{102}.$$

В случае $c = b = a$ из (3.6), (3.7) сразу получаем общую формулу для внутренних потенциальных факторов шара

$$M_{lmn} = \frac{(2l-1)!!\,(2m-1)!!\,(2n-1)!!}{2l+2m+2n+1}\, a^{-2(l+m+n-1)}. \tag{3.26}$$

§ 4. Внешние потенциальные факторы эллипсоида

4.1. Трехосный эллипсоид

Рассмотренные выше рекуррентные формулы для внутренних потенциальных факторов эллипсоида можно рассматривать как частное проявление более общих соотношений, связывающих величины

$$\mathscr{M}_{lmn}(\xi) = \Pi_{lmn} \frac{abc}{2} \int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{du}{Q(u)\,(a^2+u)^l\,(b^2+u)^m\,(c^2+u)^n}, \tag{4.1}$$

отличие которых от (3.2) состоит лишь в замене нижнего (нулевого) предела интегрирования на эллипсоидальную координату $\xi \geqslant 0$, которая, напоминаем, есть наибольший корень уравнения (1.6). Как будет показано в следующей главе, величины $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$ используются для описания ньютонова (кулонова) потенциала вне эллипсоида, что позволяет называть их *внешними потенциальными факторами эллипсоида.* Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1, \tag{4.2}$$

соответствующий эллипсоидальной координате ξ, будем называть *координатным.* При $\xi = 0$ координатный эллипсоид переходит в базисный (2.1), а внешние потенциальные факторы совпадают с внутренними:

$$\mathscr{M}_{lmn}(0) = M_{lmn}. \tag{4.3}$$

Формула (4.3) является частным случаем более общей формулы, устанавливающей связь между внешними и внутренними потенциальными факторами эллипсоида. Выводится эта общая формула элементарно. Действительно, если в интеграле (4.1) произвести замену $u=u'+\xi$, то получим

$$\mathscr{M}_{lmn}(\xi) = \frac{abc}{a'b'c'}\, M'_{lmn}\,, \tag{4.4}$$

где

$$a'=\sqrt{a^2+\xi}\,, \qquad b'=\sqrt{b^2+\xi}\,, \qquad c'=\sqrt{c^2+\xi}\,, \tag{4.5}$$

а M'_{lmn} — внутренний потенциальный фактор координатного (с полуосями a', b' и c') эллипсоида. Таким образом, при любых неотрицательных целых значениях l, m, n отношение $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)/M'_{lmn}$ безразмерно и равно отношению объемов базисного и координатного эллипсоидов. Если, следуя традиции, обозначать размерность квадратными скобками, то размерность потенциального фактора эллипсоида есть

$$[\mathscr{M}_{lmn}(\xi)] = [M_{lmn}] = L^{-2l-2m-2m+2} = L^{-2k+2}\,, \tag{4.6}$$

где $k=l+m+n$ — вес потенциального фактора.

Простое соотношение (4.4) играет ключевую роль в получении рекуррентных формул для внешних потенциальных факторов. Это достигается, если равенства (3.6)–(3.10) записать применительно к координатному эллипсоиду с полуосями (4.5) и внутренними потенциальными факторами M'_{lmn}, после чего, используя (4.4), перейти к $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$. Получающаяся система рекуррентных соотношений приобретает вид[1]

$$\mathscr{M}_{l+1,m,n}+\mathscr{M}_{l,m+1,n}+\mathscr{M}_{l,m,n+1}=\frac{\Pi_{lmn}\, abc}{(a^2+\xi)^{l+\frac12}(b^2+\xi)^{m+\frac12}(c^2+\xi)^{n+\frac12}}\,, \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}(a^2+\xi)\mathscr{M}_{l+1,m,n}+(b^2+\xi)\mathscr{M}_{l,m+1,n}+(c^2+\xi)\mathscr{M}_{l,m,n+1} &= \\ =(2l+2m+2n+1)\mathscr{M}_{lmn}\,,&\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\left.\begin{aligned}\left(a^2-b^2\right)\mathscr{M}_{l+1,m+1,n}&=(2l+1)\mathscr{M}_{l,m+1,n}-(2m+1)\mathscr{M}_{l+1,m,n}\,,\\ \left(b^2-c^2\right)\mathscr{M}_{l,m+1,n+1}&=(2m+1)\mathscr{M}_{l,m,l+1}-(2n+1)\mathscr{M}_{l,m+1,n}\,,\\ \left(c^2-a^2\right)\mathscr{M}_{l+1,m,n+1}&=(2n+1)\mathscr{M}_{l+1,m,n}-(2l+1)\mathscr{M}_{l,m,n+1}\,.\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Комбинируя (4.7) и (4.8), нетрудно получить соотношение

$$\begin{aligned}a^2\mathscr{M}_{l+1,m,n}+b^2\mathscr{M}_{l,m+1,n}+c^2\mathscr{M}_{l,m,n+1} &= \\ =(2l+2m+2n+1)\mathscr{M}_{lmn}-\frac{\Pi_{lmn}\, abc}{(a^2+\xi)^{l+\frac12}(b^2+\xi)^{m+\frac12}(c^2+\xi)^{n+\frac12}}\,\xi\,,&\end{aligned} \tag{4.10}$$

применять которое иногда удобнее, чем (4.8).

Таким образом, произвольный внешний потенциальный фактор эллипсоида выражается в конечном счете через факторы единичного веса $\mathscr{M}_{100}(\xi)$,

[1] Соотношения, соответствующие (4.7) и (4.8) для $l=m=n=0$, т. е. факторам единичного веса, установлены Пуассоном [281].

$\mathscr{M}_{010}(\xi)$ и $\mathscr{M}_{001}(\xi)$, а формула (4.4) позволяет при этом использовать таблицу размагничивающих факторов эллипсоида.

Отметим также, что для внешних потенциальных факторов эллипсоида справедлива формула

$$\mathscr{M}_{lmn}(\xi) = \left(\widehat{\partial}_a\right)^l \left(\widehat{\partial}_b\right)^m \left(\widehat{\partial}_c\right)^n \mathscr{M}_{000}(\xi)\,, \tag{4.11}$$

аналогичная (3.1), при обязательном условии, что *при дифференцировании величина* ξ *рассматривается как постоянная.*

4.2. Асимптотические формулы

На большом удалении от эллипсоида, когда наряду с $r \gg \max\{a, b, c\}$ имеет место (в соответствии с (4.2)) и неравенство $\xi \gg \max\{a^2, b^2, c^2\}$, точные формулы для $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$ можно заменить их асимптотическими разложениями. Первый член асимптотического разложения находится элементарно. Так как при $\xi \to \infty$ выполняются приближенные равенства $a^2+\xi \approx \approx b^2+\xi \approx c^2+\xi \approx \xi$, то, согласно (4.2), имеет место и $\xi \approx r^2$. Поэтому

$$\mathscr{M}_{lmn}(\xi) \approx \Pi_{lmn}\frac{abc}{2}\int\limits_{r^2}^{\infty}\frac{du}{u^{l+m+n+\frac{3}{2}}} = \frac{\Pi_{lmn}}{2(l+m+n)+1}\,\frac{abc}{r^{2(l+m+n)+1}}\,. \tag{4.12}$$

Прежде, чем искать следующие члены разложения $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$, найдем аналогичное разложение для самой эллипсоидальной координаты ξ, используя формулу Тейлора для функции $\xi = \xi(a^2, b^2, c^2)$. Если для производных ввести обозначение

$$\xi_{lmn}\left(a^2, b^2, c^2\right) \equiv \frac{\partial^{\,l+m+n}}{\partial(a^2)^l\,\partial(b^2)^m\,\partial(c^2)^n}\,\xi\left(a^2, b^2, c^2\right)\,,$$

то несколько первых членов ряда Тейлора, соответствующие разложению с точностью до членов порядка L^6/r^4 включительно (L — характерный размер эллипсоида), можно записать в виде

$$\begin{aligned}\xi\left(a^2, b^2, c^2\right) \approx \xi_{000}(0,0,0) + \left\langle a^2\xi_{100}(0,0,0)\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle a^4\xi_{200}(0,0,0)\right\rangle + \\ + \left\langle a^2b^2\xi_{110}(0,0,0)\right\rangle + \frac{1}{6}\left\langle a^6\xi_{300}(0,0,0)\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle a^4b^2\xi_{210}(0,0,0)\right\rangle + \\ + \frac{1}{2}\left\langle a^4c^2\xi_{201}(0,0,0)\right\rangle + a^2b^2c^2\xi_{111}(0,0,0)\,,\end{aligned}$$

где угловыми скобками $\langle\ldots\rangle$ обозначена операция циклического сложения, т. е. сумма трех слагаемых циклической перестановки, одно из которых заключено в скобки. Вычисляя производные функции ξ, заданной в неявном виде уравнением (4.2), окончательно получаем

$$\begin{aligned}\xi\left(a^2, b^2, c^2\right) = r^2 - \left\langle a^2n_x^2\right\rangle + r^{-2}\left(\left\langle a^4n_x^2\right\rangle - \left\langle a^2n_x^2\right\rangle^2\right) - \\ - r^{-4}\left(\left\langle a^6n_x^2\right\rangle + 2\left\langle a^2n_x^2\right\rangle^3 - 3\left\langle a^4n_x^2\right\rangle\left\langle a^2n_x^2\right\rangle\right) + O\left(L^8/r^6\right)\,,\end{aligned} \tag{4.13}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r = \{x/r,\, y/r,\, z/r\}$, а $L = \max\{a, b, c\}$.

Возвращаясь к факторам $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$, заметим, что замена $u = 1/v^2$ переменной интегрирования в (4.1) дает

$$\mathscr{M}_{lmn}(\xi) = \Pi_{lmn}\, abc\, J_{lmn}(\varepsilon)\,.$$

Здесь

$$J_{lmn}(\varepsilon) = \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{v^{2l+2m+2n}\, dv}{(a^2v^2+1)^{l+\frac{1}{2}}(b^2v^2+1)^{m+\frac{1}{2}}(c^2v^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}\,, \tag{4.14}$$

$$\varepsilon = \xi^{-1/2}\,. \tag{4.15}$$

При больших значениях r величина ε мала, так что можно разложить интеграл (4.14) в ряд по степеням ε:

$$\mathscr{M}_{lmn}(\xi) = \Pi_{lmn}\, abc \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2k+1}}{(2k+1)!}\, J_{lmn}^{(2k+1)}(0)\,.$$

Этот ряд содержит только нечетные степени ε, т. к. при $\varepsilon = 0$ производные четного порядка $J_{lmn}^{(2k)}(0) = 0$.

Мы ограничимся разложением $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$ до членов порядка r^{-7} включительно. При этом, как видно из (4.12), мы получим поправки к выражению (4.12) лишь для факторов веса $l{+}m{+}n \leqslant 2$.

Из выражений (4.15) и (4.13) получаем

$$\varepsilon \approx \frac{1}{2r}\left[2 + \frac{\left\langle a^2n_x^2\right\rangle}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{7}{2}\left\langle a^2n_x^2\right\rangle^2 - \left\langle a^4n_x^2\right\rangle\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^6}\left(\frac{33}{8}\left\langle a^2n_x^2\right\rangle^3 - \frac{9}{2}\left\langle a^4n_x^2\right\rangle\left\langle a^2n_x^2\right\rangle + \left\langle a^6n_x^2\right\rangle\right)\right],$$

$$\varepsilon^3 \approx \frac{1}{r^3}\left[1 + \frac{3}{2r^2}\left\langle a^2n_x^2\right\rangle + \frac{3}{2r^4}\left(\frac{9}{4}\left\langle a^2n_x^2\right\rangle^2 - \left\langle a^4n_x^2\right\rangle\right)\right],$$

$$\varepsilon^5 \approx \frac{1}{r^5}\left(1 + \frac{5}{2r^2}\left\langle a^2n_x^2\right\rangle\right), \qquad \varepsilon^7 \approx \frac{1}{r^7}\,.$$

Получающиеся из (4.15) значения производных $J_{lmn}^{(2k+1)}(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ даются формулами

$$J_{lmn}^{(1)}(0) = \begin{cases} 1, & l{+}m{+}n{=}0, \\ \\ 0, & l{+}m{+}n{>}0, \end{cases} \qquad J_{lmn}^{(3)}(0) = \begin{cases} -\langle a^2\rangle, & l{+}m{+}n{=}0, \\ 2, & l{+}m{+}n{=}1, \\ 0, & l{+}m{+}n{>}1, \end{cases}$$

$$J_{lmn}^{(5)}(0) = \begin{cases} 3\left(3\left\langle a^4\right\rangle + 2\left\langle a^2b^2\right\rangle\right), & l+m+n=0, \\ -12(a^2+b^2+c^2), & l=1,\ m+n=0, \\ 4!\,, & l+m+n=2, \\ 0, & l+m+n>2, \end{cases}$$

$$J_{lmn}^{(7)}(0) = \begin{cases} -45\left(5\left\langle a^6\right\rangle+3\left\langle a^4b^2\right\rangle+3\left\langle a^4c^2\right\rangle+2a^2b^2c^2\right), & l+m+n=0, \\ 90\left[3\left(4a^4+\left\langle a^4\right\rangle\right)+2\left(3\left\langle a^2b^2\right\rangle-2b^2c^2\right)\right], & l=1,\ m+n=0, \\ -3\cdot 5!\left(4a^2+\left\langle a^2\right\rangle\right), & l=2,\ m=n=0, \\ -3\cdot 5!\left(3\left\langle a^2\right\rangle-2c^2\right), & l=m=1,\ n=0, \\ 6!\,, & l+m+n=3, \\ 0, & l+m+n>3. \end{cases}$$

Окончательные выражения оформлены как

Таблица асимптотических разложений $\mathscr{M}_{lmn}$

$$\mathscr{M}_{000}(\xi) = \frac{abc}{2}\left\{\frac{2}{r}+\frac{1}{r^3}\left(\left\langle a^2n_x^2\right\rangle-\frac{1}{3}\left\langle a^2\right\rangle\right)+\frac{1}{r^5}\left(\frac{7}{4}\left\langle a^2n_x^2\right\rangle^2-\left\langle a^4n_x^2\right\rangle+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{3}{20}\left\langle a^4\right\rangle+\frac{\left\langle a^2b^2\right\rangle}{10}-\frac{\left\langle a^2\right\rangle}{2}\left\langle a^2n_x^2\right\rangle\right)+\frac{1}{r^7}\left[\frac{33}{8}\left\langle a^2n_x^2\right\rangle^3-\frac{9}{2}\left\langle a^4n_x^2\right\rangle\left\langle a^2n_x^2\right\rangle+\right.$$
$$+\left\langle a^6n_x^2\right\rangle-\frac{\left\langle a^2\right\rangle}{2}\left(\frac{9}{4}\left\langle a^2n_x^2\right\rangle^2-\left\langle a^4n_x^2\right\rangle\right)+\frac{\left\langle a^2n_x^2\right\rangle}{8}\left(3\left\langle a^4\right\rangle+2\left\langle a^2b^2\right\rangle\right)-$$
$$\left.\left.-\frac{1}{56}\left(5\left\langle a^6\right\rangle+3\left\langle a^2b^2(a^2+b^2)\right\rangle+2a^2b^2c^2\right)\right]\right\}+O\left(L^{11}/r^9\right)\ ; \quad (4.16)$$

$$\mathscr{M}_{100}(\xi) = \frac{abc}{3r^3}+\frac{abc}{2r^5}\left(\left\langle a^2n_x^2\right\rangle-\frac{1}{5}\left\langle a^2\right\rangle-\frac{2}{5}a^2\right)+\frac{abc}{4r^7}\left[\frac{9}{2}\left\langle a^2n_x^2\right\rangle^2-\right.$$
$$-2\left\langle a^4n_x^2\right\rangle-\left\langle a^2n_x^2\right\rangle\left(\left\langle a^2\right\rangle+2a^2\right)+\frac{3}{14}\left(\left\langle a^4\right\rangle+4a^4\right)+$$
$$\left.+\frac{1}{7}\left(3\left\langle a^2b^2\right\rangle-2b^2c^2\right)\right]+O\left(L^9/r^9\right)\ ; \quad (4.17)$$

$$\mathscr{M}_{110}(\xi) = \frac{abc}{5r^5}+\frac{abc}{2r^7}\left(\left\langle a^2n_x^2\right\rangle-\frac{3}{7}\left\langle a^2\right\rangle+\frac{2}{7}c^2\right)+O\left(L^7/r^9\right), \quad (4.18)$$

$$\mathscr{M}_{200}(\xi) = \frac{3abc}{5r^5}+\frac{3abc}{2r^7}\left(\left\langle a^2n_x^2\right\rangle-\frac{1}{7}\left\langle a^2\right\rangle-\frac{4}{7}a^2\right)+O\left(L^7/r^9\right). \quad (4.19)$$

Выражения для $\mathscr{M}_{010}$, $\mathscr{M}_{001}$, $\mathscr{M}_{011}$, $\mathscr{M}_{101}$, $\mathscr{M}_{020}$ и $\mathscr{M}_{002}$ получаются из (4.17), (4.18) и (4.19) с помощью циклической перестановки.

4.3. Сфероид и шар

Для сфероида $(a = b \neq c)$ рекуррентные формулы таковы:

$$\frac{2l+2m+2}{2l+1}\,(a^2-c^2)\,\mathscr{M}_{l+1,m,n} = -\frac{\Pi_{lmn}\,a^2c}{(a^2+\xi)^{l+m+1}(c^2+\xi)^{n-\frac{1}{2}}} + \\ + (2l+2m+2n+1)\mathscr{M}_{lmn}\,, \quad (4.20)$$

$$\mathscr{M}_{lmn} = \mathscr{M}_{mln}\,, \quad (4.21)$$

$$(a^2-c^2)\mathscr{M}_{l,m,n+1} = \frac{\Pi_{lmn}\,a^2c}{(a^2+\xi)^{l+m}(c^2+\xi)^{n+\frac{1}{2}}} - (2l+2m+2n+1)\mathscr{M}_{lmn}\,, \quad (4.22)$$

где

$$\xi = \frac{1}{2}\left\{x^2+y^2+z^2-a^2-c^2+\sqrt{(a^2-c^2-x^2-y^2+z^2)^2+4(x^2+y^2)z^2}\right\}. \quad (4.23)$$

Наконец, для шара $(c = b = a)$, учитывая, что

$$\xi = r^2 - a^2\,, \quad (4.24)$$

где $r^2 = x^2+y^2+z^2$, получаем общее выражение для внешних потенциальных факторов

$$\mathscr{M}_{lmn}(\xi) = \frac{\Pi_{lmn}}{2l+2m+2n+1}\;\frac{a^3}{r^{2l+2m+2n+1}}\,. \quad (4.25)$$

Следует отметить, что при вырождении эллипсоида в шар приближенная формула (4.12) становится точной — (4.25). Поэтому при переходе к шару поправочные члены в (4.16)–(4.19) обращаются в нуль.

§ 5. Потенциальные факторы эллиптического диска

5.1. Определения и свойства

Эллиптический диск, или эллиптическая пластина нулевой толщины, является предельным случаем эллипсоида, когда одна из его осей (пусть это будет ось, имеющая длину $2c$) стремится к нулю.

Определим внешние $\mathscr{N}_{lmn}(\xi)$ и внутренние N_{lm} потенциальные факторы эллиптического диска[1] формулами:

$$\mathscr{N}_{lmn}(\xi) = \lim_{c\to 0}\frac{\mathscr{M}_{lmn}(\xi)}{c}\,, \qquad N_{lm} = \lim_{c\to 0}\frac{M_{lm0}}{c}\,. \quad (5.1)$$

Внутренняя область диска — это сама его поверхность $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$, лежащая в плоскости $z = 0$. Поскольку *внутренний потенциал* диска не зависит от z, то для его описания используются только потенциальные факторы с нулевым третьим индексом. Это позволяет ограничить маркировку внутренних факторов диска двумя индексами.

[1] Изложение опирается на работы [495, 497].

Как видно из (5.1) и (4.6), размерности потенциальных факторов (одинакового веса) эллипсоида и эллиптического диска никогда не совпадают. Отметим также, что среди потенциальных факторов эллиптического диска нет безразмерных.

Из определений (5.1) и выражений (3.2), (4.1) следует, что

$$N_{lm} = \Pi_{lm0}\,\frac{ab}{2}\int\limits_0^\infty (a^2+u)^{-l-\frac{1}{2}}\,(b^2+u)^{-m-\frac{1}{2}}\,u^{-\frac{1}{2}}\,du\,, \tag{5.2}$$

$$\mathscr{N}_{lmn}(\xi) = \Pi_{lmn}\,\frac{ab}{2}\int\limits_\xi^\infty (a^2+u)^{-l-\frac{1}{2}}\,(b^2+u)^{-m-\frac{1}{2}}\,u^{-n-\frac{1}{2}}\,du\,, \tag{5.3}$$

где эллипсоидальная координата ξ определяется теперь как положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{\xi} = 1\,.$$

Если в интегралах (5.2) и (5.3) произвести замену $u = t^2$, то для N_{lm} получится выражение (3.16), а для $\mathcal{N}_{lm0}(\xi)$ — полезное соотношение

$$\mathscr{N}_{lm0}(\xi) = Q_{lm}(\sqrt{\xi})\,, \tag{5.4}$$

где функция Q_{lm} определена формулой (3.13).

Очевидно, что при $n=0$ и $\xi=0$

$$\mathscr{N}_{lm0}(0) = N_{lm}\,. \tag{5.5}$$

Внешние факторы эллиптического диска выражаются через внутренние потенциальные факторы эллипсоида с помощью формулы

$$\mathscr{N}_{lmn}(\xi) = \frac{ab}{a'b'c'}\,M'_{lmn}\,, \tag{5.6}$$

где фактор M'_{lmn} соответствует эллипсоиду с полуосями $a'=\sqrt{a^2+\xi}$, $b'= =\sqrt{b^2+\xi}$, $c'=\sqrt{\xi}$. Соотношение (5.6) следует из (4.4) и (5.1).

5.2. Рекуррентные формулы

Рекуррентные формулы для внутренних N_{lm} и внешних $\mathscr{N}_{lmn}(\xi)$ потенциальных факторов эллиптического диска получаются в результате предельного перехода (5.1) из соотношений (3.7), (3.8), взятых при $n=0$, и соотношений (4.7)–(4.9) и имеют следующий вид:

$$a^2 N_{l+1,m} + b^2 N_{l,m+1} = (2l+2m+1)N_{lm}\,, \tag{5.7}$$

$$\left(a^2-b^2\right) N_{l+1,m+1} = (2l+1)N_{l,m+1} - (2m+1)N_{l+1,m}\,, \tag{5.8}$$

$$\mathscr{N}_{l+1,m,n} + \mathscr{N}_{l,m+1,n} + \mathscr{N}_{l,m,n+1} = \frac{\Pi_{lmn}\,ab}{(a^2+\xi)^{l+\frac{1}{2}}\,(b^2+\xi)^{m+\frac{1}{2}}\,\xi^{n+\frac{1}{2}}}\,, \tag{5.9}$$

$$(a^2+\xi)\mathscr{N}_{l+1,m,n}+(b^2+\xi)\mathscr{N}_{l,m+1,n}+\xi\mathscr{N}_{l,m,n+1}= \\ =(2l+2m+2n+1)\mathscr{N}_{lmn}\,, \quad (5.10)$$

$$\left(a^2-b^2\right)\mathscr{N}_{l+1,m+1,n}=(2l+1)\mathscr{N}_{l,m+1,n}-(2m+1)\mathscr{N}_{l+1,m,n}\,, \quad (5.11)$$

$$a^2\mathscr{N}_{l+1,m,n+1}=(2l+1)\mathscr{N}_{l,m,n+1}-(2n+1)\mathscr{N}_{l+1,m,n}\,, \quad (5.12)$$

$$b^2\mathscr{N}_{l,m+1,n+1}=(2m+1)\mathscr{N}_{l,m,l+1}-(2n+1)\mathscr{N}_{l,m+1,n}\,. \quad (5.13)$$

Если внешние потенциальные факторы эллиптического диска выражаются через неполные эллиптические интегралы (это видно из формул (5.6) и (2.6)), то внутренние его факторы выражаются через полные эллиптические интегралы. В частности, при $a>b$ из (2.6), (1.21), (1.23) и (5.1) получаем

$$N_{00}=b\boldsymbol{K}\,, \qquad N_{10}=\frac{b}{a^2k^2}\,(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{E})\,, \qquad N_{01}=\frac{1}{bk^2}\,(\boldsymbol{E}-\frac{b^2}{a^2}\,\boldsymbol{K})\,, \quad (5.14)$$

где $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{E}$ — полные эллиптические интегралы (см., например, [161, 447]) первого и второго рода, модуль которых равен эксцентриситету диска $k=\sqrt{1-(b/a)^2}$.

5.3. Асимптотические формулы

Рассмотрим асимптотические формулы для внешних потенциальных факторов эллиптического диска. Вблизи диска, когда $\xi \ll \min\left\{a^2, b^2\right\}$, имеет место разложение

$$\mathscr{N}_{lm0}(\xi)=N_{lm}-\sqrt{\xi}\left[T_{lm}-\frac{\xi}{6}\,(T_{l+1,m}+T_{l,m+1})+ \right. \\ \left. +\frac{\xi^2}{40}(T_{l+2,m}+2T_{l+1,m+1}+T_{l,m+2})-\ldots\right]\,, \quad (5.15)$$

вытекающее из (5.4) и (3.14). Аналогичные разложения для $\mathscr{N}_{lmn}(\xi)$ с ненулевым последним индексом легко получить, используя (5.9) и (5.15). Первый член такого разложения имеет вид

$$\mathscr{N}_{lmn}(\xi)\approx\frac{\Pi_{l,m,n-1}}{a^{2l}\,b^{2m}\,\xi^{n-\frac{1}{2}}} \qquad (n\geqslant 1)\,. \quad (5.16)$$

При $r^2=x^2+y^2+z^2 \gg \max\left\{a^2,b^2\right\}$, т. е. на больших расстояниях от диска, из (5.1) и (4.12) получаем

$$\mathscr{N}_{lmn}(\xi)\approx\frac{\Pi_{lmn}}{2(l+m+n)+1}\;\frac{ab}{r^{2(l+m+n)+1}}\,. \quad (5.17)$$

Используя (4.16)–(4.19), нетрудно получить и более точные асимптотические формулы, учитывающие зависимость $\mathscr{N}_{lmn}$ от направления на точку наблюдения, характеризуемого единичным вектором $\mathbf{n}=\mathbf{r}/r$. Например,

$$\mathscr{N}_{001}(\xi)=\frac{ab}{3r^3}+\frac{ab}{2r^5}\left(a^2n_x^2+b^2n_y^2-\frac{1}{5}a^2-\frac{1}{5}b^2\right)+ \\ +\frac{ab}{4r^7}\left[\frac{9}{2}\,\left(a^2n_x^2+b^2n_y^2\right)^2-2a^4n_x^2-2b^4n_y^2+\frac{1}{7}\,a^2b^2+ \right. \\ \left. +\frac{3}{14}\,\left(a^4+b^4\right)+\left(a^2+b^2\right)\left(a^2n_x^2+b^2n_y^2\right)\right]+O\left(\frac{L^8}{r^9}\right)\,, \quad (5.18)$$

$$\mathscr{N}_{011}(\xi) = \frac{ab}{5r^5} + \frac{ab}{2r^7}\left(a^2 n_x^2 + b^2 n_y^2 - \frac{1}{7}\,a^2 - \frac{3}{7}\,b^2\right) + O\left(\frac{L^6}{r^9}\right), \qquad (5.19)$$

$$\mathscr{N}_{002}(\xi) = \frac{3ab}{5r^5} + \frac{3ab}{2r^7}\left(a^2 n_x^2 + b^2 n_y^2 - \frac{1}{7}\,a^2 - \frac{1}{7}\,b^2\right) + O\left(\frac{L^6}{r^9}\right). \qquad (5.20)$$

Мы ограничились здесь случаями с ненулевым последним индексом у $\mathscr{N}_{lmn}$.

5.4. Круглый диск

При вырождении эллиптического диска в круглый $(a = b)$ интегралы (5.2) и (5.3) перестают быть эллиптическими. В частности, внутренние потенциальные факторы круглого диска даются формулой

$$N_{lm} = \pi\,\frac{(2l-1)!!\,(2m-1)!!\,(2l+2m-1)!!}{2^{\,l+m+1}\,(l+m)!\,a^{2l+2m-1}}. \qquad (5.21)$$

Рекуррентные формулы для внешних потенциальных факторов круглого диска проще всего получить с помощью предельного перехода (5.1) из рекуррентных формул (4.20)–(4.22) для сфероида. Результат имеет вид

$$\frac{2(l+m+1)}{2l+1}\,a^2\mathscr{N}_{l+1,m,n} = (2l+2m+2n+1)\mathscr{N}_{lmn} - \frac{\Pi_{lmn}\,a^2}{(a^2+\xi)^{l+m+1}\xi^{n-\frac{1}{2}}}, \qquad (5.22)$$

$$\mathscr{N}_{lmn} = \mathscr{N}_{mln}, \qquad (5.23)$$

$$a^2\mathscr{N}_{l,m,n+1} = \frac{\Pi_{lmn}\,a^2}{(a^2+\xi)^{\,l+m}\,\xi^{\,n+\frac{1}{2}}} - (2l+2m+2n+1)\mathscr{N}_{lmn}, \qquad (5.24)$$

где

$$\xi = \frac{1}{2}\left[\left(r^2-a^2\right) + \sqrt{\left(r^2-a^2\right)^2 + 4a^2z^2}\,\right].$$

Применяя эти формулы к выражению

$$\mathscr{N}_{000}(\xi) = a\,\mathrm{arctg}\left(\frac{a}{\sqrt{\xi}}\right), \qquad (5.25)$$

являющемуся следствием (5.6) и формул (2.10), (2.12) и (2.14) для сплющенного сфероида, можно найти выражения для факторов ненулевого веса. В частности,

$$\mathscr{N}_{100} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a}{\sqrt{\xi}} - \frac{\sqrt{\xi}}{a^2+\xi}\right), \qquad \mathscr{N}_{001} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} - \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a}{\sqrt{\xi}}. \qquad (5.26)$$

§ 6. Потенциальные факторы эллиптического цилиндра

6.1. Определения и свойства

Уравнение границы

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (6.1)$$

эллиптического цилиндра получается из уравнения (1.1) эллипсоидальной поверхности при $c\to\infty$.

С аналогичным предельным переходом связано и определение потенциальных факторов эллиптического цилиндра. Именно будем называть[1], *внутренними* $M_{lm} \equiv M_{lm}^{(i)}$ и *внешними* $\mathscr{M}_{lm}(\xi) \equiv M_{lm}^{(e)}$ *потенциальными факторами эллиптического цилиндра* величины

$$M_{lm}^{(i,e)} = \lim_{c\to\infty} M_{lm0}^{(i,e)} = \Pi_{lm0}\frac{ab}{2}\int\limits_{0,\,\xi}^{\infty}\frac{du}{(a^2+u)^{l+\frac{1}{2}}\,(b^2+u)^{m+\frac{1}{2}}}\,. \tag{6.2}$$

Здесь ξ — неотрицательный корень квадратного уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} = 1\,, \tag{6.3}$$

или – в явном виде –

$$\xi = \frac{1}{2}\left\{x^2+y^2-a^2-b^2+\sqrt{(x^2-y^2-a^2+b^2)^2+4x^2y^2}\right\}.$$

Наряду с отличным от нуля пределом (6.2), имеет место и нулевой:

$$\lim_{c\to\infty} M_{lmn}^{(i,e)} = 0 \qquad \text{при} \qquad n>0\,. \tag{6.4}$$

Этот результат сразу следует из определений (3.2) и (4.1).

При выполнении предельного перехода часто полезна формула

$$\lim_{c\to\infty} c^{2n} M_{lmn}^{(i,e)} = (2n-1)!!\,M_{lm}^{(i,e)} \qquad (l+m\geqslant 1)\,, \tag{6.5}$$

являющаяся следствием многократного использования (3.10) с учетом (6.2) и (6.4).

Особенностью двумерной геометрии является логарифмическая расходимость интегралов

$$M_{00}^{(i,e)} = \frac{ab}{2}\int\limits_{0,\,\xi}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{(a^2+u)\,(b^2+u)}} = ab\,\ln(\sqrt{a^2+u}+\sqrt{b^2+u})\Big|_{0,\,\xi}^{\infty}, \tag{6.6}$$

соответствующих потенциальным факторам с нулевым весом. В дальнейшем вместо двух таких потенциальных факторов эллиптического цилиндра с двумя нулевыми индексами мы предпочтем использовать только один — *логарифмический фактор эллиптического цилиндра*, представляющий собой их разность

$$\mathscr{L}_{00}(\xi) \equiv M_{00} - \mathscr{M}_{00}(\xi) = \frac{ab}{2}\int\limits_{0}^{\xi}\frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)}} =$$

$$= ab\,\ln\frac{\sqrt{a^2+\xi}+\sqrt{b^2+\xi}}{a+b}\,. \tag{6.7}$$

[1] Изложение опирается на работы [517, 518].

В отличие от потенциальных факторов эллипсоида интегралы (6.2) выражаются через элементарные функции. Например,

$$
\begin{gathered}
M_{10} = \frac{b}{a+b}\,; \qquad M_{20} = \frac{b\,(2a+b)}{a^2\,(a+b)^2}\,, \qquad M_{11} = (a+b)^{-2}\,; \\
M_{30} = \frac{b\,(8a^2+9ab+3b^2)}{a^4\,(a+b)^3}\,, \qquad M_{21} = \frac{3a+b}{a^2\,(a+b)^3}\,.
\end{gathered} \tag{6.8}
$$

Формулы для M_{ml} получаются из M_{lm} взаимной заменой $a \leftrightarrow b$. Первая из формул (6.8) для фактора с единичным весом описывает безразмерный, как и в случае эллипсоида, фактор размагничивания эллиптического цилиндра.

Приведем также общую формулу для факторов вида M_{l0}:

$$
\begin{aligned}
M_{l0} &= (2l-1)!!\,ab \int\limits_b^\infty (a^2-b^2+t^2)^{-l-\frac12}\,dt = \\
&= \frac{(2l-1)!!\,ab}{(a^2-b^2)^l} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(-1)^k C_{l-1}^k}{2k+1} \left(1 - \frac{b^{2k+1}}{a^{2k+1}}\right) \qquad (l \geqslant 1)\,.
\end{aligned} \tag{6.9}
$$

Между внешними и внутренними потенциальными факторами эллиптического цилиндра существует связь

$$
\mathscr{M}_{lm}(\xi) = \frac{ab}{a'b'}\,M'_{lm}\,, \tag{6.10}
$$

являющаяся результатом предельного перехода при $c \to \infty$ в (4.4). Здесь M'_{lm} — внутренний фактор эллиптического цилиндра с полуосями $a' = \sqrt{a^2+\xi}$ и $b' = \sqrt{b^2+\xi}$.

6.2. Рекуррентные формулы

Система рекуррентных соотношений для внутренних и внешних потенциальных факторов эллиптического цилиндра дается формулами

$$
M_{l+1,m} + M_{l,m+1} = \frac{(2l-1)!!\,(2m-1)!!}{a^{2l}\,b^{2m}}\,, \tag{6.11}
$$

$$
a^2 M_{l+1,m} + b^2 M_{l,m+1} = \begin{cases} ab, & l+m=0, \\ 2(l+m)M_{lm}, & l+m>0, \end{cases} \tag{6.12}
$$

$$
\left(a^2-b^2\right) M^{(i,e)}_{l+1,m+1} = (2l+1)M^{(i,e)}_{l,m+1} - (2m+1)M^{(i,e)}_{l+1,m}\,, \tag{6.13}
$$

$$
\mathscr{M}_{l+1,m}(\xi) + \mathscr{M}_{l.m+1}(\xi) = \frac{(2l-1)!!\,(2m-1)!!\,ab}{(a^2+\xi)^{l+\frac12}\,(b^2+\xi)^{m+\frac12}}\,, \tag{6.14}
$$

$$
(a^2+\xi)\mathscr{M}_{l+1,m}(\xi)+(b^2+\xi)\mathscr{M}_{l,m+1}(\xi) = \begin{cases} ab, & l+m=0, \\ 2(l+m)\mathscr{M}_{lm}(\xi), & l+m>0. \end{cases} \tag{6.15}
$$

Эти общие формулы сразу получаются в результате предельного перехода при $c \to \infty$ из аналогичных соотношений (3.6)–(3.8) и (4.7)–(4.9) для эллипсоида, если учесть (6.4). Соотношение (6.12) для факторов единичного веса проверяется непосредственно. А аналогичная формула (6.15) следует из него, если воспользоваться связью (6.10).

Отметим, что для вычисления потенциальных факторов эллиптического цилиндра, наряду с интегральным (по формуле (6.2)) и алгебраическим (по формулам (6.11)–(6.15)) методами, существует и дифференциальный метод, связанный с применением операторов $\widehat{\partial}_a$ и $\widehat{\partial}_b$ (см. (2.1)). Он основывается на очевидных равенствах

$$M_{l+1,m+1}^{(i,e)} = \widehat{\partial}_a M_{l,m+1}^{(i,e)} = \widehat{\partial}_b M_{l+1,m}^{(i,e)} = \widehat{\partial}_a^l \widehat{\partial}_b^{m+1} M_{10}^{(i,e)} = \widehat{\partial}_a^{l+1} \widehat{\partial}_b^m M_{01}^{(i,e)} ,$$

причем применительно к внешним потенциальным факторам *величину* ξ *при дифференцировании следует рассматривать как постоянную.*

6.3. Асимптотические формулы

Рассмотрим вопрос об асимптотике внешних потенциальных факторов эллиптического цилиндра. Будем обозначать расстояние от оси цилиндра (цилиндрический радиус) посредством r. Так что $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Если $r \gg \max\{a, b\}$ (в этом случае и $\xi \gg \max\{a^2, b^2\}$), то асимптотическая формула для ξ может быть получена, очевидно, из (4.13), в которой следует исключить зависимость от z и считать r цилиндрическим радиусом. Таким образом,

$$\begin{aligned}\xi\left(a^2, b^2\right) = r^2 - a^2 n_x^2 - b^2 n_y^2 + r^{-2}\left[a^4 n_x^2 + b^4 n_y^2 - \left(a^2 n_x^2 + b^2 n_y^2\right)^2\right] - \\ - r^{-4}\left[a^6 n_x^2 + b^6 n_y^2 + 2\left(a^2 n_x^2 + b^2 n_y^2\right)^3 - \right. \\ \left. -3\left(a^4 n_x^2 + b^4 n_y^2\right)\left(a^2 n_x^2 + b^2 n_y^2\right)\right] + O\left(L^8/r^6\right) . \quad (6.16)\end{aligned}$$

Используя (6.16) для нахождения асимптотического разложения фактора $\mathscr{L}_{00}(\xi)$, получаем

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{00}(\xi) = ab \ln\frac{2r}{a+b} + \frac{ab}{4r^2}\left[a^2+b^2-2\left(a^2 n_x^2+b^2 n_y^2\right)\right] - \frac{ab}{32r^4}\left[a^4+b^4+\right. \\ \left. +4a^2b^2+22\left(a^2 n_x^2+b^2 n_y^2\right)^2-16\left(a^4 n_x^2+b^4 n_y^2\right) - 6\left(a^2+b^2\right)\left(a^2 n_x^2+b^2 n_y^2\right)\right] + \\ + \frac{ab}{32\,r^6}\left\{a^6+b^6+\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)\left(a^4+b^4\right)+6\left(a^2+b^2\right)\left(a^2 n_x^2+b^2 n_y^2\right)^2+\right. \\ +12\left(a^2 n_x^2+b^2 n_y^2\right)^3+\frac{1}{6}\left[a^2+b^2-2\left(a^2 n_x^2+b^2 n_y^2\right)\right]^3-16\left(a^6 n_x^2+b^6 n_y^2\right)+ \\ - 6\left[a^4 n_x^2+b^4 n_y^2-\left(a^2 n_x^2+b^2 n_y^2\right)^2\right]\left[10\left(a^2 n_x^2+b^2 n_y^2\right)-a^2-b^2\right] - \\ \left. - \left(a^2 n_x^2+b^2 n_y^2\right)\left(5a^4+5b^4+2a^2b^2\right)\right\} + O\left(L^{10}/r^8\right) . \quad (6.17)\end{aligned}$$

Для факторов $\mathscr{M}_{lm}(\xi)$ первый член асимптотики определяется без труда и равен

$$\mathscr{M}_{lm}(\xi) \approx \Pi_{lm0}\frac{ab}{2}\int\limits_{r^2}^{\infty} u^{-l-m-1}\,du = \frac{(2l-1)!!\,(2m-1)!!}{2(l+m)}\;\frac{ab}{r^{2(l+m)}}\,, \qquad (6.18)$$

где $l+m>0$. Чтобы найти следующие члены разложения, представим $\mathscr{M}_{lm}(\xi)$, перейдя в (6.2) к переменной интегрирования $v=u^{-1/2}$, в виде

$$\mathscr{M}_{lm}(\xi) = (2l-1)!!\,(2m-1)!!\,ab\,I_{lm}(\varepsilon)\,,$$

где $\varepsilon=\xi^{-1/2}$, а

$$I_{lm}(\varepsilon) = \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{v^{2(l+m)-1}\,dv}{(a^2v^2+1)^{l+\frac12}\,(b^2v^2+1)^{m+\frac12}} \qquad\qquad l+m>0\,.$$

Разложение этого интеграла по степеням малого параметра ε приводит к формуле

$$\mathscr{M}_{lm}(\xi) = (2l-1)!!\,(2m-1)!!\,ab\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{2k}}{(2k)!}\,I_{lm}^{(2k)}(0)\,,$$

содержащей только четные степени ε, так как при $\varepsilon=0$ производные нечетного порядка $I_{lm}^{(2k-1)}(0)=0$.

Если ограничиться разложением $\mathscr{M}_{lm}(\xi)$ до членов порядка r^{-6} включительно, то поправки к (6.18) распространяются лишь на факторы с весом $l+m\leqslant 2$. Учитывая, что

$$\varepsilon^2 \approx \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(a^2n_x^2+b^2n_y^2\right) + \frac{1}{r^6}\left[2\left(a^2n_x^2+b^2n_y^2\right)^2 - \left(a^4n_x^2+b^4n_y^2\right)\right],$$

$$\varepsilon^4 \approx \frac{1}{r^4} + \frac{2}{r^6}\left(a^2n_x^2+b^2n_y^2\right), \qquad \varepsilon^6 \approx \frac{1}{r^6}$$

и что значения производных $I_{lm}^{(2k)}(\varepsilon)$ при $\varepsilon=0$ равны

$$I_{lm}^{(2)}(0) = \begin{cases} 1, & l+m=1,\\ \\ 0, & l+m>1,\end{cases} \qquad I_{lm}^{(4)}(0) = \begin{cases} -3(3a^2+b^2), & l=1,\,m=0,\\ 6, & l+m=2,\\ 0, & l+m>2,\end{cases}$$

$$I_{lm}^{(6)}(0) = \begin{cases} 45\left(5a^4+b^4+2a^2b^2\right), & l=1,\,m=0,\\ -60(5a^2+b^2), & l=2,\,m=0,\\ -180(a^2+b^2), & l=m=1,\\ 120\,, & l+m=3,\\ 0, & l+m>3,\end{cases}$$

приходим окончательно к следующим асимптотическим формулам:

$$\mathscr{M}_{10}(\xi) = \frac{ab}{2r^2}\left\{1+\frac{1}{r^2}\left[a^2n_x^2+b^2n_y^2-\frac14\,(3a^2+b^2)\right]+\frac{1}{r^4}\left[2(a^2n_x^2+ b^2n_y^2)^2-a^4n_x^2-b^4n_y^2-\frac12\left(3a^2+b^2\right)\left(a^2n_x^2+b^2n_y^2\right)+ \frac18\left(5a^4+b^4+2a^2b^2\right)\right]\right\}+O(L^8/r^8)\,; \qquad (6.19)$$

$$\mathscr{M}_{20}(\xi) = \frac{ab}{4r^4}\left\{3 + \frac{1}{r^2}\,\left[6\left(a^2 n_x^2 + b^2 n_y^2\right) - 5a^2 - b^2\right]\right\} + O(L^6/r^8)\,, \quad (6.20)$$

$$\mathscr{M}_{11}(\xi) = \frac{ab}{4r^4}\left\{1 + \frac{1}{r^2}\,\left[2\left(a^2 n_x^2 + b^2 n_y^2\right) - a^2 - b^2\right]\right\} + O(L^6/r^8)\,. \quad (6.21)$$

Выражения для $\mathscr{M}_{01}$ и $\mathscr{M}_{02}$ получаются из (6.19) и (6.20) в результате взаимной замены $a \leftrightarrow b$.

6.4. Круглый цилиндр

Внутренние и внешние потенциальные факторы круглого цилиндра $(b=a)$, как следует из (6.11), (6.12) и (6.14), (6.15), а также (6.7), даются формулами

$$M_{lm} = \frac{(2l-1)!!\,(2m-1)!!}{2(l+m)}\,a^{-2(l+m-1)} \qquad (l+m>0)\,, \quad (6.22)$$

$$\mathscr{M}_{lm}(\xi) = \frac{(2l-1)!!\,(2m-1)!!}{2(l+m)}\,\frac{a^2}{r^{2(l+m)}} \qquad (l+m>0)\,, \quad (6.23)$$

$$\mathscr{L}_{00}(\xi) = a^2 \ln\frac{r}{a}\,, \quad (6.24)$$

где

$$\xi + a^2 = r^2 = x^2 + y^2\,. \quad (6.25)$$

Отметим, что при вырождении эллиптического цилиндра в круглый приближенная формула (6.18) переходит в точную — (6.23). Поэтому в случае круглого цилиндра поправочные члены в (6.19)–(6.21) обращаются в нуль. Аналогично обстоит дело и с асимптотической формулой (6.17) для логарифмического фактора $\mathscr{L}_{00}(\xi)$, которая в случае круглого цилиндра превращается в точную формулу (6.24).

Глава 2
Однородное и слоисто-неоднородное распределение заряда

§ 7. Эллипсоидальные слои

Под эллипсоидальным слоем мы подразумеваем область пространства, заключенную между двумя эллипсоидальными поверхностями. Бесконечно тонкий слой, образованный двумя подобными и подобно расположенными концентрическими эллипсоидами, будем называть *элементарным гомеоидом.* Аналогичный слой конечной толщины назовем *толстым гомеоидом.* Наконец, бесконечно тонкий слой, ограниченный двумя софокусными эллипсоидами, будем называть *элементарным фокалоидом*[1].

Рассмотрим бесконечно тонкий эллипсоидальный слой, полуоси внутренней поверхности которого равны a, b, c, а полуоси внешней поверхности суть $a+da$, $b+db$, $c+dc$ соответственно. Общий центр обоих эллипсоидов, образующих этот слой, выберем в качестве начала координат. Пусть $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}+\mathbf{dr}$ — радиус-векторы точек пересечения произвольного луча, исходящего из начала координат, с внутренней и внешней поверхностями слоя соответственно. Проведем через точки $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}+\mathbf{dr}$ плоскости, касательные к соответствующим эллипсоидам. Длины перпендикуляров, опущенных из центра на эти касательные плоскости, обозначим соответственно через p и $p+dp$. Очевидно, что dp — толщина слоя в точке $\mathbf{r}$. Если точка $\mathbf{r}$ совпадает с вершиной эллипсоида, то толщина dp совпадает с $dr=|\mathbf{dr}|$ и равна приращению соответствующей полуоси da, db или dc.

Из определения элементарного гомеоида следует, что для него (в соответствии со свойствами подобных фигур) должны выполняться равенства

$$\frac{da}{a}=\frac{db}{b}=\frac{dc}{c}=\frac{dp}{p}=\frac{dr}{r}=dk, \tag{7.1}$$

где dk — безразмерная бесконечно малая постоянная. Рассматривая объем эллипсоида $V(a,b,c)=\frac{4}{3}\pi abc$ как функцию его полуосей и вычисляя

[1] Термины «гомеоид» и «фокалоид» были введены Кельвином и Тейтом [357] применительно к бесконечно тонким слоям, при этом условие совпадения центров образующих эллипсоидов не накладывалось. Раус [307] ввел термин «толстый гомеоид».

дифференциал dV, получаем объем элементарного гомеоида равным

$$dV = 4\pi\, abc\, dk. \tag{7.2}$$

В случае элементарного фокалоида имеем $(a+da)^2 = a^2 + d\xi$, $(b + db)^2 = b^2 + d\xi$, $(c+dc)^2 = c^2 + d\xi$ или (с точностью до величин второго порядка малости)

$$a\, da = b\, db = c\, dc = p\, dp = \frac{1}{2}\, d\xi. \tag{7.3}$$

Поэтому объем элементарного фокалоида дается формулой

$$dV_f = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) d\xi. \tag{7.4}$$

Добавим к геометрии немного физики. Представим себе, что объем бесконечно тонкого эллипсоидального слоя заполнен электрическим зарядом постоянной плотности ϱ_0. Тогда элементу объема $dV = dp\, dS$ соответствует элемент заряда

$$dq = \varrho_0\, dp\, dS. \tag{7.5}$$

Если оперировать с поверхностной плотностью заряда

$$d\sigma = \varrho_0\, dp\,, \tag{7.6}$$

то, нетрудно видеть, что поверхностная плотность в случае элементарного гомеоида

$$d\sigma = \varrho_0\, p\, dk\,, \tag{7.7}$$

пропорциональна p, а в случае элементарного фокалоида

$$d\sigma = \varrho_0\, \frac{d\xi}{2p}\,, \tag{7.8}$$

обратно пропорциональна величине p.

Переход к поверхностному заряду фактически означает, что мы уже имеем дело не с объемом эллипсоидального слоя, а лишь с его внешней границей, на которой dk в случае (7.7) или $d\xi$ в случае (7.8) являются константами. В силу линейности задачи (принцип суперпозиции) такие же константы содержатся в качестве множителей в электростатических потенциалах распределений (7.7) и (7.8). Изъяв эти константы из распределений (7.7) и (7.8) и их потенциалов, мы получаем возможность вместо бесконечно малых поверхностных зарядов и их бесконечно малых потенциалов «работать» с конечными поверхностными зарядами плотности

$$\sigma = \varrho_0\, p \tag{7.9}$$

или

$$\sigma = A\varrho_0/(2p) \tag{7.10}$$

и соответствующими конечными потенциалами. Здесь A — постоянная, имеющая размерность квадрата длины.

В теории потенциала непрерывное распределение скалярных источников (заряда или массы) по некоторой поверхности называют «простым слоем», а его потенциал — потенциалом простого слоя. Так что потенциалы

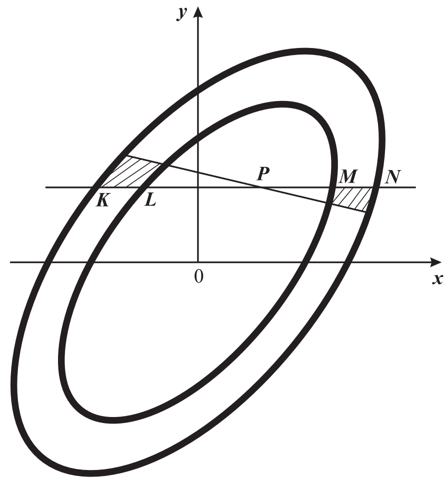

Рис. 2

распределений (7.9) и (7.10) суть потенциалы простого эллипсоидального слоя. Мы, однако, потенциалы распределений вида $\sigma = \varrho_L\, p$, аналогичного (7.9), где объемная плотность ϱ_L является полиномиальной (степени L) функцией декартовых координат, будем для краткости и в силу традиции именовать *потенциалами гомеоида*, несмотря на нулевую толщину такого простого слоя. Заметим, что потенциалы распределений вида (7.10) также можно рассматривать как потенциалы гомеоида, но в отличие от (7.9), где σ/p есть полином нулевой степени, в (7.10) отношение σ/p есть полином второй степени.

§ 8. Теорема Ньютона и потенциал внутри гомеоида

Теорема Ньютона гласит: во всех точках полости однородно заряженного элементарного (или толстого) гомеоида напряженность электрического поля равна нулю[1]. Приведем геометрическое доказательство этого утверждения.

Пусть P — произвольная точка полости. Выберем эту точку в качестве вершины конуса с телесным углом $d\Omega$ и произвольным направлением образующей (см. рис. 2). Пусть K, L, M, N — точки пересечения образующей конуса с эллипсоидальными границами слоя. Очевидно, что часть однородно заряженного конуса, лежащая по одну сторону от его вершины и имеющая высоту h, создает в вершине электрическое поле

$$dE = \int_0^h \frac{dq}{r^2} = \int_0^h \frac{\varrho_0 r^2\, dr\, d\Omega}{r^2} = \varrho_0 h\, d\Omega,$$

[1] Отметим интерес к этой теореме, проявленный в работах [83, 195].

где ϱ_0 — постоянная плотность объемного заряда. Поэтому напряженность поля в точке P, обусловленного элементами KL и MN толстого гомеоида, равна по величине

$$dE = \varrho_0(KL - MN)\,d\Omega, \tag{8.1}$$

Проведем теперь плоскость, проходящую через хорду KN и центр O эллипсоида. Построим в этой плоскости координатные оси x и y, исходящие из т. O, причем так, чтобы ось x шла параллельно KN (см. рис. 2). Тогда уравнения эллипсов, образованных пересечением границ толстого гомеоида плоскостью Oxy, можно записать в виде

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + D_1 = 0, \tag{8.2}$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + D_2 = 0, \tag{8.3}$$

а уравнением прямой KN служит

$$y = d. \tag{8.4}$$

Совместное решение уравнений (8.2) и (8.4) приводит к уравнению

$$Ax^2 + 2Bdx + (Cd^2 + D_1) = 0,$$

корни которого суть абсциссы точек K и N. Таким образом, середина хорды KN имеет абсциссу, равную $-Bd/A$. То, что последняя не зависит от D_1 означает, что середины хорд KN и LM совпадают, т. е. $KL = MN$. Подставляя это равенство в (8.1) и интегрируя по всему телесному углу, убеждаемся в справедливости теоремы Ньютона.

Из теоремы Ньютона следует, что в полости однородно заряженного толстого гомеоида потенциал постоянен. Проще всего его вычислить в центре.

Как известно, электростатический потенциал непрерывного распределения заряда объемной плотности $\varrho(\mathbf{r})$ равен

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\varrho(\mathbf{r}')\,dV'}{R}\,, \tag{8.5}$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ — расстояние от элемента объема dV' до точки наблюдения $\mathbf{r}$. Найдем сначала потенциал в центре сплошного однородно заряженного эллипсоида. Полагая $\varrho(\mathbf{r}) = \varrho_0$ и вводя сферические координаты, начало которых находится в центре эллипсоида, получаем

$$\Phi(0) = \varrho_0 \int r\,dr\,d\Omega = \frac{\varrho_0}{2} \int r^2(\theta, \varphi)\,d\Omega. \tag{8.6}$$

Интеграл от квадрата радиус-вектора точки на поверхности эллипсоида по всему телесному углу рассмотрен выше (см. раздел 1.3), так что окончательно имеем

$$\Phi(0) = \pi\varrho_0\,abc \int\limits_0^\infty \frac{du}{Q(u)} = 2\pi\varrho_0 M_0, \tag{8.7}$$

где сохранены обозначения раздела 1.3.

Если сложить потенциал в центре эллипсоида (с полуосями a, b, c и плотностью заряда ϱ_0) с потенциалом в центре другого эллипсоида (с полуосями $\varkappa a$, $\varkappa b$, $\varkappa c$, где $0<\varkappa<1$, и плотностью заряда $-\varrho_0$), то в соответствии с принципом суперпозиции результатом будет величина потенциала в центре (а значит, в любой точке полости) толстого гомеоида, т. е.

$$\Phi^{(i)} = 2\pi\varrho_0\left(1-\varkappa^2\right)M_0 = \frac{3}{2}\,\frac{q}{abc}\,\frac{1-\varkappa^2}{1-\varkappa^3}\,M_0\,. \tag{8.8}$$

Здесь q — полный заряд слоя.

Чтобы в (8.8) перейти к случаю бесконечно тонкого слоя, учтем, что для элементарного гомеоида, согласно (7.1), должно выполняться $(1-\varkappa)\to dk$. Поэтому потенциал в полости однородно (по объему) заряженного элементарного гомеоида равен

$$d\Phi^{(i)} = \frac{dq}{abc}\,M_0\,, \tag{8.9}$$

где $dq = 4\pi\varrho_0\,abc\,dk$ — полный заряд элементарного гомеоида. Заряду dq соответствует (см. (7.7)) поверхностная плотность $d\sigma=\varrho_0\,p\,dk$. Поскольку для элементарного гомеоида величина dk постоянна, то, очевидно, что потенциал простого слоя (потенциал гомеоида), создаваемый поверхностным зарядом $q=4\pi\varrho_0\,abc$, плотность которого равна

$$\sigma=\varrho_0\,p = \frac{q}{4\pi\,abc}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}, \tag{8.10}$$

имеет вид[1]

$$\Psi^{(i)} = \frac{q}{abc}\,M_0\,. \tag{8.11}$$

Очевидно, что поверхностное распределение заряда (8.10), обеспечивающее постоянство потенциала во всем объеме тела, реализуется в случае проводящего эллипсоида. Поэтому из (8.11) сразу следует, что электростатическая емкость эллипсоида есть

$$C = \frac{abc}{M_0}\,. \tag{8.12}$$

§ 9. Теорема взаимности Айвори и потенциал вне гомеоида

Между точками, принадлежащими двум различным эллипсоидальным поверхностям, можно установить взаимно однозначное соответствие. Точки $P(x,y,z)$ и $P'(x',y',z')$, расположенные соответственно на эллипсоидах

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{9.1}$$

и

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=1, \tag{9.2}$$

[1] В этой книге потенциалы объемных, поверхностных (простой слой) и поверхностных (двойной слой) распределений обозначаются посредством $\Phi(\mathbf{r})$, $\Psi(\mathbf{r})$ и $\Upsilon(\mathbf{r})$ соответственно.

будем называть *взаимными*, если выполняются равенства

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{y'}{b'}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{z'}{c'}. \tag{9.3}$$

Построим в окрестностях точек P и P' две элементарные площадки dS и dS' треугольной формы такие, чтобы вершины этих треугольников, в свою очередь, также были взаимными точками. Обозначим посредством $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ и $\mathbf{r}_1'$, $\mathbf{r}_2'$, $\mathbf{r}_3'$ радиус-векторы вершин треугольников dS и dS' соответственно, где взаимным точкам отвечают радиус-векторы, помеченные одинаковыми цифровыми индексами. Пусть далее p и p' — длины перпендикуляров, опущенных из начала координат на плоскости, касательные к элементам поверхности dS и dS' соответственно. Тогда, используя равенства (9.3), нетрудно показать, что объемы тетраэдров (треугольных пирамид), имеющих своими основаниями dS и dS' и общую вершину в начале координат, относятся друг к другу как

$$\frac{p\,dS}{p'\,dS'} = \frac{abc}{a'b'c'}. \tag{9.4}$$

Действительно, рассмотрим, например, построенный около точки P тетраэдр. Его объем, с одной стороны, равен $(1/3)p\,dS$. С другой стороны, он составляет одну шестую часть объема параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$. Объем же последнего, как известно из векторной алгебры, дается смешанным произведением[1]

$$\mathbf{r}_1\,[\mathbf{r}_2\,\mathbf{r}_3] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$p\,dS = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Так как аналогичная формула имеет место и для штрихованных величин, то отсюда с учетом (9.3) следует (9.4).

В отношении (9.4) полезны два замечания.

Во-первых, соотношение (9.4) справедливо для элементов поверхности dS и dS' произвольной формы, лишь бы границы их были образованы взаимными точками.

Во-вторых, взаимное соответствие (9.3) можно устанавливать между произвольными эллипсоидальными поверхностями. Например, между эллипсоидом (с полуосями a, b, c) и сферой радиуса a'. В этом случае соотношение (9.4) приобретает вид

$$p\,dS = \frac{abc}{a'^2}\,dS' = abc\,d\Omega', \tag{9.5}$$

где $d\Omega'$ — элемент телесного угла, соответствующий элементу dS' сферической поверхности.

[1] Чтобы не возникал вопрос о знаке смешанного произведения, будем считать, что векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ образуют правую тройку.

Для взаимных точек справедливо следующее утверждение (*лемма Айвори*): если $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_1{}'$ — радиус-векторы двух пар взаимных точек, лежащих на эллипсоидах (9.1) и (9.2), причем эти эллипсоиды *софокусны*, т. е.

$$a'^{\,2} - a^2 = b'^{\,2} - b^2 = c'^{\,2} - c^2 = \xi > 0, \tag{9.6}$$

то

$$|\mathbf{r}_1{}' - \mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'|\,. \tag{9.7}$$

Иными словами: расстояние между двумя произвольными точками, лежащими на двух софокусных эллипсоидах, равно расстоянию между двумя точками, являющимися взаимными по отношению к первоначальным.

Равенство (9.7) проверяется непосредственным вычислением:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{r}_1{}'-\mathbf{r})^2-(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}')^2=(x_1{}'-x)^2+(y_1{}'-y)^2+(z_1{}'-z)^2-(x_1-x')^2-\\
&-(y_1-y')^2-(z_1-z')^2=\left(\frac{a'}{a}\,x_1-x\right)^2+\left(\frac{b'}{b}\,y_1-y\right)^2+\left(\frac{c'}{c}\,z_1-z\right)^2-\\
&-\left(x_1-\frac{a'}{a}\,x\right)^2-\left(y_1-\frac{b'}{b}\,y\right)^2-\left(z_1-\frac{c'}{c}\,z\right)^2=\left(\frac{a'^2}{a^2}-1\right)x_1^2+\\
&+\left(\frac{b'^2}{b^2}-1\right)y_1^2+\left(\frac{c'^2}{c^2}-1\right)z_1^2-\left(\frac{a'^2}{a^2}-1\right)x^2-\left(\frac{b'^2}{b^2}-1\right)y^2-\\
&-\left(\frac{c'^2}{c^2}-1\right)z^2=\xi\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}\right)-\xi\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=0.
\end{aligned}$$

Развитые Айвори представления о взаимных точках софокусных эллипсоидов помогают найти потенциал вне элементарного гомеоида, если внутренний его потенциал известен.

Прежде всего (в связи с (9.4)) отметим следующее. Из того, что толщина элементарного гомеоида пропорциональна p, следует, что отношение взаимных элементов объема двух элементарных гомеоидов есть величина постоянная и к тому же совпадающая с отношением полных объемов указанных гомеоидов. Поэтому если два элементарных гомеоида имеют такие толщи́ны, что их объемы равны, то у таких бесконечно тонких слоев равны и любые их взаимные элементы объема.

Рассмотрим теперь два софокусных элементарных гомеоида[1] одинакового объема. На внешней границе внутреннего элементарного гомеоида выберем произвольно две точки $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_1$. Точки, лежащие на внешней поверхности внешнего элементарного гомеоида и являющиеся для $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_1$ взаимными, обозначим посредством $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}_1{}'$ соответственно. Согласно установленному выше, из равенства полных объемов элементарных гомеоидов следует равенство взаимных элементов объема, прилегающих к точкам $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$. Соответствующий точке $\mathbf{r}$ элемент заряда $\varrho(\mathbf{r})\,dV$ создает в точке $\mathbf{r}_1{}'$ потенциал

$$d\Phi(\mathbf{r}_1{}') = \frac{\varrho(\mathbf{r})\,dV}{|\mathbf{r}_1{}' - \mathbf{r}|}\,.$$

[1] *Софокусными* называют элементарные гомеоиды, у которых софокусны внешние эллипсоидальные границы.

Аналогично потенциал в точке $\mathbf{r}_1$, обусловленный расположенным в точке $\mathbf{r}'$ элементом заряда $\varrho'(\mathbf{r}')\,dV'$, равен

$$d\Phi'(\mathbf{r}_1) = \frac{\varrho'(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'|}.$$

Очевидно, что если

$$\varrho(\mathbf{r}) = \varrho'(\mathbf{r}'), \tag{9.8}$$

то, учитывая равенства (9.7) и $dV = dV'$, имеет место

$$d\Phi(\mathbf{r}_1{}') = d\Phi'(\mathbf{r}_1). \tag{9.9}$$

Интегрируя левую часть (9.9) по полному объему внутреннего элементарного гомеоида (что сопровождается одновременным интегрированием правой части по полному объему внешнего элементарного гомеоида), приходим к важному результату (*теореме взаимности Айвори*): потенциал элементарного гомеоида в произвольной внешней точке $\mathbf{r}'$ равен потенциалу проходящего через $\mathbf{r}'$ софокусного элементарного гомеоида равного объема во взаимной внутренней точке, принадлежащей первому элементарному гомеоиду, при условии, что объемные плотности заряда во взаимных точках совпадают[1].

Нам осталось получить явное выражение для внешнего потенциала однородно (по объему) заряженного элементарного гомеоида. Пусть внешней границей элементарного гомеоида служит поверхность (9.1). Представим себе, что через произвольную точку $\mathbf{r}' = \{x', y', z'\}$ вне рассматриваемого элементарного гомеоида, в которой мы хотим определить потенциал, проходит внешняя граница другого элементарного гомеоида, софокусного первому. Уравнение этой граничной поверхности имеет вид

$$\frac{x'^2}{a^2+\xi} + \frac{y'^2}{b^2+\xi} + \frac{z'^2}{c^2+\xi} = 1. \tag{9.10}$$

При заданных x', y', z' уравнение (9.10) — это уравнение, определяющее эллипсоидальную координату $\xi > 0$ точки $\mathbf{r}'$. Интересующий нас потенциал $d\Phi^{(e)}(\mathbf{r}')$ равен потенциалу $d\Phi^{(i)}$ внешнего элементарного гомеоида, удовлетворяющего требованиям теоремы взаимности, в произвольной внутренней точке. Таким образом, согласно (8.9), получаем

$$d\Phi^{(e)} = \frac{dq}{2}\int\limits_0^\infty \frac{du'}{\sqrt{(a^2+\xi+u')(b^2+\xi+u')(c^2+\xi+u')}}.$$

Замена переменной интегрирования $u' = u - \xi$ окончательно дает

$$d\Phi^{(e)} = \frac{dq}{abc}\,\mathscr{M}_{000}(\xi) = 2\pi abc\varrho_0\,dk\int\limits_\xi^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}, \tag{9.11}$$

где $\mathscr{M}_{000}(\xi)$ — внешний потенциальный фактор эллипсоида (нулевого веса).

[1] Условие (9.8), используемое в теореме взаимности, может выполняться и в случае неоднородно заряженных слоев. Например, если плотность заряда имеет вид $\varrho = \varrho(x/a,\ y/b,\ z/c)$.

Из (9.11) видно, что эквипотенциальными поверхностями однородно заряженного элементарного гомеоида являются во внешней области софокусные с ним эллипсоиды. Из (9.11) следует также, что потенциалы двух софокусных элементарных гомеоидов, имеющих одинаковые объемы и плотности заряда совпадают между собой во всех точках общего для обоих слоев наружного пространства.

Переходя от бесконечно малых к конечным поверхностным зарядам (ср. переход от (8.9) к (8.11)), вместо выражения (9.11) будем иметь

$$\Psi^{(e)} = \frac{q}{abc}\,\mathscr{M}_{000}(\xi) = \frac{q}{2}\int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}\,. \tag{9.12}$$

Таким образом, найден внешний потенциал простого эллипсоидального слоя (потенциал гомеоида), поверхностная плотность заряда которого дается формулой (8.10). Этот потенциал есть не что иное, как потенциал вне проводящего эллипсоида, полный заряд которого равен q.

Потенциалу (9.12) соответствует электрическое поле

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\Psi^{(e)}}{\partial\mathbf{r}} = -\frac{d\Psi^{(e)}}{d\xi}\,\frac{\partial\xi}{\partial\mathbf{r}} = \frac{q\,p\,(\xi)}{Q(\xi)}\,\mathbf{n}(\xi)\,, \tag{9.13}$$

всюду ортогональное поверхностям координатных эллипсоидов. Здесь

$$Q(\xi) = \sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)(c^2+\xi)}$$

— произведение полуосей координатного эллипсоида (9.10), $\mathbf{n}(\xi)$ — единичный вектор нормали к поверхности (9.10) и используются формулы (1.11) и (1.14). В частности, на поверхности заряженного проводящего эллипсоида

$$E_n = \frac{q\,p}{ab\,c}\,. \tag{9.14}$$

§ 10. Потенциал однородно заряженного эллипсоида

Рассмотрим эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{10.1}$$

объемная плотность заряда которого постоянна и равна ϱ_0, и найдем его потенциал в произвольной внешней точке $\mathbf{r}$, эллипсоидальная координата $\xi > 0$ которой относительно (10.1) есть наибольший из корней уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1. \tag{10.2}$$

Представим себе, что эллипсоид (10.1) расслоен на бесконечное число вложенных друг в друга элементарных гомеоидов. Выберем произвольно какой-нибудь из них. Очевидно, полуоси внешней и внутренней границ выбранного элементарного гомеоида равны соответственно $\varkappa a$, $\varkappa b$, $\varkappa c$ и $(\varkappa - d\varkappa)a$, $(\varkappa - d\varkappa)b$, $(\varkappa - d\varkappa)c$, где $\varkappa$ — число, заключенное между 0 и 1.

В соответствии с (9.11), рассматриваемый элементарный гомеоид создает в точке $\mathbf{r}$ потенциал, равный

$$d\Phi^{(e)} = 2\pi abc\varrho_0\, \varkappa^2 d\varkappa \int\limits_{\nu}^{\infty} \frac{du'}{\sqrt{(\varkappa^2 a^2 + u')(\varkappa^2 b^2 + u')(\varkappa^2 c^2 + u')}}\,. \tag{10.3}$$

Здесь ν — эллипсоидальная координата точки $\mathbf{r}$ относительно внешней границы элементарного гомеоида, т. е. максимальный корень уравнения

$$\frac{x^2}{\varkappa^2 a^2 + \nu} + \frac{y^2}{\varkappa^2 b^2 + \nu} + \frac{z^2}{\varkappa^2 c^2 + \nu} = 1.$$

В результате замен $u' = \varkappa^2 t$, $\nu = \varkappa^2 u$ выражение (10.3) принимает более простой вид

$$d\Phi^{(e)} = 2\pi abc\varrho_0\, \varkappa d\varkappa \int\limits_{u}^{\infty} \frac{dt}{Q(t)}\,, \tag{10.4}$$

где u — наибольший корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = \varkappa^2. \tag{10.5}$$

Потенциал однородно заряженного сплошного эллипсоида (10.1) во внешней точке $\mathbf{r}$ получается, очевидно, интегрированием выражения (10.4) по $\varkappa$ (фактически по $\varkappa^2$) в пределах от 0 до 1:

$$\Phi^{(e)}(\mathbf{r}) = \pi abc \int\limits_0^1 \varrho_0\, d\varkappa^2 \int\limits_u^{\infty} \frac{dt}{Q(t)}\,. \tag{10.6}$$

В (10.6) удобно перейти от интегрирования по $\varkappa^2$ к интегрированию по u. Рассматривая (10.5) как формулу, определяющую функцию $\varkappa^2(u)$, и замечая, что нижнему и верхнему пределам интегрирования по $\varkappa^2$ отвечают значения u, равные соответственно ∞ и ξ, получаем

$$\Phi^{(e)}(\mathbf{r}) = -\pi\varrho_0\, abc \int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{d\varkappa^2}{du}\, \varphi(u)\, du\,, \tag{10.7}$$

где

$$\varphi(u) \equiv \int\limits_u^{\infty} \frac{dt}{Q(t)}\,. \tag{10.8}$$

Поскольку $\varphi(\infty) = 0$, то интегрирование выражения (10.7) по частям дает

$$\Phi^{(e)}(\mathbf{r}) = \pi\varrho_0\, abc \int\limits_{\xi}^{\infty} P(\mathbf{r}, u)\, \frac{du}{Q(u)}\,, \tag{10.9}$$

где

$$P(\mathbf{r}, u) \equiv 1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2 + u} - \frac{z^2}{c^2 + u}\,. \tag{10.10}$$

Будучи выраженным через внешние потенциальные факторы (4.1), потенциал снаружи однородно заряженного эллипсоида имеет вид

$$\Phi^{(e)}(\mathbf{r})=2\pi\varrho_0\left\{\mathscr{M}_{000}(\xi)-\mathscr{M}_{100}(\xi)\,x^2-\mathscr{M}_{010}(\xi)\,y^2-\mathscr{M}_{001}(\xi)\,z^2\right\}. \qquad (10.11)$$

Важно заметить, что однократное дифференцирование $\Phi^{(e)}(\mathbf{r})$ (например, при вычислении электрического поля) можно производить, обращаясь с величиной ξ как с постоянной. Это следует из формулы (10.9) и определения ξ, согласно которому $P(\mathbf{r},\xi)=0$.

Если точка наблюдения $\mathbf{r}$ выбрана на поверхности эллипсоида (10.1), т. е. $\xi=0$, то потенциал (10.11) становится квадратичной функцией координат

$$\Phi(\mathbf{r})=\pi\varrho_0\,abc\int\limits_0^\infty\left(1-\frac{x^2}{a^2+u}-\frac{y^2}{b^2+u}-\frac{z^2}{c^2+u}\right)\frac{du}{Q(u)}=$$
$$=2\pi\varrho_0\left(M_{000}-M_{100}\,x^2-M_{010}\,y^2-M_{001}\,z^2\right), \qquad (10.12)$$

где коэффициенты M_{100}, M_{010}, M_{001} суть размагничивающие факторы эллипсоида, а M_{000} — его внутренний потенциальный фактор нулевого веса.

Чтобы найти потенциал эллипсоида (10.1) в некоторой внутренней точке $\mathbf{r}$, представим себе, что через нее проходит эллипсоидальная поверхность, уравнение которой есть

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\varkappa^2 \qquad (0\leqslant\varkappa<1). \qquad (10.13)$$

Тогда в силу принципа суперпозиции искомый потенциал должен равняться сумме

$$\Phi^{(i)}(\mathbf{r})=\Phi_1+\Phi_2, \qquad (10.14)$$

где Φ_1 — потенциал в полости однородно заряженного (с плотностью ϱ_0) толстого гомеоида, ограниченного поверхностями (10.1) и (10.13), а Φ_2 — потенциал на поверхности однородно заряженного (с той же плотностью) эллипсоида (10.13). Так как Φ_1 дается формулой (8.8), а Φ_2, в соответствии с (10.12), имеет вид

$$\Phi_2=\pi\varrho_0\,abc\int\limits_0^\infty\left(\varkappa^2-\frac{x^2}{a^2+u}-\frac{y^2}{b^2+u}-\frac{z^2}{c^2+u}\right)\frac{du}{Q(u)},$$

то сумма (10.14) равна

$$\Phi^{(i)}(\mathbf{r})=2\pi\varrho_0\left(M_{000}-M_{100}\,x^2-M_{010}\,y^2-M_{001}\,z^2\right). \qquad (10.15)$$

Являясь квадратичной функцией координат, внутренний потенциал эллипсоида, как и должно быть, совпадает на границе (10.1) со значением внешнего потенциала (10.12), а центре эллипсоида с найденным ранее значением (8.7).

Потенциалам (10.11) и (10.15) однородно заряженного эллипсоида (10.1) соответствуют электрические поля, декартовы компоненты которых равны

$$E_x^{(e)}(\mathbf{r})=4\pi\varrho_0\mathscr{M}_{100}(\xi)\,x, \qquad E_y^{(e)}(\mathbf{r})=4\pi\varrho_0\mathscr{M}_{010}(\xi)\,y,$$
$$E_z^{(e)}(\mathbf{r})=4\pi\varrho_0\mathscr{M}_{001}(\xi)\,z, \qquad (10.16)$$

$$E_x^{(i)}(\mathbf{r})=4\pi\varrho_0 M_a\,x, \quad E_y^{(i)}(\mathbf{r})=4\pi\varrho_0 M_b\,y, \quad E_z^{(i)}(\mathbf{r})=4\pi\varrho_0 M_c\,z. \qquad (10.17)$$

§ 11. Теоремы о софокусных эллипсоидах. Потенциал фокалоида

Рассмотрим софокусные эллипсоиды

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{11.1}$$

и

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1, \tag{11.2}$$

где

$$a'^2-a^2=b'^2-b^2=c'^2-c^2=\xi>0. \tag{11.3}$$

Пусть $\mathbf{r}$ — произвольная точка на поверхности (11.1), а $\mathbf{r}'$ — взаимная ей точка поверхности (11.2). Предполагая плотности зарядов обоих эллипсоидов постоянными и равными между собой, сопоставим поле $\mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{r}')$ внутреннего эллипсоида в точке $\mathbf{r}'$ с полем $\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r})$ внешнего эллипсоида в точке $\mathbf{r}$. Из (10.16), (10.17) получаем

$$\frac{E_x(\mathbf{r}')}{E'_x(\mathbf{r})}=\frac{\mathscr{M}_{100}(\xi)\,x'}{M'_{100}\,x}, \tag{11.4}$$

где M'_{100} — фактор размагничивания эллипсоида (11.2). Подставляя в (11.4) соотношение (6.10) и используя первое из равенств (9.3), будем иметь

$$\frac{E_x(\mathbf{r}')}{E'_x(\mathbf{r})}=\frac{bc}{b'c'}, \qquad \frac{E_y(\mathbf{r}')}{E'_y(\mathbf{r})}=\frac{ca}{c'a'}, \qquad \frac{E_z(\mathbf{r}')}{E'_z(\mathbf{r})}=\frac{ab}{a'b'}. \tag{11.5}$$

Последние две формулы получены из первой с помощью циклической перестановки. Соотношения (11.5) выражают *теорему Айвори*: поля, создаваемые каждым из двух софокусных эллипсоидов на поверхности другого, таковы, что их декартовы компоненты во взаимных точках пропорциональны площадям главных сечений эллипсоидов, перпендикулярных к направлению компонент поля.

Выясним теперь, как соотносятся потенциалы двух софокусных эллипсоидов в произвольной точке $\mathbf{r}$, внешней по отношению к обоим эллипсоидам. Величины, относящиеся к первому эллипсоиду, будем отмечать индексом 1, а относящиеся к второму эллипсоиду, — индексом 2. Тогда, согласно (10.11), потенциал первого эллипсоида в точке $\mathbf{r}$ равен

$$\Phi_1^{(e)}(\mathbf{r})=2\pi\varrho_1\left\{\mathscr{M}_{000}^{(1)}(\xi_1)-\mathscr{M}_{100}^{(1)}(\xi_1)\,x^2-\mathscr{M}_{010}^{(1)}(\xi_1)\,y^2-\mathscr{M}_{001}^{(1)}(\xi_1)\,z^2\right\}, \tag{11.6}$$

где ξ_1 — эллипсоидальная координата точки $\mathbf{r}$ относительно первого эллипсоида. Заменяя в (11.6) внешние потенциальные факторы $\mathscr{M}_{lmn}$ с помощью формулы (4.4), получаем

$$\Phi_1^{(e)}(\mathbf{r})=\frac{2\pi\varrho_1\,a_1b_1c_1}{\sqrt{(a_1^2+\xi_1)(b_1^2+\xi_1)(c_1^2+\xi_1)}}\left(M'_{000}-M'_{100}\,x^2-M'_{010}\,y^2-M'_{001}\,z^2\right), \tag{11.7}$$

где M'_{lmn} — внутренние потенциальные факторы эллипсоида с полуосями $\sqrt{a_1^2+\xi_1}$, $\sqrt{b_1^2+\xi_1}$, $\sqrt{c_1^2+\xi_1}$. Потенциал второго эллипсоида в той же точке $\mathbf{r}$ есть, очевидно,

$$\Phi_2^{(e)}(\mathbf{r})=\frac{2\pi\varrho_2\, a_2b_2c_2}{\sqrt{(a_2^2+\xi_2)(b_2^2+\xi_2)(c_2^2+\xi_2)}}\left(M''_{000}-M''_{100}\,x^2-M''_{010}\,y^2-M''_{001}\,z^2\right), \tag{11.8}$$

где M''_{lmn} — внутренние потенциальные факторы эллипсоида с полуосями $\sqrt{a_2^2+\xi_2}$, $\sqrt{b_2^2+\xi_2}$, $\sqrt{c_2^2+\xi_2}$, а ξ_2 — эллипсоидальная координата точки $\mathbf{r}$ относительно второго эллипсоида. Условия софокусности эллипсоидов означают, что выполняются равенства $a_1^2+\xi_1 = a_2^2+\xi_2$, $b_1^2+\xi_1 = b_2^2+\xi_2$, $c_1^2+\xi_1 = c_2^2+\xi_2$. Поэтому $M'_{lmn} = M''_{lmn}$. В результате из (11.7) и (11.8) получаем окончательное соотношение

$$\frac{\Phi_1^{(e)}(\mathbf{r})}{\Phi_2^{(e)}(\mathbf{r})}=\frac{\varrho_1\, a_1b_1c_1}{\varrho_2\, a_2b_2c_2}=\frac{q_1}{q_2}, \tag{11.9}$$

выражающее *теорему Маклорена*: внешние потенциалы софокусных однородно заряженных эллипсоидов пропорциональны их полным зарядам.

Аналогичное свойство софокусных однородно заряженных элементарных гомеоидов уже отмечалось при обсуждении формулы (9.11). Теорема Маклорена справедлива и для наружных потенциалов софокусных гомеоидов (простых эллипсоидальных слоев), что следует из (9.12).

Воспользуемся теоремой Маклорена для определения внешнего потенциала элементарного фокалоида, объемная плотность заряда которого постоянна. Пусть в (11.9) имеет место $\varrho_1=\varrho_2=\varrho_0$. Свойства пропорции позволяют переписать (11.9) в виде

$$\frac{\Phi_2^{(e)}(\mathbf{r})-\Phi_1^{(e)}(\mathbf{r})}{\Phi_1^{(e)}(\mathbf{r})}=\frac{q_2-q_1}{q_1}, \tag{11.10}$$

где, опираясь на принцип суперпозиции полей, можно трактовать числитель левого отношения как потенциал, а числитель правого отношения как полный заряд фокалоида. Понятно, что (11.10) можно применять и к бесконечно тонкому слою (элементарному фокалоиду), и к толстому фокалоиду.

В случае элементарного фокалоида внешний потенциал равен

$$\begin{aligned} d\Phi_f^{(e)}(\mathbf{r}) &= \frac{dV_f}{V}\,\Phi^{(e)}(\mathbf{r}) = \\ &= 2\pi\varrho_0\frac{dV_f}{V}\left\{\mathscr{M}_{000}(\xi)-\mathscr{M}_{100}(\xi)x^2-\mathscr{M}_{010}(\xi)y^2-\mathscr{M}_{001}(\xi)z^2\right\}. \end{aligned} \tag{11.11}$$

Здесь использовано выражение (10.11) для потенциала $\Phi^{(e)}(\mathbf{r})$ эллипсоида. Входящее в (11.11) отношение объема (7.4) элементарного фокалоида к объему, охватываемого им эллипсоида (10.1), равно

$$\frac{dV_f}{V}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)d\xi. \tag{11.12}$$

Отметим, что, как видно из (11.10), теорема Маклорена справедлива и для софокусных фокалоидов (как элементарных, так и толстых).

Чтобы найти потенциал внутри фокалоида, будем рассматривать внутренний потенциал (10.15) однородно заряженного эллипсоида как функцию аргументов a^2, b^2, c^2 и вычислим дифференциал

$$d\Phi^{(i)}(\mathbf{r}) = \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial a^2}\, da^2 + \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial b^2}\, db^2 + \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial c^2}\, dc^2. \tag{11.13}$$

Если приращения всех аргументов в (11.13) равны одной и той же величине $d\xi$ [ср. (7.3)], то дифференциал $d\Phi^{(i)}(\mathbf{r})$ представляет собой потенциал элементарного фокалоида

$$d\Phi_f^{(i)}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial a^2} + \frac{\partial}{\partial b^2} + \frac{\partial}{\partial c^2}\right)\Phi^{(i)}(\mathbf{r})\, d\xi. \tag{11.14}$$

Производные выражения (10.15) удобно вычислять с помощью операторов (2.1). Очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial a^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \widehat{\partial}_a\right), \quad \frac{\partial}{\partial b^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2} - \widehat{\partial}_b\right), \quad \frac{\partial}{\partial c^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2} - \widehat{\partial}_c\right). \tag{11.15}$$

Поэтому, подставляя выражение (10.15) в (11.14) и используя формулу (3.1), будем иметь

$$\begin{aligned} d\Phi_f^{(i)}(\mathbf{r}) = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) d\xi\, \Phi^{(i)}(\mathbf{r}) - \\ & - \pi\varrho_0\, d\xi \left\{M_{100} + M_{010} + M_{001} - (M_{200} + M_{110} + M_{101})\, x^2 - \right. \\ & \left. - (M_{110} + M_{020} + M_{011})\, y^2 - (M_{101} + M_{011} + M_{002})\, z^2\right\}. \end{aligned}$$

Входящие сюда суммы внутренних потенциальных факторов эллипсоида даются формулой (3.6). Учитывая также (11.12), находим, что внутренний потенциал элементарного фокалоида есть

$$d\Phi_f^{(i)}(\mathbf{r}) = \frac{dV_f}{V}\, \Phi^{(i)}(\mathbf{r}) - \pi\varrho_0\, d\xi \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right). \tag{11.16}$$

§ 12. Потенциалы слоисто-неоднородного эллипсоида

Под *слоисто-неоднородным* подразумевается сплошной эллипсоид, составленный из бесконечного числа вложенных друг в друга бесконечно тонких концентрических с базисным эллипсоидом однородно заряженных эллипсоидальных слоев, так что объемная плотность заряда может изменяться только при переходе из одного слоя в другой. Рассматриваемые в этой и следующей главах слоисто-неоднородные эллипсоиды составлены из элементарных гомеоидов.

Пусть имеется семейство эллипсоидальных поверхностей, даваемое уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \varkappa^2, \tag{12.1}$$

где параметр $\varkappa$ может принимать значения, заключенные в диапазоне $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$. В соответствии с вышесказанным, эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{12.2}$$

является слоисто-неоднородным, если объемная плотность заряда в нем зависит только от $\varkappa^2$, т. е.

$$\varrho = \varrho\left(\varkappa^2\right). \tag{12.3}$$

Внешний потенциал слоисто-неоднородного эллипсоида найдем тем же способом, каким была получена формула (10.9) для потенциала однородно заряженного эллипсоида. В соответствии с принципом суперпозиции потенциал сплошного эллипсоида есть сумма (в нашем случае — интеграл) потенциалов составляющих его элементарных гомеоидов. Поэтому для искомого потенциала во внешней точке $\mathbf{r}$ справедлива формула (10.6), в которой только вместо ϱ_0 следует теперь писать $\varrho\left(\varkappa^2\right)$. Таким образом,

$$\Phi^{(e)}(\mathbf{r}) = \pi abc \int\limits_0^1 \varrho\left(\varkappa^2\right)\, d\varkappa^2 \int\limits_u^\infty \frac{dt}{Q(t)}, \tag{12.4}$$

где u — наибольший из корней уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = \varkappa^2 \tag{12.5}$$

и

$$Q(t) = \sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}. \tag{12.6}$$

Перейдем в (12.4) от интегрирования по $\varkappa^2$ к интегрированию по u. Рассматривая (12.5) как формулу, определяющую функцию $\varkappa^2(u)$, и вводя функции

$$f(\varkappa^2) = \int\limits_0^{\varkappa^2} \varrho(w)\, dw \tag{12.7}$$

и

$$\varphi(u) = \int\limits_0^\infty \frac{dt}{Q(t)}, \tag{12.8}$$

будем иметь

$$\Phi^{(e)}(\mathbf{r}) = -\,\pi abc \int\limits_\xi^\infty \frac{df}{d\varkappa^2}\,\frac{d\varkappa^2}{du}\,\varphi(u)\, du = -\,\pi abc \int\limits_\xi^\infty \frac{df[\varkappa^2(u)]}{du}\,\varphi(u)\, du =$$

$$= -\,\pi abc \left\{ f[\varkappa^2(u)]\,\varphi(u) \right\}\Big|_\xi^\infty + \pi abc \int\limits_\xi^\infty f[\varkappa^2(u)]\,\varphi'(u)\, du =$$

$$= -\,\pi abc\,[f(0)\varphi(\infty) - f(1)\varphi(\xi)] - \pi abc \int\limits_\xi^\infty f[\varkappa^2(u)]\,\frac{du}{Q(u)}.$$

Здесь ξ — положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\xi}+\frac{y^2}{b^2+\xi}+\frac{z^2}{c^2+\xi}=1. \tag{12.9}$$

Учитывая, что $\varphi(\infty)=0$, окончательно получаем

$$\Phi^{(e)}(\mathbf{r})=\pi abc\int\limits_{\xi}^{\infty}\left\{f(1)-f[\varkappa^2(u)]\right\}\,\frac{du}{Q(u)}. \tag{12.10}$$

На поверхности слоисто-неоднородного эллипсоида формула (12.10) принимает вид, в котором нижний предел интегрирования $\xi=0$. В силу непрерывности потенциала на границе тела такой же формулой должен описываться на поверхности эллипсоида и внутренний потенциал, т. е.

$$\Phi^{(i)}(\mathbf{r})=\pi abc\int\limits_{0}^{\infty}\left\{f(1)-f[\varkappa^2(u)]\right\}\,\frac{du}{Q(u)}. \tag{12.11}$$

В действительности выражение (12.11) правильно описывает потенциал слоисто-неоднородного эллипсоида не только на поверхности, но и в его внутренней области.

Чтобы убедиться в этом, необходимо прежде всего знать результат воздействия на функцию $\Phi^{(i)}(\mathbf{r})$ оператора Лапласа. Последовательно получаем

$$\frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial x}=-2\pi abc\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x}{a^2+u}\,\varrho\left[\varkappa^2(u)\right]\frac{du}{Q(u)}, \tag{12.12}$$

$$\frac{\partial^2\Phi^{(i)}}{\partial x^2}=-2\pi abc\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\varrho\left[\varkappa^2(u)\right]}{a^2+u}\,\frac{du}{Q(u)}-4\pi\,abc\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2}{(a^2+u)^2}\,\frac{d\varrho\left[\varkappa^2(u)\right]}{d\varkappa^2}\,\frac{du}{Q(u)}, \tag{12.13}$$

Поэтому

$$\Delta\Phi^{(i)}=-\,2\pi abc\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{a^2+u}+\frac{1}{b^2+u}+\frac{1}{c^2+u}\right)\varrho\left[\varkappa^2(u)\right]\frac{du}{Q(u)}-$$

$$-4\pi abc\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}\right]\frac{d\varrho\left[\varkappa^2(u)\right]}{d\varkappa^2}\,\frac{du}{Q(u)}=-\,4\pi\varrho\left(\varkappa^2\right).$$

Здесь во втором интеграле учтено, что

$$\frac{d\varkappa^2}{du}=-\left[\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}\right],$$

и выполнено интегрирование по частям.

Нетрудно убедиться, что $\partial\Phi^{(e)}/\partial x$ на границе эллипсоида дается той же формулой (12.12), что и $\partial\Phi^{(i)}/\partial x$. Из соображений симметрии очевидно, что аналогичные равенства связывают между собой на поверхности эллипсоида и частные производные функций $\Phi^{(e)}$ и $\Phi^{(i)}$ по координатам y и z. Это означает, что выполняется граничное условие непрерывности нормальных производных $\Phi^{(e)}$ и $\Phi^{(i)}$.

Таким образом, функция $\Phi^{(i)}(\mathbf{r})$ удовлетворяет требуемому уравнению Пуассона, соответствующему плотности заряда (12.3), а на границе эллипсоида эта функция и ее нормальная производная совпадают соответственно с внешним потенциалом и его нормальной производной. Следовательно, функция (12.11) и есть внутренний потенциал слоисто-неоднородного эллипсоида.

Для вопросов, рассматриваемых в следующей главе, ключевую роль играет частный случай формул (12.10), (12.11) для потенциала слоисто-неоднородного эллипсоида, соответствующий плотности заряда

$$\varrho(\mathbf{r}) = \varrho(\varkappa^2) = \varrho_0\left(1-\varkappa^2\right)^n = \varrho_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^n \qquad (n>0). \tag{12.14}$$

При этом функция (12.7) равна

$$f(\varkappa^2) = \frac{\varrho_0}{n+1}\left[1-\left(1-\varkappa^2\right)^{n+1}\right],$$

и, следовательно, потенциал эллипсоида имеет вид

$$\Phi^{(i,e)}(\mathbf{r}) = \frac{\pi abc}{n+1}\,\varrho_0\int\limits_{0,\,\xi}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{a^2+u}-\frac{y^2}{b^2+u}-\frac{z^2}{c^2+u}\right)^{n+1}\frac{du}{Q(u)}, \tag{12.15}$$

где нижний предел интегрирования принимает значения 0 или ξ в зависимости от того, внутри (i) или снаружи (e) эллипсоида выбрана точка наблюдения. Этот результат иногда называют *теоремой Пуассона*, поскольку именно Пуассон [282] дал выражения для сил ньютоновского притяжения слоисто-неоднородного эллипсоида.

§ 13. Потенциалы слоисто-неоднородного эллиптического цилиндра

Эллиптический цилиндр, граница которого описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{13.1}$$

можно рассматривать как предельный случай эллипсоидальной поверхности (12.2) при $c\to\infty$. В этой книге рассматриваются только такие распределения заряда в цилиндре, которые не содержат зависимости от координаты z. Поэтому обсуждаемая плоская задача есть двумерный аналог задачи об эллипсоиде.

По аналогии с § 12 рассматриваемый здесь слоисто-неоднородный эллиптический цилиндр характеризуется тем, что объемная плотность ϱ его заряда зависит лишь от параметра $\varkappa^2$, т. е.

$$\varrho = \varrho\left(\varkappa^2\right), \tag{13.2}$$

где теперь

$$\varkappa^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad (0 \leqslant \varkappa \leqslant 1). \tag{13.3}$$

Переходя в формулах (12.10) и (12.11) к пределу при $c \to \infty$ и вычитая из обоих результатов бесконечную постоянную

$$\pi ab \int_0^\infty f(1) \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)\,(b^2+u)}}\,,$$

получаем следующие выражения для потенциалов эллиптического цилиндра:

$$\Phi^{(i)} = -\pi ab \int_0^\infty f[\varkappa^2(u)]\,\frac{du}{q(u)}\,, \tag{13.4}$$

$$\Phi^{(e)} = -\pi ab \int_0^\xi f(1) \frac{du}{q(u)} - \pi ab \int_\xi^\infty f[\varkappa^2(u)]\,\frac{du}{q(u)}\,. \tag{13.5}$$

Здесь

$$f(\varkappa^2) = \int_0^{\varkappa^2} \varrho(w)\,dw, \quad q(u) = \sqrt{(a^2+u)\,(b^2+u)}\,, \quad \varkappa^2 = \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u}\,,$$

а ξ — неотрицательный корень квадратного уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} = 1.$$

Потенциалам (13.4), (13.5) соответствует напряженность электрического поля, обусловленная слоисто-неоднородным распределением электрического заряда в эллиптическом цилиндре и равная

$$\mathbf{E}^{(i,\,e)} = 2\pi\, ab \int_{0,\,\xi}^\infty \left(\frac{x}{a^2+u}\,\mathbf{i} + \frac{y}{b^2+u}\,\mathbf{j} \right) \varrho\left[\varkappa^2(u)\right]\,\frac{du}{q(u)}\,, \tag{13.6}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ — единичные векторы декартовых осей x и y соответственно.

Глава 3
Неоднородное распределение объемного заряда

§ 14. Феррерсовы $(\varrho \sim x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma})$ потенциалы эллипсоида

Результаты предыдущей главы позволяют в ближайших трех главах перейти к более удобной для нас последовательности изложения теории потенциала эллипсоида, учитывающей вид распределения заряда. Потенциалы объемных и поверхностных (простой и двойной слой) распределений заряда будем далее рассматривать по отдельности.

Простейшим и наиболее востребованным для приложений неоднородным распределением объемного заряда является распределение, характеризующееся степенно́й зависимостью от декартовых координат. Применительно к эллипсоиду общий (исключительно изобретательный) метод сведе́ния тройных интегралов

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \int\limits_{V} \frac{\varrho_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV'\,, \tag{14.1}$$

соответствующих плотности заряда

$$\varrho_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}') = \varrho_{\,0} \left(\frac{x'}{a}\right)^{\alpha} \left(\frac{y'}{b}\right)^{\beta} \left(\frac{z'}{c}\right)^{\gamma}, \tag{14.2}$$

к однократным (эллиптическим) интегралам построен Феррерсом [99]. В (14.1), (14.2) индексы (показатели степени) α, β, γ суть неотрицательные целые числа. Метод Феррерса опирается на использование обсуждавшейся выше формулы (12.15) для потенциала слоисто-неоднородного эллипсоида, а также на установленные Феррерсом теорему и формулу, к рассмотрению которых мы переходим.

14.1. Теорема Ферреpса

Теорема Ферреpса гласит: если $\Phi(\mathbf{r})$ — потенциал, создаваемый произвольным непрерывным распределением плотности заряда $\varrho(\mathbf{r})$, причем на границе тела $\varrho(\mathbf{r})|_S = 0$, то потенциал того же тела в той же точке, обусловленный «распределением заряда» вида $\partial\varrho/\partial x$, равен $\partial\Phi/\partial x$.

Доказательство элементарно. Действительно,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \int\limits_V \varrho(\mathbf{r}')\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)dV' = -\int\limits_V \varrho(\mathbf{r}')\,\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{R}\right)dV' =$$
$$= -\oint\limits_S \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{R}\cos(\mathbf{n}', x)\,dS' + \int\limits_V \frac{1}{R}\,\frac{\partial\varrho}{\partial x'}\,dV' = \int\limits_V \frac{1}{R}\,\frac{\partial\varrho}{\partial x'}\,dV'.$$

Здесь $\mathbf{n}'$ — единичный вектор внешней нормали к элементу dS' поверхности S тела, V — объем тела, $dV' = dx'dy'dz'$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

Совершенно очевидно, что если на границе тела вместе с плотностью $\varrho(\mathbf{r})$ обращаются в нуль и все ее частные производные до $(m-1)$-го порядка включительно, то потенциал, соответствующий «плотности заряда» $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}\varrho}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$, где $\alpha+\beta+\gamma \leqslant m$, равен $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}\Phi}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$.

Важно отметить, что теорема Ферреpса применима к телам произвольной формы и справедлива для точек наблюдения, расположенных как внутри, так и вне тела.

В случае эллипсоида условиям теоремы Ферреpса удовлетворяет рассмотренное выше распределение (12.14), причем если n — неотрицательное целое число (а здесь разбирается только этот случай), то теорема применима к любой производной плотности (12.14) заряда до $(n-1)$-го порядка включительно.

14.2. Формула Ферреpса

Теперь нам предстоит представить плотность заряда (14.2) в виде линейной комбинации распределения (12.14) и его производных. Реализация этой задачи осуществляется с помощью предъявленной Ферреpсом [99] формулы[1], которая в современных обозначениях имеет вид

$$x^s = \frac{1}{2^s}\sum_{k=0}^{[s/2]} C_s^k\,\frac{(-1)^k}{(s-2k)!}\,\frac{d^{s-2k}}{dx^{s-2k}}\,(x^2-h^2)^{s-k}, \tag{14.3}$$

где s — произвольное неотрицательное целое число, h — произвольная постоянная, C_s^k — число сочетаний из s по k, символом $[A]$ обозначается целая часть числа A. Таким образом, формула Ферреpса позволяет представить целую степень переменной x в виде линейной комбинации производных от целых степеней квадратного двучлена $x^2 - h^2$, причем ни в одном из слагаемых этой комбинации порядок производной не превосходит величины показателя степени.

[1] Формула (14.3), являясь ключевой для работы Ферреpса [99], дана в ней без доказательства и содержит опечатку, сохранившуюся в последующих выкладках.

Воспроизведем доказательство формулы (14.3), данное в [518][1].

Обозначая для краткости правую часть формулы (14.3) через $\theta(x)$, будем рассматривать входящую в нее функцию $f(x) \equiv (x^2 - h^2)^{s-k}$ как аналитическую. Тогда, используя интегральную формулу Коши

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{z - x}\, dz\,,$$

где точка x лежит внутри области, охватываемой замкнутым контуром C, можно записать

$$\theta(x) = \frac{1}{2^{s+1}\pi i} \sum_{k=0}^{[s/2]} C_s^k\, \frac{(-1)^k}{(s-2k)!}\, \frac{d^{s-2k}}{dx^{s-2k}} \int\limits_C \frac{(z^2 - h^2)^{s-k}}{z - x}\, dz\,.$$

Верхний предел суммирования можно заменить на s, т. к. факториал $(s-2k)!$ в знаменателе обеспечивает обращение в нуль дополнительных слагаемых. Выполняя дифференцирование, получаем

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{s} \frac{(-1)^k}{2^s}\, C_s^k \int\limits_C \frac{(z^2 - h^2)^{s-k}}{(z - x)^{s+1-2k}}\, dz\,.$$

Теперь обращение в нуль дополнительных членов ряда обеспечивается теоремой Коши, ибо при $k > [s/2]$ подынтегральное выражение становится аналитической функцией.

Далее, сворачивая сумму по формуле бинома Ньютона, находим

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C dz\, \frac{(z^2 - h^2)^s}{2^s (z-x)^{s+1}} \sum_{k=0}^{s} C_s^k\, (-1)^k \left[\frac{(z-x)^2}{z^2 - h^2}\right]^k = \\ = \frac{1}{2\pi i}\, \frac{1}{2^s} \int\limits_C \frac{(2zx - x^2 - h^2)^s}{(z-x)^{s+1}}\, dz\,.$$

Учитывая, что s-ая производная аналитической функции дается формулой

$$\varphi^{(s)}(x) = \frac{s!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\varphi(z)}{(z-x)^{s+1}}\, dz\,,$$

где в нашем случае $\varphi(z) = (2zx - x^2 - h^2)^s$, окончательно получаем

$$\theta(x) = \frac{1}{2^s\, s!}\, \varphi^{(s)}(x) = x^s\,.$$

Таким образом, справедливость равенства (14.3) установлена.

Следующий шаг состоит в обобщении этого равенства на случай трех переменных. Рассматривая переменную x как декартову координату, заменяя h^2 на $h^2 - y^2 - z^2$ и учитывая, что при повороте координатной системы произойдут замены

$$x \to \frac{p\,x + q\,y + r\,z}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial x} \to \frac{p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y} + r\frac{\partial}{\partial z}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}\,, \tag{14.4}$$

[1] Другие доказательства формулы Ферререса приводятся в [205, 457].

а величина $x^2+y^2+z^2$ останется при этом постоянной как инвариантная при поворотах, находим

$$(p\,x+q\,y+r\,z)^s=\sum_{k=0}^{[s/2]}\frac{(-1)^k\,C_s^k}{2^s\,(s-2k)!}\,(p^2+q^2+r^2)^k\times$$
$$\times\left(p\frac{\partial}{\partial x}+q\frac{\partial}{\partial y}+r\frac{\partial}{\partial z}\right)^{s-2k}(x^2+y^2+z^2-h^2)^{s-k}. \quad (14.5)$$

Обратим внимание, что в (14.4) и (14.5) направляющие косинусы преднамеренно представлены с помощью компонент p, q, r *неединичного* вектора.

В дальнейших преобразованиях используется так называемая *полиномиальная* формула

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n=\sum_{n_1+n_2+..+n_k=n}\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}\,{a_1}^{n_1}{a_2}^{n_2}\ldots{a_k}^{n_k}. \quad (14.6)$$

Очевидно, что пределы суммирования в каждой из сумм, образующих $(k-1)$-кратную сумму (14.6), являются конечными. Однако, учитывая, что факториал от отрицательного целого числа есть бесконечно большая по модулю величина, можно во всех суммах в (14.6) формально писать одинаковые пределы суммирования: от $-\infty$ до $+\infty$. Именно такой смысл имеют встречающиеся далее суммы $\sum\limits_{i,j,k,\ldots}$ без указанных пределов суммирования[1].

Раскрывая с помощью (14.6) все скобки в (14.5), содержащие p, q, r, и приравнивая коэффициенты левой и правой частей полученного уравнения, стоящие при $p^\alpha\,q^\beta\,r^\gamma$, где

$$\alpha+\beta+\gamma=s\,, \quad (14.7)$$

получаем

$$x^\alpha\,y^\beta\,z^\gamma=\frac{\alpha!\beta!\gamma!}{(-2)^s}\sum_{i,j,k}\frac{\widehat{d}_{ij\,k}^{(\alpha\beta\gamma)}}{(s-i-j-k)!}\,(h^2-x^2-y^2-z^2)^{s-i-j-k}\,. \quad (14.8)$$

Для сокращения записи здесь введено обозначение

$$\widehat{d}_{ij\,k}^{(\alpha\beta\gamma)}\equiv\frac{\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha-2i}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{\beta-2j}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)^{\gamma-2k}}{i!\,j!\,k!\,(\alpha-2i)!\,(\beta-2j)!\,(\gamma-2k)!}\,. \quad (14.9)$$

Замены $x\to h(x/a)$, $y\to h(y/b)$, $z\to h(z/c)$ преобразуют (14.8) к следующему окончательному виду:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha\left(\frac{y}{b}\right)^\beta\left(\frac{z}{c}\right)^\gamma=$$
$$=\frac{\alpha!\beta!\gamma!}{(-2)^s}\sum_{i,j,k}\frac{a^{\alpha-2i}b^{\beta-2j}c^{\gamma-2k}}{(s-i-j-k)!}\,\widehat{d}_{ij\,k}^{(\alpha\beta\gamma)}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^{s-i-j-k}. \quad (14.10)$$

[1] Временный переход к формально бесконечным пределам суммирования в кратных суммах позволяет не только прибегать к их упрощенной записи, но — что гораздо существенней — предоставляет удобную возможность произвольно изменять порядок следования сумм, не обращая при этом внимания на поведение реальных пределов суммирования.

14.3. Представление потенциалов в терминах $P(\mathbf{r}, u)$

Формула (14.10), обеспечивая представление степенного распределения заряда (14.2) в виде линейной комбинации распределений заряда, потенциалы которых известны благодаря (12.15) и теореме Феррерса, позволяет на основании принципа суперпозиции сразу написать выражение для потенциалов $\Phi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})$, соответствующих (14.2). Оно имеет вид

$$\frac{\Phi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})}{\pi\varrho_0\, abc} = \frac{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}{(-2)^s} \sum_{i,j,k} \frac{a^{\alpha-2i} b^{\beta-2j} c^{\gamma-2k}}{(s-i-j-k+1)!}\, \widehat{d}^{(\alpha\beta\gamma)}_{ij\,k} \int\limits_{0,\,\xi}^{\infty} P^{\,s-i-j-k+1}(\mathbf{r}, u)\, \frac{du}{Q(u)}\,, \tag{14.11}$$

где ξ — эллипсоидальная координата точки $\mathbf{r}$, $s = \alpha + \beta + \gamma$,

$$P(\mathbf{r}, u) = 1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u}\,. \tag{14.12}$$

Внесем дифференциальный оператор $\widehat{d}^{(\alpha\beta\gamma)}_{ij\,k}$ под знак интеграла в (14.11). В случае формулы для внешнего потенциала, в которой нижний предел интегрирования ξ является функцией координат точки наблюдения, законность подобной процедуры требует пояснения.

Для этого обратим внимание, во-первых, на то, что оператор $\widehat{d}^{(\alpha\beta\gamma)}_{ij\,k}$ соответствует производной порядка $\kappa = s - 2(i+j+k)$, во-вторых, на то, что показатель степени $s-i-j-k+1$ величины $P(\mathbf{r}, u)$ больше числа κ по крайней мере на *единицу*, и в-третьих, на то, что при $u = \xi$ подынтегральное выражение в (14.11) обращается в нуль (ибо согласно определению эллипсоидальной координаты $P(\mathbf{r}, \xi) = 0$). Вышесказанное в сочетании с учетом правила дифференцирования интеграла, когда его пределы зависят от параметра, доказывает правомочность обсуждаемой процедуры. В действительности, благодаря тому, что разность между показателем степени у P и числом κ не меньше *единицы*, возникает дополнительная однократная возможность, вычисляя производную самого потенциала эллипсоида, проводить дифференцирование непосредственно под знаком интеграла или, иначе говоря,

$$\left.\begin{array}{c}\textit{при однократном дифференцировании}\\ \textit{потенциала } \Phi_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) \textit{ координату } \xi\\ \textit{можно рассматривать как константу.}\end{array}\right\} \tag{14.13}$$

Если в (14.11) выполнить дифференцирование, используя формулу[1]

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n f(x^2) = \sum_i \frac{n!}{i!\,(n-2i)!}\,(2x)^{n-2i} \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^{n-i} f(x^2)\,,$$

и получающуюся шестерную сумму вновь преобразовать в тройную с помощью соотношения

$$\sum_i \frac{l!}{i!\,(l-i)!} \left(-\frac{a^2}{a^2+u}\right)^{l-i} = \left(1 - \frac{a^2}{a^2+u}\right)^l = \left(\frac{u}{a^2+u}\right)^l,$$

[1] См. [447], **0.432** 1.

то возникающее выражение для потенциала содержит под знаком интеграла полином от $P(\mathbf{r}, u)$ и имеет вид

$$\Phi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \pi\varrho_0\, abc\,\alpha!\,\beta!\,\gamma! \times$$
$$\times \int\limits_{0,\xi}^{\infty} \frac{du}{Q(u)} \sum_{l,m,n} \frac{\left(\dfrac{ax}{a^2+u}\right)^{\alpha-2l} \left(\dfrac{by}{b^2+u}\right)^{\beta-2m} \left(\dfrac{cz}{c^2+u}\right)^{\gamma-2n}}{4^{l+m+n}\, l!\, m!\, n!\, (\alpha-2l)!\, (\beta-2m)!\, (\gamma-2n)!\, (l+m+n+1)!} \times$$
$$\times \frac{P^{\,l+m+n+1}(\mathbf{r}, u)\; u^{\,l+m+n}}{(a^2+u)^l\, (b^2+u)^m\, (c^2+u)^n}\,. \qquad (14.14)$$

Отметим, что в работе [99] Феррерс, установив формулу (14.10), общих выражений (14.11) или (14.14) не приводит, ограничившись разбором частных случаев для $\alpha+\beta+\gamma\leqslant 2$. Такого рода частные формулы (в более компактной записи Рауса [307]) мы приводим применительно к $\dfrac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{\varrho_0}\Phi^{(i)}_{\alpha\beta\gamma}$ (для $\alpha+\beta+\gamma\leqslant 3$) в виде таблицы интегралов.

Таблица интегралов по объему эллипсоида

(в терминах $P \equiv P(\mathbf{r}, u)$ и $Q \equiv Q(u)$)

$$\int \frac{dV'}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \pi\, abc \int \frac{P\, du}{Q}\,,$$

$$\int \frac{x'}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV' = \pi\, a^3bc\, x \int \frac{P\, du}{(a^2+u)\, Q}\,,$$

$$\int \frac{x'^{\,2}}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV' = \pi\, a^3bc \int \left\{\frac{1}{4}\, uP^2 + \frac{a^2x^2P}{a^2+u}\right\} \frac{du}{(a^2+u)\, Q}\,,$$

$$\int \frac{x'y'}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV' = \pi\, a^3b^3c\, xy \int \frac{P\, du}{(a^2+u)(b^2+u)\, Q}\,,$$

$$\int \frac{x'^{\,3}}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV' = \pi\, a^5bc\, x \int \left\{\frac{3}{4}\, uP^2 + \frac{a^2x^2P}{a^2+u}\right\} \frac{du}{(a^2+u)^2\, Q}\,,$$

$$\int \frac{x'^{\,2}y'}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV' = \pi\, a^3b^3c\, y \int \left\{\frac{1}{4}\, uP^2 + \frac{a^2x^2P}{a^2+u}\right\} \frac{du}{(a^2+u)(b^2+u)\, Q}\,,$$

$$\int \frac{x'y'z'}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV' = \pi\, a^3b^3c^3\, xyz \int \frac{P\, du}{Q^3}\,.$$

В этой таблице у всех интегралов справа от знака равенства верхний предел интегрирования есть ∞, а нижний предел равен нулю или ξ соответственно тому, внутри или вне эллипсоида выбрана точка наблюдения. Выражения для интегралов по объему, содержащих в числителях подынтегральных дробей y, z, y^2, z^2, yz, zx, y^3, z^3, y^2z, z^2x, x^2z, y^2x и z^2y, получаются из приведенных в таблице формул с помощью взаимной замены соответствующих координат либо (за исключением случаев x^2z, y^2x и z^2y) путем циклической перестановки.

14.4. Запись в терминах потенциальных факторов

Выражениям для внешних и внутренних феррерсовых потенциалов эллипсоида целесообразно придать удобный для практического использования вид, содержащий потенциальные факторы эллипсоида. Для этого вновь обратимся к (14.11)[1]. Последовательно раскроем выражение $P^{s-i-j-k+1}$ по полиномиальной формуле и в полученном результате выделим внутренние $M_{lmn}^{(i)} \equiv M_{lmn}$ и внешние $M_{lmn}^{(e)} \equiv \mathscr{M}_{lmn}(\xi)$ потенциальные факторы эллипсоида в соответствии с их определениями (3.2) и (4.1). Будем иметь

$$\frac{\Phi_{\alpha\beta\gamma}^{(i,e)}(\mathbf{r})}{2\pi\varrho_0} = \frac{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}{(-2)^s}\times$$
$$\times\sum_{i,j,k,l,m,n}\frac{(-1)^{i+j+k}\,a^{\alpha-2l}\,b^{\beta-2m}\,c^{\gamma-2n}\,M_{ij\,k}^{(i,e)}\,\widehat{d}_{lmn}^{(\alpha\beta\gamma)}\,x^{2i}\,y^{2j}\,z^{2k}}{(s-i-j-k-l-m-n+1)!\,i!\,j!\,k!\,(2i-1)!!\,(2j-1)!!\,(2k-1)!!}\,.$$

Делая замены $i\to i-l$, $j\to j-m$, $k\to k-n$ индексов суммирования и выполняя дифференцирование, получаем окончательно[2]

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma}^{(i,e)}(\mathbf{r}) = 2\pi\varrho_0\frac{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}{(-2)^s}\times$$
$$\times\sum_{i,j,k}\frac{(-2)^{i+j+k}\,x^{2i-\alpha}\,y^{2j-\beta}\,z^{2k-\gamma}}{(s-i-j-k+1)!\,(2i-\alpha)!\,(2j-\beta)!\,(2k-\gamma)!}\,K_{ij\,k}^{(\alpha\beta\gamma)}\,, \quad (14.15)$$

где

$$K_{ij\,k}^{(\alpha\beta\gamma)}\equiv$$
$$\equiv\sum_{l=0}^{[\alpha/2]}\sum_{m=0}^{[\beta/2]}\sum_{n=0}^{[\gamma/2]}\frac{(-2)^{-l-m-n}\,a^{\alpha-2l}\,b^{\beta-2m}\,c^{\gamma-2n}}{l!\,m!\,n!(\alpha-2l)!\,(\beta-2m)!\,(\gamma-2n)!}\,M_{i-l,j-m,k-n}^{(i,e)}\,. \quad (14.16)$$

Из общих выражений (14.15), (14.16) легко получаются более удобные формулы, учитывающие четность показателей α, β и γ. Эти формулы, в которых восстановлены реальные пределы суммирования всех сумм, имеют вид[3]:

$$\Phi_{2\lambda,2\mu,2\nu}^{(i,e)} = \varrho_0\frac{8\pi}{4^\sigma}\,(2\lambda)!\,(2\mu)!\,(2\nu)!\,\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{\sigma}\sum_{j=0}^{\sigma-i}\sum_{k=0}^{\sigma-i-j}\frac{S_{ijk}\,x^{2i}\,y^{2j}\,z^{2k}}{(\sigma-i-j-k)!}\,\Gamma_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)}\,, \quad (14.17)$$

[1] Естественная попытка исходить из выражения (14.14), не содержащего процедур дифференцирования, приводит, однако, к девятикратной сумме и необходимости использования комбинаторных методов для сведе́ния результата к шестикратной сумме.

[2] В терминах так называемых «индексных символов» (см. [56]) выражения для внутренних потенциалов эллипсоида $\Phi_{\alpha\beta\gamma}^{(i)}$ для случая $\alpha+\beta+\gamma=1$ сначала были найдены Лебовицем [204] с помощью аппарата функций Ламе, а затем для случаев $\alpha+\beta+\gamma\leqslant 3$ были получены Чандрасекхаром и Лебовицем [57] методом Ферререса.

[3] Выражения (14.17)–(14.24) для внутренних потенциалов были получены М. Л. Левиным и автором (см. [209]) методом, отличным от изложенного здесь. Для внешних потенциалов эти формулы даны в [517].

где

$$\Gamma_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)} \equiv \sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\sum_{n=0}^{\nu} \frac{S_{lmn}\, a^{2l} b^{2m} c^{2n}}{(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(\nu-n)!}\; M_{i+l,j+m,k+n}^{(i,e)}\,; \tag{14.18}$$

$$\Phi_{2\lambda+1,2\mu,2\nu}^{(i,e)} = \varrho_0 \frac{8\pi}{4^\sigma}\,(2\lambda+1)!\,(2\mu)!\,(2\nu)!\,\times \\ \times \sum_{i=0}^{\sigma}\sum_{j=0}^{\sigma-i}\sum_{k=0}^{\sigma-i-j} \frac{S_{ij\,k}\, x^{2i+1}\, y^{2j}\, z^{2k}}{(\sigma-i-j-k)!\,(2i+1)}\; X_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)}\,, \tag{14.19}$$

где

$$X_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)} \equiv \sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\sum_{n=0}^{\nu} \frac{S_{lmn}\, a^{2l+1} b^{2m} c^{2n}}{(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(\nu-n)!\,(2l+1)}\; M_{i+l+1,j+m,k+n}^{(i,e)}\,; \tag{14.20}$$

$$\Phi_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu}^{(i,e)} = \varrho_0 \frac{8\pi}{4^\sigma}\,(2\lambda+1)!\,(2\mu+1)!\,(2\nu)!\,\times \\ \times \sum_{i=0}^{\sigma}\sum_{j=0}^{\sigma-i}\sum_{k=0}^{\sigma-i-j} \frac{S_{ij\,k}\, x^{2i+1}\, y^{2j+1}\, z^{2k}}{(\sigma-i-j-k)!\,(2i+1)\,(2j+1)}\; Y_{ijk}^{(\lambda\mu\nu)}\,, \tag{14.21}$$

где

$$Y_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)} \equiv \sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\sum_{n=0}^{\nu} \frac{S_{lmn}}{(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(\nu-n)!}\,\times \\ \times \frac{a^{2l+1} b^{2m+1} c^{2n}}{(2l+1)\,(2m+1)}\; M_{i+l+1,j+m+1,k+n}^{(i,e)}\,; \tag{14.22}$$

$$\Phi_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu+1}^{(i,e)} = \varrho_0 \frac{8\pi}{4^\sigma}\,(2\lambda+1)!\,(2\mu+1)!\,(2\nu+1)!\,\times \\ \times \sum_{i=0}^{\sigma}\sum_{j=0}^{\sigma-i}\sum_{k=0}^{\sigma-i-j} \frac{S_{ij\,k}\, x^{2i+1}\, y^{2j+1}\, z^{2k+1}}{(\sigma-i-j-k)!\,(2i+1)\,(2j+1)\,(2k+1)}\; Z_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)}\,, \tag{14.23}$$

где

$$Z_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)} \equiv \sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\sum_{n=0}^{\nu} \frac{S_{lmn}}{(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(\nu-n)!}\,\times \\ \times \frac{a^{2l+1} b^{2m+1} c^{2n+1}}{(2l+1)\,(2m+1)\,(2n+1)}\; M_{i+l+1,j+m+1,k+n+1}^{(i,e)}\,. \tag{14.24}$$

Для сокращения записи этих формул введены обозначения

$$\sigma \equiv \lambda+\mu+\nu+1\,, \tag{14.25}$$

$$S_{ij\,k} \equiv \frac{(-2)^{i+j+k}}{(2i)!\,(2j)!\,(2k)!}\,. \tag{14.26}$$

Выражения для потенциалов $\Phi^{(i,e)}_{2\lambda,2\mu+1,2\nu}$, $\Phi^{(i,e)}_{2\lambda,2\mu,2\nu+1}$, $\Phi^{(i,e)}_{2\lambda,2\mu+1,2\nu+1}$ и $\Phi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu,2\nu+1}$ получаются из (14.19)–(14.22) с помощью циклической перестановки координат (либо путем взаимной замены соответствующих координат).

Из формул (14.17)–(14.24) следует, что:

1. Полиномиальному (степени n) распределению заряда в эллипсоидальной области соответствует полиномиальный же (степени $n+2$) внутренний потенциал. Это — результат Ферререа. Для распределений вида (12.14) с целочисленными значениями n он был известен уже Пуассону.

2. Формулы для внешних потенциалов получаются из формул для внутренних потенциалов простой заменой всех внутренних потенциальных факторов внешними потенциальными факторами с теми же индексами. На любой эллипсоидальной поверхности, внешней и софокусной по отношению к базисному эллипсоиду, потенциал является полиномом степени, совпадающей со степенью внутреннего потенциала. Поэтому феррерсовы потенциалы для точек наблюдения, расположенных вне базисного эллипсоида, позволительно называть *«псевдополиномиальными»*.

3. Потенциалы $\Phi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})$ с четным (нечетным) индексом α (β, γ) являются четной (нечетной) функцией координаты x (y, z). Это свойство легко устанавливается непосредственно из (14.1), если учесть, что в случае эллипсоида каждый из трех входящих в (14.1) определенных интегралов имеет симметричные пределы.

4. Коэффициенты при потенциальных факторах эллипсоида в суммах (14.18), (14.20), (14.22), (14.24) не зависят от i, j, k. Это — результат наших (содержащих факториалы Π_{lmn}) определений (3.2) и (4.1).

5. Поскольку при фиксированных значениях λ, μ и ν пределы суммирования в формулах для потенциалов $\Phi^{(i,e)}_{2\lambda,2\mu,2\nu}$, $\Phi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu,2\nu}$, $\Phi^{(i,e)}_{2\lambda,2\mu+1,2\nu}$, $\Phi^{(i,e)}_{2\lambda,2\mu,2\nu+1}$, $\Phi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu}$, $\Phi^{(i,e)}_{2\lambda,2\mu+1,2\nu+1}$, $\Phi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu,2\nu+1}$, $\Phi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu+1}$ совпадают, то при этом у всех восьми типов потенциалов одинаково и число слагаемых.

6. Потенциалы в центре эллипсоида отличны от нуля лишь для распределений $\varrho = \varrho_{\,2\lambda,2\mu,2\nu}(\mathbf{r})$, являющихся четными функциями координат, и равны
$$\Phi^{(i)}_{2\lambda,2\mu,2\nu}(0) = \varrho_{\,0}\,\frac{2\pi\,(2\lambda)!\,(2\mu)!\,(2\nu)!}{4^{\lambda+\mu+\nu}\,(\lambda+\mu+\nu+1)!}\times$$
$$\times\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\sum_{n=0}^{\nu}\frac{S_{lmn}\,a^{2l}b^{2m}c^{2n}}{(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(\nu-n)!}\,M_{lmn} \qquad (14.27)$$

7. У потенциалов распределений вида $\varrho = \varrho_{\,2\lambda,2\mu,2\nu}(\mathbf{r})$ величина каждого из трех индексов любого потенциального фактора равна полусумме показателей степеней у соответствующих декартовой координаты и полуоси эллипсоида.

8. Максимальный вес факторов, входящих в формулы для $\Phi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}$ равен $\alpha+\beta+\gamma+1$.

Ниже в форме таблицы интегралов приведены развернутые выражения для $\left(a^\alpha b^\beta c^\gamma/\varrho_0\right)\Phi^{(i)}_{\alpha\beta\gamma}$, соответствующие простейшим частным случаям формул (14.17)–(14.24).

Таблица интегралов по объему эллипсоида

(в терминах потенциальных факторов)

$$\int\frac{dV'}{R} = 2\pi\left(M_{000}-M_{100}x^2-M_{010}y^2-M_{001}z^2\right),$$

$$\int\frac{x'}{R}\,dV' = 2\pi a^2x\left(M_{100}-\frac{1}{3}\,M_{200}x^2-M_{110}y^2-M_{101}z^2\right),$$

$$\int\frac{x'y'}{R}\,dV' = \frac{2}{3}\,\pi a^2b^2xy\left(3M_{110}-M_{210}x^2-M_{120}y^2-3M_{111}z^2\right),$$

$$\int\frac{x'y'z'}{R}\,dV' = \frac{2}{3}\,\pi a^2b^2c^2xyz\left(3M_{111}-M_{211}x^2-M_{121}y^2-M_{112}z^2\right),$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x'^2}{R}\,dV' = \pi a^2\Big[&\frac{1}{2}\left(M_{000}-a^2M_{100}\right)-\left(M_{100}-a^2M_{200}\right)x^2-\\ &-\left(M_{010}-a^2M_{110}\right)y^2-\left(M_{001}-a^2M_{101}\right)z^2+\left(M_{110}-a^2M_{210}\right)x^2y^2+\\ &+\left(M_{011}-a^2M_{111}\right)y^2z^2+\left(M_{101}-a^2M_{201}\right)x^2z^2+\frac{1}{6}\left(M_{200}-a^2M_{300}\right)x^4+\\ &+\frac{1}{6}\left(M_{020}-a^2M_{120}\right)y^4+\frac{1}{6}\left(M_{002}-a^2M_{102}\right)z^4\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x'^2y'}{R}\,dV' = \frac{\pi}{3}\,a^2b^2y\Big[&\frac{3}{2}\left(M_{010}-a^2M_{110}\right)-3\left(M_{110}-a^2M_{210}\right)x^2-\\ &-\left(M_{020}-a^2M_{120}\right)y^2-3\left(M_{011}-a^2M_{111}\right)z^2+\left(M_{120}-a^2M_{220}\right)x^2y^2+\\ &+\left(M_{021}-a^2M_{121}\right)y^2z^2+3\left(M_{111}-a^2M_{211}\right)x^2z^2+\frac{1}{2}\left(M_{210}-a^2M_{310}\right)x^4+\\ &+\frac{1}{10}\left(M_{030}-a^2M_{130}\right)y^4+\frac{1}{2}\left(M_{012}-a^2M_{112}\right)z^4\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x'^2y'z'}{R}\,dV' = \frac{\pi}{3}\,a^2b^2c^2yz\Big[&\frac{3}{2}\left(M_{011}-a^2M_{111}\right)-3\left(M_{111}-a^2M_{211}\right)x^2-\\ &-\left(M_{021}-a^2M_{121}\right)y^2-\left(M_{012}-a^2M_{112}\right)z^2+\left(M_{121}-a^2M_{221}\right)x^2y^2+\\ &+\frac{1}{3}\left(M_{022}-a^2M_{122}\right)y^2z^2+\left(M_{112}-a^2M_{212}\right)x^2z^2+\frac{1}{2}\left(M_{211}-a^2M_{311}\right)x^4+\\ &+\frac{1}{10}\left(M_{031}-a^2M_{131}\right)y^4+\frac{1}{10}\left(M_{013}-a^2M_{113}\right)z^4\Big],\end{aligned}$$

$$\int \frac{x'^3}{R}\, dV' = \frac{\pi}{3}\, a^4 x \left[\frac{3}{2}\left(3M_{100} - a^2 M_{200}\right) - \left(3M_{200} - a^2 M_{300}\right) x^2 - \right.$$
$$- 3\left(3M_{110} - a^2 M_{210}\right) y^2 - 3\left(3M_{101} - a^2 M_{201}\right) z^2 + \left(3M_{210} - a^2 M_{310}\right) x^2 y^2 +$$
$$+ 3\left(3M_{111} - a^2 M_{211}\right) y^2 z^2 + \left(3M_{201} - a^2 M_{301}\right) x^2 z^2 + \frac{1}{10}\left(3M_{300} - a^2 M_{400}\right) x^4 +$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(3M_{120} - a^2 M_{220}\right) y^4 + \frac{1}{2}\left(3M_{102} - a^2 M_{202}\right) z^4\right],$$

$$\int \frac{x'^3 y'}{R}\, dV' = \frac{\pi}{3}\, a^4 b^2 xy \left[\frac{3}{2}\left(3M_{110} - a^2 M_{210}\right) - \left(3M_{210} - a^2 M_{310}\right) x^2 - \right.$$
$$- \left(3M_{120} - a^2 M_{220}\right) y^2 - 3\left(3M_{111} - a^2 M_{211}\right) z^2 + \frac{1}{3}\left(3M_{220} - a^2 M_{320}\right) x^2 y^2 +$$
$$+ \left(3M_{121} - a^2 M_{221}\right) y^2 z^2 + \left(3M_{211} - a^2 M_{311}\right) x^2 z^2 + \frac{1}{10}\left(3M_{310} - a^2 M_{410}\right) x^4 +$$
$$\left. + \frac{1}{10}\left(3M_{130} - a^2 M_{230}\right) y^4 + \frac{1}{2}\left(3M_{112} - a^2 M_{212}\right) z^4\right],$$

$$\int \frac{x'^3 y' z'}{R}\, dV' = \frac{\pi}{3}\, a^4 b^2 c^2 xyz \left[\frac{3}{2}\left(3M_{111} - a^2 M_{211}\right) - \right.$$
$$- \left(3M_{211} - a^2 M_{311}\right) x^2 - \left(3M_{121} - a^2 M_{221}\right) y^2 - \left(3M_{112} - a^2 M_{212}\right) z^2 +$$
$$+ \frac{1}{3}\left(3M_{221} - a^2 M_{321}\right) x^2 y^2 + \frac{1}{3}\left(3M_{122} - a^2 M_{222}\right) y^2 z^2 +$$
$$+ \frac{1}{3}\left(3M_{212} - a^2 M_{312}\right) x^2 z^2 + \frac{1}{10}\left(3M_{311} - a^2 M_{411}\right) x^4 +$$
$$\left. + \frac{1}{10}\left(3M_{131} - a^2 M_{231}\right) y^4 + \frac{1}{10}\left(3M_{113} - a^2 M_{213}\right) z^4\right].$$

В таблице представлены выражения для потенциалов в точках $\mathbf{r}$ наблюдения, принадлежащих объему эллипсоида. В таблицу не включены интегралы, получающиеся из представленных в таблице с помощью циклической или взаимной перестановки координат. Для точек наблюдения, находящихся вне эллипсоида, правильные выражения получаются из приведенных, если произвести замену $M_{lmn} \to \mathscr{M}_{lmn}$. Для сокращения записи в таблице употреблено обозначение

$$R \equiv |\,\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \tag{14.28}$$

Полезно иметь в виду, что интегралы по объему эллипсоида вида

$$\int x'^k y'^l z'^m\, R^n\, dV'$$

при четных значениях n вычисляются элементарно, а при нечетных n сводятся к однократным благодаря свойству

$$R = \frac{R^2}{R} = \frac{(x - x')^2}{R} + \frac{(y - y')^2}{R} + \frac{(z - z')^2}{R}.$$

В качестве примера приведем результат вычисления простейшего симметричного (не нарушающего равноправия декартовых направлений) интеграла. Так, для точки наблюдения, находящейся вне эллипсоида,

$$\int R\,dV' = \pi\left[\left\langle \frac{a^2}{2}\left(b^2+c^2\right)\mathscr{M}_{100}\right\rangle + \left\langle\left(\mathscr{M}_{000}-a^2\mathscr{M}_{100}\right)x^2\right\rangle - \right.$$
$$\left. -\left\langle\left(\mathscr{M}_{100}-b^2\mathscr{M}_{110}\right)x^2y^2\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle\left(\mathscr{M}_{100}-\frac{1}{3}\,a^2\mathscr{M}_{200}\right)x^4\right\rangle\right] + \frac{\pi abc\,\xi^2}{2Q(\xi)}. \tag{14.29}$$

Выражение этого же интеграла для внутренней точки наблюдения получается из (14.29) в результате замены $\mathscr{M}_{lmn} \to M_{lmn}$ и отбрасывания последнего слагаемого ($\xi = 0$). Здесь угловыми скобками $\langle \ldots \rangle$ обозначена сумма трех членов циклической перестановки. Так, например,

$$\left\langle a^2 M_{100}\,x^2\right\rangle \equiv a^2 M_{100}\,x^2 + b^2 M_{010}\,y^2 + c^2 M_{001}\,z^2.$$

§ 15. Дифференциальные свойства потенциалов $\Phi_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})$

Необычайная «аналитическая пластичность» эллипсоида проявляется, в частности, в дифференциальных свойствах его ньютонова потенциала. Сказанное иллюстрируют, например, удивительные результаты работы [99], которые выражают в одном случае производную потенциала через производную объемной плотности источников (см. теорему Ферререса в § 14), а в другом случае потенциал простого слоя через потенциал объемных источников с помощью процедуры однократного дифференцирования (см. правило Ферререса в § 20). И хотя эти результаты носят общий характер, Ферререс эффективно применил их именно к потенциалам эллипсоида[1].

В данном параграфе применительно к эллипсоиду рассматриваются производные потенциалов $\Phi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})$ степенных распределений, устанавливаются полезные для практических расчетов формулы дифференцирования[2], позволяющие пролить свет на связь, в одних случаях, между производными внешних и внутренних потенциалов, а, в других случаях, — между производными потенциалов, являющихся четными и нечетными функциями координат.

Начнем с того, что напомним уже установленные факты. Так, выражения ферререcовых потенциалов для внешней точки наблюдения получаются из выражений ферререcовых потенциалов для внутренней точки наблюдения простой заменой в них внутренних потенциальных факторов эллипсоида соответствующими внешними (см. (14.15), (14.16)). Символически это

[1] По существу, теорема и правило Ферререса являются своего рода «формулами–трансляторами», преобразующими известные решения электростатических задач в готовые решения новых задач. Несмотря на солидный возраст этих результатов, они остались вне поля зрения учебников и задачников по электромагнетизму.

[2] При дифференцировании внешних потенциалов эллипсоида следует помнить, что они, наряду с явной зависимостью от декартовых координат x, y, z, зависят от них и неявно — через эллипсоидальную координату ξ, являющуюся неотрицательным корнем кубического уравнения (1.2).

можно записать, например, следующим образом:

$$\Phi^{(e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \Big\{\Phi^{(i)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})\Big\}_{M\to\mathscr{M}}. \tag{15.1}$$

Используя такую символику, утверждение (14.13), которое справедливо и для представления потенциалов в терминах потенциальных факторов, можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\Phi^{(e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\,\Phi^{(i)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})\right\}_{M\to\mathscr{M}}. \tag{15.2}$$

Аналогично записываются и производные по y или z.

Опуская вывод, приведем также символические формулы для вторых производных феррерсовых потенциалов по декартовым координатам.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\Phi^{(e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\Phi^{(i)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})\right\}_{M\to\mathscr{M}} + \\ + 4\pi\varrho_0\,\frac{p^2(\xi)}{Q(\xi)}\,\frac{a^{\alpha+1}\,b^{\beta+1}\,c^{\gamma+1}\,x^{\alpha+2}\,y^{\beta}\,z^{\gamma}}{\left(a^2+\xi\right)^{\alpha+2}\,\left(b^2+\xi\right)^{\beta}\,\left(c^2+\xi\right)^{\gamma}}, \tag{15.3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,\Phi^{(e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \left\{\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,\Phi^{(i)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})\right\}_{M\to\mathscr{M}} + \\ + 4\pi\varrho_0\,\frac{p^2(\xi)}{Q(\xi)}\,\frac{a^{\alpha+1}\,b^{\beta+1}\,c^{\gamma+1}\,x^{\alpha+1}\,y^{\beta+1}\,z^{\gamma}}{\left(a^2+\xi\right)^{\alpha+1}\,\left(b^2+\xi\right)^{\beta+1}\,\left(c^2+\xi\right)^{\gamma}}. \tag{15.4}$$

Здесь $p^2(\xi) = \left\langle x^2 \Big/ \left(a^2+\xi\right)^2\right\rangle^{-1}$, $Q^2(\xi) = (a^2+\xi)(b^2+\xi)(c^2+\xi)$ и, как обычно, угловыми скобками $\langle\ldots\rangle$ обозначен оператор циклического сложения. Выражения для производных по другим декартовым координатам получаются из (15.3), (15.4) с помощью циклической (или взаимной) замены координат.

Так как снаружи эллипсоида $\triangle\Phi^{(e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = 0$, то в соответствии с формулой (15.3) имеет место соотношение

$$\Big\{\triangle\Phi^{(i)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})\Big\}_{M\to\mathscr{M}} = -\frac{4\pi\varrho_0\,abc}{Q(\xi)}\left(\frac{ax}{a^2+\xi}\right)^{\alpha}\left(\frac{by}{b^2+\xi}\right)^{\beta}\left(\frac{cz}{c^2+\xi}\right)^{\gamma}, \tag{15.5}$$

которое при $\xi=0$ переходит в уравнение Пуассона для потенциала внутри эллипсоида.

До сих пор мы рассматривали производные потенциалов по декартовым координатам. Между тем, потенциалы $\Phi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})$ являются не только функциями $\mathbf{r}$, но и функциями параметров a, b, c, причем в случае внешних потенциалов мы вновь встречаемся с тем, что эта зависимость — на этот раз от a, b, c — носит как явный, так и неявный (через координату ξ) характер. Существенно, однако, что свойство, выражаемое символическим равенством (15.2), не связано с конкретным видом переменной, по которой ведется дифференцирование. Требуется лишь, чтобы эллипсоидальная координата была функцией этой переменной и можно было бы использовать равенство $P(\mathbf{r}, \xi) = 0$. Поэтому при однократном дифференцировании по a свойство, выражаемое утверждением (14.13) или формулами (15.1),(15.2), можно переписать в форме

$$\widehat{\partial}_a \Phi^{(e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \left\{ \widehat{\partial}_a \Phi^{(i)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) \right\}_{M \to \mathscr{M}}, \tag{15.6}$$

где

$$\widehat{\partial}_a = -\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\cdots}{a}\right) = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial a}$$

— оператор, который был введен в § 2. Очевидно, что аналогичные формулы имеют место и при однократном дифференцировании по b или c.

Обратимся теперь к вопросу о взаимосвязи между производной потенциала $\Phi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})$ по какой-либо из декартовых координат и его производной по соответствующей этой координате полуоси эллипсоида. Будем исходить из (14.1), (14.2)

$$\Phi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \varrho_0 \int \frac{(x'/a)^\alpha\,(y'/b)^\beta\,(z'/c)^\gamma}{R}\, dV', \tag{15.7}$$

где

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|. \tag{15.8}$$

Переходя на время к новым переменным интегрирования

$$x' = a\bar{x}, \qquad y' = b\bar{y}, \qquad z' = c\bar{z},$$

будем иметь

$$\Phi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \varrho_0\, abc \int \frac{\bar{x}^\alpha\,\bar{y}^\beta\,\bar{z}^\gamma}{R}\, d\bar{x}\, d\bar{y}\, d\bar{z}\,. \tag{15.9}$$

В новых переменных интеграл берется по объему единичного шара, т. е. область интегрирования не зависит от параметров a, b, c.

Далее

$$R^2 = (x - a\bar{x})^2 + (y - b\bar{y})^2 + (z - c\bar{z})^2$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{R}\right) = -\,\bar{x}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{R}\right) = -\,\bar{y}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right), \\ \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{R}\right) = -\,\bar{z}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right). \end{gathered} \tag{15.10}$$

Соотношения (15.10) означают, что для потенциалов имеют место равенства

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x}\,\Phi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = a\,\widehat{\partial}_a\,\Phi^{(i,e)}_{\alpha-1,\beta,\gamma}(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial}{\partial y}\,\Phi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = b\,\widehat{\partial}_b\,\Phi^{(i,e)}_{\alpha,\beta-1,\gamma}(\mathbf{r}), \\ \frac{\partial}{\partial z}\,\Phi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = c\,\widehat{\partial}_c\,\Phi^{(i,e)}_{\alpha,\beta,\gamma-1}(\mathbf{r}). \end{gathered} \tag{15.11}$$

Таким образом, мы пришли к формулам, которые связывают друг с другом производные потенциалов с четными индексами и производные потенциалов с нечетными индексами.

Приведем пример эффективного использования такой рекурсии. Допустим, что нам известно выражение для $\Phi^{(i,e)}_{2\lambda,2\mu,2\nu}(\mathbf{r})$ в терминах потенциальных факторов и требуется получить аналогичные выражения для $\Phi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu,2\nu}(\mathbf{r})$, $\Phi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu}(\mathbf{r})$ и $\Phi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu+1}(\mathbf{r})$. Тогда, учитывая, что $\Phi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu,2\nu}(\mathbf{r})$ является нечетной функцией координаты x и, в частности, внутренний потенциал обращается в нуль при $x=0$, из первого соотношения (15.11) в интегральной форме

$$\Phi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu,2\nu}(\mathbf{r}) = a\int\limits_0^x \widehat{\partial}_a \Phi^{(i,e)}_{2\lambda,2\mu,2\nu}(\mathbf{r})\,dx \tag{15.12}$$

и выражений (14.17), (14.18) сразу получаем (14.19), (14.20). Повторные аналогичные действия с оставшимися координатами, определяемые последовательностью формул

$$\begin{aligned}\Phi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu+1}(\mathbf{r}) &= c\int\limits_0^z \widehat{\partial}_c\,\Phi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu}(\mathbf{r})\,dz = \\ &= c\int\limits_0^z \widehat{\partial}_c \left[b\int\limits_0^y \widehat{\partial}_b\,\Phi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu,2\nu}(\mathbf{r})\,dy\right]dz,\end{aligned} \tag{15.13}$$

приводят к выражениям для остальных потенциалов с нечетными индексами. Существенно, что в случае внешних потенциалов на протяжении всего цикла вычислений по формулам (15.12), (15.13) благодаря чередованию операций дифференцирования и интегрирования, можно — в соответствии с (15.2) и (15.6) — эллипсоидальную координату ξ рассматривать как постоянную.

§ 16. О феррерсовых потенциалах шара

Формулы (14.17)–(14.24) выражающие феррерсовы потенциалы эллипсоида в терминах потенциальных факторов, представляют собой шестикратную сумму по степеням[1] x, y, z, a, b и c. При вырождении эллипсоида в шар $c=b=a$ в выражениях (14.17)–(14.24), учитывая (3.26) и (4.25), можно выделить чисто числовые суммы (тройную для внутренних потенциалов и двойную для внешних). Вопрос о возможности вычисления этих многопараметрических сумм в аналитическом виде остается пока открытым. Некоторые общие преобразования формул для потенциалов шара, облегчающие процедуру вычисления, однако, возможны и опираются на соотношения для трехпараметрических сумм, доказанные в Приложении А. Чтобы не писать излишне громоздких формул, ограничимся рассмотрением простейших частных случаев, оставляя для общего случая лишь схематическое указание пути соответствующего упрощения.

[1] Истинно степенными эти разложения являются только относительно x, y, z и только внутри эллипсоида.

Положим в (14.17) $\mu = \nu = 0$. Тогда $\sigma = \lambda + 1$, и выражение для потенциала приобретает вид

$$\Phi^{(i)}_{2\lambda,0,0} = 2\pi \varrho_0 \, a^2 \frac{(2\lambda)!}{4^\lambda} \times \\ \times \sum_{i,j,k,l} \frac{(-2)^{i+l} \, (2i+2l-1)!! \, I_{jk} \, \bar{x}^{2i} \, \bar{y}^{2j} \, \bar{z}^{2k}}{(2i)! \, (2l)! \, (\lambda - l)! \, [2(i+j+k+l)+1] \, (\sigma - i - j - k)!}, \tag{16.1}$$

т. е. содержит четырехкратное суммирование. Здесь и в последующих формулах этого параграфа используются обозначения

$$\bar{x} = x/a, \quad \bar{y} = y/b, \quad \bar{z} = z/c, \quad I_{jk} = \frac{(-1)^{j+k}}{j! \, k!}, \tag{16.2}$$

а также

$$\sum_{i,j,k,l} \equiv \sum_{i=0}^{\sigma} \sum_{j=0}^{\sigma-i} \sum_{k=0}^{\sigma-i-j} \sum_{l=0}^{\lambda}.$$

Используя (A.23) и (A.26), можно привести (16.1) к виду

$$\Phi^{(i)}_{2\lambda,0,0} = 2\pi \varrho_0 \, a^2 \frac{(2\lambda)!}{2^\lambda} \Bigg\{ 2^{\lambda+1} \left[\frac{1}{(4\lambda+3)!!} - \frac{1}{(2\lambda+2)!} \right] \bar{x}^{2\lambda+2} + \\ + \sum_{i=0}^{\lambda} \sum_{j=0}^{\sigma-i} \sum_{k=0}^{\sigma-i-j} \frac{4^i \, (i+j+k)! (2i+2j+2k-1)!! \, I_{jk} \, \bar{x}^{2i} \, \bar{y}^{2j} \, \bar{z}^{2k}}{(2i)! \, (j+k)! \, [2(\lambda+i+j+k)+1]!! \, (\sigma-i-j-k)!} \Bigg\}, \tag{16.3}$$

содержащему трехкратное суммирование.

Другой пример. При $\mu = \nu = 0$, т. е. $\sigma = \lambda + 1$, из (14.19), (14.20) и (3.26) имеем выражение для потенциала шара

$$\Phi^{(i)}_{2\lambda+1,0,0} = 8\pi \varrho_0 \, a^2 \frac{(2\lambda+1)!}{4^\lambda} \times \\ \times \sum_{i,j,k,l} \frac{(-2)^{i+l} \, (2i+2l+1)!! \, I_{jk} \, \bar{x}^{2i+1} \, \bar{y}^{2j} \, \bar{z}^{2k}}{(2i+1)! \, (2l+1)! \, (\lambda - l)! \, [2(i+j+k+l)+3] \, (\sigma - i - j - k)!},$$

которое с помощью формул (A.24) и (A.27) преобразуются в трехкратную сумму

$$\Phi^{(i)}_{2\lambda+1,0,0} = 2\pi \varrho_0 \, a^2 \frac{(2\lambda+1)!}{2^\lambda} \Bigg\{ 2^{\lambda+1} \left[\frac{1}{(4\lambda+5)!!} - \frac{1}{(2\lambda+3)!} \right] \bar{x}^{2\lambda+3} + \\ + \sum_{i=0}^{\lambda} \sum_{j=0}^{\sigma-i} \sum_{k=0}^{\sigma-i-j} \frac{4^i \, (i+j+k)! \, (2i+2j+2k+1)!! \, I_{jk} \, \bar{x}^{2i+1} \, \bar{y}^{2j} \, \bar{z}^{2k}}{(2i+1)! \, (j+k)! \, [2(\lambda+i+j+k)+3]!! \, (\sigma-i-j-k)!} \Bigg\}. \tag{16.4}$$

Использование формул (A.23)–(A.26) для упрощения общих выражений для потенциала неоднородного шара, получающихся из (14.17)–(14.24), предполагает выполнение условия $i \leqslant \lambda$, при котором «работают» трехпараметрические формулы. Обеспечить выполнение этого условия можно, например, путем разбиения на три «слагаемых» тройной суммы

$$\sum_{i=0}^{\sigma} \sum_{j=0}^{\sigma-i} \sum_{k=0}^{\sigma-i-j} = \sum_{i=0}^{\lambda} \sum_{j=0}^{\sigma-i} \sum_{k=0}^{\sigma-i-j} + \sum_{i=\lambda+1}^{\sigma} \sum_{j=0}^{\mu} \sum_{k=0}^{\sigma-i-j} + \sum_{i=\lambda+1}^{\sigma} \sum_{j=\mu+1}^{\sigma-i} \sum_{k=0}^{\sigma-i-j}$$

в каждой из формул (14.17), (14.19), (14.21), (14.23). В результате исходные выражения для потенциалов, содержащие шестикратные суммы, предстают в виде трех пятикратных сумм.

§ 17. Электростатическая энергия эллипсоида

Электростатическая энергия W объемной системы зарядов дается хорошо известной формулой

$$W = \frac{1}{2} \int \varrho(\mathbf{r})\, \Phi(\mathbf{r})\, dV. \tag{17.1}$$

Для зарядов, распределенных внутри эллипсоида по степенному закону (14.2), интегрирование в (17.1) облегчает формула Лагранжа (см. Приложение А)

$$\int x^{2l}\, y^{2m}\, z^{2n} dV = 4\pi\, \frac{(2l-1)!!\,(2m-1)!!\,(2n-1)!!}{(2l+2m+2n+3)!!}\; a^{2l+1}\, b^{2m+1}\, c^{2n+1}\, . \tag{17.2}$$

Обозначая посредством $W_{\alpha\beta\gamma}$ энергию, соответствующую распределению (14.2), и подставляя в (17.1) внутренние потенциалы (14.17), (14.19), (14.21), (14.23), последовательно получаем

$$W_{2\lambda,2\mu,2\nu} = \varrho_0^2 \frac{16\pi^2}{4^\sigma}\, (2\lambda)!\,(2\mu)!\,(2\nu)! \times \\ \times \sum_{i,j,k} \frac{(2\lambda{+}2i{-}1)!!\,(2\mu{+}2j{-}1)!!\,(2\nu{+}2k{-}1)!!\, S_{ijk}}{(\sigma{-}i{-}j{-}k)!\,[2(\sigma{+}i{+}j{+}k){+}1]!!}\; a^{2i+1}\, b^{2j+1}\, c^{2k+1} \Gamma_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)}, \tag{17.3}$$

$$W_{2\lambda+1,2\mu,2\nu} = \varrho_0^2\, \frac{16\pi^2}{4^\sigma}\, (2\lambda+1)!\,(2\mu)!\,(2\nu)! \times \\ \times \sum_{i,j,k} \frac{(2\lambda+2i+1)!!\,(2\mu+2j-1)!!\,(2\nu+2k-1)!!\, S_{ijk}}{(\sigma{-}i{-}j{-}k)!\,[2(\sigma{+}i{+}j{+}k){+}3]!!\,(2i{+}1)} \times \\ \times a^{2i+2}\, b^{2j+1}\, c^{2k+1} X_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)}, \tag{17.4}$$

$$W_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu} = \varrho_0^2\, \frac{16\pi^2}{4^\sigma}\, (2\lambda+1)!\,(2\mu+1)!\,(2\nu)! \times \\ \times \sum_{i,j,k} \frac{(2\lambda+2i+1)!!\,(2\mu+2j+1)!!\,(2\nu+2k-1)!!\, S_{ijk}}{(\sigma{-}i{-}j{-}k)!\,[2(\sigma{+}i{+}j{+}k){+}5]!!\,(2i{+}1)\,(2j{+}1)} \times \\ \times a^{2i+2}\, b^{2j+2}\, c^{2k+1} Y_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)}, \tag{17.5}$$

Таблица 1

Энергия объемных распределений источников

$\alpha\ \beta\ \gamma$	Энергия $W_{\alpha\beta\gamma}$ эллипсоида	Энергия шара
0 0 0	$\frac{16}{5!!}\pi^2\varrho_0^2\, abc\, M_{000}$	$\frac{16}{5!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^5$
1 0 0	$\frac{16}{7!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^3bc\, M_{100}$	$\frac{16}{3\cdot 7!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^5$
1 1 0	$\frac{16}{9!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^3b^3c\, M_{110}$	$\frac{16}{5\cdot 9!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^5$
1 1 1	$\frac{16}{11!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^3b^3c^3\, M_{111}$	$\frac{16}{7\cdot 11!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^5$
2 0 0	$\frac{16}{9!!}\pi^2\varrho_0^2\, abc\left(3M_{000} - 3a^2M_{100} + a^4M_{200}\right)$	$\frac{13}{5}\cdot\frac{16}{9!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^5$
2 1 0	$\frac{16}{11!!}\pi^2\varrho_0^2\, ab^3c\left(3M_{010} - 3a^2M_{110} + a^4M_{210}\right)$	$\frac{29}{35}\cdot\frac{16}{11!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^5$
2 1 1	$\frac{16}{13!!}\pi^2\varrho_0^2\, ab^3c^3\left(3M_{011} - 3a^2M_{111} + a^4M_{211}\right)$	$\frac{53}{105}\cdot\frac{16}{13!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^5$
3 0 0	$\frac{16}{11!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^3bc\left(27M_{100} - 9a^2M_{200} + a^4M_{300}\right)$	$\frac{201}{35}\cdot\frac{16}{11!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^5$
3 1 0	$\frac{16}{13!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^3b^3c\left(27M_{110} - 9a^2M_{210} + a^4M_{310}\right)$	$\frac{109}{35}\cdot\frac{16}{13!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^5$
3 1 1	$\frac{16}{15!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^3b^3c^3\left(27M_{111} - 9a^2M_{211} + a^4M_{311}\right)$	$\frac{171}{77}\cdot\frac{16}{15!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^5$

$$W_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu+1} = \varrho_0^2\, \frac{16\pi^2}{4^\sigma}\, (2\lambda+1)!\, (2\mu+1)!\, (2\nu+1)! \times \\ \times \sum_{i,j,k} \frac{(2\lambda+2i+1)!!\, (2\mu+2j+1)!!\, (2\nu+2k+1)!!\, S_{ijk}}{(\sigma-i-j-k)!\, [2(\sigma+i+j+k)+7]!!\, (2i+1)\, (2j+1)\, (2k+1)} \times \\ \times a^{2i+2}\, b^{2j+2}\, c^{2k+2} Z_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)}, \quad (17.6)$$

В (17.3)–(17.6), как и в § 14, $\sigma \equiv \lambda+\mu+\nu+1$, $S_{ij\,k} \equiv \frac{(-2)^{i+j+k}}{(2i)!\,(2j)!\,(2k)!}$, а $\Gamma_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)}$, $X_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)}$, $Y_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)}$ и $Z_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)}$ даются формулами (14.18), (14.20), (14.22) и (14.24).

Таким образом, электростатическая энергия эллипсоида при степенном распределении заряда линейно выражается через внутренние потенциальные факторы M_{lmn}.

Как и в § 16, мы вновь встречаемся с возможностью выделения в шестикратных суммах чисто числовых сумм (в данном случае — трехкратных). И хотя при любом конкретном выборе показателей α, β, γ выражение для энергии $W_{\alpha\beta\gamma}$ можно существенно упростить, чередуя приведение подобных членов и использование соотношения (3.7), упрощение выражений (17.3)–(17.6) в общем виде пока не осуществлено.

В табл. 1 приведены выражения для энергии эллипсоида и шара, соответствующие степенным распределениям заряда в их объемах. Эти выражения получены из (17.3)–(17.6) для $\lambda+\mu+\nu \leqslant 1$.

§ 18. Формулы Дайсона для потенциала эллипсоида

18.1. Дайсонова форма записи потенциалов Ферреса

Обобщение формул для феррерсовых потенциалов эллипсоида на случай, когда объемная плотность заряда описывается произвольной функцией координат, принадлежит Дайсону [88]. Ему удалось преобразовать тройной интеграл $\Phi = \int (\varrho/R)\, dV$ по объему эллипсоида в однократный. Являющиеся образцом теоретического обобщения компактные формулы Дайсона не получили, однако, широкого применения, что связано, возможно, со сложностью их практического использования.

Преобразуем сначала к форме представления потенциалов, разработанной Дайсоном, потенциалы $\Phi_{\alpha\beta\gamma}^{(i,e)}(\mathbf{r})$, соответствующие плотности заряда

$$\varrho_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}') = \varrho_0 \left(\frac{x'}{a}\right)^\alpha \left(\frac{y'}{b}\right)^\beta \left(\frac{z'}{c}\right)^\gamma . \quad (18.1)$$

Будем исходить из (14.14)

$$\Phi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \pi\varrho_0\, abc\, \alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\times$$
$$\times\int\limits_{0,\xi}^{\infty}\frac{du}{Q(u)}\sum_{l,m,n}\frac{\left(\dfrac{ax}{a^2+u}\right)^{\alpha-2l}\left(\dfrac{by}{b^2+u}\right)^{\beta-2m}\left(\dfrac{cz}{c^2+u}\right)^{\gamma-2n}}{4^{l+m+n}\, l!\, m!\, n!\, (\alpha-2l)!\, (\beta-2m)!\, (\gamma-2n)!\, (l+m+n+1)!}\times$$
$$\times\frac{P^{\,l+m+n+1}(\mathbf{r},u)\; u^{\,l+m+n}}{(a^2+u)^l\,(b^2+u)^m\,(c^2+u)^n}\,. \tag{18.2}$$

Обратим внимание на то, что распределению (18.1) соответствовал бы фрагмент слагаемого

$$\left(\frac{ax}{a^2+u}\right)^{\alpha-2l}\left(\frac{by}{b^2+u}\right)^{\beta-2m}\left(\frac{cz}{c^2+u}\right)^{\gamma-2n}$$

в подынтегральной сумме (18.2), если бы не отрицательные добавки к показателям степени, содержащие индексы суммирования. Эти добавки можно, однако, упрятать в процедуру дифференцирования. В результате (18.2) приобретает вид

$$\frac{\Phi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}}{\pi\varrho_0\, abc}=\int\limits_{0,\xi}^{\infty}\frac{du}{Q(u)}\sum_{k}\frac{P^{\,k+1}u^k\widehat{\mathfrak{D}}^k}{4^k k!(k+1)!}\left(\frac{ax}{a^2+u}\right)^{\alpha}\left(\frac{by}{b^2+u}\right)^{\beta}\left(\frac{cz}{c^2+u}\right)^{\gamma}, \tag{18.3}$$

где введенный Дайсоном дифференциальный оператор

$$\widehat{\mathfrak{D}}\equiv\frac{a^2+u}{a^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{b^2+u}{b^2}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{c^2+u}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{18.4}$$

Заметим, что вхождение этого оператора в (18.3) в форме степенно́й функции «поглотило» попутно в соответствии с полиномиальной формулой (14.6) и двукратное суммирование. Так что в (18.3) сохранилось суммирование лишь по одному индексу.

18.2. Потенциалы произвольного распределения заряда

Рассмотрим теперь эллипсоидальный объем, распределенный заряд в котором характеризуется плотностью

$$\varrho(\mathbf{r})=\varrho_0\, f\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{c}\right), \tag{18.5}$$

где $f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ — произвольная (безразмерная) функция аргументов $\bar{x}=x/a$, $\bar{y}=y/b$, $\bar{z}=z/c$, удовлетворяющих условиям

$$\bar{x}\leqslant 1,\qquad \bar{y}\leqslant 1,\qquad \bar{z}\leqslant 1. \tag{18.6}$$

Если эта функция разложима в ряд Маклорена

$$f\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{c}\right)=\sum_{l,m,n}\frac{(x/a)^{\,l-m}(y/b)^{\,m-n}(z/c)^{\,n}}{(l-m)!\,(m-n)!\,n!}\;\frac{\partial^{\,l} f(0,0,0)}{\partial\bar{x}^{\,l-m}\,\partial\bar{y}^{\,m-n}\,\partial\bar{z}^{n}}\,, \tag{18.7}$$

то потенциал эллипсоида с плотностью заряда (18.5) можно рассматривать как суперпозицию потенциалов вида (18.3), т. е. считать равным

$$\Phi^{(i,e)}(\mathbf{r}) = \pi\varrho_0\, abc \int\limits_{0,\xi}^{\infty} \frac{du}{Q(u)} \sum_k \frac{P^{k+1} u^k \widehat{\mathfrak{D}}^k}{4^k\, k!\,(k+1)!} \times$$
$$\times \sum_{l,m,n} \frac{\left(\dfrac{ax}{a^2+u}\right)^{l-m} \left(\dfrac{by}{b^2+u}\right)^{m-n} \left(\dfrac{cz}{c^2+u}\right)^{n}}{(l-m)!\,(m-n)!\,n!}\ \frac{\partial^l f(0,0,0)}{\partial\bar{x}^{\,l-m}\,\partial\bar{y}^{\,m-n}\,\partial\bar{z}^n}\,, \quad (18.8)$$

Учитывая, что отношения

$$\frac{ax}{a^2+u} \leqslant 1, \qquad \frac{by}{b^2+u} \leqslant 1, \qquad \frac{cz}{c^2+u} \leqslant 1,$$

т. е. удовлетворяют условиям, аналогичным (18.6), и используя ряд (18.7) на этот раз для указанных отношений, рассматриваемых как новые аргументы функции f, запишем (18.8) в следующем окончательном виде:

$$\Phi^{(i,e)} = \pi\varrho_0\, abc \int\limits_{0,\xi}^{\infty} \frac{du}{Q(u)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{k+1} u^k \widehat{\mathfrak{D}}^k}{4^k\, k!\,(k+1)!}\, f\left(\frac{ax}{a^2+u}, \frac{by}{b^2+u}, \frac{cz}{c^2+u}\right). \quad (18.9)$$

Справедливость проделанных формальных выкладок можно подтвердить непосредственной проверкой результата (18.9). Докажем сначала, что выражение для $\Phi^{(i)}$ удовлетворяет уравнению Пуассона. Вынесем в выражении (18.9) для $\Phi^{(i)}$ знак суммы за знак интеграла. Тогда

$$\Phi^{(i)} = \pi\varrho_0\, abc \sum_k \int\limits_{0,\xi}^{\infty} \frac{du}{Q(u)} \frac{P^{k+1} u^k \widehat{\mathfrak{D}}^k}{4^k\, k!\,(k+1)!}\, \tilde{f}, \quad (18.10)$$

Здесь функция $f\left(\dfrac{ax}{a^2+u}, \dfrac{by}{b^2+u}, \dfrac{cz}{c^2+u}\right)$ новых, по сравнению с (18.5), аргументов обозначена для краткости посредством $\tilde{f}$. Рассмотрим результат воздействия оператора Лапласа Δ на общий член ряда (18.10). Имеем

$$\Delta \int\limits_0^{\infty} \frac{du}{Q(u)}\, \frac{P^{k+1} u^k}{4^k\, k!\,(k+1)!}\, \widehat{\mathfrak{D}}^k \tilde{f} = \int\limits_0^{\infty} \frac{du}{Q(u)}\, \frac{u^k}{4^k\, k!\,(k+1)!} \times$$
$$\times \left\{ (\widehat{\mathfrak{D}}^k \tilde{f})\Delta P^{k+1} + 2\, \frac{\partial P^{k+1}}{\partial\mathbf{r}}\, \frac{\partial(\widehat{\mathfrak{D}}^k \tilde{f})}{\partial\mathbf{r}} + P^{k+1}\Delta(\widehat{\mathfrak{D}}^k \tilde{f}) \right\}, \quad (18.11)$$

Преобразование первого и третьего слагаемых в фигурных скобках уравнения (18.11) связано с легко проверяемыми соотношениями:

$$\Delta P^{k+1} = 4(k+1)\, Q\, \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{P^k}{Q}\right), \quad (18.12)$$

$$\Delta(\widehat{\mathfrak{D}}^k \tilde{f}) = \left(\widehat{\mathfrak{D}} - u\frac{\partial\widehat{\mathfrak{D}}}{\partial u}\right) \widehat{\mathfrak{D}}^k \tilde{f} = \left[\widehat{\mathfrak{D}}^{\,k+1} - \frac{u}{k+1}\left(\frac{\partial\widehat{\mathfrak{D}}^{\,k+1}}{\partial u}\right)\right] \tilde{f}. \quad (18.13)$$

В отношении второго слагаемого очевидно, что

$$2\,\frac{\partial P^{\,k+1}}{\partial \mathbf{r}}\,\frac{\partial(\widehat{\mathfrak{D}}^k\tilde f)}{\partial \mathbf{r}} = -4(k+1)\,P^k\left\langle \frac{x}{a^2{+}u}\,\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle \widehat{\mathfrak{D}}^k\tilde f, \tag{18.14}$$

где $\langle\ldots\rangle$ — оператор циклического сложения. Методом математической индукции нетрудно показать, что

$$\widehat{\mathfrak{D}}^k\left(x\frac{\partial\tilde f}{\partial x}\right) = x\frac{\partial}{\partial x}\widehat{\mathfrak{D}}^k\tilde f + 2k\,\frac{a^2+u}{a^2}\,\widehat{\mathfrak{D}}^{k-1}\frac{\partial^{\,2}\tilde f}{\partial x^2}. \tag{18.15}$$

Это позволяет представить (18.14) в виде

$$2\,\frac{\partial P^{\,k+1}}{\partial \mathbf{r}}\,\frac{\partial(\widehat{\mathfrak{D}}^k\tilde f)}{\partial \mathbf{r}} = \\ = -\,4(k{+}1)\,P^k\widehat{\mathfrak{D}}^k\left\langle \frac{x}{a^2{+}u}\,\frac{\partial\tilde f}{\partial x}\right\rangle + 8k(k+1)P^k\widehat{\mathfrak{D}}^{k-1}\left\langle\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2\tilde f}{\partial x^2}\right\rangle$$

или

$$2\,\frac{\partial P^{\,k+1}}{\partial \mathbf{r}}\,\frac{\partial(\widehat{\mathfrak{D}}^k\tilde f)}{\partial \mathbf{r}} = 4(k+1)P^k\widehat{\mathfrak{D}}^k\frac{\partial\tilde f}{\partial u} + 8(k+1)P^k\left(\frac{\partial\widehat{\mathfrak{D}}^k}{\partial u}\right)\tilde f. \tag{18.16}$$

Подставляя выражения (18.12), (18.13) и (18.16) в (18.11), получаем

$$\Delta\int\limits_0^\infty \frac{du}{Q(u)}\,\frac{u^k\,P^{\,k+1}}{4^k\,k!\,(k+1)!}\,\widehat{\mathfrak{D}}^k\tilde f = v_k + w_k, \tag{18.17}$$

где

$$v_k = \int\limits_0^\infty \frac{du}{Q(u)}\,\frac{u^k\,P^{\,k+1}}{4^k\,k!\,(k+1)!}\left(\widehat{\mathfrak{D}}^{\,k+1} - \frac{u}{k{+}1}\,\frac{\partial\widehat{\mathfrak{D}}^{\,k+1}}{\partial u}\right)\tilde f = \\ = \int\limits_0^\infty \frac{du}{Q(u)}\,\frac{P^{\,k+1}}{4^k\,[(k+1)!]^2}\left[\left(\frac{\partial u^{k+1}}{\partial u}\right)\widehat{\mathfrak{D}}^{\,k+1} - u^{\,k+1}\frac{\partial\widehat{\mathfrak{D}}^{\,k+1}}{\partial u}\right]\tilde f, \tag{18.18}$$

$$w_k = \int\limits_0^\infty du\,\frac{4u^k}{4^k\,(k!)^2}\left[\left(\widehat{\mathfrak{D}}^k\tilde f\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{P^k}{Q}\right) + \right. \\ \left. + \frac{P^k}{Q}\,\widehat{\mathfrak{D}}^k\left(\frac{\partial\tilde f}{\partial u}\right) + 2\,\frac{P^k}{Q}\left(\frac{\partial\widehat{\mathfrak{D}}^k}{\partial u}\right)\tilde f\right]. \tag{18.19}$$

В частности,

$$w_0 = 4\int\limits_0^\infty du\,\left[\tilde f\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{Q}\right) + \frac{1}{Q}\,\frac{\partial\tilde f}{\partial u}\right] = 4\int\limits_0^\infty du\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\tilde f}{Q}\right) = \\ = 4\,\frac{f\left(\dfrac{ax}{a^2+u},\dfrac{by}{b^2+u},\dfrac{cz}{c^2+u}\right)}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}\Bigg|_0^\infty = -\frac{4}{abc}\,f\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{c}\right). \tag{18.20}$$

Заметим также, что следствием соотношений (18.18) и (18.19) является

$$v_{k-1} + w_k = \frac{4}{4^k\,(k!)^2} \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{u^k P^k}{Q(u)}\,\widehat{\mathfrak{D}}^{\,k} \tilde{f}\right] du = 0\,.$$

Поэтому окончательно получаем

$$\Delta\Phi^{(i)} = \pi\varrho_0\, abc \left[w_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(v_{k-1} + w_k)\right] = -4\pi\varrho_0\, f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right). \qquad (18.21)$$

Таким образом, выражение (18.9) для $\Phi^{(i)}$ удовлетворяет требуемому уравнению Пуассона.

Применим теперь оператор Лапласа к выражению (18.9) для $\Phi^{(e)}$, записав (18.9) в виде

$$\Phi^{(e)} = \pi\varrho_0\, abc \int\limits_\xi^\infty U(u)\, du\,, \qquad (18.22)$$

где

$$U(u) = \frac{1}{Q(u)} \sum_k \frac{P^{\,k+1}\, u^k \widehat{\mathfrak{D}}^k}{4^k\, k!\,(k+1)!}\; f\left(\frac{ax}{a^2+u}, \frac{by}{b^2+u}, \frac{cz}{c^2+u}\right). \qquad (18.23)$$

Сначала будем иметь

$$\frac{\Delta\Phi^{(e)}}{\pi\varrho_0\, abc} = \int\limits_\xi^\infty \Delta U(u)\, du - 2\frac{\partial U(\xi)}{\partial \mathbf{r}}\,\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial U(\xi)}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{r}}\right)^2 - U(\xi)\Delta\xi. \qquad (18.24)$$

Содержащиеся в (18.24) производные эллипсоидальной координаты ξ уже рассматривались в § 1. В частности, из формулы (1.14)

$$\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{r}} = 2p\,(\xi)\,\mathbf{n}(\xi) = \left\{\frac{2x}{a^2+\xi}\,p^2(\xi),\ \frac{2y}{b^2+\xi}\,p^2(\xi),\ \frac{2z}{c^2+\xi}\,p^2(\xi)\right\} \qquad (18.25)$$

следует, что

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{r}}\right)^2 = 4p^2(\xi), \qquad (18.26)$$

где

$$\frac{1}{p^2(\xi)} = \left\langle \frac{x^2}{(a^2+\xi)^2} \right\rangle. \qquad (18.27)$$

Поскольку дифференцирование по x выражения

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2\,p^2(\xi)\,x}{a^2+\xi} \qquad (18.28)$$

дает равенство

$$\frac{1}{p^2(\xi)}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{4\,x}{(a^2+\xi)^2}\,\frac{\partial \xi}{\partial x} - 2\left\langle \frac{x^2}{(a^2+\xi)^3} \right\rangle \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = \frac{2}{a^2+\xi}\,,$$

то очевидно, что

$$\Delta\xi = 2\left\langle \frac{1}{a^2+\xi} \right\rangle p^2(\xi). \tag{18.29}$$

Соотношения (18.25), (18.26) и (18.29) позволяют переписать формулу (18.24) в виде

$$\frac{\Delta\Phi^{(e)}}{\pi\varrho_0\, abc} = \int\limits_{\xi}^{\infty} \Delta U(u)\, du - 4p^2(\xi)\left(\left\langle \frac{x}{a^2+\xi}\,\frac{\partial U(\xi)}{\partial x}\right\rangle + \frac{\partial U(\xi)}{\partial \xi}\right) - \\ - 2p^2(\xi)\left\langle \frac{1}{a^2+\xi}\right\rangle U(\xi). \tag{18.30}$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{\xi}^{\infty} \Delta U(u)\, du = \tilde{w}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{v}_{k-1} + \tilde{w}_k),$$

где $\tilde{v}_k$ и $\tilde{w}_k$ отличаются от (18.18) и (18.19) только заменой нижнего (нулевого) предела интегрирования на ξ, а также, что

$$\tilde{w}_0 = 4\int\limits_{\xi}^{\infty} du\, \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\tilde{f}}{Q(u)}\right) = -4\,\frac{\tilde{\tilde{f}}}{Q(\xi)}$$

и

$$\tilde{v}_{k-1} + \tilde{w}_k = \frac{4}{4^k\,(k!)^2}\int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{u^k P^k}{Q(u)}\,\widehat{\mathfrak{D}}^{\,k} \tilde{f}\right] du = 0 \qquad \text{при} \quad k \geqslant 1,$$

находим

$$\int\limits_{\xi}^{\infty} \Delta U(u)\, du = -4\,\frac{\tilde{\tilde{f}}}{Q(\xi)}. \tag{18.31}$$

При получении результата (18.31) использовалось равенство

$$P(\mathbf{r},\xi) = 0, \tag{18.32}$$

эквивалентное определению эллипсоидальной координаты. Краткая запись $\tilde{\tilde{f}}$ теперь заменяет $f\left(\dfrac{ax}{a^2+\xi}, \dfrac{by}{b^2+\xi}, \dfrac{cz}{c^2+\xi}\right)$.

Вычисление второго слагаемого в правой части (18.30) существенно упрощают легко устанавливаемые равенства:

$$p^2(\xi)\left(\left\langle \frac{x}{a^2+\xi}\,\frac{\partial P(\mathbf{r},\xi)}{\partial x}\right\rangle + \frac{\partial P(\mathbf{r},\xi)}{\partial \xi}\right) = -1\,, \tag{18.33}$$

$$\left(\left\langle \frac{x}{a^2+\xi}\,\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle + \frac{\partial}{\partial \xi}\right)\tilde{\tilde{f}} = 0\,, \tag{18.34}$$

которые вместе с (18.32) приводят к результату

$$-4p^2(\xi)\left(\left\langle \frac{x}{a^2+\xi}\,\frac{\partial U(\xi)}{\partial x}\right\rangle + \frac{\partial U(\xi)}{\partial \xi}\right) = 4\,\frac{\tilde{\tilde{f}}}{Q(\xi)}.$$

Наконец, последнее слагаемое в правой части (18.30) равно нулю в силу (18.32). Таким образом, выражение (18.9) для $\Phi^{(e)}$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Из выражений (18.9) непосредственно видно, что на границе базисного эллипсоида выражения для $\Phi^{(e)}$ и $\Phi^{(i)}$ совпадают. Без труда проверяется и непрерывность нормальных производных этих выражений на границе.

Таким образом, проверка показала, что выражения (18.9) действительно описывают потенциал эллипсоида, несущего распределенный заряд (18.5).

Необходимо отметить, что в оригинальной работе Дайсона [88] рассматривается более причудливая по сравнению с (18.5) плотность распределения заряда в эллипсоиде, которая дается формулой

$$\varrho(\mathbf{r}) = \varrho_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\alpha-1} f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) \qquad (\alpha > 0). \tag{18.35}$$

Здесь $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ — произвольная (безразмерная) функция своих аргументов. Потенциал эллипсоида в этом случае описывают выражения

$$\frac{\Phi^{(i,e)}}{\pi\varrho_0\, abc} = \int\limits_{0,\xi}^{\infty} \frac{du}{Q(u)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha)\, P^{\alpha+k}\, u^k \widehat{\mathfrak{D}}^k}{4^k\, k!\, \Gamma(\alpha+k+1)}\, f\left(\frac{ax}{a^2+u}, \frac{by}{b^2+u}, \frac{cz}{c^2+u}\right), \tag{18.36}$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция. Как и автор этого результата — Дайсон, мы не будем останавливаться на его доказательстве, которое, впрочем, можно найти в [518].

Раус [307] отмечает следующие две примечательных особенности формул Дайсона[1]: а) эти формулы содержат лишь дифференциальное воздействие на функцию, характеризующую плотность заряда; б) вся зависимость от координат, не вошедшая в функцию, характеризующую плотность заряда, «упрятана» в степени P.

§ 19. Потенциалы эллиптического цилиндра

Потенциалы $\Phi^{(i,e)}_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$ эллиптического цилиндра, в котором объемная плотность заряда равна

$$\varrho = \varrho_0 \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta}, \tag{19.1}$$

где α и β — неотрицательные целые числа, получаются из выражений (14.17)–(14.22) при $\nu=0$ с помощью предельного перехода при $c\to\infty$. Если оба показателя α и β суть четные числа, т. е. погонный заряд цилиндра не равен нулю, то соответствующие потенциалы содержат бесконечную постоянную, пропорциональную M_{00} (см. § 6). Чтобы удовлетворить требованию ограниченности потенциала во внутренней области цилиндра, эту постоянную, которая при $\alpha=2\lambda$ и $\beta=2\mu$ равна

$$2\pi\varrho_0\, \frac{(2\lambda-1)!!\,(2\mu-1)!!}{2^{\lambda+\mu}\,(\lambda+\mu+1)!}\, M_{00}\,,$$

[1] Несмотря на достоинства формул Дайсона, примеры их использования в литературе встречаются крайне редко. Автору известны лишь два таких случая [209, 286].

необходимо вычесть из формул для потенциала, как и при выводе (13.4) и (13.5).

Учитывая определения (6.2), (6.7) и свойство (6.5), придем к окончательным формулам

$$\frac{\Phi^{(i)}_{2\lambda,2\mu}}{2\pi\varrho_0} = \frac{(2\lambda)!(2\mu)!}{4^{\lambda+\mu}} \times \\ \times \sum_{\substack{i,j,\,l,m \\ (i+j+l+m\neq 0)}} \frac{S_{ij\,lm}\, a^{2l}\, b^{2m}\, x^{2i}\, y^{2j}}{(\sigma-i-j)!\,(\lambda-l)!\,(\mu-m)!}\, M_{i+l,j+m}\,, \tag{19.2}$$

$$\frac{\Phi^{(e)}_{2\lambda,2\mu}}{2\pi\varrho_0} = -\frac{(2\lambda-1)!(2\mu-1)!}{2^{\lambda+\mu}\,\sigma!}\,\mathscr{L}_{00}(\xi) + \\ + \frac{(2\lambda)!\,(2\mu)!}{4^{\lambda+\mu}} \sum_{\substack{i,j,\,l,m \\ (i+j+l+m\neq 0)}} \frac{S_{ij\,lm}\, a^{2l}\, b^{2m}\, x^{2i}\, y^{2j}}{(\sigma-i-j)!\,(\lambda-l)!\,(\mu-m)!}\, \mathscr{M}_{i+l,j+m}(\xi)\,, \tag{19.3}$$

$$\frac{\Phi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu}}{2\pi\varrho_0} = \frac{(2\lambda+1)!\,(2\mu)!}{4^{\lambda+\mu}} \times \\ \times \sum_{i,j,\,l,m} \frac{S_{ij\,lm}\, a^{2l+1}\, b^{2m}\, x^{2i+1}\, y^{2j}}{(\sigma-i-j)!\,(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(2i+1)\,(2l+1)}\, M^{(i,e)}_{i+l+1,j+m}\,, \tag{19.4}$$

$$\frac{\Phi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu+1}}{2\pi\varrho_0} = \frac{(2\lambda+1)!\,(2\mu+1)!}{4^{\lambda+\mu}} \times \\ \times \sum_{i,j,\,l,m} \frac{S_{ij\,lm}\, a^{2l+1}\, b^{2m+1}\, x^{2i+1}\, y^{2j+1}\, M^{(i,e)}_{i+l+1,j+m+1}}{(\sigma-i-j)!\,(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(2i+1)\,(2j+1)\,(2l+1)\,(2m+1)}\,, \tag{19.5}$$

где ξ — неотрицательный корень квадратного уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} = 1,$$

$\mathscr{L}_{00}(\xi)$ — логарифмический потенциальный фактор (6.7) эллиптического цилиндра, $\sum\limits_{i,j,\,l,m} \equiv \sum\limits_{i=0}^{\sigma}\sum\limits_{j=0}^{\sigma-i}\sum\limits_{l=0}^{\lambda}\sum\limits_{m=0}^{\mu}$, $\sigma = \lambda+\mu+1$, $S_{ij\,lm} \equiv \dfrac{(-2)^{i+j+l+m}}{(2i)!(2j)!(2l)!(2m)!}$. Простейшие частные случаи формул (19.2)–(19.5) даны в таблице.

Таблица объемных феррерсовых потенциалов эллиптического цилиндра

(в терминах потенциальных факторов)

$$\Phi^{(i)}_{00} = -2\pi\varrho_0\left(M_{10}\, x^2 + M_{01}\, y^2\right),$$

$$\Phi_{00}^{(e)} = -2\pi\varrho_0\left(\mathscr{L}_{00} + \mathscr{M}_{10}\,x^2 + \mathscr{M}_{01}\,y^2\right);$$

$$\Phi_{10}^{(i,e)} = 2\pi\varrho_0\,ax\left(M_{10}^{(i,e)} - \frac{1}{3}M_{20}^{(i,e)}x^2 - M_{11}^{(i,e)}y^2\right);$$

$$\Phi_{11}^{(i,e)} = \frac{2}{3}\,\pi\varrho_0\,abxy\left(3M_{11}^{(i,e)} - M_{21}^{(i,e)}x^2 - M_{12}^{(i,e)}y^2\right);$$

$$\Phi_{20}^{(i)} = -\pi\varrho_0\left[\frac{1}{2}a^2M_{10} + \left(M_{10} - a^2M_{20}\right)x^2 + \left(M_{01} - a^2M_{11}\right)y^2 - \right.$$
$$\left. - \left(M_{11} - a^2M_{21}\right)x^2y^2 - \frac{1}{6}\left(M_{20} - a^2M_{30}\right)x^4 - \frac{1}{6}\left(M_{02} - a^2M_{12}\right)y^4\right],$$

$$\frac{\Phi_{20}^{(e)}}{\pi\varrho_0} = -\frac{1}{2}\left(\mathscr{L}_{00} + a^2\mathscr{M}_{10}\right) - \left(\mathscr{M}_{10} - a^2\mathscr{M}_{20}\right)x^2 - \left(\mathscr{M}_{01} - a^2\mathscr{M}_{11}\right)y^2 +$$
$$+ \left(\mathscr{M}_{11} - a^2\mathscr{M}_{21}\right)x^2y^2 + \frac{1}{6}\left(\mathscr{M}_{20} - a^2\mathscr{M}_{30}\right)x^4 + \frac{1}{6}\left(\mathscr{M}_{02} - a^2\mathscr{M}_{12}\right)y^4;$$

$$\frac{\Phi_{21}^{(i,e)}}{\pi\varrho_0} = \frac{by}{3}\left[\frac{3}{2}\left(M_{01}^{(i,e)} - a^2M_{11}^{(i,e)}\right) - 3\left(M_{11}^{(i,e)} - a^2M_{21}^{(i,e)}\right)x^2 - \right.$$
$$- \left(M_{02}^{(i,e)} - a^2M_{12}^{(i,e)}\right)y^2 + \left(M_{12}^{(i,e)} - a^2M_{22}^{(i,e)}\right)x^2y^2 +$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(M_{21}^{(i,e)} - a^2M_{31}^{(i,e)}\right)x^4 + \frac{1}{10}\left(M_{03}^{(i,e)} - a^2M_{13}^{(i,e)}\right)y^4\right];$$

$$\frac{\Phi_{30}^{(i,e)}}{\pi\varrho_0} = \frac{ax}{3}\left[\frac{3}{2}\left(3M_{10}^{(i,e)} - a^2M_{20}^{(i,e)}\right) - \left(3M_{20}^{(i,e)} - a^2M_{30}^{(i,e)}\right)x^2 - \right.$$
$$- 3\left(3M_{11}^{(i,e)} - a^2M_{21}^{(i,e)}\right)y^2 + \left(3M_{21}^{(i,e)} - a^2M_{31}^{(i,e)}\right)x^2y^2 +$$
$$\left. + \frac{1}{10}\left(3M_{30}^{(i,e)} - a^2M_{40}^{(i,e)}\right)x^4 + \frac{1}{2}\left(3M_{12}^{(i,e)} - a^2M_{22}^{(i,e)}\right)y^4\right].$$

Выражения для потенциалов Φ_{01}, Φ_{02}, Φ_{12} и Φ_{03} получаются из содержащихся в таблице путем взаимной замены координат $x \leftrightarrow y$, подразумевающей и одновременную замену $M_{kl}^{(i,e)} \to M_{lk}^{(i,e)}$.

Глава 4
Неоднородное распределение поверхностного заряда (простой слой)

§ 20. Правило Феррерса

В данной главе изучаются потенциалы поверхностного заряда, распределенного на границе эллипсоида. В теории потенциала поверхностное распределение скалярных источников называют «простым слоем». Удобно использовать для потенциалов поверхностных источников самостоятельное обозначение. Пусть это будет Ψ. Таким образом, здесь рассматриваются интегралы

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int\limits_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dS' \,, \tag{20.1}$$

где $\sigma(\mathbf{r})$ — поверхностная плотность заряда. Что касается области интегрирования, то поверхность S может быть как замкнутой (например, в случае эллипсоида), так и незамкнутой (например, в случае эллиптического диска).

Феррерсу [99], принадлежит важный общий результат, устанавливающий соответствие между потенциалом $\Phi(\mathbf{r})$ тела, объемная плотность заряда в котором есть однородная (степени k) функция координат, и потенциалом $\Psi(\mathbf{r})$ заряда, распределенного на границе того же тела с поверхностной плотностью, которая, в свою очередь, находится в определенном соответствии с объемной плотностью заряда тела. Этот результат не конкретизирует форму тела и справедлив для точек наблюдения, выбранных как внутри, так и вне тела. Воспроизведем здесь вывод этого результата (так называемого «правила Феррерса»), предложенный в [518] и несколько отличающийся от данного в оригинальной работе [99].

Будем считать границу тела гладкой и выпуклой и выберем начало координат внутри тела. Потенциал тела в произвольной точке $\mathbf{r}$ дается формулой

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int\limits_V \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV' ,$$

где V — объем тела, $\varrho(\mathbf{r}')$ — плотность заряда. Потенциал того же тела в точке $\lambda\mathbf{r}$ можно записать в виде

$$\Phi(\lambda\mathbf{r}) = \lambda^{k+2} \int\limits_{\overline{V}} \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV' = \lambda^{k+2}\overline{\Phi}(\mathbf{r}) . \tag{20.2}$$

Здесь λ — положительная постоянная, $\overline{V}$ — объем тела, граница которого подобна границе исходного тела и расположена в λ раз ближе к началу координат, а $\overline{\Phi}(\mathbf{r})$ — потенциал зарядов плотности $\varrho(\mathbf{r}')$, заполняющих объем $\overline{V}$. При выводе (20.2) использовано свойство $\varrho(\lambda\mathbf{r}') = \lambda^k \varrho(\mathbf{r}')$.

Положим теперь $\lambda = 1+\varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число. Тогда границы объемов V и $\overline{V}$ образуют гомотетическую[1] оболочку, толщина которой в произвольной ее точке равна $dp = p\,\varepsilon$. Здесь p — расстояние от начала координат до плоскости, касательной к оболочке в той же точке.

Согласно принципу суперпозиции, потенциал оболочки есть разность между потенциалами ограничивающих ее тел при условии, что в объеме, общем для обоих тел, плотности их зарядов совпадают. Таким образом, потенциал *бесконечно тонкой* оболочки с *бесконечно малой* поверхностной плотностью заряда $d\sigma = \varrho\, dp = \varrho\, p\,\varepsilon$ равен

$$d\Phi = \Phi(\mathbf{r}) - \overline{\Phi}(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) - (1+\varepsilon)^{-k-2}\Phi(\mathbf{r}+\varepsilon\,\mathbf{r}) = [(k+2)\Phi - \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi]\varepsilon. \tag{20.3}$$

Учитывая, что ε — постоянное число, для оболочки нулевой толщины с *конечной* поверхностной плотностью заряда

$$\sigma(\mathbf{r}') = \varrho(\mathbf{r}')\, p(\mathbf{r}') \tag{20.4}$$

будем иметь потенциал

$$\Psi(\mathbf{r}) = (k+2)\Phi(\mathbf{r}) - \mathbf{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{r}} . \tag{20.5}$$

Формула (20.5) и есть математическое выражение правила Ферререса, связывающего объемный потенциал $\Phi(\mathbf{r})$ тела с потенциалом $\Psi(\mathbf{r})$ его простого слоя, если соответствующие им плотности заряда связаны условием (20.4).

Входящий в формулу (20.5) дифференциальный оператор

$$\hat{F}^{(k)} = k + 2 - \left\langle x\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle \tag{20.6}$$

будем называть *оператором Ферререса*. Здесь k — степень однородности функции, описывающей плотность ϱ заряда.

[1] Гомотетическим называют слой, внешняя и внутренняя граничные поверхности которого подобны и подобно расположены.

§ 21. Феррерсовы $(\sigma/p \sim x^\alpha y^\beta z^\gamma)$ потенциалы гомеоида

21.1. Представление потенциалов в терминах $P(\mathbf{r}, u)$

Применительно к эллипсоиду (с началом координат в его центре) формула (20.3) выражает потенциал элементарного гомеоида, а (20.5) относится к потенциалу эллипсоидального простого слоя, или — более кратко (в соответствии с терминологией, принятой в § 7) — к потенциалу гомеоида. Таким образом, в «связке» с эллипсоидом с плотностью заряда ϱ выступает гомеоид с поверхностной плотностью $\sigma = \varrho p$, поскольку их потенциалы объединены правилом Феррерса (20.5).

Правило Феррерса допускает и иную формулировку, которая имеет отношение к представлениям (14.14) потенциалов в виде многочленов по степеням $P(\mathbf{r}, u) = 1 - \langle x^2/(a^2+u)\rangle$.

Зависимость от координат слагаемых подынтегрального выражения в (14.14) определяется произведением вида

$$x^i y^j z^l P^m \,, \tag{21.1}$$

где i, j, l, m — неотрицательные целые числа, причем

$$i + j + l + 2m = k + 2 \,. \tag{21.2}$$

Применим (20.5) к выражению (14.14). В силу (14.13) операция $\mathbf{r}(\partial/\partial\mathbf{r})$ может быть внесена под знак интеграла и поэтому воздействует непосредственно на (21.1), что дает

$$\mathbf{r}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(x^i y^j z^l P^m) = (i+j+l)P^m x^i y^j z^l + 2\,m\,x^i y^j z^l (P^m - P^{m-1})$$

или, учитывая (21.2),

$$(k+2)x^i y^j z^l P^m - \mathbf{r}\frac{\partial}{\partial\,\mathbf{r}}(x^i y^j z^l P^m) = 2m x^i y^j z^l P^{m-1} \,. \tag{21.3}$$

Сравнивая (21.1) и (21.3), приходим к сделанному Феррерсом заключению, что

$$\left.\begin{array}{l}\textit{потенциал гомеоида можно вывести из выражения}\\ \textit{для потенциала эллипсоида путем дифференциро-}\\ \textit{вания (14.14) по } P \textit{ как по независимой переменной}\\ \textit{и последующего удвоения результата.}\end{array}\right\} \tag{21.4}$$

Заметим, что в этой формулировке правила Феррерса (в отличие от (20.5)) отсутствует показатель степени однородности функции, характеризующей плотность заряда.

Таким образом, для потенциала гомеоида $\Psi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \oint \dfrac{\sigma_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}')}{R}\,dS'$, поверхностная плотность заряда которого есть

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}') = \varrho_0\;(x'/a)^\alpha (y'/b)^\beta (z'/c)^\gamma\, p' \,, \tag{21.5}$$

где
$$p' \equiv p(\mathbf{r}') = \left(x'^2/a^4 + y'^2/b^4 + z'^2/c^4\right)^{-1/2}, \tag{21.6}$$
с помощью (21.4) из (14.11) находим
$$\frac{\Phi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})}{\pi\varrho_0\, abc} = -\frac{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}{(-2)^{s-1}} \sum_{i,j,k} \frac{a^{\alpha-2i} b^{\beta-2j} c^{\gamma-2k}}{(s-i-j-k)!}\, \widehat{d}^{(\alpha\beta\gamma)}_{ij\,k} \int\limits_{0,\,\xi}^{\infty} P^{\,s-i-j-k}(\mathbf{r},u)\,\frac{du}{Q(u)}, \tag{21.7}$$
где $s = \alpha+\beta+\gamma$, а из (14.14) получаем окончательное выражение
$$\Psi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = 2\pi\varrho_0\, abc\,\alpha!\,\beta!\,\gamma! \int\limits_{0,\xi}^{\infty} \frac{du}{Q(u)} \times$$
$$\times \sum_{l,m,n} \frac{\left(\dfrac{ax}{a^2+u}\right)^{\alpha-2l} \left(\dfrac{by}{b^2+u}\right)^{\beta-2m} \left(\dfrac{cz}{c^2+u}\right)^{\gamma-2n}}{4^{l+m+n}\, l!\,m!\,n!\,(\alpha-2l)!\,(\beta-2m)!\,(\gamma-2n)!\,(l+m+n)!} \times$$
$$\times \frac{P^{l+m+n}(\mathbf{r},u)\, u^{\,l+m+n}}{(a^2+u)^l\,(b^2+u)^m\,(c^2+u)^n}. \tag{21.8}$$

Вытекающие из (21.8) частные случаи, соответствующие $\alpha+\beta+\gamma \leqslant 3$, даны для $\left(a^\alpha b^\beta c^\gamma/\varrho_0\right)\Psi^{(i)}_{\alpha\beta\gamma}$ в виде таблицы интегралов.

Таблица интегралов по поверхности эллипсоида

(в терминах $P \equiv P(\mathbf{r},u)$ и $Q \equiv Q(u)$)

$$\oint \frac{p'\,dS'}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 2\pi\, abc \int \frac{du}{Q},$$
$$\oint \frac{x'}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, p'\,dS' = 2\pi\, a^3 b\, c\, x \int \frac{du}{(a^2+u)\,Q},$$
$$\oint \frac{x'^{\,2}}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, p'\,dS' = 2\pi\, a^3 bc \int \left\{\frac{1}{2}\,uP + \frac{a^2x^2}{a^2+u}\right\} \frac{du}{(a^2+u)\,Q},$$
$$\oint \frac{x'y'}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, p'\,dS' = 2\pi\, a^3 b^3 c\, xy \int \frac{du}{(a^2+u)(b^2+u)\,Q},$$
$$\oint \frac{x'^{\,3}}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, p'\,dS' = 2\pi\, a^5 bc\, x \int \left\{\frac{3}{2}\,uP + \frac{a^2x^2}{a^2+u}\right\} \frac{du}{(a^2+u)^2\,Q},$$
$$\oint \frac{x'^{\,2}y'}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, p'\,dS' = 2\pi\, a^3 b^3 c\, y \int \left\{\frac{1}{2}\,uP + \frac{a^2x^2}{a^2+u}\right\} \frac{du}{(a^2+u)(b^2+u)\,Q},$$
$$\oint \frac{x'y'z'}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, p'\,dS' = 2\pi\, a^3 b^3 c^3\, xyz \int \frac{du}{Q^3}.$$

В этой таблице у всех интегралов справа от знака равенства верхний предел интегрирования есть ∞, а нижний предел равен нулю или ξ соответственно тому, внутри или вне эллипсоида выбрана точка наблюдения. Выражения для интегралов по поверхности, содержащих в числителях подынтегральных дробей y, z, y^2, z^2, yz, zx, y^3, z^3, y^2z, z^2x, x^2z,

y^2x и z^2y, получаются из приведенных в таблице формул с помощью взаимной замены соответствующих координат либо (за исключением случаев x^2z, y^2x и z^2y) путем циклической перестановки.

21.2. Запись в терминах потенциальных факторов

Правило Ферререса в форме (20.5) позволяет без труда получить выражения для потенциалов гомеоида $\Psi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \oint \frac{\sigma_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}')}{R}\,dS'$, соответствующих поверхностной плотности заряда

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}') = \varrho_0\,(x'/a)^{\alpha}\,(y'/b)^{\beta}\,(z'/c)^{\gamma}\,p'. \tag{21.9}$$

Так, из (14.15) для феррерсовых потенциалов гомеоида получаем

$$\Psi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = 4\pi\varrho_0\frac{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}{(-2)^{\alpha+\beta+\gamma}}\times \\ \times\sum_{i,j,\,k}\frac{(-2)^{i+j+k}\,x^{2i-\alpha}\,y^{2j-\beta}\,z^{2k-\gamma}}{(\alpha+\beta+\gamma-i-j-k)!\,(2i-\alpha)!\,(2j-\beta)!\,(2k-\gamma)!}\,K^{(\alpha\beta\gamma)}_{ij\,k}, \tag{21.10}$$

где $K^{(\alpha\beta\gamma)}_{ij\,k}$ дается прежней формулой (14.16).

Выражения, учитывающие четность показателей степеней в (21.9), сразу следуют из (14.17)–(14.24) и имеют вид[1]:

$$\Psi^{(i,e)}_{2\lambda,2\mu,2\nu} = \varrho_0\frac{4\pi}{4^{\delta}}\,(2\lambda)!(2\mu)!(2\nu)!\times \\ \times\sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{k=0}^{\delta-i-j}\frac{S_{ij\,k}\,x^{2i}\,y^{2j}\,z^{2k}}{(\delta-i-j-k)!}\,\Gamma^{(\lambda\mu\nu)}_{ijk}, \tag{21.11}$$

$$\Psi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu,2\nu} = \varrho_0\frac{4\pi}{4^{\delta}}\,(2\lambda+1)!(2\mu)!(2\nu)!\times \\ \times\sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{k=0}^{\delta-i-j}\frac{S_{ij\,k}\,x^{2i+1}\,y^{2j}\,z^{2k}}{(\delta-i-j-k)!\,(2i+1)}\,X^{(\lambda\mu\nu)}_{ij\,k}, \tag{21.12}$$

$$\Psi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu} = \varrho_0\frac{4\pi}{4^{\delta}}\,(2\lambda+1)!(2\mu+1)!(2\nu)!\times \\ \times\sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{k=0}^{\delta-i-j}\frac{S_{ij\,k}\,x^{2i+1}\,y^{2j+1}\,z^{2k}}{(\delta-i-j-k)!\,(2i+1)(2j+1)}\,Y^{(\lambda\mu\nu)}_{ij\,k}, \tag{21.13}$$

$$\Psi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu+1} = \varrho_0\frac{4\pi}{4^{\delta}}\,(2\lambda+1)!(2\mu+1)!(2\nu+1)!\times \\ \times\sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{k=0}^{\delta-i-j}\frac{S_{ijk}\,x^{2i+1}\,y^{2j+1}\,z^{2k+1}}{(\delta-i-j-k)!\,(2i+1)(2j+1)(2k+1)}\,Z^{(\lambda\mu\nu)}_{ijk}, \tag{21.14}$$

[1] Выражения (21.11)–(21.14) для $\Psi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}$ получены в [518].

Здесь $\delta=\lambda+\mu+\nu$, а величины $\Gamma_{ijk}^{(\lambda\mu\nu)}$, $X_{ijk}^{(\lambda\mu\nu)}$, $Y_{ijk}^{(\lambda\mu\nu)}$, $Z_{ijk}^{(\lambda\mu\nu)}$ и S_{ijk} даются прежними формулами (14.18), (14.20), (14.22), (14.24) и (14.26).

Выражения для потенциалов $\Psi_{2\lambda,2\mu+1,2\nu}^{(i,e)}$, $\Psi_{2\lambda,2\mu,2\nu+1}^{(i,e)}$, $\Psi_{2\lambda,2\mu+1,2\nu+1}^{(i,e)}$ и $\Psi_{2\lambda+1,2\mu,2\nu+1}^{(i,e)}$ получаются из (21.11)–(21.14) с помощью циклической (либо взаимной) перестановки координат.

Из формул (21.11)–(21.14) следует, что:

1. Внутри эллипсоида потенциалы $\Psi_{\alpha\beta\gamma}^{(i)}(\mathbf{r})$ являются полиномами степени $\alpha+\beta+\gamma$. Этот результат установлен Феррерсом.

2. Формулы для внешних потенциалов получаются из формул для внутренних потенциалов простой заменой всех внутренних потенциальных факторов внешними потенциальными факторами с теми же индексами. На любой внешней эллипсоидальной поверхности, софокусной с базисным эллипсоидом, потенциал гомеоида является полиномом степени, совпадающей со степенью внутреннего потенциала. Поэтому феррерсовы потенциалы эллипсоидального простого слоя для точек наблюдения, расположенных вне базисного эллипсоида, позволительно называть *«псевдополиномиальными»*.

3. При фиксированных значениях λ,μ и ν пределы суммирования в формулах для потенциалов $\Psi_{2\lambda,2\mu,2\nu}^{(i,e)}$, $\Psi_{2\lambda+1,2\mu,2\nu}^{(i,e)}$, $\Psi_{2\lambda,2\mu+1,2\nu}^{(i,e)}$, $\Psi_{2\lambda,2\mu,2\nu+1}^{(i,e)}$, $\Psi_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu}^{(i,e)}$, $\Psi_{2\lambda,2\mu+1,2\nu+1}^{(i,e)}$, $\Psi_{2\lambda+1,2\mu,2\nu+1}^{(i,e)}$, $\Psi_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu+1}^{(i,e)}$ совпадают. Поэтому у всех (восьми) типов потенциалов одинаково и число слагаемых.

4. У потенциалов $\Psi_{\alpha\beta\gamma}^{(i,e)}(\mathbf{r})$ величина каждого из трех индексов любого потенциального фактора равна полусумме показателей степени у соответствующих декартовой координаты и полуоси эллипсоида.

5. Максимальный вес факторов, входящих в формулы для $\Psi_{\alpha\beta\gamma}^{(i,e)}$, равен $\alpha+\beta+\gamma$.

6. Потенциалы $\Psi_{\alpha\beta\gamma}^{(i)}(0)$ в центре эллипсоида отличны от нуля лишь в случае четных показателей α,β,γ и равны

$$\Psi_{2\lambda,2\mu,2\nu}^{(i)}(0)=\varrho_0\,\frac{4\pi\,(2\lambda)!\,(2\mu)!\,(2\nu)!}{4^{\lambda+\mu+\nu}\,(\lambda+\mu+\nu)!}\times \\ \times\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\sum_{n=0}^{\nu}\frac{S_{lmn}\,a^{2l}b^{2m}c^{2n}}{(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(\nu-n)!}\,M_{lmn}\,. \quad (21.15)$$

При $\lambda=\mu=\nu=0$ значение

$$\Psi_{000}^{(i)}(\mathbf{r})=\varrho_0\,4\pi\,M_{000}\,, \quad (21.16)$$

даваемое (21.15), поддерживается, как видно из (21.11), во всем объеме эллипсоида, т. е. реализуется в случае заряженного проводящего эллипсоида (см. также (8.11)). Соответствующий наружный потенциал есть

$$\Psi_{000}^{(e)}(\mathbf{r})=\varrho_0\,4\pi\,\mathscr{M}_{000}(\xi). \quad (21.17)$$

В приводимой ниже таблице даны развернутые выражения интегралов $\left(a^\alpha b^\beta c^\gamma / \varrho_0\right)\Psi^{(i)}_{\alpha\beta\gamma}$, соответствующих простейшим частным случаям формул (21.11)–(21.14).

Таблица интегралов по поверхности эллипсоида

(в терминах потенциальных факторов)

$$\oint \frac{p' dS'}{R} = 4\pi M_{000}\,,$$

$$\oint \frac{x'\,p' dS'}{R} = 4\pi a^2\, x M_{100}\,,$$

$$\oint \frac{x'y'\,p' dS'}{R} = 4\pi a^2 b^2\, xy M_{110}\,,$$

$$\oint \frac{x'y'z'\,p' dS'}{R} = 4\pi a^2 b^2 c^2\, xyz M_{111}\,,$$

$$\oint \frac{x'^2}{R}\, p' dS' = 2\pi a^2 \left[\left(M_{000} - a^2 M_{100}\right) - \left(M_{100} - a^2 M_{200}\right) x^2 - \right.$$
$$\left. - \left(M_{010} - a^2 M_{110}\right) y^2 - \left(M_{001} - a^2 M_{101}\right) z^2\right],$$

$$\oint \frac{x'^2 y'}{R}\, p' dS' = 2\pi a^2 b^2 y \left[\left(M_{010} - a^2 M_{110}\right) - \left(M_{110} - a^2 M_{210}\right) x^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3}\left(M_{020} - a^2 M_{120}\right) y^2 - \left(M_{011} - a^2 M_{111}\right) z^2\right],$$

$$\oint \frac{x'^2 y' z'}{R}\, p' dS' = 2\pi a^2 b^2 c^2 yz \left[\left(M_{011} - a^2 M_{111}\right) - \left(M_{111} - a^2 M_{211}\right) x^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3}\left(M_{021} - a^2 M_{121}\right) y^2 - \frac{1}{3}\left(M_{012} - a^2 M_{112}\right) z^2\right],$$

$$\oint \frac{x'^3}{R}\, p' dS' = 2\pi a^4 x \left[\left(3M_{100} - a^2 M_{200}\right) - \frac{1}{3}\left(3M_{200} - a^2 M_{300}\right) x^2 - \right.$$
$$\left. - \left(3M_{110} - a^2 M_{210}\right) y^2 - \left(3M_{101} - a^2 M_{201}\right) z^2\right],$$

$$\oint \frac{x'^3 y'}{R}\, p' dS' = 2\pi a^4 b^2 xy \left[\left(3M_{110} - a^2 M_{210}\right) - \frac{1}{3}\left(3M_{210} - a^2 M_{310}\right) x^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3}\left(3M_{120} - a^2 M_{220}\right) y^2 - \left(3M_{111} - a^2 M_{211}\right) z^2\right],$$

$$\oint \frac{x'^3 y' z'}{R}\, p' dS' = \frac{2}{3}\,\pi a^4 b^2 c^2\, xyz \left[3\left(3M_{111} - a^2 M_{211}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(3M_{211} - a^2 M_{311}\right) x^2 - \left(3M_{121} - a^2 M_{221}\right) y^2 - \left(3M_{112} - a^2 M_{212}\right) z^2\right].$$

В таблице представлены выражения для потенциалов в точках $\mathbf{r}$ наблюдения, принадлежащих объему эллипсоида. В таблицу не вошли интегралы, которые с помощью циклической или взаимной перестановки координат можно получить из имеющихся в таблице. Для точек наблюдения, находящихся вне эллипсоида, правильные выражения получаются из приведенных, если произвести замену $M_{lmn} \to \mathscr{M}_{lmn}$. Для сокращения записи в таблице употреблено обозначение

$$R \equiv |\,\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}. \tag{21.18}$$

Попутно заметим, что интегралы по поверхности эллипсоида вида

$$\oint x'^k y'^l z'^m\, R^n\, p' dS'$$

при четном n вычисляются элементарно, а при нечетном n сводятся к однократным благодаря свойству

$$R = \frac{R^2}{R} = \left\langle \frac{(x-x')^2}{R} \right\rangle.$$

Приведем простейшие симметричные примеры. Для четных случаев

$$\oint R^2 p' dS' = 4\pi abc \left(\langle x^2 \rangle + \frac{1}{3} \langle a^2 \rangle \right),$$

$$\oint R^4 p' dS' = 4\pi abc \left(\langle x^2 \rangle^2 + \frac{2}{3} \langle a^2 \rangle \langle x^2 \rangle + \frac{4}{3} \langle a^2 x^2 \rangle + \frac{1}{5} \langle a^4 \rangle + \frac{2}{15} \langle a^2 b^2 \rangle \right).$$

Для нечетного случая и точки наблюдения, находящейся вне эллипсоида,

$$\oint R\, p' dS' = 2\pi \left[\left\langle a^2 + x^2 \right\rangle \mathscr{M}_{000} - \left\langle \left(a^2 + x^2\right) a^2 \mathscr{M}_{100} \right\rangle + \frac{abc\,\xi^2}{Q(\xi)} \right]. \tag{21.19}$$

Выражение интеграла (21.19) для внутренней точки наблюдения получается в результате замены $\mathscr{M}_{lmn} \to M_{lmn}$ и отбрасывания последнего слагаемого ($\xi = 0$). Здесь угловыми скобками $\langle \ldots \rangle$ обозначена сумма трех членов циклической перестановки.

21.3. Однократное дифференцирование потенциала $\Psi^{(e)}_{\alpha\beta\gamma}$

Завершая параграф, приведем формулу, облегчающую однократное дифференцирование потенциала $\Psi^{(e)}_{\alpha\beta\gamma}$ по координатам. Она имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z}\, \Psi^{(e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \left\{ \frac{\partial}{\partial z}\, \Psi^{(i)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) \right\}_{M \to \mathscr{M}} -$$

$$- 4\pi\varrho_0 \frac{p^2(\xi)}{Q(\xi)} \frac{a^{\alpha+1}\, b^{\beta+1}\, c^{\gamma+1}\, x^{\alpha}\, y^{\beta}\, z^{\gamma+1}}{\left(a^2+\xi\right)^{\alpha} \left(b^2+\xi\right)^{\beta} \left(c^2+\xi\right)^{\gamma+1}}. \tag{21.20}$$

В (21.20) употреблена та же символика, что и в формулах (15.1)–(15.6).

В отличие от потенциалов $\Phi^{(e)}_{\alpha\beta\gamma}$ объемных распределений источников однократное дифференцирование потенциалов $\Psi^{(e)}_{\alpha\beta\gamma}$ не сводится лишь к слагаемым, получающимся в предположении постоянства ξ (в (21.20) они заключены в фигурные скобки), но приводит к появлению дополнительного члена, обусловленного дифференцированием нижнего предела в первом ($l = m = n = 0$) слагаемом суммы (21.9).

Выражения для производных по x и y получаются из (21.20) с помощью циклической перестановки координат.

§ 22. Электростатическая энергия гомеоида

Электростатическая энергия W заряда, распределенного по замкнутой поверхности, выражается через его плотность $\sigma(\mathbf{r})$ и создаваемый им потенциал $\Psi(\mathbf{r})$ интегралом

$$W = \frac{1}{2} \oint \sigma(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})\, dS\,. \tag{22.1}$$

В случае эллипсоида для поверхностных распределений $\sigma_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})$, имеющих вид (21.9), интегрирование по замкнутой поверхности облегчает формула

$$\oint x^{2l} y^{2m} z^{2n}\, p\, dS = 4\pi\, \frac{(2l-1)!!(2m-1)!!(2n-1)!!}{(2l+2m+2n+1)!!}\, a^{2l+1} b^{2m+1} c^{2n+1}, \tag{22.2}$$

являющаяся «поверхностным» аналогом формулы Лагранжа (17.2) (см. Приложение B).

Обозначая посредством $W_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})$ энергию, соответствующую распределению (21.9), и подставляя в (22.1) выражения (21.11)–(21.14) для внутренних потенциалов гомеоида, последовательно получаем

$$\begin{aligned} W_{2\lambda,2\mu,2\nu} &= \varrho_0^2\, \frac{8\pi^2}{4^\delta}\, (2\lambda)!(2\mu)!(2\nu)! \times \\ &\times \sum_{i,j,k} \frac{(2\lambda+2i-1)!!\, (2\mu+2j-1)!!\, (2\nu+2k-1)!!\, S_{ijk}}{(\delta-i-j-k)!\, [2(\delta+i+j+k)+1]!!} \times \\ &\times a^{2i+1}\, b^{2j+1}\, c^{2k+1}\, \Gamma_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)}, \end{aligned} \tag{22.3}$$

$$\begin{aligned} W_{2\lambda+1,2\mu,2\nu} &= \varrho_0^2\, \frac{8\pi^2}{4^\delta}\, (2\lambda+1)!(2\mu)!(2\nu)! \times \\ &\times \sum_{i,j,k} \frac{(2\lambda+2i+1)!!\, (2\mu+2j-1)!!\, (2\nu+2k-1)!!\, S_{ijk}}{(\delta-i-j-k)!\, [2(\delta+i+j+k)+3]!!\, (2i+1)} \times \\ &\times a^{2i+2}\, b^{2j+1}\, c^{2k+1}\, X_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)}, \end{aligned} \tag{22.4}$$

$$\begin{aligned} W_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu} &= \varrho_0^2\, \frac{8\pi^2}{4^\delta}\, (2\lambda+1)!(2\mu+1)!(2\nu)! \times \\ &\times \sum_{i,j,k} \frac{(2\lambda+2i+1)!!\, (2\mu+2j+1)!!\, (2\nu+2k-1)!!\, S_{ijk}}{(\delta-i-j-k)!\, [2(\delta+i+j+k)+5]!!\, (2i+1)\, (2j+1)} \times \\ &\times a^{2i+2}\, b^{2j+2}\, c^{2k+1}\, Y_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)}, \end{aligned} \tag{22.5}$$

$$\begin{aligned} W_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu+1} &= \varrho_0^2\, \frac{8\pi^2}{4^\delta}\, (2\lambda+1)!(2\mu+1)!(2\nu+1)! \times \\ &\times \sum_{i,j,k} \frac{(2\lambda+2i+1)!!\, (2\mu+2j+1)!!\, (2\nu+2k+1)!!\, S_{ijk}}{(\delta-i-j-k)!\, [2(\delta+i+j+k)+7]!!\, (2i+1)\, (2j+1)\, (2k+1)} \times \\ &\times a^{2i+2}\, b^{2j+2}\, c^{2k+2}\, Z_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)}, \end{aligned} \tag{22.6}$$

Таблица 2

Энергия поверхностных распределений источников

$\alpha\ \beta\ \gamma$	Энергия $W_{\alpha\beta\gamma}$ гомеоида	Энергия сферы
0 0 0	$8\pi^2\varrho_0^2\, abc\, M_{000}$	$8\pi^2\varrho_0^2\, a^5$
1 0 0	$\frac{8}{3}\pi^2\varrho_0^2\, a^3bc\, M_{100}$	$\frac{8}{9}\pi^2\varrho_0^2\, a^5$
1 1 0	$\frac{8}{5!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^3b^3c\, M_{110}$	$\frac{1}{5}\cdot\frac{8}{5!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^5$
1 1 1	$\frac{8}{7!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^3b^3c^3\, M_{111}$	$\frac{1}{7}\cdot\frac{8}{7!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^5$
2 0 0	$\frac{8}{5!!}\pi^2\varrho_0^2\, abc\left(2M_{000}-2a^2M_{100}+a^4M_{200}\right)$	$\frac{29}{15}\cdot\frac{8}{5!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^5$
2 1 0	$\frac{8}{7!!}\pi^2\varrho_0^2\, ab^3c\left(2M_{010}-2a^2M_{110}+a^4M_{210}\right)$	$\frac{73}{105}\cdot\frac{8}{7!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^5$
2 1 1	$\frac{8}{9!!}\pi^2\varrho_0^2\, ab^3c^3\left(2M_{011}-2a^2M_{111}+a^4M_{211}\right)$	$\frac{47}{105}\cdot\frac{8}{9!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^5$
3 0 0	$\frac{8}{7!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^3bc\left(18M_{100}-6a^2M_{200}+a^4M_{300}\right)$	$\frac{243}{35}\cdot\frac{8}{7!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^5$
3 1 0	$\frac{8}{9!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^3b^3c\left(18M_{110}-6a^2M_{210}+a^4M_{310}\right)$	$\frac{283}{105}\cdot\frac{8}{9!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^5$
3 1 1	$\frac{8}{11!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^3b^3c^3\left(18M_{111}-6a^2M_{211}+a^4M_{311}\right)$	$\frac{149}{77}\cdot\frac{8}{11!!}\pi^2\varrho_0^2\, a^5$

Здесь $\delta = \lambda + \mu + \nu$, а величины $\Gamma_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)}$, $X_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)}$, $Y_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)}$, $Z_{ij\,k}^{(\lambda\mu\nu)}$ и $S_{ij\,k}$ определены формулами (14.18), (14.20), (14.22), (14.24) и (14.26).

В табл. 2 приведены выражения для энергии гомеоида и сферы, соответствующие простейшим распределениям $\sigma_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})$ вида (21.9).

§ 23. Формулы Дайсона для потенциала гомеоида

Формулы для феррерсовых потенциалов гомеоида допускают обобщение [88] на случай, когда поверхностная плотность заряда описывается произвольной функцией. Получить эти формулы можно, повторяя рассуждения, приведшие в разделе 18.2 к выражениям (18.9) для потенциалов произвольного объемного распределения заряда в эллипсоиде. В нашем случае, однако, лучше использовать более простой и краткий способ, применяя правило Ферерса в форме (21.4) непосредственно к формулам (18.9). Правомочность применения такого способа, опирается на принцип суперпозиции и на отмечавшуюся уже независимость формулировки (21.4) от показателя степени однородности функции $f(x,y,z)$, характеризующей распределение объемного заряда эллипсоида.

В результате действий, предписываемых правилом (21.4), из выражений (18.9), соответствующих объемной плотности $\varrho(\mathbf{r}) = \varrho_0 f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$, получаем потенциалы гомеоида

$$\Psi^{(i,e)} = 2\pi\varrho_0\, abc \int\limits_{0,\xi}^{\infty} \frac{du}{Q(u)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^k\, u^k \widehat{\mathfrak{D}}^k}{4^k\,(k!)^2}\, f\left(\frac{ax}{a^2+u}, \frac{by}{b^2+u}, \frac{cz}{c^2+u}\right), \tag{23.1}$$

обусловленные поверхностным зарядом плотности

$$\sigma(\mathbf{r}') = \varrho_0\, f\left(\frac{x'}{a}, \frac{y'}{b}, \frac{z'}{c}\right) p'. \tag{23.2}$$

Правильность этого результата подтверждает непосредственная проверка (см. [88] или [518]), которая ввиду полной аналогии с выкладками, содержащимися в разделе 18.2, здесь опущена.

§ 24. Потенциалы эллиптического диска

При $c \to 0$ поверхность $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ эллипсоида переходит в незамкнутую поверхность эллиптического диска, лежащего в плоскости $z = 0$ и ограниченного в ней эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{24.1}$$

Такой предельный переход (вне зависимости от того, по объему или по границе исходного эллипсоида был распределен заряд) приводит к поверхностному распределению заряда на диске.

Соответственно и выражения для ньютоновых потенциалов эллиптического диска можно вывести, исходя либо из потенциалов объемного заряда эллипсоида, либо из потенциалов гомеоида. К первому из указанных способов обращались Ферререс [100], находя потенциалы простейших распределений на диске, и Дайсон [88] при выводе общей формулы для потенциала диска, являющейся аналогом (18.9). Выяснилось [497], однако, что второй способ обладает дополнительными возможностями в сравнении с первым. В частности, общие формулы для потенциалов эллиптического диска, получаемые из потенциалов гомеоида, включают класс решений (реализующийся в случае проводящего тела) с характерной статической особенностью распределения заряда на краю диска, недоступный, если исходить из феррерсовых потенциалов $\Phi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})$ эллипсоида для объемной плотности заряда (14.2).

Итак, будем исходить из формул для потенциалов $\Psi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})$ гомеоида, причем (в этой главе) только с *четными* показателями $\gamma = 2\nu$. Поскольку при $c \to 0$ имеет место

$$p' \to c/D' , \tag{24.2}$$

где

$$D' \equiv D(x', y') = \sqrt{1 - (x'/a)^2 - (y'/b)^2} , \tag{24.3}$$

а на поверхности эллипсоида $(z'/c)^2 = D'^2$, то при одновременном стремлении $\varrho_0 \to \infty$ таком, что $2c\varrho_0 = \sigma_0$, распределение $\sigma_{\alpha,\beta,2\nu}(\mathbf{r}')$, даваемое (21.5), переходит в распределение зарядов на диске (простой слой) с плотностью

$$\sigma_{\alpha,\beta;\,2\nu-1}(x', y') = \sigma_0 \left(\frac{x'}{a}\right)^{\alpha} \left(\frac{y'}{b}\right)^{\beta} D^{\,2\nu-1}(x', y') . \tag{24.4}$$

Нетрудно видеть, что при таком предельном переходе в суммах (14.18), (14.20) и (14.22), входящих соответственно в (21.11), (21.12) и (21.13), останутся лишь члены с $n = 0$. Поэтому распределению заряда (24.4) на эллиптическом диске соответствуют феррерсовы потенциалы

$$\begin{gathered}\Psi^{(e)}_{2\lambda,2\mu;2\nu-1} = \sigma_0\, \frac{\pi\,(2\lambda)!\,(2\mu)!\,(2\nu-1)!!}{4^{\lambda+\mu}\,2^{\nu-1}} \times \\ \times \sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{k=0}^{\delta-i-j}\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu} \frac{S_{ijklm}\, x^{2i}\, y^{2j}\, z^{2k}\, a^{2l}\, b^{2m}}{(\delta-i-j-k)!(\lambda-l)!\,(\mu-m)!}\, \mathscr{N}_{i+l,j+m,k}(\xi) ,\end{gathered} \tag{24.5}$$

$$\begin{gathered}\Psi^{(e)}_{2\lambda+1,2\mu;2\nu-1} = \sigma_0\, \frac{\pi\,(2\lambda+1)!\,(2\mu)!\,(2\nu-1)!!}{4^{\lambda+\mu}\,2^{\nu-1}} \times \\ \times \sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{k=0}^{\delta-i-j}\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu} \frac{S_{ijklm}\, x^{2i+1}\, y^{2j}\, z^{2k}}{(\delta-i-j-k)!(2i+1)} \times \\ \times \frac{a^{2l+1}\, b^{2m}}{(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(2l+1)}\, \mathscr{N}_{i+l+1,j+m,k}(\xi) ,\end{gathered} \tag{24.6}$$

$$\Psi^{(e)}_{2\lambda+1,2\mu+1;\,2\nu-1} = \sigma_0\,\frac{\pi\,(2\lambda+1)!\,(2\mu+1)!\,(2\nu-1)!!}{4^{\lambda+\mu}\,2^{\nu-1}}\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{k=0}^{\delta-i-j}\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\frac{S_{ijklm}\,x^{2i+1}\,y^{2j+1}\,z^{2k}}{(\delta-i-j-k)!(2i+1)(2j+1)}\times$$
$$\times\frac{a^{2l+1}\,b^{2m+1}}{(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(2l+1)(2m+1)}\,\mathscr{N}_{i+l+1,j+m+1,k}(\xi)\,, \quad (24.7)$$

где

$$\delta=\lambda+\mu+\nu\,, \qquad S_{ij\ldots m}=\frac{(-2)^{i+j+\ldots+m}}{(2i)!(2j)!\ldots(2m)!}\,, \quad (24.8)$$

а внешние потенциальные факторы $\mathscr{N}_{lmn}(\xi)$ эллиптического диска даются формулой (5.3) (см. также (5.6)).

Если точка наблюдения $\mathbf{r}$ лежит на поверхности эллиптического диска ($\xi=0$, $z=0$), то потенциалы (24.5)–(24.7) становятся полиномами от x и y, принимая вид:

$$\Psi^{(i)}_{2\lambda,2\mu;2\nu-1} = \sigma_0\,\frac{\pi\,(2\lambda)!\,(2\mu)!\,(2\nu-1)!!}{4^{\lambda+\mu}\,2^{\nu-1}}\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\frac{S_{ij\,lm}\,x^{2i}\,y^{2j}\,a^{2l}\,b^{2m}}{(\delta-i-j)!(\lambda-l)!\,(\mu-m)!}\,N_{i+l,j+m}\,, \quad (24.9)$$

$$\Psi^{(i)}_{2\lambda+1,2\mu;\,2\nu-1} = \sigma_0\,\frac{\pi\,(2\lambda+1)!\,(2\mu)!\,(2\nu-1)!!}{4^{\lambda+\mu}\,2^{\nu-1}}\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\frac{S_{ij\,lm}\,x^{2i+1}\,y^{2j}}{(\delta-i-j)!(2i+1)}\times$$
$$\times\frac{a^{2l+1}\,b^{2m}}{(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(2l+1)}\,N_{i+l+1,j+m}\,, \quad (24.10)$$

$$\Psi^{(i)}_{2\lambda+1,\,2\mu+1;\,2\nu-1} = \sigma_0\,\frac{\pi\,(2\lambda+1)!\,(2\mu+1)!\,(2\nu-1)!!}{4^{\lambda+\mu}\,2^{\nu-1}}\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\frac{S_{ij\,lm}\,x^{2i+1}\,y^{2j+1}}{(\delta-i-j)!(2i+1)(2j+1)}\times$$
$$\times\frac{a^{2l+1}\,b^{2m+1}}{(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(2l+1)(2m+1)}\,N_{i+l+1,j+m+1}\,, \quad (24.11)$$

где N_{lm} — внутренние потенциальные факторы (5.2) эллиптического диска. Отметим, что при вырождении эллиптического диска в круглый ($b=a$) из формул (24.5)–(24.7), (24.9)–(24.11) вытекают результаты работ [37, 39, 91].

Подчеркнем также, что распределение заряда

$$\sigma_{0,\,0;\,-1}(x',y')=\sigma_0/D', \quad (24.12)$$

обеспечивая, как видно из (24.9), постоянство потенциала на диске, а вне его создавая потенциал

$$\Psi^{(e)}_{0,\,0;\,-1}(\mathbf{r})=2\pi\sigma_0\mathscr{N}_{000}(\xi), \quad (24.13)$$

реализуется в случае заряженного проводящего эллиптического диска, электрическая емкость которого равна, очевидно,

$$C = ab/N_{00}\,. \tag{24.14}$$

Ниже в форме таблицы поверхностных интегралов приводятся простейшие частные случаи формул (24.5)–(24.7), в которых для сокращения записи положено $\sigma_0 = 1$.

Таблица интегралов по поверхности эллиптического диска

$$\int \frac{dS'}{D'|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 2\pi \mathscr{N}_{000}\,,$$

$$\int \frac{x'\,dS'}{D'|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 2\pi a^2 \mathscr{N}_{100}\,x\,,$$

$$\int \frac{x'y'\,dS'}{D'|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 2\pi a^2 b^2 \mathscr{N}_{110}\,xy\,,$$

$$\int \frac{x'^2\,dS'}{D'|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \pi a^2 \left[\left(\mathscr{N}_{000} - a^2\mathscr{N}_{100}\right) - \left(\mathscr{N}_{100} - a^2\mathscr{N}_{200}\right)x^2 - \right.$$
$$\left. - \left(\mathscr{N}_{010} - a^2\mathscr{N}_{110}\right)y^2 - \left(\mathscr{N}_{001} - a^2\mathscr{N}_{101}\right)z^2\right],$$

$$\int \frac{x'^2 y'\,dS'}{D'|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \pi a^2 b^2 y \left[\left(\mathscr{N}_{010} - a^2\mathscr{N}_{110}\right) - \left(\mathscr{N}_{110} - a^2 M_{210}\right)x^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3}\left(\mathscr{N}_{020} - a^2\mathscr{N}_{120}\right)y^2 - \left(\mathscr{N}_{011} - a^2\mathscr{N}_{111}\right)z^2\right],$$

$$\int \frac{x'^3\,dS'}{D'|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \pi a^4 x \left[\left(3\mathscr{N}_{100} - a^2\mathscr{N}_{200}\right) - \frac{1}{3}\left(3\mathscr{N}_{200} - a^2\mathscr{N}_{300}\right)x^2 - \right.$$
$$\left. - \left(3\mathscr{N}_{110} - a^2\mathscr{N}_{210}\right)y^2 - \left(3\mathscr{N}_{101} - a^2\mathscr{N}_{201}\right)z^2\right],$$

$$\int \frac{x'^3 y'\,dS'}{D'|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \pi a^4 b^2 xy \left[\left(3\mathscr{N}_{110} - a^2\mathscr{N}_{210}\right) - \frac{1}{3}\left(3\mathscr{N}_{210} - a^2\mathscr{N}_{310}\right)x^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3}\left(3\mathscr{N}_{120} - a^2\mathscr{N}_{220}\right)y^2 - \left(3\mathscr{N}_{111} - a^2\mathscr{N}_{211}\right)z^2\right];$$

$$\int \frac{D'\,dS'}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \pi\left(\mathscr{N}_{000} - \mathscr{N}_{100}\,x^2 - \mathscr{N}_{010}\,y^2 - \mathscr{N}_{001}\,z^2\right),$$

$$\int \frac{x'D'\,dS'}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \pi a^2\,x\left(\mathscr{N}_{100} - \frac{1}{3}\mathscr{N}_{200}\,x^2 - \mathscr{N}_{110}\,y^2 - \mathscr{N}_{101}\,z^2\right),$$

$$\int \frac{x'y'D'\,dS'}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \pi a^2 b^2\, xy \left(\mathscr{N}_{110} - \frac{1}{3}\mathscr{N}_{210}\, x^2 - \frac{1}{3}\mathscr{N}_{120}\, y^2 - \mathscr{N}_{111}\, z^2 \right),$$

$$\int \frac{x'^2 D'\,dS'}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\pi}{2}\, a^2 \left[\frac{1}{2}\left(\mathscr{N}_{000} - a^2\mathscr{N}_{100}\right) - \left(\mathscr{N}_{100} - a^2\mathscr{N}_{200}\right) x^2 - \right.$$
$$- \left(\mathscr{N}_{010} - a^2\mathscr{N}_{110}\right) y^2 - \left(\mathscr{N}_{001} - a^2\mathscr{N}_{101}\right) z^2 + \left(\mathscr{N}_{110} - a^2\mathscr{N}_{210}\right) x^2y^2 +$$
$$+ \left(\mathscr{N}_{011} - a^2\mathscr{N}_{111}\right) y^2z^2 + \left(\mathscr{N}_{101} - a^2\mathscr{N}_{201}\right) x^2z^2 + \frac{1}{6}\left(\mathscr{N}_{200} - a^2\mathscr{N}_{300}\right) x^4 +$$
$$\left. + \frac{1}{6}\left(\mathscr{N}_{020} - a^2\mathscr{N}_{120}\right) y^4 + \frac{1}{6}\left(\mathscr{N}_{002} - a^2\mathscr{N}_{102}\right) z^4 \right],$$

$$\int \frac{x'^2 y' D'\,dS'}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\pi}{2}\, a^2 b^2 y \left[\frac{1}{2}\left(\mathscr{N}_{010} - a^2\mathscr{N}_{110}\right) - \left(\mathscr{N}_{110} - a^2\mathscr{N}_{210}\right) x^2 - \right.$$
$$- \left(\mathscr{N}_{020} - a^2\mathscr{N}_{120}\right) y^2 - \left(\mathscr{N}_{011} - a^2\mathscr{N}_{111}\right) z^2 + \frac{1}{3}\left(\mathscr{N}_{120} - a^2\mathscr{N}_{220}\right) x^2y^2 +$$
$$+ \frac{1}{3}\left(\mathscr{N}_{021} - a^2\mathscr{N}_{121}\right) y^2z^2 + \left(\mathscr{N}_{111} - a^2\mathscr{N}_{211}\right) x^2z^2 + \frac{1}{6}\left(\mathscr{N}_{210} - a^2\mathscr{N}_{310}\right) x^4 +$$
$$\left. + \frac{1}{30}\left(\mathscr{N}_{030} - a^2\mathscr{N}_{130}\right) y^4 + \frac{1}{6}\left(\mathscr{N}_{012} - a^2\mathscr{N}_{112}\right) z^4 \right],$$

$$\int \frac{x'^3 D'\,dS'}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\pi}{2}\, a^4 x \left[\frac{1}{2}\left(3\mathscr{N}_{100} - a^2\mathscr{N}_{200}\right) - \frac{1}{3}\left(3\mathscr{N}_{200} - a^2\mathscr{N}_{300}\right) x^2 - \right.$$
$$- \left(3\mathscr{N}_{110} - a^2\mathscr{N}_{210}\right) y^2 - \left(3\mathscr{N}_{101} - a^2\mathscr{N}_{201}\right) z^2 + \frac{1}{3}\left(3\mathscr{N}_{210} - a^2\mathscr{N}_{310}\right) x^2y^2 +$$
$$+ \left(3\mathscr{N}_{111} - a^2\mathscr{N}_{211}\right) y^2z^2 + \frac{1}{3}\left(3\mathscr{N}_{201} - a^2\mathscr{N}_{301}\right) x^2z^2 + \frac{1}{30}\left(3\mathscr{N}_{300} - a^2\mathscr{N}_{400}\right) x^4 +$$
$$\left. + \frac{1}{6}\left(3\mathscr{N}_{120} - a^2\mathscr{N}_{220}\right) y^4 + \frac{1}{6}\left(3\mathscr{N}_{102} - a^2\mathscr{N}_{202}\right) z^4 \right].$$

Если точка наблюдения лежит на поверхности диска, то в формулах таблицы следует положить $z = 0$ и заменить $\mathscr{N}_{lm0}$ на N_{lm}.

§ 25. Энергия эллиптического диска

Электростатическая энергия W поверхностного распределения заряда выражается через его плотность $\sigma(\mathbf{r})$ и создаваемый им потенциал $\Psi(\mathbf{r})$ интегралом

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r})\, dS\,. \tag{25.1}$$

В случае эллиптического диска для распределений $\sigma_{\alpha,\beta;2\nu-1}(\mathbf{r})$, определяемых формулой (24.4), интеграл (25.1) удобно вычислять, используя вытекающую из (22.2) при переходе к диску формулу (см. Приложение В)

$$\int x^{2l} y^{2m} D^{2n-1}\, dS = 2\pi\, \frac{(2l-1)!!\,(2m-1)!!\,(2n-1)!!}{(2l+2m+2n+1)!!}\, a^{2l+1} b^{2m+1}, \tag{25.2}$$

Таблица 3

Энергия поверхностных распределений источников

α	β	$2\nu-1$	Энергия $W_{\alpha,\beta;2\nu-1}$ эллиптического диска	Энергия круглого диска
0	0	-1	$2\pi^2\sigma_0^2\,ab\,N_{00}$	$\pi^3\sigma_0^2\,a^3$
1	0	-1	$\frac{2}{3}\pi^2\sigma_0^2\,a^3b\,N_{10}$	$\frac{1}{6}\pi^3\sigma_0^2\,a^3$
1	1	-1	$\frac{2}{5!!}\pi^2\sigma_0^2\,a^3b^3\,N_{11}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{5!!}\pi^3\sigma_0^2\,a^3$
2	0	-1	$\frac{2}{5!!}\pi^2\sigma_0^2\,ab\left(2N_{00}-2a^2N_{10}+a^4N_{20}\right)$	$\frac{17}{8}\cdot\frac{1}{5!!}\pi^3\sigma_0^2\,a^3$
2	1	-1	$\frac{2}{7!!}\pi^2\sigma_0^2\,ab^3\left(2N_{01}-2a^2N_{11}+a^4N_{21}\right)$	$\frac{19}{16}\cdot\frac{1}{7!!}\pi^3\sigma_0^2\,a^3$
3	0	-1	$\frac{2}{7!!}\pi^2\sigma_0^2\,a^3b\left(18N_{10}-6a^2N_{20}+a^4N_{30}\right)$	$\frac{111}{16}\cdot\frac{1}{7!!}\pi^3\sigma_0^2\,a^3$
0	0	1	$\frac{4}{5!!}\pi^2\sigma_0^2\,abN_{00}$	$\frac{2}{5!!}\pi^3\sigma_0^2\,a^3$
1	0	1	$\frac{4}{7!!}\pi^2\sigma_0^2\,a^3bN_{10}$	$\frac{1}{7!!}\pi^3\sigma_0^2\,a^3$
1	1	1	$\frac{4}{9!!}\pi^2\sigma_0^2\,a^3b^3N_{11}$	$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9!!}\pi^3\sigma_0^2\,a^3$
2	0	1	$\frac{4}{9!!}\pi^2\sigma_0^2\,ab\left(3N_{00}-3a^2N_{10}+a^4N_{20}\right)$	$\frac{21}{4}\cdot\frac{1}{9!!}\pi^3\sigma_0^2\,a^3$

Обозначая посредством $W_{\alpha,\beta;2\nu-1}$ энергию, отвечающую распределению (24.4), и подставляя в (25.1) выражения (24.9)–(24.11), в результате интегрирования получаем

$$W_{2\lambda,2\mu;2\nu-1} = \sigma_0^2\,\frac{\pi^2(2\lambda)!\,(2\mu)!\,[(2\nu-1)!!]^2}{4^{\lambda+\mu}\,2^{\nu-1}}\times \\ \times\sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\frac{(2\lambda+2i-1)!!\,(2\mu+2j-1)!!\,S_{ij\,lm}}{(\delta-i-j)!\,[2(\delta+i+j)+1]!!}\times \\ \times\frac{a^{2i+2l+1}\,b^{2j+2m+1}}{(\lambda-l)!\,(\mu-m)!}\,N_{i+l,j+m}\,, \tag{25.3}$$

$$W_{2\lambda+1,2\mu;\,2\nu-1} = \sigma_0^2\,\frac{\pi^2\,(2\lambda+1)!\,(2\mu)!\,[(2\nu-1)!!]^2}{4^{\lambda+\mu}\,2^{\nu-1}}\times \\ \times\sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\frac{(2\lambda+2i+1)!!\,(2\mu+2j-1)!!\,S_{ij\,lm}}{(\delta-i-j)!\,[2(\delta+i+j)+3]!!}\times \\ \times\frac{a^{2i+2l+3}\,b^{2j+2m+1}}{(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(2i+1)\,(2l+1)}\,N_{i+l+1,j+m}\,, \tag{25.4}$$

$$W_{2\lambda+1,\,2\mu+1;\,2\nu-1} = \sigma_0^2\,\frac{\pi^2\,(2\lambda+1)!\,(2\mu+1)!\,[(2\nu-1)!!]^2}{4^{\lambda+\mu}\,2^{\nu-1}}\times \\ \times\sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\frac{(2\lambda+2i+1)!!\,(2\mu+2j+1)!!\,S_{ij\,lm}}{(\delta-i-j)!\,[2(\delta+i+j)+5]!!}\times \\ \times\frac{a^{2i+2l+3}\,b^{2j+2m+3}}{(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(2i+1)(2j+1)(2l+1)(2m+1)}\,N_{i+l+1,j+m+1}\,. \tag{25.5}$$

Некоторые простейшие частные случаи этих формул после упрощений с помощью (5.7) и (5.21) сведены в табл. 3.

Из формул данного параграфа видно, что энергия и гомеоида, и эллиптического диска линейно выражается через соответствующие внутренние потенциальные факторы.

§ 26. Потенциалы эллиптического цилиндра

Выражения для потенциалов заряженной поверхности эллиптического цилиндра можно получить либо из формул (21.11)–(21.13) для гомеоида для $\nu = 0$ путем предельного перехода при $c \to \infty$, либо, применяя правило Ферререса (20.5) к формулам (19.2)–(19.5) для потенциалов заряженного по объему эллиптического цилиндра. Следует только иметь в виду, что в первом случае для потенциалов $\Psi^{(i,e)}_{2\lambda,2\mu}$ с четными индексами необходимо обеспечить ограниченность во внутренней области (как это сделано в § 19), а во втором случае при дифференцировании потенциалов объемных распределений заряда в цилиндре можно считать формально величину ξ постоянной.

Опуская выкладки, приводим окончательные результаты. Распределенный на поверхности

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{26.1}$$

эллиптического цилиндра заряд плотности

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}')=\varrho_0\left(\frac{x'}{a}\right)^{\alpha}\left(\frac{y'}{b}\right)^{\beta}p'_2\,, \tag{26.2}$$

где

$$p'_2\equiv p_2(\mathbf{r}')=\left(\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}\right)^{-1/2}, \tag{26.3}$$

создает феррерсов потенциал $\Psi^{(i,e)}_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$, описываемый формулами:

$$\Psi^{(i)}_{2\lambda,2\mu}=4\pi\varrho_0\frac{(2\lambda)!(2\mu)!}{4^{\lambda+\mu}}\times$$
$$\times\sum_{\substack{i,j,\,l,m\\(i+j+l+m\neq 0)}}\frac{S_{ij\,lm}\,a^{2l}\,b^{2m}\,x^{2i}\,y^{2j}}{(\delta-i-j)!\,(\lambda-l)!\,(\mu-m)!}\,M_{i+l,j+m}\,, \tag{26.4}$$

$$\Psi^{(e)}_{2\lambda,2\mu}=-4\pi\varrho_0\frac{(2\lambda-1)!(2\mu-1)!}{2^{\lambda+\mu}\,(\lambda+\mu)!}\,\mathscr{L}_{00}(\xi)+$$
$$+4\pi\varrho_0\,\frac{(2\lambda)!\,(2\mu)!}{4^{\lambda+\mu}}\sum_{\substack{i,j,\,l,m\\(i+j+l+m\neq 0)}}\frac{S_{ij\,lm}\,a^{2l}\,b^{2m}\,x^{2i}\,y^{2j}}{(\delta-i-j)!\,(\lambda-l)!\,(\mu-m)!}\,\mathscr{M}_{i+l,j+m}(\xi)\,, \tag{26.5}$$

$$\Psi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu}=4\pi\varrho_0\,\frac{(2\lambda+1)!\,(2\mu)!}{4^{\lambda+\mu}}\times$$
$$\times\sum_{i,j,\,l,m}\frac{S_{ij\,lm}\,a^{2l+1}\,b^{2m}\,x^{2i+1}\,y^{2j}}{(\delta-i-j)!\,(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(2i+1)\,(2l+1)}\,M^{(i,e)}_{i+l+1,j+m}\,, \tag{26.6}$$

$$\Psi^{(i,e)}_{2\lambda+1,2\mu+1}=4\pi\varrho_0\,\frac{(2\lambda+1)!\,(2\mu+1)!}{4^{\lambda+\mu}}\times$$
$$\times\sum_{i,j,\,l,m}\frac{S_{ij\,lm}\,a^{2l+1}\,b^{2m+1}\,x^{2i+1}\,y^{2j+1}}{(\delta-i-j)!\,(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(2i+1)\,(2j+1)\,(2l+1)\,(2m+1)}\times$$
$$\times\,M^{(i,e)}_{i+l+1,j+m+1}\,. \tag{26.7}$$

Здесь

$$\delta=\lambda+\mu \tag{26.8}$$

и в целях сокращения записи используется обозначение

$$\sum_{i,j,\,l,m}\equiv\sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\,.$$

Потенциал

$$\Psi_{00}^{(e)}(\mathbf{r}) = -4\pi\varrho_0\,\mathscr{L}_{00}(\xi) \tag{26.9}$$

соответствует случаю проводящего эллиптического цилиндра, погонный, т. е. приходящийся на единицу длины, заряд которого равен

$$q = 2\pi\varrho_0\,ab. \tag{26.10}$$

Таблица поверхностных феррерсовых потенциалов эллиптического цилиндра

(в терминах потенциальных факторов)

$$\Psi_{00}^{(i)} = 0\,, \qquad \Psi_{00}^{(e)} = -4\pi\varrho_0\mathscr{L}_{00}\,;$$

$$\Psi_{10}^{(i,e)} = 4\pi\varrho_0 a\,xM_{10}^{(i,e)}\,; \qquad \Psi_{11}^{(i,e)} = 4\pi\varrho_0 ab\,xyM_{11}^{(i,e)}\,;$$

$$\Psi_{20}^{(i)} = -2\pi\varrho_0\left[a^2M_{10} + \left(M_{10} - a^2M_{20}\right)x^2 + \left(M_{01} - a^2M_{11}\right)y^2\right],$$

$$\Psi_{20}^{(e)} = -2\pi\varrho_0\left[\left(\mathscr{L}_{00} + a^2\mathscr{M}_{10}\right) + \left(\mathscr{M}_{10} - a^2\mathscr{M}_{20}\right)x^2 + \left(\mathscr{M}_{01} - a^2\mathscr{M}_{11}\right)y^2\right];$$

$$\frac{\Psi_{21}^{(i,e)}}{2\pi\varrho_0 by} = M_{01}^{(i,e)} - a^2M_{11}^{(i,e)} - \left(M_{11}^{(i,e)} - a^2M_{21}^{(i,e)}\right)x^2 - \frac{1}{3}\left(M_{02}^{(i,e)} - a^2M_{12}^{(i,e)}\right)y^2;$$

$$\Psi_{30}^{(i,e)} = 2\pi\varrho_0 ax\left[\left(3M_{10}^{(i,e)} - a^2M_{20}^{(i,e)}\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{3}\left(3M_{20}^{(i,e)} - a^2M_{30}^{(i,e)}\right)x^2 - \left(3M_{11}^{(i,e)} - a^2M_{21}^{(i,e)}\right)y^2\right].$$

Выражения для потенциалов Ψ_{01}, Ψ_{02}, Ψ_{12} и Ψ_{03} получаются из содержащихся в таблице путем взаимной замены координат $x \leftrightarrow y$.

Глава 5
Поверхностное распределение диполей (двойной слой)

§ 27. Потенциалы эллипсоидального двойного слоя

Как известно (см., например, [550]), потенциал двойного электрического слоя, покрывающего поверхность S и характеризующегося вектором дипольного момента $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}') = \tau\mathbf{n}'$ единицы поверхности, определяется формулой

$$\Upsilon(\mathbf{r}) = \int\limits_S \tau(\mathbf{r}')\mathbf{n}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dS' \,, \tag{27.1}$$

где $\mathbf{n}'$ — единичный вектор направления нормали (для замкнутой поверхности — внешней нормали) к S в точке $\mathbf{r}'$. Учитывая, что

$$\mathbf{n}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\mathbf{n}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) ,$$

можно переписать (27.1) в виде [452]

$$\Upsilon(\mathbf{r}) = -\operatorname{div} \int\limits_S \frac{\tau(\mathbf{r}')\mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \,, \tag{27.2}$$

представляющем потенциал двойного слоя как сумму первых производных потенциалов простого электрического слоя.

Для потенциала замкнутого двойного слоя с постоянной поверхностной плотностью $\tau(\mathbf{r}') = \tau_0$ из (27.1) получаем

$$\Upsilon_0(\mathbf{r}) = \oint\limits_S \tau_0 \mathbf{n}' \cdot \operatorname{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dS' =$$

$$= \tau_0 \int\limits_V \operatorname{div}' \operatorname{grad}' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' = -4\pi\tau_0 \int\limits_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, dV' \,,$$

т. е. хорошо известное свойство этого потенциала: обращение его в нуль всюду вне слоя и постоянство его значения, равного $-4\pi\tau_0$, во всей внутренней области, охватываемой слоем. Здесь $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ — δ-функция Дирака.

В случае эллипсоидального двойного слоя, учитывая, что

$$\mathbf{n}' = \left\{ \frac{x'}{a^2}\,p', \frac{y'}{b^2}\,p', \frac{z'}{c^2}\,p' \right\}, \tag{27.3}$$

используя (27.2) и выражения (21.11)–(21.14) для потенциалов $\Psi^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})$ гомеоида, а также формулу (21.20) однократного их дифференцирования, получаем потенциалы $\Upsilon^{(i,e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})$, порождаемые поверхностным распределением диполей со «степенно́й» плотностью

$$\tau_{\alpha\beta\gamma} = \tau_0 \left(\frac{x'}{a}\right)^{\alpha} \left(\frac{y'}{b}\right)^{\beta} \left(\frac{z'}{c}\right)^{\gamma}. \tag{27.4}$$

Опуская длинные промежуточные выкладки, приведем окончательные, к сожалению, громоздкие выражения. Для точек наблюдения вне эллипсоида феррерсовы потенциалы эллипсоидального двойного слоя

$$\begin{aligned}
\Upsilon^{(e)}_{2\lambda,2\mu,2\nu} &= -\tau_0 \frac{4\pi}{4^{\delta}}\,(2\lambda)!\,(2\mu)!\,(2\nu)!\times \\
&\times \sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{k=0}^{\delta-i-j}\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\sum_{n=0}^{\nu} \frac{S_{ij\,klmn}x^{2i}y^{2j}z^{2k}a^{2l}b^{2m}c^{2n}}{(\delta-i-j-k)!\,(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(\nu-n)!}\times \\
&\times \left(\frac{2\lambda+1}{2l+1}\mathscr{M}_{i+l+1,j+m,k+n} + \frac{2\mu+1}{2m+1}\mathscr{M}_{i+l,j+m+1,k+n} + \right. \\
&\left. + \frac{2\nu+1}{2n+1}\mathscr{M}_{i+l,j+m,k+n+1}\right) + \\
&+ \tau_0 \frac{4\pi\,abc}{Q(\xi)} \left(\frac{ax}{a^2+\xi}\right)^{2\lambda} \left(\frac{by}{b^2+\xi}\right)^{2\mu} \left(\frac{cz}{c^2+\xi}\right)^{2\nu},
\end{aligned} \tag{27.5}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon^{(e)}_{2\lambda+1,2\mu,2\nu} &= -\tau_0 \frac{4\pi}{4^{\delta}}\,(2\lambda+1)!\,(2\mu)!\,(2\nu)!\times \\
&\times \sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{k=0}^{\delta-i-j}\sum_{m=0}^{\mu}\sum_{n=0}^{\nu} \frac{S_{ij\,kmn}x^{2i+1}y^{2j}z^{2k}b^{2m}c^{2n}}{(\delta-i-j-k)!\,(2i+1)\,(\mu-m)!\,(\nu-n)!}\times \\
&\times \left[\frac{\mathscr{M}_{i+1,j+m,k+n}}{\lambda!\,a} - \sum_{l=0}^{\lambda} \frac{(-2)^l a^{2l+1}}{(\lambda-l)!(2l+1)!} \left(\frac{\lambda+1}{l+1}\mathscr{M}_{i+l+2,j+m,k+n} + \right.\right. \\
&\left.\left. + \frac{2\mu+1}{2m+1}\mathscr{M}_{i+l+1,j+m+1,k+n} + \frac{2\nu+1}{2n+1}\mathscr{M}_{i+l+1,j+m,k+n+1}\right)\right] + \\
&+ \tau_0 \frac{4\pi\,abc}{Q(\xi)} \left(\frac{ax}{a^2+\xi}\right)^{2\lambda+1} \left(\frac{by}{b^2+\xi}\right)^{2\mu} \left(\frac{cz}{c^2+\xi}\right)^{2\nu},
\end{aligned} \tag{27.6}$$

$$\Upsilon^{(e)}_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu} = \tau_0 \frac{4\pi}{4^\delta}\,(2\lambda+1)!\,(2\mu+1)!\,(2\nu)!\times$$
$$\times \sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{k=0}^{\delta-i-j}\sum_{n=0}^{\nu} \frac{S_{ij\,kn}x^{2i+1}y^{2j+1}z^{2k}c^{2n}}{(\delta-i-j-k)!\,(2i+1)\,(2j+1)\,(\nu-n)!}\times$$
$$\times\Bigg[\sum_{m=0}^{\mu}\frac{(-2)^m\,b^{2m+1}\mathscr{M}_{i+1,j+m+1,k+n}}{\lambda!\,(\mu-m)!(2m+1)!a} + \sum_{l=0}^{\lambda}\frac{(-2)^l\,a^{2l+1}\mathscr{M}_{i+l+1,j+1,k+n}}{(\lambda-l)!\mu!(2l+1)!b} -$$
$$-\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\frac{(-2)^{l+m}\,a^{2l+1}\,b^{2m+1}}{(\lambda-l)!(\mu-m)!(2l+1)!(2m+1)!}\Bigg(\frac{\lambda+1}{l+1}\mathscr{M}_{i+l+2,j+m+1,k+n}+$$
$$+\ \frac{\mu+1}{m+1}\mathscr{M}_{i+l+1,j+m+2,k+n} + \frac{2\nu+1}{2n+1}\mathscr{M}_{i+l+1,j+m+1,k+n+1}\Bigg)\Bigg] +$$
$$+\,\tau_0\frac{4\pi\,abc}{Q(\xi)}\left(\frac{ax}{a^2+\xi}\right)^{2\lambda+1}\left(\frac{by}{b^2+\xi}\right)^{2\mu+1}\left(\frac{cz}{c^2+\xi}\right)^{2\nu}, \quad (27.7)$$

$$\Upsilon^{(e)}_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu+1} = \tau_0 \frac{4\pi}{4^\delta}\,(2\lambda+1)!\,(2\mu+1)!\,(2\nu+1)!\times$$
$$\times \sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{k=0}^{\delta-i-j} \frac{S_{ij\,k}x^{2i+1}y^{2j+1}z^{2k+1}}{(\delta-i-j-k)!\,(2i+1)\,(2j+1)\,(2k+1)}\times$$
$$\times\Bigg[\sum_{m=0}^{\mu}\sum_{n=0}^{\nu}\frac{(-2)^{m+n}\,b^{2m+1}c^{2n+1}\mathscr{M}_{i+1,j+m+1,k+n+1}}{\lambda!\,(\mu-m)!\,(\nu-n)!\,(2m+1)!\,(2n+1)!\,a} +$$
$$+\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{n=0}^{\nu}\frac{(-2)^{l+n}\,a^{2l+1}c^{2n+1}\mathscr{M}_{i+l+1,j+1,k+n+1}}{(\lambda-l)!\,\mu!\,(\nu-n)!\,(2l+1)!\,(2n+1)!\,b} +$$
$$+\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\frac{(-2)^{l+m}\,a^{2l+1}\,b^{2m+1}\,\mathscr{M}_{i+l+1,j+m+1,k+1}}{(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(2l+1)!\,(2m+1)!\,c} -$$
$$-\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\sum_{n=0}^{\nu}\frac{S_{lmn}\,a^{2l+1}\,b^{2m+1}\,c^{2n+1}}{(\lambda-l)!(\mu-m)!(\nu-n)!(2l+1)(2m+1)(2n+1)}\times$$
$$\times\Bigg(\frac{\lambda+1}{l+1}\,\mathscr{M}_{i+l+2,j+m+1,k+n+1} + \frac{\mu+1}{m+1}\,\mathscr{M}_{i+l+1,j+m+2,k+n+1}+$$
$$+\ \frac{\nu+1}{n+1}\,\mathscr{M}_{i+l+1,j+m+1,k+n+2}\Bigg)\Bigg] +$$
$$+\,\tau_0\frac{4\pi\,abc}{Q(\xi)}\left(\frac{ax}{a^2+\xi}\right)^{2\lambda+1}\left(\frac{by}{b^2+\xi}\right)^{2\mu+1}\left(\frac{cz}{c^2+\xi}\right)^{2\nu+1}. \quad (27.8)$$

В формулах (27.5)–(27.8) использованы те же обозначения, что и в § 21.

Потенциалы $\Upsilon^{(i)}_{2\lambda,2\mu,2\nu}$, $\Upsilon^{(i)}_{2\lambda+1,2\mu,2\nu}$, $\Upsilon^{(i)}_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu}$, $\Upsilon^{(i)}_{2\lambda+1,2\mu+1,2\nu+1}$ внутри двойного эллипсоидального слоя получаются соответственно из (27.5)–(27.8), если отбросить слагаемые, не содержащие потенциальных факторов эллипсоида, и заменить внешние факторы $\mathscr{M}_{lmn}$ на внутренние M_{lmn}. На границе двойного слоя разрыв потенциала характеризуется величиной

$$\left[\Upsilon^{(e)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) - \Upsilon^{(i)}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})\right]\Big|_{\xi=0} = 4\pi\tau_0\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\left(\frac{y}{b}\right)^{\beta}\left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma},$$

к которой при $\xi \to 0$ стремятся последние слагаемые в (27.5)–(27.8) и которая, как и должно быть, согласуется с (27.4).

Упрощение выражений (27.5)–(27.8), связанное с использованием формул (4.7) и (4.2), в общем виде затруднительно. Это сделано для простейших частных случаев, а результаты приводятся в виде таблицы интегралов.

Таблица интегралов по поверхности эллипсоида

$$\oint \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) dS' = \begin{cases} 0 & (e), \\ -4\pi & (i), \end{cases}$$

$$\oint x' \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) dS' = \begin{cases} 4\pi\mathscr{M}_{100}(\xi)x & (e), \\ -4\pi(1 - M_{100})x & (i), \end{cases}$$

$$\oint x'^2 \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) dS' = \begin{cases} 4\pi a^2\left(\mathscr{M}_{200}x^2 + \mathscr{M}_{110}y^2 + \right. \\ \left. + \mathscr{M}_{101}z^2 - \mathscr{M}_{100}\right) & (e), \\ \\ -4\pi a^2\left[M_{100} - \left(M_{200} - a^{-2}\right)x^2 - \right. \\ \left. - M_{110}y^2 - M_{101}z^2\right] & (i), \end{cases}$$

$$\oint x'y' \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) dS' = \begin{cases} 4\pi(a^2 + b^2)\mathscr{M}_{110}(\xi)xy & (e), \\ -4\pi\left[1 - (a^2 + b^2)M_{110}\right]xy & (i), \end{cases}$$

$$\oint x'^3 \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) dS' = \begin{cases} 6\pi a^2 x\left\{\mathscr{M}_{100} - a^2\mathcal{M}_{200} - \frac{1}{3}\left(\mathscr{M}_{200} - \right.\right. \\ \left. - a^2\mathcal{M}_{300}\right)x^2 - \left(\mathscr{M}_{110} - a^2\mathscr{M}_{210}\right)y^2 - \\ \left. - \left(\mathscr{M}_{101} - a^2\mathscr{M}_{201}\right)z^2\right\} & (e), \\ \\ -4\pi x^3 + 6\pi a^2 x\left\{M_{100} - a^2 M_{200} - \frac{1}{3}\left(M_{200} - \right.\right. \\ \left. - a^2 M_{300}\right)x^2 - \left(M_{110} - a^2 M_{210}\right)y^2 - \\ \left. - \left(M_{101} - a^2 M_{201}\right)z^2\right\} & (i), \end{cases}$$

$$\oint x'^2 y' \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) dS' = \begin{cases} 2\pi a^2 y\left\{\mathscr{M}_{010} - (a^2 + 2b^2)\mathscr{M}_{110} - \left[\mathscr{M}_{110} - \right.\right. \\ \left. - (a^2 + b^2)\mathscr{M}_{210}\right]x^2 - \frac{1}{3}\left[\mathscr{M}_{020} - \right. \\ \left. - (a^2 + b^2)\mathscr{M}_{120}\right]y^2 - \left[\mathscr{M}_{011} - \right. \\ \left.\left. - (a^2 + b^2)\mathscr{M}_{111}\right]z^2\right\} & (e), \\ \\ 2\pi a^2 y\left\{M_{010} - (a^2 + 2b^2)M_{110} - \left[M_{110} - \right.\right. \\ \left. - (a^2 + b^2)M_{210}\right]x^2 - \frac{1}{3}\left[M_{020} - \right. \\ \left. - (a^2 + b^2)M_{120}\right]y^2 - \left[M_{011} - \right. \\ \left.\left. - (a^2 + b^2)M_{111}\right]z^2\right\} - 4\pi x^2 y & (i), \end{cases}$$

$$\oint x'y'z' \, \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) dS' = \begin{cases} 4\pi \langle a^2 b^2 \rangle \mathscr{M}_{111}(\xi) xyz & (e), \\ -4\pi \left[1 - \langle a^2 b^2 \rangle M_{111} \right] xyz & (i). \end{cases}$$

Для сокращения записи в формулах таблицы введено обозначение

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \,. \tag{27.9}$$

§ 28. Потенциалы распределений диполей и квадруполей на эллиптическом диске

В случае плоской фигуры, лежащей, скажем, в плоскости $z=0$, формула (27.1) для потенциала двойного слоя приобретает вид

$$\Upsilon(\mathbf{r}) = \int\limits_S \tau(x', y') \left[\frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right]_{z'=0} dS' \,, \tag{28.1}$$

а вместо (27.2) имеем

$$\Upsilon(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial z} \int\limits_S \frac{\tau(x', y')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dS' \,. \tag{28.2}$$

Выражение (28.2) позволяет получить точную формулу для потенциалов $\Upsilon_{\alpha\beta;\,2\nu-1}(\mathbf{r})$ эллиптического диска, обусловленных поверхностным распределением диполей плотности

$$\tau_{\alpha\beta;\,2\nu-1}(x', y') = \tau_0 \left(\frac{x'}{a} \right)^{\alpha} \left(\frac{y'}{b} \right)^{\beta} D^{2\nu-1}(x', y'). \tag{28.3}$$

При этом вычисление в (28.2) производной потенциала простого слоя облегчает формула

$$\frac{\partial}{\partial z} \, \Psi^{(e)}_{\alpha\beta;\,2\nu-1}(\mathbf{r}) = \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \, \Psi^{(e)}_{\alpha\beta;\,2\nu-1}(\mathbf{r}) \right\} -$$

$$- \, 2\pi\sigma_0 \, \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + \xi)\,(b^2 + \xi)}} \, \left(\frac{ax}{a^2 + \xi} \right)^{\alpha} \left(\frac{by}{b^2 + \xi} \right)^{\beta} \, \frac{p^2(\xi)\, z}{\xi^{3/2}} \, \delta_{\nu 0} \,, \tag{28.4}$$

вытекающая из (21.20) при $\gamma = 2\nu$ в результате предельного перехода при $c \to 0$. Здесь, как и в § 24, через $\Psi_{\alpha\beta;\,2\nu-1}$ обозначены потенциалы эллиптического диска, порождаемые распределением (24.4). В фигурные скобки заключен результат дифференцирования, при котором эллипсоидальная координата ξ, определяемая в данном случае как положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{y^2}{b^2 + \xi} + \frac{z^2}{\xi} = 1 \,, \tag{28.5}$$

рассматривается формально как константа. Отметим также, что в (28.4) $\delta_{\nu 0}$—символ Кронекера, а

$$\frac{1}{p^2(\xi)} = \frac{x^2}{(a^2 + \xi)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \xi)^2} + \frac{z^2}{\xi^2} \,. \tag{28.6}$$

Окончательные формулы для феррерсовых потенциалов $\Upsilon^{(e)}_{\alpha\beta;\,2\nu-1}$, полученные с помощью (28.2) и выражений (24.5)–(24.7), имеют следующий вид:

$$\Upsilon^{(e)}_{2\lambda,2\mu;\,2\nu-1} = \tau_0\,\frac{\pi\,(2\lambda)!\,(2\mu)!\,(2\nu-1)!!}{4^{\lambda+\mu-1}\,2^{\nu}}\times$$
$$\times\sum_{i,j,\,k,l,m}\frac{S_{ijklm}\,x^{2i}\,y^{2j}\,z^{2k+1}\,a^{2l}\,b^{2m}}{(\varepsilon-i-j-k)!(2k+1)\,(\lambda-l)!\,(\mu-m)!}\,\mathscr{N}_{i+l,j+m,k+1}+$$
$$+\,\tau_0\,\frac{2\pi\,ab}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)}}\left(\frac{ax}{a^2+\xi}\right)^{2\lambda}\left(\frac{by}{b^2+\xi}\right)^{2\mu}\frac{p^2(\xi)\,z}{\xi^{3/2}}\,\delta_{\nu\,0}\,, \quad (28.7)$$

$$\Upsilon^{(e)}_{2\lambda+1,2\mu;\,2\nu-1} = \tau_0\,\frac{\pi\,(2\lambda+1)!\,(2\mu)!\,(2\nu-1)!!}{4^{\lambda+\mu-1}\,2^{\nu}}\times$$
$$\times\sum_{i,j,\,k,l,m}\frac{S_{ijklm}\,x^{2i+1}\,y^{2j}\,z^{2k+1}}{(\varepsilon-i-j-k)!(2i+1)\,(2k+1)}\times$$
$$\times\,\frac{a^{2l+1}\,b^{2m}}{(2l+1)\,(\lambda-l)!\,(\mu-m)!}\,\mathscr{N}_{i+l+1,j+m,k+1}+$$
$$+\,\tau_0\,\frac{2\pi\,ab}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)}}\left(\frac{ax}{a^2+\xi}\right)^{2\lambda+1}\left(\frac{by}{b^2+\xi}\right)^{2\mu}\frac{p^2(\xi)\,z}{\xi^{3/2}}\,\delta_{\nu\,0}\,, \quad (28.8)$$

$$\Upsilon^{(e)}_{2\lambda+1,2\mu+1;\,2\nu-1} = \tau_0\,\frac{\pi\,(2\lambda+1)!\,(2\mu+1)!\,(2\nu-1)!!}{4^{\lambda+\mu-1}\,2^{\nu}}\times$$
$$\times\sum_{i,j,\,k,l,m}\frac{S_{ijklm}\,x^{2i+1}\,y^{2j+1}\,z^{2k+1}}{(\varepsilon-i-j-k)!(2i+1)\,(2j+1)\,(2k+1)}\times$$
$$\times\,\frac{a^{2l+1}\,b^{2m+1}}{(2l+1)\,(2m+1)\,(\lambda-l)!\,(\mu-m)!}\,\mathscr{N}_{i+l+1,j+m+1,k+1}+$$
$$+\,\tau_0\,\frac{2\pi\,ab}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)}}\left(\frac{ax}{a^2+\xi}\right)^{2\lambda+1}\left(\frac{by}{b^2+\xi}\right)^{2\mu+1}\frac{p^2(\xi)\,z}{\xi^{3/2}}\,\delta_{\nu\,0}\,, \quad (28.9)$$

В этих формулах введены следующие обозначения:

$$\sum_{i,j,\,k,l,m} = \sum_{i=0}^{\varepsilon}\sum_{j=0}^{\varepsilon-i}\sum_{k=0}^{\varepsilon-i-j}\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\,,$$
$$\varepsilon = \lambda+\mu+\nu-1\,. \quad (28.10)$$

Отметим, что распределение источников $\tau_{\alpha\beta;\,2\nu-1}(x',y')$, описываемое формулой (28.3), при любых допустимых значениях ν, за исключением $\nu=0$, обращается в нуль на краю диска. Случай $\nu=0$ представляет особый интерес не только из-за характерной статической особенности на краю диска, но и потому, что произвольное распределение вида (28.3) можно представить как суперпозицию распределений $\tau_{\alpha\beta;\,-1}(x',y')$ (и соответственно выразить их потенциалы).

Покажем, что при $\xi\to 0$ потенциалы $\Upsilon^{(e)}_{\alpha\beta;\,-1}(\mathbf{r})$ имеют у края диска особенность, соответствующую особенности распределения $\tau_{\alpha\beta;\,-1}(x',y')$.

Рассмотрим сначала пятикратные суммы, входящие в формулы (28.7)–(28.9). Все указанные суммы содержат произведение $z^{2k+1}\mathscr{N}_{\alpha,\beta,k+1}(\xi)$, которое при $\xi \to 0$ (в этом случае в соответствии с (28.5)

$$\frac{z}{\sqrt{\xi}} \to \pm D(x,y)\,, \tag{28.11}$$

а поведение $\mathscr{N}_{\alpha,\beta,\gamma}$ определяет асимптотическая формула (5.16)) имеет пределом

$$z^{2k+1}\mathscr{N}_{\alpha,\beta,k+1}(\xi) \to \pm\,\frac{(2\alpha-1)!!\,(2\beta-1)!!\,(2k-1)!!}{a^{2\alpha}\,b^{2\beta}}\;D^{2k+1}(x,y), \tag{28.12}$$

т. е. отличную от нуля величину. Если (28.12) подставить в формулы (28.7)–(28.9), то суммы по l и m в каждой из пятикратных сумм образуют произведение чисто числовых, так называемых *пуассоновых*, сумм (см. формулы (А.4), (А.5) Приложения А1). В рассматриваемом случае $\nu = 0$ из пределов суммирования по i, j и k в формулах (28.7)–(28.9) следует неравенство

$$i + j \leqslant \lambda + \mu - 1 - k,$$

которое — в соответствии с (А.4)–(А.6) — обеспечивает обращение в нуль хотя бы одной из пуассоновых сумм, а следовательно, и каждой пятикратной суммы. Таким образом, в случае $\nu = 0$ поведение потенциалов (28.7)–(28.9) при $\xi \to 0$ определяют последние члены этих формул, не содержащие потенциальных факторов диска. Из (28.6) и (28.11) следует, что при $\xi \to 0$ имеет место

$$p^2(\xi)/\xi \;\to\; D^{-2}(x,y)\,. \tag{28.13}$$

Поэтому окончательно будем иметь

$$\Upsilon^{(e)}_{\alpha\beta;\,-1}(\mathbf{r}) \to \tau_0 2\pi\,\frac{(x/a)^\alpha (y/b)^\beta}{D(x,y)} \qquad \text{при}\;\; \xi \to 0,\; z \to \pm 0. \tag{28.14}$$

Приведем теперь таблицу интегралов, соответствующую простейшим частным случаям формул (28.7)–(28.9).

Таблица интегралов по поверхности эллиптического диска

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{R}\right)\right]_{z'=0} \frac{dS'}{D'} = 2\pi\,\frac{ab\,z\,p^2(\xi)}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi^3}}\,,$$

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{R}\right)\right]_{z'=0} \frac{x'\,dS'}{D'} = 2\pi\,\frac{a^3 b\,xz\,p^2(\xi)}{\sqrt{(a^2+\xi)^3(b^2+\xi)\xi^3}}\,,$$

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{R}\right)\right]_{z'=0} \frac{x'y'\,dS'}{D'} = 2\pi\,\frac{a^3 b^3\,xyz\,p^2(\xi)}{\sqrt{(a^2+\xi)^3(b^2+\xi)^3\xi^3}}\,,$$

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{R}\right)\right]_{z'=0} \frac{x'^2\,dS'}{D'} = 2\pi\,a^2\,z\left[\mathscr{N}_{100}(\xi) + \frac{a^3 b\,x^2\,p^2(\xi)}{\sqrt{(a^2+\xi)^5(b^2+\xi)\xi^3}}\right];$$

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{R}\right)\right]_{z'=0} D'\,dS' = 2\pi\,z\,\mathscr{N}_{001}\,,$$

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{R}\right)\right]_{z'=0} x'\, D'\, dS' = 2\pi\, a^2\, xz\, \mathscr{N}_{101}\,,$$

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{R}\right)\right]_{z'=0} x'y'\, D'\, dS' = 2\pi\, a^2 b^2\, xyz\, \mathscr{N}_{111}\,,$$

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{R}\right)\right]_{z'=0} x'^2 D'\, dS' = \pi a^2 z \left[\mathscr{N}_{100} - (\mathscr{N}_{200} - 2\mathscr{N}_{101})x^2 - \mathscr{N}_{110} y^2 - \mathscr{N}_{101} z^2\right].$$

Здесь R и D' даются формулами (27.9) и (24.3). Примечательно, что первые три формулы таблицы вообще не содержат потенциальных факторов эллиптического диска.

Стоит отметить, что для значений $\nu \geqslant 1$ формулы (28.7)–(28.9), как показано в [497], можно вывести, исходя либо из потенциалов $\Psi^{(e)}_{\alpha,\beta,\,2\nu+1}(\mathbf{r})$ гомеоида при $c \to 0$ (при этом

$$\tau_{\alpha,\beta;\,2\nu+1}(x', y') = \lim_{c\to 0} \sigma_{\alpha,\beta,\,2\nu+1}\, 2z' = \tau_0 (x'/a)^\alpha (y'/b)^\beta D^{2\nu+1}(x', y')\,,$$

где $\tau_0 = 2c^2\rho_0$), либо исходя из потенциалов $\Upsilon^{(e)}_{\alpha,\beta,\,2\nu+1}(\mathbf{r})$ двойного эллипсоидального слоя и выполняя тот же ($c \to 0$) предельный переход (при этом $\tau_{\alpha,\beta;\,2\nu+1}(x', y') = \lim_{c\to 0} 2\tau_{\alpha,\beta,\,2\nu+1}(x', y', z')$).

Если же исходить из потенциалов $\Upsilon^{(e)}_{\alpha,\beta,\gamma}(\mathbf{r})$ двойного эллипсоидального слоя с *четными* значениями γ $(\gamma = 2\nu)$, то, учитывая, что вектор дипольной плотности $\boldsymbol{\tau}$ ориентирован вдоль $\mathbf{n}'$, в результате предельного перехода при $c \to 0$ мы получим плоский диск *квадруполей*, распределенных с плотностью

$$\varkappa_{\alpha,\beta;\,2\nu+1}(x', y') = \lim_{c\to 0} \tau_{\alpha,\beta,\,2\nu}\, 2z' = \varkappa_0 \left(\frac{x'}{a}\right)^\alpha \left(\frac{y'}{b}\right)^\beta D^{2\nu+1}(x', y')\,, \qquad (28.15)$$

где $\varkappa_0 = 2c\tau_0$. Формулы (27.5)–(27.7) дают для потенциалов $\Xi^{(e)}_{\alpha,\beta;2\nu+1}(\mathbf{r})$ «четверного» слоя, соответствующих распределениям (28.15), следующие выражения:

$$\Xi^{(e)}_{2\lambda,2\mu;2\nu+1}(\mathbf{r}) = -\varkappa_0 \frac{2\pi (2\lambda)!\,(2\mu)!\,(2\nu-1)!!}{4^{\lambda+\mu} 2^\nu} \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{\delta} \sum_{j=0}^{\delta-i} \sum_{k=0}^{\delta-i-j} \sum_{l=0}^{\lambda} \sum_{m=0}^{\mu} \frac{S_{ij\,klm} x^{2i} y^{2j} z^{2k} a^{2l} b^{2m}}{(\delta-i-j-k)!\,(\lambda-l)!\,(\mu-m)!} \times$$
$$\times \left(\frac{2\lambda+1}{2l+1}\mathscr{N}_{i+l+1,j+m,k} + \frac{2\mu+1}{2m+1}\mathscr{N}_{i+l,j+m+1,k} + (2\nu+1)\mathscr{N}_{i+l,j+m,k+1}\right) +$$
$$+ \varkappa_0 \frac{2\pi\, ab}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}} \left(\frac{ax}{a^2+\xi}\right)^{2\lambda} \left(\frac{by}{b^2+\xi}\right)^{2\mu} \delta_{0\,\nu}\,, \qquad (28.16)$$

$$\Xi^{(e)}_{2\lambda+1,2\mu;2\nu+1}(\mathbf{r}) = \varkappa_0 \frac{\pi(2\lambda+1)!\,(2\mu)!\,(2\nu-1)!!}{4^{\lambda+\mu}2^{\nu-1}} \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{k=0}^{\delta-i-j}\sum_{m=0}^{\mu} \frac{S_{ij\,km}x^{2i+1}y^{2j}z^{2k}b^{2m}}{(\delta-i-j-k)!\,(2i+1)\,(\mu-m)!} \left[\frac{\mathscr{N}_{i+1,j+m,k}}{\lambda!\,a} - \right.$$
$$-\sum_{l=0}^{\lambda}\frac{(-2)^l a^{2l+1}}{(\lambda-l)!(2l+1)!}\left(\frac{\lambda+1}{l+1}\mathscr{N}_{i+l+2,j+m,k}+\right.$$
$$\left.\left. + \frac{2\mu+1}{2m+1}\mathscr{N}_{i+l+1,j+m+1,k} + (2\nu+1)\mathscr{N}_{i+l+1,j+m,k+1}\right)\right] +$$
$$+ \varkappa_0 \frac{2\pi\,ab}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}}\left(\frac{ax}{a^2+\xi}\right)^{2\lambda+1}\left(\frac{by}{b^2+\xi}\right)^{2\mu}\delta_{0\,\nu}\,, \quad (28.17)$$

$$\Xi^{(e)}_{2\lambda+1,2\mu+1;2\nu+1}(\mathbf{r}) = \varkappa_0 \frac{\pi(2\lambda+1)!\,(2\mu+1)!\,(2\nu-1)!}{4^{\lambda+\mu}2^{\nu-1}} \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{k=0}^{\delta-i-j} \frac{S_{ij\,k}x^{2i+1}y^{2j+1}z^{2k}}{(\delta-i-j-k)!\,(2i+1)\,(2j+1)} \times$$
$$\times \left[\sum_{m=0}^{\mu}\frac{(-2)^m\,b^{2m+1}\mathscr{N}_{i+1,j+m+1,k}}{\lambda!\,(\mu-m)!(2m+1)!\,a} + \sum_{l=0}^{\lambda}\frac{(-2)^l\,a^{2l+1}\mathscr{N}_{i+l+1,j+1,k}}{(\lambda-l)!\mu!(2l+1)!\,b} - \right.$$
$$-\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\frac{(-2)^{l+m}\,a^{2l+1}\,b^{2m+1}}{(\lambda-l)!(\mu-m)!(2l+1)!(2m+1)!}\left(\frac{\lambda+1}{l+1}\mathscr{N}_{i+l+2,j+m+1,k}+\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\mu+1}{m+1}\mathscr{N}_{i+l+1,j+m+2,k} + (2\nu+1)\mathscr{N}_{i+l+1,j+m+1,k+1}\right)\right] +$$
$$+ \varkappa_0 \frac{2\pi\,ab}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}}\left(\frac{ax}{a^2+\xi}\right)^{2\lambda+1}\left(\frac{by}{b^2+\xi}\right)^{2\mu+1}\delta_{0\,\nu}\,. \quad (28.18)$$

§ 29. Потенциалы распределений диполей на эллиптическом цилиндре

Ферреровы потенциалы двойного электрического слоя, покрывающего эллиптический цилиндр (26.1) и характеризующегося поверхностной плотностью диполей

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_0 \left(\frac{x'}{a}\right)^{\alpha}\left(\frac{y'}{b}\right)^{\beta}, \quad (29.1)$$

описываются формулами, которые получаются из (27.5)–(27.7) при $\nu=0$ в результате предельного перехода при $c\to\infty$ с учетом свойства (6.5) и имеют вид

$$\Upsilon^{(e)}_{2\lambda,2\mu} = -\tau_0\frac{4\pi}{4^\delta}\,(2\lambda)!\,(2\mu)!\sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\frac{S_{ij\,lm}x^{2i}y^{2j}a^{2l}b^{2m}}{(\delta-i-j)!\,(\lambda-l)!\,(\mu-m)!}\times$$
$$\times\left(\frac{2\lambda+1}{2l+1}\mathscr{M}_{i+l+1,j+m}+\frac{2\mu+1}{2m+1}\mathscr{M}_{i+l,j+m+1}\right)+$$
$$+\tau_0\frac{4\pi\,ab}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)}}\left(\frac{ax}{a^2+\xi}\right)^{2\lambda}\left(\frac{by}{b^2+\xi}\right)^{2\mu}, \tag{29.2}$$

$$\Upsilon^{(e)}_{2\lambda+1,2\mu} = -\tau_0\frac{4\pi}{4^\delta}\,(2\lambda+1)!\,(2\mu)!\sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\sum_{m=0}^{\mu}\frac{S_{ijm}x^{2i+1}y^{2j}b^{2m}}{(\delta-i-j)!\,(2i+1)\,(\mu-m)!}\times$$
$$\times\left[\frac{\mathscr{M}_{i+1,j+m}}{\lambda!\,a}-\sum_{l=0}^{\lambda}\frac{(-2)^l a^{2l+1}}{(\lambda-l)!\,(2l+1)!}\left(\frac{\lambda+1}{l+1}\mathscr{M}_{i+l+2,j+m}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2\mu+1}{2m+1}\mathscr{M}_{i+l+1,j+m+1}\right)\right]+\tau_0\frac{4\pi\,ab}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)}}\left(\frac{ax}{a^2+\xi}\right)^{2\lambda+1}\left(\frac{by}{b^2+\xi}\right)^{2\mu}, \tag{29.3}$$

$$\Upsilon^{(e)}_{2\lambda+1,2\mu+1} = \tau_0\frac{4\pi}{4^\delta}\,(2\lambda+1)!\,(2\mu+1)!\sum_{i=0}^{\delta}\sum_{j=0}^{\delta-i}\frac{(-2)^{i+j}x^{2i+1}y^{2j+1}}{(\delta-i-j)!\,(2i+1)!\,(2j+1)!}\times$$
$$\times\left[\sum_{m=0}^{\mu}\frac{(-2)^m\,b^{2m+1}\mathscr{M}_{i+1,j+m+1}}{\lambda!\,(\mu-m)!\,(2m+1)!\,a}+\sum_{l=0}^{\lambda}\frac{(-2)^l\,a^{2l+1}\mathscr{M}_{i+l+1,j+1}}{(\lambda-l)!\,\mu!\,(2l+1)!\,b}-\right.$$
$$-\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\frac{(-2)^{l+m}\,a^{2l+1}\,b^{2m+1}}{(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(2l+1)!\,(2m+1)!}\left(\frac{\lambda+1}{l+1}\mathscr{M}_{i+l+2,j+m+1}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\mu+1}{m+1}\mathscr{M}_{i+l+1,j+m+2}\right)\right]+\tau_0\frac{4\pi\,ab}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)}}\left(\frac{ax}{a^2+\xi}\right)^{2\lambda+1}\left(\frac{by}{b^2+\xi}\right)^{2\mu+1}. \tag{29.4}$$

Здесь (согласно (6.4) и (26.8))

$$\xi=\frac{1}{2}\left\{x^2+y^2-a^2-b^2+\sqrt{(x^2-y^2-a^2+b^2)^2+4x^2y^2}\right\}\quad\text{и}\quad\delta=\lambda+\mu.$$

Заметим, что наружные потенциалы двойного цилиндрического слоя, как и должно быть, логарифмического фактора $\mathscr{L}_{00}(\xi)$ не содержат.

Потенциалы $\Upsilon^{(i)}_{2\lambda,2\mu}(\mathbf{r})$, $\Upsilon^{(i)}_{2\lambda+1,2\mu}(\mathbf{r})$ и $\Upsilon^{(i)}_{2\lambda+1,2\mu+1}(\mathbf{r})$ внутренней области слоя описываются выражениями, получающимися из (29.2)–(29.4) в результате отбрасывания последнего слагаемого и замены внешних потенциальных факторов $\mathscr{M}_{lm}(\xi)$ эллиптического цилиндра соответствующими внутренними потенциальными факторами M_{lm}.

Частные случаи потенциалов цилиндрического двойного слоя приводятся в виде таблицы интегралов.

Таблица интегралов по поверхности эллиптического цилиндра

$$\oint \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) dS' = \begin{cases} 0 & (e), \\ -4\pi & (i), \end{cases}$$

$$\oint x' \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) dS' = \begin{cases} 4\pi \mathscr{M}_{10}(\xi) x & (e), \\ -4\pi(1 - M_{10})x & (i), \end{cases}$$

$$\oint {x'}^2 \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) dS' = \begin{cases} 4\pi a^2 \left(\mathscr{M}_{20} x^2 + \mathscr{M}_{11} y^2 - \right. \\ \left. - \mathscr{M}_{10}\right) & (e), \\ \\ -4\pi a^2 \left[M_{10} - \left(M_{20} - a^{-2}\right) x^2 - \right. \\ \left. - M_{11} y^2\right] & (i), \end{cases}$$

$$\oint x'y' \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) dS' = \begin{cases} 4\pi(a^2+b^2)\mathscr{M}_{11}(\xi) xy & (e), \\ -4\pi\left[1 - (a^2+b^2) M_{11}\right] xy & (i), \end{cases}$$

$$\oint {x'}^3 \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) dS' = \begin{cases} 6\pi a^2 x \left\{\mathscr{M}_{10} - a^2 \mathscr{M}_{20} - \frac{1}{3}\left(\mathscr{M}_{20} - \right.\right. \\ \left.\left. - a^2 \mathscr{M}_{30}\right) x^2 - \left(\mathscr{M}_{11} - a^2 \mathscr{M}_{21}\right) y^2\right\} & (e), \\ \\ -4\pi x^3 + 6\pi a^2 x \left\{M_{10} - a^2 M_{20} - \frac{1}{3}\left(M_{20} - \right.\right. \\ \left.\left. - a^2 M_{30}\right) x^2 - \left(M_{11} - a^2 M_{21}\right) y^2\right\} & (i), \end{cases}$$

$$\oint {x'}^2 y' \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) dS' = \begin{cases} 2\pi a^2 y \left\{\mathscr{M}_{01} - (a^2+2b^2)\mathscr{M}_{11} - \left[\mathscr{M}_{11} - \right.\right. \\ \left. - (a^2+b^2)\mathscr{M}_{21}\right] x^2 - \frac{1}{3}\left[\mathscr{M}_{02} - \right. \\ \left.\left. -(a^2+b^2)\mathscr{M}_{12}\right] y^2\right\} & (e), \\ \\ 2\pi a^2 y \left\{M_{01} - (a^2+2b^2) M_{11} - \left[M_{11} - \right.\right. \\ \left. - (a^2+b^2) M_{21}\right] x^2 - \frac{1}{3}\left[M_{02} - \right. \\ \left.\left. -(a^2+b^2) M_{12}\right] y^2\right\} - 4\pi x^2 y & (i), \end{cases}$$

Здесь введено обозначение $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ для модуля разности двумерных радиусов-векторов.

Часть II

СТАТИЧЕСКИЕ МУЛЬТИПОЛИ

Глава 6
Мультипольное разложение потенциала системы зарядов

§ 30. Предварительные сведения

Проблема разложения по мультиполям потенциала вне создающей его ограниченной в пространстве системы неподвижных зарядов рассматривается во многих книгах по электродинамике (см., например, [101,159,314,346, 483]), а также в [31, 300, 353, 386, 411]. Безразмерным параметром по степеням которого строится разложение внешнего потенциала служит отношение характерного размера R системы зарядов (обычно это радиус сферы, охватывающей все заряды) к расстоянию $r=|\mathbf{r}|$ до точки наблюдения, отсчитываемому от центра сферы. Поскольку указанный параметр меньше единицы, то получающийся ряд

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \ldots + \varphi^{(n)} + \ldots, \tag{30.1}$$

где так называемый *потенциал* 2^n*–поля* $\varphi^{(n)}$ пропорционален $1/r^{n+1}$, должен сходиться абсолютно и равномерно.

Теоретическое построение ряда (30.1) связано с введением специальных тензорных характеристик системы зарядов (*мультипольных моментов*) на основе их строгого аналитического определения[1]. При этом потенциал $\varphi^{(n)}$ выражается только через тензор 2^n–польного электрического момента. Примечательным качеством ряда (30.1) является его *универсальность*: будучи выражен через мультипольные моменты ряд (30.1) имеет совершенно одинаковый вид для произвольных (ограниченных в пространстве) систем зарядов, как дискретно, так и непрерывно распределенных[2].

Равенство (30.1) означает, что если в начале координат (центре сферы, охватывающей систему зарядов) расположить точечные мультиполи, моменты которых совпадают с соответствующими мультипольными моментами системы зарядов, то в пространстве вне сферы обе системы источников характеризуются одинаковыми потенциалами.

---

[1] Правда, чисто тензорное описание в декартовых координатах ограничивается обычно [159, 314, 346, 483] только *дипольным и квадрупольным электрическими моментами*, тогда как общее определение 2^n*–польного момента* дается в терминах сферических координат и функций.

[2] Вся конкретная количественная информация, отличающая одну систему зарядов от другой, «упрятана» в мультипольные моменты.

Вообще говоря, все мультипольные моменты системы зарядов, за исключением ее полного заряда (*монополя*), зависят от выбора начала координат. Момент 2^n–поля не зависит от выбора начала координат, т. е. определен однозначно, только в том случае, когда все 2^l–польные моменты системы зарядов, где $0 \leqslant l \leqslant n-1$, равны нулю (см., например, [79]).

На больших расстояниях от системы зарядов, т. е. при $r \gg R$, каждый последующий член разложения (30.1) мал по сравнению с предыдущим, так что потенциал определяется в основном первым отличным от нуля членом этого ряда.

Сказанным мы попытались схематически кратко обрисовать круг вопросов, традиционно излагаемый в литературе в связи с мультипольным разложением потенциала электростатической системы зарядов, опуская здесь детали, относящиеся, скажем, к свойствам дипольных и квадрупольных полей.

По причинам, обусловленным целями данной книги, употребленный в ней подход к рассмотрению проблемы мультипольного разложения потенциала несколько отличается от традиционного. Различия сводятся к следующему.

1. Построение разложения (30.1), включающее аналитическое определение мультипольных моментов системы, ведется исключительно в рамках *тензорного описания*. Изложение этого вопроса опирается на результаты, достигнутые, в частности, в [511] и [458]. В данной книге обращение к тензорному описанию — это не прихоть, а обусловленность, связанная с необходимостью использования формул I-ой части, выраженных в терминах декартовых координат.

2. Ряд (30.1) трактуется здесь не столько как способ приближенного асимптотического описания потенциала на больших расстояниях от системы зарядов, сколько как *одна из модификаций точного решения уравнения Пуассона (Лапласа)* для области пространства, внешней по отношению к системе зарядов. Это связано с тем, что в данной книге для всех задач о стационарных полях отыскиваются только *точные* аналитические решения. Такие решения, естественно, должны содержать точные выражения мультипольных моментов. Поэтому рассматриваются только *непрерывные* распределения источников, характеризующиеся *полиномиальной* плотностью, и ограниченный (с точки зрения геометрической формы) набор тел: шар (§ 37) и эллипсоид.

3. Параллельно с общепринятыми обозначениями тензоров и тензорных уравнений с помощью тензорных индексов, мы используем также (причем по необходимости, а не только экономного написания ради) так называемую *трехиндексную запись* как скалярных величин, так и тензоров (в последнем случае такая возможность распространяется только на совокупность индексов, по которым тензор симметричен) и составленных из них соотношений[1].

[1] Примечательно, что при изложении вопроса о представлении зарядовых систем при помощи мультиполей в [101] использовался трехиндексный способ написания. Правда, с единственной целью — придать формулам менее громоздкий вид.

§ 31. Ядро мультипольного момента

Интегралы, выражающие электростатические объемные

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\varrho(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{31.1}$$

или поверхностные потенциалы

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int \frac{\sigma(\mathbf{r}')\,dS'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,, \tag{31.2}$$

содержат в качестве подынтегрального ядра величину $1/\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$. Последняя, как известно, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\,\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\,4\pi\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{31.3}$$

где $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ — трехмерная дельта-функция Дирака, и представляет собой кулоновский потенциал[1] (в точке $\mathbf{r}$) единичного точечного заряда, расположенного в точке $\mathbf{r}'$.

Используя формулу для ряда Тейлора

$$f(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x'_{i_1}\cdots x'_{i_n}\, \nabla_{i_1}\cdots\nabla_{i_n} f(\mathbf{r}), \tag{31.4}$$

запишем потенциал $1/\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ в виде ряда по отрицательным степеням r

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x'_{i_1}\cdots x'_{i_n}\, \nabla_{i_1}\cdots\nabla_{i_n} \frac{1}{r}. \tag{31.5}$$

В этих формулах $\nabla_i \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ — декартовы компоненты векторного оператора Гамильтона $\boldsymbol{\nabla}$. Кроме того, здесь и всюду далее по каждой паре встречающихся в «одночленном» выражении совпадающих (так называемых *немых*) тензорных индексов подразумевается суммирование, при котором немой индекс (например, i или i_l) пробегает значения 1, 2, 3 (или, что то же самое, x, y, z).

Перепишем (31.5) в виде

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x'_{i_1}\cdots x'_{i_n}}{n!\,r^{2n+1}}\;\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})\,, \tag{31.6}$$

где

$$\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r}) = r^{2n+1}\,(-\nabla_{i_1})\cdots(-\nabla_{i_n})\,\frac{1}{r} \qquad (n=0,1,2,\ldots). \tag{31.7}$$

Определенный формулой (31.7) тензор n-го ранга $\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})$ будем называть *ядром* 2^n*-польного момента.*

[1] Отметим симметрию потенциала $1/\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, состоящую в возможности взаимной замены $\mathbf{r}\leftrightarrow\mathbf{r}'$ точки наблюдения $\mathbf{r}$ и точки источника $\mathbf{r}'$.

Из (31.7) видно, что тензор $\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})$ *симметричен* по любой паре индексов, а каждая его компонента — *однородный* полином степени n. Учитывая также, что функция $1/r$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 \dfrac{1}{r} = 0$, заключаем, с одной стороны, что любая компонента $\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})$ — это не только однородный, но и *гармонический* полином[1], а с другой стороны, что свертка (упрощение) тензора $\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})$ по любым двум индексам (понятно, что при этом $n \geqslant 2$) равна нулю[2].

§ 32. Преобразование инверсии

С. П. Ефимовым [458] был выявлен векторный дифференциальный оператор, компоненты которого определяют рекуррентную связь между ядрами (31.7) мультипольных моментов различных рангов. Этот результат получен благодаря обращению к *преобразованию инверсии*.

Начиная с «Трактата об электричестве» [238] Максвелла, опирающийся на это преобразование метод инверсии освещается во многих руководствах по электромагнетизму (см., например, [159, 221, 450, 484]) как один из методов решения задач электростатики, позволяющий по известному решению одной конкретной задачи находить решение другой. Следуя С. П. Ефимову, мы воспользуемся методом инверсии не в полном объеме, поскольку в данном случае речь не идет о решении какой-либо электростатической задачи.

Инверсия заключается в обратном преобразовании радиуса-вектора, т. е. в замене

$$\mathbf{r} = \frac{R^2}{\tilde{r}^2}\,\tilde{\mathbf{r}} \qquad \text{или} \qquad x_k = \frac{R^2}{\tilde{r}^2}\,\tilde{x}_k. \tag{32.1}$$

Очевидно, что модули радиусов-векторов связаны соотношением

$$r = \frac{R^2}{\tilde{r}}. \tag{32.2}$$

Здесь R — так называемый *радиус инверсии*[3], являющийся постоянной величиной.

Укажем важные для наших целей свойства преобразования инверсии.

1. Если применить преобразование инверсии к однородному полиному $H_n(\mathbf{r})$ степени n:

$$H_n(\mathbf{r}) = H_n\left(\frac{R^2}{\tilde{r}^2}\,\tilde{\mathbf{r}}\right) = \frac{R^{2n}}{\tilde{r}^{2n}}\,H_n(\tilde{\mathbf{r}}), \tag{32.3}$$

то, как видно из (32.3), полином преобразуется сам в себя, попутно приобретая множитель $R^{2n}/\,\tilde{r}^{2n}$.

2. Направляющие косинусы радиусов-векторов (в силу (32.1)) совпадают:

$$n_i = \frac{x_i}{r} = \frac{\tilde{x}_i}{\tilde{r}} = \tilde{n}_i. \tag{32.4}$$

---

[1] Однородные гармонические полиномы далее для краткости будем называть *шаровыми функциями*.

[2] Тензоры, обращающиеся в нуль при свертывании по любой паре индексов, называются *неприводимыми*: из них невозможно с помощью свертки образовать тензор более низкого ранга.

[3] С геометрической точки зрения, (32.2) есть преобразование инверсии на сфере радиуса R с *центром инверсии*, расположенном в начале координат.

3. Производная $\partial x_k/\partial \tilde{x}_i$ равна

$$\frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{R^2}{\tilde{r}^2}\left(\delta_{ik} - 2\tilde{n}_i\tilde{n}_k\right). \tag{32.5}$$

4. Поэтому декартова компонента оператора Гамильтона есть

$$\nabla_k \equiv \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{R^2}{r^2}\left(\delta_{ik} - 2n_i n_k\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{R^2}{r^2}\left(\delta_{ik} - 2\tilde{n}_i\tilde{n}_k\right)\widetilde{\nabla}_i. \tag{32.6}$$

В векторном виде (32.6) приобретает вид

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{1}{R^2}\left(\tilde{r}^2\widetilde{\boldsymbol{\nabla}} - 2\,\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{r}}\,\widetilde{\boldsymbol{\nabla}})\right). \tag{32.7}$$

5. Преобразование инверсии (32.1) и одновременная замена «старого» потенциала φ «новым» $\widetilde{\varphi}$ в соответствии с формулой

$$\widetilde{\varphi}(\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{R}{\tilde{r}}\,\varphi\!\left(\frac{R^2}{\tilde{r}^2}\,\tilde{\mathbf{r}}\right) \tag{32.8}$$

обеспечивает инвариантность уравнения Лапласа.

Покажем, что это действительно так. Используя (32.7) и (32.8), получаем

$$R^3\nabla_k^2\varphi = \nabla_k\left(\tilde{r}^2\delta_{ik} - 2\tilde{x}_i\tilde{x}_k\right)\widetilde{\nabla}_i\left(\tilde{r}\widetilde{\varphi}\right) = \nabla_k\left(\tilde{r}^3\widetilde{\nabla}_k\widetilde{\varphi} - \tilde{r}\tilde{x}_k\widetilde{\varphi} - 2\,\tilde{r}\tilde{x}_i\tilde{x}_k\widetilde{\nabla}_i\widetilde{\varphi}\right).$$

Вновь используя (32.7), будем иметь

$$\begin{aligned}
R^5\nabla_k^2\varphi &= \left(\tilde{r}^2\delta_{km} - 2\tilde{x}_k\tilde{x}_m\right)\widetilde{\nabla}_m\left(\tilde{r}^3\widetilde{\nabla}_k\widetilde{\varphi} - \tilde{r}\tilde{x}_k\widetilde{\varphi} - 2\,\tilde{r}\tilde{x}_i\tilde{x}_k\widetilde{\nabla}_i\widetilde{\varphi}\right) = \\
&= \left(\tilde{r}^2\delta_{km} - 2\tilde{x}_k\tilde{x}_m\right)\Bigg(\tilde{r}^3\widetilde{\nabla}_k\widetilde{\nabla}_m\widetilde{\varphi} - 2\,\tilde{r}\tilde{x}_i\tilde{x}_k\widetilde{\nabla}_i\widetilde{\nabla}_m\widetilde{\varphi} + 3\,\tilde{r}\tilde{x}_m\widetilde{\nabla}_k\widetilde{\varphi} - \\
&\quad -2\frac{\tilde{x}_i\tilde{x}_k\tilde{x}_m}{\tilde{r}}\widetilde{\nabla}_i\widetilde{\varphi} - 3\tilde{r}\tilde{x}_k\widetilde{\nabla}_m\widetilde{\varphi} - 2\,\tilde{r}\delta_{km}\tilde{x}_i\widetilde{\nabla}_i\widetilde{\varphi} - \frac{\tilde{x}_k\tilde{x}_m}{\tilde{r}}\,\widetilde{\varphi} - \delta_{km}\tilde{r}\widetilde{\varphi}\Bigg).
\end{aligned}$$

Наконец, перемножая выражения в скобках и приводя подобные члены, окончательно получаем

$$\Delta\varphi = \frac{\tilde{r}^5}{R^5}\,\tilde{\Delta}\widetilde{\varphi}. \tag{32.9}$$

Таким образом, действительно, если $\Delta\varphi = 0$, то и $\tilde{\Delta}\widetilde{\varphi} = 0$ (и наоборот).

§ 33. Оператор С. П. Ефимова

В результате инверсии потенциал $\dfrac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ в соответствии с формулой (32.8) приобретает вид $\dfrac{R}{\tilde{r}\,|\,(R^2/\,\tilde{r}^2)\,\tilde{\mathbf{r}}-\mathbf{r}'|}$. Преобразуются и правые части выражений (31.5) и (31.6). Так, каждому слагаемому «полупреобразованной» правой части (31.5) удается придать факторизованный вид:

$$\frac{R}{\tilde{r}\,|\,(R^2/\,\tilde{r}^2)\,\tilde{\mathbf{r}}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x'_{i_1}\cdots x'_{i_n}}{n!}\left(-\frac{1}{\tilde{r}}\nabla_{i_1}\tilde{r}\right)\cdots\left(-\frac{1}{\tilde{r}}\nabla_{i_n}\tilde{r}\right). \tag{33.1}$$

Сомножители, входящие в произведение операторов в (33.1), с точностью до постоянного множителя суть компоненты векторного дифференциального оператора [458]

$$\widehat{\widetilde{\mathbf{D}}} = -\frac{R^2}{\tilde{r}}\,\boldsymbol{\nabla}\tilde{r}. \tag{33.2}$$

Учитывая, что оператор $\widehat{\widetilde{\mathbf{D}}}$ воздействует на функцию инвертированной координаты, и используя (32.7), устанавливаем явный вид оператора:

$$\widehat{\widetilde{\mathbf{D}}} = 2\,\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{r}}\,\widetilde{\boldsymbol{\nabla}}) - \tilde{r}^2\widetilde{\boldsymbol{\nabla}} + \tilde{\mathbf{r}}. \tag{33.3}$$

Действительно,

$$\widehat{\widetilde{D}}_i f(\tilde{\mathbf{r}}) = -\frac{R^2}{\tilde{r}}\,\nabla_i \tilde{r} f(\tilde{\mathbf{r}}) = -\frac{1}{\tilde{r}}\,\left(\tilde{r}^2\delta_{ik} - 2\,\tilde{x}_i\tilde{x}_k\right)\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_k}\left(\tilde{r}f(\tilde{\mathbf{r}})\right) =$$
$$= \left(2\tilde{x}_i(\tilde{\mathbf{r}}\widetilde{\boldsymbol{\nabla}}) - \tilde{r}^2\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_i} + \tilde{x}_i\right) f(\tilde{\mathbf{r}}).$$

Перепишем (33.1), используя (33.2). Результат имеет вид

$$\frac{R}{\tilde{r}\,|\,(R^2/\,\tilde{r}^2)\,\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{R^{2n+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x'_{i_1}\cdots x'_{i_n}}{n!}\,\widehat{\widetilde{D}}_{i_1}\cdots\widehat{\widetilde{D}}_{i_n}1. \tag{33.4}$$

Что касается преобразованного выражения, получающегося из (31.6), то оно, учитывая свойство (32.3), имеющее непосредственное отношение к компонентам тензора $\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})$, приобретает вид

$$\frac{R}{\tilde{r}\,|\,(R^2/\,\tilde{r}^2)\,\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{R^{2n+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x'_{i_1}\cdots x'_{i_n}}{n!}\,\theta_{i_1\ldots i_n}(\tilde{\mathbf{r}}). \tag{33.5}$$

Сопоставление (33.4) и (33.5) приводит к важному результату:

$$\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r}) = \widehat{D}_{i_1}\cdots\widehat{D}_{i_n}1, \tag{33.6}$$

который записан не для инвертированных, а для исходных координат. Так что здесь — в соответствии с (33.3) — оператор $\widehat{\mathbf{D}}$ есть

$$\widehat{\mathbf{D}} = 2\,\mathbf{r}(\mathbf{r}\,\boldsymbol{\nabla}) - r^2\boldsymbol{\nabla} + \mathbf{r}. \tag{33.7}$$

Равенство (33.6) означает, что оператор $\widehat{\mathbf{D}}$ определяет рекурсию ядер мультипольных моментов:

$$\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r}) = \widehat{D}_{i_n}\theta_{i_1\ldots i_{n-1}}(\mathbf{r}). \tag{33.8}$$

Любые две компоненты оператора С. П. Ефимова $\widehat{D}_i$ коммутируют (перестановочны):

$$\widehat{D}_i\widehat{D}_j = \widehat{D}_j\widehat{D}_i. \tag{33.9}$$

Это свойство легко проверяется непосредственно. А вот его отсутствие означало бы несовместимость — как это следует из (33.6) — с уже установленным свойством симметрии тензора $\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})$ по любой паре индексов.

Непосредственная проверка показывает и то, что квадрат векторного оператора $\widehat{\mathbf{D}}$ пропорционален оператору Лапласа:

$$\widehat{D}^2 = r^4\Delta. \tag{33.10}$$

Этот результат согласуется со свойством «неприводимости» ядра $\theta_{i_1\ldots i_n}$ мультипольного момента, т. е. с обращением в нуль свертки этого тензора по любой паре индексов.

§ 34. Явный вид тензора $\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})$

Формулы (33.6) и (33.7) позволяют обратиться к вопросу о явном виде ядра 2^n-польного момента.

Для ядер мультипольных моментов, соответствующих начальным значениям $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, непосредственный расчет по любой из формул (31.7) или (33.6) дает

$$\left.\begin{array}{c} \theta^{(0)} = 1, \qquad \theta_i = x_i, \qquad \theta_{ij} = 3x_ix_j - r^2\delta_{ij}\,, \\ \theta_{ijk} = 3(5x_ix_jx_k - r^2\,\langle\!\langle\delta_{ij}x_k\rangle\!\rangle), \\ \theta_{ijkl} = 3(35x_ix_jx_kx_l - 5r^2\,\langle\!\langle\delta_{ij}x_kx_l\rangle\!\rangle + r^4\,\langle\!\langle\delta_{ij}\delta_{kl}\rangle\!\rangle), \\ \theta_{ijklm} = 15(63x_ix_jx_kx_lx_m - 7r^2\,\langle\!\langle\delta_{ij}x_kx_lx_m\rangle\!\rangle + r^4\,\langle\!\langle\delta_{ij}\delta_{kl}x_m\rangle\!\rangle). \end{array}\right\} \tag{34.1}$$

Здесь и далее двойными угловыми скобками («кавычками») $\langle\!\langle\ldots\rangle\!\rangle$ обозначена операция специальной симметризации. Она состоит в прибавлении к тензору, заключенному в кавычки, всех получающихся из него несовпадающих тензоров при всевозможных перестановках его индексов. Так например,

$$\langle\!\langle\delta_{ij}x_k\rangle\!\rangle \equiv \delta_{ij}x_k + \delta_{ik}x_j + \delta_{jk}x_i, \qquad \langle\!\langle\delta_{ij}\delta_{kl}\rangle\!\rangle \equiv \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk},$$

$$\langle\!\langle\delta_{ij}x_kx_l\rangle\!\rangle \equiv \delta_{ij}x_kx_l + \delta_{ik}x_jx_l + \delta_{jk}x_ix_l + \delta_{il}x_jx_k + \delta_{jl}x_ix_k + \delta_{kl}x_ix_j.$$

Входящие в (34.1) формулы для тензоров $\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})$ четных и нечетных рангов можно заменить соответственно обобщающими их двумя формулами:

$$\theta_{i_1i_2\ldots i_{2l}} = \sum_{k=0}^{l}(-1)^k(4l-2k-1)!!\,r^{2k}\left\langle\!\!\left\langle \overset{\leftrightarrow}{\delta}{}^{(2k)}\overset{\leftrightarrow}{x}{}^{(2l-2k)}\right\rangle\!\!\right\rangle \qquad (l = 0, 1, \ldots), \tag{34.2}$$

$$\theta_{i_1i_2\ldots i_{2l+1}} = \sum_{k=0}^{l}(-1)^k(4l-2k+1)!!\,r^{2k}\left\langle\!\!\left\langle \overset{\leftrightarrow}{\delta}{}^{(2k)}\overset{\leftrightarrow}{x}{}^{(2l-2k+1)}\right\rangle\!\!\right\rangle \qquad (l = 0, 1, \ldots), \tag{34.3}$$

где для сокращения записи используется временное обозначение

$$\overset{\leftrightarrow}{\delta}{}^{(2p)}\overset{\leftrightarrow}{x}{}^{(q)} \equiv \delta_{i_1i_2}\delta_{i_3i_4}\cdots\delta_{i_{2p-1}i_{2p}}x_{i_{2p+1}}x_{i_{2p+2}}\cdots x_{i_{2p+q}}. \tag{34.4}$$

Нетрудно убедиться, что (34.2) и (34.3) в свою очередь можно заменить одной формулой

$$\theta_{i_1\ldots i_n} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k(2n-2k-1)!!\,r^{2k}\,\langle\!\langle\delta_{i_1i_2}\cdots\delta_{i_{2k-1}i_{2k}}x_{i_{2k+1}}\cdots x_{i_n}\rangle\!\rangle\,, \tag{34.5}$$

не зависящей от четности тензорного ранга. Здесь $[A]$ — целая часть числа A. Заметим попутно, что сумма $\left\langle\!\!\left\langle \overset{\leftrightarrow}{\delta}{}^{(2p)} \overset{\leftrightarrow}{x}{}^{(q)} \right\rangle\!\!\right\rangle$ содержит, очевидно, $\dfrac{(2p+q)!}{2^p\,p\,!\,q!}$ слагаемых.

Наша задача — доказать, что формула (34.5) верна для произвольных натуральных чисел n, а не только для примеров, составляющих набор (34.1). Сделаем это [460], используя *математическую индукцию.*

Будем считать, что (34.5) справедлива для тензора предыдущего ранга, т. е.

$$\theta_{i_1\ldots i_{n-1}} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k (2n-2k-3)!!\, r^{2k} \left\langle\!\!\left\langle \overset{\leftrightarrow}{\delta}{}^{(2k)} \overset{\leftrightarrow}{x}{}^{(n-1-2k)} \right\rangle\!\!\right\rangle, \tag{34.6}$$

и прямым вычислением покажем, что воздействие на (34.6) оператора $\widehat{D}_{i_n}$ приводит к (34.5), как это и должно быть в соответствии с (33.8).

Оператор $\widehat{D}_{i_n}$ удобно представить как сумму двух слагаемых

$$\widehat{D}_{i_n} = \widehat{D}^{(1)}_{i_n} + \widehat{D}^{(2)}_{i_n}, \tag{34.7}$$

где

$$\widehat{D}^{(1)}_{i_n} = x_{i_n}\left(1 + 2\,x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right), \qquad \widehat{D}^{(2)}_{i_n} = -\,r^2\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}. \tag{34.8}$$

Применение $\widehat{D}^{(1)}_{i_n}$ дает

$$\begin{aligned}\widehat{D}^{(1)}_{i_n}\,\theta_{i_1\ldots i_{n-1}} &= (2n-1)!!\,x_{i_1}\cdots x_{i_n} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k (2n-1)(2n-2k-3)!!\, r^{2k} x_{i_n} \left\langle\!\!\left\langle \overset{\leftrightarrow}{\delta}{}^{(2k)} \overset{\leftrightarrow}{x}{}^{(n-1-2k)} \right\rangle\!\!\right\rangle,\end{aligned} \tag{34.9}$$

где первое слагаемое суммы по k представлено самостоятельно. Результат воздействия $\widehat{D}^{(2)}_{i_n}$ есть

$$\begin{aligned}\widehat{D}^{(2)}_{i_n}\,\theta_{i_1\ldots i_{n-1}} &= \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^{k+1} 2k(2n-2k-3)!!\, r^{2k} x_{i_n} \left\langle\!\!\left\langle \overset{\leftrightarrow}{\delta}{}^{(2k)} \overset{\leftrightarrow}{x}{}^{(n-1-2k)} \right\rangle\!\!\right\rangle + \\ &+ \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^{k+1}(2n-2k-3)!!\, r^{2k+2} \left\langle\!\!\left\langle \delta_{i_1 i_2}\cdots\delta_{i_{2k-1}i_{2k}}\delta_{i_{2k+1}\boldsymbol{i_n}} x_{i_{2k+2}}\cdots x_{i_{n-1}} \right\rangle\!\!\right\rangle.\end{aligned} \tag{34.10}$$

Вторая сумма по k в (34.10) возникла в результате дифференцирования по x_{i_n} произведения координат, заключенных в скобки-кавычки выражения (34.6). Поэтому на индекс i_n во второй сумме в (34.10) — он выделен полужирным шрифтом — операция симметризации $\langle\!\langle\ldots\rangle\!\rangle$ не распространяется. Это означает, что индекса i_n у координат внутри скобок-кавычек во второй сумме быть не может.

Складывая (34.9) и (34.10) и одновременно заменяя во второй сумме (34.10) индекс суммирования $k \to k-1$, получаем

$$\begin{aligned}\widehat{D}_{i_n}\,\theta_{i_1\ldots i_{n-1}} = (2n-1)!!\,x_{i_1}\cdots x_{i_n} + \\ + \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k(2n-2k-1)!!\,r^{2k}x_{i_n}\left\langle\!\!\left\langle \overset{\leftrightarrow}{\delta}^{(2k)}\overset{\leftrightarrow}{x}^{(n-1-2k)}\right\rangle\!\!\right\rangle + \\ + \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}(-1)^k(2n-2k-1)!!\,r^{2k}\langle\!\langle\delta_{i_1i_2}\cdots\delta_{i_{2k-3}i_{2k-2}}\delta_{i_{2k-1}\boldsymbol{i_n}}x_{i_{2k}}\cdots x_{i_{n-1}}\rangle\!\rangle\,. \quad (34.11)\end{aligned}$$

Заключительную часть доказательства удобно проводить, рассматривая случаи нечетных и четных n по отдельности.

Пусть $n = 2l+1$. Заметим, что в этом случае в сумме (34.6) последний член не содержит координат внутри скобок-кавычек. Его дифференцирование по координате приводит, следовательно, к нулю. Поэтому реальный верхний предел суммирования во второй сумме в (34.10) (а значит, и в последней сумме в (34.11)) на единицу меньше указанного. Таким образом, из (34.11) находим

$$\begin{aligned}\widehat{D}_{i_{2l+1}}\,\theta_{i_1\ldots i_{2l}} = (4l+1)!!\,x_{i_1}\cdots x_{i_{2l+1}} + \\ + \sum_{k=1}^{l}(-1)^k(4l-2k+1)!!\,r^{2k}x_{i_{2l+1}}\left\langle\!\!\left\langle \overset{\leftrightarrow}{\delta}^{(2k)}\overset{\leftrightarrow}{x}^{(2l-2k)}\right\rangle\!\!\right\rangle + \\ + \sum_{k=1}^{l}(-1)^k(4l-2k+1)!!\,r^{2k}\langle\!\langle\delta_{i_1i_2}\cdots\delta_{i_{2k-3}i_{2k-2}}\delta_{i_{2k-1}\boldsymbol{i_{2l+1}}}x_{i_{2k}}\cdots x_{i_{2l}}\rangle\!\rangle\,. \\ (34.12)\end{aligned}$$

Внесение величины $x_{i_{2l+1}}$ в первой сумме в (34.12) внутрь скобок-кавычек[1] и последующее объединение первой и второй сумм позволяет переписать результат в виде

$$\begin{aligned}\widehat{D}_{i_{2l+1}}\,\theta_{i_1\ldots i_{2l}} = (4l+1)!!\,x_{i_1}\cdots x_{i_{2l+1}} + \\ + \sum_{k=1}^{l}(-1)^k(4l-2k+1)!!\,r^{2k}\left\langle\!\!\left\langle \overset{\leftrightarrow}{\delta}^{(2k)}\overset{\leftrightarrow}{x}^{(2l-2k+1)}\right\rangle\!\!\right\rangle, \quad (34.13)\end{aligned}$$

в котором выделение индекса i_{2l+1} утратило смысл, а сама формула (34.13) отличается от (34.3) лишь тем, что слагаемое суммы (34.3), соответствующее $k=0$, записано в (34.13) отдельно. Таким образом, формула (34.3) доказана.

[1] При этом, разумеется, процедура симметризации на индекс $\boldsymbol{i_{2l+1}}$ не должна распространяться, так что в первой сумме в (34.12) этот — выделенный — индекс у символов Кронекера не возникнет.

Пусть теперь $n = 2l$. Перепишем (34.11), причем в последней сумме последнее слагаемое представим самостоятельно. Будем иметь

$$\begin{aligned}
&\widehat{D}_{i_{2l}}\,\theta_{i_1\ldots i_{2l-1}} = \\
&= (4l-1)!!\,x_{i_1}\cdots x_{i_{2l}} + \sum_{k=1}^{l-1}(-1)^k(4l-2k-1)!!\,r^{2k}x_{i_{2l}}\left\langle\!\!\left\langle \overleftrightarrow{\delta}^{(2k)}\overleftrightarrow{x}^{(2l-1-2k)}\right\rangle\!\!\right\rangle + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{l-1}(-1)^k(4l-2k-1)!!\,r^{2k}\left\langle\!\left\langle \delta_{i_1i_2}\cdots\delta_{i_{2k-3}i_{2k-2}}\delta_{i_{2k-1}\boldsymbol{i_{2l}}}x_{i_{2k}}\cdots x_{i_{2l-1}}\right\rangle\!\right\rangle + \\
&\qquad + (-1)^l\,(2l-1)!!\,r^{2l}\left\langle\!\left\langle \delta_{i_1i_2}\cdots\delta_{i_{2k-3}i_{2k-2}}\delta_{i_{2k-1}i_{2l}}\right\rangle\!\right\rangle. \qquad (34.14)
\end{aligned}$$

Остающиеся действия, в точности аналогичные нечетному случаю, сводятся к внесению координаты $x_{i_{2l}}$ в первой сумме в (34.14) внутрь скобок-кавычек, объединению первой и второй сумм, в результате которого операция симметризации распространяется и на индекс i_{2l}, и констатации совпадения полученного с формулой (34.2). Этим завершается доказательство общей формулы (34.5).

Как явствует из формулы (34.5) (или из ее частных случаев (34.13) и (34.14)),

$$\left.\begin{array}{l}\textit{тензор } \theta_{i_1\ldots i_n} \textit{ есть сумма, слагаемые которой пред-}\\ \textit{ставляют собой произведения координат и символов}\\ \textit{Кронекера, за исключением одного (первого) слага-}\\ \textit{емого, вообще не содержащего символов Кронекера.}\end{array}\right\} \qquad (34.15)$$

Ниже дается таблица декартовых компонент ядер мультипольных моментов, соответствующих представленным в (34.1).

Таблица декартовых компонент тензора $\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})$

$$\theta^{(0)} = 1; \qquad \theta_x = x; \qquad \theta_{xx} = 2x^2 - y^2 - z^2, \qquad \theta_{xy} = 3xy;$$

$$\theta_{xxx} = 3x\left(2x^2 - 3y^2 - 3z^2\right), \qquad \theta_{xxy} = 3y\left(x^2 - y^2 - z^2\right), \qquad \theta_{xyz} = 15xyz;$$

$$\theta_{xxxx} = 3\left(8x^4 + 3y^4 + 3z^4 - 24x^2y^2 - 24x^2z^2 + 6y^2z^2\right),$$

$$\theta_{xxyy} = -3\left(4x^4 + 4y^4 - z^4 - 27x^2y^2 + 3x^2z^2 + 3y^2z^2\right),$$

$$\theta_{xxxy} = 15xy\left(4x^2 - 3y^2 - 3z^2\right), \qquad \theta_{xxyz} = 15yz\left(x^2 - y^2 - z^2\right);$$

$$\theta_{xxxxx} = 15x\left(8x^4 + 15y^4 + 15z^4 - 40x^2y^2 - 40x^2z^2 + 30y^2z^2\right),$$

$$\theta_{xxxyy} = -15x\left(4x^4 + 18y^4 - 3z^4 - 41x^2y^2 + x^2z^2 + 15y^2z^2\right),$$

$$\theta_{xxxxy} = 45y\left(8x^4 + y^4 + z^4 - 12x^2y^2 - 12x^2z^2 + 2y^2z^2\right),$$

$$\theta_{xxxyz} = 315xyz\left(2x^2 - y^2 - z^2\right).$$

§ 35. Мультипольные моменты и «моменты инерции»

Прежде чем двигаться дальше, напомним важные для дальнейшего уже установленные результаты. Речь идет о формуле (31.6)

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x'_{i_1}\cdots x'_{i_n}}{n!\,r^{2n+1}}\,\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})\,, \tag{35.1}$$

где в соответствии с (34.5)

$$\theta_{i_1\ldots i_n}=(2n-1)!!\,x_{i_1}\cdots x_{i_n}+\\ +\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k(2n-2k-1)!!\,r^{2k}\left\langle\!\!\left\langle \overleftrightarrow{\delta}^{(2k)}\overleftrightarrow{x}^{(n-2k)}\right\rangle\!\!\right\rangle, \tag{35.2}$$

причем тензор $\theta_{i_1\ldots i_n}$ — неприводим, т. е. его свертка по любой паре индексов равна нулю.

Формула (35.2), записанная для штрихованных координат, позволяет придать разложению (35.1) симметричную форму [458]

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r}')\,\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})}{n!\,(2n-1)!!\,r^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n)!}\,\frac{\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r}')\,\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})}{r^{2n+1}}\,. \tag{35.3}$$

Здесь учтено, что, согласно (34.15), все слагаемые выражения $\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r}')$, кроме первого, содержат сворачиваемые с $\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})$ символы Кронекера и что $\delta_{i_1 i_2}\theta_{i_1 i_2\ldots i_n}(\mathbf{r})$ эквивалентно свертке $\theta_{jji_3\ldots i_n}(\mathbf{r})$, которая равна нулю.

Основываясь на тех же соображениях, можно теперь вместо $\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})$ оставить в (35.3) лишь первое (не содержащее символов Кронекера) слагаемое, даваемое (35.2). Так что окончательно имеем

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r}')}{n!\,r^{2n+1}}\,x_{i_1}\cdots x_{i_n}\,. \tag{35.4}$$

Нам осталось подставить (35.4) в любую из формул (31.1), (31.2), чтобы получить универсальное выражение

$$\left.\begin{matrix}\Phi(\mathbf{r})\\ \\ \Psi(\mathbf{r})\end{matrix}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\;Q_{i_1\ldots i_n}\;\frac{x_{i_1}\cdots x_{i_n}}{r^{2n+1}}, \tag{35.5}$$

где

$$Q_{i_1\ldots i_n}=\begin{cases}\displaystyle\int \varrho(\mathbf{r})\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})\,dV,\\ \\ \displaystyle\int \sigma(\mathbf{r})\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})\,dS\end{cases}\qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{35.6}$$

соответственно[1].

Разложение (35.5) — это и есть мультипольное разложение потенциала системы электрических зарядов, а формулы (35.6) и та, что дана в примечании, — это определения мультипольных моментов системы зарядов. Эти определения проясняют, в частности, почему тензор $\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})$ был назван в § 31 *ядром* 2^n*-польного момента.*

Из этих же определений следует, что будучи симметричным и неприводимым тензор $\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})$ наделяет аналогичными свойствами и тензор мультипольного момента (речь идет именно о тензорах, т. е. когда ранг $n \geqslant 2$).

Если в формулы (35.6) подставить сумму (35.2), то будем иметь

$$Q_{i_1\ldots i_n} = (2n-1)!!\, I_{i_1\ldots i_n} + \sum_{s=1}^{[n/2]} \langle\langle \delta_{i_1 i_2} \ldots \delta_{i_{2s-1} i_{2s}} K_{i_{2s+1}\ldots i_n} \rangle\rangle\,, \tag{35.7}$$

где

$$I_{i_1\ldots i_n} = \begin{cases} \displaystyle\int \varrho(\mathbf{r}) x_{i_1} \cdots x_{i_n}\, dV, \\ \displaystyle\int \sigma(\mathbf{r}) x_{i_1} \cdots x_{i_n}\, dS \end{cases} \tag{35.8}$$

— «моменты инерции» тела, соответствующие плотностям ϱ и σ. Если эти плотности трактовать как относящиеся к массам (а не зарядам), то трехиндексные компоненты тензоров (35.8), называемые «моментами инерции n-го порядка», используются [456] в разложении потенциала по степеням R^{-1}. Легко устанавливаемая формула, определяющая тензор $\overleftrightarrow{K}$, нам не понадобится.

Каждое слагаемое, стоящее в (35.7) под знаком симметризации в сумме по s, содержит хотя бы один символ Кронекера δ_{ij}. Поскольку свертка неприводимого тензора с тензором δ_{ij} по обоим индексам последнего равна нулю, то при полной свертке тензора $Q_{i_1\ldots i_n}$ с произвольным неприводимым тензором $\Gamma_{i_1\ldots i_n}$ из (35.7) следует полезное равенство

$$Q_{i_1\ldots i_n}\Gamma_{i_1\ldots i_n} = (2n-1)!! I_{i_1\ldots i_n}\Gamma_{i_1\ldots i_n}\,, \tag{35.9}$$

связывающее моменты $\overleftrightarrow{Q}$ и $\overleftrightarrow{I}$ одинакового ранга одной и той же произвольной системы зарядов. Подразумевается произвольность как пространственной геометрии области зарядов, так и вида функций, характеризующих их плотности ϱ и σ.

§ 36. Тензоры $\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})$ и $Q_{i_1\ldots i_n}$ в трехиндексной записи

Если тензор *симметричен* по всем индексам, то, очевидно, что для обозначения любой его компоненты можно использовать запись, в которой сна-

[1] Заметим, что в случае не рассматриваемой в данной книге *дискретной* системы точечных зарядов электростатический потенциал последней дается той же правой частью (35.5), однако теперь интегралы (35.6) заменяются суммой по всем зарядам

$$Q_{i_1\ldots i_n} = \sum_a e_a \theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r}_a),$$

где e_a — величина a-го заряда, а $\mathbf{r}_a$ — его радиус-вектор.

чала представлены только индексы x, затем только индексы y, а в конце только индексы z. Именно такое написание симметричных тензоров удобно преобразовать в трехиндексную запись. В чем она заключается, понятно из примера:

$$\theta_{klm} \equiv \theta_{\underbrace{x\ldots x}_{k\ \text{раз}}\ \underbrace{y\ldots y}_{l\ \text{раз}}\ \underbrace{z\ldots z}_{m\ \text{раз}}}, \tag{36.1}$$

при этом сумма

$$k+l+m=n \tag{36.2}$$

указывает ранг тензора.

Трехиндексная запись операции свертки произвольного симметричного тензора $\overleftrightarrow{\alpha}^{(i+j+k+2)}$ ранга $i+j+k+2$ имеет вид

$$\alpha_{i+2,j,k} + \alpha_{i,j+2,k} + \alpha_{i,j,k+2}. \tag{36.3}$$

Отметим, что у всех трех компонент тензора $\overleftrightarrow{\alpha}$, участвующих в свертке, совпадает четность первых (аналогично — вторых или третьих) индексов трехиндексной записи.

Тензоры $\theta_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})$ и $Q_{i_1\ldots i_n}$ неприводимы. Поэтому

$$\theta_{i+2,j,k} + \theta_{i,j+2,k} + \theta_{i,j,k+2} = 0 \qquad (i+j+k+2=n), \tag{36.4}$$

как и для любого симметричного неприводимого тензора.

Обратимся к формуле (33.6), которая в трехиндексном написании приобретает вид

$$\theta_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) = \left(\widehat{D}_x\right)^{\alpha}\left(\widehat{D}_y\right)^{\beta}\left(\widehat{D}_z\right)^{\gamma}\cdot 1 \qquad (\alpha+\beta+\gamma=n). \tag{36.5}$$

Отметим, что исходная функция (единица), на которую воздействуют компоненты векторного оператора $\widehat{D}_j$, является четной функцией каждой из декартовых координат. С другой стороны, если на произвольную функцию $f(x,y,z)$, имеющую определенную (с точки зрения четности) зависимость от каждой из декартовых координат x, y, z, однократно подействовать какой-либо декартовой компонентой векторного оператора $\widehat{\mathbf{D}}$, например, соответствующей x-направлению

$$\widehat{D}_x = 2x\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) - r^2\frac{\partial}{\partial x} + x, \tag{36.6}$$

то это приведет к тому, что у результирующей функции по сравнению с $f(x,y,z)$ изменится четность по координате x и сохранится четность по координатам y и z. Из сказанного следует, что

$$\left.\begin{array}{l}\textit{четность числа } \nu_i \text{ у произвольной компоненты тензора}\\ \theta_{\nu_1\nu_2\nu_3}(x_1,x_2,x_3) \text{ в трехиндексной записи всегда совпада-}\\ \text{ет с } \textit{четностью зависимости функции } \theta_{\nu_1\nu_2\nu_3}(x_1,x_2,x_3)\\ \textit{от соответствующей координаты } x_i, \text{ где } i=1,\ 2,\ 3.\end{array}\right\} \tag{36.7}$$

Несколько иначе говоря, компонента тензора $\theta_{i_1\ldots i_l}(x,y,z)$ является четной или нечетной функцией x соответственно тому, четное или нечетное число раз среди индексов $i_1, \ldots, i_l$ встречается индекс x. Понятно, что сказанное применимо и к y, и к z.

Иллюстрацией этого результата служат примеры, приведенные в таблице, которой заканчивается § 34. Как мы увидим далее, использование утверждения (36.7) существенно упрощает аналитическое рассмотрение краевых задач о так называемых *адекватных*, или *эквивалентных, источниках.*

Отметим также, что в трехиндексной записи выражения (35.6) преобразуются в

$$Q_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} \displaystyle\int \varrho(\mathbf{r})\theta_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})\,dV, \\ \\ \displaystyle\int \sigma(\mathbf{r})\theta_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})\,dS \end{cases} \qquad (\alpha+\beta+\gamma=n). \tag{36.8}$$

Рассмотрим теперь свернутое по всем индексам произведение двух совершенно симметричных тензоров, например,

$$(\overleftrightarrow{\alpha}^{(\nu)}\overleftrightarrow{x}^{(\nu)}) \equiv \alpha_{i_1\ldots i_\nu}\, x_{i_1} \cdots x_{i_\nu}\,. \tag{36.9}$$

где каждый из индексов i_n пробегает значения 1, 2, 3 или x, y, z. Произвольное слагаемое суммы (36.9), отвечающее некоторой конкретной реализации совокупности индексов $i_1, \ldots, i_\nu$, имеет в трехиндексной записи вид

$$\alpha_{klm}\, x^k y^l z^m \qquad (k+l+m=\nu). \tag{36.10}$$

При фиксированных k и l число различных наборов индексов $i_1, \ldots, i_\nu$ в сумме (36.9), приводящих в силу симметрии сворачиваемых тензоров к выражению (36.10) (иначе говоря, число подобных членов вида (36.10) в сумме (36.9)) равно $\dfrac{\nu!}{k!\,l!\,m!}$. Поэтому

$$\alpha_{i_1\ldots i_\nu}\, x_{i_1} \cdots x_{i_\nu} = \sum_{k+l+m=\nu} \frac{\nu\,!}{k\,!\,l\,!\,m\,!}\,\alpha_{k\,l\,m}\, x^k y^l z^m\,. \tag{36.11}$$

Формула (36.11) играет роль своеобразного транслятора для перехода от обычной тензорной записи к трехиндексной и наоборот. В частности, мультипольное разложение в трехиндексной записи приобретает вид тройной суммы

$$\left.\begin{matrix} \Phi(\mathbf{r}) \\ \\ \Psi(\mathbf{r}) \end{matrix}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,r^{2n+1}} \sum_{k+l+m=n} \frac{n\,!}{k\,!\,l\,!\,m\,!}\, Q_{k\,l\,m}\, x^k y^l z^m. \tag{36.12}$$

§ 37. Мультипольное разложение потенциала шара

Завершая главу, рассмотрим простейший частный случай, иллюстрирующий мультипольное разложение потенциала в условиях, когда плотность заряда (объемного или поверхностного) является полиномиальной функцией декартовых координат, а сам заряд заполняет объем или распределен по поверхности шара.

Пусть уравнение границы S шара имеет вид

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \tag{37.1}$$

а объемная плотность заряда равна[1]

$$\varrho_L = P_L(x,y,z), \tag{37.2}$$

где $P_L(x,y,z)$ — произвольный многочлен степени L.

Как известно (см, например, [146], п. 96), такой многочлен можно разложить по *шаровым функциям.* В данной книге шаровыми (степени ν) функциями $Y_\nu(x,y,z)$ названы однородные гармонические полиномы. Указанное разложение имеет вид

$$P_L(x,y,z) = \sum_{k=0}^{L}\sum_{l=0}^{[k/2]} r^{2l}\, Y_{k-2l}(x,y,z), \tag{37.3}$$

где $[K]$ — целая часть числа K и $r^2=x^2+y^2+z^2$.

Вычислим (в трехиндексной записи) электрический 2^m-польный момент для заряда, распределенного согласно (37.2) внутри шара (37.1), для значений

$$m > L. \tag{37.4}$$

В § 31 было показано, что любая компонента ядра $\theta_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})$ 2^m-польного электрического момента является шаровой функцией $Y_m(x,y,z)$ степени $m=\alpha+\beta+\gamma$. Таким образом, в соответствии с верхней формулой (36.8) имеем

$$Q^{(\varrho)}_{\alpha\beta\gamma} = \int \varrho_L(\mathbf{r})\theta_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})\, dV = \sum_{k=0}^{L}\sum_{l=0}^{[k/2]} \int r^{2l} Y_{k-2l}(x,y,z)\, Y_m(x,y,z)\, dV. \tag{37.5}$$

Если с помощью замены переменных

$$x = a\,\tilde{x}, \quad y = a\,\tilde{y}, \quad z = a\,\tilde{z}, \tag{37.6}$$

«обезразмерить» радиус-вектор и, введя единичный вектор

$$\tilde{\mathbf{n}} = \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{\tilde{r}}, \tag{37.7}$$

перейти в (37.5) к интегрированию по объему шара единичного радиуса, при этом $dV = dr\, dS = a^3\tilde{r}^2 d\tilde{r}\, d\Omega$, то будем иметь

$$Q^{(\varrho)}_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{k=0}^{L}\sum_{l=0}^{[k/2]} a^{m+k+3} \int_0^1 \tilde{r}^{m+k+2} d\tilde{r} \oint Y_{k-2l}(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,\tilde{n}_z)\, Y_m(\tilde{n}_x,\tilde{n}_y,\tilde{n}_z)\, d\Omega. \tag{37.8}$$

Заметим, что шаровые функции, рассматриваемые на единичной сфере, называются *сферическими функциями*, а интеграл от их произведения по поверхности сферы (или, что в нашем случае то же самое, по всему

[1] Случай поверхностного заряда обсуждается ниже.

телесному углу) в соответствии с формулой (см., например, [146], п. 93), установленной Лапласом, равен

$$\oint Y_k\, Y_l\, d\Omega = 0 \qquad \text{при} \quad k \neq l. \tag{37.9}$$

В силу условия (37.4) и условия ортогональности (37.9) сферических функций все интегралы по поверхности единичной сферы, входящие в сумму (37.8), равны нулю. Это означает, что бесконечное число мультипольных моментов шара, ранг которых превышает степень полинома, характеризующего плотность заряда, обращается в нуль. Иначе говоря, мультипольное разложение потенциала шара с полиномиальной (степени L) плотностью заряда содержит *конечное* число слагаемых, принимая вместо (35.5) вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{L} \frac{1}{n!}\; Q_{i_1 \ldots i_n}\; \frac{x_{i_1} \cdots x_{i_n}}{r^{2n+1}}. \tag{37.10}$$

Случай, когда заряд на сфере (37.1) задан поверхностной плотностью

$$\sigma_L = T_L(x,y,z) = \sum_{k=0}^{L} \sum_{l=0}^{[k/2]} a^{2l}\, Y_{k-2l}(x,y,z), \tag{37.11}$$

где $T_L(x,y,z)$ — произвольный многочлен степени L, рассматривается схоже со случаем объемного заряда. Так, в соответствии с нижней формулой (36.8) имеем

$$Q^{(\sigma)}_{\alpha\beta\gamma} = \oint \sigma_L(\mathbf{r}) \theta_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})\, dS = \sum_{k=0}^{L} \sum_{l=0}^{[k/2]} \oint a^{2l} Y_{k-2l}(x,y,z)\, Y_m(x,y,z) dS, \tag{37.12}$$

где $m = \alpha + \beta + \gamma$. Для поверхности шара замена переменных (37.6) эквивалентна

$$x = a\, \tilde{n}_x, \quad y = a\, \tilde{n}_y, \quad z = a\, \tilde{n}_z \tag{37.13}$$

и преобразует (37.12) к виду

$$Q^{(\sigma)}_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{k=0}^{L} \sum_{l=0}^{[k/2]} a^{m+k+2} \oint Y_{k-2l}(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, \tilde{n}_z)\, Y_m(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, \tilde{n}_z)\, d\Omega. \tag{37.14}$$

где интегрирование ведется по сфере единичного радиуса. Для $m > L$ все электрические мультипольные моменты в соответствии с (37.9) обращаются в нуль. Следовательно, мультипольное разложение потенциала сферы с полиномиальной (степени L) плотностью поверхностного заряда содержит, как и мультипольное разложение (37.10) потенциала объемного заряда шара, конечное число слагаемых, принимая вид

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{L} \frac{1}{n!}\; Q_{i_1 \ldots i_n}\; \frac{x_{i_1} \cdots x_{i_n}}{r^{2n+1}}. \tag{37.15}$$

Таким образом, формулы (37.10) и (37.15) являют собой модификацию точного представления потенциала полиномиально заряженного шара, справедливую исключительно для внешней по отношению к шару области пространства.

Трехиндексная запись выражений (37.10) и (37.15) дается формулой

$$\left.\begin{array}{c}\Phi(\mathbf{r})\\ \\ \Psi(\mathbf{r})\end{array}\right\} = \sum_{n=0}^{L} \frac{1}{n!\, r^{2n+1}} \sum_{k+l+m=n} \frac{n\,!}{k\,!\, l\,!\, m\,!}\, Q_{k\,l\,m}\, x^k y^l z^m. \tag{37.16}$$

Если объемный (плотности ϱ_L) и поверхностный (плотности σ_L) заряды шара имеют совпадающий набор мультипольных моментов, то, как видно из (37.16), наружные электростатические поля обеих электрических систем совпадают. Для постоянных плотностей ($L = 0$) этот результат известен школьникам.

Глава 7
Мультипольные представления потенциалов эллипсоида и гомеоида

§ 38. Простейшие примеры мультипольных представлений

В предыдущем параграфе было показано, что мультипольное разложение электростатического потенциала шара с полиномиальной объемной или поверхностной плотностью его заряда имеет вид суммы конечного числа слагаемых. В отличие от шара для эллипсоида существование какого-либо мультипольного момента невозможно без сопутствующего существования и всех высших мультипольных моментов, имеющих тензорный ранг такой же четности. Поэтому мультипольное разложение потенциала эллипсоида — это всегда бесконечный ряд.

Возникает вопрос: существует ли такое представление точных формул для внешних потенциалов эллипсоида, порождаемых его *полиномиальными* (объемными и/или поверхностными[1]) плотностями заряда, которое, как и отмеченное выше мультипольное разложение потенциала шара, имеет вид суммы *конечного числа слагаемых*, составленной из произведений компонент мультипольных моментов на некоторые тензорные функции? Может возникнуть и контрвопрос: зачем, уже располагая точными аналитическими выражениями для внешних потенциалов эллипсоида со степенны́ми плотностями объемного и поверхностного заряда, искать новые модификации внешних решений?

Утвердительный ответ на первый вопрос можно дать (пока в предварительной форме), указав несколько простейших конкретных примеров, в которых искомая сумма сводится только к одному слагаемому.

Так, эллипсоид, несущий поверхностный заряд плотности

$$\sigma_{000} = \varrho_0\, p \tag{38.1}$$

[1] Поверхностную плотность заряда σ эллипсоида мы называем полиномиальной, если полиномом является отношение σ/p.

и имеющий, следовательно, полный заряд, равный

$$Q = 4\pi abc\,\varrho_0, \tag{38.2}$$

характеризуется внешним потенциалом (21.17), который с учетом (38.2) можно переписать в виде

$$\Psi_{000}^{(e)} = Q\,\frac{\mathscr{M}_{000}(\xi)}{abc}, \tag{38.3}$$

где ξ — неотрицательный корень кубического (относительно ξ) уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1. \tag{38.4}$$

Аналогичным образом, используя (36.8) и формулу (B.15) приложения, нетрудно феррерсовы потенциалы гомеоида $\Psi_{\alpha\beta\gamma}^{(e)}$, соответствующие поверхностным плотностям

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \varrho_0 \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta} \left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma} p, \tag{38.5}$$

в которых каждый из показателей степени α, β и γ не превосходит единицы, записать с помощью компонент мультипольных моментов. В результате получаем

$$\Psi_{100}^{(e)} = 3\,Q_x\,\frac{\mathscr{M}_{100}(\xi)}{abc}\,x, \tag{38.6}$$

где

$$Q_x = \frac{4\pi}{3}\,a^2bc\,\varrho_0;$$

$$\Psi_{110}^{(e)} = 5\,Q_{xy}\,\frac{\mathscr{M}_{110}(\xi)}{abc}\,xy, \tag{38.7}$$

где

$$Q_{xy} = \frac{4\pi}{5}\,a^2b^2c\,\varrho_0;$$

$$\Psi_{111}^{(e)} = 7Q_{xyz}\,\frac{\mathscr{M}_{111}(\xi)}{abc}\,xyz, \tag{38.8}$$

где

$$Q_{xyz} = \frac{4\pi}{7}\,a^2b^2c^2\varrho_0.$$

Выражения для $\Psi_{010}^{(e)}$, $\Psi_{001}^{(e)}$ и $\Psi_{011}^{(e)}$, $\Psi_{101}^{(e)}$ получаются циклической перестановкой из (38.6) и (38.7) соответственно.

Аналогичного рода одночленные псевдостепенные потенциалы можно написать и для эллиптического диска

$$\frac{x^2}{\tilde a^2} + \frac{y^2}{\tilde b^2} = 1, \tag{38.9}$$

лежащего в плоскости $z = 0$ и несущего заряд плотности (см.(24.4))

$$\sigma_{\alpha,\beta;\,-1}(x,y) = \sigma_0 \left(\frac{x}{\tilde a}\right)^{\alpha} \left(\frac{y}{\tilde b}\right)^{\beta} D^{-1}(x,y)\,, \tag{38.10}$$

где $D = \sqrt{1-x^2/\tilde{a}^2-y^2/\tilde{b}^2}$, а α и β принимают значения 0 или 1.

Беря одночленные выражения для потенциалов эллиптического диска из таблицы интегралов в § 24 и используя формулу (B.18) приложения при вычислении мультипольных моментов, будем иметь

$$\Psi^{(e)}_{00;-1} = Q\,\frac{\mathscr{N}_{000}(\lambda)}{\tilde{a}\tilde{b}}\,, \tag{38.11}$$

где

$$Q = 2\pi\tilde{a}\tilde{b}\,\sigma_0;$$

$$\Psi^{(e)}_{10;-1} = 3Q_x\,\frac{\mathscr{N}_{100}(\lambda)}{\tilde{a}\tilde{b}}\,, \tag{38.12}$$

где

$$Q_x = \frac{2\pi}{3}\,\tilde{a}^2\tilde{b}\,\sigma_0;$$

$$\Psi^{(e)}_{11;-1} = 5\,Q_{xy}\,\frac{\mathscr{N}_{110}(\lambda)}{\tilde{a}\tilde{b}}\;xy, \tag{38.13}$$

где

$$Q_{xy} = \frac{2\pi}{5}\,\tilde{a}^2\tilde{b}^2\,\sigma_0.$$

Здесь λ — эллипсоидальная координата, которая в случае эллиптического диска (в отличие от общего случая трехосного эллипсоида (см. § 5)) определяется как положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{\tilde{a}^2+\lambda} + \frac{y^2}{\tilde{b}^2+\lambda} + \frac{z^2}{\lambda} = 1\,. \tag{38.14}$$

Выражение для $\Psi^{(e)}_{01;-1}$ получается из (38.12) с помощью взаимной перестановки $x \leftrightarrow y$.

Рассмотренные примеры указывают на существование мультипольных представлений потенциалов, создаваемых эллипсоидальными распределениями зарядов. Прежде чем отвечать на второй вопрос (о целесообразности такого рода представлений потенциалов), рассмотрим входящие в формулы (38.3), (38.6)–(38.8) отношения вида $\dfrac{\mathscr{M}_{lmn}(\xi)}{abc}$, уже обсуждавшиеся выше (см. (4.4)). Они даются интегралом

$$\frac{\mathscr{M}_{lmn}(\xi)}{abc} = \frac{\Pi_{lmn}}{2}\int\limits_{\xi}^{\infty}\frac{du}{(a^2+u)^{l+\frac{1}{2}}\,(b^2+u)^{m+\frac{1}{2}}\,(c^2+u)^{n+\frac{1}{2}}}\,. \tag{38.15}$$

Если зафиксировать точку наблюдения (при этом ее эллипсоидальная координата ξ относительно базисного эллипсоида

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 \tag{38.16}$$

остается постоянной), а полуоси a, b, c подчинить равенствам

$$a^2 = \breve{a}^2 + \zeta, \qquad b^2 = \breve{b}^2 + \zeta, \qquad c^2 = \breve{c}^2 + \zeta, \tag{38.17}$$

где ζ — параметр, позволяющий наряду с (38.16) рассматривать в качестве базисных софокусные эллипсоиды с полуосями $\breve{a}$, $\breve{b}$, $\breve{c}$, то интеграл (38.15) приобретает вид

$$\frac{\mathscr{M}_{lmn}(\xi)}{abc} = \frac{\Pi_{lmn}}{2}\int\limits_{\xi}^{\infty}\frac{du}{(\breve{a}^2+\zeta+u)^{l+\frac{1}{2}}\,(\breve{b}^2+\zeta+u)^{m+\frac{1}{2}}\,(\breve{c}^2+\zeta+u)^{n+\frac{1}{2}}}\,. \tag{38.18}$$

Замена переменной интегрирования $u'=u+\zeta$ позволяет переписать (38.18) в форме равенства

$$\frac{\mathscr{M}_{lmn}(\xi)}{abc} = \frac{\mathscr{M}_{lmn}(\theta)}{\breve{a}\breve{b}\breve{c}}, \tag{38.19}$$

где

$$\theta = \xi + \zeta. \tag{38.20}$$

Заметим, что (38.17) и (38.20) изменяют и уравнение границы координатного эллипсоида (38.4), которое принимает теперь вид

$$\frac{x^2}{\breve{a}^2+\theta} + \frac{y^2}{\breve{b}^2+\theta} + \frac{z^2}{\breve{c}^2+\theta} = 1, \tag{38.21}$$

причем θ — эллипсоидальная координата прежней точки наблюдения относительно нового базисного эллипсоида

$$x^2/\breve{a}^2 + y^2/\breve{b}^2 + z^2/\breve{c}^2 = 1, \tag{38.22}$$

софокусного поверхности (38.16).

Заметим также, что если $a > b > c$ и, следовательно, $\breve{a} > \breve{b} > \breve{c}$, то при $\zeta = c^2$ эллипсоид (38.22) вырождается в предельный случай семейства софокусных поверхностей — эллиптический диск (38.9), полуоси которого $\tilde{a}=\sqrt{a^2-c^2}$ и $\tilde{b}=\sqrt{b^2-c^2}$. При этом равенство (38.19) можно расширить:

$$\frac{\mathscr{M}_{lmn}(\xi)}{abc} = \frac{\mathscr{M}_{lmn}(\theta)}{\breve{a}\breve{b}\breve{c}} = \frac{\mathscr{N}_{lmn}(\lambda)}{\tilde{a}\tilde{b}}\,. \tag{38.23}$$

Здесь

$$\mathscr{N}_{lmn}(\lambda) = \Pi_{lmn}\frac{\tilde{a}\tilde{b}}{2}\int\limits_{\xi}^{\infty}(\tilde{a}^2+u)^{-l-\frac{1}{2}}\,(\tilde{b}^2+u)^{-m-\frac{1}{2}}\,u^{-n-\frac{1}{2}}\,du$$

— внешний потенциальный фактор эллиптического диска (38.9), а λ — эллипсоидальная координата (см. (38.14)) все той же точки наблюдения, но теперь относительно эллиптического диска (38.9).

Таким образом,

$$\left.\begin{array}{c}\textit{для фиксированной точки наблюдения отношение}\\ \mathscr{M}_{lmn}(\xi)/\,abc\ \textit{является инвариантом при переходе}\\ \textit{от одной эллипсоидальной поверхности к любой}\\ \textit{другой, софокусной первой, включая предельный}\\ \textit{случай этого семейства — эллиптический диск.}\end{array}\right\} \tag{38.24}$$

Эта инвариантность переносится, естественно, и на мультипольные представления потенциалов (38.3), (38.6)–(38.8) гомеоида. Если к тому же принять во внимание, что и сами аддитивные интегральные характеристики распределений заряда, каковыми являются мультипольные моменты, обладают свойством «вбирать» в себя всю «конкретику» (например, коэффициенты полинома, характеризующего плотность заряда), то мультипольные представления потенциалов приобретают статус унифицированной обобщенной записи точных решений в области пространства, внешней по отношению к системе источников. В этом и усматривается привлекательность мультипольного представления потенциалов (это и ответ на контрвопрос, заданный в начале параграфа).

Все примеры мультипольных представлений, которые были даны в этом параграфе, относились только к потенциалам простого слоя. Аналогичные примеры нетрудно построить и для потенциалов эллипсоида, обусловленных объемным зарядом. Для краткости мы ограничимся лишь одним примером — мультипольным представлением потенциала снаружи однородно (с плотностью $\varrho = \varrho_0$) заряженного эллипсоида (38.16), которое сразу следует из (10.11) и имеет вид

$$\Phi_{000}^{(e)}(\mathbf{r}) = \frac{3}{2}\,Q\left\{\frac{\mathscr{M}_{000}(\xi)}{abc} - \frac{\mathscr{M}_{100}(\xi)}{abc}\,x^2 - \frac{\mathscr{M}_{010}(\xi)}{abc}\,y^2 - \frac{\mathscr{M}_{001}(\xi)}{abc}\,z^2\right\}, \quad (38.25)$$

где полный заряд

$$Q = \frac{4}{3}\,\pi abc\varrho_0.$$

§ 39. Парциальные плотности заряда и их потенциалы

Переходя к изложению теории мультипольного представления потенциалов эллипсоида [460–462, 525], укажем, что «кирпичиками», из которых она строится, служат потенциалы, создаваемые так называемыми «парциальными распределениями» плотности заряда. Специфические свойства парциальных плотностей проявляются в характеризующих их мультипольных моментах. Специфические свойства парциальных потенциалов связаны с характеризующими их эталонными тензорными функциями. Совместное использование указанных свойств ведет в конечном счете к мультипольному представлению потенциала.

Как обычно, будем обозначать посредством Φ потенциал объемного заряда, характеризуемого плотностью ϱ, а буквой Ψ — потенциал простого слоя, соответствующий поверхностной плотности σ. Таким образом,

$$\Phi = \int \frac{\varrho}{R}\,dV, \quad (39.1)$$

$$\Psi = \int \frac{\sigma}{R}\,dS, \quad (39.2)$$

где R — расстояние от элемента интегрирования dV или dS до точки наблюдения. Областями интегрирования являются в (39.1) объем эллипсоида с полуосями a, b, c, а в (39.2) его поверхность, уравнение которой имеет вид

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1. \quad (39.3)$$

Поверхностную плотность заряда удобно писать в форме

$$\sigma = \varrho\, p, \tag{39.4}$$

предусматривающей возможность сопоставления с источниками объемного потенциала. Здесь $p = \left\langle x^2/a^4 \right\rangle^{-1/2}$ — длина перпендикуляра, опущенного из центра эллипсоида на плоскость, касательную к элементу dS. Угловыми скобками обозначается сумма трех членов циклической перестановки. Далее будут встречаться различные конкретные виды функции ϱ, для обозначения которых букву ϱ мы будем снабжать определенными индексами. Условимся такими же индексами маркировать соответствующие плотность заряда σ и потенциалы Φ и Ψ.

Пусть ϱ имеет специальный вид

$$\varrho^{(\nu)} = Y_\nu \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c} \right), \tag{39.5}$$

где $Y_\nu(x, y, z)$ — однородный гармонический полином (шаровая функция) степени ν. Объемную $\varrho^{(\nu)}$ и поверхностную $\sigma^{(\nu)}$ плотности заряда и их потенциалы $\Phi^{(\nu)}$ и $\Psi^{(\nu)}$ будем называть *парциальными*. Смысл этого названия и выбор аргументов у Y_ν в виде, указанном в (39.5), можно пояснить, обратившись к плотности заряда вида $\varrho_L = P_L \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c} \right)$, где P_L — произвольный полином степени L. Используя известное разложение полинома по шаровым функциям [107, 146], будем иметь

$$\varrho_L = \sum_{k=0}^{L} \sum_{l=0}^{[k/2]} \left\langle \frac{x^2}{a^2} \right\rangle^l \varrho^{(k-2l)}, \tag{39.6}$$

где $[K]$ – целая часть числа K. Если (39.6) подставить в (39.4), использовать применимое в этом случае уравнение связи (39.3) и учесть, что сумма шаровых функций одинаковой степени есть шаровая функция той же степени, то для плотности σ_L и (на основе (39.2)) для потенциала Ψ_L получаем

$$\sigma_L = \sum_{\nu=0}^{L} \sigma^{(\nu)}, \tag{39.7}$$

$$\Psi_L = \sum_{\nu=0}^{L} \Psi^{(\nu)}. \tag{39.8}$$

Таким образом, полиномиальная поверхностная плотность есть сумма парциальных, а потенциал Ψ_L представляет собой суперпозицию парциальных поверхностных потенциалов. Для объемных распределений и потенциалов соотношения типа (39.7), (39.8) имеют место, очевидно, лишь в том частном случае, когда

$$\varrho_L = \varrho_L^\Gamma \equiv \Gamma_L(x/a,\, y/b,\, z/c), \tag{39.9}$$

где Γ_L — гармонический полином.

Для дальнейшего нам необходимы явные выражения для шаровых функций (39.5), причем в тензорном виде, учитывая, что в перспективе коэффициенты полинома (39.5), входящие в $\Phi^{(\nu)}$ и $\Psi^{(\nu)}$, должны быть заменены на компоненты тензора мультипольного момента. Такое представление существует (ср. [463], § 45) и имеет вид[1]

$$\varrho^{(\nu)} = \alpha_{i_1 \ldots i_\nu} \frac{x_{i_1}}{a_{(i_1)}} \cdots \frac{x_{i_\nu}}{a_{(i_\nu)}}, \tag{39.10}$$

где $\alpha_{i_1 \ldots i_\nu}$ — тензор совершенно симметричный и неприводимый, т. е. его свертка по любым двум индексам (например, i_1 и i_2) равна нулю:

$$\alpha_{jj\,i_3 \ldots i_\nu} = 0. \tag{39.11}$$

То, что однородный полином (39.10) удовлетворяет уравнению Лапласа в координатах x/a, y/b, z/c, является следствием свойства (39.11) и легко проверяется непосредственно.

Потенциал $\Phi^{(\nu)}$, соответствующий полиному (39.10), является суперпозицией феррерсовых потенциалов $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$, создаваемых степенными распределениями

$$\varrho_{\alpha\beta\gamma} = \varrho_0\,(x/a)^\alpha (y/b)^\beta (z/c)^\gamma. \tag{39.12}$$

Явный вид потенциалов $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$ известен (см. (14.17)–(14.24)), но зависит от четности показателей степени α, β, γ. Воспользоваться формулами для $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$ можно лишь после преобразования выражения (39.10) к виду, в котором непосредственно представлены показатели степеней координат.

В трехиндексной записи, необходимые све́дения о которой даны в § 36, парциальная плотность (39.10) приобретает (ср. с (36.11)) вид

$$\varrho^{(\nu)} = \sum_{k+l+m=\nu} \frac{\nu!}{k!\,l!\,m!}\,\alpha_{klm}\,\frac{\varrho_{klm}}{\varrho_0}. \tag{39.13}$$

Пределы суммирования в двойной сумме (39.13) определяются факториалами в знаменателе этой формулы и условием $\nu = k+l+m$. Чтобы получить формулы, аналогичные (39.13), для поверхностной плотности и объемного или поверхностного потенциалов достаточно (в силу линейности соотношений (39.4), (39.1), (39.2)) просто заменить в (39.13) все ϱ, кроме ϱ_0, на σ, Φ или Ψ соответственно. В частности, например,

$$\Phi^{(\nu)} = \sum_{k+l+m=\nu} \frac{\nu!}{k!\,l!\,m!}\,\alpha_{klm}\,\frac{\Phi_{klm}}{\varrho_0}. \tag{39.14}$$

Трехиндексная запись произвольного симметричного тензора $\overleftrightarrow{\alpha}^{(\nu)}$ позволяет отслеживать, чётен (E) или нечётен (O) любой из трех его индексов. Что касается самого тензора $\overleftrightarrow{\alpha}^{(\nu)}$, то его удобно представлять в зависимости от четности его ранга в виде одной из сумм

$$\overleftrightarrow{\alpha}^{(2\varepsilon)} = \overleftrightarrow{\alpha}^{(2\varepsilon)}_{EEE} + \left\langle \overleftrightarrow{\alpha}^{(2\varepsilon)}_{OOE} \right\rangle, \qquad \overleftrightarrow{\alpha}^{(2\varepsilon+1)} = \left\langle \overleftrightarrow{\alpha}^{(2\varepsilon+1)}_{OEE} \right\rangle + \overleftrightarrow{\alpha}^{(2\varepsilon+1)}_{OOO} \tag{39.15}$$

четырех симметричных тензоров, каждый из которых содержит все компоненты исходного тензора с индексами соответствующей четности, а остальные компоненты положены равными нулю. Заметим, что если исходный тензор неприводим, то это свойство сохраняется за каждым тензором-слагаемым, так как условие неприводимости (39.11) симметричного тензора в

[1] Здесь и далее полуось эллипсоида, лежащая на оси координаты x_i, обозначается через $a_{(i)}$. Нетензорные индексы заключены в скобки. По дважды встречающимся тензорным индексам всегда подразумевается суммирование.

трехиндексном написании имеет (ср. с (36.4)) вид

$$\alpha_{k+2,l,m} + \alpha_{k,l+2,m} + \alpha_{k,l,m+2} = 0\,, \tag{39.16}$$

сохраняющий четность каждого индекса.

Из формулы (39.14) в зависимости от четности ν получаем

$$\Phi^{(2\varepsilon)} = \Phi^{(2\varepsilon)}_{EEE} + < \Phi^{(2\varepsilon)}_{OOE} >, \tag{39.17}$$

$$\Phi^{(2\varepsilon+1)} = < \Phi^{(2\varepsilon+1)}_{OEE} > + \Phi^{(2\varepsilon+1)}_{OOO}\,, \tag{39.18}$$

где[1]

$$\Phi^{(2\varepsilon)}_{EEE} = \sum_{l+m+n=\varepsilon} \frac{(2\varepsilon)!\,\alpha_{2l,2m,2n}\,\Phi_{2l,2m,2n}}{(2l)!(2m)!(2n)!\,\varrho_0} \qquad (\varepsilon \geqslant 0)\,, \tag{39.19}$$

$$\Phi^{(2\varepsilon)}_{OOE} = \sum_{l+m+n=\varepsilon-1} \frac{(2\varepsilon)!\,\alpha_{2l+1,2m+1,2n}\,\Phi_{2l+1,2m+1,2n}}{(2l+1)!(2m+1)!(2n)!\,\varrho_0} \qquad (\varepsilon \geqslant 1)\,, \tag{39.20}$$

$$\Phi^{(2\varepsilon+1)}_{OEE} = \sum_{l+m+n=\varepsilon} \frac{(2\varepsilon+1)!\,\alpha_{2l+1,2m,2n}\,\Phi_{2l+1,2m,2n}}{(2l+1)!(2m)!(2n)!\,\varrho_0} \qquad (\varepsilon \geqslant 0)\,, \tag{39.21}$$

$$\Phi^{(2\varepsilon+1)}_{OOO} = \sum_{l+m+n=\varepsilon-1} \frac{(2\varepsilon+1)!\,\alpha_{2l+1,2m+1,2n+1}\,\Phi_{2l+1,2m+1,2n+1}}{(2l+1)!(2m+1)!(2n+1)!\,\varrho_0} \qquad (\varepsilon \geqslant 1). \tag{39.22}$$

Подобно (36.11), формулы типа (39.13) или (39.14), равно как и их частные случаи типа (39.19)–(39.22), играют роль своеобразного транслятора для перехода от обычной тензорной записи к трехиндексной и наоборот.

В случае заряда с поверхностной плотностью

$$\sigma^{(\nu)} = \alpha_{i_1 \ldots i_\nu} \frac{x_{i_1}}{a_{(i_1)}} \cdots \frac{x_{i_\nu}}{a_{(i_\nu)}}\, p = \sum_{k+l+m=\nu} \frac{\nu!}{k!\,l!\,m!}\, \alpha_{klm} \frac{\sigma_{klm}}{\varrho_0} \tag{39.23}$$

аналогичного рода формулы для потенциалов имеют вид

$$\Psi^{(\nu)} = \sum_{k+l+m=\nu} \frac{\nu!}{k!\,l!\,m!}\, \alpha_{klm} \frac{\Psi_{klm}}{\varrho_0}, \tag{39.24}$$

а также (с учетом четности)

$$\Psi^{(2\varepsilon)} = \Psi^{(2\varepsilon)}_{EEE} + < \Psi^{(2\varepsilon)}_{OOE} >, \tag{39.25}$$

$$\Psi^{(2\varepsilon+1)} = < \Psi^{(2\varepsilon+1)}_{OEE} > + \Psi^{(2\varepsilon+1)}_{OOO}\,, \tag{39.26}$$

где

$$\Psi^{(2\varepsilon)}_{EEE} = \sum_{l+m+n=\varepsilon} \frac{(2\varepsilon)!\,\alpha_{2l,2m,2n}\,\Psi_{2l,2m,2n}}{(2l)!(2m)!(2n)!\,\varrho_0} \qquad (\varepsilon \geqslant 0)\,, \tag{39.27}$$

$$\Psi^{(2\varepsilon)}_{OOE} = \sum_{l+m+n=\varepsilon-1} \frac{(2\varepsilon)!\,\alpha_{2l+1,2m+1,2n}\,\Psi_{2l+1,2m+1,2n}}{(2l+1)!(2m+1)!(2n)!\,\varrho_0} \qquad (\varepsilon \geqslant 1)\,, \tag{39.28}$$

[1] Всякий раз, когда встречается набор формул, получающихся друг из друга циклической перестановкой (взаимной заменой) координат и индексов, мы приводим лишь одну из таких формул.

$$\Psi^{(2\varepsilon+1)}_{OEE} = \sum_{l+m+n=\varepsilon} \frac{(2\varepsilon+1)!\,\alpha_{2l+1,2m,2n}\,\Psi_{2l+1,2m,2n}}{(2l+1)!(2m)!(2n)!\,\varrho_0} \qquad (\varepsilon \geqslant 0)\,, \tag{39.29}$$

$$\Psi^{(2\varepsilon+1)}_{OOO} = \sum_{l+m+n=\varepsilon-1} \frac{(2\varepsilon+1)!\,\alpha_{2l+1,2m+1,2n+1}\,\Psi_{2l+1,2m+1,2n+1}}{(2l+1)!(2m+1)!(2n+1)!\,\varrho_0} \qquad (\varepsilon \geqslant 1). \tag{39.30}$$

§ 40. Операторная структура потенциалов $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$, $\Phi^{(\nu)}$, $\Psi_{\alpha\beta\gamma}$ и $\Psi^{(\nu)}$

40.1. Потенциалы эллипсоида

Дальнейшие преобразования формул (39.19)–(39.22), ведущие к получению общих результатов, связаны с подстановкой в них вместо явных выражений для $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$ (см. (14.17)–(14.24)) эквивалентных им представлений в символической форме, содержащей специальные операторы. Эти операторные формулы имеют вид[1]:

$$\frac{\Phi_{2l,2m,2n}}{\varrho_0} = 8\pi \frac{(2l)!\,(2m)!\,(2n)!}{4^{\varkappa}\varkappa!\,l!\,m!\,n!}\,\widehat{t}^{\,l}_a\,\widehat{t}^{\,m}_b\,\widehat{t}^{\,n}_c\,\Big(1 - \Big\langle \widehat{J}_x\,\widehat{\mu}_a \Big\rangle\Big)^{\varkappa} \mathscr{M}_{000}(\xi)\,, \tag{40.1}$$

$$\Phi_{2l+1,2m,2n} = (2l+1)\widehat{I}_x\,\widehat{I}_a\,\widehat{\mu}_a\,\Phi_{2l,2m,2n}\,, \tag{40.2}$$

$$\Phi_{2l+1,2m+1,2n} = (2m+1)\widehat{I}_y\,\widehat{I}_b\,\widehat{\mu}_b\,\Phi_{2l+1,2m,2n}\,, \tag{40.3}$$

$$\Phi_{2l+1,2m+1,2n+1} = (2n+1)\widehat{I}_z\,\widehat{I}_c\,\widehat{\mu}_c\,\Phi_{2l+1,2m+1,2n}\,, \tag{40.4}$$

где $\varkappa = l+m+n+1$. В правые части (40.2)–(40.4) следует последовательно подставлять, идя снизу вверх, все выражения, даваемые вышестоящими формулами вплоть до (40.1). При замене $\mathscr{M}_{000}(\xi)$ на M_{000} формулы (40.1)–(40.4) описывают внутренние потенциалы.

В (40.1)–(40.4) представлены интегральные операторы

$$\widehat{I}_a = \int\limits_0^a (\ldots)da\,, \qquad \widehat{J}_a = a\widehat{I}_a, \tag{40.5}$$

которые, по определению, не действуют на $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$. Очевидно, что

$$\widehat{J}^{\,l}_a \cdot 1 = a^{2l} \big/ (2l-1)!!. \tag{40.6}$$

Вместо a в (40.5), (40.6) могут фигурировать также b, c, x, y, z.

Напротив, действие операторов $\widehat{\mu}_a$, $\widehat{\mu}_b$, $\widehat{\mu}_c$, по определению, распространяется только на $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$ и состоит в увеличении на единицу индексов l, m, n соответственно[2], т. е.

$$\widehat{\mu}^{\,l}_a\,\widehat{\mu}^{\,m}_b\,\widehat{\mu}^{\,n}_c\,\mathscr{M}_{000}(\xi) = \mathscr{M}_{lmn}(\xi). \tag{40.7}$$

---

[1] Формулы (40.1)–(40.4) приводятся без вывода, но в их тождественности явным выражениям (14.17)–(14.24), можно убедиться, раскрыв действие всех операторов.

[2] Введение операторов $\widehat{\mu}_a$, $\widehat{\mu}_b$, $\widehat{\mu}_c$ выводит $\mathscr{M}$ из процедуры суммирования по шести индексам, как это предписывается формулами (14.17)–(14.24), переадресовывая эти индексы операторам, причем, как видно из (40.7) в факторизованной форме. В итоге достигается «разделение переменных» на уровне операторов.

Сравнивая (40.7) с (4.11), отмечаем, что

$$\left.\begin{array}{l}\textit{результаты воздействия на } \mathscr{M}_{lmn}(\xi) \textit{ оператора}\\ \widehat{\mu}_a \textit{ и дифференциального оператора } \widehat{\partial}_a \textit{ совпа-}\\ \textit{дают, если } \xi \textit{ рассматривается как постоянная.}\end{array}\right\} \tag{40.8}$$

Из пятнадцати указанных операторов любые два (за исключением $\widehat{I}$ и $\widehat{J}$ с одинаковыми индексами) перестановочны. Для сокращения записи введено также обозначение

$$\widehat{t}_a = 1 - \widehat{J}_a\,\widehat{\mu}_a.$$

Представим в операторном виде и тензор α_{ijk}, входящий в формулы (39.19)–(39.22). Для этого по аналогии с $\widehat{\mu}_a$, $\widehat{\mu}_b$, $\widehat{\mu}_c$ введем операторы $\widehat{\alpha}_a$, $\widehat{\alpha}_b$, $\widehat{\alpha}_c$, определенные так, что действие их распространяется только на тензор $\alpha_{ij\,k}$ и сводится к увеличению на две единицы числовых индексов i, j, k соответственно. Ясно, что операторы $\widehat{\alpha}$ коммутируют со всеми введенными выше операторами. Формула (39.16) в терминах операторов $\widehat{\alpha}$ принимает вид

$$\langle\widehat{\alpha}_a\rangle\,\alpha_{klm} = 0\,. \tag{40.9}$$

Если теперь в (39.19) подставить (40.1) и операторное представление

$$\alpha_{2l,2m,2n} = \widehat{\alpha}_a^{\,l}\,\widehat{\alpha}_b^{\,m}\,\widehat{\alpha}_c^{\,n}\,\alpha_{000}, \tag{40.10}$$

то с помощью полиномиальной формулы (см. (14.6))

$$(A+B+C)^\varepsilon = \sum_{l+m+n=\varepsilon} \frac{\varepsilon!}{l!\,m!\,n!}\,A^l B^m C^n$$

получаем

$$\Phi^{(2\varepsilon)}_{EEE} = 4\pi\frac{(2\varepsilon-1)!!}{(2\varepsilon+2)!!}\left\langle\widehat{\alpha}_a\left(1-\widehat{J}_a\widehat{\mu}_a\right)\right\rangle^{\varepsilon}\alpha_{000}\left(1-\left\langle\widehat{J}_x\widehat{\mu}_a\right\rangle\right)^{\varepsilon+1}\mathscr{M}_{000}\,(\xi)\,. \tag{40.11}$$

Замечая далее, что в силу (40.9) выполняется равенство

$$\left\langle\widehat{\alpha}_a\left(1-\widehat{J}_a\widehat{\mu}_a\right)\right\rangle^{\varepsilon}\alpha_{ijk} = (-1)^\varepsilon\left\langle\widehat{\alpha}_a\widehat{J}_a\widehat{\mu}_a\right\rangle^{\varepsilon}\alpha_{ijk}\,, \tag{40.12}$$

получаем искомое операторное представление в следующей окончательной форме:

$$\Phi^{(2\varepsilon)}_{EEE} = -4\pi\frac{(2\varepsilon-1)!!}{(2\varepsilon+2)!!}\left\langle\widehat{\alpha}_a\widehat{J}_a\widehat{\mu}_a\right\rangle^{\varepsilon}\alpha_{000}\left(\left\langle\widehat{J}_x\widehat{\mu}_a\right\rangle-1\right)^{\varepsilon+1}\mathscr{M}_{000}\,(\xi)\,. \tag{40.13}$$

Отметим важную роль, которую играет операторная формула (40.12), обеспечивая упрощение выражений для потенциалов эллипсоида (в том числе и после возврата от операторной их записи к обычной).

Совершенно аналогично выводу (40.13) формула для $\Phi^{(2\varepsilon)}_{OOE}$ получается при подстановке в (39.20) выражений (40.1)–(40.3), операторного представления

$$\alpha_{2l+1,2m+1,2n} = \widehat{\alpha}_a^{\,l}\,\widehat{\alpha}_b^{\,m}\,\widehat{\alpha}_c^{\,n}\,\alpha_{110}$$

и учета свойства (4.12). Результат имеет вид

$$\Phi^{(2\varepsilon)}_{OOE} = -4\pi \frac{(2\varepsilon-1)!!}{(2\varepsilon-2)!!} \widehat{I}_x \widehat{I}_a \widehat{\mu}_a \widehat{I}_y \widehat{I}_b \widehat{\mu}_b \left\langle \widehat{\alpha}_a \widehat{J}_a \widehat{\mu}_a \right\rangle^{\varepsilon-1} \alpha_{110} \left(\left\langle \widehat{J}_x \widehat{\mu}_a \right\rangle - 1 \right)^{\varepsilon} \mathscr{M}_{000}(\xi). \tag{40.14}$$

Таким же образом из (39.21) и (39.22) соответственно получаются операторные представления

$$\Phi^{(2\varepsilon+1)}_{OOO} = -4\pi \frac{(2\varepsilon+1)!!}{(2\varepsilon-2)!!} \widehat{I}_x \widehat{I}_a \widehat{\mu}_a \widehat{I}_y \widehat{I}_b \widehat{\mu}_b \widehat{I}_z \widehat{I}_c \widehat{\mu}_c \times \\ \times \left\langle \widehat{\alpha}_a \widehat{J}_a \widehat{\mu}_a \right\rangle^{\varepsilon-1} \alpha_{111} \left(\left\langle \widehat{J}_x \widehat{\mu}_a \right\rangle - 1 \right)^{\varepsilon} \mathscr{M}_{000}(\xi), \tag{40.15}$$

$$\Phi^{(2\varepsilon+1)}_{OEE} = -4\pi \frac{(2\varepsilon+1)!!}{(2\varepsilon+2)!!} \widehat{I}_x \widehat{I}_a \widehat{\mu}_a \left\langle \widehat{\alpha}_a \widehat{J}_a \widehat{\mu}_a \right\rangle^{\varepsilon} \alpha_{100} \left(\left\langle \widehat{J}_x \widehat{\mu}_a \right\rangle - 1 \right)^{\varepsilon+1} \mathscr{M}_{000}(\xi). \tag{40.16}$$

Отметим, что преобразования, приведшие к (40.13)–(40.16), не воздействовали на ξ. Поэтому указанные формулы, если в них заменить $\mathscr{M}_{000}(\xi)$ на M_{000}, описывают операторную структуру потенциалов внутри эллипсоида.

40.2. Потенциалы гомеоида

Феррерсовы Ψ_{lmn} и парциальные $\Psi^{(\nu)}$ потенциалы эллипсоидального простого слоя также можно представить в символическом виде, содержащем введенные в п. 40.1 операторы. Рассуждения, приводящие к этим операторным представлениям, повторяют проведенные в п. 40.1. Мы ограничимся поэтому предъявлением окончательных результатов.

Феррерсовы потенциалы гомеоида (см. (21.11)–(21.14)), обусловленные поверхностным зарядом плотности

$$\sigma_{lmn} = \varrho_0 \, (x/a)^l (y/b)^m (z/c)^n \, p, \tag{40.17}$$

приобретают в терминах операторов следующий вид:

$$\frac{\Psi_{2l,2m,2n}}{\varrho_0} = \pi \frac{(2l)!\,(2m)!\,(2n)!}{4^{\delta-1}\delta!\,l!\,m!\,n!} \, \widehat{t}^{\,l}_a \, \widehat{t}^{\,m}_b \, \widehat{t}^{\,n}_c \left(1 - \left\langle \widehat{J}_x \, \widehat{\mu}_a \right\rangle \right)^{\delta} \mathscr{M}_{000}(\xi), \tag{40.18}$$

$$\Psi_{2l+1,2m,2n} = (2l+1) \widehat{I}_x \, \widehat{I}_a \, \widehat{\mu}_a \, \Psi_{2l,2m,2n}, \tag{40.19}$$

$$\Psi_{2l+1,2m+1,2n} = (2m+1) \widehat{I}_y \, \widehat{I}_b \, \widehat{\mu}_b \, \Psi_{2l+1,2m,2n}, \tag{40.20}$$

$$\Psi_{2l+1,2m+1,2n+1} = (2n+1) \widehat{I}_z \, \widehat{I}_c \, \widehat{\mu}_c \, \Psi_{2l+1,2m+1,2n}, \tag{40.21}$$

где $\delta = l+m+n$. При замене $\mathscr{M}_{000}(\xi)$ на M_{000} формулы (40.18)–(40.21) описывают внутренние потенциалы.

В свою очередь, парциальные потенциалы гомеоида даются следующими операторными формулами:

$$\Psi^{(2\varepsilon)}_{EEE} = 4\pi \frac{(2\varepsilon-1)!!}{(2\varepsilon)!!} \left\langle \widehat{\alpha}_a \widehat{J}_a \widehat{\mu}_a \right\rangle^{\varepsilon} \alpha_{000} \left(\left\langle \widehat{J}_x \widehat{\mu}_a \right\rangle - 1 \right)^{\varepsilon} \mathscr{M}_{000}(\xi), \tag{40.22}$$

$$\Psi_{OOE}^{(2\varepsilon)} = 4\pi \frac{(2\varepsilon)!}{[(2\varepsilon-2)!!]^2}\times$$
$$\times\, \widehat{I}_x\, \widehat{I}_a\, \widehat{\mu}_a \widehat{I}_y\, \widehat{I}_b\, \widehat{\mu}_b \left\langle \widehat{\alpha}_a \widehat{J}_a \widehat{\mu}_a \right\rangle^{\varepsilon-1} \alpha_{110} \left(\left\langle \widehat{J}_x \widehat{\mu}_a \right\rangle - 1 \right)^{\varepsilon-1} \mathscr{M}_{000}(\xi)\ , \quad (40.23)$$

$$\Psi_{OOO}^{(2\varepsilon+1)} = 4\pi \frac{(2\varepsilon+1)!}{[(2\varepsilon-2)!!]^2}\, \widehat{I}_x\, \widehat{I}_a\, \widehat{\mu}_a \widehat{I}_y\, \widehat{I}_b\, \widehat{\mu}_b \widehat{I}_z\, \widehat{I}_c\, \widehat{\mu}_c \times$$
$$\times \left\langle \widehat{\alpha}_a \widehat{J}_a \widehat{\mu}_a \right\rangle^{\varepsilon-1} \alpha_{111} \left(\left\langle \widehat{J}_x \widehat{\mu}_a \right\rangle - 1 \right)^{\varepsilon-1} \mathscr{M}_{000}(\xi)\,, \quad (40.24)$$

$$\Psi_{OEE}^{(2\varepsilon+1)} = 4\pi \frac{(2\varepsilon+1)!}{[(2\varepsilon)!!]^2}\, \widehat{I}_x\, \widehat{I}_a\, \widehat{\mu}_a \left\langle \widehat{\alpha}_a \widehat{J}_a \widehat{\mu}_a \right\rangle^{\varepsilon} \alpha_{100} \left(\left\langle \widehat{J}_x \widehat{\mu}_a \right\rangle - 1 \right)^{\varepsilon} \mathscr{M}_{000}(\xi)\ . \quad (40.25)$$

Преобразования, приведшие к (40.22)–(40.25), не затрагивали ξ. Поэтому, если в формулах (40.22)–(40.25) заменить $\mathscr{M}_{000}(\xi)$ на M_{000}, то они описывают операторную структуру потенциалов внутри эллипсоида.

§ 41. Тензор-потенциал эллипсоида и его свойства

41.1. Операторная структура

Если в формулах (40.13)–(40.16) раскрыть действие операторов $\widehat{\alpha}_a$, $\widehat{\alpha}_b$, $\widehat{\alpha}_c$ и $\widehat{J}_a$, $\widehat{J}_b$, $\widehat{J}_c$, а также (если они встречаются) операторов $\widehat{I}_a$, $\widehat{I}_b$, $\widehat{I}_c$, то этим формулам соответственно можно придать следующий вид:

$$\Phi_{EEE}^{(2\varepsilon)} = (4\varepsilon-1)!! \sum_{l+m+n=\varepsilon} \frac{(2\varepsilon)!\, \widetilde{\mathrm{i}}_{2l,2m,2n}\, \varphi_{2l,2m,2n}}{(2l)!\,(2m)!\,(2n)!}\,, \quad (41.1)$$

$$\Phi_{OOE}^{(2\varepsilon)} = (4\varepsilon-1)!! \sum_{l+m+n=\varepsilon-1} \frac{(2\varepsilon)!\, \widetilde{\mathrm{i}}_{2l+1,2m+1,2n}\, \varphi_{2l+1,2m+1,2n}}{(2l+1)!\,(2m+1)!\,(2n)!}\,, \quad (41.2)$$

$$\Phi_{OOO}^{(2\varepsilon+1)} = (4\varepsilon+1)!! \sum_{l+m+n=\varepsilon-1} \frac{(2\varepsilon+1)!\, \widetilde{\mathrm{i}}_{2l+1,2m+1,2n+1}\, \varphi_{2l+1,2m+1,2n+1}}{(2l+1)!\,(2m+1)!\,(2n+1)!}\,, \quad (41.3)$$

$$\Phi_{OEE}^{(2\varepsilon+1)} = (4\varepsilon+1)!! \sum_{l+m+n=\varepsilon} \frac{(2\varepsilon+1)!\, \widetilde{\mathrm{i}}_{2l+1,2m,2n}\, \varphi_{2l+1,2m,2n}}{(2l+1)!\,(2m)!\,(2n)!}\,. \quad (41.4)$$

Выражения (41.1)–(41.4) подобны (39.19)–(39.22) и, как последние (см. (39.14)), охватываются единой формулой

$$\Phi^{(\nu)} = (2\nu-1)!! \sum_{i+j+k=\nu} \frac{\nu!}{i!\,j!\,k!}\, \widetilde{\mathrm{i}}_{ij\,k}\, \varphi_{ij\,k}, \quad (41.5)$$

справедливой как для четных, так и для нечетных значений ν.

В соответствии с разъяснениями, данными в § 36 (см. (36.11)), трехиндексная запись (41.5) эквивалентна обычной тензорной записи

$$\Phi^{(\nu)} = (2\nu - 1)!!\, \widetilde{\mathrm{i}}_{j_1 \ldots j_\nu}\, \varphi_{j_1 \ldots j_\nu}\,, \tag{41.6}$$

содержащей свертку по всем индексам двух совершенно симметричных тензоров $\widetilde{\mathrm{i}}_{j_1 \ldots j_\nu}$ и $\varphi_{j_1 \ldots j_\nu}$. Что касается явных выражений для этих тензоров, сформировавшихся при выводе формул (41.1)–(41.4), то

$$\widetilde{\mathrm{i}}_{i_1 \ldots i_\nu} = 4\pi\, \frac{\nu!}{(2\nu+3)!!}\, abc\, a_{(i_1)} \cdots a_{(i_\nu)}\, \alpha_{i_1 \ldots i_\nu}\,, \tag{41.7}$$

а зависящие от четности индексов трехиндексные компоненты тензора $\overleftrightarrow{\varphi}^{(\nu)}$ даются формулами

$$\varphi_{2l,2m,2n} = -\frac{(4\varepsilon+3)(4\varepsilon+1)}{(2\varepsilon)!(2\varepsilon+2)!!\, abc}\, \widehat{\mu}_a^{\,l}\, \widehat{\mu}_b^{\,m} \widehat{\mu}_c^{\,n} \left(\left\langle \widehat{J}_x \widehat{\mu}_a \right\rangle - 1 \right)^{\varepsilon+1} \mathscr{M}_{000}\,(\xi)$$
$$(\varepsilon = l+m+n \geqslant 0), \tag{41.8}$$

$$\varphi_{2l+1,2m+1,2n} = -\frac{(4\varepsilon+3)(4\varepsilon+1)\, \widehat{I}_x \widehat{\mu}_a\, \widehat{I}_y \widehat{\mu}_b}{(2\varepsilon)!(2\varepsilon)!!\, abc}\, \widehat{\mu}_a^{\,l}\, \widehat{\mu}_b^{\,m} \widehat{\mu}_c^{\,n} \times$$
$$\times \left(\left\langle \widehat{J}_x \widehat{\mu}_a \right\rangle - 1 \right)^{\varepsilon} \mathscr{M}_{000}\,(\xi) \qquad (\varepsilon - 1 = l+m+n \geqslant 0), \tag{41.9}$$

$$\varphi_{2l+1,2m,2n} = -\frac{(4\varepsilon+5)(4\varepsilon+3)\, \widehat{I}_x \widehat{\mu}_a}{(2\varepsilon+1)!(2\varepsilon+2)!!\, abc}\, \widehat{\mu}_a^{\,l}\, \widehat{\mu}_b^{\,m} \widehat{\mu}_c^{\,n} \times$$
$$\times \left(\left\langle \widehat{J}_x \widehat{\mu}_a \right\rangle - 1 \right)^{\varepsilon+1} \mathscr{M}_{000}\,(\xi) \qquad (\varepsilon = l+m+n \geqslant 0)\,, \tag{41.10}$$

$$\varphi_{2l+1,2m+1,2n+1} = -\frac{(4\varepsilon+5)(4\varepsilon+3)\, \widehat{I}_x \widehat{\mu}_a \widehat{I}_y \widehat{\mu}_b \widehat{I}_z \widehat{\mu}_c}{(2\varepsilon+1)!(2\varepsilon)!!\, abc}\, \widehat{\mu}_a^{\,l}\, \widehat{\mu}_b^{\,m} \widehat{\mu}_c^{\,n} \times$$
$$\times \left(\left\langle \widehat{J}_x \widehat{\mu}_a \right\rangle - 1 \right)^{\varepsilon} \mathscr{M}_{000}\,(\xi) \qquad (\varepsilon - 1 = l+m+n \geqslant 0). \tag{41.11}$$

41.2. Неприводимость

Входящие в (41.6) величины (41.8)–(41.11) являются применительно к объемным потенциалам эллипсоида теми эталонными тензорными функциями, о которых говорилось в начале § 39. Тензор $\varphi_{i_1 \ldots i_\nu}$ будем называть *тензор-потенциалом эллипсоида.* Существенно, что внешний (т. е. для точек наблюдения, лежащих вне или на поверхности (38.16)) тензор-потенциал эллипсоида является неприводимым.

Доказательство этого утверждения связано с использованием двух равенств:

$$\left(\left\langle \widehat{J}_x \widehat{\mu}_a \right\rangle - 1 \right)^{\varkappa} \langle \widehat{\mu}_a \rangle\, \mathscr{M}_{000}\,(\xi) = \left(\left\langle \frac{x^2}{\widetilde{a}^{\,2}} \right\rangle - 1 \right)^{\varkappa} \frac{abc}{\widetilde{a}\widetilde{b}\widetilde{c}}\,, \tag{41.12}$$

$$\widehat{I}_x\widehat{\mu}_a\left(\left\langle\frac{x^2}{\widetilde{a}^2}\right\rangle-1\right)^{\varkappa}\frac{abc}{\widetilde{a}\widetilde{b}\widetilde{c}}=\frac{x}{\widetilde{a}^2}\left(\left\langle\frac{x^2}{\widetilde{a}^2}\right\rangle-1\right)^{\varkappa}\frac{abc}{\widetilde{a}\widetilde{b}\widetilde{c}},\tag{41.13}$$

где $\varkappa$ – натуральное число, а $\widetilde{a}=\sqrt{a^2+\xi}$, $\widetilde{b}=\sqrt{b^2+\xi}$, $\widetilde{c}=\sqrt{c^2+\xi}$. Удостоверимся сначала в правильности (41.12).

В соответствии с соотношением (4.7)

$$\langle\widehat{\mu}_a\rangle\,\mathscr{M}_{000}(\xi)=\langle\mathscr{M}_{100}(\xi)\rangle=abc\Big/(\widetilde{a}\widetilde{b}\widetilde{c}).$$

Остальные операторы $\widehat{\mu}_a$, $\widehat{\mu}_b$, $\widehat{\mu}_c$, входящие в (41.12), заменяем соответственно на $\widehat{\partial}_a$, $\widehat{\partial}_b$, $\widehat{\partial}_c$, так как воздействие последних на $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$ идентично воздействию первых (см. (40.8)). Раскрывая по полиномиальной формуле операторное выражение $\left(\left\langle\widehat{J}_x\widehat{\partial}_a\right\rangle-1\right)^{\varkappa}\left(abc\Big/(\widetilde{a}\widetilde{b}\widetilde{c})\right)$, учитывая, что $(\widehat{J}_x\widehat{\partial}_a)^l(a/\widetilde{a})=(x/\widetilde{a})^{2l}(a/\widetilde{a})$, и вновь используя полиномиальную формулу для сворачивания суммы, получаем правую часть (41.12). Аналогично непосредственным дифференцированием ($\widehat{\mu}_a=\widehat{\partial}_a$) и интегрированием $\left(\widehat{I}_x=\int\limits_0^x(\ldots)dx\right)$ убеждаемся в справедливости (41.13).

Докажем теперь, что внешний тензор-потенциал неприводим. Будем применять трехиндексную запись тензора $\overleftrightarrow{\varphi}$, а его свертку (по аналогии с левой частью (40.9)) будем обозначать через $\langle\widehat{\varphi}_a\rangle\,\varphi_{lmn}$. Рассмотрим случаи различных (по четности) наборов индексов.

В EEE-случае из (41.8) получаем

$$\langle\widehat{\varphi}_a\rangle\,\varphi_{2l,2m,2n}=A\,\widehat{\mu}_a^{\,l}\,\widehat{\mu}_b^{\,m}\,\widehat{\mu}_c^{\,n}\left(\left\langle\widehat{J}_x\widehat{\mu}_a\right\rangle-1\right)^{\varepsilon+2}\langle\widehat{\mu}_a\rangle\,\mathscr{M}_{000}(\xi),$$

где $\varepsilon=l+m+n$, а A – не представляющая интереса постоянная. Используя (41.12) и заменяя оставшиеся операторы $\widehat{\mu}$ на $\widehat{\partial}$, будем иметь

$$\langle\widehat{\varphi}_a\rangle\,\varphi_{2l,2m,2n}=A\,\widehat{\partial}_a^{\,l}\,\widehat{\partial}_b^{\,m}\,\widehat{\partial}_c^{\,n}\left(\left\langle\frac{x^2}{\widetilde{a}^2}\right\rangle-1\right)^{\varepsilon+2}\frac{abc}{\widetilde{a}\widetilde{b}\widetilde{c}}.$$

Оператору $\widehat{\partial}_a^{\,l}\widehat{\partial}_b^{\,m}\,\widehat{\partial}_c^{\,n}$ соответствует производная, порядок (ε) которой меньше показателя степени у величины $\left(\left\langle x^2/\widetilde{a}^2\right\rangle-1\right)^{\varepsilon+2}$. Поэтому после дифференцирования сохранится общий множитель $\left(\left\langle x^2/\widetilde{a}^2\right\rangle-1\right)^2$, который для точек наблюдения на и вне поверхности эллипсоида (38.16) в соответствии с определением эллипсоидальной координаты (38.4) равен нулю.

Для свертки в OEE-случае из (41.10), используя (41.12), имеем

$$\langle\widehat{\varphi}_a\rangle\,\varphi_{2l+1,2m,2n}\sim\widehat{\partial}_a^{\,l}\,\widehat{\partial}_b^{\,m}\,\widehat{\partial}_c^{\,n}\widehat{I}_x\widehat{\mu}_a\left(\left\langle\frac{x^2}{\widetilde{a}^2}\right\rangle-1\right)^{\varepsilon+2}\frac{abc}{\widetilde{a}\widetilde{b}\widetilde{c}}.\tag{41.14}$$

К (41.14) применимо равенство (41.13), практически сводящее дело к уже рассмотренному случаю. Так что $\langle\widehat{\varphi}_a\rangle\,\varphi_{2l+1,2m,2n}=0$.

Аналогично доказывается, что свертка равна нулю и для компонент (41.9) и (41.11), т. е. тензор $\overleftrightarrow{\varphi}$ действительно неприводим.

41.3. Явные выражения

Явные выражения для компонент внешнего тензор-потенциала эллипсоида нетрудно получить, если раскрыть действие операторов в (41.8)–(41.11). Они даются следующими формулами:

$$\varphi_{2l,2m,2n} = (-1)^{\varepsilon}\frac{(4\varepsilon+3)(4\varepsilon+1)}{(2\varepsilon)!\,abc}\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{\varepsilon+1}\sum_{j=0}^{\varepsilon+1-i}\sum_{k=0}^{\varepsilon+1-i-j}\frac{(-1)^{i+j+k}\,x^{2i}y^{2j}z^{2k}\,\mathscr{M}_{i+l,j+m,k+n}(\xi)}{[2(\varepsilon+1-i-j-k)]!!\,(2\,i)!\,(2j)!\,(2k)!}, \quad (41.15)$$

$$\varphi_{2l+1,2m+1,2n} = (-1)^{\varepsilon+1}\frac{(4\varepsilon+3)(4\varepsilon+1)}{(2\varepsilon)!\,abc}\,xy\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{\varepsilon}\sum_{j=0}^{\varepsilon-i}\sum_{k=0}^{\varepsilon-i-j}\frac{(-1)^{i+j+k}\,x^{2i}y^{2j}z^{2k}\,\mathscr{M}_{i+l+1,j+m+1,k+n}(\xi)}{[2(\varepsilon-i-j-k)]!!\,(2i+1)!\,(2j+1)!\,(2k)!}, \quad (41.16)$$

$$\varphi_{2l+1,2m,2n} = (-1)^{\varepsilon}\frac{(4\varepsilon+5)(4\varepsilon+3)}{(2\varepsilon+1)!\,abc}\,x\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{\varepsilon+1}\sum_{j=0}^{\varepsilon+1-i}\sum_{k=0}^{\varepsilon+1-i-j}\frac{(-1)^{i+j+k}x^{2i}y^{2j}z^{2k}\mathscr{M}_{i+l+1,j+m,k+n}(\xi)}{[2(\varepsilon+1-i-j-k)]!!\,(2i+1)!\,(2j)!\,(2k)!}, \quad (41.17)$$

$$\varphi_{2l+1,2m+1,2n+1} = (-1)^{\varepsilon+1}\frac{(4\varepsilon+5)(4\varepsilon+3)}{(2\varepsilon+1)!\,abc}\,xyz\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{\varepsilon}\sum_{j=0}^{\varepsilon-i}\sum_{k=0}^{\varepsilon-i-j}\frac{(-1)^{i+j+k}\,x^{2i}y^{2j}z^{2k}\mathscr{M}_{i+l+1,j+m+1,k+n+1}(\xi)}{[2(\varepsilon-i-j-k)]!!\,(2i+1)!\,(2j+1)!\,(2k+1)!}. \quad (41.18)$$

При этом следует иметь в виду, что в формулах (41.15) и (41.17) выполняется равенство $\varepsilon = l+m+n \geqslant 0$, а в формулах (41.16) и (41.18) выполняется $\varepsilon-1 = l+m+n \geqslant 0$.

Ниже в форме таблицы даны развернутые выражения для φ_{lmn}, соответствующие простейшим частным случаям формул (41.15)–(41.18).

Таблица декартовых компонент тензор-потенциала эллипсоида

$$\varphi_{000} = \frac{3}{2\,abc}\left(\mathscr{M}_{000} - \mathscr{M}_{100}\,x^2 - \mathscr{M}_{010}\,y^2 - \mathscr{M}_{001}\,z^2\right);$$

$$\varphi_{100} \equiv \varphi_x = \frac{15}{2\,abc}\left(\mathscr{M}_{100} - \frac{1}{3}\,\mathscr{M}_{200}\,x^2 - \mathscr{M}_{110}\,y^2 - \mathscr{M}_{101}\,z^2\right)x;$$

$$\varphi_{200} \equiv \varphi_{xx} = -\frac{35}{8\,abc}\left[\frac{1}{6}\,\mathscr{M}_{100} - \mathscr{M}_{200}\,x^2 - \mathscr{M}_{110}\,y^2 - \mathscr{M}_{101}\,z^2 + \right.$$
$$+\frac{1}{6}\left(\mathscr{M}_{300}\,x^4 + \mathscr{M}_{120}\,y^4 + \mathscr{M}_{102}\,z^4\right) +$$
$$\left. + \mathscr{M}_{210}\,x^2y^2 + \mathscr{M}_{111}\,y^2z^2 + \mathscr{M}_{201}\,x^2z^2\right],$$

$$\varphi_{110} \equiv \varphi_{xy} = \frac{35}{4\,abc}\left(\mathscr{M}_{110} - \frac{1}{3}\,\mathscr{M}_{210}\,x^2 - \frac{1}{3}\,\mathscr{M}_{120}\,y^2 - \mathscr{M}_{111}\,z^2\right)xy\,;$$

$$\varphi_{300} \equiv \varphi_{xxx} = -\frac{7}{8\,abc}\left[\frac{3}{2}\,\mathscr{M}_{200} - \mathscr{M}_{300}\,x^2 - 3\mathscr{M}_{210}\,y^2 - 3\mathscr{M}_{201}\,z^2 + \right.$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\mathscr{M}_{400}\,x^4 + \mathscr{M}_{220}\,y^4 + \mathscr{M}_{202}\,z^4\right) +$$
$$\left. + \mathscr{M}_{310}\,x^2y^2 + 3\mathscr{M}_{211}\,y^2z^2 + \mathscr{M}_{301}\,x^2z^2\right]x,$$

$$\varphi_{120} \equiv \varphi_{xyy} = -\frac{7}{8\,abc}\left[\frac{3}{2}\,\mathscr{M}_{110} - \mathscr{M}_{210}\,x^2 - 3\mathscr{M}_{120}\,y^2 - 3\mathscr{M}_{111}\,z^2 + \right.$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\mathscr{M}_{310}\,x^4 + \mathscr{M}_{130}\,y^4 + \mathscr{M}_{112}\,z^4\right) +$$
$$\left. + \mathscr{M}_{220}\,x^2y^2 + 3\mathscr{M}_{121}\,y^2z^2 + \mathscr{M}_{211}\,x^2z^2\right]x,$$

$$\varphi_{111} \equiv \varphi_{xyz} = \frac{7}{4\,abc}\left(3\mathscr{M}_{111} - \mathscr{M}_{211}\,x^2 - \mathscr{M}_{121}\,y^2 - \mathscr{M}_{112}\,z^2\right)xyz\,;$$

$$\varphi_{400} \equiv \varphi_{xxxx} = \frac{11}{128\,abc}\left[\mathscr{M}_{200} - 3\left(\mathscr{M}_{300}\,x^2 + \mathscr{M}_{210}\,y^2 + \mathscr{M}_{201}\,z^2\right) + \right.$$
$$+ \mathscr{M}_{400}\,x^4 + \mathscr{M}_{220}\,y^4 + \mathscr{M}_{202}\,z^4 + 6\left(\mathscr{M}_{310}\,x^2y^2 + \mathscr{M}_{211}\,y^2z^2 + \mathscr{M}_{301}\,x^2z^2\right) -$$
$$-\frac{1}{15}\left(\mathscr{M}_{500}\,x^6 + \mathscr{M}_{230}\,y^6 + \mathscr{M}_{203}\,z^6\right) - \mathscr{M}_{410}\,x^4y^2 - \mathscr{M}_{221}\,y^4z^2 - \mathscr{M}_{302}\,x^2z^4 -$$
$$\left. - \mathscr{M}_{401}\,x^4z^2 - \mathscr{M}_{320}\,x^2y^4 - \mathscr{M}_{212}\,y^2z^4 - 6\,\mathscr{M}_{311}\,x^2y^2z^2\right],$$

$$\varphi_{310} \equiv \varphi_{xxxy} = -\frac{11}{32\,abc}\left[\frac{3}{2}\,\mathscr{M}_{210} - \mathscr{M}_{310}\,x^2 - \mathscr{M}_{220}\,y^2 - 3\mathscr{M}_{211}\,z^2 + \right.$$
$$+\frac{1}{10}\left(\mathscr{M}_{410}\,x^4 + \mathscr{M}_{230}\,y^4 + 5\mathscr{M}_{212}\,z^4\right) +$$
$$\left. + \frac{1}{3}\,\mathscr{M}_{320}\,x^2y^2 + \mathscr{M}_{221}\,y^2z^2 + \mathscr{M}_{311}\,x^2z^2\right]xy,$$

$$\varphi_{220} \equiv \varphi_{xxyy} = \frac{11}{128\,abc}\left[\mathscr{M}_{110} - 3\left(\mathscr{M}_{210}\,x^2 + \mathscr{M}_{120}\,y^2 + \mathscr{M}_{111}\,z^2\right) + \right.$$
$$+ \mathscr{M}_{310}\,x^4 + \mathscr{M}_{130}\,y^4 + \mathscr{M}_{112}\,z^4 + 6\left(\mathscr{M}_{220}\,x^2y^2 + \mathscr{M}_{121}\,y^2z^2 + \mathscr{M}_{211}\,x^2z^2\right) -$$
$$-\frac{1}{15}\left(\mathscr{M}_{410}\,x^6 + \mathscr{M}_{140}\,y^6 + \mathscr{M}_{113}\,z^6\right) - \mathscr{M}_{320}\,x^4y^2 - \mathscr{M}_{131}\,y^4z^2 - \mathscr{M}_{212}\,x^2z^4 -$$
$$\left. - \mathscr{M}_{311}\,x^4z^2 - \mathscr{M}_{230}\,x^2y^4 - \mathscr{M}_{122}\,y^2z^4 - 6\,\mathscr{M}_{221}\,x^2y^2z^2\right],$$

$$\varphi_{112} \equiv \varphi_{xyzz} = -\frac{11}{32\,abc}\left[\frac{3}{2}\,\mathscr{M}_{111} - \mathscr{M}_{211}\,x^2 - \mathscr{M}_{121}\,y^2 - 3\mathscr{M}_{112}\,z^2 + \right.$$
$$+\frac{1}{10}\left(\mathscr{M}_{311}\,x^4 + \mathscr{M}_{131}\,y^4 + 5\mathscr{M}_{113}\,z^4\right) +$$
$$\left. + \frac{1}{3}\mathscr{M}_{221}\,x^2y^2 + \mathscr{M}_{122}\,y^2z^2 + \mathscr{M}_{212}\,x^2z^2\right] xy,$$

В эту таблицу не включены выражения для компонент тензор-потенциала эллипсоида, которые получаются с помощью циклической или взаимной замены координат из выражений, приведенных в таблице.

41.4. Общая формула

Иногда, особенно при попытках установления результатов общего характера, вместо формул (41.15)–(41.18) удобнее использовать обобщающую их единую формулу, справедливую для индексов произвольной четности. Такого рода общая формула для тензор-потенциала эллипсоида имеет следующий вид:

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma} = \int\limits_{\xi}^{\infty} du\, A_{\alpha\beta\gamma} \sum_{i,j,\,k} \frac{(-4)^{-i-j-k}\, x^{\alpha-2i}\, y^{\beta-2j}\, z^{\gamma-2k}}{i!\, j!\, k!\, (\alpha-2i)!\, (\beta-2j)!\, (\gamma-2k)!\, (i+j+k+1)!} \times$$
$$\times \frac{P^{\,i+j+k+1}}{\bar{a}^{\,2\alpha-2i+1}\, \bar{b}^{\,2\beta-2j+1}\, \bar{c}^{\,2\gamma-2k+1}}\,, \tag{41.19}$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$A_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma)!}\,(2\alpha+2\beta+2\gamma+3)(2\alpha+2\beta+2\gamma+1), \tag{41.20}$$

$$\bar{a} = \sqrt{a^2+u}, \qquad \bar{b} = \sqrt{b^2+u}, \qquad \bar{c} = \sqrt{c^2+u}, \tag{41.21}$$
$$P(\mathbf{r},u) \equiv 1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u} = 1 - \left\langle \frac{x^2}{\bar{a}^2} \right\rangle.$$

Нижним пределом интегрирования в (41.19) является эллипсоидальная координата ξ точки наблюдения, равная, по определению, неотрицательному корню кубического уравнения $\langle x^2/(a^2+u)\rangle = 1$, так что

$$P(\mathbf{r},\xi) = 0. \tag{41.22}$$

В (41.19) и встречающихся далее суммах без указанных пределов суммирования последние можно формально считать бесконечными: от $-\infty$ до $+\infty$. Истинные же — конечные — пределы суммирования легко установить, учитывая, что факториал от отрицательного целого числа есть бесконечно большая по модулю величина.

Проверить правильность выражения (41.19) можно, рассматривая последовательно все возможные случаи фиксированной четности у чисел α, β, γ и преобразуя выражение (41.19) до его совпадения с одной из формул (41.15)–(41.18). Эти преобразования однотипны для каждого (по четности) набора α, β, γ, поэтому мы ограничимся рассмотрением только одного случая: $\alpha = 2\lambda+1$, $\beta = 2\mu$, $\gamma = 2\nu$, где λ, μ, ν — неотрицательные целые числа. Вводя обозначения

$$\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\beta\gamma}\,/A_{\alpha\beta\gamma} \tag{41.23}$$

и $\varepsilon = \lambda+\mu+\nu$, запишем (41.19) в виде

$$\begin{gathered}\widetilde{\varphi}_{2\lambda+1,2\mu,2\nu} = (-4)^{-\varepsilon-1} \times \\ \times \sum_{i,j,k} \frac{(-4)^{i+j+k}\, x^{2i+1}\, y^{2j}\, z^{2k}}{(\varepsilon+1-i-j-k)!\,(2i+1)!\,(2j)!\,(2k)!\,(\lambda-i)!\,(\mu-j)!\,(\nu-k)!} \times \\ \times \int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{P^{\varepsilon+1-i-j-k}\,du}{\bar{a}^{\,2\lambda+2i+3}\,\bar{b}^{\,2\mu+2j+1}\,\bar{c}^{\,2\nu+2k+1}}\,,\end{gathered} \tag{41.24}$$

где произведены замены $i\to\lambda-\bar{i}$, $j\to\mu-\bar{j}$, $k\to\nu-\bar{k}$, после чего опущены черточки над новыми индексами суммирования.

Раскрывая теперь выражение $P^{\varepsilon+1-i-j-k}$ по полиномиальной формуле

$$P^{\sigma} = \sum_{l,m,n} \frac{\sigma\,!\,(-1)^{\,l+m+n}}{l\,!\,m\,!\,n\,!\,(\sigma-l-m-n)!}\,(x\,/\bar{a})^{2l}\,(y\,/\bar{b})^{2m}\,(z\,/\bar{c})^{2n}\,,$$

делая очередные замены $l\to\bar{l}-i$, $m\to\bar{m}-j$, $n\to\bar{n}-k$ и вновь опуская черточки над новыми индексами суммирования, а затем вводя в получающееся выражение внешние потенциальные факторы эллипсоида

$$\mathscr{M}_{ij\,k}(\xi) = (2i-1)!!\,(2j-1)!!\,(2k-1)!!\,\frac{abc}{2}\int\limits_{\xi}^{\infty}\frac{du}{\bar{a}^{2i+1}\,\bar{b}^{\,2j+1}\,\bar{c}^{\,2k+1}}\,,$$

перепишем (41.24) в виде

$$\begin{gathered}\widetilde{\varphi}_{2\lambda+1,2\mu,2\nu} = 2\,(-4)^{-\varepsilon-1} \times \\ \times \sum_{l,\,m,\,n} \frac{(-1)^{\,l+m+n}\,S_1(\lambda,l)\,S_2(\mu,m)\,S_2(\nu,n)}{(\varepsilon+1-l-m-n)!\,(2\lambda+2l+1)!!\,(2\mu+2m-1)!!\,(2\nu+2n-1)!!} \times \\ \times \frac{x^{2l+1}y^{2m}z^{2n}}{abc}\,\mathscr{M}_{\lambda+l+1,\,\mu+m,\,\nu+n}(\xi).\end{gathered} \tag{41.25}$$

Входящие сюда двухпараметрические числовые суммы

$$S_1(\lambda,l) \equiv \sum_i \frac{4^i}{(2i+1)!(\lambda-i)!(l-i)!}\,, \qquad S_2(\lambda,l) \equiv \sum_i \frac{4^i}{(2i)!(\lambda-i)!(l-i)!}\,,$$

как показано в Приложении А3, равны

$$S_1(\lambda,l) = \frac{2^{\,\lambda+l}\,(2\lambda+2l+1)\,!!}{(2\lambda+1)!\,(2l+1)!}\,, \qquad S_2(\lambda,l) = \frac{2^{\,\lambda+l}\,(2\lambda+2l-1)\,!!}{(2\lambda)\,!\,(2l)\,!}\,. \tag{41.26}$$

Если теперь в (41.25) подставить (41.26), (41.23) и (41.20), то получим окончательное выражение

$$\varphi_{\,2\lambda+1,2\mu,2\nu} = \frac{(4\varepsilon+5)(4\varepsilon+3)}{(2\varepsilon+1)!}\times$$
$$\times\sum_{l=0}^{\varepsilon+1}\sum_{m=0}^{\varepsilon+1-l}\sum_{n=0}^{\varepsilon+1-l-m}\frac{(-1)^{\,\varepsilon+l+m+n}\,x^{2l+1}y^{2m}z^{2n}}{[2(\varepsilon+1-l-m-n)]!!\,(2l+1)!\,(2m)!\,(2n)!}\times$$
$$\times\,\frac{\mathscr{M}_{\lambda+l+1,\,\mu+m,\,\nu+n}}{abc}\qquad(\varepsilon=\lambda+\mu+\nu),\quad(41.27)$$

идентичное (41.17). В (41.27) мы перешли от формально бесконечных пределов суммирования к пределам, фактически имеющим место.

Совершенно так же (с использованием обеих или одной из сумм S_1 и S_2) проверяется правильность (41.19) для других вариантов четности чисел $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

41.5. Дифференциальные свойства, «гармоничность»

Как видно из (41.19), каждая компонента тензор-потенциала эллипсоида наряду с явной зависимостью от координат $x,\ y,\ z$ зависит от них и неявно — через эллипсоидальную координату ξ, входящую в нижний предел интегрирования. Поэтому, вычисляя производную, например $\partial\varphi_{\alpha\beta\gamma}/\partial x$, следует, вообще говоря, пользоваться формулой[1]

$$\frac{\partial\varphi_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}=\left(\frac{\partial\varphi_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}\right)_{\xi}-F_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r},\xi)\,\frac{\partial\xi}{\partial x}\,,\qquad(41.28)$$

где $F_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r},u)$ — подынтегральное выражение в (41.19), а

$$\left(\frac{\partial\varphi_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}\right)_{\xi}=\int\limits_{\xi}^{\infty}\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r},u)}{\partial x}\,du\,.$$

Однако в нашем случае $F_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r},\xi)=0$, поскольку все слагаемые тройной суммы, входящей в $F_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r},u)$, содержат в качестве множителя положительную степень величины $P(\mathbf{r},u)$, которая при $u=\xi$ обращается в нуль в соответствии с (41.22). Таким образом, при однократном дифференцировании тензор-потенциала эллипсоида по любой из декартовых координат величину ξ можно рассматривать как постоянную, т. е. вместо (41.28) лучше пользоваться укороченным равенством

$$\frac{\partial\varphi_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}=\left(\frac{\partial\varphi_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}\right)_{\xi},\qquad(41.29)$$

и теми, которые получаются из (41.29) в результате циклической перестановки.

Продифференцируем теперь в соответствии с (41.29) выражение (41.19), заменив предварительно β на $\beta+1$. Учитывая, что дифференцирование по

[1] Здесь и далее буква ξ под скобками указывает, что производная берется при постоянном значении ξ.

x затрагивает в (41.19) лишь сумму по i и что при бесконечных пределах суммирования можно произвольно выбирать очередность следования сумм по i, j, k, получаем

$$\frac{\partial\varphi_{\alpha,\,\beta+1,\gamma}}{\partial x} = A_{\alpha,\,\beta+1,\gamma}\int\limits_{\xi}^{\infty} du \sum_{j,\,k} \frac{(-4)^{-j-k-1}\, y^{\,\beta-2j+1}\, z^{\,\gamma-2k}}{j!\,k!\,(\beta+1-2j)!\,(\gamma-2k)!\,\bar{b}^{\,2\beta-2j+3}\,\bar{c}^{\,2\gamma-2k+1}} \times$$
$$\times \left\{ \sum_{i} \frac{(-4)^{-i}\, x^{\,\alpha-2i-1}\, P^{\,i+j+k+1}}{i!\,(\alpha-2i-1)!\,(i+j+k+1)!\,\bar{a}^{\,2\alpha-2i+1}} - \right.$$
$$\left. - \; 2\sum_{i} \frac{(-4)^{-i}\, x^{\,\alpha-2i+1}\, P^{\,i+j+k}}{i!\,(\alpha-2i)!\,(i+j+k)!\,\bar{a}^{\,2\alpha-2i+3}} \right\}. \qquad (41.30)$$

Сделаем замену $i \to i-1$ в первой из сумм по i в (41.30), затем, объединив суммы по i, приведем подобные члены и восстановим исходную последовательность суммирования. В результате имеем

$$\frac{\partial\varphi_{\alpha,\,\beta+1,\gamma}}{\partial x} = B_{\alpha\beta\gamma} \times$$
$$\times \sum_{i,j,\,k} \frac{(-4)^{-i-j-k}\, x^{\,\alpha-2i+1}\, y^{\,\beta-2j+1}\, z^{\,\gamma-2k}}{i!\,j!\,k!\,(i+j+k)!\,(\alpha+1-2i)!\,(\beta+1-2j)!\,(\gamma-2k)!} \times$$
$$\times \int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{P^{\,i+j+k+1}du}{\bar{a}^{\,2\alpha-2i+1}\,\bar{b}^{\,2\beta-2j+3}\,\bar{c}^{\,2\gamma-2k+1}}, \qquad (41.31)$$

где

$$B_{\alpha\beta\gamma} = -\,\frac{(\alpha+1)!\,(\beta+1)!\,\gamma!}{2\,(\alpha+\beta+\gamma+1)!}\,(2\alpha+2\beta+2\gamma+5)\,(2\alpha+2\beta+2\gamma+3).$$

Нетрудно заметить, что правая часть формулы (41.31) не изменяет вида при одновременной взаимной замене $x \leftrightarrow y$ и $\alpha \leftrightarrow \beta$. Это означает существование равенства

$$\frac{\partial\varphi_{\alpha,\,\beta+1,\gamma}}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_{\alpha+1,\,\beta,\gamma}}{\partial y}\,, \qquad (41.32)$$

а следовательно, и равенств

$$\frac{\partial\varphi_{\alpha,\,\beta,\gamma+1}}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_{\alpha,\,\beta+1,\gamma}}{\partial z}\,, \qquad \frac{\partial\varphi_{\alpha+1,\,\beta,\gamma}}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_{\alpha,\,\beta,\gamma+1}}{\partial x}\,, \qquad (41.33)$$

вытекающих из (41.32) в результате циклической перестановки.

Еще одно полезное соотношение касается суммы

$$S_{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{\partial\varphi_{\alpha+1,\,\beta,\gamma}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_{\alpha,\,\beta+1,\gamma}}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_{\alpha,\,\beta,\gamma+1}}{\partial z}\,, \qquad (41.34)$$

которую, используя (41.33), можно представить как производную по z от свертки тензор-потенциала по двум (тензорным) индексам:

$$S_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_{\alpha+2,\,\beta,\gamma-1} + \varphi_{\alpha,\,\beta+2,\gamma-1} + \varphi_{\alpha,\,\beta,\gamma+1}\right). \qquad (41.35)$$

В (41.35) эта свертка дана в трехиндексной записи. Так как у неприводимых тензоров, к которым относится тензор-потенциал эллипсоида, свертка по любым двум индексам, по определению, равна нулю, то

$$\frac{\partial\varphi_{\alpha+1,\,\beta,\gamma}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{\alpha,\,\beta+1,\gamma}}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_{\alpha,\,\beta,\gamma+1}}{\partial z}=0. \tag{41.36}$$

Мы доказали, что (41.36) выполняется для любых неотрицательных целых чисел α, β, γ, кроме случая $\gamma=0$, при котором некоторые индексы в (41.35) оказываются отрицательными, что лишено смысла. При $\gamma=0$ сумма (41.34) с помощью (41.32) и левой формулы (41.33) представима в виде

$$S_{\alpha\beta 0}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi_{\alpha+2,\,\beta-1,\,0}+\varphi_{\alpha,\,\beta+1,\,0}+\varphi_{\alpha,\,\beta-1,\,2}\right),$$

где опять фигурирует производная от свертки тензора $\overleftrightarrow{\varphi}$. Значит, при $\gamma=0$ равенство (41.36) справедливо для любых неотрицательных целых значений α и β, кроме $\beta=0$. Аналогично при $\gamma=\beta=0$ сумма (41.34) с помощью (41.32) и правой формулы (41.33) вновь может быть записана как производная от свертки:

$$S_{\alpha 00}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_{\alpha+1,\,0,\,0}+\varphi_{\alpha-1,\,2,\,0}+\varphi_{\alpha-1,\,0,\,2}\right).$$

Таким образом, равенство (41.36) доказано для любых неотрицательных целых α, β, γ, кроме случая[1], когда одновременно $\gamma=\beta=\alpha=0$.

Этот случай проверяется непосредственно. Из формулы (41.17) при $l=m=n=0$ получаем

$$\varphi_{100}=\frac{15}{2\,abc}\left(\mathscr{M}_{100}-\frac{1}{3}\,\mathscr{M}_{200}\,x^2-\mathscr{M}_{110}\,y^2-\mathscr{M}_{101}\,z^2\right)x.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}S_{000}=\left\langle\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial x}\right\rangle&=\frac{15}{2\,abc}\left\langle\mathscr{M}_{100}-\mathscr{M}_{200}\,x^2-\mathscr{M}_{110}\,y^2-\mathscr{M}_{101}\,z^2\right\rangle=\\&=\frac{15}{2\,abc}\left\{\langle\mathscr{M}_{100}\rangle-\left\langle(\mathscr{M}_{200}+\mathscr{M}_{110}-\mathscr{M}_{101})\,x^2\right\rangle\right\},\end{aligned} \tag{41.37}$$

где внутри угловых скобок мы использовали возможность циклической замены. Применение к (41.37) формулы (4.7)

$$\mathscr{M}_{l+1,m,n}+\mathscr{M}_{l,m+1,n}+\mathscr{M}_{l,m,n+1}=\frac{(2l-1)!!\,(2m-1)!!\,(2n-1)!!\,abc}{\widetilde{a}^{\,2l+1}\,\widetilde{b}^{\,2m+1}\,\widetilde{c}^{\,2n+1}}$$

и равенства (41.22) дает окончательно

$$S_{000}=\frac{15}{2\,\widetilde{a}\,\widetilde{b}\,\widetilde{c}}\,P(\mathbf{r},\xi)=0\,,$$

где, подобно (41.21), для краткости введены обозначения

$$\widetilde{a}=\sqrt{a^2+\xi},\qquad \widetilde{b}=\sqrt{b^2+\xi},\qquad \widetilde{c}=\sqrt{c^2+\xi}. \tag{41.38}$$

[1] Доказательство, опирающееся на использование свертки, возможно, если число тензорных индексов (ранг тензора) не становится меньше двух.

Итак, доказательство справедливости соотношения (41.36) для произвольных неотрицательных целых чисел α, β, γ завершено.

Дифференциальные соотношения (41.32), (41.33) и (41.36) можно записать и в обычном тензорном виде:

$$\frac{\partial \varphi_{j\, i_1 \ldots i_\varkappa}}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_{k\, i_1 \ldots i_\varkappa}}{\partial x_j} = 0\,, \tag{41.39}$$

$$\frac{\partial \varphi_{j\, i_1 \ldots i_\varkappa}}{\partial x_j} = 0 \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots). \tag{41.40}$$

Таким образом, к симметрии и неприводимости тензор-потенциала эллипсоида добавляются дифференциальные свойства (41.39) и (41.40), которые можно трактовать как равенство нулю ротора и дивергенции этого тензор-потенциала. Отсюда следует, учитывая операторное векторное тождество

$$\nabla \times (\nabla \times \ldots) = \nabla\, (\nabla \cdot \ldots) - \Delta\, (\ldots), \tag{41.41}$$

что каждая компонента тензор-потенциала эллипсоида является гармонической функцией.

§ 42. Тензор-потенциал гомеоида и его свойства

42.1. Операторная структура

В данном параграфе обсуждается тот же круг вопросов, что и в предыдущем, но теперь применительно к гомеоиду. Поэтому близка к принятой в § 41 и последовательность изложения материала.

Если в формулах (40.22)–(40.25) раскрыть действие операторов $\widehat{\alpha}_a$, $\widehat{\alpha}_b$, $\widehat{\alpha}_c$ и $\widehat{J}_a$, $\widehat{J}_b$, $\widehat{J}_c$, а также (если они встречаются) операторов $\widehat{I}_a$, $\widehat{I}_b$, $\widehat{I}_c$, то эти формулы можно записать соответственно в виде следующих двойных сумм:

$$\Psi^{(2\varepsilon)}_{EEE} = (4\varepsilon - 1)!! \sum_{l+m+n=\varepsilon} \frac{(2\varepsilon)!\, \mathrm{i}_{2l,2m,2n}\, \psi_{2l,2m,2n}}{(2l)!\,(2m)!\,(2n)!}\,, \tag{42.1}$$

$$\Psi^{(2\varepsilon)}_{OOE} = (4\varepsilon - 1)!! \sum_{l+m+n=\varepsilon-1} \frac{(2\varepsilon)!\, \mathrm{i}_{2l+1,2m+1,2n}\, \psi_{2l+1,2m+1,2n}}{(2l+1)!\,(2m+1)!\,(2n)!}\,, \tag{42.2}$$

$$\Psi^{(2\varepsilon+1)}_{OOO} = (4\varepsilon + 1)!! \sum_{l+m+n=\varepsilon-1} \frac{(2\varepsilon+1)!\, \mathrm{i}_{2l+1,2m+1,2n+1}\, \psi_{2l+1,2m+1,2n+1}}{(2l+1)!\,(2m+1)!\,(2n+1)!}\,, \tag{42.3}$$

$$\Psi^{(2\varepsilon+1)}_{OEE} = (4\varepsilon + 1)!! \sum_{l+m+n=\varepsilon} \frac{(2\varepsilon+1)!\, \mathrm{i}_{2l+1,2m,2n}\, \psi_{2l+1,2m,2n}}{(2l+1)!\,(2m)!\,(2n)!}\,. \tag{42.4}$$

Вместо выражений (42.1)–(42.4) можно использовать единую общую формулу либо в трехиндексной записи

$$\Psi^{(\nu)} = (2\nu - 1)!! \sum_{i+j+k=\nu} \frac{\nu!}{i!\,j!\,k!}\, \mathrm{i}_{ij\,k}\, \psi_{ij\,k}\,, \tag{42.5}$$

либо в обычной тензорной

$$\Psi^{(\nu)} = (2\nu-1)!!\, \mathfrak{i}_{j_1\ldots j_\nu} \psi_{j_1\ldots j_\nu}, \tag{42.6}$$

справедливой как для четных, так и для нечетных значений ν. Здесь

$$\mathfrak{i}_{j_1\ldots j_\nu} = (2\nu+3)\widetilde{\mathfrak{i}}_{j_1\ldots j_\nu} = \frac{4\pi\,\nu!}{(2\nu+1)!!}\, abc\, a_{(j_1)}\cdots a_{(j_\nu)}\, \alpha_{j_1\ldots j_\nu}\,, \tag{42.7}$$

а зависящие от четности индексов трехиндексные компоненты тензора $\overset{\leftrightarrow}{\psi}{}^{(\nu)}$ даются формулами

$$\psi_{2l,2m,2n} = \frac{4\varepsilon+1}{(2\varepsilon)!\,(2\varepsilon)!!\,abc}\, \widehat{\mu}_a^l\, \widehat{\mu}_b^m \widehat{\mu}_c^n \left(\left\langle \widehat{J}_x \widehat{\mu}_a \right\rangle - 1\right)^{\varepsilon} \mathscr{M}_{000}\,(\xi) \qquad (\varepsilon = l+m+n \geqslant 0), \tag{42.8}$$

$$\psi_{2l+1,2m+1,2n} = \frac{4\varepsilon+1}{(2\varepsilon)!(2\varepsilon-2)!!\,abc}\; \widehat{I}_x\, \widehat{I}_y\, \widehat{\mu}_a^{l+1}\, \widehat{\mu}_b^{m+1} \widehat{\mu}_c^n \times \\ \times \left(\left\langle \widehat{J}_x \widehat{\mu}_a \right\rangle - 1\right)^{\varepsilon-1} \mathscr{M}_{000}\,(\xi) \qquad (\varepsilon-1 = l+m+n \geqslant 0), \tag{42.9}$$

$$\psi_{2l+1,2m,2n} = \frac{4\varepsilon+3}{(2\varepsilon+1)!(2\varepsilon)!!\,abc}\, \widehat{I}_x\, \widehat{\mu}_a^{l+1}\, \widehat{\mu}_b^m \widehat{\mu}_c^n \times \\ \times \left(\left\langle \widehat{J_x \widehat{\mu}_a} \right\rangle - 1\right)^{\varepsilon} \mathscr{M}_{000}\,(\xi) \qquad (\varepsilon = l+m+n \geqslant 0)\,, \tag{42.10}$$

$$\psi_{2l+1,2m+1,2n+1} = \frac{4\varepsilon+3}{(2\varepsilon+1)!(2\varepsilon-2)!!\,abc}\, \widehat{I}_x \widehat{I}_y \widehat{I}_z\, \widehat{\mu}_a^{l+1}\, \widehat{\mu}_b^{m+1} \widehat{\mu}_c^{n+1} \times \\ \times \left(\left\langle \widehat{J_x \widehat{\mu}_a} \right\rangle - 1\right)^{\varepsilon-1} \mathscr{M}_{000}\,(\xi) \qquad (\varepsilon-1 = l+m+n \geqslant 0). \tag{42.11}$$

Фигурирующий в формулах (42.1)–(42.6) и определенный явно операторными выражениями (42.8)–(42.11) тензор $\psi_{j_1\ldots j_\nu}$ будем называть *тензор-потенциалом гомеоида.* Обсуждению свойств этой важной величины и посвящен данный параграф.

42.2. Неприводимость

Доказательство того, что вне эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

свертка тензор-потенциала гомеоида равна нулю, аналогично доказательству неприводимости тензора $\varphi_{j_1\ldots j_\nu}$.

Будем использовать трехиндексную запись ψ_{lmn} тензора $\overset{\leftrightarrow}{\psi}$ и введем упрощающие написание последующих формул операторы $\widehat{\psi}_a$, $\widehat{\psi}_b$, $\widehat{\psi}_c$, которые воздействуют только на тензор ψ_{lmn}, увеличивая при этом соответствующий (первый, второй или третий) его индекс на две единицы. Таким образом, свертка тензора $\overleftrightarrow{\psi}$ в трехиндексной записи[1] есть $<\widehat{\psi}_a>\psi_{lmn}$. Рассмотрим случаи различных по четности наборов индексов.

В EEE-случае применение $<\widehat{\psi}_a>$ к (42.8) с учетом коммутационных свойств операторов $\widehat{\mu}$ дает

$$<\widehat{\psi}_a>\psi_{2l,2m,2n} = C_1\,\widehat{\mu}_a^l\,\widehat{\mu}_b^m\,\widehat{\mu}_c^n\left(\left\langle\widehat{J}_x\widehat{\mu}_a\right\rangle - 1\right)^{\varepsilon+1}\langle\widehat{\mu}_a\rangle\,\mathscr{M}_{000}\,(\xi)\,,$$

где $\varepsilon = l+m+n$, а C_1 – не представляющий интереса постоянный множитель. Используя (40.8) и (41.12), получаем

$$<\widehat{\psi}_a>\psi_{2l,2m,2n} = C_1\,\widehat{\partial}_a^l\,\widehat{\partial}_b^m\,\widehat{\partial}_c^n\left(\left\langle\frac{x^2}{\widetilde{a}^2}\right\rangle - 1\right)^{\varepsilon+1}\frac{abc}{\widetilde{a}\widetilde{b}\widetilde{c}}.$$

Поскольку порядок производной, соответствующий оператору $\widehat{\partial}_a^l\widehat{\partial}_b^m\,\widehat{\partial}_c^n$, равен ε, т. е. меньше показателя степени у величины $\left(\left\langle x^2/\widetilde{a}^2\right\rangle - 1\right)^{\varepsilon+1}$, то у результата дифференцирования остается общий множитель вида $\left\langle x^2/\widetilde{a}^2\right\rangle - 1$, который для точек наблюдения вне эллипсоида (38.16) равен нулю в соответствии с определением (38.4) эллипсоидальной координаты.

В OEE-случае из (42.10), используя (41.12), получаем

$$<\widehat{\psi}_a>\psi_{2l+1,2m,2n} = C_2\,\widehat{\partial}_a^l\,\widehat{\partial}_b^m\,\widehat{\partial}_c^n\widehat{I}_x\,\widehat{\mu}_a\left(\left\langle\frac{x^2}{\widetilde{a}^2}\right\rangle - 1\right)^{\varepsilon+1}\frac{abc}{\widetilde{a}\widetilde{b}\widetilde{c}}, \qquad (42.12)$$

где C_2 – постоянный коэффициент. К (42.12) приложимо равенство (41.13), использование которого сводит дальнейшее рассмотрение к тому же, что только что обсуждалось в EEE-случае. Так что $<\widehat{\psi}_a>\psi_{2l+1,2m,2n} = 0$.

Подобным же образом легко удостовериться, что обращаются в нуль и свертки тензор-потенциала гомеоида в OOO- и OOE-случаях, т. е. тензор $\overleftrightarrow{\psi}$ действительно неприводим.

42.3. Явные выражения

Раскрывая действие операторов в (42.8)–(42.11), находим выражения для компонент тензора-потенциала $\overleftrightarrow{\psi}$ гомеоида в следующем явном виде:

$$\psi_{2l,2m,2n} = (-1)^{\varepsilon}\frac{4\varepsilon+1}{(2\varepsilon)!\,abc}\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{\varepsilon}\sum_{j=0}^{\varepsilon-i}\sum_{k=0}^{\varepsilon-i-j}\frac{(-1)^{i+j+k}\,x^{2i}y^{2j}z^{2k}\,\mathscr{M}_{i+l,j+m,\,k+n}(\xi)}{[2(\varepsilon-i-j-k)]!!\,(2\,i)!\,(2j)!\,(2k)!}, \qquad (42.13)$$

$$\psi_{2l+1,2m+1,2n} = (-1)^{\varepsilon+1}\frac{4\varepsilon+1}{(2\varepsilon)!\,abc}\,xy\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{\varepsilon-1}\sum_{j=0}^{\varepsilon-1-i}\sum_{k=0}^{\varepsilon-1-i-j}\frac{(-1)^{i+j+k}\,x^{2i}y^{2j}z^{2k}\,\mathscr{M}_{i+l+1,j+m+1,\,k+n}\,(\xi)}{[2(\varepsilon-1-i-j-k)]!!\,(2i+1)!\,(2j+1)!\,(2k)!}, \qquad (42.14)$$

[1] Ср. с (40.9).

$$\psi_{2l+1,2m,2n} = (-1)^{\varepsilon} \frac{4\varepsilon+3}{(2\varepsilon+1)!\,abc}\, x \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\varepsilon-i} \sum_{k=0}^{\varepsilon-i-j} \frac{(-1)^{i+j+k} x^{2i} y^{2j} z^{2k} \mathscr{M}_{i+l+1,j+m,k+n}(\xi)}{[2(\varepsilon-i-j-k)]!!\,(2i+1)!\,(2j)!\,(2k)!}, \quad (42.15)$$

$$\psi_{2l+1,2m+1,2n+1} = (-1)^{\varepsilon+1} \frac{4\varepsilon+3}{(2\varepsilon+1)!\,abc}\, xyz \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{\varepsilon-1} \sum_{j=0}^{\varepsilon-1-i} \sum_{k=0}^{\varepsilon-1-i-j} \frac{(-1)^{i+j+k} x^{2i} y^{2j} z^{2k} \mathscr{M}_{i+l+1,j+m+1,k+n+1}(\xi)}{[2(\varepsilon-1-i-j-k)]!!\,(2i+1)!\,(2j+1)!\,(2k+1)!}. \quad (42.16)$$

При этом следует иметь в виду, что в формулах (42.13) и (42.15) выполняется равенство $\varepsilon = l+m+n \geqslant 0$, а в формулах (42.14) и (42.16) выполняется $\varepsilon-1 = l+m+n \geqslant 0$.

Ниже в форме таблицы даны развернутые выражения для ψ_{lmn}, соответствующие простейшим частным случаям формул (42.13)–(42.16).

Таблица декартовых компонент тензор-потенциала гомеоида

$$\psi_{000} = \frac{1}{abc} \mathscr{M}_{000};$$

$$\psi_{100} \equiv \psi_x = \frac{3}{abc} \mathscr{M}_{100}\, x;$$

$$\psi_{200} \equiv \psi_{xx} = -\frac{5}{4\,abc} \left(\mathscr{M}_{100} - \mathscr{M}_{200}\, x^2 - \mathscr{M}_{110}\, y^2 - \mathscr{M}_{101}\, z^2\right),$$

$$\psi_{110} \equiv \psi_{xy} = \frac{5}{2\,abc} \mathscr{M}_{110}\, xy;$$

$$\psi_{300} \equiv \psi_{xxx} = -\frac{7}{12\,abc} \left(\mathscr{M}_{200} - \frac{1}{3}\mathscr{M}_{300}\, x^2 - \mathscr{M}_{210}\, y^2 - \mathscr{M}_{201}\, z^2\right) x,$$

$$\psi_{120} \equiv \psi_{xyy} = -\frac{7}{12\,abc} \left(\mathscr{M}_{110} - \frac{1}{3}\mathscr{M}_{210}\, x^2 - \mathscr{M}_{120}\, y^2 - \mathscr{M}_{111}\, z^2\right) x,$$

$$\psi_{111} \equiv \psi_{xyz} = \frac{7}{6\,abc} \mathscr{M}_{111}\, xyz;$$

$$\psi_{400} \equiv \psi_{xxxx} = \frac{3}{32\,abc} \left[\frac{1}{2} \mathscr{M}_{200} - \mathscr{M}_{300}\, x^2 - \mathscr{M}_{210}\, y^2 - \mathscr{M}_{201}\, z^2 + \right.$$

$$+ \frac{1}{6} \left(\mathscr{M}_{400}\, x^4 + \mathscr{M}_{220}\, y^4 + \mathscr{M}_{202}\, z^4\right) +$$

$$\left. + \mathscr{M}_{310}\, x^2y^2 + \mathscr{M}_{211}\, y^2z^2 + \mathscr{M}_{301}\, x^2z^2\right],$$

$$\psi_{310} \equiv \psi_{xxxy} = -\frac{3}{16\,abc} \left(\mathscr{M}_{210} - \frac{1}{3}\mathscr{M}_{310}\, x^2 - \frac{1}{3}\mathscr{M}_{220}\, y^2 - \mathscr{M}_{211}\, z^2\right) xy,$$

$$\psi_{220} \equiv \psi_{xxyy} = \frac{3}{32\,abc}\left[\frac{1}{2}\mathscr{M}_{110} - \mathscr{M}_{210}\,x^2 - \mathscr{M}_{120}\,y^2 - \mathscr{M}_{111}\,z^2 + \right.$$
$$+ \frac{1}{6}\left(\mathscr{M}_{310}\,x^4 + \mathscr{M}_{130}\,y^4 + \mathscr{M}_{112}\,z^4\right) +$$
$$\left. + \mathscr{M}_{220}\,x^2y^2 + \mathscr{M}_{121}\,y^2z^2 + \mathscr{M}_{211}\,x^2z^2\right],$$

$$\psi_{112} \equiv \psi_{xyzz} = -\frac{3}{16\,abc}\left(\mathscr{M}_{111} - \frac{1}{3}\mathscr{M}_{211}\,x^2 - \frac{1}{3}\mathscr{M}_{121}\,y^2 - \mathscr{M}_{112}\,z^2\right)xy.$$

В эту таблицу не включены выражения для компонент тензор-потенциала гомеоида, которые получаются с помощью циклической или взаимной замены координат из выражений, приведенных в таблице.

42.4. Общая формула

Единую общую формулу для тензор-потенциала гомеоида, подобную (41.19) и справедливую (в трехиндексной записи) для индексов произвольной четности, проще всего получить, используя правило Ферерса (20.5). Это правило (см. § 20) позволяет по известному объемному потенциалу распределенных в теле зарядов плотности ϱ, где ϱ — однородная (степени ν) функция координат x, y, z, находить потенциал распределенных на поверхности того же тела зарядов плотности $\sigma = \varrho p$.

В случае эллипсоидального тела правило Ферерса (20.5) непосредственно применимо к парциальному потенциалу $\Phi^{(\nu)}$ эллипсоида, давая в результате парциальный потенциал гомеоида

$$\Psi^{(\nu)} = \widehat{F}^{(\nu)}\Phi^{(\nu)}. \tag{42.17}$$

Поскольку оператор Ферерса $\widehat{F}^{(\nu)}$ (см. (20.6)) является линейным дифференциальным оператором, то после подстановки в (42.17) выражений (42.6) и (41.6) и с учетом пропорциональной связи (42.7) тензоров $\mathfrak{i}_{j_1\ldots j_\nu}$ и $\widetilde{\mathfrak{i}}_{j_1\ldots j_\nu}$ сразу возникает соотношение

$$\psi_{j_1\ldots j_\nu} = \frac{1}{2\nu+3}\,\widehat{F}^{(\nu)}\varphi_{j_1\ldots j_\nu}\,, \tag{42.18}$$

или в трехиндексной записи

$$\psi_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\nu+3}\,\widehat{F}^{(\nu)}\varphi_{\alpha\beta\gamma} \qquad (\nu = \alpha+\beta+\gamma)\,. \tag{42.19}$$

Учитывая (41.29) и замечая (ср. (21.4)), что воздействие оператора $\widehat{F}^{(\nu)}$ на подынтегральное выражение в (41.19) равносильно удвоенному результату дифференцирования этого выражения по P как по независимой переменной, из (41.19) и (42.18) нетрудно получить формулу

$$\psi_{\alpha\beta\gamma} = \int\limits_{\xi}^{\infty} du\, C_{\alpha\beta\gamma} \sum_{i,j,\,k} \frac{(-4)^{-i-j-k}\,x^{\alpha-2i}\,y^{\beta-2j}\,z^{\gamma-2k}}{i!\,j!\,k!\,(\alpha-2i)!\,(\beta-2j)!\,(\gamma-2k)!\,(i+j+k)!}\times$$
$$\times\frac{P^{i+j+k}}{\overline{a}^{\,2\alpha-2i+1}\,\overline{b}^{\,2\beta-2j+1}\,\overline{c}^{\,2\gamma-2k+1}}\,, \tag{42.20}$$

справедливую, как и (41.19), для индексов любой четности. Здесь для сокращения записи введено обозначение

$$C_{\alpha\beta\gamma} = -\,\frac{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,(2\alpha+2\beta+2\gamma+1)}{2\,(\alpha+\beta+\gamma)!}$$

и, как и в (41.19),

$$\bar a = \sqrt{a^2+u}, \qquad \bar b = \sqrt{b^2+u}, \qquad \bar c = \sqrt{c^2+u}, \tag{42.21}$$

$$P(\mathbf{r},u) \equiv 1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u} = 1 - \left\langle \frac{x^2}{\bar a^2} \right\rangle .$$

Формула (42.20) облегчает установление дифференциальных свойств тензор-потенциала гомеоида.

42.5. Дифференциальные свойства, «гармоничность»

Вычисляя производную по x выражения (42.20), следует иметь в виду, что в отличие от (41.28) в аналогичной формуле для ψ

$$\frac{\partial \psi_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x} = \left(\frac{\partial \psi_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}\right)_{\xi} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\, f_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r},\xi)$$

второй член правой части теперь отличен от нуля, поскольку первое слагаемое ($i = j = k = 0$) суммы, входящей в подынтегральное выражение $f_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r},u)$ в (42.20), не содержит $P(\mathbf{r},u)$. Таким образом,

$$\frac{\partial \psi_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x} = \left(\frac{\partial \psi_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}\right)_{\xi} - \frac{2\nu+1}{\nu!}\,\frac{p^2(\xi)\,x^{\alpha+1}\,y^{\beta}\,z^{\gamma}}{\widetilde a^{\,2\alpha+3}\,\widetilde b^{\,2\beta+1}\,\widetilde c^{\,2\gamma+1}} \qquad (\nu = \alpha+\beta+\gamma)\,, \tag{42.22}$$

где

$$p^2(\xi) = \left\langle x^2 / \widetilde a^{\,4} \right\rangle^{-1} . \tag{42.23}$$

Если в (42.22) заменить β на $\beta+1$, то второй член правой части становится симметричным относительно одновременной взаимной замены $x \leftrightarrow y$ и $\alpha \leftrightarrow \beta$. В том, что аналогичное свойство присуще и первому слагаемому, т. е. выполняется равенство $(\partial\psi_{\alpha,\,\beta+1,\gamma}/\partial x)_{\xi} = (\partial\psi_{\alpha+1,\,\beta,\gamma}/\partial y)_{\xi}$, легко убедиться, повторяя при вычислении $(\partial\psi_{\alpha,\,\beta+1,\gamma}/\partial x)_{\xi}$ те же преобразования, которые сопровождали получение формул (41.30) и (41.31). Из сказанного следует, что между компонентами тензор-потенциала гомеоида существуют такие же дифференциальные соотношения

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \psi_{\alpha,\,\beta+1,\gamma}}{\partial x} = \frac{\partial \psi_{\alpha+1,\,\beta,\gamma}}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial \psi_{\alpha,\,\beta,\gamma+1}}{\partial y} = \frac{\partial \psi_{\alpha,\,\beta+1,\gamma}}{\partial z}\,, \\
\frac{\partial \psi_{\alpha+1,\,\beta,\gamma}}{\partial z} = \frac{\partial \psi_{\alpha,\,\beta,\gamma+1}}{\partial x}\,,
\end{gathered} \tag{42.24}$$

какие связывают компоненты тензор-потенциала эллипсоида.

Из этой аналогии сразу следует формула

$$\frac{\partial \psi_{\alpha+1,\,\beta,\gamma}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{\alpha,\,\beta+1,\gamma}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{\alpha,\,\beta,\gamma+1}}{\partial z} = 0\,. \tag{42.25}$$

подобная (41.36). Доказательство последней опиралось на формулы (41.32), (41.33), использовало свойство неприводимости тензор-потенциала эллипсоида и требовало проверки в случае $\alpha=\beta=\gamma=0$. Для тензор-потенциала гомеоида необходимые равенства (42.24) и свойство неприводимости имеют место, поэтому доказательство справедливости (42.25) для любых неотрицательных целых чисел α, β, γ сводится к проверке выполнения (42.25) при $\alpha=\beta=\gamma=0$. Сделаем эту проверку.

Из (42.20) получаем

$$\psi_{100} = \frac{3}{2}\int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{x\,du}{\bar{a}^3\bar{b}\bar{c}} = \frac{3}{abc}\,\mathscr{M}_{100}\,x\,.$$

Поэтому, согласно (42.22),

$$\left\langle \frac{\partial\psi_{100}}{\partial x} \right\rangle = \frac{3}{abc}\,\langle\mathscr{M}_{100}\rangle - \frac{3}{\widetilde{a}\widetilde{b}\widetilde{c}}\,p^2(\xi)\,\left\langle x^2\,/\widetilde{a}^{\,4}\right\rangle = 0\,,$$

где обращение в нуль обнаруживается после использования (4.7) и учета (42.23). Таким образом, формула (42.25) верна для любых неотрицательных индексов α, β, γ.

Дифференциальные соотношения (42.24) и (42.25) в обычном тензорном виде даются соответственно формулами:

$$\frac{\partial\psi_{j\,i_1\ldots\,i_\nu}}{\partial x_k} - \frac{\partial\psi_{k\,i_1\ldots\,i_\nu}}{\partial x_j} = 0\,, \tag{42.26}$$

$$\frac{\partial\psi_{j\,i_1\ldots\,i_\nu}}{\partial x_j} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots). \tag{42.27}$$

Таким образом, к симметрии и неприводимости тензор-потенциала гомеоида добавляются общие свойства (42.26) и (42.27), которые можно трактовать как равенство нулю ротора и дивергенции этого тензор-потенциала. Отсюда следует, учитывая операторное векторное тождество

$$\nabla\times(\nabla\times\ldots) = \nabla\,(\nabla\cdot\ldots) - \Delta\,(\ldots),$$

что каждая компонента тензор-потенциала гомеоида является гармонической функцией.

§ 43. Парциальные моменты эллипсоида

Воспользуемся теперь общими определениями мультипольных моментов (35.6)

$$Q_{j_1\ldots j_\lambda} = \begin{cases} \displaystyle\int \varrho(\mathbf{r})\theta_{j_1\ldots j_\lambda}(\mathbf{r})\,dV, \\[2ex] \displaystyle\oint \sigma(\mathbf{r})\theta_{j_1\ldots j_\lambda}(\mathbf{r})\,dS \end{cases} \tag{43.1}$$

и «моментов инерции» (35.8)

$$I_{j_1\ldots j_\lambda} = \begin{cases} \displaystyle\int \varrho(\mathbf{r}) x_{j_1}\cdots x_{j_\lambda}\, dV, \\ \\ \displaystyle\oint \sigma(\mathbf{r}) x_{j_1}\cdots x_{j_\lambda}\, dS \end{cases}, \tag{43.2}$$

применяя их к эллипсоидальному объекту, уравнение границы которого есть

$$\left\langle x^2/a^2\right\rangle = 1. \tag{43.3}$$

Если в (43.1) и (43.2) подставить парциальные плотности (см. (39.10) и (39.4))

$$\varrho^{(\nu)} = \alpha_{i_1\ldots i_\nu} \frac{x_{i_1}}{a_{(i_1)}} \cdots \frac{x_{i_\nu}}{a_{(i_\nu)}}, \tag{43.4}$$

$$\sigma^{(\nu)} = \varrho^{(\nu)} p, \tag{43.5}$$

то возникающие мультипольные моменты

$$\widetilde{q}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda} = \int \varrho^{(\nu)}\, \theta_{j_1\ldots j_\lambda}\, dV, \tag{43.6}$$

$$q^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda} = \oint \varrho^{(\nu)}\, \theta_{j_1\ldots j_\lambda}\, p\, dS \tag{43.7}$$

и «моменты инерции»

$$\widetilde{\mathfrak{i}}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda} = \int \varrho^{(\nu)}\, x_{j_1}\ldots x_{j_\lambda} dV, \tag{43.8}$$

$$\mathfrak{i}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda} = \oint \varrho^{(\nu)}\, x_{j_1}\ldots x_{j_\lambda} p\, dS \tag{43.9}$$

будем называть *парциальными*. В силу (43.5) между интегралами (43.6) и (43.7), а также (43.8) и (43.9) существует однозначная связь (см. (43.13), (43.14)), которую удобно использовать и которая потребовала различия в обозначении парциальных моментов, даваемых объемными и поверхностными интегралами.

С помощью замены переменных

$$x = a\,x', \quad y = b\,y', \quad z = c\,z' \tag{43.10}$$

перейдем к интегрированию в (43.6) и (43.8) по объему, а в (43.7) и (43.9) по поверхности шара единичного радиуса. Если ввести единичный вектор $\mathbf{n}' = \mathbf{r}'/r'$ радиуса-вектора $\mathbf{r}'$, соответствующего безразмерным координатам x', y', z', то в случаях (43.6) и (43.8) соотношения (43.10) заменяются на

$$x = ar'n'_x, \quad y = br'n'_y, \quad z = cr'n'_z, \quad dV = abc\,{r'}^2 dr'\, d\Omega', \tag{43.11}$$

а в случаях (43.7) и (43.9) — на

$$x = an'_x, \quad y = bn'_y, \quad z = cn'_z, \quad p\,dS = abc\,d\Omega', \tag{43.12}$$

где $d\Omega'$ — элемент телесного угла (элемент поверхности единичной сферы). Выполняя указанные замены и интегрируя (43.6) и (43.8) по r' от 0 до 1, получаем

$$\widetilde{q}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda} = \frac{q^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda}}{\lambda+\nu+3}\,, \tag{43.13}$$

$$\widetilde{\mathfrak{i}}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda} = \frac{\mathfrak{i}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda}}{\lambda+\nu+3}\,, \tag{43.14}$$

$$q^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda} = abc\,\alpha_{i_1\ldots i_\nu}\oint n'_{i_1}\ldots n'_{i_\nu}\theta^0_{j_1\ldots j_\lambda}d\Omega'\,, \tag{43.15}$$

$$\mathfrak{i}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda} = abc\,\alpha_{i_1\ldots i_\nu}a_{(j_1)}\ldots a_{(j_\lambda)}\oint n'_{i_1}\ldots n'_{i_\nu}n'_{j_1}\ldots n'_{j_\lambda}d\Omega'\,, \tag{43.16}$$

где

$$\theta^0_{j_1\ldots j_\lambda} = \sum_{s=0}^{[\lambda/2]}(-1)^s(2\lambda-2s-1)!!\langle a^2 n'^2_x\rangle^s\times$$
$$\times\langle\langle\delta_{j_1j_2}\ldots\delta_{j_{2s-1}j_{2s}}a_{(j_{2s+1})}n'_{j_{2s+1}}\ldots a_{(j_\lambda)}n'_{j_\lambda}\rangle\rangle\,. \tag{43.17}$$

Как известно (см., например, [159, 483]), интеграл по всему телесному углу от произведения компонент единичного вектора отличен от нуля лишь в случае четного числа сомножителей и при этом равен

$$\oint n'_{i_1}\ldots n'_{i_{2l}}d\Omega' = \frac{4\pi}{(2l+1)!!}\,\langle\langle\delta_{i_1i_2}\ldots\delta_{i_{2l-1}j_{2l}}\rangle\rangle\,. \tag{43.18}$$

Поэтому ненулевые компоненты парциальных моментов (43.13)–(43.16) возможны лишь при совпадении четности чисел λ и ν. Но и при одинаковой четности λ и ν парциальные моменты равны нулю, если $\lambda<\nu$. Так, из (43.16) и (43.18) при $\lambda<\nu$ получаем

$$\mathfrak{i}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda} = \frac{4\pi abc}{(\lambda+\nu+1)!!}\,\alpha_{i_1\ldots i_\nu}a_{(j_1)}\ldots a_{(j_\lambda)}\times$$
$$\times\langle\langle\delta_{i_1j_1}\ldots\delta_{i_\lambda j_\lambda}\delta_{i_{\lambda+1}i_{\lambda+2}}\ldots\delta_{i_{\nu-1}i_\nu}\rangle\rangle\,.$$

Любое слагаемое этой формулы, входящее в операцию симметризации, содержит хотя бы один символ Кронекера, оба индекса которого принадлежат i-семейству, что приводит к свертке неприводимого тензора $\overleftrightarrow{\alpha}$ по этим индексам, т. е. к нулю. Аналогично из (43.15), (43.17) и (43.18) вытекает, что при $\lambda<\nu$ обращаются в нуль и тензоры $q^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda}$. Таким образом, с учетом (43.13) и (43.14) имеем

$$\widetilde{q}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda} = q^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda} = \widetilde{\mathfrak{i}}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda} = \mathfrak{i}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda} = 0 \qquad \text{при} \quad \lambda<\nu. \tag{43.19}$$

Пусть теперь

$$\lambda = \nu+2k \qquad (k=0,1,2,\ldots). \tag{43.20}$$

Тогда из (43.16) и (43.18) получаем

$$\mathfrak{i}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda} = \frac{4\pi abc}{(\lambda+\nu+1)!!}\,\alpha_{i_1\ldots i_\nu}a_{(j_1)}\ldots a_{(j_\lambda)}\times$$

$$\times \langle\langle \delta_{i_1 j_1} \dots \delta_{i_\nu j_\nu} \delta_{j_{\nu+1} j_{\nu+2}} \dots \delta_{j_{\lambda-1} j_\lambda} \rangle\rangle .$$

Среди слагаемых этой формулы нет таких, у которых оба индекса какого-нибудь символа Кронекера принадлежат i-семейству, ибо, как объяснялось выше, такие члены равны нулю. Поэтому $\overleftrightarrow{\alpha}$ можно внести внутрь ломаных скобок, при этом умножая результат на $\nu!$, что учитывает симметричность тензора $\overleftrightarrow{\alpha}$. Таким образом, окончательно

$$\mathfrak{i}^{(\nu)}_{j_1 \dots j_\lambda} = \frac{4\pi\nu!\, abc}{(\lambda+\nu+1)!!}\, a_{(j_1)} \dots a_{(j_\lambda)} \langle\langle \alpha_{j_1 \dots j_\nu} \delta_{j_{\nu+1} j_{\nu+2}} \dots \delta_{j_{\lambda-1} j_\lambda} \rangle\rangle. \qquad (43.21)$$

Итак, непосредственным вычислением показано, что при выполнении условия (43.20) «моменты инерции» $\mathfrak{i}^{(\nu)}_{j_1 \dots j_\lambda}$, а значит, в силу (43.14), и $\widetilde{\mathfrak{i}}^{(\nu)}_{j_1 \dots j_\lambda}$ отличны от нуля. Наконец, то, что при условии (43.20) не равны нулю парциальные мультиполи $q^{(\nu)}_{j_1 \dots j_\lambda}$ и $\widetilde{q}^{(\nu)}_{j_1 \dots j_\lambda}$, является следствием предыдущего вывода и равенства (35.9), записанного для парциальных моментов.

Среди ненулевых парциальных моментов любого из видов (43.6)–(43.9) особый интерес представляют те, у которых при фиксированном ν минимален ранг λ. Из только что проведенных рассуждений следует, что для этих (первых неисчезающих, или низших ненулевых) парциальных моментов $\lambda = \nu$. Учитывая, что операция $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ над симметричным тензором дает сам этот тензор, из (43.21) и (43.14) для первых неисчезающих парциальных «моментов инерции» получаем [1]

$$\mathfrak{i}_{j_1 \dots j_\nu} = \frac{4\pi\nu!\, abc}{(2\nu+1)!!}\, a_{(j_1)} \dots a_{(j_\nu)} \alpha_{j_1 \dots j_\nu} , \qquad (43.22)$$

$$\widetilde{\mathfrak{i}}_{j_1 \dots j_\nu} = \frac{4\pi\nu!\, abc}{(2\nu+3)!!}\, a_{(j_1)} \dots a_{(j_\nu)} \alpha_{j_1 \dots j_\nu} . \qquad (43.23)$$

Заметим, что тензоры $\mathfrak{i}_{j_1 \dots j_\nu}$ и $\widetilde{\mathfrak{i}}_{j_1 \dots j_\nu}$, благодаря их прямому выражению через симметричный неприводимый тензор $\alpha_{j_1 \dots j_\nu}$, имеют, как и тензоры $q_{j_1 \dots j_\nu}$ и $\widetilde{q}_{j_1 \dots j_\nu}$, по $2\nu + 1$ независимой компоненте.

§ 44. Мультипольное представление внешних потенциалов $\Phi^{(\nu)}$ и $\Psi^{(\nu)}$

В найденных в § 41 и § 42 выражениях (41.6) и (42.6) для парциальных потенциалов эллипсоида

$$\Phi^{(\nu)} = (2\nu - 1)!!\, \widetilde{\mathfrak{i}}_{j_1 \dots j_\nu}\, \varphi_{j_1 \dots j_\nu} \qquad (44.1)$$

и гомеоида

$$\Psi^{(\nu)} = (2\nu - 1)!!\, \mathfrak{i}_{j_1 \dots j_\nu}\, \psi_{j_1 \dots j_\nu} \qquad (44.2)$$

тензорные величины $\widetilde{\mathfrak{i}}_{j_1 \dots j_\nu}$ и $\mathfrak{i}_{j_1 \dots j_\nu}$ формулами (41.7) и (42.7) были введены как обозначения, сокращающие запись. Совпадающие с (41.7) и (42.7)

[1] При $\lambda = \nu$ верхний индекс ν, используемый для обозначения парциальных моментов (43.6)–(43.9), становится излишним и в маркировке первых неисчезающих моментов не используется.

выражения (43.23) и (43.22) — результат прямого вычисления первых неисчезающих «моментов инерции». Тем самым оправдано использование одинаковых обозначений для по-разному введенных тензоров и обеспечено физическое истолкование величин (41.7) и (42.7).

Особенностью представлений (44.1) и (44.2) является то, что при замене в них всех $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$ на внутренние факторы M_{lmn} они дают потенциалы $\Phi^{(\nu)}$ и $\Psi^{(\nu)}$ внутри эллипсоида. Можно было бы усомниться в справедливости этого утверждения применительно к представлению (44.2), которое получено как акт воздействия на (44.1) дифференциального оператора $\widehat{F}^{(\nu)}$, что подразумевает вовлечение в проводимые преобразования функций $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$, неявно зависящих от координат. Однако известно (см. (14.13)), что при однократном дифференцировании объемных потенциалов эллипсоида получающийся результат таков же, как если бы ξ рассматривалась при дифференцировании как постоянная.

Напомним, что в трехиндексной записи формулам (44.1) и (44.2) соответствуют

$$\Phi^{(\nu)} = (2\nu-1)!! \sum_{i+j+k=\nu} \frac{\nu!}{i!\,j!\,k!}\, \widetilde{\mathfrak{i}}_{ij\,k}\, \varphi_{ij\,k} \tag{44.3}$$

и

$$\Psi^{(\nu)} = (2\nu-1)!! \sum_{i+j+k=\nu} \frac{\nu!}{i!\,j!\,k!}\, \mathfrak{i}_{ij\,k}\, \psi_{ij\,k}\,. \tag{44.4}$$

Так как для внешних потенциалов $\Phi^{(\nu)}$ и $\Psi^{(\nu)}$ входящие в формулы (44.1) и (44.2) тензор-потенциалы $\varphi_{j_1\ldots j_\nu}$ и $\psi_{j_1\ldots j_\nu}$ являются неприводимыми, то, используя (35.9)

$$Q_{i_1\ldots i_n}\Gamma_{i_1\ldots i_n} = (2n-1)!! I_{i_1\ldots i_n}\Gamma_{i_1\ldots i_n}\,, \tag{44.5}$$

можно перейти в (44.1) и (44.2) от «моментов инерции» к мультипольным моментам. Для этого в формуле (44.5), взятой при $n=\nu$, следует отождествить $\Gamma_{j_1\ldots j_\nu}$ с $\varphi_{j_1\ldots j_\nu}$ или $\psi_{j_1\ldots j_\nu}$, $I_{j_1\ldots j_\nu}$ с $\widetilde{\mathfrak{i}}_{j_1\ldots j_\nu}$ или $\mathfrak{i}_{j_1\ldots j_\nu}$ и, следовательно, $Q_{j_1\ldots j_\nu}$ с $\widetilde{q}_{j_1\ldots j_\nu}$ или $q_{j_1\ldots j_\nu}$, а результаты нужно подставить в (44.1) или (44.2) соответственно. В итоге приходим к мультипольному представлению внешних парциальных потенциалов:

$$\Phi^{(\nu)} = \widetilde{q}_{j_1\ldots j_\nu}\, \varphi_{j_1\ldots j_\nu}\,, \tag{44.6}$$

$$\Psi^{(\nu)} = q_{j_1\ldots j_\nu}\, \psi_{j_1\ldots j_\nu}\,. \tag{44.7}$$

Важно отметить (см. (38.24)), что для фиксированной точки наблюдения отношение $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)/abc$ инвариантно при переходе от одного эллипсоида к любому другому, софокусному с ним. Поэтому фактически в представлениях (44.1), (44.2) и (44.6), (44.7) для внешних потенциалов отсутствует (будучи «поглощенной» моментами инерции или мультипольными моментами) информация о размерах эллипсоида (43.3) и о конкретном виде (коэффициентах) полинома, характеризующего источники. Таким образом, эти представления зависят лишь от точки наблюдения, степени полинома, описывающего источники, и размеров и ориентации эллиптического диска — предельной фигуры семейства софокусных эллипсоидов.

§ 45. Представление потенциалов Ψ_L через полные моменты

Переходя к электростатическим потенциалам Ψ_L эллипсоидального простого слоя, создаваемым поверхностной плотностью σ_L заряда, перепишем ее выражение (39.7) в виде

$$\sigma_L = \sum_{l=0}^{K} \sigma^{(2l)} + \sum_{l=0}^{N} \sigma^{(2l+1)}\,, \tag{45.1}$$

где

$$K = \left[\frac{L}{2}\right], \quad N = \left[\frac{L-1}{2}\right], \tag{45.2}$$

а суммы составлены из парциальных плотностей $\sigma^{(\nu)}$ с одинаковой четностью чисел ν. Из (39.8) с учетом формулы (44.2) получаем

$$\Psi_L = \sum_{\nu=0}^{L} (2\nu-1)!!\, \mathfrak{i}_{j_1\ldots j_\nu} \psi_{j_1\ldots j_\nu}\,. \tag{45.3}$$

Наша цель — так преобразовать (45.3) (либо указать алгоритм, позволяющий этого добиться), чтобы в итоговой формуле вместо парциальных «моментов инерции» фигурировали полные, т. е. соответствующие всей полиномиальной плотности σ_L, «моменты инерции»

$$I_{j_1\ldots j_\lambda} = \oint \sigma_L\, x_{j_1} \ldots x_{j_\lambda}\, dS.$$

Подставляя в последнюю формулу выражение (45.1) и учитывая, что для $\sigma^{(\nu)}$, у которых четность ν не совпадает с четностью λ, интегралы равны нулю, получаем

$$I_{j_1\ldots j_{2l}} = \sum_{n=0}^{\min(K,l)} \mathfrak{i}^{(2n)}_{j_1\ldots j_{2l}}, \qquad I_{j_1\ldots j_{2l+1}} = \sum_{n=0}^{\min(N,l)} \mathfrak{i}^{(2n+1)}_{j_1\ldots j_{2l+1}}, \tag{45.4}$$

где верхние пределы суммирования согласованы с (43.19). Имея в виду, что нам не требуется рассматривать «моменты инерции» более высокого ранга, чем входящие в (45.3), и разрешая равенства (45.4) относительно $\mathfrak{i}_{j_1\ldots j_\lambda}$, находим

$$\mathfrak{i}_{j_1\ldots j_{2l}} = I_{j_1\ldots j_{2l}} - \sum_{n=0}^{l-1} \mathfrak{i}^{(2n)}_{j_1\ldots j_{2l}}, \quad \mathfrak{i}_{j_1\ldots j_{2l+1}} = I_{j_1\ldots j_{2l+1}} - \sum_{n=0}^{l-1} \mathfrak{i}^{(2n+1)}_{j_1\ldots j_{2l+1}}. \tag{45.5}$$

Заметим, что из (43.21) и (43.22) следует выполняющаяся при условии (43.20) формула

$$\mathfrak{i}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda} = \frac{(2\nu+1)!!}{(\lambda+\nu+1)!!} \langle\!\langle\, \mathfrak{i}_{j_1\ldots j_\nu} \varkappa_{j_{\nu+1} j_{\nu+2}} \ldots \varkappa_{j_{\lambda-1} j_\lambda} \rangle\!\rangle\,, \tag{45.6}$$

где

$$\varkappa_{ij} \equiv a_{(i)} a_{(j)} \delta_{ij} = \begin{cases} a^2_{(i)} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \tag{45.7}$$

Подставляя (45.6) в правые части формул (45.5), приходим к рекуррентным тензорным соотношениям

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{i}_{j_1\ldots j_{2l}} = I_{j_1\ldots j_{2l}} - \sum_{n=0}^{l-1} \frac{(4n+1)!!}{(2l+2n+1)!!} \langle\!\langle\, \mathfrak{i}_{j_1\ldots j_{2n}} \varkappa_{j_{2n+1}j_{2n+2}} \ldots \varkappa_{j_{2l-1}j_{2l}} \rangle\!\rangle, \\
\mathfrak{i}_{j_1\ldots j_{2l+1}} = I_{j_1\ldots j_{2l+1}} - \sum_{n=0}^{l-1} \frac{(4n+3)!!}{(2l+2n+3)!!} \langle\!\langle\, \mathfrak{i}_{j_1\ldots j_{2n+1}} \varkappa_{j_{2n+2}j_{2n+3}} \ldots \varkappa_{j_{2l}j_{2l+1}} \rangle\!\rangle,
\end{gathered}
\tag{45.8}
$$

последовательное (от $l = 0$ до $l = K$ или $l = N$ в зависимости от четности ранга тензора $\overleftrightarrow{\mathfrak{i}}$) применение которых позволяет в конечном счете перейти в (45.3) от парциальных к полным «моментам инерции». Во избежание ошибок при работе с рекуррентными тензорными формулами (45.8) и теми, что встретятся ниже, следует иметь в виду, что замена парциальных моментов полными в их правых частях должна производиться лишь после выполнения операции симметризации. Представление Ψ_L через полные «моменты инерции», достигаемое на основе (45.3), (45.8), справедливо и вне, и внутри эллипсоида (43.3) при условии соответствующей замены в тензор-потенциале внешних факторов $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$ на внутренние M_{lmn}.

Однако во внешней области, где тензор-потенциал является неприводимым, целесообразно перейти от представления Ψ_L, использующего полные «моменты инерции», к представлению через полные мультипольные моменты $Q_{j_1\ldots j_\lambda} = \oint \sigma_L\, \theta_{j_1\ldots j_\lambda} dS$, которые по сравнению с $I_{j_1\ldots j_\lambda}$ имеют, вообще говоря, гораздо меньшее число независимых компонент. Переход к мультипольному представлению от (45.3), (45.8) осуществляется с помощью (35.9) и приводит к следующим итоговым формулам:

$$
\Psi_L = \sum_{\nu=0}^{L} q_{j_1\ldots j_\nu}\, \psi_{j_1\ldots j_\nu}\,, \tag{45.9}
$$

$$
\begin{gathered}
q_{j_1\ldots j_{2l}} \mathrel{\stackrel{\circ}{=}} Q_{j_1\ldots j_{2l}} - (4l-1)!! \sum_{n=0}^{l-1} \frac{4n+1}{(2l+2n+1)!!} \times \\
\times \langle\!\langle q_{j_1\ldots j_{2n}} \varkappa_{j_{2n+1}j_{2n+2}} \ldots \varkappa_{j_{2l-1}j_{2l}} \rangle\!\rangle, \\
q_{j_1\ldots j_{2l+1}} \mathrel{\stackrel{\circ}{=}} Q_{j_1\ldots j_{2l+1}} - (4l+1)!! \sum_{n=0}^{l-1} \frac{4n+3}{(2l+2n+3)!!} \times \\
\times \langle\!\langle q_{j_1\ldots j_{2n+1}} \varkappa_{j_{2n+2}j_{2n+3}} \ldots \varkappa_{j_{2l}j_{2l+1}} \rangle\!\rangle.
\end{gathered}
\tag{45.10}
$$

Вытекающие из (45.10) частные выражения для тензоров мультипольных моментов вплоть до пятого ранга приводятся в § 47 (см. формулы (47.13)–(47.24)).

Следует подчеркнуть, что в отличие от (45.8) формулы (45.10) не являются точными равенствами. Однако тензоры, выражающие различие между правыми и левыми частями этих формул, таковы, что полная свертка их с любым неприводимым тензором такого же ранга равна нулю (совершенно аналогичная ситуация имела место при переходе от (35.7) к (35.9)). Таким образом, ошибки не произойдет при условии, что результат, полученный на основе (45.10), будет внесен в (45.9). Соотношения типа (45.10), предназначенные исключительно для последующей подстановки в формулы для внешнего потенциала, где они играют роль точных равенств, будем называть *условными равенствами*, а вместо знака равенства будем использовать в них символ $\overset{\circ}{=}$.

Заметим, что частные случаи мультипольных представлений Ψ_L были впервые обнаружены в [521].

§ 46. Представление потенциалов Φ_L^Γ через полные моменты

Всякий гармонический полином можно представить как сумму однородных гармонических полиномов. Поэтому плотность вида $\varrho_L^\Gamma = \Gamma_L\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$, где $\Gamma_L(x, y, z)$ — гармонический полином, можно, подобно (45.1), записать как сумму парциальных плотностей

$$\varrho_L^\Gamma = \sum_{\nu=0}^{L} \varrho^{(\nu)} = \sum_{l=0}^{K} \varrho^{(2l)} + \sum_{l=0}^{N} \varrho^{(2l+1)}.$$

С помощью формулы (44.1) можно в виде, аналогичном (45.3), представить и потенциал Φ_L^Γ:

$$\Phi_L^\Gamma = \sum_{\nu=0}^{L} (2\nu-1)!!\,\widetilde{\mathfrak{i}}_{j_1\ldots j_\nu}\, \varphi_{j_1\ldots j_\nu}\,. \tag{46.1}$$

Переход в (46.1) к полным «моментам инерции»

$$I_{j_1\ldots j_\lambda} = \int \varrho_L^\Gamma\, x_{j_1}\ldots x_{j_\lambda}\, dV$$

осуществляется в полной аналогии с тем, как это делалось в предыдущем параграфе. В частности, имеют место формулы (45.4) и (45.5), но с тильдами над $\mathfrak{i}$. В силу (43.14) формула (45.6) заменяется на

$$\widetilde{\mathfrak{i}}^{(\nu)}_{j_1\ldots j_\lambda} = \frac{(2\nu+3)!!}{(\lambda+\nu+3)!!} \langle\!\langle \widetilde{\mathfrak{i}}_{j_1\ldots j_\nu} \varkappa_{j_{\nu+1} j_{\nu+2}} \ldots \varkappa_{j_{\lambda-1} j_\lambda} \rangle\!\rangle\,.$$

Поэтому вместо (45.8) получаем

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathfrak{i}}_{j_1\ldots j_{2l}} = I_{j_1\ldots j_{2l}} - \sum_{n=0}^{l-1} \frac{(4n+3)!!}{(2l+2n+3)!!} \langle\!\langle \widetilde{\mathfrak{i}}_{j_1\ldots j_{2n}} \varkappa_{j_{2n+1} j_{2n+2}} \ldots \varkappa_{j_{2l-1} j_{2l}} \rangle\!\rangle, \\ \widetilde{\mathfrak{i}}_{j_1\ldots j_{2l+1}} = I_{j_1\ldots j_{2l+1}} - \sum_{n=0}^{l-1} \frac{(4n+5)!!}{(2l+2n+5)!!} \langle\!\langle \widetilde{\mathfrak{i}}_{j_1\ldots j_{2n+1}} \varkappa_{j_{2n+2} j_{2n+3}} \ldots \varkappa_{j_{2l} j_{2l+1}} \rangle\!\rangle.\end{gathered} \tag{46.2}$$

Заметим, что представление Φ_L^Γ через полные «моменты инерции», даваемое (46.1), (46.2), справедливо как вне, так и внутри эллипсоида (43.3), где потенциал Φ_L^Γ сродни бигармоническому и совпадает с последним при вырождении эллипсоида в шар.

Совершенно аналогично изложенному в предыдущем параграфе строится и мультипольное представление внешних потенциалов Φ_L^Γ через полные моменты

$$Q_{j_1\ldots j_\lambda} = \int \varrho_L^\Gamma\, \theta_{j_1\ldots j_\lambda}\, dV,$$

приводя к следующим окончательным формулам:

$$\Phi_L^\Gamma = \sum_{\nu=0}^{L} \widetilde{q}_{j_1\ldots j_\nu}\, \varphi_{j_1\ldots j_\nu}\,, \tag{46.3}$$

$$\begin{gathered}
\widetilde{q}_{j_1\ldots j_{2l}} \mathrel{\mathring{=}} Q_{j_1\ldots j_{2l}} - (4l-1)!! \sum_{n=0}^{l-1} \frac{(4n+1)(4n+3)}{(2l+2n+3)!!}\times \\
\times \langle\!\langle \widetilde{q}_{j_1\ldots j_{2n}} \varkappa_{j_{2n+1}j_{2n+2}} \ldots \varkappa_{j_{2l-1}j_{2l}} \rangle\!\rangle, \\
\widetilde{q}_{j_1\ldots j_{2l+1}} \mathrel{\mathring{=}} Q_{j_1\ldots j_{2l+1}} - (4l+1)!! \sum_{n=0}^{l-1} \frac{(4n+3)(4n+5)}{(2l+2n+5)!!}\times \\
\times \langle\!\langle \widetilde{q}_{j_1\ldots j_{2n+1}} \varkappa_{j_{2n+2}j_{2n+3}} \ldots \varkappa_{j_{2l}j_{2l+1}} \rangle\!\rangle.
\end{gathered} \tag{46.4}$$

Здесь (46.4) — условные равенства, результаты использования которых предназначены только для подстановки в (46.3).

В частности, из верхней формулы (46.4) для моментов четного ранга последовательно получаем

$$\widetilde{q} = Q, \tag{46.5}$$

$$\widetilde{q}_{ij} \mathrel{\mathring{=}} Q_{ij} - \frac{3}{5}\,\widetilde{q}\, a_{(i)}a_{(j)}\delta_{ij}, \tag{46.6}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{q}_{ijkl} \mathrel{\mathring{=}} Q_{ijkl} &- 3\,\widetilde{q}\, a_{(i)}a_{(j)}a_{(k)}a_{(l)}\,(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \\
&- \frac{35}{9}\Big[\widetilde{q}_{ij}\, a_{(k)}a_{(l)}\delta_{kl} + \widetilde{q}_{ik}\, a_{(j)}a_{(l)}\delta_{jl} + \widetilde{q}_{il}\, a_{(j)}a_{(k)}\delta_{jk} + \\
&+ \widetilde{q}_{jk}\, a_{(i)}a_{(l)}\delta_{il} + \widetilde{q}_{jl}\, a_{(i)}a_{(k)}\delta_{ik} + \widetilde{q}_{kl}\, a_{(i)}a_{(j)}\delta_{ij}\Big].
\end{aligned} \tag{46.7}$$

Во избежание ошибок замену в правых частях соотношений (46.4) величин $\widetilde{q}_{j_1\ldots j_\nu}$ полными мультипольными моментами $Q_{j_1\ldots j_\nu}$ следует совершать лишь после выполнения операции симметризации $\langle\!\langle\ldots\rangle\!\rangle$.

Получающиеся из формул (46.5)–(46.7) выражения декартовых компонент тензора $\widetilde{q}_{j_1\ldots j_{2\lambda}}$ через компоненты полных мультипольных моментов $Q_{j_1\ldots j_{2\lambda}}$ имеют следующий вид:

$$\widetilde{q} = Q; \tag{46.8}$$

$$\widetilde{q}_{xx} \mathrel{\mathring{=}} Q_{xx} - \frac{3}{5}\,Qa^2, \qquad \widetilde{q}_{xy} = Q_{xy}; \tag{46.9}$$

$$\left.\begin{aligned}
\widetilde{q}_{xxxx} &\mathrel{\mathring{=}} Q_{xxxx} - \frac{70}{3}\,Q_{xx}a^2 + 5\,Qa^4,\\
\widetilde{q}_{xxxy} &\mathrel{\mathring{=}} Q_{xxxy} - \frac{35}{3}\,Q_{xy}a^2,\\
\widetilde{q}_{xxyy} &\mathrel{\mathring{=}} Q_{xxyy} - \frac{35}{3}\,\left(Q_{xx}b^2 + Q_{yy}a^2\right) + 11\,Qa^2b^2,\\
\widetilde{q}_{xyzz} &\mathrel{\mathring{=}} Q_{xyzz} - \frac{35}{9}\,Q_{xy}c^2.
\end{aligned}\right\}\tag{46.10}$$

Аналогично из нижней формулы (46.4) для моментов нечетного ранга получаем

$$\widetilde{q}_i = Q_i,\tag{46.11}$$

$$\widetilde{q}_{ijk} \mathrel{\mathring{=}} Q_{ijk} - \frac{15}{7}\,\left(\widetilde{q}_i\, a_{(j)}a_{(k)}\delta_{jk} + \widetilde{q}_j\, a_{(i)}a_{(k)}\delta_{ik} + \widetilde{q}_k\, a_{(i)}a_{(j)}\delta_{ij}\right),\tag{46.12}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{q}_{ij\,klm} \mathrel{\mathring{=}} Q_{ijklm} &- 15\,\big[\widetilde{q}_i\, a_{(j)}a_{(k)}a_{(l)}a_{(m)}\left(\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{lk}\right) +\\
&+ \widetilde{q}_i\, a_{(j)}a_{(k)}a_{(l)}a_{(m)}\left(\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{lk}\right) +\\
&+ \widetilde{q}_j\, a_{(i)}a_{(k)}a_{(l)}a_{(m)}\left(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}\right) +\\
&+ \widetilde{q}_k\, a_{(i)}a_{(j)}a_{(l)}a_{(m)}\left(\delta_{ij}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}\right) +\\
&+ \widetilde{q}_m\, a_{(i)}a_{(j)}a_{(k)}a_{(l)}\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)\big] -\\
&- \frac{63}{11}\,\big(\widetilde{q}_{ijk}\, a_{(l)}a_{(m)}\delta_{lm} + \widetilde{q}_{ijl}\, a_{(k)}a_{(m)}\delta_{km} + \widetilde{q}_{ikl}\, a_{(j)}a_{(m)}\delta_{jm} +\\
&+ \widetilde{q}_{jkl}\, a_{(i)}a_{(m)}\delta_{im} + \widetilde{q}_{ijm}\, a_{(k)}a_{(l)}\delta_{kl} + \widetilde{q}_{jkm}\, a_{(i)}a_{(l)}\delta_{il} + \widetilde{q}_{ikm}\, a_{(j)}a_{(l)}\delta_{jl} +\\
&+ \widetilde{q}_{jlm}\, a_{(i)}a_{(k)}\delta_{ik} + \widetilde{q}_{ilm}\, a_{(j)}a_{(k)}\delta_{jk} + \widetilde{q}_{klm}\, a_{(i)}a_{(j)}\delta_{ij}\big).
\end{aligned}\tag{46.13}$$

Выражения через полные моменты даются формулами

$$\widetilde{q}_x = Q_x;\tag{46.14}$$

$$\widetilde{q}_{xxx} \mathrel{\mathring{=}} Q_{xxx} - \frac{45}{7}\,Q_xa^2, \quad \widetilde{q}_{xxy} \mathrel{\mathring{=}} Q_{xxy} - \frac{15}{7}\,Q_ya^2, \quad \widetilde{q}_{xyz} = Q_{xyz};\tag{46.15}$$

$$\left.\begin{aligned}
\widetilde{q}_{xxxxx} &\mathrel{\mathring{=}} Q_{xxxxx} - \frac{630}{11}\,Q_{xxx}a^2 + \frac{1575}{11}\,Q_xa^4,\\
\widetilde{q}_{xxxxy} &\mathrel{\mathring{=}} Q_{xxxxy} - \frac{378}{11}\,Q_{xxy}a^2 + \frac{315}{11}\,Q_ya^4,\\
\widetilde{q}_{xxxyy} &\mathrel{\mathring{=}} Q_{xxxyy} - \frac{63}{11}\,Q_{xxx}b^2 - \frac{189}{11}\,Q_{xyy}a^2 + \frac{315}{11}\,Q_xa^2b^2,\\
\widetilde{q}_{xxxyz} &\mathrel{\mathring{=}} Q_{xxxyz} - \frac{189}{11}\,Q_{xyz}a^2,\\
\widetilde{q}_{xxyyz} &\mathrel{\mathring{=}} Q_{xxyyz} - \frac{63}{11}\,Q_{xxz}b^2 - \frac{63}{11}\,Q_{yyz}a^2 + \frac{105}{11}\,Q_za^2b^2.
\end{aligned}\right\}\tag{46.16}$$

Циклическая или взаимная перестановка декартовых координат в формулах (46.9), (46.10), (46.14)–(47.16) дает недостающие выражения.

§ 47. Мультипольное представление внешних потенциалов Φ_L

Рассмотрим теперь электростатический потенциал

$$\Phi_L = \int \varrho_L \frac{dV}{R}\,, \tag{47.1}$$

создаваемый снаружи эллипсоида

$$\left\langle x^2/a^2 \right\rangle = 1 \tag{47.2}$$

произвольной полиномиальной плотностью заряда $\varrho_L = P_L(x/a, y/b, z/c)$. Интегрирование по объему эллипсоида в (47.1) будем вести следующим специальным образом. Представим себе, что эллипсоид (47.2) бесконечной системой софокусных с ним эллипсоидальных поверхностей разбит на бесконечно тонкие эллипсоидальные слои (фокалоиды). Тогда объемный потенциал (47.1) можно рассматривать как суперпозицию потенциалов составляющих его фокалоидов и тем самым свести вычисление к интегрированию сначала по какой-либо из софокусных поверхностей, характеризуемой эллипсоидальной координатой $\overline{\xi}$, а затем по самой координате $\overline{\xi}$. При этом элемент объема в (47.1) можно записать в виде[1] (см. § 7)

$$dV = d\overline{p}\, d\overline{S} = \frac{1}{2\,\overline{p}}\, d\overline{\xi}\, d\overline{S} = \frac{1}{2}\, d\overline{\xi}\, \langle \overline{x}^2/\overline{a}^4 \rangle\, \overline{p}\, d\overline{S}, \tag{47.3}$$

где $\overline{p} = \langle \overline{x}^2/\overline{a}^4 \rangle^{-1/2}$, причем последнее равенство использовано в (47.3) для «переброски» $\overline{p}$ в числитель. Подставив (47.3) в (47.1), получим

$$\Phi_L = \frac{1}{2} \int d\overline{\xi} \oint \overline{\sigma}_{L+2} \frac{d\overline{S}}{R}\,, \tag{47.4}$$

где

$$\overline{\sigma}_{L+2} = \overline{P}_{L+2} \left(\frac{\overline{x}}{\overline{a}}, \frac{\overline{y}}{\overline{b}}, \frac{\overline{z}}{\overline{c}} \right) \overline{p} = P_L \left(\frac{\overline{x}}{a}, \frac{\overline{y}}{b}, \frac{\overline{z}}{c} \right) \langle \overline{x}^2/\overline{a}^4 \rangle\, \overline{p}\,, \tag{47.5}$$

а пределы интегрирования по $\overline{\xi}$ зависят от соотношения между размерами полуосей эллипсоида (так, при $a > b > c$ интеграл берется от $-c^2$ до 0). В результате потенциал фокалоида

$$d\Phi_L = \frac{1}{2}\, d\overline{\xi} \oint \varrho_L \frac{d\overline{S}}{\overline{p}\, R}\,,$$

а значит, и потенциал эллипсоида $\Phi_L = \int d\Phi_L$, соответствующие плотности заряда ϱ_L, выражаются через изученный нами потенциал гомеоида

$$\Psi_{L+2} = \oint \overline{\sigma}_{L+2} \frac{d\overline{S}}{R}\,,$$

[1] Горизонтальной чертой сверху отмечены координаты $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, $\overline{\xi}$ точки интегрирования, а также величины $\overline{p}$, $\overline{\sigma}_L$, $\overline{P}_L$, $d\overline{S}$, $\overline{a} = \sqrt{a^2 + \overline{\xi}}$, $\overline{b} = \sqrt{b^2 + \overline{\xi}}$, $\overline{c} = \sqrt{c^2 + \overline{\xi}}$, относящиеся к поверхности $\overline{\xi} = \mathrm{const} < 0$.

соответствующий поверхностной плотности $\overline{\sigma}_{L+2} = \overline{P}_{L+2}\,\overline{p}$, у которой степень полинома $\overline{P}_{L+2}$ на две единицы выше степени полинома ϱ_L.

Заменяя в (47.4) поверхностный интеграл его представлением, даваемым формулой (45.3), будем иметь[1]

$$\Phi_L = \sum_{\nu=0}^{L+2} (2\nu - 1)!!\; t_{j_1 \ldots j_\nu}\, \psi_{j_1 \ldots j_\nu}\,, \tag{47.6}$$

где тензор

$$t_{j_1 \ldots j_\nu} = \frac{1}{2} \int \bar{\mathfrak{i}}_{j_1 \ldots j_\nu} d\overline{\xi}$$

введен для сокращения записи, а парциальные моменты $\bar{\mathfrak{i}}_{j_1 \ldots j_\nu}$ соответствуют парциальным плотностям $\overline{\sigma}^{(\nu)}$, из которых складывается

$$\overline{\sigma}_{L+2} = \sum_{\nu=0}^{L+2} \overline{\sigma}^{(\nu)} = \sum_{l=0}^{K+1} \overline{\sigma}^{(2l)} + \sum_{l=0}^{N+1} \overline{\sigma}^{(2l+1)}\,, \tag{47.7}$$

где числа K и N те же, что и в (45.2). Полные «моменты инерции» эллипсоида, имеющего плотность ϱ_L, равны

$$I_{j_1 \ldots j_\lambda} = \int \varrho_L\, x_{j_1} \ldots x_{j_\lambda} dV = \frac{1}{2} \int d\overline{\xi} \oint \overline{\sigma}_{L+2}\, \overline{x}_{j_1} \ldots \overline{x}_{j_\lambda} d\overline{S}\,. \tag{47.8}$$

Как и при выводе (45.8), из (47.7), (47.8) и (45.6) получаем

$$\begin{gathered} t_{j_1 \ldots j_{2l}} = I_{j_1 \ldots j_{2l}} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{l-1} \frac{(4n+1)!!}{(2l+2n+1)!!} \times \\ \times \int \langle\!\langle\, \bar{\mathfrak{i}}_{j_1 \ldots j_{2n}} \overline{\varkappa}_{j_{2n+1} j_{2n+2}} \ldots \overline{\varkappa}_{j_{2l-1} j_{2l}} \rangle\!\rangle\, d\overline{\xi}\,, \\ t_{j_1 \ldots j_{2l+1}} = I_{j_1 \ldots j_{2l+1}} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{l-1} \frac{(4n+3)!!}{(2l+2n+3)!!} \times \\ \times \int \langle\!\langle\, \bar{\mathfrak{i}}_{j_1 \ldots j_{2n+1}} \overline{\varkappa}_{j_{2n+2} j_{2n+3}} \ldots \overline{\varkappa}_{j_{2l} j_{2l+1}} \rangle\!\rangle\, d\overline{\xi}\,, \end{gathered} \tag{47.9}$$

где $\overline{\varkappa}_{ij} = \overline{a}_{(i)} \overline{a}_{(j)} \delta_{ij}$. Для софокусных эллипсоидов $\overline{a}^2_{(i)} = a^2_{(i)} + \overline{\xi}$, поэтому $\overline{\varkappa}_{ij} = \varkappa_{ij} + \overline{\xi}\, \delta_{ij}$. При подстановке выражений (47.9) в формулу (47.6) для внешнего потенциала, содержащую неприводимые тензор-потенциалы гомеоида $\overleftrightarrow{\psi}$, все $\overline{\varkappa}_{ij}$ можно заменить на $\varkappa_{ij}$, так как свертка их разности $\overline{\xi}\, \delta_{ij}$ с неприводимым тензором равна нулю. Сказанное означает, что вместо строгих равенств (47.9) можно пользоваться условными равенствами

$$\begin{gathered} t_{j_1 \ldots j_{2l}} \mathrel{\hat{=}} I_{j_1 \ldots j_{2l}} - \sum_{n=0}^{l-1} \frac{(4n+1)!!}{(2l+2n+1)!!} \langle\!\langle t_{j_1 \ldots j_{2n}} \varkappa_{j_{2n+1} j_{2n+2}} \ldots \varkappa_{j_{2l-1} j_{2l}} \rangle\!\rangle, \\ t_{j_1 \ldots j_{2l+1}} \mathrel{\hat{=}} I_{j_1 \ldots j_{2l+1}} - \sum_{n=0}^{l-1} \frac{(4n+3)!!}{(2l+2n+3)!!} \langle\!\langle t_{j_1 \ldots j_{2n+1}} \varkappa_{j_{2n+2} j_{2n+3}} \ldots \varkappa_{j_{2l} j_{2l+1}} \rangle\!\rangle, \end{gathered} \tag{47.10}$$

[1] Тензор-потенциал гомеоида является функцией точки наблюдения и при интегрировании по источникам может быть вынесен за знак интеграла, как и сделано в (47.6).

совпадающими с соотношениями (45.8), если в последних заменить $\mathfrak{i}$ на t.

Найденное представление потенциала Φ_L через полные «моменты инерции» справедливо только вне эллипсоида (47.2), где более удобно мультипольное представление, использующее меньшее число независимых интегральных характеристик тела. Переход к представлению Φ_L через полные мультипольные моменты $Q_{j_1\ldots j_\lambda} = \int \varrho_L\, \theta_{j_1\ldots j_\lambda} dV$ осуществляется, как обычно, с помощью (35.9), а результат можно записать в виде

$$\Phi_L = \sum_{\nu=0}^{L+2} q_{j_1\ldots j_\nu}\, \psi_{j_1\ldots j_\nu}\,. \tag{47.11}$$

Здесь симметричный тензор

$$q_{j_1\ldots j_\nu} = \frac{1}{2}\int \overline{q}_{j_1\ldots j_\nu} d\overline{\xi},$$

а парциальные мультиполи $\overline{q}_{j_1\ldots j_\nu}$ соответствуют парциальным плотностям $\overline{\sigma}^{(\nu)}$, входящим в (47.7). Таким образом, величины $q_{j_1\ldots j_\nu}$, как и $t_{j_1\ldots j_\nu}$ в (47.6), парциальными моментами эллипсоида не являются. Тем не менее рекуррентные формулы для $q_{j_1\ldots j_\nu}$ имеют вид

$$\begin{gathered} q_{j_1\ldots j_{2l}} \mathrel{\mathring{=}} Q_{j_1\ldots j_{2l}} - (4l-1)!!\sum_{n=0}^{l-1}\frac{4n+1}{(2l+2n+1)!!}\times \\ \times\langle\!\langle q_{j_1\ldots j_{2n}}\varkappa_{j_{2n+1}j_{2n+2}}\ldots\varkappa_{j_{2l-1}j_{2l}}\rangle\!\rangle, \\ q_{j_1\ldots j_{2l+1}} \mathrel{\mathring{=}} Q_{j_1\ldots j_{2l+1}} - (4l+1)!!\sum_{n=0}^{l-1}\frac{4n+3}{(2l+2n+3)!!}\times \\ \times\langle\!\langle q_{j_1\ldots j_{2n+1}}\varkappa_{j_{2n+2}j_{2n+3}}\ldots\varkappa_{j_{2l}j_{2l+1}}\rangle\!\rangle, \end{gathered} \tag{47.12}$$

совпадающий с (45.10), и их следует понимать как условные равенства, предназначенные для последующей подстановки в (47.11).

В частности, из верхней формулы (47.12), а значит, и из верхней формулы (45.10), для моментов четного ранга последовательно получаем

$$q = Q, \tag{47.13}$$

$$q_{ij} \mathrel{\mathring{=}} Q_{ij} - q\, a_{(i)}a_{(j)}\delta_{ij}, \tag{47.14}$$

$$\begin{aligned} q_{ijkl} \mathrel{\mathring{=}} Q_{ijkl} &- 7q\, a_{(i)}a_{(j)}a_{(k)}a_{(l)}\left(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right) - \\ &- 5\left[q_{ij}\, a_{(k)}a_{(l)}\delta_{kl} + q_{ik}\, a_{(j)}a_{(l)}\delta_{jl} + q_{il}\, a_{(j)}a_{(k)}\delta_{jk} + \right. \\ &\left. + q_{jk}\, a_{(i)}a_{(l)}\delta_{il} + q_{jl}\, a_{(i)}a_{(k)}\delta_{ik} + q_{kl}\, a_{(i)}a_{(j)}\delta_{ij}\right]. \end{aligned} \tag{47.15}$$

Во избежание ошибок замену в правых частях соотношений (47.12) или (45.10) величин $q_{j_1\ldots j_\nu}$ полными мультипольными моментами $Q_{j_1\ldots j_\nu}$ следует совершать лишь после выполнения операции симметризации $\langle\!\langle\ldots\rangle\!\rangle$.

Получающиеся из формул (47.13)–(47.15) выражения декартовых компонент тензора $q_{j_1\ldots j_{2\lambda}}$ через компоненты полных мультипольных моментов $Q_{j_1\ldots j_{2\lambda}}$ имеют следующий вид:

$$q = Q; \tag{47.16}$$

$$q_{xx} \mathrel{\overset{\circ}{=}} Q_{xx} - Qa^2, \qquad q_{xy} = Q_{xy}; \tag{47.17}$$

$$\left.\begin{aligned} q_{xxxx} &\mathrel{\overset{\circ}{=}} Q_{xxxx} - 30\,Q_{xx}a^2 + 9\,Qa^4, \\ q_{xxxy} &\mathrel{\overset{\circ}{=}} Q_{xxxy} - 15\,Q_{xy}a^2, \\ q_{xxyy} &\mathrel{\overset{\circ}{=}} Q_{xxyy} - 5\,\left(Q_{xx}b^2 + Q_{yy}a^2\right) + 3\,Qa^2b^2, \\ q_{xyzz} &\mathrel{\overset{\circ}{=}} Q_{xyzz} - 5\,Q_{xy}c^2. \end{aligned}\right\} \tag{47.18}$$

Аналогично из нижних формул (47.12) и (45.10) для моментов нечетного ранга получаем

$$q_i = Q_i, \tag{47.19}$$

$$q_{ijk} \mathrel{\overset{\circ}{=}} Q_{ijk} - 3\left(q_i\, a_{(j)}a_{(k)}\delta_{jk} + q_j\, a_{(i)}a_{(k)}\delta_{ik} + q_k\, a_{(i)}a_{(j)}\delta_{ij}\right), \tag{47.20}$$

$$\begin{aligned} q_{ij\,klm} \mathrel{\overset{\circ}{=}} Q_{ijklm} - 27\,\big[&q_i\, a_{(j)}a_{(k)}a_{(l)}a_{(m)}\left(\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{lk}\right) + \\ &+ q_i\, a_{(j)}a_{(k)}a_{(l)}a_{(m)}\left(\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{lk}\right) + \\ &+ q_j\, a_{(i)}a_{(k)}a_{(l)}a_{(m)}\left(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}\right) + \\ &+ q_k\, a_{(i)}a_{(j)}a_{(l)}a_{(m)}\left(\delta_{ij}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}\right) + \\ &+ q_m\, a_{(i)}a_{(j)}a_{(k)}a_{(l)}\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)\big] - \\ - 7\,\big(q_{ijk}\, a_{(l)}a_{(m)}\delta_{lm} &+ q_{ijl}\, a_{(k)}a_{(m)}\delta_{km} + q_{ikl}\, a_{(j)}a_{(m)}\delta_{jm} + \\ + q_{jkl}\, a_{(i)}a_{(m)}\delta_{im} &+ q_{ijm}\, a_{(k)}a_{(l)}\delta_{kl} + q_{jkm}\, a_{(i)}a_{(l)}\delta_{il} + q_{ikm}\, a_{(j)}a_{(l)}\delta_{jl} + \\ &+ q_{jlm}\, a_{(i)}a_{(k)}\delta_{ik} + q_{ilm}\, a_{(j)}a_{(k)}\delta_{jk} + q_{klm}\, a_{(i)}a_{(j)}\delta_{ij}\big). \end{aligned} \tag{47.21}$$

Выражения через полные моменты даются формулами

$$q_x = Q_x; \tag{47.22}$$

$$q_{xxx} \mathrel{\overset{\circ}{=}} Q_{xxx} - 9\,Q_xa^2, \quad q_{xxy} \mathrel{\overset{\circ}{=}} Q_{xxy} - 3\,Q_ya^2, \quad q_{xyz} = Q_{xyz}; \tag{47.23}$$

$$\left.\begin{aligned} q_{xxxxx} &\mathrel{\overset{\circ}{=}} Q_{xxxxx} - 70\,Q_{xxx}a^2 + 225\,Q_xa^4, \\ q_{xxxxy} &\mathrel{\overset{\circ}{=}} Q_{xxxxy} - 42\,Q_{xxy}a^2 + 45\,Q_ya^4, \\ q_{xxxyy} &\mathrel{\overset{\circ}{=}} Q_{xxxyy} - 7\,Q_{xxx}b^2 - 21\,Q_{xyy}a^2 + 45\,Q_xa^2b^2, \\ q_{xxxyz} &\mathrel{\overset{\circ}{=}} Q_{xxxyz} - 21\,Q_{xyz}a^2, \\ q_{xxyyz} &\mathrel{\overset{\circ}{=}} Q_{xxyyz} - 7\,Q_{xxz}b^2 - 7\,Q_{yyz}a^2 + 15\,Q_za^2b^2. \end{aligned}\right\} \tag{47.24}$$

Циклическая или взаимная перестановка декартовых координат в формулах (47.17), (47.18), (47.22)–(47.24) дает недостающие выражения.

§ 48. Итоги

Завершая главу, остановимся на особенностях, характеризующих ее результаты.

1. Мультипольные представления объемных Φ_L и поверхностных Ψ_L потенциалов эллипсоида, соответствующих плотностям зарядов ϱ_L и σ_L, **универсальны** в том смысле, что потенциалы Ψ_{L+2}, даваемые формулами (45.9), (45.10) и (42.13)–(42.16), неотличимы от потенциалов Φ_L $(L = 0, 1, \ldots)$, описываемых формулами (47.11), (45.10) и (42.13)–(42.16). Таким образом, по внешнему потенциалу эллипсоида невозможно установить, какими зарядами (объемными плотности ϱ_L, поверхностными плотности σ_{L+2} или их комбинацией) он порожден.

2. Универсальность проявляется также в том, что для фиксированной точки наблюдения мультипольное представление **инвариантно** при переходе от одного эллипсоида к любому другому, софокусному с ним. Эта инвариантность — следствие аналогичной инвариантности тензор-потенциала гомеоида (см. (38.24)) и инвариантности свертки $\varkappa_{ij}\,\psi_{ij\ldots k}$ в случае, если тензор $\overleftrightarrow{\psi}$ неприводим. Таким образом, внешний потенциал эллипсоида фактически не содержит информации ни о размерах эллипсоида
$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1,$$
ни о конкретном виде (коэффициентах) полинома, описывающего распределение заряда ϱ или σ, но зависит от степени L этого полинома, а также от точки наблюдения и от размеров и ориентации эллиптического диска — предельной фигуры семейства софокусных эллипсоидов.

3. Отмеченная в п. 1 универсальность аналитически выражается формулой
$$\left.\begin{aligned} \Phi_{L-2}(\mathbf{r}) &= \int \frac{\varrho_{L-2}}{R}\,dV \\ \Psi_L(\mathbf{r}) &= \oint \frac{\sigma_L}{R}\,dS \end{aligned}\right\} = \sum_{\varkappa=0}^{L} q_{i_1\ldots i_\varkappa}\psi_{i_1\ldots i_\varkappa}(\mathbf{r}), \quad \begin{aligned} &(L=2,3,\ldots), \\ &(L=0,1,\ldots), \end{aligned} \tag{48.1}$$
где тензор $q_{i_1\ldots i_\varkappa}$ дается любой из двух, как оказалось, совпадающих пар формул (45.10) и (47.12), которые обеспечивают однозначное линейное представление этого тензора через полные мультипольные моменты эллипсоида.

   Формула (48.1) указывает и на существование определенной **асимметрии**: поверхностные потенциалы $\Psi_0(\mathbf{r})$ и $\Psi_1(\mathbf{r})$ принципиально не могут быть заменены потенциалами каких-либо объемных распределений заряда в эллипсоиде. Напомним, что у потенциалов шара такой асимметрии нет.

4. В отличие от феррерсовых потенциалов $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$ эллипсоида (§ 14) и $\Psi_{\alpha\beta\gamma}$ гомеоида (§ 21), обусловленных степенными плотностями зарядов $\varrho \sim x^\alpha y^\beta z^\gamma$ и $\sigma/p \sim x^\alpha y^\beta z^\gamma$ соответственно, мультипольные представления $\Phi_L(\mathbf{r})$ и $\Psi_L(\mathbf{r})$ применимы только к области вне эллипсоида, но зато справедливы для любых полиномиальных плотностей ϱ_L и σ_L/p. Идентичность мультипольных представлений, обусловленная их универсальностью и инвариантностью, делает удобным

их использование в качестве **точных решений для внешней области**. Тем более, что для полиномиальных распределений заряда вычисление мультипольных моментов эллипсоида не вызывает затруднений.

5. Для потенциалов Φ_L^Γ эллипсоида, плотность ϱ_L^Γ заряда которого есть гармонический полином переменных x/a, y/b, z/c, помимо универсального представления, использующего тензор-потенциал гомеоида, существует специфическое мультипольное представление, использующее тензор-потенциал эллипсоида (41.15)–(41.18) и даваемое формулами (46.3), (46.4). Это специфическое представление более «экономично», ибо оперирует с мультиполями, максимальный ранг которых на две единицы ниже, чем в универсальном представлении. Внешние потенциалы Φ_L^Γ тоже являются инвариантами при софокусном преобразовании эллипсоидов.

6. При вырождении эллипсоида в шар оба мультипольных представления переходят в соответствующее обычное мультипольное разложение.

7. Универсальность мультипольных представлений не безгранична. Так, предельный переход к мультипольному представлению потенциалов эллиптического цилиндра не осуществим простым устремлением к бесконечности одной из осей трехосного эллипсоида в выражениях для мультипольных представлений потенциалов гомеоида или эллипсоида. Это связано с тем, что мультипольные моменты цилиндра не являются соответствующими пределами мультипольных моментов эллипсоида и нуждаются в независимом (самостоятельном) определении. Сказанное в отношении предельного перехода к цилиндру относится, разумеется, и к обычному мультипольному разложению потенциала эллипсоидальной системы зарядов.

Глава 8
Мультипольное разложение магнитного потенциала системы электрических токов

§ 49. Предварительные сведения

Обратимся к рассмотрению системы стационарных электрических токов, целиком заполняющих некоторую конечную (ограниченную во всех направлениях) область пространства[1]. Как и в двух предыдущих главах, нас интересует поле (в данном случае *магнитное*) вне области, занимаемой источниками. Распределение тока, характеризуется его объемной плотностью $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, так что в этой книге мы впервые будем иметь дело с *векторными источниками* поля. Уравнение непрерывности в случае стационарных токов сводится к

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \tag{49.1}$$

и обеспечивает на границе S области с токами выполнение краевого условия[2]

$$j_n\big|_S = 0, \tag{49.2}$$

где $\mathbf{n}$ — вектор единичной нормали к S. Заметим, что если в случае скалярных источников (зарядов) было достаточно оперировать только с их плотностью ϱ, то в случае токов на их плотность налагаются дополнительные соотношения (49.1) и (49.2). Этим, к сожалению, не исчерпывается перечень усложнений, связанных с токовой задачей. Так, существенное усложнение по сравнению со случаем скалярных источников заключается в том, что, в области пространства, занятой токами, вектор напряженности

[1] Как известно (см., например, [483, 511]), в *микроскопической* электродинамике стационарность задачи реализуется лишь в результате усреднения величин по времени. В *макроскопической* электродинамике, получающейся в результате усреднения по физически бесконечно малым объемам, стационарные электрические токи существуют и без дополнительного усреднения по времени токов и полей.

[2] Поскольку замкнутая поверхность S охватывает область с токами, то внешнее пространство, очевидно, предполагается непроводящим.

магнитного поля $\mathbf{H}$ не потенциален. Это означает, что в области токовых источников магнитное поле $\mathbf{H}$ нельзя описывать с помощью скалярного потенциала (точнее, псевдоскалярного потенциала, поскольку $\mathbf{H}$ является аксиальным вектором). Однако и в области пространства, внешней по отношению к токам, где введение скалярного потенциала $\widetilde{\Phi}$ магнитного поля (в силу $\operatorname{rot}\mathbf{H}=0$) вполне законно и дается формулой

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\widetilde{\Phi}, \tag{49.3}$$

некоторые усложнения остаются. Они проявляются в том, что если область с токами не является односвязной, то потенциал $\widetilde{\Phi}$ оказывается многозначной функцией[1].

Поэтому приходится использовать векторный потенциал $\mathbf{A}$, что одинаково допустимо как в области с токами, так и во внешней области, и пригодно как для односвязных, так и для многосвязных токовых пространств. Для построения интересующего нас мультипольного разложения магнитного поля вне токовой системы, где, как и в случае скалярных источников (гл. 6), безразмерным параметром разложения является отношение размеров системы к расстоянию до точки наблюдения, теперь следует исходить из векторного потенциала:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)} + \ldots + \mathbf{A}^{(n)} + \ldots\,. \tag{49.4}$$

И хотя векторный потенциал и порождающие его источники (характеризуемые плотностями тока) суть *истинные векторы* ряд (49.4) оперирует с *магнитными мультипольными моментами*, являющимися *псевдотензорами.* При этом векторный потенциал $\mathbf{A}^{(n)}$ выражается только через тензор 2^n–польного магнитного момента. Отметим, что ввиду отсутствия в природе магнитных зарядов ряд (49.4) не содержит $\mathbf{A}^{(0)}$ и начинается с векторного потенциала $\mathbf{A}^{(1)}$, создаваемого магнитным диполем.

Подобно электрическим мультиполям, магнитный момент 2^n–поля не зависит от выбора начала координат, т. е. определен однозначно, только в том случае, если все 2^l–польные магнитные моменты токовой системы, где $1 \leqslant l \leqslant n-1$, равны нулю. На больших расстояниях от системы зарядов каждый член разложения (49.4) мал по сравнению с предыдущим, так что векторный потенциал определяется в основном первым отличным от нуля членом этого ряда.

Следует отметить, что в подавляющем большинстве многочисленных учебников, руководств и монографий (см., например, [101, 159, 346, 378, 483, 533, 550]) обсуждение вопроса о поле системы токов ограничивается рассмотрением поля магнитного диполя. И хотя о магнитных мультиполях высших рангов в отдельных книгах [31, 159, 300] речь и идет, но, как правило, только в связи с излучением. Нам известно лишь одно исключение — книга Б. В. Медведева [511], ряд методических находок которой используется в этой книге. Что касается журнальных публикаций, отметим статьи [22, 43, 44, 54, 114, 116, 117, 313, 333, 356, 413].

[1] Сразу подчеркнем, что в нашем случае, где областью с токами является эллипсоид (и топологически эквивалентные ему шар, сфероид, эллиптический и круглый диски), т. е. *односвязное тело*, проблема многозначности скалярного потенциала не возникает.

§ 50. Преобразование векторного потенциала системы токов

Как известно, векторный потенциал системы стационарных объемных токов определяется формулой

$$A_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathfrak{c}} \int \frac{j_j(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV'. \tag{50.1}$$

Подставим в (50.1) ряд (31.5). Будем иметь

$$A_j(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l\,!}\, r_{i_1\ldots i_l}\, \frac{1}{\mathfrak{c}} \int\limits_V j_j(\mathbf{r}') x'_{i_1} \cdots x'_{i_l}\, dV', \tag{50.2}$$

где интегрирование ведется по объему V, занимаемому токами, и для сокращения записи введено тензорное обозначение

$$r_{i_1\ldots\, i_l} \equiv \nabla_{i_1} \cdots \nabla_{i_l} \frac{1}{r}\,. \tag{50.3}$$

Покажем, что в сумме (50.2) слагаемое, соответствующее $l = 0$, отсутствует. Действительно, вычисление производной произведения $x_m j_k$ по x_k дает

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(x_m j_k) = \delta_{km} j_k + x_m \operatorname{div} \mathbf{j} = j_m, \tag{50.4}$$

где использовано условие стационарности (49.1). Таким образом,

$$j_j = \frac{\partial}{\partial x_k}(x_j j_k)$$

и интеграл, входящий в первый член суммы (50.2), равен

$$\int\limits_V j_j\, dV = \oint\limits_S x_j j_n\, dS = 0\,. \tag{50.5}$$

Здесь использована векторная теорема Остроградского–Гаусса (причем S – это поверхность, являющаяся границей объема V, занимаемого токами) и учтено граничное условие (49.2).

Таким образом, в согласии с (49.4) имеем

$$A_j(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l\,!}\, r_{i_1\ldots i_l}\, \frac{1}{\mathfrak{c}} \int\limits_V j_j(\mathbf{r}') x'_{i_1} \cdots x'_{i_l}\, dV'. \tag{50.6}$$

Как показано в [511], формула (50.4) допускает важное для дальнейшего обобщение. Очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(x_{i_1}\cdots x_{i_l}\, x_j j_k) = x_{i_1}\cdots x_{i_l}\, \delta_{kj} j_k + x_{i_1}\cdots x_{i_l}\, x_j \operatorname{div}\mathbf{j} + x_j j_k \frac{\partial}{\partial x_k}(x_{i_1}\cdots x_{i_l})\,.$$

Учитывая (49.1), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(x_{i_1}\cdots x_{i_l}\, x_j j_k) = x_{i_1}\cdots x_{i_l}\, j_j + x_j \left\langle\!\left\langle x_{i_1}\cdots x_{i_{l-1}} j_{i_l} \right\rangle\!\right\rangle. \tag{50.7}$$

Здесь двойными угловыми скобками («кавычками») $\langle\!\langle\ldots\rangle\!\rangle$ обозначена уже встречавшаяся выше (см. § 34) операция специальной симметризации, состоящая в прибавлении к тензору, заключенному в кавычки, всех получающихся из него несовпадающих тензоров при всевозможных перестановках его индексов.

Подставим в (50.6) выражение для $x'_{i_1}\cdots x'_{i_l}\,j_j$, получающееся из (50.7), и используем формулу Остроградского–Гаусса. Будем иметь

$$A_j(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l\,!}\,r_{i_1\ldots i_l}\,\frac{1}{\mathfrak{c}}\left\{\oint\limits_S x'_{i_1}\cdots x'_{i_l}x'_j\,j_{n'}\,dS' - \right.$$

$$\left. - \int\limits_V x'_j\left\langle\!\left\langle x'_{i_1}\cdots x'_{i_{l-1}}j_{i_l}(\mathbf{r}\,')\right\rangle\!\right\rangle dV'\right\} =$$

$$= -\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l\,!}\,r_{i_1\ldots i_l}\,\frac{1}{\mathfrak{c}}\int\limits_V\left\langle\!\left\langle x'_{i_1}\cdots x'_{i_{l-1}}j_{i_l}(\mathbf{r}\,')\right\rangle\!\right\rangle x'_j\,dV'.$$

Интеграл по поверхности исчез в силу (49.2). Каждое из l слагаемых, входящих в состав $\left\langle\!\left\langle x'_{i_1}\cdots x'_{i_{l-1}}j_{i_l}(\mathbf{r}\,')\right\rangle\!\right\rangle$, при свертке с симметричным тензором $r_{i_1\ldots i_l}$ приводит к одному и тому же результату. Поэтому

$$A_j(\mathbf{r}) = -\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l\,!}\,r_{i_1\ldots i_l}\,\frac{1}{\mathfrak{c}}\int\limits_V l\,x'_{i_1}\cdots x'_{i_{l-1}}x'_j\,j_{i_l}(\mathbf{r}\,')\,dV'. \tag{50.8}$$

Мы располагаем теперь двумя различными выражениями (50.6) и (50.8) для векторного потенциала $A_j(\mathbf{r})$ и рассчитываем, составляя их линейную комбинацию, получить еще одно — третье — выражение, обладающее определенной антисимметрией. Итак, будем считать, что правая часть выражения (50.6) есть сумма правой части того же выражения (50.6), взятой с коэффициентом α, и правой части (50.8), взятой с коэффициентом β. Понятно, что сумма вводимых неопределенных коэффициентов есть

$$\alpha + \beta = 1. \tag{50.9}$$

Обсуждаемая линейная комбинация фактически сводится к соотношению

$$x'_{i_1}\cdots x'_{i_l}\,j_j(\mathbf{r}') = \alpha\,x'_{i_1}\cdots x'_{i_l}\,j_j(\mathbf{r}') - \beta\,l\,x'_{i_1}\cdots x'_{i_{l-1}}\,j_{i_l}(\mathbf{r}\,')x'_j \tag{50.10}$$

между величинами, находящимися под знаками суммы и интеграла. Воспользуемся остающимся (после условия (50.9)) произволом в выборе коэффициентов α и β и потребуем, чтобы правая часть (50.10) стала антисимметричной по индексам j и i_l. Это дает $\alpha = \beta l$, а значит,

$$\alpha = \frac{l}{l+1}, \qquad \beta = \frac{1}{l+1}.$$

В результате векторный потенциал приобретает вид

$$A_j(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l\,!}\,\frac{l}{l+1}\,r_{i_1\ldots i_l}\,\frac{1}{\mathfrak{c}}\int\limits_V x'_{i_1}\cdots x'_{i_{l-1}}\left(x'_{i_l}\,j_j - x'_j\,j_{i_l}\right)dV' =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l l}{(l+1)!}\,r_{i_1\ldots i_l}\,\frac{1}{\mathfrak{c}}\int\limits_V x'_{i_1}\cdots x'_{i_{l-1}}\,\varepsilon_{ki_lj}\,\varepsilon_{kmp}x'_m j_p\,dV'.$$

Или окончательно

$$A_j(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l l}{(l+1)!}\, r_{i_1 \dots i_l}\, \frac{1}{\mathfrak{c}} \int\limits_V x'_{i_1} \cdots x'_{i_{l-1}}\, \varepsilon_{k i_l j}\, [\mathbf{r}'\mathbf{j}]_k \, dV'. \tag{50.11}$$

Здесь ε_{klm} — совершенно антисимметричный единичный псевдотензор.

§ 51. Мультипольное разложение скалярного магнитного потенциала

Переход от векторного потенциала $\mathbf{A}$ к скалярному потенциалу $\widetilde{\Phi}$ связан с промежуточным вычислением магнитного поля $\mathbf{H}$. Примéним к (50.11) операцию rot. Будем иметь

$$H_i = \mathrm{rot}_i\, \mathbf{A} = \varepsilon_{imj} \frac{\partial A_j}{\partial x_m} = \\ = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l l}{(l+1)!}\, r_{m i_1 \dots i_l}\, \varepsilon_{imj}\, \varepsilon_{k i_l j}\, \frac{1}{\mathfrak{c}} \int\limits_V x'_{i_1} \cdots x'_{i_{l-1}}\, [\mathbf{r}'\mathbf{j}]_k \, dV'.$$

Учитывая, что

$$r_{m i_1 \dots i_l}\, \varepsilon_{imj}\, \varepsilon_{k i_l j} = r_{m i_1 \dots i_l}\, (\delta_{ik}\delta_{m i_l} - \delta_{i i_l}\delta_{km}) = -r_{m i_1 \dots i_l}\, \delta_{i i_l}\delta_{km} = -r_{k i_1 \dots i_{l-1} i},$$

ибо

$$r_{m i_1 \dots i_l}\, \delta_{m i_l} = r_{m i_1 \dots i_{l-1} m} = 0$$

в силу неприводимости (во внешней области) тензора (50.3), получаем

$$H_i = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l l}{(l+1)!}\, r_{i k i_1 \dots i_{l-1}}\, \frac{1}{\mathfrak{c}} \int\limits_V x'_{i_1} \cdots x'_{i_{l-1}}\, [\mathbf{r}'\mathbf{j}]_k \, dV'. \tag{51.1}$$

Определение (50.3) тензора $r_{i_1 \dots i_l}$ позволяет представить (51.1) в виде

$$\mathbf{H} = -\nabla \widetilde{\Phi}, \tag{51.2}$$

где скалярный магнитный потенциал

$$\widetilde{\Phi} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+1)!}\, r_{i_1 \dots i_l}\, \frac{l}{\mathfrak{c}} \int\limits_V x'_{i_1} \cdots x'_{i_{l-1}}\, [\mathbf{r}'\mathbf{j}]_{i_l} \, dV'. \tag{51.3}$$

При получении формулы (50.08), как указывалось, было применено соотношение

$$r_{i_1 \dots i_l}\, \left\langle\!\left\langle x'_{i_1} \cdots x'_{i_{l-1}} j_{i_l}(\mathbf{r}') \right\rangle\!\right\rangle = l\, r_{i_1 \dots i_l}\, x'_{i_1} \cdots x'_{i_{l-1}}\, j_{i_l}(\mathbf{r}'), \tag{51.4}$$

которое, если заменить в нем j_{i_l} на $[\mathbf{r}'\mathbf{j}]_{i_l}$ и использовать «справа налево», позволяет придать выражению (51.3) вид

$$\widetilde{\Phi} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+1)!}\, r_{i_1 \dots i_l}\, \frac{1}{\mathfrak{c}} \int\limits_V \left\langle\!\left\langle x'_{i_1} \cdots x'_{i_{l-1}}\, [\mathbf{r}'\mathbf{j}]_{i_l} \right\rangle\!\right\rangle dV'. \tag{51.5}$$

Очевидное равенство

$$\left\langle\!\left\langle x'_{i_1}\cdots x'_{i_{l-1}}\,[\mathbf{r}'\mathbf{j}]_{\,i_l}\right\rangle\!\right\rangle = [\mathbf{r}'\mathbf{j}]_{\,k}\,\frac{\partial}{\partial x'_k}\left(x'_{i_1}\cdots x'_{i_l}\right)$$

позволяет переписать (51.5) в иной форме

$$\widetilde{\Phi} = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(l+1)!}\,r_{i_1\ldots i_l}\,\frac{1}{\mathfrak{c}}\int\limits_V [\mathbf{r}'\mathbf{j}]_{\,k}\,\frac{\partial}{\partial x'_k}\left(x'_{i_1}\cdots x'_{i_l}\right)\,dV'. \tag{51.6}$$

Теперь, учитывая неприводимость тензора $r_{i_1\ldots i_l}$ и используя формулу (35.2)

$$\theta_{i_1\ldots i_l} = (2l-1)!!\,x'_{i_1}\cdots x'_{i_l} + \\ + \sum_{k=1}^{\left[\frac{l}{2}\right]}(-1)^k(2l-2k-1)!!\,{r'}^{2k}\left\langle\!\!\left\langle \overset{\longleftrightarrow}{\delta}{}^{(2k)}\overset{\longleftrightarrow}{x'}{}^{(l-2k)}\right\rangle\!\!\right\rangle,$$

можно ввести в выражение (51.6) ядро мультипольного момента $\theta_{i_1\ldots i_l}$.

В результате приходим к окончательной формуле

$$\widetilde{\Phi} = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-2)^l}{(2l)!}\,\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l}\,\nabla_{i_1}\cdots\nabla_{i_l}\,\frac{1}{r} = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\;\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l}\;\frac{x_{i_1}\cdots x_{i_l}}{r^{2l+1}}, \tag{51.7}$$

где

$$\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l} = \frac{1}{(l+1)\mathfrak{c}}\int\limits_V [\mathbf{r}'\mathbf{j}]_{\,k}\,\frac{\partial}{\partial x'_k}\theta_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r}')\,dV'. \tag{51.8}$$

Формула (51.7) и есть мультипольное разложение скалярного магнитного потенциала $\widetilde{\Phi}$ объемных токов, а их интегральные характеристики $\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l}$ суть, по определению, тензорные компоненты 2^l-польного магнитного момента.

В случае поверхностных токов скалярный потенциал магнитного поля мы будем обозначать посредством $\widetilde{\Psi}$, поэтому формула (51.7) заменяется на

$$\widetilde{\Psi} = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-2)^l}{(2l)!}\,\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l}\,\nabla_{i_1}\cdots\nabla_{i_l}\,\frac{1}{r} = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\;\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l}\;\frac{x_{i_1}\cdots x_{i_l}}{r^{2l+1}}, \tag{51.9}$$

где, мультипольные моменты поверхностных токов плотности $\mathbf{i}$, очевидно, равны

$$\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l} = \frac{1}{(l+1)\mathfrak{c}}\int\limits_S [\mathbf{r}'\mathbf{i}]_{\,k}\,\frac{\partial}{\partial x'_k}\,\theta_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r}')\,dS'. \tag{51.10}$$

Важно отметить, что определения (51.8) и (51.10) магнитных мультипольных моментов «отнормированы» (в частности, путем включения делителя $l+1$) таким образом, что мультипольные разложения (51.7) и (51.9) скалярного магнитного потенциала совпадают с разложениями электростатического потенциала (35.5) (с точностью до замены всех электрических моментов $Q_{i_1\ldots i_l}$ их магнитными аналогами $\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l}$). Правда, заменять в (35.5) заряд Q нечем ввиду отсутствия магнитных зарядов, так что суммирование в (51.7) и (51.9) начинается не с нуля, как в (35.5), а с единицы.

В трехиндексной записи мультипольное разложение скалярного магнитного потенциала имеет вид

$$\left.\begin{array}{c}\widetilde{\Phi}(\mathbf{r})\\ \\ \widetilde{\Psi}(\mathbf{r})\end{array}\right\} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!\, r^{2l+1}} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=l} \frac{l\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!\,\gamma\,!}\, \mathfrak{M}_{\alpha\beta\gamma}\, x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}, \tag{51.11}$$

где

$$\mathfrak{M}_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} \dfrac{1}{(l+1)\mathfrak{c}} \displaystyle\int_S \left\langle [\mathbf{r}'\mathbf{j}]_x \frac{\partial}{\partial x'} \right\rangle \theta_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}')\, dV', \\ \\ \dfrac{1}{(l+1)\mathfrak{c}} \displaystyle\int_S \left\langle [\mathbf{r}'\mathbf{i}]_x \frac{\partial}{\partial x'} \right\rangle \theta_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}')\, dS', \end{cases} \quad (\alpha+\beta+\gamma=l). \tag{51.12}$$

Формула (51.11) с очевидностью следует из (36.12) в силу только что указанной аналогии мультипольных разложений (35.5) и (51.7) или (51.9).

§ 52. Магнитные мультипольные моменты

В соответствии с данным в предыдущем параграфе определением тензора магнитного мультипольного момента

$$\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l} = \begin{cases} \dfrac{1}{(l+1)\mathfrak{c}} \displaystyle\int_V [\mathbf{r}'\mathbf{j}]_k \frac{\partial}{\partial x'_k}\, \theta_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r}')\, dV', \\ \\ \dfrac{1}{(l+1)\mathfrak{c}} \displaystyle\int_S [\mathbf{r}'\mathbf{i}]_k \frac{\partial}{\partial x'_k}\, \theta_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r}')\, dS', \end{cases} \quad (l = 1, 2, \ldots). \tag{52.1}$$

последний (при $l \geqslant 2$) является тензором *симметричным* и *неприводимым*. Это следует из аналогичных свойств входящего в (52.1) тензора $\theta_{i_1\ldots i_l}$.

Перейдем теперь к рассмотрению подынтегрального выражения в верхней формуле (52.1), для которого введем специальное обозначение

$$\mu_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r}') = [\mathbf{r}'\mathbf{j}]_k \frac{\partial}{\partial x'_k}\, \theta_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r}'). \tag{52.2}$$

Из правила дифференцирования произведения, очевидно, что

$$\mu_{i_1\ldots i_l} = \frac{\partial}{\partial x'_k} \left([\mathbf{r}'\mathbf{j}]_k \theta_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r}')\right) - \theta_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r}')\, \mathrm{div}[\mathbf{r}'\mathbf{j}]. \tag{52.3}$$

Подставим правую часть (52.3) вместо правой части (52.2) в верхнюю формулу (52.1) и используем формулу Остроградского-Гаусса. Будем иметь

$$\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l} = \frac{1}{(l+1)\mathfrak{c}} \left\{ \oint_S n'_k \left([\mathbf{r}'\mathbf{j}]_k \theta_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r}')\right) dS' - \int_V \theta_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r}')\, \mathrm{div}[\mathbf{r}'\mathbf{j}] dV' \right\}. \tag{52.4}$$

Если считать, как это делается в [511], что в (52.4) поверхность S охватывает область с токами, проходя всюду вне ее, то поверхностный интеграл обращается в нуль и мы получаем, наряду с (51.8), еще одно определение моментов магнитных мультиполей[1]

$$\mathfrak{M}_{i_1\dots i_l} = -\frac{1}{(l+1)\mathfrak{c}}\int\limits_V \theta_{i_1\dots i_l}(\mathbf{r}')\,\mathrm{div}[\mathbf{r}'\mathbf{j}]\,dV'. \qquad (52.5)$$

Для целей данной книги, где определение момента мультиполя служит «рабочим» понятием, по которому ведется расчет для конкретных геометрических объектов, формула (52.5) неприемлема. Укажем две причины: 1) в (52.5) входит дивергенция $\mathrm{div}[\mathbf{r}'\mathbf{j}]$, содержащая производные разрывной функции; 2) неочевиден аналог формулы (52.5) для поверхностных токов. Заметим, что если S охватывает только область пространства, занятую токами, то в (52.4), вообще говоря, следует учитывать оба слагаемых.

Таким образом, мы будем придерживаться определения (52.1).

Выражение (52.2) для тензора $\mu_{i_1\dots i_l}$ можно преобразовать к виду, сходному с (34.5). Причем для этого используем само выражение (34.5). Последовательно получаем

$$\mu_{i_1\dots i_l}(\mathbf{r}) = [\mathbf{r}\mathbf{j}]_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}\theta_{i_1\dots i_l}(\mathbf{r}) =$$
$$= [\mathbf{r}\mathbf{j}]_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{s=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}(-1)^s(2l-2s-1)!!\,r^{2s}\left\langle\!\left\langle\delta_{i_1i_2}\cdots\delta_{i_{2s-1}i_{2s}}x_{i_{2s+1}}\cdots x_{i_l}\right\rangle\!\right\rangle =$$
$$= \sum_{s=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}(-1)^s(2l-2s-1)!!\,[\mathbf{r}\mathbf{j}]_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{x_m^{2s}\left\langle\!\left\langle\delta_{i_1i_2}\cdots\delta_{i_{2s-1}i_{2s}}x_{i_{2s+1}}\cdots x_{i_l}\right\rangle\!\right\rangle\right\}.$$

Входящая сюда свертка равна

$$[\mathbf{r}\mathbf{j}]_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{x_m^{2s}\left\langle\!\left\langle\delta_{i_1i_2}\cdots\delta_{i_{2s-1}i_{2s}}x_{i_{2s+1}}\cdots x_{i_l}\right\rangle\!\right\rangle\right\} =$$
$$= 2s\,r^{2s-1}[\mathbf{r}\mathbf{j}]_k\,x_k\left\langle\!\left\langle\delta_{i_1i_2}\cdots\delta_{i_{2s-1}i_{2s}}x_{i_{2s+1}}\cdots x_{i_l}\right\rangle\!\right\rangle +$$
$$+ r^{2s}\left\langle\!\left\langle\delta_{i_1i_2}\cdots\delta_{i_{2s-1}i_{2s}}[\mathbf{r}\,\mathbf{j}]_{i_{2s+1}}x_{i_{2s+2}}\cdots x_{i_l}\right\rangle\!\right\rangle,$$

причем первое слагаемое правой части в силу $[\mathbf{r}\mathbf{j}]\mathbf{r}=0$ обращается в нуль.

Таким образом, окончательно имеем[2]

$$\mu_{i_1\dots i_l} = \sum_{s=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]}(-1)^s(2l-2s-1)!!\,r^{2s}\left\langle\!\left\langle\delta_{i_1i_2}\cdots\delta_{i_{2s-1}i_{2s}}[\mathbf{r}\,\mathbf{j}]_{i_{2s+1}}x_{i_{2s+2}}\cdots x_{i_l}\right\rangle\!\right\rangle \qquad (52.6)$$

[1] Эквивалентное определение в терминах сферических координат и функций дано в [159] см. (9.172) (в издании на русском языке — формула (16.96)).

[2] Отметим изменение верхнего предела суммирования, вызванное процедурой дифференцирования.

и соответственно

$$\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l} = \frac{1}{(l+1)\mathfrak{c}}\times$$
$$\times\int\sum_{s=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]}(-1)^s(2l-2s-1)!!\,r^{2s}\left\langle\!\left\langle\delta_{i_1i_2}\cdots\delta_{i_{2s-1}i_{2s}}[\mathbf{r}\,\mathbf{j}]_{i_{2s+1}}x_{i_{2s+2}}\cdots x_{i_l}\right\rangle\!\right\rangle dV. \tag{52.7}$$

В частности[1],

$$\mathfrak{M}_i = \frac{1}{2\mathfrak{c}}\int[\mathbf{r}\,\mathbf{j}]_i\,dV; \tag{52.8}$$

$$\mathfrak{M}_{ij} = \frac{1}{\mathfrak{c}}\int\left\{[\mathbf{r}\,\mathbf{j}]_i x_j + [\mathbf{r}\,\mathbf{j}]_j x_i\right\}\,dV; \tag{52.9}$$

$$\mathfrak{M}_{ijk} = \frac{3}{4\mathfrak{c}}\int\Big\{[\mathbf{r}\,\mathbf{j}]_i(5x_jx_k - r^2\delta_{jk}) + [\mathbf{r}\,\mathbf{j}]_j(5x_ix_k - r^2\delta_{ik}) + [\mathbf{r}\,\mathbf{j}]_k(5x_ix_j - r^2\delta_{ij})\Big\}\,dV; \tag{52.10}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{ijkl} = \frac{3}{\mathfrak{c}}\int\Big\{&[\mathbf{r}\,\mathbf{j}]_i\left(7x_jx_kx_l - r^2(x_j\delta_{kl} + x_k\delta_{jl} + x_l\delta_{jk})\right) +\\ &+[\mathbf{r}\,\mathbf{j}]_j\left(7x_ix_kx_l - r^2(x_i\delta_{kl} + x_k\delta_{il} + x_l\delta_{ik})\right) +\\ &+[\mathbf{r}\,\mathbf{j}]_k\left(7x_ix_jx_l - r^2(x_i\delta_{jl} + x_j\delta_{il} + x_l\delta_{ij})\right) +\\ &+[\mathbf{r}\,\mathbf{j}]_l\left(7x_ix_jx_k - r^2(x_i\delta_{jk} + x_j\delta_{ik} + x_k\delta_{ij})\right)\Big\}\,dV.\end{aligned} \tag{52.11}$$

Таблица декартовых компонент тензора $\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l}$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{1}{2\mathfrak{c}}\int(yj_z - zj_y)dV; \tag{52.12}$$

$$\mathfrak{M}_{xx} = \frac{2}{\mathfrak{c}}\int x(yj_z - zj_y)dV, \tag{52.13}$$

$$\mathfrak{M}_{xy} = \frac{1}{\mathfrak{c}}\int\{xzj_x - yzj_y + (y^2 - x^2)j_z\}dV; \tag{52.14}$$

$$\mathfrak{M}_{xyy} = \frac{3}{4\mathfrak{c}}\int\{10\,xyzj_x + (x^2 + z^2 - 4y^2)zj_y + (4y^2 - 11x^2 - z^2)yj_z\}dV, \tag{52.15}$$

$$\mathfrak{M}_{xyz} = \frac{15}{4\mathfrak{c}}\int\{(z^2 - y^2)xj_x + (x^2 - z^2)yj_y + (y^2 - x^2)zj_z\}dV; \tag{52.16}$$

$$\mathfrak{M}_{xxxy} = \frac{3}{\mathfrak{c}}\int\Big\{\left(4x^2 - 3y^2 - 3z^2\right)xzj_x - 3\left(6x^2 - y^2 - z^2\right)yzj_y + (21x^2y^2 - 4x^4 - 3y^4 + 3x^2z^2 - 3y^2z^2)j_z\Big\}\,dV, \tag{52.17}$$

[1] Хотя, наверное, выражения (52.8)–(52.11) легче получить непосредственно из (52.1).

$$\mathfrak{M}_{xxyy} = \frac{6}{\mathfrak{c}} \int \left\{ \left(6x^2 - y^2 - z^2\right) yzj_x - \right.$$
$$\left. - \left(6y^2 - x^2 - z^2\right) xzj_y + 5\left(y^2 - x^2\right) xyj_z \right\} dV, \quad (52.18)$$

$$\mathfrak{M}_{xxyz} = \frac{3}{\mathfrak{c}} \int \left\{ \left(6x^2z^2 - 6x^2y^2 + y^4 - z^4\right) j_x + \right.$$
$$\left. + \left(6x^2 - y^2 - 15z^2\right) xyj_y + \left(15y^2 - 6x^2 + y^2\right) xyj_z \right\} dV. \quad (52.19)$$

Как обычно, мы приводим в таблице минимум выражений. Остальные получаются из приведенных либо циклической перестановкой координат, либо их взаимной перестановкой (при этом у псевдовеличин, к каковым относятся $\mathfrak{M}_{ij\ldots k}$, необходимо изменять знак), либо, наконец, обращаясь к соотношениям, выражающим равенство нулю свертки тензора $\overleftrightarrow{\mathfrak{M}}$ по любой паре индексов.

В случае поверхностных токов следует использовать выражения, получающиеся из (52.7)–(52.19) в результате замены $\mathbf{j}\,dV \to \mathbf{i}dS$.

В трехиндексной записи выражение (52.2) для тензора $\mu_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r})$ приобретает вид

$$\mu_{\alpha\beta\gamma} = [\mathbf{r}\,\mathbf{j}]\nabla\,\theta_{\alpha\beta\gamma}. \quad (52.20)$$

Или в развернутой форме

$$\mu_{\alpha\beta\gamma} = -\mathbf{j}\,[\mathbf{r}\nabla]\,\theta_{\alpha\beta\gamma} = j_x \left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right) \theta_{\alpha\beta\gamma} +$$
$$+ j_y \left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right) \theta_{\alpha\beta\gamma} + j_z \left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) \theta_{\alpha\beta\gamma}. \quad (52.21)$$

Эта формула поможет нам позднее, наряду с правилом (36.7), разобраться в том, какая (четная или нечетная) зависимость от каждой из декартовых координат имеет место у каждой из декартовых компонент плотности тока.

§ 53. Мультипольное разложение векторного потенциала

Нам надлежит завершить проведенное в § 50 преобразование векторного потенциала и получить для этого потенциала мультипольное разложение. В § 50 этот процесс был временно прерван, поскольку требовалось дать оптимальное определение магнитных мультипольных моментов, для чего и был совершен переход к скалярному магнитному потенциалу и его сопоставление с электростатическим.

Используя очевидное равенство (ср. с (51.4))

$$l\, r_{i_1\ldots i_l}\, x'_{i_1} \cdots x'_{i_{l-1}}\, [\mathbf{r}'\mathbf{j}]_{i_l} = r_{i_1\ldots i_l}\; [\mathbf{r}'\mathbf{j}]_k \frac{\partial}{\partial x'_k} \left(x'_{i_1} \cdots x'_{i_{l-1}} x'_{i_l}\right), \quad (53.1)$$

перепишем выражение (50.11)

$$A_j(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+1)!}\; r_{i_1\ldots i_l}\; \frac{1}{\mathfrak{c}}\, \varepsilon_{k i_l j} \int\limits_V [\mathbf{r}'\mathbf{j}]_m \frac{\partial}{\partial x'_m} \left(x'_{i_1} \cdots x'_{i_{l-1}} x'_k\right) dV'.$$

Учитывая, что тензор $r_{i_1\ldots i_l}$ неприводим, заменим в соответствии с формулой (35.2) произведение $x'_{i_1}\cdots x'_{i_{l-1}}x'_k$ ядром $\theta_{i_1\ldots i_{l-1}k}(\mathbf{r}')$ мультипольного момента. Получаем

$$A_j(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+1)!(2l-1)!!}\, r_{i_1\ldots i_l}\, \frac{1}{\mathfrak{c}}\, \varepsilon_{ki_lj} \int\limits_V [\mathbf{r}'\mathbf{j}]\, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}\, \theta_{i_1\ldots i_{l-1}k}(\mathbf{r}')\, dV'. \tag{53.2}$$

Подставим теперь в (53.2) в соответствии с их определением (51.8) магнитные мультипольные моменты, чтобы прийти к итоговой формуле

$$A_j(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-2)^l}{(2l)!}\, \varepsilon_{ki_lj}\, \mathfrak{M}_{i_1\ldots i_{l-1}k}\, r_{i_1\ldots i_l}, \tag{53.3}$$

где, напоминаем, $r_{i_1\ldots i_l} \equiv \nabla_{i_1}\cdots\nabla_{i_l}\dfrac{1}{r}$.

Осталось убедиться, что скалярный потенциал (51.7)

$$\widetilde{\Phi} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-2)^l}{(2l)!}\, \mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l}\, r_{i_1\ldots i_l} \tag{53.4}$$

и векторный потенциал (53.3) приводят к одному и тому же выражению для напряженности магнитного поля во внешней по отношению к токам области пространства. Из (53.4) получаем

$$H_m = -\nabla_m\widetilde{\Phi} = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-2)^l}{(2l)!}\, \mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l}\, r_{i_1\ldots i_l m}. \tag{53.5}$$

Вычисление $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ дает

$$H_m = \operatorname{rot}_m \mathbf{A} = \varepsilon_{mpq}\frac{\partial A_q}{\partial x_p} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-2)^l}{(2l)!}\, \varepsilon_{mpq}\, \varepsilon_{i_lqk}\, \mathfrak{M}_{i_1\ldots i_{l-1}k}\, r_{i_1\ldots i_l p} =$$
$$= -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-2)^l}{(2l)!}\, \mathfrak{M}_{i_1\ldots i_{l-1}k}\, r_{i_1\ldots i_{l-1}km} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-2)^l}{(2l)!}\, \mathfrak{M}_{i_1\ldots i_{l-1}m}\, r_{i_1\ldots i_l i_l}.$$

Поскольку вторая сумма равна нулю (в силу $r_{i_1\ldots i_l i_l} = 0$), то оба результата вычислений поля $\mathbf{H}$ совпадают.

§ 54. Мультипольное разложение потенциала шара

Начнем с того, что предъявим требуемые формулы сразу. Как и в § 37, здесь речь идет о скалярных потенциалах $\widetilde{\Phi}(\mathbf{r})$ и $\widetilde{\Psi}(\mathbf{r})$, создаваемых *полиномиально* (с показателем степени $L \geqslant 1$) зависящими от декартовых координат источниками, но теперь это плотности объемных $\mathbf{j}$ и поверхностных $\mathbf{i}$ токов в шаре соответственно.

В частности, декартовы компоненты плотности объемных токов имеют вид

$$j_x = \sum_{1\leqslant l+m+n\leqslant L} A_{lmn}\, x^l y^m z^n, \qquad j_y = \sum_{1\leqslant l+m+n\leqslant L} B_{lmn}\, x^l y^m z^n,$$

$$j_z = \sum_{1 \leqslant l+m+n \leqslant L} C_{lmn}\, x^l y^m z^n, \tag{54.1}$$

а компоненты плотности токов, текущих по поверхности шара

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2\,, \tag{54.2}$$

можно задать формулами

$$i_x = \sum_{l=L-1}^{L} \sum_{i+j+k=l} \alpha_{ijk}\, x^i y^j z^k, \qquad i_y = \sum_{l=L-1}^{L} \sum_{i+j+k=l} \beta_{ijk}\, x^i y^j z^k,$$

$$i_z = \sum_{l=L-1}^{L} \sum_{i+j+k=l} \gamma_{ijk}\, x^i y^j z^k \qquad (L \geqslant 1), \tag{54.3}$$

записанными в симметричном (сохраняющем равноправие декартовых направлений) виде. Указанные токи, которые, напоминаем, должны удовлетворять условиям (49.1) и (49.2), создают вне шара (54.2) магнитное поле, скалярные магнитные потенциалы которого описываются выражениями

$$\left.\begin{array}{l} \widetilde{\Phi}(\mathbf{r}) \\[2ex] \widetilde{\Psi}(\mathbf{r}) \end{array}\right\} = \sum_{n=1}^{L} \frac{1}{n!}\ \mathfrak{M}_{i_1 \ldots i_n}\ \frac{x_{i_1} \cdots x_{i_n}}{r^{2n+1}}\,, \tag{54.4}$$

где в соответствии с (51.8) и (51.10) магнитные мультипольные моменты

$$\mathfrak{M}_{i_1 \ldots i_n} = \frac{1}{(n+1)\mathfrak{c}} \begin{cases} \displaystyle\int_V [\mathbf{r}'\mathbf{j}]_k\, \frac{\partial}{\partial x'_k}\ \theta_{i_1 \ldots i_n}(\mathbf{r}')\, dV', \\[3ex] \displaystyle\int_S [\mathbf{r}'\mathbf{i}]_k\, \frac{\partial}{\partial x'_k}\ \theta_{i_1 \ldots i_n}(\mathbf{r}')\, dS'. \end{cases} \tag{54.5}$$

Доказательство формул (54.4) можно строить подобно данному в § 37 доказательству формул (37.10) и (37.15), т. е. математическими средствами. Мы, однако, ограничимся здесь чисто физической аргументацией.

Для этого нам удобно сначала сформулировать известные физические утверждения, на которые, строя свои рассуждения, мы будем ссылаться. Имеются в виду следующие

утверждения:

1. Мультипольное разложение **универсально**. В случае электростатического потенциала это означает, что оно не зависит от того дискретны заряды или непрерывно распределены, от геометрической формы области, занятой зарядами, от того по объему, поверхности или даже вдоль некоторой линии распределены заряды и, наконец, от того свободными или связанными зарядами создается поле. В случае псевдоскалярного магнитного потенциала это означает, что оно «безразлично» к геометрической конфигурации области[1] пространства (или

[1] Будем, однако, по-прежнему считать, что эта область односвязна.

поверхности), занятой токами, к тому, являются ли токи молекулярными (амперовыми) токами или токами проводимости или их описание ведется в терминах пуассоновых магнитных (связанных) зарядов[1]. Обсуждение этого вопроса будет продолжено в § 59 (п. 59.2).

Наконец, мультипольное разложение системы стационарных токов формально совпадает с мультипольным разложением электрически нейтральной электростатической системы (см. § 51), отличаясь от последней лишь заменой

$$\Phi \to \widetilde{\Phi}, \qquad \Psi \to \widetilde{\Psi}, \qquad Q_{i_1\ldots i_n} \to \mathfrak{M}_{i_1\ldots i_n} \qquad (n \geqslant 1). \tag{54.6}$$

2. Система уравнений

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = 0 \tag{54.7}$$

и граничных условий к ним

$$B_{1n} = B_{2n}, \qquad \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}, \tag{54.8}$$

определяющих магнитостатическое поле в диэлектрических или проводящих (*в отсутствие токов проводимости*) неферромагнитных магнетиках, формально совпадает (см., например, [484] § 29) с системой уравнений, определяющих электростатическое поле в диэлектриках (*в отсутствие свободных зарядов*), отличаясь от них лишь заменой

$$\mathbf{E} \to \mathbf{H}, \qquad \mathbf{D} \to \mathbf{B}. \tag{54.9}$$

Таким образом, между решениями указанных классов задач электро– и магнитостатики (применительно к одному и тому же геометрическому телу) существует **взаимно однозначное соответствие**.

Сказанное, в частности, означает, что при рассмотрении подобных магнитостатических задач правомерны использование во всем пространстве псевдоскалярного магнитного потенциала и интерпретация, опирающаяся на представление о связанных «магнитных зарядах» [346, 480] (см. также § 56).

3. Мультипольное разложение — это форма **точного аналитического решения**, относящееся к части пространства, внешней по отношению к источникам.

4. Как отмечалось в § 30 и непосредственно видно из формул (35.5) и (51.7), (51.9), члены мультипольного разложения потенциала, содержащие компоненты тензора 2^n-польного момента (электрического или магнитного), с увеличением расстояния r от системы источников убывают пропорционально $1/r^{n+1}$ (таково их **асимптотическое поведение**).

5. Важным свойством мультипольных моментов является их **аддитивность**.

[1] В связи с этим см., например, [346] и Приложение к [557].

6. Как известно (см., например, [346]), электростатическая задача о диэлектрическом шаре в неоднородном статическом поле имеет сравнительно простое аналитическое решение. Это связано с тем, что каждой сферической гармонике потенциала внешнего поля отвечает поляризационный потенциал с той же угловой зависимостью. С другой стороны, каждой сферической гармонике поляризационного потенциала соответствует совершенно определенная компонента тензора электрического мультипольного момента определенного ранга. Иными словами, если потенциал внешнего поля есть однородный гармонический полином (степени $L \geqslant 1$), то в мультипольном разложении потенциала шара отличны от нуля только слагаемые, содержащие компоненты 2^L-польного момента.

Перейдем теперь к собственно рассуждению. Представим себе, что однородный диэлектрический шар находится в неоднородном внешнем электростатическом поле, потенциал которого есть однородная гармоническая полиномиальная, т. е. шаровая, (степени $L \geqslant 1$) функция декартовых координат (предполагается, что начало системы координат выбрано в центре шара). Хорошо известно (см., например, [494] или соответствующий материал в гл. 10 данной монографии), что в результате поляризации на границе шара возникают поверхностные связанные заряды, (поляризационный) потенциал[1] которых внутри диэлектрика имеет вид полинома той же степени L. В соответствии с результатами § 21 это означает, что связанный заряд, возникающий на поверхности шара, характеризуется полиномиальной плотностью все той же степени L. Существенно, что, в соответствии с утверждением п. 6, мультипольное разложение электростатического потенциала шара в рассматриваемых условиях выражается только слагаемыми, содержащими компоненты 2^L-польного электрического момента.

Далее, согласно утверждению п. 2 (о взаимно однозначном соответствии), из сказанного следует, что однородный шар из магнетика, находящийся в постоянном внешнем магнитном поле, потенциал которого представляет собой шаровую (степени $L \geqslant 1$) функцию, приобретает поляризационный (связанный) магнитный заряд и его псевдоскалярный магнитный потенциал, мультипольное разложение которого содержит только компоненты 2^L-польного магнитного момента. Сказанное подтверждается и универсальностью (п. 1 и в особенности (54.6)), и асимптотическим поведением (п. 4) мультипольного разложения. Поверхностная плотность связанного магнитного заряда есть полином степени L. Понятно, что если бы потенциал внешнего поля был не шаровой функцией, а обычным полиномом степени L, то, поскольку всякий полином разложи́м по шаровым функциям [146] (ср. (37.3)), то мультипольное разложение поляризационного потенциала содержало бы конечное число членов с мультипольными моментами различных рангов, не превышающих ранга L, т. е. имело бы вид нижней формулы (54.4). Поверхностная плотность связанного магнитного заряда оставалась бы при этом полиномом степени L.

[1] Потенциал поляризованного однородного диэлектрического тела дается формулой

$$\Phi_{\sigma'} = \oint \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\mathbf{n}'}{R}\, dS'\,,$$

где $\mathbf{P}$ — вектор поляризации, а $\sigma' = P_{n'}$ — поверхностная плотность связанных зарядов.

Осталось сделать окончательное заключение. В силу универсальности (п. 1) мультипольное разложение шара не изменит своего вида и при замене поверхностного связанного магнитного заряда объемным зарядом или даже токами проводимости (хоть объемными, хоть поверхностными) лишь бы соответствующие плотности оставались полиномами все той же степени L. Таким образом, справедливость формулы (54.4) подтверждена. Что касается поляризационных (вторичных) источников поля, то связь объемной и поверхностной плотностей магнитных зарядов с намагничением $\mathfrak{J}$ выражают формулы

$$\tilde{\varrho} = -\operatorname{div}\mathfrak{J}, \qquad \tilde{\sigma} = \frac{\mathfrak{J}\mathbf{r}}{a} \tag{54.10}$$

(a – радиус шара) соответственно. Вместо псевдоскалярных плотностей $\tilde{\varrho}$ объемного и $\tilde{\sigma}$ поверхностного связанного магнитного заряда можно оперировать (см. § 59) с амперовыми объемным током плотности

$$\mathbf{j}_{\mathrm{A}} = \mathfrak{c}\operatorname{rot}\mathfrak{J}. \tag{54.11}$$

и поверхностным током плотности

$$\mathbf{i}_{\mathrm{A}} = \mathfrak{c}\operatorname{Rot}\mathfrak{J} = -\mathfrak{c}\,\frac{[\mathbf{r}\mathfrak{J}]}{a}. \tag{54.12}$$

Трехиндексная запись выражений (54.4) дается формулой

$$\left.\begin{matrix}\widetilde{\Phi}(\mathbf{r}) \\ \\ \widetilde{\Psi}(\mathbf{r})\end{matrix}\right\} = \sum_{n=1}^{L}\frac{1}{n!\,r^{2n+1}}\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n}\frac{n\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!\,\gamma\,!}\,\mathfrak{M}_{\alpha\beta\gamma}\,x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}. \tag{54.13}$$

Если объемный и поверхностный токи в шаре имеют совпадающий набор мультипольных моментов, то, как видно из (54.13), наружные магнитные поля обеих токовых систем совпадают. При этом речь может идти не обязательно об одном и том же шаре. Шары могут быть различных размеров, но обязательно должны иметь общий центр.

Глава 9
Мультипольные представления магнитного потенциала поверхностных и объемных токов эллипсоида

§ 55. Вводные замечания

В данной главе нам надлежит получить точные формулы, представляющие в терминах мультипольных моментов внешний псевдоскалярный потенциал магнитного поля, порожденного электрическими токами эллипсоидального тела. Токи могут быть объемными или поверхностными, а их плотности предполагаются полиномиальными[1]; что касается тела, то под ним подразумевается либо неовеществленная область пространства, либо магнетик указанной формы.

Материал и результаты данной главы тесно связаны с содержанием седьмой главы. Напомним, какой вид имеют мультипольные представления электростатического потенциала эллипсоида. Если поверхность эллипсоида задана уравнением $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$, то одно из мультипольных представлений соответствует объемной плотности заряда

$$\varrho(\mathbf{r})=\varrho_L^\Gamma\equiv\Gamma_L(x/a,y/b,z/c),\qquad L=0,1,\dots \tag{55.1}$$

и дается формулой

$$\Phi_L^\Gamma(\mathbf{r})\equiv\int\frac{\varrho_L^\Gamma}{R}\,dV=\sum_{\varkappa=0}^{L}\widetilde{q}_{i_1\dots i_\varkappa}\varphi_{i_1\dots i_\varkappa}(\mathbf{r}), \tag{55.2}$$

а другое справедливо как для объемных зарядов плотности

$$\varrho(\mathbf{r})=\varrho_L\equiv P_L(x,y,z),\qquad L=0,1,\dots, \tag{55.3}$$

[1] Мы называем поверхностные токи эллипсоида полиномиальными, если все три декартовы компоненты отношения вектора поверхностной плотности тока $\mathbf{i}$ к p являются полиномами.

так и для зарядов, распределенных на границе эллипсоида с поверхностной плотностью $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_{L+2}$, где

$$\sigma_L \equiv \varrho_L\, p, \qquad L = 0, 1, \ldots, \tag{55.4}$$

и определяется выражением

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{L-2}(\mathbf{r}) &\equiv \int \frac{\varrho_{L-2}}{R}\, dV \\ \Psi_L(\mathbf{r}) &\equiv \oint \frac{\sigma_L}{R}\, dS \end{aligned}\right\} = \sum_{\varkappa=0}^{L} q_{i_1\ldots i_\varkappa} \psi_{i_1\ldots i_\varkappa}(\mathbf{r}), \qquad \left\{\begin{aligned} &L = 2, 3, \ldots, \\ &L = 0, 1, \ldots \end{aligned}\right. \tag{55.5}$$

В представленных формулах Γ_L и P_L — полиномы степени L, причем Γ_L — гармоническая функция своих аргументов; $p = \left\langle x^2 / a^4 \right\rangle^{-1/2}$ (угловыми скобками, как и всюду в книге, обозначается сумма трех членов циклической перестановки); R — расстояние от элемента интегрирования dV или dS до точки наблюдения вне эллипсоида. Компоненты тензоров $\widetilde{q}_{i_1\ldots i_\varkappa}$ и $q_{i_1\ldots i_\varkappa}$, играющие роль коэффициентов в (55.2) и (55.5), линейно выражаются через компоненты тензоров электрических мультипольных моментов эллипсоида (подробнее см. гл. 7). Симметричные неприводимые тензоры $\varphi_{i_1\ldots i_\varkappa}(\mathbf{r})$ и $\psi_{i_1\ldots i_\varkappa}(\mathbf{r})$ — это тензор-потенциалы эллипсоида и гомеоида соответственно.

Таким образом, любое полиномиальное объемное распределение (в том числе и (55.1)) имеет мультипольное представление потенциала в виде (55.5), причем гармоническое распределение (55.1) обладает еще и дополнительным (использующим мультиполи более низкого ранга) представлением своего потенциала в виде (55.2). Зато мультипольное представление (55.5) носит более общий характер, будучи справедливым не только для объемных, но и для поверхностных полиномиальных распределений заряда. При этом два вида поверхностных распределений на эллипсоиде, а именно σ_0 и σ_1 имеют мультипольные представления их потенциалов, не воспроизводимые никакими объемными распределениями заряда.

Возвращаясь к интересующему нас здесь магнитному потенциалу токов эллипсоида, отметим, что приведенные выше формулы (55.2) и (55.5) подсказывают, какой вид должны иметь мультипольные представления этого потенциала. Учитывая утверждения, сформулированные в § 54, в частности, п. 1 об универсальности мультипольного разложения и заменах (54.6), а также пп. 2–4, следует ожидать, что во внешней области пространства токи эллипсоида могут создавать магнитный потенциал, который в зависимости от свойств этих токов характеризуется выражениями $\sum\limits_{\varkappa=1}^{L} \widetilde{\mathfrak{m}}_{i_1\ldots i_\varkappa} \varphi_{i_1\ldots i_\varkappa}(\mathbf{r})$ или $\sum\limits_{\varkappa=1}^{L} \mathfrak{m}_{i_1\ldots i_\varkappa} \psi_{i_1\ldots i_\varkappa}(\mathbf{r})$. Очевидные отличия от (55.2) и (55.5) заключаются, во-первых, в нижнем (единичном, а не нулевом) пределе суммирования (отсутствие магнитных зарядов) и, во-вторых, в замене электрических мультиполей магнитными, что отмечено появлением тензоров $\widetilde{\mathfrak{m}}_{i_1\ldots i_\varkappa}$ и $\mathfrak{m}_{i_1\ldots i_\varkappa}$ вместо $\widetilde{q}_{i_1\ldots i_\varkappa}$ и $q_{i_1\ldots i_\varkappa}$ соответственно. Что касается рекуррентных соотношений, выражающих (подобно (45.10) и (46.4)) тензоры $\widetilde{\mathfrak{m}}_{i_1\ldots i_\varkappa}$ и $\mathfrak{m}_{i_1\ldots i_\varkappa}$ через полные магнитные мультипольные моменты, то их предстоит установить. Кроме того, предстоит выяснить, как «выглядят» токи, создающие объемные $\widetilde{\Phi}$ и поверхностные $\widetilde{\Psi}$ магнитные потенциалы.

§ 56. Парциальные токи эллипсоида

56.1. Объемные токи

Представим себе, что в объеме эллипсоида

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 \tag{56.1}$$

имеется электрический ток. Пусть декартовы компоненты j_x, j_y, j_z объемной плотности $\mathbf{j}$ этого тока суть однородные гармонические полиномы (шаровые функции) одинаковой степени, переменными которых являются отношения x/a, y/b, z/c. Таким образом, компоненты плотности тока можно записать следующим образом[1]:

$$\frac{j_x^{(\nu)}}{a} = \sum_{k+l+m=\nu} \frac{\nu!}{k!\,l!\,m!}\ \alpha_{x;\,klm} \left(\frac{x}{a}\right)^k \left(\frac{y}{b}\right)^l \left(\frac{z}{c}\right)^m, \tag{56.2}$$

$$\frac{j_y^{(\nu)}}{b} = \sum_{k+l+m=\nu} \frac{\nu!}{k!\,l!\,m!}\ \alpha_{y;\,klm} \left(\frac{x}{a}\right)^k \left(\frac{y}{b}\right)^l \left(\frac{z}{c}\right)^m, \tag{56.3}$$

$$\frac{j_z^{(\nu)}}{c} = \sum_{k+l+m=\nu} \frac{\nu!}{k!\,l!\,m!}\ \alpha_{z;\,klm} \left(\frac{x}{a}\right)^k \left(\frac{y}{b}\right)^l \left(\frac{z}{c}\right)^m. \tag{56.4}$$

Коэффициенты $\alpha_{x;\,j_1,\ldots,j_\nu}$, $\alpha_{y;\,j_1,\ldots,j_\nu}$, $\alpha_{z;\,j_1,\ldots,j_\nu}$, которые входят в полиномы (56.2)–(56.4), образуют тензор $(\nu+1)$-го ранга, симметричный (при $\nu \geqslant 2$) по всем индексам, кроме первого. Он отделен от остальных индексов точкой с запятой. В (56.2)–(56.4) для симметричных индексов этого тензора (который мы будем называть *v-тензором*) использована трехиндексная запись. При этом гармоничность каждой компоненты плотности тока обеспечивается *неприводимостью* (по симметричным индексам) соответствующей «векторной» компоненты v-тензора (ср. (39.16)):

$$\alpha_{x;\,k+2,l,m} + \alpha_{x;\,k,l+2,m} + \alpha_{x;\,k,l,m+2} = 0, \tag{56.5}$$

$$\alpha_{y;\,k+2,l,m} + \alpha_{y;\,k,l+2,m} + \alpha_{y;\,k,l,m+2} = 0, \tag{56.6}$$

$$\alpha_{z;\,k+2,l,m} + \alpha_{z;\,k,l+2,m} + \alpha_{z;\,k,l,m+2} = 0. \tag{56.7}$$

Как и всякий стационарный ток, существующий в объеме, который ограничен замкнутой поверхностью S, парциальный ток (56.2)–(56.4) должен удовлетворять условиям (49.1), (49.2):

$$\operatorname{div}\mathbf{j}^{(\nu)} = 0, \tag{56.8}$$

$$j_n^{(\nu)}\big|_S = 0, \tag{56.9}$$

где вектор единичной нормали к S в случае эллипсоидальной поверхности (56.1) равен

$$\mathbf{n} = \left\{\frac{x}{a^2}\,p\,,\, \frac{y}{b^2}\,p\,,\, \frac{z}{c^2}\,p\right\}. \tag{56.10}$$

[1] Заметим, что в формулах (56.2)–(56.4) и последующих $\nu \geqslant 1$. Это следует, например, из приводимых ниже соотношений (56.14).

Ток, характеризующийся плотностью (56.2)–(56.4) и удовлетворяющий условиям (56.5)–(56.7) и (56.8), (56.9), будем называть *парциальным* объемным током эллипсоида[1].

В результате подстановки выражений (56.2)–(56.4) в уравнение (56.8) (и замены индексов суммирования в каждой из трех возникающих при этом сумм с тем, чтобы во всех суммах можно было выделить произведение $(x/a)^k(y/b)^l(z/c)^m$) выявляется следующее соотношение между коэффициентами:

$$\alpha_{x;\,k+1,l,m} + \alpha_{y;\,k,l+1,m} + \alpha_{z;\,k,l,m+1} = 0 \qquad (k+l+m+1=\nu\geqslant 1). \tag{56.11}$$

Условие (56.9) при подстановке в него (56.10) эквивалентно уравнению

$$\left\langle \frac{x}{a}\,\frac{j_x^{(\nu)}}{a}\right\rangle\bigg|_S = 0. \tag{56.12}$$

Отсюда, используя выражения (56.2)–(56.4) и вновь заменяя в возникающих суммах индексы суммирования, в конечном счете можно получить еще одно соотношение для коэффициентов. Оно имеет вид

$$k\,\alpha_{x;\,k-1,l,m}+l\,\alpha_{y;\,k,l-1,m}+m\,\alpha_{z;\,k,l,m-1}=0 \quad (k+l+m-1=\nu\geqslant 1). \tag{56.13}$$

Отметим, что если условие гармоничности полиномов (56.2)–(56.4) дает связь между компонентами тензора $\alpha_{x;\,j_1,\ldots,j_\nu}$, $\alpha_{y;\,j_1,\ldots,j_\nu}$, $\alpha_{z;\,j_1,\ldots,j_\nu}$ только по симметричным индексам, то условия (56.8), (56.9) связывают компоненты тензора только по первому индексу.

Частными случаями (56.13) являются следующие равенства:

$$\alpha_{x;\,000} = \alpha_{y;\,000} = \alpha_{z;\,000} = 0, \tag{56.14}$$

$$\alpha_{x;\,k00} = \alpha_{y;\,0l0} = \alpha_{z;\,00m} = 0, \tag{56.15}$$

$$\left.\begin{aligned} k\,\alpha_{x;\,k-1,\,l,0} + l\,\alpha_{y;\,k,\,l-1,0} &= 0,\\ l\,\alpha_{y;\,0,\,l-1,m} + m\,\alpha_{z;\,0,\,l,m-1} &= 0,\\ m\,\alpha_{z;\,k,0,m-1} + k\,\alpha_{x;\,k-1,0,m} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{56.16}$$

Каждая из «векторных» компонент $\alpha_{x;\,j_1,\ldots,j_\nu}$, $\alpha_{y;\,j_1,\ldots,j_\nu}$, $\alpha_{z;\,j_1,\ldots,j_\nu}$ υ-тензора, сама являясь совершенно симметричным тензором ν-го ранга по оставшимся индексам, при использовании трехиндексной записи ($\alpha_{x;\,klm}$, $\alpha_{y;\,klm}$, $\alpha_{z;\,klm}$) позволяет отслеживать, чётен (E) или нечётен (O) любой из индексов k, l, m ($k+l+m=\nu$). Тензоры $\overleftrightarrow{\alpha}^{(\nu)}_{x;}$, $\overleftrightarrow{\alpha}^{(\nu)}_{y;}$ и $\overleftrightarrow{\alpha}^{(\nu)}_{z;}$ в зависимости от четности неотрицательного целого числа ν (ранга тензора) можно, подобно (39.15), представлять в виде одной из сумм

$$\begin{gathered} \overleftrightarrow{\alpha}^{(2\varepsilon)}_{i;} = \overleftrightarrow{\alpha}^{(2\varepsilon)}_{i;\,EEE} + \overleftrightarrow{\alpha}^{(2\varepsilon)}_{i;\,OOE} + \overleftrightarrow{\alpha}^{(2\varepsilon)}_{i;\,EOO} + \overleftrightarrow{\alpha}^{(2\varepsilon)}_{i;\,OEO}\,,\\ \overleftrightarrow{\alpha}^{(2\varepsilon+1)}_{i;} = \overleftrightarrow{\alpha}^{(2\varepsilon+1)}_{i;\,OEE} + \overleftrightarrow{\alpha}^{(2\varepsilon+1)}_{i;\,EOE} + \overleftrightarrow{\alpha}^{(2\varepsilon+1)}_{i;\,EEO} + \overleftrightarrow{\alpha}^{(2\varepsilon+1)}_{i;\,OOO} \end{gathered} \tag{56.17}$$

[1] Некоторые соображения, основанные на полумикроскопическом подходе и проливающие свет на выбор именно такого вида парциальных токов, даны в Приложении D.

четырех симметричных тензоров, каждый из которых содержит все компоненты исходного тензора с индексами соответствующей четности, в то время как остальные компоненты положены в нем равными нулю. Напомним (см. (39.16)), что при этом каждый из тензоров-слагаемых остается неприводимым. В формулах (56.17) индекс i может принимать значения x, y или z.

Аналогичное (с учетом четности ν) разбиение переносится, естественно, на компоненты (56.2)–(56.4) плотности тока:

$$j_i^{(2\varepsilon)} = j_{i;EEE}^{(2\varepsilon)} + j_{i;OOE}^{(2\varepsilon)} + j_{i;EOO}^{(2\varepsilon)} + j_{i;OEO}^{(2\varepsilon)} \qquad (i = x, y, z), \tag{56.18}$$

$$j_i^{(2\varepsilon+1)} = j_{i;OEE}^{(2\varepsilon+1)} + j_{i;EOE}^{(2\varepsilon+1)} + j_{i;EEO}^{(2\varepsilon+1)} + j_{i;OOO}^{(2\varepsilon+1)} \qquad (i = x, y, z). \tag{56.19}$$

Здесь

$$\frac{j_{i;EEE}^{(2\varepsilon)}}{a_{(i)}} = \sum_{l+m+n=\varepsilon} \frac{(2\varepsilon)!\,\alpha_{i;\,2l,2m,2n}}{(2l)!(2m)!(2n)!} \left(\frac{x}{a}\right)^{2l} \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} \left(\frac{z}{c}\right)^{2n}, \tag{56.20}$$

$$\frac{j_{i;OOE}^{(2\varepsilon)}}{a_{(i)}} = \sum_{l+m+n=\varepsilon-1} \frac{(2\varepsilon)!\,\alpha_{i;\,2l+1,2m+1,2n}}{(2l+1)!(2m+1)!(2n)!} \left(\frac{x}{a}\right)^{2l+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{2m+1} \left(\frac{z}{c}\right)^{2n}, \tag{56.21}$$

$$\frac{j_{i;OOO}^{(2\varepsilon+1)}}{a_{(i)}} = \sum_{l+m+n=\varepsilon-1} \frac{(2\varepsilon+1)!\,\alpha_{i;\,2l+1,2m+1,2n+1}}{(2l+1)!(2m+1)!(2n+1)!} \left(\frac{x}{a}\right)^{2l+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{2m+1} \left(\frac{z}{c}\right)^{2n+1}, \tag{56.22}$$

$$\frac{j_{i;OEE}^{(2\varepsilon+1)}}{a_{(i)}} = \sum_{l+m+n=\varepsilon} \frac{(2\varepsilon+1)!\,\alpha_{i;\,2l+1,2m,2n}}{(2l+1)!(2m)!(2n)!} \left(\frac{x}{a}\right)^{2l+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} \left(\frac{z}{c}\right)^{2n}. \tag{56.23}$$

Заметим, что в силу (56.14) для формулы (56.20) имеет место неравенство $\varepsilon > 0$. Для формулы (56.23) соблюдается неравенство $\varepsilon \geqslant 0$, а обе формулы (56.21) и (56.22) подчиняются одному неравенству $\varepsilon \geqslant 1$. Формулы для $j_{i;EOO}^{(2\varepsilon)}/a_{(i)}$, $j_{i;OEO}^{(2\varepsilon)}/a_{(i)}$ получаются из (56.21), а формулы для $j_{i;EOE}^{(2\varepsilon+1)}/a_{(i)}$, $j_{i;EEO}^{(2\varepsilon)+1}/a_{(i)}$ получаются из (56.23) с помощью очевидной циклической перестановки.

Выполняя вычисления, иногда приходится входящие в (56.18) или (56.19) слагаемые рассматривать по отдельности. В этом случае, если речь идет, к примеру, о $j_{x;OOO}^{(2\varepsilon+1)}$, в качестве $j_y^{(2\varepsilon+1)}$ и $j_z^{(2\varepsilon+1)}$ следует брать, как это видно из (56.11) и (56.13), $j_{y;EEO}^{(2\varepsilon+1)}$ и $j_{z;EOE}^{(2\varepsilon+1)}$. Для удобства все возможные наборы вариантов (их восемь) четно-нечетной зависимости различных величин представлены в Таблице 4.

56.2. Поверхностные токи

Рассмотрим теперь поверхностные токи. В случае эллипсоида полиномиальные поля в его внутренней области создаются токами, поверхностная плотность которых имеет вид

$$\mathbf{i} = \mathbf{T}(x, y, z)\, p, \tag{56.24}$$

Таблица 4

Таблица четности

$j_x^{(\nu)};\quad i_x^{(\nu)}/p$	$j_y^{(\nu)};\quad i_y^{(\nu)}/p$	$j_z^{(\nu)};\quad i_z^{(\nu)}/p$	$\operatorname{div}\mathbf{j}^{(\nu)};\quad i_n/p\Big\vert_S$	$\operatorname{div}[\mathbf{r}\mathbf{j}^{(\nu)}];\quad \widetilde{\Phi}^{(\nu)}$
$E\ E\ E$	$O\ O\ E$	$O\ E\ O$	$O\ E\ E$	$E\ O\ O$
$E\ O\ O$	$O\ E\ O$	$O\ O\ E$	$O\ O\ O$	$E\ E\ E$
$O\ E\ O$	$E\ O\ O$	$E\ E\ E$	$E\ E\ O$	$O\ O\ E$
$O\ O\ E$	$E\ E\ E$	$E\ O\ O$	$E\ O\ E$	$O\ E\ O$
$O\ O\ O$	$E\ E\ O$	$E\ O\ E$	$E\ O\ O$	$O\ E\ E$
$O\ E\ E$	$E\ O\ E$	$E\ E\ O$	$E\ E\ E$	$O\ O\ O$
$E\ O\ E$	$O\ E\ E$	$O\ O\ O$	$O\ O\ E$	$E\ E\ O$
$E\ E\ O$	$O\ O\ O$	$O\ E\ E$	$O\ E\ O$	$E\ O\ E$

где каждая декартова компонента вектора $\mathbf{T}(x, y, z)$ является полиномом, а посредством p, как обычно, обозначена величина

$$p = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}.$$

Полиномиальность внутреннего поля очевидна, поскольку потенциалы $\Psi = \oint(\sigma/R)\,dS$ простого эллипсоидального слоя, рассмотренные в гл. 4, и декартовы компоненты векторного потенциала $\mathbf{A} = \oint(\mathbf{i}/R)\,dS$ математически однотипны.

Плотность $\mathbf{i}$ поверхностного тока должна удовлетворять аналогичному (56.9) условию

$$\frac{1}{p}\, i_n\Big|_S = \left\langle \frac{x}{a}\,\frac{i_x}{a}\right\rangle\Big|_S = 0 \tag{56.25}$$

на поверхности эллипсоида.

Пусть каждая компонента вектора $\mathbf{T}(x, y, z)$ представляет собой шаровую функцию степени ν переменных x/a, y/b, z/c. В качестве вектора $\mathbf{T}$, обладающего такими свойствами, можно использовать вектор $\mathbf{j}^{(\nu)}(x, y, z)$, рассмотренный в п. 56.1. Так что формула (56.24) заменяется на[1]

$$\mathbf{i}^{(\nu)}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) = \mathbf{j}^{(\nu)}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) p. \tag{56.26}$$

Действительно, однородность и гармоничность полиномов $i_x^{(\nu)}/p$, $i_y^{(\nu)}/p$ и $i_z^{(\nu)}/p$ приводит к соотношениям (56.5)–(56.7), а удовлетворение граничному условию (56.25) — к соотношению (56.13).

Покажем, что выполняется и соотношение (56.11). Для этого представим себе, что весь объем эллипсоида (56.1) разбит (подобными его поверхности, подобно расположенными и концентрическими с ним эллипсоидальными поверхностями) на бесконечно тонкие эллипсоидальные слои. Таким образом, мы представляем тело эллипсоида состоящим из вложенных друг в друга (подобно матрёшке) элементарных гомеоидов (см. § 7). Понятно, что уравнение поверхности $S_\varkappa$ произвольно выбранного элементарного гомеоида имеет вид

$$\left\langle \frac{x^2}{\varkappa^2 a^2}\right\rangle = 1 \qquad (0 < \varkappa < 1). \tag{56.27}$$

Пусть далее ток в объеме эллипсоида характеризуется формулами (56.2)–(56.4) с коэффициентами, подчиненными (56.5)–(56.7) и (56.11). Компонента этого тока, нормальная к произвольной эллипсоидальной поверхности (56.27), вычисляется по формуле

$$\frac{1}{p_\varkappa}\, j_n\Big|_{S_\varkappa} = \frac{1}{\varkappa^2}\left\langle \frac{x}{a}\,\frac{j_x}{a}\right\rangle\Big|_{S_\varkappa}, \tag{56.28}$$

где параметр $\varkappa$ на поверхности $S_\varkappa$ является константой. Отличие выражения (56.28) через коэффициенты $\alpha_{x;\,j_1,\ldots,j_\nu}$, $\alpha_{y;\,j_1,\ldots,j_\nu}$, $\alpha_{z;\,j_1,\ldots,j_\nu}$ от аналогичного выражения левой части (56.12) состоит лишь в наличии постоянного множителя $1/\varkappa^2$. Отсюда следует, что

$$j_n\Big|_{S_\varkappa} = 0. \tag{56.29}$$

[1] Ср. с (39.4).

Тем самым установлено, что рассматриваемый объемный ток не проникает через границы элементарных гомеоидов, т. е. «перемешивания» токов, принадлежащих разным (в том числе соседним) слоям, не происходит. Поэтому условие $\operatorname{div}\mathbf{j}^{(\nu)}=0$ «работает» внутри слоя и его использование дает связь (56.11), справедливую для тока в каждом бесконечно тонком гомеоиде, а значит, и для поверхностного тока $\mathbf{i}^{(\nu)}(x,y,z)$. Таким образом, показано, что полиномиальные коэффициенты $\alpha_{x;\,j_1,\ldots,j_\nu}$, $\alpha_{y;\,j_1,\ldots,j_\nu}$, $\alpha_{z;\,j_1,\ldots,j_\nu}$, характеризующие плотности объемного и поверхностного тока в эллипсоиде, подчиняются одним и тем же соотношениям (56.5)–(56.7), (56.11) и (56.13).

Поверхностный ток эллипсоида, определенный формулами (56.26) с коэффициентами полиномов $\alpha_{x;\,j_1,\ldots,j_\nu}$, $\alpha_{y;\,j_1,\ldots,j_\nu}$, $\alpha_{z;\,j_1,\ldots,j_\nu}$, удовлетворяющими уравнениям (56.5)–(56.7), (56.11) и (56.13), будем называть *парциальным*.

56.3. Независимые коэффициенты токовых полиномов

Существование соотношений (56.5)–(56.7), (56.11), (56.13), с одной стороны, означает, что далеко не все коэффициенты полиномов (56.2)–(56.4) являются независимыми, а с другой стороны, позволяет использовать заложенную в этих соотношениях рекурсию для выявления независимых коэффициентов.

При $k=0$ из (56.13) следует второе из соотношений (56.16)

$$l\,\alpha_{y;\,0,l-1,m} + m\,\alpha_{z;\,0,l,m-1} = 0. \tag{56.30}$$

В остальных случаях после замены $k \to k+1$ из (56.13) получаем

$$-\alpha_{x;\,klm} = \frac{l}{k+1}\,\alpha_{y;\,k+1,l-1,m} + \frac{m}{k+1}\,\alpha_{z;\,k+1,l,m-1} \qquad (k+l+m\geqslant 0). \tag{56.31}$$

В частности, при $l=0$ из (56.31) получается третье из соотношений (56.16)

$$-\alpha_{x;\,k0m} = \frac{m}{k+1}\,\alpha_{z;\,k+1,0,m-1}. \tag{56.32}$$

Замена $k \to k-1$ переводит (56.11) в соотношение

$$-\alpha_{x;\,klm} = \alpha_{y;\,k-1,l+1,m} + \alpha_{z;\,k-1,l,m+1} \qquad (k+l+m\geqslant 1). \tag{56.33}$$

Из (56.31) и (56.33) при $l\neq 0$ образуется рекуррентное соотношение

$$\alpha_{y;\,k+1,l-1,m} = \frac{k+1}{l}\,\alpha_{y;\,k-1,l+1,m} + \frac{k+1}{l}\,\alpha_{z;\,k-1,l,m+1} - \\ - \frac{m}{l}\,\alpha_{z;\,k+1,l,m-1} \qquad (k+l+m\geqslant 1), \tag{56.34}$$

двукратное применение которого для замены α_y в его же правой части превращает (56.34) в длинное равенство

$$\alpha_{y;\,k+1,l-1,m} = \frac{(k+1)(k-1)(k-3)}{l(l+2)(l+4)}\,\alpha_{y;\,k-5,l+5,m} + \\ + \left\{ \frac{(k+1)(k-1)(k-3)}{l(l+2)(l+4)}\,\alpha_{z;\,k-5,l+4,m+1} + \frac{(k+1)(k-1)}{l(l+2)}\,\alpha_{z;\,k-3,l+2,m+1} + \right. \\ \left. + \frac{k+1}{l}\,\alpha_{z;\,k-1,l,m+1} \right\} - \left\{ \frac{(k+1)(k-1)m}{l(l+2)(l+4)}\,\alpha_{z;\,k-3,l+4,m-1} + \right. \\ \left. + \frac{(k+1)m}{l(l+2)}\,\alpha_{z;\,k-1,l+2,m-1} + \frac{m}{l}\,\alpha_{z;\,k+1,l,m-1} \right\}. \quad (56.35)$$

Дальнейшие преобразования предполагают выбор конкретной четности индексов. Из восьми возможных вариантов наборов (по четности) индексов, представленных в таблице 4, мы (по причинам чрезвычайной громоздкости расчета и однотипности рассуждений) здесь и далее (см. § 58) ограничимся рассмотрением лишь одного из них. Пусть это будет $k = 2l'+1$, $l = 2m'+1$, $m = 2n'+1$ (пятая строка таблицы 4). Подставляя эти значения в (56.35) и опуская штрихи у новых индексов, будем иметь

$$\alpha_{y;\,2l+2,2m,2n+1} = \frac{(2l+2)2l(2l-2)}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)}\,\alpha_{y;\,2l-4,2m+6,2n+1} + \\ + \left\{ \frac{(2l+2)2l(2l-2)}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)}\,\alpha_{z;\,2l-4,2m+5,2n+2} + \right. \\ \left. + \frac{(2l+2)2l}{(2m+1)(2m+3)}\,\alpha_{z;\,2l-2,2m+3,2n+2} + \frac{2l+2}{2m+1}\,\alpha_{z;\,2l,2m+1,2n+2} \right\} - \\ - \left\{ \frac{(2l+2)2l(2n+1)}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)}\,\alpha_{z;\,2l-2,2m+5,2n} + \right. \\ \left. + \frac{(2l+2)(2n+1)}{(2m+1)(2m+3)}\,\alpha_{z;\,2l,2m+3,2n} + \frac{2n+1}{2m+1}\,\alpha_{z;\,2l+2,2m+1,2n} \right\}. \quad (56.36)$$

Отметим, что в формуле (56.36) у величин $\alpha_{y;\,ijk}$ последний индекс (k) остается неизменным, постоянна и сумма первых двух $(i+j)$ индексов. Такими же свойствами обладают и величины $\alpha_{z;\,ijk}$ внутри каждой из фигурных скобок. Сказанное позволяет придать выражению (56.36) вид

$$\alpha_{y;\,2l+2,2m,2n+1} = \frac{(2l+2)!!(2m-1)!!}{(2l+2m+1)!!}\,\alpha_{y;\,0,2l+2m+2,2n+1} + \\ + \left\{ \frac{(2l+2)!!(2m-1)!!}{0!!(2l+2m+1)!!}\,\alpha_{z;\,0,2l+2m+1,2n+2} + \right. \\ + \frac{(2l+2)!!(2m-1)!!}{2!!(2l+2m-1)!!}\,\alpha_{z;\,2,2l+2m-1,2n+2} + \ldots + \frac{(2l+2)!!(2m-1)!!}{(2l)!!(2m+1)!!} \times \\ \left. \times\,\alpha_{z;\,2l,2m+1,2n+2} \right\} - (2n+1) \left\{ \frac{(2l+2)!!(2m-1)!!}{2!!(2l+2m+1)!!}\,\alpha_{z;\,2,2l+2m+1,2n} + \right. \\ \left. + \frac{(2l+2)!!(2m-1)!!}{4!!(2l+2m-1)!!}\,\alpha_{z;\,4,2l+2m-1,2n} + \frac{(2l+2)!!(2m-1)!!}{(2l+2)!!(2m+1)!!}\,\alpha_{z;\,2l+2,2m+1,2n} \right\}.$$

Выражая $\alpha_{y;\,0,2l+2m+2,2n+1}$ с помощью (56.30) через $\alpha_{z;\,0,2l+2m+3,2n}$, получаем возможность новой записи:

$$\alpha_{y;\,2l,2m,2n+1}=\sum_{i=0}^{l-1}\frac{(2l)!!(2m-1)!!}{(2i)!!(2l+2m-2i-1)!!}\,\alpha_{z;\,2i,2l+2m-2i-1,2n+2}-\\-(2n+1)\sum_{i=0}^{l}\frac{(2l)!!(2m-1)!!}{(2i)!!(2l+2m-2i+1)!!}\,\alpha_{z;\,2i,2l+2m-2i+1,2n},\qquad(56.37)$$

где попутно произведена замена $l\to l-1$.

Таким образом, формулы (56.11) и (56.13) позволяют все $\alpha_{x;\,ijk}$ и $\alpha_{y;\,ijk}$ выразить только через $\alpha_{z;\,ijk}$. В связи с этим уместно перейти к более простому обозначению

$$\gamma_{ijk}\equiv\alpha_{z;\,ijk}.\qquad(56.38)$$

Но коэффициенты γ_{ijk} — это еще не независимые коэффициенты. Теперь предстоит использовать соотношение (56.7).

Введем в связи с этим операторы $\hat\gamma_a$, $\hat\gamma_b$, $\hat\gamma_c$ такие, что их воздействие возможно только на величины γ_{ijk} и заключается в следующем: $\hat\gamma_a$ увеличивает на две единицы первый индекс (i), $\hat\gamma_b$ делает то же со вторым индексом (j), а $\hat\gamma_c$ — с третьим (k). Поэтому равенству (56.7) в терминах введенных операторов соответствует равенство

$$(\hat\gamma_a+\hat\gamma_b+\hat\gamma_c)\,\gamma_{ijk}=0.\qquad(56.39)$$

Так что должна быть понятной следующая цепочка равенств

$$\gamma_{2i,2j+1,2k}=\hat\gamma_a^i\hat\gamma_b^j\hat\gamma_c^k\gamma_{010}=(-\hat\gamma_b-\hat\gamma_c)^i\,\hat\gamma_b^j\hat\gamma_c^k\gamma_{010}=\\=(-1)^i\sum_{s=0}^{i}\frac{i!}{s!(i-s)!}\,\hat\gamma_b^{s+j}\hat\gamma_c^{i-s+k}\gamma_{010}=\\=(-1)^i\sum_{s=0}^{i}\frac{i!}{s!(i-s)!}\,\gamma_{0,2s+2j+1,2i+2k-2s}.\qquad(56.40)$$

В результате формуле (56.37) можно придать вид

$$\alpha_{y;\,2l,2m,2n+1}=\\=\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{s=0}^{i}\frac{(2l)!!\,(2m-1)!!\,(-1)^i\,i!}{(2i)!!\,(2l+2m-2i-1)!!\,s!\,(i-s)!}\,\gamma_{0,2(s+l+m-i)-1,2(i+n-s+1)}-\\-(2n+1)\sum_{i=0}^{l}\sum_{s=0}^{i}\frac{(2l)!!(2m-1)!!\,(-1)^i\,i!}{(2i)!!(2l+2m-2i+1)!!\,s!\,(i-s)!}\,\gamma_{0,2(s+l+m-i)+1,2(i+n-s)}.$$

А учитывая, что $(2i)!! = 2^i\, i!$, и вводя с помощью замены $s \to i - s'$ новый индекс s' суммирования, получаем

$$\alpha_{y;\,2l,2m,2n+1} = \\ = \sum_{i=0}^{l-1}\sum_{s=0}^{i} \frac{(2l)!!\,(2m-1)!!}{(-2)^i\,(2l+2m-2i-1)!!\,s!\,(i-s)!}\,\gamma_{0,2(l+m-s)-1,2(s+n+1)} - \\ -(2n+1)\sum_{i=0}^{l}\sum_{s=0}^{i} \frac{(2l)!!(2m-1)!!}{(-2)^i\,(2l+2m-2i+1)!!\,s!\,(i-s)!}\,\gamma_{0,2(l+m-s)+1,2(s+n)}. \tag{56.41}$$

После подстановки в (56.41) штрих у s' опущен.

Вследствие проведенной замены индекс суммирования i не фигурирует более в индексах величин γ в (56.41). Появляется возможность в формуле (56.41) выделить числовую сумму. Для этого изменим порядок следования сумм. При этом пределы суммирования подчиняются следующим схематическим равенствам:

$$\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{s=0}^{i} = \sum_{s=0}^{l-1}\sum_{i=s}^{l-1} \qquad \text{и} \qquad \sum_{i=0}^{l}\sum_{s=0}^{i} = \sum_{s=0}^{l}\sum_{i=s}^{l}.$$

Так что

$$\alpha_{y;\,2l,2m,2n+1} = \\ = \sum_{s=0}^{l-1}\sum_{i=s}^{l-1} \frac{(2l)!!\,(2m-1)!!}{s!\,(-2)^i\,(2l+2m-2i-1)!!\,(i-s)!}\,\gamma_{0,2(l+m-s)-1,2(s+n+1)} - \\ -(2n+1)\sum_{s=0}^{l}\sum_{i=s}^{l} \frac{(2l)!!(2m-1)!!}{s!\,(-2)^i\,(2l+2m-2i+1)!!\,(i-s)!}\,\gamma_{0,2(l+m-s)+1,2(s+n)}.$$

Перейдем к новым индексам суммирования s' и i' в соответствии с равенствами $s = l - s'$ и $i = l - i'$. Это дает

$$\alpha_{y;\,2l,2m,2n+1} = \\ = \sum_{s=1}^{l} \frac{(2l)!!\,(2m-1)!!}{(l-s)!(-2)^l}\,\gamma_{0,2(s+m)-1,2(l+n-s+1)} \sum_{i=1}^{s} \frac{(-2)^i}{(s-i)!\,(2m+2i-1)!!} - \\ -(2n+1)\sum_{s=0}^{l} \frac{(2l)!!(2m-1)!!}{(l-s)!(-2)^l}\,\gamma_{0,2(s+m)+1,2(l+n-s)} \sum_{i=0}^{s} \frac{(-2)^i}{(s-i)!\,(2m+2i+1)!!}.$$

Если теперь только в первой (после знака равенства) строчке произвести замены $s = s' + 1$ и $i = i' + 1$, причем, как всегда, опуская сразу написание самих штрихов, то будем иметь

$$\alpha_{y;\,2l,2m,2n+1} = \\ = -\sum_{s=0}^{l-1} \frac{2(-1)^l\, l!\,(2m-1)!!}{(l-s-1)!}\, T(s,m)\, \gamma_{0,2(s+m)+1,2(l+n-s)} - \\ -(2n+1)\sum_{s=0}^{l} \frac{(-1)^l\, l!\,(2m-1)!!}{(l-s)!}\, T(s,m)\, \gamma_{0,2(s+m)+1,2(l+n-s)} = \\ = \sum_{s=0}^{l-1} \frac{(-1)^{l+1}\, l!\,(2m-1)!!\,(2l-2s+2n+1)}{(l-s)!}\, T(s,m)\, \gamma_{0,2(s+m)+1,2(l+n-s)} + \\ + (-1)^{l+1}\, l!\,(2m-1)!!\,(2n+1)\, T(l,m)\, \gamma_{0,2(l+m)+1,2n},$$

где посредством $T(s,m)$ обозначена числовая сумма

$$T(s,m) \equiv \sum_{i=0}^{s} \frac{(-2)^i}{(s-i)!\,(2m+2i+1)!!}\,. \tag{56.42}$$

В выражении для $\alpha_{y;\,2l,2m,2n+1}$ последнее слагаемое тоже можно ввести под общий знак суммы

$$\alpha_{y;\,2l,2m,2n+1} = \\ = \sum_{s=0}^{l} \frac{(-1)^{l+1}\, l!\,(2m-1)!!\,(2l-2s+2n+1)}{(l-s)!}\, T(s,m)\, \gamma_{0,2(s+m)+1,2(l+n-s)}. \tag{56.43}$$

В Приложении А-4 доказано, что

$$(2m-1)!!\; T(s,m) = \frac{1}{s!\,(2m+2s+1)}\,. \tag{56.44}$$

Поэтому окончательно

$$\alpha_{y;\,2l,2m,2n+1} = \\ = \sum_{s=0}^{l} \frac{(-1)^{l+1}\, l!\,(2l-2s+2n+1)}{s!\,(l-s)!\,(2m+2s+1)}\, \gamma_{0,2(s+m)+1,2(l+n-s)}. \tag{56.45}$$

Если вернуться к (56.35) и остановиться на ином (по четности) наборе индексов у $\alpha_{x;\,klm}$, скажем $k = 2l'+1$, $l = 2m'+1$, $m = 2n'$ (четвертая строка таблицы 4), то вместо (56.37) с учетом (56.38) будем иметь

$$\alpha_{y;\,2l,2m,2n} = (2l)!!\,(2m-1)!!\times \\ \times \left\{ \sum_{i=0}^{l-1} \frac{\gamma_{2i,2(l+m-i)-1,2n+1}}{(2i)!!\,(2l+2m-2i-1)!!} - 2n \sum_{i=0}^{l} \frac{\gamma_{2i,2(l+m-i)+1,2n-1}}{(2i)!!\,(2l+2m-2i+1)!!} \right\}. \tag{56.46}$$

Формула (56.40) теперь заменится на

$$\gamma_{2i,2j+1,2k+1} = \sum_{s=0}^{i} \frac{(-1)^i\, i!}{s!\,(i-s)!}\, \gamma_{0,2s+2j+1,2i+2k-2s+1}\,, \tag{56.47}$$

а вместо (56.45) имеет место

$$\alpha_{y;\,2l,2m,2n} = \\ = 2(-1)^{l+1} l! \sum_{s=0}^{l} \frac{l+n-s}{s!\,(l-s)!\,(2m+2s+1)}\,\gamma_{0,2(s+m)+1,2(l+n-s)-1}. \quad (56.48)$$

§ 57. Парциальные магнитные мультипольные моменты эллипсоида и гомеоида

57.1. Мультиполи эллипсоида

Магнитные мультипольные моменты $\widetilde{\mathfrak{m}}^{(\nu)}_{i_1\ldots i_\lambda}$ парциальных объемных токов (будем называть их *парциальными магнитными мультипольными моментами эллипсоида*) получаются при подстановке выражений (56.2)–(56.4) для объемной плотности парциального тока в (52.7). Нас интересует та часть этих моментов, которая не обращается в нуль при полной свертке тензора магнитного момента с любым неприводимым тензором того же ранга. Соответствующее условное равенство дается формулой

$$\widetilde{\mathfrak{m}}^{(\nu)}_{i_1\ldots i_\lambda} \mathrel{\hat{=}} \frac{(2\lambda-1)!!}{\mathfrak{c}\,(\lambda+1)} \left\langle\!\!\left\langle \int [\mathbf{r}\mathbf{j}^{(\nu)}]_{i_1} x_{i_2}\cdots x_{i_\lambda}\,dV \right\rangle\!\!\right\rangle = \\ = \frac{(2\lambda-1)!!}{\mathfrak{c}\,(\lambda+1)} \left\langle\!\!\left\langle \int \varepsilon_{i_1kl} x_k j^{(\nu)}_l x_{i_2}\cdots x_{i_\lambda}\,dV \right\rangle\!\!\right\rangle^{(i)}. \quad (57.1)$$

Здесь верхний индекс i, заключенный в круглые скобки, указывает, что в операции симметризации участвуют только индексы семейства i_k.

С помощью замены переменных

$$x = a\,x', \quad y = b\,y', \quad z = c\,z' \quad (57.2)$$

перейдем в (57.1) к интегрированию по объему шара единичного радиуса. Если ввести единичный вектор $\mathbf{n}'=\mathbf{r}'/r'$ радиуса-вектора $\mathbf{r}'$, соответствующего безразмерным координатам x', y', z', то соотношения (57.2) заменяются на

$$x = ar'n'_x, \quad y = br'n'_y, \quad z = cr'n'_z, \quad dV = abc\,{r'}^2 dr'\,d\Omega', \quad (57.3)$$

где $d\Omega'$ — элемент телесного угла (элемент поверхности единичной сферы). В результате указанной замены и использования выражений (56.2)–(56.4) в тензорной записи условное равенство (57.1) приобретает вид

$$\widetilde{\mathfrak{m}}^{(\nu)}_{i_1\ldots i_\lambda} \mathrel{\hat{=}} \frac{(2\lambda-1)!!}{\mathfrak{c}\,(\lambda+1)} \left\langle\!\!\left\langle \varepsilon_{i_1kl}\, a_{(k)}a_{(i_2)}\cdots a_{(i_\lambda)}a_{(l)}\,\alpha_{l;\,j_1,\ldots,j_\nu} abc\,\times \right.\right. \\ \left.\left. \times \int_0^1 {r'}^{\lambda+\nu+2}\,dr' \oint n'_k n'_{j_1}\cdots n'_{j_\nu} n'_{i_2}\cdots n'_{i_\lambda}\,d\Omega' \right\rangle\!\!\right\rangle^{(i)}.$$

Учитывая, что[1]

$$\oint n'_{i_1} \ldots n'_{i_{2l}} d\Omega' = \frac{4\pi}{(2l+1)!!} \langle\langle \delta_{i_1 i_2} \ldots \delta_{i_{2l-1} j_{2l}} \rangle\rangle \,, \tag{57.4}$$

получаем

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{m}}^{(\nu)}_{i_1 \ldots i_\lambda} \doteq \frac{4\pi abc\,(2\lambda-1)!!}{\mathfrak{c}\,(\lambda+1)\,(\lambda+\nu+3)!!} \times \\ \times \left\langle\!\!\left\langle \varepsilon_{i_1 kl} a_{(k)} a_{(i_2)} \cdots a_{(i_\lambda)} a_{(l)} \alpha_{l;\, j_1, \ldots, j_\nu} \times \right.\right. \\ \left.\left. \times \left\langle\!\left\langle \delta_{k j_1} \delta_{i_2 j_2} \cdots \delta_{i_\nu j_\nu} \delta_{i_{\nu+1} i_{\nu+2}} \cdots \delta_{i_{\lambda-1} i_\lambda} \right\rangle\!\right\rangle^{(i,j)} \right\rangle\!\!\right\rangle^{(i)} . \end{aligned} \tag{57.5}$$

Из (57.4) следует, что, как и в случае электростатических мультиполей, компоненты парциальных магнитных моментов отличны от нуля лишь при совпадении четности чисел λ и ν. Но и при одинаковой четности λ и ν парциальные моменты равны нулю, если $\lambda < \nu$, поскольку при этом всегда образуется свертка v-тензора $\alpha_{l;\, j_1, \ldots, j_\nu}$ по его симметричным индексам. Так что, как и в электростатическом случае, отличные от нуля компоненты $\widetilde{\mathfrak{m}}^{(\nu)}_{i_1 \ldots i_\lambda}$ подчиняются условию

$$\lambda = \nu + 2k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{57.6}$$

В формуле (57.5) операция симметризации во «внутренних кавычках» выполняется совершенно аналогично выводу формулы (43.21), что приводит к выражению

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{m}}^{(\nu)}_{i_1 \ldots i_\lambda} \doteq \frac{4\pi abc\,\nu!\,(2\lambda-1)!!}{\mathfrak{c}\,(\lambda+1)\,(\lambda+\nu+3)!!} \times \\ \times \left\langle\!\left\langle \varepsilon_{i_1 kl} a_{(k)} a_{(i_2)} \cdots a_{(i_\lambda)} a_{(l)}\, \alpha_{l;\, k, i_2, \ldots, i_\nu} \delta_{i_{\nu+1} i_{\nu+2}} \cdots \delta_{i_{\lambda-1} i_\lambda} \right\rangle\!\right\rangle^{(i)} . \end{aligned} \tag{57.7}$$

Отметим, что помимо $\varepsilon_{i_1 kl}$ индекс k может принадлежать только тензору $\alpha_{l;\, k, i_2, \ldots, i_\nu}$. В противном случае вместо (57.7) мы имели бы несовместимое равенство симметричного тензора $\widetilde{\mathfrak{m}}^{(\nu)}_{i_1 \ldots i_\lambda}$ антисимметричному (по индексам i_1, i_l) выражению справа, содержащему тензор $\varepsilon_{i_1 i_l l}$.

В частном случае, когда $\lambda = \nu$, получаем для первых неисчезающих парциальных моментов

$$\widetilde{\mathfrak{m}}_{i_1 \ldots i_\nu} \doteq \frac{4\pi abc\,\nu!\,(2\lambda-1)!!}{\mathfrak{c}\,(\nu+1)\,(2\nu+3)!!} \left\langle\!\left\langle \varepsilon_{i_1 kl} a_{(k)} a_{(i_2)} \cdots a_{(i_\nu)} a_{(l)}\, \alpha_{l;\, k, i_2, \ldots, i_\nu} \right\rangle\!\right\rangle^{(i)} . \tag{57.8}$$

Если (57.8) подставить в (57.7), то будем иметь

$$\widetilde{\mathfrak{m}}^{(\nu)}_{i_1 \ldots i_\lambda} \doteq \frac{(2\lambda-1)!!\,(\nu+1)\,(2\nu+3)!!}{(\lambda+1)\,(\lambda+\nu+3)!!\,(2\nu-1)!!} \left\langle\!\left\langle \widetilde{\mathfrak{m}}_{i_1 \ldots i_\nu}\, \delta_{i_{\nu+1} i_{\nu+2}} \cdots \delta_{i_{\lambda-1} i_\lambda} \right\rangle\!\right\rangle . \tag{57.9}$$

Памятуя о том, что тензор $\alpha_{l;\, k, i_2, \ldots, i_\nu}$ симметричен по всем индексам, отделенным от l точкой с запятой, и используя в отношении симметричных

[1] См. (43.18).

индексов трехиндексную запись, придадим (57.8) вид

$$\widetilde{\mathfrak{m}}_{ijk} \overset{\circ}{=} \frac{4\pi abc\,\nu!\,(2\nu-1)!!}{\mathfrak{c}\,(\nu+1)\,(2\nu+3)!!}\; a^{i+1}b^{j+1}c^{k+1}\times$$
$$\times\left\{\frac{i}{a^2}\left(\alpha_{z;\,i-1,j+1,k}-\alpha_{y;\,i-1,j,k+1}\right)+\frac{j}{b^2}\left(\alpha_{x;\,i,j-1,k+1}-\alpha_{z;\,i+1,j-1,k}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{k}{c^2}\left(\alpha_{y;\,i+1,j,k-1}-\alpha_{x;\,i,j+1,k-1}\right)\right\}, \quad (57.10)$$

где $\nu = i+j+k$.

Нетрудно убедиться, что из двух пар формул (56.7), (56.11) и (56.6), (56.11) соответственно следуют равенства

$$\alpha_{x;\,i,j-1,k+1}-\alpha_{z;\,i+1,j-1,k}=\alpha_{z;\,i-1,j+1,k}-\alpha_{y;\,i-1,j,k+1},$$

$$\alpha_{y;\,i+1,j,k-1}-\alpha_{x;\,i,j+1,k-1}=\alpha_{z;\,i-1,j+1,k}-\alpha_{y;\,i-1,j,k+1}.$$

Таким образом, все три выражения в (57.10), содержащие α в круглых скобках, равны между собой. Это позволяет записать формулу (57.10) более компактно. Например, так:

$$\widetilde{\mathfrak{m}}_{ijk} \overset{\circ}{=} \frac{4\pi abc\,\nu!\,(2\nu-1)!!}{\mathfrak{c}\,(\nu+1)\,(2\nu+3)!!}\times$$
$$\times\left(\frac{i}{a^2}+\frac{j}{b^2}+\frac{k}{c^2}\right) a^{i+1}b^{j+1}c^{k+1}\left(\alpha_{z;\,i-1,j+1,k}-\alpha_{y;\,i-1,j,k+1}\right), \quad (57.11)$$

где $\nu = i+j+k$.

57.2. Мультиполи гомеоида

Магнитные мультипольные моменты $\mathfrak{m}^{(\nu)}_{i_1\ldots i_l}$ парциальных поверхностных токов (будем именовать их *парциальными магнитными мультипольными моментами гомеоида*) даются формулой, получающейся при подстановке парциальной плотности тока (56.26) в выражение

$$\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_\lambda} = \frac{1}{(\lambda+1)\mathfrak{c}}\times$$
$$\times\oint\sum_{s=0}^{\left[\frac{\lambda-1}{2}\right]}(-1)^s(2\lambda-2s-1)!!\,r^{2s}\left\langle\!\left\langle\delta_{i_1i_2}\cdots\delta_{i_{2s-1}i_{2s}}[\mathbf{r}\,\mathbf{i}]_{i_{2s+1}}x_{i_{2s+2}}\cdots x_{i_\lambda}\right\rangle\!\right\rangle dS, \quad (57.12)$$

аналогичное (52.7). Для нас важна та часть получающегося выражения для тензора парциального момента, которая не обращается в нуль при его полной свертке с любым неприводимым тензором того же ранга. Искомое условное равенство, аналогичное (57.1) и соответствующее первому $(s=0)$

слагаемому в (57.12), имеет вид

$$\mathfrak{m}^{(\nu)}_{i_1\ldots i_\lambda} \mathrel{\mathring{=}} \frac{(2\lambda-1)!!}{\mathfrak{c}\,(\lambda+1)} \left\langle\!\!\left\langle \oint [\mathbf{r}\mathbf{i}^{(\nu)}]_{i_1} x_{i_2}\cdots x_{i_\lambda}\, dS \right\rangle\!\!\right\rangle = \\
= \frac{(2\lambda-1)!!}{\mathfrak{c}\,(\lambda+1)} \left\langle\!\!\left\langle \oint \varepsilon_{i_1kl} x_k i^{(\nu)}_l x_{i_2}\cdots x_{i_\lambda}\, dS \right\rangle\!\!\right\rangle^{(i)} = \\
= \frac{(2\lambda-1)!!}{\mathfrak{c}\,(\lambda+1)} \left\langle\!\!\left\langle \oint \varepsilon_{i_1kl} x_k j^{(\nu)}_l x_{i_2}\cdots x_{i_\lambda}\, p\, dS \right\rangle\!\!\right\rangle^{(i)}. \quad (57.13)$$

Делая замену переменных (57.2) и вводя единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{r}'/r'$ радиуса-вектора $\mathbf{r}'$, что позволяет придать формулам (57.2) вид

$$x = an'_x, \quad y = bn'_y, \quad z = cn'_z, \quad p\, dS = abc\, d\Omega', \quad (57.14)$$

переходим в (57.13) к интегрированию по телесному углу. Получаем

$$\mathfrak{m}^{(\nu)}_{i_1\ldots i_\lambda} \mathrel{\mathring{=}} \frac{(2\lambda-1)!!}{\mathfrak{c}\,(\lambda+1)} \left\langle\!\!\left\langle \varepsilon_{i_1kl}\, a_{(k)} a_{(i_2)}\cdots a_{(i_\lambda)} a_{(l)}\, \alpha_{l;\, j_1,\ldots,j_\nu} abc \times \right.\right. \\
\left.\left. \times \oint n'_k n'_{j_1}\cdots n'_{j_\nu} n'_{i_2}\cdots n'_{i_\lambda}\, d\Omega' \right\rangle\!\!\right\rangle^{(i)}.$$

Или окончательно

$$\mathfrak{m}^{(\nu)}_{i_1\ldots i_\lambda} \mathrel{\mathring{=}} \frac{4\pi abc\,(2\lambda-1)!!}{\mathfrak{c}\,(\lambda+1)\,(\lambda+\nu+1)!!} \times \\
\times \left\langle\!\!\left\langle \varepsilon_{i_1kl} a_{(k)} a_{(i_2)}\cdots a_{(i_\lambda)} a_{(l)} \alpha_{l;\, j_1,\ldots,j_\nu} \times \right.\right. \\
\left.\left. \times \left\langle\!\left\langle \delta_{kj_1}\delta_{i_2j_2}\cdots\delta_{i_\nu j_\nu}\delta_{i_{\nu+1}i_{\nu+2}}\cdots\delta_{i_{\lambda-1}i_\lambda} \right\rangle\!\right\rangle^{(i,j)} \right\rangle\!\!\right\rangle^{(i)}. \quad (57.15)$$

Сравнивая (57.15) и (57.5), устанавливаем соотношения

$$\widetilde{\mathfrak{m}}^{(\nu)}_{i_1\ldots i_\lambda} = \frac{\mathfrak{m}^{(\nu)}_{i_1\ldots i_\lambda}}{\lambda+\nu+3}, \qquad \widetilde{\mathfrak{m}}_{i_1\ldots i_\nu} = \frac{\mathfrak{m}_{i_1\ldots i_\nu}}{2\nu+3}, \quad (57.16)$$

аналогичные (43.13).

Это означает, что отличные от нуля компоненты $\mathfrak{m}^{(\nu)}_{i_1\ldots i_\lambda}$ также подчиняются условию (57.6). Кроме того, это означает, что имеют место условные равенства

$$\mathfrak{m}^{(\nu)}_{i_1\ldots i_\lambda} \mathrel{\mathring{=}} \frac{4\pi abc\,\nu!\,(2\lambda-1)!!}{\mathfrak{c}\,(\lambda+1)\,(\lambda+\nu+1)!!} \times \\
\times \left\langle\!\left\langle \varepsilon_{i_1kl} a_{(k)} a_{(i_2)}\cdots a_{(i_\lambda)} a_{(l)}\, \alpha_{l;\, k,i_2,\ldots,i_\nu} \delta_{i_{\nu+1}i_{\nu+2}}\cdots\delta_{i_{\lambda-1}i_\lambda} \right\rangle\!\right\rangle^{(i)}, \quad (57.17)$$

$$\mathfrak{m}_{i_1\ldots i_\nu} \mathrel{\mathring{=}} \frac{4\pi abc\,\nu!\,(2\lambda-1)!!}{\mathfrak{c}\,(\nu+1)\,(2\nu+1)!!} \left\langle\!\left\langle \varepsilon_{i_1kl} a_{(k)} a_{(i_2)}\cdots a_{(i_\nu)} a_{(l)}\, \alpha_{l;\, k,i_2,\ldots,i_\nu} \right\rangle\!\right\rangle^{(i)}, \quad (57.18)$$

$$\mathfrak{m}^{(\nu)}_{i_1\ldots i_\lambda} \mathrel{\mathring{=}} \frac{(2\lambda-1)!!\,(\nu+1)\,(2\nu+1)!!}{(\lambda+1)\,(\lambda+\nu+1)!!\,(2\nu-1)!!} \left\langle\!\left\langle \mathfrak{m}_{i_1\ldots i_\nu}\, \delta_{i_{\nu+1}i_{\nu+2}}\cdots\delta_{i_{\lambda-1}i_\lambda} \right\rangle\!\right\rangle^{(i)}, \quad (57.19)$$

$$\mathfrak{m}_{ijk} \stackrel{\circ}{=} \frac{4\pi abc\,\nu!\,(2\nu-1)!!}{\mathfrak{c}\,(\nu+1)\,(2\nu+1)!!}\times \\ \times\left(\frac{i}{a^2}+\frac{j}{b^2}+\frac{k}{c^2}\right) a^{i+1}b^{j+1}c^{k+1}\left(\alpha_{z;\,i-1,j+1,k}-\alpha_{y;\,i-1,j,k+1}\right), \quad (57.20)$$

аналогичные формулам (57.7), (57.8), (57.9) и (57.11) соответственно.

§ 58. Мультипольное представление парциальных магнитных потенциалов $\widetilde{\Phi}^{(\nu)}$

Как уже указывалось (см. п. 56.3), по причине большого объема и громоздкости вычислений мы ограничили рассмотрение парциального скалярного магнитного потенциала объемных токов случаем, который (по четности) соответствует $\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}_{OEE}$. Мы исходим из естественного предположения, что мультипольное представление потенциала $\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}_{OEE}$ должно в трехиндексной записи иметь вид

$$\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}_{OEE} = \sum_{l+m+n=\varepsilon} \frac{(2\varepsilon+1)!}{(2l+1)!\,(2m)!\,(2n)!}\,\widetilde{\mathfrak{m}}_{2l+1,2m,2n}\;\varphi_{2l+1,2m,2n}\,, \qquad (58.1)$$

соответствующий тензорному написанию (44.6). Здесь $\varepsilon=0,1,2,\ldots$, тензоры $\widetilde{\mathfrak{m}}_{ijk}$ — первые неисчезающие парциальные магнитные мультипольные моменты (ранга $i+j+k$), а φ_{ijk} — тензор-потенциал (того же ранга) эллипсоида. Наша цель — показать, что именно к выражению (58.1) можно прийти, если исходить из источников (плотности тока) и векторного потенциала. Нам удобнее выполнить это, идя из крайних пунктов во встречных направлениях.

Сначала будем преобразовывать (58.1). Подставим в (58.1) выражение для $\widetilde{\mathfrak{m}}_{2l+1,2m,2n}$, даваемое (57.11). Будем иметь

$$\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}_{OEE} = \frac{2\pi abc\,(2\varepsilon+1)!\,(4\varepsilon+1)!!}{\mathfrak{c}\,(\varepsilon+1)\,(4\varepsilon+5)!!}\times \\ \times\sum_{l+m+n=\varepsilon}\frac{(2\varepsilon+1)!\,a^{2l+2}b^{2m+1}c^{2n+1}}{(2l+1)!\,(2m)!\,(2n)!}\left(\frac{2l+1}{a^2}+\frac{2m}{b^2}+\frac{2n}{c^2}\right)\times \\ \times\left(\alpha_{z;\,2l,2m+1,2n}-\alpha_{y;\,2l,2m,2n+1}\right)\varphi_{2l+1,2m,2n}. \qquad (58.2)$$

Чтобы в результате встречных преобразований парциальных потенциалов состоялась «стыковка», формулы должны быть выражены через одинаковый набор независимых величин. Так, в (58.2) требуются преобразования, ведущие к выражению, в котором представлены только независимые компоненты тензора-потенциала φ_{ijk}. В связи со сказанным, введем операторы $\hat{\varphi}_a$, $\hat{\varphi}_b$, $\hat{\varphi}_c$, такие (ср. с (56.40)), что

$$\hat{\varphi}_a^i\hat{\varphi}_b^j\hat{\varphi}_c^k\varphi_{lmn} = \varphi_{2i+l,2j+m,2k+n}\,. \qquad (58.3)$$

С помощью введенных операторов свойство неприводимости тензора-потенциала выражается формулой

$$(\hat{\varphi}_a+\hat{\varphi}_b+\hat{\varphi}_c)\,\varphi_{lmn}=0,$$

что позволяет выделять независимые компоненты этого тензора:

$$\varphi_{2l+1,2m,2n} = \hat{\varphi}_a^l\,\varphi_{1,2m,2n} = (-1)^l\left(\hat{\varphi}_b + \hat{\varphi}_c\right)^l\,\varphi_{1,2m,2n} = \\ = (-1)^l \sum_{i=0}^{l} \frac{l!}{i!\,(l-i)!}\,\varphi_{1,2i+2m,2(l-i+n)}. \qquad (58.4)$$

Подставим (58.4) в (58.2). Получим

$$\frac{\widetilde{\Phi}_{OEE}^{(2\varepsilon+1)}}{W} = \sum_{m=0}^{\varepsilon}\sum_{n=0}^{\varepsilon-m}\sum_{i=0}^{\varepsilon-m-n} \frac{(-1)^{\varepsilon-m-n}\,(\varepsilon-m-n)!\,(2\varepsilon+1)!}{(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2m)!\,(2n)!\,i!\,(\varepsilon-m-n-i)!}\times \\ \times\left(\frac{2\varepsilon-2m-2n+1}{a^2} + \frac{2m}{b^2} + \frac{2n}{c^2}\right) a^{2(\varepsilon-m-n+1)} b^{2m+1} c^{2n+1}\times \\ \times\left(\alpha_{z;\,2(\varepsilon-m-n),2m+1,2n} - \alpha_{y;\,2(\varepsilon-m-n),2m,2n+1}\right)\varphi_{1,2(m+i),2(\varepsilon-m-i)}, \qquad (58.5)$$

где для сокращения записи введено обозначение

$$W \equiv \frac{2\pi abc\,(2\varepsilon+1)!\,(4\varepsilon+1)!!}{\mathfrak{c}\,(\varepsilon+1)\,(4\varepsilon+5)!!}. \qquad (58.6)$$

Благодаря (56.40) и (56.45), разность $\alpha_{z;\ldots} - \alpha_{y;\ldots}$ также выражается через независимые величины:

$$\alpha_{z;\,2(\varepsilon-m-n),2m+1,2n} - \alpha_{y;\,2(\varepsilon-m-n),2m,2n+1} = \\ = (-1)^{\varepsilon-m-n}\,2(\varepsilon+1)\,(\varepsilon-m-n)! \sum_{s=m}^{\varepsilon-n} \frac{\gamma_{0,2s+1,2\varepsilon-2s}}{(s-m)!\,(\varepsilon-n-s)!\,(2s+1)}. \qquad (58.7)$$

Производя замену $i \to i-m$ индекса суммирования в (58.5) и подставляя в (58.5) выражение (58.7), будем иметь

$$\frac{\widetilde{\Phi}_{OEE}^{(2\varepsilon+1)}}{W} = \sum_{m=0}^{\varepsilon}\sum_{n=0}^{\varepsilon-m}\sum_{i=m}^{\varepsilon-n} \frac{[(\varepsilon-m-n)!]^2\,(2\varepsilon+2)!\,a^{2(\varepsilon-m-n+1)} b^{2m+1} c^{2n+1}}{(i-m)!\,(\varepsilon-n-i)!}\times \\ \times\left(\frac{1}{(2\varepsilon-2m-2n)!\,(2m)!\,(2n)!\,a^2} + \frac{1}{(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2m-1)!\,(2n)!\,b^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2m)!\,(2n-1)!\,c^2}\right)\varphi_{1,2i,2(\varepsilon-i)}\times \\ \times\sum_{s=m}^{\varepsilon-n} \frac{\gamma_{0,2s+1,2\varepsilon-2s}}{(s-m)!\,(\varepsilon-n-s)!\,(2s+1)}, \qquad (58.8)$$

Теперь изменим в (58.8) порядок следования первых трех сумм[1] в соответствии со следующей схемой:

$$\sum_{m=0}^{\varepsilon}\sum_{n=0}^{\varepsilon-m}\sum_{i=m}^{\varepsilon-n} = \sum_{m=0}^{\varepsilon}\sum_{i=m}^{\varepsilon}\sum_{n=0}^{\varepsilon-i} = \sum_{i=0}^{\varepsilon}\sum_{m=0}^{i}\sum_{n=0}^{\varepsilon-i}. \qquad (58.9)$$

[1] При этом, разумеется, изменяются и пределы суммирования.

Результат приобретает вид

$$\frac{\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}_{OEE}}{W(2\varepsilon+2)!} = \sum_{i=0}^{\varepsilon} \varphi_{1,2i,2(\varepsilon-i)} \sum_{m=0}^{i} \sum_{n=0}^{\varepsilon-i} \sum_{l=m}^{\varepsilon-n} \frac{[(\varepsilon-m-n)!]^2}{(i-m)!\,(\varepsilon-n-i)!} \times \\ \times \frac{\gamma_{0,2l+1,2(\varepsilon-l)}\,\Gamma_{mn}}{(l-m)!\,(\varepsilon-n-l)!\,(2l+1)}, \quad (58.10)$$

в котором независимые компоненты тензор-потенциала эллипсоида фигурируют в первой сумме. Здесь

$$\Gamma_{mn} \equiv \frac{a^{2(\varepsilon-m-n)} b^{2m+1} c^{2n+1}}{(2\varepsilon-2m-2n)!\,(2m)!\,(2n)!} + \frac{a^{2(\varepsilon-m-n+1)} b^{2m-1} c^{2n+1}}{(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2m-1)!\,(2n)!} + \\ + \frac{a^{2(\varepsilon-m-n+1)} b^{2m+1} c^{2n-1}}{(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2m)!\,(2n-1)!}. \quad (58.11)$$

Переместим теперь в (58.10) сумму по l (а вместе с ней и независимые величины $\gamma_{0,2l+1,2(\varepsilon-l)}$) с четвертого места на второе. Реализация этого связана с изменением порядка следования второй, третьей и четвертой сумм в соответствии со следующей схемой:

$$\sum_{m=0}^{i} \sum_{n=0}^{\varepsilon-i} \sum_{l=m}^{\varepsilon-n} = \sum_{m=0}^{i} \left(\sum_{l=m}^{i} \sum_{n=0}^{\varepsilon-i} + \sum_{l=i+1}^{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\varepsilon-l} \right) = \sum_{l=0}^{i} \sum_{m=0}^{l} \sum_{n=0}^{\varepsilon-i} + \sum_{l=i+1}^{\varepsilon} \sum_{m=0}^{i} \sum_{n=0}^{\varepsilon-l}.$$

В итоге приходим к следующему окончательному выражению:

$$\frac{\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}_{OEE}}{W(2\varepsilon+2)!} = \sum_{i=0}^{\varepsilon} \varphi_{1,2i,2(\varepsilon-i)} \times \\ \times \left\{ \sum_{l=0}^{i} \frac{\gamma_{0,2l+1,2(\varepsilon-l)}}{2l+1} \sum_{m=0}^{l} \sum_{n=0}^{\varepsilon-i} \frac{[(\varepsilon-m-n)!]^2\,\Gamma_{mn}}{(i-m)!\,(\varepsilon-n-i)!\,(l-m)!\,(\varepsilon-n-l)!} + \right. \\ \left. + \sum_{l=i+1}^{\varepsilon} \frac{\gamma_{0,2l+1,2(\varepsilon-l)}}{2l+1} \sum_{m=0}^{i} \sum_{n=0}^{\varepsilon-l} \frac{[(\varepsilon-m-n)!]^2\,\Gamma_{mn}}{(i-m)!\,(\varepsilon-n-i)!\,(l-m)!\,(\varepsilon-n-l)!} \right\}. \quad (58.12)$$

Тем самым пройдена половина пути — от конца до середины. Так что выражение (58.12) все-таки не окончательное, а промежуточное.

Вернемся теперь к абзацу в п. 56.3, следующему за формулой (56.35), где были выбраны четности индексов у трехиндексных компонент v-тензора $\overleftrightarrow{\alpha}$, соответствующие пятой строке таблицы 4. Иначе говоря, речь идет о создающих потенциал $\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}_{OEE}$ токах, компоненты плотности которых в соответствии с (56.22), (56.23) суть

$$\frac{j_x^{(2\varepsilon+1)}}{a} = \sum_{l+m+n=\varepsilon-1} \frac{(2\varepsilon+1)!\,\alpha_{x;\,2l+1,2m+1,2n+1}}{(2l+1)!(2m+1)!(2n+1)!} \left(\frac{x}{a}\right)^{2l+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{2m+1} \left(\frac{z}{c}\right)^{2n+1}, \quad (58.13)$$

$$\frac{j_y^{(2\varepsilon+1)}}{b} = \sum_{l+m+n=\varepsilon} \frac{(2\varepsilon+1)!\,\alpha_{y;\,2l,2m,2n+1}}{(2l)!(2m)!(2n+1)!} \left(\frac{x}{a}\right)^{2l} \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} \left(\frac{z}{c}\right)^{2n+1}, \quad (58.14)$$

$$\frac{j_z^{(2\varepsilon+1)}}{c} = \sum_{l+m+n=\varepsilon} \frac{(2\varepsilon+1)!\,\alpha_{z;\,2l,2m+1,2n}}{(2l)!(2m+1)!(2n)!} \left(\frac{x}{a}\right)^{2l}\left(\frac{y}{b}\right)^{2m+1}\left(\frac{z}{c}\right)^{2n}. \tag{58.15}$$

Векторный потенциал токов (58.13)–(58.15) дается формулой

$$\mathbf{A}^{(2\varepsilon+1)} = \frac{1}{\mathfrak{c}} \int \frac{\mathbf{j}^{(2\varepsilon+1)}}{R},$$

где $\mathfrak{c}$ — скорость света. Любую декартову компоненту $A_i^{(2\varepsilon+1)}$ векторного потенциала, представляющую собой интеграл по объему эллипсоида, можно рассматривать как «скалярный» потенциал, создаваемый «зарядами» объемной плотности $j_i^{(2\varepsilon+1)}\big/\mathfrak{c}$. Поэтому декартовы компоненты $A_i^{(2\varepsilon+1)}$, подобно (41.3), (41.4), во внешней области пространства представимы в виде, содержащем тензор-потенциалы эллипсоида, т. е.

$$\frac{A_x^{(2\varepsilon+1)}}{T} = \sum_{l+m+n=\varepsilon-1} \frac{(2\varepsilon+1)!\,a^{2l+2}b^{2m+1}c^{2n+1}}{(2l+1)!\,(2m+1)!\,(2n+1)!} \times \\ \times\, \alpha_{x;\,2l+1,2m+1,2n+1}\, \varphi_{2l+1,2m+1,2n+1}\,, \tag{58.16}$$

$$\frac{A_y^{(2\varepsilon+1)}}{T} = \sum_{l+m+n=\varepsilon} \frac{(2\varepsilon+1)!\,a^{2l}b^{2m+1}c^{2n+1}}{(2l)!\,(2m)!\,(2n+1)!}\, \alpha_{y;\,2l,2m,2n+1}\, \varphi_{2l,2m,2n+1}\,, \tag{58.17}$$

$$\frac{A_z^{(2\varepsilon+1)}}{T} = \sum_{l+m+n=\varepsilon} \frac{(2\varepsilon+1)!\,a^{2l}b^{2m+1}c^{2n+1}}{(2l)!\,(2m+1)!\,(2n)!}\, \alpha_{z;\,2l,2m+1,2n}\, \varphi_{2l,2m+1,2n}\,, \tag{58.18}$$

где

$$T \equiv \frac{4\pi abc\,(2\varepsilon+1)!\,(4\varepsilon+1)!!}{\mathfrak{c}\,(4\varepsilon+5)!!}. \tag{58.19}$$

Отсюда для компоненты $B_x = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}$ получаем[1]

$$\frac{B_x^{(2\varepsilon+1)}}{T(2\varepsilon+1)!} = \sum_{l+m+n=\varepsilon} \frac{a^{2l}b^{2m+1}c^{2n+1}}{(2l)!\,(2m+1)!\,(2n+1)!} \times \\ \times \left[(2n+1)\,\alpha_{z;\,2l,2m+1,2n} \frac{\partial \varphi_{2l,2m+1,2n}}{\partial y} - (2m+1)\,\alpha_{y;\,2l,2m,2n+1} \frac{\partial \varphi_{2l,2m,2n+1}}{\partial z}\right].$$

Если теперь в выражении в квадратных скобках сначала исключить $\partial/\partial y$ с помощью (41.36), затем заменить $\partial/\partial z$ на $\partial/\partial x$ в соответствии с (41.33) и использовать (56.13) для исключения $\alpha_{y;\,2l,2m,2n+1}$, то результатом будет

$$B_x^{(2\varepsilon+1)} = -\frac{\partial \widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}}{\partial x}\,,$$

[1] Для наших целей достаточно рассмотреть только x-компоненту магнитной индукции вне эллипсоида.

где скалярный потенциал $\Phi^{(2\varepsilon+1)}$ магнитного поля равен[2]

$$\frac{\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}}{T(2\varepsilon+1)!} = \sum_{l+m+n=\varepsilon} \frac{a^{2l} b^{2m+1} c^{2n+1}}{(2l)!\,(2m+1)!\,(2n+1)!} \times$$
$$\times \left[(2n+1)\,\alpha_{z;\,2l,2m+1,2n}\,\varphi_{2l+1,2m,2n} - 2l\,\alpha_{x;\,2l-1,2m+1,2n+1}\,\varphi_{2l-1,2m,2n+2}\right]. \tag{58.20}$$

Запишем двойную сумму (58.20) с указанием реальных пределов суммирования и, используя условие $l+m+n=\varepsilon$, исключим индекс l. Будем иметь

$$\frac{\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}}{T(2\varepsilon+1)!} = \sum_{m=0}^{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\varepsilon-m} \frac{a^{2(\varepsilon-m-n)} b^{2m+1} c^{2n+1}}{(2\varepsilon-2m-2n)!\,(2m+1)!\,(2n)!} \times$$
$$\times\ \alpha_{z;\,2(\varepsilon-m-n),2m+1,2n}\,\varphi_{2(\varepsilon-m-n)+1,2m,2n} -$$
$$- \sum_{m=0}^{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\varepsilon-m} \frac{a^{2(\varepsilon-m-n)} b^{2m+1} c^{2n+1}}{(2\varepsilon-2m-2n-1)!\,(2m+1)!\,(2n+1)!} \times$$
$$\times\ \alpha_{x;\,2(\varepsilon-m-n)-1,2m+1,2n+1}\,\varphi_{2(\varepsilon-m-n)-1,2m,2n+2}. \tag{58.21}$$

Произведем теперь во второй из двойных сумм (58.21) замену $n \to n-1$ индекса суммирования. Получим

$$\frac{\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}}{T(2\varepsilon+1)!} = \sum_{m=0}^{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\varepsilon-m} \frac{a^{2(\varepsilon-m-n)} b^{2m+1} c^{2n+1}}{(2\varepsilon-2m-2n)!\,(2m+1)!\,(2n)!} \times$$
$$\times\ \alpha_{z;\,2(\varepsilon-m-n),2m+1,2n}\,\varphi_{2(\varepsilon-m-n)+1,2m,2n} -$$
$$- \sum_{m=0}^{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\varepsilon-m+1} \frac{a^{2(\varepsilon-m-n+1)} b^{2m+1} c^{2n-1}}{(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2m+1)!\,(2n-1)!} \times$$
$$\times\ \alpha_{x;\,2(\varepsilon-m-n)+1,2m+1,2n-1}\,\varphi_{2(\varepsilon-m-n)+1,2m,2n}. \tag{58.22}$$

В сумме по n второй двойной суммы (58.22) нижний предел можно заменить на нулевой (благодаря наличию в знаменателе факториала $(2n-1)!$), а верхний предел — на $\varepsilon - m$ (благодаря наличию в знаменателе факториала $(2\varepsilon-2m-2n+1)!$). Учитывая также, что в (58.22) тензор-потенциалы имеют совпадающие индексы, можно (58.22) представить в виде

$$\frac{\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}}{T(2\varepsilon+1)!} = \sum_{m=0}^{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\varepsilon-m} \varphi_{2(\varepsilon-m-n)+1,2m,2n} K_{mn}, \tag{58.23}$$

где

$$K_{mn} \equiv \frac{b^{2m+1}}{(2m+1)!} \left\{ \frac{a^{2(\varepsilon-m-n)} c^{2n+1}}{(2\varepsilon-2m-2n)!\,(2n)!}\ \alpha_{z;\,2(\varepsilon-m-n),2m+1,2n} - \right.$$
$$\left. - \frac{a^{2(\varepsilon-m-n+1)} c^{2n-1}}{(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2n-1)!}\ \alpha_{x;\,2(\varepsilon-m-n)+1,2m+1,2n-1} \right\}. \tag{58.24}$$

[2] Мы доказываем, что выражение (58.20) для $\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}$ и выражение (58.12) для $\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}_{OEE}$, совпадают. И пока доказательство не завершено, эти величины обозначаются по-разному.

Используя (58.4), переходим к независимым компонентам тензора $\overleftrightarrow{\varphi}$ и одновременно в соответствии с $i \to i-m$ заменяем индекс суммирования. Формула (58.23) приобретает вид

$$\frac{\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}}{T(2\varepsilon+1)!} = \sum_{m=0}^{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\varepsilon-m} \sum_{i=m}^{\varepsilon-n} \varphi_{1,2i,2\varepsilon-2i} \frac{(-1)^{\varepsilon-m-n}(\varepsilon-m-n)!}{(i-m)!\,(\varepsilon-n-i)!} K_{mn}. \tag{58.25}$$

Обратим внимание на то, что в (58.25) порядок следования сумм и их пределы суммирования совпадают с аналогичными чертами первых трех сумм в (58.8). Следовательно, совпадает и результат перестановки последовательности суммирования в соответствии со схемой (58.9). Поэтому

$$\frac{\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}}{T(2\varepsilon+1)!} = \sum_{i=0}^{\varepsilon} \varphi_{1,2i,2\varepsilon-2i} \sum_{m=0}^{i} \sum_{n=0}^{\varepsilon-i} \frac{(-1)^{\varepsilon-m-n}(\varepsilon-m-n)!}{(i-m)!\,(\varepsilon-n-i)!} K_{mn}. \tag{58.26}$$

Займемся преобразованием K_{mn}. Сначала с помощью (56.33) исключаем $\alpha_{x;\,2(\varepsilon-m-n)+1,2m+1,2n-1}$, затем, используя обозначение (56.38), выражаем с помощью (56.40) и (56.45) K_{mn} в терминах независимых γ. Получаем

$$\begin{aligned} K_{mn} = \frac{b^{2m+1}}{(2m+1)!} \Bigg\{ \Bigg[\frac{a^{2(\varepsilon-m-n)} c^{2n+1}}{(2\varepsilon-2m-2n)!\,(2n)!} + \frac{a^{2(\varepsilon-m-n+1)} c^{2n-1}}{(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2n-1)!} \Bigg] \times \\ \times \sum_{s=0}^{\varepsilon-m-n} \frac{(-1)^{\varepsilon-m-n}(\varepsilon-m-n)!}{s!\,(\varepsilon-m-n-s)!}\, \gamma_{0,2s+2m+1,2\varepsilon-2m-2s} - \\ - \frac{a^{2(\varepsilon-m-n+1)} c^{2n-1}}{(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2n-1)!} \times \\ \times \sum_{s=0}^{\varepsilon-m-n} \frac{(-1)^{\varepsilon-m-n}(\varepsilon-m-n)!\,(2\varepsilon-2m-2s-1)}{s!\,(\varepsilon-m-n-s)!(2m+2s+3)}\, \gamma_{0,2s+2m+3,2\varepsilon-2m-2s-2} \Bigg\}. \end{aligned}$$

Для укорочения записи заменим согласно $s \to s-m$ индекс суммирования. Попутно сделаем переобозначение: $s \to l$. Будем иметь

$$\begin{aligned} K_{mn} = \sum_{l=m}^{\varepsilon-n} \frac{b^{2m+1}}{(2m+1)!} \Bigg\{ \Bigg[\frac{a^{2(\varepsilon-m-n)} c^{2n+1}}{(2\varepsilon-2m-2n)!\,(2n)!} + \\ + \frac{a^{2(\varepsilon-m-n+1)} c^{2n-1}}{(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2n-1)!} \Bigg] \frac{(-1)^{\varepsilon-m-n}(\varepsilon-m-n)!}{(l-m)!\,(\varepsilon-n-l)!}\, \gamma_{0,2l+1,2\varepsilon-2l} - \\ - \frac{a^{2(\varepsilon-m-n+1)} c^{2n-1} (-1)^{\varepsilon-m-n}(\varepsilon-m-n)!\,(2\varepsilon-2l-1)}{(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2n-1)!\,(l-m)!\,(\varepsilon-l-n)!\,(2l+3)}\, \gamma_{0,2l+3,2\varepsilon-2l-2} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{58.27}$$

Если теперь подставить (58.27) в (58.26), то возникающая последовательность и пределы сумм совпадают с последовательностью и пределами сумм в (58.9). Поэтому эту возникшую четверную сумму можно в соответствии со схемой, приведенной перед формулой (58.12), записать в виде

$$\frac{\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}}{T(2\varepsilon+1)!} = \\ = \sum_{i=0}^{\varepsilon} \varphi_{1,2i,2\varepsilon-2i} \left(\sum_{l=0}^{i} \sum_{m=0}^{l} \sum_{n=0}^{\varepsilon-i} + \sum_{l=i+1}^{\varepsilon} \sum_{m=0}^{i} \sum_{n=0}^{\varepsilon-l} \right) \frac{[(\varepsilon-m-n)!]^2}{(\varepsilon-n-i)!\,(\varepsilon-n-l)!} \times \\ \times \frac{b^{2m+1}}{(i-m)!\,(l-m)!\,(2m+1)!} \left\{ \frac{a^{2(\varepsilon-m-n)} c^{2n+1}}{(2\varepsilon-2m-2n)!\,(2n)!} \gamma_{0,2l+1,2\varepsilon-2l} + \right. \\ + \frac{a^{2(\varepsilon-m-n+1)} c^{2n-1}}{(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2n-1)!} \gamma_{0,2l+1,2\varepsilon-2l} - \\ \left. - \frac{a^{2(\varepsilon-m-n+1)} c^{2n-1} (2\varepsilon-2l-1)}{(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2n-1)!\,(2l+3)} \gamma_{0,2l+3,2\varepsilon-2l-2} \right\}. \quad (58.28)$$

Остается показать, что разность

$$R = \frac{\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}_{OEE}}{W(2\varepsilon+2)!} - \frac{\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}}{T(2\varepsilon+1)!} \quad (58.29)$$

выражений (58.12) и (58.28), где $W(2\varepsilon+2)! = T(2\varepsilon+1)!$, равна нулю. Запишем для этого уменьшаемое и вычитаемое в (58.29) следующим образом:

$$\frac{\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}_{OEE}}{W(2\varepsilon+2)!} = \sum_{k=1}^{6} S_k, \quad \frac{\widetilde{\Phi}^{(2\varepsilon+1)}}{T(2\varepsilon+1)!} = \sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 - \sigma_5 + \sigma_6, \quad (58.30)$$

где

$$S_1 = \sum_{i=0}^{\varepsilon} \sum_{l=0}^{i} \sum_{m=0}^{l} \sum_{n=0}^{\varepsilon-i} \frac{\varphi\,\gamma\,[(\varepsilon-m-n)!]^2}{(i-m)!\,(l-m)!\,(2\varepsilon-2m-2n)!\,(2m)!\,(2n)!} \times \\ \times \frac{a^{2(\varepsilon-m-n)}\,b^{2m+1}\,c^{2n+1}}{(2l+1)\,(\varepsilon-n-i)!\,(\varepsilon-n-l)!},$$

$$S_2 = \sum_{i=0}^{\varepsilon} \sum_{l=0}^{i} \sum_{m=0}^{l} \sum_{n=0}^{\varepsilon-i} \frac{\varphi\,\gamma\,[(\varepsilon-m-n)!]^2}{(i-m)!\,(l-m)!\,(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2m-1)!\,(2n)!} \times \\ \times \frac{a^{2(\varepsilon-m-n+1)}\,b^{2m-1}\,c^{2n+1}}{(2l+1)\,(\varepsilon-n-i)!\,(\varepsilon-n-l)!} = \sum_{i=1}^{\varepsilon} \sum_{l=1}^{i} \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{n=0}^{\varepsilon-i} \frac{\varphi\,\gamma}{(i-m-1)!\,(l-m-1)!} \times \\ \times \frac{[(\varepsilon-m-n-1)!]^2\,a^{2(\varepsilon-m-n)}\,b^{2m+1}\,c^{2n+1}}{(2l+1)\,(\varepsilon-n-i)!\,(\varepsilon-n-l)!\,(2\varepsilon-2m-2n-1)!\,(2m+1)!\,(2n)!}, \quad (58.31)$$

$$S_3 = \sum_{i=0}^{\varepsilon} \sum_{l=0}^{i} \sum_{m=0}^{l} \sum_{n=0}^{\varepsilon-i} \frac{\varphi\,\gamma\,[(\varepsilon-m-n)!]^2}{(i-m)!\,(l-m)!\,(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2m)!\,(2n-1)!} \times \\ \times \frac{a^{2(\varepsilon-m-n+1)}\,b^{2m+1}\,c^{2n-1}}{(2l+1)\,(\varepsilon-n-i)!\,(\varepsilon-n-l)!} = \sum_{i=0}^{\varepsilon-1} \sum_{l=0}^{i} \sum_{m=0}^{l} \sum_{n=0}^{\varepsilon-i-1} \frac{\varphi\,\gamma}{(i-m)!\,(l-m)!} \times \\ \times \frac{[(\varepsilon-m-n-1)!]^2\,a^{2(\varepsilon-m-n)}\,b^{2m+1}\,c^{2n+1}}{(2l+1)\,(\varepsilon-n-i-1)!\,(\varepsilon-n-l-1)!\,(2\varepsilon-2m-2n-1)!\,(2m)!\,(2n+1)!}, \quad (58.32)$$

$$S_4 = \sum_{i=0}^{\varepsilon} \sum_{l=i+1}^{\varepsilon} \sum_{m=0}^{i} \sum_{n=0}^{\varepsilon-l} \frac{\varphi\,\gamma\,[(\varepsilon-m-n)!]^2}{(i-m)!\,(l-m)!\,(2\varepsilon-2m-2n)!\,(2m)!\,(2n)!} \times \\ \times \frac{a^{2(\varepsilon-m-n)}\,b^{2m+1}\,c^{2n+1}}{(2l+1)\,(\varepsilon-n-i)!\,(\varepsilon-n-l)!},$$

$$S_5 = \sum_{i=0}^{\varepsilon} \sum_{l=i+1}^{\varepsilon} \sum_{m=0}^{i} \sum_{n=0}^{\varepsilon-l} \frac{\varphi\,\gamma\,[(\varepsilon-m-n)!]^2}{(i-m)!\,(l-m)!\,(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2m-1)!\,(2n)!} \times \\ \times \frac{a^{2(\varepsilon-m-n+1)}\,b^{2m-1}\,c^{2n+1}}{(2l+1)\,(\varepsilon-n-i)!\,(\varepsilon-n-l)!} = \sum_{i=1}^{\varepsilon} \sum_{l=i+1}^{\varepsilon} \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{n=0}^{\varepsilon-l} \frac{\varphi\,\gamma}{(i-m-1)!\,(l-m-1)!} \times \\ \times \frac{[(\varepsilon-m-n-1)!]^2\,a^{2(\varepsilon-m-n)}\,b^{2m+1}\,c^{2n+1}}{(2l+1)\,(\varepsilon-n-i)!\,(\varepsilon-n-l)!\,(2\varepsilon-2m-2n-1)!\,(2m+1)!\,(2n)!}, \quad (58.33)$$

$$S_6 = \sum_{i=0}^{\varepsilon} \sum_{l=i+1}^{\varepsilon} \sum_{m=0}^{i} \sum_{n=0}^{\varepsilon-l} \frac{\varphi\,\gamma\,[(\varepsilon-m-n)!]^2}{(i-m)!\,(l-m)!\,(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2m)!\,(2n-1)!} \times \\ \times \frac{a^{2(\varepsilon-m-n+1)}\,b^{2m+1}\,c^{2n-1}}{(2l+1)\,(\varepsilon-n-i)!\,(\varepsilon-n-l)!} = \sum_{i=0}^{\varepsilon-1} \sum_{l=i+1}^{\varepsilon-1} \sum_{m=0}^{i} \sum_{n=0}^{\varepsilon-l-1} \frac{\varphi\,\gamma}{(i-m)!\,(l-m)!} \times \\ \times \frac{[(\varepsilon-m-n-1)!]^2\,a^{2(\varepsilon-m-n)}\,b^{2m+1}\,c^{2n+1}}{(2l+1)\,(\varepsilon-n-i-1)!\,(\varepsilon-n-l-1)!\,(2\varepsilon-2m-2n-1)!\,(2m)!\,(2n+1)!}, \quad (58.34)$$

$$\sigma_1 = \sum_{i=0}^{\varepsilon} \sum_{l=0}^{i} \sum_{m=0}^{l} \sum_{n=0}^{\varepsilon-i} \frac{\varphi\,\gamma\,[(\varepsilon-m-n)!]^2}{(i-m)!\,(l-m)!\,(2\varepsilon-2m-2n)!\,(2m+1)!\,(2n)!} \times \\ \times \frac{a^{2(\varepsilon-m-n)}\,b^{2m+1}\,c^{2n+1}}{(\varepsilon-n-i)!\,(\varepsilon-n-l)!},$$

$$\sigma_2 = \sum_{i=0}^{\varepsilon} \sum_{l=0}^{i} \sum_{m=0}^{l} \sum_{n=0}^{\varepsilon-i} \frac{\varphi\,\gamma_{0,2l+3,2(\varepsilon-l-1)}\,(2\varepsilon-2l-1)\,[(\varepsilon-m-n)!]^2}{(i-m)!\,(l-m)!\,(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2m+1)!\,(2n-1)!} \times \\ \times \frac{a^{2(\varepsilon-m-n+1)}\,b^{2m+1}\,c^{2n-1}}{(2l+3)\,(\varepsilon-n-i)!\,(\varepsilon-n-l)!} = \sum_{i=0}^{\varepsilon-1} \sum_{l=1}^{i+1} \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{n=0}^{\varepsilon-i-1} \frac{\varphi\,\gamma}{(i-m)!\,(l-m-1)!} \times \\ \times \frac{[(\varepsilon-m-n-1)!]^2\,a^{2(\varepsilon-m-n)}\,b^{2m+1}\,c^{2n+1}}{(2l+1)\,(\varepsilon-n-i-1)!\,(\varepsilon-n-l)!\,(2\varepsilon-2m-2n-1)!\,(2m+1)!\,(2n+1)!}, \quad (58.35)$$

$$\sigma_3=\sum_{i=0}^{\varepsilon}\sum_{l=0}^{i}\sum_{m=0}^{l}\sum_{n=0}^{\varepsilon-i}\frac{\varphi\,\gamma\,[(\varepsilon-m-n)!]^2}{(i-m)!\,(l-m)!\,(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2m+1)!\,(2n-1)!}\times$$
$$\times\frac{a^{2(\varepsilon-m-n+1)}\,b^{2m+1}\,c^{2n-1}}{(\varepsilon-n-i)!\,(\varepsilon-n-l)!}=\sum_{i=0}^{\varepsilon-1}\sum_{l=0}^{i}\sum_{m=0}^{l}\sum_{n=0}^{\varepsilon-i-1}\frac{\varphi\,\gamma}{(i-m)!\,(l-m)!}\times$$
$$\times\frac{[(\varepsilon-m-n-1)!]^2\,a^{2(\varepsilon-m-n)}\,b^{2m+1}\,c^{2n+1}}{(\varepsilon-n-i-1)!\,(\varepsilon-n-l-1)!\,(2\varepsilon-2m-2n-1)!\,(2m+1)!\,(2n+1)!},\tag{58.36}$$

$$\sigma_4=\sum_{i=0}^{\varepsilon}\sum_{l=i+1}^{\varepsilon}\sum_{m=0}^{i}\sum_{n=0}^{\varepsilon-l}\frac{\varphi\,\gamma\,[(\varepsilon-m-n)!]^2}{(i-m)!\,(l-m)!\,(2\varepsilon-2m-2n)!\,(2m+1)!\,(2n)!}\times$$
$$\times\frac{a^{2(\varepsilon-m-n)}\,b^{2m+1}\,c^{2n+1}}{(\varepsilon-n-i)!\,(\varepsilon-n-l)!},$$

$$\sigma_5=\sum_{i=0}^{\varepsilon}\sum_{l=i+1}^{\varepsilon}\sum_{m=0}^{i}\sum_{n=0}^{\varepsilon-l}\frac{\varphi\,\gamma_{0,2l+3,2(\varepsilon-l-1)}\,(2\varepsilon-2l-1)\,[(\varepsilon-m-n)!]^2}{(i-m)!(l-m)!\,(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2m+1)!(2n-1)!}\times$$
$$\times\frac{a^{2(\varepsilon-m-n+1)}\,b^{2m+1}\,c^{2n-1}}{(2l+3)\,(\varepsilon-n-i)!\,(\varepsilon-n-l)!}=\sum_{i=0}^{\varepsilon-1}\sum_{l=i+2}^{\varepsilon}\sum_{m=0}^{i}\sum_{n=0}^{\varepsilon-l}\frac{\varphi\,\gamma}{(i-m)!\,(l-m-1)!}\times$$
$$\times\frac{[(\varepsilon-m-n-1)!]^2\,a^{2(\varepsilon-m-n)}\,b^{2m+1}\,c^{2n+1}}{(2l+1)\,(\varepsilon-n-i-1)!\,(\varepsilon-n-l)!\,(2\varepsilon-2m-2n-1)!\,(2m+1)!\,(2n+1)!},\tag{58.37}$$

$$\sigma_6=\sum_{i=0}^{\varepsilon}\sum_{l=i+1}^{\varepsilon}\sum_{m=0}^{i}\sum_{n=0}^{\varepsilon-l}\frac{\varphi\,\gamma\,[(\varepsilon-m-n)!]^2}{(i-m)!\,(l-m)!\,(2\varepsilon-2m-2n+1)!\,(2m+1)!}\times$$
$$\times\frac{a^{2(\varepsilon-m-n+1)}\,b^{2m+1}\,c^{2n-1}}{(2n-1)!\,(\varepsilon-n-i)!\,(\varepsilon-n-l)!}=\sum_{i=0}^{\varepsilon-1}\sum_{l=i+1}^{\varepsilon-1}\sum_{m=0}^{i}\sum_{n=0}^{\varepsilon-l-1}\frac{\varphi\,\gamma}{(i-m)!\,(l-m)!}\times$$
$$\times\frac{[(\varepsilon-m-n-1)!]^2\,a^{2(\varepsilon-m-n)}\,b^{2m+1}\,c^{2n+1}}{(\varepsilon-n-i-1)!\,(\varepsilon-n-l-1)!\,(2\varepsilon-2m-2n-1)!\,(2m+1)!\,(2n+1)!}.\tag{58.38}$$

Здесь для сокращения записи использованы обозначения:

$$\varphi\equiv\varphi_{1,2i,2\varepsilon-2i},\qquad \gamma\equiv\gamma_{0,2l+1,2\varepsilon-2l}.\tag{58.39}$$

В формулах (58.31)–(58.38) с помощью замены отдельных индексов суммирования было обеспечено, чтобы произведение степеней полуосей эллипсоида приобрело одинаковый для всех двенадцати сумм от S_1 до S_6 и от σ_1 до σ_6 вид $a^{2(\varepsilon-m-n)}\,b^{2m+1}\,c^{2n+1}$. Попутно в (58.35) и (58.37) величины $\gamma_{0,2l+3,2(\varepsilon-l-1)}$ обращены в γ.

Для дальнейшего нам удобно представить суммы S_4, S_5, S_6 и σ_2, σ_4, σ_6 в виде $S_p=S'_p+S''_p$, где $p=4,5,6$, и $\sigma_q=\sigma'_q+\sigma''_q$, где $q=2,4,6$. Здесь разбиение всех сумм выполнено совершенно одинаковым образом: S'_p (или σ'_q) — это четверная сумма S_p (или σ_q), из которой изъято значение $l=i+1$.

Соответственно S_p'' (или σ_q'') — это тройная сумма, получающаяся из S_p (или σ_q) при $l=i+1$. Теперь в соответствии с (58.29), (58.30) разность R можно представить как

$$R = \{S_1 + S_2 + S_3 - \sigma_1 + \sigma_2' - \sigma_3\} + \\ + \{S_4' + S_5' + S_6' - \sigma_4' + \sigma_5 - \sigma_6'\} + \{S_4'' + S_5'' + S_6'' + \sigma_2'' - \sigma_4'' - \sigma_6''\}.$$

Нетрудно удостовериться, что каждое из выражений, входящих в фигурные скобки, обращается в нуль.

Таким образом, справедливость представления (58.1) установлена. Значит, справедливы и формулы для $\widetilde{\Phi}_{EEO}^{(2\varepsilon+1)}$ и $\widetilde{\Phi}_{OEE}^{(2\varepsilon+1)}$, получающиеся из (58.1) в результате циклической перестановки. Аналогично могут быть рассмотрены случаи других наборов четности, приводящие к мультипольным представлениям потенциалов $\widetilde{\Phi}_{OOO}^{(2\varepsilon+1)}$, $\widetilde{\Phi}_{OOE}^{(2\varepsilon)}$, $\widetilde{\Phi}_{EOO}^{(2\varepsilon)}$, $\widetilde{\Phi}_{OEO}^{(2\varepsilon)}$ и $\widetilde{\Phi}_{EEE}^{(2\varepsilon)}$.

Приведем напоследок аналогичную (44.6) общую (справедливую для индексов произвольной четности) формулу мультипольного представления парциального магнитного потенциала объемных токов эллипсоида. Эта, обобщающая (58.1), формула в трехиндексной и тензорной записях имеет вид

$$\widetilde{\Phi}^{(\nu)} = \sum_{i+j+k=\nu} \frac{\nu!}{i!\,j!\,k!}\,\widetilde{\mathfrak{m}}_{ij\,k}\,\varphi_{ij\,k} = \widetilde{\mathfrak{m}}_{j_1\ldots j_\nu}\,\varphi_{j_1\ldots j_\nu}\,. \tag{58.40}$$

§ 59. Некоторые полезные соответствия классической магнитостатики

Чтобы упростить последующее рассмотрение мультипольных представлений псевдоскалярного магнитного потенциала эллипсоида и гомеоида, целесообразно предварительно познакомиться с некоторыми полезными для дальнейшего магнитостатическими соответствиями общего характера, установленными в [529].

59.1. Правило Ферерса для магнитных потенциалов

Обнаруженная в работе [99] связь (20.5) (правило Феррерса) между потенциалами объемных и поверхностных **скалярных** (массы, заряды) источников позволила существенно упростить вывод формул для ньютонова потенциала эллипсоида. Представляет интерес выяснить, распространяется ли правило Феррерса на стационарные магнитные поля. Этот вопрос мы рассмотрим, следуя рассуждениям, во многом аналогичным приведенным в § 20 при доказательстве формулы (20.5).

Пусть некоторая ограниченная односвязная область пространства (именуемая в дальнейшем телом) характеризуется объемом V, в котором циркулируют токи плотности $\mathbf{j}\,(\mathbf{r})$. Как и в § 20, будем считать замкнутую поверхность S, охватывающую V, гладкой и выпуклой, и выберем начало координат внутри V. В области, занимаемой токами, вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ не является потенциальным. Поэтому псевдоскалярный потенциал магнитного поля не имеет прямого выражения через плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ или $\mathbf{i}(\mathbf{r})$, подобного выражению электростатического потенциала (31.1) или (31.2) через соответствующие плотности заряда. Остается использовать векторный потенциал[1]

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathfrak{c}} \int\limits_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV'. \tag{59.1}$$

Каждую декартову компоненту объемной плотности тока будем считать однородной (степени k) функцией координат, так что

$$\mathbf{j}(\lambda\,\mathbf{r}) = \lambda^k\,\mathbf{j}(\mathbf{r}), \tag{59.2}$$

где λ — произвольная постоянная. Векторный потенциал того же тела в точке $\lambda\,\mathbf{r}$, очевидно, равен

$$\mathbf{A}^T(\lambda\,\mathbf{r}) = \frac{\lambda^{k+2}}{\mathfrak{c}} \int\limits_{\overline{V}} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV' = \lambda^{k+2}\overline{\mathbf{A}}^T(\mathbf{r}), \tag{59.3}$$

где $\overline{V}$ — объём тела, граница которого подобна и расположена подобно границе исходного тела, но находится в λ раз ближе к началу координат, а $\overline{\mathbf{A}}^T(\mathbf{r})$ отличается от $\mathbf{A}^T(\mathbf{r})$ только тем, что областью интегрирования $\overline{\mathbf{A}}^T(\mathbf{r})$ является не V, а $\overline{V}$. При выводе (59.3) использовались замена переменных интегрирования $\mathbf{r}'\to\lambda\,\mathbf{r}'$ и свойство (59.2).

Положим теперь $\lambda = 1+\varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число. Тогда границы объемов V и $\overline{V}$ образуют гомотетическую оболочку, толщина которой в произвольной ее точке равна $dp = p\,\varepsilon$. Здесь p — расстояние от начала координат до плоскости, касательной к оболочке в той же точке. Согласно принципу суперпозиции, векторный потенциал оболочки представляет собой разность между векторными потенциалами ограничивающих ее тел при условии, что в объеме, общем для обоих тел, плотности их токов совпадают. Сказанное, естественно, справедливо и в отношении любой декартовой компоненты векторного потенциала. В частности, компонента dA_x векторного потенциала бесконечно тонкой оболочки с бесконечно малой поверхностной плотностью тока $d\mathbf{i} = \mathbf{j}\,dp = \mathbf{j}\,p\,\varepsilon$ равна

$$\begin{aligned} dA_x &= A^T_x(\mathbf{r}) - \overline{A}^T_x(\mathbf{r}) = \\ &= A^T_x(\mathbf{r}) - (1+\varepsilon)^{-k-2} A^T_x(\mathbf{r}+\varepsilon\,\mathbf{r}) = \left[(k+2)A^T_x - \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\nabla} A^T_x\right]\varepsilon. \end{aligned} \tag{59.4}$$

В векторной записи этот результат имеет вид

$$d\mathbf{A} = \left\{(k+2)\mathbf{A}^T(\mathbf{r}) - (\mathbf{r}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A}^T(\mathbf{r})\right\}\varepsilon.$$

Учитывая, что ε — постоянное (хотя и сколь угодно малое) число, заключаем, что поверхностному току с *конечной* плотностью

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}') = \mathbf{j}(\mathbf{r}')\,p(\mathbf{r}'), \qquad \mathbf{r}' \in S, \tag{59.5}$$

[1] В этом разделе мы будем различать векторный потенциал $\mathbf{A}^T(\mathbf{r})$ объемных токов и векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ поверхностных токов одного и того же тела.

циркулирующему в оболочке нулевой толщины, соответствует векторный потенциал

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (k+2)\,\mathbf{A}^T(\mathbf{r}) - (\mathbf{r}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A}^T(\mathbf{r})\,. \tag{59.6}$$

В формуле (59.6) точка наблюдения может быть выбрана как внутри, так и вне объема V.

Рассмотрим теперь магнитную индукцию $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, в частности, какую-либо из ее декартовых компонент, например, B_z. Последовательно получаем

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = (k+1)\,B_z^T - x\,\frac{\partial B_z^T}{\partial x} - y\,\frac{\partial B_z^T}{\partial y} - z\,\frac{\partial B_z^T}{\partial z}\,, \tag{59.7}$$

где для A_x и A_y использованы выражения, даваемые (59.6), и $\mathbf{B}^T = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}^T$.

Вне объема V вектор $\mathbf{B}^T$ потенциален: $\mathbf{B}^T = -\boldsymbol{\nabla}\widetilde{\Phi}$. Это позволяет представить (59.7) в виде

$$B_z = -(k+1)\,\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial z} + x\,\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial x\partial z} + y\,\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial y\partial z} + z\,\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial z^2}\,.$$

Здесь $\widetilde{\Phi}$ — внешний скалярный потенциал магнитного поля циркулирующих в теле объемных токов плотностью $\mathbf{j}\,(\mathbf{r})$. Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(z\,\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial z}\right) = \frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial z} + z\,\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial z^2}\,,$$

имеем окончательно

$$B_z = -(k+2)\,\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(x\,\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial x} + y\,\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial y} + z\,\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial z}\right)\,. \tag{59.8}$$

Циклическая перестановка в (59.8) дает аналогичные выражения для B_x и B_y, так что результат записывается и в векторном виде

$$\mathbf{B} = -\boldsymbol{\nabla}\widetilde{\Psi}\,, \tag{59.9}$$

где магнитный псевдоскалярный потенциал оболочки есть[1]

$$\widetilde{\Psi} = (k+2)\widetilde{\Phi} - \mathbf{r}\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\mathbf{r}}\,. \tag{59.10}$$

Формулы (59.6) и (59.10) выражают правило Ферререса для магнитных полей постоянных токов, причем если первая «работает» во всем пространстве, то вторая – только вне области с токами.

59.2. О взаимном интегральном соответствии пуассоновых магнитных зарядов и амперовых молекулярных токов

В этом разделе мы рассмотрим некоторые математические следствия, касающиеся двух различных (имевших место в истории магнетизма) толкований происхождения магнитных полей магнетиков (неферромагнитных).

[1] Произвольную постоянную, возникающую при нашем выводе (59.10), положим равной нулю. Так что оба потенциала и $\widetilde{\Phi}(\mathbf{r})$, и $\widetilde{\Psi}(\mathbf{r})$ при $\mathbf{r}\to\infty$ стремятся к нулю.

Будем считать, что такого рода магнетик представляет собой некоторое односвязное тело, находящееся в немагнитной среде и испытывающее воздействие внешнего магнитного поля. Магнитные свойства такого магнетика, как известно, характеризует вектор намагниченности $\mathfrak{J}$. Интересующий нас здесь вопрос — это магнитные мультипольные моменты тела, оперировать с которыми будем на основе полумикроскопического описания[2] источников.

Пуассон [237,279,400] объяснял происхождение магнитного поля присутствием связанных магнитных зарядов (флюидов, двух сортов магнитной жидкости), объемная $\tilde{\varrho}$ и поверхностная $\tilde{\sigma}$ плотность которых выражаются формулами

$$\tilde{\varrho} = -\operatorname{div}\mathfrak{J}, \qquad \tilde{\sigma} = \mathfrak{J}_n \tag{59.11}$$

соответственно. Эти формулы аналогичны выражению плотностей связанных электрических зарядов через вектор поляризации $\mathbf{P}$. В своем Трактате ([239] п. 430) Максвелл отклонил как противоречащий эксперименту конкретный механизм намагничения, предложенный Пуассоном. Примечательны, однако, завершающие этот пункт слова: *«Of course the value of Poisson's mathematical investigations remains unimpaired, as they do not rest on his hypothesis, but on the experimental fact of induced magnetization»*[1].

Ампер [5,6,239] источником магнитного поля магнетиков считал молекулярные токи, связь которых с намагниченностью характеризуют формулы

$$\mathbf{j}_{\mathrm{A}} = \mathfrak{c}\operatorname{rot}\mathfrak{J}, \qquad \mathbf{i}_{\mathrm{A}} = \mathfrak{c}\operatorname{Rot}\mathfrak{J}. \tag{59.12}$$

Здесь $\mathbf{j}_{\mathrm{A}}$ и $\mathbf{i}_{\mathrm{A}}$ — объемная и поверхностная плотности молекулярных (амперовых) токов соответственно, а так называемый *поверхностный ротор* вектора $\mathfrak{J}$ есть (см., например, [550])

$$\operatorname{Rot}\mathfrak{J} = [\mathbf{n}(\mathfrak{J}_2 - \mathfrak{J}_1)] = -[\mathbf{n}\mathfrak{J}]. \tag{59.13}$$

Единичный вектор $\mathbf{n}$ внешней нормали к поверхности S тела направлен из среды 1, в которой $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}$, в среду 2, где в нашем случае $\mathfrak{J}_2 = 0$. Заметим, что условиям (49.1) и (49.2) амперовы токи удовлетворяют автоматически.

Очевидно, что мультипольные системы могут образовываться как зарядами, так и токами. В связи с этим возникает вопрос: как соотносятся между собой магнитные мультипольные моменты пуассоновых магнитных зарядов (59.11) и магнитные мультипольные моменты амперовых молекулярных токов (59.12)? При этом речь идет, разумеется, об одном и том же теле с намагниченностью $\mathfrak{J}$. Напомним, что вектор $\mathfrak{J}$ — это средняя плотность магнитного (дипольного) момента в физически бесконечно малом объеме, т. е. магнитный момент тела равен

$$\mathfrak{M} = \int \mathfrak{J}\, dV. \tag{59.14}$$

[2] Под полумикроскопической записью законов макроскопической электродинамики понимается запись, в которой фигурируют не четыре, а только два поля: $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, при этом теперь плотность заряда ρ может включать в себя и плотность связанного (поляризационного) заряда $\rho_{\text{св}} = -\operatorname{div}\mathbf{P}$, а плотность тока $\mathbf{j}$ может быть дополнена плотностью амперовых (молекулярных) токов $\mathbf{j}_{\mathrm{A}} = c\operatorname{rot}\mathfrak{J}$.

[1] *«Но, конечно, при этом полностью сохраняется значение математических исследований Пуассона, ибо они основаны не на его гипотезе, а на экспериментальном факте наличия индуцированной намагниченности».* (Цитируется по русскому переводу [239]).

Магнитные мультипольные моменты магнитных зарядов определяются формулами

$$\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l} = \begin{cases} \displaystyle\int \tilde{\varrho}(\mathbf{r})\,\theta_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r})\,dV, \\ \\ \displaystyle\oint \tilde{\sigma}(\mathbf{r})\,\theta_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r})\,dS, \end{cases} \qquad (l = 1, 2, \ldots) \tag{59.15}$$

являющимися аналогами (35.6).

Магнитные мультипольные моменты амперовых токов в соответствии с (51.8) и (51.10) даются формулами

$$\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l} = \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{(l+1)\mathfrak{c}}\int\limits_V [\mathbf{r}\,\mathbf{j}_{\mathrm{A}}]_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}\;\theta_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r})\,dV, \\ \\ \displaystyle\frac{1}{(l+1)\mathfrak{c}}\oint\limits_S [\mathbf{r}\,\mathbf{i}_{\mathrm{A}}]_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}\;\theta_{i_1\ldots i_l}(\mathbf{r})\,dS. \end{cases} \qquad (l = 1, 2, \ldots) \tag{59.16}$$

Для того, чтобы обе точки зрения (и Пуассона, и Ампера) одновременно непротиворечиво сосуществовали, выражения (59.15) и (59.16) должны, очевидно, приводить к совпадающим результатам. Доказательству этого и посвящен данный раздел.

Прежде, однако, проверим, насколько дипольные моменты амперовых объемных токов

$$\boldsymbol{\mathfrak{M}}_V = \frac{1}{2\mathfrak{c}}\int [\mathbf{r}\,\mathbf{j}_{\mathrm{A}}]\,dV = \frac{1}{2}\int [\mathbf{r}\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\mathfrak{I}}]\,dV \tag{59.17}$$

и дипольные моменты амперовых поверхностных токов

$$\boldsymbol{\mathfrak{M}}_S = \frac{1}{2\mathfrak{c}}\oint [\mathbf{r}\,\mathbf{i}_{\mathrm{A}}]\,dS = \frac{1}{2}\oint [\mathbf{r}\ \mathrm{Rot}\,\boldsymbol{\mathfrak{I}}]\,dS \tag{59.18}$$

согласуются с формулой (59.14), определяющей намагниченность. Рассмотрим удвоенную сумму (59.17) и (59.18).

$$2\,\boldsymbol{\mathfrak{M}} = \int [\mathbf{r}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\mathfrak{I}}]dV + \oint [\mathbf{r}\,\mathrm{Rot}\,\boldsymbol{\mathfrak{I}}]dS = \int [\mathbf{r}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\mathfrak{I}}]\,dV - \oint [\mathbf{r}[\mathbf{n}\boldsymbol{\mathfrak{I}}]]\,dS, \tag{59.19}$$

где учтено (59.13). Для x-компоненты подынтегрального выражения в объемном интеграле получаем

$$\begin{aligned} [\mathbf{r}\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\mathfrak{I}}]_x &= y\,\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\mathfrak{I}} - z\,\mathrm{rot}_y\,\boldsymbol{\mathfrak{I}} = \\ &= -\left(y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathfrak{I}_x + \frac{\partial}{\partial x}\,(y\mathfrak{I}_y + z\mathfrak{I}_z) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial y}\,(y\mathfrak{I}_x) - \frac{\partial}{\partial z}\,(z\mathfrak{I}_x) + \frac{\partial}{\partial x}\,(y\mathfrak{I}_y + z\mathfrak{I}_z) + 2\mathfrak{I}_x. \end{aligned}$$

Или

$$[\mathbf{r}\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\mathfrak{I}}]_x - 2\mathfrak{I}_x = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{r}\,\boldsymbol{\mathfrak{I}}) - \mathrm{div}\,(\mathfrak{I}_x\,\mathbf{r})\,. \tag{59.20}$$

Интегрируя (59.20) по объему тела и используя формулу Остроградского–Гаусса, находим

$$\int \left([\mathbf{r}\ \mathrm{rot}\,\mathfrak{I}]_x - 2\mathfrak{I}_x\right)\, dV = \oint n_x(\mathbf{r}\,\mathfrak{I})\, dS - \oint \mathfrak{I}_x(\mathbf{rn})\, dS. \tag{59.21}$$

Учитывая, что $[\mathbf{r}\,[\mathbf{n}\mathfrak{I}]] = \mathbf{n}(\mathbf{r}\,\mathfrak{I}) - \mathfrak{I}(\mathbf{rn})$, перепишем (59.21) в векторном виде

$$\int [\mathbf{r}\ \mathrm{rot}\,\mathfrak{I}]\, dV = 2\int \mathfrak{I}\, dV + \oint [\mathbf{r}\,[\mathbf{n}\mathfrak{I}]]\, dS. \tag{59.22}$$

Подставляя (59.22) в (59.19), убеждаемся в выполнении (59.14), а также в том, что при вычислении аддитивных интегральных характеристик, связанных с токами (включая молекулярные токи), не следует забывать о вкладе, вносимом поверхностными токами, если они есть. К таким характеристикам относится, разумеется, не только магнитный дипольный момент, но и моменты высших магнитных мультиполей[1].

То, что дипольный момент пуассоновых магнитных зарядов (59.11) тоже соответствует формуле (59.14) с намагничением, мы проверять не будем. Мы докажем более общее утверждение о совпадении магнитных мультипольных моментов произвольного ранга системы молекулярных токов (59.12) и системы магнитных зарядов (59.11), относящихся к одному и тому же телу-магнетику с намагничением $\mathfrak{I}$.

Будем исходить из выражений (59.16) для тензора магнитного мультипольного момента l-го ранга, рассматривая сначала по отдельности вклад

$$\mathfrak{M}^{(V)}_{i_1\ldots i_l} = \frac{1}{(l+1)\mathfrak{c}} \int\limits_V [\mathbf{r}\mathbf{j}_{\mathrm{A}}]_k \frac{\partial}{\partial x_k}\,\theta_{i_1\ldots i_l}\, dV = \frac{1}{l+1}\int\limits_V [\mathbf{r}\ \mathrm{rot}\,\mathfrak{I}]_k \frac{\partial}{\partial x_k}\,\theta_{i_1\ldots i_l}\, dV \tag{59.23}$$

в этот момент, даваемый объемными токами плотности $\mathbf{j}_{\mathrm{A}} = \mathfrak{c}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{I}$, и вклад

$$\mathfrak{M}^{(S)}_{i_1\ldots i_l} = \frac{1}{(l+1)\mathfrak{c}} \oint\limits_S [\mathbf{r}\mathbf{i}_{\mathrm{A}}]_k \frac{\partial}{\partial x_k}\ \theta_{i_1\ldots i_l}\, dS = -\frac{1}{l+1}\oint\limits_S [\mathbf{r}[\mathbf{n}\mathfrak{I}]]_k \frac{\partial}{\partial x_k}\ \theta_{i_1\ldots i_l}\, dS \tag{59.24}$$

поверхностных токов плотности $\mathbf{i}_{\mathrm{A}} = \mathfrak{c}\,\mathrm{Rot}\,\mathfrak{I} = -\mathfrak{c}\,[\mathbf{n}\mathfrak{I}]$ (см. формулы (59.12), (59.13)).

Преобразуем подынтегральное выражение в (59.23). Последовательно получаем

$$\begin{aligned}
[\mathbf{r}\ \mathrm{rot}\,\mathfrak{I}]_k \frac{\partial\theta}{\partial x_k} &= \varepsilon_{kpm}\, x_p\, \varepsilon_{mnr} \frac{\partial\mathfrak{I}_r}{\partial x_n}\ \frac{\partial\theta}{\partial x_k} = \varepsilon_{kpm}\, \varepsilon_{nrm}\, x_p \frac{\partial\mathfrak{I}_r}{\partial x_n}\ \frac{\partial\theta}{\partial x_k} = \\
&= (\delta_{kn}\delta_{pr} - \delta_{kr}\delta_{pn})\ x_p \frac{\partial\mathfrak{I}_r}{\partial x_n}\ \frac{\partial\theta}{\partial x_k} = x_p \frac{\partial\mathfrak{I}_p}{\partial x_k}\ \frac{\partial\theta}{\partial x_k} - x_p\ \frac{\partial\mathfrak{I}_k}{\partial x_p}\ \frac{\partial\theta}{\partial x_k}\,.
\end{aligned} \tag{59.25}$$

Здесь для сокращения записи у тензора $\theta_{i_1\ldots i_l}$ опущены все тензорные индексы $i_1, \ldots, i_l$, как не участвующие в проводимых преобразованиях. Перепишем каждое из последних слагаемых (59.25). Будем иметь

$$x_p \frac{\partial\mathfrak{I}_p}{\partial x_k}\frac{\partial\theta}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_p\mathfrak{I}_p\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\right) - \mathfrak{I}_p\frac{\partial\theta}{\partial x_p} - x_p\mathfrak{I}_p\Delta\theta, \tag{59.26}$$

[1] В некоторых книгах по электродинамике (см., например, [484]) формула, соответствующая (59.19), приводится без поверхностного интеграла, но поверхностные токи в ней неявно учтены, ибо при этом оговорено, что интегрирование ведется по любому объему, выходящему за пределы тела.

$$x_p \frac{\partial \mathfrak{I}_k}{\partial x_p} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_p} \left(x_p \mathfrak{I}_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) - 3\mathfrak{I}_p \frac{\partial \theta}{\partial x_p} - \mathfrak{I}_k x_p \frac{\partial}{\partial x_p} \frac{\partial \theta}{\partial x_k}. \tag{59.27}$$

Учтем теперь (см. § 31), что каждая компонента тензора $\theta_{i_1 \ldots i_l}(\mathbf{r})$ является шаровой функцией, т. е. однородным гармоническим полиномом степени l. Это означает, что, во-первых, последнее слагаемое в (59.26) обращается в нуль, ибо $\Delta\theta = 0$, а, во-вторых, последнее слагаемое в (59.27) допускает применение к функции $\partial\theta/\partial x_k$ теоремы Эйлера об однородных функциях, что дает[1] $x_p \frac{\partial}{\partial x_p} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = (l-1) \frac{\partial \theta}{\partial x_k}$. В результате (59.25) приобретает вид

$$[\mathbf{r} \,\mathrm{rot}\, \mathfrak{I}]_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(x_p \mathfrak{I}_p \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) - \mathfrak{I}_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} - \\ - \frac{\partial}{\partial x_p} \left(x_p \mathfrak{I}_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) + 3\mathfrak{I}_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + (l-1)\mathfrak{I}_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}\,.$$

Или

$$[\mathbf{r} \,\mathrm{rot}\, \mathfrak{I}]_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(x_p \mathfrak{I}_p \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_p} \left(x_p \mathfrak{I}_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) + (l+1)\mathfrak{I}_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathbf{r}\mathfrak{I} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_p} \left(x_p \mathfrak{I}_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) + (l+1) \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathfrak{I}_k \theta) - (l+1)\theta \,\mathrm{div}\, \mathfrak{I}\,. \tag{59.28}$$

Подставляя теперь выражение (59.28) в объемный интеграл (59.23) и трижды используя формулу Остроградского–Гаусса, приходим к окончательному выражению

$$\mathfrak{M}^{(V)}_{i_1 \ldots i_l} = \frac{1}{l+1} \oint_S \mathbf{r}\mathfrak{I} \frac{\partial}{\partial n} \theta_{i_1 \ldots i_l}\, dS - \frac{1}{l+1} \oint_S (\mathbf{rn}) \mathfrak{I}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \theta_{i_1 \ldots i_l}\, dS + \\ + \oint_S (\mathfrak{I}\mathbf{n}) \theta_{i_1 \ldots i_l}\, dS - \int_V \theta_{i_1 \ldots i_l} \,\mathrm{div}\, \mathfrak{I}\, dV\,. \tag{59.29}$$

Теперь обратимся к интегралу (59.24). Раскрывая в нем двойное векторное произведение $[\mathbf{r}\,[\mathbf{n}\mathfrak{I}]] = \mathbf{n}(\mathbf{r}\,\mathfrak{I}) - \mathfrak{I}(\mathbf{rn})$, приходим к формуле

$$\mathfrak{M}^{(S)}_{i_1 \ldots i_l} = -\frac{1}{l+1} \oint_S n_k (\mathbf{r}\mathfrak{I}) \frac{\partial}{\partial x_k}\, \theta_{i_1 \ldots i_l}\, dS + \frac{1}{l+1} \oint_S \mathfrak{I}_k (\mathbf{rn}) \frac{\partial}{\partial x_k}\, \theta_{i_1 \ldots i_l}\, dS,$$

сложение которой с (59.29) выражает полный мультипольный момент

$$\mathfrak{M}_{i_1 \ldots i_l} = \int \tilde{\varrho}\, \theta_{i_1 \ldots i_l}\, dV + \oint \tilde{\sigma}\, \theta_{i_1 \ldots i_l}\, dS$$

только через плотности (59.11) магнитного связанного заряда.

[1] Именно предстоящее использование теоремы Эйлера побудило нас вторую производную $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_p\, \partial x_k}$ старомодно обозначить как $\frac{\partial}{\partial x_p} \frac{\partial \theta}{\partial x_k}$.

Таким образом, использование представлений о связанных магнитных зарядах при расчете полных мультипольных моментов, учитывающих суммарный вклад объемных и поверхностных источников, находится в количественном согласии с результатами, основанными на использовании амперовых токов. Этот вывод, который, следуя Максвеллу, мы рассматриваем как чисто математический, полезен тем, что он может быть использован как связующее звено между мультипольными формулами электростатики и магнитостатики. Действительно, взаимодействие между магнитными зарядами (в том числе связанными) дается законом Кулона, в котором электрические заряды заменены магнитными, напряженность магнитного поля и его псевдоскалярный потенциал выражаются через их источники (магнитные заряды или намагниченность) в точности такими же формулами, что и электростатическая напряженность и ее потенциал через электрические источники (заряды или поляризацию)[1]. Это означает, что если непрерывное распределение электрических источников (с полным зарядом, равным нулю) заменить аналогичным распределением магнитных источников, то внешний электростатический потенциал, выраженный через мультипольные моменты, перейдет при замене электрических мультипольных моментов соответствующими магнитными в выражение псевдоскалярного магнитного потенциала в терминах мультипольных моментов магнитных зарядов. При этом в случае, если речь идет о связанных зарядах, выражающихся через поляризацию $\mathbf{P}$ и намагниченность $\mathfrak{I}$, мы вправе считать, учитывая результаты данного подраздела, что магнитные мультипольные моменты обусловлены амперовыми токами. Из сказанного следует, между прочим, что утверждение п. 2 (§ 54), приводящее к заменам (54.9), можно дополнить заменами

$$\mathbf{P} \to \mathfrak{I}, \quad Q_{i_1 \ldots i_l} \to \mathfrak{M}_{i_1 \ldots i_l}, \quad \Phi(\mathbf{r}) \to \widetilde{\Phi}(\mathbf{r}), \quad \Psi(\mathbf{r}) \to \widetilde{\Psi}(\mathbf{r}). \tag{59.30}$$

Следующий шаг в наших рассуждениях основывается на универсальности мультипольных формул. Магнитные мультипольные моменты не «чувствительны» к тому являются ли определяющие их токи токами молекулярными или токами проводимости. Это означает, что если структура токов проводимости и их координатная зависимость идентичны структуре и координатной зависимости амперовых токов, включая удовлетворение условиям (49.1), (49.2), то идентичны и формулы, описывающие их псевдоскалярные магнитные потенциалы.

Все сказанное относится, естественно, и к магнитному потенциалу эллипсоида, записанному для наружной области пространства в форме мультипольного представления. Фактически, в теории мультипольного представления псевдоскалярного магнитного потенциала эллипсоида «центр тяжести» исследования переносится от установления вида мультипольного представления к установлению вида его токовых источников.

В данной главе книги мы интересуемся магнитными полями главным образом в точках наблюдения, находящихся вне токовой области. По отношению к таким точкам разбиение токов на объемные и поверхностные является в определенной мере условным, поскольку объемные токи всегда можно заменить эквивалентными поверхностными. В этом убеждает следующее рассуждение. Пусть все пространство заполнено сверхпроводником,

[1] См., например, [193, 473, 480].

в котором имеется полость, и в этой полости циркулирует стационарный электрический ток. Поскольку в толще сверхпроводника магнитное поле всегда отсутствует, то, с точки зрения принципа суперпозиции, это означает, что магнитное поле, созданное объемными токами полости, «гасится» магнитным полем поверхностных токов, наведенных на границе полости. Отсюда следует, что токи на поверхности полости, взятые с противоположным знаком, эквивалентны объемным токам.

§ 60. Мультипольное представление поверхностных магнитных потенциалов $\widetilde{\Psi}^{(\nu)}$

В § 56–58 было показано, что парциальный объемный ток эллипсоида, плотность которого характеризуется выражениями

$$\frac{j_x^{(\nu)}}{a} = \sum_{k+l+m=\nu} \frac{\nu!}{k!\,l!\,m!}\, \alpha_{x;\,klm} \left(\frac{x}{a}\right)^k \left(\frac{y}{b}\right)^l \left(\frac{z}{c}\right)^m, \tag{60.1}$$

$$\frac{j_y^{(\nu)}}{b} = \sum_{k+l+m=\nu} \frac{\nu!}{k!\,l!\,m!}\, \alpha_{y;\,klm} \left(\frac{x}{a}\right)^k \left(\frac{y}{b}\right)^l \left(\frac{z}{c}\right)^m, \tag{60.2}$$

$$\frac{j_z^{(\nu)}}{c} = \sum_{k+l+m=\nu} \frac{\nu!}{k!\,l!\,m!}\, \alpha_{z;\,klm} \left(\frac{x}{a}\right)^k \left(\frac{y}{b}\right)^l \left(\frac{z}{c}\right)^m, \tag{60.3}$$

где $\nu \geqslant 1$, и который удовлетворяет условиям (56.5)–(56.9), создает во внешнем пространстве магнитное поле, псевдоскалярный потенциал которого имеет следующее мультипольное представление:

$$\widetilde{\Phi}^{(\nu)} = \widetilde{\mathfrak{m}}_{j_1\ldots j_\nu}\, \varphi_{j_1\ldots j_\nu} = \sum_{i+j+k=\nu} \frac{\nu!}{i!\,j!\,k!}\, \widetilde{\mathfrak{m}}_{ij\,k}\, \varphi_{ij\,k} \qquad (\nu \geqslant 1). \tag{60.4}$$

Поскольку эллипсоидальная граница области с токами и зависимость токов (60.1)–(60.3) от координат (однородность степени ν) удовлетворяют условиям применимости правила Ферререса (см. п. 59.1), воспользуемся этой возможностью. Поместим начало координат в центр эллипсоида, а декартовы оси совместим с осями эллипсоида. При этом фигурирующая в правиле Ферререса величина p равна

$$p = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}. \tag{60.5}$$

В нашем случае правило Ферререса (59.10), имеющее вид

$$\widetilde{\Psi}^{(\nu)} = \widehat{F}^{(\nu)} \widetilde{\Phi}^{(\nu)}, \tag{60.6}$$

где в соответствии с (20.6) оператор Ферререса

$$\hat{F}^{(\nu)} = \nu + 2 - \left\langle x\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle, \tag{60.7}$$

позволяет получить мультипольное представление парциального потенциала $\widetilde{\Psi}^{(\nu)}$ поверхностного тока, плотность которого согласно (59.5) равна

$$\mathbf{i}^{(\nu)}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}^{(\nu)}(\mathbf{r})\, p(\mathbf{r}). \tag{60.8}$$

Здесь $\mathbf{j}^{(\nu)}$ — плотность объемного парциального тока, определенная формулами (60.1)–(60.3).

Подставляя в (60.6) выражение (60.4), получаем

$$\widetilde{\Psi}^{(\nu)} = \sum_{i+j+k=\nu} \frac{\nu!}{i!\,j!\,k!}\, \widetilde{\mathfrak{m}}_{ij\,k}\, \widehat{F}^{(\nu)} \varphi_{ij\,k}. \tag{60.9}$$

Теперь воспользуемся формулой (42.19)

$$\psi_{ij\,k} = \frac{1}{2\nu+3}\, \widehat{F}^{(\nu)} \varphi_{ij\,k} \qquad (\nu = i+j+k)\,,$$

выражающей тензор-потенциал гомеоида через тензор-потенциал эллипсоида. Формула (60.9) приобретает вид

$$\widetilde{\Psi}^{(\nu)} = (2\nu+3) \sum_{i+j+k=\nu} \frac{\nu!}{i!\,j!\,k!}\, \widetilde{\mathfrak{m}}_{ij\,k}\, \psi_{ij\,k}. \tag{60.10}$$

Наконец, учитывая вторую из формул (57.16)

$$\widetilde{\mathfrak{m}}_{j_1\ldots j_\nu} = \frac{\mathfrak{m}_{j_1\ldots j_\nu}}{2\nu+3}\,, \tag{60.11}$$

приходим к окончательному выражению

$$\widetilde{\Psi}^{(\nu)} = \mathfrak{m}_{j_1\ldots j_\nu}\, \psi_{j_1\ldots j_\nu} = \sum_{i+j+k=\nu} \frac{\nu!}{i!\,j!\,k!}\, \mathfrak{m}_{ij\,k}\, \psi_{ij\,k} \quad (\nu \geqslant 1), \tag{60.12}$$

которое дано как в тензорной, так и в трехиндексной записи.

§ 61. Мультипольное представление объемных магнитных потенциалов $\widetilde{\Phi}_L^\Gamma$

Пусть в объеме эллипсоида циркулирует ток, у которого любая декартова компонента вектора плотности $\mathbf{j}_L^\Gamma(x/a, y/b, z/c)$ является гармоническим полиномом (своих аргументов) степени L. Предполагается, что этот ток, как и любой ток в ограниченном объеме, удовлетворяет условиям (49.1), (49.2). Поскольку всякий гармонический полином есть сумма однородных гармонических полиномов, то

$$\mathbf{j}_L^\Gamma\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) = \sum_{\nu=1}^{L} \mathbf{j}^{(\nu)}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right), \tag{61.1}$$

где компоненты парциальных токов $\mathbf{j}^{(\nu)}(x/a, y/b, z/c)$ даются формулами (60.1)–(60.3) при обязательном выполнении и соотношений (56.5)–(56.9). Тем самым обеспечивается выполнение (49.1), (49.2).

В силу принципа суперпозиции из формул (61.1) и (60.4) следует, что

$$\widetilde{\Phi}_L^{\Gamma} = \sum_{\nu=1}^{L} \widetilde{\Phi}^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{L} \widetilde{\mathfrak{m}}_{j_1\ldots j_\nu} \varphi_{j_1\ldots j_\nu} = \sum_{\nu=1}^{L} \sum_{i+j+k=\nu} \frac{\nu!}{i!\, j!\, k!} \widetilde{\mathfrak{m}}_{ij\,k} \varphi_{ij\,k}\,. \qquad (61.2)$$

Мы получили «магнитный» аналог формулы (46.3) с отсутствующим, как и должно быть, значением $\nu = 0$.

Как и в § 46, нас интересуют формулы, выраженные через полные мультипольные (на этот раз *магнитные*) моменты

$$\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_\nu} = \frac{1}{(\nu+1)\mathfrak{c}} \int\limits_V [\mathbf{r}'\mathbf{j}_L^{\Gamma}]_k \frac{\partial}{\partial x'_k} \theta_{i_1\ldots i_\nu}(\mathbf{r}')\, dV' \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, L). \qquad (61.3)$$

Мы не будем приводить здесь громоздкий прямой вывод соотношений, связывающих парциальные магнитные мультипольные моменты с полными, а воспользуемся результатами, изложенными в п. 59.2. В согласии с этими результатами условные тензорные рекуррентные соотношения для магнитных моментов получаются из (46.4) заменой электрических моментов соответствующими магнитными и приравниванием нулю монопольных моментов, принимая вид

$$\begin{gathered}
\widetilde{\mathfrak{m}}_{j_1\ldots j_{2l+1}} \mathrel{\hat{=}} \mathfrak{M}_{j_1\ldots j_{2l+1}} - (4l+1)!! \sum_{n=0}^{l-1} \frac{(4n+3)(4n+5)}{(2l+2n+5)!!} \times \\
\times \langle\!\langle \widetilde{\mathfrak{m}}_{j_1\ldots j_{2n+1}} \varkappa_{j_{2n+2} j_{2n+3}} \ldots \varkappa_{j_{2l} j_{2l+1}} \rangle\!\rangle \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots), \\
\widetilde{\mathfrak{m}}_{j_1\ldots j_{2l}} \mathrel{\hat{=}} \mathfrak{M}_{j_1\ldots j_{2l}} - (4l-1)!! \sum_{n=1}^{l-1} \frac{(4n+1)(4n+3)}{(2l+2n+3)!!} \times \\
\times \langle\!\langle \widetilde{\mathfrak{m}}_{j_1\ldots j_{2n}} \varkappa_{j_{2n+1} j_{2n+2}} \ldots \varkappa_{j_{2l-1} j_{2l}} \rangle\!\rangle \qquad (l = 1, 2, 3, \ldots),
\end{gathered} \qquad (61.4)$$

где

$$\varkappa_{ij} \equiv a_{(i)} a_{(j)} \delta_{ij} = \begin{cases} a_{(i)}^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \qquad (61.5)$$

Напомним, что (61.4) — условные равенства, результаты использования которых предназначены только для подстановки в (61.2). Во избежание ошибок замену величин $\widetilde{\mathfrak{m}}_{j_1\ldots j_\nu}$ в правых частях соотношений (61.4) полными мультипольными моментами $\mathfrak{M}_{j_1\ldots j_\nu}$ следует производить лишь после выполнения операции симметризации $\langle\!\langle\ldots\rangle\!\rangle$.

Из формул (61.4) последовательно получаем

$$\widetilde{\mathfrak{m}}_i = \mathfrak{M}_i, \qquad (61.6)$$

$$\widetilde{\mathfrak{m}}_{ij} = \mathfrak{M}_{ij}, \qquad (61.7)$$

$$\widetilde{\mathfrak{m}}_{ijk} \mathrel{\hat{=}} \mathfrak{M}_{ijk} - \frac{15}{7} \left(\widetilde{\mathfrak{m}}_i\, a_{(j)} a_{(k)} \delta_{jk} + \widetilde{\mathfrak{m}}_j\, a_{(i)} a_{(k)} \delta_{ik} + \widetilde{\mathfrak{m}}_k\, a_{(i)} a_{(j)} \delta_{ij} \right), \qquad (61.8)$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{m}}_{ij\,kl} \mathrel{\hat{=}} \mathfrak{M}_{ijkl} - \frac{35}{9} \big[& \widetilde{\mathfrak{m}}_{ij}\, a_{(k)} a_{(l)} \delta_{kl} + \widetilde{\mathfrak{m}}_{ik}\, a_{(j)} a_{(l)} \delta_{j\,l} + \widetilde{\mathfrak{m}}_{il}\, a_{(j)} a_{(k)} \delta_{j\,k} + \\
& + \widetilde{\mathfrak{m}}_{j\,k}\, a_{(i)} a_{(l)} \delta_{il} + \widetilde{\mathfrak{m}}_{j\,l}\, a_{(i)} a_{(k)} \delta_{ik} + \widetilde{\mathfrak{m}}_{kl}\, a_{(i)} a_{(j)} \delta_{ij} \big].
\end{aligned} \qquad (61.9)$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathfrak{m}}_{ij\,klm} \mathrel{\hat{=}} \mathfrak{M}_{ijklm} - 15\,\Big[&\widetilde{\mathfrak{m}}_i\, a_{(j)}a_{(k)}a_{(l)}a_{(m)}\left(\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{lk}\right) + \\ &+ \widetilde{\mathfrak{m}}_i\, a_{(j)}a_{(k)}a_{(l)}a_{(m)}\left(\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{lk}\right) + \\ &+ \widetilde{\mathfrak{m}}_j\, a_{(i)}a_{(k)}a_{(l)}a_{(m)}\left(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}\right) + \\ &+ \widetilde{\mathfrak{m}}_k\, a_{(i)}a_{(j)}a_{(l)}a_{(m)}\left(\delta_{ij}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}\right) + \\ &+ \widetilde{\mathfrak{m}}_m\, a_{(i)}a_{(j)}a_{(k)}a_{(l)}\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)\Big] - \\ -\frac{63}{11}\,\Big(&\widetilde{\mathfrak{m}}_{ijk}\, a_{(l)}a_{(m)}\delta_{lm} + \widetilde{\mathfrak{m}}_{ijl}\, a_{(k)}a_{(m)}\delta_{km} + \widetilde{\mathfrak{m}}_{ikl}\, a_{(j)}a_{(m)}\delta_{jm} + \\ &+ \widetilde{\mathfrak{m}}_{jkl}\, a_{(i)}a_{(m)}\delta_{im} + \widetilde{\mathfrak{m}}_{ijm}\, a_{(k)}a_{(l)}\delta_{kl} + \widetilde{\mathfrak{m}}_{jkm}\, a_{(i)}a_{(l)}\delta_{il} + \widetilde{\mathfrak{m}}_{ikm}\, a_{(j)}a_{(l)}\delta_{jl} + \\ &+ \widetilde{\mathfrak{m}}_{jlm}\, a_{(i)}a_{(k)}\delta_{ik} + \widetilde{\mathfrak{m}}_{ilm}\, a_{(j)}a_{(k)}\delta_{jk} + \widetilde{\mathfrak{m}}_{klm}\, a_{(i)}a_{(j)}\delta_{ij}\Big)\,. \end{aligned} \tag{61.10}$$

Формулам (61.6)–(61.10) соответствуют следующие выражения декартовых компонент тензора $\widetilde{\mathfrak{m}}_{j_1\ldots j_l}$ через компоненты полных мультипольных моментов $\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_\lambda}$:

$$\widetilde{\mathfrak{m}}_x = \mathfrak{M}_x; \tag{61.11}$$

$$\widetilde{\mathfrak{m}}_{xx} \mathrel{\hat{=}} \mathfrak{M}_{xx}, \qquad \widetilde{\mathfrak{m}}_{xy} = \mathfrak{M}_{xy}; \tag{61.12}$$

$$\widetilde{\mathfrak{m}}_{xxx} \mathrel{\hat{=}} \mathfrak{M}_{xxx} - \frac{45}{7}\,\mathfrak{M}_x a^2, \quad \widetilde{\mathfrak{m}}_{xxy} \mathrel{\hat{=}} \mathfrak{M}_{xxy} - \frac{15}{7}\,\mathfrak{M}_y a^2, \quad \widetilde{\mathfrak{m}}_{xyz} = \mathfrak{M}_{xyz}; \tag{61.13}$$

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{m}}_{xxxx} &\mathrel{\hat{=}} \mathfrak{M}_{xxxx} - \frac{70}{3}\,\mathfrak{M}_{xx} a^2, \\ \widetilde{\mathfrak{m}}_{xxxy} &\mathrel{\hat{=}} \mathfrak{M}_{xxxy} - \frac{35}{3}\,\mathfrak{M}_{xy} a^2, \\ \widetilde{\mathfrak{m}}_{xxyy} &\mathrel{\hat{=}} \mathfrak{M}_{xxyy} - \frac{35}{3}\,\left(\mathfrak{M}_{xx} b^2 + \mathfrak{M}_{yy} a^2\right), \\ \widetilde{\mathfrak{m}}_{xyzz} &\mathrel{\hat{=}} \mathfrak{M}_{xyzz} - \frac{35}{9}\,\mathfrak{M}_{xy} c^2. \end{aligned}\right\} \tag{61.14}$$

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{m}}_{xxxxx} &\mathrel{\hat{=}} \mathfrak{M}_{xxxxx} - \frac{630}{11}\,\mathfrak{M}_{xxx} a^2 + \frac{1575}{11}\,\mathfrak{M}_x a^4, \\ \widetilde{\mathfrak{m}}_{xxxxy} &\mathrel{\hat{=}} \mathfrak{M}_{xxxxy} - \frac{378}{11}\,\mathfrak{M}_{xxy} a^2 + \frac{315}{11}\,\mathfrak{M}_y a^4, \\ \widetilde{\mathfrak{m}}_{xxxyy} &\mathrel{\hat{=}} \mathfrak{M}_{xxxyy} - \frac{63}{11}\,\mathfrak{M}_{xxx} b^2 - \frac{189}{11}\,\mathfrak{M}_{xyy} a^2 + \frac{315}{11}\,\mathfrak{M}_x a^2 b^2, \\ \widetilde{\mathfrak{m}}_{xxxyz} &\mathrel{\hat{=}} \mathfrak{M}_{xxxyz} - \frac{189}{11}\,\mathfrak{M}_{xyz} a^2, \\ \widetilde{\mathfrak{m}}_{xxyyz} &\mathrel{\hat{=}} \mathfrak{M}_{xxyyz} - \frac{63}{11}\,\mathfrak{M}_{xxz} b^2 - \frac{63}{11}\,\mathfrak{M}_{yyz} a^2 + \frac{105}{11}\,\mathfrak{M}_z a^2 b^2. \end{aligned}\right\} \tag{61.15}$$

Циклическая или взаимная перестановки декартовых координат в формулах (61.11)–(61.15) дают недостающие выражения.

§ 62. Мультипольное представление поверхностных магнитных потенциалов $\widetilde{\Psi}_L$

В этом параграфе рассматриваются магнитные поля, создаваемые поверхностным током (плотности $\mathbf{i}$) эллипсоида, в котором отношения декартовых компонент $\mathbf{i}$ к p представляют собой полиномы L-ой степени. Не ограничивая общности рассмотрения, удобно считать, что переменными этих полиномов являются не сами декартовы координаты, а отношения x/a, y/b, z/c. Имея в виду, что произвольный полином всегда можно разложить по однородным гармоническим полиномам [107, 146], представим результат трех таких покомпонентных разложений как векторное выражение

$$\mathbf{i}_L = \sum_{k=1}^{L} \sum_{l=0}^{[k/2]} \left\langle \frac{x^2}{a^2} \right\rangle^l \mathbf{i}^{(k-2l)}, \tag{62.1}$$

где $[K]$ – целая часть числа K и где учтено, что на поверхности эллипсоида $\langle x^2/a^2 \rangle = 1$. Поскольку сумма парциальных токов с совпадающими верхними индексами (указывающими степень однородного полинома) есть тоже парциальный ток с тем же верхним индексом, то формуле (62.1) можно придать более компактный вид

$$\mathbf{i}_L = \sum_{\nu=1}^{L} \mathbf{i}^{(\nu)}. \tag{62.2}$$

Таким образом, поверхностная плотность тока $\mathbf{i}_L$ может быть представлена как геометрическая сумма парциальных поверхностных токов $\mathbf{i}^{(\nu)}$. Если такое разложение выполнено, то ток $\mathbf{i}_L$ автоматически удовлетворяет условию стационарности $\operatorname{div}(\mathbf{i}_L/p) = 0$ и граничному условию $(\mathbf{i}_L\mathbf{n})\big|_S = 0$ на поверхности эллипсоида.

В силу принципа суперпозиции из формулы (62.2) следует, что наружный потенциал $\widetilde{\Psi}_L$ магнитного поля гомеоида равен

$$\widetilde{\Psi}_L = \sum_{\nu=1}^{L} \widetilde{\Psi}^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{L} \mathfrak{m}_{j_1 \ldots j_\nu} \psi_{j_1 \ldots j_\nu} = \sum_{\nu=1}^{L} \sum_{i+j+k=\nu} \frac{\nu!}{i!\, j!\, k!} \mathfrak{m}_{ijk} \psi_{ijk}\,. \tag{62.3}$$

Мы получили «магнитный» аналог формулы (45.9), в котором суммирование, как и должно быть, начинается не с $\nu = 0$, а с $\nu = 1$.

Как и в § 45, нас интересуют формулы, выраженные через полные мультипольные моменты

$$\mathfrak{M}_{i_1 \ldots i_l} = \frac{1}{(l+1)\mathfrak{c}} \oint_S [\mathbf{r}'\mathbf{i}_L]_k \frac{\partial}{\partial x'_k} \theta_{i_1 \ldots i_l}(\mathbf{r}')\, dS', \quad (l = 1, 2, \ldots). \tag{62.4}$$

Формулы, связывающие парциальные магнитные мультипольные моменты поверхностных токов с полными моментами, мы найдем, как и в предыдущем параграфе, используя результаты, изложенные в п. 59.2. В согласии с этими результатами условные тензорные рекуррентные соотношения для магнитных моментов получаются из (45.10) заменой электрических моментов соответствующими магнитными и приравниванием нулю монопольных моментов. В итоге приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{m}_{j_1\ldots j_{2l+1}} \mathrel{\overset{\circ}{=}} \mathfrak{M}_{j_1\ldots j_{2l+1}} - (4l+1)!!\sum_{n=0}^{l-1}\frac{4n+3}{(2l+2n+3)!!}\times\\
&\times\langle\!\langle \mathfrak{m}_{j_1\ldots j_{2n+1}}\varkappa_{j_{2n+2}j_{2n+3}}\ldots\varkappa_{j_{2l}j_{2l+1}}\rangle\!\rangle \qquad (l=0,1,2,\ldots),\\
&\mathfrak{m}_{j_1\ldots j_{2l}} \mathrel{\overset{\circ}{=}} \mathfrak{M}_{j_1\ldots j_{2l}} - (4l-1)!!\sum_{n=1}^{l-1}\frac{4n+1}{(2l+2n+1)!!}\times\\
&\times\langle\!\langle \mathfrak{m}_{j_1\ldots j_{2n}}\varkappa_{j_{2n+1}j_{2n+2}}\ldots\varkappa_{j_{2l-1}j_{2l}}\rangle\!\rangle \qquad (l=1,2,3,\ldots).
\end{aligned} \tag{62.5}$$

Здесь

$$\varkappa_{ij} \equiv a_{(i)}a_{(j)}\delta_{ij} = \begin{cases} a_{(i)}^2 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}. \tag{62.6}$$

Отметим, что (62.5) — условные равенства, результаты использования которых предназначены только для подстановки в (62.3).

Приведем простейшие частные соотношения, последовательно вытекающие из формул (62.5).

$$\mathfrak{m}_i = \mathfrak{M}_i, \tag{62.7}$$

$$\mathfrak{m}_{ij} \mathrel{\overset{\circ}{=}} \mathfrak{M}_{ij}, \tag{62.8}$$

$$\mathfrak{m}_{ijk} \mathrel{\overset{\circ}{=}} \mathfrak{M}_{ijk} - 3\left(\mathfrak{m}_i\, a_{(j)}a_{(k)}\delta_{jk} + \mathfrak{m}_j\, a_{(i)}a_{(k)}\delta_{ik} + \mathfrak{m}_k\, a_{(i)}a_{(j)}\delta_{ij}\right), \tag{62.9}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}_{ijkl} \mathrel{\overset{\circ}{=}} \mathfrak{M}_{ijkl} - 5\big[&\mathfrak{m}_{ij}\, a_{(k)}a_{(l)}\delta_{kl} + \mathfrak{m}_{ik}\, a_{(j)}a_{(l)}\delta_{jl} + \mathfrak{m}_{il}\, a_{(j)}a_{(k)}\delta_{jk}+\\
&+\mathfrak{m}_{jk}\, a_{(i)}a_{(l)}\delta_{il} + \mathfrak{m}_{jl}\, a_{(i)}a_{(k)}\delta_{ik} + \mathfrak{m}_{kl}\, a_{(i)}a_{(j)}\delta_{ij}\big].
\end{aligned} \tag{62.10}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}_{ijklm} \mathrel{\overset{\circ}{=}} \mathfrak{M}_{ijklm} - 27\big[&\mathfrak{m}_i\, a_{(j)}a_{(k)}a_{(l)}a_{(m)}\left(\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{lk}\right) +\\
&+\mathfrak{m}_i\, a_{(j)}a_{(k)}a_{(l)}a_{(m)}\left(\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{lk}\right) +\\
&+\mathfrak{m}_j\, a_{(i)}a_{(k)}a_{(l)}a_{(m)}\left(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}\right) +\\
&+\mathfrak{m}_k\, a_{(i)}a_{(j)}a_{(l)}a_{(m)}\left(\delta_{ij}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}\right) +\\
&+\mathfrak{m}_m\, a_{(i)}a_{(j)}a_{(k)}a_{(l)}\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)\big] -\\
-7\big(&\mathfrak{m}_{ijk}\, a_{(l)}a_{(m)}\delta_{lm} + \mathfrak{m}_{ijl}\, a_{(k)}a_{(m)}\delta_{km} + \mathfrak{m}_{ikl}\, a_{(j)}a_{(m)}\delta_{jm}+\\
&+\mathfrak{m}_{jkl}\, a_{(i)}a_{(m)}\delta_{im} + \mathfrak{m}_{ijm}\, a_{(k)}a_{(l)}\delta_{kl} + \mathfrak{m}_{jkm}\, a_{(i)}a_{(l)}\delta_{il} + \mathfrak{m}_{ikm}\, a_{(j)}a_{(l)}\delta_{jl}+\\
&+\mathfrak{m}_{jlm}\, a_{(i)}a_{(k)}\delta_{ik} + \mathfrak{m}_{ilm}\, a_{(j)}a_{(k)}\delta_{jk} + \mathfrak{m}_{klm}\, a_{(i)}a_{(j)}\delta_{ij}\big).
\end{aligned} \tag{62.11}$$

Во избежание ошибок замену в правых частях соотношений (62.5) величин $\mathfrak{m}_{j_1\ldots j_\nu}$ полными мультипольными моментами $\mathfrak{M}_{j_1\ldots j_\nu}$ следует совершать лишь после выполнения операции симметризации $\langle\!\langle\ldots\rangle\!\rangle$.

Получающиеся из формул (62.7)–(62.11) выражения декартовых компонент тензора $\mathfrak{m}_{j_1\ldots j_\nu}$ через компоненты полных мультипольных моментов $\mathfrak{M}_{j_1\ldots j_\nu}$ имеют следующий вид:

$$\mathfrak{m}_x = \mathfrak{M}_x; \tag{62.12}$$

$$\mathfrak{m}_{xx} \mathrel{\overset{\circ}{=}} \mathfrak{M}_{xx}, \qquad \mathfrak{m}_{xy} = \mathfrak{M}_{xy}; \tag{62.13}$$

$$\mathfrak{m}_{xxx} \stackrel{\circ}{=} \mathfrak{M}_{xxx} - 9\,\mathfrak{M}_x a^2, \quad \mathfrak{m}_{xxy} \stackrel{\circ}{=} \mathfrak{M}_{xxy} - 3\,\mathfrak{M}_y a^2, \quad \mathfrak{m}_{xyz} = \mathfrak{M}_{xyz}; \tag{62.14}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{m}_{xxxx} &\stackrel{\circ}{=} \mathfrak{M}_{xxxx} - 30\,\mathfrak{M}_{xx} a^2,\\
\mathfrak{m}_{xxxy} &\stackrel{\circ}{=} \mathfrak{M}_{xxxy} - 15\,\mathfrak{M}_{xy} a^2,\\
\mathfrak{m}_{xxyy} &\stackrel{\circ}{=} \mathfrak{M}_{xxyy} - 5\,\left(\mathfrak{M}_{xx} b^2 + \mathfrak{M}_{yy} a^2\right),\\
\mathfrak{m}_{xyzz} &\stackrel{\circ}{=} \mathfrak{M}_{xyzz} - 5\,\mathfrak{M}_{xy} c^2;
\end{aligned}\right\} \tag{62.15}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{m}_{xxxxx} &\stackrel{\circ}{=} \mathfrak{M}_{xxxxx} - 70\,\mathfrak{M}_{xxx} a^2 + 225\,\mathfrak{M}_x a^4,\\
\mathfrak{m}_{xxxxy} &\stackrel{\circ}{=} \mathfrak{M}_{xxxxy} - 42\,\mathfrak{M}_{xxy} a^2 + 45\,\mathfrak{M}_y a^4,\\
\mathfrak{m}_{xxxyy} &\stackrel{\circ}{=} \mathfrak{M}_{xxxyy} - 7\,\mathfrak{M}_{xxx} b^2 - 21\,\mathfrak{M}_{xyy} a^2 + 45\,\mathfrak{M}_x a^2 b^2,\\
\mathfrak{m}_{xxxyz} &\stackrel{\circ}{=} \mathfrak{M}_{xxxyz} - 21\,\mathfrak{M}_{xyz} a^2,\\
\mathfrak{m}_{xxyyz} &\stackrel{\circ}{=} \mathfrak{M}_{xxyyz} - 7\,\mathfrak{M}_{xxz} b^2 - 7\,\mathfrak{M}_{yyz} a^2 + 15\,Q_z a^2 b^2.
\end{aligned}\right\} \tag{62.16}$$

Циклическая или взаимная перестановки декартовых координат в формулах (62.12)–(47.16) дают недостающие выражения.

§ 63. Мультипольное представление объемных магнитных потенциалов $\widetilde{\Phi}_L$

Мы переходим к рассмотрению случая, когда источником магнитного поля является ток плотности

$$\mathbf{j}_L = \mathbf{P}^{(L)}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right), \tag{63.1}$$

циркулирующий в объеме эллипсоида

$$\left\langle x^2/a^2 \right\rangle = 1. \tag{63.2}$$

Здесь символом $\mathbf{P}^{(L)}(x/a, y/b, z/c)$ обозначен вектор, каждая декартова компонента которого является произвольным полиномом L-ой степени своих аргументов. При этом, как обычно, предполагается, что ток $\mathbf{j}_L$ удовлетворяет условию стационарности

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_L = 0$$

и граничному условию

$$(\mathbf{j}_L \mathbf{n})\Big|_S = 0 \tag{63.3}$$

на поверхности эллипсоида.

Току (63.1) соответствует векторный потенциал

$$\mathbf{A}_L(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathfrak{c}} \int\limits_V \frac{\mathbf{j}_L(\mathbf{r}')}{R}\, dV'. \tag{63.4}$$

Как и в § 47, будем считать, что эллипсоид (63.2) бесчисленной системой софокусных с ним эллипсоидальных поверхностей [1]

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2+\overline{\xi}}+\frac{\overline{y}^2}{b^2+\overline{\xi}}+\frac{\overline{z}^2}{c^2+\overline{\xi}}=1, \qquad \text{где} \quad \max\{-a^2,-b^2,-c^2\}<\overline{\xi}<0,$$

разбит на бесконечно тонкие эллипсоидальные слои (фокалоиды). В результате векторный потенциал (63.4) предстает как суперпозиция векторных потенциалов составляющих его фокалоидов, а вычисление объемного интеграла сводится к интегрированию сначала по какой-либо из софокусных поверхностей, характеризуемой эллипсоидальной координатой $\overline{\xi}$, а затем по самой координате $\overline{\xi}$. При этом элемент объема в (63.4) преобразуется, как в § 47:

$$dV = d\overline{p}\, d\overline{S} = \frac{1}{2\,\overline{p}}\; d\overline{\xi}\, d\overline{S} = \frac{1}{2}\; d\overline{\xi}\; \langle \overline{x}^2/\overline{a}^4\rangle\; \overline{p}\; d\overline{S}. \tag{63.5}$$

Формула (63.5) поясняет, почему интегрирование по поверхности фокалоида $\overline{\xi}=\mathrm{const}$ можно заменить интегрированием по поверхности гомеоида, повысив при этом на две единицы степень полиномиальности токов.

Представим себе, что ток (63.1), создающий магнитное поле, является током намагничения. В этом случае, в согласии с первой из формул (59.12)

$$\mathbf{j}_L = \mathfrak{c}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{I},$$

каждая декартова компонента вектора намагниченности $\mathfrak{I}$ является полиномом $(L+1)$-ой степени. Эту же намагниченность допустимо трактовать и в терминах пуассоновых связанных магнитных зарядов плотности

$$\tilde{\varrho}_L = -\,\mathrm{div}\,\mathfrak{I},$$

представляющей собой полином L-ой степени. Последняя трактовка хороша тем, что к ней применимо использование мультипольного представления (47.11) для внешнего потенциала обычных зарядов с заменой симметричных «электрических» тензоров $q_{j_1\ldots j_\nu}$ соответствующими симметричными «магнитными» псевдотензорами $\mathfrak{m}_{j_1\ldots j_\nu}$ и с запретом для ν принимать значение, равное нулю.

Таким образом, мультипольное представление псевдоскалярного магнитного потенциала $\widetilde{\Phi}_L$ обретает вид

$$\widetilde{\Phi}_L = \sum_{\nu=1}^{L+2} \mathfrak{m}_{j_1\ldots j_\nu}\, \psi_{j_1\ldots j_\nu}\,, \tag{63.6}$$

[1] Горизонтальной чертой сверху будем отмечать координаты $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, $\overline{\xi}$ точки интегрирования, а также величины $\overline{p}$, $\overline{\mathbf{P}}_L$, $d\overline{S}$, $\overline{a}=\sqrt{a^2+\overline{\xi}}$, $\overline{b}=\sqrt{b^2+\overline{\xi}}$, $\overline{c}=\sqrt{c^2+\overline{\xi}}$, относящиеся к поверхности $\overline{\xi}=\mathrm{const}$.

где, как следствие формул (47.12), имеют место рекуррентные условные равенства

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{m}_{j_1\ldots j_{2l+1}} \overset{\circ}{=} \mathfrak{M}_{j_1\ldots j_{2l+1}} - (4l+1)!!\sum_{n=0}^{l-1}\frac{4n+3}{(2l+2n+3)!!}\times\\
&\times\langle\!\langle \mathfrak{m}_{j_1\ldots j_{2n+1}}\varkappa_{j_{2n+2}j_{2n+3}}\ldots\varkappa_{j_{2l}j_{2l+1}}\rangle\!\rangle \qquad (l=0,1,2,\ldots),\\
&\mathfrak{m}_{j_1\ldots j_{2l}} \overset{\circ}{=} \mathfrak{M}_{j_1\ldots j_{2l}} - (4l-1)!!\sum_{n=1}^{l-1}\frac{4n+1}{(2l+2n+1)!!}\times\\
&\times\langle\!\langle \mathfrak{m}_{j_1\ldots j_{2n}}\varkappa_{j_{2n+1}j_{2n+2}}\ldots\varkappa_{j_{2l-1}j_{2l}}\rangle\!\rangle \qquad (l=1,2,3,\ldots).
\end{aligned} \tag{63.7}$$

Здесь

$$\varkappa_{ij} \equiv a_{(i)}a_{(j)}\delta_{ij} = \begin{cases} a_{(i)}^2, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

Поскольку условные равенства (63.7) полностью совпадают с (62.5), то вытекающие из (63.7) соотношения совпадают с (62.7)–(62.16) и поэтому здесь не дублируются.

Вспомним теперь, что потенциал (63.6) — это потенциал эллипсоида, намагниченность которого можно связывать не только с пуассоновыми магнитными зарядами плотности $\tilde{\varrho}_L$, но и с амперовыми молекулярными токами плотности $\mathbf{j}_L$. Учитывая же, что формула (63.6) — это *мультипольное* представление потенциала (а мультипольные моменты не зависят от того молекулярными токами или токами проводимости они обусловлены), можно утверждать, что найденное представление (63.6) — это и есть наружный потенциал эллипсоида, обусловленный токами (63.1).

Часть III

ДИЭЛЕКТРИК В ПОЛЕ. АДЕКВАТНЫЕ ИСТОЧНИКИ

Глава 10
Эллипсоид в электростатическом поле

§ 64. Однородный диэлектрический эллипсоид

64.1. Интегральные уравнения электростатики

Трехмерная задача о диэлектрическом теле в неоднородном статическом поле имеет простое аналитическое решение лишь в вырожденном случае шара, когда каждой сферической гармонике потенциала внешнего поля отвечает поляризационный потенциал с той же угловой зависимостью. Однако из-за сильного вырождения это решение не может описать ряд характерных эффектов, обусловленных нешаровой геометрией реальных тел. Достаточно емкой моделью является трехосный эллипсоид, для которого хорошо известно (см., например, [251,484]) решение задачи в частном случае однородного внешнего поля. Само существование и вид этого решения обусловлены тем, что кулонов (ньютонов) потенциал однородно заряженного эллипсоидального объема описывается внутри этого объема квадратичной функцией декартовых координат. Отсюда следует, что потенциал однородно поляризованного эллипсоида есть линейная функция координат, так что поляризационное поле однородно внутри эллипсоида. Поэтому подбором коэффициентов можно удовлетворить материальным уравнениям во всех точках эллипсоидального тела, что и доставляет решение задачи.

В общем случае неоднородного внешнего поля его потенциал в области, занимаемой телом, можно разложить в ряд Тейлора по степеням декартовых координат. Но, как показал Ферререс [99] (см. § 14 данной монографии), полиномиальной (степени n) плотности заряда в эллипсоидальной области соответствует внутри этой области полиномиальный же потенциал (степени $n+2$). Следовательно, полиномиальному распределению неоднородной поляризации внутри эллипсоида отвечает полином потенциала[1] (со степенью на единицу больше), так что решение интересующей нас задачи снова

[1] В соответствии с (64.3), (64.5) потенциал поляризованного диэлектрического тела дается формулой

$$\Phi_{\sigma'} = \oint \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\mathbf{n}'}{R}\,dS' = -\operatorname{div}\int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R}\,dV'\,.$$

сводится к алгебраической процедуре подбора коэффициентов для удовлетворения материальным уравнениям.

Решение задачи об эллипсоиде в неоднородном поле имеет не только электростатическое (магнитостатическое) значение[1], но является ключевым для ряда актуальных проблем, связанных с экспериментом. Сюда относятся, например, дифракция волноводных или резонаторных электромагнитных полей на малых телах (или отверстиях), расположенных в узловых областях поля, высокочастотное удержание и нагрев диамагнитных (или металлических) тел в магнитном поле, исследование собственных квазистатических колебаний плазменных сгустков.

Имея в виду эти приложения, некоторые из которых обсуждаются в четвертой части, мы рассмотрим здесь, следуя работам [494, 495, 520], простейшие задачи с однородным, линейным и квадратичным внешним полем.

Если не выделять поляризационный потенциал, а искать сразу потенциал полного поля в присутствии диэлектрического тела, то указанную выше алгебраическую процедуру подбора коэффициентов проще всего производить, исходя из интегральных уравнений, возникающих при полумикроскопической записи законов электростатики.

Пусть

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \int \frac{\varrho_0(\mathbf{r}')}{R}\, dV' \tag{64.1}$$

заданный внешний (вакуумный) потенциал поля в отсутствие диэлектрического тела, а $\Phi(\mathbf{r})$ — потенциал полного поля. Вектор поляризации внутри тела

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\,\mathbf{E} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon}\,\mathbf{D}\,, \qquad \mathbf{E} = -\nabla\Phi\,, \tag{64.2}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость тела, которую будем считать не зависящей от координат. Тогда поляризации $\mathbf{P}$ соответствуют объемные (плотности $\varrho\,'$) и поверхностные (плотности $\sigma\,'$) заряды

$$\varrho\,' = -\operatorname{div}\mathbf{P} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\,\varrho_0\,, \qquad \sigma\,' = P_n\,, \tag{64.3}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль на границе тела. Очевидно,

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_{\varrho\,'} + \Phi_{\sigma\,'}\,, \tag{64.4}$$

$$\Phi_{\varrho\,'}(\mathbf{r}) = \int \frac{\varrho\,'(\mathbf{r}')}{R}\, dV'\,,$$

$$\Phi_{\sigma\,'}(\mathbf{r}) = \oint \frac{\sigma\,'(\mathbf{r}')}{R}\, dS' = -\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\oint \frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial n'}\,\frac{dS'}{R} = -\frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon}\oint \frac{\partial\Phi^{(e)}}{\partial n'}\,\frac{dS'}{R}\,, \tag{64.5}$$

где, как обычно, индексы i и e обозначают внутреннюю и внешнюю области.

[1] Если под Φ понимать потенциал скоростей, то случаю $\varepsilon = 0$ соответствует задача об обтекании твердого тела неоднородным потоком идеальной жидкости.

Если все источники ϱ_0 внешнего поля находятся вне тела, то $\varrho' = 0$, $\Phi_{\varrho'} = 0$ и из (64.4) следует

$$\Phi(\mathbf{r}) + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \oint \frac{\partial \Phi^{(i)}(\mathbf{r}')}{\partial n'} \frac{dS'}{R} = \Phi_0(\mathbf{r}) . \tag{64.6}$$

Если же все источники ϱ_0 находятся внутри тела, то $\Phi_{\varrho'} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \Phi_0$ и

$$\Phi(\mathbf{r}) + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \oint \frac{\partial \Phi^{(i)}(\mathbf{r}')}{\partial n'} \frac{dS'}{R} = \frac{1}{\varepsilon} \Phi_0(\mathbf{r}) . \tag{64.7}$$

Для точек $\mathbf{r}$, принадлежащих объему тела, когда $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi^{(i)}(\mathbf{r})$, уравнения (64.6) и (64.7) можно использовать для нахождения потенциала $\Phi^{(i)}(\mathbf{r})$ полного поля. Поэтому (64.6) и (64.7) мы будем для краткости называть *интегральными уравнениями электростатики.* Из них предельным переходом (см. [273, 378]) можно получить «настоящие» интегральные уравнения (точки наблюдения и интегрирования принадлежат одной и той же области), но последние нам не понадобятся. Для точек наблюдения, лежащих вне тела, формулы (64.6) и (64.7) превращаются в соотношения, выражающие потенциал $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi^{(e)}(\mathbf{r})$ полного поля или потенциал

$$\Phi_{\text{ind}}(\mathbf{r}) = \Phi^{(e)}(\mathbf{r}) - \Phi_0(\mathbf{r})$$

индуцированного поля через найденное значение нормальной компоненты полного электрического поля на границе тела.

Входящие в уравнения (64.6) и (64.7) поверхностные интегралы вида

$$J(f) \equiv \frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial f}{\partial n'} \frac{dS'}{R} \tag{64.8}$$

в интересующем нас случае эллипсоида и степенны́х $f(x', y', z')$ фактически рассмотрены в § 21. Для решения задач с линейными, квадратичными и кубическими потенциалами нам понадобятся следующие формулы[1], относящиеся к внутренним точкам эллипсоида:

$$J(x') = x\, M_{100} , \qquad J(x'y') = (a^2 + b^2)\, xy\, M_{110} ,$$

$$\begin{aligned} J({x'}^2) = M_{000} - a^2 M_{100} - (M_{100} - a^2 M_{200})x^2 - \\ - (M_{010} - a^2 M_{110})y^2 - (M_{001} - a^2 M_{101})z^2 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J({x'}^3) = \frac{3}{2}\, a^2 x [3M_{100} - a^2 M_{200} - \frac{1}{3}(3M_{200} - a^2 M_{300})x^2 - \\ - (3M_{110} - a^2 M_{210})y^2 - (3M_{101} - a^2 M_{201})z^2] , \end{aligned} \tag{64.9}$$

$$\begin{aligned} J(x'{y'}^2) = \frac{2a^2 + b^2}{2}\, x [M_{100} - b^2 M_{110} - \frac{1}{3}(M_{200} - b^2 M_{210})x^2 - \\ - (M_{110} - b^2 M_{120})y^2 - (M_{101} - b^2 M_{111})z^2] , \end{aligned}$$

[1] Здесь, как и раньше, из группы соотношений, получающихся друг из друга циклической перестановкой или заменой координат, мы будем выписывать только одно.

$$J(x'y'z') = \langle a^2b^2\rangle \, xyz \, M_{111} \, .$$

Заметим, что максимальный вес факторов M_{lmn}, входящих в формулы для $J(f)$, совпадает со степенью полинома $f(x', y', z')$. Для точек наблюдения снаружи эллипсоида интегралы $J(f)$ также описываются выражениями (64.9), в которых, однако, внутренние факторы M_{lmn} заменены на внешние $\mathscr{M}_{lmn}$.

64.2. Незаряженный эллипсоид в неоднородном поле

Здесь и в следующем подразделе мы будем считать, что все источники вакуумного поля Φ_0 находятся снаружи диэлектрического тела. Тогда Φ_0 гармонично во внутренней области, а Φ удовлетворяет в ней уравнению (64.6), которое можно переписать в виде

$$\frac{1}{\nu}\, J(\Phi^{(i)}) + \Phi^{(i)} = \Phi_0 \, , \qquad \nu = \frac{1}{\varepsilon - 1} \, . \tag{64.10}$$

64.21. Однородное вакуумное поле (линейный потенциал)

Рассмотрим сначала хорошо известный случай (см., например, [346,484]), когда внешнее поле однородно и равно $\mathbf{E}_0$. Внутри эллипсоида $\left\langle x^2/a^2 \right\rangle = 1$ потенциал вакуумного поля можно записать в виде

$$\Phi_0 = -\mathbf{E}_0\mathbf{r} = -\left\langle E_{0x}\, x\right\rangle \, . \tag{64.11}$$

Потенциал $\Phi^{(i)}$ полного поля внутри эллипсоида (2.1) будет, очевидно, иметь аналогичный вид

$$\Phi^{(i)} = \nu \left\langle \alpha_a\, x\right\rangle \, , \tag{64.12}$$

где множитель ν введен для упрощения последующих формул.

Подставляя $\Phi^{(i)}$ и Φ_0 в интегральное уравнение (64.10) и используя формулы (64.9), в результате приравнивания коэффициентов при одинаковых координатах мы получаем

$$\alpha_a = -\frac{E_{0x}}{\nu + M_{100}} \, . \tag{64.13}$$

Таким образом, однородное поле внутри эллипсоида дается выражением

$$E_x^{(i)} = -\nu\alpha_a = \frac{E_{0x}}{1 + (\varepsilon - 1)M_{100}} \tag{64.14}$$

и теми, что получаются из (64.14) после циклической перестановки.

Однородному полю соответствует однородная поляризация

$$P_x = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\, E_x^{(i)} \tag{64.15}$$

и поверхностный связанный заряд плотности

$$\sigma' = P_n = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\left\langle E_x^{(i)} \frac{x}{a^2}\right\rangle p = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\left\langle \frac{E_{0x}}{1 + (\varepsilon - 1)M_{100}} \frac{x}{a^2}\right\rangle p \, . \tag{64.16}$$

Поскольку отношение σ'/p есть линейная однородная гармоническая функция переменных x/a, y/b и z/c, то речь идет о парциальной поверхностной плотности связанного заряда. Создаваемый этим распределением заряда внешний парциальный потенциал (гомеоида) в соответствии с формулами (44.7) и (46.11) или (46.14) равен

$$\Phi_{\text{ind}} = \Phi^{(e)} - \Phi_0 = \langle q_x \psi_x \rangle = \frac{3}{abc} \langle q_x \mathscr{M}_{100}(\xi) \rangle , \tag{64.17}$$

где посредством $\mathbf{q} = \{q_x, q_y, q_z\}$ обозначен дипольный момент эллипсоида. При этом x-компонента момента с учетом (64.15) есть

$$q_x = VP_x = \frac{abc}{3} \frac{\varepsilon - 1}{1 + (\varepsilon - 1)M_{100}} E_{0x}. \tag{64.18}$$

64.22. Линейное вакуумное поле (квадратичный потенциал)

Запишем Φ_0 в виде

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \left\langle A_{200}\, x^2 \right\rangle + \langle A_{011}\, yz \rangle \ . \tag{64.19}$$

Из гармоничности потенциала Φ_0 следует, что $\langle A_{200} \rangle = 0$. Потенциал $\Phi^{(i)}$ полного поля внутри эллипсоида будет иметь ту же структуру[1]

$$\Phi^{(i)} = \nu \left(\frac{1}{2} \left\langle \alpha_{200}\, x^2 \right\rangle + \langle \alpha_{011}\, yz \rangle \right) . \tag{64.20}$$

Подставляя $\Phi^{(i)}$ и Φ_0 в интегральное уравнение (64.10) и используя формулы (64.9), мы получим после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях координат отдельные уравнения для коэффициентов α_{011}, α_{101}, α_{110}

$$\left[\left(b^2 + c^2 \right) M_{011} + \nu \right] \alpha_{011} = A_{011} \tag{64.21}$$

и систему уравнений для α_{200}, α_{020}, α_{002}

$$\left(a^2 M_{200} + \nu \right) \alpha_{200} + b^2 M_{110}\, \alpha_{020} + c^2 M_{101}\, \alpha_{002} = A_{200} \, . \tag{64.22}$$

Решение системы (64.22) имеет вид

$$\alpha_{200} = \frac{1}{\Delta(\nu)} \left\{ \left[\nu + 1 - \left(b^2 + c^2 \right) M_{011} \right] A_{200} + c^2 M_{101} A_{020} + b^2 M_{110} A_{002} \right\} , \tag{64.23}$$

$$\Delta(\nu) = (\nu+1)^2 - (\nu+1) \left\langle \left(a^2 + b^2 \right) M_{110} \right\rangle + \left\langle a^2 b^2 \right\rangle \langle M_{011} M_{101} \rangle \ . \tag{64.24}$$

Для потенциала индуцированного поля снаружи эллипсоида

$$\Phi_{\text{ind}} = \Phi^{(e)} - \Phi_0 = -\frac{1}{\nu} J(\Phi^{(i)}) \tag{64.25}$$

[1] Строго говоря, в круглых скобках выражения (64.20) опущено постоянное слагаемое α_{000}, равное, как легко показать,

$$\alpha_{000} = \frac{1}{6\nu} \left\langle a^2 A_{200} \right\rangle - \frac{1}{6} \left\langle a^2 \alpha_{200} \right\rangle$$

и обращающееся в нуль в случае шара.

в результате подстановки (64.20) в (64.25) и интегрирования с помощью формул (64.9) с факторами $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$ вместо M_{lmn} получим после упрощений

$$\Phi_{\text{ind}}(\mathbf{r}) = -\left\langle \alpha_{011}\left(b^2+c^2\right)\mathscr{M}_{011}\, yz\right\rangle + \\ + \frac{1}{2}\left\langle a^2\alpha_{200}\left(\mathscr{M}_{100} - \mathscr{M}_{200}x^2 - \mathscr{M}_{110}y^2 - \mathscr{M}_{101}z^2\right)\right\rangle . \quad (64.26)$$

Формулы (64.20), (64.21), (64.23), (64.24), (64.26) и дают решение задачи о диэлектрическом эллипсоиде во внешнем поле с квадратичным потенциалом. Заметим, что из соотношений, связывающих потенциальные факторы, следует, как и должно быть, что при выполнении $\langle A_{200}\rangle = 0$ выполняется и $\langle \alpha_{200}\rangle = 0$.

Иметь точные выражения для поля или потенциала вне тела требуется далеко не всегда. В большинстве приложений поле снаружи тела надо знать или непосредственно на границе (например, при вычислении тензора натяжений), или на больших расстояниях от тела. В первом случае компоненты вектора $\mathbf{E}$ (или в магнитостатическом варианте — вектора $\mathbf{H}$) находятся сразу из граничных условий. Во втором случае достаточно найти мультипольные моменты, значения которых вычисляются по распределению поверхностных σ' и объемных $\varrho_0 + \varrho' = (1/\varepsilon)\varrho_0$ зарядов (если они есть).

В рассматриваемом нами случае незаряженного эллипсоида отлична от нуля только поверхностная плотность поляризационных зарядов, равная

$$\sigma' = P_n = -\frac{1}{4\pi\nu}\,\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial n} . \quad (64.27)$$

В случае квадратичного Φ_0, а, значит, и $\Phi^{(i)}$, отличны от нуля только компоненты квадрупольного момента

$$Q_{ij} = \oint \left(3x_ix_j - r^2\delta_{ij}\right)\sigma' dS \quad (64.28)$$

и всех высших мультипольных моментов той же четности. Выполняя интегрирование (64.28), для компонент парциального квадрупольного момента получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} q_{xx} &= -\tfrac{2}{15}\, abc\left(3a^2\alpha_{200} - \left\langle a^2\alpha_{200}\right\rangle\right) , \\ q_{xy} &= -\tfrac{1}{5}\, abc\left(a^2+b^2\right)\alpha_{110} . \end{aligned} \quad (64.29)$$

В соответствии с (45.9), (47.17) и приведенными в таблице § 42 выражениями для компонент тензор-потенциала гомеоида (второго ранга), рассматриваемому случаю отвечает точная формула для Φ_{ind} имеющая вид

$$\Phi_{\text{ind}} = q_{ij}\psi_{ij} = \frac{5}{4\,\bar a\bar b\bar c}\left\{4\left\langle q_{xy}\,\mathscr{M}_{110}(\xi)\,xy\right\rangle - \left\langle q_{xx}\left[\mathscr{M}_{100}(\xi) - \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. -\mathscr{M}_{200}(\xi)\,x^2 - \mathscr{M}_{110}(\xi)\,y^2 - \mathscr{M}_{101}(\xi)\,z^2\right]\right\rangle\right\} . \quad (64.30)$$

Можно проверить, что формулы (64.26) и (64.30) совпадают.

64.23. Квадратичное вакуумное поле (кубический потенциал)

Удовлетворяющий уравнению Лапласа кубический потенциал вакуумного поля запишем в виде

$$\Phi_0 = \left\langle -\frac{1}{3}\left(A_{120} + A_{102}\right) x^3 + A_{120} x y^2 + A_{102} x z^2 \right\rangle + A_{111} x y z\,. \qquad (64.31)$$

В выражении для потенциала полного поля внутри эллипсоида могут быть наряду с кубическими и линейные члены, так что

$$\Phi^{(i)} = \nu \left[\left\langle -\frac{1}{3}\left(\alpha_{120} + \alpha_{102}\right) x^3 + \alpha_{120} x y^2 + \alpha_{102} x z^2 \right\rangle + \right. \\ \left. + \alpha_{111} x y z + \langle \alpha_{100} x \rangle \right]. \qquad (64.32)$$

Подстановка выражений (64.31) и (64.32) в (64.10) дает

$$\alpha_{111} = A_{111} \big/ \left[\left\langle a^2 b^2 \right\rangle M_{111} + \nu\right], \qquad (64.33)$$

систему уравнений для α_{120} и α_{102}

$$\left.\begin{aligned} (2\nu + l_{120})\,\alpha_{120} + m_{102}\,\alpha_{102} &= 2A_{120}, \\ m_{120}\,\alpha_{120} + (2\nu + l_{102})\,\alpha_{102} &= 2A_{102} \end{aligned}\right\} \qquad (64.34)$$

и соотношение, связывающее α_{100} с α_{120} и α_{102},

$$(\nu + M_{100})\,\alpha_{100} = -\frac{1}{2}\left(n_{120}\,\alpha_{120} + n_{102}\,\alpha_{102}\right). \qquad (64.35)$$

Здесь

$$\begin{aligned} l_{120} &= \left(a^2 - b^2\right) M_{110} - a^4 M_{210} + b^2\left(2a^2 + b^2\right) M_{120}\,, \\ m_{120} &= \left(a^2 - b^2\right) M_{101} - a^4 M_{201} + b^2\left(2a^2 + b^2\right) M_{111}\,, \\ n_{120} &= a^2 - \left(a^2 - b^2\right) M_{100} - \left(a^2 + b^2\right)^2 M_{110} - a^4 M_{101}. \end{aligned} \qquad (64.36)$$

Отметим сразу, что в случае шара $m_{120} = m_{102} = 0$, $n_{120} = n_{102} = 0$, $l_{120} = l_{102} = 6/7$, $\left\langle a^2 b^2 \right\rangle M_{111} = 3/7$ и

$$\Phi^{(i)} = \frac{\nu}{\nu + 3/7}\,\Phi_0 = \frac{7}{3\varepsilon + 4}\,\Phi_0\,. \qquad (64.37)$$

Но в общем случае эллипсоида n_{120} и n_{102} отличны от нуля и, следовательно, квадратичное внешнее поле (кубический потенциал Φ_0) наводит внутри тела не только квадратичное, но и однородное поле.

Из системы уравнений (64.34), определитель которой

$$\triangle_{100}(\nu) = 4\nu^2 + 2\nu(l_{120} + l_{102}) + (l_{120} l_{102} - m_{120} m_{102})\,, \qquad (64.38)$$

получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{120} &= \frac{2}{\triangle_{100}(\nu)}\left[(2\nu + l_{102}) A_{120} - m_{102} A_{102}\right], \\ \alpha_{102} &= \frac{2}{\triangle_{100}(\nu)}\left[(2\nu + l_{120}) A_{102} - m_{120} A_{120}\right]. \end{aligned} \qquad (64.39)$$

Формулы (64.32), (64.33), (64.39) вместе с (64.35) и составляют решение внутренней задачи об эллипсоиде в поле с кубическим потенциалом.

Для кубического Φ_0 из формулы (64.32) следует, что все $q_{ij} = 0$, но отличен от нуля[1]

$$\tilde{q}_x = \frac{abc}{15}\,\left[\left(a^2 - b^2\right)\alpha_{120} + \left(a^2 - c^2\right)\alpha_{102} - 5\alpha_{100}\right]. \tag{64.40}$$

В Приложении Е показано, что выражение (64.40) допускает существенное упрощение, приобретая вид

$$\tilde{q}_x = \frac{1}{15}\,\frac{abc}{\nu + M_{100}}\,\left[\left(a^2 - b^2\right)A_{120} + \left(a^2 - c^2\right)A_{102}\right]. \tag{64.41}$$

Что касается октупольного момента, вычисляемого в соответствии с (35.6), (34.1) по общей формуле

$$Q_{ijk} = 3\oint\left[5x_ix_jx_k - r^2\left(x_i\delta_{jk} + x_j\delta_{ki} + x_k\delta_{ij}\right)\right]\sigma' dS,$$

то он дается выражениями[2]

$$\left.\begin{aligned} Q_{xyz} &= -\frac{abc}{7}\,\left\langle a^2b^2\right\rangle\alpha_{111}, \\ Q_{xyy} &= -\frac{abc}{35}\,\Big\{\left(9a^4 + 9a^2b^2 + 12b^4 + a^2c^2 - b^2c^2\right)\alpha_{120} + \\ &+ \left(a^2 - c^2\right)\left(9a^2 + 3c^2 - 4b^2\right)\alpha_{102} - 7\left(3a^2 + c^2 - 4b^2\right)\alpha_{100}\Big\}. \end{aligned}\right\} \tag{64.42}$$

Выражение для Q_{xzz} получается из последней формулы перестановкой $b \leftrightarrow c$, $\alpha_{120} \leftrightarrow \alpha_{102}$, а компонента Q_{xxx} находится из соотношения $Q_{xxx} + Q_{xyy} + Q_{xzz} = 0$, являющегося следствием общего определения октупольного тензора.

Для поля вдали от тела октупольные члены дают малые поправки, которыми в первом приближении можно пренебречь. Учет этих членов необходим только в вырожденном случае шара, когда $\widetilde{\mathbf{q}} = 0$ и октуполь является первым отличным от нуля мультипольным моментом. В этом случае $Q_{xyz} = -\frac{3}{7}\,a^7\alpha_{111}$, $Q_{xyy} = -\frac{6}{7}\,a^7\alpha_{120}$, $Q_{xzz} = -\frac{6}{7}\,a^7\alpha_{102}$.

Таким образом, при вырождении эллипсоида, находящегося во внешнем поле с кубическим потенциалом Φ_0, в шар вторичное поле вдали от тела резко уменьшается. В частности, при решении волновых задач о дифракции на малом теле, расположенном в узле[3] внешнего поля, вторичное рассеянное поле для шара по порядку величины в $(kL)^2$ раз меньше (k — волновое

[1] Дипольный парциальный момент, возникающий в квадратичном поле, будем — в отличие от парциального момента (64.18), связанного с однородным внешним полем, — отмечать тильдой.

[2] Октупольный момент создается не только кубическими, но и линейными, как видно из (64.42), членами потенциала (64.32), т. е. не является парциальным. Поэтому и соответственно обозначен.

[3] Имеется в виду квадратичный по полю узел, как, например, поле в окрестности оси круглой трубы, вдоль которой распространяется волна с вектором Герца, пропорциональным $J_3(\varkappa r)\cos 3\varphi$, где J_3 — функция Бесселя.

число, L — характерный размер тела), чем для эллипсоида. Поэтому в отличие от обычного рэлеевского рассеяния плоской или квазиплоской волны модель шара непригодна здесь даже для грубой оценки дифракционных эффектов (см. подробнее гл. 20).

Поскольку потенциалу (64.32) соответствует связанный поверхностный заряд (64.27), у которого отношение σ'/p есть кубический полином, то согласно (45.9), (47.22), (47.23) точная формула для индуцированного потенциала имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{ind}} &= \tilde{q}_i\psi_i + q_{ijk}\psi_{ijk} = \\ &= \langle \tilde{q}_x\psi_x\rangle + \left\langle \left(Q_{xxx} - 9\tilde{q}_x a^2\right)\psi_{xxx}\right\rangle + 3\left\langle \left(Q_{xxy} - 3\tilde{q}_y a^2\right)\psi_{xxy}\right\rangle + \\ &\qquad + 3\left\langle \left(Q_{xxz} - 3\tilde{q}_z a^2\right)\psi_{xxz}\right\rangle + 6Q_{xyz}\psi_{xyz}. \end{aligned} \tag{64.43}$$

Как известно (см., например, [450]), поле снаружи диэлектрика с $\varepsilon\to\infty$ совпадает с решением задачи о металлическом теле, а предельный переход $\varepsilon\to 0$ доставляет решение внешней задачи (после замены $\mathbf{E}\to\mathbf{H}$) об идеальном проводнике в магнитном поле. Обе эти задачи являются ключевыми для ряда проблем, в частности, для теории низкочастотной дифракции на металлических телах, где как раз основной интерес представляют первые отличные от нуля мультипольные моменты. Соответствующие формулы для тела, расположенного в узле поля, даются выражениями, приведенными в этом и предыдущем подразделах, если в них положить $\varepsilon=\infty$, т. е. $\nu=0$ (электрическое внешнее поле), или $\varepsilon=0$, т. е. $\nu=-1$ (магнитное внешнее поле).

64.3. Резонансные частоты плазменного эллипсоида

Полученные в подразделах 64.21–64.23 решения задачи о диэлектрическом эллипсоиде во внешнем поле позволяют сразу найти значения параметра $\nu = 1/(\varepsilon-1)$, при которых может существовать собственное поле в отсутствие внешних источников. Этим значениям ν соответствуют собственные квазистатические колебания (резонансы) плазменного эллипсоида, у которого

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\,, \quad \text{т. е.} \quad -\nu = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \equiv \Omega^2\,, \tag{64.44}$$

Здесь ω_0 — ленгмюровская частота плазмы.

Для простейших колебаний дипольного типа (поляризация однородна) три собственные частоты даются формулами [488]

$$\Omega_a^2 = M_a\,. \tag{64.45}$$

Для квадрупольных колебаний (поляризация — линейная функция координат) собственных частот пять. Из них три описываются в соответствии с уравнениями (64.21) формулами

$$\Omega_a^2 = (b^2+c^2)M_{011}\,, \tag{64.46}$$

а еще две находятся из квадратного уравнения $\Delta = 0$, где Δ есть выражение (64.24). После некоторых преобразований, использующих соотношения

(3.6)–(3.10), формула для этих двух частот принимает вид

$$\Omega_{\pm}^2 = 1 - \frac{1}{2}\left\langle \left(a^2 + b^2\right) M_{110} \right\rangle \pm \frac{1}{3}\sqrt{\langle a^4\rangle - \langle a^2 b^2\rangle}\left(\langle M_{011}\rangle - \left\langle a^2\right\rangle M_{111}\right). \quad (64.47)$$

Наконец, октупольным колебаниям (квадратичная поляризация) соответствуют семь собственных частот, получаемых приравниванием нулю знаменателей в выражениях (64.33), (64.39).

Таким образом, мы имеем частоту

$$\Omega^2 = \left\langle a^2 b^2 \right\rangle M_{111} \quad (64.48)$$

и еще три пары частот, определяемые квадратными уравнениями $\Delta_a = 0$, $\Delta_b = 0$, $\Delta_c = 0$. Решение уравнения $\Delta_a = 0$ после довольно громоздких преобразований может быть — подобно (64.47) — записано в виде линейной формы от потенциальных факторов

$$\begin{aligned} 2\,\Omega_{a\pm}^2 = 1 + 6M_{100} + 2a^2\left(a^2 M_{300} - 5M_{200}\right) - \left\langle a^2 b^2\right\rangle M_{111} \pm \\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{4(b^2-c^2)^2 + (a^2-b^2)(a^2-c^2)}\,[M_{110} + \\ + M_{101} - \left(6a^2 + b^2 + c^2\right) M_{111} + 2a^4 M_{211}]\,. \end{aligned} \quad (64.49)$$

При вырождении трехосного эллипсоида в сфероид происходит частичное вырождение частот, и выражения (64.46)–(64.49) переходят в формулы для собственных частот сфероида, полученные в [488] из решения уравнения Лапласа в сфероидальных координатах.

64.4. Однородно заряженный диэлектрический эллипсоид

До сих пор мы все время считали, что источники внешнего поля находятся снаружи эллипсоида. Здесь мы рассмотрим простейшую задачу с внутренними источниками: диэлектрический эллипсоид, по объему которого равномерно распределен электрический заряд постоянной плотности ϱ_0. Вакуумный потенциал такого распределения дается формулой (10.15)

$$\Phi_0(\boldsymbol{r}) = 2\pi\varrho_0\left(M_{000} - M_{100}x^2 - M_{010}y^2 - M_{001}z^2\right). \quad (64.50)$$

Формула (64.50) относится к точкам внутри эллипсоидального объема, при переходе к наружным точкам все M_{lmn} должны заменяться на $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$. Для нахождения потенциала полного поля $\Phi^{(i)}$ внутри эллипсоида воспользуемся уравнением (64.7), переписав его в виде

$$\Phi^{(i)} + \frac{1}{\nu}\,J\left(\Phi^{(i)}\right) = \frac{\nu}{\nu+1}\,\Phi_0\,. \quad (64.51)$$

Полагая теперь

$$\Phi^{(i)} = 2\pi\varrho_0\left(\alpha_{000} - \nu\left\langle\alpha_{200}x^2\right\rangle\right), \quad (64.52)$$

мы получим после подстановки (64.52) в (64.51)

$$\alpha_{000} = M_{000}\left(\frac{\nu}{\nu+1} + \langle\alpha_{200}\rangle\right) - \left\langle a^2 M_{100}\,\alpha_{200}\right\rangle, \quad (64.53)$$

а для коэффициентов α_{200}, α_{020} и α_{002} систему линейных уравнений

$$\left(a^2 M_{200}+\nu\right)\alpha_{200}+b^2 M_{110}\,\alpha_{020}+c^2 M_{101}\,\alpha_{002}=M_{100}\,. \tag{64.54}$$

Решение системы (64.54) имеет вид[1]

$$\alpha_{200}=\frac{1}{\Delta(\nu)}\left[(\nu+1)M_{100}-\left(b^2+c^2\right)M_{011}M_{100}-b^2 M_{110}\left(1-M_{001}\right)-\right.$$
$$\left.-c^2 M_{101}\left(1-M_{010}\right)+\frac{b^2c^2}{\nu+1}\left\langle M_{011}M_{101}\right\rangle\right], \tag{64.55}$$

где $\Delta(\nu)$ дается формулой (64.24).

Воздействие оператором циклического сложения $\langle\ldots\rangle$ сперва на (64.54), а затем на результат перемножения (64.54) и a^2 приводит после упрощений с помощью формул (3.6) и (3.7) к соотношениям

$$\left\langle\alpha_{200}\right\rangle=\frac{1}{\nu+1}\,,\qquad \nu\left\langle a^2\alpha_{200}\right\rangle+3\left\langle a^2 M_{100}\,\alpha_{200}\right\rangle=M_{000}\,, \tag{64.56}$$

позволяющим представить выражение (64.53) для коэффициента α_{000} в более простой форме

$$\alpha_{000}=\frac{2}{3}\,M_{000}+\frac{\nu}{3}\left\langle a^2\alpha_{200}\right\rangle\,. \tag{64.57}$$

Зная α_{200}, мы можем, возвращаясь к уравнению (64.51), записать $\Phi^{(i)}$ как

$$\Phi^{(i)}=\frac{\nu}{\nu+1}\,\Phi_0+2\pi\varrho_0\left\langle\alpha_{200}J(x^2)\right\rangle\,. \tag{64.58}$$

Подставляя сюда $J(x^2)$ из (64.9) и учитывая первое из соотношений (64.56), которое можно получить и из уравнения Пуассона для $\Phi^{(i)}$, окончательно получаем

$$\Phi^{(i)}=2\pi\varrho_0\left[M_{000}-\left\langle M_{100}x^2\right\rangle-\right.$$
$$\left.-\left\langle a^2\alpha_{200}\left(M_{100}-M_{200}x^2-M_{110}y^2-M_{101}z^2\right)\right\rangle\right]\,. \tag{64.59}$$

Такая запись хороша тем, что при замене всех M_{lmn} на внешние факторы $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$ она дает потенциал $\Phi^{(e)}$ снаружи заряженного диэлектрического эллипсоида.

Так как $3M_{100}=a^2M_{200}+b^2M_{110}+c^2M_{101}$, то при $\varepsilon\to\infty$ $(\nu=0)$ систему уравнений (64.54) можно переписать в виде

$$a^2M_{200}(\alpha_{200}-1/3)+b^2M_{110}(\alpha_{020}-1/3)+c^2M_{101}(\alpha_{002}-1/3)=0. \tag{64.60}$$

Следовательно, в этом предельном случае $\alpha_{200}=\alpha_{020}=\alpha_{002}=\frac{1}{3}$. Тогда, как легко проверить, выражение (64.59) в согласии с общей теоремой (см. [450]) переходят в формулы для потенциала заряженного металлического эллипсоида

$$\Phi^{(i)}=\frac{4\pi\varrho_0}{3}\,M_{000}\,,\qquad \Phi^{(e)}=\frac{4\pi\varrho_0}{3}\,\mathscr{M}_{000}(\xi)\,, \tag{64.61}$$

согласующиеся с (8.11) и (9.12).

[1] Приведенное в [494] решение здесь исправлено.

§ 65. Двухслойный незаряженный диэлектрический эллипсоид

65.1. Интегральные уравнения

В предыдущем параграфе было показано, что при полиномиальной зависимости потенциала внешнего поля от декартовых координат потенциал электрического поля внутри однородного эллипсоида является полиномом той же степени. Это включает в себя, в частности, хорошо известное свойство однородности внутреннего поля диэлектрического эллипсоида, помещенного в однородное внешнее статическое электрическое поле. Возникает вопрос: можно ли сохранить свойство полиномиальности поля внутри диэлектрического эллипсоида, если последний окружен однородной оболочкой из другого диэлектрика? Утвердительный ответ на этот вопрос возможен лишь в том случае, если краевая задача о двухслойном эллипсоиде в полиномиальном внешнем поле имеет точное решение. Предлагаемое здесь решение [521,522] — в отличие от традиционного метода разделения в эллипсоидальных координатах (см., например, [35]) — опирается на интегральные уравнения электростатики и, как повсюду в данной монографии, использует декартовы координаты. Наличие второго слоя, характеризуемого самостоятельными геометрическими и физическими параметрами, приводит, разумеется, к увеличению числа и усложнению вида формул, дающих решение этой задачи (по сравнению с задачей об однородном эллипсоиде). Как и в § 64, мы ограничимся здесь рассмотрением простейших случаев, когда потенциал внешнего поля является однородной (линейной, квадратичной или кубической) функцией декартовых координат.

Отметим, что результаты решения задачи об однородном диэлектрике в неоднородном поле легли в основу теоретического изучения некоторых прикладных вопросов (см., например, [495,498]). Соответственно и задача о неоднородном диэлектрике в неоднородном внешнем поле, простейший вариант которой рассматривается в данном параграфе, имеет ключевое (выходящее за рамки собственно электростатики) значение для ряда магнитостатических, дифракционных, плазменно-колебательных и других проблем.

Рассмотрим двухслойное диэлектрическое тело, состоящее из однородного ядра и окружающей его однородной оболочки. Величины, относящиеся к области ядра и оболочки, будем отмечать индексами «1» и «2» соответственно. Так, ε_k — диэлектрическая постоянная k-го слоя $(k=1,2)$, S_k — его внешняя ограничивающая поверхность, n_k — единичный вектор внешней нормали к ней, V_k — объем слоя.

Пусть Φ_0 — заданный внешний (вакуумный) потенциал поля в отсутствие диэлектрического тела, создаваемый источниками, которые находятся вне объема V_1+V_2. Если Φ — потенциал полного поля, то вектор поляризации в k-м слое равен

$$\mathbf{P}_k = \frac{1-\varepsilon_k}{4\pi}\,\nabla\Phi \qquad (k=1,2). \tag{65.1}$$

Векторам (65.1) соответствуют поверхностные поляризационные заряды плотности

$$\sigma_1' = (\mathbf{n}_1, \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \qquad \text{на} \quad S_1\,, \tag{65.2}$$

$$\sigma_2' = (\mathbf{n}_2, \mathbf{P}_2) = \frac{1-\varepsilon_2}{4\pi}\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_2} \qquad \text{на} \quad S_2\,. \tag{65.3}$$

а объемные заряды $\varrho_k' = -\operatorname{div}\mathbf{P}_k$ в нашем случае отсутствуют.

Так как, по предположению, внутри диэлектрического тела нет свободных зарядов, то их нет и на границе S_1, на которой поэтому соблюдается условие $\varepsilon_1(\partial\Phi_1/\partial n_1) = \varepsilon_2(\partial\Phi_2/\partial n_1)$, позволяющее представить σ_1 в виде[1]

$$\sigma_1' = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1}\,. \tag{65.4}$$

По законам электростатики

$$\Phi = \Phi_0 + \oint \frac{\sigma_1'}{R}\,dS + \oint \frac{\sigma_2'}{R}\,dS. \tag{65.5}$$

Подставляя в (65.5) выражения (65.3) и (65.4) и вводя обозначения

$$\mu = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/\varepsilon_2, \qquad \nu = \varepsilon_2 - 1,$$

получаем

$$\Phi + \frac{\mu}{4\pi}\oint\limits_{S_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1}\frac{dS}{R} + \frac{\nu}{4\pi}\oint\limits_{S_2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial n_2}\frac{dS}{R} = \Phi_0. \tag{65.6}$$

Для точек наблюдения, лежащих внутри тела, т. е. принадлежащих либо ядру, либо оболочке, уравнение (65.6) и играет как раз роль интегрального уравнения (точнее, системы двух уравнений относительно Φ_1 и Φ_2). Подчеркнем, что входящие в (65.6) потенциалы Φ_0 и Φ во внутренней области тела являются гармоническими функциями. По найденным в результате решения внутренней задачи потенциалам Φ_1 и Φ_2 (а следовательно, и вторичным источникам σ_1' и σ_2') уравнение (65.6) в форме (65.5) позволяет определить потенциал $\Phi_{\text{ind}} = \Phi - \Phi_0$ индуцированного поля в любой точке, находящейся вне двухслойного диэлектрика.

65.2. Поле внутри двухслойного эллипсоида

Будем считать теперь, что поверхности S_1 и S_2 двухслойного диэлектрика эллипсоидальны и даются уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{65.7}$$

$$\frac{x^2}{\bar a^2} + \frac{y^2}{\bar b^2} + \frac{z^2}{\bar c^2} = 1 \tag{65.8}$$

соответственно, где полуоси a, b, c короче соответствующих полуосей $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$. Остающимся произволом в соотношениях между полуосями эллипсоидов (65.7) и (65.8) распорядимся позже. Единичные векторы внешних нормалей к S_1 и S_2, очевидно, равны

$$\mathbf{n}_1 = \left\{\frac{x}{a^2}\,p,\ \frac{y}{b^2}\,p,\ \frac{z}{c^2}\,p\right\}, \qquad \mathbf{n}_2 = \left\{\frac{x}{\bar a^2}\,\bar p,\ \frac{y}{\bar b^2}\,\bar p,\ \frac{z}{\bar c^2}\,\bar p\right\},$$

[1] Поскольку значения нормальных производных потенциала Φ различаются по разные стороны от границ S_1 и S_2, приходится, как это сделано в формулах (65.3), (65.4) и других необходимых случаях, снабжать потенциал индексом принадлежности к соответствующему слою.

где $p = \left\langle x^2/a^4 \right\rangle^{-1/2}$, $\bar{p} = \left\langle x^2/\bar{a}^4 \right\rangle^{-1/2}$. Здесь, как и повсюду, угловые скобки обозначают сумму трех членов циклической перестановки.

Решая уравнения (65.6), будем пользоваться явными представлениями (см. § 21) ньютоновых потенциалов

$$\Psi_{lmn} \equiv \oint\limits_{S_1} x^l y^m z^n \,\frac{p\,dS}{R} \tag{65.9}$$

простого эллипсоидального слоя, где l, m, n — неотрицательные целые числа. Для точек внутри эллипсоида (65.7) справедливы, в частности, следующие формулы:

$$\Psi_{000} = 4\pi M_{000}, \qquad \Psi_{100} = 4\pi a^2 M_{100}\, x, \qquad \Psi_{110} = 4\pi a^2 b^2 M_{110}\, xy, \tag{65.10}$$

$$\Psi_{200} = 2\pi a^2 \left[\left(M_{000} - a^2 M_{100}\right) - \left(M_{100} - a^2 M_{200}\right) x^2 - \right.$$
$$\left. - \left(M_{010} - a^2 M_{110}\right) y^2 - \left(M_{001} - a^2 M_{101}\right) z^2\right].$$

Выражения для Ψ_{010}, Ψ_{001}, Ψ_{011}, Ψ_{101}, Ψ_{020}, Ψ_{002} получаются из этих формул в результате циклической или взаимной замены.

Для точек наблюдения вне эллипсоида (65.7) потенциалы (65.9) также описываются выражениями (65.10), в которых только внутренние факторы M_{lmn} заменены на внешние $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$. Напомним, что последние отличаются от

$$M_{lmn} = \Pi_{lmn} \frac{abc}{2} \int\limits_0^\infty (a^2+u)^{-l-\frac{1}{2}} \,(b^2+u)^{-m-\frac{1}{2}} \,(c^2+u)^{-n-\frac{1}{2}} \,du, \tag{65.11}$$

тем, что нижний (нулевой) предел интегрирования заменен эллипсоидальной координатой ξ точки наблюдения, являющейся, по определению, неотрицательным корнем кубического уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1. \tag{65.12}$$

В (65.11) для краткости принято обозначение

$$\Pi_{lmn} = (2l-1)!!\,(2m-1)!!\,(2n-1)!!\,.$$

Таким образом, потенциалы Ψ_{lmn} внутри эллипсоида (65.7) являются полиномами $(l{+}m{+}n)$-й степени, а вне этого эллипсоида из-за зависимости $\mathscr{M}_{lmn}$ от ξ становятся псевдополиномами той же степени. Для дальнейшего существенно, однако, что на каждой фиксированной ($\xi{=}\mathrm{const}$) поверхности семейства софокусных эллипсоидальных поверхностей (65.12) потенциалы, не отличаются от полиномов.

Обсудим теперь схему решения интегрального уравнения (65.6) применительно к двухслойному эллипсоиду. Пусть Φ_0 — однородный полином степени N

$$\Phi_0 = \sum_{l+m+n=N} A_{lmn}\, x^l y^m z^n.$$

Будем считать, что внутри ядра (объем V_1) потенциал Φ_1 также является полиномом N-й степени, т. е.

$$\Phi_1 = \sum_{l+m+n \leqslant N} \alpha_{lmn}\, x^l y^m z^n, \tag{65.13}$$

где постоянные α_{lmn} подлежат определению. На поверхности (65.7)

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n_1} = \left\langle n_{1x}\, \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right\rangle = \left\langle \frac{x}{a^2}\, \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right\rangle p\,,$$

так что входящий в (65.6) интеграл

$$\oint\limits_{S_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_1}\, \frac{dS}{R} = \sum_{l+m+n \leqslant N} \left(\frac{l}{a^2} + \frac{m}{b^2} + \frac{n}{c^2} \right) \alpha_{lmn} \Psi_{lmn} \tag{65.14}$$

и поэтому в области V_1 также является полиномом N-й степени. Чтобы в V_1 и последний член левой части уравнения (65.6) был полиномом N-й степени, используем имеющийся произвол в выборе эллипсоидальной поверхности (65.8).

Для этого заметим, что в соответствии со сказанным выше вне ядра (в частности, в объеме V_2 оболочки) интеграл (65.14) является псевдополиномом N-й степени. Поэтому в области V_2 естественно искать потенциал полного поля в виде

$$\Phi_2 = \sum_{l+m+n \leq N} \beta_{lmn}(\xi)\, x^l y^m z^n, \tag{65.15}$$

где $\beta_{lmn}(\xi)$ — подлежащие нахождению неизвестные функции. Чтобы на поверхности (65.8) потенциал Φ_2 вел себя как полином, поверхность (65.8) должна быть софокусной с (65.7), т. е. должны выполняться равенства

$$\bar{a}^2 = a^2 + \xi_0, \quad \bar{b}^2 = b^2 + \xi_0, \quad \bar{c}^2 = c^2 + \xi_0,$$

в которых ξ_0 — значение координаты ξ, соответствующее поверхности (65.8). При указанном выборе поверхности S_2 интеграл

$$\oint\limits_{S_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_2}\, \frac{dS}{R} = \sum_{l+m+n \leqslant N} f_{lmn}(\xi_0) \oint\limits_{S_2} x^l y^m z^n\, \frac{\bar{p}\, dS}{R}\,, \tag{65.16}$$

где

$$f_{lmn}(\xi_0) \equiv \left(\frac{l}{\bar{a}^2} + \frac{m}{\bar{b}^2} + \frac{n}{\bar{c}^2} \right) \beta_{lmn}(\xi_0) + 2\beta\,'_{lmn}(\xi_0).$$

В соответствии со свойствами потенциалов (65.9) интеграл (65.16) является в области $V_1 + V_2$ полиномом, а вне этой области псевдополиномом N-ой степени. Таким образом, возможность точного решения задачи о двухслойном диэлектрическом эллипсоиде связана с предположением о софокусности границ слоев. Процедуру определения неизвестных коэффициентов α_{lmn} и функций $\beta_{lmn}(\xi)$ рассмотрим на конкретных примерах.

65.21. Однородное вакуумное поле

Потенциалу
$$\Phi_0 = \langle A_{100}\, x\rangle \tag{65.17}$$
заданного однородного внешнего поля соответствуют в областях V_1 и V_2 потенциалы
$$\Phi_1 = \langle \alpha_{100}\, x\rangle\,, \qquad \Phi_1 = \langle \beta_{100}(\xi)\, x\rangle\,. \tag{65.18}$$

Подставляя (65.17) и (65.18) в интегральное уравнение (65.6) и используя формулы (65.14), (65.16) и (65.10), получаем для точек $\mathbf{r} \in V_1$
$$\langle \alpha_{100}\, x\rangle + \mu\, \langle \alpha_{100} M_{100}\, x\rangle + \nu \left\langle \bar{a}^2 f_{100}(\xi_0) \overline{M}_{100}\, x\right\rangle = \langle A_{100}\, x\rangle\,, \tag{65.19}$$
а для точек $\mathbf{r} \in V_2$
$$\langle \beta_{100}(\xi)\, x\rangle + \mu\, \langle \alpha_{100} \mathscr{M}_{100}(\xi)\, x\rangle + \nu \left\langle \bar{a}^2 f_{100}(\xi_0) \overline{M}_{100}\, x\right\rangle = \langle A_{100}\, x\rangle\,, \tag{65.20}$$
где через $\overline{M}_{lmn}$ обозначены внутренние потенциальные факторы эллипсоида (65.8).

Приравнивая в каждом из уравнений (65.19) и (65.20) коэффициенты при x, получаем систему уравнений для неизвестных α_{100} и $\beta_{100}(\xi)$
$$\alpha_{100} + \mu M_{100} \alpha_{100} = A_{100} - \nu \bar{a}^2 f_{100}(\xi_0) \overline{M}_{100}, \tag{65.21}$$
$$\beta_{100}(\xi) + \mu \mathscr{M}_{100}(\xi) \alpha_{100} = A_{100} - \nu \bar{a}^2 f_{100}(\xi_0) \overline{M}_{100}. \tag{65.22}$$

Равенство правых частей уравнений (65.21) и (65.22) позволяет выразить искомую функцию $\beta_{100}(\xi)$ через искомый коэффициент (и известную функцию)
$$\beta_{100}(\xi) = \alpha_{100}\left[1 + \mu \mathscr{R}_{100}(\xi)\right], \tag{65.23}$$
где введено используемое и далее обозначение
$$\mathscr{R}_{lmn}(\xi) = M_{lmn} - \mathscr{M}_{lmn}(\xi)$$

Учитывая, что
$$\mathscr{M}_{lmn}(\xi_0) = g \overline{M}_{lmn},$$
$$\frac{\partial \mathscr{M}_{lmn}(\xi_0)}{\partial \xi} = -\Pi_{lmn} \frac{g}{2\bar{a}^{2l} \bar{b}^{2m} \bar{c}^{2n}}\,, \tag{65.24}$$
где $g = abc/(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$, легко находим
$$\bar{a}^2 f_{100} = (1 + \mu g + \mu R_{100}) \alpha_{100}. \tag{65.25}$$
Здесь и далее
$$R_{lmn} \equiv \mathscr{R}_{lmn}(\xi_0) = M_{lmn} - g \overline{M}_{lmn}.$$

Подставляя (65.25) в (65.21), окончательно получаем
$$\alpha_{100} = A_{100}\left[(1 + \mu R_{100})(1 + \nu \overline{M}_{100}) + g\mu(\nu + 1)\overline{M}_{100}\right]^{-1}. \tag{65.26}$$

Заметим, что постановка задачи не нарушает ее симметрии (равноправия декартовых направлений) и поэтому позволяет использовать как циклическую, так и взаимную перестановку координат. Так, выражения для α_{010}, α_{001} и $\beta_{010}(\xi)$, $\beta_{001}(\xi)$ можно получить из (65.26) и (65.23) с помощью циклической перестановки.

65.22. Линейное вакуумное поле

Потенциалу

$$\Phi_0 = \left\langle A_{200}x^2 \right\rangle + \langle A_{110}xy \rangle \tag{65.27}$$

заданного линейного внешнего поля соответствуют потенциалы

$$\Phi_1 = \left\langle \alpha_{200}x^2 \right\rangle + \langle \alpha_{110}xy \rangle + \alpha_{000}\,, \tag{65.28}$$

$$\Phi_2 = \left\langle \beta_{200}(\xi)x^2 \right\rangle + \langle \beta_{110}(\xi)xy \rangle + \beta_{000}(\xi)\,, \tag{65.29}$$

Из гармоничности потенциалов (65.27) и (65.28) следует соответственно, что $\langle A_{200} \rangle = 0$ и $\langle \alpha_{200} \rangle = 0$, причем если первое равенство считается заданным, то второе должно быть подтверждено результатами решения.

Подставляя формулы (65.27)–(65.29) в (65.6) и используя (65.14), (65.16) и (65.10), приходим (аналогично получению (65.19) и (65.20)) к двум уравнениям: «квадратичному» (для точек, принадлежащих области V_1) и «псевдоквадратичному» (для точек области V_2). Приравнивание в этих уравнениях коэффициентов при одинаковых степенях координат приводит к системам линейных уравнений типа (65.21), (65.22) для α_{lmn} и $\beta_{lmn}(\xi)$, решения которых имеют следующий вид:

$$\alpha_{200} = -\frac{1}{\Delta}\left[A_{020}(\varepsilon_1 - q_{102} - q_{012} - q_{021}) + A_{002}(\varepsilon_1 - q_{120} - q_{012} - q_{021})\right],$$

$$\Delta = \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1 \langle q_{120} + q_{102} \rangle + \langle q_{120}q_{201} + q_{102}q_{021} + q_{021}q_{201} \rangle\,,$$

$$\begin{aligned} q_{210} = \mu a^2 M_{110} + \nu \bar{a}^2 \overline{M}_{110} + {} \\ + \nu\mu a^2(g\overline{M}_{110} + \bar{a}^2\overline{M}_{110}R_{200} + \bar{b}^2\overline{M}_{020}R_{110} + \bar{c}^2\overline{M}_{011}R_{101}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{110} = A_{110}\left\{\left[1 + \mu(a^2 + b^2)R_{110}\right]\left[1 + \nu(\bar{a}^2 + \bar{b}^2)\overline{M}_{110}\right]\right. \\ \left. + g\mu(1+\nu)(a^2 + b^2)\overline{M}_{110}\right\}^{-1}, \end{aligned}$$

$$3\alpha_{000} = \left\langle a^2(A_{200} - \alpha_{200}) \right\rangle = \left\langle \bar{a}^2(A_{200} - \alpha_{200}) \right\rangle,$$

$$\beta_{200}(\xi) = \alpha_{200} + \mu\left[\alpha_{200}a^2\mathscr{R}_{200}(\xi) + \alpha_{020}b^2\mathscr{R}_{110}(\xi) + \alpha_{002}c^2\mathscr{R}_{101}(\xi)\right],$$

$$\beta_{110}(\xi) = \alpha_{110}\left[1 + \mu(a^2 + b^2)\mathscr{R}_{110}(\xi)\right],$$

$$\beta_{000}(\xi) = \alpha_{000} - \mu\left\langle \alpha_{200}a^2\mathscr{R}_{100}(\xi) \right\rangle.$$

С помощью циклической или взаимной замены легко из приведенных здесь выражений для трехиндексных величин α_{lmn}, $\beta_{lmn}(\xi)$, q_{lmn} получить выражения этих величин для других сочетаний (точнее, перестановок) индексов. Например, выражение для q_{120} получается из формулы для q_{210}, если в последней сделать замену $a \leftrightarrow b$, $\bar{a} \leftrightarrow \bar{b}$ и одновременно у всех трехиндексных величин поменять местами первые два индекса.

65.23. Квадратичное вакуумное поле

Квадратичному вакуумному полю соответствует гармонический потенциал Φ_0, являющийся однородным кубическим полиномом, т. е.

$$\Phi_0 = \left\langle A_{300}x^3 + A_{120}xy^2 + A_{102}xz^2 \right\rangle + A_{111}xyz. \tag{65.30}$$

В выражении для искомого потенциала полного поля в области V_1 наряду с кубическими могут быть и линейные члены

$$\Phi_1 = \left\langle \alpha_{300}x^3 + \alpha_{120}xy^2 + \alpha_{102}xz^2 \right\rangle + \alpha_{111}xyz + \langle \alpha_{100}x \rangle\,. \tag{65.31}$$

По аналогии с (65.31) запишем и искомый потенциал в области V_2:

$$\Phi_2 = \left\langle \beta_{300}(\xi)x^3 + \beta_{120}(\xi)xy^2 + \beta_{102}(\xi)xz^2 \right\rangle + \beta_{111}(\xi)xyz + \langle \beta_{100}(\xi)x \rangle\,. \tag{65.32}$$

Из гармоничности потенциалов (65.31) и (65.32) следует соответственно, что

$$3A_{300} + A_{120} + A_{102} = 0 \tag{65.33}$$

и

$$3\alpha_{300} + \alpha_{120} + \alpha_{102} = 0, \tag{65.34}$$

причем если (65.33) считается заданным, то (65.34) должно быть подтверждено результатами решения.

Подставляя (65.30)–(65.32) в (65.6) и используя при вычислении входящих в (65.6) поверхностных интегралов их таблицу, приведенную в разделе 21.2, приходим к системе двух уравнений. Приравнивание в последних коэффициентов, стоящих при одинаковых степенях декартовых координат формирует следующие системы уравнений относительно α_{lmn} и $\beta_{lmn}(\xi)$:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{111} + \mu \left\langle a^2b^2 \right\rangle M_{111}\alpha_{111} + \nu\bar{a}^2\bar{b}^2\bar{c}^2 f_{111}\overline{M}_{111} = A_{111}\,, \\ \beta_{111}(\xi) + \mu \left\langle a^2b^2 \right\rangle \mathscr{M}_{111}(\xi)\alpha_{111} + \nu\bar{a}^2\bar{b}^2\bar{c}^2 f_{111}\overline{M}_{111} = A_{111}\,; \end{aligned}\right\} \tag{65.35}$$

$$\begin{gathered} 3\alpha_{300} - \frac{\mu}{2}\left[3a^2\alpha_{300}M^a_{200} + b^2\alpha_{120}\left(M^b_{200} - 2a^2M_{210}\right) + \right. \\ \left. + c^2\alpha_{102}\left(M^c_{200} - 2a^2M_{201}\right)\right] - \frac{\nu}{2}\Gamma_{200} = 3A_{300}, \end{gathered} \tag{65.36}$$

$$\begin{gathered} 3\beta_{300}(\xi) - \frac{\mu}{2}\left[3a^2\alpha_{300}\mathscr{M}^a_{200}(\xi) + b^2\alpha_{120}\left(\mathscr{M}^b_{200}(\xi) - 2a^2\mathscr{M}_{210}(\xi)\right) + \right. \\ \left. + c^2\alpha_{102}\left(\mathscr{M}^c_{200}(\xi) - 2a^2\mathscr{M}_{201}(\xi)\right)\right] - \frac{\nu}{2}\Gamma_{200} = 3A_{300}, \end{gathered} \tag{65.37}$$

$$\begin{gathered} \alpha_{120} - \frac{\mu}{2}\left[3a^2\alpha_{300}M^a_{110} + b^2\alpha_{120}\left(M^b_{110} - 2a^2M_{120}\right) + \right. \\ \left. + c^2\alpha_{102}\left(M^c_{110} - 2a^2M_{111}\right)\right] - \frac{\nu}{2}\,\Gamma_{110} = A_{120}, \end{gathered} \tag{65.38}$$

$$\beta_{120}(\xi) - \frac{\mu}{2}\left[3a^2\alpha_{300}\mathscr{M}^a_{110}(\xi) + b^2\alpha_{120}\left(\mathscr{M}^b_{110}(\xi) - 2a^2\mathscr{M}_{120}(\xi)\right) + \right.$$
$$\left. + c^2\alpha_{102}\left(\mathscr{M}^c_{110}(\xi) - 2a^2\mathscr{M}_{111}(\xi)\right)\right] - \frac{\nu}{2}\,\Gamma_{110} = A_{120}, \quad (65.39)$$

$$\alpha_{102} - \frac{\mu}{2}\left[3a^2\alpha_{300}M^a_{101} + b^2\alpha_{120}\left(M^b_{101} - 2a^2M_{111}\right) + \right.$$
$$\left. + c^2\alpha_{102}\left(M^c_{101} - 2a^2M_{102}\right)\right] - \frac{\nu}{2}\,\Gamma_{101} = A_{102}, \quad (65.40)$$

$$\beta_{102}(\xi) - \frac{\mu}{2}\left[3a^2\alpha_{300}\mathscr{M}^a_{101}(\xi) + b^2\alpha_{120}\left(\mathscr{M}^b_{101}(\xi) - 2a^2\mathscr{M}_{111}(\xi)\right) + \right.$$
$$\left. + c^2\alpha_{102}\left(\mathscr{M}^c_{101}(\xi) - 2a^2\mathscr{M}_{102}(\xi)\right)\right] - \frac{\nu}{2}\,\Gamma_{101} = A_{102}, \quad (65.41)$$

$$\alpha_{100} + \frac{\mu}{2}\left[3a^2\alpha_{300}M^a_{100} + b^2\alpha_{120}\left(M^b_{100} - 2a^2M_{110}\right) + \right.$$
$$\left. + c^2\alpha_{102}\left(M^c_{100} - 2a^2M_{101}\right) + 2\alpha_{100}M_{100}\right] + \frac{\nu}{2}\,\Gamma_{100} = 0, \quad (65.42)$$

$$\beta_{100}(\xi) + \frac{\mu}{2}\left[3a^2\alpha_{300}\mathscr{M}^a_{100}(\xi) + b^2\alpha_{120}\left(\mathscr{M}^b_{100}(\xi) - 2a^2\mathscr{M}_{110}(\xi)\right) + \right.$$
$$\left. + c^2\alpha_{102}\left(\mathscr{M}^c_{100}(\xi) - 2a^2\mathscr{M}_{101}(\xi)\right) + 2\alpha_{100}\mathscr{M}_{100}\right] + \frac{\nu}{2}\,\Gamma_{100} = 0. \quad (65.43)$$

Расшифруем обозначения, использованные в (65.35)–(65.43). Для определенных комбинаций потенциальных факторов введены следующие обозначения, содержащие дополнительный верхний индекс:

$$T^a_{lmn} \equiv T_{lmn} - a^2T_{l+l,m,n},$$
$$T^b_{lmn} \equiv T_{lmn} - b^2T_{l,m+l,n}, \quad (65.44)$$
$$T^c_{lmn} \equiv T_{lmn} - c^2T_{l,m,n+l},$$

где в качестве T_{lmn} могут выступать M_{lmn}, $\mathscr{M}_{lmn}$, $\overline{M}_{lmn}$, $\mathscr{R}_{lmn}$ и R_{lmn}.

Кроме того, посредством Γ_{lmn} обозначены

$$\Gamma_{200} \equiv \bar{a}^4 f_{300}\left(\overline{M}^{\,\bar{a}}_{200} + 2\overline{M}_{200}\right) + \bar{a}^2\bar{b}^2 f_{120}\overline{M}^{\,\bar{b}}_{200} + \bar{a}^2\bar{c}^2 f_{102}\overline{M}^{\,\bar{c}}_{200},$$

$$\Gamma_{110} \equiv \bar{a}^4 f_{300}\left(\overline{M}^{\,\bar{a}}_{110} + 2\overline{M}_{110}\right) + \bar{a}^2\bar{b}^2 f_{120}\overline{M}^{\,\bar{b}}_{110} + \bar{a}^2\bar{c}^2 f_{102}\overline{M}^{\,\bar{c}}_{110},$$

$$\Gamma_{100} \equiv \bar{a}^4 f_{300}\left(\overline{M}^{\,\bar{a}}_{100} + 2\overline{M}_{100}\right) + \bar{a}^2\bar{b}^2 f_{120}\overline{M}^{\,\bar{b}}_{100} +$$
$$+ \bar{a}^2\bar{c}^2 f_{102}\overline{M}^{\,\bar{c}}_{100} + 2\bar{a}^2 f_{100}\overline{M}_{100}.$$

Решение уравнений (65.35)–(65.43) дается формулами

$$\alpha_{111} = \frac{A_{111}}{\left(1+\mu\left\langle a^2b^2\right\rangle R_{111}\right)\left(1+\nu\left\langle \bar{a}^2\bar{b}^2\right\rangle \overline{M}_{111}\right)+\mu g(1+\nu)\left\langle a^2b^2\right\rangle \overline{M}_{111}}, \quad (65.45)$$

$$\beta_{111}(\xi) = \left[1+\mu\left\langle a^2b^2\right\rangle \mathscr{R}_{111}\right]\alpha_{111}, \tag{65.46}$$

$$\bar{a}^2\bar{b}^2\bar{c}^2 f_{111} = \left[\mu g\left\langle a^2b^2\right\rangle + \left\langle \bar{a}^2\bar{b}^2\right\rangle\left(1+\mu\left\langle a^2b^2\right\rangle R_{111}\right)\right]\alpha_{111}; \tag{65.47}$$

$$\beta_{300}(\xi) = \alpha_{300} - \frac{\mu}{6}\left[3a^2\mathscr{R}^a_{200}\alpha_{300} + b^2\left(\mathscr{R}^b_{200} - 2a^2\mathscr{R}_{210}\right)\alpha_{120}+ \right.$$
$$\left. + \ c^2\left(\mathscr{R}^c_{200} - 2a^2\mathscr{R}_{201}\right)\alpha_{102}\right], \tag{65.48}$$

$$\bar{a}^4 f_{300} = -\frac{\mu}{2}\left\{3a^2\left[-\frac{2}{\mu}\frac{\bar{a}^2}{a^2} + g\left(1 - 5\frac{a^2}{\bar{a}^2}\right) + \bar{a}^2R^a_{200}\right]\alpha_{300} + \right.$$
$$+ b^2\left[g\left(1 - \frac{2a^2+b^2}{\bar{b}^2}\right) + \bar{a}^2\left(R^b_{200} - 2a^2R_{210}\right)\right]\alpha_{120}+$$
$$\left. +c^2\left[g\left(1 - \frac{2a^2+c^2}{\bar{c}^2}\right) + \bar{a}^2\left(R^c_{200} - 2a^2R_{201}\right)\right]\alpha_{102}\right\}, \tag{65.49}$$

$$\beta_{120}(\xi) = \alpha_{120} - \frac{\mu}{2}\left[3a^2\mathscr{R}^a_{110}\alpha_{300} + b^2\left(\mathscr{R}^b_{110} - 2a^2\mathscr{R}_{120}\right)\alpha_{120}+ \right.$$
$$\left. + \ c^2\left(\mathscr{R}^c_{110} - 2a^2\mathscr{R}_{111}\right)\alpha_{102}\right], \tag{65.50}$$

$$\bar{a}^2\bar{b}^2 f_{120} = -\frac{\mu}{2}\left\{3a^2\left[g\left(1 - 3\frac{a^2}{\bar{a}^2}\right) + \left(2\bar{a}^2 + \bar{b}^2\right)R^a_{200}\right]\alpha_{300} + \right.$$
$$+ b^2\left[-\frac{2}{\mu}\frac{2\bar{a}^2+\bar{b}^2}{b^2} + g\left(1-3\frac{2a^2+b^2}{\bar{b}^2}\right) + \left(2\bar{a}^2+\bar{b}^2\right)\left(R^b_{110} - 2a^2R_{120}\right)\right]\alpha_{120}+$$
$$\left. +c^2\left[g\left(1 - \frac{2a^2+c^2}{\bar{c}^2}\right) + \left(2\bar{a}^2+\bar{b}^2\right)\left(R^c_{110} - 2a^2R_{111}\right)\right]\alpha_{102}\right\}, \tag{65.51}$$

$$\beta_{100}(\xi) = \alpha_{100} + \frac{\mu}{2}\left[3a^2\mathscr{R}^a_{100}\alpha_{300} + b^2\left(\mathscr{R}^b_{100} - 2a^2\mathscr{R}_{110}\right)\alpha_{120}+ \right.$$
$$\left. + \ c^2\left(\mathscr{R}^c_{100} - 2a^2\mathscr{R}_{101}\right)\alpha_{102} + 2\mathscr{R}_{100}\alpha_{100}\right], \tag{65.52}$$

$$\bar{a}^2 f_{100} = \left(1 + \mu g + \mu R_{100}\right)\alpha_{100} + \frac{\mu}{2}\left\{3a^2\left[g\left(1 - 3\frac{a^2}{\bar{a}^2}\right) + R^a_{100}\right]\alpha_{300} + \right.$$
$$+ b^2\left[g\left(1 - \frac{2a^2+b^2}{\bar{b}^2}\right) + R^b_{100} - 2a^2R_{110}\right]\alpha_{120}+$$
$$\left. +c^2\left[g\left(1 - \frac{2a^2+c^2}{\bar{c}^2}\right) + R^c_{100} - 2a^2R_{101}\right]\alpha_{102}\right\}, \tag{65.53}$$

$$\alpha_{120} = \frac{1}{\Delta_{100}}\left[\left(q_{403} - q_{601}\right)A_{120} + \left(q_{610} - q_{412}\right)A_{102}\right], \tag{65.54}$$

$$\Delta_{100} = q_{430}q_{403} - q_{421}q_{610} - q_{412}q_{601} - q_{421}q_{412} + q_{430}q_{601} + q_{403}q_{610}. \tag{65.55}$$

Коэффициент α_{102} дается выражением, получающимся из (65.54) в результате взаимной замены $b \leftrightarrow c$, что включает взаимную замену двух последних индексов у всех трехиндексных величин. Коэффициент α_{300} определяется после этого из соотношения (65.34), а коэффициент α_{100} — из соотношения

$$5\alpha_{100} + 3a^2\alpha_{300} + b^2\alpha_{120} + c^2\alpha_{102} = \frac{3a^2 A_{300} + b^2 A_{120} + c^2 A_{102}}{1+\mu M_{100}+\nu \overline{M}_{100}\,(1+\mu g+\mu R_{100})}\,. \tag{65.56}$$

Выражения для $\beta_{120}(\xi)$ и $\bar{a}^2\bar{b}^2 f_{120}$ получаются из (65.50) и (65.51) взаимной заменой $b \leftrightarrow c$.

Наконец, укажем обозначения, использованные в (65.54) и (65.55).

$$q_{610} = \frac{\mu}{2}\,a^2\left\{M^a_{110} + \frac{\nu}{2}\left[\left(\overline{M}^{\,\bar{a}}_{110} + 2\overline{M}_{110}\right)\left(\frac{2}{\mu}\frac{\bar{a}^2}{a^2} + 2g\frac{a^2}{\bar{a}^2} - \bar{a}^2 R^a_{200}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \overline{M}^{\,\bar{b}}_{110}\left(2\bar{a}^2 + \bar{b}^2\right) R^a_{110} - \overline{M}^{\,\bar{c}}_{110}\left(2\bar{a}^2 + \bar{c}^2\right) R^a_{101}\right]\right\}, \tag{65.57}$$

$$q_{430} = 1 - \frac{\mu b^2}{2}\left(M^b_{110} - 2a^2 M_{120}\right) +$$
$$+ \frac{\mu\nu b^2}{4}\left\{\bar{a}^2\left(\overline{M}^{\,\bar{a}}_{110} + 2\overline{M}_{110}\right)\left(R^b_{200} - 2a^2 R_{210}\right) - \right.$$
$$- \overline{M}^{\,\bar{b}}_{110}\left[\frac{2}{\mu}\,\frac{2\bar{a}^2 + \bar{b}^2}{b^2} + 2g\frac{2a^2 + b^2}{\bar{b}^2} - \left(2\bar{a}^2 + \bar{b}^2\right)\left(R^b_{110} - 2a^2 R_{120}\right)\right] +$$
$$\left. + \overline{M}^{\,\bar{c}}_{110}\left(2\bar{a}^2 + \bar{c}^2\right)\left(R^b_{101} - 2a^2 R_{111}\right)\right\}, \tag{65.58}$$

$$q_{412} = -\frac{\mu c^2}{2}\left(M^c_{110} - 2a^2 M_{111}\right) +$$
$$+ \frac{\mu\nu c^2}{4}\left\{\bar{a}^2\left(\overline{M}^{\,\bar{a}}_{110} + 2\overline{M}_{110}\right)\left(R^c_{200} - 2a^2 R_{201}\right) - \right.$$
$$- \overline{M}^{\,\bar{c}}_{110}\left[\frac{2}{\mu}\,\frac{2\bar{a}^2 + \bar{c}^2}{c^2} + 2g\frac{2a^2 + c^2}{\bar{c}^2} - \left(2\bar{a}^2 + \bar{c}^2\right)\left(R^c_{101} - 2a^2 R_{102}\right)\right] +$$
$$\left. + \overline{M}^{\,\bar{b}}_{110}\left(2\bar{a}^2 + \bar{b}^2\right)\left(R^c_{110} - 2a^2 R_{111}\right)\right\}, \tag{65.59}$$

Взаимная замена $b \leftrightarrow c$ в (65.57)–(65.59) приводит к выражениям для q_{601}, q_{403} и q_{421}.

Итак, неизвестные коэффициенты α_{300}, α_{120}, α_{102}, α_{111}, α_{100}, входящие в (65.31), и неизвестные функции $\beta_{300}(\xi)$, $\beta_{120}(\xi)$, $\beta_{102}(\xi)$, $\beta_{111}(\xi)$, $\beta_{100}(\xi)$, входящие в (65.32), равно как и получающиеся из них путем циклической перестановки коэффициенты и функции определены.

Найденные выражения для Φ_1 и Φ_2 и дают решение внутренней задачи о двухслойном диэлектрическом эллипсоиде в случаях однородного, линейного или квадратичного вакуумного поля.

65.3. Мультипольные моменты и внешнее индуцированное поле

Зная потенциалы Φ_1 и Φ_2 полного электростатического поля внутри эллипсоида, а значит, и поверхностные плотности поляризационных зарядов (65.4) и (65.3), можно вычислить дипольный

$$p_i = \oint\limits_{S_1} \sigma_1' x_i \, dS + \oint\limits_{S_2} \sigma_2' x_i \, dS, \tag{65.60}$$

квадрупольный

$$Q_{ij} = \oint\limits_{S_1} \sigma_1'(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}) \, dS + \oint\limits_{S_2} \sigma_2'(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}) \, dS, \tag{65.61}$$

октупольный

$$Q_{ij\,k} = 3\sum_{\varkappa=1}^{2} \oint\limits_{S_l} \left[5x_i x_j x_k - r^2\left(x_i\delta_{jk} + x_j\delta_{ki} + x_k\delta_{ij}\right)\right] \sigma_\varkappa' dS \tag{65.62}$$

и любые высшие 2^l-польные электрические моменты этих зарядов.

Так в эллипсоиде, находящемся в *однородном* внешнем поле, описываемом потенциалом (65.17), возникает дипольный момент, x-компонента которого равна

$$q_x = -\frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{3}\,\alpha_{100}\left[(1+\nu)\mu g + \nu(1+\mu R_{100})\right]. \tag{65.63}$$

Формулы для других компонент вектора $\mathbf{q}$ получаются из (65.63) путем циклической замены. Нетрудно убедиться, что в поле потенциала (65.17) все высшие 2^l-польные моменты, отвечающие четным l, равны нулю, а моменты с нечетными l в случае эллипсоида, напротив, отличны от нуля, обращаясь в нуль лишь при вырождении эллипсоида в шар.

Линейное внешнее поле, даваемое потенциалом (65.27), возбуждает в эллипсоиде все электрические мультиполи с четными l, кроме монополя. В частности, компоненты (первого из них и единственного, который не исчезает при вырождении эллипсоида в шар) квадрупольного момента равны

$$\begin{aligned} q_{xx} = -\frac{4}{5}\,\bar{a}\bar{b}\bar{c}\Big\{&\alpha_{200}\left[(1+\nu)\mu g a^2 + \nu\bar{a}^2\right] - \frac{1}{3}\left\langle\alpha_{200}a^2\left[(1+\nu)\mu g + \nu\right]\right\rangle + \\ &+\mu\nu\left[\bar{a}^2\left(\alpha_{200}a^2R_{200} + \alpha_{020}b^2R_{110} + \alpha_{002}c^2R_{101}\right) - \left\langle\alpha_{200}a^2R_{100}\right\rangle\right]\Big\}, \end{aligned} \tag{65.64}$$

$$q_{xy} = -\frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{5}\,\alpha_{110}\left\{(1+\nu)\mu g\left(a^2+b^2\right) + \nu\left(\bar{a}^2+\bar{b}^2\right)\left[1+\mu\left(a^2+b^2\right)R_{110}\right]\right\}. \tag{65.65}$$

Остальные формулы дает циклическая перестановка.

В *квадратичном* внешнем поле на границах S_1 и S_2 наводятся поляризационные заряды поверхностной плотности

$$\sigma_1' = -\frac{\mu}{4\pi}\left\langle \frac{3}{a^2}\,\alpha_{300}x^3 + \frac{2a^2+b^2}{a^2b^2}\,\alpha_{120}xy^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{2a^2+c^2}{a^2c^2}\,\alpha_{102}xz^2 + \frac{1}{a^2}\,\alpha_{111}xyz + \frac{1}{a^2}\,\alpha_{100}x \right\rangle p\,, \quad (65.66)$$

$$\sigma_2' \quad = \quad -\frac{\nu}{4\pi}\left(\left\langle f_{300}x^3 + f_{120}xy^2 + f_{102}xz^2 + f_{100}x\right\rangle + f_{111}xyz\right)\bar{p}. \quad (65.67)$$

Эти заряды ответственны за появление всех, начиная с дипольного, мультипольных тензоров нечетного ранга. В частности, x-компоненты дипольных моментов, обусловленных σ_1' и σ_2', соответственно равны

$$\tilde{q}_x^{(1)} = -\frac{\mu}{15}\,abc\left(5\alpha_{100} + 3a^2\alpha_{300} + b^2\alpha_{120} + c^2\alpha_{102}\right), \quad (65.68)$$

$$\tilde{q}_x^{(2)} = -\frac{\nu}{15}\,\bar{a}\bar{b}\bar{c}\left(5\bar{a}^2 f_{100} + 3\bar{a}^4 f_{300} + \bar{a}^2\bar{b}^2 f_{120} + \bar{a}^2\bar{c}^2 f_{102}\right). \quad (65.69)$$

С помощью (65.49), (65.51), (65.53) можно показать, что

$$5\bar{a}^2 f_{100} + 3\bar{a}^4 f_{300} + \bar{a}^2\bar{b}^2 f_{120} + \bar{a}^2\bar{c}^2 f_{102} =$$
$$= (1 + \mu g + \mu R_{100})\left(5\alpha_{100} + 3a^2\alpha_{300} + b^2\alpha_{120} + c^2\alpha_{102}\right). \quad (65.70)$$

Это означает, если к тому же иметь в виду (65.56), что каждый из дипольных моментов $\tilde{\mathbf{q}}^{(1)}$ и $\tilde{\mathbf{q}}^{(2)}$, а значит, и их сумма $\tilde{\mathbf{q}}$ выражаются непосредственно через коэффициенты заданного потенциала Φ_0. В частности,

$$\tilde{q}_x = -\frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{15}\,\frac{\left[(1+\nu)\mu g + \nu(1+\mu R_{100})\right]\left(3a^2 A_{300} + b^2 A_{120} + c^2 A_{102}\right)}{1+\mu M_{100}+\nu\overline{M}_{100}\,(1+\mu g+\mu R_{100})}. \quad (65.71)$$

Остальные компоненты дипольного момента получаются из (65.71) с помощью циклической перестановки. При вырождении эллипсоида в шар дипольный момент в силу (65.33) обращается в нуль.

Для нахождения в соответствии с (65.62) октупольного момента эллипсоида достаточно вычислить компоненты Q_{xyz} и Q_{xyy}. Результаты имеют вид

$$Q_{xyz} = -\frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{7}\,\frac{\left[\mu g(1+\nu)\left\langle a^2b^2\right\rangle + \nu\left\langle \bar{a}^2\bar{b}^2\right\rangle\left(1+\mu\left\langle a^2b^2\right\rangle R_{111}\right)\right] A_{111}}{\left(1+\mu\left\langle a^2b^2\right\rangle R_{111}\right)\left(1+\nu\left\langle \bar{a}^2\bar{b}^2\right\rangle \overline{M}_{111}\right)+\mu g(1+\nu)\left\langle a^2b^2\right\rangle \overline{M}_{111}}\,, \quad (65.72)$$

$$Q_{xyy} = Q_{xyy}^{(1)} + Q_{xyy}^{(2)}, \quad (65.73)$$

где

$$Q_{xyy}^{(1)} = \mu\frac{abc}{35}\left[3a^2\alpha_{300}\left(9a^2-4b^2+c^2\right) - b^2\alpha_{120}\left(13a^2+12b^2-c^2\right) + \right.$$
$$\left. + c^2\alpha_{102}\left(7a^2-4b^2+3c^2\right) + 7\alpha_{100}\left(3a^2-4b^2+c^2\right)\right], \quad (65.74)$$

$$Q^{(2)}_{xyy} = \nu\frac{\bar a\bar b\bar c}{35}\left[3\bar a^4 f_{300}\left(5\bar a^2-4\bar b^2+\bar c^2\right)+\bar a^2\bar b^2 f_{120}\left(3\bar a^2-12\bar b^2+\bar c^2\right)+\right.$$
$$\left.+\bar a^2\bar c^2 f_{102}\left(3\bar a^2-4\bar b^2+3\bar c^2\right)+7\bar a^2 f_{100}\left(3\bar a^2-4\bar b^2+\bar c^2\right)\right]. \quad (65.75)$$

Выражения для Q_{xzz}, $Q^{(1)}_{xzz}$ и $Q^{(2)}_{xzz}$ получаются из (65.73)–(65.75) соответственно путем взаимной замены $y\Leftrightarrow z$, $b\Leftrightarrow c$. Формулы для Q_{xxx}, $Q^{(1)}_{xxx}$ и $Q^{(2)}_{xxx}$ определяются из соотношений

$$Q_{xxx}+Q_{xyy}+Q_{xzz}=0,\qquad Q^{(\varkappa)}_{xxx}+Q^{(\varkappa)}_{xyy}+Q^{(\varkappa)}_{xzz}=0\qquad(\varkappa=1;2).$$

Все остальные компоненты октупольного момента описываются выражениями, получающимися из найденных посредством циклической перестановки.

Теперь, когда мультипольные моменты найдены, вторичное поле снаружи двухслойного диэлектрического эллипсоида описывается уже известными мультипольными формулами предыдущего параграфа. Так, однородному (65.17), линейному (65.27) и квадратичному (65.30) первичным (вакуумным) полям соответствуют индуцируемые (вторичные) поля, описываемые потенциалами

$$\Phi_{\mathrm{ind}} = q_i\psi_i = \langle q_x\psi_x\rangle, \quad (65.76)$$

$$\Phi_{\mathrm{ind}} = q_{ij}\psi_{ij} = \langle q_{xx}\psi_{xx}\rangle + 2\langle q_{xy}\psi_{xy}\rangle, \quad (65.77)$$

$$\Phi_{\mathrm{ind}} = \tilde q_i\psi_i + q_{ijk}\psi_{ijk} =$$
$$= \langle\tilde q_x\psi_x\rangle + \left\langle\left(Q_{xxx}-9\tilde q_x a^2\right)\psi_{xxx}\right\rangle + 3\left\langle\left(Q_{xxy}-3\tilde q_y a^2\right)\psi_{xxy}\right\rangle +$$
$$+3\left\langle\left(Q_{xxz}-3\tilde q_z a^2\right)\psi_{xxz}\right\rangle + 6Q_{xyz}\psi_{xyz}. \quad (65.78)$$

Если потенциал первичного поля описывается неоднородным полиномом, представляя собой, скажем, суперпозицию потенциалов (65.17), (65.27) и (65.30), то, понятно, что потенциал индуцированного эллипсоидом вторичного поля есть сумма выражений (65.76)–(65.78). Предпочтительнее, однако, представить результат в виде

$$\Phi_{\mathrm{ind}} = \langle Q_x\psi_x\rangle + \langle q_{xx}\psi_{xx}\rangle + 2\langle q_{xy}\psi_{xy}\rangle +$$
$$+\left\langle\left(Q_{xxx}-9Q_x a^2\right)\psi_{xxx}\right\rangle + 3\left\langle\left(Q_{xxy}-3Q_y a^2\right)\psi_{xxy}\right\rangle +$$
$$+3\left\langle\left(Q_{xxz}-3Q_z a^2\right)\psi_{xxz}\right\rangle + 6Q_{xyz}\psi_{xyz}, \quad (65.79)$$

выраженном только через полные мультипольные моменты. Здесь $\mathbf{Q}$ — это сумма $\mathbf{q}$ и $\tilde{\mathbf{q}}$, а октупольный момент — сумма момента, входящего в (65.78), и октупольного момента, создаваемого однородным полем.

Очевидно, что обобщение интегральных уравнений электростатики в форме (65.5) или (65.6) на случай N-слойного диэлектрика не представляет труда. Столь же очевидна принципиальная возможность распространения на случай N-слойного (с софокусными границами слоев) диэлектрического эллипсоида развитой здесь методики точного решения. Таким образом, утвердительный ответ на поставленный в начале данного параграфа вопрос о полиномиальности поля в центральном слое сохраняет силу и для многослойного диэлектрического эллипсоида.

§ 66. Слоисто неоднородно заряженный двухслойный диэлектрический эллипсоид

66.1. Интегральные уравнения

Обратимся к рассмотрению и точному решению конкретной и, на первый взгляд, довольно экзотической электростатической задачи о поле заряженного двухслойного диэлектрического эллипсоида, у которого и плотность заряда, и диэлектрическая проницаемость имеют в пределах каждого слоя некоторые заданные постоянные значения. С прикладной точки зрения, эта задача представляет интерес в связи с проблемой ускорения макрочастиц (см., например, [449, 546]), в качестве которых испытываются и полые (слоистость!), и жидкие (несферичность!) объекты, несущие электрический заряд. С физической точки зрения, особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что в заряженном диэлектрике поляризационный (индуцированный) заряд создается не только на границах раздела диэлектрика, но и в его толще, так что источниками вторичного поля являются одновременно и поверхностные, и объемные плотности поляризационного заряда.

Рассмотрим двухслойное диэлектрическое тело, состоящее из однородного ядра и окружающей его однородной оболочки. Величины, относящиеся к области ядра и оболочки, будем отмечать индексами 1 и 2 соответственно. Так, ε_k — диэлектрическая постоянная k-го слоя $(k = 1, 2)$, S_k — его внешняя ограничивающая поверхность, n_k — единичный вектор нормали к ней, V_k — объем слоя.

Пусть Φ_0 — заданный внешний (вакуумный) потенциал поля в отсутствие диэлектрического тела. В нашем случае этот потенциал создается источниками плотности $\varrho_0(\mathbf{r})$, заполняющими объем $V_1 + V_2$, и равен

$$\Phi_0 = \int\limits_{V_1+V_2} \frac{\varrho_0\, dV}{R}\,. \tag{66.1}$$

Если Φ — потенциал полного поля, то вектор поляризации в k-м слое равен

$$\mathbf{P}_k = \frac{1-\varepsilon_k}{4\pi}\,\nabla\Phi \qquad (k = 1, 2). \tag{66.2}$$

Векторам (66.2) соответствуют поляризационные объемные $\widetilde{\varrho}_k$ и поверхностные $\widetilde{\sigma}_k$ заряды плотности

$$\widetilde{\varrho}_k = -\operatorname{div}\mathbf{P}_k = \frac{1-\varepsilon_k}{\varepsilon_k}\,\varrho_0(\mathbf{r}) \qquad \text{в} \quad V_k\,, \tag{66.3}$$

$$\widetilde{\sigma}_1 = (\mathbf{n}_1, \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \qquad \text{на} \quad S_1\,, \tag{66.4}$$

$$\widetilde{\sigma}_2 = (\mathbf{n}_2, \mathbf{P}_2) = \frac{1-\varepsilon_2}{4\pi}\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial n_2} \qquad \text{на} \quad S_2\,. \tag{66.5}$$

Мы считаем, что на границах диэлектрических слоев тела нет свободных поверхностных зарядов. Поэтому на S_1 соблюдается граничное условие

$\varepsilon_1(\partial\Phi_1/\partial n_1)=\varepsilon_2(\partial\Phi_2/\partial n_1)$, позволяющее представить $\widetilde{\sigma}_1$ в виде[1]

$$\widetilde{\sigma}_1 = \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{4\pi\varepsilon_2}\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1}\,. \tag{66.6}$$

По законам электростатики

$$\Phi = \Phi_0 + \int \frac{\widetilde{\varrho}_1}{R}\,dV + \int \frac{\widetilde{\varrho}_2}{R}\,dV + \oint \frac{\widetilde{\sigma}_1}{R}\,dS + \oint \frac{\widetilde{\sigma}_2}{R}\,dS. \tag{66.7}$$

Подставляя в (66.7) выражения (66.3), (66.5), (66.6) и (66.1), приходим к интегральному уравнению

$$\Phi + \frac{\mu}{4\pi}\oint\limits_{S_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1}\,\frac{dS}{R} + \frac{\nu}{4\pi}\oint\limits_{S_2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial n_2}\,\frac{dS}{R} = \Theta, \tag{66.8}$$

где

$$\mu = (\varepsilon_1-\varepsilon_2)/\varepsilon_2, \qquad \nu = \varepsilon_2 - 1, \tag{66.9}$$

$$\Theta(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_1}\int\limits_{V_1}\frac{\varrho_0(\mathbf{r})}{R}\,dV + \frac{1}{\varepsilon_2}\int\limits_{V_2}\frac{\varrho_0(\mathbf{r})}{R}\,dV. \tag{66.10}$$

Мы получили интегральное уравнение (66.8) такого же типа, что и (65.6), но в отличие от последнего теперь правая часть уравнения, описываемая функцией Θ, уже не является в области V_1+V_2 гармонической функцией, как, впрочем, и потенциал полного поля Φ. Нетрудно видеть, однако, что замена

$$\Phi = \Theta + \overline{\Phi} \tag{66.11}$$

переводит (66.8) в уравнение того же типа

$$\overline{\Phi} + \frac{\mu}{4\pi}\oint\limits_{S_1}\frac{\partial\overline{\Phi}_1}{\partial n_1}\,\frac{dS}{R} + \frac{\nu}{4\pi}\oint\limits_{S_2}\frac{\partial\overline{\Phi}_2}{\partial n_2}\,\frac{dS}{R} = \overline{\Phi}_0, \tag{66.12}$$

но с гармоническими «потенциалами» $\overline{\Phi}$ и

$$\overline{\Phi}_0 = -\frac{\mu}{4\pi}\oint\limits_{S_1}\frac{\partial\Theta_1}{\partial n_1}\,\frac{dS}{R} - \frac{\nu}{4\pi}\oint\limits_{S_2}\frac{\partial\Theta_2}{\partial n_2}\,\frac{dS}{R} \tag{66.13}$$

в области V_1+V_2.

66.2. Поле внутри двухслойного эллипсоида

Будем считать теперь, что поверхности S_1 и S_2 двухслойного диэлектрика эллипсоидальны и даются уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{66.14}$$

[1] Поскольку значения нормальных производных потенциала Φ различаются по разные стороны от границ S_1 и S_2, то приходится, как это сделано в формулах (66.5), (66.6) и других необходимых случаях, снабжать потенциал индексом принадлежности к соответствующему слою.

$$\frac{x^2}{\bar{a}^2} + \frac{y^2}{\bar{b}^2} + \frac{z^2}{\bar{c}^2} = 1 \tag{66.15}$$

соответственно. Единичные векторы внешних нормалей к S_1 и S_2, очевидно, равны

$$\mathbf{n}_1 = \left\{ \left(x/a^2\right) p,\ \left(y/b^2\right) p,\ \left(z/c^2\right) p \right\},$$
$$\mathbf{n}_2 = \left\{ \left(x/\bar{a}^2\right) \bar{p},\ \left(y/\bar{b}^2\right) \bar{p},\ \left(z/\bar{c}^2\right) \bar{p} \right\},$$

где $p = \left\langle x^2/a^4 \right\rangle^{-1/2}$, $\bar{p} = \left\langle x^2/\bar{a}^4 \right\rangle^{-1/2}$. Как всегда, угловые скобки обозначают сумму трех членов циклической перестановки.

Метод решения интегрального уравнения вида (66.12) (точнее, системы двух уравнений относительно $\overline{\Phi}_1$ и $\overline{\Phi}_2$) во внутренней области двухслойного эллипсоида изложен в предыдущем параграфе, где, в частности, показано, что точное решение достигается лишь при софокусности поверхностей S_1 и S_2, т. е. при выполнении соотношений

$$\bar{a}^2 = a^2 + \xi_0, \quad \bar{b}^2 = b^2 + \xi_0, \quad \bar{c}^2 = c^2 + \xi_0 \tag{66.16}$$

для полуосей эллипсоидов. Здесь ξ_0 — значение эллипсоидальной координаты ξ, соответствующее поверхности (66.15). Сама же эллипсоидальная координата определяется ξ как неотрицательный корень кубического уравнения $\left\langle x^2/(a^2+\xi) \right\rangle = 1$. Для получения точного решения наряду с (66.16) требуется также, чтобы плотность $\varrho_0(\mathbf{r})$ источников в пределах каждого из слоев V_1 и V_2 эллипсоида описывалась полиномиальной функцией декартовых координат. В частности, здесь рассмотрим случай ступенчатой функции

$$\varrho_0(\mathbf{r}) = \begin{cases} \varrho_1 = \mathrm{const}_1 & \mathbf{r} \in V_1, \\ \varrho_2 = \mathrm{const}_2 & \mathbf{r} \in V_2. \end{cases} \tag{66.17}$$

При решении уравнения (66.12) используются приведенные в § 14 и § 21 явные представления ньютоновых объемных и поверхностных потенциалов эллипсоида, плотности источников ϱ и $\sigma = \varrho p$ которых таковы, что ϱ является степенной функцией декартовых координат.

Вычислим входящие в (66.12) функции $\Theta(\mathbf{r})$ и $\overline{\Phi}_0(\mathbf{r})$, соответствующие распределению (66.17). Переписывая (66.10) в виде

$$\Theta(\mathbf{r}) = \delta \int\limits_{V_1} \frac{dV}{R} + (\varrho_2/\varepsilon_2) \int\limits_{V_1+V_2} \frac{dV}{R}, \tag{66.18}$$

где

$$\delta = \varrho_1/\varepsilon_1 - \varrho_2/\varepsilon_2,$$

находим

$$\Theta(\mathbf{r}) = \begin{cases} \Theta_1 = 2\pi \Big[\delta \left(M_{000} - \left\langle M_{100} x^2 \right\rangle \right) + \\ \qquad\qquad + \dfrac{\varrho_2}{\varepsilon_2} \left(\overline{M}_{000} - \left\langle \overline{M}_{100} x^2 \right\rangle \right) \Big] \qquad \mathbf{r} \in V_1, & (66.19) \\ \Theta_2 = 2\pi \Big\{ \delta \left[\mathscr{M}_{000}(\xi) - \left\langle \mathscr{M}_{100}(\xi) x^2 \right\rangle \right] + \\ \qquad\qquad + \dfrac{\varrho_2}{\varepsilon_2} \left(\overline{M}_{000} - \left\langle \overline{M}_{100} x^2 \right\rangle \right) \Big\} \qquad \mathbf{r} \in V_2, & (66.20) \\ \Theta^{(e)} = 2\pi \Gamma_0 \left[\overline{\mathscr{M}}_{000}(\lambda) - \left\langle \overline{\mathscr{M}}_{100}(\lambda) x^2 \right\rangle \right]. & (66.21) \end{cases}$$

Здесь M_{lmn} — внутренние и $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$ — внешние потенциальные факторы эллипсоида (66.14), $\overline{M}_{lmn}$ — внутренние и $\overline{\mathscr{M}}_{lmn}(\lambda)$ — внешние потенциальные фактора эллипсоида (66.15),

$$\lambda = \xi - \xi_0, \tag{66.22}$$

$$\Gamma_0 = g\delta + \varrho_2/\varepsilon_2, \tag{66.23}$$

$$g = \frac{abc}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\,. \tag{66.24}$$

При выводе формулы (66.21) использовалось являющееся следствием софокусности поверхностей S_1 и S_2 соотношение

$$\mathscr{M}_{lmn}(\xi) = g\overline{\mathscr{M}}_{lmn}(\lambda). \tag{66.25}$$

Подстановка (66.19) в (66.20) и (66.13) дает для $\overline{\Phi}_0$ выражение

$$\overline{\Phi}_0 = \mu\left\langle \Gamma_a \oint\limits_{S_1} \frac{x^2}{a^2}\,\frac{p\,dS}{R}\right\rangle + \nu\Gamma_0\left\langle \overline{M}_{100} \oint\limits_{S_2} \frac{x^2}{\bar{a}^2}\,\frac{\bar{p}\,dS}{R}\right\rangle, \tag{66.26}$$

где

$$\Gamma_a = \delta M_{100} + (\varrho_2/\varepsilon_2)\overline{M}_{100}. \tag{66.27}$$

В результате вычисления интегралов в (66.26) получаем

$$\overline{\Phi}_0 = \begin{cases} 2\pi\left(A_0 + \left\langle A_a x^2\right\rangle\right) & \mathbf{r}\in V_1, \qquad (66.28)\\ 2\pi\left[\mathscr{A}_0(\xi) + \left\langle \mathscr{A}_a(\xi)x^2\right\rangle\right] & \mathbf{r}\in V_2, \qquad (66.29)\end{cases}$$

где

$$A_0 = \mu\left[(\varrho_1/\varepsilon_1)M_{000} - \left\langle \Gamma_a a^2 M_{100}\right\rangle\right] + \nu\Gamma_0\left(\overline{M}_{000} - \left\langle \bar{a}^2\overline{M}{}^2_{100}\right\rangle\right),$$

$$A_a = -\mu\left(\frac{\varrho_1}{\varepsilon_1}M_{100} - \Gamma_a\,a^2M_{200} - \Gamma_b\,b^2M_{110} - \Gamma_c\,c^2M_{101}\right) - \\ - \nu\Gamma_0\left(\overline{M}_{100} - \bar{a}^2\overline{M}_{100}\overline{M}_{200} - \bar{b}^2\overline{M}_{010}\overline{M}_{110} - \bar{c}^2\overline{M}_{001}\overline{M}_{101}\right),$$

$$\mathscr{A}_0(\xi) = A_0 - \mu\left[(\varrho_1/\varepsilon_1)\mathscr{R}_{000}(\xi) - \left\langle \Gamma_a\,a^2\mathscr{R}_{100}(\xi)\right\rangle\right],$$

$$\mathscr{A}_a(\xi) = A_a + \mu\left(\frac{\varrho_1}{\varepsilon_1}\mathscr{R}_{100}(\xi) - \Gamma_a\,a^2\mathscr{R}_{200}(\xi) - \Gamma_b\,b^2\mathscr{R}_{110}(\xi) - \Gamma_c\,c^2\mathscr{R}_{101}(\xi)\right),$$

$$\mathscr{R}_{lmn}(\xi) = M_{lmn} - \mathscr{M}_{lmn}(\xi).$$

В соответствии с видом «потенциала» $\overline{\Phi}_0(\mathbf{r})$ будем считать, что искомый «потенциал» $\overline{\Phi}(\mathbf{r})$ дается формулами: в объеме V_1

$$\overline{\Phi}_1 = 2\pi\left(\left\langle \alpha_{200}x^2\right\rangle + \alpha_{000}\right), \tag{66.30}$$

а в объеме V_2

$$\overline{\Phi}_2 = 2\pi\left[\left\langle \beta_{200}(\xi)x^2\right\rangle + \beta_{000}(\xi)\right], \tag{66.31}$$

Заметим, что из гармоничности $\overline{\Phi}$ следует, в частности, что

$$\langle \alpha_{200} \rangle = 0. \tag{66.32}$$

Подставляя (66.30), (66.31) в (66.12) и выполняя интегрирование, получаем для $\mathbf{r} \in V_1$

$$\begin{aligned}\left\langle \alpha_{200} x^2 \right\rangle + \alpha_{000} - \mu \left\langle \alpha_{200} \left[a^2 M_{100} + \left(M_{100} - a^2 M_{200} \right) x^2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \left(M_{010} - a^2 M_{110} \right) y^2 + \left(M_{001} - a^2 M_{101} \right) z^2 \right] \right\rangle = T,\end{aligned} \tag{66.33}$$

а для $\mathbf{r} \in V_2$

$$\begin{aligned}\left\langle \beta_{200}(\xi) x^2 \right\rangle + \beta_{000}(\xi) - \mu \left\langle \alpha_{200} \left[a^2 \mathscr{M}_{100} + \left(\mathscr{M}_{100} - a^2 \mathscr{M}_{200} \right) x^2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \left(\mathscr{M}_{010} - a^2 \mathscr{M}_{110} \right) y^2 + \left(\mathscr{M}_{001} - a^2 \mathscr{M}_{101} \right) z^2 \right] \right\rangle + \\ + \mu \left[(\varrho_1/\varepsilon_1) \mathscr{R}_{000}(\xi) - \left\langle \Gamma_a\, a^2 \mathscr{R}_{100}(\xi) \right\rangle \right] - \mu \left\langle\, (\varrho_1/\varepsilon_1)\, \mathscr{R}_{100}(\xi) - \right. \\ \left. - \Gamma_a\, a^2 \mathscr{R}_{200}(\xi) - \Gamma_b\, b^2 \mathscr{R}_{110}(\xi) - \Gamma_c\, c^2 \mathscr{R}_{101}(\xi) \right\rangle = T,\end{aligned} \tag{66.34}$$

где

$$\begin{aligned}T = A_0 + \left\langle A_a x^2 \right\rangle - \frac{\nu}{2} \left\langle \bar{a}^2 f_{200}(\xi_0) \left[\overline{M}_{000} - \bar{a}^2 \overline{M}_{100} - \left(\overline{M}_{100} - \bar{a}^2 \overline{M}_{200} \right) x^2 - \right.\right. \\ \left.\left. - \left(\overline{M}_{010} - \bar{a}^2 \overline{M}_{110} \right) y^2 - \left(\overline{M}_{001} - \bar{a}^2 \overline{M}_{101} \right) z^2 \right] \right\rangle - 2\nu \beta'_{000}(\xi_0) \overline{M}_{000},\end{aligned} \tag{66.35}$$

$$f_{lmn}(\xi_0) \equiv \left(\frac{l}{\bar{a}^2} + \frac{m}{\bar{b}^2} + \frac{n}{\bar{c}^2} \right) \beta_{lmn}(\xi_0) + 2\beta'_{lmn}(\xi_0). \tag{66.36}$$

Приравнивание в каждом из уравнений (66.33) и (66.34) коэффициентов при x^2 приводит к двум уравнениям для трех неизвестных констант α_{200}, α_{020}, α_{002} и трех неизвестных функций $\beta_{200}(\xi)$, $\beta_{020}(\xi)$ и $\beta_{002}(\xi)$:

$$\alpha_{200} + \mu \left(a^2 M_{200} \alpha_{200} + b^2 M_{110} \alpha_{020} + c^2 M_{101} \alpha_{002} \right) = T_a, \tag{66.37}$$

$$\begin{aligned}\beta_{200}(\xi) + \mu \left[a^2 \mathscr{M}_{200}(\xi) \alpha_{200} + b^2 \mathscr{M}_{110}(\xi) \alpha_{020} + c^2 \mathscr{M}_{101}(\xi) \alpha_{002} \right] - \\ - \mu \left(\frac{\varrho_1}{\varepsilon_1} \mathscr{R}_{100}(\xi) - \Gamma_a\, a^2 \mathscr{R}_{200}(\xi) - \Gamma_b\, b^2 \mathscr{R}_{110}(\xi) - \Gamma_c\, c^2 \mathscr{R}_{101}(\xi) \right) = T_a,\end{aligned} \tag{66.38}$$

где

$$\begin{aligned}T_a = A_a + \frac{\nu}{2} \left[\left\langle \bar{a}^2 f_{200}(\xi_0) \right\rangle \overline{M}_{100} - \bar{a}^4 f_{200}(\xi_0) \overline{M}_{200} - \right. \\ \left. - \bar{b}^4 f_{020}(\xi_0) \overline{M}_{110} - \bar{c}^4 f_{002}(\xi_0) \overline{M}_{101} \right].\end{aligned} \tag{66.39}$$

Недостающие четыре уравнения типа (66.37), (66.38) получаются из последних с помощью циклической перестановки и поэтому не приводятся. Из (66.37) и (66.38) с учетом (66.32) находим, что

$$\begin{aligned}\beta_{200}(\xi) = \alpha_{200} + \mu \left[a^2 \alpha_{200} \mathscr{R}_{200}(\xi) + b^2 \alpha_{020} \mathscr{R}_{110}(\xi) + c^2 \alpha_{002} \mathscr{R}_{101}(\xi) \right] + \\ + \mu \left(\frac{\varrho_1}{\varepsilon_1} \mathscr{R}_{100}(\xi) - \Gamma_a\, a^2 \mathscr{R}_{200}(\xi) - \Gamma_b\, b^2 \mathscr{R}_{110}(\xi) - \Gamma_c\, c^2 \mathscr{R}_{101}(\xi) \right),\end{aligned} \tag{66.40}$$

$$\frac{1}{2}\,\bar{a}^2 f_{200}(\xi_0) = \alpha_{200} + \mu\left[\frac{\varrho_1}{\varepsilon_1}\left(R_{100} + \frac{g}{2}\right) + a^2(\alpha_{200} - \Gamma_a)R_{200} + \right.$$
$$\left. + b^2(\alpha_{020} - \Gamma_b)R_{110} + c^2(\alpha_{002} - \Gamma_c)R_{101}\right] +$$
$$+ \mu g \frac{a^2}{\bar{a}^2}\,(\alpha_{200} - \Gamma_a) + \frac{\mu g}{2}\left\langle \frac{a^2}{\bar{a}^2}(\alpha_{200} - \Gamma_a)\right\rangle, \quad (66.41)$$

где

$$R_{lmn} \equiv \mathscr{R}_{lmn}(\xi_0) = M_{lmn} - g\overline{M}_{lmn}.$$

Подставляя (66.41) в (66.37) и используя циклическую перестановку, приходим к системе линейных алгебраических уравнений[1]

$$q_{300}\,\alpha_{200} + q_{120}\,\alpha_{020} + q_{102}\,\alpha_{002} = A_{200}, \qquad (66.42)$$

в которой

$$A_{200} = \mu\left(-\frac{\varrho_1}{\varepsilon_1}M_{100} + a^2\Gamma_a M_{200} + b^2\Gamma_b M_{110} + c^2\Gamma_c M_{101}\right) +$$
$$+ \mu\nu g\left(-\frac{\varrho_1}{\varepsilon_1}\overline{M}_{100} + a^2\Gamma_a\overline{M}_{200} + b^2\Gamma_b\overline{M}_{110} + c^2\Gamma_c\overline{M}_{101}\right) +$$
$$+ \nu\Gamma_0\left(-\overline{M}_{100} + \bar{a}^2\overline{M}_{100}\overline{M}_{200} + \bar{b}^2\overline{M}_{010}\overline{M}_{110} + \bar{c}^2\overline{M}_{001}\overline{M}_{101}\right) -$$
$$- \mu\nu\frac{\varrho_1}{\varepsilon_1}\left(\bar{a}^2 R_{100}\overline{M}_{200} + \bar{b}^2 R_{010}\overline{M}_{110} + \bar{c}^2 R_{001}\overline{M}_{101}\right) +$$
$$+ \mu\nu\bar{a}^2\overline{M}_{200}\left(a^2\Gamma_a R_{200} + b^2\Gamma_b R_{110} + c^2\Gamma_c R_{101}\right) +$$
$$+ \mu\nu\bar{b}^2\overline{M}_{110}\left(a^2\Gamma_a R_{110} + b^2\Gamma_b R_{020} + c^2\Gamma_c R_{011}\right) +$$
$$+ \mu\nu\bar{c}^2\overline{M}_{101}\left(a^2\Gamma_a R_{101} + b^2\Gamma_b R_{011} + c^2\Gamma_c R_{002}\right),$$

$$q_{210} = \mu a^2 M_{110} + \nu\bar{a}^2\overline{M}_{110} +$$
$$+ \mu\nu a^2\left(g\overline{M}_{110} + \bar{a}^2\overline{M}_{110}R_{200} + \bar{b}^2\overline{M}_{020}R_{110} + \bar{c}^2\overline{M}_{011}R_{101}\right),$$

$$q_{300} = \varepsilon_1 - q_{210} - q_{201}.$$

Нетрудно проверить, что $\langle A_{200}\rangle = 0$. Таким образом, система уравнений (66.42) является частным случаем (для конкретизированного A_{200}) алгебраической системы, решение которой дано в подразделе 65.22 и имеет вид

$$\alpha_{200} = -\Delta^{-1}\left[A_{020}\,(\varepsilon_1 - q_{102} - q_{012} - q_{021}) + A_{020}\,(\varepsilon_1 - q_{120} - q_{012} - q_{021})\right],$$

$$\Delta = \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1\,\langle q_{120} + q_{102}\rangle + \langle q_{120}\,q_{201} + q_{102}\,q_{021} + q_{021}\,q_{201}\rangle\,.$$

Приравнивание свободных членов в уравнениях (66.33) и (66.34) приводит к следующей системе уравнений для неизвестных α_{000} и $\beta_{000}(\xi)$:

$$\alpha_{000} - \mu\left\langle a^2 M_{100}\alpha_{200}\right\rangle = T_0, \qquad (66.43)$$

$$\beta_{000}(\xi) - \mu\left\langle a^2\mathscr{M}_{100}(\xi)\alpha_{200}\right\rangle + \mu\left[\frac{\varrho_1}{\varepsilon_1}\mathscr{R}_{000}(\xi) - \left\langle\Gamma_a a^2\mathscr{R}_{100}(\xi)\right\rangle\right] = T_0, \quad (66.44)$$

[1] Как обычно, мы приводим лишь одно уравнение или выражение, если остальные получаются из приведенного с помощью циклической или взаимной перестановок.

где
$$T_0 = A_0 - \frac{\nu}{2}\left\langle f_{200}\left(\overline{M}_{000} - \bar{a}^2\overline{M}_{100}\right)\right\rangle - 2\nu\beta'_{000}(\xi_0)\overline{M}_{000}.$$

Из (66.43), (66.44) следует, что
$$\beta_{000}(\xi) = \alpha_{000} - \mu\left[(\varrho_1/\varepsilon_1)\mathscr{R}_{000}(\xi) + \left\langle(\alpha_{200} - \Gamma_a)\, a^2\mathscr{R}_{100}(\xi)\right\rangle\right],$$
$$2\beta'_{000}(\xi_0) = -\mu g\left[\varrho_1/\varepsilon_1 + \left\langle(a/\bar{a})^2(\alpha_{200} - \Gamma_a)\right\rangle\right],$$
$$3\,\alpha_{000} = 2\left(\mu\frac{\varrho_1}{\varepsilon_1}\,M_{000} + \nu\Gamma_0\overline{M}_{000} + \mu\nu g\,\frac{\varrho_1}{\varepsilon_1}\,\overline{M}_{000}\right) - \left\langle\bar{a}^2\alpha_{200}\right\rangle.$$

Таким образом, потенциалы $\Phi_1(\mathbf{r})$ и $\Phi_2(\mathbf{r})$ полного электростатического поля внутри заряженного двухслойного диэлектрического эллипсоида определены.

66.3. Мультипольные моменты и внешнее поле

Согласно формулам (66.5) и (66.6), найденным потенциалам Φ_1 и Φ_2 соответствуют поверхностные плотности поляризационных зарядов
$$\widetilde{\sigma}_1 = -\mu\left\langle(\alpha_{200} - \Gamma_a)\,\frac{x^2}{a^2}\right\rangle p\,,$$
$$\widetilde{\sigma}_2 = -\nu\left\{\left\langle\left[\frac{1}{2}\,\bar{a}^2 f_{200}(\xi_0) - \Gamma_0\overline{M}_{100}\right]\frac{x^2}{\bar{a}^2}\right\rangle + \beta'_{000}(\xi_0)\right\}\bar{p}\,.$$

Поскольку известны и плотности объемного поляризационного заряда (см. формулы (66.3) и (66.17)), то становится возможным, обращаясь к (66.7), определить потенциал $\Phi_{\text{ind}} = \Phi^{(e)} - \Phi_0^{(e)}$ индуцированного поля снаружи двухслойного эллипсоида. Здесь наружный потенциал первичного поля
$$\Phi_0^{(e)} = \int\limits_{V_1}\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{R}\,dV + \int\limits_{V_1+V_2}\frac{\varrho_2}{R}\,dV = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\left[\overline{\mathscr{M}}_{000}(\lambda) - \left\langle\overline{\mathscr{M}}_{100}(\lambda)x^2\right\rangle\right], \quad (66.45)$$
где Q — полный заряд.

Непосредственное вычисление интегралов, входящих в (66.7), приводит к весьма громоздкой формуле для Φ_{ind}. Удобнее использовать мультипольное представление для Φ_{ind}, позволяющее «упрятать» многочисленные геометрические $(a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ и физические $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varrho_1, \varrho_2)$ параметры задачи в мультипольные моменты. В соответствии с общей теорией мультипольного представления потенциалов эллипсоида (см. гл. 7) потенциалы, создаваемые поверхностной плотностью источников, имеющей вид однородного полинома 2-й степени, и постоянной объемной плотностью источников, выражаются через полный заряд и тензор полного квадрупольного момента эллипсоида. Так как полный поляризационный заряд всегда равен нулю и, кроме того, в нашем случае равны нулю (это очевидно из соображений симметрии) недиагональные компоненты квадрупольного момента, то будем иметь
$$\Phi_{\text{ind}} = -\frac{5}{4\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\left\langle D_{xx}\left[\overline{\mathscr{M}}_{100}(\lambda) - \overline{\mathscr{M}}_{200}(\lambda)\,x^2 - \overline{\mathscr{M}}_{110}(\lambda)\,y^2 - \overline{\mathscr{M}}_{101}(\lambda)\,z^2\right]\right\rangle, \quad (66.46)$$

где компонента D_{xx} тензора квадрупольного момента поляризационных зарядов эллипсоида равна

$$D_{xx} = D_{xx}^{(\sigma)} + \bar{D}_{xx}^{(\sigma)} + D_{xx}^{(\varrho)} + \bar{D}_{xx}^{(\varrho)},$$

$$D_{xx}^{(\sigma)} = \oint\limits_{S_1} \left(3x^2 - \left\langle x^2 \right\rangle\right) \widetilde{\sigma}_1 \, dS = \frac{1}{5} \, \mu V_1 \left\{ (\varrho_1/\varepsilon_1) \left(3a^2 - \left\langle a^2 \right\rangle\right) + \right.$$
$$\left. +2 \left[3a^2\Gamma_a - \delta M_{000} - (\varrho_2/\varepsilon_2) \left(\overline{M}_{000} - \xi_0\right) - 3a^2\alpha_{200} + \left\langle a^2\alpha_{200} \right\rangle\right] \right\},$$

$$\bar{D}_{xx}^{(\sigma)} = \oint\limits_{S_2} \left(3x^2 - \left\langle x^2 \right\rangle\right) \widetilde{\sigma}_2 \, dS = \frac{1}{5} \nu \left(V_1 + V_2\right) \left\{ \left(3\bar{a}^2 - \left\langle \bar{a}^2 \right\rangle\right) \left[\Gamma_0 - 5\beta'_{000}(\xi_0) - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\frac{1}{2} \left\langle \bar{a}^2 f_{200}(\xi_0) \right\rangle\right] + 2\Gamma_0 \left(3\bar{a}^2\overline{M}_{100} - \overline{M}_{000}\right) - 3\bar{a}^4 f_{200}(\xi_0) + \left\langle \bar{a}^4 f_{200}(\xi_0) \right\rangle \right\},$$

$$D_{xx}^{(\varrho)} = \int\limits_{V_1} \left(3x^2 - \left\langle x^2 \right\rangle\right) \widetilde{\varrho}_1 \, dV = -\frac{\varepsilon_1 - 1}{5\,\varepsilon_1} \, \varrho_1 V_1 \left(3a^2 - \left\langle a^2 \right\rangle\right),$$

$$\bar{D}_{xx}^{(\varrho)} = \int\limits_{V_2} \left(3x^2 - \left\langle x^2 \right\rangle\right) \widetilde{\varrho}_2 \, dV = -\frac{\varepsilon_2 - 1}{5\,\varepsilon_2} \, \varrho_2 V_2 \left(3\bar{a}^2 - \left\langle \bar{a}^2 \right\rangle\right).$$

Вывод последнего равенства связан с использованием тождества

$$3\bar{a}^2 - \left\langle \bar{a}^2 \right\rangle = 3a^2 - \left\langle a^2 \right\rangle,$$

являющегося следствием соотношений (66.16).

Присутствие в формулах (66.45) и (66.46) отношений $\overline{\mathscr{M}}_{lmn}(\lambda)/\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ не означает зависимости этих формул от реальных размеров эллипсоида, т. к. для фиксированной точки наблюдения (x, y, z) отношение $\overline{\mathscr{M}}_{lmn}(\lambda)/\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ инвариантно при переходе от одного эллипсоида к любому другому, софокусному с первым.

Очевидно, что обобщение интегральных уравнений электростатики в форме (66.7), (66.8) или (66.12) на случай N-слойного диэлектрика не представляет труда. Столь же очевидно, что использованный здесь метод точного решения принципиально пригоден и для случая многослойного (с софокусными границами слоев) диэлектрического эллипсоида, у которого внутри каждого слоя диэлектрическая проницаемость имеет постоянное значение, а плотность заряда является полиномиальной функцией декартовых координат.

Полученное в данном параграфе решение распространяется на различные физические ситуации, характеризуемые конкретным набором параметров $\{\varrho_1, \varepsilon_1; \varrho_2, \varepsilon_2\}$. Отметим некоторые из относящихся сюда случаев: однородно заряженный однородный диэлектрический эллипсоид $\{\varrho, \varepsilon; \varrho, \varepsilon\}$ или $\{\varrho, \varepsilon; 0, 1\}$; разноименно заряженный двухслойный диэлектрик с нулевым полным зарядом $\{\varrho, \varepsilon_1; -\varrho g/(1-g), \varepsilon_2\}$; заряженное проводящее ядро в заряженной $\{\varrho_1, \infty; \varrho_2, \varepsilon\}$ или нейтральной $\{\varrho, \infty; 0, \varepsilon\}$ диэлектрической оболочке; полый заряженный диэлектрик $\{0, 1; \varrho, \varepsilon\}$.

Принцип суперпозиции полей позволяет из решений, построенных в данном и предыдущем параграфах, скомбинировать решение более общей задачи о неоднородно заряженном двухслойном диэлектрическом эллипсоиде в неоднородном поле наружных источников.

§ 67. Диэлектрический эллиптический цилиндр во внешнем поле

Двумерную задачу о диэлектрическом эллиптическом цилиндре во внешнем поле можно рассматривать, как и трехмерную задачу об эллипсоиде, исходя из интегральных уравнений электростатики. В нашем случае, однако, проще воспользоваться полученными в этой главе решениями аналогичных задач об эллипсоиде и произвести в них переход к пределу при $c \to \infty$. Двумерность задачи позволяет обходиться двухиндексным обозначением коэффициентов и функций подобно обозначению потенциальных факторов эллиптического цилиндра (см. § 6). Выкладки, связанные с выполнением предельного перехода здесь опущены. Подчеркнем лишь особую полезность формулы (6.5).

67.1. Незаряженный эллиптический цилиндр

Внешнее поле, описываемое гармоническим потенциалом

$$\Phi_0 = -A_{10}x - A_{01}y - \frac{1}{2}A_{20}x^2 + \frac{1}{2}A_{20}y^2 - A_{11}xy - \\ + \frac{1}{3}A_{12}x^3 + \frac{1}{3}A_{21}y^3 - A_{12}xy^2 - A_{21}x^2y, \quad (67.1)$$

наводит внутри диэлектрического цилиндра полное электрическое поле, гармонический потенциал которого есть

$$\Phi^{(i)} = -\nu\left(\alpha_{00} + \alpha_{10}x + \alpha_{01}y + \frac{1}{2}\,\alpha_{20}x^2 - \frac{1}{2}\,\alpha_{20}y^2 + \alpha_{11}xy - \right. \\ \left. -\frac{1}{3}\,\alpha_{12}x^3 - \frac{1}{3}\,\alpha_{21}y^3 + \alpha_{12}xy^2 + \alpha_{21}x^2y\right). \quad (67.2)$$

Здесь

$$\nu\alpha_{00} = \frac{ab\left(a^2 - b^2\right)}{2\left[(a+b)^2\nu + 2ab\right]}\,A_{20}, \quad (67.3)$$

$$\nu\alpha_{10} = \frac{a+b}{(a+b)\nu + b}\left\{A_{10} - \frac{ab(a+b)(a-b)^2}{2\left[(a+b)^3\nu + b\left(3a^2+b^2\right)\right]}\,A_{12}\right\}, \quad (67.4)$$

$$\nu\alpha_{20} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2\nu + 2ab}\,A_{20}, \quad (67.5)$$

$$\nu\alpha_{11} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2\nu + a^2 + b^2}\,A_{11}, \quad (67.6)$$

$$\nu\alpha_{12} = \frac{(a+b)^3}{(a+b)^3\nu + b\left(3a^2+b^2\right)}\,A_{12}. \quad (67.7)$$

Содержавшиеся первоначально в формулах (67.3)—(67.7) внутренние потенциальные факторы M_{lm} эллиптического цилиндра заменены их явными выражениями (6.8). Выражения для α_{01} и α_{21} получаются из (67.4) и (67.7) соответственно в результате взаимной замены $a \leftrightarrow b$ и $A_{lm} \leftrightarrow A_{ml}$.

Поле снаружи эллиптического цилиндра будет приведено ниже при рассмотрении более общего случая — двухслойного цилиндра.

67.2. Однородно заряженный эллиптический цилиндр

Постоянной объемной плотности ϱ_0 заряда соответствует вакуумный потенциал

$$\Phi_0 = -2\pi\varrho_0 \left(M_{10}x^2 + M_{01}y^2\right), \qquad (67.8)$$

поле которого вместе с индуцированным внутри диэлектрического эллиптического цилиндра полем образует полное электрическое поле, характеризуемое потенциалом

$$\Phi^{(i)} = \Phi_0 - 2\pi\varrho_0 \left[\alpha_{20}a^2 \left(M_{10} - M_{20}x^2 - M_{11}y^2\right) + \right.$$
$$\left. + \alpha_{02}b^2 \left(M_{01} - M_{11}x^2 - M_{02}y^2\right)\right]. \qquad (67.9)$$

Здесь

$$\alpha_{20} = \frac{b[\nu(a+b)+a]}{(\nu+1)[\nu(a+b)^2+2ab]}, \qquad \alpha_{20}+\alpha_{02} = \frac{1}{\nu+1}, \qquad (67.10)$$

а явный вид внутренних потенциальных факторов M_{lm} дается формулами (6.8).

Снаружи эллиптического цилиндра потенциал полного поля имеет вид

$$\Phi^{(e)} = 2\pi\varrho_0 \left[\mathscr{L}_{00} - \mathscr{M}_{10}x^2 - \mathscr{M}_{01}y^2 - \alpha_{20}a^2 \left(\mathscr{M}_{10} - \mathscr{M}_{20}x^2 - \mathscr{M}_{11}y^2\right) - \right.$$
$$\left. -\alpha_{02}b^2 \left(\mathscr{M}_{01} - \mathscr{M}_{11}x^2 - \mathscr{M}_{02}y^2\right)\right]. \qquad (67.11)$$

67.3. Двухслойный эллиптический цилиндр в неоднородном поле

Пусть в вакуумное поле, описываемое гармоническим потенциалом

$$\Phi_0 = A_a x + A_b y + \frac{1}{2}\left(A_{20}\,x^2 + A_{02}\,y^2\right) + A_{11}\,xy, \qquad (67.12)$$

где

$$A_{20} + A_{02} = 0, \qquad (67.13)$$

помещен двухслойный эллиптический цилиндр, у которого в пределах каждого слоя диэлектрические проницаемости ε_1 и ε_2 постоянны, а эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{\bar a^2} + \frac{y^2}{\bar b^2} = 1,$$

сечения границ софокусны, т. е. $\bar a^2 = a^2 + \xi_0$, $\bar b^2 = b^2 + \xi_0$. Как и в § 65, внутреннее тело (ядро) будем отмечать индексом «1», а внешнее тело (оболочку) — индексом «2».

Потенциал полного внутреннего (в ядре и оболочке) электрического поля дается формулами

$$\Phi_1 = \alpha_a x + \alpha_b y + \frac{1}{2}\left(\alpha_{20}\,x^2 + \alpha_{02}\,y^2\right) + \alpha_{11}\,xy + \alpha_{00}, \qquad (67.14)$$

$$\Phi_2 = \beta_a(\xi)x + \beta_b(\xi)y + \frac{1}{2}\left[\beta_{20}(\xi)\,x^2 + \beta_{02}(\xi)\,y^2\right] + \beta_{11}(\xi)\,xy + \beta_{00}(\xi). \qquad (67.15)$$

Здесь

$$\alpha_a = A_a \left[\varepsilon_2\mu g\overline{M}_{10} + (1+\mu R_{10})\left(1+\nu\overline{M}_{10}\right)\right]^{-1}, \tag{67.16}$$

$$g = ab/(\bar{a}\bar{b}), \qquad R_{lm} = M_{lm} - g\overline{M}_{lm},$$

$$\alpha_{11} = \frac{A_{11}}{\varepsilon_2\mu g\left(a^2+b^2\right)\overline{M}_{11} + \left[1+\mu\left(a^2+b^2\right)R_{11}\right]\left[1+\nu\left(\bar{a}^2+\bar{b}^2\right)\overline{M}_{11}\right]}, \tag{67.17}$$

$$\alpha_{20} = -\alpha_{02} = A_{20}\left(\varepsilon_1 - q_{21} - q_{12}\right)^{-1}, \tag{67.18}$$

$$q_{12} = \mu b^2 M_{11} + \nu\bar{b}^2\overline{M}_{11} + \mu\nu b^2\left(g\overline{M}_{11} + \bar{a}^2\overline{M}_{20}R_{11} + \bar{b}^2\overline{M}_{11}R_{02}\right),$$

$$\alpha_{00} = \alpha_{20}\frac{\bar{a}\bar{b}}{2}\left\{\mu g\frac{a-b}{a+b}\left[1+\frac{2\nu\bar{a}\bar{b}}{(\bar{a}+\bar{b})^2}\right] + \right.$$
$$\left. +\nu\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{a}+\bar{b}}\left[1+\mu g\frac{a^2+b^2}{(\bar{a}+\bar{b})^2}\right]\right\}, \tag{67.19}$$

$$\beta_a(\xi) = \alpha_a\left\{1+\mu\left[M_{10} - \mathscr{M}_{10}(\xi)\right]\right\}, \tag{67.20}$$

$$\beta_{11}(\xi) = \alpha_{11}\left\{1+\mu\left(a^2+b^2\right)\left[M_{11} - \mathscr{M}_{11}(\xi)\right]\right\}, \tag{67.21}$$

$$\beta_{20}(\xi) = \alpha_{20}\left\{1+\mu a^2\left[M_{20} - \mathscr{M}_{20}(\xi)\right] - \mu b^2\left[M_{11} - \mathscr{M}_{11}(\xi)\right]\right\}, \tag{67.22}$$

$$\beta_{00}(\xi) = \alpha_{00} - \alpha_{20}\frac{\mu}{2}\left\{a^2\left[M_{10} - \mathscr{M}_{10}(\xi)\right] - b^2\left[M_{01} - \mathscr{M}_{01}(\xi)\right]\right\}. \tag{67.23}$$

Выражения для α_b, α_{02}, q_{21}, β_b и β_{02} получаются из приведенных выражений для α_a, α_{20}, q_{12}, β_a и β_{20} соответственно с помощью взаимной замены $a \leftrightarrow b$. Напомним, что криволинейная координата ξ в случае эллиптического цилиндра определяется как неотрицательный корень квадратного уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} = 1. \tag{67.24}$$

Посредством ξ в данном параграфе обозначается координата относительно ядра. Аналогичную координату относительно всего двухслойного цилиндра будем обозначать через λ. Наконец, потенциальные факторы ядра обозначены как M_{lm} и $\mathscr{M}_{lm}(\xi)$, а всего эллиптического цилиндра — как $\overline{M}_{lm}$ и $\overline{\mathscr{M}}_{lm}(\lambda)$.

Электростатический потенциал индуцированного поля снаружи двухслойного эллиптического цилиндра можно получить, вычисляя предел при $c \to \infty$, к которому стремится потенциал (65.79) двухслойного эллипсоида. При этом слагаемые с компонентами октупольного момента следует отбросить, поскольку в данном параграфе рассматривается квадратичный вакуумный потенциал. Промежуточный результат приобретает вид

$$\Phi_{\text{инд}} = \frac{1}{\bar{a}\bar{b}}\left\{3\tilde{d}_x\overline{\mathscr{M}}_{10}(\lambda)x + 3\tilde{d}_y\overline{\mathscr{M}}_{01}(\lambda)y + 5\tilde{D}_{xy}\overline{\mathscr{M}}_{11}(\lambda)xy + \right.$$
$$+\frac{5}{4}\tilde{Q}_{xx}\left[\overline{\mathscr{M}}_{20}(\lambda)x^2 + \overline{\mathscr{M}}_{11}(\lambda)y^2 - \overline{\mathscr{M}}_{10}(\lambda)\right] +$$
$$\left. +\frac{5}{4}\tilde{Q}_{yy}\left[\overline{\mathscr{M}}_{11}(\lambda)x^2 + \overline{\mathscr{M}}_{02}(\lambda)y^2 - \overline{\mathscr{M}}_{01}(\lambda)\right]\right\}, \tag{67.25}$$

где

$$\tilde{d}_\alpha = \lim_{c\to\infty} \frac{q_\alpha}{c}, \qquad \tilde{Q}_{\alpha\beta} = \lim_{c\to\infty} \frac{q_{\alpha\beta}}{c} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{67.26}$$

а q_α и $q_{\alpha\beta}$ — компоненты дипольного и квадрупольного моментов эллипсоида, даваемые формулами (65.63)–(65.65). В частности,

$$\tilde{d}_x = -\alpha_a \frac{\bar{a}\bar{b}}{3} \left[\varepsilon_2 \mu g + \nu \left(1 + \mu R_{10}\right)\right], \tag{67.27}$$

$$\tilde{Q}_{xy} = -\alpha_{11} \frac{\bar{a}\bar{b}}{5} \left\{\varepsilon_2 \mu g \left(a^2 + b^2\right) + \nu \left(\bar{a}^2 + \bar{b}^2\right) \left[1 + \mu \left(a^2 + b^2\right) R_{11}\right]\right\}. \tag{67.28}$$

Что касается диагональных компонент квадрупольного тензора, то необходимо обратить внимание на следующее. В формулу (65.79) для потенциала эллипсоида эти компоненты входят в виде $\langle q_{xx}\psi_{xx}\rangle$. Выражения (см. (65.64)) всех трех диагональных компонент квадрупольного тензора содержат совпадающие (не изменяющиеся при циклической перестановке) слагаемые, которые можно вынести за угловые скобки $\langle q_{xx}\psi_{xx}\rangle$. Остающаяся величина $\langle \psi_{xx}\rangle$ обращается в нуль в силу неприводимости тензор-потенциала гомеоида (см. § 42). Таким образом, циклически симметричные фрагменты, общие для всех трех диагональных компонент квадрупольного тензора, не дают вклада в потенциал эллипсоида, и их можно не принимать в расчет. С учетом сказанного вычисление предела (67.26) дает

$$\tilde{Q}_{xx} \mathrel{\mathring{=}} -\alpha_{20} \frac{2\bar{a}\bar{b}}{5} \left\{\mu g a^2 + \nu \bar{a}^2 + \mu\nu \bar{a}^2 \left[\frac{2ab}{(a+b)^2} + g \frac{a^2+b^2}{\left(\bar{a}+\bar{b}\right)^2}\right]\right\}. \tag{67.29}$$

Выражение для $\tilde{Q}_{yy}$, также не учитывающее общие с $\tilde{Q}_{xx}$ циклически симметричные слагаемые, получается из (67.29) в результате взаимной замены $a \leftrightarrow b$. Следует иметь в виду, что в двумерном случае циклическая замена сводится к взаимной замене $x \leftrightarrow y$, $a \leftrightarrow b$, $\alpha_{\alpha\beta} \leftrightarrow \alpha_{\beta\alpha}$, а циклическая сумма — это сумма двух выражений, отличающихся друг от друга взаимной заменой $x \leftrightarrow y$, $a \leftrightarrow b$, $\alpha_{\alpha\beta} \leftrightarrow \alpha_{\beta\alpha}$. Поскольку, как можно легко проверить с помощью рекуррентных соотношений (6.14) или непосредственно с помощью формул (6.10), (6.8), сумма двух выражений, стоящих в квадратных скобках в (67.25) равна нулю, то и в двумерном случае ненулевой вклад в потенциал дают слагаемые диагональных компонент квадрупольного тензора, не связанные двумерной циклической симметрией. Условное равенство (67.29) и аналогичное для $\tilde{Q}_{yy}$ предназначены только для последующей подстановки в (67.25).

Нам осталось представить потенциал $\Phi_{\text{инд}}$ через погонные двумерные электрические мультипольные моменты (см. Приложение F). В случае двухслойного эллиптического цилиндра с поверхностными зарядами на границах слоев формулы (F.4) и (F.5) заменяются контурными интегралами

$$d_\alpha = \oint\limits_{L_1} \sigma_1 x_\alpha \, dl + \oint\limits_{L_2} \sigma_2 x_\alpha \, dl, \tag{67.30}$$

$$Q_{\alpha\beta} = \oint\limits_{L_1} \sigma_1 (2x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \, dl + \oint\limits_{L_2} \sigma_2 (2x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \, dl, \tag{67.31}$$

где в нашем случае

$$\sigma_1 = -\frac{\mu}{4\pi}\left[\alpha_a\frac{x}{a^2} + \alpha_b\frac{y}{b^2} + \alpha_{20}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) + \alpha_{11}\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}xy\right]p^{(1)},$$

$$\sigma_2 = -\frac{\nu}{4\pi}\left[f_a(\xi_0)x + f_b(\xi_0)y + f_{20}(\xi_0)x^2 + f_{02}(\xi_0)y^2 + \right.$$
$$\left. + f_{11}(\xi_0)xy + f_{00}(\xi_0)\right]p^{(2)},$$

$$p^{(1)} = \left(x^2/a^4 + y^2/b^4\right)^{-1/2}, \qquad p^{(2)} = \left(x^2/\bar{a}^4 + y^2/\bar{b}^4\right)^{-1/2},$$

$$f_a(\xi_0) = \frac{\alpha_a}{\bar{a}^2}(1 + \mu g + \mu R_{10}),$$

$$f_{11}(\xi_0) = \frac{\alpha_{11}}{\bar{a}^2\bar{b}^2}\left\{\left(\bar{a}^2+\bar{b}^2\right)\left[1 + \mu\left(a^2+b^2\right)R_{11}\right] + \mu g\left(a^2+b^2\right)\right\},$$

$$f_{20}(\xi_0) = \frac{\alpha_{20}}{\bar{a}^2}\left[1 + \mu\left(a^2R_{20} - b^2R_{11}\right) + \frac{\mu g}{2}\left(3\frac{a^2}{\bar{a}^2} - \frac{b^2}{\bar{b}^2}\right)\right],$$

$$f_{00}(\xi_0) = -\alpha_{20}\frac{\mu g}{2}\left(\frac{a^2}{\bar{a}^2} - \frac{b^2}{\bar{b}^2}\right).$$

Интегрирование в (67.30), (67.31) по контурам эллипсов сечения (ядра и оболочки) эллиптического цилиндра облегчает формула (В.27) Приложения В, приводя к следующим результатам:

$$d_x = -\alpha_a\frac{\bar{a}\bar{b}}{4}\left(\varepsilon_2\mu g + \nu + \mu\nu R_{10}\right), \tag{67.32}$$

$$Q_{xy} = -\alpha_{11}\frac{\bar{a}\bar{b}}{8}\left\{(1+\nu)\mu g\left(a^2+b^2\right) + \right.$$
$$\left. +\nu\left(\bar{a}^2+\bar{b}^2\right)\left[1 + \mu - 2\mu\frac{ab}{(a+b)^2} - \frac{\mu g\left(a^2+b^2\right)}{(\bar{a}+\bar{b})^2}\right]\right\}, \tag{67.33}$$

$$Q_{xx} = -\alpha_{20}\frac{\bar{a}\bar{b}}{8}\left\{\mu g\left(a^2+b^2\right) + \right.$$
$$\left. +\nu\left(\bar{a}^2+\bar{b}^2\right)\left[1 + \frac{2\mu ab}{(a+b)^2} + \frac{\mu g(a^2+b^2)}{(\bar{a}+\bar{b})^2}\right]\right\}. \tag{67.34}$$

Если из выражений Q_{xx} и Q_{yy} изъять общие для них циклически симметричные слагаемые, то оставшиеся части оказываются равными соответственно выражению (67.29) и аналогичному выражению для $\tilde{Q}_{yy}$, умноженным на $\frac{5}{8}$. Это позволяет представить потенциал (67.25) в следующем (выраженном в терминах двумерных мультипольных моментов) окончательном виде:

$$\Phi_{\text{инд}} = d_x\psi_x + d_y\psi_y + Q_{xx}\psi_{xx} + Q_{yy}\psi_{yy} + 2Q_{xy}\psi_{xy}, \tag{67.35}$$

где ψ_α и $\psi_{\alpha\beta}$ суть компоненты тензор-потенциала «двумерного гомеоида» — поверхности эллиптического цилиндра, равные

$$\psi_x = \frac{4}{\bar{a}\bar{b}}\,\overline{\mathscr{M}}_{10}\,x, \tag{67.36}$$

$$\psi_{xx} = \frac{2}{\bar{a}\bar{b}}\left[\overline{\mathscr{M}}_{20}(\lambda)\,x^2 + \overline{\mathscr{M}}_{11}(\lambda)\,y^2 - \overline{\mathscr{M}}_{10}(\lambda)\right], \tag{67.37}$$

$$\psi_{xy} = \frac{4}{\bar{a}\bar{b}}\,\overline{\mathscr{M}}_{11}(\lambda)\,xy. \tag{67.38}$$

Выражения для ψ_y и ψ_{yy} получаются из (67.36) и (67.37) с помощью взаимной замены $x \leftrightarrow y$.

Как показывает рассмотренный пример, наружные потенциалы эллиптического цилиндра также обладают мультипольным представлением.

Глава 11
Адекватные источники

§ 68. Виды адекватных источников

Известно, что различные системы зарядов могут создавать во внешней области одинаковое электростатическое поле. Источники, обладающие указанным свойством, будем называть *адекватными*. Существование адекватных источников подтверждается точными формулами представления гармонического потенциала поля, справедливыми как для дискретных, так и для распределенных систем произвольной конфигурации.

Например, из мультипольного разложения потенциала (35.5)

$$\left.\begin{matrix}\Phi(\mathbf{r}) \\ \\ \Psi(\mathbf{r})\end{matrix}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\; Q_{i_1\ldots i_n}\; \frac{x_{i_1}\cdots x_{i_n}}{r^{2n+1}}, \tag{68.1}$$

где $Q_{i_1\ldots i_n}$ — тензор 2^n-польного момента системы зарядов, видно, что внешнее поле системы совпадает с суммарным полем всех представленных в (68.1) точечных мультиполей, помещенных в начало координат. В случае шара (см. (37.10) и (37.15)) с объемной $\varrho(\mathbf{r}) = P_m(x,y,z)$ или поверхностной $\sigma(\mathbf{r}) = T_m(x,y,z)$ плотностью заряда, где P_m и T_m — полиномы степени m, ряд (68.1) конечен и содержит слагаемые с мультипольными тензорами не выше m-го ранга, причем совпадение всех этих тензоров для ϱ и σ означает, что удовлетворяющие этому условию распределения ϱ и σ адекватны. В частности, при

$$\varrho = \frac{3Q}{4\pi a^3} \qquad \text{или} \qquad \sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}\,,$$

где a — радиус шара, в разложении (68.1) отлично от нуля только первое $(n = 0)$ слагаемое, а соответствующие наружные поля шара и сферы идентичны и совпадают с полем точечного заряда Q, помещенного в центр шара.

Другой пример. Если система зарядов заключена в объеме V, охватываемом замкнутой поверхностью S с внешней нормалью $\mathbf{n}$, то в точке наблюдения $\mathbf{r}$, взятой вне V, потенциал системы $\Phi(\mathbf{r}) = \int(\varrho/R)\,dV$ равен (см., например, [159, 548])

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\oint \frac{\partial\Phi}{\partial n}\,\frac{dS}{R} + \frac{1}{4\pi}\oint \Phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) dS\,. \tag{68.2}$$

Здесь R — расстояние между точками наблюдения и интегрирования. Таким образом, объемный потенциал Φ источников ϱ можно заменить суммой потенциала $\Psi(\mathbf{r}) = \oint \frac{\sigma}{R}\, dS$ простого слоя источников $\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ и потенциала $\Upsilon(\mathbf{r}) = \oint \tau \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) dS$ двойного слоя источников $\tau = \frac{\Phi}{4\pi}$, где плотности σ и τ относятся к поверхности S.

Так, в случае однородно заряженного $(\varrho = \varrho_0)$ эллипсоида, ограниченного поверхностью

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1\,, \tag{68.3}$$

будем иметь

$$\Phi = 2\pi\varrho_0 \left(\mathscr{M}_{000} - \left\langle \mathscr{M}_{100}\, x^2\right\rangle\right);$$

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial\Phi}{\partial n}\bigg|_S = \varrho_0 \left\langle M_{100}\,\frac{x^2}{a^2}\right\rangle p\,,$$

$$\Psi = 2\pi\varrho_0 \left[\mathscr{M}_{000} - \left\langle \mathscr{M}_{100}\, x^2\right\rangle - \right.$$
$$\left. - \left\langle a^2 M_{100}\left(\mathscr{M}_{100} - \mathscr{M}_{200}\, x^2 - \mathscr{M}_{110}\, y^2 - \mathscr{M}_{101}\, z^2\right)\right\rangle\right];$$

$$\tau = \frac{1}{4\pi}\,\Phi\big|_S = \frac{1}{2}\,\varrho_0 \left(M_{000} - \left\langle M_{100}\, x^2\right\rangle\right),$$

$$\Upsilon = 2\pi\varrho_0 \left\langle a^2 M_{100}\left(\mathscr{M}_{100} - \mathscr{M}_{200}\, x^2 - \mathscr{M}_{110}\, y^2 - \mathscr{M}_{101}\, z^2\right)\right\rangle.$$

Здесь M_{lmn} и $\mathscr{M}_{lmn}$ — внутренние и внешние потенциальные факторы эллипсоида, ξ — положительный корень уравнения $\left\langle x^2/(a^2+\xi)\right\rangle = 1$, угловыми скобками обозначена сумма трех членов циклической перестановки, величина $p = \left\langle x^2 a^{-4}\right\rangle^{-1/2}$. При вырождении эллипсоида (68.3) в шар радиуса a получаем $\sigma = \frac{1}{3}\,\varrho_0\, a = \frac{Q}{4\pi a^2}$, $\Phi = \Psi = \frac{Q}{r}$, $\Upsilon = 0$, хотя $\tau = \frac{Q}{4\pi a} \neq 0$. По существу, мы вышли на пример, уже рассмотренный в связи с формулой (68.1). Поэтому понятно, что вне шара $\Upsilon = 0$, ибо постоянной плотности $\tau = Q/(4\pi a)$ сферического двойного слоя адекватны точечные заряды Q и $-Q$, помещенные в центре шара.

Рассмотренные примеры вызывают естественный вопрос о том, каким образом в случае эллипсоида с произвольной полиномиальной объемной плотностью заряда ϱ подобрать адекватную плотность σ на его поверхности без использования «дипольных» источников τ. Очевидно, что формулы (68.1) и (68.2) ответу не помогут, поскольку для эллипсоида ряд (68.1) всегда бесконечен, а формула (68.2), как мы видели, дает ненулевые значения τ и Υ. Для разрешения вопроса можно, конечно, используя эллипсоидальные координаты, разложить по произведениям функций Ламе внешние потенциалы заданного объемного и искомого поверхностного распределений зарядов, а затем, приравнивая коэффициенты разложений, свести дело к решению системы линейных алгебраических уравнений. Непривлекательность такого подхода связана с трудоемкостью получения Ламе-разложений и утратой декартовой симметрии решений.

§ 69. Метод мультипольных моментов

Здесь описывается прямой метод [523, 524] нахождения поверхностных источников, адекватных полиномиальным объемным распределениям заряда, который опирается на точные формулы мультипольного представления (см. гл. 7) внешних потенциалов эллипсоида и вполне аналогичен использованию (37.10), (37.15) для установления адекватности полиномиальных объемных и поверхностных распределений заряда в шаре. Из теории, изложенной в гл. 7, следует, что в эллипсоиде поверхностные источники плотности σ_{L+2} адекватны объемным источникам плотности ϱ_L, где $\varrho_L(x,y,z)$ и $\sigma_L(x,y,z)/p$ — полиномы степени L, если равны между собой соответствующие распределениям ϱ_L и σ_{L+2} мультипольные моменты $Q_{i_1\ldots i_l}$, причем $l = 0, 1, \ldots, L+2$. Таким образом, метод сводится к вычислению и приравниванию соответствующих электрических мультипольных моментов заданного ϱ_L и искомого σ_{L+2} распределений источников в эллипсоиде и решению получающейся системы линейных алгебраических уравнений, дающему выражение коэффициентов полинома σ_{L+2}/p через заданные величины. Причем в этой процедуре не возникает необходимости не только обращения к эллипсоидальным спецфункциям, но и вообще к нахождению поля, и удается сохранить декартову симметрию решений.

69.1. Обоснование метода

Обоснование принципиальной реализуемости метода мультипольных моментов и единственности доставляемого им решения связано с подсчетом числа уравнений и числа неизвестных, констатацией равенства этих чисел и доказательством неравенства нулю определителя системы алгебраических уравнений. Заметим, что в нашем случае неизвестные — это независимые коэффициенты полинома σ_{L+2}/p, поэтому число неизвестных совпадает с числом линейно независимых полиномов.

О числе независимых коэффициентов полинома

Приводимые в этом подразделе известные результаты, равно как и введенные здесь обозначения, существенны для дальнейшего изложения.

У произвольного полинома L-й степени

$$P_L(x,y,z) = \sum_{0\leqslant l+m+n\leqslant L} A_{lmn}x^l y^m z^n = \sum_{l=0}^{L}\sum_{m=0}^{L-l}\sum_{n=0}^{L-l-m} A_{lmn}x^l y^m z^n \tag{69.1}$$

все коэффициенты A_{lmn} независимы, а их общее число $N_L^{(P)}$ равно числу слагаемых в сумме (69.1), т. е.

$$N_L^{(P)} = \sum_{l=0}^{L}\sum_{m=0}^{L-l}(L-l-m+1) = \\ = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{L}(L-l+1)(L-l+2) = \frac{1}{6}\,(L+1)(L+2)(L+3). \tag{69.2}$$

Однородный полином $H_L(x,y,z)$ степени L характеризуется числом $N_L^{(H)}$ независимых коэффициентов, равным, очевидно,

$$N_L^{(H)} = N_L^{(P)} - N_{L-1}^{(P)} = \frac{1}{2}(L+1)(L+2). \tag{69.3}$$

Гармонический полином $\Gamma_L(x,y,z)$ отличается от $P_L(x,y,z)$ тем, что удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\Gamma_L = 0$. Это означает, что все коэффициенты полинома $\Delta\Gamma_L$, число которых есть $N_{L-2}^{(P)}$, равны нулю. В свою очередь, это означает, что коэффициенты полинома Γ_L удовлетворяют налагаемым на них линейным соотношениям[1], число которых равно $N_{L-2}^{(P)}$. Таким образом, гармонический полином Γ_L имеет

$$N_L^{(\Gamma)} = N_L^{(P)} - N_{L-2}^{(P)} = (L+1)^2 \tag{69.4}$$

независимых коэффициентов.

Наконец, у однородного гармонического полинома $Y_L(x,y,z)$ число независимых коэффициентов, очевидно, равно

$$N_L^{(Y)} = N_L^{(\Gamma)} - N_{L-1}^{(\Gamma)} = 2L+1. \tag{69.5}$$

Число неизвестных

Как уже указывалось, в соответствии с теорией, изложенной в гл. 7, в случае эллипсоида адекватной полиномиальной плотности ϱ_L может быть только поверхностная плотность $\sigma_{L+2}(x,y,z)$, где σ_{L+2}/p — полином $(L+2)$-й степени. Заметим, что под степенью полинома, рассматриваемого на поверхности эллипсоида, понимается степень этого полинома по совокупности независимых переменных, или, иначе говоря, степень полинома, получающегося из исходного в результате исключения на основе (68.3) четных степеней какой-либо из декартовых координат (например, z) и приведения подобных членов. Таким образом, полином σ_{L+2}/p можно представить в виде

$$\sigma_{L+2}/p = \sum_{l=0}^{L+2}\sum_{m=0}^{L+2-l} B_{lm0}\, x^l y^m + \sum_{l=0}^{L+1}\sum_{m=0}^{L+1-l} B_{lm1}\, x^l y^m z\,, \tag{69.6}$$

где все коэффициенты независимы. Их общее число совпадает с числом слагаемых в суммах (69.6) и равно

$$N_{L+2}^{(\sigma)} = \sum_{l=0}^{L+2}(L+3-l) + \sum_{l=0}^{L+1}(L+2-l) = (L+3)^2.$$

Этот результат можно получить и по-другому. Как показано в гл. 7, полином σ_{L+2}/p в переменных x/a, y/b, z/c можно считать гармоническим, т. е. $\sigma_{L+2}/p = \Gamma_{L+2}(x/a, y/b, z/c)$. Поэтому в соответствии с (69.4) имеем

$$N_{L+2}^{(\sigma)} = N_{L+2}^{(\Gamma)} = (L+3)^2\,. \tag{69.7}$$

[1] Мы не останавливаемся на доказательстве линейной независимости этих соотношений. Его можно найти, например, в [146].

Независимые коэффициенты искомого полинома σ_{L+2}/p и являются теми неизвестными величинами, которые фигурируют в системе алгебраических уравнений. Поэтому $N^{(\sigma)}_{L+2}$ и есть число неизвестных. Оно же характеризует количество линейно независимых[1] среди полиномов σ_l/p, где $0 \leqslant l \leqslant L+2$. В качестве таких базисных полиномов можно использовать не только степенные одночлены, входящие в (69.6), но и, например, однородные гармонические полиномы (шаровые функции), составляющие сумму

$$\sigma_{L+2}/p = \Gamma_{L+2}(x/a, y/b, z/c) = \sum_{l=0}^{L+2} \sum_{m=-l}^{l} \alpha_{lm}\, Y_l^m(x/a, y/b, z/c). \qquad (69.8)$$

Здесь и далее шаровые функции предполагаются ортонормированными, т. е.

$$\frac{1}{abc} \oint Y_l^m\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) Y_{l'}^{m'}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) p\, dS = \delta_{ll'}\delta_{mm'}\,. \qquad (69.9)$$

Так, для $0 \leqslant l \leqslant 3$ их можно выбрать, например, в виде

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\,; \quad Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\bar{y}\,, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\bar{z}\,, \quad Y_1^1 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\bar{x}\,;$$

$$Y_2^{-2} = \sqrt{\frac{15}{4\pi}}\,\bar{x}\bar{y}\,, \quad Y_2^{-1} = \sqrt{\frac{15}{4\pi}}\,\bar{y}\bar{z}\,, \quad Y_2^0 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\,\left(2\bar{z}^2 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2\right)\,,$$

$$Y_2^1 = \sqrt{\frac{15}{4\pi}}\,\bar{x}\bar{z}\,, \quad Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\,\left(\bar{x}^2 - \bar{y}^2\right)\,; \quad Y_3^{-3} = \sqrt{\frac{35}{8\pi}}\,\bar{y}\left(\bar{y}^2 - 3\bar{x}^2\right)\,,$$

$$Y_3^{-2} = \sqrt{\frac{105}{4\pi}}\,\bar{x}\bar{y}\bar{z}, \quad Y_3^{-1} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{21}{2\pi}}\,\bar{y}\left(4\bar{z}^2 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2\right)\,,$$

$$Y_3^0 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}}\,\bar{z}\left(2\bar{z}^2 - 3\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2\right)\,, \quad Y_3^1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{21}{2\pi}}\,\bar{x}\left(4\bar{z}^2 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2\right)\,,$$

$$Y_3^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{\pi}}\,\bar{z}\left(\bar{x}^2 - \bar{y}^2\right) \quad Y_3^3 = \sqrt{\frac{35}{8\pi}}\,\bar{x}\left(\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2\right)\,,$$

где

$$\bar{x} = x/a, \quad \bar{y} = y/b, \quad \bar{z} = z/c. \qquad (69.10)$$

Число уравнений

Так как в нашем случае каждое уравнение есть результат приравнивания одинаковых компонент электрических мультипольных моментов, соответствующих заданной объемной ϱ_L и искомой поверхностной σ_{L+2} плотностям заряда, то число уравнений, образующих алгебраическую систему, равно числу независимых компонент у совокупности мультипольных тензоров от нулевого до $(L+2)$-го ранга. Поскольку (см. Приложение C) тензор 2^l-польного момента, как всякий симметричный неприводимый тензор l-го ранга, имеет $2l+1$ независимых компонент, то указанная совокупность мультипольных тензоров содержит

$$N^{(Q)}_{L+2} = \sum_{l=0}^{L+2} (2l+1) = (L+3)^2 \qquad (69.11)$$

[1] Иначе говоря, $N^{(\sigma)}_{L+2}$ равно размерности эвклидова пространства, образованного совокупностью всех многочленов σ_l/p, степень l которых не превосходит числа $L+2$.

независимых компонент. Сравнивая (69.11) и (69.7), убеждаемся в совпадении числа уравнений с числом неизвестных.

Об определителе системы уравнений

Получим теперь интересующую нас систему алгебраических уравнений. Мультипольные моменты распределений ϱ_L и σ_{L+2} определяются (в соответствии с (35.6)) формулами

$$Q^{(\varrho)}_{i_1\dots i_l} = \int \varrho_L(x,y,z)\,\theta_{i_1\dots i_l}(x,y,z)\,dV\,, \tag{69.12}$$

$$Q^{(\sigma)}_{i_1\dots i_l} = \int \sigma_{L+2}(x,y,z)\,\theta_{i_1\dots i_l}(x,y,z)\,dS\,, \tag{69.13}$$

где, как показано в гл. 6, ядро $\theta_{i_1\dots i_l}$ 2^l-польного момента — симметричный неприводимый тензор, имеющий $2l{+}1$ независимых компонент, причем каждая его компонента есть однородный гармонический полином. Приравнивая (69.12) и (69.13), получаем

$$\oint \sigma_{L+2}(x,y,z)\,\theta_{i_1\dots i_l}(x,y,z)\,dS\, = Q^{(\varrho)}_{i_1\dots i_l} \qquad (0 \leqslant l \leqslant L+2)\,, \tag{69.14}$$

где $\sigma_{L+2}(x,y,z)$ — искомая функция, $Q^{(\varrho)}_{i_1\dots i_l}$ — известные величины, причем независимым компонентам тензора $\theta_{i_1\dots i_l}(x,y,z)$ соответствуют, очевидно, независимые компоненты $Q^{(\varrho)}_{i_1\dots i_l}$. Интересующая нас система уравнений получается в результате отбора из совокупности уравнений (69.14) только тех, которые содержат независимые компоненты тензоров $\theta_{i_1\dots i_l}$ $(0 \leqslant l \leqslant L{+}2)$. Переход к используемому ниже матричному описанию системы уравнений требует переобозначения употребляемых в них многоиндексных величин в одноиндексные. Так, перенумеровав независимые компоненты тензоров $\theta_{i_1\dots i_l}$ и $Q^{(\varrho)}_{i_1\dots i_l}$ соответственно, из (69.14) получаем

$$\oint \sigma_{L+2}(x,y,z)\,\theta_i(x,y,z)\,dS\, = Q^{(\varrho)}_i \qquad (i = 1, 2, \dots, (L{+}3)^2)\,. \tag{69.15}$$

Используя и для обозначения шаровых функций $Y_l^m\left(\dfrac{x}{a}\,,\dfrac{y}{b}\,,\dfrac{z}{c}\right)$ не два, а один индекс, вместо (69.8) будем иметь

$$\sigma_{L+2}(x,y,z)/p = \sum_{n=1}^{(L+3)^2} \alpha_n\,Y^{(n)}\left(\frac{x}{a}\,,\frac{y}{b}\,,\frac{z}{c}\right). \tag{69.16}$$

Подставляя (69.16) в (69.15), приходим к системе уравнений

$$\sum_{n=1}^{(L+3)^2} \alpha_n \oint Y^{(n)}\left(\frac{x}{a}\,,\frac{y}{b}\,,\frac{z}{c}\right)\,\theta_i(x,y,z)\,p\,dS\, = Q^{(\varrho)}_i$$
$$\left(i = 1, 2, \dots, (L{+}3)^2\right) \tag{69.17}$$

с неизвестными α_n.

На поверхности единичной сферы $\left\langle \bar{x}^2 \right\rangle = 1$ однородные гармонические полиномы (шаровые функции) $\theta_i(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ становятся, по определению, сферическими функциями. Введем одноиндексные величины $g_i\,(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, где $i = 1, 2, \ldots, (L+3)^2$, для обозначения другой системы линейно независимых функций[1]: $\bar{x}^i\bar{y}^j$, $\bar{x}^l\bar{y}^m\bar{z}$, где $i+j = 0, 1, \ldots, L+2$; $l+m = 0, 1, \ldots, L+1$. Тогда имеет место разложение

$$\theta_i(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \sum_{j=1}^{(L+3)^2} A_{ij}\, g_i\,(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, (L+3)^2)\,, \tag{69.18}$$

причем очевидно, что матрица коэффициентов A_{ij} невырожденная, т. е. ее определитель отличен от нуля. В свою очередь, от базисных функций $g_i\,(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ можно перейти к системе сферических функций $Y^{(k)}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, используя разложения

$$g_i(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \sum_{k=1}^{(L+3)^2} B_{jk}\, Y^{(k)}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, (L+3)^2)\,, \tag{69.19}$$

коэффициенты которых образуют невырожденную матрицу $\|B_{jk}\|$. После этих замечаний обратимся вновь к системе уравнений (69.17). Замена переменных x, y, z на $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ по формулам (69.10) переводит интегрирование по поверхности эллипсоида в интегрирование по поверхности единичного шара, при этом $p\,dS \to abc\,d\Omega$, где $d\Omega$ — элемент поверхности шара. В результате система (69.17) приобретает вид

$$\sum_{n=1}^{(L+3)^2} \alpha_n \oint Y^{(n)}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\,\theta_i(a\bar{x},b\bar{y},c\bar{z})\,d\Omega \; = \frac{Q_i^{(\varrho)}}{abc}$$
$$\left(i = 1, 2, \ldots, (L+3)^2\right). \tag{69.20}$$

Заметим, что если линейная независимость шаровых функций $\theta_i(x,y,z)$ обеспечена соответствующим их подбором, то для получающихся из них после замены (69.10) однородных полиномов $\theta_i(a\bar{x},b\bar{y},c\bar{z})$ сохранение линейной независимости может показаться неочевидным. Совершенно очевидно, однако, что имеет место равенство

$$\theta_i(a\bar{x},b\bar{y},c\bar{z}) = \sum_{j=1}^{(L+3)^2} A_{ij}\; g_j(a\bar{x},b\bar{y},c\bar{z}) \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, (L+3)^2\right), \tag{69.21}$$

отличающееся от (69.18) лишь переобозначением декартовых аргументов у функций θ_i и g_j. Так как функции g_j являются степенными одночленами, то

$$g_j(a\bar{x},b\bar{y},c\bar{z}) = \sum_{k=1}^{(L+3)^2} G_{jk}\; g_k(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \qquad \left(j = 1, 2, \ldots, (L+3)^2\right), \tag{69.22}$$

где матрица коэффициентов G_{jk} диагональна (причем все ее диагональные элементы отличны от нуля) и потому невырождена.

[1] Ср. с (69.6).

Если теперь поочередно подставлять в (69.20) разложения (69.21) и (69.22), а затем, используя (69.19), выразить $g_k(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ через $Y^{(l)}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, то, учитывая условие ортонормированности в виде

$$\oint Y^{(l)}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})Y^{(n)}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\,d\Omega = \delta_{ln} \qquad \bigl(l,n = 1,2,\ldots,(L+3)^2\bigr),$$

получающемся из (69.9) в результате замены переменных (69.10) и замены двухиндексных функций Y_l^m одноиндексными $Y^{(n)}$, а также учитывая соотношение $\sum\limits_{n=1}^{(L+3)^2} \alpha_n\delta_{ln} = \alpha_l$, окончательно будем иметь

$$\sum_{l=1}^{(L+3)^2} C_{il}\alpha_l = Q_i^{(\varrho)} \qquad \bigl(i = 1,2,\ldots,(L+3)^2\bigr). \tag{69.23}$$

Матрица коэффициентов $C_{il} = abc \sum\limits_{j=1}^{(L+3)^2}\sum\limits_{k=1}^{(L+3)^2} A_{ij}G_{j\,k}B_{kl}$, входящих в (69.23), невырожденная, так как определитель произведения невырожденных матриц отличен от нуля. Как и всякая невырожденная матрица, $\|C_{ik}\|$ имеет единственную обратную матрицу. Тем самым доказано существование и единственность решения системы алгебраических уравнений (69.23), а следовательно, и эквивалентной (69.23) системы исходных уравнений (69.15).

69.2. Учет симметрии

Приведенное выше обсуждение принципиальной реализуемости метода мультипольных моментов в задаче об адекватных распределениях источников в эллипсоиде не потребовало привлечения свойств симметрии задачи. Между тем учет этих свойств в практических расчетах существенно упрощает получение решения.

Обеспечение равноправия декартовых направлений

Постановка задачи, сохраняющая равноправие направлений декартовых осей, удобна уже тем, что позволяет использовать циклическую и взаимную перестановки координат в возникающих в процессе решения аналитических выражениях. Поскольку в нашем случае расположение и ориентация эллипсоида (68.3) сохраняет равноправие декартовых направлений, то свойства симметрии решения определяются конкретным видом заданной полиномиальной плотности $\varrho_L(x,y,z)$ заряда[1]. Чтобы эту исходную симметрию можно было без помех учесть в процессе решения, следует оптимально распорядиться имеющимся произволом в выборе системы базисных функций, по которым раскладывается искомый полином σ_{L+2}/p. С этой точки зрения, лучше отказаться от выбора в качестве базисных функций x^iy^j, x^iy^jz или $Y_l^m(x/a, y/b, z/c)$, по которым даны разложения (69.6) и (69.8) и которые при $i+j \geqslant 2$ или $l \geqslant 2$ являются по отношению к декартовым координатам функциями асимметричными, т. е. нарушающими равноправие соответствующих направлений.

[1] Линейность теории (принцип суперпозиции полей) позволяет вместо полинома ϱ_L общего вида рассматривать сначала составляющие его однородные полиномы, а вместо последних — составляющие их одночлены.

Подходящую для наших целей «декартово» симметричную систему линейно независимых функций, рассматриваемых на поверхности (68.3) эллипсоида, по которым следует раскладывать полином σ_{L+2}/p, образуют одночлены $x^i y^j z^k$, где $L+1 \leqslant i+j+k \leqslant L+2$. Соответствующее разложение

$$\sigma_{L+2}/p = \sum_{l=L+1}^{L+2} \sum_{i+j+k=l} \alpha_{ijk}\, x^i y^j z^k \tag{69.24}$$

содержит только независимые коэффициенты α_{ijk}, а их общее число в соответствии с (69.3) равно $N_{L+1}^{(H)} + N_{L+2}^{(H)} = (L+3)^2$, что, как и должно быть, совпадает с (69.7). В зависимости от четности L формулу (69.24) можно переписать в одном из следующих двух видов[1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{2\varepsilon+2}/p &= H_{2\varepsilon+2}^{\mathrm{EEE}} + \left\langle H_{2\varepsilon+2}^{\mathrm{EOO}} \right\rangle + \left\langle H_{2\varepsilon+1}^{\mathrm{EEO}} \right\rangle + H_{2\varepsilon+1}^{\mathrm{OOO}}\,, \\ \sigma_{2\varepsilon+3}/p &= \left\langle H_{2\varepsilon+3}^{\mathrm{EEO}} \right\rangle + H_{2\varepsilon+3}^{\mathrm{OOO}} + H_{2\varepsilon+2}^{\mathrm{EEE}} + \left\langle H_{2\varepsilon+2}^{\mathrm{EOO}} \right\rangle\,, \end{aligned} \tag{69.25}$$

где однородные полиномы

$$H_{2\varepsilon+2}^{\mathrm{EEE}} = \sum_{i+j+k=\varepsilon+1} \alpha_{2i,2j,2k}\, x^{2i} y^{2j} z^{2k} \qquad (\varepsilon \geqslant 0), \tag{69.26}$$

$$H_{2\varepsilon+2}^{\mathrm{EOO}} = \sum_{i+j+k=\varepsilon} \alpha_{\,2i,2j+1,2k+1}\, x^{2i} y^{2j+1} z^{2k+1} \qquad (\varepsilon \geqslant 0), \tag{69.27}$$

$$H_{2\varepsilon+1}^{\mathrm{EEO}} = \sum_{i+j+k=\varepsilon} \alpha_{\,2i,2j,2k+1}\, x^{2i} y^{2j} z^{2k+1} \qquad (\varepsilon \geqslant 0), \tag{69.28}$$

$$H_{2\varepsilon+1}^{\mathrm{OOO}} = \sum_{i+j+k=\varepsilon-1} \alpha_{\,2i+1,2j+1,2k+1}\, x^{2i+1} y^{2j+1} z^{2k+1} \qquad (\varepsilon \geqslant 1). \tag{69.29}$$

Таким образом, полином σ_{L+2}/p всегда можно представить в виде суммы не более восьми однородных полиномов такой же и на единицу меньшей степени, у каждого из которых фиксирована четность показателя степени каждой из трех координат.

Расщепление системы уравнений (69.23)

Вопрос, к обсуждению которого мы переходим, демонстрирует не только удобство, но и преимущество использования трехиндексной записи. В частности, интересующие нас здесь формулы (69.12) и (69.13) в трехиндексной записи имеют вид

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta\gamma}^{(\varrho)} &= \int \varrho_L(x,y,z)\, \theta_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)\, dV\,, \\ Q_{\alpha\beta\gamma}^{(\sigma)} &= \oint \sigma_{L+2}(x,y,z)\, \theta_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z)\, dS\,. \end{aligned} \qquad (\alpha+\beta+\gamma=l) \tag{69.30}$$

Очевидно, что в случае эллипсоида интегралы (69.30) отличны от нуля, если подынтегральные полиномы $\varrho_L\, \theta_{\alpha\beta\gamma}$ и $\theta_{\alpha\beta\gamma}\, \sigma_{L+2}/p$ являются четными функциями каждой из трех декартовых координат. Что касается ядра

[1] Как и в § 39, для обозначения четного и нечетного случая используются латинские буквы «E» (even) и «O» (odd) соответственно.

$\theta_{\alpha\beta\gamma}$ мультипольного момента, то, как установлено в § 36 (см. (36.7)), четность чисел α, β, γ у любой, произвольно выбранной компоненты тензора $\theta_{\alpha\beta\gamma}(x, y, z)$ в трехиндексной записи всегда совпадает с четностью зависимости ядра от координат x, y, z соответственно.

Что касается полинома $\varrho_L = P_L(x, y, z)$, даваемого (69.1), то его в общем случае можно представить подобно (69.25) в виде суммы восьми полиномов:

$$\varrho_L = P^{\mathrm{EEE}}_{2[L/2]} + \left\langle P^{\mathrm{EOO}}_{2[(L-2)/2]+2} \right\rangle + \left\langle P^{\mathrm{EEO}}_{2[(L-1)/2]+1} \right\rangle + P^{\mathrm{OOO}}_{2[(L-3)/2]+3}\,, \tag{69.31}$$

где

$$P^{\mathrm{EEE}}_{2[L/2]} = \sum_{0 \leqslant i+j+k \leqslant [L/2]} A_{2i,2j,2k}\, x^{2i}\, y^{2j}\, z^{2k}\,, \tag{69.32}$$

$$P^{\mathrm{EOO}}_{2[(L-2)/2]+2} = \sum_{0 \leqslant i+j+k \leqslant [(L-2)/2]} A_{2i,2j+1,2k+1}\, x^{2i}\, y^{2j+1}\, z^{2k+1}\,, \tag{69.33}$$

$$P^{\mathrm{EEO}}_{2[(L-1)/2]+1} = \sum_{0 \leqslant i+j+k \leqslant [(L-1)/2]} A_{2i,2j,2k+1}\, x^{2i}\, y^{2j}\, z^{2k+1}\,, \tag{69.34}$$

$$P^{\mathrm{OOO}}_{2[(L-3)/2]+3} = \sum_{0 \leqslant i+j+k \leqslant [(L-3)/2]} A_{2i+1,2j+1,2k+1}\, x^{2i+1}\, y^{2j+1}\, z^{2k+1}\,. \tag{69.35}$$

Квадратные скобки в формулах (69.31)–(69.35) обозначают, что от заключенного в них числа берется целая часть.

Следствием двух отмеченных выше обстоятельств, а именно четности подынтегральных функций в (69.30) и свойства тензора $\theta_{\alpha\beta\gamma}(x, y, z)$, состоящего в совпадении четности его индекса с четностью зависимости полинома от соответствующей координаты, является то, что все мультипольные компоненты $Q^{(\varrho)}_{\alpha\beta\gamma}$ или $Q^{(\sigma)}_{\alpha\beta\gamma}$, у которых четность индексов α, β, γ соответствует одному из восьми возможных наборов EEE, EOO, OEO, OOE, EEO, EOE, OEE, OOO (например, EEE), определяются только полиномами P_k или H_{k+2}, входящими в (69.31) и (69.25) и имеющими такой же набор верхних индексов (в нашем примере EEE). Поскольку система уравнений (69.23) есть результат приравнивания $Q^{(\varrho)}_{\alpha\beta\gamma}$ и $Q^{(\sigma)}_{\alpha\beta\gamma}$, вышесказанное означает, что в общем случае система (69.23) расщепляется на восемь самостоятельных подсистем.

Подсчет числа неизвестных (а значит, и равного ему, как доказано для общего случая в разд. 69.1, числа уравнений) в каждой такой подсистеме сводится к определению числа слагаемых в суммах (69.26)–(69.29). Займемся этим, найдя предварительно количество слагаемых в неоднородных полиномах (69.32)–(69.35). Так как число слагаемых в сумме определяется лишь пределами суммирования, то числа слагаемых $K^{\mathrm{EEE}}_{2[L/2]}$ в (69.32), $K^{\mathrm{EOO}}_{2[(L-2)/2]+2}$ в (69.33), $K^{\mathrm{EEO}}_{2[(L-1)/2]+1}$ в (69.34) и $K^{\mathrm{OOO}}_{2[(L-3)/2]+3}$ в (69.35) совпадают с даваемыми формулой (69.2) числами $N^{(P)}_{[L/2]}$, $N^{(P)}_{[(L-2)/2]}$, $N^{(P)}_{[(L-1)/2]}$ и $N^{(P)}_{[(L-3)/2]}$ соответственно. Таким образом, получаем

$$K^{\mathrm{EEE}}_{2\varepsilon} = K^{\mathrm{EEO}}_{2\varepsilon+1} = N^{(P)}_{\varepsilon} = \frac{1}{6}\,(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)(\varepsilon+3), \tag{69.36}$$

$$K^{\mathrm{EOO}}_{2\varepsilon} = K^{\mathrm{OOO}}_{2\varepsilon+1} = N^{(P)}_{\varepsilon-1} = \frac{1}{6}\,\varepsilon(\varepsilon+1)(\varepsilon+2). \tag{69.37}$$

Формулы (69.36), (69.37) для чисел слагаемых в (69.26)–(68.29) приводят к следующим значениям:

$$N_{2\varepsilon+2}^{\mathrm{EEE}} = K_{2\varepsilon+2}^{\mathrm{EEE}} - K_{2\varepsilon}^{\mathrm{EEE}} = \frac{1}{2}\,(\varepsilon+2)(\varepsilon+3), \tag{69.38}$$

$$N_{2\varepsilon+2}^{\mathrm{EOO}} = K_{2\varepsilon+2}^{\mathrm{EOO}} - K_{2\varepsilon}^{\mathrm{EOO}} = \frac{1}{2}\,(\varepsilon+1)(\varepsilon+2), \tag{69.39}$$

$$N_{2\varepsilon+1}^{\mathrm{EEO}} = K_{2\varepsilon+1}^{\mathrm{EEO}} - K_{2\varepsilon-1}^{\mathrm{EEO}} = \frac{1}{2}\,(\varepsilon+1)(\varepsilon+2), \tag{69.40}$$

$$N_{2\varepsilon+1}^{\mathrm{OOO}} = K_{2\varepsilon+1}^{\mathrm{OOO}} - K_{2\varepsilon-1}^{\mathrm{OOO}} = \frac{1}{2}\,\varepsilon(\varepsilon+1). \tag{69.41}$$

Как обычно, здесь опущены формулы, получающиеся из приведенных с помощью циклической перестановки.

Рассмотрим теперь конкретный пример, позволяющий оценить полезность привлечения соображений симметрии. Пусть объемная плотность ϱ задана полиномом степени $L = 5$. Тогда определение адекватной поверхностной плотности σ_7 сводится в соответствии с (69.7) к решению системы 64 алгебраических уравнений с 64 неизвестными. Фактически же, однако, как следует из второй формулы (69.25) и формул (69.38)–(69.41),

$$N_7^{(\sigma)} = \left\langle N_7^{\mathrm{EEO}} \right\rangle + N_7^{\mathrm{OOO}} + N_6^{\mathrm{EEE}} + \left\langle N_6^{\mathrm{EOO}} \right\rangle = 3\cdot 10 + 6 + 10 + 3\cdot 6,$$

т. е. указанная система расщепляется на четыре системы по 10 уравнений и еще на четыре системы по 6 уравнений, причем решению в аналитическом виде подлежат две системы по 10 уравнений и две системы по 6 уравнений, решения же остальных систем уравнений получаются из найденных с помощью циклической перестановки.

§ 70. Поверхностные заряды эллипсоида, адекватные его же объемному заряду

Для иллюстрации изложенной выше теории найдем поверхностную плотность заряда на эллипсоиде $\left\langle x^2/a^2 \right\rangle = 1$, адекватную заданному в нем объемному распределению заряда $\varrho(x,y,z)$, являющегося полиномом 2-й степени. Очевидно, что эту плотность можно записать в виде

$$\varrho(\mathbf{r}) = \varrho_0 + \left\langle \varrho_a \frac{x}{a} \right\rangle + \left\langle \varrho_{ab} \frac{xy}{ab} \right\rangle + \left\langle \varrho_{aa} \frac{x^2}{a^2} \right\rangle, \tag{70.1}$$

где все величины ϱ, имеющие индексы, суть заданные константы, обладающие размерностью плотности заряда. Принцип суперпозиции позволяет заменить эту задачу рассмотрением четырех более простых задач.

70.1. Постоянная плотность заряда

При

$$\varrho = P_0^{\mathrm{EEE}} = \varrho_0 \tag{70.2}$$

адекватная поверхностная плотность ищется в виде

$$\sigma/p = H_2^{\mathrm{EEE}} = \varrho_0 \left\langle \alpha_{200}\, x^2/a^2 \right\rangle . \tag{70.3}$$

Используя (69.30), вычисляем и приравниваем друг другу соответствующие компоненты Q, Q_{xx}, Q_{yy} мультипольных моментов, отвечающих распределениям (70.2) и (70.3). При этом интегралы от степеней координат по объему или поверхности эллипсоида находятся с помощью общих формул Лагранжа (B.11) и (B.15) Приложения B.

После простых преобразований получающуюся систему уравнений для коэффициентов α_{200}, α_{020}, α_{002} можно привести к виду

$$\left.\begin{array}{c} \langle \alpha_{200} \rangle = 1\,, \\ 2a^2\alpha_{200} - b^2\alpha_{020} - c^2\alpha_{002} = 0\,, \\ a^2\alpha_{200} - 2b^2\alpha_{020} + c^2\alpha_{002} = 0\,. \end{array}\right\}$$

Решение системы для α_{200} дает значение

$$\alpha_{200} = a^{-2} \left\langle a^{-2} \right\rangle^{-1} , \tag{70.4}$$

а выражения для α_{020} и α_{002} получаются из (70.4) с помощью циклической перестановки.

При вырождении эллипсоида в шар $(c = b = a)$ возникают равенства $\alpha_{200} = \alpha_{020} = \alpha_{002} = 1/3$, превращающие (с учетом уравнения поверхности сферы $\left\langle x^2 \right\rangle = a^2$) полином второй степени (70.3) в константу $\sigma = \frac{1}{3}\varrho_0 a$.

70.2. Линейная плотность заряда

При

$$\varrho = P_1^{\mathrm{OEE}} = \varrho_a\, x/a \tag{70.5}$$

адекватная σ ищется в виде

$$\frac{\sigma}{p} = H_3^{\mathrm{OEE}} = \varrho_a\, \frac{x}{a} \left(\alpha_{300} \frac{x^2}{a^2} + \alpha_{120} \frac{y^2}{b^2} + \alpha_{102} \frac{z^2}{c^2} \right) . \tag{70.6}$$

Решая возникающую в результате приравнивания создаваемых распределениями (70.6) и (70.5) мультипольных компонент Q_x, Q_{xyy} и Q_{xzz} систему уравнений, получаем

$$\alpha_{300} = \left(\left\langle a^{-2} \right\rangle + 2a^{-2} \right)^{-1} a^{-2}, \qquad \alpha_{120} = \left(\left\langle a^{-2} \right\rangle + 2a^{-2} \right)^{-1} b^{-2} , \tag{70.7}$$

а коэффициент α_{102} находится из выражения для α_{120} путем взаимной замены $b \leftrightarrow c$.

При вырождении эллипсоида в шар формулы (70.7) переходят в равенства $\alpha_{300} = \alpha_{120} = \alpha_{102} = \frac{1}{5}$, а кубический полином (70.6) превращается в линейную функцию $\sigma = \frac{1}{5}\, \varrho_a x$, подобную (70.5).

Очевидно, что формулы, относящиеся к объемным плотностям заряда вида $\varrho = \varrho_b\, y/b$ или $\varrho = \varrho_c\, z/c$, получаются из формул данного подраздела с помощью циклической перестановки.

70.3. Билинейная плотность заряда

При

$$\varrho = P_2^{\text{OOE}} = \varrho_{ab}\,\frac{x}{a}\frac{y}{b} \tag{70.8}$$

искомый полином

$$\frac{\sigma}{p} = H_4^{\text{OOE}} = \varrho_{ab}\,\frac{x}{a}\frac{y}{b}\left(\alpha_{310}\frac{x^2}{a^2} + \alpha_{130}\frac{y^2}{b^2} + \alpha_{112}\frac{z^2}{c^2}\right). \tag{70.9}$$

Приравнивая мультипольные компоненты Q_{xy}, Q_{xxxy}, Q_{xyyy} распределений (70.9) и (70.8) и решая получающуюся систему уравнений, будем иметь

$$\alpha_{310} = \eta_c^{-1}\left(25a^{-2} - 12b^{-2} - 4c^{-2}\right), \qquad \alpha_{112} = \eta_c^{-1}\left(11c^{-2} - 4a^{-2} - 4b^{-2}\right), \tag{70.10}$$

где $\eta \equiv 3\left\langle a^{-2}\right\rangle - 2c^{-2}$, а выражение для α_{130} находится из α_{310} взаимной заменой $a \leftrightarrow b$. Для шара из (70.10) получаем $\alpha_{310} = \alpha_{130} = \alpha_{112} = \frac{9}{7}$, а полином (70.9) становится билинейной функцией $\sigma = \frac{9}{7}\,\varrho_{ab}\,xy/a$.

Формулы, соответствующие $\varrho = \varrho_{bc}\,\dfrac{y}{b}\dfrac{z}{c}$ или $\varrho = \varrho_{ac}\,\dfrac{x}{a}\dfrac{z}{c}$, получаются из формул данного подраздела с помощью циклической перестановки.

70.4. Квадратичная плотность заряда

Пусть теперь

$$\varrho = P_2^{\text{EEE}} = \varrho_{aa}\,\frac{x^2}{a^2}. \tag{70.11}$$

Поверхностная плотность заряда ищется в виде

$$\begin{aligned}\frac{\sigma}{p} = H_4^{\text{EEE}} = \varrho_{aa}\Bigg(\alpha^a_{400}\frac{x^4}{a^4} + \alpha^a_{040}\frac{y^4}{b^4} + \alpha^a_{004}\frac{z^4}{c^4} + {}&\\ + \alpha^a_{220}\frac{x^2y^2}{a^2b^2} + \alpha^a_{022}\frac{y^2z^2}{b^2c^2} + \alpha^a_{202}\frac{x^2z^2}{a^2c^2}\Bigg).&\end{aligned} \tag{70.12}$$

Решение системы уравнений, возникающей в результате приравнивания мультипольных компонент Q, Q_{yy}, Q_{zz}, Q_{xxyy}, Q_{yyzz} и Q_{xxzz} распределений заряда (70.11) и (70.12), можно представить в форме

$$\begin{gathered}\alpha^a_{400} = a^{-2}\left\langle a^{-2}\right\rangle^{-1}\left[1 - 2a^{-2}\delta^{-1}\left(a^{-4} + 6b^{-4} + {}\right.\right.\\ \left.\left. + 6c^{-4} + 7a^{-2}b^{-2} + 7a^{-2}c^{-2} + 36b^{-2}c^{-2}\right)\right],\\ \alpha^a_{040} = 2a^{-2}b^{-4}\left\langle a^{-2}\right\rangle^{-1}\delta^{-1}\left(\left\langle a^{-2}\right\rangle + 4c^{-2}\right),\end{gathered} \tag{70.13}$$

$$\begin{gathered}\alpha^a_{220} = b^{-2}\left\langle a^{-2}\right\rangle^{-1}\left[1 - 4a^{-2}\delta^{-1}\left(3b^{-4} + 3c^{-4} + {}\right.\right.\\ \left.\left. + 3a^{-2}b^{-2} + a^{-2}c^{-2} + 18b^{-2}c^{-2}\right)\right],\end{gathered} \tag{70.14}$$

$$\alpha^a_{022} = 4a^{-2}b^{-2}c^{-2}\left\langle a^{-2}\right\rangle^{-1}\delta^{-1}\left(3\left\langle a^{-2}\right\rangle - 2a^{-2}\right),$$

где

$$\delta \equiv 3\left\langle a^{-6}\right\rangle + 21\left\langle a^{-2}\right\rangle\left\langle a^{-2}b^{-2}\right\rangle + 47\,a^{-2}b^{-2}c^{-2},$$

а выражения для коэффициентов α^a_{004} и α^a_{202} дает взаимная перестановка $b \leftrightarrow c$ в формулах (70.13) и (70.14). Вырождение эллипсоида в шар переводит (70.12) в полином 2-й степени $\sigma = \varrho_{aa}(105a)^{-1}\left(17x^2 + 2y^2 + 2z^2\right)$.

Формулы, описывающие случаи $\varrho = \varrho_{bb}\, y^2/b^2$ или $\varrho = \varrho_{cc}\, z^2/c^2$, получаются из (70.12) и найденных выражений для α^a_{lmn} с помощью циклической замены, затрагивающей и верхний индекс коэффициентов α^a_{lmn}.

70.5. Замечания

1. Поскольку результаты, полученные для кулоновских полей, непосредственно применимы для полей ньютоновских при соответствующих заменах плотностей заряда на плотности массы, отметим следующее.

В работе [462] высказывалось предположение о том, что в задачах небесной механики, связанных с учетом несферичности тела в рамках эллипсоидальной модели, может оказаться эффективным использование полиномиальной аппроксимации плотности реального небесного тела. Из доказанной в данном параграфе возможности замены произвольной полиномиальной объемной плотности ϱ_L эллипсоидального тела адекватной поверхностной плотностью σ_{L+2} на его границе, где σ_{L+2}/p — полином $(L+2)$-й степени, а также из формул (69.2) и (69.7) для чисел $N^{(P)}_L$ и $N^{(\sigma)}_{L+2}$ независимых коэффициентов у полиномов ϱ_L и σ_{L+2}/p следует очевидная практическая рекомендация: использование в качестве объемной плотности ϱ аппроксимирующего полинома ϱ_L удобно при $0 \leqslant L \leqslant 5$, так как при этом $N^{(P)}_L < N^{(\sigma)}_{L+2}$; если же $L \geqslant 6$, чему соответствует $N^{(P)}_L > N^{(\sigma)}_{L+2}$, то целесообразно перейти от ϱ_L к адекватному поверхностному полиному σ_{L+2}/p.

2. Как следует из формулы (68.1), у любых адекватных систем источников соответствующие мультипольные моменты всех рангов совпадают между собой. С другой стороны, для адекватности полиномиальных распределений источников в шаре (ϱ_L и σ_L) или эллипсоиде (ϱ_L и σ_{L+2}) достаточно, чтобы совпадало конечное число соответствующих мультиполей (в случае шара — все моменты до L-го ранга, в случае эллипсоида — все моменты до $(L+2)$-го ранга). Сказанное означает, что для таких распределений равенство между собой указанного конечного числа мультиполей свидетельствует о совпадении и бесконечного числа остальных моментов распределений ϱ_L и σ_L или ϱ_L и σ_{L+2}, причем надо иметь в виду, что у шара все высшие мультиполи равны нулю, тогда как у эллипсоида бесчисленное количество моментов отлично от нуля.

§ 71. Поверхностные заряды эллипсоида, адекватные заряду софокусного эллипсоида

71.1. Формулировка задачи

К числу практически интересных задач макроскопической электростатики относится следующая. Пусть в некотором заземленном проводящем теле имеется замкнутая полость, уравнение границы $\bar{S}$ которой дано. Внутри полости в объеме, охватываемом другой заданной поверхностью S, или по самой S распределен заряд, соответствующая плотность $\rho(\mathbf{r})$ или $\sigma(\mathbf{r})$

которого тоже задана. Требуется найти поверхностную плотность $\bar{\eta}(\mathbf{r})$ индуцированного на $\bar{S}$ заряда.

У описанной задачи имеется «двойник» в электростатике вакуума. Мы имеем в виду, что задачу о полом проводнике можно считать решенной ([102], с. 524), если решена взаимно соответствующая ей задача об адекватных[1] системах зарядов. В последней заданы те же плотность ρ или σ и поверхности S и $\bar{S}$, что и в первой задаче, но теперь рассматривается свободное от материальных сред пространство и ищется плотность $\bar{\sigma}(\mathbf{r})$ распределенного по $\bar{S}$ заряда, адекватная заданному исходному распределению. Поскольку решения обеих задач различаются только знаком ($\bar{\eta} = -\bar{\sigma}$), далее обсуждается только задача об адекватных источниках. В принципиальном плане возможные подходы к ее решению рассмотрены в [101]. Там же для случая, когда S и $\bar{S}$ сливаются в одну сферическую поверхность, найдено распределение $\bar{\sigma}$, адекватное заданной плотности ρ.

В данном разделе задача об адекватных зарядах рассматривается применительно к софокусным эллипсоидальным поверхностям S и $\bar{S}$, описывающимся соответственно уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{71.1}$$

$$\frac{x^2}{\bar{a}^2} + \frac{y^2}{\bar{b}^2} + \frac{z^2}{\bar{c}^2} = 1, \tag{71.2}$$

где полуоси эллипсоидов подчинены равенствам[2]

$$\bar{a}^2 - a^2 = \bar{b}^2 - b^2 = \bar{c}^2 - c^2 = \lambda. \tag{71.3}$$

Будем считать также, что исходный заряд на S или в ограниченном ею объеме задается соответственно функциями $\sigma(x, y, z)/p$ или $\rho(x, y, z)$, являющимися полиномами декартовых координат.

В рамках сделанных предположений осуществимо строгое однозначное решение задачи на основе метода мультипольных моментов, описанного в § 69.

Для дальнейшего существенны следующие два утверждения, вытекающие из изложенной в гл. 7 теории и справедливые для произвольных софокусных эллипсоидов (71.1) и (71.2): а) распределенный по поверхности (71.2) заряд плотности $\bar{\sigma}_L$ адекватен заданному на поверхности (71.1) заряду плотности σ_L, если равны между собой все соответствующие распределениям σ_L и $\bar{\sigma}_L$ мультипольные моменты $Q^{(\sigma)}_{i_1\ldots i_l}$ и $\bar{Q}_{i_1\ldots i_l}$, тензорный ранг l которых заключен в диапазоне $0 \leqslant l \leqslant L$; б) распределенный по поверхности (71.2) заряд плотности $\bar{\sigma}_{L+2}$ адекватен заданному в объеме V эллипсоида (71.1) заряду плотности ρ_L, если равны между собой все соответствующие распределениям ρ_L и $\bar{\sigma}_{L+2}$ мультипольные моменты $Q^{(\rho)}_{i_1\ldots i_l}$

[1] Их называют также «эквивалентными».

[2] С точки зрения задач о полом проводнике и адекватных зарядах, величина λ в условии софокусности (71.3) эллипсоидов (71.1) и (71.2) есть заданное неотрицательное число. Однако, имея дело с аналитическими решениями, позволительно рассматривать (71.2) и (71.3) как параметрическое задание семейства софокусных эллипсоидов, где при $c = \min\{a, b, c\}$ значения параметра λ лежат в диапазоне $-c^2 \leqslant \lambda < \infty$. Эта возможность используется при анализе предельных случаев.

и $\bar{Q}_{i_1\ldots i_l}$, ранг которых заключен в диапазоне $0 \leqslant l \leqslant L+2$. Здесь и далее σ_L/p, ρ_L и $\bar{\sigma}_L/\bar{p}$ — полиномы степени L, $\bar{p}=\left\langle x^2/\bar{a}^4\right\rangle^{-1/2}$.

Таким образом, метод сводится к вычислению и приравниванию друг другу конечного числа (зависящего от степени L полинома) независимых компонент мультипольных тензоров заданного σ_L (или ρ_L) и искомого $\bar{\sigma}_L$ (или $\bar{\sigma}_{L+2}$) распределений заряда и решению получающейся системы линейных алгебраических уравнений, выражающей коэффициенты полинома $\bar{\sigma}_L/\bar{p}$ (или $\bar{\sigma}_{L+2}/\bar{p}$) через заданные величины. При этом не возникает необходимости в вычислении электростатического потенциала и удается сохранить и использовать декартову симметрию решений.

Отметим, что в § 69 обоснование метода мультипольных моментов и единственности доставляемого им решения задачи об адекватных источниках дано для случая, когда исходное распределение характеризуется объемной плотностью, а поверхности (71.1) и (71.2) совпадают. Это алгебраическое обоснование, включающее в себя доказательство равенства числа неизвестных (коэффициентов искомого полинома) числу уравнений (независимых компонент мультипольных моментов) и неравенства нулю определителя системы уравнений, сохраняет силу, как нетрудно сообразить, и для рассматриваемых здесь обобщений задачи.

71.2. Адекватные поверхностные заряды

В этом разделе речь пойдет о нахождении плотности $\bar{\sigma}_L$ поверхностного заряда на эллипсоиде (71.2), адекватной плотности σ_L, заданной на поверхности (71.1). Говоря о полиномиальных функциях σ_L/p и $\bar{\sigma}_L/\bar{p}$, напомним, что степенью произвольного полинома, рассматриваемого на границе эллипсоида (например, на поверхности (71.1)), называют степень полинома, получающегося из исходного в результате исключения с помощью (71.1) четных степеней какой-либо из декартовых координат и приведения подобных членов. Эти полиномы мы будем записывать в следующем симметричном виде:

$$\sigma_L/p = \sum_{m=0}^{L} \sigma^{(m)}/p = \sum_{m=0}^{L} \sum_{i+j+k=m} \alpha_{ijk}\,(x/a)^i (y/b)^j (z/c)^k, \tag{71.4}$$

где, в соответствии с установленной в § 39 возможностью трактовать $\sigma^{(m)}/p$ как гармонические полиномы переменных x/a, y/b, z/c, коэффициенты α_{ijk} связаны уравнениями[1]

$$(i+2)(i+1)\alpha_{i+2,j,k} + (j+2)(j+1)\alpha_{i,j+2,k} + (k+2)(k+1)\alpha_{i,j,k+2} = 0. \tag{71.5}$$

Использование так называемых «парциальных» плотностей $\sigma^{(m)}$ заряда удобно тем, что, как показано в § 43, все электрические 2^l-польные момен-

[1] Укажем еще одно (сохраняющее равноправие декартовых направлений) представление (ср. (69.24)) таких полиномов

$$\sigma_L/p = \sum_{l=L-1}^{L} \sum_{i+j+k=l} \varkappa_{ijk}\,(x/a)^i (y/b)^j (z/c)^k.$$

Оно оказалось полезным, в частности, в выкладках при предельном переходе к результатам для эллиптического цилиндра.

ты, обусловленные распределением $\sigma^{(m)}$ и удовлетворяющие неравенству $l < m$, равны нулю.

Обратимся теперь к конкретному примеру, в котором исходная плотность заряда соответствует полиному второй степени

$$\sigma = \left(\alpha_{000} + \left\langle \alpha_{100}\frac{x}{a}\right\rangle + \left\langle \alpha_{110}\frac{xy}{ab}\right\rangle + \left\langle \alpha_{200}\frac{x^2}{a^2}\right\rangle\right) p\,, \tag{71.6}$$

причем в согласии с (71.5)

$$\langle \alpha_{200}\rangle = 0\,.$$

В соответствии с утверждением «а» предыдущего раздела, соображениями симметрии и избранной формой записи «поверхностных» полиномов искомое распределение заряда на поверхности (71.2) имеет аналогичный вид

$$\bar\sigma = \left(\beta_{000} + \left\langle \beta_{100}\frac{x}{\bar a}\right\rangle + \left\langle \beta_{110}\frac{xy}{\bar a\bar b}\right\rangle + \left\langle \beta_{200}\frac{x^2}{\bar a^2}\right\rangle\right) \bar p, \tag{71.7}$$

где

$$\langle \beta_{200}\rangle = 0. \tag{71.8}$$

Вычислим и приравняем друг другу полные заряды $Q^{(\sigma)} = \oint \alpha_{000}\, p\, dS$ и $\bar Q = \oint \beta_{000}\, \bar p\, d\bar S$, дипольные компоненты $Q_x^{(\sigma)}$ и $\bar Q_x$, квадрупольные компоненты $Q_{xy}^{(\sigma)}$ и $\bar Q_{xy}$, а также квадрупольные компоненты $Q_{xx}^{(\sigma)}$ и $\bar Q_{xx}$, отвечающие распределениям (71.6) и (71.7). При вычислении мультипольных моментов полезна формула Лагранжа (см. (В.15)).

В результате указанных действий получаем для β_{000}, β_{100}, β_{110} окончательные выражения

$$\beta_{000} = g\alpha_{000}\,, \tag{71.9}$$

$$\beta_{100} = g\frac{a}{\bar a}\,\alpha_{100}, \tag{71.10}$$

$$\beta_{110} = g\frac{ab}{\bar a\bar b}\,\alpha_{110}, \tag{71.11}$$

где

$$g = \frac{abc}{\bar a\bar b\bar c},$$

а для коэффициентов β_{200}, β_{020}, β_{002} второе, наряду с (71.8), уравнение

$$2\bar a^2\beta_{200} - \bar b^2\beta_{020} - \bar c^2\beta_{002} = g\left(2a^2\alpha_{200} - b^2\alpha_{020} - c^2\alpha_{002}\right)\,. \tag{71.12}$$

Третье уравнение, замыкающее систему, находится из (71.12) с помощью циклической перестановки. В качестве него можно взять, например,

$$\bar a^2\beta_{200} - 2\bar b^2\beta_{020} + \bar c^2\beta_{002} = g\left(a^2\alpha_{200} - 2b^2\alpha_{020} + c^2\alpha_{002}\right)\,. \tag{71.13}$$

Еще одно уравнение, циклически связанное с (71.12), уже не будет независимым, представляя собой линейную комбинацию (71.12) и (71.13). Решение системы уравнений (71.8), (71.12) и (71.13) дает для β_{200} значение, которое с учетом $\langle\alpha_{200}\rangle = 0$ запишем в виде

$$\beta_{200} = g\left\langle \bar a^2\bar b^2\right\rangle^{-1}\left[\left\langle a^2b^2\right\rangle \alpha_{200} + \lambda\left(3a^2\alpha_{200} - \left\langle a^2\alpha_{200}\right\rangle\right)\right]. \tag{71.14}$$

Выражения для коэффициентов β_{010}, β_{001}, β_{011}, β_{101}, β_{020} и β_{002} получаются из формул (71.10), (71.11) и (71.14) в результате циклической замены. Таким образом, формальное рассмотрение примера завершено.

Если однако, в соответствии со сноской 2 в разд. 71.1 считать (71.7) параметрическим представлением семейства поверхностных распределений, адекватных (входящему в это семейство при $\lambda=0$) поверхностному заряду (71.6), то небезынтересно узнать, во что превращается (71.7) в результате предельного перехода при $\lambda \to -c^2$ ($\bar{c} \to 0$), т. е. при вырождении эллипсоида (71.2) в лежащий в плоскости (x, y) эллиптический диск. Так как при $\lambda \to -c^2$ имеет место $\bar{p} \to \bar{c}/D(x,y)$, а на поверхности эллипсоида $z/\bar{c} \to \pm D(x,y)$, где $D(x,y) = \sqrt{1-(x/a_d)^2-(y/b_d)^2}$ и $a_d = (a^2-c^2)^{1/2}$, $b_d = (b^2-c^2)^{1/2}$ — полуоси эллиптического диска, то оказывается, что в пределе распределение (71.7) «расщепляется» на две системы зарядов. Их образуют простой слой с плотностью

$$\sigma_d = \lim_{\lambda \to -c^2} 2\bar{\sigma}_2 = \frac{2abc}{a_d b_d D}\left\{\alpha_{000} + a_d^{-2} b_d^{-2}\left[\left(\left\langle a^2 b^2\right\rangle - 3c^4\right)\alpha_{002} + \right.\right.$$
$$\left. + c^2\left\langle a^2 \alpha_{200}\right\rangle\right] + \alpha_{100}\frac{ax}{a_d^2} + \alpha_{010}\frac{by}{b_d^2} + \alpha_{110}\frac{abxy}{a_d^2 b_d^2} +$$
$$+ a_d^{-2} b_d^{-2}\left[\left(\left\langle a^2 b^2\right\rangle - 3a^2c^2\right)\alpha_{200} + \left(3c^4 - \left\langle a^2 b^2\right\rangle\right)\alpha_{002}\right] x^2/a_d^2 +$$
$$\left. + a_d^{-2} b_d^{-2}\left[\left(\left\langle a^2 b^2\right\rangle - 3b^2c^2\right)\alpha_{020} + \left(3c^4 - \left\langle a^2 b^2\right\rangle\right)\alpha_{002}\right] y^2/b_d^2\right\} \qquad (71.15)$$

и поверхностное распределение диполей (двойной слой) с плотностью

$$\tau_d = \lim_{\lambda \to -c^2} 2z\bar{\sigma}_2 = \frac{2abc^2 D}{a_d b_d}\left(\alpha_{001} + \alpha_{101}\frac{ax}{a_d^2} + \alpha_{011}\frac{by}{b_d^2}\right). \qquad (71.16)$$

Удостовериться в адекватности распределения (71.6) и двойной системы зарядов (71.15), (71.16) можно, сопоставляя либо их вычисленные потенциалы (см. §§ 21, 24, 28), либо соответствующие компоненты их мультипольных моментов. В последнем случае расчет интегралов по поверхности эллиптического диска облегчает формула (В.18) Приложения В.

При совпадении поверхностей (71.1) и (71.2), т. е. при $\lambda=0$, распределение (71.7), как уже отмечалось, переходит в (71.6) в силу единственности решения задачи об адекватном поверхностном заряде.

В другом частном случае, когда эллипсоиды (71.1) и (71.2) вырождаются в концентрические сферы, так что

$$a = b = c = p = r_0, \qquad \bar{a} = \bar{b} = \bar{c} = \bar{p} = R_0, \qquad (71.17)$$

отношение любого коэффициента распределения (71.7) к соответствующему коэффициенту распределения (71.6) дается общей формулой

$$\beta_{ijk}/\alpha_{ijk} = (r_0/R_0)^{i+j+k+3}.$$

71.3. Поверхностные заряды, адекватные объемным

Рассмотрим теперь пример, в котором заряд эллипсоида (71.1) задан объемной плотностью, являющейся полиномом первой степени

$$\rho = \rho_0 + \langle \rho_a x/a \rangle. \qquad (71.18)$$

В соответствии с утверждением «б» разд. 71.1 плотность $\bar{\sigma}'$ заряда на поверхности (71.2), адекватная распределению (71.18), должна иметь вид

$$\bar{\sigma}' = \left[\gamma_{000} + \left\langle \gamma_{200} \frac{x^2}{\bar{a}^2} \right\rangle + \left\langle \left(\gamma_{100} + \gamma_{300} \frac{x^2}{\bar{a}^2} + \gamma_{120} \frac{y^2}{\bar{b}^2} + \gamma_{102} \frac{z^2}{\bar{c}^2} \right) \frac{x}{\bar{a}} \right\rangle \right] \bar{p}, \tag{71.19}$$

где отсутствие произведений координат xy, yz, xz и xyz очевидно из соображений симметрии, а коэффициенты γ_{ijk}, согласно (71.5), связаны равенствами

$$\langle \gamma_{200} \rangle = 0, \tag{71.20}$$

$$3\gamma_{300} + \gamma_{120} + \gamma_{102} = 0, \tag{71.21}$$

и теми, что получаются из (71.21) при циклической перестановке.

Используя определения

$$\bar{Q}_{i_1 \ldots i_l} = \oint \bar{\sigma}' \, \theta_{i_1 \ldots i_l}(x, y, z) \, dS, \tag{71.22}$$

$$Q^{(\rho)}_{i_1 \ldots i_l} = \oint \rho \, \theta_{i_1 \ldots i_l}(x, y, z) \, dV, \tag{71.23}$$

и привлекая для вычисления электрических моментов эллипсоида формулы Лагранжа (B.15) и (B.11), приравняем полные заряды $\bar{Q} = Q^{(\rho)}$ и какие-нибудь две диагональные компоненты квадрупольных тензоров (например, $\bar{Q}_{xx} = Q^{(\rho)}_{xx}$ и $\bar{Q}_{yy} = Q^{(\rho)}_{yy}$) распределений (71.19) и (71.18). Это приводит к системе уравнений, включая (71.20), для коэффициентов γ_{000}, γ_{200}, γ_{020} и γ_{002}, решение которой дается формулами

$$\gamma_{000} = \frac{1}{3} \rho_0 g, \qquad \gamma_{200} = \gamma_{000} \left(3\bar{a}^{-2} \left\langle \bar{a}^{-2} \right\rangle^{-1} - 1 \right) \tag{71.24}$$

и теми, что получаются из (71.24) при циклической перестановке.

Приравнивание дипольных $\bar{Q}_x = Q^{(\rho)}_x$ и любых двух октупольных компонент с нечетным числом индексов x (например, $\bar{Q}_{xyy} = Q^{(\rho)}_{xyy}$ и $\bar{Q}_{xzz} = Q^{(\rho)}_{xzz}$) дает вместе с (71.21) систему уравнений для определения γ_{100}, γ_{300}, γ_{120} и γ_{102}. Решение последней имеет вид

$$\begin{gathered} \gamma_{100} = \tfrac{1}{5} \, \rho_a g a / \bar{a}, \qquad \gamma_{300} = \gamma_{100} \left(5\bar{a}^{-2} \varkappa_a^{-1} - 1 \right), \\ \gamma_{120} = \gamma_{100} \left(5\bar{b}^{-2} \varkappa_a^{-1} - 1 \right), \qquad \gamma_{102} = \gamma_{100} \left(5\bar{c}^{-2} \varkappa_a^{-1} - 1 \right), \end{gathered} \tag{71.25}$$

где $\varkappa_a = \left\langle \bar{a}^{-2} \right\rangle + 2\bar{a}^{-2}$.

Выражения для остальных коэффициентов, содержащихся в (71.19), получаются из (71.25) путем циклической замены.

Рассматривая (71.19) как параметрическое семейство поверхностных зарядов, адекватных распределению (71.18), выполним, как в предыдущем разделе, предельный переход к эллиптическому диску. Результат показывает, что плотности (71.18) адекватна на софокусном диске двойная система зарядов: простой слой с плотностью

$$\sigma'_d = \lim_{\lambda \to -c^2} 2\bar{\sigma}'_3 = \frac{2abcD}{a_d b_d} \left(\rho_0 + \rho_a \frac{ax}{a_d^2} + \rho_b \frac{by}{b_d^2} \right) \tag{71.26}$$

и двойной слой с плотностью

$$\tau_d' = \lim_{\lambda \to -c^2} 2z\bar{\sigma}_3' = \frac{2}{3}\,\frac{abc^2}{a_d b_d}\,\rho_c D^3\,. \tag{71.27}$$

Сравнение этих формул с их найденными выше аналогами обнаруживает примечательное различие. Так, если распределение (71.26) содержит множитель D в первой степени, т. е. обращается в нуль на краю диска, то в (71.15) величина D входит в отрицательной степени, обусловливая характерную статическую особенность на краю диска, именуемую в теории дифракции как «условие на ребре». По-разному ведут себя на краю диска, характеризуясь «нулями» разного порядка, и дипольные плотности (71.16) и (71.27). Указанные различия являются проявлением своеобразной асимметрии, присутствующей и в утверждениях «а» и «б». Она заключается в том, что, в то время как для любого объемного заряда всегда существует адекватное поверхностное распределение, обратное в случае эллипсоида, вообще говоря, не имеет места. Зато при вырождении эллипсоида в шар любому поверхностному заряду соответствует и уже не одно адекватное объемное распределение, а их бесконечное множество. Например, однородно заряженной сфере адекватно любое сферически симметричное распределение того же полного заряда в объеме концентрического с ней шара произвольного радиуса

Отметим частные случаи полученных в этом разделе результатов. При $\bar{a} = a$, $\bar{b} = b$, $\bar{c} = c$, т. е. при слиянии поверхностей (71.1) и (71.2) распределение (71.19) принимает вид, согласующийся с соответствующими формулами § 70, где рассматривался именно этот случай.

Если поверхности (71.1) и (71.2) превращаются в концентрические сферы (71.17), то из всех коэффициентов γ_{ijk} отличными от нуля остаются лишь γ_{000}, γ_{100}, γ_{010}, γ_{001}. В результате кубический полином (71.19) обращается в распределение

$$\bar{\sigma}' = \left(\frac{r_0}{R_0}\right)^3 \left[\frac{\rho_0 R_0}{3} + \frac{r_0}{5R_0}\,(\rho_a x + \rho_b y + \rho_c z)\right],$$

являющееся подобно (71.18) полиномом первой степени.

71.4. Эллиптический цилиндр

Располагая аналитическими решениями задачи об адекватных зарядах эллипсоида, нетрудно распространить их на предельный случай — аналогичную двумерную задачу об эллиптическом цилиндре. Для этого будем считать теперь c наибольшей полуосью эллипсоида, положим в (71.6) и (71.18) все коэффициенты при положительных степенях z равными нулю (в результате чего в соотношениях типа (71.5) исчезает третье слагаемое, упрощается, сводясь лишь к двум индексам, и маркировка самих коэффициентов α) и выполним предельный переход при $c \to \infty$ в формулах (71.1), (71.2), (71.7) и (71.19).

Предельный переход превращает поверхности (71.1) и (71.2) в границы софокусных эллиптических цилиндров

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{71.28}$$

$$\frac{x^2}{\bar{a}^2} + \frac{y^2}{\bar{b}^2} = 1, \tag{71.29}$$

где $\bar{a}^2 - a^2 = \bar{b}^2 - b^2 = \lambda$.

Заданному на (71.28) поверхностному распределению

$$\sigma = \left(\alpha_{00} + \alpha_{10}\frac{x}{a} + \alpha_{01}\frac{y}{b} + \alpha_{11}\frac{xy}{ab} + \alpha_{20}\frac{x^2}{a^2} + \alpha_{02}\frac{y^2}{b^2}\right)p\,,$$

в котором $\alpha_{20} + \alpha_{02} = 0$, оказывается адекватным распределенный по поверхности (71.29) заряд плотности

$$\bar{\sigma} = \frac{ab}{\bar{a}\bar{b}}\left[\alpha_{00} + \alpha_{10}\frac{ax}{\bar{a}^2} + \alpha_{01}\frac{by}{\bar{b}^2} + \alpha_{11}\frac{abxy}{\bar{a}^2\bar{b}^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{a^2+b^2}{\bar{a}^2+\bar{b}^2}\left(\alpha_{20}\frac{x^2}{\bar{a}^2} + \alpha_{02}\frac{y^2}{\bar{b}^2}\right)\right]\bar{p}\,, \tag{71.30}$$

где $p = (x^2/a^4 + y^2/b^4)^{-1/2}$, $\bar{p} = (x^2/\bar{a}^4 + y^2/\bar{b}^4)^{-1/2}$.

Что касается объемного заряда плотности

$$\rho = \rho_0 + \rho_a\frac{x}{a} + \rho_b\frac{y}{b}\,,$$

заданного в цилиндре (71.28), то ему на поверхности (71.29) адекватно распределение

$$\bar{\sigma}' = \left(\gamma_{00} + \gamma_{20}\frac{x^2}{\bar{a}^2} + \gamma_{02}\frac{y^2}{\bar{b}^2} + \gamma_{10}\frac{x}{\bar{a}} + \gamma_{30}\frac{x^3}{\bar{a}^3} + \gamma_{12}\frac{xy^2}{\bar{a}\bar{b}^2} + \right.$$
$$\left. + \gamma_{01}\frac{y}{\bar{b}} + \gamma_{21}\frac{x^2y}{\bar{a}^2\bar{b}} + \gamma_{03}\frac{y^3}{\bar{b}^3}\right)\bar{p}\,, \tag{71.31}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
\gamma_{00} = \frac{\rho_0 ab}{2\bar{a}\bar{b}}, \qquad \gamma_{20} = -\gamma_{02} = \gamma_{00}\frac{b^2-a^2}{\bar{a}^2+\bar{b}^2}, \\
\gamma_{10} = \frac{\rho_a a^2 b}{4\bar{a}^2\bar{b}}, \qquad 3\gamma_{30} = -\gamma_{12} = 3\gamma_{10}\frac{b^2-a^2}{\bar{a}^2+3\bar{b}^2},
\end{gathered} \tag{71.32}$$

а выражения для γ_{01}, γ_{03}, γ_{21} получаются из формул (71.32) путем взаимной замены $a \leftrightarrow b$ и одновременной перестановки индексов у коэффициентов γ.

При $\lambda \to -b^2$ ($\bar{b} \to 0$), когда эллиптический цилиндр (71.29) вырождается в софокусную с ним бесконечную прямолинейную полосу шириной $2a_s = 2\sqrt{a^2-b^2}$, лежащую в плоскости (x, z), каждое из двух самостоятельных параметрических семейств распределений (71.30) и (71.31) расщепляется в пределе на две системы зарядов. Так, для (71.30) адекватным пределом оказывается совокупность простого слоя с плотностью

$$\bar{\sigma}_s = \lim_{\lambda\to -b^2} 2\bar{\sigma}_2 = \frac{2ab}{\sqrt{a_s^2 - x^2}}\left[\alpha_{00} + \alpha_{10}\frac{ax}{a_s^2} - \alpha_{20}\frac{a^2+b^2}{a_s^2}\left(1 - 2\frac{x^2}{a_s^2}\right)\right]$$

и двойного слоя с плотностью

$$\bar{\tau}_s = \lim_{\lambda\to -b^2} 2y\bar{\sigma}_2 = \frac{2ab^2}{a_s^2}\sqrt{a_s^2 - x^2}\left(\alpha_{01} + \alpha_{11}\frac{ax}{a_s^2}\right),$$

а распределение (71.31) переходит в адекватную ему комбинацию простого слоя с плотностью

$$\bar{\sigma}'_s = \lim_{\lambda\to -b^2} 2\bar{\sigma}'_3 = \frac{2ab}{a_s^2}\sqrt{a_s^2 - x^2}\left(\rho_0 + \rho_a \frac{ax}{a_s^2}\right)$$

и двойного слоя с плотностью

$$\bar{\tau}'_s = \lim_{\lambda\to -b^2} 2y\bar{\sigma}'_3 = \frac{2ab^2}{3a_s^4}\,\rho_b (a_s^2 - x^2)^{3/2}.$$

В правильности полученных в этом разделе выражений для адекватных распределений заряда можно убедиться, вычисляя и сравнивая либо соответствующие потенциалы эллиптических цилиндров, либо соответствующие компоненты погонных двумерных электрических 2^n-польных моментов

$$q^{(\rho)}_{i_1\ldots i_n} = \int \rho(x,y)\,\theta^{(2)}_{i_1\ldots i_n}\,dS, \qquad q^{(\sigma)}_{i_1\ldots i_n} = \oint \sigma(x,y)\,\theta^{(2)}_{i_1\ldots i_n}\,dl, \tag{71.33}$$

где компонентами ядра $\theta^{(2)}_{i_1\ldots i_n}$ двумерных моментов теперь служат (см. Приложение F1) выражения

$$\theta^{(2)}_x = x, \qquad \theta^{(2)}_{xx} = x^2 - y^2, \qquad \theta^{(2)}_{xy} = 2\,xy, \qquad \theta^{(2)}_{xxx} = -\theta^{(2)}_{xyy} = x^3 - 3xy^2.$$

При вычислении интегралов (71.33) по поверхности или контуру поперечного сечения эллиптического цилиндра полезны двумерные формулы Лагранжа[1]

$$\int \left(\frac{x}{a}\right)^{2l}\left(\frac{y}{b}\right)^{2m} dS = 2\pi\,\frac{(2l-1)!!(2m-1)!!}{(2l+2m+2)!!}\,ab\,,$$

$$\oint \left(\frac{x}{a}\right)^{2l}\left(\frac{y}{b}\right)^{2m} p_2\,dl = 2\pi\,\frac{(2l-1)!!(2m-1)!!}{(2l+2m)!!}\,ab.$$

.

§ 72. Адекватные стационарные токи в шаре

72.1. Формулировка задачи. Метод мультипольных моментов

Мы переходим к рассмотрению задач об адекватных стационарных токах. В частности, в данном параграфе речь пойдет о задаче [528], в которой «первичные» токи заданы в объеме некоторого шара радиуса a, а на концентрической сфере радиуса R требуется найти адекватные токи. Задача рассматривается не в сферических, а в декартовых координатах, дабы в дальнейшем распространить используемую здесь «технологию» на геометрически более общие задачи. Решение задачи применительно к первичному току, декартовы компоненты плотности которого заданы как полиномиальные функции декартовых координат, достигается методом мультипольных

[1] См. формулы (B.24) и (B.27) Приложения B.

моментов, который, как и в случае скалярных источников, позволяет избежать громоздкой процедуры вычисления полей.

Как известно, в *односвязной* области пространства, *внешней* по отношению к *стационарным* электрическим токам, можно оперировать с псевдоскалярным потенциалом их магнитного поля (*магнитным потенциалом*) и его мультипольным разложением. Последнее в случае шаровой области с полиномиальной (степени L) плотностью тока (объемной $\mathbf{j}$ или поверхностной $\mathbf{i}$) имеет вид конечного ряда[1]

$$\left.\begin{array}{c}\widetilde{\Phi}(\mathbf{r})\\ \\ \widetilde{\Psi}(\mathbf{r})\end{array}\right\} = \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{l!}\, \mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l}\, \frac{x_{i_1}\cdots x_{i_l}}{r^{2l+1}}\,, \tag{72.1}$$

или в трехиндексной записи

$$\left.\begin{array}{c}\widetilde{\Phi}(\mathbf{r})\\ \\ \widetilde{\Psi}(\mathbf{r})\end{array}\right\} = \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{l!\,r^{2n+1}} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=l} \frac{l\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!\,\gamma\,!}\, \mathfrak{M}_{\alpha\beta\gamma}\, x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}. \tag{72.2}$$

Входящие в (72.1) величины $\mathfrak{M}_{i_1\ldots i_l}$ суть компоненты тензора l-го ранга, образующие в совокупности магнитный мультипольный момент l-го порядка. В дальнейшем нам необходимо различать магнитные мультиполи $\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{i_1\ldots i_l}$ объемных токов, характеризуемых плотностью $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, и магнитные мультиполи $\mathfrak{M}^{(\mathbf{i})}_{i_1\ldots i_l}$ поверхностных токов, характеризуемых поверхностной плотностью $\mathbf{i}(\mathbf{r})$. Эти мультипольные моменты даются формулами

$$\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{i_1\ldots i_l} = \frac{1}{(l+1)\mathfrak{c}} \int [\mathbf{rj}]\, \nabla\theta_{i_1\ldots i_l}\, dV, \tag{72.3}$$

$$\mathfrak{M}^{(\mathbf{i})}_{i_1\ldots i_l} = \frac{1}{(l+1)\mathfrak{c}} \oint [\mathbf{ri}]\, \nabla\theta_{i_1\ldots i_l}\, dS. \tag{72.4}$$

Ядра $\theta_{i_1\ldots i_l}$ мультипольных моментов (см. § 34) принимают, в частности, значения

$$\theta_x = x; \qquad \theta_{xx} = 2x^2 - y^2 - z^2, \qquad \theta_{xy} = 3xy;$$

$$\theta_{xyy} = 3x(4y^2 - x^2 - z^2), \qquad \theta_{xyz} = 15xyz.$$

Так что[2]

$$\mathfrak{M}_x = \frac{1}{2\mathfrak{c}} \int (yj_z - zj_y)dV; \tag{72.5}$$

$$\mathfrak{M}_{xx} = \frac{2}{\mathfrak{c}} \int x(yj_z - zj_y)dV, \tag{72.6}$$

$$\mathfrak{M}_{xy} = \frac{1}{\mathfrak{c}} \int \{xzj_x - yzj_y + (y^2 - x^2)j_z\}dV; \tag{72.7}$$

---

[1] См. (54.4). Предполагается, что начало координат выбрано в центре шара.

[2] Здесь и далее всякий раз, когда встречается несколько соотношений (уравнений), получающихся друг из друга циклической перестановкой или взаимной заменой координат, мы выписываем только одно соотношение (уравнение). При этом следует иметь в виду, что при взаимной замене координат псевдовеличины изменяют знак на противоположный.

$$\mathfrak{M}_{xyy} = \frac{3}{4\mathfrak{c}} \int \{10xyzj_x + (x^2+z^2-4y^2)zj_y + (4y^2-11x^2-z^2)yj_z\} dV, \quad (72.8)$$

$$\mathfrak{M}_{xyz} = \frac{15}{4\mathfrak{c}} \int \{(z^2-y^2)xj_x + (x^2-z^2)yj_y + (y^2-x^2)zj_z\} dV. \quad (72.9)$$

Разложение (72.1) полностью аналогично мультипольному разложению электростатического потенциала за одним исключением: в сумме (72.1) отсутствует слагаемое, соответствующее $l=0$ (магнитному заряду).

Теперь — об общей постановке и методе решения задачи. Пусть в объеме шара радиуса a задан электрический ток, декартовы компоненты плотности которого являются полиномами степени L: [1]

$$j_x = \sum_{1\leqslant l+m+n\leqslant L} A_{lmn}\, x^l y^m z^n, \qquad j_y = \sum_{1\leqslant l+m+n\leqslant L} B_{lmn}\, x^l y^m z^n,$$

$$j_z = \sum_{1\leqslant l+m+n\leqslant L} C_{lmn}\, x^l y^m z^n. \quad (72.10)$$

Входящие в (11) коэффициенты A, B, C заданных полиномов связаны соотношениями, вытекающими из условия стационарности тока

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (72.11)$$

и краевого условия на границе шара

$$j_n\big|_S = 0. \quad (72.12)$$

Требуется найти адекватный току (72.10) поверхностный ток на концентрической с шаром сфере радиуса R.

Схема решения заключается в следующем. Сначала вычисляются все независимые компоненты магнитных мультиполей $\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{i_1\ldots i_l}$, ранг которых заключен в диапазоне $1 \leqslant l \leqslant L$. Общее число таких компонент равно

$$N_L^{(M)} = \sum_{l=1}^{L} (2l+1) = L(L+2). \quad (72.13)$$

Как уже указывалось, любая декартова компонента подлежащего нахождению адекватного поверхностного тока также должна быть полиномом степени L. Напомним, что под степенью полинома, рассматриваемого на поверхности шара

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2\,, \quad (72.14)$$

понимается степень полинома, получающегося из исходного в результате исключения на основе (72.14) четных степеней какой-либо из декартовых координат (например, z) и последующего приведения подобных членов. Эти полиномы можно записывать в различных эквивалентных формах (подробнее см. [524]). Здесь мы будем записывать их в симметричном (сохраняющем равноправие декартовых направлений) виде:

$$i_x = \sum_{l=L-1}^{L} \sum_{i+j+k=l} \alpha_{ijk}\, x^i y^j z^k, \qquad i_y = \sum_{l=L-1}^{L} \sum_{i+j+k=l} \beta_{ijk}\, x^i y^j z^k,$$

[1] В записи полиномов (72.10) учтено, что свободные коэффициенты, соответствующие слагаемым с $x^0 y^0 z^0$, равны нулю.

$$i_z = \sum_{l=L-1}^{L} \sum_{i+j+k=l} \gamma_{ijk}\, x^i y^j z^k. \tag{72.15}$$

Таким образом, каждая компонента поверхностного тока есть сумма однородных полиномов $(L-1)$-ой и L-ой степеней, коэффициенты которых подлежат нахождению. Поскольку число коэффициентов $N_L^{(H)}$ однородного полинома степени L равно

$$N_L^{(H)} = \frac{1}{2}\,(L+1)(L+2),$$

то число коэффициентов в каждом из полиномов (72.15)

$$N^{(L)} = N_L^{(H)} + N_{L-1}^{(H)} = (L+1)^2, \tag{72.16}$$

а их общее число во всех трех полиномах (72.15), дающее число неизвестных в нашей задаче, есть

$$N = 3N^{(L)} = 3(L+1)^2. \tag{72.17}$$

В частности, при $L = 3$ количество неизвестных равно 48, в то время как в аналогичной задаче о скалярных источниках в шаре неизвестных втрое меньше.

Подсчитаем теперь число линейных алгебраических уравнений, имеющихся в нашем распоряжении для нахождения коэффициентов полиномов (72.15). Прежде всего сюда входят неоднородные уравнения, возникающие в результате приравнивания одинаковых независимых компонент тензоров магнитных мультиполей (от первого до L-го рангов), создаваемых токами (72.10) и (72.15). Поскольку всякий симметричный неприводимый тензор l-го ранга, каковым является и тензор магнитного мультиполя того же ранга, имеет $2l+1$ независимых компонент, то число получаемых неоднородных уравнений оказывается равным

$$N_L^{(M)} = \sum_{l=1}^{L}(2l+1) = (L+1)^2 - 1. \tag{72.18}$$

Условие обращения в нуль на поверхности шара (72.14) нормальной компоненты плотности поверхностного тока :

$$i_n\big|_{\bar{S}} = (\mathbf{ri})\big|_{\bar{S}} = xi_x + yi_y + zi_z = 0, \tag{72.19}$$

увеличивая на единицу, как видно из (72.19), степень характеризующих ток полиномов, добавляет к (72.18)

$$N_{\bar{S}} = N^{(L+1)} = (L+2)^2 \tag{72.20}$$

однородных уравнений.

Условие стационарности поверхностного тока

$$\operatorname{div}\mathbf{i} = 0, \tag{72.21}$$

понижает на единицу степень полинома, добавляя еще

$$N_{\text{div}} = N^{(L-1)} = L^2 \tag{72.22}$$

однородных уравнений для коэффициентов.

Таким образом, число уравнений $N_L^{(M)} + N_{\bar{S}} + N_{\text{div}}$ всегда на единицу превышает число неизвестных N: можно показать, что одно из однородных уравнений является линейной комбинацией остальных.

72.2. Пример адекватных токов

Для иллюстрации метода обратимся к случаю, когда компоненты токов (72.10) и (72.15) являются кубическими полиномами. Как уже указывалось, этому случаю, вообще говоря, соответствует 48 подлежащих нахождению неизвестных коэффициентов полиномов (72.15). К счастью, как и в аналогичной задаче со скалярными источниками (см. §§ 69,70), решение существенно упрощается, поскольку возникающая система 48 линейных алгебраических уравнений фактически расщепляется на восемь самостоятельных подсистем. К тому же, как и в задаче со скалярными источниками, благодаря симметрии (обеспечивающей равноправие декартовых направлений), достаточно найти аналитические решения лишь четырех подсистем, получая остальные с помощью циклической перестановки в уже найденных решениях.

В соответствии со сказанным выше, для решения задачи вместо рассмотрения всех пятнадцати независимых компонент магнитных мультипольных моментов $\boldsymbol{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{M}_{ij}$, $\mathfrak{M}_{ij\,k}$ можно ограничиться, например, следующими: 1) $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_{xyy}$, $\mathfrak{M}_{xzz}$; 2) $\mathfrak{M}_{xx}$, $\mathfrak{M}_{yy}$; 3) $\mathfrak{M}_{xy}$; 4) $\mathfrak{M}_{xyz}$. Эти компоненты разбиты на четыре группы, рассмотрение каждой из которых приводит к самостоятельной подсистеме уравнений для входящих в них коэффициентов «токовых» полиномов.

Так, приравнивая компоненты $\mathfrak{M}_x^{(\mathbf{i})}$, $\mathfrak{M}_{xyy}^{(\mathbf{i})}$, $\mathfrak{M}_{xzz}^{(\mathbf{i})}$, вычисленные по формулам[1] (72.5) и (72.8), соответствующим компонентам объемных токов $\mathfrak{M}_x^{(\mathbf{j})}$, $\mathfrak{M}_{xyy}^{(\mathbf{j})}$, $\mathfrak{M}_{xzz}^{(\mathbf{j})}$ и добавляя к полученным неоднородным уравнениям требуемые однородные уравнения, вытекающие из (72.19) и (72.21), получаем следующую замкнутую подсистему *семи* уравнений:

$$3\gamma_{030} + \gamma_{210} + \gamma_{012} - 3\beta_{003} - \beta_{021} - \beta_{201} = \frac{15\mathfrak{c}}{2\pi R^6}\,\mathfrak{M}_x^{(\mathbf{j})}\,,$$

$$5\alpha_{111} + 3\beta_{003} - 4\beta_{021} + \beta_{201} + 12\gamma_{030} - 11\gamma_{210} - \gamma_{012} = \frac{35\mathfrak{c}}{2\pi R^8}\,\mathfrak{M}_{xyy}^{(\mathbf{j})}\,,$$

$$\alpha_{111} + 2\beta_{021} + 2\gamma_{012} = 0\,, \quad \alpha_{111} + \beta_{201} + \gamma_{210} = 0\,, \quad \beta_{003} + \gamma_{012} = 0\,.$$

Здесь

$$\mathfrak{M}_x^{(\mathbf{j})} = \frac{2\pi}{15\mathfrak{c}}\,a^5\left\{C_{010} - B_{001} - \frac{1}{7}\,a^2(B_{201} - C_{210} + 4B_{021} - 4C_{012})\right\}, \tag{72.23}$$

$$\mathfrak{M}_{xyy}^{(\mathbf{j})} = \frac{8\pi}{315\mathfrak{c}}\,a^9(4B_{201} - 14B_{021} + C_{210} - 11C_{012})\,. \tag{72.24}$$

Выражения (72.23), (72.24) возникли в результате интегрирования по формулам (72.5), (72.8) и последующего упрощения с использованием вытекающих из (72.11) и (72.12) соотношений между коэффициентами A, B и C:

$$A_{111} + 2B_{021} + 2C_{012} = 0\,, \qquad A_{111} + B_{201} - B_{003} + C_{201} - C_{012} = 0\,,$$

$$B_{021} - B_{003} + C_{030} - C_{012} = 0\,, \quad B_{001} + a^2B_{003} + C_{010} + a^2C_{012} = 0\,.$$

[1] В них $\mathbf{j}\,dV$ заменено на $\mathbf{i}\,dS$

Решение первой подсистемы уравнений (для неизвестных α_{111}, β_{201}, β_{021}, β_{003}, γ_{210}, γ_{030} и γ_{012}) имеет следующий вид:

$$\alpha_{111} = \frac{7\mathfrak{c}}{12\pi R^8}\,(\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xyy} - \mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xzz})\,, \tag{72.25}$$

$$\gamma_{030} = -\beta_{021} = \frac{\mathfrak{c}}{4\pi R^6}\,(3\,\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{x} + \frac{7}{6R^2}\,\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xyy})\,, \tag{72.26}$$

$$\gamma_{210} = \frac{\mathfrak{c}}{4\pi R^6}\,(3\,\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{x} - \frac{7}{2R^2}\,\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xyy} - \frac{7}{6R^2}\,\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xzz})\,. \tag{72.27}$$

Совершенно аналогично приравнивание вычисленных с помощью (72.6) соответствующих квадрупольных компонент $\mathfrak{M}^{(\mathbf{i})}_{xx}$, $\mathfrak{M}^{(\mathbf{i})}_{yy}$ и $\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xx}$, $\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{yy}$, наряду с использованием (72.19) и (72.21), приводит к *трем* уравнениям, составляющим вторую подсистему:

$$\gamma_{110} - \beta_{101} = \frac{15\mathfrak{c}}{8\pi R^6}\,\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xx}\,, \qquad \langle\alpha_{011}\rangle = 0\,,$$

где в соответствии с (72.6)

$$\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xx} = \frac{8\pi}{105\mathfrak{c}}\,a^7(C_{110} - B_{101}), \tag{72.28}$$

причем $\langle A_{011}\rangle = 0$. Здесь и всюду далее угловыми скобками $\langle ...\rangle$ обозначена сумма трех членов циклической перестановки.

Решение второй подсистемы уравнений (для неизвестных α_{011}, β_{101} и γ_{110}) имеет следующий вид:

$$\alpha_{011} = \frac{5\mathfrak{c}}{8\pi R^6}\,(\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xx} + 2\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{yy}) = \frac{a^7}{7R^6}\,A_{011}\,. \tag{72.29}$$

Приравнивание квадрупольных компонент $\mathfrak{M}^{(\mathbf{i})}_{xy}$ и $\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xy}$ дает значение коэффициента γ_{002} и приводит к третьей подсистеме из *четырех* уравнений для остальных неизвестных коэффициентов α_{101}, β_{011}, γ_{200} и γ_{020}:

$$\alpha_{101} - \beta_{011} - 2\gamma_{200} + 2\gamma_{020} = \frac{15\mathfrak{c}}{4\pi R^6}\,\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xy}\,,$$

$$\alpha_{101} + \gamma_{200} = 0\,, \qquad \alpha_{101} + \beta_{011} = 0\,,$$

где

$$\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xy} = \frac{8\pi}{35\mathfrak{c}}\,a^7 A_{101}\,, \tag{72.30}$$

причем

$$C_{002} = 0\,, \qquad A_{101} = -\,B_{011} = -\,C_{200} = C_{020}.$$

Искомые коэффициенты оказываются равными

$$\gamma_{002} = 0\,, \tag{72.31}$$

$$\alpha_{101} = \gamma_{020} = \frac{5\mathfrak{c}}{8\pi R^6}\,\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xy} = \frac{a^7}{7R^6}\,A_{101}\,. \tag{72.32}$$

Приравнивание друг другу вычисленных на основе (72.9) магнитных октупольных компонент $\mathfrak{M}^{(\mathbf{i})}_{xyz}$ и $\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xyz}$ дает нулевые значения для α_{300}, β_{030} и γ_{003} и приводит к четвертой подсистеме из *шести* уравнений:

$$\langle\alpha_{102} - \alpha_{120}\rangle = \frac{7\mathfrak{c}}{2\pi R^8}\,\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xyz}, \quad \beta_{210} + \gamma_{201} = 0, \quad \alpha_{120} + \beta_{210} = 0$$

для неизвестных коэффициентов α_{120}, α_{102}, β_{210}, β_{020}, γ_{201}, и γ_{021}. Здесь

$$\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xyz} = \frac{4\pi}{63\mathfrak{c}}\; a^9\,\langle A_{102}\rangle\;, \tag{72.33}$$

причем

$$\langle A_{100}\rangle = 0\,, \qquad A_{120} - A_{102} + B_{210} - B_{012} + 2C_{003} - C_{021} - C_{201} = 0\,,$$

$$A_{300} - A_{102} + C_{003} - C_{201} = 0\,, \qquad 3A_{300} + B_{210} + C_{201} = 0\,,$$

$$A_{100} + a^2 A_{102} + C_{001} + a^2 C_{201} = 0\,, \qquad C_{001} + a^2 C_{003} = 0\,.$$

Вычисления дают

$$\alpha_{300} = 0\,, \tag{72.34}$$

$$\alpha_{102} = \frac{7\mathfrak{c}}{12\pi R^8}\;\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xyz} = \frac{a^9}{27R^8}\,\langle A_{102}\rangle\;. \tag{72.35}$$

Таким образом, задача решена, ибо выражения для остальных коэффициентов получаются с помощью циклической или взаимной перестановки координат в формулах (72.25)–(72.27), (72.29), (72.31), (72.32), (72.34) и (72.35).

Рассмотренный пример включает в себя в качестве частных случаев токи, соответствующие значениям показателя степени полиномов $L = 2$ и $L=1$. В частности, простейшие адекватные токи, компоненты которых являются полиномами первой степени, можно предъявить, например, в следующем виде:

$$j_x = 0\,, \qquad j_y = B_{001} z\,, \qquad j_z = -B_{001} y\,; \tag{72.36}$$

$$i_x = 0\,, \qquad i_y = \frac{a^5}{5R^4} B_{001} z\,, \qquad i_z = -\frac{a^5}{5R^4} B_{001} y\,. \tag{72.37}$$

Завершим параграф двумя замечаниями.

1. Расщепление системы алгебраических уравнений для полиномиальных коэффициентов поверхностных токов на три (при $L = 1$), семь (при $L = 2$) или восемь (при $L \geqslant 3$) самостоятельных подсистем, упрощая процедуру получения решения, означает одновременно, что при фиксированном L существует соответствующее число (3, 7 или 8) независимых токовых систем, каждая из которых ответственна за порождение только «своих» компонент тензора магнитного 2^L-поля.

2. Представим себе, что шаровой объем радиуса a с заданными токами $\mathbf{j}\,(\mathbf{r})$ концентрически «вложен» в сферическую полость радиуса $R > a$ в толще массивного сверхпроводника. Требуется знать, какие токи $\mathbf{i}'(\mathbf{r})$ наводятся на поверхности полости. Если обсужденная в данной работе задача о поверхностных токах $\mathbf{i}\,(\mathbf{r})$, адекватных заданным объемным токам $\mathbf{j}\,(\mathbf{r})$, решена, то тем самым решена и задача о сверхпроводнике. Именно,

$$\mathbf{i}'(\mathbf{r}) = -\mathbf{i}(\mathbf{r}).$$

§ 73. Простейшие адекватные токи эллипсоидального тела

73.1. Заданные объемные токи и их мультипольные моменты

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в объеме эллипсоида, ограниченном поверхностью
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{73.1}$$
задано простейшее распределение тока, который характеризуется плотностью
$$j_x=0, \qquad j_y=B_{001}\,\frac{z}{c}, \qquad j_z=C_{010}\,\frac{y}{b}, \tag{73.2}$$
линейно зависящей от координат. Требуется на поверхности (73.1) найти плотность $\mathbf{i}(\mathbf{r})$ тока, адекватного объемному току (73.2).

Всякий постоянный объемный ток должен удовлетворять условию стационарности
$$\operatorname{div}\mathbf{j}=0 \tag{73.3}$$
и краевому условию
$$j_n\big|_S=0 \tag{73.4}$$
на границе S эллипсоида. Последнее в рассматриваемом случае эллипсоидальной границы (73.1) можно переписать в виде
$$\frac{1}{p}\,\langle n_x j_x\rangle\bigg|_S=\left\langle \frac{x}{a^2}\,j_x\right\rangle\bigg|_S=0. \tag{73.5}$$
Здесь $p=\left\langle x^2/a^4\right\rangle^{-1/2}$ — длина перпендикуляра, опущенного из центра эллипсоида на плоскость, касательную к его поверхности в точке, характеризуемой единичным вектором нормали $\mathbf{n}$, а угловыми скобками $\langle\ldots\rangle$ всюду обозначается сумма трех членов циклической перестановки.

Условию (73.3) ток (73.2) удовлетворяет автоматически. А из уравнения (73.5) следует, что
$$c\,B_{001}=-b\,C_{010}\,. \tag{73.6}$$

Используя формулу Лагранжа (В.15)
$$\int\left(\frac{x}{a}\right)^{2l}\left(\frac{y}{b}\right)^{2m}\left(\frac{z}{c}\right)^{2n}dV=3\,\frac{(2l-1)!!\,(2m-1)!!\,(2n-1)!!}{(2l+2m+2n+3)!!}\,V\,, \tag{73.7}$$
вычислим теперь магнитные дипольный $\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}$ и октупольный $\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{klm}$ моменты эллипсоида[1], обусловленные током (73.2). Будем иметь
$$\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_x=\frac{1}{2\,\mathfrak{c}}\int[\mathbf{r}\mathbf{j}]_x\,dV=\frac{V}{5\,\mathfrak{c}}\,b\,C_{010}\,, \qquad \mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_y=\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_z=0; \tag{73.8}$$

[1] Что касается квадрупольного и высших моментов такой же четности, то они, очевидно, равны нулю.

$$\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xyy} = \frac{3}{4\,\mathfrak{c}} \int \left\{10xyzj_x + (x^2+z^2-4y^2)zj_y + (4y^2-11x^2-z^2)yj_z\right\} dV =$$
$$= -\frac{9V}{7!!\,\mathfrak{c}}\, b\, C_{010}\left(3a^2 - 4b^2 + c^2\right), \tag{73.9}$$

$$\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xzz} = -\frac{9V}{7!!\,\mathfrak{c}}\, b\, C_{010}\left(3a^2 + b^2 - 4c^2\right), \tag{73.10}$$

$$\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xxx} = -\mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xyy} - \mathfrak{M}^{(\mathbf{j})}_{xzz}. \tag{73.11}$$

Все остальные компоненты октупольного магнитного момента тока (73.2) равны нулю.

73.2. Искомые поверхностные токи и их мультипольные моменты

Как видно из формул (63.6) и (62.3), распределенному в эллипсоиде объемному току, плотность которого является полиномиальной (степени L) функцией координат, на поверхности эллипсоида адекватен ток плотности $\mathbf{i}$, у которого любая декартова компонента $\mathbf{i}/p$ — полином степени $L+2$. В нашем случае это означает, что декартовы компоненты вектора $\mathbf{i}$ на границе (73.1) следует искать в виде кубических полиномов. Кроме того, из соображений симметрии (см. таблицу 4 в § 56) следует, что i_x должна быть нечетной функцией всех декартовых координат, i_y – четной функцией x и y и нечетной функцией z, а i_z – четной функцией x и z и нечетной функцией y. Поэтому искомый поверхностный ток можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{i_x}{p} &= \alpha_{111}\frac{xyz}{abc}, \\ \frac{i_y}{p} &= \left(\beta_{201}\frac{x^2}{a^2} + \beta_{021}\frac{y^2}{b^2} + \beta_{003}\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{z}{c}, \\ \frac{i_z}{p} &= \left(\gamma_{210}\frac{x^2}{a^2} + \gamma_{030}\frac{y^2}{b^2} + \gamma_{012}\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{y}{b}. \end{aligned}\right\} \tag{73.11}$$

Для поверхностного тока граничное условие (73.5) принимает вид

$$\left.\left\langle \frac{x}{a^2}\, i_x \right\rangle\right|_S = 0. \tag{73.12}$$

Подстановка в (73.12) выражений (73.11) и последующее приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях координат приводят к равенствам

$$\frac{\alpha_{111}}{a} + \frac{\beta_{201}}{b} + \frac{\gamma_{210}}{c} = 0, \qquad \frac{\beta_{021}}{b} = -\frac{\gamma_{030}}{c}, \qquad \frac{\beta_{003}}{b} = -\frac{\gamma_{012}}{c}. \tag{73.13}$$

Если представить себе, что весь эллипсоид (73.1) разбит (подобными ему, подобно расположенными и концентрическими с ним) эллипсоидальными поверхностями на бесконечно тонкие эллипсоидальные слои[1], то нетрудно показать, что в случае объемного тока, отличающегося от (73.11) лишь

[1] Такие слои называют *гомеоидами*.

отсутствием фактора p, равенства (73.13) не позволяют такому току пересекать границы слоев. Поэтому для поверхностного тока $\mathbf{i}$ условие стационарности (73.3) приобретает вид

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{i}}{p}\right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{i_x}{p} \right\rangle = 0\,, \tag{73.14}$$

дополняя (73.13) вытекающим из (73.14) равенством

$$\frac{\alpha_{111}}{a} + 2\,\frac{\beta_{021}}{b} + 2\,\frac{\gamma_{012}}{c} = 0\,. \tag{73.15}$$

Отметим, что с учетом четырех соотношений (73.13), (73.15) из семи искомых коэффициентов, входящих в полиномы (73.11), независимых коэффициентов остается три. Через эти три коэффициента, в качестве которых выберем γ_{030}, γ_{012} и γ_{210}, можно выразить, в частности, мультипольные моменты поверхностного тока (73.11).

Используя формулу Лагранжа (B.15)

$$\oint \left(\frac{x}{a}\right)^{2l} \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} \left(\frac{z}{c}\right)^{2n} p\,dS = 3\,\frac{(2l-1)!!\,(2m-1)!!\,(2n-1)!!}{(2l+2m+2n+1)!!}\,V\,, \tag{73.16}$$

вычисляем магнитные дипольный $\mathfrak{M}^{(\mathbf{i})}$ и октупольный $\mathfrak{M}^{(\mathbf{i})}_{klm}$ моменты эллипсоида, обусловленные током (73.11). С учетом соотношений (73.13) и (73.15) получаем[1]

$$\mathfrak{M}^{(\mathbf{i})}_x = \frac{1}{2\,\mathfrak{c}} \oint [\mathbf{r}\mathbf{i}\,]_x\,dS = \frac{Vb}{5\,\mathfrak{c}}\,(\gamma_{012} + \gamma_{210} + 3\gamma_{030})\,, \quad \mathfrak{M}^{(\mathbf{i})}_y = \mathfrak{M}^{(\mathbf{i})}_z = 0; \tag{73.17}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}^{(\mathbf{i})}_{xyy} &= \frac{3}{4\,\mathfrak{c}} \oint \bigl\{10\,xyz\,i_x + (x^2+z^2-4y^2)z\,i_y + (4y^2-11x^2-z^2)y\,i_z\bigr\}\,dS = \\ &= -\frac{3Vb}{35\,\mathfrak{c}}\,\bigl\{\bigl(5a^2-20b^2+3c^2\bigr)\,\gamma_{030} + \bigl(7a^2-4b^2+3c^2\bigr)\,\gamma_{012} + \\ &\qquad + \bigl(9a^2-4b^2+c^2\bigr)\,\gamma_{210}\bigr\}\,,\end{aligned} \tag{73.18}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}^{(\mathbf{i})}_{xzz} = -\frac{3Vb}{35\,\mathfrak{c}}\,\bigl\{\bigl(25a^2+5b^2-12c^2\bigr)\,\gamma_{030} - \bigl(13a^2-b^2+12c^2\bigr)\,\gamma_{012} + \\ + \bigl(9a^2+b^2-4c^2\bigr)\,\gamma_{210}\bigr\}\,,\end{aligned} \tag{73.19}$$

$$\mathfrak{M}^{(\mathbf{i})}_{xxx} = -\mathfrak{M}^{(\mathbf{i})}_{xyy} - \mathfrak{M}^{(\mathbf{i})}_{xzz}. \tag{73.20}$$

Все остальные компоненты октупольного магнитного момента поверхностного тока (73.11) равны нулю.

73.3. Адекватные токи и проверка решения

Из представленных в (73.17)–(73.20) отличных от нуля компонент дипольного и октупольного моментов независимы (в силу (73.20)) три. Это

[1] В формуле (73.19) перед слагаемым, содержащим γ_{012}, поставлен знак «−». Это устраняет досадную опечатку, допущенную авторами в формуле (32) работы [532].

совпадает с числом независимых коэффициентов полиномов (73.11). Поэтому приравнивание

$$\mathfrak{M}_x^{(\mathbf{i})} = \mathfrak{M}_x^{(\mathbf{j})}, \qquad \mathfrak{M}_{xyy}^{(\mathbf{i})} = \mathfrak{M}_{xyy}^{(\mathbf{j})}, \qquad \mathfrak{M}_{xzz}^{(\mathbf{i})} = \mathfrak{M}_{xzz}^{(\mathbf{j})} \tag{73.21}$$

дает систему алгебраических уравнений, позволяющих найти искомые коэффициенты. Решение этой системы имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\gamma_{030}}{c} = -\frac{\beta_{021}}{b} = \frac{a^2(2a^2+c^2)}{\delta_a}\,\frac{C_{010}}{c},\\
\frac{\gamma_{012}}{c} = -\frac{\beta_{003}}{b} = \frac{a^2(2a^2+b^2)}{\delta_a}\,\frac{C_{010}}{c},\\
\gamma_{210} = \frac{b^2(2a^2+c^2)}{\delta_a}\,C_{010}\,, \qquad \frac{\beta_{201}}{b} = -\frac{c^2(2a^2+b^2)}{\delta_a}\,\frac{C_{010}}{c},\\
\frac{\alpha_{111}}{a} = -\frac{2a^2(b^2-c^2)}{\delta_a}\,\frac{C_{010}}{c},
\end{aligned}\right\} \tag{73.22}$$

где

$$\delta_a \equiv 8a^4 + 3a^2b^2 + 3a^2c^2 + b^2c^2. \tag{73.23}$$

Поскольку из формул (63.6) для $\widetilde{\Phi}_L$ и (62.3) для $\widetilde{\Psi}_L$ следует, что с учетом соотношений (62.7), (62.9) наружные магнитные потенциалы $\widetilde{\Phi}_1$ и $\widetilde{\Psi}_3$ при выполнении равенств (73.21) совпадают, то это означает, что поверхностный ток (73.11) с коэффициентами (73.22) адекватен объемному току (73.2). Проверим это.

Прежде всего, учитывая, что объемный ток (73.2) является парциальным, используем мультипольное представление (58.40), имеющее в нашем случае вид

$$\widetilde{\Phi}(\mathbf{r}) = \mathfrak{M}_x^{(\mathbf{j})}\varphi_x. \tag{73.24}$$

С другой стороны, магнитному полю тока (73.11) соответствует мультипольное представление (62.3)

$$\widetilde{\Psi}(\mathbf{r}) = \mathfrak{M}_x^{(\mathbf{i})}\psi_x + \left(\mathfrak{M}_{xxx}^{(\mathbf{i})} - 9\mathfrak{M}_x^{(\mathbf{i})}a^2\right)\psi_{xxx} + \\ + 3\left(\mathfrak{M}_{xyy}^{(\mathbf{i})} - 3\mathfrak{M}_x^{(\mathbf{i})}b^2\right)\psi_{xyy} + 3\left(\mathfrak{M}_{xzz}^{(\mathbf{i})} - 3\mathfrak{M}_x^{(\mathbf{i})}c^2\right)\psi_{xzz}, \tag{73.25}$$

где приняты во внимание выражения (62.12), (62.14) парциальных моментов через полные магнитные мультипольные моменты.

Используя приведенное в таблице (в конце § 41) выражение для φ_x и приведенные в таблице (в конце § 42) выражения для ψ_x, ψ_{xxx} и ψ_{xyy}, нетрудно установить формулу

$$\varphi_x = \psi_x + \frac{18}{7}\left(a^2-b^2\right)\psi_{xyy} + \frac{18}{7}\left(a^2-c^2\right)\psi_{xzz}. \tag{73.26}$$

Подставляя (73.26) в (73.24) и учитывая первое из равенств (73.8), будем иметь

$$\widetilde{\Phi} = K\left[\psi_x + \frac{18}{7}\left(a^2-b^2\right)\psi_{xyy} + \frac{18}{7}\left(a^2-c^2\right)\psi_{xzz}\right], \tag{73.27}$$

где

$$K \equiv \mathfrak{M}_x^{(\mathfrak{j})} = \frac{V}{5\,\mathfrak{c}}\, b\, C_{010}.$$

В свою очередь, подставляя в (73.25) выражения (73.17)–(73.20) для компонент мультипольных моментов и принимая во внимание равенство нулю свертки тензор-потенциала гомеоида, т. е. соотношение

$$\psi_{xxx} = -\psi_{xyy} - \psi_{xzz},$$

получаем

$$\begin{aligned}\frac{C_{010}}{K}\,\widetilde{\Psi} = (\gamma_{012} + \gamma_{210} + 3\gamma_{030})\left[\psi_x + 9\left(a^2-b^2\right)\psi_{xyy} + 9\left(a^2-c^2\right)\psi_{xzz}\right] - \\ - \frac{3}{7}\left[\left(5a^2-20b^2+3c^2\right)\gamma_{030} + \left(7a^2-4b^2+3c^2\right)\gamma_{012} + \right. \\ \left. + \left(9a^2-4b^2+c^2\right)\gamma_{210}\right](4\psi_{xyy} + \psi_{xzz}) - \\ - \frac{3}{7}\left[\left(25a^2+5b^2-12c^2\right)\gamma_{030} - \left(13a^2-b^2+12c^2\right)\gamma_{012} + \right. \\ \left. + \left(9a^2+b^2-4c^2\right)\gamma_{210}\right](\psi_{xyy} + 4\psi_{xzz}).\end{aligned} \tag{73.28}$$

Подставляя сюда содержащиеся в (73.22) выражения для γ_{030}, γ_{012} и γ_{210} и производя упрощения, убеждаемся в выполнении равенства

$$\widetilde{\Psi} = \widetilde{\Phi}.$$

При вырождении эллипсоида (73.1) в шар $(c=b=a)$ плотность объемного тока (73.2) с учетом (73.6) трансформируется в выражения

$$j_x = 0, \qquad j_y = -\,C_{010}\,\frac{z}{a}\,, \qquad j_z = C_{010}\,\frac{y}{a}\,,$$

а адекватный поверхностный ток (73.11) упрощается, как и должно быть (ср. с (72.36) и (72.37)), к виду

$$i_x = 0, \qquad i_y = -\frac{1}{5}\,C_{010}\,z\,, \qquad i_z = \frac{1}{5}\,C_{010}\,y\,.$$

Часть IV

НИЗКОЧАСТОТНОЕ РАССЕЯНИЕ ЗВУКА

Глава 12
Интегральные уравнения и дифракционные теоремы акустики

§ 74. Интегральные уравнения акустики неоднородной идеальной жидкости

74.1. Акустически проницаемый рассеиватель

Пусть вне некоторого объема V идеальная жидкость однородна и характеризуется плотностью ϱ и адиабатической сжимаемостью β. Внутри V эти величины имеют значения $\widetilde{\varrho}(\mathbf{r})$, $\widetilde{\beta}(\mathbf{r})$, зависящие, вообще говоря, от координат. Тогда уравнения акустики [470]

$$\nabla p + \widetilde{\varrho}\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0\,, \qquad \nabla\cdot\mathbf{v} + \widetilde{\beta}\,\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

можно в случае гармонических полей $(e^{-i\omega t})$ переписать в виде

$$\nabla P - ik\,\mathbf{v} = -ik\,\mathbf{g}\,, \qquad \nabla\cdot\mathbf{v} - ikP = -ikh\,, \tag{74.1}$$

где $k = \omega/c$, $P = p/(\varrho c)$, $c = (\beta\varrho)^{-1/2}$ — скорость звука в однородной жидкости, а

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \left(1 - \frac{\widetilde{\varrho}}{\varrho}\right)\mathbf{v}\,, \qquad h(\mathbf{r}) = \left(1 - \frac{\widetilde{\beta}}{\beta}\right)P\,, \tag{74.2}$$

так что снаружи V функции $\mathbf{g}$ и h равны нулю.

Уравнениям (74.1) соответствуют уравнения второго порядка

$$\Delta P + k^2 P = -ik\,\nabla\cdot\mathbf{g} + k^2 h\,, \tag{74.3}$$

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) + k^2\mathbf{v} = -ik\,\nabla h + k^2\mathbf{g}\,. \tag{74.4}$$

Если источник первичной звуковой волны находится на конечном расстоянии от объема V, то правые части (74.3) и (74.4) должны быть дополнены заданными функциями $f(\mathbf{r})$ и $\mathbf{q}(\mathbf{r})$, характеризующими свойства источника.

Построим формальное решение уравнений (74.3) и (74.4), считая их правые части заданными функциями. Эти решения получаются с помощью соответствующих функций Грина однородного пространства. Для уравнения (74.3) скалярная функция Грина, как известно[1], есть

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G(R) = -\,\frac{1}{4\pi R}\,e^{ikR}\,, \tag{74.5}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Уравнению (74.4) соответствует тензорная функция Грина $\overleftrightarrow{\Gamma}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, которую легко найти методом, данным в [213]. Эта функция, все компоненты которой должны удовлетворять условию излучения, определяется как решение уравнения

$$\nabla\left(\nabla\cdot\overleftrightarrow{\Gamma}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right) + k^2\overleftrightarrow{\Gamma}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \overleftrightarrow{\varepsilon}\,\delta(\mathbf{R})\,, \tag{74.6}$$

где $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ — единичный аффинор. Используя векторное тождество

$$\nabla(\nabla\cdot\quad) = \nabla\times(\nabla\times\quad) + \Delta(\qquad)$$

и учитывая равенство

$$k^2\,\nabla\times\overleftrightarrow{\Gamma}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \nabla\times\overleftrightarrow{\varepsilon}\,\delta(\mathbf{R})\,,$$

являющееся следствием (74.6), получаем

$$\left(\Delta + k^2\right)\overleftrightarrow{\Gamma}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \left[\overleftrightarrow{\varepsilon} - \frac{1}{k^2}\nabla\times(\nabla\times\overleftrightarrow{\varepsilon})\right]\,\delta(\mathbf{R})\,. \tag{74.7}$$

Решением уравнения (74.7), очевидно, является

$$\overleftrightarrow{\Gamma}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \left[\overleftrightarrow{\varepsilon} - \frac{1}{k^2}\nabla\times(\nabla\times\overleftrightarrow{\varepsilon})\right]\,G(R)\,. \tag{74.8}$$

Формальное решение уравнений (74.3), (74.4) теперь можно представить в виде

$$P(\mathbf{r}) = P_0(\mathbf{r}) + k^2\int G(R)\,h(\mathbf{r}')\,dV' - ik\int G(R)\,\mathrm{div}'\mathbf{g}(\mathbf{r}')\,dV'\,, \tag{74.9}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) + \left(k^2 - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\right)\int G(R)\,\mathbf{g}(\mathbf{r}')\,dV' -{}\\ -\,\frac{i}{k}\left(k^2 - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\right)\int G(R)\,\mathrm{grad}'\,h(\mathbf{r}')\,dV'\,,\end{aligned} \tag{74.10}$$

где $\varrho\, c P_0$ и $\mathbf{v}_0$ — давление и скорость в первичной звуковой волне[2].

Члены, содержащие производные функций $\mathbf{g}$ и h, можно проинтегрировать по частям с последующей заменой $\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}'} = -\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}$. Вынося затем $\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}$ за

[1] Для простоты мы будем считать область, занятую жидкостью, неограниченной.

[2] В частности, для источников, находящихся от объема V на конечном расстоянии, $P_0 = \int G\,f(\mathbf{r}')\,dV'$, $\mathbf{v}_0 = \int\overleftrightarrow{\Gamma}\,\mathbf{q}(\mathbf{r}')\,dV'$.

знак интеграла и заменяя $\mathbf{g}$ и h их явными выражениями, окончательно получаем

$$P(\mathbf{r}) = P_0(\mathbf{r}) + k^2 \int\limits_V Q_\beta\, G(R)\, P(\mathbf{r}')\, dV' - ik \operatorname{div} \int\limits_V Q_\varrho\, G(R) \mathbf{v}(\mathbf{r}')\, dV', \quad (74.11)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) + \left(k^2 - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\right) \int\limits_V Q_\varrho G(R)\, \mathbf{v}(\mathbf{r}')\, dV' - \\ - ik \operatorname{grad} \int\limits_V Q_\beta\, G(R) P(\mathbf{r}')\, dV', \quad (74.12)$$

где $Q_\varrho = 1 - \widetilde{\varrho}/\varrho$, $Q_\beta = 1 - \widetilde{\beta}/\beta$. Для точек $\mathbf{r}$, принадлежащих объему V, формулы (74.11) и (74.12) и образуют систему интегральных уравнений акустики.

Для внешних точек формулы (74.11) и (74.12) являются интегральными соотношениями, выражающими поля $P_{\text{sc}} = P - P_0$ и $\mathbf{v}_{\text{sc}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ рассеянной звуковой волны через поля внутри объема V. Таким образом,

$$P_{\text{sc}} = k^2 \Psi - ik \operatorname{div} \mathbf{\Pi}, \qquad \mathbf{v}_{\text{sc}} = \left(k^2 - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\right) \mathbf{\Pi} - ik \operatorname{grad} \Psi, \quad (74.13)$$

где

$$\Psi = \int\limits_V Q_\beta\, G(R) P(\mathbf{r}')\, dV' \quad (74.14)$$

и

$$\mathbf{\Pi} = \int\limits_V Q_\varrho G(R)\, \mathbf{v}(\mathbf{r}')\, dV' \quad (74.15)$$

— скалярный и векторный «акустические потенциалы Герца».

Система уравнений (74.11), (74.12) эквивалентна исходной системе (74.1), что видно из прямого вычисления сумм $\nabla P - ik\mathbf{v}$ и $\nabla \cdot \mathbf{v} - ikP$ по формулам (74.11), (74.12). Рассматривая входящие в (74.11), (74.12) интегралы (74.14), (74.15) как гельмгольцевы потенциалы объемных распределений источников, учитывая (см., например, [438]), что эти потенциалы и их первые производные непрерывны на границе S объема V, из (74.11) сразу получаем граничное условие непрерывности давления

$$P^{(i)} = P^{(e)} \qquad \text{на} \quad S. \quad (74.16)$$

Граничное условие для нормальной компоненты $\mathbf{v}$ определяется в (74.12), очевидно, членом

$$\left(k^2 - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\right) \mathbf{\Pi} = \left(\Delta + k^2\right) \mathbf{\Pi} - \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{\Pi} = \int\limits_V Q_\varrho\, \mathbf{v}(\mathbf{r}')\, \delta(\mathbf{R})\, dV' + \\ + \operatorname{grad} \oint\limits_S Q_\varrho\, G(R)\, v_{n'}^{(i)}(\mathbf{r}')\, dS' - \operatorname{grad} \int\limits_V G(R) \operatorname{div}' \{Q_\varrho\, \mathbf{v}(\mathbf{r}')\}\, dV'.$$

Учитывая свойства δ-функции и разрывные свойства нормальной производной гельмгольцева потенциала простого слоя, убеждаемся в равенстве

$$v_n^{(i)} = v_n^{(e)} \qquad \text{на} \quad S\,. \tag{74.17}$$

Условию излучения рассеянные поля (74.13) удовлетворяют автоматически, благодаря использованию соответствующей функции Грина (74.5).

Таким образом, уравнения (74.11), (74.12) эквивалентны уравнениям (74.1), дополненным условиями на границе и условиями излучения, что обеспечивает единственность решения соответствующей скалярной задачи дифракции.

74.2. Акустически непроницаемый рассеиватель

Преобразуем (74.11), (74.12) к виду, удобному для перехода к интегральным уравнениям в случае акустически непроницаемого объема V, для чего исключим в них с помощью (74.1), (74.2) отношения $\widetilde{\beta}/\beta$ и $\widetilde{\varrho}/\varrho$. Будем иметь

$$P(\mathbf{r}) = P_0(\mathbf{r}) + k^2\int\limits_V G(R)\,P(\mathbf{r}')\,dV' + \operatorname{div}\int\limits_V G(R)\ \operatorname{grad}'P(\mathbf{r}')\,dV' + \\ + ik\int\limits_V G(R)\operatorname{div}'\mathbf{v}(\mathbf{r}')\,dV' - ik\operatorname{div}\int\limits_V G(R)\mathbf{v}(\mathbf{r}')\,dV'\,, \tag{74.18}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) + \int\limits_V \left[\mathbf{v}(\mathbf{r}') - \frac{1}{ik}\ \operatorname{grad}'P(\mathbf{r}')\right]\ \delta(\mathbf{R})\,dV' - \\ - ik\operatorname{grad}\int\limits_V G(R)\,P(\mathbf{r}')\,dV' + \frac{1}{ik}\ \operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_V G(R)\ \operatorname{grad}'P(\mathbf{r}')\,dV' + \\ + \operatorname{grad}\int\limits_V G(R)\operatorname{div}'\mathbf{v}(\mathbf{r}')\,dV' - \operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_V G(R)\,\mathbf{v}(\mathbf{r}')\,dV'\,. \tag{74.19}$$

Преобразуя (74.19), мы использовали тождество $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta$ и уравнение

$$\left(\Delta + k^2\right)\ G(R) = \delta(\mathbf{R})\,. \tag{74.20}$$

Внесем операцию div в (74.18) под знак интеграла и учтем, что

$$\operatorname{div}\{G(R)\,\mathbf{q}(\mathbf{r}')\} = -\mathbf{q}(\mathbf{r}')\ \operatorname{grad}'G(R).$$

Два последних слагаемых в (74.18) сворачиваются при этом в

$$ik\int\limits_V \operatorname{div}'\left[G(R)\,\mathbf{v}(\mathbf{r}')\right]\,dV' = ik\oint\limits_S G(R)\,v_{n'}^{(i)}(\mathbf{r}')\,dS'\,,$$

а слагаемое

$$\operatorname{div}\int\limits_V G(R)\,\operatorname{grad}' P(\mathbf{r}')\,dV' =$$
$$= -\int\limits_V \operatorname{div}\left[P(\mathbf{r}')\,\operatorname{grad}' G(R)\right]\,dV' + \int\limits_V P(\mathbf{r}')\,\operatorname{div}'\operatorname{grad}' G(R)\,dV' =$$
$$= -\oint\limits_S P^{(i)}(\mathbf{r}')\,\frac{\partial}{\partial n'}\,G(R)\,dS' + \int\limits_V P(\mathbf{r}')\,\delta(\mathbf{R})\,dV' - k^2\int\limits_V P(\mathbf{r}')\,G(R)\,dV'\,.$$

В результате уравнение (74.18) приобретает вид

$$P(\mathbf{r}) = P_0(\mathbf{r}) + \int\limits_V P(\mathbf{r}')\,\delta(\mathbf{R})\,dV' -$$
$$- \oint\limits_S P^{(i)}(\mathbf{r}')\,\frac{\partial}{\partial n'}\,G(R)\,dS' + ik\oint\limits_S v_{n'}^{(i)}(\mathbf{r}')\,G(R)\,dS'\,. \qquad (74.21)$$

Совершенно аналогичные преобразования дают вместо (74.19)

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) + \int\limits_V \mathbf{v}(\mathbf{r}')\,\delta(\mathbf{R})\,dV' -$$
$$- \frac{1}{ik}\,\operatorname{grad}\oint\limits_S P^{(i)}(\mathbf{r}')\,\frac{\partial}{\partial n'}\,G(R)\,dS' + \operatorname{grad}\oint\limits_S v_{n'}^{(i)}(\mathbf{r}')\,G(R)\,dS'\,. \qquad (74.22)$$

Для точки $\mathbf{r}$, лежащей вне V, интегралы с δ-функциями обращаются в нуль, и рассеянные поля описываются формулами

$$\begin{aligned} P_{\text{sc}}(\mathbf{r}) &= -\oint\limits_S P^{(e)}(\mathbf{r}')\,\frac{\partial}{\partial n'}\,G(R)\,dS' + ik\oint\limits_S v_{n'}^{(e)}(\mathbf{r}')\,G(R)\,dS'\,,\\ \mathbf{v}_{\text{sc}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{ik}\,\operatorname{grad} P_{sc}(\mathbf{r})\,. \end{aligned} \qquad (74.23)$$

Формулы (74.23) выражают рассеянные поля через значения полного поля на границе.

Для *акустически мягкого тела*, когда граничные условия имеют вид

$$P^{(e)}(\mathbf{r}) = P_0(\mathbf{r}) + P_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = 0 \qquad (\mathbf{r}\in S)\,, \qquad (74.24)$$

вместо (74.23) получаем

$$P_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \oint\limits_S G(R)\,\frac{\partial P^{(e)}(\mathbf{r}')}{\partial n'}\,dS'. \qquad (74.25)$$

Если точка наблюдения $\mathbf{r}$ расположена на S, то (74.25) с учетом (74.24) преобразуется в интегральное уравнение первого рода для неизвестной функции $\dfrac{\partial P^{(e)}(\mathbf{r})}{\partial n}$:

$$P_0(\mathbf{r}) = -\oint\limits_S G(R)\,\frac{\partial P^{(e)}(\mathbf{r}')}{\partial n'}\,dS' \qquad (\mathbf{r}\in S)\,. \qquad (74.26)$$

В случае *акустически жесткого тела*, т. е. для краевых условий

$$v_n^{(e)}(\mathbf{r}) = v_{0\,n} + (v_{\mathrm{sc}})_n = 0 \qquad (\mathbf{r} \in S)\,, \tag{74.27}$$

вместо (74.23) получаем

$$P_{\mathrm{sc}}(\mathbf{r}) = -\oint\limits_S P^{(e)}(\mathbf{r}')\,\frac{\partial G(R)}{\partial n'}\,dS'\,, \tag{74.28}$$

$$\mathbf{v}_{\mathrm{sc}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{ik}\,\mathrm{grad}\oint\limits_S P^{(e)}(\mathbf{r}')\,\frac{\partial}{\partial n'}\,G(R)\,dS'\,. \tag{74.29}$$

Если уравнение (74.29) умножить на единичный вектор $\mathbf{n}$ внешней нормали к S и учесть (74.27), то для точек $\mathbf{r}$, лежащих на поверхности S, будем иметь

$$v_{0\,n}(\mathbf{r}) = \frac{1}{ik}\,\frac{\partial}{\partial n}\oint\limits_S P^{(e)}(\mathbf{r}')\,\frac{\partial}{\partial n'}\,G(R)\,dS' \qquad (\mathbf{r} \in S) \tag{74.30}$$

или, перейдя от $\mathbf{v}$ к P,

$$\frac{\partial P_0(\mathbf{r})}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}\oint\limits_S P^{(e)}(\mathbf{r}')\,\frac{\partial}{\partial n'}\,G(R)\,dS' \qquad (\mathbf{r} \in S)\,. \tag{74.31}$$

Это интегродифференциальное уравнение для искомой функции $P^{(e)}(\mathbf{r})$.

Формулы (74.25), (74.26) и (74.28), (74.31) для объемных рассеивателей несложно преобразовать для применения к телам, лишенным объема (дискам). Интеграл по замкнутой поверхности заменяется суммой интегралов по разным сторонам диска, которые отличаются тем, что у них противоположны направления внешних нормалей. Выбирая одно из этих направлений в качестве положительного направления оси z и отмечая соответствующую сторону диска индексом «+», а противоположную сторону индексом «−», приходим к следующим окончательным формулам.

Для *акустически мягкого диска* интегральное уравнение (74.26) принимает вид

$$P_0(\mathbf{r}) = -\int\limits_S \psi(\mathbf{r}')\,G(R)\,dS' \qquad (\mathbf{r} \in S)\,, \tag{74.32}$$

а вместо выражения (74.25) имеем

$$P_{\mathrm{sc}}(\mathbf{r}) = \int\limits_S \psi(\mathbf{r}')\,G(R)\,dS'\,, \tag{74.33}$$

где S — поверхность диска,

$$\psi(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_+ - \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_- \qquad (\mathbf{r} \in S)\,. \tag{74.34}$$

В случае *акустически жесткого диска* интегродифференциальное уравнение (74.31) преобразуется в

$$\frac{\partial P_0(\mathbf{r})}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_S \varphi(\mathbf{r}')\,\frac{\partial}{\partial z'}\,G(R)\,dS' \qquad (\mathbf{r} \in S)\,, \tag{74.35}$$

а формула (74.28) приобретает вид

$$P_{\mathrm{sc}}(\mathbf{r}) = -\int\limits_S \varphi(\mathbf{r}')\,\frac{\partial}{\partial z'}\,G(R)\,dS'\,, \tag{74.36}$$

где

$$\varphi(\mathbf{r}') = P_+(\mathbf{r}) - P_-(\mathbf{r}) \qquad (\mathbf{r}\in S)\,. \tag{74.37}$$

Таким образом, здесь показано, что хорошо известные (см., например, [148]) формулы (74.25), (74.26); (74.28), (74.31); (74.32), (74.33) и (74.35), (74.36) можно вывести непосредственно из интегральных уравнений акустики.

§ 75. «Цепочки» уравнений низкочастотного приближения

75.1. Акустически проницаемый однородный рассеиватель

Всякий конкретный метод аналитического рассмотрения трехмерной задачи низкочастотной дифракции основывается на предположении об аналитичности функций, описывающих искомые дифракционные поля, при достаточно малых значениях волнового числа k. Предположение об аналитичности дифракционных полей[1] эквивалентно предположению о возможности их представления сходящимися степенными рядами по k и возможности почленного дифференцирования и интегрирования таких рядов.

Чтобы не иметь дела с векторным интегральным уравнением (74.12), преобразуем (74.11), исключив из него с помощью первого из уравнений (74.1) скорость

$$\mathbf{v} = \frac{1}{ik\delta}\,\mathrm{grad}\,P\,, \tag{75.1}$$

где $\delta = \widetilde{\varrho}/\varrho$. Если в получающееся в результате интегродифференциальное уравнение

$$P(\mathbf{r}) = P_0(\mathbf{r}) - \frac{Q_\varrho}{\delta}\,\mathrm{div}\int\limits_V G(R)\,\mathrm{grad}'\,P(\mathbf{r}')\,dV' + k^2 Q_\beta\int\limits_V G(R)P(\mathbf{r}')\,dV'\,, \tag{75.2}$$

подставить в соответствии со сказанным выше разложения заданных и искомых функций по степеням k, т. е.

$$P_0(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} (ik)^m\,P_0^{(m)}(\mathbf{r})\,, \tag{75.3}$$

$$G(R) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ik)^m}{m!}\,R^{m-1}\,, \tag{75.4}$$

$$P(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} (ik)^m\,P^{(m)}(\mathbf{r})\,, \tag{75.5}$$

[1] Подразумевается, естественно, что первичная волна аналитична при малых k.

то после простых преобразований и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях k приходим к «цепочке» интегральных уравнений для последовательных приближений:

$$P^{(m)}(\mathbf{r}) = P_0^{(m)}(\mathbf{r}) + \frac{Q_\varrho}{4\pi\delta}\,\mathrm{div}\int\limits_V \frac{1}{R}\,\mathrm{grad}'\,P^{(m)}(\mathbf{r}')\,dV' +$$
$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{l=2}^{m}\left[\frac{Q_\varrho}{l!\,\delta}\,\mathrm{div}\int\limits_V R^{\,l-1}\,\mathrm{grad}'\,P^{(m-l)}(\mathbf{r}')\,dV' + \right.$$
$$\left. +\frac{Q_\beta}{(l-2)!}\int\limits_V R^{\,l-3}\,P^{(m-l)}(\mathbf{r}')\,dV'\right] \qquad (m=0,1,\ldots). \quad (75.6)$$

Кроме того, из (75.1) и (75.5) следует, что

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty}(ik)^m\,\mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{r}) \quad (75.7)$$

где

$$\mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\delta}\,\mathrm{grad}\,P^{(m+1)}(\mathbf{r}), \quad \mathrm{grad}\,P^{(0)}(\mathbf{r}) = 0 \qquad (m=0,1,\ldots), \quad (75.8)$$

а из второго уравнения (74.1) аналогично получаем

$$P^{(m)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}^{(m+1)}(\mathbf{r}), \quad \mathrm{div}\,\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{r}) = 0 \qquad (m=0,1,\ldots), \quad (75.9)$$

где, отношение $\eta = \widetilde{\beta}/\beta$, как и δ, имеет постоянное значение, а $\mathbf{r}\in V$, как и в (75.8).

Цепочка уравнений (75.6) справедлива всюду в ближней зоне. И если для $\mathbf{r}\in V$ она позволяет найти полное поле внутри рассеивателя, то для наружных точек наблюдения она позволяет вычислить такое же, как и для внутреннего поля, количество членов НЧ-разложения рассеянного поля

$$P_{\mathrm{sc}}(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty}(ik)^m\,P_{\mathrm{sc}}^{(m)}(\mathbf{r}), \quad P_{\mathrm{sc}}^{(m)} = P^{(m)} - P_0^{(m)}, \quad \mathbf{v}_{\mathrm{sc}} = \frac{\mathrm{grad}\,P_{sc}}{ik}. \quad (75.10)$$

В дальнейшем в качестве падающей рассматривается плоская волна единичной амплитуды[1]

$$P_0(\mathbf{r}) = e^{\,ik\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}}, \qquad \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\varkappa}\,e^{\,ik\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}}, \quad (75.11)$$

так что

$$P_0^{(m)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{m!}\,(\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r})^m. \quad (75.12)$$

Чтобы по известному внутреннему полю найти поле в дальней зоне, следует в интегралы (74.14), (74.15), дающие общее выражение (74.13) рассеянного поля, подставить при $r\to\infty$ асимптотическую формулу

$$G(R) \approx -\frac{e^{\,ikr}}{4\pi\,r}\,e^{-ik\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}'} \qquad (\boldsymbol{\nu} = \mathbf{r}/r) \quad (75.13)$$

[1] Введение вместо давления p величины $P = p/(\varrho c)$ выравнивает не только размерности «давления» и скорости, но и их амплитуды в плоской волне, распространяющейся в однородной среде.

и учесть, что с той же точностью

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, G(R) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}\, G(R) \approx -ik\,\boldsymbol{\nu}\left(-\frac{e^{\,ikr}}{4\pi\, r}\, e^{-ik\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}'}\right). \tag{75.14}$$

В результате будем иметь

$$P_{\rm sc} = k^2(\Psi + \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\Pi}) = \frac{e^{\,ikr}}{r} A(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}), \qquad \mathbf{v}_{\rm sc} = \boldsymbol{\nu}\, P_{\rm sc}\,, \tag{75.15}$$

где

$$\Psi = -\frac{Q_\beta\, e^{\,ikr}}{4\pi\, r} \int\limits_V P(\mathbf{r}')\, e^{-ik\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}'}\, dV'\,, \tag{75.16}$$

$$\boldsymbol{\Pi} = -\frac{Q_\varrho\, e^{\,ikr}}{4\pi\, r} \int\limits_V \mathbf{v}(\mathbf{r}')\, e^{-ik\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}'}\, dV'\,, \tag{75.17}$$

а амплитуда рассеяния

$$A(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = -\frac{k^2}{4\pi} \int\limits_V \left[Q_\beta\, P(\mathbf{r}') + Q_\varrho\, \boldsymbol{\nu}\mathbf{v}(\mathbf{r}')\right]\, e^{-ik\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}'}\, dV'\,. \tag{75.18}$$

Эквивалентное представление в терминах поверхностных интегралов получается с помощью граничных условий из первой формулы (74.23) и имеет вид

$$A(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = -\frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \left[ik\,\boldsymbol{\nu}\, P(\mathbf{r}') + \frac{1}{\delta}\, \operatorname{grad}' P(\mathbf{r}')\right] \mathbf{n}'\, e^{-ik\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}'}\, dS'\,. \tag{75.19}$$

НЧ-разложение амплитуды рассеяния

$$A(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{m=2}^{\infty} (ik)^m\, A_m(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) \tag{75.20}$$

нетрудно найти, подставляя (75.5), (75.7) и разложение $e^{-ik\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}'}$ в выражения (75.18) и (75.19), что дает соответственно

$$A_m(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{m-2} \frac{(-1)^l}{l!} \int\limits_V \Bigg[Q_\beta P^{(m-l-2)}(\mathbf{r}') + \\ + \frac{Q_\varrho}{\delta}\, \boldsymbol{\nu}\, \operatorname{grad}' P^{(m-l-1)}(\mathbf{r}')\Bigg]\, (\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}')^l\, dV'\,, \tag{75.21}$$

$$A_m(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-1)^{l+1}}{l!} \oint\limits_S \Bigg[\boldsymbol{\nu} P^{(m-l-1)}(\mathbf{r}') + \\ + \frac{1}{\delta}\, \operatorname{grad}' P^{(m-l)}(\mathbf{r}')\Bigg]\, (\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}')^l\, \mathbf{n}'\, dS'\,, \tag{75.22}$$

где использованы также (75.8) и (75.9).

Частный случай *совпадения плотности рассеивателя с плотностью окружающей среды* дает существенное упрощение. При этом вместо интегрального уравнения (75.2) имеем

$$P(\mathbf{r})=P_0(\mathbf{r})-\frac{k^2}{4\pi}\,Q_\beta\int\limits_V\frac{e^{ikR}}{R}\,P(\mathbf{r}')\,dV'\,, \tag{75.23}$$

а цепочка квазистатических интегральных уравнений (75.6) вырождается в последовательность формул

$$\begin{aligned}P^{(l)}(\mathbf{r}) &= P_0^{(l)}(\mathbf{r})+\\ &+\frac{Q_\beta}{4\pi}\sum_{m=2}^{l}\frac{1}{(m-2)!}\int\limits_V R^{m-3}\,P^{(l-m)}(\mathbf{r}')\,dV' \qquad (l=0,1,\ldots),\end{aligned} \tag{75.24}$$

которые для точек $\mathbf{r}\in V$ сводят решение задачи к вычислению интегралов от известных функций, а для внешних точек $\mathbf{r}$ позволяют после повторного вычисления интегралов найти рассеянное звуковое поле в ближней зоне. Выражения для коэффициентов НЧ-ряда (75.20) в дальней зоне также упрощаются и вместо (75.21) приобретают вид

$$A_m(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})=\frac{Q_\beta}{4\pi}\sum_{l=0}^{m-2}\frac{(-1)^l}{l!}\int\limits_V P^{(m-l-2)}(\mathbf{r}')\,(\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}')^l\,dV'\,. \tag{75.25}$$

75.2. Акустически жесткий рассеиватель

Подстановка (75.3)–(75.5) в (74.31) приводит к цепочке квазистатических интегродифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}-4\pi\frac{\partial P_0^{(m)}(\mathbf{r})}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n}\oint\limits_S P^{(m)}(\mathbf{r}')\,\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)dS'+\\ &+\sum_{l=2}^{m}\frac{1}{l!}\,\frac{\partial}{\partial n}\oint\limits_S P^{(m-l)}(\mathbf{r}')\,\frac{\partial R^{l-1}}{\partial n'}\,dS' \qquad (m=0,1,\ldots)\,,\end{aligned} \tag{75.26}$$

справедливых для точек $\mathbf{r}$, принадлежащих поверхности S рассеивателя.

Отметим, что первое слагаемое в правой части (75.26) представляет собой нормальную производную потенциала двойного слоя на замкнутой поверхности S. То же можно сказать о слагаемых суммы $\sum\limits_l$ в (75.26), соответствующих четным значениям l, ибо

$$\frac{\partial}{\partial n'}\,R^{2l+1}=(2l+1)R^{2l}\frac{\partial R}{\partial n'}=-(2l+1)R^{2l+2}\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Слагаемые же с нечетными l вычисляются непосредственно. При этом учитывается, что

$$\frac{\partial}{\partial n'}\,R^{2l}=\frac{\partial}{\partial n'}\left(R^2\right)^l=lR^{2l-2}\frac{\partial}{\partial n'}\,R^2=-2lR^{2l-2}\left\langle n_x'(x-x')\right\rangle.$$

Как известно, нормальная производная потенциала двойного слоя непрерывна при переходе через границу слоя. Поэтому иногда (например, в случае эллипсоидального рассеивателя) вычисление этих производных по нормали удобнее производить на основе *внутренних* потенциалов двойного слоя, хотя и рассматривается дифракция на *непроницаемом* теле.

Определив из (75.26) граничные значения $P^{(m)}(\mathbf{r})$, можно вычислить затем наружное квазистатическое поле (75.10) по формулам

$$4\pi P^{(m)}_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \oint\limits_S P^{(m)}(\mathbf{r}')\,\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)dS' + \\ + \sum_{l=2}^{m}\frac{1}{l!}\oint\limits_S P^{(m-l)}(\mathbf{r}')\,\frac{\partial}{\partial n'}R^{l-1}\,dS' \qquad (m = 0, 1, \ldots)\,, \quad (75.27)$$

получающимся в результате подстановки (75.4) и (75.5) в (74.28).

Подстановка же в (74.28) асимптотической формулы (75.14) и разложений (75.5) и $\exp\{-ik\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}'\}$ приводит к предварительной формуле для амплитуды рассеяния

$$A(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{\boldsymbol{\nu}}{4\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(ik)^m\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(-1)^{l+1}}{l!}\oint\limits_S(\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}')^l P^{(m-l-1)}(\mathbf{r}')\,\mathbf{n}'\,dS'\,. \qquad (75.28)$$

Заметим, однако, что постоянному значению $P^{(0)}_0(\mathbf{r}) = 1$, даваемому (75.12), соответствует согласно свойствам потенциала двойного слоя (см. § 27) решение (75.26), имеющее вид $P^{(0)}(\mathbf{r}) = \text{const}$. Внешний потенциал двойного слоя при постоянной плотности дипольных источников на замкнутой поверхности равен нулю. Поэтому (75.27) дает $P^{(0)}_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = 0$. Отсюда $P^{(0)}(\mathbf{r}) = P^{(0)}_0(\mathbf{r}) + P^{(0)}_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = P^{(0)}_0(\mathbf{r}) = 1$. Подстановка $P^{(0)}(\mathbf{r}) = 1$ в (75.28) дает для $m = 1$ член, содержащий интеграл $\oint\limits_S \mathbf{n}'\,dS' = 0$.

Таким образом, окончательно будем иметь разложение (75.20) с

$$A_m(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(-1)^{l+1}}{l!}\;\boldsymbol{\nu}\oint\limits_S(\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}')^l\,P^{(m-l-1)}(\mathbf{r}')\,\mathbf{n}'\,dS'\,. \qquad (75.29)$$

Как и должно быть, такой же результат получается при $\delta\to\infty$ из формулы (75.22).

75.3. Акустически мягкий рассеиватель

Обозначая для краткости

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\partial P^{(e)}(\mathbf{r})}{\partial n} \qquad (\mathbf{r}\in S) \qquad (75.30)$$

и подставляя разложения (75.3), (75.4) и

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty}(ik)^m\,\psi^{(m)}(\mathbf{r}) \qquad (75.31)$$

в (74.26) и (74.25), получаем соответственно цепочку интегральных уравнений

$$\oint\limits_S \frac{\psi^{(m)}(\mathbf{r}')}{R}\, dS' = 4\pi\, P_0^{(m)}(\mathbf{r}) - \\ - \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l!} \oint\limits_S \psi^{(m-l)}(\mathbf{r}')\, R^{l-1}\, dS' \qquad (\mathbf{r} \in S;\; m = 0, 1, \ldots) \quad (75.32)$$

и последовательность формул

$$P_{\rm sc}^{(m)} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} \oint\limits_S \psi^{(m-l)}(\mathbf{r}')\, R^{l-1}\, dS' \qquad (m = 0, 1, \ldots) \quad (75.33)$$

для определения квазистатического рассеянного поля (75.10).

Для амплитуды рассеяния из (74.25) вытекает выражение

$$A(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = -\frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \psi(\mathbf{r}')\, e^{-ik\,\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}'}\, dS', \quad (75.34)$$

НЧ-разложение которого есть

$$A(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{m=0}^{\infty} (ik)^m A_m(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}), \quad (75.35)$$

где

$$A_m(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{m} \frac{(-1)^l}{l!} \oint\limits_S (\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}')^l\, \psi^{(m-l)}(\mathbf{r}')\, dS'. \quad (75.36)$$

Отметим, что в отличие от акустически прозрачного или жесткого рассеивателя, когда ряд (75.20) начинается с квадратичного по k члена, НЧ-разложение амплитуды рассеяния на акустически мягком препятствии начинается с членов нулевой степени.

75.4. Акустически мягкий диск

Совершенно аналогично предыдущему случаю подстановка НЧ разложений, включая разложение (75.31) для разности (74.34), в (74.32) и (74.33) дает последовательность интегральных уравнений для определения $\psi^{(m)}(\mathbf{r})$

$$\int\limits_S \frac{\psi^{(m)}(\mathbf{r}')}{R}\, dS' = 4\pi\, P_0^{(m)}(\mathbf{r}) - \\ - \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l!} \int\limits_S \psi^{(m-l)}(\mathbf{r}')\, R^{l-1}\, dS' \qquad (\mathbf{r} \in S;\; m = 0, 1, \ldots) \quad (75.37)$$

и формулы для вычисления ближнего рассеянного поля

$$P_{\rm sc}^{(m)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!} \int\limits_S \psi^{(m-l)}(\mathbf{r}')\, R^{l-1}\, dS' \qquad (m = 0, 1, \ldots) \quad (75.38)$$

Амплитуда рассеяния дается рядом (75.35), где

$$A_m(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{m}\frac{(-1)^{l+1}}{l!}\int\limits_S (\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}')^l\,\psi^{(m-l)}(\mathbf{r}')\,dS'. \tag{75.39}$$

75.5. Акустически жесткий диск

Цепочку интегральных уравнений низкочастотного приближения для рассматриваемого случая выведем, следуя Баукампу [38]. Подстановка в (74.35) НЧ-рядов (75.3), (75.4) и

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{\infty}(ik)^m\,\varphi^{(m)}(\mathbf{r}) \tag{75.40}$$

приводит к последовательности уравнений

$$-4\pi\,\frac{\partial P_0^{(m)}(\mathbf{r})}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{1}{l!}\int\limits_S \varphi^{(m-l)}(\mathbf{r}')\,\frac{\partial R^{l-1}}{\partial z'}\,dS' \qquad (\mathbf{r}\in S;\ m=1,2,\ldots). \tag{75.41}$$

Переходя в (75.41) от дифференцирования по z' к дифференцированию по z, получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int\limits_S \frac{\varphi^{(m)}(\mathbf{r}')}{R}\,dS' = 4\pi\,\frac{\partial P_0^{(m)}(\mathbf{r})}{\partial z} - \\ -\sum_{l=2}^{m-1}\frac{1}{l!}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int\limits_S \varphi^{(m-l)}(\mathbf{r}')\,R^{\,l-1}\,dS' \qquad (\mathbf{r}\in S;\quad m=1,2,\ldots). \tag{75.42}$$

Важно отметить, что в (75.42), как и в исходном уравнении (74.35), следует (после выполнения всех операций дифференцирования) произвести переход к пределу при $z\to 0$ $(z'\to 0)$. Знаки пределов здесь были опущены в целях сокращения записи.

Все слагаемые суммы по l, стоящей в правой части (75.42), можно продифференцировать под знаком интеграла. Поскольку

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,R^{\,l-1} = (l-1)R^{\,l-3} + (l-1)(l-3)R^{\,l-5}z^2\,,$$

а член с z^2 не дает вклада в предел при $z\to 0$, то вместо (75.42) получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int\limits_S \frac{\varphi^{(m)}(\mathbf{r}')}{R}\,dS' = 4\pi\,\frac{\partial P_0^{(m)}(\mathbf{r})}{\partial z} - \\ -\sum_{l=2}^{m-1}\frac{l-1}{l!}\int\limits_S \varphi^{(m-l)}(\mathbf{r}')\,R^{\,l-3}\,dS' \qquad (\mathbf{r}\in S;\quad m=1,2,\ldots). \tag{75.43}$$

Учитывая, что в (75.43) интегралы вида $\int\limits_S \varphi^{(m)}(\mathbf{r}')\,R^{-1}\,dS'$ удовлетворяют уравнению Лапласа можно операцию $\partial^2/\partial z^2$ заменить на $-\Delta_2$, где

$\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, т. е. перейти к тангенциальным производным. В результате обеспечивается возможность перехода к пределу при $z \to 0$. Цепочка уравнений принимает окончательный вид:

$$\Delta_2 \int\limits_S \frac{\varphi^{(m)}(\mathbf{r}')}{R}\, dS' = -4\pi \frac{\partial P_0^{(m)}(\mathbf{r})}{\partial z} + \\ + \sum_{l=2}^{m-1} \frac{l-1}{l!} \int\limits_S \varphi^{(m-l)}(\mathbf{r}')\, R^{l-3}\, dS' \qquad (\mathbf{r} \in S; \quad m = 1, 2, \ldots). \quad (75.44)$$

Как известно (см., например, [148]), однозначное решение рассматриваемой задачи требует дополнительного условия (условия на ребре), характеризующего допустимые особенности поля на краю диска (ср. § 24). Это условие требует конечности $\varphi^{(m)}(\mathbf{r})$ и допускает при приближении к краю диска рост $\operatorname{grad}\varphi^{(m)}(\mathbf{r})$ по закону $d^{-1/2}$, где d — расстояние от точки наблюдения до края диска.

Для квазистатического рассеянного поля из (74.36) следует

$$P_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{\infty} (ik)^m\, P_{\text{sc}}^{(m)}(\mathbf{r}), \qquad (75.45)$$

где

$$P_{\text{sc}}^{(m)}(\mathbf{r}) = \int\limits_S \varphi^{(m)}(\mathbf{r}')\, \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{R}\right)\, dS' - \\ - \frac{z}{4\pi} \sum_{l=2}^{m-1} \frac{l-1}{l!} \int\limits_S \varphi^{(m-l)}(\mathbf{r}') R^{l-3}\, dS' \qquad (m = 1, 2, \ldots). \quad (75.46)$$

А для амплитуды рассеяния

$$A(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = -\frac{1}{4\pi}\, ik\, \nu_z \int\limits_S \varphi(\mathbf{r}')\, e^{-ik\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}'}\, dS' \qquad (75.47)$$

получаем НЧ-ряд (75.20) с

$$A_m(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{\nu_z}{4\pi} \sum_{l=0}^{m-2} \frac{(-1)^{l+1}}{l!} \int\limits_S \varphi^{(m-l-1)}(\mathbf{r})\, (\boldsymbol{\nu}\mathbf{r})^l\, dS\,. \qquad (75.48)$$

Таким образом, для акустически жесткого диска вычисление рассеянного поля в соответствии с описанной схемой сводится к вычислению потенциалов простого и двойного слоя на диске.

§ 76. Свойства амплитуды рассеяния

Решение задач НЧ дифракции сводится в соответствии с формулами предыдущего параграфа сначала к нахождению с помощью цепочки интегральных уравнений требуемого числа членов НЧ ряда для величин, характеризующих вторичные источники излучения, а затем к вычислению на их основе рассеянного поля как квазистатического, так и волнового. К сожалению, эта принципиально реализуемая схема решения на практике сопровождается при расчете каждого следующего приближения значительным увеличением объема вычислений и соответственно возрастающей громоздкостью самих аналитических результатов. Полезны поэтому всяческие дополнительные приемы, ведущие к искомым формулам ценой меньших усилий.

Некоторые из таких приемов применимы, когда в качестве первичной волны, как в нашем случае, выступает плоская звуковая волна. Они связаны с общими свойствами амплитуды рассеяния, выражаемыми тремя интерференционными теоремами теории рассеяния: *теоремой взаимности* [108]

$$A(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = A(-\boldsymbol{\nu},-\boldsymbol{\varkappa})\,, \tag{76.1}$$

оптической теоремой [211] для полного сечения рассеяния

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}\,\operatorname{Im} A(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa}) \tag{76.2}$$

и *обобщенной оптической теоремой* [365]

$$\frac{1}{2i}\,[A(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) - A^*(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\varkappa})] = \frac{k}{4\pi}\int A(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\tau})A^*(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\tau})\,d\Omega(\boldsymbol{\tau})\,, \tag{76.3}$$

где интегрирование распространяется на полный телесный угол. Кроме того, если дифракционная задача обладает симметрией по отношению к преобразованию инверсии $\mathbf{r}\to-\mathbf{r}$ (что в случае уединенного рассеивателя предполагает совмещение центра симметрии, которым он должен обладать, с началом координат), то, очевидно,

$$A(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = A(-\boldsymbol{\varkappa},-\boldsymbol{\nu})\,. \tag{76.4}$$

Естественно, что для нас в первую очередь представляют интерес следствия, вытекающие из (76.1)–(76.4) в низкочастотном случае. Свойство уравнений акустики в комплексной форме[1] принимать вещественный вид при чисто мнимых значениях k подсказывает форму степенных разложений, уже опробованную в (75.3)–(75.5), (75.20) и (75.35), в которой коэффициенты при степенях ik позволительно считать вещественными. В частности, далее предполагается вещественность величин $A_m(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})$.

Из-за различия между разложениями (75.20) и (75.35) мы отдельно рассмотрим случаи мягкого и акустически проницаемого рассеивателей. При этом мы ограничим рассмотрение только объемными объектами и будем считать выполненным условие (76.4), что в сочетании с (76.1) дает

$$A(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = A(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\varkappa})\,, \tag{76.5}$$

а обобщенную оптическую теорему (76.3) позволяет записать в виде

$$\operatorname{Im} A(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = \frac{k}{4\pi}\int A(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\tau})A^*(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\tau})\,d\Omega(\boldsymbol{\tau})\,. \tag{76.6}$$

[1] И связанных с ними других соотношений (например, (76.3)).

76.1. Акустически мягкий рассеиватель

Подставляя (75.35) в формулы (76.5), (76.2) и (76.6), соответственно получаем

$$A_m(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = A_m(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\varkappa}) \qquad (m = 0, 1, \dots), \tag{76.7}$$

$$\sigma = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l\, k^{2l}\, A_{2l+1}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\varkappa}), \tag{76.8}$$

$$A_{2n+1}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{2n} (-1)^l \int A_{2n-l}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\tau}) A_l(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau})\, d\Omega(\boldsymbol{\tau}) \qquad (n = 0, 1, \dots). \tag{76.9}$$

В громоздких расчетах, сопровождающих решение задач НЧ дифракции, формула (76.7) может быть использована как один из тестов проверки их правильности, наряду, скажем, с проверкой размерности.

Формула (76.9) полезна уже тем, что позволяет простым усреднением по углам находить четные члены НЧ ряда для амплитуды рассеяния (они имеют нечетные индексы), если известны все предыдущие его члены. Таким образом, в отличие от (75.36), требующей для определения $A_{2n+1}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$ знания $\psi^{(0)}$, $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(2n+1)}$, формула (29.9) дает $A_{2n+1}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$, обходясь без $\psi^{(2n+1)}$. Этот результат полезен и для вычисления полного сечения рассеяния по формуле (76.8).

Рассмотрим в качестве примера первое уравнение цепочки (75.32)

$$\oint_S \frac{\psi^{(0)}(\mathbf{r}')}{R}\, dS' = 4\pi \qquad (\mathbf{r} \in S), \tag{76.10}$$

где учтено (75.12), и соответствующее ему выражение (75.36) для $m = 0$

$$A_0(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \psi^{(0)}(\mathbf{r})\, dS\,. \tag{76.11}$$

В электростатике проводников аналогом уравнения (76.10) является уравнение

$$\oint_S \frac{\psi^{(0)}(\mathbf{r}')}{R}\, dS' = \Phi_0 \qquad (\mathbf{r} \in S) \tag{76.12}$$

для определения поверхностной плотности $\psi^{(0)}(\mathbf{r})$ заряда при заданном значении потенциала проводника $\Phi_0 = q/C$, где $q = \oint_S \psi^{(0)}(\mathbf{r})\, dS$ — полный заряд, а C — емкость проводника в гауссовых единицах. Поэтому[1]

$$A_0(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \psi^{(0)}(\mathbf{r})\, dS = -C\,, \tag{76.13}$$

и следовательно, согласно (76.9) и (76.8), имеем

$$A_1(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{4\pi} \int A_0(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\tau}) A_0(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau})\, d\Omega(\boldsymbol{\tau}) = C^2\,, \tag{76.14}$$

[1] Как и (75.36), этот результат не связан с конкретным выбором начала координат.

$$\sigma = 4\pi C^2 + O(k^2)\,. \tag{76.15}$$

Чтобы показать, что (76.14) справедливо для рассеивателя произвольной (не обязательно имеющей центр симметрии) формы, следует уравнение (75.32) для $m = 1$ умножить на $\psi^{(0)}(\mathbf{r})$ и проинтегрировать по S. При этом получается

$$\oint\limits_S dS\, \psi^{(0)}(\mathbf{r}) \oint\limits_S \frac{dS'}{R}\, \psi^{(1)}(\mathbf{r}') = 4\pi \boldsymbol{\varkappa} \oint\limits_S \mathbf{r}\, \psi^{(0)}(\mathbf{r})\, dS - \left[\,\oint\limits_S \psi^{(0)}(\mathbf{r})\, dS\right]^2 .$$

Изменение в левой части равенства порядка интегрирования, а также учет (76.10) и (76.13) дает

$$\oint\limits_S \psi^{(1)}(\mathbf{r})\, dS = -\,4\pi C^2 + \boldsymbol{\varkappa} \oint\limits_S \mathbf{r}\, \psi^{(0)}(\mathbf{r})\, dS\,. \tag{76.16}$$

Поскольку, согласно (75.36), $A_1(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$ равно

$$A'_1(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = -\,\frac{1}{4\pi} \left\{ \oint\limits_S \psi^{(1)}(\mathbf{r})\, dS - \boldsymbol{\nu} \oint\limits_S \mathbf{r}\, \psi^{(0)}(\mathbf{r})\, dS \right\}, \tag{76.17}$$

то при подстановке (76.16) в (76.17) будем иметь

$$A'_1(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = C^2 - \frac{1}{4\pi}\, (\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\nu}) \oint\limits_S \mathbf{r}\, \psi^{(0)}(\mathbf{r})\, dS\,, \tag{76.18}$$

где общие (не связанные со специальным выбором начала координат) выражения (76.17) и (76.18) отмечены штрихом у величины $A_1(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$. Если же начало координат совпадает с (пользуясь электростатической терминологией) «центром зарядов» $\psi^{(0)}(\mathbf{r})$, радиус-вектор которого есть

$$\mathbf{r}_0 = \oint\limits_S \mathbf{r}\, \psi^{(0)}(\mathbf{r})\, dS \bigg/ \oint\limits_S \psi^{(0)}(\mathbf{r})\, dS\,, \tag{76.19}$$

то имеет место (76.14).

Как показал Уильямс [404], существует процедура вычисления величин $A_{21+1}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\varkappa})$, входящих в (75.9), более экономичная, чем при использовании (76.9). В частности, Уильямс обнаружил, что, зная $\psi^{(0)}(\mathbf{r})$, можно найти не только первый $4\pi A_1(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\varkappa})$, но и второй $-4\pi k^2 A_3(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\varkappa})$ член НЧ ряда для полного сечения рассеяния. Его формула для $A_3(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\varkappa})$ имеет вид

$$\begin{gathered} 16\pi^2 A_3(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\varkappa}) = 16\pi^2 C^4 + 4\pi C \oint\limits_S (\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r})^2 \psi^{(0)}(\mathbf{r})\, dS + \\ + \frac{1}{6} \oint\limits_S \oint\limits_S \psi^{(0)}(\mathbf{r}) \psi^{(0)}(\mathbf{r}') R^2\, dS'\, dS - C \oint\limits_S \oint\limits_S \psi^{(0)}(\mathbf{r}) \psi^{(0)}(\mathbf{r}') R\, dS'\, dS \end{gathered} \tag{76.20}$$

и справедлива для рассеивающих тел произвольной формы, но при условии совмещения начала координат с точкой, характеризуемой (76.19).

Следуя [531], выведем методом Уильямса выражение для $A_5(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa})$. Сначала в соответствии с (75.36) представим $A_5(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa})$ в виде

$$4\pi A_5(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa}) = \Pi_0 - \Pi_1 + \Pi_2\,, \tag{76.21}$$

где

$$\Pi_l = \oint\limits_S \left[\frac{\psi^{(l)}(\mathbf{r})}{(5-l)!}\,(\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r})^{(5-l)} - \frac{\psi^{(5-l)}(\mathbf{r})}{l!}(\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r})^{l}\right] dS\,. \tag{76.22}$$

Условимся на время обозначать уравнение (75.32) для $m=p$ посредством (W-p). Умножим обе части уравнения (W-5) на $\psi^{(0)}(\mathbf{r})$ и проинтегрируем по S. Преобразуя левую часть полученного уравнения с помощью (W-0), находим

$$4\pi\Pi_0 = \Gamma_0\Gamma_4 + \oint\limits_S \psi^{(0)}(\mathbf{r}) \oint\limits_S \sum_{l=0}^{3} \frac{\psi^{(l)}(\mathbf{r}')}{(5-l)!}\, R^{4-l}\, dS'\, dS\,. \tag{76.23}$$

Аналогичные действия с парами уравнений (W-4), (W-1) и (W-3), (W-2) дают соответственно

$$4\pi\Pi_1 = \Gamma_1\Gamma_3 - \Gamma_0\Gamma_4 + \oint\limits_S \psi^{(1)}(\mathbf{r}) \oint\limits_S \sum_{l=0}^{2} \frac{\psi^{(l)}(\mathbf{r}')}{(4-l)!}\, R^{3-l}\, dS'\, dS\,, \tag{76.24}$$

$$\begin{gathered} 4\pi\Pi_2 = \Gamma_2^2 - \Gamma_1\Gamma_3 + \frac{1}{2}\oint\limits_S\oint\limits_S \left\{\frac{1}{3}\,\psi^{(0)}(\mathbf{r})\,\psi^{(2)}(\mathbf{r}')\,R^2 + \right.\\ \left. + \left[\psi^{(2)}(\mathbf{r})\psi^{(1)}(\mathbf{r}') - \psi^{(3)}(\mathbf{r})\psi^{(0)}(\mathbf{r}')\right] R\right\} dS'\, dS\,, \end{gathered} \tag{76.25}$$

где

$$\Gamma_n \equiv \oint\limits_S \psi^{(n)}(\mathbf{r})\, dS\,. \tag{76.26}$$

Рассматривая пары уравнений (W-4), (W-0) и (W-1), (W-0), таким же образом получаем

$$\begin{gathered} \Gamma_4 = \frac{1}{4!}\oint\limits_S (\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r})^4\, \psi^{(0)}(\mathbf{r})\, dS - \frac{1}{4\pi}\Gamma_0\Gamma_3 - \\ - \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \psi^{(0)}(\mathbf{r}) \oint\limits_S \sum_{l=0}^{2} \frac{1}{(4-l)!}\,\psi^{(l)}(\mathbf{r}')\, R^{3-l}\, dS'\, dS\,, \end{gathered} \tag{76.27}$$

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{4\pi}\Gamma_0^2 + \boldsymbol{\varkappa}\oint\limits_S \mathbf{r}\,\psi^{(0)}(\mathbf{r})\, dS\,. \tag{76.28}$$

Будем предполагать, что начало координат находится в точке $\mathbf{r}_0$, даваемой формулой (76.19), так что второе слагаемое в (76.28) равно нулю.

Подставляя теперь (76.23)–(76.25), (76.27) и (76.28) в формулу (76.21), окончательно получаем

$$16\,\pi^2 A_5(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa}) = \Gamma_2^2 + \frac{1}{3}\,\pi\,C\oint\limits_S (\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r})^4\,\psi^{(0)}(\mathbf{r})\,dS +$$
$$+\frac{1}{5!}\oint\limits_S\oint\limits_S \psi^{(0)}(\mathbf{r})\,\psi^{(0)}(\mathbf{r}')R^4\,dS'\,dS - \frac{1}{6}\oint\limits_S\oint\limits_S \psi^{(1)}(\mathbf{r})\,\psi^{(1)}(\mathbf{r}')R^2\,dS'\,dS -$$
$$-2\,C\oint\limits_S \psi^{(0)}(\mathbf{r})\oint\limits_S \sum_{l=0}^{2}\frac{\psi^{(l)}(\mathbf{r}')}{(4-l)!}\,R^{3-l}\,dS'\,dS\,. \quad (76.29)$$

Таким образом, третий член НЧ разложения полного сечения рассеяния на акустически мягком препятствии произвольной формы можно вычислить, если известны лишь три члена ряда (75.31).

76.2. Акустически проницаемый рассеиватель

В этом случае подстановка разложения (75.20) в (76.5), (76.2) и (76.6) дает соответственно

$$A_m(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = A_m(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\varkappa}) \qquad (m=2,3,\dots)\,, \quad (76.30)$$

$$\sigma = 4\pi\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\,k^{2l}\,A_{2l+1}(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa})\,, \quad (76.31)$$

$$A_{2n+1}(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=2}^{2n-2}(-1)^l\int A_{2n-l}(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\tau})A_l(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\tau})\,d\Omega(\boldsymbol{\tau})$$
$$(n=1,2,\dots)\,. \quad (76.32)$$

Из последней формулы, в частности, следует, что

$$A_3(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = 0 \quad (76.33)$$

для любого рассеивателя, имеющего центр симметрии, при условии расположения в этом центре начала координат. Отметим, что метод вычисления четных членов ряда (75.20), основанный на формуле (76.32), был предложен Тверским [366] (см. также [70]). Отметим еще, что для акустически проницаемых и жестких рассеивателей процедура Уильямса при вычислении членов ряда (76.31) оказывается (как указывает и сам Уильямс) неэффективной, уступая в простоте прямому расчету по формуле

$$\sigma = \int |A(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})|^2\,d\Omega(\boldsymbol{\nu}) =$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty}k^{2n}\sum_{l=2}^{2n-2}(-1)^{l+n}\int A_{2n-l}(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})A_l(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})\,d\Omega(\boldsymbol{\nu})\,. \quad (76.34)$$

76.3. Трансляционные свойства амплитуды рассеяния

Рассмотрим вопрос о том, как преобразуется амплитуда рассеяния при переносе начала координат. Прежде всего отметим, что, задавая падающую волну в виде (75.11), мы тем самым потребовали, чтобы начало координат (независимо от его фактического выбора) было одновременно и фазовым центром, т. е. точкой, в которой начальная фаза падающей волны равна нулю. В соответствии со сказанным рассмотрим две системы координат: одну — с началом в точке O и исходящим из него радиусом-вектором $\mathbf{r}$, а другую — с началом в точке O' и исходящим из него радиусом-вектором $\boldsymbol{\varrho}$. Таким образом, для любой точки пространства имеем

$$\boldsymbol{\varrho} = \mathbf{r} + \mathbf{a}\,, \tag{76.35}$$

где $\mathbf{a} = \overrightarrow{O'O}$. В каждой из этих систем (в терминах соответствующих им радиусов-векторов) уравнения акустики и выражения для амплитуды рассеяния имеют инвариантный вид. Например, обращаясь для простоты к случаю акустически мягкого препятствия, будем иметь в системе с началом в точке O' интегральное уравнение

$$-\oint\limits_S G(R)\,\psi(\boldsymbol{\varrho}')\,dS' = e^{ik\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\varrho}}\,, \tag{76.36}$$

которое в системе с началом в точке O, согласно (74.26), (75.11), (75.30), имеет вид

$$-\oint\limits_S G(R)\,\psi(\mathbf{r}')\,dS' = e^{ik\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}}\,. \tag{76.37}$$

Подставляя в (76.36) равенство (76.35) и сравнивая результат с (76.37), получаем

$$\psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \psi(\mathbf{r})\,e^{ik\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{a}}\,. \tag{76.38}$$

Амплитуда рассеяния в системе с началом в точке O' дается выражением

$$A'(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = -\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \psi(\boldsymbol{\varrho}')\,e^{ik\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\varrho}'}\,dS'\,, \tag{76.39}$$

которое после замены (76.35), использования (76.38) и сопоставления с (75.34) приводит к искомой окончательной формуле

$$A'(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = e^{ik(\boldsymbol{\varkappa}-\boldsymbol{\nu})\mathbf{a}}\,A(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})\,. \tag{76.40}$$

Закон преобразования (76.40) справедлив не только для амплитуды рассеяния на акустически мягком препятствии, но и в общем случае акустически прозрачного рассеивателя, что в конечном счете является результатом линейности уравнений акустики и использования асимптотической формулы (75.13). Отметим также, что теоремы (76.1)–(76.3) сохраняют силу и для преобразованной амплитуды рассеяния $A'(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})$.

Подстановка в (76.40) НЧ рядов для $e^{ik(\boldsymbol{\varkappa}-\boldsymbol{\nu})\mathbf{a}}$ и (75.35) или (75.29) дает соответственно для акустически мягкого рассеивателя

$$A'_m(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = \sum_{l=0}^{m}\frac{1}{l!}\,[(\boldsymbol{\varkappa}-\boldsymbol{\nu})\mathbf{a}]^l A_{m-l}(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) \qquad (m = 0, 1, \ldots)\,, \tag{76.41}$$

а для акустически проницаемого рассеивателя

$$A'_m(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = \sum_{l=0}^{m-2} \frac{1}{l!}\,[(\boldsymbol{\varkappa}-\boldsymbol{\nu})\mathbf{a}]^l A_{m-l}(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) \qquad (m=2,3,\ldots)\,. \qquad (76.42)$$

Из (76.41), в частности, получаем

$$A'_1(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = A_1(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{\varkappa}-\boldsymbol{\nu})\mathbf{a}\,A_0(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})\,,$$

что переходит в (76.18), если учесть (76.14), (76.13) и положить $\mathbf{a}$ равным (76.19). А из (76.42) следует, что

$$A'_3(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = A_3(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{\varkappa}-\boldsymbol{\nu})\mathbf{a}\,A_2(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})\,.$$

Так что $A'_3(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})$ не обращается в нуль, даже если $A'_3(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = 0$, как в случае тела с центром симметрии.

Глава 13
Рассеяние звукопроницаемым эллипсоидом

§ 77. Звуковое поле внутри эллипсоида

Изложенная в предыдущей главе общая схема решения скалярной задачи НЧ дифракции на препятствии произвольной формы применяется здесь как к общему случаю однородного акустически прозрачного эллипсоидального рассеивателя, так и к тому частному случаю, который характеризуется совпадением плотностей рассеивателя и окружающей его среды. Заметим, что среди акустических задач об эллипсоиде оба этих случая являются «экстремальными» (т. е. наиболее сложным и наиболее простым) по трудоемкости.

Подобно рассмотрению в гл. 10 задачи о диэлектрическом эллипсоиде во внешнем статическом поле, будем исходить из *интегральных уравнений* (в данном случае *акустики*), как более экономичных, поскольку они сводят решение задачи к одной лишь – внутренней – области. Будем также «работать» в декартовых координатах, чтобы, учитывая полиномиальность внутренних звуковых полей в задачах НЧ дифракции, опираться вместо аппарата функций Ламэ на результаты теории, развитой в первой части. К тому же, в декартовых координатах проще учитывается симметрия задачи.

Определение НЧ звукового поля внутри эллипсоида, граница которого дается уравнением $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, требует решения уравнений цепочки (75.6) с учетом (75.12), поскольку рассматривается рассеяние плоской волны (75.11). Отметим, что замена $\delta \Rightarrow 1/\varepsilon$ и преобразование второго члена правой части переводят квазистатические уравнения (75.6) в уравнения типа (64.6), (64.7). Это обстоятельство представляет интерес и с математической, и с физической точек зрения. В вычислительном отношении полезность отмеченного обстоятельства состоит в том, что матрицы систем алгебраических уравнений, определяющих коэффициенты искомых полиномиальных (степени m) функций $P^{(m)}(\mathbf{r})$, переходят при замене $\delta \Rightarrow 1/\varepsilon$ в матрицы, соответствующие уравнениям (64.6), (64.7). Удобно, в частности, для элементов матриц в различных задачах использовать идентичные обозначения. Для физики отмеченное выше обстоятельство полезно тем, что снабжает НЧ акустику электростатическим аналогом, объясняя, в частности, почему электростатические теоремы взаимности можно применять в акустических задачах рассеяния или почему рассеянию на акустически жестком препятствии соответствует магнитостатическая задача об идеальном проводнике во внешнем поле.

Заметив предварительно, что из (75.6), (75.12) и (75.8) сразу следует

$$P^{(0)}(\mathbf{r}) = 1\,, \tag{77.1}$$

будем, в соответствии со сказанным, искать решения (75.6), (75.12) в виде[1]

$$P^{(1)}(\mathbf{r}) = \delta\langle\alpha_x x\rangle\,, \tag{77.2}$$

$$P^{(2)}(\mathbf{r}) = \delta\left(\frac{1}{2}\langle\alpha_{200}x^2\rangle + \langle\alpha_{110}xy\rangle\right) + \alpha_{000}\,, \tag{77.3}$$

$$P^{(3)}(\mathbf{r}) = \delta\left(\frac{1}{3}\langle\alpha_{300}x^3\rangle + \langle\alpha_{120}xy^2\rangle + \langle\alpha_{102}xz^2\rangle + \right.$$
$$\left. + \alpha_{111}xyz + \langle\alpha_{100}x\rangle\right) + \frac{1}{3}Q_\beta abc\,. \tag{77.4}$$

Подставляя эти выражения в соответствующие уравнения цепочки (75.6), используя полиномиальные представления интегралов по объему эллипсоида вида $\int x'^l y'^m z'^n\, R^{-1}\, dV'$, найденные в § 14, получаем систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов α_x, α_y, α_z и α_{lmn}. Ее решение есть

$$\alpha_x = \varkappa_x \,/(\delta + Q_\varrho\, M_{100})\ , \tag{77.5}$$

$$\alpha_{110} = \varkappa_x\varkappa_y \,/\left[\delta + Q_\varrho(a^2+b^2)\, M_{110}\right]\ , \tag{77.6}$$

$$\alpha_{200} = \frac{1}{H}\left\{\mu_a - Q_\varrho\left[(b^2+c^2)\, M_{011}\mu_a + c^2\, M_{101}(\eta-\mu_b) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + b^2\, M_{110}(\eta-\mu_c)\right] + Q_\varrho^2\,\eta\, b^2c^2\,\langle M_{110}M_{101}\rangle\right\}\,, \tag{77.7}$$

$$6\alpha_{000} = 2Q_\beta\, M_{000} + \left\langle a^2\varkappa_x^2\right\rangle - \delta\left\langle\alpha_{200}a^2\right\rangle\,, \tag{77.8}$$

$$\alpha_{111} = \varkappa_x\varkappa_y\varkappa_z \,/\left(\delta + Q_\varrho\left\langle a^2b^2\right\rangle\, M_{111}\right)\ , \tag{77.9}$$

$$\alpha_{120} = \frac{\alpha_x}{N_a}\left\{\left(\frac{1}{2}\,\delta Q_\varrho\eta A_{210} + \Lambda_{201}\right)(2\delta + Q_\varrho l_{102}) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{2}\,\delta Q_\varrho\,\eta A_{201} + \Lambda_{210}\right) Q_\varrho m_{102}\right\}\,, \tag{77.10}$$

$$\alpha_{300} = \frac{1}{2}\,\delta\,\eta\alpha_x - \alpha_{120} - \alpha_{102}\,, \tag{77.11}$$

[1] Для сокращения записи в (77.2)–(77.4) опущены слагаемые (например, квадратичные в (77.4)), коэффициенты при которых в результате решения оказываются равными нулю.

$$2\left(\delta+Q_{\varrho}\,M_{100}\right)\alpha_{100}=\frac{1}{2}\,\alpha_x\left[Q_{\varrho}\left(M_{000}-a^2M_{100}\right)+2\delta\,Q_{\beta}\,a^2\,M_{100}-\right.$$
$$\left.-\delta\,Q_{\varrho}\,\eta\,a^2\left(M_{100}-a^2M_{200}\right)\right]-Q_{\varrho}\left(n_{120}\,\alpha_{120}+n_{102}\,\alpha_{102}\right)\,, \quad (77.12)$$

где $l_{120}, m_{120}, n_{120}$ даются формулами (64.36). Кроме того, для сокращения записи использованы обозначения

$$H=1-Q_{\varrho}\left\langle\left(a^2+b^2\right)M_{110}\right\rangle+Q_{\varrho}^2\left\langle a^2b^2\right\rangle\left\langle M_{110}M_{101}\right\rangle\,,$$

$$N_a=4\delta^2+2\delta Q_{\varrho}\left(l_{102}+l_{120}\right)+Q_{\varrho}^2\left(l_{120}\,l_{102}-m_{120}\,m_{102}\right)\,,$$

$$\mu_a=\varkappa_x^2-Q_{\beta}\,M_{100}\,,\qquad A_{210}=a^2\left(M_{110}-a^2M_{210}\right)\,,$$

$$\Lambda_{201}=\varkappa_y^2\left(\delta+Q_{\varrho}M_{100}\right)-\frac{1}{2}\,Q_{\varrho}\left(M_{010}-a^2M_{110}\right)-\delta Q_{\beta}\,a^2M_{110}\,.$$

Таким образом, поле $P(\mathbf{r})\approx\sum\limits_{m=0}^{3}(ik)^mP^{(m)}(\mathbf{r})$ внутри эллипсоида выражается через внутренние потенциальные факторы M_{lmn} эллипсоида, причем максимальный вес факторов, входящих в $P^{(m)}(\mathbf{r})$ равен m.

§ 78. Поле рассеяния в ближней зоне

В ближней зоне $(kr\ll 1)$ рассеянное поле дается формулами (75.10), где величины $P_{\text{sc}}^{(m)}(\mathbf{r})$ до $m=3$ можно вычислить, используя результаты § 77, по формулам (75.6), отбросив в них первые члены правых частей.

С помощью выражений для наружных ньютоновых потенциалов эллипсоида (см. § 14) окончательно получаем: $P_{\text{sc}}^{(0)}=0$,

$$P_{\text{sc}}^{(1)}=-Q_{\varrho}\left\langle\alpha_x\,\mathscr{M}_{100}\,x\right\rangle\,, \quad (78.1)$$

$$2P_{\text{sc}}^{(2)}=Q_{\beta}I_{000}+Q_{\varrho}\left\langle\alpha_{200}a^2\,\mathscr{M}_{100}-\left(\alpha_{200}a^2\,\mathscr{M}_{200}+\alpha_{020}b^2\,\mathscr{M}_{110}\,+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,\alpha_{002}c^2\,\mathscr{M}_{101}\right)x^2-2\alpha_{110}\left(a^2+b^2\right)\,\mathscr{M}_{110}xy\right\rangle\,, \quad (78.2)$$

$$P_{\text{sc}}^{(3)}=Q_{\beta}\frac{abc}{3}+\frac{1}{2}\,\delta Q_{\beta}\left\langle\alpha_xa^2x\,I_{100}\right\rangle+\frac{1}{4}\,Q_{\varrho}\left\langle\alpha_xx\left(I_{000}-a^2\,I_{100}\right)\right\rangle-$$
$$-\,Q_{\varrho}\,\alpha_{111}\left\langle a^2b^2\right\rangle\mathscr{M}_{111}xyz-\frac{1}{2}\,Q_{\varrho}\left\langle x\left[\alpha_{300}a^2\left(I_{100}-a^2\,I_{200}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,\alpha_{120}\,b^2\,I_{120}+\alpha_{102}\,c^2\,I_{102}+2\,\alpha_{100}\,\mathscr{M}_{100}\right]\right\rangle\,. \quad (78.3)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$I_{000}=\mathscr{M}_{000}-\left\langle\mathscr{M}_{100}x^2\right\rangle\,, \quad (78.4)$$

$$I_{100}=\mathscr{M}_{100}-\frac{1}{3}\,\mathscr{M}_{200}x^2-\mathscr{M}_{110}y^2-\mathscr{M}_{101}z^2\,, \quad (78.5)$$

$$I_{200}=\mathscr{M}_{200}-\frac{1}{3}\,\mathscr{M}_{300}x^2-\mathscr{M}_{210}y^2-\mathscr{M}_{201}z^2\,, \quad (78.6)$$

$$I_{120} = \mathscr{M}_{010} - 3a^2\mathscr{M}_{110} - \left(\mathscr{M}_{110} - a^2\mathscr{M}_{210}\right)x^2 - \\ - \left(\mathscr{M}_{020} - 2\mathscr{M}_{110} - 3a^2\mathscr{M}_{120}\right)y^2 - \left(\mathscr{M}_{011} - 3a^2\,\mathscr{M}_{111}\right)z^2\,. \quad (78.7)$$

Таким образом, рассеянное эллипсоидом звуковое поле

$$P_{\mathrm{sc}}(\mathbf{r}) \approx \sum_{m=1}^{3}(ik)^m P_{\mathrm{sc}}^{(m)}(\mathbf{r})$$

выражается в ближней зоне через внешние потенциальные факторы $\mathscr{M}_{ijk}(\xi)$, причем максимальный вес факторов, входящих в $P_{\mathrm{sc}}^{(m)}(\mathbf{r})$ равен m.

В заключение отметим, что формулы данного параграфа не связаны с выводом последующих результатов этой главы.

§ 79. Амплитуда и сечение рассеяния

Для вычисления величины $A_m(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})$, входящей в НЧ-разложение (75.20) амплитуды рассеяния, необходимо (в соответствии с (75.21)) знать величины $P^{(0)}(\mathbf{r}),\ldots,P^{(m-1)}(\mathbf{r})$, составляющие НЧ-ряд полного поля внутри рассеивателя. Применительно к эллипсоиду, согласно результатам § 77, это означает, в частности, что при расчете по формуле (75.21) величина $A_j(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})$ будет содержать внутренние потенциальные факторы M_{lmn} с максимальным весом, равным $j-1$. Таким образом, стремление уточнить НЧ-разложение амплитуды рассеяния путем вычисления все новых величин $A_j(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})$, соответствующих бо̀льшим значениям номеров j, сопряжено с сопутствующим возрастанием веса фигурирующих внутренних потенциальных факторов M_{lmn}, что затрудняет переход к затабулированным факторам размагничивания. К тому же одновременно существенно усложняется как сам расчет, так и аналитический вид окончательных результатов.

Правда, при вычислении величин $A_j(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})$ с нечетными индексами ситуация несколько упрощается ввиду возможности использовать формулу (76.32). Но эта возможность доступна лишь при рассмотрении рассеяния плоской волны. Более эффективным средством преодоления отмеченных трудностей вычислительного характера является обращение к электростатической теореме взаимности, причем для рассеиваемого поля произвольного вида.

В нашем случае вычисление интегралов (75.21) с помощью формулы Лагранжа (В.11) по известным $P^{(0)}(\mathbf{r})$, $P^{(1)}(\mathbf{r})$, $P^{(2)}(\mathbf{r})$, $P^{(3)}(\mathbf{r})$ дает

$$A_2(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = \frac{V}{4\pi}\,\left(Q_\beta + Q_\varrho\left\langle\alpha_x\nu_x\right\rangle\right)\,, \quad (79.1)$$

$$A_3(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = 0\,, \quad (79.2)$$

$$A_4(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = \frac{V}{4\pi}\,\left\{Q_\beta\left(w - \frac{1}{5}\,\delta\left\langle a^2\alpha_x\nu_x\right\rangle + \frac{1}{10}\left\langle a^2\nu_x^2\right\rangle\right) + Q_\varrho\left[\left\langle w_x\nu_x\right\rangle + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{10}\,\left\langle a^2\nu_x^2\right\rangle\left\langle\alpha_x\nu_x\right\rangle - \frac{1}{5}\,\left\langle\alpha_{200}a^2\nu_x^2\right\rangle - \frac{1}{5}\,\left\langle\alpha_{110}\left(a^2+b^2\right)\nu_x\nu_y\right\rangle\right]\right\}\,. \quad (79.3)$$

Здесь V — объем эллипсоида,

$$w = \alpha_{000} + \frac{1}{10}\,\delta\left\langle a^2\alpha_{200}\right\rangle\,, \tag{79.4}$$

$$w_x = \alpha_{100} + \frac{1}{5}\,\left(a^2\alpha_{300} + b^2\alpha_{120} + c^2\alpha_{102}\right)\,. \tag{79.5}$$

В таком виде эти результаты получены в [530]. Выражение (79.5), однако, можно упростить, если подставить в него (77.10)–(77.12) и воспользоваться тождеством (Е.7). Окончательно будем иметь

$$w_x = \frac{\alpha_x}{10}\left\{(\delta\eta - 1)\,a^2 + \left\langle a^2\varkappa_x^2\right\rangle + \frac{Q_\varrho}{\delta + Q_\varrho M_{100}}\left[2M_{000} - a^2M_{100} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\delta Q_\beta}{Q_\varrho}\,a^2\left(1 + 2M_{100}\right) + \delta\eta a^2\left(1 - M_{100}\right)\right]\right\}\,. \tag{79.6}$$

Перепишем теперь (79.1) и (79.3) в виде, в котором свойство (76.30) выражено явно. Результат (достигаемый в случае (79.3) путем громоздких выкладок) дается формулами

$$A_2(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = B + \left\langle B_{100}\varkappa_x\nu_x\right\rangle\,, \tag{79.7}$$

$$A_4(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = D + \left\langle D_{100}\varkappa_x^2\nu_x^2\right\rangle + \left\langle D_{200}\left(\varkappa_x^2 + \nu_x^2\right)\right\rangle + \left\langle F_{100}\varkappa_x\nu_x\right\rangle +$$
$$+ \frac{1}{10}\,\left\langle a^2\left(\varkappa_x^2 + \nu_x^2\right)\right\rangle\left\langle B_{100}\varkappa_x\nu_x\right\rangle + \left\langle B_{110}\varkappa_x\varkappa_y\nu_x\nu_y\right\rangle\,, \tag{79.8}$$

где

$$B = \frac{abc}{3}\,Q_\beta\,, \tag{79.9}$$

$$B_{100} = \frac{abc}{3}\,\frac{Q_\varrho}{\delta + Q_\varrho M_{100}}\,, \tag{79.10}$$

$$B_{110} = \frac{abc}{15}\,\frac{Q_\varrho\left(a^2 + b^2\right)}{\delta + Q_\varrho\left(a^2 + b^2\right)M_{110}}\,, \tag{79.11}$$

$$D = \frac{abc}{45}\left\{5Q_\beta^2M_{000} + \frac{\delta Q_\beta^2}{3Q_\varrho}\,\left\langle a^2\right\rangle + \frac{\delta Q_\beta^2}{H}\left[M_{000} + \frac{\left\langle a^2\right\rangle}{3}\,\left(2\left\langle a^2M_{110}\right\rangle - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{Q_\varrho}\right)\right] - \frac{\delta Q_\varrho Q_\beta^2}{3H}\,\left\langle a^2b^2\right\rangle\left\langle M_{110}\right\rangle + \frac{Q_\varrho Q_\beta(\delta\eta - 1) + 3Q_\varrho^2\eta}{H}\,\left\langle a^2b^2M_{110}\right\rangle -$$
$$\left. - \frac{3Q_\varrho}{H}\,(1 - \delta\eta)^2a^2b^2c^2\left\langle M_{110}M_{101}\right\rangle\right\}, \tag{79.12}$$

$$D_{100} = \frac{abc}{15H}\,Q_\varrho\left(Q_\varrho\left\langle a^2b^2\right\rangle M_{011} - a^2\right), \tag{79.13}$$

$$D_{200} = \frac{abc}{45}\left\{Q_\beta a^2\left[\frac{5}{2} + \frac{1}{H}\left(3Q_\varrho M_{100} + 2Q_\varrho\left\langle a^2M_{110}\right\rangle - 1\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{Q_\varrho^2}{H}\,\left(Q_\beta\left\langle a^2b^2\right\rangle + 3\eta b^2c^2\right)M_{011}\right\}\,, \tag{79.14}$$

$$F_{100} = \frac{1}{10} B_{100} B_{200}\,, \qquad B_{200} = \frac{3\delta\eta - 1 - \delta - \delta^2\eta}{Q_\varrho}\, a^2 +$$
$$+ \frac{Q_\varrho}{\delta + Q_\varrho M_{100}} \left[2M_{000} - a^2 M_{100} + \frac{\delta Q_\beta}{Q_\varrho}\, a^2 (1 + 2M_{100}) + \delta\eta\, a^2 (1 - M_{100}) \right], \tag{79.15}$$

Имея выражения (79.7) и (79.8) и учитывая (79.2), нетрудно с помощью усреднений, предписываемых формулой (76.32), найти величины $A_5(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$ и $A_7(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$, с которых начинается разложение в НЧ ряд мнимой части амплитуды рассеяния. При этом для $A_5(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$ получается результат

$$A_5(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = B^2 + \frac{1}{3} \left\langle B_{100}^2\, \varkappa_x \nu_x \right\rangle, \tag{79.16}$$

найденный Тверским [366], а для $A_7(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$ – выражение

$$A_7(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = 2B \left(D + \frac{1}{3} \left\langle D_{200} \right\rangle \right) + B \left\langle \left(\frac{1}{3} D_{100} + D_{200} \right) \left(\varkappa_x^2 + \nu_x^2 \right) \right\rangle +$$
$$+ \frac{1}{75} \left\langle B_{100}^2 \left(5B_{200} + 2a^2 + \left\langle a^2 \right\rangle \right) \varkappa_x \nu_x \right\rangle + \frac{1}{30} \left\langle a^2 \left(\varkappa_x^2 + \nu_x^2 \right) \right\rangle \left\langle B_{100}^2 \varkappa_x \nu_x \right\rangle. \tag{79.17}$$

Следует отметить, что наша формула (79.17) не соответствует выражению для $A_7(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$, полученному в работе [70]. Это различие сохраняет силу и в частном случае, когда $\delta = 1$. Так, формула Дассиоса для $A_7(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$ обладает свойственной монопольному излучению независимостью от направлений $\boldsymbol{\varkappa}$ и $\boldsymbol{\nu}$, тогда как (79.17) сохраняет зависимость от направлений падающей и рассеянной волн. Результат Дассиоса означает, что при $\delta = 1$ не должен зависеть от $\boldsymbol{\varkappa}$ и коэффициент при k^6 в НЧ-разложении полного сечения рассеяния. Вычисление же двух членов ряда (76.34) требует знания лишь $A_2(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$ и $A_4(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$, непосредственное определение которых при $\delta = 1$ не представляет труда. Подробно случай $\delta = 1$ рассматривается в следующем параграфе. Его результаты показывают, что в выражение для $A_7(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$ работы [70] (в том числе и при вырождении эллипсоида в сфероид) закралась неточность.

Полученные выше результаты для амплитуды рассеяния при вырождении эллипсоида в шар[1] $(c = b = a)$ можно, учитывая (3.26), представить в виде

$$\operatorname{Re} A(\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{\nu}) = -k^2 A_2(\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{\nu}) + k^4 A_4(\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{\nu}) + O(k^6), \tag{79.18a}$$
$$\operatorname{Im} A(\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{\nu}) = k^5 A_5(\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{\nu}) - k^7 A_7(\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{\nu}) + O(k^9), \tag{79.18b}$$

где

$$A_2(\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{\nu}) = a^3 \left(\frac{Q_\beta}{3} + \frac{Q_\varrho}{1 + 2\delta}\, \nu_z \right), \tag{79.19}$$

$$A_4(\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{\nu}) = a^5 \left[\frac{1}{45} \left(9 - 15\eta + 5\eta^2 + \delta\eta^2 \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{5}\, \frac{Q_\varrho - \delta^2 Q_\beta}{(1 + 2\delta)^2}\, \nu_z + \frac{Q_\varrho}{9(2 + 3\delta)} \left(1 - 3\nu_z^2 \right) \right], \tag{79.20}$$

[1] В этом случае, можно положить $\boldsymbol{\varkappa} = \mathbf{z}_0$, где $\mathbf{z}_0$ — единичный вектор направления оси z.

$$A_5(\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{\nu}) = \frac{a^6}{9}\left[Q_\beta^2 + \frac{3Q_\varrho^2}{(1+2\delta)^2}\,\nu_z\right], \tag{79.21}$$

$$A_7(\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{\nu}) = \frac{2}{5}\,a^8\left[\frac{Q_\beta}{27}\left(9 - 15\eta + 5\eta^2 + \delta\eta^2\right) + \frac{Q_\varrho\left(Q_\varrho - \delta^2 Q_\beta\right)}{(1+2\delta)^3}\,\nu_z\right], \tag{79.22}$$

К таким же формулам приводит и точное решение задачи дифракции на шаре.[1]

Полное эффективное сечение рассеяния с точностью, включающей члены порядка k^6, можно вычислить либо используя выражения для $A_2(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$ и $A_4(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$ путем усреднения по формуле (76.34), либо полагая $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\varkappa}$ в выражениях для $A_5(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$ и $A_7(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$, по формуле (76.31), фактическое суммирование в которой начинается, очевидно, с $l = 2$. Для трехосного эллипсоида мы приводим здесь два эквивалентных выражения[2] для сечения рассеяния:

$$\sigma = \frac{1}{12\pi}\,k^4 V^2\left\{3Q_\beta^2 + Q_\varrho^2\left\langle\alpha_x^2\right\rangle - 2k^2\left[Q_\beta^2\left(3w + \frac{1}{10}\left\langle a^2\right\rangle\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + Q_\varrho^2\left\langle w_x\alpha_x + \frac{1}{50}\,\alpha_x^2\left(2a^2 + \left\langle a^2\right\rangle\right)\right\rangle - \frac{1}{5}\,Q_\varrho\,Q_\beta\left\langle\left(\delta\alpha_x^2 + \alpha_{200}\right)a^2\right\rangle\right]\right\}, \tag{79.23a}$$

$$\sigma = 4\pi k^4\left\{B^2 + \frac{1}{3}\left\langle B_{100}^2\varkappa_x^2\right\rangle - k^2\left[2B\left(D + \frac{1}{3}\left\langle D_{200}\right\rangle\right) + \right.\right.$$
$$+ 2B\left\langle\left(\frac{1}{3}\,D_{100} + D_{200}\right)\varkappa_x^2\right\rangle + \frac{1}{75}\left\langle B_{100}^2\left(5B_{200} + 2a^2 + \left\langle a^2\right\rangle\right)\varkappa_x^2\right\rangle +$$
$$\left.\left. + \frac{1}{15}\left\langle B_{100}^2\varkappa_x^2\right\rangle\left\langle a^2\varkappa_x^2\right\rangle\right]\right\}. \tag{79.23b}$$

§ 80. Случай совпадения плотностей ϱ и $\widetilde{\varrho}$

Мы уже отмечали выше, что если среда рассеивателя отличается от внешней среды только сжимаемостью, то решение задачи НЧ рассеяния существенно упрощается. Это обусловлено тем, что при $\delta = 1$ интегральные уравнения НЧ цепочки (а следовательно, и соответствующие им системы алгебраических уравнений) «исчезают», заменяясь последовательностью рекуррентных интегральных соотношений (75.24), где следует иметь в виду и (75.12), причем для любого рассеивателя

$$P^{(0)}(\mathbf{r}) = 1, \qquad P^{(1)}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\varkappa}\,\mathbf{r}. \tag{80.1}$$

[1] Приведенное в [70] выражение для $A_7(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$, относящееся к шару, не удовлетворяет соотношению (76.32), на основе которого было выведено. Содержащееся в [70] утверждение о том, что при переходе к акустически жесткому шару получающиеся результаты подтверждаются формулами справочника [42], некорректно, ибо члены соответствующего порядка лежат за пределами точности формул, приведенных в [42].

[2] Первое дано в обозначениях § 77 и (79.4)–(79.6), второе – в обозначениях (79.9)–(79.15).

В рассматриваемом случае полиномиальность звукового поля внутри эллипсоида очевидна в силу (80.1) и потенциальной структуры интегралов, содержащих нечетные степени R в (75.24). Для четных степеней R интегралы в (75.24) вычисляются без труда с помощью формулы Лагранжа (B.11).

Приведем результаты вычислений $P^{(l)}(\mathbf{r})$ по формуле (75.24) для $\mathbf{r} \in V$, дополняющие (80.1) до первых шести приближений:[1]

$$P^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r})^2 + \frac{Q_\beta}{2}\left(M_{000} - \left\langle M_{100}\,x^2\right\rangle\right) ,$$

$$P^{(3)}(\mathbf{r}) = \frac{(\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r})^3}{6} + \frac{Q_\beta}{3}\,abc + \frac{Q_\beta}{2}\,\Big\langle \varkappa_x a^2 \Big(M_{100} - \\ - \frac{1}{3}\,M_{200}x^2 - M_{110}y^2 - M_{101}z^2\Big)\,x\Big\rangle ,$$

$$P^{(4)}(\mathbf{r}) = \frac{(\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r})^4}{24} + \frac{Q_\beta}{8}\Big\{\frac{1}{2}\,\left\langle a^2\left(b^2+c^2\right)M_{100}\right\rangle + \left\langle\left(M_{000}-a^2M_{100}\right)x^2\right\rangle - \\ - \left\langle\left(M_{100}-b^2M_{110}\right)x^2y^2\right\rangle - \frac{1}{2}\,\Big\langle\Big(M_{100} - \frac{1}{3}\,a^2M_{200}\Big)\,x^4\Big\rangle + \\ + \Big\langle\left(\varkappa_x^2 - M_{100}\right)a^2\Big[\frac{1}{2}\left(M_{000}-a^2M_{100}\right) - \left(M_{100}-a^2M_{200}\right)x^2 - \\ - \left(M_{010}-a^2M_{110}\right)y^2 - \left(M_{001}-a^2M_{101}\right)z^2 + \left(M_{110}-a^2M_{210}\right)x^2y^2 + \\ + \left(M_{011}-a^2M_{111}\right)y^2z^2 + \left(M_{101}-a^2M_{201}\right)x^2z^2 + \frac{1}{6}\,\left(M_{200}-a^2M_{300}\right)x^4 + \\ + \frac{1}{6}\,\left(M_{020}-a^2M_{120}\right)y^4 + \frac{1}{6}\left(M_{002}-a^2M_{102}\right)z^4\Big]\Big\rangle\Big\} + \\ + \frac{Q_\beta}{2}\,\Big\langle\varkappa_x\varkappa_y a^2b^2xy\Big(M_{110} - \frac{1}{3}M_{210}x^2 - \frac{1}{3}M_{120}y^2 - M_{111}z^2\Big)\Big\rangle + \\ + \frac{Q_\beta^2}{4}\,M_{000}\left(M_{000} - \left\langle M_{100}x^2\right\rangle\right) ,$$

$$P^{(5)}_{\mathrm{ev}}(\mathbf{r}) = \frac{Q_\beta}{90}\,abc\left(5\left\langle x^2\right\rangle + \left\langle a^2\right\rangle + 3\left\langle a^2\varkappa_x^2\right\rangle + 27\,Q_\beta M_{000} - 15\,Q_\beta\left\langle M_{100}x^2\right\rangle\right).$$

Подставляя эти формулы в (75.25), приходим в результате прямого расчета, не связанного с использованием обобщенной оптической теоремы, к

[1] Для $P^{(5)}(\mathbf{r})$ мы приводим только часть выражения, являющуюся четной функцией координат, поскольку лишь она дает вклад а амплитуду рассеяния, вычисленную в том же приближении.

следующему выражению для амплитуды рассеяния:

$$A(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = -k^2\frac{Q_\beta}{4\pi}V\left\{1-\frac{k^2}{10}\left[4Q_\beta M_{000}+\left\langle(\varkappa_x-\nu_x)^2a^2\right\rangle\right]-ik^3\frac{Q_\beta}{4\pi}V+\right.$$
$$+\frac{k^4}{70}\left[\frac{1}{4}\left\langle(\varkappa_x-\nu_x)^2a^2\right\rangle^2-4Q_\beta\left\langle\varkappa_x\nu_x a^4\,M_{100}\right\rangle+6Q_\beta\left\langle a^2\left(b^2+c^2\right)M_{100}\right\rangle+\right.$$
$$\left.+Q_\beta\left\langle\left(\varkappa_x^2+\nu_x^2-M_{100}\right)a^2\left(3M_{000}-a^2M_{100}\right)\right\rangle+14\,Q_\beta^2\,M_{000}^2\right]+$$
$$\left.+ik^5\frac{Q_\beta}{40\pi}V\left[\frac{2}{3}\left\langle a^2\right\rangle+\left\langle\left(\varkappa_x^2+\nu_x^2\right)a^2\right\rangle+8\,Q_\beta\,M_{000}\right]\right\}+O\left(k^8\right). \quad (80.2)$$

Учитывая, что $M_{000}=\left\langle a^2M_{100}\right\rangle$, отмечаем, что фактически (80.2) уже представлена в терминах факторов размагничивания.

Нетрудно показать, что амплитуде рассеяния (80.2) соответствует полное сечение рассеяния

$$\sigma = k^4\frac{Q_\beta^2}{4\pi}V^2\left\{1-\frac{k^2}{5}\left[4Q_\beta M_{000}+\left\langle\left(\varkappa_x^2+\frac{1}{3}\right)a^2\right\rangle\right]+\right.$$
$$+\frac{k^4}{5}\left[\frac{1}{35}\left(3\left\langle\varkappa_x^2a^2\right\rangle^2+6\left\langle\varkappa_x^2a^4\right\rangle+\frac{3}{5}\left\langle a^4\right\rangle+\frac{12}{5}\left\langle a^2b^2\right\rangle-2\left\langle\varkappa_x^2a^2b^2\right\rangle\right)+\right.$$
$$+\frac{Q_\beta}{7}\left(\left\langle a^4\,M_{100}\left(M_{100}-\varkappa_x^2\right)\right\rangle-3M_{000}^2+\frac{29}{5}M_{000}\left\langle\varkappa_x^2a^2\right\rangle+\frac{119}{15}M_{000}\left\langle a^2\right\rangle-\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{19}{3}\left\langle a^4\,M_{100}\right\rangle\right)-\frac{6}{5}Q_\beta^2\,M_{000}^2\right]\right\}+O(k^{10}). \quad (80.3)$$

Формулы (80.2) и (80.3) в случае шара согласуются с результатами, получающимися из точного решения. В заключение укажем, что данный параграф написан на основе работы [436].

Глава 14
Рассеяние акустически жестким эллипсоидом

§ 81. Квазистатическое рассеянное поле

Описанный в предыдущей главе метод решения задачи НЧ дифракции применим лишь к акустически прозрачным рассеивателям. Если, однако, поле, рассеянное проницаемым препятствием уже найдено в аналитическом виде для произвольных δ и η, то, устремив в полученных выражениях сначала отношение сжимаемостей $\eta = \widetilde{\beta}/\beta$ к нулю, а затем — отношение плотностей $\delta = \widetilde{\varrho}/\varrho$ к бесконечности, можно прийти к формулам для несжимаемого закрепленного (т. е. акустически жесткого) эллипсоида.[1] Эта процедура аналогична переходу от прозрачного для электромагнитного поля к идеально проводящему рассеивателю в электродинамике [342].

Таким образом в ближней зоне для поля, рассеянного несжимаемым закрепленным эллипсоидом, получаем [530]

$$P_{\mathrm{sc}}(\mathbf{r}) \approx \sum_{m=1}^{3} (ik)^m P_{sc}^{(m)}(\mathbf{r}), \tag{81.1}$$

$$P_{\mathrm{sc}}^{(1)} = \langle \gamma_x \mathscr{M}_{100} x \rangle , \tag{81.2}$$

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{sc}}^{(2)} = \frac{1}{2} I_{000} - \frac{1}{2} \Big\langle \gamma_{200}\, a^2 \mathscr{M}_{100} - \big(\gamma_{200}\, a^2 \mathscr{M}_{200} + \gamma_{020}\, b^2 \mathscr{M}_{110} + \\ + \gamma_{002}\, c^2 \mathscr{M}_{101}\big)\, x^2 - \gamma_{110} \left(a^2 + b^2\right) \mathscr{M}_{110}\, xy \Big\rangle , \end{aligned} \tag{81.3}$$

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{sc}}^{(3)} = \frac{abc}{3} + \frac{1}{2} \left\langle \gamma_x\, a^2 x I_{100} \right\rangle - \frac{1}{4} \left\langle \gamma_x\, x \left(I_{000} - a^2\, I_{100}\right) \right\rangle + \\ + \gamma_{111} \left\langle a^2 b^2 \right\rangle \mathscr{M}_{111} xyz + \frac{1}{2} \Big\langle x \big[\gamma_{120} \left(b^2 I_{120} - a^2 I_{100} + a^4 I_{200}\right) + \\ + \gamma_{102} \left(c^2 I_{102} - a^2 I_{100} + a^4 I_{200}\right) + 2\, \gamma_{100}\, \mathscr{M}_{100}\big] \Big\rangle , \end{aligned} \tag{81.4}$$

[1] Представляющий самостоятельный интерес метод прямого решения этой задачи, не связанный с указанным предельным переходом, дан в § 83.

где связь новых коэффициентов γ с введенными в § 77 коэффициентами α, имеющими такие же индексы, характеризуется общим правилом

$$\gamma = \lim_{\delta\to\infty} \left\{ \lim_{\eta\to 0} (\delta\alpha) \right\} , \tag{81.5}$$

так что[1]

$$\gamma_x = \varkappa_x \big/ (1 - M_{100}) ; \tag{81.6}$$

$$\gamma_{110} = \varkappa_x \varkappa_y \big/ \left[1 - \left(a^2 + b^2\right) M_{110} \right] ; \tag{81.7}$$

$$\begin{gathered} \gamma_{200} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(b^2 + c^2\right) M_{011} \nu_a - c^2 M_{101} \nu_b - b^2 M_{110} \nu_c \right] , \\ \nu_a = \varkappa_x^2 - M_{100}, \qquad \Delta = \left\langle a^2 b^2 \right\rangle \langle M_{101} M_{110} \rangle ; \end{gathered} \tag{81.8}$$

$$\gamma_{111} = \varkappa_x \varkappa_y \varkappa_z \big/ \left(1 - \left\langle a^2 b^2 \right\rangle M_{111} \right) ; \tag{81.9}$$

$$\begin{gathered} \gamma_{120} = \frac{1}{\Delta_a} \gamma_x \left(2\Gamma_{201} - \Gamma_{201} l_{102} + \Gamma_{210} m_{102} \right) , \\ \Gamma_{201} = \varkappa_y^2 (1 - M_{100}) + \frac{1}{2} \left(M_{010} - 3a^2 M_{110} \right) , \\ \Delta_a = 4 - 2 (l_{102} + l_{120}) + l_{120} l_{102} - m_{120} m_{102} ; \end{gathered} \tag{81.10}$$

$$2 (1 - M_{100}) \gamma_{100} = \frac{\gamma_x}{2} \left(3a^2 M_{100} - M_{000} \right) + n_{120} \gamma_{120} + n_{102} \gamma_{102} . \tag{81.11}$$

Кроме того, в (81.3), (81.4) используются величины I_{lmn}, определенные формулами (78.4)–(78.7), а в (81.10) и (81.11) содержатся величины l_{120}, m_{120}, n_{120}, даваемые формулами (64.36).

§ 82. Амплитуда и сечение рассеяния

В случае акустически жесткого эллипсоида величины $A_m(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$, входящие в НЧ разложение амплитуды рассеяния

$$A(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{m=2}^{\infty} (ik)^m A_m(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}), , \tag{82.1}$$

по-прежнему даются выражениями (79.7), (79.8), (79.16) и (79.17), однако, заключенные в них коэффициенты в результате предельного перехода $\eta \to 0$, $\delta \to \infty$ приобретают вид

$$B = \frac{abc}{3} , \tag{82.2}$$

$$B_{100} = -\frac{abc}{3(1 - M_{100})} , \tag{82.3}$$

$$B_{110} = \frac{abc \left(a^2 + b^2\right)}{15 \left[1 - (a^2 + b^2) M_{110}\right]} , \tag{82.4}$$

[1] Сравнение с формулами § 64 дает $\Delta = \Delta(\nu)\big|_{\nu=-1}$, $\Delta_a = \Delta_{100}(\nu)\big|_{\nu=-1}$.

$$D = \frac{abc}{135}\left(15M_{000} - \left\langle a^2\right\rangle + \left\langle M_{110}\right\rangle/\left\langle M_{110}M_{101}\right\rangle\right), \tag{82.5}$$

$$D_{100} = \frac{abc\,M_{011}}{15\left\langle M_{110}M_{101}\right\rangle}, \tag{82.6}$$

$$D_{200} = \frac{abc}{45}\left(\frac{5}{2}a^2 - M_{110}/\left\langle M_{110}M_{101}\right\rangle\right), \tag{82.7}$$

$$F_{100} = \frac{B_{100}B_{200}}{10}, \qquad B_{200} = a^2 + \frac{a^2 + 3a^2M_{100} - 2M_{000}}{1 - M_{100}}, \tag{82.8}$$

Подстановка этих формул во второе из выражений (79.23) дает полное эффективное сечение рассеяния плоской волны на акустически жестком эллипсоиде.

§ 83. Метод прямого решения задачи рассеяния

Здесь мы покажем, как результаты §§ 81, 82 получить непосредственно из решения уравнения цепочки (75.26) с использованием интегральных соотношений (75.27) и (75.29). При этом рассмотрение ограничено лишь достаточным для иллюстрации метода числом приближений.

Так как единичный вектор нормали к границе эллипсоида равен

$$\mathbf{n} = \left\{\frac{x}{a^2}p, \frac{y}{b^2}p, \frac{z}{c^2}p\right\},$$

где $p = \left\langle x^2/a^4\right\rangle^{-1/2}$, то для волны (75.11) уравнения (75.26), позволяющие найти $P^{(1)}(\mathbf{r})$ и $P^{(2)}(\mathbf{r})$, принимают вид

$$-4\pi\left\langle\frac{x}{a^2}\,\varkappa_x\right\rangle = \left\langle\frac{x}{a^2}\,\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle\oint\limits_S P^{(1)}(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)dS' \qquad (\mathbf{r}\in S), \tag{83.1}$$

$$\begin{aligned} -4\pi\left\langle\frac{x}{a^2}\,\varkappa_x\right\rangle\left\langle x\varkappa_x\right\rangle = \left\langle\frac{x}{a^2}\,\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle\oint\limits_S P^{(2)}(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)dS' + \\ + \frac{1}{2}\left\langle\frac{x}{a^2}\,\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle\oint\limits_S \frac{\partial R}{\partial n'}\,dS' \qquad (\mathbf{r}\in S). \end{aligned} \tag{83.2}$$

Здесь учтено, что (см. § 75) $P^{(0)}(\mathbf{r})=1$. Будем искать неизвестные функции в виде полиномов

$$P^{(1)}(\mathbf{r}) = \left\langle\beta_{100}x\right\rangle, \tag{83.3}$$

$$P^{(2)}(\mathbf{r}) = \left\langle\beta_{200}\frac{x^2}{a^2} + \beta_{110}xy\right\rangle + \beta_{000}, \tag{83.4}$$

где β_{lmn} — подлежащие определению константы.

Четные степени координат в (83.4) связаны соотношением $\left\langle x^2/a^2\right\rangle = 1$. Это означает, что в угоду симметрии в (83.4) введен дополнительный коэффициент. Найдем дополнительное уравнение для его нахождения. Исключение z^2 в (36.4) с помощью уравнения поверхности эллипсоида приводит к несимметричной записи

$$ {}_zP^{(2)}(\mathbf{r}) = (\beta_{200} - \beta_{002})\frac{x^2}{a^2} + (\beta_{020} - \beta_{002})\frac{y^2}{b^2} + \langle \beta_{110}xy\rangle + \beta_{002} + \beta_{000}\,. $$

Очевидно, что $\left\langle {}_zP^{(2)}(\mathbf{r})\right\rangle = 3P^{(2)}(\mathbf{r})$. В частности, $\langle \beta_{002} + \beta_{000}\rangle = 3\beta_{000}$, т. е.

$$ \langle \beta_{200}\rangle = 0\,. \tag{83.5} $$

Это и есть дополнительное уравнение.

Подставляя многочлены (83.3), (83.4) в уравнения (83.1), (83.2), используем полиномиальные представления поверхностных интегралов вида

$$ \oint x'^{\alpha}\, y'^{\beta}\, z'^{\gamma}\, \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) dS', $$

рассмотренные в § 27. Затем (после выполнения дифференцирования) исключим в (83.2) с помощью уравнения $\left\langle x^2\,/a^2\right\rangle = 1$ квадрат одной из координат. Приравнивая далее коэффициенты при одинаковых степенях координат, приходим с учетом (83.5) к замкнутой системе линейных алгебраических уравнений для β_{lmn}, в которой не представлен лишь коэффициент β_{000}. Окончательное решение этой системы приводит для коэффициентов β_{100} и β_{110} к выражениям (81.6) и (81.7) соответственно, а для β_{200} дает

$$ \beta_{200} = \frac{(M_{101}+2M_{011})(M_{010} - \varkappa_y^2)+(M_{110}+2M_{011})(M_{001}-\varkappa_z^2)}{6\,\langle M_{011}M_{101}\rangle}. \tag{83.6} $$

Подставляя в (75.27) для $m=1$ и $m=2$ выражения (83.3) и (83.4) и используя формулы § 27 для внешних потенциалов двойного эллипсоидального слоя, получаем для рассеянного поля (75.10) ближней зоны в случае $P_{\rm sc}^{(1)}(\mathbf{r})$ выражение (81.2), а в случае $P_{\rm sc}^{(2)}(\mathbf{r})$ выражение

$$ \begin{gathered} P_{\rm sc}^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\left(\mathscr{M}_{000} - \left\langle \mathscr{M}_{100}\, x^2\right\rangle\right) + \left\langle \beta_{200}\left(\mathscr{M}_{200}\, x^2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \mathscr{M}_{110}\, y^2 + \mathscr{M}_{101}\, z^2 - \mathscr{M}_{100}\right) + \beta_{110}\left(a^2+b^2\right)\mathscr{M}_{110}\, xy\right\rangle\,, \end{gathered} \tag{83.7} $$

эквивалентное более сложному выражению (81.3), хотя доказательство эквивалентности и непросто. Коэффициент β_{000} можно найти, если приравнять (на поверхности эллипсоида) выражение (83.4) сумме $\frac{1}{2}\left\langle \varkappa_x x\right\rangle^2 + P_{\rm sc}^{(2)}(\mathbf{r})$, где $P_{\rm sc}^{(2)}(\mathbf{r})$ дается формулой (83.7), в которой внешние факторы $\mathscr{M}_{lmn}$ заменены внутренними потенциальными факторами M_{lmn} эллипсоида.

Наконец, расчет величин $A_m(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$ по формулам (75.29) с помощью (В.15) приводит для A_2 и A_3 к выражениям, совпадающим с найденными в § 82.

§ 84. Рассеяние на эллиптическом диске

Решение задачи рассеяния на абсолютно жестком диске, лежащем в плоскости $z = 0$ и ограниченном эллипсом $x^2/a^2 + y^2/\,b^2 = 1$, можно получить из результатов §§ 81, 82 переходом к пределу при $c \to 0$. При этом решение, соответствующее случаю произвольного направления вектора $\boldsymbol{\varkappa}$, должно, очевидно, обладать симметрией при взаимной замене $x \leftrightarrow y$ $(a \leftrightarrow b)$.

Мы ограничимся здесь вычислением амплитуды и сечения рассеяния. Указанный предельный переход осуществляется без труда с помощью формул (3.17)–(3.19) и последующего использования рекуррентных соотношений (5.7), (5.8) для внутренних потенциальных факторов N_{lm} эллиптического диска. В результате из коэффициентов (82.2)–(82.8) для эллиптического диска не равными нулю оказываются лишь B_{001}, B_{011}, B_{101} и F_{001}, а окончательные выражения для НЧ разложений (79.18) действительной и мнимой частей амплитуды рассеяния получаются при подстановке в (79.18) равенств

$$A_2(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = -\frac{ab\,\varkappa_z \nu_z}{3N_E}\,, \tag{84.1}$$

$$A_4(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{ab\,\varkappa_z \nu_z}{15N_E}\left[\frac{N_{00}}{N_E} - \frac{a^2}{2}\left(\varkappa_x^2 + \nu_x^2\right) - \frac{b^2}{2}\left(\varkappa_y^2 + \nu_y^2\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{a^2\varkappa_x\nu_x}{1 + N_{10}/N_E} + \frac{b^2\varkappa_y\nu_y}{1 + N_{01}/N_E}\right], \tag{84.2}$$

$$A_5(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{a^2 b^2\,\varkappa_z \nu_z}{27N_E^2}\,, \tag{84.3}$$

$$A_7(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{a^2 b^2\,\varkappa_z \nu_z}{135\,N_E^2}\left[\frac{a^2+b^2}{5} - \frac{2N_{00}}{N_E} + \frac{a^2}{2}\left(\varkappa_x^2+\nu_x^2\right) + \frac{b^2}{2}\left(\varkappa_y^2+\nu_y^2\right)\right]. \tag{84.4}$$

Для полного эффективного сечения рассеяния вычисление (например, по второму из выражений (79.23)) дает [530]

$$\sigma = \frac{4\pi a^2 b^2\,\varkappa_z^2}{27N_E^2}k^4\left[1 - \frac{k^2}{5}\left(\frac{a^2+b^2}{5} - \frac{2N_{00}}{N_E} + a^2\varkappa_x^2 + b^2\varkappa_y^2\right)\right] + O(k^8)\,. \tag{84.5}$$

В формулах (84.1)–(84.5) для сокращения записи использовано обозначение

$$N_E \equiv N_{10} + N_{01}\,. \tag{84.6}$$

Отметим также, что в соответствии с (5.14) связь N_{00} и N_E с полными эллиптическими интегралами $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{E}$ модуля

$$e = \sqrt{1 - \frac{\min\{a^2, b^2\}}{\max\{a^2, b^2\}}} \tag{84.7}$$

определяется формулами

$$N_{00} = \min\{a, b\}\,\boldsymbol{K}, \qquad N_E = \frac{\boldsymbol{E}}{\min\{a, b\}}\,. \tag{84.8}$$

Рассмотрим теперь, как решается задача НЧ рассеяния на акустически жестком эллиптическом диске на основе цепочки уравнений (75.44). Мы ограничимся при этом решением задачи в первом приближении. Первое из уравнений (75.44) в нашем случае принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\int\limits_S \frac{\varphi^{(1)}(x',y')}{R}\,dS' = -4\pi\varkappa_z\,. \tag{84.9}$$

Решения надо искать в виде[1] $\varphi^{(m)}(x,y)=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}\;\chi^{(m-1)}(x,y)$, где $\chi^{(m)}(x,y)$ — многочлен степени m. В частности,

$$\varphi^{(1)}(x,y)=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\;\alpha_{00}\,. \tag{84.10}$$

Интегралы типа

$$\int\limits_S \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\;\frac{x'^{\alpha}y'^{\beta}}{R}\,dS' \tag{84.11}$$

для точек $\mathbf{r}$, лежащих на поверхности S диска, как показано в § 24, выражаются через внутренние потенциальные факторы N_{lm} эллиптического диска. В частности, из (84.9), (84.10) получаем

$$\alpha_{00}=\frac{2\varkappa_z}{N_E}\,. \tag{84.12}$$

Далее, используя выражения для потенциалов двойного слоя, создаваемого источниками на поверхности эллиптического диска (см. § 28), из (75.45), (75.46) и (84.10) получаем для ближней зоны

$$P_{\mathrm{sc}}=ik\,\frac{\varkappa_z}{N_E}\,\mathscr{N}_{001}(\xi)z+O(k^2)\,. \tag{84.13}$$

Наконец, первый член НЧ ряда (75.20) для амплитуды рассеяния, как показывает вычисление $A_2(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})$ по формуле (75.48), равен

$$A(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})=\frac{1}{3}\,k^2ab\,\frac{\varkappa_z\nu_z}{N_E}\,. \tag{84.14}$$

Это совпадает с формулой (84.1), полученной путем предельного перехода.

Завершая главу, заметим следующее. Как известно, существует строгое количественное соответствие (теорема Бабине) между решением задачи рассеяния на диске и решением дополнительной задачи дифракции на отверстии в экране. В частности, если на акустически мягкий экран (нулевой толщины) с эллиптическим отверстием $(x^2/a^2+y^2/b^2=1)$ падает плоская волна $P_0=\exp\{ik\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}\}$, где $\varkappa_z>0$, то, согласно теореме Бабине (см., например, [148]), поле дифрагированной волны P_{dif} для $z>0$ связано с решением P_{sc} рассмотренной здесь задачи о жестком диске простым соотношением

$$P_{\mathrm{dif}}=-P_{\mathrm{sc}}\qquad (z>0)\,, \tag{84.15}$$

а поперечное сечение прохождения τ, очевидно, равно

$$\tau=\frac{1}{2}\,\sigma\,, \tag{84.16}$$

[1] При этом удовлетворяется условие на ребре.

где σ дается формулой (84.5).

В частных случаях низкочастотной дифракции на сфероиде или на круглом отверстии в экране результаты данной главы переходят в известные (см. [26, 315]).

Глава 15
Рассеяние акустически мягким эллипсоидом

§ 85. Решение интегральных уравнений НЧ цепочки

Задача НЧ рассеяния плоской волны на акустически мягком рассеивателе, как показано в § 75, сводится к решению интегральных уравнений цепочки (75.32)

$$\oint\limits_S \frac{\psi^{(m)}(\mathbf{r}')}{R}\,dS' = \frac{4\pi}{m!}\,(\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r})^m - \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l!}\oint\limits_S \psi^{(m-l)}(\mathbf{r}')R^{l-1}\,dS'\,, \tag{85.1}$$

где $m = 0, 1, \ldots$; $\mathbf{r} \in S$; а $\psi(\mathbf{r}) = \dfrac{\partial P^{(e)}(\mathbf{r})}{\partial n}$. Входящие в (85.1) поверхностные интегралы относятся к уже встречавшемуся нам (см. (64.8)) типу. Это подсказывает, что в случае эллипсоидального $\left(\left\langle x^2/a^2\right\rangle = 1\right)$ рассеивателя решение уравнений (85.1) следует искать в виде

$$\psi^{(l)}(\mathbf{r}) = f^{(l)}(\mathbf{r})\,p\,, \tag{85.2}$$

где $f^{(l)}(\mathbf{r})$ — многочлен степени l, а $p = \left\langle x^2/a^4\right\rangle^{-1/2}$.

Учитывая симметрию задачи, представим многочлены $f^{(l)}(\mathbf{r})$ в виде[1]

$$f^{(0)}(\mathbf{r}) = \alpha_{000}, \tag{85.3}$$

$$f^{(1)}(\mathbf{r}) = \langle\beta_{100}\,x\rangle + \beta_{000}, \tag{85.4}$$

$$f^{(2)}(\mathbf{r}) = \left\langle\gamma_{200}\,x^2/a^2\right\rangle + \langle\gamma_{110}\,xy\rangle + \gamma_{000}. \tag{85.5}$$

Для дальнейшего нам понадобится также часть многочлена $f^{(3)}(\mathbf{r})$, являющаяся четной функцией координат. Обозначив ее $\widetilde{f^{(3)}}(\mathbf{r})$, положим

$$\widetilde{f^{(3)}}(\mathbf{r}) = \left\langle\delta_{200}\,x^2/a^2\right\rangle + \delta_{000}. \tag{85.6}$$

[1] В (85.5) опущены слагаемые $\langle\gamma_{100}\,x\rangle$, так как в результате решения обнаруживается, что $\gamma_{100} = 0$.

Коэффициенты α_{000}, β_{lmn}, γ_{lmn}, δ_{lmn} подлежат определению.

Поскольку областью определения многочленов $f^{(l)}(\mathbf{r})$ является поверхность эллипсоида, между четными степенями координат в (85.5) и (85.6) существует связь $\left\langle x^2/a^2\right\rangle = 1$. Это означает, что в угоду симметрии в (85.5) и (85.6) введены дополнительные коэффициенты. Нетрудно найти соотношения, которым они удовлетворяют. Например, исключение z^2 в (85.5) приводит к несимметричной записи

$$ {}_zf^{(2)}(\mathbf{r}) = A^{(z)}_{200}\, x^2/a^2 + A^{(z)}_{020}\, y^2/b^2 + \langle \gamma_{110}\, xy\rangle + A^{(z)}\,, $$

где

$$ A^{(z)} = \gamma_{000} + \gamma_{002}\,. \tag{85.7} $$

Очевидно, что $\left\langle {}_zf^{(2)}(\mathbf{r})\right\rangle = 3f^{(2)}(\mathbf{r})$. В частности, $\left\langle A^{(z)}\right\rangle = 3\gamma_{000}$. Отсюда, учитывая (85.7), получаем

$$ \langle \gamma_{200}\rangle = 0\,. \tag{85.8} $$

Аналогично доказывается, что

$$ \langle \delta_{200}\rangle = 0\,. \tag{85.9} $$

Подставляя многочлены (85.3)–(85.6) в первые четыре уравнения цепочки (85.1), используем полиномиальные представления интегралов вида $\oint x'^l y'^m z'^n R^{-1} p'\, dS'$, найденные в разделе 21.2. Затем, исключая с помощью уравнения границы эллипсоида четные степени одной из координат, получаем (с учетом (85.8) и (85.9)) замкнутую систему линейных алгебраических уравнений для искомых коэффициентов. Ее решение имеет вид

$$ \alpha_{000} = C\big/(abc)\,; \tag{85.10} $$

$$ \beta_{000} = -\frac{C^2}{abc}\,, \qquad \beta_{100} = \frac{\varkappa_x}{a^2 M_{100}}\,; \tag{85.11} $$

$$ \gamma_{000} = \frac{C}{abc}\left(C^2 + \frac{C}{3abc}\left\langle a^4 M_{100}\right\rangle - \frac{1}{3}\left\langle a^2\right\rangle + \frac{1}{6}\left\langle \varkappa_x^2 a^2\right\rangle\right)\,, \tag{85.12} $$

$$ \gamma_{110} = \frac{\varkappa_x \varkappa_y}{a^2 b^2 M_{110}}\,, \tag{85.13} $$

$$ \begin{gathered} \gamma_{200} = \frac{1}{F}\left[\left(l_{110} - \frac{2}{3}\left\langle a^2 b^2 M_{110}\right\rangle\right)(m_{010} - m_{100}) + \right. \\ \left. + \left(l_{101} - \frac{2}{3}\left\langle a^2 b^2 M_{110}\right\rangle\right)(m_{001} - m_{100})\right]\,, \\ F = 3\left\langle l_{110} l_{101}\right\rangle - 4M_{000}\left\langle a^2 b^2 M_{110}\right\rangle\,; \end{gathered} \tag{85.14} $$

$$ \delta_{000} = -\frac{C^2}{abc}\left(C^2 + \frac{2}{3}\,\frac{C}{abc}\left\langle a^4 M_{100}\right\rangle - \frac{5}{9}\left\langle a^2\right\rangle + \frac{1}{6}\left\langle \varkappa_x^2 a^2\right\rangle\right)\,. \tag{85.15} $$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$ C = abc\big/\left\langle a^2 M_{100}\right\rangle \tag{85.16} $$

(согласно (8.12) это электрическая емкость эллипсоида в гауссовых единицах),

$$l_{110} = c^2 M_{001} + a^2 b^2 M_{110}, \qquad m_{100} = a^2 \left(\varkappa_x^2 - \frac{1}{2} + \frac{a^2 M_{100}}{2M_{000}} \right). \tag{85.17}$$

К остальным коэффициентам, как обычно, приводит циклическая перестановка координат.

Таким образом, многочлены $f^{(l)}(\mathbf{r})$ выражаются через внутренние потенциальные факторы M_{ijk} эллипсоида.

§ 86. Поле рассеяния в ближней зоне

Используя результаты предыдущего параграфа, можно вычислить первые три члена НЧ ряда (75.10) для поля рассеяния в ближней зоне. Входящие в этот ряд величины $P_{\text{sc}}^{(m)}(\mathbf{r})$ даются интегралами (75.33), которые в случае эллипсоида, когда имеет место равенство (85.2), сводятся к потенциалам снаружи гомеоида, рассмотренным в § 21. Вычисления приводят к следующим окончательным формулам:

$$P_{\text{sc}}^{(0)} = -\mathscr{M}_{000}/M_{000}\,, \tag{86.1}$$

$$P_{\text{sc}}^{(1)} = -C + \frac{C^2}{abc}\mathscr{M}_{000} - \left\langle \frac{\varkappa_x x \mathscr{M}_{100}}{M_{100}} \right\rangle, \tag{86.2}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{sc}}^{(2)} = C^2 - \gamma_{000}\mathscr{M}_{000} - \left\langle \frac{\varkappa_x \varkappa_y x y \mathscr{M}_{110}}{M_{110}} \right\rangle - \\ - \frac{C}{4abc}\left[\left(\left\langle x^2 + a^2 \right\rangle + \xi \right) \mathscr{M}_{000} - \left\langle \left(x^2 + a^2 + \xi \right) a^2 \mathscr{M}_{100} \right\rangle \right] + \\ + \frac{1}{2}\left\langle \gamma_{200} a^2 \left(\mathscr{M}_{100} - \mathscr{M}_{200} x^2 - \mathscr{M}_{110} y^2 - \mathscr{M}_{101} z^2 \right) \right\rangle. \end{aligned} \tag{86.3}$$

Таким образом, в ближней зоне рассеянное поле описывается в терминах внешних потенциальных факторов эллипсоида $\mathscr{M}_{lmn}$.

В заключение отметим, что последующие результаты данной главы, относящиеся к амплитуде и сечению рассеяния, с содержанием данного параграфа не связаны.

§ 87. Амплитуда и сечение рассеяния

Последовательные члены НЧ разложения амплитуды рассеяния (75.35) вычисляются без труда по известным $\psi^{(l)}(\mathbf{r})$ с помощью формул (75.36) и (B.15). В частности, для первых четырех значений $A_m(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$ с учетом (85.2)–(85.6) при использовании явных выражений (85.10), (85.11) получаем

$$A_0(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = -C, \tag{87.1}$$

$$A_1(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = C^2, \tag{87.2}$$

$$A_2(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = -\frac{abc}{3}\left(3\,\gamma_{000} + \langle \gamma_{200} \rangle + \frac{C}{2abc}\left\langle a^2 \nu_x^2 \right\rangle - \left\langle \frac{\varkappa_x \nu_x}{M_{100}} \right\rangle \right),$$

$$A_3(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{6}\,C^2\left\langle a^2\nu_x^2\right\rangle - abc\left(\delta_{000} + \frac{1}{3}\left\langle\delta_{200}\right\rangle\right).$$

Соотношения (85.8), (85.9) позволяют найти $A_2(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})$ и $A_3(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})$, не используя явных выражений для γ_{200} и δ_{200}. Таким образом, окончательно

$$A_2(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = -\frac{C}{3}\left[3C^2 + \frac{C}{abc}\left\langle a^4 M_{100}\right\rangle - \left\langle a^2\right\rangle + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left\langle a^2\left(\varkappa_x^2 + \nu_x^2\right)\right\rangle - \frac{abc}{C}\left\langle\frac{\varkappa_x\nu_x}{M_{100}}\right\rangle\right], \quad (87.3)$$

$$A_3(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu}) = C^2\left[C^2 + \frac{2C}{3abc}\left\langle a^4 M_{100}\right\rangle - \frac{5}{9}\left\langle a^2\right\rangle + \frac{1}{6}\left\langle a^2\left(\varkappa_x^2 + \nu_x^2\right)\right\rangle\right], \quad (87.4)$$

где учтены (85.12) и (85.15). Полученные здесь значения для $A_m(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})$ — результат непосредственного решения интегральных уравнений (85.1) и расчета по формуле (75.36) применительно к эллипсоидальному рассеивателю — находятся в согласии с общими результатами (76.13), (76.14) и (76.9).

Имея в виду, что электрическая емкость проводящего эллипсоида дается формулой (85.16), заключаем, что в дальней зоне рассеянное поле до членов порядка k^3 включительно выражается непосредственно через размагничивающие факторы эллипсоида.

НЧ разложение эффективного сечения рассеяния на акустически мягком рассеивателе (76.8)

$$\sigma = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\,k^{2l}\,A_{2l+1}(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa}), \quad (87.5)$$

полученное с помощью оптической теоремы, указывает, что в случае эллипсоида первые два члена ряда (87.5) фактически определены, ибо, согласно (87.2) и (87.4),

$$A_1(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa}) = C^2, \quad (87.6)$$

$$A_3(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa}) = \frac{C^2}{3}\left(3C^2 + \frac{2C}{abc}\left\langle a^4 M_{100}\right\rangle - \frac{5}{3}\left\langle a^2\right\rangle + \left\langle a^2\varkappa_x^2\right\rangle\right). \quad (87.7)$$

Эквивалентный результат был получен в работе [404] с помощью полиномов Ламэ и эллиптических функций.

Выведенная в § 76 на основе процедуры Уильямса для произвольного акустически мягкого рассеивателя формула (76.29) позволяет вычислить $A_5(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa})$ применительно к эллипсоиду, используя результаты § 85. Опуская промежуточные (довольно громоздкие) выкладки, связанные с вычислением интегралов в (76.29), приведем окончательную формулу:

$$A_5(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa}) = \frac{C^2}{3}\left[3C^4 + \frac{4C^3}{abc}\left\langle a^4 M_{100}\right\rangle + \frac{C^2}{a^2b^2c^2}\left\langle a^4 M_{100}\right\rangle^2 - 3C^2\left\langle a^2\right\rangle + \right.$$
$$+ \frac{76}{45}\,Cabc - \frac{14C}{9abc}\left\langle a^6 M_{100}\right\rangle - \frac{11}{75}\left\langle a^2\right\rangle^2 + \frac{164}{225}\left\langle a^4\right\rangle +$$
$$+ \left(C^2 + \frac{2C}{3abc}\left\langle a^4 M_{100}\right\rangle - \frac{26}{45}\left\langle a^2\right\rangle\right)\left\langle a^2\varkappa_x^2\right\rangle +$$
$$\left. + \frac{2}{15}\left\langle a^2\varkappa_x^2\right\rangle^2 + \frac{1}{15}\left\langle a^4\varkappa_x^2\right\rangle + \frac{a^2b^2c^2}{9C^2}\left\langle\frac{\varkappa_x^2}{M_{100}^2}\right\rangle\right]. \quad (87.8)$$

Существенно, что $A_5(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\varkappa})$ также выражается непосредственно через размагничивающие факторы эллипсоида.

§ 88. Рассеяние на эллиптическом диске

Решение задачи рассеяния на акустически мягком диске, лежащем в плоскости $z = 0$ и ограниченном эллипсом $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, можно получить из результатов §§ 86, 87 путем перехода к пределу при $c \to 0$. В общем случае произвольного направления вектора $\boldsymbol{\varkappa}$ в задаче обеспечивается равноправие направлений декартовых осей x и y, а ее решение инвариантно при взаимной замене $x \leftrightarrow y \quad (a \leftrightarrow b)$.

Предельный переход легко выполняется с помощью соотношений[1]

$$M_{100} \approx cN_{10}, \quad M_{010} \approx cN_{01}, \quad M_{001} \approx 1 - cN_E\,, \tag{88.1}$$

являющихся частными случаями (3.17) и (3.18), приводя к следующим формулам для амплитуды и сечения рассеяния на эллиптическом диске:

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = -C + ikC^2 + \frac{k^2 C}{3}\Bigg[3C^2 - abCN_E + \frac{a^2}{2}\left(\varkappa_x^2 + \nu_x^2\right) + \\ + \frac{b^2}{2}\left(\varkappa_y^2 + \nu_y^2\right) - \frac{ab}{C}\left(\frac{\varkappa_x \nu_x}{N_{10}} + \frac{\varkappa_y \nu_y}{N_{01}}\right)\Bigg] - ik^3 C^2\Bigg[C^2 - \frac{2}{3}\,ab\,CN_E + \\ + \frac{1}{9}(a^2+b^2) + \frac{a^2}{6}\left(\varkappa_x^2 + \nu_x^2\right) + \frac{b^2}{6}\left(\varkappa_y^2 + \nu_y^2\right)\Bigg] + O(k^4)\,, \end{aligned} \tag{88.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{4\pi C^2} = 1 - \frac{k^2}{3}\left(3C^2 - 2abCN_E + \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} + a^2\varkappa_x^2 + b^2\varkappa_y^2\right) + \\ + \frac{k^4}{3}\Bigg\{3C^4 - 4\,ab\,C^3 N_E + a^2b^2\,C^2 N_E^2 + C^2(a^2+b^2) - \frac{4}{9}\,ab(a^2+b^2)CN_E + \\ + \frac{2}{75}\,(a^2+b^2)^2 + \frac{22}{225}\,a^2b^2 + \left[C^2 - \frac{2}{3}\,ab\,CN_E + \frac{4}{45}(a^2+b^2)\right]\left(a^2\varkappa_x^2 + b^2\varkappa_y^2\right) + \\ + \frac{2}{15}\left(a^2\varkappa_x^2 + b^2\varkappa_y^2\right)^2 + \frac{1}{15}\left(a^4\varkappa_x^2 + b^4\varkappa_y^2\right) + \frac{a^2b^2}{9\,C^2}\left(\frac{\varkappa_x^2}{N_{10}^2} + \frac{\varkappa_y^2}{N_{01}^2}\right)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{88.3}$$

где $C = ab/N_{00}$ — электрическая емкость эллиптического диска. Первые два члена НЧ разложения (88.3) найдены Уильямсом [404]. Отметим также, что результаты по НЧ рассеянию на мягком эллипсоиде и эллиптическом диске, приведенные в §§ 85–88, получены в работе автора и С.П. Ефимова [531].

Покажем теперь, как задача НЧ рассеяния на мягком эллиптическом диске решается непосредственно на основе уравнений (75.37)–(75.39). Ограничимся нахождением только первого приближения. Для него (75.37) принимает вид

$$\int\limits_S \frac{\psi^{(0)}(\mathbf{r}')}{R}\,dS' = 4\pi \qquad (\mathbf{r} \in S)\,. \tag{88.4}$$

[1] N_E дается формулой (84.6).

Полагая

$$\psi^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha_{00}}{\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}}\,, \tag{88.5}$$

где α_{00} — подлежащая определению константа, и используя полиномиальные представления интегралов вида

$$\int\limits_S \frac{x'^{\alpha} y'^{\beta}}{\sqrt{1-(x'/a)^2-(y'/b)^2}}\,\frac{dS'}{R}\,,$$

найденные в § 24, получаем

$$\alpha_{00} = 2/N_{00}. \tag{88.6}$$

При вычислении следующих приближений следует $\psi^{(m)}(\mathbf{r})$ искать в виде $\psi^{(m)}(\mathbf{r}) = \chi^{(m)}(x,y)\big/\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}$, где $\chi^{(m)}(x,y)$ — многочлен степени m, коэффициенты которого подлежат определению.

Найдя $\psi^{(m)}(\mathbf{r})$ и используя формулы для внешних потенциалов эллиптического диска (см. § 24), а также значения интегралов (B.18), нетрудно в соответствии с (75.38) рассчитать рассеянное поле в ближней зоне. В частности, для первого приближения получаем

$$P_{\text{sc}}^{(0)} = -\mathscr{N}_{000}\big/N_{000}\,. \tag{88.7}$$

Столь же просто на основе (75.39) при использовании (B.18) вычисляется амплитуда рассеяния, для которой в первом приближении получается выражение (76.13) с электрической емкостью эллиптического диска, равной (24.14).

Результаты данного параграфа благодаря теореме Бабине распространяются и на решение задачи дифракции на эллиптическом отверстии в акустически жестком плоском экране нулевой толщины. В частности, если на такой экран падает плоская волна $P_0 = \exp\{ik\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}\}$, где $\varkappa_z > 0$, то поле дифрагированной волны P_{dif} $(z>0)$ и поперечное сечение прохождения τ связаны с полем рассеяния P_{dif} и полным сечением рассеяния σ рассмотренной здесь задачи о мягком диске соотношениями (84.15), (84.16).

В заключение отметим, что результаты данной главы при переходе к частным случаям сфероида, шара и круглого диска подтверждаются известными формулами работ [40, 315] (подробнее см. [531]).

Глава 16
Пульсации газового эллипсоида в жидкости

§ 89. Матрица присоединенных масс

В данной главе рассматриваются свободные колебания эллипсоидального объема газа, находящегося в окружающей его жидкой среде. Речь идет не о перемещениях эллипсоида как целого, а о его пульсациях, или монопольных колебаниях, при которых изменения размеров осей эллипсоида сопровождаются и изменением его объема.

В электродинамике среди собственных мультипольных колебаний эллипсоида, рассмотренных, например, в последней главе данной монографии в рамках модели плазменного сгустка, отсутствуют именно монопольные, что объясняет дополнительный интерес к ним с точки зрения теории низкочастотной дифракции.

Газовый пузырь в жидкости имеет несферическую форму, если для поверхностного натяжения нарушены условия однородности. Это может иметь место как а неоднородной (в области пузырька) жидкости, так и в однородной жидкости: например, при всплытии пузырька, который в силу закона Бернулли принимает форму сплюснутого сфероида. Наконец, эллипсоидальная форма газового пузыря может обеспечиваться специальной оболочкой (ср. рыбьи пузыри). Для нас существенно при этом, чтобы упругость оболочки была мала и ее вклад в энергетический механизм колебаний не учитывался.

Задача о движении несжимаемой идеальной жидкости, вызванном пульсациями трехосного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{89.1}$$

была решена еще Бьеркнесом [30], построившим общую схему нахождения потенциала скорости жидкости снаружи эллипсоида (89.1) при заданном законе изменения его полуосей $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$. Имея в виду различные гидрофизические приложения этой задачи, найдем сначала, опираясь на результаты Бьеркнеса, матрицу присоединенных масс, связывающую кинетическую энергию жидкости со скоростями $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$.

При изменении полуосей эллипсоида нормальная составляющая скорости точки на его границе равна

$$v_n^{\Gamma} = \left(\frac{x^2}{a^2}\,\frac{\dot a}{a} + \frac{y^2}{b^2}\,\frac{\dot b}{b} + \frac{z^2}{c^2}\,\frac{\dot c}{c} \right) p \equiv \left\langle \frac{x^2}{a^2}\,\frac{\dot a}{a} \right\rangle p, \tag{89.2}$$

где $p = \left\langle x^2 / a^4 \right\rangle^{-1/2}$, а угловые скобки, как обычно, обозначают сумму трех членов циклической перестановки. Поэтому для потенциала скорости $(\mathbf{v} = \nabla\Phi)$ жидкости снаружи пульсирующего эллипсоида будем иметь внешнюю краевую задачу Неймана

$$\Delta\Phi = 0, \qquad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_{\Gamma} = \left\langle \frac{\dot a}{a}\,\frac{x^2}{a^2} \right\rangle p, \tag{89.3}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль, направленная в жидкость, не имеющую иных границ, кроме поверхности эллипсоида (89.1).

Решение этой краевой задачи естественно искать в виде потенциала простого слоя

$$\Phi = \oint \frac{\sigma}{R}\,dS, \qquad \sigma = -\frac{1}{4\pi}\left\langle \nu_a\,\frac{x^2}{a^2} \right\rangle p,$$

где структура поверхностной плотности σ на границе эллипсоида выбрана в соответствии с условием (89.3), а $\nu_a,\ \nu_b,\ \nu_c$ — подлежащие нахождению величины.

Так как (см. § 21) поверхностная плотность $\sigma_a = \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{x^2}{a^2}\,p$ порождает снаружи эллипсоида потенциал

$$\Psi_a = \mathscr{M}_0 - a^2\mathscr{M}_a - (\mathscr{M}_a - a^2\mathscr{M}_{200})x^2 - (\mathscr{M}_b - a^2\mathscr{M}_{110})y^2 - (\mathscr{M}_c - a^2\mathscr{M}_{101})z^2, \tag{89.4}$$

то

$$\Phi\{\sigma\} = -\frac{1}{2}\langle \nu_a \Psi_a \rangle. \tag{89.5}$$

Здесь $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$ — внешние потенциальные факторы эллипсоида, а ξ — эллипсоидальная координата внешней точки (x, y, z), определяемая как положительный корень уравнения $\left\langle x^2/(a^2+\xi) \right\rangle = 1$. Для упрощения записи введены сокращенные обозначения: $\mathscr{M}_{000} = \mathscr{M}_0$, $\mathscr{M}_{100} = \mathscr{M}_a$, $\mathscr{M}_{010} = \mathscr{M}_b$, $\mathscr{M}_{001} = \mathscr{M}_c$.

Выполняя дифференцирование и полагая затем $\xi = 0$, найдем окончательно, что на поверхности эллипсоида

$$\frac{\partial\Psi_a}{\partial n} = -2p\left[(1 + M_a - a^2 M_{200})\frac{x^2}{a^2} + (M_b - a^2 M_{110})\frac{y^2}{b^2} + (M_c - a^2 M_{101})\frac{z^2}{c^2}\right], \tag{89.6}$$

где $M_{lmn} = \mathscr{M}_{lmn}(0)$ суть внутренние потенциальные факторы эллипсоида. В частности, M_a, M_b, M_c — обычные факторы деполяризации (размагничивания), связанные соотношением $\langle M_a \rangle = 1$. Все остальные M_{lmn} с помощью рекуррентных соотношений могут быть выражены через M_a, M_b, M_c. В дальнейшем нам понадобится, например, формула

$$a^2 M_a + b^2 M_b + c^2 M_c = M_0 = \frac{abc}{C}, \tag{89.7}$$

где C — электростатическая емкость металлического эллипсоида, граница которого описывается уравнением (89.1).

Подставляя теперь выражения (89.6) в формулу для нормальной производной потенциала скорости (89.5) и производя перегруппировку членов, получаем

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_\Gamma=\left\langle\left[\nu_a(1+M_a-a^2M_{200})+\nu_b(M_a-b^2M_{110})+\nu_c(M_a-c^2M_{101})\right]\frac{x^2}{a^2}\right\rangle p.$$

Сравнение этого выражения с (89.3) доставляет систему трех линейных уравнений для величин ν_a, ν_b, ν_c:

$$\begin{gathered}(1+M_a-a^2M_{200})\nu_a+(M_a-b^2M_{110})\nu_b+(M_a-c^2M_{101})\nu_c=\dot a/a\,,\\ (M_b-a^2M_{110})\nu_a+(1+M_b-b^2M_{020})\nu_b+(M_b-c^2M_{011})\nu_c=\dot b/b\,,\\ (M_c-a^2M_{101})\nu_a+(M_c-b^2M_{011})\nu_b+(1+M_c-c^2M_{002})\nu_c=\dot c/c\,.\end{gathered}\tag{89.8}$$

Соотношения (89.3)–(89.8) в основном исчерпывают нужные для дальнейшего результаты Бьеркнеса, изложенные здесь в обозначениях современной теории потенциала эллипсоида.

Из формул для потенциальных факторов M_{lmn} следует, что матрица системы уравнений (89.8) симметрична. Более того, она является стохастической [441] матрицей: сумма элементов каждой ее строки (или столбца) равна единице, откуда сразу видно, что $\langle\nu_a\rangle=\langle\dot a/a\rangle$. Этим простым уравнением можно заменить любое из исходных уравнений системы, что, конечно, существенно упрощает ее решение. Последнее имеет вид

$$\nu_a=\tau_a/\tau,\qquad \nu_b=\tau_b/\tau,\qquad \nu_c=\tau_c/\tau,$$

где

$$\tau=\left\langle a^2b^2\right\rangle\langle M_{011}M_{101}\rangle\,,$$

$$\begin{aligned}\tau_a=b^2c^2\langle M_{011}M_{101}\rangle\left\langle\frac{\dot a}{a}\right\rangle+\left(b^2M_{110}-c^2M_{101}\right)\left(M_c\frac{\dot b}{b}-M_b\frac{\dot c}{c}\right)+\\ +\left[\left(b^2+c^2\right)M_{011}+c^2M_{101}\right]\left(M_b\frac{\dot a}{a}-M_a\frac{\dot b}{b}\right)+\\ +\left[\left(b^2+c^2\right)M_{011}+b^2M_{110}\right]\left(M_c\frac{\dot a}{a}-M_a\frac{\dot c}{c}\right).\end{aligned}$$

Циклическая перестановка a, b, c в последнем выражении дает формулы для τ_b и τ_c.

В частном случае, когда $\dot a/a=\dot b/b=\dot c/c=\dot w$ (при пульсации эллипсоид остается подобным первоначальному), решение имеет вид

$$\nu_a=\nu_b=\nu_c=\dot w.$$

Тогда $\Phi=-\frac12\dot w\langle\Psi_a\rangle$ и после использования рекуррентных соотношений для $\mathscr{M}_{lmn}(\xi)$ потенциал скорости принимает вид $\Phi=-\dot w\mathscr{M}_0(\xi)$, т. е. зависит лишь от одной эллипсоидальной координаты ξ.

Возвращаясь к общему случаю произвольных

$$\frac{\dot a}{a}=\dot w_a,\qquad \frac{\dot b}{b}=\dot w_b,\qquad \frac{\dot c}{c}=\dot w_c, \tag{89.9}$$

найдем кинетическую энергию жидкости

$$T=\frac{\rho}{2}\int(\nabla\Phi)^2dV=\frac{\rho}{2}\int\operatorname{div}(\Phi\mathbf{v})dV=-\frac{\rho}{2}\oint\Phi\, v_n^{\Gamma}\,dS,$$

ибо $\mathbf{v}=\nabla\Phi$, $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$, а на бесконечности Φ и $\mathbf{v}$ обращаются в нуль. Подставляя в это выражение формулы (89.2) и (89.5), в последней из которых ν_a, ν_b, ν_c заменены линейными формами от $\dot w_a$, $\dot w_b$, $\dot w_c$, получаемыми из решения системы (89.8), и учитывая, что (см. (B.15))

$$\oint x^{2l}y^{2m}z^{2n}p\,dS=3\,\frac{(2l-1)!!(2m-1)!!(2n-1)!!}{(2l+2m+2n+1)!!}\,V\,a^{2l}b^{2m}c^{2n},$$

где $V=\frac{4}{3}\pi abc$ — объем эллипсоида, после долгих вычислений, использующих рекуррентные соотношения для M_{lmn}, окончательно будем иметь

$$T=\frac{m}{30}\sum_{a,b}\mu_{ab}\dot w_a\dot w_b=\frac{1}{2}\sum_{a,b}m_{ab}v_av_b=\frac{m}{2}\sum_{a,b}\varkappa_{ab}v_av_b. \tag{89.10}$$

Здесь $m=\rho V$ — масса жидкости, занимающей объем эллипсоида,

$$m_{aa}=m\varkappa_{aa}=\frac{m}{15a^2}\,\mu_{aa},\qquad m_{ab}=m\varkappa_{ab}=\frac{m}{15ab}\,\mu_{ab}$$

и т. д. — компоненты матрицы присоединенных масс, а

$$\begin{aligned}\mu_{aa}&=5M_0-a^2-\tfrac{1}{3}\langle a^2\rangle+\frac{M_{011}+\frac{1}{3}\langle M_{011}\rangle}{\langle M_{011}M_{101}\rangle}\,,\\ \mu_{ab}&=5M_0-c^2+\tfrac{2}{3}\langle a^2\rangle+\frac{M_{110}-\frac{2}{3}\langle M_{011}\rangle}{\langle M_{011}M_{101}\rangle}\,.\end{aligned} \tag{89.11}$$

Остальные элементы матрицы $\hat\mu$ получаются из (89.11) циклической заменой. Обе матрицы $\hat m$ и $\hat\mu$ симметричные и положительно определенные. Более того, как нетрудно проверить, матрица $\hat\mu$ обладает стохастическими свойствами: сумма элементов любой строки (или столбца) одна и та же и равна $15M_0$. Поэтому в дальнейшем в качестве обобщенных координат удобно брать малые относительные изменения полуосей $w_a=\delta a/a=\dot a\,\delta t/a$, $w_b=\delta b/b=\dot b\,\delta t/b$, $w_c=\delta c/c=\dot c\,\delta t/c$, для которых величины (89.9) являются обобщенными скоростями.

В случае эллипсоида вращения $(a=b)$, когда $M_a=M_b=\frac{1}{2}(1-M_c)$ и все входящие в (89.11) величины могут быть выражены через продольный фактор размагничивания $M_c\equiv M$, элементы матрицы $\widehat\varkappa$ даются формулами

$$\varkappa_{aa}=\varkappa_{bb}=\frac{1}{5}\left\{1+\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\left[\frac{M(2-5M)}{3M-1}+\frac{2}{3M+1-2c^2/a^2}\right]\right\},$$

$$\varkappa_{cc}=\frac{1}{5}\left(\frac{a}{c}\right)^2\left[1+\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{M(3-5M)}{3M-1}\right],$$

$$\varkappa_{ab}=\frac{1}{5}\left\{2+\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\left[\frac{M(2-5M)}{3M-1}-\frac{2}{3M+1-2c^2/a^2}\right]\right\},\tag{89.12}$$

$$\varkappa_{ac}=\varkappa_{bc}=\frac{a}{5c}\left[2-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{M(5M-1)}{3M-1}\right],$$

где для сплюснутого $(a=b>c)$ с эксцентриситетом $e=\sqrt{1-c^2/a^2}$ и вытянутого $(a=b<c)$ с эксцентриситетом $e=\sqrt{1-a^2/c^2}$ сфероидов продольный фактор M дается формулами (2.14) и (2.16) соответственно.

Элементы матрицы $\hat{\varkappa}$ для сфероида *Таблица 5*

c/a	a/c	$\varkappa_{aa}$	$\varkappa_{ab}$	$\varkappa_{ca}$	$\varkappa_{cc}$
0,1		0,063	0,041	0,441	5,955
0,2		0,119	0,077	0,415	2,834
0,3		0,170	0,110	0,393	1,805
0,4		0,216	0,141	0,373	1,298
0,5		0,256	0,169	0,355	0,998
0,6		0,296	0,196	0,339	0,801
0,7		0,331	0,221	0,325	0,663
0,8		0,364	0,245	0,312	0,561
0,9		0,394	0,267	0,300	0,483
1,0	1,0	0,422	0,289	0,289	0,422
	0,9	0,452	0,312	0,278	0,368
	0,8	0,485	0,338	0,265	0,315
	0,7	0,525	0,371	0,251	0,263
	0,6	0,573	0,411	0,234	0,214
	0,5	0,631	0,461	0,214	0,166
	0,4	0,705	0,527	0,191	0,121
	0,3	0,805	0,618	0,162	0,079
	0,2	0,950	0,757	0,126	0,043
	0,1	1,211	1,013	0,078	0,014

Для шара $(a=b=c)$ формулы (89.12) переходят в

$$\varkappa_{aa}=\varkappa_{bb}=\varkappa_{cc}=19/45,$$

$$\varkappa_{ab}=\varkappa_{bc}=\varkappa_{ca}=13/45.$$

Для сильно сплюснутого $(c\ll a)$ сфероида (круглый диск):

$$\varkappa_{aa}\approx\frac{17\pi}{80}\,\frac{c}{a},\qquad \varkappa_{cc}\approx\frac{\pi}{5}\,\frac{a}{c},\qquad \varkappa_{ab}\approx\frac{11\pi}{80}\,\frac{c}{a},\qquad \varkappa_{ac}\approx\frac{3\pi}{20},$$

а для очень вытянутого $(c \gg a)$ сфероида (игла):

$$\varkappa_{aa} \approx \frac{2}{5}\Lambda, \quad \varkappa_{cc} \approx \frac{3a^2}{5c^2}\left(\Lambda - \frac{2}{3}\right), \quad \varkappa_{ab} \approx \frac{2}{5}\left(\Lambda - \frac{1}{2}\right), \quad \varkappa_{ac} \approx \frac{a}{5c}(\Lambda + 1),$$

где $\Lambda = \ln 2c/a - 1$. Значения функций (89.12) приведены в табл. 5. Аналогичная таблица для трехосного эллипсоида заняла бы слишком много места, поэтому, имея в виду рассматриваемый ниже пример, укажем, что при отношении полуосей $a : b : c = 10 : 6 : 3$

$$\begin{aligned} &\varkappa_{aa} = 0,1270, \qquad \varkappa_{bb} = 0,3370, \qquad \varkappa_{cc} = 1,3214, \\ &\varkappa_{ab} = 0,1342, \qquad \varkappa_{bc} = 0,4923, \qquad \varkappa_{ca} = 0,2764. \end{aligned} \tag{89.13}$$

§ 90. Свободные колебания

Рассмотрим теперь газовый пузырь, ограниченный тонкой упругой неоднородной пленкой, находящейся в равновесии с окружающей его идеальной несжимаемой жидкостью. Самой упругостью пленки будем пренебрегать; для нас существенна лишь относительная неоднородность ее свойств, обеспечивающая эллипсоидальную форму газового объема. Считая, что при пульсациях эллипсоидальность сохраняется, мы придем к модельной задаче о системе с тремя степенями свободы. Кинетическая энергия этой системы дается выражением (89.10), а потенциальная энергия обусловлена упругостью газа и для малых колебаний имеет вид $U = \frac{1}{2}K\langle w_a\rangle^2$, $K = \gamma P_0 V$, где γ — показатель адиабаты, P_0 — равновесное давление газа (как обычно, считаем пузырь достаточно малым, так что давление и плотность внутри пузыря все время однородны). Тогда в обобщенных координатах w_a, w_b, w_c малые колебания пузыря вблизи положения равновесия описываются уравнениями Лагранжа

$$\left.\begin{aligned} \mu_{aa}\ddot{w}_a + \mu_{ab}\ddot{w}_b + \mu_{ac}\ddot{w}_c &= -\tfrac{15}{m}K\langle w_a\rangle\,, \\ \mu_{ba}\ddot{w}_a + \mu_{bb}\ddot{w}_b + \mu_{bc}\ddot{w}_c &= -\tfrac{15}{m}K\langle w_a\rangle\,, \\ \mu_{ca}\ddot{w}_a + \mu_{cb}\ddot{w}_b + \mu_{cc}\ddot{w}_c &= -\tfrac{15}{m}K\langle w_a\rangle\,. \end{aligned}\right\} \tag{90.1}$$

Из стохастических свойств матрицы $\hat{\mu}$ следует, что вектор $(1,1,1)$ является собственным. Ему соответствует решение системы (90.1)

$$w_a = w_b = w_c = w\exp(i\omega t)$$

и, так как $\mu_{aa} + \mu_{ab} + \mu_{ac} = 15M_0$, то

$$\omega^2 \equiv \omega_{abc}^2 = 3K/mM_0 = 3KC/(mabc) = 4\pi\gamma P_0 C/m, \tag{90.2}$$

т. е. мы пришли к известной общей формуле (см. также [345, 407]), которая связывает собственную частоту колебаний газового пузыря с его электростатической емкостью C. В частности, для шарового пузыря $a = b = c = R$, $C = R$ и

$$\omega_R^2 = 3K/(mR^2).$$

Два других собственных вектора матрицы $\hat{\mu}$ ортогональны вектору $(1,1,1)$, т. е. для них $w_a+w_b+w_c=0$ и $U=0$ (объем не меняется). Поэтому соответствующие собственные частоты равны нулю.

Кроме истинно собственных частот, интерес представляют (например, в случае рыбьих пузырей) и парциальные частоты, обусловленные дополнительными связями. Пусть, скажем, фиксирована полуось c $(w_c=\dot{w}_c=0)$. Для получившейся системы с двумя степенями свободы уравнения Лагранжа имеют вид

$$\mu_{aa}\ddot{w}_a+\mu_{ab}\ddot{w}_b=-\frac{15K}{m}(w_a+w_b), \qquad \mu_{ba}\ddot{w}_a+\mu_{bb}\ddot{w}_b=-\frac{15K}{m}(w_a+w_b),$$

и частота парциального колебания дается выражением

$$\omega_{ab}^2=\frac{15K}{m}\,\frac{\mu_{aa}+\mu_{bb}-2\mu_{ab}}{\mu_{aa}\mu_{bb}-\mu_{ab}^2}=\frac{K}{ma^2b^2}\,\frac{a^2\varkappa_{aa}+b^2\varkappa_{bb}-2ab\varkappa_{ab}}{\varkappa_{aa}\varkappa_{bb}-\varkappa_{ab}^2}.$$

Сравнивая ω_{ab} с собственной частотой шара того же объема $(R^3=abc)$, т. е. вводя величину $\Omega=\omega/\omega_R$, будем иметь

$$\Omega_{ab}^2=\frac{c^2}{3R^4}\,\frac{a^2\varkappa_{aa}+b^2\varkappa_{bb}-2ab\varkappa_{ab}}{\varkappa_{aa}\varkappa_{bb}-\varkappa_{ab}^2}.$$

В частности, для эллипсоида вращения $(a=b)$

$$\Omega_{ab}^2=\frac{2}{3}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{2}{3}}(\varkappa_{aa}+\varkappa_{ab})^{-1},$$
$$\Omega_{ac}^2=\frac{1}{3}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\,\frac{a^2\varkappa_{aa}+c^2\varkappa_{cc}-2ac\varkappa_{ac}}{c^2\left(\varkappa_{aa}\varkappa_{cc}-\varkappa_{ac}^2\right)}. \tag{90.3}$$

Пусть теперь на колебания эллипсоида наложены две связи: фиксированы полуоси a и b $(w_a=w_b=\dot{w}_a=\dot{w}_b=0)$, т. е. в плоскости ab пузырь жестко связан с неподвижным эллиптическим ободом. Тогда наша модель имеет лишь одну степень свободы с уравнением движения

$$\mu_{cc}\ddot{w}_c=-\frac{15K}{m}\,w_c,$$

откуда

$$\Omega_c^2=\frac{\omega_c^2}{\omega_R^2}=\frac{R^2}{3c^2}\,\varkappa_{cc}^{-1}.$$

В случае эллипсоида вращения $(a=b)$

$$\Omega_a^2=\Omega_b^2=\frac{1}{3}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\varkappa_{aa}^{-1}, \qquad \Omega_c^2=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{4}{3}}\varkappa_{cc}^{-1}. \tag{90.4}$$

В табл. 6 приведены значения относительных парциальных частот Ω_{ab}, $\Omega_{ac}=\Omega_{bc}$, $\Omega_a=\Omega_b$, Ω_c сфероида $(a=b)$, вычисленные по формулам (90.3) и (90.4). В последней колонке выписаны для сравнения значения собственных частот Ω_{abc}, график которых был дан еще в [398]. Табл. 6 устроена так же, как и табл. 5: ее верхняя половина относится к сплюснутому сфероиду (в столбце аргументов — $c/a<1$), нижняя — к вытянутому (в столбце аргументов — $a/c<1$).

Для шара $\Omega_{ab}=\Omega_{bc}=\Omega_{ca}=\sqrt{\frac{15}{16}}=0,968$, $\Omega_a=\Omega_b=\Omega_c=\sqrt{\frac{15}{19}}=0,889$. В предельном случае диска $(c\ll a)$ $\Omega_{ab}\approx 0,779\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{6}}$, $\Omega_{ac}\approx 0,773\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{6}}$, $\Omega_a\approx 0,707\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{6}}$, $\Omega_c\approx 0,728\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{6}}$, а в противоположном предельном случае $(c\gg a)$ (игла)

$$\Omega_{ab}^2\approx\frac{10}{3}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{2}{3}}(4\Lambda-1)^{-1},\qquad \Omega_{ac}^2\approx\frac{5}{3}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{2}{3}}(3\Lambda-4)(5\Lambda^2-6\Lambda-1)^{-1},$$

$$\Omega_a^2\approx\frac{5}{6\Lambda}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{2}{3}},\qquad \Omega_c^2\approx\frac{5}{3}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{2}{3}}(3\Lambda-2)^{-1}.$$

Парциальные частоты сфероида *Таблица 6*

c/a	a/c	Ω_{ab}	Ω_{ac}	Ω_a	Ω_c	Ω_{abc}
0,1		1,177	1,168	1,068	1,098	1,207
0,2		1,077	1,070	0,978	1,003	1,106
0,3		1,032	1,026	0,936	0,959	1,061
0,4		1,007	1,002	0,916	0,934	1,036
0,5		0,992	0,987	0,903	0,917	1,021
0,6		0,982	0,978	0,895	0,907	1,011
0,7		0,976	0,973	0,891	0,899	1,006
0,8		0,972	0,970	0,889	0,894	1,003
0,9		0,969	0,968	0,888	0,891	1,001
1,0	1,0	0,968	0,968	0,889	0,888	1,000
	0,9	0,968	0,969	0,890	0,887	1,001
	0,8	0,969	0,971	0,893	0,886	1,002
	0,7	0,972	0,975	0,897	0,887	1,006
	0,6	0,976	0,982	0,904	0,889	1,012
	0,5	0,984	0,992	0,916	0,893	1,022
	0,4	0,998	1,010	0,933	0,901	1,038
	0,3	1,023	1,038	0,962	0,918	1,066
	0,2	1,068	1,092	0,987	0,952	1,118
	0,1	1,180	1,218	1,130	1,037	1,242

В качестве последнего примера рассмотрим трехосный эллипсоид с отношением полуосей $a:b:c=10:6:3$ $(M_a=0,139,\ M_b=0,274,\ M_c=0,587)$. Пользуясь значениями $\varkappa$, данными в (89.13), окончательно находим $\Omega_{ab}=1,020$, $\Omega_{bc}=1,009$, $\Omega_{ca}=1,017$, $\Omega_a=0,915$, $\Omega_b=0,936$, $\Omega_c=0,945$, $\Omega_{abc}=1,048$.

В заключение заметим, что переход от привычной для акустики скалярной присоединенной массы к матрице присоединенных масс обусловлен описанием мгновенного положения границы осциллирующего тела (как при свободных, так и при вынужденных колебаниях) не одним, а несколькими параметрами, связь между которыми заранее не предопределена. В частности, такая ситуация возникает, вообще говоря, и в задаче о собственных колебаниях несферического газового пузыря в жидкости, если учитывать в балансе сил неоднородную и анизотропную упругость ограничивающей этот пузырь пленки.

Наконец, напоследок сделаем примечание вычислительной направленности. Стохастические свойства матрицы $\hat{\mu}$, т. е. равенства

$$\mu_{aa} + \mu_{ab} + \mu_{ac} = 15M_0, \ldots, \tag{90.5}$$

о которых говорилось выше, позволяют в качестве побочного результата получать полезные тождества, позволяющие упростить итоговый вид некоторых первоначально громоздких формул. Эти тождества получаются, в частности, при подстановке выражений (89.11) в равенства (90.5). Так, одно из указанных тождеств, имеет вид

$$\langle M_{011} M_{101} \rangle \left(\langle a^2 \rangle - 3a^2 \right) + 3\,(1 - 3M_a)\,M_{011} - \langle (1 - 3M_a)\,M_{011} \rangle = 0.$$

Приведением этого примера мы и ограничимся.

Часть V

НЧ РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Глава 17
О магнитной поляризуемости эллипсоида

§ 91. Вводные замечания

Для нахождения токов Фуко, индуцируемых в проводящем теле внешним переменным магнитным полем, надо, вообще говоря, рассматривать полную краевую задачу квазистационарной электродинамики, т. е. сшивать решение уравнения

$$\Delta f + \varkappa^2 f = 0\,, \tag{91.1}$$

которому удовлетворяют векторы поля внутри тела, с решением уравнения Лапласа для внешней области. Здесь $\varkappa = (1+i)/\delta$, $\delta = \mathfrak{c}/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$ — глубина проникновения ($\mu = 1$), а зависимость полей от времени выбрана в виде $\exp\{-i\omega t\}$.

Такая краевая задача сравнительно просто решается для шара и кругового цилиндра, помещенных в однородное внешнее поле (см., например, [453, 484]). Переход к телам более сложной формы сопряжен со значительными математическими трудностями; даже для эллипсоида задача может быть решена, по существу, только численными методами.

Как известно, задача существенно упрощается в предельном случае сильного скин-эффекта, когда глубина проникновения мала по сравнению со всеми характерными размерами тела: $\delta \ll l$. Тогда поле во внешней области в нулевом приближении совпадает с полем снаружи сверхпроводящего тела той же формы. Найдя это поле из решения соответствующей задачи магнитостатики, мы можем затем по формулам плоского скин-эффекта вычислить поля и токи в поверхностном слое проводящего тела [484]. Таким образом, в предельном случае $\delta \ll l$ общая краевая задача фактически вырождается в задачу для одной (внешней) области.

Здесь мы покажем, что в противоположном предельном случае $\delta \gg l$ (случай низких частот) нахождение токов Фуко также может быть сведено к задаче для одной (на этот раз внутренней) области. В данной главе мы рассмотрим конкретную задачу об эллипсоиде в однородном внешнем поле, для которой наш приближенный метод, состоящий в разложении решения уравнения (91.1) в ряд по степеням малого параметра l^2/δ^2, позволяет получить простые замкнутые формулы для компонент тензора магнитной поляризуемости тела.

Следует отметить, что эти формулы, равно как и сама постановка задачи, справедливы не только для металлических тел. Они верны и в более общем случае, когда абсолютное значение комплексной диэлектрической проницаемости ε велико по сравнению с единицей, и индуцируемый магнитный момент обусловлен как токами проводимости, так и поляризационными токами. Для перехода к этому общему случаю надо, очевидно, во всех уравнениях просто заменить проводимость σ на $-\frac{i\omega}{4\pi}(\varepsilon-1)$, а $\varkappa^2$ писать в виде

$$\varkappa^2 = k^2(\varepsilon-1) \approx k^2\varepsilon\,, \qquad k=\omega/\mathfrak{c}. \tag{91.2}$$

При этом глубина проникновения по порядку величины равна $\delta \sim (k\sqrt{|\varepsilon|})^{-1}$.

§ 92. Поляризуемость эллипсоида на низких частотах $(\delta \gg l)$

Рассмотрим однородный проводящий эллипсоид , уравнение границы которого имеет вид $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$. Поскольку координатные оси совпадают с осями эллипсоида, тензор магнитной поляризуемости будет диагональным. Не нарушая общности, можно считать внешнее однородное поле $\mathbf{H}_0$ параллельным одной из координатных осей, скажем, оси z.

Если глубина проникновения δ велика по сравнению с размерами тела, то в нулевом приближении магнитное поле внутри тела совпадает с невозмущенным внешним полем $\mathbf{H}_0$. Решая задачу методом последовательных приближений, мы получим, что наводимый этим полем ток $\mathbf{j}_1$ удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{j}_1 = ik\sigma\mathbf{H}_0\,, \qquad \operatorname{div}\mathbf{j}_1 = 0 \tag{92.1}$$

и граничному условию

$$j_{1n}=0 \tag{92.2}$$

на поверхности эллипсоида.

В нашем случае, когда $\mathbf{H}_0$ однородно и параллельно оси z, решение системы (92.1), удовлетворяющее условию (90.2), находится без труда и имеет вид

$$j_{1x} = -\frac{ik\sigma H_0}{a^2+b^2}\,a^2y\,, \quad j_{1y} = \frac{ik\sigma H_0}{a^2+b^2}\,b^2x\,, \quad j_{1z}=0\,. \tag{92.3}$$

Вычисляя магнитный момент $\mathfrak{M}$, создаваемый этим распределением токов, и вводя отнесенный к единице объема коэффициент магнитной поляризуемости [484] $\alpha_z = \alpha_z' + i\alpha_z''$

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2\mathfrak{c}}\int [\mathbf{rj}]\,dV\,, \quad \mathfrak{M} = \alpha_z V H_0\,, \tag{92.4}$$

окончательно получаем

$$\alpha_{1z} = \frac{i}{10\pi\delta^2}\,\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{\varkappa^2}{20\pi}\,\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\,. \tag{92.5}$$

Таким образом, в случае металла учет первого приближения позволяет найти только мнимую часть поляризуемости, а для определения действительной части необходимо решать задачу в следующем приближении. Уравнения этого следующего приближения получаются, очевидно, из (92.1) и (92.2) заменой индексов $0 \to 1$ и $1 \to 2$. При этом магнитное поле $\mathbf{H}_1$ есть поле токов $\mathbf{j}_1$. Его можно вычислить, учитывая, что при $\mu = 1$ выполняется $\mathbf{H}_1 = \mathbf{B}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{A}_1$, с помощью векторного потенциала

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathfrak{c}} \int\limits_V \frac{\mathbf{j}_1(\mathbf{r}')}{R}\, dV', \tag{92.6}$$

где радиус-вектор $\mathbf{R}$ направлен из $dV' = dx'\, dy'\, dz'$ в точку наблюдения $\mathbf{r}$. Компоненты $\mathbf{A}_1$ выражаются интегралами

$$A_{1x} = -\frac{ika^2\sigma H_0}{\mathfrak{c}(a^2+b^2)} \int\limits_V \frac{y'}{R}\, dV', \quad A_{1y} = \frac{ikb^2\sigma H_0}{\mathfrak{c}(a^2+b^2)} \int\limits_V \frac{x'}{R}\, dV', \quad A_{1z} = 0,$$

рассмотренными в § 14. В результате получаем, что поле внутри эллипсоида дается формулами

$$\begin{gathered} H_{1x} = 2TM_{101}xz, \quad H_{1y} = 2TM_{011}yz, \quad H_{1z} = T\left[(M_a + M_b) - \right. \\ \left. -(M_{200}+M_{110})x^2 - (M_{110}+M_{020})y^2 - (M_{101}+M_{011})z^2\right], \end{gathered} \tag{92.7}$$

где

$$T \equiv \frac{\varkappa^2 H_0}{2} \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Нахождение токов второго приближения состоит в решении системы (92.1), (92.2), в которой магнитное поле $\mathbf{H}_0$ заменено на $\mathbf{H}_1$. Компоненты плотности этих токов естественно искать в форме полиномов не выше третьей степени. Из соображений симметрии следует, что j_{2x} должна быть нечетной функцией y и четной функцией x и z, j_{2y} — нечетной функцией x и четной функцией y и z, наконец, j_{2z} — нечетной функцией x, y и z. Таким образом, искомые токи второго приближения можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} j_{2x} &= \left(Ax^2 + Bz^2 - \frac{A+B}{3}y^2\right)y + Cy + T\frac{\omega\varkappa^2}{12\pi kb^2}y^3, \\ j_{2y} &= \left(\bar{A}y^2 + \bar{B}z^2 - \frac{\bar{A}+\bar{B}}{3}x^2\right)x + \bar{C}x - T\frac{\omega\varkappa^2}{12\pi ka^2}x^3, \\ j_{2z} &= -2(A+\bar{A})\,xyz. \end{aligned}\right\} \tag{92.8}$$

Выражения (92.8) содержат шесть пока еще не определенных величин A, B, C и $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$. Для их нахождения воспользуемся граничным условием $j_{2n} = 0$ на поверхности эллипсоида и уравнениями $\operatorname{rot}\mathbf{j}_2 = ik\sigma\mathbf{H}_1$ и $\operatorname{div}\mathbf{j}_2 = 0$. В совокупности они дают как раз шесть независимых линейных уравнений, решая которые мы и найдем интересующие нас величины. Опуская промежуточные (довольно громоздкие) выкладки, приведем окончательное выражение для (отнесенного к единице объема) коэффициента поляризуемости

$$\alpha_{2z} = \frac{1}{70\pi} \frac{\varkappa^4 a^4 b^4}{(a^2+b^2)^2}\,(1 - M_c), \tag{92.9}$$

получаемое подстановкой тока $\mathbf{j}_2$ в общие формулы (92.4).

Таким образом, для металлического проводника при $\delta \gg l$

$$\alpha_z^{'} = -\frac{2}{35\pi}\,\frac{a^4b^4}{\delta^4(a^2+b^2)^2}\,(1-M_c)\,, \qquad \alpha_z^{''} = \frac{1}{10\pi}\,\frac{a^2b^2}{\delta^2(a^2+b^2)}\,, \tag{92.10}$$

а формулы для α_x и α_y получаются из (92.10) очевидной циклической перестановкой.

В случае шара (92.10) переходят в известные выражения, приведенные в [484]. Для сфероида ($a = b \neq c,\ \alpha_z = \alpha_{\parallel},\ \alpha_x = \alpha_y = \alpha_{\perp}$) имеем

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{\parallel}^{'} &= -\frac{1}{70\pi}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4(1-M), \quad \alpha_{\parallel}^{''} = \frac{1}{20\pi}\left(\frac{a}{\delta}\right)^2, \\ \alpha_{\perp}^{'} &= -\frac{1}{35\pi}\,\frac{a^4c^4}{\delta^4(a^2+c^2)^2}\,(1+M), \quad \alpha_{\perp}^{''} = \frac{1}{10\pi}\,\frac{a^2c^2}{\delta^2(a^2+c^2)}, \end{aligned}\right\} \tag{92.11}$$

где $M = M_c$ — коэффициент размагничивания, соответствующий оси симметрии вращения сфероида.

Заметим, что в случае сильно вытянутого сфероида («игла») формулы $\dfrac{4\pi a^2c}{3}\,\alpha_{\parallel}$ и $\dfrac{4\pi a^2c}{3}\,\alpha_{\perp}$, даваемые (92.11), переходят, как и следовало ожидать, в выражения, совпадающие с результатом интегрирования погонных поляризуемостей прямого кругового цилиндра вдоль оси «иглы» (подробнее см. § 94).

§ 93. Поляризуемость эллипсоида на высоких частотах ($\delta \ll l$)

При $\delta \ll l$ магнитное поле во внешней области в нулевом приближении совпадает с полем снаружи сверхпроводящего эллипсоида. Поэтому в этом приближении компоненты тензора поляризуемости (отнесенного к единице объема) равны (см., например, [484])

$$\alpha_{0x} = -\frac{1}{4\pi(1-M_a)}, \quad \alpha_{0y} = -\frac{1}{4\pi(1-M_b)}, \quad \alpha_{0z} = -\frac{1}{4\pi(1-M_c)}, \tag{93.1}$$

т. е. являются вещественными величинами. Для нахождения мнимой части поляризуемости нужно, как известно, вычислить джоулевы потери внешнего поля в теле. Для внешнего поля, ориентированного параллельно одной из осей эллипсоида, эти потери Q связаны с соответствующим коэффициентом поляризуемости соотношением [484]

$$Q = \frac{1}{2}\,\omega V \alpha^{''} |H_0|^2\,,$$

причем в первом приближении

$$Q = \frac{\mathfrak{c}}{8\pi}\,\zeta^{'} \oint |H_{\text{sup}}|^2 dS.$$

Здесь $\zeta^{'}$ — вещественная часть поверхностного импеданса

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \zeta^{'} + i\,\zeta^{''}\,,$$

а H_{sup} — поле на границе сверхпроводящего эллипсоида.

Так как

$$H_{\text{sup}} = \frac{H_0}{1-M}\,\sin\nu$$

(где ν — угол между нормалью к поверхности эллипсоида и направлением внешнего поля $\mathbf{H}_0$; M — соответствующий этому направлению коэффициент размагничивания), то окончательно

$$\alpha_1'' = \frac{\zeta'}{4\pi k V(1-M)^2}\oint \sin^2\nu\, dS\,. \tag{93.2}$$

Записывая явное выражение для входящего в (93.2) интеграла, нетрудно убедиться, что формулы для компонент тензора $\overleftrightarrow{\alpha}''$ можно представить в виде

$$\alpha_{1x}'' = \frac{\zeta'}{4\pi k V(1-M_a)^2}\,a\,\frac{\partial S}{\partial a}\,, \qquad \alpha_{1y}'' = \frac{\zeta'}{4\pi k V(1-M_b)^2}\,b\,\frac{\partial S}{\partial b}\,,$$
$$\alpha_{1z}'' = \frac{\zeta'}{4\pi k V(1-M_c)^2}\,c\,\frac{\partial S}{\partial c}\,, \tag{93.3}$$

где S — площадь поверхности эллипсоида, рассматриваемая (см. (1.15), (2.8)) как функция параметров a, b, c

$$S = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[c^2 F(\psi,\kappa) + (a^2-c^2)E(\psi,\kappa)\right].$$

Здесь $F(\psi,\kappa)$, $E(\psi,\kappa)$ — неполные эллиптические интегралы, модуль и аргумент которых суть

$$\kappa = \frac{a}{b}\,\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\,, \qquad \psi = \arccos\frac{c}{a}\,, \tag{93.4}$$

причем для определенности принято, что $a \geqslant b \geqslant c$.

При численных расчетах удобно выразить входящие в (93.3) величины через размагничивающие факторы M_a, M_b, M_c, для которых есть подробные таблицы (см. Приложение Н) и графики [266, 344]. Однако формулы для факторов размагничивания рассматриваемого эллипсоида содержат эллиптические интегралы, модуль и аргумент которых не совпадают с (93.4). Выражениям (93.4) соответствует эллипсоид с полуосями $\bar a = a$, $\bar b = ac/b$, $\bar c = c$. Обозначая размагничивающие факторы этого вспомогательного эллипсоида через $\overline{M}_a$, $\overline{M}_b$, $\overline{M}_c$ (если $a > b > c$, то и $\bar a > \bar b > \bar c$), будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
a\,\frac{\partial S}{\partial a} &= 2\pi\left[a^2 + (b^2+c^2-a^2)\overline{M}_c\right],\\
b\,\frac{\partial S}{\partial b} &= 2\pi\left[b^2 + (c^2+a^2-b^2)\overline{M}_b\right],\\
c\,\frac{\partial S}{\partial c} &= 2\pi\left[c^2 + (a^2+b^2-c^2)\overline{M}_a\right].
\end{aligned}\right\} \tag{93.5}$$

Учет конечной глубины проникновения дает не только мнимую часть поляризуемости, но и приводит к появлению поправки того же порядка к ее вещественной части. Рассмотрим этот вопрос в общем случае тела произвольной формы. Пусть

$$\mathbf{H}_{\text{sup}} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_{\text{sup}}\,, \qquad (\mathbf{A}_{\text{sup}})_{\tan} = 0$$

магнитное поле и его вектор-потенциал снаружи сверхпроводящего тела. Для квазистационарных полей и $\mathbf{H}_{\text{sup}}$, и $\mathbf{A}_{\text{sup}}$ можно, не нарушая общности, считать вещественными.

Если поверхностный импеданс тела не равен нулю, но мал ($|\zeta| \ll 1$), то в первом приближении поле снаружи тела имеет вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{sup}} + \mathbf{H}_1\,, \qquad \mathbf{H}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{A}_1, \tag{93.6}$$

причем $\mathbf{A}_1$ удовлетворяет уравнению Лапласа и граничному условию

$$\mathbf{A}_{1\,\tan} = \frac{i\zeta}{k}\,[\mathbf{n}\,\mathbf{H}_{\text{sup}}]\,. \tag{93.7}$$

Так как функция Грина для уравнения Лапласа вещественна, то из (93.6) и (93.7) следует, что поле $\mathbf{H}$ имеет структуру

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{sup}} + i\zeta\mathbf{G},$$

где и $\mathbf{H}_{\text{sup}}$, и $\mathbf{G}$ — вещественные поля. Полю $\mathbf{H}$ соответствует квазиповерхностный ток

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_{\text{sup}} + i\zeta\boldsymbol{\eta}\,,$$

где $\mathbf{i}_{\text{sup}}$ и $\boldsymbol{\eta}$ также вещественны.

Величина магнитного момента тела определяется интегралом

$$\mathbf{I} = \int [\,\mathbf{r}\mathbf{j}\,]\,dV\,, \tag{93.8}$$

взятым внутри тела по области, занимаемой токами. Входящая сюда объемная плотность тока $\mathbf{j}$ связана с квазиповерхностным током $\mathbf{i}$ соотношением

$$\mathbf{j} = -i\varkappa\mathbf{i}\,\exp\{i\varkappa s\}\,,$$

где s — расстояние от границы тела, а $\varkappa = k/\zeta$ — волновое число для материала тела. Подставляя элемент объема dV в виде $dV = dS\,ds$, а $\mathbf{r}$ в виде $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{n}s$ ($\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки границы; $\mathbf{n}$ — нормаль внутрь тела), мы можем произвести в (93.8) интегрирование по s и в первом приближении по ζ получаем

$$\mathbf{I} = \oint [\mathbf{R}\mathbf{i}_{\text{sup}}]\,dS + i\zeta\left\{\oint [\mathbf{R}\boldsymbol{\eta}]\,dS + \frac{1}{k}\oint [\mathbf{n}\mathbf{i}_{\text{sup}}]\,dS\right\}. \tag{93.9}$$

Первому члену (93.9) соответствует магнитный момент сверхпроводящего тела. Из вида второго члена сразу следует, что поправка $\Delta\alpha'$ к вещественной части поляризуемости и ее мнимая часть α'' относятся друг к другу как $-\zeta''$ к ζ'. В частности, для металла $\zeta' = -\zeta''$ и $\Delta\alpha' = \alpha''$.

Возвращаясь к магнитной поляризуемости эллипсоида на высоких частотах, т. е. собирая выражения (93.1), (93.3) и (93.5), получаем окончательные приближенные формулы

$$\left.\begin{aligned} V\alpha_x &= -\frac{V}{4\pi(1-M_{100})}\left\{1 - i\frac{2\pi\left[a^2+(b^2+c^2-a^2)\overline{M}_{001}\right]}{\varkappa V(1-M_{100})}\right\}, \\ V\alpha_y &= -\frac{V}{4\pi(1-M_{010})}\left\{1 - i\frac{2\pi\left[b^2+(c^2+a^2-b^2)\overline{M}_{010}\right]}{\varkappa V(1-M_{010})}\right\}, \\ V\alpha_z &= -\frac{V}{4\pi(1-M_{001})}\left\{1 - i\frac{2\pi\left[c^2+(a^2+b^2-c^2)\overline{M}_{100}\right]}{\varkappa V(1-M_{001})}\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (93.10)$$

§ 94. Поляризуемость сильно вытянутого эллипсоида

Случай сильно вытянутого эллипсоида интересен тем, что соответствующая ему магнитная поляризуемость $V\overleftrightarrow{\alpha}$, где $V=\frac{4\pi}{3}abc$ — объем эллипсоида, может быть рассчитана как на основе формул для эллипсоида, так и на основе формул для эллиптического цилиндра. В этом смысле рассматриваемый случай служит связующим звеном между задачами двумерной и трехмерной геометрий. Мы покажем, что сказанное действительно имеет место, на примере магнитного момента, приобретаемого телом с $\mu=1$ в однородном периодическом внешнем магнитном поле в предельных случаях $\delta\gg L$ и $\delta\ll L$.

При $\delta\gg L$ магнитная поляризуемость α_x эллипсоида, отнесенная к единице объема, в соответствии с (92.5) и (92.9) равна

$$\alpha_x = \frac{\varkappa^2b^2c^2}{20\pi(b^2+c^2)}\left[1+\frac{2\varkappa^2b^2c^2}{7(b^2+c^2)}(1-M_a)\right]. \qquad (94.1)$$

Выражения для остальных компонент дает циклическая перестановка.

Если эллипсоид сильно вытянут $(a\gg b\gtrsim c)$, то при этом (см. § 2.) $M_a\approx 0$, $M_b\approx c/(b+c)$, $M_c\approx b/(b+c)$ и вместо (94.1) будем иметь

$$\left.\begin{gathered} \alpha_x = \frac{\varkappa^2b^2c^2}{20\pi(b^2+c^2)}\left[1+\frac{2\varkappa^2b^2c^2}{7(b^2+c^2)}\right], \\ \alpha_y = \frac{\varkappa^2c^2}{20\pi}\left[1+\frac{2\varkappa^2bc^2}{7(b+c)}\right], \qquad \alpha_z = \frac{\varkappa^2b^2}{20\pi}\left[1+\frac{2\varkappa^2b^2c}{7(b+c)}\right]. \end{gathered}\right. \qquad (94.2)$$

В рассматриваемом случае $\delta\gg L$ компоненты тензора погонной магнитной поляризуемости $S\overleftrightarrow{\alpha}$, где $S=\pi\tilde{b}\tilde{c}$, изотропного эллиптического цилиндра $y^2/\tilde{b}^2 + z^2/\tilde{c}^2 = 1$ даются формулами [515]

$$S\widetilde{\alpha}_x = \frac{\varkappa^2\tilde{b}^3\tilde{c}^3}{16(\tilde{b}^2+\tilde{c}^2)}\left[1+\frac{\varkappa^2\tilde{b}^2\tilde{c}^2}{3(\tilde{b}^2+\tilde{c}^2)}\right],$$

$$S\widetilde{\alpha}_y = \frac{\varkappa^2\tilde{b}\tilde{c}^3}{16}\left[1+\frac{\varkappa^2\tilde{b}\tilde{c}^2}{3(\tilde{b}+\tilde{c})}\right], \qquad S\widetilde{\alpha}_z = \frac{\varkappa^2\tilde{b}^3\tilde{c}}{16}\left[1+\frac{\varkappa^2\tilde{b}^2\tilde{c}}{3(\tilde{b}+\tilde{c})}\right]. \tag{94.3}$$

Интегрируя поляризуемости $S\widetilde{\alpha}_x$, $S\widetilde{\alpha}_y$, $S\widetilde{\alpha}_z$ вдоль большой оси сильно вытянутого эллипсоида, предварительно положив в них[1]

$$\tilde{b} = b\sqrt{1-x^2/a^2}, \qquad \tilde{c} = c\sqrt{1-x^2/a^2}\,, \tag{94.4}$$

получаем выражения для $V\alpha_x$, $V\alpha_y$, $V\alpha_z$, в которых компоненты тензора $\overleftrightarrow{\alpha}$ снова даются формулами (94.2).

Обратимся к случаю $\delta \ll L$.

Замечая, что сильно вытянутому эллипсоиду $(a \gg b \gtrsim c)$ соответствует сильно сплющенный вспомогательный эллипсоид[2] $(\bar{a} \gtrsim \bar{b} \gg \bar{c})$, размагничивающие факторы которого суть[3] $\overline{M}_{100} \approx c\overline{N}_{10}$, $\overline{M}_{010} \approx c\overline{N}_{01}$, $\overline{M}_{001} \approx 1 - c(\overline{N}_{10} + \overline{N}_{01})$, нетрудно получить из (93.10) более простые заменяющие их выражения

$$\left.\begin{aligned}
V\alpha_x &= -\frac{V}{4\pi}\left[1 - i\frac{2\pi a^2 c\overline{N}_E}{\varkappa V}\right],\\
V\alpha_y &= -\frac{V(b+c)}{4\pi b}\left[1 - i\frac{2\pi a^2(b+c)c\overline{N}_{01}}{\varkappa V b}\right],\\
V\alpha_z &= -\frac{V(b+c)}{4\pi c}\left[1 - i\frac{2\pi a^2(b+c)\overline{N}_{10}}{\varkappa V}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{94.5}$$

Здесь $\overline{N}_{10}$, $\overline{N}_{01}$ — внутренние потенциальные факторы эллиптического диска с полуосями $\bar{a} = a$, $\bar{b} = ac/b$, а $\overline{N}_E$ выражается через $\overline{N}_{10}$ и $\overline{N}_{01}$ в соответствии с (84.6).

Компоненты тензора магнитной поляризуемости изотропного эллиптического цилиндра при $\delta \ll L$ равны [515]

$$\left.\begin{aligned}
S\tilde{\alpha}_x &= -\frac{\tilde{b}\tilde{c}}{4}\left[1 - i\frac{4\boldsymbol{E}(e)}{\pi\varkappa\tilde{c}}\right],\\
S\tilde{\alpha}_y &= -\frac{\tilde{c}(\tilde{b}+\tilde{c})}{4}\left[1 - i\frac{4\left(\tilde{b}^2\boldsymbol{E}(e) - \tilde{c}^2\boldsymbol{K}(e)\right)}{\pi\varkappa\tilde{b}\tilde{c}(\tilde{b}-\tilde{c})}\right],\\
S\tilde{\alpha}_z &= -\frac{\tilde{b}(\tilde{b}+\tilde{c})}{4}\left[1 - i\frac{4\left(\boldsymbol{K}(e) - \boldsymbol{E}(e)\right)}{\pi\varkappa(\tilde{b}-\tilde{c})}\right],
\end{aligned}\right\} \tag{94.6}$$

[1] При этом поверхность цилиндра переходит в поверхность эллипсоида.

[2] О котором шла речь в § 93, а также в § 2.

[3] См. (3.17), (3.18) или (2.11).

где $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{E}$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно, $e = \sqrt{1-(\tilde{c}/\tilde{b}^2)}$ – эксцентриситет эллипса сечения цилиндра $y^2/\tilde{b}^2 + z^2/\tilde{c}^2 = 1$. Интегрирование этих погонных поляризуемостей вдоль большой оси сильно вытянутого эллипсоида с учетом (94.4) дает окончательно

$$\left.\begin{aligned}
V\alpha_x &= 2\int\limits_0^a S\tilde{\alpha}_x\,dx = -\frac{V}{4\pi}\left[1 - i\frac{2\pi ab\boldsymbol{E}(e)}{\varkappa V}\right],\\
V\alpha_y &= 2\int\limits_0^a S\tilde{\alpha}_y\,dx = -\frac{V(b+c)}{4\pi b}\left\{1 - i\frac{2\pi a\left[b^2\boldsymbol{E}(e) - c^2\boldsymbol{K}(e)\right]}{\varkappa V(b-c)}\right\},\\
V\alpha_z &= 2\int\limits_0^a S\tilde{\alpha}_z\,dx = -\frac{V(b+c)}{4\pi c}\left\{1 - i\frac{2\pi abc[\boldsymbol{K}(e) - \boldsymbol{E}(e)]}{\varkappa V(b-c)}\right\}.
\end{aligned}\right\} \qquad (94.7)$$

Это совпадает с (94.5), если использовать (5.14) для $\overline{N}_{10}$ и $\overline{N}_{01}$, а также учесть, что благодаря (94.4) эксцентриситеты эллиптического цилиндра и вспомогательного эллиптического диска совпадают.

Завершая главу, отметим, что магнитная поляризуемость эллипсоида, обусловленная токами Фуко, представляет интерес для некоторых физико-технических приложений. Укажем, в качестве примера, на микроэлектромеханику (см., например, [503, 510]).

Глава 18
Рассеяние плоской волны на (ε, μ)-эллипсоиде

§ 95. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики

В данной главе рассматривается задача Рэлея–Стивенсона о рассеянии плоской электромагнитной волны свободного пространства на проницаемом для электромагнитного поля малом эллипсоидальном препятствии. Работы Стивенсона [342, 343] явились существенным прорывом в развитии методов НЧ дифракции и демонстрации их эффективности, что заслуженно отмечается во многих книгах и обзорах по теории дифракции. Особую ценность аналитические результаты Стивенсона по рассеянию на эллипсоиде приобретают ввиду невозможности для электромагнитных полей получить точное аналитическое решение векторного волнового уравнения в эллипсоидальных координатах[1].

Что касается задачи об эллипсоиде, то Стивенсоном, по-видимому, в большей мере руководило желание испытать возможности развитого им метода на ее примере, нежели придать решению этой задачи вид, наиболее пригодный для практического использования. Наверное, поэтому в [343]: выражения для полей внутри эллипсоида и в ближней зоне приводятся не полностью (хотя и утверждается, что в их правильности можно удостовериться подстановкой в соответствующие уравнения); выражения для рассеянных полей в дальней зоне даны в виде, требующем дополнительного дифференцирования по угловым переменным; исследование рассеяния на эллиптическом диске (и эллиптическом отверстии в плоском идеально проводящем экране) не доведено до конца, а окончательные формулы, относящиеся к НЧ рассеянию плоской волны при наклонном падении на круглый диск, как показано в [91], содержат неточности.

Задача низкочастотного рассеяния на эллипсоиде решается здесь на основе интегральных уравнений макроскопической электродинамики[2], эф-

[1] Последнее замечание справедливо по отношению ко всем главам этой части монографии

[2] Их вывод для линейных сред в отсутствие пространственной дисперсии дан Н. А. Хижняком [559, 561] (см. также [36, 562]). Отметим, что интегральные уравнения электродинамики можно преобразовывать в различные эквивалентные формы. Так, в [259]

фективность применения которых в задачах НЧ дифракции показана в [560, 561].

Для монохроматических ($\exp\{-i\omega t\}$) полей система интегральных уравнений электродинамики [561] (эквивалентная уравнениям Максвелла, дополненным материальными уравнениями, граничными условиями и условиями излучения) может быть записана в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - \frac{ik}{\nu_\mu}\operatorname{rot}\int\limits_V G(R)\,\mathbf{H}(\mathbf{r}')\,dV' - \\ - \frac{1}{\nu_\varepsilon}\left(k^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_V G(R)\,\mathbf{E}(\mathbf{r}')\,dV', \quad (95.1)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) + \frac{ik}{\nu_\varepsilon}\operatorname{rot}\int\limits_V G(R)\,\mathbf{E}(\mathbf{r}')\,dV' - \\ - \frac{1}{\nu_\mu}\left(k^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_V G(R)\,\mathbf{H}(\mathbf{r}')\,dV', \quad (95.2)$$

где интегралы берутся по объему V тела, характеризующегося постоянными диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостями, $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ — электрическое и магнитное поля первичной (невозмущенной) волны, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, а скалярная функция Грина согласно (74.5) равна

$$G(R) = -\frac{1}{4\pi R}\,e^{ikR}. \quad (95.3)$$

Кроме того, $k = \dfrac{\omega}{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c}$ — скорость света в пустоте), $\nu_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon - 1}$, $\nu_\mu = \dfrac{1}{\mu - 1}$.

Решение задачи рассеяния на теле, размеры которого малы по сравнению с длиной волны (как в пустоте, так и в материале тела), сводится к решению цепочки интегральных уравнений, получающихся в результате подстановки в (95.1), (95.2) НЧ разложений искомых

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty}(ik)^m\mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty}(ik)^m\mathbf{H}^{(m)}(\mathbf{r}) \quad (95.4)$$

и известных функций $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ и $G(R)$. В частности, для рассматриваемого в данной главе рассеяния плоской волны единичной амплитуды

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}\,e^{ik\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}}, \qquad \mathbf{H}_0 = \mathbf{h}\,e^{ik\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}}, \quad (95.5)$$

где $\mathbf{e}^2 = \mathbf{h}^2 = \boldsymbol{\varkappa}^2 = 1$, $\mathbf{e} = -[\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{h}]$, $\mathbf{h} = [\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{e}]$, первые три уравнения для определения $\mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{r})$ имеют вид [561]:

$$\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) = \mathbf{e} + \frac{1}{4\pi\nu_\varepsilon}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_V \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}')\,\frac{dV'}{R}, \quad (95.6)$$

интегральные уравнения даны в форме, не содержащей пространственных производных полей **E** и **H**.

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r})=(\varkappa\mathbf{r})\mathbf{e}+\frac{1}{4\pi\nu_\mu}\operatorname{rot}\int\limits_V\mathbf{H}^{(0)}(\mathbf{r}')\,\frac{dV'}{R}+\frac{1}{4\pi\nu_\varepsilon}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_V\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}')\,\frac{dV'}{R},\quad(95.7)$$

$$\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r})=\frac{1}{2}(\varkappa\mathbf{r})^2\mathbf{e}+\frac{1}{4\pi\nu_\mu}\operatorname{rot}\int\limits_V\mathbf{H}^{(1)}(\mathbf{r}')\,\frac{dV'}{R}-\frac{1}{4\pi\nu_\varepsilon}\int\limits_V\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}')\,\frac{dV'}{R}+$$
$$+\frac{1}{8\pi\nu_\varepsilon}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_V\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}')R\,dV'+\frac{1}{4\pi\nu_\varepsilon}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_V\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}')\,\frac{dV'}{R}.\quad(95.8)$$

Здесь уместно отметить, что, хотя для большинства реальных ситуаций $\mu(\omega)$ практически не отличается от единицы[1], оставление за магнитной проницаемостью ее буквенного обозначения в формулах обеспечивает сохранение $(\mathbf{E},\mathbf{H})$–симметрии уравнений Максвелла (а значит, и их решений), а также возможность простым предельным переходом ($\mu\to 0$, $\varepsilon\to\infty$) охватить и случай идеально проводящего рассеивателя. $(\mathbf{E},\mathbf{H})$–симметрия означает, например, что цепочка уравнений для определения $\mathbf{H}^{(m)}(\mathbf{r})$ получается из (95.6)–(95.8) в результате замен

$$\mathbf{E}\to\mathbf{H},\quad \mathbf{H}\to-\mathbf{E},\quad \varepsilon\leftrightarrow\mu,\quad \mathbf{e}\to\mathbf{h},\quad \mathbf{h}\to-\mathbf{e}\,.\qquad(95.9)$$

Формулы (95.6)–(95.8) справедливы всюду в ближней зоне. Для точек $\mathbf{r}$, находящихся внутри тела, задача сводится к решению последовательности интегральных уравнений для $\mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}^{(m)}(\mathbf{r})$.

§ 96. Электромагнитное поле внутри эллипсоида

Для эллипсоидального $\big(\langle x^2/a^2\rangle=1\big)$ рассеивателя техника решения уравнений (95.6)–(95.8) аналогична той, которая использовалась при рассмотрении акустической задачи в §§ 77–79. К тому же, решение уравнения (95.6) для потенциального поля $\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r})$, отвечающего предельному случаю $k=0$ (статика!), нам фактически известно (см. разд. 64.2). При $m\geqslant 1$ векторные поля $\mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{r})$ уже не являются безвихревыми. Однако в отличие от дифференциального метода Стивенсона использование интегральных уравнений не предусматривает обязательного разбиения этих векторов на потенциальные и соленоидальные фрагменты[2].

Чтобы решать уравнения (95.6)–(95.8) цепочки НЧ приближения, нужно декартовы компоненты векторов $\mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}^{(m)}(\mathbf{r})$ считать полиномиальными (степени m) функциями декартовых координат. В частности, первые три члена НЧ рядов для $E_x^{(m)}(\mathbf{r})$ и $H_x^{(m)}(\mathbf{r})$ можно искать в виде[3]:

$$E_x^{(0)}=\nu_\varepsilon\alpha_{100},\qquad(96.1)$$

$$E_x^{(1)}=\nu_\varepsilon(\alpha_{300}x+\alpha_{210}y+\alpha_{201}z),\qquad(96.2)$$

[1] См., например, [484] стр. 298 и § 79.

[2] Хотя, когда это представляется полезным, и не препятствует, как показано в следующей главе, такому разбиению.

[3] Несмотря на то, что магнитное поле связано с электрическим правилом замен (95.9), для его описания удобно ввести самостоятельные коэффициенты β_{lmn}.

$$E_x^{(2)} = \nu_\varepsilon \left(\frac{\alpha_{500}}{2} x^2 + \frac{\alpha_{320}}{2} y^2 + \frac{\alpha_{302}}{2} z^2 + \right.$$
$$\left. + \alpha_{410} xy + \alpha_{401} xz + \alpha_{311} yz + \alpha_{200} \right), \quad (96.3)$$

$$H_x^{(0)} = \nu_\mu \beta_{100}, \quad (96.4)$$

$$H_x^{(1)} = \nu_\mu (\beta_{300} x + \beta_{210} y + \beta_{201} z), \quad (96.5)$$

$$H_x^{(2)} = \nu_\mu \left(\frac{\beta_{500}}{2} x^2 + \frac{\beta_{320}}{2} y^2 + \frac{\beta_{302}}{2} z^2 + \right.$$
$$\left. + \beta_{410} xy + \beta_{401} xz + \beta_{311} yz + \beta_{200} \right), \quad (96.6)$$

где для сокращения записи слагаемые, коэффициенты при которых в результате решения оказываются равными нулю, опущены.

Подставляя (96.1)–(96.5) в (95.6)–(95.8), используя затем полиномиальные представления интегралов вида $\int\limits_V x'^l y'^m z'^n R^{-1}\, dV'$, приведенные в § 14 (разд. 14.4), и решая возникающие системы линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов α_{lmn}, окончательно получаем:

$$\alpha_{100} = e_x / (\nu_\varepsilon + M_{100}) \,, \quad (96.7)$$

$$\alpha_{300} = \frac{1}{\Delta(\nu_\varepsilon)} \left\{ \left[\nu_\varepsilon + 1 - \left(b^2 + c^2 \right) M_{011} \right] e_x \varkappa_x + c^2 M_{011} e_y \varkappa_y + b^2 M_{110} e_z \varkappa_z \right\},$$
$$(96.8)$$

$$\alpha_{210} = \frac{(\nu_\mu + M_{001}) e_x \varkappa_y + \left(M_{010} + \dfrac{\nu_\mu + 1}{\nu_\varepsilon}\, a^2 M_{110} \right) (e_x \varkappa_y - e_y \varkappa_x)}{(\nu_\mu + M_{001}) \left[\nu_\varepsilon + (a^2 + b^2) M_{110} \right]}, \quad (96.9)$$

$$\alpha_{140} = \frac{1}{\Delta_{100}(\nu_\varepsilon)} \left[(2\nu_\varepsilon + l_{102}) (K_{120} + \Lambda_{120}) - m_{102} (K_{102} - \Lambda_{102}) \right], \quad (96.10)$$

$$\alpha_{320} = \alpha_{140} - \frac{\nu_\mu + 1}{\nu_\varepsilon}\, \beta_{012}, \quad (96.11)$$

$$\alpha_{500} = -\alpha_{140} - \alpha_{104}, \quad (96.12)$$

$$4(\nu_\varepsilon + M_{100})\, \alpha_{200} = -\, n_{120} \alpha_{140} - n_{102} \alpha_{104} - \left(M_{000} + a^2 M_{100} \right) \alpha_{100} +$$
$$+ b^2 \left[2M_{010} + \frac{\nu_\mu + 1}{\nu_\varepsilon} \left(M_{100} - b^2 M_{110} \right) \right] \beta_{012} -$$
$$- c^2 \left[2M_{001} + \frac{\nu_\mu + 1}{\nu_\varepsilon} \left(M_{100} - c^2 M_{101} \right) \right] \beta_{021} \,. \quad (96.13)$$

Встречающиеся в этих формулах величины $\Delta(\nu_\varepsilon)$, $\Delta_{100}(\nu_\varepsilon)$, l_{120}, m_{120}, n_{120} были введены в § 64 и даются выражениями (64.24), (64.38) и (64.36). Нововведенными являются

$$K_{120} = 2 e_y \varkappa_x \varkappa_y - \left(M_{010} - a^2 M_{110} \right) \alpha_{100} \,, \quad (96.14)$$

$$\Lambda_{120} = \left[2M_{110} - \frac{\nu_\mu + 1}{\nu_\varepsilon}\,\left(M_{110} - b^2 M_{120}\right)\right] b^2 \beta_{012} + \\ + \frac{\nu_\mu + 1}{\nu_\varepsilon}\,\left(M_{110} - c^2 M_{111}\right) c^2 \beta_{021}\,. \quad (96.15)$$

Выражения для остальных коэффициентов α_{lmn} вытекают из выражений (96.7)–(96.13) путем либо циклической перестановки, либо взаимной замены координат. В последнем случае при преобразовании следует изменять знак у псевдовеличин: $\mathbf{h}$, β_{lmn}, Λ_{lmn}. Выражения для β_{lmn} получаются из выражений для α_{lmn} в результате одновременной замены[1]

$$\mathbf{e} \to \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} \to -\mathbf{e}, \quad \nu_\varepsilon \leftrightarrow \nu_\mu, \quad \alpha_{lmn} \to \beta_{lmn}, \quad \beta_{lmn} \to -\alpha_{lmn}. \quad (96.16)$$

Таким образом, во внутренней области векторы $\mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}^{(m)}(\mathbf{r})$ выражаются через внутренние потенциальные факторы эллипсоида, максимальный вес которых не превосходит m.

§ 97. Поле рассеяния в ближней зоне

Электромагнитное поле, рассеянное эллипсоидом, определяется разностями $\mathbf{E}_{\rm sc} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_{\rm sc} = \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_0(\mathbf{r})$. В ближней зоне аналогично (95.4) его можно записать в виде

$$\mathbf{E}_{\rm sc} = \sum_{m=0}^{\infty} (ik)^m\, \mathbf{E}_{\rm sc}^{(m)}\,, \qquad \mathbf{H}_{\rm sc} = \sum_{m=0}^{\infty} (ik)^m\, \mathbf{H}_{\rm sc}^{(m)}\,, \quad (97.1)$$

причем $\mathbf{E}_{\rm sc}^{(m)}$ для $m = 0, 1, 2$ даются интегральными членами формул (95.6)–(95.8), которые с помощью выражений для ньютоновских потенциалов снаружи неоднородного эллипсоида (§ 14) приводятся к окончательной форме[2]:

$$\mathcal{E}_x^{(0)} = -\frac{\partial}{\partial x}\,\langle \alpha_{100}\, x\, \mathscr{M}_{100}\rangle\;, \quad (97.2)$$

$$\mathcal{E}_x^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x}\left\langle \frac{1}{2}\, a^2 \alpha_{300}\left(\mathscr{M}_{100} - x^2\,\mathscr{M}_{200} - y^2\,\mathscr{M}_{110} - z^2\,\mathscr{M}_{101}\right) - \\ - \left(a^2\alpha_{120} + b^2\alpha_{210}\right) xy\,\mathscr{M}_{110}\right\rangle + \beta_{010}\, z\,\mathscr{M}_{001} - \beta_{001}\, y\,\mathscr{M}_{010}\,, \quad (97.3)$$

$$\mathcal{E}_x^{(2)} = -\frac{\alpha_{100}}{2}\, I_{000} + \frac{\partial}{\partial x}\left\langle x\left[\frac{\alpha_{100}}{4}\left(I_{000} - a^2 I_{100}\right) - \frac{a^2\alpha_{500}}{4}\left(I_{100} - a^2 I_{200}\right) + \\ + b^2\alpha_{320}\left(I_{100} - b^2 I_{210}\right) + c^2\alpha_{302}\left(I_{100} - c^2 I_{201}\right) - 2a^2\alpha_{140} b^2 J_{210} - \\ - 2a^2\alpha_{104} c^2 J_{201} + 4\alpha_{200}\mathscr{M}_{100}\right]\right\rangle - \frac{\partial}{\partial x}\left(\langle b^2 c^2 \alpha_{311}\rangle\, xyz\,\mathscr{M}_{111}\right) - \\ - a^2\beta_{102} xy\,\mathscr{M}_{110} + \left(b^2\beta_{030} - c^2\beta_{003}\right) yz\,\mathscr{M}_{011} + \\ + a^2\beta_{120} xz\,\mathscr{M}_{101} + \frac{b^2\beta_{012}}{2}\, J_{010} - \frac{c^2\beta_{021}}{2}\, J_{001}\,. \quad (97.4)$$

---

[1] Обусловленной особенностями $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$–симметрии.

[2] Для сокращения записи введено временное обозначение $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \{\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z\} \equiv \mathbf{E}_{\rm sc}$.

Здесь введены обозначения:

$$J_{100} = I_{100} - \frac{2}{3}\mathscr{M}_{200}\, x^2\,, \tag{97.5}$$

$$J_{210} = \mathscr{M}_{110} - \frac{1}{3}\mathscr{M}_{210}\, x^2 - \mathscr{M}_{120}\, y^2 - \mathscr{M}_{111}\, z^2\,, \tag{97.6}$$

а величины I_{lm0} даются соотношениями (78.4)–(78.7).

Остальные компоненты векторов $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(m)} \equiv \mathbf{E}_{\rm sc}^{(m)}$ получаются из (97.2)–(97.4) с помощью циклической перестановки, а векторы $\mathbf{H}_{\rm sc}^{(m)}$ связаны с $\mathbf{E}_{\rm sc}^{(m)}$ правилом замен (95.9). Максимальный вес внешних потенциальных факторов эллипсоида, входящих в выражения $\mathbf{E}_{\rm sc}^{(m)}$ и $\mathbf{H}_{\rm sc}^{(m)}$ равен m.

§ 98. Амплитуда и сечение рассеяния

Входящие в интегральные уравнения (95.1), (95.2) макроскопической электродинамики интегралы

$$\boldsymbol{\Pi}_\varepsilon(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\nu_\varepsilon}\int\limits_V \frac{e^{ikR}}{R}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}')\,dV', \quad \boldsymbol{\Pi}_\mu(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\nu_\mu}\int\limits_V \frac{e^{ikR}}{R}\,\mathbf{H}(\mathbf{r}')\,dV', \tag{98.1}$$

которые можно интерпретировать [561] как электрический и магнитный потенциалы Герца соответственно, позволяют представить рассеянное дифрагирующим телом поле в произвольной внешней точке непосредственно через полные поля внутри рассеивателя:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\rm sc} &= \left(\operatorname{grad}\operatorname{div} + k^2\right)\boldsymbol{\Pi}_\varepsilon + ik\operatorname{rot}\boldsymbol{\Pi}_\mu, \\ \mathbf{H}_{\rm sc} &= \left(\operatorname{grad}\operatorname{div} + k^2\right)\boldsymbol{\Pi}_\mu - ik\operatorname{rot}\boldsymbol{\Pi}_\varepsilon. \end{aligned} \tag{98.2}$$

Существенно, что в дальней зоне, для которой справедлива асимптотическая формула[1]

$$\frac{e^{ikR}}{R} \approx \frac{e^{ikr}}{r}\, e^{-ik\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}'}\,,$$

где единичный вектор $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{r}/r$, вместо (98.2) можно пользоваться выражениями

$$\mathbf{E}_{\rm sc} = k^2\left([\nu\,[\boldsymbol{\Pi}_\varepsilon\boldsymbol{\nu}]] + [\boldsymbol{\Pi}_\mu\boldsymbol{\nu}]\right), \qquad \mathbf{H}_{\rm sc} = [\boldsymbol{\nu}\mathbf{E}_{\rm sc}]\,, \tag{98.3}$$

не содержащими операций дифференцирования.

Низкочастотные разложения полей (98.3) получаются при подстановке в них НЧ разложений потенциалов Герца

$$\boldsymbol{\Pi}_\varepsilon = \sum_{m=0}^{\infty}(ik)^m\boldsymbol{\Pi}_\varepsilon^{(m)}\,, \qquad \boldsymbol{\Pi}_\mu = \sum_{m=0}^{\infty}(ik)^m\boldsymbol{\Pi}_\mu^{(m)}\,, \tag{98.4}$$

возникающих, в свою очередь, при внесении в (98.1) рядов (95.4). В рассматриваемом случае, когда на непоглощающем (ε,μ)–эллипсоиде рассеивается линейно поляризованная плоская электромагнитная волна, для первых

[1] См. (75.13), (75.14).

трех членов рядов (98.4) получаем

$$\Pi^{(0)}_{\varepsilon\,x} = \frac{e^{ikr}}{3r}\,\gamma^e_{100}\,, \qquad \mathbf{\Pi}^{(1)}_{\varepsilon} = 0,$$

$$\Pi^{(2)}_{\varepsilon\,x} = \frac{e^{ikr}}{30r}\left[\,\delta^e_{100} + \gamma^e_{100}\left\langle a^2\nu_x^2\right\rangle - 2\left(a^2\gamma^e_{300}\nu_x + b^2\gamma^e_{210}\nu_y + c^2\gamma^e_{201}\nu_z\right)\right]; \tag{98.5}$$

$$\Pi^{(0)}_{\mu\,x} = \frac{e^{ikr}}{3r}\,\gamma^m_{100}, \qquad \mathbf{\Pi}^{(1)}_{\mu} = 0,$$

$$\Pi^{(2)}_{\mu\,x} = \frac{e^{ikr}}{30r}\left[\,\delta^m_{100} + \gamma^m_{100}\left\langle a^2\nu_x^2\right\rangle - 2\left(a^2\gamma^m_{300}\nu_x + b^2\gamma^m_{210}\nu_y + c^2\gamma^m_{201}\nu_z\right)\right]. \tag{98.6}$$

Здесь

$$\gamma^e_{lmn} = abc\,\alpha_{lmn}\,, \qquad \gamma^m_{lmn} = abc\,\beta_{lmn}\,, \tag{98.7}$$

$$\delta^e_{100} = abc\left(10\alpha_{200} + a^2\alpha_{500} + b^2\alpha_{320} + c^2\alpha_{302}\right). \tag{98.8}$$

Входящая в (98.8) комбинация коэффициентов α_{lmn} связана, как легко проверить, с дипольным моментом, возбуждаемым в эллипсоиде квадратичным по координатам внешним полем[1], и может быть упрощена с помощью тождества[2] (Е.7) к виду

$$\begin{aligned}\frac{\delta^e_{100}}{abc} &= \frac{\left\langle a^2 e_x \varkappa_x\right\rangle \varkappa_x - \left(3M_{000} + a^2 M_{100}\right)\alpha_{100}}{\nu_\varepsilon + M_{100}} - \\ &- \frac{b^2\left(\nu_\mu + M_{001} - 3M_{010}\right)\left[e_y\varkappa_x\varkappa_y - e_x\varkappa_y^2 - \left(M_{010} + \frac{\nu_\varepsilon+1}{\nu_\mu}\,c^2 M_{011}\right)\alpha_{100}\right]}{\left(\nu_\varepsilon + M_{100}\right)\left[\nu_\mu + \left(b^2 + c^2\right)M_{011}\right]} - \\ &- \frac{c^2\left(\nu_\mu + M_{010} - 3M_{001}\right)\left[e_z\varkappa_x\varkappa_z - e_x\varkappa_z^2 - \left(M_{001} + \frac{\nu_\varepsilon+1}{\nu_\mu}\,b^2 M_{011}\right)\alpha_{100}\right]}{\left(\nu_\varepsilon + M_{100}\right)\left[\nu_\mu + \left(b^2 + c^2\right)M_{011}\right]}.\end{aligned} \tag{98.9}$$

Выражение для δ^m_{100} получается из (98.9) в результате замен (96.16).

По существу, формулы (98.3)–(98.9) воспроизводят в более удобной для практического использования форме результаты, принадлежащие Стивенсону.

Следующий член НЧ разложения рассеянного поля в дальней зоне, связанный с $\mathbf{\Pi}^{(3)}_{\varepsilon}$ и $\mathbf{\Pi}^{(3)}_{\mu}$, можно найти, привлекая интерференционные теоремы теории электромагнитного рассеяния: теорему взаимности и обобщенную оптическую теорему. Для этого вместо универсального (справедливого для произвольного первичного поля) представления (98.3) воспользуемся выражением рассеянного поля

$$\mathbf{E}_{\text{sc}} = \frac{e^{ikr}}{r}\,\mathbf{a}_{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})\,, \qquad \mathbf{H}_{\text{sc}} = \frac{e^{ikr}}{r}\,\left[\boldsymbol{\nu}\mathbf{a}_{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})\right] \tag{98.10}$$

через амплитуду рассеяния $\mathbf{a}_{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\nu})$, справедливое лишь в случае падения линейно поляризованной плоской волны (95.5) для больших $(r \to \infty)$ расстояний от рассеивателя.

[1] Ср. (64.40).

[2] См. Приложение Е.

Для линейных сред комплексная амплитуда рассеяния связана с вектором $\mathbf{e}$ линейным соотношением

$$\mathbf{a}_{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \overleftrightarrow{A}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})\mathbf{e}\,, \tag{98.11}$$

где $\overleftrightarrow{A}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$ — тензор амплитуды рассеяния, удовлетворяющий требованиям теоремы взаимности [312, 378]

$$\overleftrightarrow{A}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \widetilde{\overleftrightarrow{A}}(-\boldsymbol{\nu}, -\boldsymbol{\varkappa}) \tag{98.12}$$

и обобщенной оптической теоремы [262, 312], которая в отсутствие поглощения принимает вид

$$\frac{1}{2ik}\left[\overleftrightarrow{A}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) - \overleftrightarrow{A}^{\dagger}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})\right] = \frac{1}{4\pi}\int \overleftrightarrow{A}^{\dagger}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau})\overleftrightarrow{A}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\tau})\, d\Omega(\boldsymbol{\tau})\,. \tag{98.13}$$

Здесь значками $\sim$ и $\dagger$ обозначены операции транспонирования и эрмитова сопряжения соответственно. Интегрирование в (98.13) распространяется на полный телесный угол.

Следствием симметрии задачи по отношению к преобразованию инверсии $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$ является свойство $\overleftrightarrow{A}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \overleftrightarrow{A}(-\boldsymbol{\varkappa}, -\boldsymbol{\nu})$, которое в сочетании с (98.12) дает

$$\widetilde{\overleftrightarrow{A}}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \overleftrightarrow{A}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\varkappa})\,. \tag{98.14}$$

С учетом (98.14) обобщенная оптическая теорема трансформируется в

$$\operatorname{Im} \overleftrightarrow{A}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{k}{4\pi}\int \widetilde{\overleftrightarrow{A}}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau})\overleftrightarrow{A}^{*}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\tau})\, d\Omega(\boldsymbol{\tau})\,. \tag{98.15}$$

Низкочастотные разложения амплитуды рассеяния и ее тензора имеют вид

$$\mathbf{a}_{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{m=2}^{\infty}(ik)^m \mathbf{a}_{\mathbf{e}}^{(m)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}), \quad \overleftrightarrow{A}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{m=2}^{\infty}(ik)^m\, \overleftrightarrow{A}^{(m)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}), \tag{98.16}$$

причем вещественному вектору $\mathbf{e}$ соответствуют вещественные же $\mathbf{a}_{\mathbf{e}}^{(m)}$ и $\overleftrightarrow{A}^{(m)}$, связанные соотношением $\mathbf{a}_{\mathbf{e}}^{(m)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \overleftrightarrow{A}^{(m)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})\,\mathbf{e}$. Подставляя НЧ ряд для $\overleftrightarrow{A}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$ в (98.15) и приравнивая члены при одинаковых степенях k, получаем

$$\overleftrightarrow{A}^{(3)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = 0\,, \tag{98.17}$$

$$\overleftrightarrow{A}^{(5)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{4\pi}\int \widetilde{\overleftrightarrow{A}}^{(2)}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau})\, \overleftrightarrow{A}^{(2)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\tau})\, d\Omega(\boldsymbol{\tau}), \tag{98.18}$$

$$\overleftrightarrow{A}^{(7)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{4\pi}\int\left[\widetilde{\overleftrightarrow{A}}^{(2)}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau})\overleftrightarrow{A}^{(4)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\tau}) + \widetilde{\overleftrightarrow{A}}^{(4)}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau})\overleftrightarrow{A}^{(2)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\tau})\right] d\Omega(\boldsymbol{\tau}).$$

Таким образом, как и в акустике, в задачах электромагнитного рассеяния на теле, имеющем центр симметрии, который совмещен с началом координат, НЧ разложение мнимой части амплитуды рассеяния начинается с членов порядка k^5.

Чтобы с помощью (98.18) вычислить $\mathbf{a}_{\mathbf{e}}^{(5)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$, достаточно знать лишь вектор $\mathbf{a}_{\mathbf{e}}^{(2)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$. Последний в форме, учитывающей поперечность первичной волны[1], имеет вид

$$a_{\mathbf{e}\,x}^{(2)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = A_{xx}^{(2)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) e_x + A_{xy}^{(2)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) e_y + A_{xz}^{(2)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) e_z\,, \tag{98.19}$$

где

$$A_{xx}^{(2)} = -\alpha_a \left(1 - \varkappa_x^2\right)\left(1 - \nu_x^2\right) - \\ - \alpha_b \varkappa_x \varkappa_y \nu_x \nu_y - \alpha_c \varkappa_x \varkappa_z \nu_x \nu_z - \beta_b \varkappa_z \nu_z - \beta_c \varkappa_y \nu_y, \tag{98.20}$$

$$A_{xy}^{(2)} = \alpha_a \varkappa_x \varkappa_y \left(1 - \nu_x^2\right) + \alpha_b \left(1 - \varkappa_y^2\right) \nu_x \nu_y - \alpha_c \varkappa_y \varkappa_z \nu_x \nu_z + \beta_c \varkappa_x \nu_y\,. \tag{98.21}$$

Здесь α_a, α_b, α_c и β_a, β_b, β_c — пропорциональные объему V эллипсоида компоненты электростатической и магнитостатической поляризуемости соответственно. В частности,

$$\alpha_a = \frac{V}{4\pi\left(\nu_\varepsilon + M_{100}\right)}\,, \qquad \beta_a = \frac{V}{4\pi\left(\nu_\mu + M_{100}\right)}\,. \tag{98.22}$$

Выражения для $a_{\mathbf{e}\,y}^{(2)}$, $a_{\mathbf{e}\,z}^{(2)}$ и остальных элементов матрицы $\hat{A}^{(2)}$ получаются из (98.19)–(98.21) с помощью взаимной замены соответствующих координат.

Усредняя, в соответствии с (98.18), свертку $\widetilde{\hat{A}}^{(2)}(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau})\, \hat{A}^{(2)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\tau})$ по всем направлениям $\boldsymbol{\tau}$, находим матрицу $\hat{A}^{(5)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$, для которой, как ранее для $\hat{A}^{(2)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$, приведем выражения лишь двух ее элементов:

$$A_{xx}^{(5)} = \frac{2}{3}\left[\alpha_a^2 \left(1 - \varkappa_x^2\right)\left(1 - \nu_x^2\right) + \right. \\ \left. + \alpha_b^2 \varkappa_x \varkappa_y \nu_x \nu_y + \alpha_c^2 \varkappa_x \varkappa_z \nu_x \nu_z + \beta_b^2 \varkappa_z \nu_z + \beta_c^2 \varkappa_y \nu_y\right]\,, \tag{98.23}$$

$$A_{xy}^{(5)} = -\frac{2}{3}\left[\alpha_a^2 \varkappa_x \varkappa_y \left(1 - \nu_x^2\right) + \alpha_b^2 \left(1 - \varkappa_y^2\right) \nu_x \nu_y - \alpha_c^2 \varkappa_y \varkappa_z \nu_x \nu_z + \beta_c^2 \varkappa_x \nu_y\right]\,. \tag{98.24}$$

Умножение $\hat{A}^{(5)}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})$ на $\mathbf{e}$ дает после упрощений [459]

$$\mathbf{a}_{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{2}{3}\left(\left[\,[\boldsymbol{\nu}\mathbf{q}^e]\boldsymbol{\nu}\right] + [\mathbf{q}^m \boldsymbol{\nu}]\right), \tag{98.25}$$

где $q_x^e = \alpha_a^2 e_x$, $q_x^m = \beta_a^2 h_x$. Остальные компоненты векторов $\mathbf{q}^e$ и $\mathbf{q}^m$ находятся с помощью циклической перестановки координат.

Возвращаясь к представлению (98.3), (98.4), окончательно имеем

$$\begin{aligned} \Pi_{\varepsilon\,x}^{(3)} &= -\frac{2}{27}\frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{abc}{\nu_\varepsilon + M_{100}}\right)^2 e_x\,, \\ \Pi_{\mu\,x}^{(3)} &= -\frac{2}{27}\frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{abc}{\nu_\mu + M_{100}}\right)^2 h_x\,. \end{aligned} \tag{98.26}$$

[1] Учет в явном виде поперечности первичной и рассеянной волн обеспечивает выполнение теоремы взаимности (98.12). Для этого в случае падающей волны достаточно выполнить замену $\mathbf{e} \to [[\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{e}]\boldsymbol{\varkappa}]$.

Расчет полного эффективного сечения рассеяния σ по формуле

$$\sigma = \int |\,\mathbf{a}_{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\nu})|^2 \, d\Omega(\boldsymbol{\nu}) \tag{98.27}$$

дает начальные два члена НЧ разложения

$$\begin{gathered}\sigma = \frac{8\pi}{27}\, k^4 \left(\left\langle \gamma_{100}^{e\,2} \right\rangle + \left\langle \gamma_{100}^{m\,2} \right\rangle\right) - \frac{8\pi}{135}\, k^6 \left[\frac{1}{5} \left\langle \gamma_{100}^{e\,2} \left(a^2 + 2b^2 + 2c^2\right)\right\rangle + \right. \\ + \frac{1}{5} \left\langle \gamma_{100}^{m\,2} \left(a^2 + 2b^2 + 2c^2\right)\right\rangle + \left\langle \gamma_{100}^{e} \delta_{100}^{e} \right\rangle + \left\langle \gamma_{100}^{m} \delta_{100}^{m} \right\rangle - \\ \left. - \left\langle \gamma_{100}^{e} \left(c^2 \gamma_{021}^{m} - b^2 \gamma_{012}^{m}\right)\right\rangle - \left\langle \gamma_{100}^{m} \left(b^2 \gamma_{012}^{e} - c^2 \gamma_{021}^{e}\right)\right\rangle \right] + O(k^8)\,,\end{gathered} \tag{98.28}$$

первый из которых подтверждается и расчетом по оптической теореме [379]

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}\, \operatorname{Im} \mathbf{a}_{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\varkappa})\mathbf{e} \tag{98.29}$$

на основе (98.25). Результат (98.28) эквивалентен полученному в работе [343].

§ 99. Рассеяние на идеально проводящем эллипсоиде

Если в формулах, относящихся к рассеянию на (ε, μ)–теле, положить $\mu = 0 \quad (\nu_\mu = -1)$, а затем устремить $\varepsilon \to \infty \quad (\nu_\varepsilon = 0)$, то, как показано в [342], результирующие формулы будут описывать рассеяние на идеальном проводнике той же формы[1].

Таким путем, опираясь на результаты §§ 97, 98, проще всего исследовать НЧ рассеяние на идеально проводящем эллипсоиде. Мы приведем здесь только выражения для рассеянного поля в дальней зоне, получающиеся из формул (98.5)–(98.9), (98.26) с помощью указанного предельного перехода. Они имеют вид

$$\mathbf{E}_{\text{sc}} = k^2 \left([\nu\, [\boldsymbol{\Pi}_\varepsilon \boldsymbol{\nu}]] + [\boldsymbol{\Pi}_\mu \boldsymbol{\nu}]\right), \qquad \mathbf{H}_{\text{sc}} = [\boldsymbol{\nu} \mathbf{E}_{\text{sc}}]\,, \tag{99.1}$$

$$\begin{gathered}\Pi_{\varepsilon\, x} = \frac{e^{ikr}}{3r} \left\{ \gamma_{100}^{e} - \frac{k^2}{10} \left[\, \delta_{100}^{e} + \gamma_{100}^{e} \left\langle a^2 \nu_x^2 \right\rangle - 2 \left(a^2 \gamma_{300}^{e} \nu_x + \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. + b^2 \gamma_{210}^{e} \nu_y + c^2 \gamma_{201}^{e} \nu_z\right)\right] + \frac{2}{9}\, ik^3 \delta_{200}^{e} + O(k^4) \right\},\end{gathered} \tag{99.2}$$

$$\begin{gathered}\Pi_{\mu\, x} = \frac{e^{ikr}}{3r} \left\{ \gamma_{100}^{m} - \frac{k^2}{10} \left[\, \delta_{100}^{m} + \gamma_{100}^{m} \left\langle a^2 \nu_x^2 \right\rangle - 2 \left(a^2 \gamma_{300}^{m} \nu_x + \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. + b^2 \gamma_{210}^{m} \nu_y + c^2 \gamma_{201}^{m} \nu_z\right)\right] + \frac{2}{9}\, ik^3 \delta_{200}^{m} + O(k^4) \right\},\end{gathered} \tag{99.3}$$

[1] При этом $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$–симметрия задачи, естественно, утрачивается.

где

$$\gamma^e_{100} = abc\, e_x/M_{100}\ , \tag{99.4}$$

$$\gamma^e_{300} = \frac{abc\left\{\left[1-\left(b^2+c^2\right) M_{011}\right] e_x\varkappa_x + c^2 M_{101} e_y\varkappa_y + b^2 M_{110} e_z\varkappa_z\right\}}{1-\langle(a^2+b^2)\, M_{110}\rangle + \langle a^2b^2\rangle\,\langle M_{011}M_{101}\rangle}\ , \tag{99.5}$$

$$\gamma^e_{210} = \gamma^e_{120} = \frac{abc\,(M_{100}e_x\varkappa_y + M_{010}e_y\varkappa_x)}{(a^2+b^2)\,M_{110}\,(1-M_{001})}\ , \tag{99.6}$$

$$\begin{aligned}\delta^e_{100} = \frac{abc}{M_{100}}\, \Bigg\{\left\langle a^2 e_x\varkappa_x\right\rangle \varkappa_x - \left(3M_{000} + a^2 M_{100}\right)\frac{e_x}{M_{100}} - \\ - b^2\frac{M_{100}+4M_{010}}{1-(b^2+c^2)\,M_{011}}\left[h_z\varkappa_y - \left(M_{010} - c^2M_{011}\right)\frac{e_x}{M_{100}}\right] + \\ + c^2\frac{M_{100}+4M_{001}}{1-(b^2+c^2)\,M_{011}}\left[h_y\varkappa_z + \left(M_{001} - b^2M_{011}\right)\frac{e_x}{M_{100}}\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{99.7}$$

$$\delta^e_{200} = a^2b^2c^2\, e_x\big/M^2_{100}\ , \tag{99.8}$$

$$\gamma^m_{100} = -abc\, h_x/(1-M_{100})\ , \tag{99.9}$$

$$\gamma^m_{300} = -\,\frac{abc\left[\left(b^2+c^2\right) M_{011}h_x\varkappa_x - c^2M_{101}h_y\varkappa_y - b^2M_{110}h_z\varkappa_z\right]}{\langle a^2b^2\rangle\,\langle M_{011}M_{101}\rangle}\ , \tag{99.10}$$

$$\gamma^m_{210} = -\,\frac{abc\left[M_{001}h_x\varkappa_y + \left(M_{010} - a^2M_{110}\right)(h_x\varkappa_y - h_y\varkappa_x)\right]}{M_{001}\left[1-(a^2+b^2)\,M_{110}\right]}\ , \tag{99.11}$$

$$\begin{aligned}\delta^m_{100} = -\frac{abc}{1-M_{100}}\,\Bigg\{\left\langle a^2h_x\varkappa_x\right\rangle\varkappa_x + \left(3M_{000} + a^2M_{100}\right)\frac{h_x}{1-M_{100}} + \\ + \frac{b^2\,(M_{001}-3M_{010}) - c^2\,(M_{010}-3M_{001})}{(b^2+c^2)\,M_{011}\,(1-M_{100})}\,(M_{010}e_y\varkappa_z + M_{001}e_z\varkappa_y)\Bigg\},\end{aligned} \tag{99.12}$$

$$\delta^m_{200} = \frac{a^2b^2c^2}{(1-M_{100})^2}\,h_x. \tag{99.13}$$

Подстановка этих выражений в (98.28) дает формулу для полного эффективного сечения рассеяния на идеально проводящем эллипсоиде.

Результаты данного параграфа согласуются с соответствующими результатами работы [343] при исправлении допущенной в ней ошибки (см. [316]).

§ 100. Рассеяние на эллиптическом диске

Решение задачи НЧ дифракции на идеально проводящем диске[1], лежащем в плоскости $z = 0$ и ограниченном эллипсом $x^2\big/a^2 + y^2\big/b^2 = 1$, мы получим, совершив предельный переход при $c \to 0$ в формулах предыдущего параграфа. При этом разрушается равноправие декартовых направлений: исключается возможность циклической или взаимной перестановки декартовых координат. Сохраняется лишь (x, y)–симметрия, допускающая взаимную замену $x \leftrightarrow y$.

[1] Материалом для этого параграфа послужила работа [519].

Рассеянное эллиптическим диском электромагнитное поле дается в дальней зоне формулами (99.1), где теперь $\Pi_{\varepsilon\, z} = \Pi_{\mu\, x} = \Pi_{\mu\, y} = 0$,

$$\Pi_{\varepsilon\, x} = \frac{e^{ikr}}{3r}\left\{\gamma^e_{100} - \frac{k^2}{10}\left[\,\delta^e_{100} + \gamma^e_{100}\left(a^2\nu_x^2 + b^2\nu_y^2\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. -2\left(a^2\gamma^e_{300}\nu_x + b^2\gamma^e_{210}\nu_y\right)\right] + \frac{2}{9}\,ik^3\delta^e_{200} + O(k^4)\right\}, \quad (100.1)$$

$$\Pi_{\mu\, z} = \frac{e^{ikr}}{3r}\left\{\gamma^m_{100} - \frac{k^2}{10}\left[\,\delta^m_{100} + \gamma^m_{100}\left(a^2\nu_x^2 + b^2\nu_y^2\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. -2\left(a^2\gamma^m_{300}\nu_x + b^2\gamma^m_{210}\nu_y\right)\right] + \frac{2}{9}\,ik^3\delta^m_{200} + O(k^4)\right\}, \quad (100.2)$$

а $\Pi_{\varepsilon\, y}$ получается из (100.1) с помощью взаимной замены $x \leftrightarrow y$, причем входящие в эти формулы коэффициенты равны

$$\gamma^e_{100} = ab\, e_x/N_{10}\ , \quad (100.3)$$

$$\gamma^e_{300} = \frac{ab^3}{3}\ \frac{N_{02}e_x\varkappa_x - N_{11}e_y\varkappa_y}{3N_{10}N_{01} - N_{00}N_{11}}\,, \quad (100.4)$$

$$\gamma^e_{210} = \frac{ab}{a^2+b^2}\ \frac{N_{10}e_x\varkappa_y + N_{01}e_y\varkappa_x}{N_{11}N_E}\,, \quad (100.5)$$

$$\delta^e_{100} = \frac{ab}{N_{10}}\left\{a^2e_x\varkappa_x^2 + b^2e_y\varkappa_x\varkappa_y - \left(a^2 + \frac{3N_{00}}{N_{10}}\right)e_x + \right.$$
$$\left. +b^2\left(1 + \frac{2N_{01}}{N_E + N_{01}}\right)\left(\frac{N_{01}}{N_{10}}e_x + e_x\varkappa_y^2 - e_y\varkappa_x\varkappa_y\right)\right\}, \quad (100.6)$$

$$\delta^e_{200} = a^2b^2\, e_x/N_{10}^2\ , \quad (100.7)$$

$$\gamma^m_{001} = -ab\, h_z/N_E\ , \quad (100.8)$$

$$\gamma^m_{102} = -ab\,\frac{N_Eh_z\varkappa_x - N_{10}h_x\varkappa_z}{N_{01}\left(N_{10} + N_E\right)}\,, \quad (100.9)$$

$$\delta^m_{001} = -\frac{ab}{N_E}\left\{a^2h_x\varkappa_x\varkappa_z + b^2h_y\varkappa_y\varkappa_z + \frac{3N_{00}}{N_E}\,h_z + \right.$$
$$\left. +\frac{\left(a^2+3b^2\right)N_E - 4\left(a^2+b^2\right)N_{10}}{\left(a^2+b^2\right)N_{11}N_E}\ \left(N_{10}e_x\varkappa_y + N_{01}e_y\varkappa_x\right)\right\}, \quad (100.10)$$

$$\delta^m_{002} = a^2b^2\, h_z/N_E^2\ . \quad (100.11)$$

Таким образом, переизлученное диском электромагнитное поле выражается в дальней зоне через внутренние потенциальные факторы эллиптического диска N_{lm} [1].

[1] Напомним, что N_E определяется формулой (84.6).

В частном случае круглого диска $(b=a)$, когда N_{lm} даются формулой (5.21), выражения (100.1), (100.2) принимают вид

$$\Pi_{\varepsilon\,x} = \frac{4a^3 e^{ikr}}{9\pi r}\left\{3e_x + \frac{k^2a^2}{10}\left[8e_x + 5e_x\varkappa_x^2 - 2e_z\varkappa_x\varkappa_z + 3e_x\nu_z^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(3e_x\varkappa_x - e_y\varkappa_y\right)\nu_x + 2\left(e_x\varkappa_y + e_y\varkappa_x\right)\nu_y\right] + i\,\frac{8}{3\pi}\,k^3a^3e_x + O(k^4)\right\}, \quad (100.12)$$

$$\Pi_{\mu\,z} = \frac{2a^3 e^{ikr}}{9\pi r}\left\{-3h_z + \frac{k^2a^2}{10}\left[12h_z - 3h_z\varkappa_z^2 - 3h_z\nu_z^2 - \right.\right.$$
$$\left.\left. -4\left(2h_z\varkappa_x - h_x\varkappa_z\right)\nu_x - 4\left(2h_z\varkappa_y - h_y\varkappa_z\right)\nu_y\right] + i\,\frac{4}{3\pi}\,k^3a^3h_z + O(k^4)\right\}, \quad (100.13)$$

подтверждая (при переходе к сферическим координатам и компонентам) и дополняя результаты Эггиманна [42, 91].

Полное эффективное сечение рассеяния на эллиптическом диске определяется при подстановке выражений (100.3)–(100.10) в вытекающую из (98.28) формулу

$$\sigma = \frac{8\pi}{27}\,k^4\left(\gamma_{100}^{e\,2} + \gamma_{010}^{e\,2} + \gamma_{001}^{m\,2}\right) -$$
$$- \frac{8\pi}{135}\,k^6\left\{\frac{1}{5}\left[\left(a^2+2b^2\right)\gamma_{100}^{e\,2} + \left(2a^2+b^2\right)\gamma_{010}^{e\,2} + 2\left(a^2+b^2\right)\gamma_{001}^{m\,2}\right] + \right.$$
$$+ \gamma_{100}^{e}\delta_{100}^{e} + \gamma_{010}^{e}\delta_{010}^{e} + \gamma_{001}^{m}\delta_{001}^{m} + b^2\gamma_{100}^{e}\gamma_{012}^{m} -$$
$$\left. - a^2\gamma_{010}^{e}\gamma_{102}^{m} - \gamma_{001}^{m}\left(a^2\gamma_{120}^{e} - b^2\gamma_{210}^{e}\right)\right\} + O(k^8)\,. \quad (100.14)$$

Основываясь на теореме Бабине, результаты полученного решения задачи рассеяния на эллиптическом диске можно непосредственно использовать для описания дифрагированного поля в дополнительной задаче дифракции линейно поляризованной волны на эллиптическом отверстии в бесконечно тонком идеально проводящем плоском экране. Именно [40,148], если на такое отверстие $\left(x^2\big/a^2 + y^2\big/b^2 = 1\right)$ в экране, лежащем в плоскости $z=0$, падает[1] волна

$$\mathbf{E}_0 = -\mathbf{h}\,e^{ik\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}}\,, \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{e}\,e^{ik\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}} \qquad (\varkappa_z > 0)\,, \quad (48.15)$$

то поле дифрагированной волны $\mathbf{E}_{\rm dif}$, $\mathbf{H}_{\rm dif}$ связано с полем рассеяния на эллиптическом диске[2] равенствами

$$\mathbf{E}_{\rm dif} = \mathbf{H}_{\rm sc}\,, \quad \mathbf{H}_{\rm dif} = -\mathbf{E}_{\rm sc} \qquad (z>0). \quad (100.16)$$

[1] Ср. (95.5).
[2] Например, с волновыми полями дальней зоны (99.1), (100.1), (100.2).

Глава 19
Проводящий эллипсоид в низкочастотном поле

§ 101. Предварительные замечания

Развитый Стивенсоном [342, 343] приближенный метод решения задач НЧ дифракции опирается на разложение полей в ряды по степеням волнового числа $k = \omega/\mathfrak{c}$ и приводит в случае диэлектрических тел к появлению малого параметра теории L/λ, где L — характерный размер тела, λ — длина волны. Для поля снаружи тела этот параметр сохраняется и при формальном предельном переходе $\mu = 0$, $\varepsilon = \infty$, которому в согласии с общей теорией [450] соответствует идеальный проводник. По-видимому, с этим связано убеждение в безоговорочной эффективности метода Стивенсона и в случае проводящих тел (см., например, [235, 236, 371]), у которых комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega} \tag{101.1}$$

велика по модулю по сравнению с единицей.

В действительности в последнем случае теория содержит два параметра разложения: ω/σ и L^2/δ^2, где δ — классическая толщина скин-слоя. Поэтому метод Стивенсона эффективен лишь при $L \ll \delta$ и отказывает при $L \geqslant \delta$. Только, когда $\delta \ll L$, мы снова можем получить надежный результат, беря в качестве первого приближения решение для идеально проводящего тела и находя к нему поправку стандартным методом возмущений (приближение сильного скин-эффекта). Сказанное отчасти иллюстрирует данное в гл. 17 исследование магнитной поляризуемости эллипсоида.

В работах [235, 236, 371] метод Стивенсона применялся к уравнениям Максвелла в дифференциальной форме. Для рассматриваемой здесь задачи о проводящем эллипсоиде удобнее исходить из интегральных уравнений макроскопической электродинамики [36, 561][1], записав их в форме, получающейся при одновременном использовании и векторного, и скалярного потенциалов. Пусть в первичное поле в вакууме $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ (зависимость от времени $e^{-i\omega t}$) внесено однородное проводящее тело с $\varepsilon(\omega)$ и $\mu = 1$. Если $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ — полное поле внутри тела, то комплексной поляризации $\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi}\,(\varepsilon - 1)\mathbf{E}$

[1] См. § 95.

соответствуют поверхностный заряд (свободный и связанный) с плотностью P_n и объемный ток (проводимости и поляризационный) с плотностью $-i\omega\mathbf{P}$. Поэтому вторичное поле, создаваемое поляризацией $\mathbf{P}$, описывается потенциалами

$$\mathbf{A}_P = -ik\int \mathsf{G}(R)\mathbf{P}\,dV', \qquad \Phi_P = \oint \mathsf{G}(R)\mathbf{P}\,d\mathbf{S}',$$

где $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе тела, а $\mathsf{G}(R) = e^{ikR}/R$ — функция Грина свободного пространства[1]. Подставляя теперь выражения для полей

$$\mathbf{E}_P = -\nabla\Phi_P + ik\mathbf{A}_P \qquad \mathbf{H}_P = \operatorname{rot}\mathbf{A}_P$$

в очевидные соотношения $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_P$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_P$ и заменяя в них $\mathbf{P}$ на $\frac{1}{4\pi}(\varepsilon-1)\mathbf{E}$, мы и получим интегральные уравнения электродинамики

$$\left(1-i\tau\,\frac{k}{\varkappa}\right)\left(\operatorname{grad}\oint \mathsf{G}\,\mathbf{E}\,d\mathbf{S}'-k^2\int \mathsf{G}\,\mathbf{E}\,dV'\right)=4\pi i\,\frac{k}{\varkappa}\,(\mathbf{E}-\mathbf{E}_0)\,, \tag{101.2}$$

$$\left(1-i\tau\,\frac{k}{\varkappa}\right)\operatorname{rot}\int \mathsf{G}\,\mathbf{E}\,dV' = \frac{4\pi}{\varkappa}\,(\mathbf{H}-\mathbf{H}_0)\,, \tag{101.3}$$

где введены обозначения

$$\frac{4\pi\sigma}{\mathfrak{c}} = \varkappa\,, \qquad \varepsilon' - 1 = \tau\,, \tag{101.4}$$

так что для $\varepsilon(\omega)$, даваемой формулой (101.1),

$$\varepsilon - 1 = i\,\frac{\varkappa}{k}\left(1 - i\,\tau\frac{k}{\varkappa}\right). \tag{101.5}$$

Применяя оператор rot к уравнению (101.2), получаем

$$\operatorname{rot}\left\{\mathbf{E}-\mathbf{E}_0 - i\frac{k\varkappa}{4\pi}\left(1-i\tau\,\frac{k}{\varkappa}\right)\int \mathsf{G}\,\mathbf{E}\,dV'\right\} = 0. \tag{101.6}$$

Так как $\operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mathbf{H}$, $\operatorname{rot}\mathbf{E}_0 = ik\mathbf{H}_0$, то (101.6) эквивалентно уравнению (101.3), которое, таким образом, есть следствие (101.2) и дифференциальных уравнений Максвелла.

§ 102. Уравнения низкочастотных приближений

Все величины, зависящие от k, разложим в степенные ряды

$$F = \sum_{l=0}^{\infty}(ik)^l F^{(l)}\,.$$

[1] Здесь вместо функции (см. (95.3)) $G(R) = -e^{ikR}/(4\pi R)$, удовлетворяющей уравнению $\triangle G + k^2 G = \delta(R)$, используется $\mathsf{G}(R)$, удовлетворяющая уравнению $\triangle\mathsf{G}+k^2\mathsf{G} = -4\pi\delta(R)$.

В частности, для функции Грина свободного пространства

$$\mathsf{G}^{(0)} = \frac{1}{R}\,, \qquad \mathsf{G}^{(1)} = 1\,, \quad \ldots \tag{102.1}$$

Так как тело однородно, то во всех приближениях $\operatorname{div}\mathbf{E}^{(m)}=0$, $\operatorname{div}\mathbf{E}_0^{(m)}=0$. Кроме того, в 1-ом приближении первичное поле потенциально: $\operatorname{rot}\mathbf{E}_0^{(0)}=0$, $\operatorname{rot}\mathbf{H}_0^{(0)} = 0$ и (за исключением особых случаев типа интерференционных узлов)

$$\mathbf{E}_0^{(0)} = \mathbf{e}\,, \qquad \mathbf{H}_0^{(0)} = \mathbf{h}\,, \tag{102.2}$$

где $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ — постоянные векторы.

Из уравнений (101.2), (101.3) сразу следует очевидный результат: в первом приближении (статика!) внутри проводящего тела

$$\mathbf{E}^{(0)} = 0\,, \qquad \mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{H}_0^{(0)}\,. \tag{102.3}$$

С учетом (102.3) уравнение (101.2) для поля второго приближения принимает вид

$$\nabla \oint \mathsf{G}^{(0)}(R)\,\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{S}' = -\frac{4\pi}{\varkappa}\,\mathbf{E}_0^{(0)}\,. \tag{102.4}$$

Представим $\mathbf{E}^{(1)}$ в виде суммы потенциального (p) и чисто соленоидального (s) полей:

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}^{(1\mathrm{p})} + \mathbf{E}^{(1\mathrm{s})}\,, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E}^{(1\mathrm{p})} = \operatorname{div}\mathbf{E}^{(1\mathrm{s})} = 0\,,$$

$$\mathbf{E}^{(1\mathrm{p})} = -\nabla\Phi^{(1)}\,, \qquad \mathbf{E}^{(1\mathrm{s})}\cdot\mathbf{n} = 0 \qquad \text{на} \quad S\,.$$

Тогда

$$\nabla \oint \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial n'}\,\frac{dS'}{R} = \frac{4\pi}{\varkappa}\,\mathbf{E}_0^{(0)} = -\,\frac{4\pi}{\varkappa}\,\nabla\Phi_0^{(0)}\,,$$

где $\Phi_0^{(0)}$ — потенциал первого приближения первичного поля. Таким образом, с точностью до константы

$$\frac{1}{4\pi}\oint \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial n'}\,\frac{dS'}{R} = -\,\frac{1}{\varkappa}\,\Phi_0^{(0)}\,. \tag{102.5}$$

Это уравнение определяет потенциальную часть поля. Для соленоидальной части уравнение (101.6) дает

$$\mathbf{E}^{(1\mathrm{s})} = \mathbf{E}_0^{(1)} - \nabla f^{(1)}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E}^{(1\mathrm{s})} = 0, \qquad \mathbf{E}^{(1\mathrm{s})}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \quad S\,, \tag{102.6}$$

то есть приводит к краевой задаче

$$\Delta f^{(1)} = 0, \qquad \frac{\partial f^{(1)}}{\partial n} = \mathbf{E}_0^{(1)}\cdot\mathbf{n} \quad \text{на} \quad S.$$

Если поле $\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}^{(1\mathrm{p})} + \mathbf{E}^{(1\mathrm{s})}$ найдено, то согласно (101.3)

$$\mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{H}_0^{(1)} + \frac{\varkappa}{4\pi}\,\operatorname{rot}\int \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}')\,\frac{dV'}{R}\,. \tag{102.7}$$

Приравнивая в уравнении (101.2) члены порядка k^2, получаем

$$\nabla \oint \left(\mathsf{G}^{(0)}\,\mathbf{E}^{(2)} + \mathsf{G}^{(1)}\,\mathbf{E}^{(1)} - \frac{\tau}{\varkappa}\,\mathsf{G}^{(0)}\,\mathbf{E}^{(1)}\right) d\mathbf{S}' = -\frac{4\pi}{\varkappa}\,\left(\mathbf{E}_0^{(1)} - \mathbf{E}^{(1)}\right).$$

Так как $\mathsf{G}^{(1)}$ не зависит от координат точки наблюдения, то с учетом (102.4) это уравнение принимает вид

$$\nabla \oint \mathsf{G}^{(0)}(R)\,\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{S}' = -\frac{4\pi}{\varkappa}\,\left(\mathbf{E}_0^{(1)} - \mathbf{E}^{(1)} + \frac{\tau}{\varkappa}\,\mathbf{E}_0^{(0)}\right). \qquad (102.8)$$

Разбивая опять $\mathbf{E}^{(2)}$ на потенциальное $\mathbf{E}^{(2\mathrm{p})} = -\nabla\Phi^{(2)}$ и чисто соленоидальное $\mathbf{E}^{(2\mathrm{s})}$ поля, мы получаем из (102.8) с точностью до постоянной

$$\frac{1}{4\pi}\oint \frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial n'}\,\frac{dS'}{R} = \frac{1}{\varkappa}\,\left(\Phi^{(1)} + f^{(1)} - \frac{\tau}{\varkappa}\,\Phi_0^{(0)}\right). \qquad (102.9)$$

Для соленоидального же поля $\mathbf{E}^{(2\mathrm{s})}$ имеем из (101.6)

$$\mathbf{E}^{(2\mathrm{s})} = \mathbf{E}_0^{(2)} + \frac{\varkappa}{4\pi}\int \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}')\,\frac{dV'}{R} - \nabla f^{(2)},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E}^{(2\mathrm{s})} = 0, \qquad \mathbf{E}^{(2\mathrm{s})}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \quad S. \qquad (102.10)$$

Если $\mathbf{E}^{(2)}$ найдено, то согласно (101.3) и (102.7)

$$\mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{H}_0^{(2)} + \frac{\varkappa}{4\pi}\,\mathrm{rot}\int \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}')\,\frac{dV'}{R} + \frac{\tau}{\varkappa}\,\left(\mathbf{H}_0^{(1)} - \mathbf{H}^{(1)}\right). \qquad (102.11)$$

§ 103. Проводящий эллипсоид в произвольном внешнем поле

Для тел эллипсоидальной формы способ решения уравнений Фредгольма первого рода вида (102.5) или (102.9) аналогичен решению уравнений второго рода, детально описанному в § 64, поэтому подробности расчета здесь опускаются. Как обычно, декартова система координат x, y, z ориентирована по осям $2a, 2b, 2c$ эллипсоида, центр которого совпадает с началом координат.

Решение уравнения (102.5) при $\Phi_0^{(0)} = -\mathbf{er}$ имеет вид $\Phi^{(1)} = -\mathbf{E}^{(1\mathrm{p})}\mathbf{r}$, где однородное поле $\mathbf{E}^{(1\mathrm{p})}$ в нашем случае (ср. (E.5)) равно

$$E_x^{(1\mathrm{p})} = -\frac{e_x}{\varkappa\,M_{100}}\,. \qquad (103.1)$$

Так как $\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_0^{(1)} = \mathbf{h}$, то решение краевой задачи (102.6) находится без труда и имеет вид [487]

$$E_x^{(1\mathrm{s})} = a^2\left(\frac{z}{c^2 + a^2}\,h_y - \frac{y}{a^2 + b^2}\,h_z\right). \qquad (103.2)$$

Заметим, что полю второго приближения $ik\mathbf{E}^{(1)}$ соответствуют джоулевы потери

$$W = \frac{1}{2}\,k^2\sigma V\left(\frac{1}{\varkappa^2}\left\langle\frac{e_x^2}{M_{100}^2}\right\rangle + \frac{1}{5}\left\langle\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}\,h_x^2\right\rangle\right), \tag{103.3}$$

где V — объем эллипсоида.

Электрический и магнитный дипольные моменты тела

$$\mathbf{Q} = \int \mathbf{P}\,dV, \qquad \mathfrak{M} = -\frac{ik}{2}\int [\mathbf{rP}]\,dV,$$

вычисленные по полю второго приближения, описываются формулами

$$Q_z = \frac{V}{4\pi}\left(1 - i\,\tau\frac{k}{\varkappa}\right)\frac{e_z}{M_{001}},$$

$$\mathfrak{M}_z = i\,\frac{V}{20\pi}\,k\,\varkappa\,\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1 - i\,\tau\frac{k}{\varkappa}\right)h_z, \tag{103.4}$$

причем, очевидно, $\mathbf{Q}$ обусловлен полем $\mathbf{E}^{(1\mathrm{p})}$, а $\mathfrak{M}$ — полем $\mathbf{E}^{(1\mathrm{s})}$.

В уравнении третьего приближения (102.9) $\Phi^{(1)}$ и $\Phi_0^{(0)}$ — линейные формы координат, а $f^{(1)}$ — квадратичная. Поэтому решение (102.9) есть сумма линейной и квадратичной форм $\Phi^{(2)} = \Phi^{\mathrm{I}} + \Phi^{\mathrm{II}}$, где

$$\frac{1}{4\pi}\oint\frac{\partial\Phi^{\mathrm{I}}}{\partial n'}\,\frac{dS'}{R} = \frac{1}{\varkappa}\left(\Phi^{(1)} - \frac{\tau}{\varkappa}\,\Phi_0^{(0)}\right), \qquad \frac{1}{4\pi}\oint\frac{\partial\Phi^{\mathrm{II}}}{\partial n'}\,\frac{dS'}{R} = \frac{1}{\varkappa}\,f^{(1)}.$$

Из первого уравнения сразу имеем

$$\Phi^{\mathrm{I}} = -\mathbf{E}^{\mathrm{I}}\mathbf{r}, \qquad E_x^{\mathrm{I}} = -\frac{e_x}{\varkappa^2 M_{100}}\left(\frac{1}{M_{100}} + \tau\right), \tag{103.5}$$

а второе уравнение при

$$f^{(1)} = \frac{1}{2}\left\langle A_{200}\,x^2\right\rangle + \left\langle A_{110}\,xy\right\rangle \tag{103.6}$$

дает (см. (64.19)–(64.24)):

$$\Phi^{\mathrm{II}} = \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{1}{2}\left\langle\alpha_{200}\,x^2\right\rangle + \left\langle\alpha_{110}\,xy\right\rangle\right), \tag{103.7}$$

где

$$\alpha_{110} = \frac{A_{110}}{(a^2+b^2)\,M_{110}}, \tag{103.8}$$

а α_{200}, α_{020}, α_{002} удовлетворяют системе уравнений

$$a^2M_{200}\,\alpha_{200} + b^2M_{110}\,\alpha_{020} + c^2M_{101}\,\alpha_{002} = A_{200}. \tag{103.9}$$

Однородному полю $\mathbf{E}^{\mathrm{I}}$ соответствует (мы удерживаем лишь член порядка k) добавок к дипольному электрическому моменту

$$Q_z^{\mathrm{I}} = i\,\frac{k}{\varkappa}\,\frac{V}{4\pi}\left(\frac{1}{M_{001}} + \tau\right)\frac{e_z}{M_{001}}.$$

Прибавляя это выражение к (103.4), будем иметь

$$Q_z = \frac{V}{4\pi}\left(1 + i\,\frac{k}{\varkappa}\,\frac{1}{M_{001}}\right)\frac{e_z}{M_{001}}\,, \tag{103.10}$$

так что в «двучленном» приближении $\mathbf{Q}$ не зависит от значения величины $\tau = \varepsilon' - 1$. Заметим, что в работе [371] поле внутри тела описывается квазистационарным уравнением $\operatorname{rot}\mathbf{H} = (4\pi/\mathfrak{c})\,\sigma\mathbf{E}$. Поэтому в приведенных в [371] решениях для шара и полого цилиндра удержание поправочных членов порядка $k/\varkappa$ является превышением точности.

Поле $\mathbf{E}^{\mathrm{II}} = -\nabla\Phi^{\mathrm{II}}$ есть линейная функция координат. Оно не вносит вклада в электрический дипольный момент, но дает добавок к магнитному моменту

$$\mathfrak{M}_z^{\mathrm{II}} = k^2\alpha_{110}\,\frac{V}{40\pi}\,\left(a^2 - b^2\right)\,, \tag{103.11}$$

исчезающий при вырождении эллипсоида в шар. Кроме того, это поле приводит к появлению квадрупольного электрического момента[1]

$$Q_{ij} = \int\left[3\left(P_i x_j + P_j x_i\right) - 2\left(\mathbf{Pr}\right)\delta_{ij}\right]dV$$

с компонентами

$$\begin{gathered} Q_{zz} = ik\frac{V}{10\pi}\,\left(2c^2\alpha_{002} - a^2\alpha_{200} - b^2\alpha_{020}\right)\,, \\ Q_{xy} = ik\frac{3V}{20\pi}\left(a^2 + b^2\right)\,\alpha_{110}. \end{gathered} \tag{103.12}$$

Здесь, как и при вычислении $\mathbf{Q}^{\mathrm{I}}$, удержаны лишь члены порядка k.

Соленоидальное поле $\mathbf{E}^{(2\mathrm{s})}$ удовлетворяет уравнениям (102.10), которые можно переписать в виде

$$\begin{gathered} \mathbf{j}^{(2\mathrm{s})} = \sigma\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(2)} - \nabla f^{(2)}\right)\,, \qquad \operatorname{div}\mathbf{j}^{(2\mathrm{s})} = 0\,, \qquad j_n^{(2\mathrm{s})} = 0\,, \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(2)} = \mathbf{E}_0^{(2)} + \frac{\varkappa}{4\pi}\,\mathbf{E}^{(1\mathrm{p})}\int\frac{dV'}{R} + \frac{\varkappa}{4\pi}\int\mathbf{E}^{(1\mathrm{s})}(\mathbf{r}')\,\frac{dV'}{R}\,, \end{gathered} \tag{103.13}$$

где мы пренебрегли поляризационным током, имеющим в этом приближении порядок k^3. Уравнения (103.13) суть обычные уравнения для стационарных токов в массивном проводнике, возбуждаемых заданным сторонним полем $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(2)}$. Здесь мы не будем выписывать довольно громоздкое решение этой краевой задачи, а ограничимся вычислением создаваемого токами $\mathbf{j}^{(2\mathrm{s})}$ магнитного момента. Его можно найти, и не зная распределения токов $\mathbf{j}^{(2\mathrm{s})}$, если воспользоваться теоремой взаимности (см. Приложение E) для стационарных токов

$$\int\boldsymbol{\mathcal{E}}\mathbf{j}^{(2\mathrm{s})}\,dV = \int\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(2)}\mathbf{j}\,dV\,, \tag{103.14}$$

где $\mathbf{j}$ — плотность тока, возбуждаемого в том же теле некоторым сторонним полем $\boldsymbol{\mathcal{E}}$.

[1] См. формулу (F.11) Приложения F.

В качестве этого другого стороннего поля возьмем $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ с компонентами

$$\mathcal{E}_x = -y, \qquad \mathcal{E}_y = x, \qquad \mathcal{E}_z = 0\,.$$

Тогда левая часть (103.14) перейдет в $\int\left(xj_y^{(2\mathrm{s})} - yj_x^{(2\mathrm{s})}\right)dV$, т. е. в выражение, определяющее $\mathfrak{M}_z^{(2\mathrm{s})}$. Заметим теперь, что распределение стационарного тока в массивном проводнике зависит, очевидно, не от самого стороннего поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, а от $\operatorname{rot}\boldsymbol{\mathcal{E}}$. В нашем случае $\operatorname{rot}\boldsymbol{\mathcal{E}} = 2\,\mathbf{z}_0$ и, следовательно, $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, где поле $\mathbf{E}$ описывается формулами (103.2), если положить в них $h_x = h_y = 0$, $h_z = 2$. Таким образом,

$$j_x = -2\sigma\,\frac{a^2}{a^2+b^2}\,y\,, \qquad j_y = 2\sigma\,\frac{b^2}{a^2+b^2}\,x\,, \qquad j_z = 0$$

и

$$\mathfrak{M}_z^{(2\mathrm{s})} = \frac{\varkappa}{4\pi(a^2+b^2)}\int\left(b^2x\mathcal{E}_y^{(2)} - a^2y\mathcal{E}_x^{(2)}\right)dV\,. \tag{103.15}$$

Первые два члена в выражении (103.13) для $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(2)}$ являются квадратичными функциями координат. Поэтому они не дают вклада в $\mathfrak{M}_z^{(2\mathrm{s})}$, и при вычислении (103.15) вместо $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(2)}$ можно писать один третий член

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(2\mathrm{s})} = \frac{\varkappa}{4\pi}\int\mathbf{E}^{(1\mathrm{s})}(\mathbf{r}')\,\frac{dV'}{R}\,.$$

Подставляя сюда выражения (103.2), выполняя интегрирование и упрощая результат с помощью рекуррентных формул (3.7) и соотношения (2.9), окончательно получаем[1]

$$\mathfrak{M}_z^{(2\mathrm{s})} = \frac{\varkappa^2}{70\pi}\,\frac{a^4b^4}{(a^2+b^2)^2}\,(1-M_{001})\,Vh_z. \tag{103.16}$$

Итак, собирая вместе полученные результаты, имеем

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{(0)} + ik\,\mathbf{Q}^{(1)}\,, \qquad \boldsymbol{\mathfrak{M}} = ik\,\boldsymbol{\mathfrak{M}}^{(1)} - k^2\boldsymbol{\mathfrak{M}}^{(2)}, \tag{103.17}$$

где

$$Q_z^{(0)} = \frac{V}{4\pi}\,\frac{e_z}{M_{001}}\,, \qquad Q_z^{(1)} = \frac{V}{4\pi\varkappa}\,\frac{e_z}{M_{001}^2}, \tag{103.18}$$

$$\begin{gathered}\mathfrak{M}_z^{(1)} = \frac{\varkappa V}{20\pi}\,\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\,h_z, \quad \mathfrak{M}_z^{(2)} = \mathfrak{M}_z^{(2\mathrm{s})} + \mathfrak{M}_z^{(2\tau)} + \mathfrak{M}_z^{(2\mathrm{p})},\\ \mathfrak{M}_z^{(2\tau)} = -\frac{\tau V}{20\pi}\,\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\,h_z, \quad \mathfrak{M}_z^{(2\mathrm{p})} = -\frac{V}{40\pi M_{110}}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,A_{110}.\end{gathered} \tag{103.19}$$

Здесь $\mathfrak{M}_z^{(2\mathrm{s})}$ обусловлен соленоидальными токами третьего приближения (формула (103.16)), $\mathfrak{M}_z^{(2\tau)}$ — поляризационными токами (второй член в (103.4)), а $\mathfrak{M}_z^{(2\mathrm{p})}$ — потенциальным полем $\mathbf{E}^{\mathrm{II}}$. Приведенное выражение для

[1] Содержание этой главы основывается на работе [496] М. Л. Левина и автора. Прямой вывод формулы (103.16), полученной первоначально в [488], воспроизведен в § 92 (см. формулу (92.9)).

$\mathbf{E}^{\text{II}}$ есть следствие (103.11) и (103.8). Наконец, компоненты тензора квадрупольного момента (103.12) $\overleftrightarrow{Q} = ik\overleftrightarrow{Q}^{(1)}$ можно после решения системы (103.9) представить в виде

$$Q_{zz}^{(1)} = \frac{V}{10\pi\triangle}\left[3c^2 A_{002} - \left\langle a^2 A_{200}\right\rangle - \left\langle a^2 b^2\right\rangle (3M_{110}\,A_{002} - \langle M_{011} A_{200}\rangle)\right],$$

$$\triangle = 1 - \left\langle \left(a^2 + b^2\right) M_{110}\right\rangle + \left\langle a^2 b^2\right\rangle \langle M_{011} M_{101}\rangle, \tag{103.20}$$

$$Q_{xy}^{(1)} = \frac{3V}{20\,\pi\,M_{110}}\,A_{110}.$$

Из формул (103.18) сразу видно, что параметром разложения электрического дипольного момента является отношение $k/\varkappa = \omega/(4\pi\sigma)$. Так как $k\,\varkappa = 2/\delta^2$ (δ — толщина скин-слоя), то, согласно (103.16)–(103.19),

$$\frac{\mathfrak{M}}{Q} \sim \frac{L^2}{\delta^2}, \qquad \frac{k\,\mathfrak{M}^{(2\text{s})}}{\mathfrak{M}^{(1)}} \sim \frac{L^2}{\delta^2}$$

и такой же порядок имеет отношение соленоидальных полей (вихревых токов) третьего и второго приближений. С другой стороны, из (103.1) и (103.2) следует, что уже во втором приближении $E^{(1\text{s})}/E^{(1\text{p})} \sim \varkappa L$, а согласно (103.16) и (103.19) отношение первого члена $\mathfrak{M}^{(2\text{s})}$ к двум последующим $\mathfrak{M}^{(2\tau)}$ и $\mathfrak{M}^{(2\text{p})}$ по порядку величины равно $(\varkappa L)^2$. Для металлов $\varkappa \sim 10^8\,\text{см}^{-1}$, для человеческого тела [235] $\varkappa \approx 2\,\text{см}^{-1}$. Поэтому обычно $\varkappa L \gg 1$, и внутри проводящего тела доминирующую роль играют вихревые поля, для которых параметр малости теории есть L^2/δ^2.

В работах [235, 236] исследовалось поглощение мощного электромагнитного излучения в биологических объектах, которые при теоретическом анализе моделировались эллипсоидом. Расчет поглощения проводился по формулам второго приближения, являющимся частными случаями (103.3). Для крупных объектов приведенные в [235, 236] теоретические данные, по-видимому, не имеют смысла, так как, скажем, для человека на частоте 25 МГц глубина скин-слоя $\delta \approx 15$ см и, следовательно, третье приближение отнюдь не мало по сравнению со вторым.

§ 104. Эллипсоид в поле плоской волны

Пусть теперь внешнее поле есть плоская волна

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}\,e^{ik\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}}, \qquad \mathbf{H}_0 = \mathbf{h}\,e^{ik\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}}, \tag{104.1}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор, $\mathbf{e} = [\mathbf{h}\,\boldsymbol{\nu}]$, $\mathbf{h} = [\boldsymbol{\nu}\mathbf{e}]$. Для этого поля $\mathbf{E}_0^{(1)} = (\boldsymbol{\nu}\mathbf{r})\mathbf{e}$ и из (102.6) и (103.2) следует, что коэффициенты квадратичной формы (103.6) имеют вид

$$A_{200} = \nu_x e_x, \qquad A_{110} = \frac{a^2\nu_x e_y + b^2\nu_y e_x}{a^2 + b^2}. \tag{104.2}$$

В поле плоской волны на тело действует усредненная пондеромоторная сила

$$\mathbf{F} = w(S_{\text{sc}} + S_{\text{abs}})\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\Pi}. \tag{104.3}$$

Здесь $w = h^2/(8\pi)$ — плотность энергии волны, $S_{\rm sc}$ и $S_{\rm abs}$ — эффективные поперечники рассеяния и поглощения, $\mathbf{\Pi}$ — поток импульса, уносимый рассеянным полем. В случае, когда рассеивающее тело мало [430, 489] (см. Приложение G),

$$\mathbf{\Pi} = \frac{k^4}{3}\,\mathrm{Re}\,[\mathbf{Q}^*\boldsymbol{\mathfrak{M}}] + \frac{k^5}{30}\,\mathrm{Im}\left(\mathbf{Q}^*\overleftrightarrow{Q}\right) + \ldots . \tag{104.4}$$

Для проводящего эллипсоида при $\delta \gg L$ из (103.3) следует

$$S_{\rm abs} = \frac{k^2\varkappa V}{h^2}\left(\frac{1}{\varkappa^2}\left\langle\frac{e_x^2}{M_{100}^2}\right\rangle + \frac{1}{5}\left\langle\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}\,h_x^2\right\rangle\right). \tag{104.5}$$

Так как главный член рассеянного поля есть излучение диполя $\mathbf{Q}^{(0)}$, то, согласно (103.18),

$$S_{\rm sc} = \frac{k^4V^2}{6\pi h^2}\left\langle\frac{e_x^2}{M_{100}^2}\right\rangle \tag{104.6}$$

и, следовательно,

$$\frac{S_{\rm sc}}{S_{\rm abs}} < \frac{1}{6\pi}\,k^2\varkappa V = \frac{2}{3}\,\frac{V}{\lambda\delta^2} \ll 1\,.$$

Подстановка (103.17), (103.20) в (104.4) дает

$$\mathbf{\Pi} = -\frac{k^6}{3}\left\{[\mathbf{Q}^{(0)}\boldsymbol{\mathfrak{M}}^{(2)}] - [\mathbf{Q}^{(1)}\boldsymbol{\mathfrak{M}}^{(1)}] + \frac{1}{10}\left(\overleftrightarrow{Q}^{(1)}\mathbf{Q}^{(0)}\right)\right\}. \tag{104.7}$$

Если $\varkappa L \lesssim 1$, то в этом выражении надо учитывать все члены, при $\varkappa L \gg 1$ можно оставить только главный член

$$\mathbf{\Pi} \approx -\frac{k^6}{3}\,[\mathbf{Q}^{(0)}\boldsymbol{\mathfrak{M}}^{(2)}]\,. \tag{104.8}$$

В нашем случае величина Π мала по сравнению с первым слагаемым в формуле (104.3): их отношение имеет порядок $k^3V(L/\delta)^2$. Однако именно $\mathbf{\Pi}$ приводит к появлению боковой силы, перпендикулярной направлению распространения волны. Эта боковая сила $\mathbf{F}_{\rm lat}$ исчезает лишь при совпадении направления $\boldsymbol{\nu}$ с одной из осей эллипсоида.

Для сравнения рассмотрим идеально проводящий эллипсоид с теми же геометрическими характеристиками. В первом приближении падающая волна наводит в нем[1] тот же электрический момент $\mathbf{Q}^{(0)}$ и магнитный момент $\boldsymbol{\mathfrak{M}}^{(0)}$:

$$\mathfrak{M}_z^{(0)} = -\frac{V}{4\pi}\,\frac{h_z}{1-M_{001}}\,. \tag{104.9}$$

В этом случае $S_{\rm abs} = 0$,

$$S_{\rm sc} = \frac{k^4V^2}{6\pi h^2}\left(\left\langle\frac{e_x^2}{M_{100}^2}\right\rangle + \left\langle\frac{h_x^2}{(1-M_{001})^2}\right\rangle\right),$$

$$\mathbf{\Pi} = \frac{k^4}{3}\,[\mathbf{Q}^{(0)}\boldsymbol{\mathfrak{M}}^{(0)}],$$

[1] См., например, (98.22) при $\nu_\varepsilon = 0$, $\nu_\mu = -1$.

так что оба члена в (104.3) имеют одинаковый порядок, и $\mathbf{\Pi}$ вносит существенный вклад и в лобовую (frn) силу. Отмечая относящиеся к идеально проводящему эллипсоиду величины значком $\sim$, будем, очевидно, иметь

$$F_{\text{frn}} \gg \widetilde{F}_{\text{frn}} \sim \widetilde{F}_{\text{lat}} \gg F_{\text{lat}}\,.$$

В заключение сделаем одно замечание общего характера. В теории рассеяния на малых телах последние обычно описываются тензорами электрической и магнитной поляризуемости, определяемыми из решения квазистационарных задач о теле в *однородном* внешнем поле. При $\delta \gg L$ для проводящего эллипсоида эти тензоры, согласно (103.16)–(103.19), имеют вид

$$\alpha_z^e = \frac{V}{4\pi M_{001}}\left(1 + \frac{i}{M_{001}}\,\frac{k}{\varkappa}\right),$$

$$\alpha_z^m = -\frac{V}{10\pi}\,\frac{a^2b^2}{\delta^{\,2}(a^2+b^2)}\left[\frac{4a^2b^2}{7\delta^{\,2}(a^2+b^2)}\,(1-M_{001})-\tau\,\frac{k}{\varkappa}-i\right]. \qquad (104.10)$$

Однако при таком описании вещественная часть $\overleftrightarrow{\alpha}^m$ не включает магнитного момента $\mathfrak{M}^{(2\text{p})}$. Так как $\boldsymbol{e} = [\mathbf{h}\boldsymbol{\nu}]$, то выражение (104.2) можно переписать в форме

$$A_{110} = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} - \nu_y^2\right)h_z + \nu_y\nu_z h_y$$

и, следовательно, $\mathfrak{M}^{(2\text{p})}$ зависит не только от вектора $\mathbf{h}$, но и от направления распространения волны, т. е. имеет место эффект пространственной дисперсии, которым можно пренебречь при $\varkappa L \gg 1$. Как уже отмечалось, для шара всегда $\mathfrak{M}^{(2\text{p})} = 0$.

Глава 20
Эллипсоид в узле электромагнитного поля

§ 105. Предварительные замечания

Приближенная теория дифракции электромагнитных волн на малых телах или на малых отверстиях в металлических экранах опирается, как известно, на решения вспомогательных статических задач о теле или дополнительной пластине исчезающей толщины в *однородных* внешних полях. Из этих решений находятся индуцируемые в рассеивателе электрический и магнитный дипольные моменты, являющиеся источниками вторичного дифракционного поля в рэлеевском приближении.

В случае полей волноводного типа такой простой подход становится неприменимым, если рассеивающий объект расположен в «узловой» области первичного поля, где даже в малом объеме, занимаемом телом, внешнее поле существенно неоднородно. В таких ситуациях требуется, очевидно, знать решения более сложных вспомогательных статических задач о теле (или пластине) во внешнем поле с квадратичным, кубическим и т. д. потенциалом.

Для однородных тел эллипсоидальной формы аналитическое решение этих ключевых статических задач дано в разд. 64.1, 64.2, в которых найдены и поле внутри тела, и обусловленные поляризацией мультипольные моменты. Однако в типичных волноводных проблемах удобнее работать непосредственно с распределенными поляризацией $\mathbf{P}$ и намагничением $\mathfrak{I}$, которым соответствуют эквивалентные токи $\mathbf{j}^e = -i\omega\mathbf{P}$, $\mathbf{j}^m = -i\omega\mathfrak{I}$, являющиеся источниками вторичного дифракционного поля. Это поле может быть представлено в виде суперпозиции нормированных собственных волн трубы, амплитуды которых пропорциональны (см., например, [428]) интегралам возбуждения

$$\int \left(\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{j}^e - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{j}^m\right) dV\,,$$

где $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ — поле нормированной собственной волны данного типа, но встречного направления. В частности, при нормировке всех распространяющихся собственных волн (т. е. волн, у которых частота отсечки меньше рабочей) на единичный поток энергии через сечение трубы формулы для амплитуд волн вторичного поля принимают вид

$$Q = -\frac{i\omega}{4}\int\left(\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{H}}\mathfrak{I}\right)dV = -\frac{i\omega}{4}(\mathcal{E} - \mathcal{M})\,. \tag{105.1}$$

Если распределения $\mathbf{P}$ и $\mathfrak{I}$ сами порождены нормированной единичной волной, то величины $|Q|^2$ будут, очевидно, просто энергетическими коэффициентами трансформации падающей волны в волны разных типов. Сюда относятся, конечно, и обычные коэффициенты отражения и прохождения.

Формула (105.1) является общей и справедлива для тел любой формы и любых размеров. Займемся теперь ее конкретизацией применительно к малому эллипсоиду, расположенному в узловой области внешнего поля, где оно имеет квазистатическую структуру.

§ 106. Эллипсоид в квазистатическом поле

В квазистатическом приближении поляризация $\mathbf{P}$ и намагничение $\mathfrak{I}$ находятся независимо и однотипно. Поэтому дальше мы будем выписывать только результаты, относящиеся к электрическому полю. Соответствующие магнитные формулы получаются простой заменой $\mathbf{E}\to\mathbf{H}$, $\mathbf{P}\to\mathfrak{I}$, $\varepsilon\to\mu$.

Пусть, как обычно, центр диэлектрического эллипсоида с полуосями a, b, c совпадает с началом декартовой системы координат, ориентированной по осям нашего эллипсоида. Простейшее узловое поле $\mathbf{E}_0 = -\nabla\Phi_0$ описывается квадратичным потенциалом вида (64.19). Как показано в разд. 64.2, это поле наводит в эллипсоиде поляризацию $\mathbf{P} = -\dfrac{1}{4\pi}\,\nabla\Pi$, где

$$\Pi(x,y,z) = \frac{1}{2}\,\left\langle\alpha_{200}\,x^2\right\rangle + \left\langle\alpha_{011}\,yz\right\rangle. \tag{106.1}$$

Формулы, связывающие α_{200}, α_{011} с A_{200}, A_{011}, даны в разд. 64.2 (см. (64.21), (64.23)). Здесь мы не приводим их, так как дальше нас будет интересовать специальный случай плоского диска.

Если поле «встречной» волны $\tilde{\mathbf{E}}$ описывается в области эллипсоида потенциалом

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{2}\,\left\langle\tilde{A}_{200}\,x^2\right\rangle + \left\langle\tilde{A}_{011}\,yz\right\rangle,$$

то, как легко видеть,

$$\mathcal{E} = \int\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{P}\,dV = \frac{abc}{15}\,\left\langle\left(\tilde{A}_{200}\,\alpha_{200} + \tilde{A}_{110}\,\alpha_{110} + \tilde{A}_{101}\,\alpha_{101}\right)a^2\right\rangle. \tag{106.2}$$

При вырождении эллипсоида в эллиптический диск $(c\to 0)$ интеграл (106.2), вообще говоря, стремится к нулю вместе с объемом тела. Исключение составляют два предельных случая: $\varepsilon=\infty$ и $\varepsilon=0$. Первому соответствует металлический диск в электрическом поле, второму (после перехода от электрической задачи к магнитной) — сверхпроводящий диск в магнитном поле.

Из общих формул (64.21), (64.23) следует, что в случае $\varepsilon = 0$ при $c\to 0$ остаются конечными лишь величины $c\alpha_{011}$ и $c\alpha_{101}$. Тогда выражение (106.2) переходит в

$$\mathcal{E}^0 = \frac{ab}{15}\,\left(\tilde{A}_{011}\,\overline{\alpha}^0_{011}b^2 + \tilde{A}_{101}\,\overline{\alpha}^0_{101}a^2\right), \tag{106.3}$$

где здесь и дальше $\overline{\alpha} = \lim\limits_{c\to 0} c\alpha$, а верхний индекс указывает, что формула относится к случаю $\varepsilon = 0$. Предельный переход $c \to 0$ в уравнениях (64.21) дает при $\varepsilon = 0$

$$\overline{\alpha}^0_{011} = -\frac{A_{011}}{V - b^2 N_{11}}\,, \qquad \overline{\alpha}^0_{101} = -\frac{A_{101}}{V - a^2 N_{11}}\,, \tag{106.4}$$

где $V = \frac{1}{2}\left[3(N_{10} + N_{01}) + (a^2 + b^2)N_{11}\right]$, а N_{lm} — потенциальные факторы эллиптического диска. Обозначая $\sqrt{ab} = \varrho$ и вводя безразмерные функции

$$v(a,b) = \varrho V, \qquad n(a,b) = \varrho^3 N_{11}, \tag{106.5}$$

перепишем (106.4) в виде

$$\overline{\alpha}^0_{011} = -\varrho\,\frac{A_{011}}{v - (b/a)\,n}\,, \qquad \overline{\alpha}^0_{101} = -\varrho\,\frac{A_{101}}{v - (a/b)\,n}\,. \tag{106.6}$$

В другом предельном случае $\varepsilon = \infty$ при $c \to 0$ остаются конечными $c\alpha_{200}$, $c\alpha_{020}$, $c\alpha_{002}$ и $c\alpha_{110}$, так что (106.2) переходит в

$$\mathcal{E}^\infty = \frac{ab}{15}\left[\tilde{A}_{200}\,\overline{\alpha}^\infty_{200}a^2 + \tilde{A}_{020}\,\overline{\alpha}^\infty_{020}b^2 + \tilde{A}_{110}\,\overline{\alpha}^\infty_{110}\left(a^2 + b^2\right)\right], \tag{106.7}$$

причем в этом случае

$$\overline{\alpha}^\infty_{200} = \varrho\left[fA_{200} - \frac{b}{a}\,g\,(2A_{200} + A_{020})\right],$$
$$\overline{\alpha}^\infty_{020} = \varrho\left[fA_{020} - \frac{a}{b}\,g\,(2A_{020} + A_{200})\right],$$
$$\overline{\alpha}^\infty_{110} = \frac{\varrho^3}{a^2 + b^2}\,\frac{A_{110}}{n}\,, \tag{106.8}$$

где

$$f(a,b) = \frac{v}{3u}\,, \qquad g(a,b) = \frac{n}{3u}\,, \tag{106.9}$$

а $u(a,b) = \varrho^2\,(3N_{10}N_{01} - N_{00}N_{11})$. Все функции (106.5) и (106.9) не меняются при перестановке $a \leftrightarrow b$. Для круглого диска $(b = a)$

$$n = \frac{3\pi}{16}\,, \qquad v = \frac{15\pi}{16}\,, \qquad f = \frac{10}{3\pi}\,, \qquad g = \frac{2}{3\pi}\,, \tag{106.10}$$

а при $b \ll a$ в первом приближении

$$n = \sqrt{\frac{b}{a}}\,, \quad v = 2\sqrt{\frac{a}{b}}\,, \quad f = \frac{1}{3\Lambda}\left(\frac{a}{b}\right)^{3/2}\,, \quad g = \frac{1}{6\Lambda}\sqrt{\frac{a}{b}}\,, \tag{106.11}$$

где $\Lambda = \ln\frac{4a}{b} - \frac{3}{2}$.

Узловому полю $\mathbf{E}_0$ с кубическим потенциалом общего вида (64.31) отвечает поляризационный потенциал

$$\Pi = \left\langle -\frac{1}{3}\,(\alpha_{120} + \alpha_{102})\,x^3 + \alpha_{120}xy^2 + \alpha_{102}xz^2\right\rangle + \alpha_{111}xyz + \langle\alpha_{100}x\rangle\,, \tag{106.12}$$

линейное выражение коэффициентов которого через коэффициенты потенциала (64.31) дается формулами (64.33), (64.35) и (64.39)[1]. При вырождении эллипсоида в диск $(c \to 0)$ в случае $\varepsilon = \infty$ остаются конечными величины $\overline{\alpha}_{120}$, $\overline{\alpha}_{102}$, $\overline{\alpha}_{100}$ и $\overline{\alpha}_{012}$, $\overline{\alpha}_{210}$, $\overline{\alpha}_{010}$, а в случае $\varepsilon = 0$ остаются $\overline{\alpha}_{201}$, $\overline{\alpha}_{021}$, $\overline{\alpha}_{001}$ и $\overline{\alpha}_{111}$.

Мы не будем приводить здесь общих выражений для интегралов возбуждения, аналогичных (106.2) или (106.3) и (106.7), так как а рассматриваемых далее волноводных задачах нам встретятся лишь частные формы кубических потенциалов. Именно, в случае $\varepsilon = \infty$:

$$\Phi_{120} = -A_{120}\left(\frac{x^3}{3} - xy^2\right), \qquad \Phi_{102} = -A_{102}\left(\frac{x^3}{3} - xz^2\right), \tag{106.13}$$

а в случае $\varepsilon = 0$:

$$\Phi_{201} = -A_{201}\left(\frac{z^3}{3} - zx^2\right). \tag{106.14}$$

Пусть встречная волна имеет ту же структуру потенциала, что и первичное поле. Тогда в пределе при $c \to 0$ окончательно получаются следующие выражения для интегралов возбуждения круглого диска $(b = a)$:

$$\mathcal{E}_{120}^{\infty} = \frac{256}{225}\,\frac{a^7}{7\pi}\,\tilde{A}_{120}A_{120}\,, \qquad \mathcal{E}_{102}^{\infty} = \frac{116}{225}\,\frac{a^7}{7\pi}\,\tilde{A}_{102}A_{102}\,,$$
$$\mathcal{E}_{201}^{0} = -\,\frac{22}{75}\,\frac{a^7}{7\pi}\,\tilde{A}_{201}A_{201}, \tag{106.15}$$

где индексы у $\mathcal{E}$ соответствуют маркировке потенциалов (106.13), (106.14).

В случае узлового поля $\mathbf{E}_0$ с кубическим потенциалом индуцированная поляризация $\mathbf{P}$ будет, вообще говоря, возбуждать в трубе и «неузловые» волны, у которых поле в области, занятой телом, в первом приближении однородно. Интегралы возбуждения для этих волн проще всего находить с помощью статических теорем взаимности, из которых следует соотношение[2]:

$$\int \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{P}\,dV = \int \mathbf{E}_0\tilde{\mathbf{P}}\,dV\,, \tag{106.16}$$

где $\tilde{\mathbf{P}}$ — поляризация, наведенная полем $\tilde{\mathbf{E}}$. Поэтому для трехосного эллипсоида с учетом (64.40) и (64.41) будем иметь

$$\mathcal{E} = -\frac{abc}{15}\,(\varepsilon - 1)\left\langle \frac{\tilde{A}_{100}\left[\left(a^2 - b^2\right)A_{120} + \left(a^2 - c^2\right)A_{102}\right]}{1 + (\varepsilon - 1)M_{100}} \right\rangle. \tag{106.17}$$

Для шара всегда $\mathcal{E}=0$, для круглого диска с $\varepsilon=\infty$ и с $\varepsilon=0$

$$\mathcal{E}^{\infty} = -\frac{4a^5}{15\,\pi}\left(\tilde{A}_{100}A_{102} + \tilde{A}_{010}A_{012}\right), \quad \mathcal{E}^{0} = -\frac{2a^5}{15\,\pi}\,\tilde{A}_{001}\left(A_{201} + A_{021}\right). \tag{106.18}$$

[1] См. также формулу (Е.6) Приложения Е.
[2] См. формулу (Е.3) Приложения Е.

§ 107. Рассеяние на металлическом диске

Пусть на оси прямоугольного волновода расположен малый идеально проводящий эллиптический диск. Система координат x, y, z связана, как и раньше, с диском, координаты же (декартовы) ξ, η, ζ — с волноводом.

Для падающей H_{11}-волны продольная составляющая

$$H_\zeta \sim \sin p\xi \, \sin q\eta \, \exp[i(\omega t - h\zeta)]$$

будет в окрестности оси малой величиной второго порядка, которой можно пренебречь. Поперечные составляющие поля вблизи начала координат описываются квадратичными потенциалами

$$\Phi_0^e = \frac{k}{2h} C\, p\, q \left(\xi^2 - \eta^2\right), \qquad \Phi_0^m = C\, p\, q\, \xi\, \eta\,, \tag{107.1}$$

где для нормированной на единичный поток энергии волны

$$C^2 = \frac{32\, p\, q}{\pi \omega \varkappa^2}\, h\,, \qquad \varkappa^2 = p^2 + q^2\,. \tag{107.2}$$

Если диск лежит в плоскости η, ζ $(\xi = z,\ \eta = x,\ \zeta = y)$, то в общей формуле (64.19) $A_{002}^e = -A_{200}^e = \frac{k}{h}\, Cp\, q$, $A_{101}^m = Cp\, q$, а все остальные коэффициенты равны нулю. При нахождении коэффициента отражения встречная волна совпадает с падающей. Тогда, согласно (106.7) и (106.3),

$$\mathcal{E}^\infty = \frac{a^3 b}{15}\, A_{200}^e\, \overline{\alpha}_{200}^\infty\,, \qquad \mathcal{M}^0 = \frac{a^3 b}{15}\, A_{101}^m\, \overline{\alpha}_{101}^0.$$

Подставляя эти выражения в общую формулу (105.1) и используя соотношения (106.8), (106.4) и (107.2), окончательно получаем для коэффициента отражения

$$Q = -\frac{8i}{15\pi}\, \frac{a^2 \varrho^3}{\varkappa^2}\, h p^3 q^3 \left[\frac{k^2}{h^2}\left(f - 2\frac{b}{a}\, g\right) + \left(v - \frac{a}{b}\, n\right)^{-1}\right]. \tag{107.3}$$

Если бы мы искали не коэффициент отражения, а коэффициент рассеяния вперед, то у одного из потенциалов (107.1) следовало бы изменить знак. Тогда и члены в квадратных скобках (107.3) будут иметь разные знаки.

Для диска, лежащего в $\xi\eta$-плоскости $(\xi = x,\ \eta = y,\ \zeta = z)$, возбуждение обусловлено, очевидно, лишь электрическим полем волны. Для него $A_{200}^e = -A_{020}^e = \frac{k}{h}\, Cp\, q$ и

$$Q = -\frac{8i}{15\pi}\, \varrho^5\, \frac{k^2 p^3 q^3}{h \varkappa^2} \left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) f - 2g\right], \tag{107.4}$$

причем теперь Q характеризует поле, рассеянное как назад, так и вперед.

В случае падающей нормированной E_{11}-волны электрическое поле в окрестности начала координат есть сумма однородного продольного поля $\tilde{E}_\zeta = -i\, \frac{\varkappa^2}{h}\, C$ и поля, описываемого квадратичным потенциалом

$$\Phi_0^e = \frac{1}{2}\, C \left(p^2 \xi^2 + q^2 \eta^2 - \varkappa^2 \zeta^2\right).$$

В общем случае произвольного тела вторичное поле создается в первом приближении дипольным моментом, наведенным однородным полем (рэлеевское приближение). Но в случае металлического диска в $\xi\eta$-плоскости этот дипольный момент обращается в нуль при $c \to 0$, и рассеяние имеет квадрупольную природу. Тогда $A^e_{200} = p^2 C$, $A^e_{020} = q^2 C$, $A^e_{002} = -\varkappa^2 C$, и коэффициент отражения равен

$$Q = -\frac{8i}{15\pi}\varrho^5 \frac{hpq}{\varkappa^2}\left[\left(\frac{a}{b}\,p^4 + \frac{b}{a}\,q^4\right) f - 2\left(\varkappa^4 - p^2 q^2\right) g\right]. \tag{107.5}$$

При этом возбуждается и H_{11}-волна. Соответствующий коэффициент трансформации (вперед или назад) есть

$$Q_{EH} = -\frac{8i}{15\pi}\varrho^5 \frac{hp^2q^2}{\varkappa^2}\left[\left(\frac{a}{b}\,p^2 - \frac{b}{a}\,q^2\right) f - \left(p^2 - q^2\right) g\right]. \tag{107.6}$$

В круглой трубе, где используются цилиндрические координаты r, φ, ζ ($\xi = r\cos\varphi, \eta = r\sin\varphi$), поля выражаются через бесселевы функции $J_n(\varkappa r)$ и их производные. В случае симметричной E_0-волны электрическое поле вблизи начала координат есть сумма продольного однородного поля и поля с квадратичным потенциалом

$$\Phi^e_0 = \frac{1}{2}\,C_0\left(\xi^2 + \eta^2 - 2\zeta^2\right),$$

причем из условия нормировки

$$C_0^2 = \frac{2h}{\omega R^4}\,\frac{\nu^2}{\left[J_0'(\nu)\right]^2}.$$

Здесь R – радиус трубы, $\nu = \varkappa R$ – соответствующий корень уравнения $J_0(\nu) = 0$. Поэтому для диска в $\xi\eta$-плоскости коэффициент отражения равен

$$Q = -\frac{i\omega}{60}\,C_0^2\varrho^5\left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) f - 6g\right]. \tag{107.7}$$

Рассеяние E_1- и H_1-волн описывается дипольными формулами (рэлеевское приближение), а для E_2-волны ($E_\zeta \sim \cos 2\varphi$) и H_2-волны ($H_\zeta \sim \sin 2\varphi$) соответственно имеем

$$\Phi^e_E = \frac{1}{2}\,C_2\left(\xi^2 - \eta^2\right), \qquad \Phi^m_E = \frac{k}{h}\,C_2\xi\eta,$$

$$\Phi^e_H = \frac{1}{2}\,\frac{k}{h}\,\breve{C}_2\left(\xi^2 - \eta^2\right), \qquad \Phi^m_H = \breve{C}_2\xi\eta,$$

где

$$C_2^2 = \frac{h}{\omega R^4}\,\frac{\nu^2}{\left[J_2'(\nu)\right]^2}, \qquad \breve{C}_2^2 = \frac{h}{\omega R^4}\,\frac{\tilde{\nu}^4}{\left(\tilde{\nu}^2 - 4\right) J_2^2(\tilde{\nu})}.$$

Здесь ν и $\tilde{\nu}$ — корни уравнений $J_2(\nu) = 0$ и $J_2'(\tilde{\nu}) = 0$.

Пользуясь этими выражениями, можно легко вычислить все коэффициенты трансформации для любой ориентации диска. Мы не будем приводить здесь формул для этих коэффициентов. Отметим только, что для рассеяния вперед некоторые из них обращаются в нуль при определенных значениях рабочей частоты. Этот эффект является аналогом частичной компенсации вторичного поля в направлении вперед при рэлеевском рассеянии на проводящем теле в свободном пространстве.

Круглая труба интересна тем, что в ней можно создавать «узловые» поля высших порядков. Так, E_3-волне с $E_\zeta \sim \sin 3\varphi$ и H_3-волне с $H_\zeta \sim \cos 3\varphi$ соответствуют потенциалы

$$\Phi_E^e = C_3 \left(\frac{\eta}{3} - \eta\xi^2\right), \qquad \Phi_E^m = \frac{k}{h} C_3 \left(\frac{\xi^3}{3} - \xi\eta^2\right),$$

$$\Phi_H^e = \frac{k}{h} \breve{C}_3 \left(\frac{\eta^3}{3} - \eta\xi^2\right), \qquad \Phi_H^m = \breve{C}_3 \left(\frac{\xi^3}{3} - \xi\eta^2\right),$$

где

$$C_3^2 = \frac{h}{16\,\omega R^6} \frac{\nu^4}{[J_3'(\nu)]^2}, \qquad \breve{C}_3^2 = \frac{h}{16\,\omega R^6} \frac{\tilde{\nu}^6}{(\tilde{\nu}^2 - 9)\, J_3^2(\tilde{\nu})}.$$

Эти формулы вместе с выражениями (106.15), (106.17) и аналогичными им позволяют найти амплитуды всех вторичных волн, возникающих при рассеянии E_3- и H_3-волн на диске. Например, в случае круглого диска в $\eta\zeta$-плоскости, коэффициент отражения E_3-волны равен

$$Q(E_3, E_3) = -\frac{i\omega}{450} \frac{a^7}{7\pi} C_3^2 \left(58 + 33\,\frac{k^2}{h^2}\right). \tag{107.8}$$

Формула для коэффициента рассеяния той же волны вперед отличается от написанной переменой знака внутри скобок. Поэтому при $h^2 = \frac{33}{58}\,k^2$ этот коэффициент обращается в нуль. Но в рассматриваемом случае основное рассеяние связано, очевидно, со вторичными E_1- и H_1-волнами, у которых поля квазиоднородны в области диска и соответствующие коэффициенты пропорциональны не a^7, а a^5. Только в вырожденном симметричном случае круглого диска в $\xi\eta$-плоскости не происходит возбуждения E_1- и H_1-волн.

§ 108. Дифракция на отверстии в перегородке

Если регулярный волновод перегорожен идеально проводящей поперечной пленкой, в которой прорезано отверстие, то отыскание дифракционного поля сводится к решению вспомогательной задачи о рассеянии на тонкой пластине с $\varepsilon = 0$ и $\mu = \infty$, расположенной на месте первоначального отверстия (ср. [509]). Пусть

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}', \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{H}'$$

есть решение задачи для пластины. Тогда в дифракционной задаче для отверстия поле за перегородкой равно

$$\mathbf{E}^+ = -\mathbf{E}', \qquad \mathbf{H}^+ = -\mathbf{H}',$$

а поле перед перегородкой есть

$$\mathbf{E}^- = \mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_{\text{ref}} + \mathbf{E}', \qquad \mathbf{H}^- = \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{H}_{\text{ref}} + \mathbf{H}',$$

где $\mathbf{E}_{\text{ref}}$, $\mathbf{H}_{\text{ref}}$ — поле, отраженное сплошной перегородкой.

В качестве примера рассмотрим малое эллиптическое отверстие в центре перегородки в круглой трубе. E_0-, E_1-, H_1-волнам соответствует, как легко видеть, дипольное (рэлеевское) возбуждение, рассмотренное в [509]. Для всех других типов волн поле, возбуждающее отверстие, описывается потенциалами второго и высших порядков, и решение интересующей нас задачи полностью повторяет изложение предыдущего параграфа с заменой $\xi \leftrightarrow \mu$ и $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$. Так, для коэффициента прохождения симметричной H_0-волны через эллиптическое отверстие мы получим выражение

$$Q = -\frac{i\omega}{60}\,\breve{C}_0^2 \varrho^5 \left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) f - 6g\right], \tag{108.1}$$

которое отличается от формулы (107.7) для коэффициента отражения E_0-волны от металлического диска лишь значением константы $\breve{C}_0^2$:

$$\breve{C}_0^2 = \frac{2h}{\omega R^4}\,\frac{\tilde{\nu}^2}{J_0^2(\tilde{\nu})}, \qquad J_0'(\tilde{\nu}) = 0\,.$$

Таким образом,

$$Q = -\frac{i}{30}\,\frac{\tilde{\nu}^3}{J_0^2(\tilde{\nu})}\,\frac{h}{\varkappa}\,\left(\frac{\varrho}{R}\right)^5 \left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) f - 6g\right]. \tag{108.2}$$

При $b = a$, в соответствии с (106.10), выражение (108.2) переходит в результат работы [429], где последний получен методом, существенно опирающимся на полную круговую симметрию задачи. При $b \ll a$ из (108.2) следует, что узкая эллиптическая щель длины $2a$ эквивалентна круглому отверстию радиуса a', если

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^5 = \frac{8}{\pi}\left(\ln\frac{4a}{b} - \frac{3}{2}\right).$$

Так например, при $a = 25\,b$ будет $a \approx 1,5a'$, так что периметры отверстий почти совпадают, но площадь эллиптической щели составляет всего 9% от площади эквивалентного круга.

В заключение заметим, что сама задача о возбуждении малого отверстия носит локальный характер. Поэтому результаты данного параграфа легко обобщаются на случай, когда отверстие связывает узловые поля двух волноводов разного сечения или резонатора и волновода.

Данная глава написана на основе работы [495], выполненной автором совместно с М. Л. Левиным.

Глава 21
Квазистатические мультипольные колебания плазменного эллипсоида

§ 109. Введение

При взаимодействии высокочастотного электромагнитного поля с малым плазменным сгустком особую роль играют резонансные эффекты, проявляющиеся тем сильнее, чем меньше размеры сгустка по сравнению с длиною волны внешнего поля. Для рассмотрения этих эффектов[1] необходимо прежде всего исследовать собственные колебания сгустка, т. е. найти их частоты, декременты затухания и пространственные структуры. Такая задача пока строго решена лишь для простейшей модели однородного плазменного шара [443]. В интересующем нас случае малых сгустков хорошо работает приближенная квазистатическая теория [420, 422], с помощью которой в [422] были получены дисперсионные уравнения для вещественных собственных частот плазменного сфероида. В сфероидальных координатах (и функциях) выражения для собственных частот мультипольных колебаний произвольного ранга найдены в [488][2].

Модель сфероида, а тем более шара, из-за присущей ей симметрии (геометрического вырождения) может скрадывать, однако, некоторые особенности, характерные для сгустков произвольной формы. Достаточно емким геометрическим образом таких сгустков является трехосный эллипсоид с произвольным отношением осей. Теория резонансных эффектов в однородном изотропном плазменном эллипсоиде и составляет содержание данной главы.

Здесь мы будем пользоваться следующим общим методом рассмотрения квазистатических колебаний плазменных сгустков произвольной формы. Пусть $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ — распределение поляризации внутри сгустка, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей электронов плазмы, которую мы будем считать однородной, изотропной и холодной (нет пространственной дисперсии). Тогда, очевидно, $\dot{\mathbf{P}} = ne\,\mathbf{v}$, где n — концентрация, e — заряд электрона. Поляри-

[1] Изложение материалов этой главы опирается на результаты работ [498] и отчасти [520].

[2] См. также [489].

зация $\mathbf{P}$ создает электрическое поле $\mathbf{E}_P$, которое в рамках квазистатической теории есть просто кулоново поле объемных поляризационных зарядов $\rho = -\operatorname{div}\mathbf{P}$ и поверхностных зарядов $\sigma = P_n$, где $\mathbf{n}$ —внешняя нормаль к поверхности сгустка.

Если кроме собственного поля сгустка $\mathbf{E}_P$ есть еще поле внешних источников $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$, то уравнение движения электрона можно записать в виде

$$\ddot{\mathbf{P}} + \nu_{\text{eff}}\,\dot{\mathbf{P}} = \frac{\omega_0^2}{4\pi}\,(\mathbf{E}_P + \mathbf{E}_{\text{ext}}), \tag{109.1}$$

где $\omega_0 = (4\pi n e^2/m)^{1/2}$ — ленгмюровская частота, ν_{eff} — эффективная частота соударений. В частности, при $\nu_{\text{eff}} = 0$ и $\mathbf{E}_{\text{ext}} = 0$ уравнение (109.1) переходит в квазистатическое уравнение

$$\left(\omega_0^2/4\pi\right)\mathbf{E}_P = -\bar{\omega}^2\mathbf{P},$$

определяющее и вещественные частоты $\bar{\omega}$, и распределения $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ собственных колебаний. Для них векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{E}_P$ сдвинуты по фазе на $\pi/2$, и динамика собственных квазистатических колебаний состоит в перекачке энергии электрического поля $U_E = U_E^0\cos^2(\bar{\omega}t + \psi)$ в кинетическую энергию частиц $K(t) = K^0\sin^2(\bar{\omega}t + \psi)$ и обратно. Здесь

$$U_E^0 = U_i + U_e = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{V_i} |\mathbf{E}_P|^2\,dV + \frac{1}{8\pi}\int\limits_{V_e} |\mathbf{E}_P|^2\;dV,$$

$$K^0 = \frac{nm}{2}\int\limits_{V_i} |\mathbf{v}|^2\;dV = \frac{1}{8\pi}\,\frac{\omega_0^2}{\bar{\omega}^2}\int\limits_{V_i} |\mathbf{E}_P|^2\,dV = 2\pi\frac{\bar{\omega}^2}{\omega_0^2}\int |\mathbf{P}|^2\,dV$$

— пиковые значения этих энергий. Для существования собственных колебаний, должно, очевидно, выполняться условие $K^0 = U_E^0$, откуда [360,361,443]

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\int\limits_{V_i} \omega_0^2(\mathbf{r})|\mathbf{E}_P|^2\,dV}{\int\limits_{V_i} |\mathbf{E}_P|^2\,dV + \int\limits_{V_e} |\mathbf{E}_P|^2\,dV},$$

т. е. любая собственная частота меньше усредненной[1] по объему сгустка V_i ленгмюровской частоты, совпадая с последней лишь в случае полностью локализованных колебаний, когда в объеме V_e снаружи сгустка поле равно нулю. В общем случае, вводя безразмерную собственную частоту $\Omega = \bar{\omega}/\omega_0$, будем иметь

$$K^0 = 2\pi\Omega^2\int |\mathbf{P}|^2\;dV, \qquad U_i = \Omega^2 K^0, \qquad U_E = (1 - \Omega^2)K^0, \tag{109.2}$$

причем K^0 есть полная (пиковая кинетическая) энергия собственного колебания.

Так как квазистатические поля собственных колебаний потенциальны: $\mathbf{P} = -\nabla\Pi$, $\mathbf{E}_P = -\nabla\Phi$ и в случае свободного пространства

$$\Phi = \int \frac{\rho\,dV}{R} + \oint \frac{\sigma\,dS}{R} = \int\limits_{V_i} \nabla^2\Pi\;\frac{dV}{R} - \oint \frac{\partial\Pi}{\partial n}\,\frac{dS}{R}\,,$$

[1] Весовой функцией усреднения является $|\mathbf{E}_P|^2$.

то, вводя оператор

$$\mathfrak{L}\{f\} = \frac{1}{4\pi}\left(\oint \frac{\partial f}{\partial n}\,\frac{dS}{R} - \int\limits_{V_i} \nabla^2 f\,\frac{dV}{R}\right), \tag{109.3}$$

мы можем перейти от векторного уравнения $\mathbf{E}_P = -4\pi\,\Omega^2\mathbf{P}$ к стандартному скалярному уравнению задачи на собственные значения:

$$\mathfrak{L}\{\Pi\} = \Omega^2\Pi\,. \tag{109.4}$$

Заметим, что для нелокализованных колебаний, когда $\Omega < 1$, диэлектрическая проницаемость плазмы $\varepsilon = 1-\Omega^{-2}$ отлична от нуля и, следовательно, поля гармоничны: $\nabla^2\Pi = 0$, так что оператор $\mathfrak{L}$ содержит лишь поверхностный интеграл.

Если задача (109.4) решена, то для полного описания собственных колебаний остается только найти постоянные затухания. Учет потерь на столкновения дает, очевидно, $\gamma_{\rm col} = {}^1\!/_2\,\nu_{\rm eff}$. В случае же бесстолкновительной плазмы надо учитывать и малые потери на излучение, приводящие к появлению радиационной постоянной затухания $\gamma_{\rm rad}$. Она может быть найдена, как это было сделано, например, в [488], из простых энергетических соображений. Осциллирующей поляризации $\mathbf{P}\exp(-i\omega t)$ соответствует поляризационный ток $\mathbf{j} = -i\omega\mathbf{P}$, создающий в волновой зоне свободного пространства (метод работает и в случае областей с границами) поле излучения

$$\mathbf{H} = k^2\,\frac{e^{ikr}}{r}\,[\boldsymbol{\nu}\mathbf{W}]\,, \qquad \mathbf{E} = [\mathbf{H}\boldsymbol{\nu}]\,,$$

где $k = \omega/\mathfrak{c}$, $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор направления на точку наблюдения, а $\mathbf{W}$ — интерференционный вектор:

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{\nu}) = \int \mathbf{P}(\mathbf{r})e^{-ik\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}}dV = \\ = \int \mathbf{P}\,dV - ik\int(\boldsymbol{\nu}\mathbf{r})\mathbf{P}\,dV - \frac{k^2}{2}\int(\boldsymbol{\nu}\mathbf{r})^2\mathbf{P}\,dV + \ldots\,, \tag{109.5}$$

причем в силу малости размеров сгустка надо учитывать лишь первый отличный от нуля член разложения (109.5). Излучаемая мощность есть[1]

$$J = \frac{\mathfrak{c}}{8\pi}\oint |\mathbf{H}|^2 dS_r = \frac{\mathfrak{c}k^4}{2}\oint |[\boldsymbol{\nu}\mathbf{W}]|^2\,\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{\mathfrak{c}k^4}{2}\,\overline{|[\boldsymbol{\nu}\mathbf{W}]|^2}, \tag{109.6}$$

где черта означает усреднение по телесному углу. Вычислив J, мы сразу найдем и радиационную постоянную затухания $\gamma_{\rm rad} = J/(2K^0)$, где K^0 дается формулой (109.2).

§ 110. Собственные колебания плазменного эллипсоида

110.1. Общее рассмотрение

Для тела произвольной формы решение функционального (интегродифференциального) уравнения (109.4) возможно лишь численными методами.

[1] Подробнее см. Приложение G.

Ситуация, однако, кардинально упрощается в случае эллипсоида, когда, как это следует из результатов Ферререса, изложенных в гл. 3 и 4, полиномиальному распределению функции $f(x,y,z)$ соответствует выражение $\mathfrak{L}\{\Pi\}$, имеющее вид полинома той же степени, коэффициенты которого содержат внутренние потенциальные факторы (см. (3.2))

$$M_{lmn} = \Pi_{lmn} \frac{abc}{2} \int\limits_0^\infty \frac{du}{Q(u)(a^2+u)^l(b^2+u)^m(c^2+u)^n} .$$

В § 64, опираясь на результаты Ферререса, мы рассмотрели задачу о диэлектрическом эллипсоиде в неоднородном статическом поле и нашли некоторые собственные частоты плазменного эллипсоида. Эти задачи решались в § 64 «в лоб»: исследовались линейные алгебраические уравнения для коэффициентов полиномиальных распределений $\Pi(x,y,z)$, возникающие при подстановке этих распределений в уравнения вида (109.4). При таком лобовом подходе выкладки весьма громоздки, а конечные результаты порой излишне сложны. К счастью, однако, математический арсенал XIX-го века содержит, по существу, готовое решение интересующей нас задачи. Именно, из формул Лиувилля [7,220] для эллипсоидальных гармонических функций Ламе следует, что внутренние гармоники Ламе являются собственными функциями уравнения (109.4). Хотя и формулы Лиувилля, и сами гармоники Ламе традиционно записываются в эллипсоидальных координатах, их можно переписать и в декартовых переменных, в которых, как показал Нивен [264, 401], функции Ламе имеют полиномиальную структуру и описываются схемой

$$\left\{\begin{matrix} & x & xy & \\ 1 & y & yz & xyz \\ & x & xy & \end{matrix}\right\} \cdot 1 \cdot \Theta_1 \cdot \Theta_2 \ldots \Theta_k , \qquad (110.1)$$

где каждое Θ_i есть

$$\Theta_i = 1 - \alpha_i x^2 - \beta_i y^2 - \gamma_i z^2 ,$$
$$\alpha_i = \frac{1}{a^2-\theta_i} , \quad \beta_i = \frac{1}{b^2-\theta_i} , \quad \gamma_i = \frac{1}{c^2-\theta_i} , \qquad (110.2)$$

а значения величин θ_i, находятся из условия гармоничности. Заметим, что запись (110.2) отличается от [264, 401] переменой знака у величин θ_i, что делает последние положительными. Далее, из формул Лиувилля вытекает следующее общее выражение

$$\Omega^2 = \frac{abc}{2} \left[\frac{dR(u)}{du}\right]_{u=0} \int\limits_0^\infty \frac{du}{R(u)Q(u)} \qquad (110.3)$$

для собственных значений уравнения (109.4), соответствующих собственным функциям в записи (110.1). Здесь $R(u)$ есть произведение факторов (a^2+u), (b^2+u), (c^2+u), каждый из которых отвечает x, y и z в фигурных скобках схемы (110.1), и факторов $(\theta_i+u)^2$, отвечающих входящим в (110.1) квадратичным функциям Θ_i.

Остановимся подробнее на колебаниях дипольного, квадрупольного и октупольного типов, используя для их маркировки кроме подходящих индексов и сплошную нумерацию: 1–3 — дипольные, 4–8 — квадрупольные, 9–15 — октупольные. Далее, наряду с безразмерной частотой $\Omega = \omega/\omega_0$ введем безразмерную постоянную затухания $\Gamma = \gamma/\omega_0$, и все поляризационные потенциалы собственных колебаний будем писать с нулевой размерностью. Тогда все факторы

$$L = \int |\mathbf{P}|^2 \, dV = \int (\nabla \Pi)^2 \, dV$$

будут иметь размерность длины.

110.2. Дипольные колебания

Колебаниям дипольного типа (они были рассмотрены еще в [488]) соответствует однородная поляризация. Таких колебаний — три, и они описываются поляризационными потенциалами

$$\Pi_1 = \Pi_a = -x/a\,, \quad \Pi_2 = \Pi_b = -y/b\,, \quad \Pi_3 = \Pi_c = -z/c\,.$$

Для потенциала Π_a в разложении (109.5) отличен от нуля уже первый член $W_x = V/a$, равный полному дипольному моменту сгустка. В этом случае $L_a = V/a^2$, $R(u) = a^2 + u$, так что для колебания с потенциалом Π_1 будем иметь

$$\frac{J_1}{\omega} = \frac{1}{3}\,\frac{k^3 V^2}{a^2}\,, \quad \Omega_1^2 = \Omega_a^2 = M_a\,, \quad \Gamma_a = \frac{\Omega_a^2}{12\pi}\,k_0^3 V, \tag{110.4}$$

где $k_0 = \omega_0/\mathfrak{c}$. Циклическая замена даст выражения для двух остальных дипольных колебаний.

В частном случае сфероида $(a = b \neq c)$ формулы (110.4) переходят в

$$\begin{gathered}\Omega_a = \Omega_b = \sqrt{\frac{1-M}{2}}\,, \qquad \Gamma_a = \Gamma_b = \frac{a^2 c}{18}\,(1-M) k_0^3\,; \\ \Omega_c = \sqrt{M}\,, \qquad \Gamma_c = \frac{a^2 c}{9}\,M k_0^3\,,\end{gathered} \tag{110.5}$$

где M — продольный фактор размагничивания.

Для шара $(a = b = c)$ выполняются равенства [443]

$$\Omega_a = \Omega_b = \Omega_c = \frac{1}{\sqrt{3}}\,, \qquad \Gamma_a = \Gamma_b = \Gamma_c = \frac{(k_0 a)^3}{27}\,.$$

110.3. Квадрупольные колебания

Из пяти колебаний квадрупольного типа три описываются потенциалами

$$\Pi_4 = \Pi_{ab} = -\frac{xy}{ab}\,, \quad \Pi_5 = \Pi_{bc} = -\frac{yz}{bc}\,, \quad \Pi_6 = \Pi_{ca} = -\frac{zx}{ca}\,. \tag{110.6}$$

Для этих потенциалов первый член разложения (109.5) равен нулю, а второй член, как и другие интегралы от степеней координат по объему эллипсоида, вычисляется с помощью данной в Приложении В общей формулы

Лагранжа (В.11). Подставляя результаты вычислений в (109.6) и усредняя по телесному углу, для потенциала $\Pi_4 = \Pi_{ab}$ будем иметь

$$\frac{J_4}{\omega} = \frac{k^5 V^2}{500}\,\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a^2b^2} + \frac{k^5 V^2}{300}\,\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{a^2b^2}\,, \tag{110.7}$$

где первый член соответствует излучению электрического квадруполя, компоненты тензора которого даются общей формулой

$$Q_{ij} = \int \mathbf{P}\nabla\left(3x_ix_j - r^2\delta_{ij}\right)dV\,,$$

причем в нашем случае отличны от нуля лишь

$$Q_{xy} = Q_{yx} = 3V(a^2+b^2)/(5ab)\,.$$

Второй же член есть излучение создаваемого поляризационными токами $\mathbf{j} = -i\omega\mathbf{P}$ магнитного диполя $\mathfrak{M} = -\frac{1}{2}\,ik\int[\mathbf{rP}]\,dV$, у которого отличная от нуля компонента есть

$$\mathfrak{M}_z = -\frac{ikV}{10}\,\frac{a^2-b^2}{ab}\,.$$

Далее, для $\Pi_4 = \Pi_{ab}$, как нетрудно видеть,

$$L_4 = \frac{V}{5a^2b^2}\,\left(a^2+b^2\right), \quad R(u) = (a^2+u)(b^2+u)\,,$$

так что

$$\Omega_4^2 = \Omega_{ab}^2 = \left(a^2+b^2\right)M_{110}\,, \qquad \Gamma_{ab} = \frac{\Omega_{ab}^4}{300\pi}\,k_0^5V\,\frac{2a^4+2b^4-a^2b^2}{a^2+b^2}\,. \tag{110.8}$$

Формулы, аналогичные (110.7) и (110.8), для колебаний Π_5 и Π_6 получаются циклической заменой.

Еще два колебания квадрупольного типа описываются потенциалами вида

$$\Pi = 1 - \alpha x^2 - \beta y^2 - \gamma z^2, \tag{110.9}$$

где α, β и γ имеют структуру (110.2) ($\theta_i = \theta$). Условие гармоничности $\nabla^2\Pi = 0$ дает связь $\langle\alpha\rangle \equiv \alpha+\beta+\gamma = 0$, откуда следует квадратное уравнение для θ:

$$\theta^2 - \frac{2}{3}\,\left\langle a^2\right\rangle\theta + \frac{1}{3}\,\left\langle b^2c^2\right\rangle = 0\,, \tag{110.10}$$

где ломаные скобки, как всегда в этой книге, обозначают сумму трех членов циклической перестановки. Корни уравнения (110.10) даются формулами

$$\theta^+ = \frac{1}{3}\left(\left\langle a^2\right\rangle + \Delta\right), \quad \theta^- = \frac{1}{3}\left(\left\langle a^2\right\rangle - \Delta\right), \quad \Delta^2 = \left\langle a^4\right\rangle - \left\langle b^2c^2\right\rangle.$$

Корням θ^+ и θ^- соответствуют два набора α^+, β^+, γ^+ и α^-, β^-, γ^-, дающие два независимых решения: $\Pi^+ = \Pi_7$ и $\Pi^- = \Pi_8$ задачи (109.4). В дальнейшем мы иногда будем опускать индексы «+» и «−», помня, что каждому выражению без этих индексов отвечают две формулы, относящиеся к колебаниям Π^+ и Π^-.

Из (110.2) следует

$$a^2\alpha = 1+\theta\alpha, \qquad b^2\beta = 1+\theta\beta, \qquad c^2\gamma = 1+\theta\gamma, \tag{110.11}$$

так что для коэффициентов α, β, γ справедливы соотношения $\left\langle a^2\alpha\right\rangle = 3$, $\left\langle a^2\alpha^2\right\rangle = \theta\left\langle a^2\right\rangle$, упрощающие дальнейшие выкладки.

Для колебаний с потенциалами Π_7 и Π_8 разложение (109.5) тоже начинается со второго члена, которому соответствуют отличные от нуля компоненты квадрупольного электрического тензора

$$D_{xx} = \frac{12}{5}\,V\theta\alpha, \qquad D_{yy} = \frac{12}{5}\,V\theta\beta, \qquad D_{zz} = \frac{12}{5}\,V\theta\gamma,$$

а магнитный момент поляризационных токов равен нулю. Далее, в этом случае $L \equiv \int |\mathbf{P}|^2\,dV = 4/5\,V\theta\left\langle a^2\right\rangle$, $R(u) = (\theta+u)^2$, так что окончательно

$$\frac{J}{\omega} = \frac{2}{125}\,k^5V^2\theta^2\left\langle a^2\right\rangle, \tag{110.12}$$

$$\Omega^2 = abc\,\theta\int\limits_0^\infty \frac{du}{(\theta+u)^2Q(u)} = \left\langle\frac{a^2M_a}{a^2-\theta}\right\rangle, \tag{110.13}$$

$$\Gamma = \frac{\Omega^4}{200\pi}\,k_0^5V\theta. \tag{110.14}$$

Формулу (110.13) можно переписать в виде [520]

$$(\Omega^\pm)^2 = 1-\left\langle a^2M_{110}\right\rangle \pm \Delta\left\langle\frac{a^2M_{100}}{(a^2-b^2)\,(c^2-a^2)}\right\rangle. \tag{110.15}$$

Другая, эквивалентная (110.15), запись, более удобна для перехода к частным случаям сфероида или шара. Она получается при обратном переходе на основе (3.6)–(3.10) от потенциальных факторов единичного веса к факторам с бо́льшим весом и имеет уже встречавшийся нам (см. (64.47)) вид:

$$(\Omega^\pm)^2 = 1-\frac{1}{2}\,\left\langle\left(a^2+b^2\right)M_{110}\right\rangle \pm \frac{1}{3}\,\Delta\left(\left\langle M_{011}\right\rangle - \left\langle a^2\right\rangle M_{111}\right). \tag{110.16}$$

В частном случае сфероида $(a=b\neq c)$ выражения (110.8), (110.16) и (110.14) переходят в

$$(\Omega^+)^2 = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\,\dfrac{a^2-(a^2+2c^2)M}{a^2-c^2}\,, \\[2ex] \Omega_{ab}^2 = \dfrac{2c^2-3a^2(1-M)}{4(c^2-a^2)}\,, \end{cases} \qquad \Gamma^+ = \begin{cases} \dfrac{a^2c(a^2+2c^2)}{450}\,k_0^5(\Omega^+)^4\,, & a>c \\[2ex] \Gamma_{ab} = \dfrac{a^4c}{150}\,k_0^5(\Omega^+)^4\,; & a<c \end{cases} \tag{110.17}$$

$$(\Omega^-)^2 = \begin{cases} \Omega_{ab}^2 = \dfrac{3a^2(1-M)-2c^2}{4(a^2-c^2)}\,, \\[2ex] \dfrac{3}{2}\,\dfrac{(a^2+2c^2)M-a^2}{c^2-a^2}\,, \end{cases} \qquad \Gamma^- = \begin{cases} \Gamma_{ab} = \dfrac{a^4c}{150}\,k_0^5(\Omega^-)^4\,, & a>c \\[2ex] \dfrac{a^2c(a^2+2c^2)}{450}\,k_0^5(\Omega^-)^4\,; & a<c \end{cases} \tag{110.18}$$

$$\Omega^2_{ac}=\Omega^2_{bc}=\frac{(a^2+c^2)(3M-1)}{2(a^2-c^2)}, \qquad \Gamma_{ac}=\Gamma_{bc}=\frac{a^2c(2a^4-a^2c^2+2c^4)}{225\,(a^2+c^2)}\,k_0^5\Omega^4_{ac}. \tag{110.19}$$

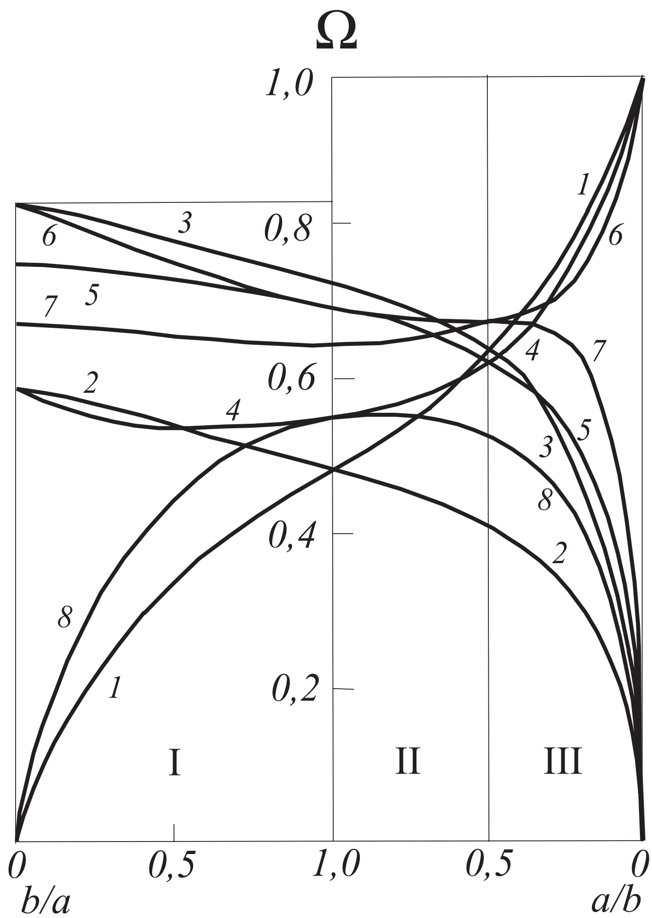

Рис. 3. Дипольные и квадрупольные частоты плазменного эллипсоида ($b = 2c$)

Первоначально формулы первая из (110.8) и (110.16) были получены в работе [494]. Для плазменного шара получается [443]

$$\begin{gathered}\Omega_{ab} = \Omega_{bc} = \Omega_{ac} = \Omega^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2,5}}\,,\\ \Gamma_{ab} = \Gamma_{bc} = \Gamma_{ac} = \Gamma^{\pm} = \frac{2}{1875}(k_0a)^5\,.\end{gathered} \tag{110.20}$$

110.4. Октупольные колебания

Наконец, из семи колебаний октупольного типа шесть описываются тремя парами потенциалов: $\Pi_9 = \Pi^+_{aaa}$, $\Pi_{10} = \Pi^-_{aaa}$; $\Pi_{11} = \Pi^+_{bbb}$, $\Pi_{12} = \Pi^-_{bbb}$ и

$\Pi_{13} = \Pi^{+}_{ccc}$, $\Pi_{14} = \Pi^{-}_{ccc}$, где, скажем,

$$\Pi_{aaa} = \frac{x}{a}\left(1 - \alpha_a x^2 - \beta_a y^2 - \gamma_a z^2\right), \tag{110.21}$$

а α_a, β_a, γ_a даются выражениями (110.2), в которых $\theta_i = \theta_a$. Из условия гармоничности $\nabla^2\Pi_{aaa} = 0$ следует связь $3\alpha_a + \beta_a + \gamma_a = 0$, доставляющая квадратное уравнение

$$\theta_a^2 - {}^2\!/_5\left(a^2 + 2b^2 + 2c^2\right)\theta_a + {}^1\!/_5\left(a^2b^2 + a^2c^2 + 3b^2c^2\right) = 0, \tag{110.22}$$

корни которого суть

$$\theta_a^{\pm} = \frac{1}{5}(a^2 + 2b^2 + 2c^2 \pm \Delta_a)$$

и введено обозначение

$$\Delta_a^2 = 4(b^2 - c^2)^2 + (a^2 - b^2)(a^2 - c^2).$$

Из формул вида (110.11) легко получить соотношения

$$\begin{gathered} 3a^2\alpha_a + b^2\beta_a + c^2\gamma_a = 5, \quad 3a^2\alpha_a^2 + b^2\beta_a^2 + c^2\gamma_a^2 = \theta_a\epsilon_a, \\ 3a^4\alpha_a^2 + b^4\beta_a^2 + c^4\gamma_a^2 = 5 + \theta_a^2\epsilon_a, \qquad \epsilon_a = 3\alpha_a^2 + \beta_a^2 + \gamma_a^2, \end{gathered}$$

существенно упрощающие вычисления. Для октупольных потенциалов разложение (109.5) начинается с третьего члена, и излучаемая мощность для потенциала (110.21) дается выражением

$$\frac{J_{aaa}}{\omega} = \frac{12k^7V^2\theta_a^2}{(7!!)^3\,a^2}\left\{\epsilon_a(2a^2+\theta_a)^2 + \frac{7}{4}\left[2\epsilon_a(a^2-\theta_a)^2 - 15\right] + 105\right\}. \tag{110.23}$$

Здесь первому члену в фигурных скобках соответствует излучение электрического октуполя (см. (F.10) и (34.1))

$$Q_{ijk} = 3\int \mathbf{P}\nabla\left[5x_ix_jx_k - r^2(x_i\delta_{jk} + x_j\delta_{ki} + x_k\delta_{ij})\right]dV,$$

у которого в рассматриваемом случае отличны от нуля компоненты

$$(Q_{xxx}, Q_{xyy}, Q_{xzz}) = \frac{9V}{7a}\,\theta_a(2a^2+\theta_a)\,(3\alpha_a, \beta_a, \gamma_a)\,.$$

Второму члену соответствует излучение магнитного квадруполя, создаваемого поляризационными токами $\mathbf{j} = -i\,\omega\mathbf{P}$. Его момент (52.9)

$$\mathfrak{M}_{ij} = \frac{1}{\mathfrak{c}}\int \left\{[\mathbf{rj}]_i x_j + [\mathbf{rj}]_j x_i\right\} dV$$

имеет в нашем случае отличные от нуля тензорные компоненты

$$\mathfrak{M}_{yz} = \mathfrak{M}_{zy} = -\frac{2ikV}{35}\,\frac{\theta_a}{a}\,\left(\theta_a - a^2\right)(\beta_a - \gamma_a).$$

Третий член в (110.23) обязан излучению так называемого тороидного, или анапольного, момента (подробнее см. Приложение G и указанную в нем литературу)

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{10\mathfrak{c}}\int \left\{(\mathbf{rj})\mathbf{r} - 2r^2\mathbf{j}\right\} dV,$$

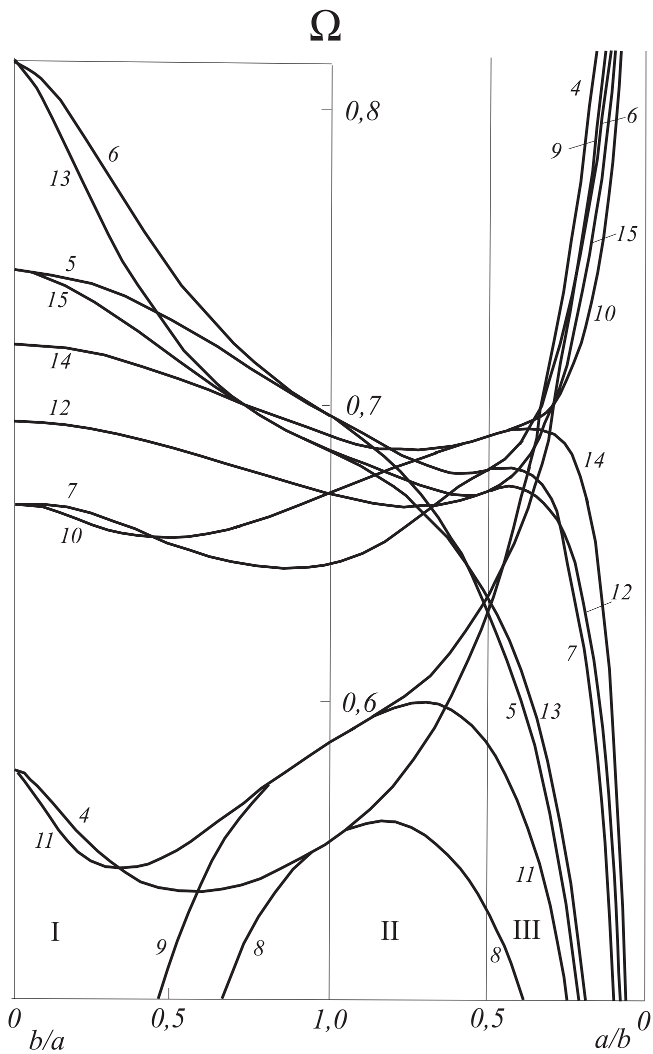

Рис. 4. Квадрупольные и октупольные частоты плазменного эллипсоида ($b = 2c$)

которое эквивалентно излучению электрического диполя с моментом

$$\mathbf{p}^{\mathrm{equ}} = -(1/\mathfrak{c})\dot{\boldsymbol{\tau}} = ik\boldsymbol{\tau}.$$

Для токов $\mathbf{j} = i\omega\nabla\Pi_{aaa}$ отлична от нуля лишь компонента

$$p_x^{\mathrm{equ}} = (2k^2V/35)(\theta_a/a).$$

Потенциалу Π_{aaa} соответствует

$$L_{aaa} = \frac{2V\theta_a}{35a^2}\,\left(2a^2 + \theta_a\right)\epsilon_a, \qquad R(u) = (a^2 + u)(\theta_a + u)^2,$$

так что окончательно будем иметь[1]

$$\Omega_{aaa}^2 = \left(2a^2 + \theta_a\right)\left(\frac{a^2 M_{200}}{a^2-\theta_a} + \frac{b^2 M_{110}}{b^2-\theta_a} + \frac{c^2 M_{101}}{c^2-\theta_a}\right), \tag{110.24}$$

$$\Gamma_{aaa} = \frac{3\Omega_{aaa}^6}{8\pi(7!!)^2}\, k_0^7 V\theta_a\, \frac{2\epsilon_a(5a^4+3\theta_a^2-2a^2\theta_a)+105}{\epsilon_a\,(2a^2+\theta_a)}. \tag{110.25}$$

Делая циклическую замену индексов и расставляя штрихи, получаем полное описание шести октупольных колебаний 9–14.

Для седьмого октупольного колебания поляризационный потенциал имеет вид $\Pi_{15} = \Pi_{abc} = -xyz/(abc)$ и

$$\frac{J_{abc}}{\omega} = \frac{6k^7V^2}{(7!!)^3 a^2b^2c^2}\left\{\left\langle a^2b^2\right\rangle^2 + \frac{7}{4}\left\langle a^4\left(b^2-c^2\right)^2\right\rangle\right\}, \tag{110.26}$$

где первому слагаемому соответствует излучение электрического октуполя

$$Q_{xyz} = \frac{3V}{7abc}\left\langle a^2b^2\right\rangle,$$

а второму — магнитного квадруполя

$$\{\mathfrak{M}_{xx}, \mathfrak{M}_{yy}, \mathfrak{M}_{zz}\} = -\frac{2ikV}{abc}\left\{a^2\left(b^2-c^2\right),\, b^2\left(c^2-a^2\right),\, c^2\left(a^2-b^2\right)\right\}.$$

Тороидный момент в этом случае равен нулю[2].

Для Π_{abc} имеем

$$L_{abc} = \frac{V}{35\,a^2b^2c^2}\left\langle a^2b^2\right\rangle, \qquad R(u) = (a^2+u)(b^2+u)(c^2+u),$$

так что

$$\begin{gathered}\Omega_{15}^2 = \Omega_{abc}^2 = \left\langle a^2b^2\right\rangle M_{111}, \\ \Gamma_{abc} = \frac{3\Omega_{abc}^6}{4\pi(7!!)^2}\, k_0^7 V\, \frac{3\left\langle a^4b^4\right\rangle - a^2b^2c^2\left\langle a^2\right\rangle}{\left\langle a^2b^2\right\rangle}.\end{gathered} \tag{110.27}$$

Рассмотрим теперь случай вырождения трехосного эллипсоида в сфероид ($a = b \neq c$). Нас интересуют выражения для собственных частот и постоянные радиационного затухания. При этом при преобразовании частот удобно вместо (110.24) исходить из модернизованного выражения (64.49):

$$\begin{gathered}2\left(\Omega_{aaa}^{\pm}\right)^2 = 1 + 6M_{100} + 2a^2\left(a^2M_{300} - 5M_{200}\right) - \\ - \left\langle a^2b^2\right\rangle M_{111} \pm \Delta_a\left(M_{011} - 4a^2M_{111} + a^4M_{211}\right).\end{gathered} \tag{110.28}$$

Получающиеся из формул (110.28) и (110.27) окончательные выражения для собственных частот октупольных колебаний плазменного сфероида

[1] Представления собственных частот через внутренние потенциальные факторы M_{lmn} в формулах (110.13) и (110.24) проще всего получить прямой подстановкой соответствующих полиномиальных функций Нивена–Ламе в уравнение (109.4).

[2] Излучение магнитных и тороидных моментов, создаваемых потенциальными поляризационными токами, не было, к сожалению, учтено в [487, 520] при вычислении радиационных постоянных.

$(a = b \neq c)$ имеют следующий вид:

$$(\Omega^{\pm}_{aaa})^2 = (\Omega^{\pm}_{bbb})^2 = \begin{cases} \dfrac{15a^4(1-M) - 2c^2(9a^2 - 4c^2)}{16(a^2-c^2)^2}, & a \gtrless c \\[2ex] \dfrac{(11a^2+4c^2)\left[3a^2(1-M)+2c^2(1-6M)\right]}{16(a^2-c^2)^2}; & a \lessgtr c \end{cases} \tag{110.29}$$

$$(\Omega^{\pm}_{ccc})^2 = \begin{cases} \Omega^2_{abc} = \dfrac{(a^2+2c^2)(2c^2 - 7a^2 + 15a^2M)}{8(a^2-c^2)^2}, & a \gtrless c \\[2ex] \dfrac{(a^2+4c^2)\left[3(3a^2+2c^2)M - 5a^2\right]}{4(a^2-c^2)^2}. & a \lessgtr c \end{cases} \tag{110.30}$$

Здесь верхнему $(+)$ из верхних индексов $\pm$ у $\Omega^{\pm}$ соответствует верхний из знаков неравенства у неравенств $a \gtrless c$ или $a \lessgtr c$, а нижнему — нижний.

Формулы (110.25) и вторая из (110.27) дают следующие выражения для радиационных постоянных сфероида:

$$\Gamma^{\pm}_{aaa} = \Gamma^{\pm}_{bbb} = \begin{cases} \dfrac{2a^6c}{(7!!)^2}\, k_0^7 (\Omega^{\pm}_{aaa})^6, & a \gtrless c \\[2ex] \dfrac{2a^2c(a^2+4c^2)(16a^4 - 10a^2c^2 + 9c^4)}{5(7!!)^2(11a^2+4c^2)}\, k_0^7 (\Omega^{\pm}_{aaa})^6; & a \lessgtr c \end{cases} \tag{110.31}$$

$$\Gamma^{\pm}_{ccc} = \begin{cases} \Gamma_{abc} = \dfrac{a^4c(3a^4 - 2a^2c^2 + 5c^4)}{(7!!)^2(a^2+2c^2)}\, k_0^7 \Omega^6_{abc}, & a \gtrless c \\[2ex] \dfrac{2a^2c(3a^2+2c^2)(3a^4 - 4a^2c^2 + 6c^4)}{5(7!!)^2(a^2+4c^2)}\, k_0^7 (\Omega^{\pm}_{ccc})^6. & a \lessgtr c \end{cases} \tag{110.32}$$

Для плазменного шара в согласии с [443] получаем

$$\begin{aligned} \Omega^{\pm}_{aaa} &= \Omega^{\pm}_{bbb} = \Omega^{\pm}_{ccc} = \Omega_{abc} = \sqrt{\frac{3}{7}}, \\ \Gamma^{\pm}_{aaa} &= \Gamma^{\pm}_{bbb} = \Gamma^{\pm}_{ccc} = \Gamma_{abc} = \frac{2}{(7!!)^2} \left(\frac{3}{7}\right)^3 (k_0 a)^7. \end{aligned} \tag{110.33}$$

На рис. 3 и 4 даны графики собственных частот плазменного эллипсоида с отношением полуосей $b/c = 2$, причем дипольные и квадрупольные частоты приведены на рис. 3, а квадрупольные и октупольные — на рис. 4. На оси абсцисс отложены отношения b/a (левые половины рисунков) и a/b (правые половины). Диапазон изменения значений приведенных собственных частот Ω простирается от 0 до 1 и полностью представлен на рис. 3. На рис. 4 дана лишь наиболее важная часть этого диапазона, содержащая все точки пересечения кривых. Маркировка кривых та же, что и в тексте. Вертикальные прямые, разграничивающие области I, II, III, соответствуют вырождению эллипсоида в сфероид $a = b$ или $a = c$.

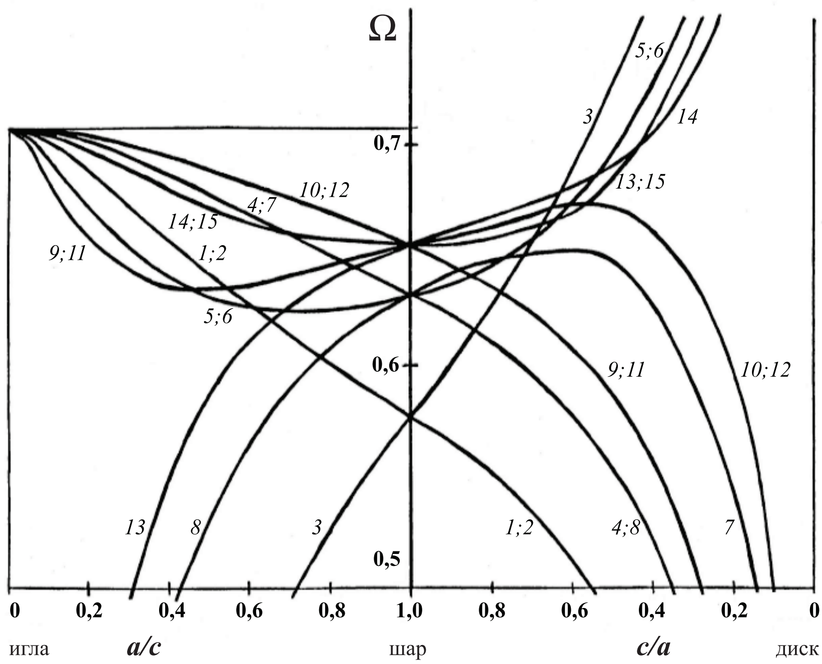

Рис. 5. Дипольные, квадрупольные и октупольные частоты плазменного сфероида ($a = b \neq c$)

При геометрическом вырождении трехосного эллипсоида в сфероид происходит вырождение (совпадение) частот некоторых мультипольных колебаний. В частности, если ограничиться рассмотрением дипольных, квадрупольных и октупольных колебаний, то вместо 15-ти частотных кривых, характерных для эллипсоида, в случае сфероида остается только 9. Это позволяет все частотные кривые разместить на одном рис. 5, содержащем все точки пересечения кривых.

§ 111. Резонансное возбуждение плазменного эллипсоида

Эллипсоидальные гармоники Ламе – Нивена, простейшие из которых были рассмотрены в предыдущем разделе, обладают свойством ортогональности

$$\int \nabla\Pi_r \nabla\Pi_s \, dV = \int \mathbf{P}_r \mathbf{P}_s \, dV = 0 \qquad \text{при} \qquad r \neq s. \tag{111.1}$$

Это можно доказать в общем виде, если вернуться к первоначальной записи Ламе всех Π_s в эллипсоидальных координатах. Для разобранных же нами 15-ти потенциалов, записанных в полиномиальной форме Нивена, справедливость (111.1) устанавливается несложной проверкой. Для большинства пар $\mathbf{P}_r$, $\mathbf{P}_s$ ортогональность усматривается сразу же из нечетности подынтегрального выражения относительно одной из координат.

Нетривиальные случаи доставляют пары вида $\Pi_a = \Pi_1$, $\Pi_{aaa} = \Pi_{9,10}$, ортогональность которых следует из соотношения

$$3a^2\alpha_a + b^2\beta_a + c^2\gamma_a = 5,$$

и пары вида $\Pi' = \Pi_7$, $\Pi'' = \Pi_8$ и $\Pi'_{aaa} = \Pi_9$, $\Pi''_{aaa} = \Pi_{10}$, для которых ортогональность есть следствие соотношений

$$\langle\alpha'\alpha''\rangle = 0, \qquad 3\alpha'_a\alpha''_a + \beta'_a\beta''_a + \gamma'_a\gamma''_a = 0, \tag{111.2}$$

вытекающих из определений (110.2) и уравнений (110.9) и (110.14).

Как известно, гармоники Ламе образуют в классе гармонических функций полную систему, так что распределение поляризации внутри эллипсоида можно представить в виде

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \sum_s f_s(t)\mathbf{P}_s(\mathbf{r}). \tag{111.3}$$

Тогда из $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{P}}/(ne)$ и (111.1) следует, что кинетическая энергия сгустка равна сумме парциальных энергий:

$$K(t) = \frac{2\pi}{\omega_0^2}\sum_s L_s\dot{f}_s^2, \qquad L_s = \int |\mathbf{P}_s|^2\,dV.$$

На сумму парциальных энергий распадается и полная электрическая энергия:

$$U_E(t) = 2\pi\sum_s L_s\Omega_s^2 f_s^2.$$

Более того, будет аддитивной и диссипативная функция, описывающая внутренние потери из-за столкновений, поскольку мощность этих потерь есть $2\,\nu_{\text{eff}}\,K(t)$ и, следовательно, распадается вместе с кинетической энергией на сумму парциальных потерь. Таким образом, если отвлечься от потерь, связанных с излучением, то собственные колебания эллипсоида обладают всеми свойствами нормальных колебаний аналитической динамики и могут рассматриваться независимо друг от друга. Так как для собственных векторных функций $\mathbf{P}_s$, выполняется уравнение $\mathbf{E}_P\{\mathbf{P}_s\} = -4\pi\Omega_s^2\mathbf{P}_s$, то подстановка (111.3) в общее уравнение (109.1) дает

$$\sum_s\left(\ddot{f}_s + \nu_{\text{eff}}\,\dot{f}_s + \omega_s^2 f_s\right)\mathbf{P}_s = \frac{\omega_0^2}{4\pi}\,\mathbf{E}_{\text{ext}}\,, \qquad \omega_s = \omega_0\Omega_s,$$

откуда, пользуясь условием ортогональности, получаем систему независимых уравнений

$$\ddot{f}_s + \nu_s\dot{f}_s + \omega_s^2 f_s = \omega_0^2\mathcal{E}_s, \qquad \mathcal{E}_s = \frac{1}{4\pi L_s}\int \mathbf{E}_{\text{ext}}\mathbf{P}_s\,dV \tag{111.4}$$

где формальная замена

$$\nu_{\text{eff}} \to \nu_s = \nu_{\text{eff}} + 2\gamma_{\text{rad}} = \nu_{\text{eff}} + 2\omega_0\Gamma_s$$

позволяет учесть в случае монохроматического внешнего поля $(e^{-i\omega t})$, частота которого близка к резонансной, и радиационные потери. Так можно, конечно, поступать лишь для изолированного резонанса на одной моде.

Если же при некоторых значениях параметров b/a, c/a происходит совпадение собственных частот двух мод, то в выражении для полной мощности излучения может появиться смешанный член и вместо ранее найденных радиационных постоянных затухания появятся новые, определяемые из решения задачи о двух осцилляторах с малой диссипативной связью. Здесь мы не будем останавливаться на этом вопросе, так как в рассматриваемом далее новом пондеромоторном эффекте радиационные потери аддитивны. Отметим только, что в классе дипольных и квадрупольных мод таких смешанных потерь нет для всех возможных пар, колеблющихся на одной частоте, а для октупольных мод смешанные потери возникают в парах (9, 10), (11, 12), (13, 14), так как в каждой из этих пар есть одинаковые компоненты тензора магнитного момента и вектора тороидного момента. Кроме того, у пар (9, 1), (10, 1); (11, 2), (12, 2); (13, 3), (14, 3) будут смешанные потери, обусловленные произведениями эквивалентного дипольного (тороидного) момента октупольной моды и дипольного момента дипольной моды.

Если столкновения редки и для всех интересующих нас мод $\nu_{\text{eff}} \ll \gamma_{\text{rad}}$ (для высших мультипольных мод это неравенство рано или поздно нарушается), то при точном резонансе $\omega = \omega_s$

$$f_s = i\frac{\omega_0^2}{\omega_s \nu_s}\,\mathcal{E}_s = \frac{i\mathcal{E}_s}{2\,\Omega_s \Gamma_s}$$

и переизлучаемая мощность равна

$$|f_s|^2 J_s = \frac{\pi\omega_0}{\Gamma_s}\,L_s|\mathcal{E}_s|^2.$$

Пусть внешнее поле есть плоская линейно поляризованная волна единичной амплитуды

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} = \mathbf{e}\exp(ik\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}) = \mathbf{e}\{1 + ik(\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}) - {}^1\!/_2\,k^2(\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r})^2 + \ldots\},$$

где $\mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\varkappa}$ — взаимно ортогональные единичные векторы. Тогда для дипольных, квадрупольных и октупольных мод входящий в $\mathcal{E}_s$ интеграл принимает соответственно вид

$$(\mathbf{e}\mathbf{P}_s)V \qquad (s = 1\text{–}3),$$

$$ik\int(\mathbf{e}\mathbf{P}_s)\,(\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r})\,dV \qquad (s = 4\text{–}8),$$

$$-\frac{k^2}{2}\int(\mathbf{e}\mathbf{P}_s)\,(\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r})^2\,dV \qquad (s = 9\text{–}15).$$

Так как, по определению поперечника рассеяния S, переизлучаемая мощность есть $\mathfrak{c}wS$ (w — средняя плотность энергии падающей волны, равная в нашем случае $w = 1/8\pi$), то при точном одиночном резонансе $\omega = \omega_s$ имеем

$$S_s = \frac{8\pi^2 k_0}{\Gamma_s}\,L_s|\mathcal{E}_s|^2 = \frac{\lambda_s^2}{2\,\pi}\,\sigma_s. \tag{111.5}$$

Здесь $\lambda_s = 2\pi/k_s = 2\pi/(k_0\Omega_s)$ — резонансные длины волн, а функции σ_s зависят только от отношений осей эллипсоида и его ориентации. В явной форме

$$\sigma_1 = 3e_x^2\,, \quad \sigma_4 = 15\,\frac{\left(a^2\varkappa_x e_y + b^2\varkappa_y e_x\right)^2}{2a^4 + 2b^4 - a^2b^2}\,, \quad \sigma_{7,\,8} = 10\frac{\langle\alpha\varkappa_x e_x\rangle^2}{\tau}\,,$$

$$\begin{aligned}\sigma_{9,\,10} = 105\left[e_x + e_x\theta_a(\alpha_a\varkappa_x^2 + \beta_a\varkappa_y^2 + \gamma_a\varkappa_z^2) + 2a^2(\alpha_a\varkappa_x e_x + \right.\\ \left. + \beta_a\varkappa_y e_y + \gamma_a\varkappa_z e_z)\right]^2\left[2\tau_a(5a^4 + 3\theta_a^2 - 2a^2\theta_a) + 105\right]^{-1},\end{aligned} \tag{111.6}$$

$$\sigma_{15} = 105\,\frac{\left\langle a^2b^2\varkappa_x\varkappa_y e_z\right\rangle^2}{3\left\langle a^4b^4\right\rangle - a^2b^2c^2\left\langle a^2\right\rangle}\,,$$

а остальные получаются из выражений для σ_1, σ_4, $\sigma_{9,\,10}$ циклической заменой.

В случае одиночного резонанса на сгусток в поле падающей волны действует сила $\mathbf{F}_s = wS_s\boldsymbol{\varkappa}$. Если же собственные частоты двух мод совпадают, то

$$\mathbf{F} = wS_{\text{tot}}\,\boldsymbol{\varkappa} - \mathbf{\Pi}, \tag{111.7}$$

где S_{tot} — суммарный поперечник рассеяния, а $\mathbf{\Pi}$ — полный поток импульса, уносимый рассеянным полем, который в случае нескольких мультипольных излучателей, вообще говоря, отличен от нуля. Действительно, в волновой зоне $(r \gg \lambda)$

$$d\mathbf{\Pi} = \frac{dS_r}{16\pi}\,\left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2\right)\boldsymbol{\nu}$$

и, поскольку $|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|$,

$$\mathbf{\Pi} = \oint \boldsymbol{\nu}|\mathbf{H}|^2\,\frac{dS_r}{8\pi}, \tag{111.8}$$

где интеграл берется по сфере радиуса r. Для волновой зоны мультипольное разложение магнитного вектора имеет вид[1]

$$\mathbf{H} = k^2\,\frac{e^{ikr}}{r}\,\left[\boldsymbol{\nu}, \left(\mathbf{Q} - \frac{ik}{6}\,\mathbf{D} - \frac{k^2}{90}\,\mathbf{O} + \left[\mathfrak{M} - \frac{ik}{6}\,\mathfrak{D}, \boldsymbol{\nu}\right]\right)\right]. \tag{111.9}$$

Здесь $\mathbf{Q}$ — полный электрический дипольный момент (включая $\mathbf{p}^{\text{equ}}$, обусловленный тороидным моментом), а векторы $\mathbf{D}$, $\mathbf{O}$ и $\mathfrak{D}$ связаны с тензорами электрических квадрупольного и октупольного моментов Q_{ij}, $Q_{ij\,k}$ и магнитного квадрупольного момента $\mathfrak{M}_{ij}$ соотношениями $D_i = \nu_j Q_{ji}$, $O_i = \nu_j\nu_k Q_{jki}$, $\mathfrak{D}_i = \nu_j\mathfrak{M}_{ji}$. Подставляя (111.9) в (111.8) и усредняя по телесному углу $d\Omega = dS_r/r^2$, окончательно получаем

$$\begin{aligned}\Pi_l = \frac{k^4}{3}\,\text{Re}\,[\mathbf{Q}^*\mathfrak{M}]_l + \frac{k^5}{30}\,\text{Im}\,(Q_i^*Q_{il} + \mathfrak{M}_i^*\mathfrak{M}_{il}) + \\ + \frac{k^6}{540}\,\text{Re}\,(\varepsilon_{lij}Q_{ik}^*\mathfrak{M}_{jk}) + \frac{2k^7}{14175}\,\text{Im}\left(Q_{ij}^*Q_{ijl}\right),\end{aligned} \tag{111.10}$$

где ε_{ijk} — совершенно антисимметричный единичный псевдотензор.

Из (111.10) сразу видно, что $\mathbf{\Pi}_{\text{res}}$ может возникнуть при совпадении собственных частот лишь у пары дипольной и квадрупольной мод или у

[1] Вывод формул для мощности и импульса, излучаемых системой токов, дан в Приложении G.

пары квадрупольной и октупольной мод. Для таких пар нет смешанных потерь по энергии излучения, и поэтому можно без оговорок пользоваться всеми результатами предыдущего параграфа. Общее число возможных вариантов довольно велико. Так, из рассмотрения рис. 3 следует, что при $b = 2c$ есть 9 пересечений дипольных (1–3) и квадрупольных (4–8) кривых, для которых вектор

$$\Pi_l = \frac{k^4}{3}\,\mathrm{Re}[\mathbf{Q}^*\mathfrak{M}]_l + \frac{k^5}{30}\,\mathrm{Im}(Q_i^* Q_{il}) \tag{111.11}$$

отличен от нуля. Число квадрупольно-октупольных пересечений на рис. 4 гораздо больше.

Поэтому здесь мы ограничимся лишь одним примером, когда $\Omega_b = \Omega_{ab}$. Тогда у дипольной моды $Q_y = (V/b)f_2$, а у квадрупольной

$$\mathfrak{M}_z = -\frac{ikV}{10}\,\frac{a^2-b^2}{ab}\,f_4, \qquad Q_{xy} = \frac{3V}{5ab}\,\left(a^2+b^2\right)f_4.$$

Подстановка этих выражений в (111.11) дает при резонансе

$$\mathbf{\Pi} = w\frac{\lambda^2}{2\pi}\,\boldsymbol{\sigma}_{\text{п}}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_{\text{п}} = 3(4a^2-b^2)e_y\,\frac{a^2\varkappa_x e_y + b^2\varkappa_y e_x}{2a^4+2b^4-a^2b^2}\,\mathbf{x}_0, \tag{111.12}$$

так что

$$\mathbf{F} = w\boldsymbol{\sigma}\lambda^2/(2\pi), \qquad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_2+\sigma_4)\boldsymbol{\varkappa} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{п}}. \tag{111.13}$$

При $b = 2c$ кривые 2 и 4 на рис. 3 пересекаются при $a \approx 2b$, и, следовательно,

$$\sigma_4 = {}^1\!/_2\left(4\varkappa_x e_y + \varkappa_x e_y\right)^2, \qquad \boldsymbol{\sigma}_{\text{п}} = {}^3\!/_2\left(4\varkappa_x e_y + \varkappa_x e_y\right)e_y\mathbf{x}_0.$$

Пусть, например, эллипсоид ориентирован так, что его оси направлены по «биссектрисам» октантов, образованных векторами $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\boldsymbol{\varkappa}$ падающей волны. Тогда при $\varkappa_x = \varkappa_y = \varkappa_z = e_x = -e_y = e_z = 1/\sqrt{3}$ имеем $\sigma = {}^1\!/_2$, $\boldsymbol{\sigma}_{\text{п}} = \left(\sqrt{3}/2\right)\mathbf{x}_0$. Если же повернуть эллипсоид относительно оси $\mathbf{x}_0$ на $\pi/2$, то $\varkappa_x = -\varkappa_y = \varkappa_z = e_x = -e_y = -e_z = 1/\sqrt{3}$ и $\sigma_4 = 25/18$, $\boldsymbol{\sigma}_{\text{п}} = \left(5/2\sqrt{3}\right)\mathbf{x}_0$. Таким образом, в этих двух случаях для ускоряющей (параллельной $\boldsymbol{\varkappa}$) и боковой сил будем иметь соответственно $\sigma_\parallel = 1$, $\sigma_\perp = 1/\sqrt{2}$ и $\sigma_\parallel = 14/9$, $\sigma_\perp = 5\sqrt{2}/6$.

§ 112. Заключительные замечания

Подводя итоги, отметим эффекты, исчезающие при вырождении эллипсоида в шар. В случае шара поляризационные токи, соответствующие квадрупольным и октупольным модам, уже не создают ни магнитных, ни тороидного моментов[1]. Поэтому суммарная мощность излучения нескольких мод на одной частоте не содержит перекрестных членов, и, следовательно, все моды будут независимыми между собой и по радиационным потерям. Так как для шара колебания с одинаковым рангом мультипольности l

[1] Это находится в полном согласии с результатами работы [443].

имеют одну общую собственную частоту $\Omega_l = (2+1/l)^{-1/2}$, то межмультипольный резонанс на модах соседней мультипольности (§ 111) невозможен и резонансный поток импульса $\mathbf{\Pi}$ равен нулю.

Сделаем еще одно общее замечание. Нахождение собственных частот квазистатических колебаний однородного сгустка плазмы можно свести к макроскопической краевой задаче для уравнения Лапласа в двух областях

$$\Delta\Phi^i = 0, \quad \Delta\Phi^e = 0, \quad \Phi^i_\Gamma = \Phi^e_\Gamma, \quad \varepsilon_i\left(\frac{\partial\Phi^i}{\partial n}\right)_\Gamma = \left(\frac{\partial\Phi^e}{\partial n}\right)_\Gamma, \tag{112.1}$$

которая имеет нетривиальные решения для дискретного спектра отрицательных значений диэлектрической проницаемости сгустка $\varepsilon_i = 1 - \Omega_i^{-2}$. При $\varepsilon_e = 1/\varepsilon_i$ эти решения являются, очевидно, и решениями задачи, отличающейся от (112.1) заменой второго граничного условия на

$$\left(\partial\Phi^i/\partial n\right)_\Gamma = \varepsilon_e\left(\partial\Phi^e/\partial n\right)_\Gamma,$$

т. е. задачи о собственных колебаниях однородной плазмы, внутри которой есть вакуумная полость той же формы, что и сгусток в первоначальной задаче. Так как $\varepsilon_e = 1 - \Omega_e^{-2}$, то условие $\varepsilon_i\varepsilon_e = 1$ сразу дает соотношение $\Omega_i^2 + \Omega_e^2 = 1$, связывающее собственные частоты колебаний одинаковой структуры для этих двух дополнительных задач.

Последнее замечание. Понятно, что изложенная в данной главе[1] теория, опирающаяся на модель малого однородного плазменного (с неподвижными ионами) эллипсоида с резкой границей и диэлектрической проницаемостью (64.44)

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \tag{112.2}$$

представляет интерес прежде всего для изучения резонансных свойств твердотельных частиц, к которым в наибольшей мере применима указанная идеализация (см., например, [269, 309, 360, 361]).

В соответствии со сказанным формулы для «плазмонных частот колебаний трехосного наноэллипсоида» [127] применительно к дипольным, квадрупольным и октупольным колебаниям обязаны совпадать с собственными частотами, найденными в [494, 498] с помощью интегральных уравнений электростатики и развитой в [209, 518] теорией потенциала эллипсоида[2].

[1] А также в п. 64.3 параграфа 64.

[2] К сожалению, работы [494, 498] в [127] не упоминаются.

ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Некоторые параметрические суммы, возникающие в теории потенциала

А1. «Пуассоновы» суммы [493]

Если в уравнение Пуассона

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi_{2\lambda+1,2\mu,2\nu} = -4\pi\varrho_0\left(\frac{x}{a}\right)^{2\lambda+1}\left(\frac{y}{b}\right)^{2\mu}\left(\frac{z}{c}\right)^{2\nu} \qquad (\text{A.1})$$

подставить выражение для $\Phi^{(i)}_{2\lambda+1,2\mu,2\nu}(\mathbf{r})$, даваемое формулами (14.19), (14.20), а затем (после выполнения дифференцирования) произвести замены $i \to i{+}1$ в первом, $j \to j{+}1$ во втором, $k \to k{+}1$ в третьем слагаемых левой части (А.1) и, наконец, использовать для упрощений соотношение (3.6), то в результате приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ получим

$$\sum_{l=0}^{\lambda}\sum_{m=0}^{\mu}\sum_{n=0}^{\nu}\frac{(-2)^{l+m+n}\,(2i{+}2l{+}1)!!\,(2j{+}2m{-}1)!!\,(2k{+}2n{-}1)!!}{(2l+1)!\,(2m)!\,(2n)!\,(\lambda-l)!\,(\mu-m)!\,(\nu-n)!} = \\ = (-2)^{\lambda+\mu+\nu}\delta_{i\lambda}\,\delta_{j\mu}\,\delta_{k\nu}\,, \qquad (\text{A.2})$$

где $\delta_{i\lambda}$ - символ Кронекера. Из (14.19) следует, что (А.2) справедливо при условии

$$\lambda+\mu+\nu \geqslant i+j+k \geqslant 0\,. \qquad (\text{A.3})$$

Очевидно, эта сумма есть просто тройное произведение однократных сумм вида

$$\sum_{l=0}^{\lambda}\frac{(-2)^l(2i+2l-1)!!}{(2l)!\,(\lambda-l)!} = (-2)^\lambda\delta_{i\lambda}\,, \qquad (\text{A.4})$$

$$\sum_{l=0}^{\lambda}\frac{(-2)^l(2i+2l+1)!!}{(2l+1)!\,(\lambda-l)!} = (-2)^\lambda\delta_{i\lambda}\,, \qquad (\text{A.5})$$

где

$$\lambda \geqslant i\,. \qquad (\text{A.6})$$

В свою очередь, суммы (А.4) и (А.5) являются вырождением суммы (А.2) при $\lambda{=}\mu{=}0$ и $\mu{=}\nu{=}0$ соответственно.

По способу получения мы будем называть в дальнейшем эти суммы «пуассоновыми».

А2. Трехпараметрические суммы [493]

Рассмотрим суммы

$$S(\lambda,i,p)=\sum_{l=0}^{\lambda}\frac{(-2)^l(2i+2l-1)!!}{(2l)!\,(\lambda-l)!\,(2p+2l+1)}\qquad(p\geqslant i)\,,\tag{А.7}$$

$$T(\lambda,i,p)=\sum_{l=0}^{\lambda}\frac{(-2)^l(2i+2l+1)!!}{(2l+1)!\,(\lambda-l)!\,(2p+2l+1)}\qquad(p>i)\,,\tag{А.8}$$

зависящие от трех неотрицательных целочисленных параметров λ, i, p. Как мы сейчас увидим, при $i\leqslant\lambda$ эти суммы вычисляются в общем виде. Так как

$$\frac{1}{2p+2l+1}=1-\frac{2p}{2p+2l+1}-\frac{2l}{2p+2l+1}$$

или

$$\frac{1}{2p+2l+1}=1-\frac{2p-1}{2p+2l+1}-\frac{2l+1}{2p+2l+1}\,,$$

то вместо (А.7) и (А.8) можно записать

$$(2p+1)S(\lambda,i,p)+\sum_{l=1}^{\lambda}\frac{(-2)^l(2i+2l-1)!!}{(2l-1)!\,(\lambda-l)!\,(2p+2l+1)}=(-2)^{\lambda}\,\delta_{i\lambda}\,,\tag{А.9}$$

$$2p\,T(\lambda,i,p)+\sum_{l=0}^{\lambda}\frac{(-2)^l(2i+2l+1)!!}{(2l)!\,(\lambda-l)!\,(2p+2l+1)}=(-2)^{\lambda}\,\delta_{i\lambda}\,,\tag{А.10}$$

где мы использовали формулы (А.4) и (А.5) для пуассоновых сумм. Далее разбиение

$$(2i+2l+1)!!=(2i+1)(2i+2l-1)!!+2l(2i+2l-1)!!$$

приводит (А.10) к виду

$$\begin{aligned}2p\,T(\lambda,i,p)+(2i+1)\,S(\lambda,i,p)+&\\+\sum_{l=1}^{\lambda}\frac{(-2)^l(2i+2l-1)!!}{(2l-1)!\,(\lambda-l)!\,(2p+2l+1)}&=(-2)^{\lambda}\,\delta_{i\lambda}\,.\end{aligned}\tag{А.11}$$

Теперь из (А.9) и (А.11) сразу следует

$$(p-i)\,S(\lambda,i,p)=p\,T(\lambda,i,p)\,.\tag{А.12}$$

В частности, при $i=0$

$$S(\lambda,0,p)=T(\lambda,0,p)\,.\tag{А.13}$$

Аналогично тождество

$$(2i+2l+1)!!=2i(2i+2l-1)!!+(2l+1)(2i+2l-1)!!$$

переводит (А.8) в

$$T(\lambda,i,p)=2\,i\,T(\lambda,i-1,p)+S(\lambda,i,p)\,.\tag{А.14}$$

Вместе формулы (А.12) и (А.14) приводят к рекуррентному соотношению
$$S(\lambda, i, p) = -2(p-i+1)S(\lambda, i-1, p)\,, \tag{А.15}$$
i-кратное использование которого дает
$$S(\lambda, i, p) = (-2)^i\,\frac{p\,!}{(p-i)!}\,S(\lambda, 0, p)\,. \tag{А.16}$$

Если в (А.9) произвести замену $l \to l+1$, то будем иметь
$$(2p+1)S(\lambda, i, p) = (-2)^\lambda\,\delta_{i\lambda} + 2\,T(\lambda-1, i, p+1)\,. \tag{А.17}$$
Отсюда при $i=0$ с учетом равенства (А.13) находим
$$S(\lambda, 0, p) = \frac{2^\lambda\,(2p-1)!!}{(2\lambda+2p-1)!!}\,S(0,0,p+\lambda)\,. \tag{А.18}$$
Так как при $\lambda = i = 0$ сумма (А.7) состоит лишь из одного слагаемого, равного
$$S(0,0,p) = \frac{1}{2p+1}\,, \tag{А.19}$$
то из (А.16), (А.18), (А.19) для $S(\lambda, i, p)$ окончательно получаем
$$\sum_{l=0}^{\lambda} \frac{(-2)^l(2i+2l-1)!!}{(2l)!\,(\lambda-l)!\,(2p+2l+1)} = \frac{2^\lambda(-2)^i p\,!(2p-1)!!}{(p-i)!(2\lambda+2p+1)!!} \qquad (p \geqslant i)\,, \tag{А.20}$$

Следовательно, сумма $T(\lambda, i, p)$ в соответствии с (А.12) равна
$$\sum_{l=0}^{\lambda} \frac{(-2)^l(2i+2l+1)!!}{(2l+1)!\,(\lambda-l)!\,(2p+2l+1)} = \frac{2^\lambda(-2)^i (p-1)!(2p-1)!!}{(p-i-1)!(2\lambda+2p+1)!!} \qquad (p > i)\,. \tag{А.21}$$
Кроме того, из (А.9) и (А.10) имеем соответственно
$$\sum_{l=1}^{\lambda} \frac{(-2)^l(2i+2l-1)!!}{(2l-1)!\,(\lambda-l)!\,(2p+2l+1)} = \\ = (-2)^\lambda\,\delta_{i\lambda} - \frac{2^\lambda(-2)^i p\,!(2p+1)!!}{(p-i)!(2\lambda+2p+1)!!} \qquad (p \geqslant i)\,, \tag{А.22}$$

$$\sum_{l=0}^{\lambda} \frac{(-2)^l(2i+2l+1)!!}{(2l)!\,(\lambda-l)!\,(2p+2l+1)} = \\ = (-2)^\lambda\,\delta_{i\lambda} + \frac{2^\lambda(-2)^{i+1} p\,!(2p-1)!!}{(p-i-1)!(2\lambda+2p+1)!!} \qquad (p \geqslant i)\,. \tag{А.23}$$
Выведенные с использованием пуассоновых сумм формулы (А.20)–(А.23) справедливы при условии $i \leqslant \lambda$.

Следствием формул (A.21) и (A.23), взятых при $i=\lambda$, является равенство

$$\sum_{l=0}^{\lambda} \frac{(-2)^l (2i+2l+3)!!}{(2l+1)!\,(\lambda-l)!\,(2p+2l+1)} =$$
$$= (-2)^\lambda \left[1 - \frac{2^{\lambda+1}(p-1)!(2p-1)!!}{(p-\lambda-2)!(2\lambda+2p+1)!!}\right] \qquad (p \geqslant \lambda+2)\,. \quad \text{(A.24)}$$

A3. Две двухпараметрические суммы [525]

Рассмотрим суммы

$$S_1(\lambda,l) = \sum_i \frac{4^i}{(2i+1)!\,(\lambda-i)!\,(l-i)!}\,, \qquad \text{(A.25)}$$

$$S_2(\lambda,l) = \sum_i \frac{4^i}{(2i)!\,(\lambda-i)!\,(l-i)!}\,, \qquad \text{(A.26)}$$

зависящие от двух неотрицательных целочисленных параметров λ и l.

Отметим сразу очевидные свойства сумм (A.25), (A.26) :

$$S_n(\lambda,l) = S_n(l,\lambda) \qquad (n=1,2)\,, \qquad \text{(A.27)}$$

$$S_1(0,0) = 1\,, \qquad \text{(A.28)}$$

вытекающие из их определения. Если множитель $(2i+1)^{-1}$, входящий в выражение (A.25), представить как сумму

$$\frac{1}{2i+1} = 1 + 2\,\frac{l-i}{2i+1} - 2l\,\frac{1}{2i+1}\,,$$

то вместо (A.25) получаем

$$S_1(\lambda,l) = S_2(\lambda,l) + 2S_1(\lambda,l-1) - 2lS_1(\lambda,l)\,,$$

или

$$(2l+1)S_1(\lambda,l) = S_2(\lambda,l) + 2S_1(\lambda,l-1)\,, \qquad \text{(A.29)}$$

$$(2\lambda+1)S_1(\lambda,l) = S_2(\lambda,l) + 2S_1(\lambda-1,l)\,, \qquad \text{(A.30)}$$

где последняя формула — результат применения к (A.29) свойства симметрии (A.27).

Вновь обращаясь к формуле (A.25), сделаем в ней замену $i \to i$–1, после чего выражение под знаком суммы умножим на единицу, представленную как

$$1 = 2\,\frac{l+1}{2i} - 2\,\frac{l+1-i}{2i}\,.$$

В итоге опять будем иметь две формулы:

$$S_1(\lambda,l) = \frac{l+1}{2}\,S_2(\lambda+1,l+1) - \frac{1}{2}\,S_2(\lambda+1,l)\,, \qquad \text{(A.31)}$$

$$S_1(\lambda,l) = \frac{\lambda+1}{2}\,S_2(\lambda+1,l+1) - \frac{1}{2}\,S_2(\lambda,l+1)\,, \qquad \text{(A.32)}$$

причем (А.32) вытекает из (А.31), если учесть (А.27).

В результате замен $\lambda \to \lambda - 1$, $l \to l - 1$ формула (А.31) приобретает вид

$$l\, S_2(\lambda, l) = S_2(\lambda, l-1) + 2\, S_1(\lambda - 1, l-1)\,,$$

а замена $l \to l - 1$ в (А.30) дает

$$2\, S_1(\lambda - 1, l-1) = (2\lambda + 1)\, S_1(\lambda, l-1) - S_2(\lambda, l-1)\,.$$

Из последних двух формул следует, что

$$S_2(\lambda, l) = \frac{2\lambda + 1}{l}\, S_1(\lambda, l-1)\,. \tag{А.33}$$

Подставляя (А.33) в (А.29), получаем рекуррентную формулу

$$S_1(\lambda, l) = \frac{2\lambda + 2l + 1}{l(2l+1)}\, S_1(\lambda, l-1)\,, \tag{А.34}$$

l-кратное использование которой приводит к выражению

$$S_1(\lambda, l) = \frac{(2\lambda + 2l + 1)!!}{(2\lambda+1)!!\,(2l+1)!!\,l!}\, S_1(\lambda, 0)\,. \tag{А.35}$$

Симметрия (А.27) позволяет вместо (А.34) написать рекуррентное соотношение

$$S_1(\lambda, l) = \frac{2\lambda + 2l + 1}{\lambda(2\lambda+1)}\, S_1(\lambda - 1, l)\,,$$

которое при $l = 0$ сводится к

$$S_1(\lambda, 0) = \frac{1}{\lambda}\, S_1(\lambda - 1, 0)\,.$$

λ-кратное применение последней формулы дает

$$S_1(\lambda, 0) = \frac{1}{\lambda\,!}\, S_1(0, 0) = \frac{1}{\lambda\,!}\,, \tag{А.36}$$

где учтено (А.28).

Если теперь подставить (А.36) в (А.35) и умножить числитель и знаменатель получившейся дроби на $2^{\lambda + l}$, то получаем

$$S_1(\lambda, l) = \frac{2^{\lambda + l}\,(2\lambda + 2l + 1)\,!!}{(2\lambda+1)\,!\,(2l+1)\,!}\,. \tag{А.37}$$

Делая (А.37) замену $l \to l - 1$ и подставляя результат в (А.33), находим

$$S_2(\lambda, l) = \frac{2^{\lambda + l}\,(2\lambda + 2l - 1)\,!!}{(2\lambda)\,!\,(2l)\,!}\,. \tag{А.38}$$

А4. Еще одна двухпараметрическая сумма

Рассмотрим сумму

$$T(s,m)=\sum_{i=0}^{s}\frac{(-2)^i}{(s-i)!\,(2m+2i+1)!!}\,. \tag{A.39}$$

Если множитель $(2m{+}2i{+}1)^{-1}$, входящий в выражение (А.39), представить как сумму

$$\frac{1}{2m+2i+1}=1-\frac{2m}{2m+2i+1}+\frac{2(s{-}i)}{2m+2i+1}-\frac{2s}{2m+2i+1}\,,$$

то вместо (А.39) будем иметь

$$T(s,m)=T(s,m{-}1)-2m\,T(s,m)+2\,T(s{-}1,m)-2s\,T(s,m)$$

или

$$(2m{+}2s{+}1)\,T(s,m)=T(s,m{-}1)+2\,T(s{-}1,m)\,. \tag{A.40}$$

В результате замены $i\to i+1$ формула (А.39) принимает вид

$$T(s,m)=\sum_{i=-1}^{s-1}\frac{(-2)^{i+1}}{(s{-}1{-}i)!\,(2m+2i+3)!!}\,.$$

Выделим из этой суммы и запишем отдельно слагаемое, соответствующее $i{=}-1$. Это дает

$$T(s,m)=\frac{1}{s\,!\,(2m+1)!!}-2\,T(s{-}1,m{+}1)\,. \tag{A.41}$$

Замена $m\to m{-}1$ позволяет придать (А.41) вид

$$\frac{1}{s\,!\,(2m-1)!!}=T(s,m{-}1)+2\,T(s{-}1,m)\,. \tag{A.42}$$

Из равенства правых частей формул (А.42) и (А.40) следует равенство их левых частей. Так что окончательно получаем

$$T(s,m)=\frac{1}{s!\,(2m-1)!!\,(2m+2s+1)}\,. \tag{A.43}$$

В. Некоторые объемные, поверхностные и контурные интегралы

В этом приложении (в подразделах В1–В5, посвященных трехмерному случаю) применительно к эллипсоиду и его вырожденным и предельным геометрическим формам вычисляются объемные, поверхностные и контурные интегралы от произведения целочисленных степеней декартовых координат[1] $x^l y^m z^n$ (часть указанных формул впервые рассматривалась Лагранжем). В основном тексте монографии эти интегралы используются уже как табличные (при расчете мультипольных моментов или решении интегральных уравнений).

Остающиеся подразделы (начиная с В6) относятся к пространству двух измерений. Рассмотренные в них интегралы привлекаются в основном тексте для вычисления так называемых «погонных» (т. е. соответствующих единице длины) мультипольных моментов в плоских задачах.

В1. Интеграл по сфере

Рассмотрим интеграл

$$J \equiv \oint \exp(\mathbf{qr})\, dS$$

по поверхности сферы радиуса r_0 с центром в начале координат. Введя сферические координаты с полярной осью, параллельной вектору $\mathbf{q} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, будем иметь

$$J = r_0^2 \int \exp(r_0 q \cos\theta)\, d\Omega = 2\pi r_0^2 \int\limits_{-1}^{1} \exp(r_0 q \cos\theta)\, d(\cos\theta) = 4\pi \frac{r_0}{q} \operatorname{sh}(r_0 q),$$

где $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ — элемент телесного угла. Используя разложение гиперболического синуса $\operatorname{sh} x$ в бесконечный ряд по степеням x, окончательно получаем

$$\oint \exp(\mathbf{qr})\, dS = 4\pi r_0^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(r_0^2 q^2)^i}{(2\,i+1)!}\ , \tag{В.1}$$

где

$$q^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2. \tag{В.2}$$

Следуя Нивену [263], будем оперировать далее с произвольной функцией $f(\mathbf{r})$, радиус сходимости ряда Маклорена которой превосходит r_0. Очевидно, что ряд Маклорена для функции $f(\mathbf{r})$ можно представить, используя аналогичное разложение для экспоненциальной функции, в следующем символическом виде:

$$f(\mathbf{r}) = \exp\{\mathbf{r}\nabla\} f(0),$$

где $\nabla \equiv \partial/\partial\mathbf{r} = \{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\}$ — оператор Гамильтона. Поэтому ряду (В.1) формально соответствует равенство

$$\oint f(\mathbf{r})\, dS = 4\pi r_0^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{r_0^{2i}}{(2i+1)!} \Delta^i f(\mathbf{r}), \tag{В.3}$$

[1] Мы отвлекаемся от подынтегральных весовых функций-множителей, неизбежно возникающих в случае несферических поверхностей и некруговых контуров.

где Δ – оператор Лапласа. В правой части (B.3) после выполнения всех операций дифференцирования следует положить $x=y=z=0$.

Пусть, в частности, функция $f(\mathbf{r})$ имеет интересующий нас вид

$$f(\mathbf{r}) = x^{2l}y^{2m}z^{2n}. \tag{B.4}$$

Тогда, учитывая, что в соответствии с полиномиальной формулой оператор Δ^i равен

$$\Delta^i \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^i = \sum_{p+q+r=i} \frac{i!}{p!\,q!\,r!}\,\frac{\partial^{2p+2q+2r}}{\partial x^{2p}\partial y^{2q}\partial z^{2r}} \tag{B.5}$$

и что значения производных, входящих в (B.3), берутся в начале координат (центре шара), констатируем, что для функции (B.4) тройная сумма по i, p, q в (B.3) фактически сводится к единственному слагаемому с производной

$$\frac{\partial^{2l+2m+2n}f}{\partial x^{2l}\partial y^{2m}\partial z^{2n}} = (2l)!\,(2m)!\,(2n)!.$$

Так что окончательно

$$\oint x^{2l}y^{2m}z^{2n}\,dS = 4\pi\frac{(2l-1)!!(2m-1)!!(2n-1)!!}{(2l+2m+2n+1)!!}\,r_0^{2(l+m+n+1)}. \tag{B.6}$$

B2. Интеграл по объему шара

Рассмотрим теперь интеграл $\int f(\mathbf{r})\,dV$ по объему шара радиуса R с центром в начале координат и представим его в виде ряда по степеням R. Здесь $f(\mathbf{r})$ – произвольная функция, радиус сходимости ряда Маклорена которой превосходит R.

Привлекая (B.3), нетрудно видеть, что

$$\int f(\mathbf{r})\,dV = \int_0^R dr_0 \oint f(\mathbf{r})\,dS = 4\pi\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Delta^i f(\mathbf{r})}{(2i+1)!}\int_0^R r_0^{2i+2}\,dr_0.$$

Таким образом, окончательно

$$\int f(\mathbf{r})\,dV = 4\pi R^3\sum_{i=0}^{\infty}\frac{R^{2i}}{(2i+3)(2i+1)!}\,\Delta^i f(\mathbf{r}). \tag{B.7}$$

В правой части (B.7) после выполнения всех дифференцирований следует положить $x=y=z=0$.

Для функции (B.4) из формулы (B.7), как и при выводе (B.6), получаем

$$\int x^{2l}y^{2m}z^{2n}\,dV = 4\pi\frac{(2l-1)!!(2m-1)!!(2n-1)!!}{(2l+2m+2n+3)!!}\,R^{2l+2m+2n+3}. \tag{B.8}$$

B3. Интеграл по объему эллипсоида

Рассмотрим интеграл

$$\int (x/a)^{2l}(y/b)^{2m}(z/c)^{2n}\,dV \tag{B.9}$$

по объему эллипсоида, ограниченного поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{B.10}$$

Перейдем в (B.9) к новым переменным интегрирования $x = a\overline{x}$, $y = b\overline{y}$, $z = c\overline{z}$:

$$\int (x/a)^{2l}(y/b)^{2m}(z/c)^{2n}\,dV = abc\int \overline{x}^{2l}\overline{y}^{2m}\overline{z}^{2n}\,d\overline{x}\,d\overline{y}\,d\overline{z}.$$

В переменных $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ интеграл берется по объему единичного шара, а его величина дается формулой (B.8), в которой следует положить $R=1$. Таким образом, результат интегрирования (*формула Лагранжа*) приобретает вид

$$\int \left(\frac{x}{a}\right)^{2l}\left(\frac{y}{b}\right)^{2m}\left(\frac{z}{c}\right)^{2n} dV = 4\pi\frac{(2l-1)!!(2m-1)!!(2n-1)!!}{(2l+2m+2n+3)!!}\,abc. \tag{B.11}$$

B4. Интеграл по поверхности эллипсоида

Вычислим теперь интеграл

$$\oint \left(\frac{x}{a}\right)^{2l}\left(\frac{y}{b}\right)^{2m}\left(\frac{z}{c}\right)^{2n} p\,dS \tag{B.12}$$

по поверхности эллипсоида, используя, например, формулу Гаусса–Остроградского

$$\oint (\mathbf{n}\,\mathbf{A})\,dS = \int \operatorname{div}\mathbf{A}\,dV. \tag{B.13}$$

В этих формулах (см. (1.12) и (1.13))

$$p = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}, \tag{B.14}$$

$$\mathbf{n} = \left\{\frac{x}{a^2}\,p\,, \frac{y}{b^2}p\,, \frac{z}{c^2}p\right\}.$$

Чтобы скалярное произведение $(\mathbf{n}\mathbf{A})$, входящее в поверхностный интеграл в (B.13), имело в случае эллипсоидальной границы вид

$$(x/a)^{2l}(y/b)^{2m}(z/c)^{2n}p,$$

вектор $\mathbf{A}$ можно выбрать равным, например,

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}\,a\left(\frac{x}{a}\right)^{2l-1}\left(\frac{y}{b}\right)^{2m}\left(\frac{z}{c}\right)^{2n},$$

где $\mathbf{i}$ – орт оси x. Подставляя выражение для $\mathbf{A}$ в правую часть (B.13), вычисляя дивергенцию и используя (B.11), окончательно получаем

$$\oint \left(\frac{x}{a}\right)^{2l}\left(\frac{y}{b}\right)^{2m}\left(\frac{z}{c}\right)^{2n} p\,dS = 4\pi\frac{(2l-1)!!(2m-1)!!(2n-1)!!}{(2l+2m+2n+1)!!}\,abc. \tag{B.15}$$

B5. Интеграл по поверхности эллиптического диска

При $c \to 0$ поверхность (B.10) эллипсоида переходит в *незамкнутую* поверхность эллиптического диска, лежащего в плоскости $z=0$ и ограниченного в ней эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{B.16}$$

Так как при $c \to 0$ из (B.10) и (B.14) следует, что на поверхности эллипсоида

$$z/c = \pm D(x,y) \qquad \text{и} \qquad p \to c/\,D(x,y),$$

где

$$D(x,y) = \sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}, \tag{B.17}$$

то, деля обе части (B.15) на c и учитывая, что

$$\lim_{c\to 0} \oint \left(\frac{x}{a}\right)^{2l} \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} \left(\frac{z}{c}\right)^{2n} \frac{p}{c}\, dS = 2\int \left(\frac{x}{a}\right)^{2l} \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} D^{2n-1} dS,$$

окончательно получаем

$$\int \left(\frac{x}{a}\right)^{2l} \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} D^{2n-1} dS = 2\pi \frac{(2l-1)!!(2m-1)!!(2n-1)!!}{(2l+2m+2n+1)!!}\, ab. \tag{B.18}$$

B6. Контурный интеграл по окружности

Вычислим контурный интеграл

$$I \equiv \oint \exp(\mathbf{qr})\, dl$$

по окружности радиуса r_0, считая, что начало координат совпадает с ее центром, а векторы $\mathbf{r}=\{x,y\}$ и $\mathbf{q}=\{q_x,q_y\}$ лежат в плоскости xy. Вводя полярные координаты и разлагая экспоненту в ряд, получаем

$$\oint \exp(\mathbf{qr})\, dl = r_0 \int\limits_0^{2\pi} \exp(qr_0\cos\varphi)\, d\varphi = r_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \int\limits_0^{2\pi} (qr_0\cos\varphi)^i\, d\varphi.$$

При почленном интегрировании ряда слагаемые, содержащие нечетные степени $\cos\varphi$, исчезают. Поэтому, учитывая, что

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2m}\varphi\, d\varphi = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\,\frac{\pi}{2},$$

будем иметь

$$\oint \exp(\mathbf{qr})\, dl = 2\pi r_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(qr_0)^{2k}}{4^k (k!)^2}. \tag{B.19}$$

Следовательно, для произвольной функции $f(x,y)$, радиус сходимости ряда Маклорена которой превосходит r_0, справедлива формула

$$\oint f(x,y)\, dl = 2\pi r_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_0^{2k}}{4^k (k!)^2}\; \Delta_2^k f(x,y), \tag{B.20}$$

где двумерный оператор Лапласа

$$\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

После выполнения дифференцирования в правой части (В.20) необходимо положить $x=y=0$.

Для $f(x,y) = x^{2l}y^{2m}$ в результате рассуждений, аналогичных содержащимся в В1, получаем

$$\oint x^{2l}y^{2m}\,dl = 2\pi\frac{(2l-1)!!(2m-1)!!}{(2l+2m)!!}\;r_0^{2l+2m+1}. \qquad \text{(В.21)}$$

В7. Интеграл по поверхности круга

Рассмотрим интеграл $\int f(x,y)\,dS$ по поверхности круга радиуса R с центром в начале координат и представим его в виде ряда по степеням R. Здесь $f(\mathbf{r})$ – произвольная функция, радиус сходимости ряда Маклорена которой превосходит R.

Очевидно, что

$$\int f(x,y)\,dS = \int\limits_0^R dr_0 \oint f(x,y)\,dl = 2\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta_2^k f(x,y)}{4^k(k!)^2}\int\limits_0^R r_0^{2k+1}\,dr_0,$$

где использовано разложение (В.20). Таким образом, окончательно

$$\int f(x,y)\,dS = 2\pi R^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!}\;\Delta_2^k f(x,y). \qquad \text{(В.22)}$$

В правой части (В.22) после выполнения всех операций дифференцирования следует положить $x=y=0$.

Для $f(x,y) = x^{2l}y^{2m}$ из (В.22) следует, что

$$\int x^{2l}y^{2m}\,dS = 2\pi\frac{(2l-1)!!(2m-1)!!}{(2l+2m+2)!!}\;R^{2l+2m+2}. \qquad \text{(В.23)}$$

В8. Еще интеграл по поверхности эллиптического диска

Рассмотрим интеграл

$$\int \left(\frac{x}{a}\right)^{2l}\left(\frac{y}{b}\right)^{2m} dS$$

по поверхности эллиптического диска с полуосями a, b, ограниченного контуром

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

Поступая по аналогии с пунктом В3, т. е. вводя новые переменные интегрирования $x = a\overline{x}$, $y = b\overline{y}$ и используя для интеграла по поверхности круга *единичного* радиуса формулу (В.23), приходим к следующему результату:

$$\int \left(\frac{x}{a}\right)^{2l}\left(\frac{y}{b}\right)^{2m} dS = 2\pi\,\frac{(2l-1)!!(2m-1)!!}{(2l+2m+2)!!}\;ab. \qquad \text{(В.24)}$$

В9. Контурный интеграл по эллипсу

Обратимся вновь к формуле Гаусса–Остроградского (В.13), в которой интегрирование распространено на поверхность и объем эллипсоида, только теперь вектор $\mathbf{A}$ выберем не зависящим от координаты z и имеющим вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}\, a \left(\frac{x}{a}\right)^{2l-1} \left(\frac{y}{b}\right)^{2m}.$$

В результате подстановки этого выражения для $\mathbf{A}$ формула Гаусса–Остроградского приобретает вид

$$\oint \left(\frac{x}{a}\right)^{2l} \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} p\, dS = (2l-1) \int \left(\frac{x}{a}\right)^{2l-2} \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} dV. \qquad (\text{B.25})$$

Поскольку при $c \to \infty$ эллипсоид трансформируется в эллиптический цилиндр, а подынтегральные выражения в (В.25) от z не зависят, то должно выполняться равенство, получающееся из (В.25) при исключении интегрирования по z и имеющее, очевидно, вид

$$\oint \left(\frac{x}{a}\right)^{2l} \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} p_2\, dl = (2l-1) \int \left(\frac{x}{a}\right)^{2l-2} \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} dS. \qquad (\text{B.26})$$

Здесь контурный интеграл по периметру эллиптического диска выражен через интеграл по поверхности эллиптического диска, а

$$p_2 = (x^2/a^4 + y^2/b^4)^{-1/2}.$$

Используя (В.24), получаем из (В.26) окончательное выражение

$$\oint \left(\frac{x}{a}\right)^{2l} \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} p_2\, dl = 2\pi \frac{(2l-1)!!(2m-1)!!}{(2l+2m)!!}\, ab. \qquad (\text{B.27})$$

В10. Интеграл по отрезку прямой

Рассмотрим предельный переход от эллипса к отрезку прямой, осуществляемый, скажем, посредством $b \to 0$. Так что эллиптический диск

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

трансформируется в прямолинейный отрезок длиной $2a$. Тогда имеют место формулы

$$p_2 \to b \Big/ \sqrt{1 - x^2/a^2}\,, \qquad y/b = \pm\sqrt{1 - x^2/a^2}. \qquad (\text{B.28})$$

Поэтому, деля обе части (В.27) на b и привлекая (В.28), приходим к искомому однократному интегралу

$$\int\limits_{-a}^{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{2l} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{m-1/2} dx = \pi \frac{(2l-1)!!\,(2m-1)!!}{(2l+2m)!!}\, a. \qquad (\text{B.29})$$

С. О числе независимых компонент симметричного неприводимого тензора

В трехмерном пространстве тензор l-го ранга имеет 3^l компонент. Существование каких-либо независимых между собой уравнений связи между компонентами уменьшает число независимых компонент на число уравнений связи. Пусть $\alpha_{i_1 \ldots i_l}$ — неприводимый симметричный тензор, а L — число его независимых компонент. Очевидно, что

$$L = 3^l - N - S, \tag{C.1}$$

где N и S — числа уравнений связи, вытекающих из условия неприводимости и условия совершенной симметрии тензора, соответственно.

Число различных уравнений связи вида $\alpha_{jj\, i_3 \ldots i_l} = 0$, обеспечивающих неприводимость тензора $\overleftrightarrow{\alpha}$, равно, очевидно, числу сочетаний из l по 2, т. е.

$$N = C_l^2 = \frac{l(l-1)}{2}. \tag{C.2}$$

Обратимся теперь к условию симметрии тензора $\alpha_{i_1 \ldots i_l}$. Каждый из индексов $i_1, \ldots, i_l$ может принимать значения x, y, z. Поэтому любую конкретную реализацию совокупности этих индексов можно условно записать в виде

$$x^m y^n z^{l-m-n}. \tag{C.3}$$

При фиксированных m и n число различных наборов индексов $i_1, \ldots, i_l$, охватываемых представлением (С.3), очевидно, равно

$$\frac{l!}{m!\, n!\, (l-m-n)!}. \tag{C.4}$$

Понятно, что (С.4) есть число компонент тензора $\overleftrightarrow{\alpha}$, связанных условием симметрии применительно к рассматриваемой реализации совокупности индексов. Этому числу симметричных компонент соответствует на единицу меньшее число уравнений связи. Общее же число уравнений связи, даваемых условием симметрии, равно

$$S = \sum_{m=0}^{l} \sum_{n=0}^{l-m} \left(\frac{l!}{m!\, n!\, (l-m-n)!} - 1 \right). \tag{C.5}$$

Первый член в скобках в (С.5) — это полиномиальный коэффициент, входящий в формулу (см. (14.6))

$$(A+B+C)^l = \sum_{m=0}^{l} \sum_{n=0}^{l-m} \frac{l!}{m!\, n!\, (l-m-n)!}\, A^m B^n C^{l-m-n}. \tag{C.6}$$

Полагая в (С.6) $A = B = C = 1$ и подставляя результат в (С.5), получаем

$$S = 3^l - \sum_{m=0}^{l} \sum_{n=0}^{l-m} 1. \tag{C.7}$$

Двойная сумма в (С.7) равна, очевидно, числу ее слагаемых, т. е.

$$\sum_{m=0}^{l}\sum_{n=0}^{l-m}1=\frac{(l+2)(l+1)}{2}.$$

Поэтому из (С.1) окончательно получаем, что

$$L=2\,l+1.$$

D. О парциальных источниках магнитного поля эллипсоида

Здесь рассматривается связь, существующая между *парциальными* объемными плотностями зарядовых и токовых источников эллипсоидального тела. Связующим звеном между зарядами (магнитными) и токами (амперовыми) служит вектор намагничения $\mathfrak{I}$.

Пусть декартовы компоненты намагничения представляют собой однородные гармонические полиномы (относительно координат $\bar{x} = x/a$, $\bar{y} = y/b$, $\bar{z} = z/c$) степени $\nu+1$ и даются формулами

$$\mathfrak{I}_x^{(\nu+1)} = \sum_{k+l+m=\nu+1} \frac{(\nu+1)!}{k!\,l!\,m!}\,\varkappa_{x;\,klm}\,\bar{x}^k\bar{y}^{\,l}\bar{z}^m, \tag{D.1}$$

$$\mathfrak{I}_y^{(\nu+1)} = \sum_{k+l+m=\nu+1} \frac{(\nu+1)!}{k!\,l!\,m!}\,\varkappa_{y;\,klm}\,\bar{x}^k\bar{y}^{\,l}\bar{z}^m, \tag{D.2}$$

$$\mathfrak{I}_z^{(\nu+1)} = \sum_{k+l+m=\nu+1} \frac{(\nu+1)!}{k!\,l!\,m!}\,\varkappa_{z;\,klm}\,\bar{x}^k\bar{y}^{\,l}\bar{z}^m. \tag{D.3}$$

Входящие сюда коэффициенты $\varkappa_{x;\,klm}$, $\varkappa_{y;\,klm}$ и $\varkappa_{z;\,klm}$ полиномов образуют тензор $(\nu+2)$-го ранга, симметричный по всем индексам, кроме первого (он отделен от остальных точкой с запятой), причем для симметричных индексов использована трехиндексная запись. Что касается условия гармоничности полиномов, то в данном случае оно обеспечивается (ср. с (39.16)) неприводимостью v-тензора $\overset{\leftrightarrow}{\varkappa}$ по симметричным индексам, т. е. соотношениями:

$$\varkappa_{x;\,k+2,l,m} + \varkappa_{x;\,k,l+2,m} + \varkappa_{x;\,k,l,m+2} = 0, \tag{D.4}$$

$$\varkappa_{y;\,k+2,l,m} + \varkappa_{y;\,k,l+2,m} + \varkappa_{y;\,k,l,m+2} = 0, \tag{D.5}$$

$$\varkappa_{z;\,k+2,l,m} + \varkappa_{z;\,k,l+2,m} + \varkappa_{z;\,k,l,m+2} = 0, \tag{D.6}$$

выражающими в трехиндексной записи обращение в нуль свертки тензора $\overset{\leftrightarrow}{\varkappa}$ по любой паре симметричных индексов.

Выбранному виду намагничения соответствует, по Пуассону, объемная плотность (связанного) магнитного заряда, равная

$$\begin{aligned}\tilde{\varrho} = -\operatorname{div}\mathfrak{I} = &- \sum_{k+l+m=\nu+1} \frac{(\nu+1)!}{(k-1)!\,l!\,m!}\,\frac{\varkappa_{x;\,klm}}{a}\,\bar{x}^{k-1}\bar{y}^{\,l}\bar{z}^m - \\ &- \sum_{k+l+m=\nu+1} \frac{(\nu+1)!}{k!\,(l-1)!\,m!}\,\frac{\varkappa_{y;\,klm}}{b}\,\bar{x}^{k}\bar{y}^{\,l-1}\bar{z}^m - \\ &\qquad - \sum_{k+l+m=\nu+1} \frac{(\nu+1)!}{k!\,l!\,(m-1)!}\,\frac{\varkappa_{z;\,klm}}{c}\,\bar{x}^{k}\bar{y}^{\,l}\bar{z}^{m-1}.\end{aligned}$$

Замена индексов суммирования ($k \to k+1$ в первой, $l \to l+1$ во второй и $m \to m+1$ в третьей суммах соответственно) дает (ср. с (39.13), (39.12))

$$\tilde{\varrho} = \sum_{k+l+m=\nu} \frac{\nu!}{k!\,l!\,m!}\,\alpha_{klm}\left(\frac{x}{a}\right)^k\left(\frac{y}{b}\right)^l\left(\frac{z}{c}\right)^m,$$

где трехиндексные компоненты симметричного по всем индексам тензора $\overleftrightarrow{\alpha}$ (ν-того ранга) определены формулой

$$\frac{\alpha_{klm}}{\nu+1} \equiv -\frac{\varkappa_{x;\,k+1,l,m}}{a} - \frac{\varkappa_{y;\,k,l+1,m}}{b} - \frac{\varkappa_{z;\,k,l,m+1}}{c}. \tag{D.7}$$

Заметим, что совершенно симметричный тензор $\overleftrightarrow{\alpha}$ неприводим. Действительно, его свертка по любым двум индексам равна нулю. Трехиндексная форма записи этого утверждения имеет вид

$$\alpha_{k+2,l,m} + \alpha_{k,l+2,m} + \alpha_{k,l,m+2} = 0,$$

и является следствием равенства

$$\frac{1}{a}\left(\varkappa_{x;\,k+3,l,m} + \varkappa_{x;\,k+1,l+2,m} + \varkappa_{x;\,k+1,l,m+2}\right) + \\ + \frac{1}{b}\left(\varkappa_{y;\,k+2,l+1,m} + \varkappa_{y;\,k,l+3,m} + \varkappa_{y;\,k,l+1,m+2}\right) + \\ + \frac{1}{c}\left(\varkappa_{z;\,k+2,l,m+1} + \varkappa_{z;\,k,l+2,m+1} + \varkappa_{z;\,k,l,m+3}\right) = 0,$$

которое удовлетворяется в силу (D.4)–(D.6).

Благодаря тому, что тензор $\overleftrightarrow{\alpha}$ неприводим, полином $\tilde{\varrho}(x/a, y/b, z/c)$ является гармоническим и, значит, объемная плотность рассматриваемого связанного магнитного заряда является парциальной плотностью, т. е. $\tilde{\varrho} = \tilde{\varrho}^{(\nu)}$.

Намагничению (D.1)–(D.3) соответствует плотность амперовых (молекулярных) токов

$$\mathbf{j}_A = \mathfrak{c}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{I}. \tag{D.8}$$

В частности,

$$\frac{(j_A)_x}{\mathfrak{c}} = \frac{\partial \mathfrak{I}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{I}_y}{\partial z} = \sum_{k+l+m=\nu+1} \frac{(\nu+1)!}{k!\,(l-1)!\,m!}\,\frac{\varkappa_{z;\,klm}}{b}\,\bar{x}^k \bar{y}^{\,l-1} \bar{z}^m - \\ - \sum_{k+l+m=\nu+1} \frac{(\nu+1)!}{k!\,l!\,(m-1)!}\,\frac{\varkappa_{y;\,klm}}{c}\,\bar{x}^k \bar{y}^{\,l} \bar{z}^{m-1}.$$

Замена индексов суммирования ($l \to l+1$ в первой и $m \to m+1$ во второй суммах соответственно) позволяет объединить суммы

$$\frac{(j_A)_x}{\mathfrak{c}} = \sum_{k+l+m=\nu} \frac{\nu!}{k!\,l!\,m!}\,\beta_{x;\,klm} \left(\frac{x}{a}\right)^k \left(\frac{y}{b}\right)^l \left(\frac{z}{c}\right)^m,$$

где

$$\frac{\beta_{x;\,klm}}{\nu+1} \equiv \frac{\varkappa_{z;\,k,l+1,m}}{b} - \frac{\varkappa_{y;\,k,l,m+1}}{c}.$$

Легко видеть, что из неприводимости по симметричным индексам y- и z-компонент v-тензора $\overleftrightarrow{\varkappa}$ следует неприводимость x-компоненты v-тензора $\overleftrightarrow{\beta}$. Действительно,

$$\frac{1}{\nu+3}\left(\beta_{x;\,k+2,l,m} + \beta_{x;\,k,l+2,m} + \beta_{x;\,k,l,m+2}\right) = \\ = \frac{1}{b}\left(\varkappa_{z;\,k+2,l+1,m} + \varkappa_{z;\,k,l+3,m} + \varkappa_{z;\,k,l+1,m+2}\right) - \\ - \frac{1}{c}\left(\varkappa_{y;\,k+2,l,m+1} + \varkappa_{y;\,k,l+2,m+1} + \varkappa_{y;\,k,l+1,m+3}\right) = 0.$$

Очевидно, что аналогичными свойствами обладают и y-компонента, и z-компонента v-тензора $\overleftrightarrow{\beta}$.

Таким образом, плотность $\mathbf{j}_A$ амперова тока, соответствующая согласно (D.8) намагничению (D.1)–(D.3), является плотностью парциального тока, т. е. $\mathbf{j}_A = \mathbf{j}^{(\nu)}$.

E. Теоремы взаимности

E1. Электростатические теоремы взаимности

Пусть ограниченное распределение заряда, характеризуемое плотностью $\varrho_1(\mathbf{r})$, создает в неограниченном пустом пространстве электрическое поле $\mathbf{E}_1^0$, которому соответствует вакуумный потенциал Φ_1^0. Пусть тем же источникам $\varrho_1(\mathbf{r})$ в неограниченной диэлектрической среде с $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ соответствует потенциал Φ_1, электрическое поле $\mathbf{E}_1 = -\nabla\Phi_1$ и электрическая индукция $\mathbf{D}_1 = \varepsilon\mathbf{E}_1$. Аналогичные величины (потенциалы, напряженности полей и электрическая индукция), порождаемые источниками $\varrho_2(\mathbf{r})$ в вакууме (либо в уже рассмотренной диэлектрической среде) будем отмечать индексом 2. Тогда хорошо известным теоремам взаимности

$$\int \Phi_2^0\, \varrho_1\, dV = \int \Phi_1^0\, \varrho_2\, dV\,,$$

$$\int \Phi_2\, \varrho_1\, dV = \int \Phi_1\, \varrho_2\, dV$$

можно придать «полевую» форму

$$\int \mathbf{E}_2^0\, \mathbf{D}_1\, dV = \int \mathbf{E}_1^0\, \mathbf{D}_2\, dV\,, \tag{E.1}$$

$$\int \mathbf{E}_2^0\, \mathbf{E}_1\, dV = \int \mathbf{E}_1^0\, \mathbf{E}_2\, dV \tag{E.2}$$

соответственно, где во всех четырех формулах интегрирование ведется по всему пространству. Разность же между (E.1) и (E.2) после сокращения на 4π дает соотношение

$$\int \mathbf{P}_1\, \mathbf{E}_2^0\, dV = \int \mathbf{P}_2\, \mathbf{E}_1^0\, dV\,, \tag{E.3}$$

где $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ — векторы поляризации, наводимые в диэлектрике вакуумными полями $\mathbf{E}_1^0$ и $\mathbf{E}_2^0$ соответственно, а интегрирование ведется по области, в которой $\varepsilon(\mathbf{r}) - 1 \neq 0$. В частности, для однородного диэлектрического тела объема V из (E.3) следует

$$\int\limits_V \nabla\Phi_2^0 \cdot \nabla\Phi_1\, dV = \int\limits_V \nabla\Phi_1^0 \cdot \nabla\Phi_2\, dV\,. \tag{E.4}$$

В случае однородного диэлектрического эллипсоида, подставляя в (E.4) в качестве Φ_1^0 и Φ_1 выражения (64.31) и (64.32) соответственно, а в качестве Φ_2^0 и Φ_2 потенциалы

$$\Phi_2^0 = \langle A_{100}\, x\rangle\,, \qquad \Phi_2 = \nu \left\langle \frac{A_{100}}{\nu + M_{100}}\, x \right\rangle, \tag{E.5}$$

отвечающие формулам (64.11), (64.12) и (64.13) задачи об эллипсоиде в однородном поле, и интегрируя с помощью (В.11), обнаруживаем, что входящая в формулу (64.40) комбинация α_{120}, α_{102} и α_{100} выражается непосредственно через A_{120} и A_{102} :

$$(a^2-b^2)\,\alpha_{120}+(a^2-c^2)\,\alpha_{102}-5\,\alpha_{100}= \\ =\frac{1}{\nu+M_{100}}\left[(a^2-b^2)A_{120}+(a^2-c^2)A_{102}\right]. \quad \text{(E.6)}$$

В свою очередь, подстановка выражений (64.35) и (64.39) в (E.6) и последующее приравнивание коэффициентов при A_{120} и A_{102} приводят к тождеству

$$\frac{2}{\Delta_{100}(\nu)}\ \Big\{\left[(a^2-b^2)(\nu+M_{100})+\tfrac{5}{2}\,n_{120}\right](2\nu+l_{102})- \\ -\ \left[(a^2-c^2)(\nu+M_{100})+\tfrac{5}{2}\,n_{102}\right]m_{120}\Big\}=a^2-b^2 \quad \text{(E.7)}$$

и к тождеству, получающемуся из (E.7) в результате взаимной замены $b\leftrightarrow c$ (что включает и взаимную замену двух последних индексов у всех трехиндексных величин). Отметим, что непосредственное доказательство этих тождеств с помощью рекуррентных соотношений для M_{lmn} весьма трудоемко.

E2. Теорема взаимности для стационарных токов

Пусть в теле с постоянной удельной проводимостью σ и объемом V стороннее поле $\boldsymbol{\mathcal{E}}_A$ возбуждает ток плотности $\mathbf{j}_A$, а стороннее поле $\boldsymbol{\mathcal{E}}_B$ возбуждает в том же теле ток плотности $\mathbf{j}_B$. Тогда, в соответствии с законом Ома (см., например, [428, 545]), имеют место равенства

$$\mathbf{j}_A=\sigma(\boldsymbol{\mathcal{E}}_A-\nabla\Phi_A),\qquad \mathbf{j}_B=\sigma(\boldsymbol{\mathcal{E}}_B-\nabla\Phi_B). \quad \text{(E.8)}$$

Кроме того, каждый из токов $\mathbf{j}_A$ и $\mathbf{j}_B$ удовлетворяет условию их стационарности

$$\operatorname{div}\mathbf{j}=0 \quad \text{(E.9)}$$

и условию на границе проводника

$$j_n=0. \quad \text{(E.10)}$$

Если теперь выполнить перекрестное скалярное умножение первого из уравнений (E.8) на $\mathbf{j}_B$, а второго на $\mathbf{j}_A$, после чего вычесть из одного результата другой, то будем иметь

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_A\mathbf{j}_B-\boldsymbol{\mathcal{E}}_B\mathbf{j}_A=\mathbf{j}_B\nabla\Phi_A-\mathbf{j}_A\nabla\Phi_B$$

или

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_A\mathbf{j}_B-\boldsymbol{\mathcal{E}}_B\mathbf{j}_A=\operatorname{div}(\mathbf{j}_B\Phi_A-\mathbf{j}_A\Phi_B). \quad \text{(E.11)}$$

Интегрирование (E.11) по объему проводящего тела и использование формулы Остроградского–Гаусса и условия (E.10) дает окончательно

$$\int\boldsymbol{\mathcal{E}}_A\mathbf{j}_B\,dV=\int\boldsymbol{\mathcal{E}}_B\mathbf{j}_A\,dV. \quad \text{(E.12)}$$

F. Дополнительные свéдения о мультипольных моментах

F1. Статические двумерные мультипольные моменты

В данном подразделе Приложения в справочных целях приводятся (без доказательства) формулы, определяющие двумерные статические мультипольные моменты зарядов.

Пусть x_α — компоненты двумерного радиуса-вектора $\mathbf{r} = \{x, y\}$. Здесь греческие индексы пробегают значения 1 и 2. Пусть $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — антисимметричный единичный псевдотензор, т. е.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{F.1}$$

Очевидно, что

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta} = \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}, \qquad \varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\gamma\beta} = -\delta_{\alpha\beta},$$

т. е. матрица (F.1) сходна с мнимой единицей.

Введем в рассмотрение комплексный вектор

$$z_\alpha = x_\alpha + i\varepsilon_{\alpha\beta}x_\beta. \tag{F.2}$$

С помощью этого вектора погонный электростатический 2^l-польный момент определяется формулой

$$Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l} = \int \mathrm{Re}\,(z_{\alpha_1}z_{\alpha_2}\cdots z_{\alpha_l})\,\varrho(\mathbf{r})\,dS, \tag{F.3}$$

где $\varrho(\mathbf{r})$ — плотность объемного заряда, а интеграл берется по поверхности сечения цилиндра плоскостью (x, y).

В частности, двумерные погонные дипольный, квадрупольный и октупольный моменты даются формулами

$$Q_\alpha = \int x_\alpha \varrho\, dS, \tag{F.4}$$

$$Q_{\alpha\beta} = \int \left(2x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta}\right)\varrho\, dS, \tag{F.5}$$

$$Q_{\alpha\beta\gamma} = \int \left[4x_\alpha x_\beta x_\gamma - r^2\left(x_\alpha\delta_{\beta\gamma} + x_\beta\delta_{\gamma\alpha} + x_\gamma\delta_{\alpha\beta}\right)\right]\varrho\, dS \tag{F.6}$$

соответственно.

Отметим, что все мультипольные тензоры, ранг которых $l \geqslant 2$, являются симметричными, а их свертка по любой паре индексов равна нулю.

Отметим также, что если заряд распределен не по объему, а по поверхности эллиптического цилиндра, то в формулах (F.3)– (F.6) следует заменить $\int \ldots \varrho\, dS$ на $\oint \ldots \sigma\, dl$, где $\sigma(\mathbf{r})$ — плотность поверхностного заряда, а криволинейный интеграл берется по эллипсу, образованному сечением цилиндра плоскостью (x, y).

F2. Мультипольные моменты связанных зарядов P_n, выражаемые интегралами по объему

Объектом нашего внимания является здесь однородное диэлектрическое ($\varepsilon = \text{const}$) тело. Если тело не заряжено ($\varrho_0 = 0$), то в согласии с (64.3)

$$\varrho' = -\operatorname{div}\mathbf{P} = 0, \tag{F.7}$$

так что связанный заряд характеризуется в рассматриваемом случае только его поверхностной плотностью ($\sigma' = P_n$).

Мультипольные моменты поверхностных зарядов определяются нижней формулой (35.6), т. е. даются выражением

$$Q_{i_1\ldots i_k} = \oint P_n(\mathbf{r})\,\theta_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{r})\,dS, \tag{F.8}$$

где ядро мультипольного момента есть (см. (34.5))

$$\theta_{i_1\ldots i_n} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k (2n-2k-1)!!\, r^{2k} \left\langle\!\left\langle \delta_{i_1 i_2}\cdots\delta_{i_{2k-1}i_{2k}} x_{i_{2k+1}}\cdots x_{i_n}\right\rangle\!\right\rangle. \tag{F.9}$$

Переходя в (F.8) с помощью формулы Гаусса–Остроградского от поверхностного интеграла к объемному, будем иметь

$$Q_{i_1\ldots i_k} = \int P_l(\mathbf{r})\,\frac{\partial\,\theta_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{r})}{\partial x_l}\,dV, \tag{F.10}$$

где учтено (F.7).

Принимая во внимание явные выражения (34.1), в частности, получаем

$$Q_{ij} = \int [3(P_i x_j + P_j x_i) - 2(\mathbf{P}\mathbf{r})\delta_{ij}]\,dV, \tag{F.11}$$

$$Q_{ijk} = 3\int \{5(P_i x_j x_k + P_j x_k x_i + P_k x_i x_j) - \\ - 2(\mathbf{P}\mathbf{r})(x_i\delta_{jk} + x_j\delta_{ki} + x_k\delta_{ij}) - r^2(P_i\delta_{jk} + P_j\delta_{ki} + P_k\delta_{ij})\}\,dV. \tag{F.12}$$

G. Излучение ограниченной системы синусоидальных токов

G1. Разложение векторного потенциала магнитного поля по мультиполям

Рассмотрим[1] систему синусоидальных токов $\mathbf{j}(\mathbf{r})\,e^{-i\omega t}$, распределенных в некотором ограниченном объеме V. Эти токи удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = i\omega\varrho, \tag{G.1}$$

а соответствующий векторный потенциал есть

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathfrak{c}}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}')\,\frac{e^{ikR}}{R}\,dV',$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

В дальней зоне $(r \gg \lambda = 2\pi/k)$, где выполняется приближенное равенство $R \approx r - \boldsymbol{\nu}\mathbf{r}'$, асимптотическая формула для $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A} = \frac{e^{ikr}}{\mathfrak{c}r}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}')\,e^{-ik\boldsymbol{\nu}\mathbf{r}'}\,dV' \qquad (\boldsymbol{\nu} = \mathbf{r}/r). \tag{G.2}$$

Раскладывая подынтегральную экспоненту по степеням kr' и ограничиваясь тремя членами ряда, получаем

$$\mathbf{A} = \frac{e^{ikr}}{r}\left[\mathbf{I}_0 - ik\mathbf{I}_1 - k^2\mathbf{I}_2\right], \tag{G.3}$$

где

$$\mathbf{I}_0 = \frac{1}{\mathfrak{c}}\int \mathbf{j}\,dV', \tag{G.4}$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{1}{\mathfrak{c}}\int \mathbf{j}\,(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r}')\,dV', \tag{G.5}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2\mathfrak{c}}\int \mathbf{j}\,(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r}')^2\,dV'. \tag{G.6}$$

Учитывая, что интегрирование по объему V можно в нашем случае заменить интегрированием по объему $\bar{V}$, ограниченному поверхностью $\bar{S}$, которая охватывает объем V и проходит всюду вне его, выразим интегралы $\mathbf{I}_0$, $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$ через мультипольные моменты. Заодно прекратим «штриховать» координаты точки интегрирования.

Представляя $\mathbf{j}$ в (G.4) согласно тождеству

$$j_k = \frac{\partial}{\partial x_i}\,(j_i x_k) - x_k\operatorname{div}\mathbf{j},$$

используя при интегрировании по $\bar{V}$ формулу Гаусса–Остроградского и переходя от $\mathbf{j}$ к ϱ на основании (G.1), получаем

$$\mathbf{I}_0 = -ik\int \varrho\,\mathbf{r}\,dV = -ik\mathbf{p}, \tag{G.7}$$

[1] Изложение опирается на материал, использованный в [498]. См. также [19].

где $\mathbf{p}$ — электрический дипольный момент, определяемый электростатической формулой.

Входящий в (G.5) тензор $x_i j_k$ представим как полусумму симметричного $s_{ik} = x_i j_k + x_k j_i$ и антисимметричного $a_{ik} = x_i j_k - x_k j_i$ тензоров. Тогда, учитывая, что

$$s_{ik} = x_i j_l \frac{\partial}{\partial x_l} x_k + x_k j_l \frac{\partial}{\partial x_l} x_i = \frac{\partial}{\partial x_l}(x_i x_k j_l) - x_i x_k \frac{\partial j_l}{\partial x_l},$$

$$a_{ik} = x_l j_m(\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{kl}\delta_{im}) = \varepsilon_{ikp}\varepsilon_{lmp} x_l j_m = \varepsilon_{ikp}\,[\mathbf{rj}]_p,$$

и используя при интегрировании по $\bar{V}$ формулу Гаусса–Остроградского, будем иметь

$$\mathbf{I}_1 = -\frac{1}{2\mathfrak{c}} \int (\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}\,\frac{\partial j_l}{\partial x_l}\,dV - \frac{1}{2\mathfrak{c}} \int [\boldsymbol{\nu}[\mathbf{rj}]]\,dV = \\ = -\frac{ik}{2} \int \varrho(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}\,dV - [\boldsymbol{\nu}\,\mathfrak{M}],$$

где в соответствии с магнитостатическим определением введен магнитный дипольный момент $\mathfrak{M} = (2\mathfrak{c})^{-1}\int[\mathbf{rj}]\,dV$. Поскольку добавление в $\mathbf{A}$ слагаемых, параллельных вектору $\boldsymbol{\nu}$, не влияет на электромагнитное поле дальней зоны, поперечное к $\boldsymbol{\nu}$, то выражение для $\mathbf{I}_1$ можно записать в виде

$$\mathbf{I}_1 \mathrel{\hat{=}} -[\boldsymbol{\nu}\,\mathfrak{M}] - \frac{ik}{6} \int \{3(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\boldsymbol{\nu}\}\,\varrho\,dV = -[\boldsymbol{\nu}\,\mathfrak{M}] - \frac{ik}{6}\,\mathbf{D}, \tag{G.8}$$

где вектор $\mathbf{D}$ связан с тензором электрического квадрупольного момента $Q_{lm} = \int \varrho\,(3x_l x_m - r^2\delta_{lm})\,dV$ формулой $D_l = \nu_m Q_{ml}$, а знаком $\mathrel{\hat{=}}$ отмечено, что (G.8) является «условным» равенством, приводящим к верному результату только при подстановке в выражения для полей в дальней зоне.

Обратимся к (G.6). Формула для двойного векторного произведения $[\boldsymbol{\nu}[\mathbf{rj}]] = \mathbf{r}(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{j}) - \mathbf{j}(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r})$ позволяет придать $\mathbf{I}_2$ вид

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2\mathfrak{c}} \int (\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{r})(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{j})\mathbf{r}\,dV - \frac{1}{2\mathfrak{c}} \left[\boldsymbol{\nu}\nu_i \int x_i[\mathbf{rj}]\,dV\right].$$

Если тензор $x_i[\mathbf{rj}]_k$, стоящий под знаком последнего интеграла, представить как полусумму симметричного и антисимметричного тензоров, то интеграл можно преобразовать следующим образом:

$$\nu_i \int x_i[\mathbf{rj}]_k\,dV = \frac{\mathfrak{c}}{2}\,\nu_i\,\mathfrak{M}_{ik} + \\ + \frac{1}{2}\,\nu_i \int \{x_i[\mathbf{rj}]_k - x_k[\mathbf{rj}]_i\}\,dV = \frac{\mathfrak{c}}{2}\mathfrak{D}_k - \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nu}\int[\mathbf{r}[\mathbf{rj}]]\,dV\right]_k,$$

где вектор $\mathfrak{D}_k = \nu_m\mathfrak{M}_{mk}$, а тензор магнитного квадрупольного момента определяется равенством (52.9)

$$\mathfrak{M}_{ij} = \frac{1}{\mathfrak{c}} \int \{[\mathbf{r\,j}]_i x_j + [\mathbf{r\,j}]_j x_i\}\;dV. \tag{G.9}$$

В результате $\mathbf{I}_2$ принимает вид

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{T} - \frac{1}{4}\,[\boldsymbol{\nu}\mathfrak{D}] + \frac{1}{4\mathfrak{c}}\,\left[\boldsymbol{\nu}\left[\boldsymbol{\nu}\int[\mathbf{r}[\mathbf{rj}]]\,dV\right]\right],$$

где

$$T_l \equiv \frac{1}{2\mathfrak{c}} \int \nu_i \nu_j x_i x_l j_j \, dV.$$

Рассматривая последний член в выражении для $\mathbf{I}_2$ как двойное векторное произведение, составленное из векторов $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\nu}$ и интеграла по объему, раскрывая это произведение и отбрасывая слагаемое, пропорциональное $\boldsymbol{\nu}$, получаем

$$\mathbf{I}_2 \triangleq \mathbf{T} - \frac{1}{4}\,[\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\mathfrak{D}}] - \frac{1}{4\mathfrak{c}} \int [\mathbf{r}[\mathbf{r}\mathbf{j}]]\, dV. \tag{G.10}$$

Принимая во внимание, что $T_l = \dfrac{1}{2\mathfrak{c}} \int \nu_i \nu_j x_i x_l j_k \dfrac{\partial x_j}{\partial x_k} \, dV$ и

$$\nu_i \nu_j \frac{\partial}{\partial x_k}(x_i x_j x_l j_k) = \nu_i \nu_j \left\{ x_j x_l j_k \frac{\partial x_i}{\partial x_k} + x_i x_l j_k \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + x_i x_j j_k \frac{\partial x_l}{\partial x_k} + \right.$$
$$\left. + x_i x_j x_l \operatorname{div} \mathbf{j} \right\} = 2\nu_i \nu_j x_i x_l j_k \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{r})^2 j_l + i\omega\varrho\, \nu_i \nu_j x_i x_j x_l\,,$$

будем иметь

$$T_l = -\frac{1}{2}(I_2)_l - \frac{ik}{4}\,\nu_i \nu_j \int \varrho\, x_i x_j x_l \, dV, \tag{G.11}$$

где при интегрировании по объему $\bar{V}$ использовалась формула Гаусса–Остроградского и были приняты во внимание (G.1) и (G.6). Если к правой части (G.11) добавить (и их же, разумеется, вычесть) слагаемые, дополняющие интеграл в ее последнем члене до определения электрического октупольного момента (см. (34.1))

$$Q_{ijk} = 3 \int \varrho \{5 x_i x_j x_k - r^2(\delta_{ij} x_k + \delta_{ik} x_j + \delta_{jk} x_i)\}\, dV, \tag{G.12}$$

то получим

$$T_l = -\frac{1}{2}(I_2)_l - \frac{ik}{60}\,\nu_i \nu_j \left\{ Q_{ijl} + 3 \int \varrho\, r^2 (\delta_{ij} x_l + \delta_{il} x_j + \delta_{jl} x_i)\, dV \right\}.$$

В этом выражении можно отбросить слагаемые $\delta_{il} x_j$ и $\delta_{jl} x_i$ под знаком интеграла, ибо им соответствуют добавки к $\mathbf{T}$ (а значит, и к $\mathbf{I}_2$), параллельные вектору $\boldsymbol{\nu}$. В результате приходим к формуле

$$T_l \triangleq -\frac{1}{2}(I_2)_l - \frac{ik}{60}\, O_l - \frac{ik}{20} \int \varrho\, r^2 x_l \, dV,$$

где вектор $O_l = \nu_i \nu_j Q_{ijl}$. Подстановка этого выражения в (G.10) дает окончательно

$$\mathbf{I}_2 \triangleq -\frac{1}{6}\,[\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\mathfrak{D}}] - \frac{ik}{90}\,\mathbf{O} - \frac{1}{6\mathfrak{c}} \int [\mathbf{r}[\mathbf{r}\mathbf{j}]]\, dV - \frac{ik}{30} \int \varrho\, r^2 \mathbf{r}\, dV. \tag{G.13}$$

Обратим внимание, на то, что несмотря на множители ik, стоящие перед вторым и четвертым слагаемыми в (G.13), все слагаемые правой части (G.13) являются величинами одного порядка, ибо разложение по k было уже произведено ранее (см. (G.3)). Здесь же появление множителей ik обусловлено переходом от токов к зарядам в соответствии с уравнением непрерывности (G.1), правая и левая части которого при заданных токах являются, естественно, величинами одного порядка. Неточности, связанные с этим замечанием, допущены, к сожалению, в работах [377, 378].

Убедимся в справедливости сказанного непосредственным сравнением третьего и четвертого членов в (G.13). Третий член, очевидно, равен

$$-\frac{1}{6\mathfrak{c}}\int[\mathbf{r}[\mathbf{rj}]]\,dV = \frac{1}{6\mathfrak{c}}\int r^2\mathbf{j}\,dV - \frac{1}{6\mathfrak{c}}\int \mathbf{r}(\mathbf{rj})\,dV, \tag{G.14}$$

а четвертый член после использования (G.1) и интегрирования по частям по объему $\bar{V}$ приобретает вид

$$-\frac{ik}{30}\int \varrho\, r^2\mathbf{r}\,dV = \frac{1}{30\mathfrak{c}}\int r^2\mathbf{j}\,dV + \frac{1}{15\mathfrak{c}}\int \mathbf{r}(\mathbf{rj})\,dV, \tag{G.15}$$

т. е. состоит из тех же интегралов, что и третий. Сумма равенств (G.14) и (G.15), взятая с обратным знаком, приводит к величине

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{10\mathfrak{c}}\int\left\{(\mathbf{rj})\mathbf{r} - 2r^2\mathbf{j}\right\}dV, \tag{G.16}$$

получившей название тороидного дипольного, или анапольного, момента (см. [455, 466], а также [118, 454, 511, 513, 563]).

Таким образом, окончательное выражение для $\mathbf{A}$, возникающее в результате подстановки (G.7), (G.8) и (G.13) в (G.3), приобретает вид

$$\mathbf{A} = -ik\,\frac{e^{ikr}}{r}\,\left\{\mathbf{Q} - \frac{ik}{6}\,\mathbf{D} - \frac{k^2}{90}\,\mathbf{O} + \left[\mathfrak{M} - \frac{ik}{6}\,\mathfrak{D}, \boldsymbol{\nu}\right]\right\}. \tag{G.17}$$

Здесь $\mathbf{Q} = \mathbf{p} + ik\boldsymbol{\tau}$ — полный электрический дипольный момент, включающий добавок, обусловленный тороидным моментом.

Справедливая как для микроскопической, так и для макроскопической электродинамики формула (G.17) удобна тем, что каждый ее член отличается индивидуальной угловой зависимостью, характеризуемой соответствующим набором векторов $\boldsymbol{\nu}$ и определяющей его мультипольную принадлежность.

Соответствующее выражению (G.17) электромагнитное поле в дальней зоне, где «работает» правило $\partial/\partial\mathbf{r} = ik\boldsymbol{\nu}$, дается формулами

$$\mathbf{H} = ik[\boldsymbol{\nu}\mathbf{A}] = k^2\,\frac{e^{ikr}}{r}\,\left[\boldsymbol{\nu}, \mathbf{Q} - \frac{ik}{6}\,\mathbf{D} - \frac{k^2}{90}\,\mathbf{O} + \left[\mathfrak{M} - \frac{ik}{6}\,\mathfrak{D}, \boldsymbol{\nu}\right]\right], \tag{G.18}$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{H}\boldsymbol{\nu}], \tag{G.19}$$

где, как и в (G.2) и (G.18), опущен множитель $\exp(-i\omega t)$.

G2. Об импульсе и мощности, излучаемых системой мультиполей в свободном пространстве

Усредненная по времени плотность потока импульса электромагнитного поля, излучаемого некоторой системой, дается, как известно (см., например, [483]), максвелловским тензором напряжений

$$T_{ik} = \frac{1}{16\pi}\left\{\left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2\right)\delta_{ik} - 2E_iE_k^* - 2H_iH_k^*\right\}, \tag{G.20}$$

так что поток импульса $\mathbf{d\Pi}$ в направлении единичного вектора $\boldsymbol{\nu}$ равен

$$\begin{aligned} d\Pi_i &= \operatorname{Re} T_{ik}\nu_k\, dS = \\ &= \frac{dS}{16\pi}\left\{\left(|\mathbf{E}|^2+|\mathbf{H}|^2\right)\nu_i - 2\operatorname{Re}\left[E_i(\mathbf{E}^*\boldsymbol{\nu})+H_i(\mathbf{H}^*\boldsymbol{\nu})\right]\right\}. \end{aligned} \tag{G.21}$$

Если поля поперечны к направлению $\boldsymbol{\nu}$, т. е. представимы в виде

$$\mathbf{H} = [\boldsymbol{\nu}[\mathbf{H}\boldsymbol{\nu}]], \qquad \mathbf{E} = [\mathbf{H}\boldsymbol{\nu}], \tag{G.22}$$

то

$$\mathbf{d\Pi} = \frac{dS}{16\pi}\left(|\mathbf{E}|^2+|\mathbf{H}|^2\right)\boldsymbol{\nu} = \frac{dS}{8\pi}\,|\mathbf{H}|^2\boldsymbol{\nu}\,. \tag{G.23}$$

Таким свойством обладают, в частности, поля (G.18), (G.19) в волновой зоне, излучаемые системой мультиполей с совпадающими частотами. Дальнейшее рассмотрение свяжем с полями (G.18), (G.19). Выбирая в качестве dS элемент сферической поверхности радиуса r с центром в начале координат, перепишем (G.23) в виде

$$\mathbf{d\Pi} = \frac{1}{8\pi}\,r^2|\mathbf{H}|^2\boldsymbol{\nu}\,d\Omega(\boldsymbol{\nu}). \tag{G.24}$$

Используя (G.18), распишем входящую в (G.24) величину $r^2|\mathbf{H}|^2$. Будем иметь

$$\begin{aligned} k^{-4}r^2|\mathbf{H}|^2 = \Bigg\{\!\!\Bigg\{&[\boldsymbol{\nu}\mathbf{Q}][\boldsymbol{\nu}\mathbf{Q}^*] + [\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{M}\boldsymbol{\nu}]][\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{M}^*\boldsymbol{\nu}]] + \frac{ik}{6}\left([\boldsymbol{\nu}\mathbf{Q}][\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{D}^*\boldsymbol{\nu}]] - \right.\\ &\left. - [\boldsymbol{\nu}\mathbf{Q}^*][\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{D}\boldsymbol{\nu}]]\right) + \frac{ik}{6}\left([\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{M}\boldsymbol{\nu}]][\boldsymbol{\nu}\mathbf{D}^*] - [\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{M}^*\boldsymbol{\nu}]][\boldsymbol{\nu}\mathbf{D}]\right) + \\ &+ \frac{k^2}{36}\left([\boldsymbol{\nu}\mathbf{D}][\boldsymbol{\nu}\mathbf{D}^*] + [\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{D}\boldsymbol{\nu}]][\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{D}^*\boldsymbol{\nu}]]\right) - \frac{k^2}{90}\left([\boldsymbol{\nu}\mathbf{Q}][\boldsymbol{\nu}\mathbf{O}^*] + [\boldsymbol{\nu}\mathbf{Q}^*][\boldsymbol{\nu}\mathbf{O}]\right) + \\ &+ \frac{ik^3}{540}\left([\boldsymbol{\nu}\mathbf{O}^*][\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{D}\boldsymbol{\nu}]] - [\boldsymbol{\nu}\mathbf{O}][\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{D}^*\boldsymbol{\nu}]]\right) + \frac{k^4}{2700}\,[\boldsymbol{\nu}\mathbf{O}][\boldsymbol{\nu}\mathbf{O}^*]\Bigg\}\!\!\Bigg\} + \\ &+ \Bigg\{\left([\boldsymbol{\nu}\mathbf{Q}][\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{M}^*\boldsymbol{\nu}]] + [\boldsymbol{\nu}\mathbf{Q}^*][\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{M}\boldsymbol{\nu}]]\right) + \frac{ik}{6}\left([\boldsymbol{\nu}\mathbf{Q}][\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{D}^*] - [\boldsymbol{\nu}\mathbf{Q}^*][\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{D}]\right) + \\ &+ \frac{ik}{6}\left([\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{M}\boldsymbol{\nu}]][\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{D}^*\boldsymbol{\nu}]] - [\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{M}^*\boldsymbol{\nu}]][\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{D}\boldsymbol{\nu}]]\right) + \frac{k^2}{36}\left([\boldsymbol{\nu}\mathbf{D}][\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{D}^*\boldsymbol{\nu}]] + \right.\\ &\left. + [\boldsymbol{\nu}\mathbf{D}^*][\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{D}\boldsymbol{\nu}]]\right) - \frac{k^2}{90}\left([\boldsymbol{\nu}\mathbf{O}][\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{M}^*\boldsymbol{\nu}]] + [\boldsymbol{\nu}\mathbf{O}^*][\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{M}\boldsymbol{\nu}]]\right) + \\ &+ \frac{ik^3}{540}\left([\boldsymbol{\nu}\mathbf{D}][\boldsymbol{\nu}\mathbf{O}^*] - [\boldsymbol{\nu}\mathbf{D}^*][\boldsymbol{\nu}\mathbf{O}]\right)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{G.25}$$

где в одинарные фигурные скобки $\{\ldots\}$ заключены слагаемые, содержащие произведения нечетного числа сомножителей ν_i, а в двойные скобки $\{\{\ldots\}\}$ — слагаемые, содержащие произведения четного числа сомножителей ν_i.

После упрощений (G.25) приобретает вид

$$k^{-4}r^2|\mathbf{H}|^2 = \Big\{\Big\{|\mathbf{Q}|^2 - |\boldsymbol{\nu}\mathbf{Q}|^2 + |\mathfrak{M}|^2 - |\boldsymbol{\nu}\mathfrak{M}|^2 + \frac{k}{3}\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\nu}[\mathbf{Q}^*\mathfrak{D}]) +$$
$$+ \frac{k}{3}\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\nu}[\mathbf{D}\mathfrak{M}^*]) + \frac{k^2}{36}\left(|\mathbf{D}|^2 - |\boldsymbol{\nu}\mathbf{D}|^2 + |\mathfrak{D}|^2 - |\boldsymbol{\nu}\mathfrak{D}|^2\right) - \frac{k^2}{45}\,\mathrm{Re}(\mathbf{Q}^*\mathbf{O} -$$
$$-(\boldsymbol{\nu}\mathbf{Q}^*)(\boldsymbol{\nu}\mathbf{O})) + \frac{k^3}{270}\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\nu}[\mathbf{O}\mathfrak{D}^*]) + \frac{k^4}{2700}\left(|\mathbf{O}|^2 - |\boldsymbol{\nu}\mathbf{O}|^2\right)\Big\}\Big\} +$$
$$+ \Big\{2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\nu}[\mathbf{Q}^*\mathfrak{M}]) + \frac{k}{3}\,\mathrm{Im}(\mathbf{Q}^*\mathbf{D} - (\boldsymbol{\nu}\mathbf{Q}^*)(\boldsymbol{\nu}\mathbf{D}) + \mathfrak{M}^*\mathfrak{D} - (\boldsymbol{\nu}\mathfrak{M}^*)(\boldsymbol{\nu}\mathfrak{D})) +$$
$$+ \frac{k^2}{18}\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\nu}[\mathbf{D}\mathfrak{D}^*]) + \frac{k^2}{45}\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\nu}[\mathfrak{M}\mathbf{O}^*]) + \frac{k^3}{270}\,\mathrm{Im}(\mathbf{D}^*\mathbf{O} - (\boldsymbol{\nu}\mathbf{D}^*)(\boldsymbol{\nu}\mathbf{O}))\Big\}. \tag{G.26}$$

В соответствии с (G.24) полный импульс, излучаемый системой по всем направлениям $\boldsymbol{\nu}$, равен

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{8\pi}\int r^2|\mathbf{H}|^2\boldsymbol{\nu}\,d\Omega(\boldsymbol{\nu}), \tag{G.27}$$

где интегрирование распространяется на весь телесный угол. Интегрирование по $d\Omega(\boldsymbol{\nu})$ сводится к усреднению по направлениям $\boldsymbol{\nu}$ в соответствии с (43.18). Выпишем первые три частных случая формулы (43.18):

$$\overline{\nu_i\nu_j} \equiv \frac{1}{4\pi}\int \nu_i\nu_j\,d\Omega(\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,,$$

$$\overline{\nu_i\nu_j\nu_k\nu_l} \equiv \frac{1}{4\pi}\int \nu_i\nu_j\nu_k\nu_l\,d\Omega = \frac{1}{15}\,(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\,,$$

$$\overline{\nu_i\nu_j\nu_k\nu_l\nu_m\nu_n} = \frac{1}{105}\,(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + \delta_{ij}\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} + \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{mn} +$$
$$+ \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ln} + \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn} + \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} +$$
$$+ \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{ln} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl})\,.$$

Поскольку результат усреднения нечетного числа сомножителей $\boldsymbol{\nu}$ всегда равен нулю, то, в частности, выполняются равенства

$$\overline{\boldsymbol{\nu}\{\{\ldots\}\}} = 0 \qquad \text{и} \qquad \overline{\{\ldots\}} = 0,$$

где фигурные скобки — это выражения из формул (G.25) или (G.26), в которых учтены равенства

$$D_l = \nu_m Q_{ml}, \qquad \mathfrak{D}_k = \nu_m \mathfrak{M}_{mk}, \qquad O_l = \nu_i\nu_j Q_{ijl}.$$

С другой стороны, согласно (G.27) полный излучаемый импульс получаем равным

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{2}\,\overline{\boldsymbol{\nu}\,r^2|\mathbf{H}|^2} = \frac{k^4}{2}\,\overline{\boldsymbol{\nu}\,\{\ldots\}},$$

что с учетом равенств $Q_{ii}=0$, $\mathfrak{M}_{ii}=0$, $Q_{iij}=0$, $\varepsilon_{ikl}Q_{kl}=0$, $\varepsilon_{ikl}\mathfrak{M}_{kl}=0$ и $\varepsilon_{ikl}Q_{jkl}=0$ дает окончательно[1]

$$\Pi_l=\frac{k^4}{3}\,\mathrm{Re}\,[\mathbf{Q}^*\boldsymbol{\mathfrak{M}}]_l+\frac{k^5}{30}\,\mathrm{Im}\,(Q_i^*Q_{il}+\mathfrak{M}_i^*\mathfrak{M}_{il})+ \\ +\frac{k^6}{540}\,\mathrm{Re}\,(\varepsilon_{lij}Q_{ik}^*\mathfrak{M}_{jk})+\frac{2k^7}{14175}\,\mathrm{Im}\,\bigl(Q_{ij}^*Q_{ijl}\bigr)\,. \quad \text{(G.28)}$$

Средняя по времени *мощность излучения*[2] Σ мультипольной системы дается интегралом от комплексного вектора Пойнтинга (см., например, [428])

$$\Sigma=\frac{\mathfrak{c}}{8\pi}\oint\mathrm{Re}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*]\,d\mathbf{S}=\frac{\mathfrak{c}}{8\pi}\int r^2|\mathbf{H}|^2\,d\Omega(\boldsymbol{\nu})=\frac{\mathfrak{c}k^4}{2}\,\overline{\{\{\ldots\}\}},$$

т. е. рассчитывается аналогично. Итоговый результат имеет вид

$$\Sigma=\frac{\mathfrak{c}k^4}{3}\left\{|\mathbf{Q}|^2+|\boldsymbol{\mathfrak{M}}|^2+\frac{k^2}{120}\left(|Q_{ij}|^2+|\mathfrak{M}_{ij}|^2\right)+\frac{k^4}{70875}\,|Q_{ijk}|^2\right\}. \quad \text{(G.29)}$$

H. Таблица размагничивающих факторов эллипсоида

Приводимые таблицы более подробны и точны, чем их первоначальный вариант [421,518], составленный В.Н. Белоозеровым и автором. Даются значения двух факторов[3] M_a и M_b для аргументов b/a и c/a, изменяющихся

[1] Частные случаи этой формулы использовались ранее в работах [430,489] М.Л. Левина и автора.

[2] Эту величину называют также *потоком энергии*.

[3] Что касается третьего фактора, то он равен $M_c=1-M_a-M_b$.

от 0,005 до 1,000 через 0,005 в интервале 0,005–0,100 и через 0,05 в интервале 0,10–1,00. В соответствии с принятым условием $c/a \leqslant b/a \leqslant 1$ параметр b/a пробегает значения от c/a (которое фиксировано для каждого набора значений b/a и выделено в таблице полужирным шрифтом) до 1,00. Результаты вычислений округлены до семи знаков.

Таблица 7
Размагничивающие факторы эллипсоида

b/a	M_a	M_b	b/a	M_a	M_b
0,005	0,0001248	0,4999376	0,900	0,0037960	0,0044445
0,010	0,0002293	0,3332228	0,950	0,0038511	0,0041585
0,015	0,0003224	0,2498481	1,000	0,0039021	0,0039021
0,020	0,0004076	0,1998112			
0,025	0,0004868	0,1664440	**0,010**	0,0004299	0,4997851
0,030	0,0005612	0,1426033	0,015	0,0006114	0,3997018
0,035	0,0006315	0,1247170	0,020	0,0007789	0,3329605
0,040	0,0006983	0,1108007	0,025	0,0009352	0,2852734
0,045	0,0007621	0,0996637	0,030	0,0010824	0,2494962
0,050	0,0008231	0,0905483	0,035	0,0012218	0,2216597
0,055	0,0008818	0,0829493	0,040	0,0013545	0,1993824
0,060	0,0009382	0,0765169	0,045	0,0014813	0,1811487
0,065	0,0009927	0,0710012	0,050	0,0016028	0,1659480
0,070	0,0010453	0,0662190	0,055	0,0017196	0,1530807
0,075	0,0010962	0,0620330	0,060	0,0018321	0,1420472
0,080	0,0011456	0,0583379	0,065	0,0019407	0,1324809
0,085	0,0011934	0,0550520	0,070	0,0020456	0,1241069
0,090	0,0012399	0,0521108	0,075	0,0021471	0,1167150
0,095	0,0012850	0,0494626	0,080	0,0022455	0,1101417
0,100	0,0013290	0,0470657	0,085	0,0023410	0,1042578
0,150	0,0017132	0,0315713	0,090	0,0024337	0,0989601
0,200	0,0020229	0,0236054	0,095	0,0025239	0,0941650
0,250	0,0022805	0,0187488	0,100	0,0026116	0,0898039
0,300	0,0024994	0,0154774	0,150	0,0033790	0,0611276
0,350	0,0026881	0,0131243	0,200	0,0039978	0,0460503
0,400	0,0028529	0,0113513	0,250	0,0045127	0,0367441
0,450	0,0029979	0,0099683	0,300	0,0049503	0,0304265
0,500	0,0031267	0,0088601	0,350	0,0053277	0,0258579
0,550	0,0032418	0,0079529	0,400	0,0056570	0,0224019
0,600	0,0033453	0,0071973	0,450	0,0059470	0,0196980
0,650	0,0034387	0,0065587	0,500	0,0062046	0,0175263
0,700	0,0035235	0,0060124	0,550	0,0064347	0,0157453
0,750	0,0036008	0,0055400	0,600	0,0066416	0,0142594
0,800	0,0036715	0,0051279	0,650	0,0068284	0,0130020
0,850	0,0037363	0,0047655	0,700	0,0069980	0,0119251

продолжение на следующей стр.

продолжение

b/a	M_a	M_b	b/a	M_a	M_b
0,750	0,0071526	0,0109931	**0,020**	0,0014430	0,4992785
0,800	0,0072939	0,0101793	0,025	0,0017451	0,4435857
0,850	0,0074236	0,0094631	0,030	0,0020313	0,3990142
0,900	0,0075430	0,0088284	0,035	0,0023036	0,3625320
0,950	0,0076532	0,0082625	0,040	0,0025637	0,3321176
1,000	0,0077551	0,0077551	0,045	0,0028129	0,3063717
			0,050	0,0030522	0,2842943
0,015	0,0008762	0,4995619	0,055	0,0032826	0,2651523
0,020	0,0011222	0,4280210	0,060	0,0035048	0,2483958
0,025	0,0013528	0,3743469	0,065	0,0037195	0,2336041
0,030	0,0015707	0,3325853	0,070	0,0039272	0,2204502
0,035	0,0017775	0,2991634	0,075	0,0041284	0,2086758
0,040	0,0019747	0,2718076	0,080	0,0043235	0,1980741
0,045	0,0021634	0,2490020	0,085	0,0045129	0,1884780
0,050	0,0023445	0,2296971	0,090	0,0046970	0,1797504
0,055	0,0025186	0,2131431	0,095	0,0048761	0,1717782
0,060	0,0026864	0,1987904	0,100	0,0050504	0,1644673
0,065	0,0028484	0,1862263	0,150	0,0065777	0,1149102
0,070	0,0030050	0,1751357	0,200	0,0078113	0,0877776
0,075	0,0031567	0,1652731	0,250	0,0088389	0,0706442
0,080	0,0033037	0,1564449	0,300	0,0097124	0,0588410
0,085	0,0034464	0,1484961	0,350	0,0104661	0,0502178
0,090	0,0035851	0,1413013	0,400	0,0111239	0,0436454
0,095	0,0037199	0,1347577	0,450	0,0117034	0,0384736
0,100	0,0038511	0,1287806	0,500	0,0122180	0,0343009
0,150	0,0049997	0,0888531	0,550	0,0126779	0,0308662
0,200	0,0059266	0,0674162	0,600	0,0130913	0,0279920
0,250	0,0066983	0,0540292	0,650	0,0134648	0,0255535
0,300	0,0073541	0,0448730	0,700	0,0138038	0,0234605
0,350	0,0079199	0,0382171	0,750	0,0141126	0,0216459
0,400	0,0084136	0,0331630	0,800	0,0143952	0,0200588
0,450	0,0088485	0,0291972	0,850	0,0146544	0,0186601
0,500	0,0092346	0,0260047	0,900	0,0148930	0,0174191
0,550	0,0095797	0,0233816	0,950	0,0151133	0,0163114
0,600	0,0098899	0,0211898	1,000	0,0153172	0,0153172
0,650	0,0101701	0,0193327			
0,700	0,0104245	0,0177404	**0,025**	0,0021158	0,4989421
0,750	0,0106562	0,0163611	0,030	0,0024680	0,4533284
0,800	0,0108682	0,0151557	0,035	0,0028038	0,4153009
0,850	0,0110627	0,0140942	0,040	0,0031251	0,3831100
0,900	0,0112417	0,0131529	0,045	0,0034333	0,3555058
0,950	0,0114069	0,0123132	0,050	0,0037296	0,3315715
1,000	0,0115599	0,0115599	0,055	0,0040152	0,3106197
			0,060	0,0042908	0,2921246

продолжение на следующей стр.

продолжение

b/a	M_a	M_b	b/a	M_a	M_b
0,065	0,0045572	0,2756771	0,250	0,0129906	0,1020095
0,070	0,0048151	0,2609542	0,300	0,0142973	0,0854302
0,075	0,0050651	0,2476978	0,350	0,0154252	0,0732012
0,080	0,0053076	0,2356984	0,400	0,0164101	0,0638142
0,085	0,0055432	0,2247851	0,450	0,0172779	0,0563869
0,090	0,0057727	0,2148163	0,500	0,0180486	0,0503685
0,095	0,0059950	0,2056743	0,550	0,0187375	0,0453969
0,100	0,0062119	0,1972599	0,600	0,0193569	0,0412246
0,150	0,0081148	0,1394429	0,650	0,0199165	0,0376761
0,200	0,0096534	0,1072021	0,700	0,0204245	0,0346239
0,250	0,0109358	0,0866261	0,750	0,0208874	0,0319729
0,300	0,0120263	0,0723530	0,800	0,0213107	0,0296507
0,350	0,0129675	0,0618745	0,850	0,0216993	0,0276014
0,400	0,0137890	0,0538592	0,900	0,0220570	0,0257809
0,450	0,0145129	0,0475345	0,950	0,0223871	0,0241541
0,500	0,0151556	0,0424204	1,000	0,0226927	0,0226927
0,550	0,0157301	0,0382033			
0,600	0,0162466	0,0346691	**0,035**	0,0037380	0,4981310
0,650	0,0167133	0,0316671	0,040	0,0041765	0,4646015
0,700	0,0171368	0,0290877	0,045	0,0045982	0,4352495
0,750	0,0175227	0,0268492	0,050	0,0050046	0,4093386
0,800	0,0178757	0,0248900	0,055	0,0053968	0,3862958
0,850	0,0181997	0,0231621	0,060	0,0057760	0,3656689
0,900	0,0184979	0,0216281	0,065	0,0061431	0,3470961
0,950	0,0187731	0,0202581	0,070	0,0064988	0,3302842
1,000	0,0190279	0,0190279	0,075	0,0068440	0,3149936
			0,080	0,0071791	0,3010262
0,030	0,0028838	0,4985581	0,085	0,0075049	0,2882169
0,035	0,0032811	0,4599179	0,090	0,0078219	0,2764270
0,040	0,0036619	0,4267829	0,095	0,0081305	0,2655391
0,045	0,0040276	0,3980530	0,100	0,0084311	0,2554533
0,050	0,0043796	0,3729028	0,150	0,0110740	0,1844325
0,055	0,0047191	0,3507013	0,200	0,0132165	0,1434823
0,060	0,0050471	0,3309576	0,250	0,0150046	0,1168263
0,065	0,0053643	0,3132840	0,300	0,0165265	0,0980926
0,070	0,0056716	0,2973705	0,350	0,0178405	0,0842113
0,075	0,0059695	0,2829660	0,400	0,0189881	0,0735197
0,080	0,0062588	0,2698651	0,450	0,0199996	0,0650377
0,085	0,0065398	0,2578979	0,500	0,0208978	0,0581503
0,090	0,0068131	0,2469232	0,550	0,0217009	0,0524511
0,095	0,0070791	0,2368219	0,600	0,0224229	0,0476613
0,100	0,0073382	0,2274935	0,650	0,0230754	0,0435829
0,150	0,0096129	0,1625790	0,700	0,0236676	0,0400712
0,200	0,0114547	0,1257515	0,750	0,0242073	0,0370185

продолжение на следующей стр.

продолжение

b/a	M_a	M_b	b/a	M_a	M_b
0,800	0,0247010	0,0343425	0,075	0,0085105	0,3709507
0,850	0,0251541	0,0319792	0,080	0,0089352	0,3557781
0,900	0,0255712	0,0298786	0,085	0,0093484	0,3417661
0,950	0,0259562	0,0280005	0,090	0,0097506	0,3287860
1,000	0,0263125	0,0263125	0,095	0,0101425	0,3167277
			0,100	0,0105245	0,3054960
0,040	0,0046711	0,4976645	0,150	0,0138908	0,2246891
0,045	0,0051473	0,4680407	0,200	0,0166277	0,1766906
0,050	0,0056067	0,4416958	0,250	0,0189153	0,1448775
0,055	0,0060504	0,4181128	0,300	0,0208642	0,1222465
0,060	0,0064798	0,3968780	0,350	0,0225481	0,1053309
0,065	0,0068956	0,3776564	0,400	0,0240194	0,0922167
0,070	0,0072989	0,3601739	0,450	0,0253165	0,0817599
0,075	0,0076903	0,3442042	0,500	0,0264689	0,0732341
0,080	0,0080707	0,3295584	0,550	0,0274994	0,0661559
0,085	0,0084405	0,3160781	0,600	0,0284260	0,0601907
0,090	0,0088005	0,3036291	0,650	0,0292635	0,0550995
0,095	0,0091510	0,2920970	0,700	0,0300237	0,0507072
0,100	0,0094926	0,2813839	0,750	0,0307167	0,0468824
0,150	0,0124994	0,2051054	0,800	0,0313506	0,0435244
0,200	0,0149404	0,1604461	0,850	0,0319323	0,0405551
0,250	0,0169791	0,1311064	0,900	0,0324679	0,0379126
0,300	0,0187151	0,1103588	0,950	0,0329624	0,0355476
0,350	0,0202145	0,0949172	1,000	0,0334201	0,0334201
0,400	0,0215242	0,0829843			
0,450	0,0226788	0,0734933	**0,050**	0,0067491	0,4966255
0,500	0,0237043	0,0657706	0,055	0,0072923	0,4725764
0,550	0,0246212	0,0593695	0,060	0,0078186	0,4507029
0,600	0,0254457	0,0539824	0,065	0,0083291	0,4307217
0,650	0,0261908	0,0493899	0,070	0,0088246	0,4123967
0,700	0,0268671	0,0454317	0,075	0,0093061	0,3955297
0,750	0,0274835	0,0419878	0,080	0,0097744	0,3799528
0,800	0,0280474	0,0389666	0,085	0,0102301	0,3655230
0,850	0,0285648	0,0362967	0,090	0,0106739	0,3521177
0,900	0,0290412	0,0339222	0,095	0,0111065	0,3396313
0,950	0,0294810	0,0317981	0,100	0,0115283	0,3279721
1,000	0,0298881	0,0298881	0,150	0,0152497	0,2432660
			0,200	0,0182796	0,1922593
0,045	0,0056766	0,4971617	0,250	0,0208144	0,1581655
0,050	0,0061876	0,4706195	0,300	0,0229749	0,1337723
0,055	0,0066817	0,4467199	0,350	0,0248424	0,1154637
0,060	0,0071601	0,4250860	0,400	0,0264745	0,1012248
0,065	0,0076238	0,4054092	0,450	0,0279138	0,0898433
0,070	0,0080736	0,3574350	0,500	0,0291926	0,0805454

продолжение на следующей стр.

продолжение

b/a	M_a	M_b	b/a	M_a	M_b
0,550	0,0303362	0,0728137	0,080	0,0113821	0,4230467
0,600	0,0313647	0,0662890	0,085	0,0119207	0,4080456
0,650	0,0322944	0,0607140	0,090	0,0124456	0,3940382
0,700	0,0331383	0,0558996	0,095	0,0129575	0,3809285
0,750	0,0339076	0,0517037	0,100	0,0134570	0,3686328
0,800	0,0346114	0,0480172	0,150	0,0178747	0,2776893
0,850	0,0352573	0,0447553	0,200	0,0214823	0,2215276
0,900	0,0358520	0,0418509	0,250	0,0245056	0,1833874
0,950	0,0364011	0,0392501	0,300	0,0270854	0,1558000
1,000	0,0369093	0,0369093	0,350	0,0293171	0,1349287
			0,400	0,0312685	0,1185986
0,055	0,0078836	0,4960582	0,450	0,0329902	0,1054835
0,060	0,0084568	0,4740676	0,500	0,0345204	0,0947285
0,065	0,0090130	0,4538995	0,550	0,0358892	0,0857572
0,070	0,0095533	0,4353359	0,600	0,0371206	0,0781665
0,075	0,0100785	0,4181921	0,650	0,0382337	0,0716663
0,080	0,0105896	0,4023106	0,700	0,0392445	0,0660424
0,085	0,0110871	0,3875565	0,750	0,0401659	0,0611328
0,090	0,0115718	0,3738137	0,800	0,0410089	0,0568131
0,095	0,0120444	0,3609813	0,850	0,0417828	0,0529861
0,100	0,0125053	0,3489714	0,900	0,0424953	0,0495747
0,150	0,0165772	0,2609104	0,950	0,0431532	0,0465168
0,200	0,0198975	0,2071926	1,000	0,0437622	0,0437622
0,250	0,0226774	0,1709946			
0,300	0,0250483	0,1449519	**0,065**	0,0103218	0,4948391
0,350	0,0270984	0,1253262	0,070	0,0109489	0,4760480
0,400	0,0288906	0,1100163	0,075	0,0115591	0,4585906
0,450	0,0304713	0,0977494	0,080	0,0121532	0,4423295
0,500	0,0318761	0,0877088	0,085	0,0127322	0,4271453
0,550	0,0331325	0,0793464	0,090	0,0132966	0,4129342
0,600	0,0342626	0,0722801	0,095	0,0138472	0,3996052
0,650	0,0352842	0,0662356	0,100	0,0143846	0,3870786
0,700	0,0362117	0,0610108	0,150	0,0191432	0,2936638
0,750	0,0370571	0,0564533	0,200	0,0230353	0,2352986
0,800	0,0378306	0,0524464	0,250	0,0262998	0,1953651
0,850	0,0385406	0,0488987	0,300	0,0290872	0,1663306
0,900	0,0391943	0,0457379	0,350	0,0314993	0,1442809
0,950	0,0397978	0,0429062	0,400	0,0336092	0,1269786
1,000	0,0403564	0,0403564	0,450	0,0354711	0,1130510
			0,500	0,0371262	0,1016086
0,060	0,0090758	0,4954621	0,550	0,0386070	0,0920492
0,065	0,0096769	0,4751996	0,600	0,0399393	0,0839508
0,070	0,0102610	0,4564866	0,650	0,0411437	0,0770084
0,075	0,0108291	0,4391513	0,700	0,0422375	0,0709962

продолжение на следующей стр.

продолжение

b/a	M_a	M_b	b/a	M_a	M_b
0,750	0,0432347	0,0657435	0,400	0,0381821	0,1431587
0,800	0,0441471	0,0611186	0,450	0,0403224	0,1277060
0,850	0,0449847	0,0570188	0,500	0,0422257	0,1149651
0,900	0,0457559	0,0533620	0,550	0,0439291	0,1042895
0,950	0,0464680	0,0500827	0,600	0,0454620	0,0952230
1,000	0,0471272	0,0471272	0,650	0,0468482	0,0874343
			0,700	0,0481072	0,0806770
0,070	0,0116181	0,4941910	0,750	0,0492552	0,0747640
0,075	0,0122695	0,4766677	0,800	0,0503057	0,0695507
0,080	0,0129040	0,4603049	0,850	0,0512702	0,0649235
0,085	0,0135225	0,4449905	0,900	0,0521584	0,0607920
0,090	0,0141258	0,4306268	0,950	0,0529786	0,0570833
0,095	0,0147144	0,4171274	1,000	0,0537379	0,0537379
0,100	0,0152891	0,4044166			
0,150	0,0203840	0,3088890	**0,080**	0,0143486	0,4928257
0,200	0,0245574	0,2485373	0,085	0,0150441	0,4773760
0,250	0,0280611	0,2069474	0,090	0,0157229	0,4628284
0,300	0,0310545	0,1765569	0,095	0,0163857	0,4491060
0,350	0,0336460	0,1533920	0,100	0,0170331	0,4361404
0,400	0,0359135	0,1351632	0,150	0,0227864	0,3372893
0,450	0,0379149	0,1204569	0,200	0,0275132	0,2735337
0,500	0,0396944	0,1083529	0,250	0,0314887	0,2289998
0,550	0,0412868	0,0982257	0,300	0,0348894	0,1961460
0,600	0,0427195	0,0896355	0,350	0,0378361	0,1709258
0,650	0,0440150	0,0822637	0,400	0,0404160	0,1509712
0,700	0,0451915	0,0758739	0,450	0,0426943	0,1348030
0,750	0,0462642	0,0702868	0,500	0,0447209	0,1214489
0,800	0,0472458	0,0653641	0,550	0,0465349	0,1102435
0,850	0,0481469	0,0609976	0,600	0,0481675	0,1007156
0,900	0,0489767	0,0571008	0,650	0,0496440	0,0925220
0,950	0,0497429	0,0536046	0,700	0,0509852	0,0854072
1,000	0,0504522	0,0504522	0,750	0,0522083	0,0791766
			0,800	0,0533276	0,0736796
0,075	0,0129613	0,4935193	0,850	0,0543553	0,0687976
0,080	0,0136355	0,4770999	0,900	0,0553017	0,0644363
0,085	0,0142929	0,4616995	0,950	0,0561757	0,0605195
0,090	0,0149342	0,4472258	1,000	0,0569849	0,0569849
0,095	0,0155602	0,4335975			
0,100	0,0161716	0,4207422	**0,085**	0,0157771	0,4921114
0,150	0,0215981	0,3234155	0,090	0,0164927	0,4775203
0,200	0,0260498	0,2612732	0,095	0,0171915	0,4637337
0,250	0,0297905	0,2181533	0,100	0,0178744	0,4506866
0,300	0,0329882	0,1864915	0,150	0,0239498	0,3505523
0,350	0,0357579	0,1622709	0,200	0,0289486	0,2853441

продолжение на следующей стр.

продолжение

b/a	M_a	M_b	b/a	M_a	M_b
0,250	0,0331568	0,2395036	0,300	0,0404049	0,2235391
0,300	0,0367586	0,2055318	0,350	0,0438751	0,1956253
0,350	0,0398811	0,1793649	0,400	0,0469166	0,1733692
0,400	0,0426159	0,1586068	0,450	0,0496045	0,1552252
0,450	0,0450315	0,1417523	0,500	0,0519970	0,1401643
0,500	0,0471807	0,1278078	0,550	0,0541396	0,1274741
0,550	0,0491048	0,1160905	0,600	0,0560688	0,1166458
0,600	0,0508367	0,1061154	0,650	0,0578142	0,1073063
0,650	0,0524032	0,0975288	0,700	0,0594001	0,0991755
0,700	0,0538263	0,0900661	0,750	0,0608467	0,0920392
0,750	0,0551241	0,0835259	0,800	0,0621709	0,0857306
0,800	0,0563119	0,0777518	0,850	0,0633870	0,0801181
0,850	0,0574026	0,0726208	0,900	0,0645071	0,0750964
0,900	0,0584071	0,0680346	0,950	0,0655416	0,0705802
0,950	0,0593348	0,0639139	1,000	0,0664996	0,0664996
1,000	0,0601937	0,0601937			
			0,100	0,0202859	0,4898571
0,090	0,0172444	0,4913778	0,150	0,0272994	0,3870475
0,095	0,0179787	0,4775522	0,200	0,0330952	0,3183031
0,100	0,0186965	0,4644487	0,250	0,0379878	0,2691079
0,150	0,0250892	0,3632433	0,300	0,0421834	0,2321802
0,200	0,0303569	0,2967280	0,350	0,0458256	0,2034610
0,250	0,0347955	0,2496799	0,400	0,0490188	0,1805066
0,300	0,0385969	0,2146595	0,450	0,0518417	0,1617569
0,350	0,0418939	0,1875956	0,500	0,0543549	0,1461682
0,400	0,0447825	0,1660709	0,550	0,0566059	0,1330158
0,450	0,0473347	0,1485583	0,600	0,0586331	0,1217805
0,500	0,0496059	0,1340452	0,650	0,0604674	0,1120806
0,550	0,0516395	0,1218332	0,700	0,0621342	0,1036290
0,600	0,0534702	0,1114248	0,750	0,0636548	0,0962057
0,650	0,0551264	0,1024563	0,800	0,0650468	0,0896392
0,700	0,0566310	0,0946550	0,850	0,0663252	0,0837940
0,750	0,0580034	0,0878130	0,900	0,0675028	0,0785615
0,800	0,0592595	0,0817685	0,950	0,0685906	0,0738535
0,850	0,0604130	0,0763940	1,000	0,0695979	0,0695979
0,900	0,0614754	0,0715877			
0,950	0,0624566	0,0672672	**0,150**	0,0371548	0,4814226
1,000	0,0633651	0,0633651	0,200	0,0454052	0,4068208
			0,250	0,0524309	0,3508202
0,095	0,0187480	0,4906260	0,300	0,0584933	0,3072705
0,100	0,0195001	0,4774873	0,350	0,0637807	0,2724675
0,150	0,0262055	0,3753975	0,400	0,0684331	0,2440450
0,200	0,0317388	0,3077075	0,450	0,07255578	0,2204200
0,250	0,0364055	0,2595435	0,500	0,0762385	0,2004928

продолжение на следующей стр.

продолжение

b/a	M_a	M_b	b/a	M_a	M_b
0,550	0,0795417	0,1834754	1,000	0,1481793	0,1481793
0,600	0,0825212	0,1687882			
0,650	0,0852210	0,1559953	**0,300**	0,0953701	0,4523150
0,700	0,0876772	0,1447628	0,350	0,1047942	0,4106858
0,750	0,0899202	0,1348303	0,400	0,1131699	0,3751842
0,800	0,0919755	0,1259918	0,450	0,1206574	0,3445868
0,850	0,0938646	0,1180823	0,500	0,1273858	0,3179738
0,900	0,0956060	0,1109682	0,550	0,1334604	0,2946399
0,950	0,0972156	0,1045399	0,600	0,1389681	0,2740356
1,000	0,0987069	0,0987069	0,650	0,1439812	0,2557264
			0,700	0,1485602	0,2393643
0,200	0,0558210	0,4720895	0,750	0,1527565	0,2246673
0,250	0,0647588	0,4132408	0,800	0,1566136	0,2114047
0,300	0,0725156	0,3662218	0,850	0,1601689	0,1993857
0,350	0,0793111	0,3278335	0,900	0,1634546	0,1884516
0,400	0,0853119	0,2959351	0,950	0,1664985	0,1784689
0,450	0,0906475	0,2690389	1,000	0,1693248	0,1693248
0,500	0,0954202	0,2460786			
0,550	0,0997123	0,2262699	**0,350**	0,1153595	0,4423203
0,600	0,1035904	0,2090231	0,400	0,1247759	0,4059738
0,650	0,1071096	0,1938859	0,450	0,1332141	0,3743808
0,700	0,1103157	0,1805059	0,500	0,1408126	0,3466981
0,750	0,1132467	0,1686045	0,550	0,1476853	0,3222690
0,800	0,1159352	0,1579584	0,600	0,1539266	0,3005742
0,850	0,1184086	0,1483866	0,650	0,1596156	0,2811980
0,900	0,1206905	0,1397408	0,700	0,1648186	0,2638036
0,950	0,1228011	0,1319987	0,750	0,1695922	0,2481157
1,000	0,1247580	0,1247580	0,800	0,1739846	0,2339065
			0,850	0,1780371	0,2209866
0,250	0,0754072	0,4622964	0,900	0,1817856	0,2091968
0,300	0,0846963	0,4135695	0,950	0,1852609	0,1984028
0,350	0,0928675	0,3730968	1,000	0,1884901	0,1884901
0,400	0,1001073	0,3389858			
0,450	0,1065626	0,3098797	**0,400**	0,1351463	0,4324268
0,500	0,1123504	0,2847805	0,450	0,1444599	0,4001849
0,550	0,1175658	0,2629376	0,500	0,1528630	0,3717527
0,600	0,1222865	0,2437756	0,550	0,1604765	0,3465204
0,650	0,1265768	0,2268460	0,600	0,1674011	0,3239999
0,700	0,1304905	0,2117941	0,650	0,1737214	0,3037961
0,750	0,1340729	0,1983360	0,700	0,1795090	0,2855856
0,800	0,1373622	0,1862413	0,750	0,1848247	0,2691016
0,850	0,1403912	0,1753216	0,800	0,1897209	0,2541220
0,900	0,1431881	0,1654211	0,850	0,1942424	0,2404605
0,950	0,1457771	0,1564100	0,900	0,1984281	0,2279596

продолжение на следующей стр.

продолжение

b/a	M_a	M_b	b/a	M_a	M_b
0,950	0,2023119	0,2164853	0,850	0,2461312	0,3020499
1,000	0,2059232	0,2059232	0,900	0,2518337	0,2876932
			0,950	0,2571399	0,2744082
0,450	0,1545803	0,4227099	1,000	0,2620870	0,2620870
0,500	0,1637276	0,3937615			
0,550	0,1720287	0,3679440	**0,650**	0,2273217	0,3863391
0,600	0,1795894	0,3447992	0,700	0,2355186	0,3659874
0,650	0,1864992	0,3239526	0,750	0,2430832	0,3473167
0,700	0,1928339	0,3050953	0,800	0,2500814	0,3301399
0,750	0,1986584	0,2879700	0,850	0,2565704	0,3142957
0,800	0,2040284	0,2723613	0,900	0,2626002	0,2996446
0,850	0,2089918	0,2580872	0,950	0,2682145	0,2860654
0,900	0,2135903	0,2449930	1,000	0,2734522	0,2734522
0,950	0,2178604	0,2329464			
1,000	0,2218337	0,2218337	**0,700**	0,2441105	0,3779448
			0,750	0,2520462	0,3590556
0,500	0,1735640	0,4132180	0,800	0,2593931	0,3416458
0,550	0,1825035	0,3869793	0,850	0,2662103	0,3255594
0,600	0,1906567	0,3633647	0,900	0,2725491	0,3106606
0,650	0,1981169	0,3420196	0,950	0,2784548	0,2968311
0,700	0,2049638	0,3226491	1,000	0,2839674	0,2839674
0,750	0,2112656	0,3050063			
0,800	0,2170809	0,2888826	**0,750**	0,2603308	0,3698346
0,850	0,2224605	0,2741010	0,800	0,2680064	0,3522345
0,900	0,2274487	0,2605103	0,850	0,2751331	0,3359467
0,950	0,2320838	0,2479807	0,900	0,2817639	0,3208393
1,000	0,2363999	0,2363999	0,950	0,2879453	0,3067970
			1,000	0,2937184	0,2937184
0,550	0,1920364	0,4039818			
0,600	0,2007417	0,3800168	**0,800**	0,2759916	0,3620042
0,650	0,2087161	0,3582864	0,850	0,2834106	0,3455494
0,700	0,2160426	0,3385092	0,900	0,2903175	0,3302665
0,750	0,2227922	0,3204482	0,950	0,2967598	0,3160430
0,800	0,2290262	0,3039021	1,000	0,3027798	0,3027798
0,850	0,2347978	0,2886994			
0,900	0,2401535	0,2746924	**0,850**	0,2911058	0,3544471
0,950	0,2451337	0,2617540	0,900	0,2982738	0,3390167
1,000	0,2497740	0,2497740	0,950	0,3049633	0,3246391
			1,000	0,3112174	0,3112174
0,600	0,2099618	0,3950191			
0,650	0,2184169	0,3729927	**0,900**	0,3056890	0,3471555
0,700	0,2261926	0,3528940	0,950	0,3126128	0,3326469
0,750	0,2333625	0,3344954	1,000	0,3190890	0,3190890
0,800	0,2399903	0,3176029			

продолжение на следующей стр.

продолжение

b/a	M_a	M_b	b/a	M_a	M_b
0,950	0,3197587	0,3401206			
1,000	0,3264458	0,3264458	**1,000**	0,3333333	0,3333333

Литература

[1] **Alawneh, A. D. and Shawagfen, N. T.** *Ellipsoidal inclusions in an elastic medium* // Indian J. Pure Appl. Math. 1989. V. 20. No. 8. Pp. 840–849.

[2] **Allen, C. K., Brown, N., and Reiser, M.** *Image effects for bunched beams in axisymmetric systems* // Particle Accelerators. 1994. V. 45. Pp. 149–165.

[3] **Ambjörnsson, T., and Mukhopadhyay, G.** *Dipolar response of an ellipsoidal particle with an anisotropic coating* // J. Phys. A: Math. Gen.. 2003. V. 36. No. 42. P. 10651.

[4] **Ammari, H. and Nédélec, J. C.** *Low-Frequency Electromagnetic Scattering* // SIAM J. Math. Anal. 2000. V. 31. No. 4. Pp. 836–861.

[5] **Ampère A.-M.** *Réponse à la lettre de M. Van Beck, sur une nouvelle expérience électro-magnétique* // Journal de physique. 1821. T. 93. P. 447. (Русск. пер. **Ампер А.-М.** *Ответ на письмо г. Фан-Бека относительно нового опыта по электромагнетизму* — в кн.: **Ампер А.-М.** Электродинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1954, С. 283–313).

[6] **Ampère A.-M.** *Mémoire sur la théorie mathématique, des phénomènes électro-dynamiques, uniquement déduite de l'expérience*// Mémoires de l'Académie des Sciences {2}. 1827. T. 6. P. 175. (Русск. пер. **Ампер А.-М.** *Теория электродинамических явлений, выведенная исключительно из опыта* — в кн.: **Ампер А.-М.** Электродинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1954, С. 7–220).

[7] **Appell P.** Traité de mécanique rationelle. Paris: Gauthier-Villars et C-ie, 1932. T. 4. Fasc. 1 (Les figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation sous l'attraction Newtonienne de ses particules). VIII+342 p. (Русск. пер.: **Аппель П.** Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. М.: ОНТИ, 1936. 375 с.)

[8] **Appell P.** Traité de mécanique rationelle. Paris: Gauthier-Villars et C-ie, 1937. T. 4. Fasc. 2 (Les figures d'équilibre d'une masse liquide hétérogène en rotation. Figures de la Terre et des planètes). XIII+292 p.

[9] **Ar, E., Kleinman, R. E.** *The exterior Neumann problem for the three-dimensional Helmholtz equation* // Arch. Ration. Mech. Anal. 1966. V. 23. Pp. 218–236.

[10] **Arscott, F. M.** *On Lamé Polynomials* // J. London Math. Soc. 1957. V. s1-32. No. 1. Pp. 37–48.

[11] **Arscott, F. M. and Khabaza, I. M.** Tables of Lame Polynomials. New York: Pergamon Press, 1962.

[12] **Arscott, F. M., Taylor, P. J., and Zahar, R. V.** *On the Numerical Construction of Ellipsoidal Wave Functions* // Math. of Computation. 1983. V. 40. No. 161. Pp. 367–380.

[13] **Asaro, R. J., and Barnett, D. V.** *The non-uniform transformation strain problem for anisotropic ellipsoidal inclusion* // J. Mech. Phys. Solids. 1975. V. 23. Pp. 778.

[14] **Asvestas, J. S., Kleinman, R. E.** *Low-frequency scattering by perfectly conducting obstacles* // J. Math. Phys. 1971. V. 12. Pp. 795–811.

[15] **Avelin, J., Sihvola, A.** *Internal field of a hollow dielectric ellipsoid: the amplification effect* // Journ. Electrostat. 2002. V. 56. No. 1. Pp. 19–27.

[16] **Band, E. G., Payne, P. R.** *The pressure distribution on the surface of an ellipsoid in inviscid flow* // Aeronautical Quarterly. 1980. Pp. 70–84.

[17] **Banerji, S.** *On a class of ellipsoidal harmonics and a method of solving the wave equation in ellipsoidal coordinates* // Bull. Calcutta Math. Soc. 1918–1919. V. 10. Pp. 95–104.

[18] **Banerji, S.** *On the wave equation in ellipsoidal coordinates* // Bull. Calcutta Math. Soc. 1918–1919. V. 10. Pp. 179–186.

[19] **Baranova, N. B., and Zel'dovich, B. Ya.** *On the expansion of radiation intensity into a/λ power series in electrodynamics* // Opt. Commun. 1977. V. 22. No. 1. P. 53–55.

[20] **Barber, P. W. and Hill, S. C.** Light Scattering by Small Particles: Computational Methods. Singapore: World Scientific, 1990.

[21] **Bardhan, J. P., Knepley, M. G.** *Computational science and re-discovery: open-source implementations of ellipsoidal harmonics for problems in potential theory* // arXiv:1204.0267v2 [cs.CE] 2012. 25 pgs.

[22] **Barrera, R. G., Estevez, G. A., and Giraldo, J.** *Vector spherical harmonics and their application to magnetostatics* // Eur. J. Phys. 1985. V. 6. No. 4. P. 287.

[23] **Bassett, A.** A Treatise on Hydrodynamics. Cambridge: Deighton, Bell and Company, 1888. V. 2.

[24] **Bateman, H., Erdelyi, A.** Higher transcendental functions. New York: Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1955. Vol. 3. (Русск. пер. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции: эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. Спр. мат. биб-ка. М.: «Наука», 1967. Т. 3. 300 с.)

[25] **Batygin, Yu. K.** *Self-consistent analysis of three-dimensional uniformly charged ellipsoid with zero emittance* // Phys. Plasmas. 2001. V. 8. No. 6. Pp. 3103–3106.

[26] **Bazer J., Hochstadt H.** *Diffraction of scalar waves by a circular aperture. II* // Comm. Pure Appl. Math. 1962. V. 15. No. 1. Pp. 1–33.

[27] **Beleggia, M., De Graef, M., and Millev, Y.** *Demagnetization factors of the general ellipsoid: An alternative to the Maxwell approach* // Phil. Mag. 2006. V. 86. N. 16. Pp. 2451–2466.

[28] **Bethe, H. A.** *Theory of diffraction by small holes* // Phys. Rev. 1944. V. 66. Pp. 163–182.

[29] **Binney, J., Tremaine, S.** Galactic dynamics. Princeton: Princeton University Press, 1988. 733 pgs.

[30] **Bjerknes, C. A.** *Geschichtliche Notizen über das Dirichletsche Kugel- und Ellipsoid- Problem* // Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen, 1873. № 17. S. 439–460.

[31] **Blatt, J. M., Weisskopf, V. F.** Theoretical nuclear physics. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1952. 864 pgs. (Русск. пер. **Блатт Дж., Вайскопф В.** Теоретическая ядерная физика. М.: ИЛ, 1954. 660 с.)

[32] **Blimke, J., Myklebust, J., Volkmer, H., Merrill, S.** *Four-shell ellipsoidal model employing multipole expansion in ellipsoidal coordinates* // Med. Biol. Eng. Comput. 2008. V. 46. No. 9. Pp. 859–869.

[33] **Bohr, A.** Rotational Motion in Nuclei. Nobel Lecture. Stockholm. 1975. (Русск. пер.: **Бор О.** *Вращательное движение в ядрах* // УФН. 1976. Т. 120. № 4. С. 543–561.)

[34] **Bohr, N., Wheeler, I. A.** *The mechanism of nuclear fission* // Phys. Rev. 1939. V. 56. No. 5. Pp. 426–450. (Русск. пер. **Бор Н., Уиллер Дж.** *Механизм деления ядер* — в кн.: **Нильс Бор.** Избранные научные труды. Т.2. М.: «Наука», 1971. С. 299–349).

[35] **Bohren, C. F., Huffman, D. R.** Absorption and Scattering of Light by Small Particles. New York: John Wiley & Sons, 1983. 530 pgs. (Русск. пер. **Борен К., Хафмен Д.** Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: «Мир», 1986. 664 с.)

[36] **Born, M., Wolf, E.** Principles of Optics. London: Pergamon Press, 1986. 6th ed. 808 pgs. (Русск. пер. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. М.: «Наука», 1970. 856 с.)

[37] **Bouwkamp, C. J.** *On the evaluation of certain integrals occurring in the theory of the freely vibrating circular disk and related problems* // Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. 1949. V. 52. No. 9. Pp. 987–994.

[38] **Bouwkamp, C. J.** *On the freely vibrating circular disk and the diffraction by circular disks and apertures* // Physica. 1950. V. 16. No. 1. Pp. 1–16.

[39] **Bouwkamp, C. J.** *On integral occurring in the theory of diffraction of electromagnetic waves by a circular disk* // Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. 1950. V. 53. No. 5. Pp. 654–661.

[40] **Bouwkamp, C. J.** *Diffraction theory* // Progr. Phys. 1954. V. 17. Pp. 35–100.

[41] **Bouwkamp, C. J.** *Theoretical and numerical treatment of diffraction through a circular aperture* // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1970. V. AP-18. Pp. 152–176.

[42] **Bownan, J. J., Senior, T. B. A., Uslenghi, P. L. E. (Eds.).** Electromagnetic and Acoustic Scattering by simple Shapes. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969. 728 pgs. (Revised printing, Hemisphere, Levittown, Pennsylvania, 1987).

[43] **Bronzan, J. B.** *The Magnetic Scalar Potential* // Am. J. Phys. 1971. V. 39. No. 11. Pp. 1357–1359.

[44] **Bronzan, J. B.** *Magnetic scalar potentials and the multipole expansion for magnetostatics* — In: Electromagnetism: Paths to Research (ed. by Teplitz, D.). New York: Plenum Press, 1982. Pp. 171–181.

[45] **Brown, W. (Ed.).** Light scattering: principles and development. New York: Oxford University Press, 2002. 528 pgs.

[46] **Bulirsch, R.** *Numerical calculation of elliptic integrals and elliptic functions* // Numer. Math. 1965. V. 7. Pp. 78–90.

[47] **Bulirsch, R.** *Numerical calculation of elliptic integrals and elliptic functions, II* // Numer. Math. 1965. V. 7. Pp. 353–354.

[48] **Bulirsch, R.** *Numerical calculation of elliptic integrals and elliptic functions, III* // Numer. Math. 1969. V. 13. Pp. 305–315.

[49] **Byerly, W. E.** An elementary treatise on Fourier's series and spherical, cylindrical, and ellipsoidal harmonics. Boston – New York: Ginn & Company, 1893. 287 pgs.

[50] **Byrd, P. F., and Friedman, M. D.** Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists. 2nd ed. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, V. 67. New York: Springer, 1971.

[51] **Caimmi, R.** *The integral Newton's and MacLaurin's theorems in tensor form* // Astron. Nachr. 2003. V. 324. No. 3. Pp. 250–264.

[52] **Campanelli, L., Cea, P., and Tedesco, L.** *Ellipsoidal Universe Can Solve the Cosmic Microwave Background Quadrupole Problem* // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. No. 13. P. 131302.

[53] **Cape, J. A., Zimmerman, J. M.** *Magnetization of Ellipsoidal Superconductors* // Phys. Rev. 1967. V. 153. P. 416.

[54] **Castellanos, A., Panizo, M., and Rivas, J.** *Magnetostatic multipoles in Cartesian coordinates* // Am. J. Phys. 1978. V. 46. No. 11. P. 1116.

[55] **Cayley, A.** *A memoir on prepotentials* // Phil. Trans. R. Soc. 1876. V. 165. Pt. 2. Pp. 675–774.

[56] **Chandrasekhar, S.** Ellipsoidal figures of equilibrium. New Haven: Yale University Press, 1969. 253 pgs. (Русск. пер.: **Чандрасекхар С.** Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: «Мир», 1973. 288 с.)

[57] **Chandrasekhar, S., Lebovitz, K. R.** *The potentials and the superpotentials of homogeneous ellipsoids* // Astrophys. J. 1962. V. 136. No. 3. Pp. 1037–1047.

[58] **Chang, H.** *Fields external to open-structure magnetic devices represented by ellipsoid or spheroid* // Br. J. Appl. Phys. 1961. V. 12. No. 4. P. 160.

[59] **Charalambopoulos, A., Dassios, G.** *Scattering of a spherical wave by a small ellipsoid* // IMA J. Appl. Math. 1999. V. 62. No. 2. Pp. 117–136.

[60] **Chasles M.** *Nouvelle solution du problème de l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène sur un point extérieur* // J. Math. Pures et Appl. 1840. Serie 1. T. 5. P. 465–488.

[61] **Clark, D. A., Saul, S. J., Emerson, D. W.** *Magnetic and gravity anomalies of a triaxial ellipsoid* // Exploration Geophys. 1986. V. 17. No. 4. Pp. 189–200.

[62] **Cole, F. N.** *The Potential of a Shell Bounded by Confocal Ellipsoidal Surfaces* // Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. 1883. V. 18. Pp. 226–231.

[63] **Costi, S. and Portnoy, H.** Incompressible, inviscid, symmetrical flow about ellipsoids — comparison of an approximate theory with exact results. Scientific Report 5. Department of Aeronautical Engineering, Technion - Israel Institute of Technology. 1974.

[64] **Coussios, C.** *The significance of shape and orientation in single-particle weak-scatterer models* // J. Acoust. Soc. Am. 2002. V. 112. No. 3. Pp. 906–915.

[65] **Crawford F., Kino G. S.** *Solution variationnelle des résonances d'un plasma. Établissement du principe et application à un système plan* // Compt. Rend. 1963. T. 256. N. 9. P. 1939–1941.

[66] **Cronemeyer, D. C.** *Demagnetization factors for general ellipsoids* // J. Appl. Phys. 1991. V. 70. No. 6. P. 2911. (Erratum: J. Appl. Phys., **70**, (1991), 7660).

[67] **Crozier, S., Forbes, L. K., and Brideson, M. A.** *Ellipsoidal harmonic (Lamé) MRI shims* // IEEE Trans. On Applied Superconductivity. 2002. V. 12. No. 4. Pp. 1880–1885.

[68] **Darling, D. A. and Senior, T. B. A.** *Low-frequency expansions scattering by separable and nonseparable bodies* // J. Acoust. Soc. Am. 1965. V. 37. No. 2. Pp. 228–234.

[69] **Darwin, G. H.** *Ellipsoidal harmonic analysis* // Trans. Roy. Soc. London A. 1901. V. 197. Pp. 461–557.

[70] **Dassios, G.** *Convergent low-frequency expansions for penetrable scatterers* // J. Math. Phys. 1977. V. 18. No. 1. Pp. 126–137.

[71] **Dassios, G.** *Low-frequency scattering* — In: Scattering: scattering and inverse scattering in pure and applied science (ed. by Pike, E. R., and Sabatier, P. C.). N.Y.–London: Academic Press, 2002. Pp. 230–244.

[72] **Dassios, G.** Ellipsoidal harmonics: theory and applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 458 pgs.

[73] **Dassios, G., and Kleinman, R.** Low Frequency Scattering. New York: Clarendon Press, Oxford University Press. 2000. 320 pgs.

[74] **Datta, S. K.** *Diffraction of plane elastic waves by ellipsoidal inclusions* // J. Acoust. Soc. Am. 1977. V. 61. Pp. 1432–1437.

[75] **Dedekind, R.** *Zusatz zu der vorstehenden Abhandlung* // J. Reine Angew. Math. 1860. B. 58. S. 217–228.

[76] **De Hoop, A. T.** Handbook of Radiation and Scattering of Waves: Acoustic Waves in Fluids, Elastic Waves in Solids, Electromagnetic Waves. San Diego: Academic Press, 1995. 1085 pp.

[77] **Deirmendjian, D.** Electromagnetic scattering on spherical polydispersions. New York: American Elsevier Publishing Company, Inc., 1969. (Русск. пер.: **Дейрменджан Д.** Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. М.: «Мир», 1971. 166 с.)

[78] **De Meulenaere, F., Van Bladel, J. G.** *Polarizability of some small apertures* // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1977. V. AP-25. No. 2. Pp. 198–205.

[79] **De Visschere, P.** *On the origin dependence of multipole moments in electromagnetism* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2006. V. 39. Pp. 4278–4283.

[80] **de Zeeuw, T.** *Elliptical galaxies with separable potentials* // Mon. Not. R. Astr. Soc. 1985. V. 216. Pp. 273–334.

[81] **de Zeeuw, T., Pfenniger, D.** *Potential-density pairs for galaxies* // Mon. Not. R. Astr. Soc. 1988. V. 235. Pp. 949–995.

[82] **Dirichlet G. L.** *Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik* // J. Reine Angev. Math. 1860. B. 58. S. 181–216.

[83] **Dive P.** *Attraction des ellipsoïdes homogènes et réciproques d'un théorème de Newton* // Bull. Soc. Math. France. 1931. T. 59. P. 128–140.

[84] **Doicu, A., Wriedt, T., Eremin, Y. A.** Light Scattering by Systems of Particles. Berlin: Springer, 2006. XIII+322 pgs.

[85] **Douglas, J. F., and Garboczi, E. J.** *Intrinsic viscosity and the polarizability of particles having a wide range of shapes* // Advances Chem. Phys. 1995. V. 91. Pp. 85–153.

[86] **Dubin, D. H. E.** *Equilibrium and dynamics of uniform density ellipsoidal non-neutral plasmas* // Phys. Fluids B. 1993. V. 5. No. 2. Pp. 295–324.

[87] **Durney, C. H., Mussoudi, H., Iskender, M. F.** Radio Frequency Radiation Dosimetry Handbook. Brooks AFB, Texas., 1986.

[88] **Dyson, F. W.** *The potentials of ellipsoids of variable densities* // Quart. J. Pure and Appl. Math. 1891. V. 25. No. 99. Pp. 259–288.

[89] **Dzergach, A. I.** *Physics of laser acceleration using plasmoids grating in HF wells* // Nucl. Instr. and Methods in Phys. Research Sect. A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 1994. V. 344. No. 2. Pp. 260–268.

[90] **Edwards, T. W. and Van Bladel, J.** *Electrostatic dipole moment of a dielectric cube* // Appl. Sci. Res. Sect. B. 1961. V. 9. Pp. 151–155.

[91] **Eggimann, W. H.** *Higher-order evaluation of electromagnetic diffraction by circular disks* // IRE Trans. 1961. V. MTT-9. No. 5. Pp. 408–418.

[92] **Eshelby, J. D.** *The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1957. V. 241. No. 1226. Pp. 376–396.

[93] **Eshelby, J. D.** *The Elastic Field Outside an Ellipsoidal Inclusion* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1959. V. 252. No. 1271. Pp. 561–569.

[94] **Esteban, E. P. and Kazanas, D.** *Gravitational potentials of triaxial ellipsoids in Weyl gravity* // General Relativity and Gravitation. 2001. V. 33. No. 8. Pp. 1281–1303.

[95] **Evans, N. W.** *Chandrasekhar and modern stellar dynamics* // Bull. Astr. Soc. India. 2011. V. 39. Pp. 87–99.

[96] **Eyges, L.** *Solution of boundary value problems with Laplace's equation for ellipsoids and elliptical cylinders* // J. Math. Phys. 1980. V. 21. No. 3. Pp. 571–581.

[97] **Fabrikant, V. I.** *Sound penetpation through an arbitrarily shaped aperture in a rigit screen: analytical determination of the quadratic terms in low-frequency expantion* // J. Acoust. Soc. Am. 1986. V. 80. No. 5. Pp. 1438–1446.

[98] **Fedorovich, R. D., Naumovets, A. G., Tomchuk, P. M.** *Electron and light emission from island metal films and generation of hot electrons in nanoparticles* // Phys. Reports. 2000. V. 328. Pp. 73–179.

[99] **Ferrers, N. M.** *On the potentials of ellipsoids, ellipsoidal shells, elliptic laminæ, and elliptic rings of variable densities* // Quart. J. Pure and Appl. Math. 1877. V. 14. No. 53. Pp. 1–22.

[100] **Ferrers, N. M.** An Elementary Treatise on Spherical Harmonics and Subjects Connected with them. London: Macmillan and Co. 1877. XI+160 pgs.

[101] **Frenkel, J.** Lehrbuch der Elektrodynamik, Bd. 1. Allgemeine Mechanik der Elektrizitat. Berlin: Springer, 1926. 366 S. (Русск. изд.: **Френкель Я. И.** Электродинамика (Общая теория электричества). Л.; М.: ОНТИ, 1934. Т. 1. 428 с. ; Собрание избранных трудов М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 1. 370 с.)

[102] **Frenkel, J.** Lehrbuch der Elektrodynamik, Bd. 2. Makroskopische Elektrodynamik der materiellen Korper. Berlin: Springer, 1928. 505 S. (Русск. изд.: **Френкель Я. И.** Электродинамика (Макроскопическая электродинамика материальных сред). Л.; М.: ОНТИ, 1935. Т. 2. 556 с.)

[103] **Frost, P.** *On the potential and attraction of a ellipsoidal shell at an external point* // Quart. J. Pure and Appl. Math. 1881. V. 17. Pp. 46–50.

[104] **Fu, L. S., Mura, T.** *Volume integrals of ellipsoids associated with the inhomogeneous Helmholtz equation* // Wave Motion. 1982. V. 4. No. 2. Pp. 141–149.

[105] **Garmier, R. and Barriot, J.-P.** *Ellipsoidal Harmonic expansions of the gravitational potential: Theory and application* // Celestial Mech. Dynam. Astronom. 2001. V. 79. No. 4. Pp. 235–275.

[106] **Gauss C. F.** *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata* // Comment. Societat. Reg. Scient. Götting. Recent. 1813. B. 2 — In: Werke. Göttingen. 1867 . B. 5. S. 1–22.

[107] **Gauss C. F.** *Kugelfunctionen* — In: Werke. Göttingen. 1867 . B. 5. S. 630–631.

[108] **Gerjuoy, E., Saxon, D. S.** *Variational principles for the acoustic field* // Phys. Rev. 1954. V. 94. No. 6. Pp. 1445–1458.

[109] **Ghahremani, F.** *Numerical evaluation of the stresses and strains in ellipsoidal inclusions in an anisotropic elastic material* // Mech. Res. Commun. 1977. V. 4. Pp. 89–91.

[110] **Gimsa, J.** *A comprehensive approach to electro-orientation, electro-deformation, dielectrophoresis, and electrorotation of ellipsoidal particles and biological cells* // Bioelectrochemistry. 2001. V. 54. Pp. 23–31.

[111] **Giordano, S.** *Effective medium theory for dispersions of dielectric ellipsoids* // Journal of Electrostatics. 2003. V. 58. Pp. 59–76.

[112] **Giordano, S., Palla, P. L.** *Dielectric behavior of anisotropic inhomogeneities: interior and exterior point Eshelby tensors* // J. Phys. A: Math. Theor. 2008. V. 41. P. 415205.

[113] **Giordano, S., Palla, P. L., and Colombo, L.** *Effective permittivity of materials containing graded ellipsoidal inclusions* // Eur. Phys. J. B 2008. V. 66. Pp. 29–35.

[114] **González, H., Juárez S. R., Kielanowski, P., Loewe, M.** *Multipole expansion in magnetostatics* // Am. J. Phys. 1998. V. 66. No. 3. Pp. 228–231.

[115] **Grafarend, E. W., Klapp, M., Martinec, Z.** *Spacetime Modeling of the Earth's Gravity Field by Ellipsoidal Harmonics* - In: Handbook of Geomathematics (ed. by Freeden, W., Nashed, Z., Sonar, T.). New York: Springer, 2010. Pp. 159–252.

[116] **Gray, C. G.** *Simplified derivation of the magnetostatic multipole expansion using the scalar potential* // Am. J. Phys. 1978. V. 46. Pp. 582–583.

[117] **Gray, C. G.** *Magnetic multipole expansion using the scalar potential* // Am. J. Phys. 1979. V. 47. Pp. 457–459.

[118] **Gray, C. G., Karl, G., Novikov, V. A.** *Magnetic multipolar contact fields: The anapole and related moments* // Am. J. Phys. 2010. V. 78. No. 9. Pp. 936–948.

[119] **Gray G.** *Low frequency iterative solution of integral equations in electromagnetic scattering theory* (Ph. D. Dissertation). Univ. of Delaware, 1977.

[120] **Gray, G. A. and Kleinman, R. E.** *The integral equation method in electromagnetic scattering* // Journ. Math. Anal. and Appl. 1985. V. 107. Pp. 455–477.

[121] **Green, G.** *On the determination of the exterior and interior attractions of ellipsoids of variable densities* // Trans. Cambridge Phil. Soc. 1835. V. 5. Pp. 395–430.

[122] **Green, H., Lane, W.** Particulate clouds: dusts, smokes and mists. London: E. & F. N. Spon, 1964. XXII+471 pgs. (Русск. пер.: **Грин Х., Лейн В.** Аэрозоли: пыли, дымы и туманы. Л.: «Химия», 1972. 428 с.)

[123] **Grigorchuk, N. I., Tomchuk, P. M.** *Magnetic absorption of electromagnetic waves by a small metallic particle of ellipsoidal form* // Low Temp. Phys. 2005. V. 31. No. 5. Pp. 411–418.

[124] **Gritto, R., Korneev V. A. and Johnson, L. R.** *Low Frequency Elastic Wave Scattering by an Inclusion: Limits of Applications* // Geophys. J. Inter. 1995. V. 120. Pp. 677–692.

[125] **Guerritore, G.** *Calcolo delle funzioni di Lamé fino a quelle di grado 10* // Giornale di Matematiche di Battaglini. 1909. Ser. 2. T. 47. P. 164–172.

[126] **Gutiérrez, D., Nehorai, A., and Preissl, H.** *Ellipsoidal head model for fetal magnetoencephalography: forward and inverse solutions* // Phys. Med. Biol. 2005. V. 50. Pp. 2141–2157.

[127] **Guzatov, D. V., Klimov, V. V. and Pikhota, M.Yu.** *Plasmon oscillations in ellipsoid nanoparticles: Beyond dipole approximation* // Laser Phys. 2010. V. 20. No. 1. Pp. 85–99.

[128] **Hagihara, Y.** Theories of equilibrium figures of a rotating homogeneous fluid mass. Washington: NASA, 1970. VIII+168 pgs.

[129] **Hagiwara, Yu.** *A short article on the second and lower degree terms in the ellipsoidal harmonic expansion of the gravitational potential of an ellipsoid* // Bull. Earth. Res. Inst. 1981. V. 56. Pp. 441–447.

[130] **Hao Ma, Biao Wang** *The scattering of electroelastic waves by an ellipsoidal inclusion in piezoelectric medium* // Intern. Journ. Solids and Structures. 2005. V. 42. Pp. 4541–4554.

[131] **Harlen, O. G., Holmes, M. J., Povey, M. J. W., Qiu, Y. and Sleeman, B. D.** *A Low Frequency Potential Scattering Description of Acoustic Propagation in Dispersions* // SIAM J. on Appl. Math. 2001. V. 61. No. 6. Pp. 1906–1931.

[132] **Harlen, O. G., Holmes, M. J., Pinfield, V. J., Povey, M. J. W., and Sleeman, B. D.** *A perturbation solution for long wavelength thermoacoustic propagation in dispersions* // J. of Computational and Appl. Math. 2010. V. 234. No. 6. Pp. 1996–2002.

[133] **Hart, F. X., Marino, A. A.** *ELF dosage in ellipsoidal models of man due to high voltage transmission lines* // J. Bioelectr. 1982. V. 1. Pp. 129–154.

[134] **Haus, J. W., Inguva, R., and Bowden, C. M.** *Effective-medium theory of nonlinear ellipsoidal composites* // Phys. Rev. A. 1989. V. 40. No. 10. Pp. 5729–5734.

[135] **Heller W., Nakagaki M., Langolf G.** Angular scattering functions for spheroids. Detroit: Wayne State Univ. Press, 1972.

[136] **Heller W., Nakagaki M., Langolf G.** Depolarization and related ratios of light scattering by spheroids. Detroit: Wayne State Univ. Press, 1974.

[137] **Heller W., Nakagaki M., Langolf G.** Light scattering functions of flow-oriented spheroids. Detroit: Wayne State Univ. Press, 1974.

[138] **Herrick, D. F., Senior, T. B. A.** *Low-frequency scattering by rectangular dielectric particles* // Appl. Phys. 1977. V. 13. No. 2. Pp. 175–183.

[139] **Herrick, D. F., Senior, T. B. A.** *The dipole moments of dielectric cube* // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1977. V. AP-25. No. 4. Pp. 590–592.

[140] **Hertz H.** *Ueber die Berührung fester elastischer Körper* // J. Reine Angewandte Mathematik. 1882. B. 92. S. 156–171.

[141] **Hiatt, R. E., Siegel, K. M., and Wiel, H.** *The ineffectiveness of absorbing coatings on conducting objects illuminated by long wavelength radar* // Proc. IRE. 1960. V. 48. No. 9. Pp. 1636–1642.

[142] **Hirsch, J. E.** *Predicted electric field near small superconducting ellipsoids* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. No. 1. Pp. 016402–016405.

[143] **Hnizdo, V.** *Regularization of the second-order partial derivatives of the Coulomb potential of a point charge* // arXiv:physics/0409072v4 [physics.class-ph] 2006. 8 pgs.

[144] **Hobson, E. W.** *On the evaluation of a certain surface-integral, and its application to the expansion, in series, of the potential of ellipsoids* // Proc. Lond. Math. Soc. 1892. V. s1-24. No. 1. Pp. 80–96.

[145] **Hobson, E. W.** *On some general Formulæ for the Potentials of Ellipsoids, Shells, and Discs* // Proc. Lond. Math. Soc. 1896. V. s1-27. No. 1. Pp. 519–544.

[146] **Hobson, E. W.** The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1931. VI+500 pgs. (Русск. пер.: **Гобсон Е. В.** Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952. 476 с.)

[147] **Holt, A. R., Uzunoglu, N. K., and Evans, B. G.** *An integral equation solution to the scattering of electromagnetic radiation by dielectric spheroids and ellipsoids* // IEEE Trans. Antennas Propag. 1978. V. AP-26. Pp. 706–712.

[148] **von Hönl, H., Maue, A. W., Westpfahl, K.** *Theorie der Beugung* — In: Handbuch der Physik (Herausgegeben von S. Flügge) Berlin: Springer–Verlag, 1961. Band XXV/1. S. 218. (Русск. пер. **Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.** Теория дифракции. М.: «Мир», 1964. 428 с.).

[149] **Humbert, P.** *Fonctions de Lamé et fonctions de Mathieu* // Mémorial des sceience mathématiques. 1926. Fasc. 10. S. 1–58.

[150] **Hurd, R. A.** *Scattering from a small anisotropic ellipsoid* // Can. J. Phys. 1958. V. 36. No. 8. Pp. 1058–1071.

[151] **Hurd, R. A.** *The magnetic fields of a ferrite ellipsoid* // Can. J. Phys. 1958. V. 36. No. 8. Pp. 1072–1083.

[152] **Hvoždara, M., Kohút, I.** *Gravity field due to a homogeneous oblate spheroid: Simple solution form and numerical calculations* // Contrib. Geophys. Geod. 2011. V. 41. No. 4. Pp. 307–327.

[153] **Hvoždara, M., Vozár, J.** *The forward problem of magnetometry for the oblate spheroid* // Contrib. Geophys. Geod. 2011. V. 41. No. 2. Pp. 159–177.

[154] **Igathinathanea, C. and Chattopadhyay, P. K.** *On the development of a ready reckoner table for evaluating surface area of general ellipsoids based on numerical techniques* // J. of Food Engineering. 1998. V. 36. No. 2. Pp. 233–247.

[155] **Irimia, A.** *Electric field and potential calculation for a bioelectric current dipole in an ellipsoid* // J. Phys. A. 2005. V. 38. No. 37. Pp. 8123–8138.

[156] **Irimia, A. and Bradshaw, L. A.** *Theoretical ellipsoidal model of gastric electrical control activity propagation* // Phys. Rev. E 2003. V. 68. No. 5. Pp. 051905–051909.

[157] **Ishimaru, A.** Wave propagation and scattering in random media. New York: Academic Press, 1978. V. 1. (Single scattering and transport theory). 250 pgs. (Русск. пер.: **Исамару А.** Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: «Мир», 1981. Т. 1. 280 с.)

[158] **Ivory, J.** *On the attractions of homogeneous ellipsoids* // Philos. Trans. 1809. V. 99. Pp. 345–372.

[159] **Jackson, J. D.** Classical electrodynamics. 3rd ed. New York and London: John Wiley & Sons, Inc., 1999. 808 pgs. (Русск. пер. 1-го изд.: **Джексон Дж.** Классическая электродинамика. М.: «Мир», 1965. 702 с.)

[160] **Jacobi, C. G. J.** *Über die Figur des Gleichgewichts* // Poggendorff Annalen der Physik und Chemie. 1834. V. 33. Pp. 229–238.

[161] **Jahnke, E., Emde, F.** Tables of Functions with Formulae and Curves. New York: Dover, 1945. 382 pgs. (Русск. пер. **Янке Е., Эмде Ф.** Таблицы функций с формулами и кривыми. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. 420 с.)

[162] **Jakoby, B., Olyslager, F.** *Quasistatic asymptotics of dynamic Green dyadics for general bianisotropic media* // AEÜ. 1996. V. 50. No. 3. Pp. 189–195.

[163] **Jang, S.** *Fragmentation of giant multipole resonances in deformed nuclei* // Nuclear Phys. A. 1983. V. 401. No. 2. Pp. 303–328.

[164] **Jeans, J. H.** Problems of Cosmology and Stellar Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1919.

[165] **Jeffery, G. B.** *The Motion of Ellipsoidal Particles Immersed in a Viscous Fluid* // Proc. R. Soc. Lond. A 1922. V. 102. No. 715. Pp. 161–179.

[166] **Jones, D. S.** *The scattering of long electromagnetic waves* // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1980. V. 33. Pp. 105–122.

[167] **Jones, R. C.** *A generalization of the dielectric ellipsoid problem* // Phys. Rev. 1945. V. 68. No. 3–4. Pp. 93–96. (Erratum: Phys. Rev. 1945. V. 68. No. 9–10. P. 213).

[168] **Kanaun, S. K. and Levin, V. M.** Self-consistent Methods for Composites: Static problems. New York: Springer, 2008. Vol. 1. 383 pgs.

[169] **Kang, H., and Kim, K.** *Anisotropic polarization tensors for ellipses and ellipsoids* // J. Comput. Math. 2007. V. 25. No. 2. Pp. 157–168.

[170] **Karnaukhov, V. A.** *On polarization effects in reactions induced by heavy ions* // Nucl. Phys. A. 1978. V. 294. No. 1-2. Pp. 246–254.

[171] **Karp, L.** *On the newtonian potential of ellipsoids* // Complex Variables and Elliptic Equations. 1994. V. 25. No. 4. Pp. 367–371.

[172] **Kawamura, T., Taniguchi, K., Yoshida, S. and Eriguchi, Y.** *New exact solutions of magnetic ellipsoidal figures of equilibrium* // Mont. Not. Roy. Astr. Soc.: Letters. 2011. V. 416. No. 1. Pp. L75–L79.

[173] **Keller J. B., Kleinman R. E., Senior T. B. A.** *Dipole moments in Rayleigh scattering* // J. Inst. Math. and its Appl. 1972. V. 9. No. 1. Pp. 14–22.

[174] **Kellogg, O. D.** Foundations of potential theory. Berlin: Springer, 1929. 384 pgs.

[175] **Kerker, M.** The scattering of light and other electromagnetic radiation. San Diego, California: Academic Press, 1969. 666 pgs.

[176] **Khalack, V. R.** *The magnetic field of an ellipsoidal star* // A&A. 2005. V. 429. No. 2. Pp. 677–683.

[177] **Khavinson, D. and Lundberg, E.** *A tale of ellipsoids in potential theory* // Notices of the AMS. 2014. V. 61. No. 2. Pp. 148–156.

[178] **Kim, S. and Arunachalam, P. V.** *The general solution for an ellipsoid in low-Reynolds-number flow* // J. Fluid Mech. 1987. V. 178. Pp. 535–547.

[179] **Kirchhoff G.** Vorlesungen über mathematische Physik. B. 1. Mechanik. Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1874. (Русск. пер.: **Кирхгоф Г.** Механика. Лекции по математической физике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.)

[180] **Kirchhoff G.** Vorlesungen über mathematische Physik. B. 3. Electricität und Magnetismus. Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1891. 228 S.

[181] **Kirilyuk, V. S.** *Inverse three-dimensional elasticity theory problem for an isotropic medium with a deformable inclusion* // Intern. Appl. Mech. 1990. V. 26. No. 11. Pp. 1060–1064.

[182] **Klein, F.** *Über Lamésche Funktionen* // Math. Ann. 1881. Bd. 18. S. 237–246.

[183] **Kleinman R. E.** *The Dirichlet problem for the Helmholtz equation* // Arch. Ration. Mech. Anal. 1965. V. 18. No. 3. Pp. 205–229.

[184] **Kleinman, R. E.** *The Rayleigh region* // Proc. IEEE. 1965. V. 53. No. 8. Pp. 848–856.

[185] **Kleinman, R. E.** *Low frequency solution of electromagnetic scattering problems* — In: Electromagnetic wave theory (ed. by Brown J.). Oxford: Pergamon Press, 1967. Pt. 2. Pp. 891–905.

[186] **Kleinman, R. E.** *Far field scattering at low frequencies* // Appl. Sci. Res. 1967. V. 18. No. 1. Pp. 1–8.

[187] **Kleinman, R. E.** *Dipole moments and near field potentials* // Appl. Sci. Res. 1973. V. 27. No. 5. Pp. 335–340.

[188] **Kleinman, R. E.** *Low frequency electromagnetic scattering* — In: Electromagnetic scattering (R. L. E. Uslenghi, ed.). N.Y.–London: Academic Press, 1978. Pp. 1–28. (Русск. пер. **Клейнман Р.** *Низкочастотное электромагнитное рассеяние* — в кн.: Численные методы теории дифракции (под ред. Боровикова В. А.). М.: «Мир», 1982, С. 172–198).

[189] **Kleinman, R.E., Mack, R.B.** *Scattering by linearly vibrating objects* // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1979. V. AP-27. No. 3. Pp. 344–352.

[190] **Kleinman, R. E., Senior, T. B. A.** *Rayleigh scattering cross sections* // Radio Sci. 1972. V. 7. No. 10. Pp. 937–942.

[191] **Kleinman, R. E., Senior, T. B. A.** *Low-frequency scattering by space objects* // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems 1975. V. AES-11. No. 4. Pp. 672–675.

[192] **Kleinman, R. E., Senior, T. B. A.** *Rayleigh scattering* — In: Low and high frequency asimptotics, vol. 2 of Acoustic, Electromagnetic and Elastic Wave Scattering (V. K. Varadan, and V. V. Varadan, Eds.). Amsterdam: North Holland, 1986. Pp. 1–70.

[193] **Knoepfel, H. E.** Magnetic Fields: A Comprehensive Theoretical Treatise for Practical Use. New York: John Wiley and Sons, Inc., 2000. 620 pgs.

[194] **Kokhanovsky, A. A. (Ed.)** Light scattering reviews: single and multiple light scattering. Berlin: Springer, 2006. 493 pgs.

[195] **Kriloff, A. N.** *On Sir Isaac Newton's formula for the attraction of a spheroid on a point of its axis* // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1925. V. 85. No. 4. Pp. 571–575.

[196] **Lakhtakia, A.** *Polarizability dyadics of small chiral ellipsoids* // Chem. Phys. Lett. 1990. V. 174. No. 6. Pp. 583–586.

[197] **Lakhtakia, A.** *Rayleigh scattering by a bianisotropic ellipsoid in a biisotropic medium* // Int. J. Elecronics. 1991. V. 71. Pp. 1057–1062.

[198] **Lakhtakia, A.** *Electromagnetic Response of an Electrically Small Bianisotropic Ellipsoid Immersed in a Chiral Fluid* // Berichte der Bunsengesellschaft für physikalische Chemie. 1991. V. 95. No. 5. Pp. 574–576.

[199] **Lamb, H.** Hydrodynamics, 6th ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932. 756 pgs. (Русск. пер. **Ламб Г.** Гидродинамика. М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. 928 с.)

[200] **Lamé G.** *Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température* // Journal de Mathématiques pures et appliquée (Liouville), Paris. 1837. T. 2. P. 147–183.

[201] **Lamé G.** *Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux* // Journal de Mathématiques pures et appliquée (Liouville), Paris. 1839. T. 4. P. 100–125, 126–136.

[202] **Lawrence, E. G.** *Diffraction of elastic waves by a rigid inclusion* // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1970. V. 23. No. 3. Pp. 389–397.

[203] **Lawrence, E. G.** *Diffraction of elastic waves by a rigid ellipsoid* // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1972. V. 25. No. 2. Pp. 161–172.

[204] **Lebovitz, N. R.** *The virial tensor and its application to self-gravitating fluids* // Astrophys. J. 1961. V. 134. Pp. 500–536.

[205] **Lebovitz, N. R.** *Ellipsoidal potentials of polynomial distributions of matter* // Astrophys. J. 1979. V. 234. Pp. 619–627.

[206] **Lebovitz, N. R.** *The mathematical development of the classical ellipsoids* // Int. J. Engr. Sci. 1998. V. 36. Pp. 1407–1420.

[207] **Legendre A. M.** *Mémoire sur I'attraction des ellipsoïdes homogènes* // Meḿoires de l'Institut national des sciences et arts. 1810. Pt. 2. P. 155–183.

[208] **Lehmer, D. H.** *Approximations to the area of n-dimensional ellipsoid* // Can. J. Math. 1950. V. 2. No. 3. Pp. 267–282.

[209] **Levin, M. L., Muratov, R. Z.** *On the internal potential of heterogeneous ellipsoids* // Astrophys. J. 1971. V. 166. No. 2. Pt. 1. Pp. 441–445.

[210] **Levin, M. L., Muratov, R. Z.** *On diffraction characteristics of small bodies with nondegenerate symmetry* — In: Electromagnetic wave theory (URSI Symposium, Tbilisi), M.: "Nauka" , 1971, Pp. 533–535.

[211] **Levine, H. and Schwinger, J.** *On the theory of diffraction by an aperture in an infinite plane screen. Part 1.* // Phys. Rev. 1948. V. 74. No. 8. Pp. 958–974.

[212] **Levine, H. and Schwinger, J.** *On the theory of diffraction by an aperture in an infinite plane screen. Part 2.* // Phys. Rev. 1949. V. 75. No. 9. Pp. 1423-1432.

[213] **Levine, H. and Schwinger, J.** *On the theory of electromagnetic wave diffraction by an aperture in an infinite plane conducting screen* // Comm. Pure and Appl. Math. 1950. V. 3. Pp. 355–391.

[214] **Lewandowski, S. J.** *Ferrite ellipsoid in parallel field* // Br. J. Appl. Phys. 1964. V. 15. No. 2. P. 193.

[215] **Li, L. W., Kang, X. K., Leong, M. S.** Spheroidal wave functions in electromagnetic theory. New York: John Wiley and Sons, Inc., 2002. XIII+295 pgs.

[216] **Li, Y.-L., Huang, J.-Y., Wang, M.-J., and Zhang, J.** *Scattering field for the ellipsoidal targets irradiated by an electromagnetic wave with arbitrary polarizing and propagating direction* // PIER Letters. 2008. V. 1. Pp. 221–235.

[217] **Li, Y.-L., Li, J., Wang, M.-J., and Dong, Q.-F.** *The property of rayleigh scattering for an anisotropic dielectric ellipsoid* // Natural Science. 2011. V. 3. No.1 Pp. 221-235.

[218] **Lin, S. L., and Chew, W. C.** *3D numerical solution of the potential of an ellipsoidal particle in an ionic solution* // J. Chem. Phys. 1985. V. 82. No. 2. Pp. 942–945.

[219] **Lichtenstein, L.** Gleichgewichtsfiguren rotierender flüssigkeiten. Berlin: J. Springer, 1933. VIII+175 S. (Русск. пер. **Лихтенштейн Л.** Фигуры равновесия вращающейся жидкости. М.: «Наука», 1965. 252 с.).

[220] **Liouville, J.** *Lettres sur diverses questions d'analyse et de physique mathématique concernant l'ellipsoïde, adressées à M. P.-H. Blanchet* // Journ. de Math. Pures et Appl. 1846. T. 11. P. 217–236; 261–290.

[221] **Lorentz, H. A.** Die Maxwellsche Theorie (Vorlesungen über theoretische Physik an der Universität Leiden. B. 5). Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H.: Leipzig, 1931. (Русск. пер.: **Лорентц Г. А.** Теория электромагнитного поля. М.-Л.: Гостехиздат, 1933. 172 с.)

[222] **Lowes, F. J. and Winch, D. E.** *Orthogonality of harmonic potentials and fields in spheroidal and ellipsoidal coordinates: application to geomagnetism and geodesy* // Geophys. J. Int. 2012. V. 191. No. 2. Pp. 491–507.

[223] **Lozovik, Yu. E., Klyuchnik, A. V.** *The dielectric function and collective oscillations in inhomogeneous matter* — In: The dielectric function of condensed systems (L. E. Keldysh, D. A. Kirzhnits and A. A. Maradunin, Eds.), M.: North–Holland , 1989, Pp. 299–388.

[224] **Lu, X., Ge, Sh., Jiang, L., Wang X.** *Chain of ellipsoids approach to the magnetic nanowire* // J. Appl. Phys. 2005. V. 97. No. 8. P. 084304.

[225] **Lyttleton, R. A.** The stability of rotating liquid masses. Cambridge: Cambridge University Press, 1953. X+150 pgs. (Русск. пер.: **Литтлтон Р. А.** Устойчивость вращающихся масс жидкости. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 240 с.)

[226] **Ma, H., Hu, G.** *Eshelby tensors for an ellipsoidal inclusion in a micropolar material* // Int. J. Engin. Science. 2006. V. 44. Pp. 595–605.

[227] **Maccaferri, N., González-Dнaz, J., Bonetti, S., Berger, A., Kataja, M., van Dijken, S., Nogués, J., Bonanni, V., Pirzadeh, Z., Dmitriev, A., Akerman, J., and Vavassori, P.** *Polarizability and magnetoplasmonic properties of magnetic general nanoellipsoids* // Opt. Express. 2013. V. 21. Pp. 9875–9889.

[228] **MacLaurin, C.** A Treatise of Fluxions. Edinburgh: T. W. and T. Ruddimans, 1742. V. 1-2. 764 pgs.

[229] **Mahmoud, S. F. Wait, J. R.** *Magnetic response of a hollow ellipsoid* // Antennas and Propagation Magazine, IEEE. 1999. V. 41. No. 2. Pp. 7–12.

[230] **Maier, R. S.** *Lamé polynomials, hyperelliptic reductions and Lamé band structure* // Phil. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci. 2008. V. 366. No. 1867. Pp. 1115–1153.

[231] **Malyaskin, A. V. and Shulga, S. N.** *Low frequency scattering of a plane wave by an anisotropic ellipsoid in anisotropic medium* — In: International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. V. 2. Kharkov. 1998. Pp. 716–718.

[232] **Markov, K. and Preziosi, L. (Eds.)** Heterogeneous media: micromechanics modeling methods and simulations. Boston: Birkhäuzer, 2000. XIV+471 pp.

[233] **Maryško, M.** *Ferromagnetic resonance in a thin ferrite spheroid surrounded by dielectric* // Czechoslovak J. Phys. B. 1987. V. 37. No. 1. Pp. 73–85.

[234] **Masson, J-B., Gallot, G.** *Diffraction from a subwavelength elliptic aperture: analytic approximate aperture fields* // J. Opt. Soc. Am. A 2012. V. 29. No. 9. Pp. 2005–2014.

[235] **Massoudi, H., Durney, C. H. and Johnson, C. C.** *Long-wavelength analysis of plane wave irradiation of an ellipsoidal model of man* // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1977. V. MTT-25. No. 1. Pp. 41–46.

[236] **Massoudi, H., Durney, C. H. and Johnson, C. C.** *Long-wave length electromagnetic power absorption in ellipsoidal models of man and. animals* // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1977. V. MTT-25. No. 1. Pp. 47–52.

[237] **Mattis, D. C.** The Theory of Magnetism: An Introduction to the Study of Cooperative Phenomena. New York: Harper & Row, 1965. (Русск. пер.: **Маттис Д.** Теория магнетизма. М.: «Мир», 1967. 407 с.)

[238] **Maxwell, J. C.** A treatise on electricity and magnetism. London: Oxford University Press, 1st edition. 1873. Vol. 1. 489 pgs. (Русск. пер.: **Максвелл Дж. К.** Трактат об электричестве и магнетизме. М.: «Наука», 1989. Т. 1. 416 с.)

[239] **Maxwell, J. C.** A treatise on electricity and magnetism. London: Oxford University Press, 1st edition. 1873. Vol. 2. 518 pgs. (Русск. пер.: **Максвелл Дж. К.** Трактат об электричестве и магнетизме. М.: «Наука», 1989. Т. 2. 437 с.)

[240] **McClurg, G. O.** *Magnetic Field Distributions for a Sphere and for an Ellipsoid* // Am. J. Phys. 1956. V. 24. No. 7. Pp. 496–499.

[241] **Mehl, J. B.** *Second-order electromagnetic eigenfrequencies of a triaxial ellipsoid* // Metrologia. 2009. V. 46. No. 5. Pp. 554–559.

[242] **Meixner, J., Schäfke, F. W.** Mathieusche Funktionen und Shpäroidfunctionen. Berlin: Springer Verlag, 1954.

[243] **Michelitsch, T. M., Gao, H. and Levin, V. M.** *On the dynamic potentials of ellipsoidal shells* // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2003. V. 56. No. 4. Pp. 629–648.

[244] **Michelitsch, T. M., Wang J., Gao, H., Levin, V. M.** *On the retarded potentials of inhomogeneous ellipsoids and sources of arbitrary shapes in the three-dimensional infinite space* // Int. J. Solids Struct. 2005. V. 42. No. 1. Pp. 51–67.

[245] **Mie, G.** *Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen* // Annalen der Physik. 1908. IV Folge. B. 25. N. 3. S. 377–445.

[246] **Miller, R. D., and Jones, T. B.** *Electro-orientation of ellipsoidal erythrocytes. Theory and experiment* // Biophys. J. 1993. V. 64. No. 5. Pp. 1588–1595.

[247] **Milne-Thomson, L. M.** Theoretical hydrodynamics. London: Macmillan, 1955. XXI+632 pgs. (Русск. пер.: **Милн-Томсон Л. М.** Теоретическая гидродинамика М.: «Мир», 1964. 659 с.)

[248] **Miloh, T.** *A note on the potential of a homogeneous ellipsoid in ellipsoidal coordinates* // J. Phys. A: Math. Gen. 1990. V. 23. No. 4. Pp. 581–584.

[249] **Milton, G. W.** Theory of Composites. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. XXVIII+719 pgs.

[250] **Mishchenko, M. I., Hovenier, J. W., and Travis, L. D. (Eds.).** Light Scattering by Nonspherical Particles: Theory, Measurements, and Applications. San Diego, California: Academic Press, 2000. 690 pgs.

[251] **von Mises R., Frank Ph., Weber H., Riemann B.** Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Zweite, vermehrte, Auflage. Braunschweig: Vieweg, 1930. Bd. 2. XXIII+916 S. (Русск. пер.: **Франк Ф. и Мизес Р.** Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики М.-Л.: ОНТИ, 1937. Ч. 2. 998 с.)

[252] **Möglich F.** *Beugungserscheinungen an Körpern von ellipsoidischer Gestalt* // Ann. Physik. 1927. B. 83. N. 13. S. 609–734.

[253] **Morse, Ph. M. and Feshbach, H.** Methods of theoretical physics. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1953. Pt. 2. 997 pgs. (Русск. пер.: **Морс Ф. М. и Фешбах Г.** Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. Т. 2. 896 с.)

[254] **Mottelson, B.** Elementary Modes of Excitation in the Nucleus. Nobel Lecture. Stockholm. 1975. (Русск. пер.: **Моттельсон Б.** *Элементарные виды возбуждения в ядрах* // УФН. 1976. Т. 120. № 4. С. 563–580.)

[255] **Motz, H.** Electromagnetic problems of microwave theory. London: Methuen & Company. LTD, 1951.

[256] **Motz, H., Watson, C.J.H.** The Radio-Frequency Confinement and Acceleration of Plasma — In: Advances in electronics and electron physics (ed. by L. Morton). V. 23. Pp. 153–302. N.Y.– London: Academic Press, 1967.

[257] **Moulton, F. R.** An Introduction to Celestial Mechanics. New York: Dover Publ., 2nd rev. edn. 1970. (Русск. пер. с 1-го изд.: **Мультон Ф.** Введение в небесную механику. М.-Л.: ОНТИ, 1935. 480 с.)

[258] **Mukhopadhyay, G., Puri, S., Mukhopadhyay, P.** *SERS from ellipsoidal nanoparticles* // Proc. of SPIE. 2010. V. 7757. 77573K.

[259] **Müller, C.** Foundations of the mathematical theory of electromagnetic waves. Berlin–New York: Springer-Verlag, 1969. VII+353 pgs.

[260] **Mura, T., Kinoshita, N.** *The polynomial eigenstrain problem or an anisotropic ellipsoidal inclusion* // Physica Status Solidi. A 1978. V. 48. Pp. 447–450.

[261] **Newton, I.** Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica. London, 1687. 510 pgs. (Русск. пер.: **Ньютон И.** Математические начала натуральной филисофии. М.: «Наука», 1989. 689 с.).

[262] **Newton, R. G.** Scattering Theory of Waves and Particles. New York: McGraw-Hill, 1966. (Русск. пер.: **Ньютон Р.** Теория рассеяния волн и частиц. М.: «Мир», 1969. 607 с.).

[263] **Niven, W. D.** *On certain definite integrals occurring in spherical harmonic analysis and on the expansion, in series, of the potential of the ellipsoid and the ellipse* // Phil. Trans. R. Soc. 1879. V. 170. No. 1. Pp. 379–416.

[264] **Niven, W. D.** *On Ellipsoidal Harmonics* // Phil. Trans. R. Soc. 1891. V. A–182. Pp. 231–278.

[265] **Noble, B.** *Integral equation perturbation methods in low frequency diffraction* — In: Electromagnetic waves (ed. by Langer R.E.). Madison: The University of Wisconsin Press, 1962. Pp. 323–360.

[266] **Osborn, J. A.** *Demagnetizing factors of the general ellipsoid* // Phys. Rev. 1945. V. 67. No. 11-12. Pp. 351–357.

[267] **Ozen, S.** *Low-frequency transient electric and magnetic fields coupling to child body* // Radiat. Prot. Dosimetry. 2008. V. 128. No. 1. Pp. 62–67.

[268] **Papadakis, S. N., Uzunoglu, N. K., and Capsalis, C. N.** *Scattering of a plane wave by a general anisotropic dielectric ellipsoid* //J. Opt. Soc. Am. A. 1990. V. 7. No. 6. Pp. 991–997.

[269] **Perenboom, J. A. A. J., Wyder, P., and Meier, F.** *Electronic properties of small metallic particles* // Phys. Rep. 1981. V. 78. No. 2. Pp. 173–292.

[270] **Perram, J. W. and Stiles, P. J.** *On the Application of Ellipsoidal Harmonics to Potential Problems in Molecular Electrostatics and Magnetostatics* // Proc. R. Sos. Lond. A. 1976. V. 349. No. 1656. Pp. 125–139.

[271] **Perrusson, G. E., Lambert, M., Lesselier, D., Charalambopoulos, A., and Dassios, G.** *Electromagnetic scattering by a triaxial homogeneous penetrable ellipsoid: Low-frequency derivation and testing of the localized nonlinear approximation* // Radio Sci. 2000. V. 35. No. 2. Pp. 463–481.

[272] **Perrusson, G. E., Vafeas, P., and Lesselier, D.** *Low-frequency dipolar excitation of a perfect ellipsoidal conductor* // Quart. Appl. Math. 2010. V. 68. Pp. 513–536.

[273] **Phillips, H. B.** *Effect of surface discontinuity of the distribution of potential* // J. Math. and Phys. 1934. V. 13. Pp. 261–267.

[274] **Pin-Zhen, B.** *Ellipsoidal bag model for heavy quark system* // Z. Phys. C — Particles and Fields. 1991. V. 52. No. 1. Pp. 105–109.

[275] **Pitaevskii, L. and Stringari, S.** Bose Einstein Condensation. Oxford: Clarendon Press, 2003.

[276] **Pizzetti, P.** Principii della Teoria Meccanica della Figura dei Pianeti. Pisa: Enrico Spoerri, 1913. XIII+251 pp. (Русск. пер.: **Пицетти П.** Основы механической теории фигуры планет. М.-Л.: ГТТИ, 1933. 170 с.).

[277] **Poincaré, H.** *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* // Acta Math. 1885. V. 7. Pp. 259–380.

[278] **Poincaré, H.** Figures d'équilibre d'une masse fluide: leçons professées à la Sorbonne en 1900. Paris: Gauthier-Villars et C-ie, 1903. (Русск. пер.: **Пуанкаре А.** Фигуры равновесия жидкой массы. М.-Ижевск: «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 208 с.).

[279] **Poisson S. D.** *Mémoire sur la théorie du magnétisme* // Mémoires de l'Académie des Sciences, Paris. 1821–1822. T. 5. P. 247–338.

[280] **Poisson S. D.** *Second mémoire sur la théorie du magnétisme* // Mémoires de l'Académie des Sciences, Paris. 1821–1822. T. 5. P. 488–533.

[281] **Poisson S. D.** *Mémoires sur l'attraction d'un ellipsoïde homogène* // Mémoires de l'Académie des Sciences, Paris. 1835. T. 13. P. 497–545.

[282] **Poisson S. D.** *Note relative à l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène* // Connaissance des Temps, à l'usage des Astronomes et des Navigateurs. 1837. P. 93–102.

[283] **Posselt, B., Farafonov, V. G., Il'in, V. B. and Prokopjeva, M. S.** *Light scattering by multi-layered ellipsoidal particles in the quasistatic approximation* // Meas. Sci. Technol. 2002. V. 13. No. 3. Pp. 256.

[284] **Puri, S. and Mukhopadhyay, G.** *Scattering of Electromagnetic Waves by Small Magnetic Ellipsoidal Particles* // Proc. of SPIE. 2008. V. 7032. 70322C.

[285] **Raab,R. E., De Lange, O. L.** Multipole Theory in Electromagnetism. Oxford: Clarendon Press, 2005. XII+235 pgs.

[286] **Rahman, M.** *On the Newtonian potentials of heterogeneous ellipsoids and elliptical discs* // Proc. R. Soc. Lond. A. 2001. V. 457. No. 2013. Pp. 2227–2250. [Erratum: **Rahman, M.** Proc. R. Soc. Lond. A. **458**, 3089–3090 (2002)].

[287] **Rahman, M.** *The Isotropic Ellipsoidal Inclusion With a Polynomial Distribution of Eigenstrain* // ASME J. Appl. Mech. 2002. V. 69. No. 5. Pp. 593–601.

[288] **Rahman, M.** *A Rigid Elliptical Disc-Inclusion, in an Elastic Solid, Subjected to a Polynomial Normal Shift* // Journal of Elasticity. 2002. V. 66. No. 5. Pp. 207–235.

[289] **Rahmat-Samii, Y. and Mittra, R.** *Electromagnetic coupling through small apertures in a conducting screen* // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1977. V. AP-25. N.2. Pp. 180–187.

[290] **Rainwater, J.** *Nuclear Energy Level Argument for a Spheroidal Nuclear Model* // Phys. Rev. 1950. V. 79. N.3. Pp. 432–434.

[291] **Rainwater, J.** *Background for the spheroidal nuclear model proposal* // Rev. Mod. Phys. 1976. V. 48. Pp. 385–391. (Русск. пер. **Рейнуотер Дж.** *Как возникла модель сфероидальных ядер* // УФН. 1976. Т. 120. № 4. С. 529–541).

[292] **Ramm, A. G.** *Wave scattering by small impedance particles in a medium* // Phys. Lett. A. 2007. V. 368. No. 1-2. Pp. 164–172.

[293] **Renger, A. G.** Interaction, and Scattering of Localized and Propagating Surface Polariton. Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Doktor rerum naturalium. Technische Universität Dresden. 2006. 129 pp.

[294] **Riemann, B.** *Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides* // Abh. d. Königl. Gesell. der Wis. zu Göttingen. 1860. B. 9. S. 3–36. (Русск. пер. **Риман Б.** *О движении жидкого однородного эллипсоида* — в кн.: **Риман Б.** Сочинения. М.–Л.: Огиз, 1948. С. 339–368).

[295] **Rinaldi, D.** *Lamé's functions and ellipsoidal harmonics for use in chemical physics* // Computers and Chemistry. 1982. V. 6. No. 4. Pp. 155–160.

[296] **Ritter, S.** *On the computation of Lame functions, of eigenvalues and eigenfunctions of some potential-operators* // Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik. 1998. V. 78. No. 1. Pp. 66–72.

[297] **Robinson, K.** *Elastic energy of an ellipsoidal inclusion in an infinite solid* // J. Appl. Phys., 1951. V. 22. Pp. 1045–1054.

[298] **Rogers, R. R., Yau, M. K.** A short course in cloud physics. New York: Pergamon Press, 1989. 293 pgs.

[299] **Rodrigues.** *Mémoires sur l'attraction des sphéroïdes* // Correspondance de l'École Royale Polytechnique, 1816. T. 3. P. 361–385.

[300] **Rose, M. E.** Multipole fields. New York: A John Wiley & Sons, Inc., 1955. 99 pgs. (Русск. пер.: **Роуз М.** Поля мультиполей. М.: ИЛ, 1957. 132 с.)

[301] **Rosenkilde, C. E.** *Surface-energy tensors* // J. Math. Phys., 1967. V. 8. No.1. Pp. 84–88.

[302] **Rosenkilde, C. E.** *Surface-energy tensors for ellipsoids* // J. Math. Phys., 1967. V. 8. No. 1. Pp. 88–97.

[303] **Rosenkilde C. E.** *Stability of axisymmetric figures of equilibrium of rotating charged liquid drop* // J. Math. Phys. 1967. V. 8. No. 1. Pp. 98–118.

[304] **Rosenkilde C. E.** *A dielectric fluid drop in an electric field* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1969. V. 312. No. 1511. Pp. 473–494.

[305] **Rossing, T. D. (Ed.).** Handbook of acoustics. New York: Springer, 2007. 1182 pgs.

[306] **Routh, E. J.** *Theorems on the Attraction of Ellipsoids for Certain Laws of Force Other than the Inverse Square* // Phil. Trans. Roy. Soc. A. 1895. V. 186. Pp. 897-950.

[307] **Routh, E. J.** A treatise on analytical statics. Cambridge: Cambridge University Press, 1922. V. 2. 376 pgs.

[308] **Ruck, G. T., (Ed.)** Radar Cross Section Handbook. N.Y.: Plenum Press, 1970. V. 1.

[309] **Ruppin, P., Yatom, H.** *Size and shape effects on the broadening of the plasma resonance absorption in metals* // Phys. Stat. Sol. (B). 1976. V. 74. No. 2. Pp. 647–651.

[310] **Sacherer, F. J.** *RMS envelope equation with space charge* // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1971. V. NS-18. No. 3. Pp. 1105–1107.

[311] **Saif, A. G.** *Magnetostatics of Anisotropic Superconducting Ellipsoid* // Physica Status Solidi (a). 1989. V. 111. No. 2. Pp. 573–581.

[312] **Saxon, D. S.** *Tensor scattering matrix for the electromagnetic field* // Phys. Rev. 1955. V. 100. No. 6. Pp. 1771–1775.

[313] **Schult, M., Mikuszeit, N., Vedmedenko, E. Y., and Wiesendanger, R.** *Multipole moments of general ellipsoids with two polarized domains* // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. V. 40. Pp. 14791–14802.

[314] **Schwinger, J., DeRaad, L. L., Milton, K. A., and Tsai, W.** Classical Electrodynamics. Reading Massachusetts: Perseus Books, 1998. 591 pgs.

[315] **Senior, T. B. A.** *Scalar diffraction by a prolate spheroid at low frequencies* // Can. J. Phys. 1960. V. 38. No. 12. Pp. 1632–1641.

[316] **Senior, T. B. A.** *The scattering of electromagnetic wave by a spheroid* // Can. J. Phys. 1966. V. 44. No. 7. Pp. 1353–1359.

[317] **Senior, T. B. A.** *Low-frequency scattering* // J. Acoust. Soc. Am. 1973. V. 53. No. 3. P. 742.

[318] **Senior, T. B. A.** *Low-frequency scattering by a dielectric body* // Radio Sci. 1976. V. 11. No. 5. Pp. 477–482.

[319] **Senior, T. B. A.** *Low-frequency scattering by a perfectly conducting body* // Radio Sci. 1982. V. 17. No. 4. Pp. 741–746.

[320] **Senior, T. B. A., Ahlgren, D. J.** *Rayleigh scattering* // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1973. V. AP-21. No. 1. P. 134.

[321] **Shafiro, B. and Kachanov, M.** *Anisotropic effective conductivity of materials with nonrandomly oriented inclusions of diverse ellipsoidal shapes* // J. Appl. Phys. 2000. V. 87. No. 12. Pp. 8561–8569.

[322] **Shahgholian, H.** *On the Newtonian potential of a heterogeneous ellipsoid* // SIAM J. Math. Anal. 1991. V. 22. No. 5. Pp. 1246–1255.

[323] **Shine, A. D., and Armstrong, R. C.** *The rotation of a suspended axisymmetric ellipsoid in a magnetic field* // Rheologica Acta. 1987. V. 26, No. 2, Pp. 152-161.

[324] **Shubaly, M. R.** *Space charge fields of elliptically symmetrical beams* // Nucl. Instrum. and Meth. 1975. V. 130. No. 1. Pp. 19–22.

[325] **Shvartsburg, A. B., Kuzmiak, V., Petite, G.** *Optics of subwavelength gradient nanofilms* // Phys. Rep. 2007. V. 452. No. 2–3. Pp. 33–88.

[326] **Sihvola, A. H., Lindell, I. V.** *Polarizability and effective permittivity of layered and continuously inhomogeneous dielectric ellipsoids* // J. Electromagn. Waves Applic. 1990. V. 4. No. 1. Pp. 1–26.

[327] **Sihvola, A. H., Lindell, I. V.** *Electrostatics of an anisotropic ellipsoid in an anisotropic environment* // AEÜ. 1996. V. 50. No. 5. Pp. 289–292.

[328] **Skomski, R., Hadjipanayis, G. C., Sellmyer, D. J.** *Effective Demagnetizing Factors of Complicated Particle Mixtures* // IEEE Trans. on Magnetics. 2007. V. 43. No. 6. Pp. 2956–2958.

[329] **Sleeman, B. D.** *The scalar scattering of a plane wave by ellipsoid* // IMA J. Appl. Math. 1967. V. 3. No. 1. Pp. 4–15.

[330] **Sleeman, B. D.** *The low-frequency scalar Dirichlet scattering by a general ellipsoid* // J. Inst. Math. and its Appl. 1967. V. 3. No. 3. Pp. 291–312.

[331] **Sleeman, B. D.** *The low frequency scalar diffraction by an elliptic disc* // Proc. Camb. Phil. Soc. 1967. V. 63. Pt. 4. Pp. 1273–1280. (Corrigendum, Proc. Camb. Phil. Soc., **68**, (1970), 171–172).

[332] **Sleeman, B. D.** *Integral equations and relations for Lamé functions and ellipsoidal wave functions* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1968. V. 64. No. 1. Pp. 113–126.

[333] **Soliverez, C.** *Magnetostatics of anisotropic ellipsoidal bodies* // IEEE Trans. Magnetics. 1981. V. 17. No. 3. Pp. 1363–1364.

[334] **Sona, G.** *Numerical problems in the computation of ellipsoidal harmonics* // J. Geodesy. 1996. V. 70. Pp. 117–126.

[335] **Sperling, H. J.** *The expansion of the potential of a homogeneous ellipsoid in a series of tesseral harmonics* // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). 1967. V. 18. No. 6. Pp. 876–883.

[336] **Steinberger, B., Petersen, N., Petermann, H. and Weiss, D. G.** *Movement of magnetic bacteria in time-varying magnetic fields* // J. Fluid Mech. 1994. V. 273. Pp. 189–211.

[337] **Stekloff, W.** *Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible de la forme ellipsoïdale les parties s'attirent suivant la loi de Newton* // Annales scientifiques de l' E.N.S. 3e série. 1908. T. 25. S. 469–528.

[338] **Stekloff, W.** *Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible de la forme ellipsoïdale les parties s'attirent suivant la loi de Newton (Suite)* // Annales scientifiques de l' E.N.S. 3e série. 1909. T. 26. S. 275–336.

[339] **Sten, J. C.-E.** *Multiline singularities applied to low-frequency scattering by a prolate spheroid* //COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering. 1997. V. 16. No. 2. Pp. 92–107.

[340] **Sten, J. C.-E.** *Ellipsoidal harmonics and their application in electrostatics* // Journ. Electrostat. 2006. V. 64. No. 10. Pp. 647–654.

[341] **Sternberg, E., Sadowsky, M. A.** *Stress Concentration around a Triaxial Ellipsoidal Cavity* // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1949. V. 16. No. 2. P. 149.

[342] **Stevenson, A. F.** *Solution of electromagnetic scattering problems as power series in the ratio (dimension of scatterer)/wavelength* // J. Appl. Phys. 1953. V. 24. No. 9. Pp. 1134–1142.

[343] **Stevenson, A. F.** *Electromagnetic scattering by an ellipsoid in the third approximation* // J. Appl. Phys. 1953. V. 24. No. 9. Pp. 1143–1151.

[344] **Stoner, E. C.** *The demagnetizing factors for ellipsoids* // Phil. Mag. Ser. 7. 1945. V. 36. No. 263. Pp. 803–821.

[345] **Strasberg, M.** *The pulsation frequency of nonspherical gas bubbles in liquids* // J. Acoust. Soc. Am. 1953. V. 25. No. 3. Pp. 536–537.

[346] **Stratton, J. A.** Electromagnetic theory. New York: McGraw-Hill Book Company. 1941. XV+615 pgs. (Русск. пер.: **Стрэттон Дж. А.** Теория электромагнетизма. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. 539 с.)

[347] **Stratton, J. A., Morse, P. M., Chu, L. J., Little, J. D. C., and Corbato, F. J.** Spheroidal wave functions. New York: The Technology Press of M. I. T. and John Wiley and Sons. 1956. XIII+613 pgs.

[348] **Strutt J. W. (Lord Rayleigh).** *On the electromagnetic theory of light* // Phil. Mag. 1881. V. 12. P. 81.

[349] **Strutt J. W. (Lord Rayleigh).** The Theory of Sound. London: McMillan and Co., 2nd edition. 1896. Vol. 2. 504 pgs. (Русск. пер.: **Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей).** Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1955. Т. 2. 475 с.)

[350] **Strutt J. W. (Lord Rayleigh).** *On the passage of waves through apertures in plane screens, and allied problems* // Phil. Mag. 1897. V. 43. Pp. 259–272.

[351] **Strutt, J. W. (Lord Rayleigh).** *On the incidence of aerial and electric waves upon small obstacles in the form of ellipsoids or elliptic cylinders and on the passage of electric wave through a circular aperture in a conducting screen* // Phil. Mag. 1897. V. 44. No. 1. Pp. 28–52.

[352] **Strutt M. J. O.** Lamésche–Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. Berlin : Springer, 1932. (Русск. пер.: **Стретт М. Д. О.** Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков; Киев: ГНТИ Украины, 1935. 238 с.)

[353] **Tarasov, V. E.** *Multipole moments of fractal distribution of charges* // Mod. Phys. Lett. B. 2005. V. 19. No. 22. Pp. 1107–1118.

[354] **Tarleton, F. A.** An introduction to the mathematical theory of attraction. London: Longmans,Green and Co, 1899, XI+290 pgs.

[355] **Taylor, G. I.** *The Motion of Ellipsoidal Particles in a Viscous Fluid* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1923. V. 103. No. 720. Pp. 58–61.

[356] **Tejedor, M., Rubio, H., Elbaile, L., Iglesias, R.** *External fields created by uniformly magnetized ellipsoids and spheroids* // IEEE Trans. MAG. 1995. V. 31. No. 1. Pp. 830–836.

[357] **Thomson, W. (Lord Kelvin) and Tait, P. G.** Treatise on natural philosophy. Oxford: Clarendon Press. 1867. V. 1. 727 pgs. (Русск. пер.: **Томсон У. (Лорд Кельвин), Тэт П. Г.** Трактат по натуральной философии (в двух частях). М.: «Эдиториал УРСС», 2010. Ч.1. 572 с.)

[358] **Todhanter, I.** A history of the mathematical theories of attraction and the figure of the Earth (from the time of Newton to that of Laplace). London: MacMillan and Co, 1873, V. 1. XXXVI+474 pgs., V. 2. 508 pgs.; New York: Dover Publ., Inc. 1962. V. 1–2. (Русск. пер.: **Тодхантер И.** История математических теорий притяжения и фигуры Земли от Ньютона до Лапласа. М.: «Эдиториал УРСС», 2002. В двух томах в одной книге. 670 с.)

[359] **Todhanter, I.** An elementary treatise on Laplace's functions, Lame's functions, and Bessel's functions. London: MacMillan and Co. 1875. VIII+348 pgs.

[360] **Tonks, L.** *The high frequency behavior of a plasma* // Phys. Rev. 1931. V. 37. Pp. 1458–1483.

[361] **Tonks, L.** *Plasma-electron resonance, plasma resonance and plasma shape* // Phys. Rev. 1931. V. 38. No. 6. Pp. 1219–1223.

[362] **Tron, A., Merinov, I.** *Space charge effect in secondary electron monitors* — In: Proceedings of the Particle Accelerator Conference. (12-16 May 1997. Vancouver, BC, Canada). 1997. V. 2. Pp. 2247–2249.

[363] **Trott, M.** The Mathematica guidebook for symbolics. New York: Springer-Verlag. 2006. XXXVIII+1453 pgs.

[364] **Tsyganenko, N. A.** *A solution of the Chapman-Ferraro problem for an ellipsoidal magnetopause* // Planetary and Space Science. 1989. V. 37. No. 9. Pp. 1037–1046.

[365] **Twersky, V.** *Certain transmission and reflection theorems* // J. Appl. Phys. 1954. V. 25. No. 7. Pp. 859–862.

[366] **Twersky, V.** *Acoustic bulk parameters of random volume distributions of small scatterers* // J. Acoust. Soc. Am. 1964. V. 36. No. 7. Pp. 1314–1329.

[367] **Twersky, V.** *Rayleigh scattering* // Appl. Optics. 1964. V. 3. No. 10. Pp. 1150–1162.

[368] **van Bijnen, R. M. W.** Bose-Einstein condensates with long-range dipolar interactions. Master Thesis. The Eindhoven University of Technology. 2008. 152 pgs.

[369] **van Bijnen, R. M. W., Dow, A. J., O'Dell, D. H. J., Parker, N. G., and Martin, A. M.** *Exact solutions and stability of rotating dipolar Bose-Einstein condensates in the Thomas-Fermi limit* // Phys. Rev. A. 2009. V. 80. No. 3. P. 033617.

[370] **van Bijnen, R. M. W., Parker, N. G., Kokkelmans, S. J. J. M. F., Martin, A. M., and O'Dell, D. H. J.** *Collective excitation frequencies and stationary states of trapped dipolar Bose-Einstein condensates in the Thomas-Fermi regime* // Phys. Rev. A. 2010. V. 82. No. 3. P. 033612.

[371] **Van Bladel, J. G.** *Good conductors in low-frequency fields* // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1962. V. AP-10. No.5. Pp. 625–655.

[372] **Van Bladel, J.** *Low frequency scattering through an aperture in a rigid screen* // J. Sound. and Vibrat. 1967. V. 6. No. 3. Pp. 386–395.

[373] **Van Bladel, J.** *Low frequency scattering through an aperture in a soft screen* // J. Sound. and Vibrat. 1968. V. 8. No. 2. Pp. 186–195.

[374] **Van Bladel, J.** *Low-frequency scattering by hard and soft bodies* // J. Acoust. Soc. Am. 1968. V. 44. No. 4. Pp. 1069–1073.

[375] **Van Bladel J.** *Electromagnetic fields in the presence of rotating bodies* // Proc. IEEE. 1976. V. 64. No.3. P. 301–318.

[376] **Van Bladel, J. G.** *Low-frequency asymptotic techniques.* — In: Modern topics in electromagnetics and antennas (R. Mittra, ed.). Peter Peregrinus, Ltd., Stevenage, United Kingdom. 1977 . Pp. 1.1–1.54.

[377] **Van Bladel, J.** *The multipole expansion revisited* // Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik (AEÜ) 1977. B. 31. H. 10. S. 407–411.

[378] **Van Bladel, J. G.** Electromagnetic fields. 2nd edition. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2007. XIV+1176 pgs.

[379] **van de Hulst, H. C.** *On the attenuation of plane waves by obstacles of arbitrary size and form* // Physica. 1949. V. 15. No. 8-9. Pp. 740–746.

[380] **van de Hulst, H. C.** Multipole light scattering. New York: Academic Press, 1980. 739 pgs.

[381] **van de Hulst, H. C.** Light Scattering by Small Particles. New York: Dover Publications, Inc., 1981. 478 pgs. (Русск. пер.: **ван де Хюлст Г.** Рассеяние света малыми частицами. М.: ИЛ, 1961. 536 с.)

[382] **Vandervoort, P. O.** *Modes of oscillation of a uniformly rotating, homogeneous spheroid of stars* // Astrophys. J. 1991. Part 1. V. 377. No. 1. Pp. 49–71.

[383] **van Wijngaarden, L. and Veldhuis, Ch.** *On hydrodynamical properties of ellipsoidal bubbles* // Acta Mechanica 2008. V. 201. No. 1–4. P. 37.

[384] **Varadan, V. K. and Varadan, V. V. (Eds.).** Acoustic, Electromagnetic and Elastic Wave Scattering. Vol. 2. Low and High Frequency Asymptotics. Amsterdam: North Holland, 1986. 520 pgs.

[385] **Vdovenkov, V. A.** *Adiabatic and nonadiabatic electronics of materials* // arXiv:cond-mat/0610828v1 [cond-mat. mtrl-sci] 2006. 18 pgs.

[386] **Vedmedenko, E. Y. and Mikuszeit, N.** *Multipolar Ordering in Electro- and Magnetostatic Coupled Nanosystems* // ChemPhysChem. 2008. V. 9. No. 9. Pp. 1222–1240.

[387] **Volkmer, H.** *Generalized ellipsoidal and sphero-conal harmonics* // SIGMA. 2006. V. 2. Pp. 71–86.

[388] **Waldron, R. A.** *Electromagnetic fields in ferrite ellipsoids* // Br. J. Appl. Phys. 1959. V. 10. No. 1. P. 20.

[389] **Walker, L. R.** *Magnetostatic Modes in Ferromagnetic Resonance* // Phys. Rev. 1957. V. 105. No. 2. P. 390–399. (Русск. пер.: **Уокер Л.** *Магнитостатические типы прецессии при ферромагнитном резонансе* - В кн.: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. М.: Изд-во иностр. лит. 1961. С. 470–476.)

[390] **Walpole, L. J.** *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion in an anisotropic medium* // Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. 1977. V. 81. No. 2. Pp. 283–289.

[391] **Walpole, L. J.** *A rotated rigid ellipsoidal inclusion in an elastic medium* // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1991. V. 81. No. 1887. Pp. 179–207.

[392] **Wang Gia-zhan, Bi Pin-zhen and Yin Pong-cheng** *Prolate ellipsoidal bag model for heavy quarkonium* // Phys. Letters B. 1981. V. 107. No. 5. Pp. 381–384.

[393] **Wang, J., Michelitsch, T. M., Gao, H., and Levin, V. M.** *On the solution of the dynamic Eshelby problem for inclusions of various shapes* // Int. J. Solid. Struct. 2005. V. 42. Pp. 353–363.

[394] **Wang, W. X.** *The potential for a homogeneous spheroid in a spheroidal coordinate system. I. At an exterior point* // J. Phys. A: Math. Gen. 1988. V. 21. No. 22. Pp. 4245–4250.

[395] **Wang, W. X.** *The potential for a homogeneous spheroid in a spheroidal coordinate system. II. At an interior point* // J. Phys. A: Math. Gen. 1989. V. 22. No. 9. P. 1459.

[396] **Webster, A. G.** The Dynamics of Particles and of Rigid Elastic and Fluid Bodies: Being Lectures on Mathematical Physics. 2nd ed. New York: Dover, 1959. (Русск. пер.: **Вебстер А. Г.** Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел (лекции по математической физике). М.–Л.: Гостехиздат, 1933. 635 с.)

[397] **Werner, P.** *On the behavior of stationary electromagnetic wave fields for small frequencies* // J. Math. Anal. Appl. 1966. V. 15. No. 3. Pp. 447–496.

[398] **Weston, D. E.** *Sound propagation in the presence of bladder fish* — In: Underwater acoustics. N. Y.: Plenum Press, 1963. V. 2. Pp. 55–88.

[399] **Withers, P. J.** *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion in a transversely isotropic medium, and its relevance to composite materials* // Phil. Mag. A. 1989. V. 59. No. 4. Pp. 759–781.

[400] **Whittaker, E.** A History of the Theories of Aether and Electricity. The Classical Theories. London: Thomas Nelson and Sons Ltd, 1951. XIV+434 pgs. (Русск. пер.: **Уиттекер Э.** История теории эфира и электричества. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2001. 512 с.)

[401] **Whittaker, E. T., Watson, G. N.** A course of modern analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1927. 4th ed. 608 pgs. (Русск. пер.: **Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.** Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 2. 516 с.)

[402] **Willatzena, M.** *Eigenmodes of triaxial ellipsoidal acoustical cavities with mixed boundary conditions* // J. Acoust. Soc. Am. 2004. V. 116. No. 6. Pp. 3279–3283.

[403] **Williams, W. E.** *Scattering through apertures in screens* // J. Sound and Vibrat. 1970. V. 13. Pp. 37–42.

[404] **Williams, W. E.** *Some results for low-frequency Dirichlet scattering by arbitrary obstacles and their application to the particular case or the ellipsoid* // IMA J. Appl. Math. 1971. V. 7. No. 2. Pp. 111–118.

[405] **Wunsche A.** *Eine anschauliche graphishe Darstellung der Entpolarisierungfaktoren* // Exptl. Techn. Phys. 1973. B. 21. N. 5. S. 461.

[406] **Xue, Ch., Deng, Sh.** *Three-layer dielectric models for generalized Coulomb potential calculation in ellipsoidal geometry* // Phys. Rev. E. 2011. V. 83. No. 5. P. 056709.

[407] **Ye, Z.** *Resonant scattering of acoustic waves by ellipsoid air bubbles in liquids* // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V. 101. No. 2. Pp. 681–685. [Erratum: **Ye, Z.** J. Acoust. Soc. Am. **102**, 1249 (1997)].

[408] **Ye, Z.** *Recent Developments in Underwater Acoustics: Acoustic Scattering from Single and Multiple Bodies* // Proc. Natl. Sci. Counc. ROC(A). 2001. V. 25. No. 3. Pp. 137–150.

[409] **Zhuck, N. P., Omar, A. S.** *Low-frequency interaction of EM waves with an anisotropic ellipsoid in an anisotropic medium* // Antennas and Propagat. Soc. Intern. Symposium, 1997. IEEE. 1997 Digest. V. 3. Pp. 2092–2094.

[410] **Zhuck, N. P., Omar, A. S.** *Radiation and low-frequency scattering of EM waves in a general anisotropic homogeneous medium* // IEEE Trans. Antennas Propagat., 1999. V. AP-47. No. 8. Pp. 1364–1373.

[411] **Zou, W.-N., Zheng, Q.-S.** *Maxwell's multipole representation of traceless symmetric tensors and its application to functions of high-order tensors* // Proc. R. Soc. Lond. A. 2003. V. 459. Pp. 527–538.

[412] **Абрамян М. Г.** *Анизотропные и неоднородные S-эллипсоиды Римана внутри сфероидального гало* // Астрофизика. 2005. Т. 48. № 4. С. 613–632. [**Abrahamyan, M. G.** *Anisotropic Inhomogeneous Riemann S-Ellipsoids in Spheroidal Halos.* // Astrophysics. **48** (4), 514–531, 2005].

[413] **Агре М. Я.** *Мультипольные разложения в магнитостатике* // УФН. 2011. Т. 181. № 2. С. 173–186. [**Agre, M. Ya.** *Multipole expansions in magnetostatics.* // Phys. Usp. **54** (2), 167–180, 2011].

[414] **Амбарцумян В. А., Мустель Э. Р., Северный А. Б., Соболев В. В.** Теоретическая астрофизика. М.: Гостехиздат, 1952.

[415] **Андрианов С. Н.** Динамическое моделирование систем управления пучками частиц. СПб: Изд-во СПбГУ. 2004. 368 с.

[416] **Андрианов С. Н., Дымников А. Д., Осетинский Г. М.** Влияние объемного заряда при различных эмиттансах параксиального пучка на размеры кроссовера в протонном квадрупольном микрозонде. Препринт 9-85-848. Дубна: ОИЯИ, 1985. 7 с.

[417] **Апресян, Л. А., Власов Д. В.** *О факторах деполяризации анизотропных эллипсоидов в анизотропной среде* // ЖТФ. 2014. Т. 84. № 12. С. 23–28.

[418] **Арнольд В. И.** *Магнитные аналоги теорем Ньютона и Айвори* // УМН. 1983. Т. 38. № 5. С. 145–146.

[419] **Барминова Е. Е., Чихачев А. С.** // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, №. 9, С. 1041–1049. [**Barminova, E. E. and Chikhachev, A. S.** *Three-dimensional problem of emittance transformation of charged-particle bunches in nonuniform magnetic field.* // Radiophysics and Quantum Electronics, **34** (4), 818–823, 1991].

[420] **Барьяхтар В. Г., Каганов М. И.** *Однородный и неоднородный резонансы в плазме* // ЖТФ. 1962. Т. 32. С. 554. [Sov. Phys. – Tech. Phys., **7**, 404 (1962)].

[421] **Белоозеров В. Н., Муратов Р. З.** *Таблицы факторов размагничивания эллипсоида* // Радиотехника и электроника. 1972. № 17. С. 902. (Депонировано).

[422] **Березин Ю. А.** *О собственных колебаниях плазменного эллипсоида в постоянном магнитном поле* // ЖТФ. 1963. Т. 33. С. 788 [Sov. Phys. – Tech. Phys., **8**, 594 (1964)].

[423] **Богомолов Н. М.** Распространение волн в слоистой среде с объемными возмущениями. Кандидатская диссертация. Харьков: ХГУ им. А. М. Горького. 1984. 210 с.

[424] **Борисов А. В., Мамаев И. С. (ред.)** Динамика жидких и газовых эллипсоидов. М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Институт компьютерных исследований, 2010. 364 с.

[425] **Броунов П. И.** Атмосферная оптика. М.: Гостехиздат, 1924.

[426] **Буданов Ю. А.** Самосогласованные распределения фазовой плотности и физические модели пучков в линейных ускорителях ионов. Докторская диссертация. Протвино: Ин-т физики высоких энергий. 2003. 156 с.

[427] **Вайнштейн А. Д., Шапиро Б. З.** *Многомерные аналоги теорем Ньютона и Айвори* // Функц. анализ и его прил. 1985. Т. 19. № 1. С. 20–24. [**Vainshtein, A. D. and Shapiro, B. Z.** *Higher-dimensional analogs of the theorems of Newton and Ivory.* // Functional Analysis and Its Applications. **19**(1), 17–20, 1985].

[428] **Вайнштейн Л. А.** Электромагнитные волны. М.: «Советское радио», 1957. 581 с.

[429] **Вайнштейн Л. А., Петрусевич Ю. М., Прозорова Л. А.** *Диафрагмы для волны H_{01} в круглом волноводе* – В кн.: Электроника больших мощностей. М.: Изд-во АН СССР, 1963. Сб. 2. С. 98–108.

[430] **Векслер В. И. и др. (ФИАН), Левин М. Л., Муратов Р. З. (РТИ)** *Радиационное ускорение плазмы* — В кн.: Тр. Международн. конференции по ускорителям. М.: Атомиздат, 1964. С. 1017–1022.

[431] **Венгер Є. Ф., Гончаренко А. В., Дмитрук М. Л.** Оптика малих частинок і дисперсних середовищ. Київ: Наукова думка, 1999. 348 с.

[432] **Вендик О. Г., Медведева Н. Ю., Зубко С. П.** *Нелинейные свойства среды с эллипсоидальными сегнетоэлектрическими нановключениями* // Физика твердого тела. 2009. Т. 51. № 7. С. 1405–1406.

[433] **Веселаго В. Г.** *Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ* // УФН. 1967. Т. 92. № 3. С. 517–526. [**Veselago, V. G.** *The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε and μ.* // Sov. Phys. Usp. **10**(4), 509–514, 1968].

[434] **Веселаго В. Г.** *Электродинамика материалов с отрицательным коэффициентом преломления* // УФН. 2003. Т. 173. № 7. С. 790–794. [**Veselago, V. G.** *Electrodynamics of materials with negative index of refraction.* // Phys. Usp. **46**(7), 764–768, 2003].

[435] **Виноградов А. Г., Муратов Р. З.** *Интегральные уравнения акустики неоднородной идеальной жидкости* // ДАН СССР. 1976. Т. 226. № 2. С. 301–304. [**Vinogradov, A. G. and Muratov, R. Z.** *Integral equations for inhomogeneous field acoustics.* // Sov. Phys. Dokl. **21**(1), 29–31, 1976].

[436] **Виноградов А. Г., Муратов Р. З.** *Низкочастотное рассеяние плоской волны на эллипсоиде, отличающемся от среды только сжимаемостью* // Акуст. Журн. 1978. Т. 24. № 3. С. 415–417. [**Vinogradov, A. G. and Muratov, R. Z.** *Low-frequency scattering of a plane wave by an ellipsoid differing from the surrounding medium in compressibility only.* // Sov. Phys. Acoust. **24**(3), 230–231, 1978].

[437] **Виноградов А. П.** Электродинамика композитных материалов. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 176 с.

[438] **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: «Наука», 1971. 512 с.

[439] **Власов А. Д.** Теория линейных ускорителей. М.: Атомиздат, 1965. 308 с.

[440] **Власов А. Д.** *Самосогласованные сгустки колеблющихся тяжелых частиц в ускорителе* // ПМТФ. 1970. № 4. С. 140–143. [**Vlasov, A. D.** *Self-consistent bunches of oscillating heavy particles in an accelerator* // J. Appl. Mech. Tech. Phyz.. **11**(4), 649–652, 1970]

[441] **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.

[442] **Гильденбург В. Б., Жидко Ю. М., Кондратьев И. Г. Миллер М. А.** *Некоторые вопросы дифракции электромагнитых волн на плазменных образованиях* // Изв. высш. уч. зав-ий. Сер. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 9–10, С. 1358–1375.

[443] **Гильденбург В. Б., Кондратьев И. Г.** *О резонансном взаимодействии электромагнитного поля с высшими мультипольными моментами плазменного сгустка* // ЖТФ. 1963. Т. 33. № 3. С. 301–306. [Sov. Phys.–Tech. Phys., **8**, 221 (1963)].

[444] **Гордион И. М., Токман И. Д.** *Задача электростатики для сжатого сфероида в поле точечного заряда* // ЖТФ. 1997. Т. 67. № 2. С. 121–122. [**Gordion, I. M., Tokman, I. D.** *Electrostatics problem for an oblate spheroid in the field of a point charge.* // Tech. Phys. **42**, 230 (1997)].

[445] **Горькавый Н. Н., Фридман А. М.** Физика планетных колец: Небесная механика сплошной среды. М.: Наука, 1994.

[446] **Горюнов А. Ф.** Уравнения математической физики в примерах и задачах. Ч. 2.: Учебное пособие. М.: МИФИ, 2008. 528 с.

[447] **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

[448] **Григорьев А. И., Ширяева С. О., Григорьева И. Д., Лазарянц А. Э., Мухина Е. И.** *О возможности деления шаровой молнии на две* //ЖТФ. 1991. Вып. 4. С. 25–31.

[449] **Григорьев В. Л., Кестельман В. Н., Королев Е. Е., Шишов В. В.**//Тр. МЭИ. 1983. №. 615/I. С. 128–162.

[450] **Гринберг Г. А.** Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 728 с.

[451] **Гринберг Г. А., Пименов Ю. В.** *К вопросу о диффракции электромагнитных волн на бесконечно тонких идеально проводящих экранах* // ЖТФ. 1957. Т. 27. № 10. С. 2326–2339.

[452] **Гюнтер Н. М.** Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: ГИТТЛ, 1953. 416 с.

[453] **Дивильковский М. А.** *Задача о шаре, помещенном в однородное переменное магнитное или электрическое поле* // ЖТФ. 1939. Т. 9. № 5. С. 433–443.

[454] **Дубовик В. М., Тосунян Л. А.** *Тороидные моменты в физике электромагнитных и слабых взаимодействий* // ЭЧАЯ. 1983. Т. 14. В. 5. С. 1193–1228.

[455] **Дубовик В. М., Чешков А. А.** *Мультипольное разложение в классической и в квантовой теории поля и излучение* // ЭЧАЯ. 1974. Т. 5. В. 3. С. 791–837.

[456] **Дубошин Г. Н.** Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: «Наука», 1968. 799 с.

[457] **Егорычев Г. П., Коганов Л. М.** *О некоторых комбинаторных тождествах. II* – В сб.: Комбинаторный и асимптотический анализ. Красноярск: Изд-во Красноярского госуниверситета, 1977. Вып. 2. С. 128–131.

[458] **Ефимов С. П.** *Оператор перехода между мультипольными состояниями и их тензорная структура* // ТМФ. 1979. Т. 39. № 2. С. 219–233. [**Efimov, S. P.** *Transition operator between multipole states and their tensor structure* // Theoret. Math. Phyz.. **39**(2), 425–434, 1979].

[459] **Ефимов С. П., Муратов Р. З.** *Интерференционные теоремы теории рассеяния в векторных задачах низкочастотной дифракции* // ДАН СССР. 1978. Т. 241. № 6. С. 1315–1318. [**Efimov, S. P. and Muratov, R. Z.** *Interference theorems of scattering theory in vector problems of low-frequency diffraction.* // Sov. Phys. Dokl. **23**(8), 558–560, 1978].

[460] **Ефимов С. П., Муратов Р. З.** О мультипольном представлении внешних потенциалов эллипсоидального простого слоя. Препринт РИАН СССР. № 8811. М.: РИАН СССР, 1988. 42 с.

[461] **Ефимов С. П., Муратов Р. З.** *Теория мультипольного представления потенциалов эллипсоида. Тензор-потенциалы* // Астрон. журн., 1990, Т. 67. Вып. 2. С. 302–313. [**Efimov, S. P. and Muratov, R. Z.** *Theory of Multipole Representation of the Potentials of an Ellipsoid. Tensor Potentials.* // Sov. Astron. **34**(2), 152–157, 1990].

[462] **Ефимов С. П., Муратов Р. З.** *Теория мультипольного представления потенциалов эллипсоида. Моменты* // Астрон. журн. 1990. Т. 67. Вып. 2. С. 314–325. [**Efimov, S. P. and Muratov, R. Z.** *Theory of Multipole Representation of the Potentials of an Ellipsoid. Moments.* // Sov. Astron. **34**(2), 157–162, 1990].

[463] **Желобенко Д. П.** Компактные группы Ли и их представления. М.: «Наука», 1970. 664 с.

[464] **Жуковский Н. Е.** Теоретическая механика. М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. 812 с.

[465] **Заборовский А. И.** Специальные функции для геофизиков-разведчиков. М.; Л.: ГОНТИ, 1939. 204 с.

[466] **Зельдович Я. Б.** *Электромагнитное взаимодействие при нарушении четности* // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 1531. [**Zel'dovich, Ya. B.** // Sov. Phys. JETP. **6**, 1184. 1958].

[467] **Зуев В. Е., Кабанов М. В.** Оптика атмосферного аэрозоля. Л.: Гидрометеоиздат, 1987. 254 с.

[468] **Иваницкий Г. Р., Деев А. А.** *«Зачем твой дивный карандаш рисует мой арапский профиль?»* // УФН. 1999. Т. 169. № 5. С. 529–544. [**Ivanitskii, G. R., Deev, A. A.** *"For what does thine sanguine divine produce my African profile?"* // Phys. Usp. **42**(5), 453–468, 1999].

[469] **Ивлев Л. С., Андреев С. Д.** Оптические свойства атмосферных аэрозолей. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. 360 с.

[470] **Исакович М. А.** Общая акустика. М.: «Наука», 1973. 495 с.

[471] **Кадомцев Б. Б., Кадомцев М. Б.** *Конденсаты Бозе-Эйнштейна* // УФН. 1997. Т. 167. № 6. С. 649–664. [**Kadomtsev, B. B., Kadomtsev, M. B.** *Bose-Einstein condensates* // Phys. Usp. **40**(6), 623–637, 1997].

[472] **Капчинский И. М.** Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. М.: Атомиздат, 1966. 310 с.

[473] **Карловец Д. В.** *О дуальном представлении в классической электродинамике* // УФН. 2010. Т. 180. № 8. С. 851–858. [**Karlovets, D. V.** *On dual representation in classical electrodynamics.* // Phys. Usp. **53** (8), 817–824, 2010].

[474] **Кирилюк В. С.** Пространственные задачи теории упругости для тороидальных и эллипсоидальных областей. Кандидатская диссертация. Киев. 1984. 180 с.

[475] **Козлов В. В.** *Теоремы Ньютона и Айвори о притяжении в пространствах постоянной кривизны* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2000. № 5. С. 43–47.

[476] **Комаров И. В., Пономарев Л. И., Славянов С. Ю.** Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: «Наука», 1976. 320 с.

[477] **Кондратьев Б. П.** Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур. М.: «Наука», 1989. 270 с.

[478] **Кондратьев К. Я., Москаленко Н. И., Поздняков Д. В.** Атмосферный аэрозоль. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 224 с.

[479] **Кравцов О. В.** *Гравитирующие конфигурации с магнитным полем. 1. Задача Дирихле* // Астрофизика. 1986. Т. 24. С. 603.

[480] **Кринчик Г. С.** Физика магнитных явлений. М.: Изд-во МГУ, 1985. 336 с.

[481] **Куликов Э. Л., Левина Н. Н.** *К вариационным методам расчета краевых задач электродинамики, сводящихся к статическим* // Радиотехника и электроника 1972. Т. 17. № 9. С. 1944.

[482] **Кутвицкий В. А., Соловьев Л. С.** *О равновесии и устойчивости эллипсоидальных плазмоидов* // Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 59. № 8. С. 501–506. [**Kutvitskiĭ, V. A. and Solov'ev, L. S.** *Equilibrium and stability of ellipsoidal plasmoids.* // JETP Lett. **59**(8), 527–533, 1994].

[483] **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория поля. М.: «Наука», 1988. 512 с.

[484] **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Электродинамика сплошных сред. М.: «Наука», 1992. 662 с.

[485] **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория упругости. М.: «Наука», 1987. 246 с.

[486] **Левин М. Л.** *Щелевая антенна с направляющим устройством* // ЖТФ. 1951. Т. 21. № 7. С. 795.

[487] **Левин М. Л., Муратов Р. З.** *О магнитной поляризуемости эллипсоида* // ЖТФ. 1968. Т. 38. Вып. 10. С. 1623–1629. [**Levin, M. L. and Muratov, R. Z.** *Magnetic permeability of an ellipsoid.* // Sov. Phys. Tech. Phys. **13**(10), 1318–1322, 1969].

[488] **Левин М. Л., Муратов Р. З.** *О собственных квазистатических колебаниях плазменных сгустков* // ЖТФ. 1968. Т. 38. Вып. 11. С. 1999–2001. [**Levin, M. L. and Muratov, R. Z.** *Characteristic electrostatic oscillators of a plasmoid.*// Sov. Phys. Tech. Phys. **13**(11), 1606–1608, 1969].

[489] **Левин М. Л., Муратов Р. З.** *О межмультипольном вырождении собственных частот плазменного сгустка и его влиянии на резонансную силу радиационного давления* // ЖТФ. 1969. Т. 39. Вып. 9. С. 1712–1714. [**Levin, M. L. and Muratov, R. Z.** *Multipole degeneracy of the eigenfrequencies of a plasmoid and its effect on resonant radiation-pressure.*// Sov. Phys. Tech. Phys. **14**(9), 1285–1287, 1970].

[490] **Левин М. Л., Муратов Р. З.** *Об электрических мультипольных моментах плазменного сфероида* // ДАН СССР. 1972. Т. 203. № 3. С. 547–549. [**Levin, M. L. and Muratov, R. Z.** *Electric Multiple Moments of a Plasma Spheroid.*// Sov. Phys. Doklady, **17**, p. 208, 1972].

[491] **Левин М. Л., Муратов Р. З.** *О потенциалах неоднородного эллипсоида* // Тр. радиотехн. ин-та (Физика плазмы). 1972. № 8. С. 49–58.

[492] **Левин М. Л., Муратов Р. З.** *О потенциальных факторах неоднородного эллипсоида* // ЖТФ. 1974. Т. 44. Вып. 2. С. 263–266. [**Levin, M. L. and Muratov, R. Z.** *Potential factors for an inhomogeneous ellipsoid.*// Sov. Phys. Tech. Phys. **19**(2), 169–170, 1974].

[493] **Левин М. Л., Муратов Р. З.** *О некоторых суммах, возникающих в теории потенциала.* // Тр. радиотехн. ин-та (Теория ускорителей). 1974. № 19. С. 69–73.

[494] **Левин М. Л., Муратов Р. З.** *Диэлектрический эллипсоид в неоднородном статическом поле* // ЖТФ. 1977. Т. 47. Вып. 12. С. 2464–2471. [**Levin, M. L. and Muratov, R. Z.** *Dielectric ellipsoid in an inhomogeneous static field.*// Sov. Phys. Tech. Phys. **22**(12), 1430–1434, 1977].

[495] **Левин М. Л., Муратов Р. З.** *Дифракция волноводных полей на малых дисках и отверстиях, расположенных в «узловых» областях поля*// ЖТФ. 1978. Т. 48. Вып. 8. С. 1545–1552. [**Levin, M. L. and Muratov, R. Z.** *Diffraction of waveguide fields by small disks and holes situated in the 'nodal' regions of the field.*// Sov. Phys. Tech. Phys. **23**(8), 877–881, 1978].

[496] **Левин М. Л., Муратов Р. З.** *Проводящий эллипсоид в низкочастотном электромагнитном поле* // Изв. высш. уч. зав-ий. Сер. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 6. С. 740–749. [**Levin, M. L. and Muratov, R. Z.** *A conducting ellipsoid in a low-frequency electromagnetic field.*// Radiophysics and Quantum Electronics, **22**(6), 512–519, 1979].

[497] **Левин М. Л., Муратов Р. З.** *О потенциалах эллиптического диска*// ЖТФ. 1980. Т. 50. Вып. 9. С. 1809–1814. [**Levin, M. L. and Muratov, R. Z.** *Potentials produced by charge on an elliptic disk.*// Sov. Phys. Tech. Phys. **25**(9), 1055–1057, 1980].

[498] **Левин М. Л., Муратов Р. З.** *О резонансном возбуждении квазистатических мультипольных колебаний плазменного эллипсоида* // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. Вып. 1(7). С. 53–65. [**Levin, M. L. and Muratov, R. Z.** *Resonant excitation of quasistatic multipole oscillations of a plasma ellipsoid.* // Sov. Phys. JETP **62**(1), 30–36, 1985].

[499] **Левин М. Л., Муратов Р. З.** *Матрица присоединенных масс и колебания газового эллипсоида в жидкости* // Акуст. Журн. 1985. Т. 31. № 6. С. 756–761. [**Levin, M. L. and Muratov, R. Z.** *Matrix of virtual masses and vibrations of a gas ellipsoid in a liquid.* // Sov. Phys. Acoust. **31**(6), 460–463, 1985].

[500] **Левин М. Л., Рытов С. М.** Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. М.: «Наука», 1967. 308 с.

[501] **Леонтович М. А., Левин М. Л.** *К теории возбуждения колебаний в вибраторах антенн* // ЖТФ. 1944. Т. 14. № 9. С. 481.

[502] **Леонтович М. А., Левин М. Л.** *О возбуждении вибраторов в антеннах* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1944. Т. 8. № 3. С. 156.

[503] **Линьков Р. В.** Динамика проводящего твердого тела в магнитном поле. Кандидатская диссертация. Горький: ГГУ. 1984. 195 с.

[504] **Лукьянчук Б. С., Трибельский М. И., Терновский В. В.** *Рассеяние света на наночастицах вблизи частот плазменных резонансов* // Опт. журн. 2006. Т. 73. № 6. С. 7–14.

[505] **Лурье А. И.** *Эластостатическая задача Робена для трехосного эллипсоида* // Механика твердого тела 1967. Т. 1. С. 80–83.

[506] **Лысенко О. Е., Хижняк Н. А.** *Рассеяние электромагнитных волн на малом диэлектрическом эллипсоиде произвольной анизотропии с точностью до величин* $(a/\lambda)^2$ *включительно* // Изв. высш. уч. зав-ий. Сер. Радиофизика. 1968. Т. 11. № 4. С. 559–565.

[507] **Ляпунов А. М.** Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР, 1959. Т. 3. 376 с.

[508] **Ляпунов А. М.** Лекции по теоретической механике. Киев: «Наукова думка», 1982. 632 с.

[509] **Мандельштам Л. И.** *Излучение через отверстие в резонаторе* // ЖЭТФ. 1945. Т. 15. С. 471–474.

[510] **Мартыненко Ю. Г.** Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: «Наука», 1988. 368 с.

[511] **Медведев Б. В.** Начала теоретической физики. М.: «Наука», 1977. 496 с.

[512] **Мещеряков Г. А.** Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. М.: «Наука», 1991. 216 с.

[513] **Миллер М. А.** *Зарядовая и токовая электростатика. Нестационарные источники статических полей.*// УФН. 1984. Т. 142. № 1. С. 147–158. [**Miller M. A.** *Charge and current electrostatics. Nonstationary sources of static fields.* // Sov. Phys. Usp. **27**, 69–75, 1984].

[514] **Мищенко М. И.** Электромагнитное рассеяние в случайных дисперсных средах: фундаментальная теория и приложения. Докторская диссертация. Киев—Нью-Йорк. 2007. 317 с.

[515] **Муратов Р. З.** *О магнитной поляризуемости анизотропных тел*// Изв. высш. уч. эав-ий. Сер. Радиофизика. 1969. Т. 12. № 4. С. 579–587. [**Muratov, R. Z.** *Magnetic polarizability of anisotropic bodies.* // Radiophysics and Quantum Electronics, **12**(4), 458–465, 1969].

[516] **Муратов Р. З.** К расчету полей мультипольного типа внутри эллипсоида. Отчет № 1106. М.: Радиотехн. ин-т АН СССР. 1970. 21 с.

[517] **Муратов Р. З.** *Феррерсовские потенциалы эллипсоида и эллиптического цилиндра*// Тр. радиотехн. ин-та (Теория и техника ускорителей). 1972. № 11. С. 212–218.

[518] **Муратов Р. З.** Потенциалы эллипсоида. М.: Атомиздат, 1976. 144 с.

[519] **Муратов Р. З.** *О низкочастотном рассеянии плоской электромагнитной волны на идеально проводящем эллиптическом диске* // Изв. высш. уч. зав-ий. Сер. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 4. С. 470–472.

[520] **Муратов Р. З.** Аналитическая теория низкочастотной дифракции на эллипсоидальных телах (*метод квазистатических потенциалов*). Докторская диссертация. М. 1981. 325 с.

[521] **Муратов Р. З.** *Двухслойный диэлектрический эллипсоид в статическом поле полиномиального потенциала* // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 11. С. 2097–2104. [**Muratov, R. Z.** *Two-layer dielectric ellipsoid in the static field of a polynomial potential.* // Sov. Phys. Tech. Phys. **32**(11), 1267–1271, 1987].

[522] **Муратов Р. З.** *О поле неоднородно заряженного неоднородного диэлектрического эллипсоида* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 8. С. 15–21. [**Muratov, R. Z.** *Field of a nonuniformly charged inhomogeneous dielectric ellipsoid.* // Sov. Phys. Tech. Phys. **36**(8), 855–858, 1991].

[523] **Муратов Р. З.** Об адекватных источниках внешнего электростатического потенциала эллипсоида. Препринт МРИАН СССР. № 9106. М.: МРИАН СССР, 1991. 26 с.

[524] **Муратов Р. З.** *Об адекватных источниках внешнего потенциала эллипсоида* // Астрон. журн. 1992. Т. 69. Вып. 3. С. 604–616. [**Muratov, R. Z.** *Equivalent Sources for the External Potential of an Ellipsoid.* // Sov. Astron. **36**(3), 306–312, 1992].

[525] **Муратов Р. З.** *О тензор-потенциалах эллипсоида и гомеоида* // Астрон. журн. 1993. Т. 70. Вып. 6. С. 1271–1280. [**Muratov, R. Z.** *Tensor potentials for an ellipsoid and homeoid.* // Astron. Rep. **37**(6), 641–646, 1993].

[526] **Муратов Р. З.** *В маленькой лаборатории* — В кн.: «Михаил Львович Левин (Жизнь, воспоминания, творчество)». Н. Новгород, 1995. ИПФ РАН. С. 251–261; Н. Новгород, 1998. ИПФ РАН. С. 288–297.

[527] **Муратов Р. З.** *К решению двух взаимосводящихся задач электростатики* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 4. С. 1–6. [**Muratov, R. Z.** *Solution of two mutually-reducible problems in electrostatics.* // Tech. Phys. **42**(4), 325–329, 1997].

[528] **Муратов Р. З.** *К решению задачи Я. И. Френкеля об адекватных стационарных токах в шаре* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 6–10. [**Muratov, R. Z.** *On the Frenkel problem of equivalent steady currents in a sphere.* // Tech. Phys. **47**(4), 380–384, 2002].

[529] **Муратов Р. З.** *О некоторых полезных соответствиях в классической магнитостатике и о мультипольных представлениях магнитного потенциала эллипсоида* // УФН. 2012. Т. 182. № 9. С. 987–997. [**Muratov, R. Z.** *Some useful correspondences in classical magnetostatics, and the multipole representations of the magnetic potential of an ellipsoid.* // Phys. Usp. **55**(9), 919–928, 2012].

[530] **Муратов Р. З., Виноградов А. Г.** *Скалярная задача дифракции на эллипсоиде (низкочастотное приближение)* // Изв. высш. уч. зав-ий. Сер. Радиофизика. 1977. Т. 20. № 3. С. 422–434. [**Muratov, R. Z. and Vinogradov, A. G.** *Scalar problem of diffraction by an ellipsoid (low-frequency approximation).* // Radiophysics and Quantum Electronics, **20**(3), 287–296, 1977].

[531] **Муратов Р. З., Ефимов С. П.** *Низкочастотное рассеяние плоской волны на акустически мягком эллипсоиде* // Изв. высш. уч. зав-ий. Сер. Радиофизика. 1978. Т. 21. № 2. С. 224–233. [**Muratov, R. Z. and Efimov, S. P.** *Low-frequency scattering of a plane wave by an acoustically soft ellipsoid.* // Radiophysics and Quantum Electronics, **21**(2), 153–160, 1978].

[532] **Муратов Р. З., Шкуратник В. Л.** *О простейших адекватных токах эллипсоидального тела* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 8. С. 1–6. [**Muratov, R. Z. and Shkuratnik, V. L.** *On the simplest equivalent currents of an ellipsoidal body.* // Tech. Phys. **50**(8), 961–966, 2005].

[533] **Новожилов Ю. В., Яппа Ю. А.** Электродинамика. М.: «Наука», 1978. 352 с.

[534] **Падалка В. В.** Взаимодействие коллоидных магнитных частиц с электрическим и магнитным полями. Докторская диссертация. Ставрополь: Ставропольский госуниверситет. 2004. 302 с.

[535] **Перельман А. Я., Шифрин К. С.** *Определение ориентации эллипсоидальных частиц методом спектральной прозрачности* // Оптика и спектроскопия. 1978. Т. 45. № 6. С. 1207–1210.

[536] **Перельштейн Э. А., Ширков Г. Д.** *Самосогласованная задача о движении заряженных эллипсоидальных сгустков частиц* // ЖТФ. 1978. Т. 48. № 2. С. 249–253.

[537] **Питаевский Л. П.** *Конденсация Бозе-Эйнштейна в магнитных ловушках. Введение в теорию* // УФН. 1998. Т. 168. № 6. С. 641–653. [**Pitaevskii, L. P.** *Bose-Einstein condensation in magnetic traps. Introduction to the theory.* // Phys. Usp. **41**(6), 569–580, 1998].

[538] **Подильчук Ю. Н.** *Напряженное состояние в окрестности эллипсоидальной полости при произвольных постоянных усилиях на бесконечности* // Докл. АН УССР. 1964. № 9. С. 1150–1154.

[539] **Поляченко В. Л., Фридман А. М.** Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: «Наука», 1976. 447 с.

[540] **Рамм А. Г.** *Оценки некоторых функционалов в электромагнитостатике и квазистатической электродинамике* // Укр. Физ. Журн. 1975. Т. 20. № 7. С. 1071–1080.

[541] **Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.** Введение в статистическую радиофизику. М.: «Наука», 1978. Ч. 2 (Случайные поля). 463 с.

[542] **Савченко А. О.** *Вычисление объемного потенциала для эллипсоидальных тел* // Сиб. журн. индустр. математ. 2012. Т. 15. № 1. С. 123–131.

[543] **Савченко А. О., Савченко О. Я.** *Обтекание эллипсоида гармоническим векторным полем* // ТМФ. 2012. Т. 170. № 3. С. 381–392.

[544] **Сивухин Д. В.** *Диффракция плоской звуковой волны на сферической полости* // Акуст. Журн. 1955. Т. 1. № 1. С. 78–88.

[545] **Сивухин Д. В.** Общий курс физики. Т. 3. Электричество. М.: «Наука», 1977. 688 с.

[546] **Синкевич О. Л., Тимошин А. Д., Шишов В. В.**// Письма в ЖТФ. 1981. Т. 7. Вып. 2. С. 77–79. [Sov. Tech. Phys. Lett. **7**, 32 (1981)].

[547] **Сретенский Л. Н.** *Теория фигур равновесия жидкой вращающейся массы* // УМН. 1938. Вып. 5. С. 187-230.

[548] **Сретенский Л. Н.** Теория ньютоновского потенциала. М.; Л.: ГИТТЛ, 1946. 318 с.

[549] **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости. М.: «Наука», 1977. 816 с.

[550] **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. М.: «Наука», 1989. 504 с.

[551] **Томчук П. М., Томчук Б. П.** *Оптическое поглощение малых металлических частиц* // ЖЭТФ. 1997. Т. 112. № 2. С. 661–678. [**Tomchuk, P. M.**, and **Tomchuk, B. P.** *Optical absorption by small metallic particles* // JETP, **85**(2), 360–369, 1997].

[552] **Урман Ю. М.** *Инвариантное представление потенциального взаимодействия твердого тела с неоднородным электромагнитным полем* // МТТ. 2005. Т. 40. № 1. С. 13–19. [**Urman, Yu. M.** *Invariant representation of the potential interaction between a rigid body with nonuniform electromagnetic field* // Mech. Solids, **40**(1), 8–13, 2005].

[553] **Фарафонов В. Г., Ильин В. Б., Прокопьева М. С.** *Рассеяние света однородными и многослойными эллипсоидами в квазистатическом приближении* // Оптика и спектроскопия. 2002. Т. 92. № 4. С. 621–630. [**Farafonov, V. G., Il'in, V. B., Prokop'eva, M. S.** *Light scattering by homogeneous and multilayer ellipsoids in the quasi-static approximation* // Optics & Spectroscopy, **92**(4), 567–576, 2002].

[554] **Федорюк М. В.** *Асимптотика радиальных волновых функций Ламе* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 5. С. 635–646.

[555] **Федорюк М. В.** *Волновое уравнение Ламе* // УМН. 1989. Т. 44. Вып. 1(265). С. 123–144.

[556] **Фихманас Р. Ф., Фридберг П. Ш.** *Двусторонние вариационные оценки для коэффициентов поляризуемости в теории дифракции на малых отверстиях* // ДАН СССР. 1969. Т. 189. № 5. С. 969–972.

[557] **Франк И. М.** *Излучение Вавилова–Черенкова для электрических и магнитных мультиполей* // УФН. 1984. Т. 144. Вып. 2. С. 251–275.

[558] **Фридберг П. Ш.** Дифракция электромагнитных волн на узких щелях и малых отверстиях. Докт. диссертация. Вильнюс: НИИРП. 1973.

[559] **Хижняк Н. А.** *Интегральные уравнения макроскопической электродинамики и условия погашения Озеена–Эвальда* // Учен. зап. Харьк. ун-та. Тр. радиофиз. ф-та. 1957. Т. 44. № 2. С. 5–12.

[560] **Хижняк Н. А.** *Применение интегральных уравнений электродинамики к решению диффракционных задач* // Учен. зап. Харьк. ун-та. Тр. радиофиз. ф-та. 1957. Т. 44. № 2. С. 13–22.

[561] **Хижняк Н. А.** *Функция Грина уравнений Максвелла для неоднородных сред* // ЖТФ. 1958. Т. 28. № 7. С. 1592–1609. [Sov. Phys. Tech. Phys. **3**, 1466 (1959)].

[562] **Хижняк Н. А.** Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: «Наукова думка», 1986. 280 с.

[563] **Хриплович И. Б.** *Открытие ядерного анапольного момента* // УФН. 1997. Т. 167. № 11. С. 1213–1214.

[564] **Цирулёв А. Н.** Математические модели самогравитирующих конфигураций быстровращающихся нейтронных звезд и полей Янга-Миллса. Докторская диссертация. Тверь: ТГУ. 2002. 209 с.

[565] **Цирулёв А. Н., Цветков В. П.** *Вращающиеся постньютоновские конфигурации однородной намагниченной жидкости, близкие к эллипсоидам. I* // Астрон. журн. 1982. Т. 59. Вып. 3. С. 476–482. [**Tsirulev, A. N. and Tsvetkov, V. P.** *Rotating, post-Newtonian, near-ellipsoidal configurations of a magnetized homogeneous fluid. I.* // Sov. Astron. **26**(3), 289–292, 1982].

[566] **Цирулёв А. Н., Цветков В. П.** *Вращающиеся постньютоновские конфигурации однородной намагниченной жидкости, близкие к эллипсоидам. II* // Астрон. журн. 1982. Т. 59. Вып. 4. С. 666–675. [**Tsirulev, A. N. and Tsvetkov, V. P.** *Rotating, post-Newtonian, near-ellipsoidal configurations of a magnetized homogeneous fluid. II.* // Sov. Astron. **26**(4), 407–411, 1982].

[567] **Четаев Н. Г.** Теоретическая механика. М.: «Наука», 1987. 368 с.

[568] **Чихачев А. С.** Кинетическая теория квазистационарных состояний пучков заряженных частиц. М.: Физматлит, 2001. 174 с.

[569] **Чихачев А. С.** *Заряженный эллипсоидальный сгусток в магнитном поле* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 2. С. 94–97. [**Chikhachev, A. S.** *A Charged Ellipsoidal Bunch in a Magnetic Field.* // Tech. Phys. **46**(2), 223, 2001].

[570] **Шифрин К. С.** Рассеяние света в мутной среде. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. 288 с.

[571] **Шулейкин В. В.** Физика моря. М.: ОНТИ, 1933. Т. 1.

[572] **Щукин С. И., Григорьев А. И.** *Устойчивость заряженной капли, имеющей форму трехосного эллипсоида* // ЖТФ. 1998. Т. 68. № 11. С. 48–51. [**Shchukin, S. I., Grigor'ev, A. I.** *Stability of a charged drop having the form of a triaxial ellipsoid* // Tech. Phys., **43**(11), 1314, 1998].

[573] **Яковлев В. Б.** Материальные и полевые характеристики текстурированных поликристаллов и композитов. Докторская диссертация. М.: Московский государственнный институт электронной техники. 1998. 310 с.

Предметный указатель

Научное издание

МУРАТОВ Родэс Зиннятович

МУЛЬТИПОЛИ И ПОЛЯ ЭЛЛИПСОИДА

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 27.05.15	Бумага офсетная	
Формат 70 × 100 1/16	Печать офсетная	Уч.-изд. л. 32,8
	Тираж 70 экз.	Заказ 4600

Национальный исследовательский
технологический университет «МИСиС»,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4

Издательский Дом МИСиС,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
Тел. (495) 638-45-22

Отпечатано в типографии Издательского Дома МИСиС,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
Тел. (499) 236-76-17, тел./факс (499) 236-76-35

ISBN 978-5-600-01057-4

9 785600 010574