Министерство образования Российской Федерации
Новосибирский государственный университет

Г.Г. Михайличенко

Полиметрические геометрии

Приложение
В.А. Кырова

Новосибирск
2001

ББК 181.15
М69
УДК 514.1 + 512.816

Г.Г. Михайличенко. Полиметрические геометрии. Издательство Новосибирского государственного университета, 2001.

Полиметрические геометрии, то есть геометрии с более чем одним расстоянием, естественно возникают в теории физических структур, в частности, при аксиоматическом обосновании термодинамики. В этой теории метрика пространства понимается в самом общем смысле как числовая функция пары точек, а по аксиоме феноменологической симметрии все взаимные расстояния для некоторого конечного числа точек функционально связаны. Точная математическая формулировка принципа феноменологической симметрии позволила установить ее связь с групповой симметрией и провести полную классификацию некоторых полиметрических геометрий. Книга адресована научным работникам, аспиратам и студентам старших курсов, специализирующимся по геометрии и теоретической физике (http://www.mixGG.narod.ru).

G.G.Mikhailichenko. Polimetric geometries. Novosibirsk State University Publising, 2001.

Polimetric geometries, i.e, geometries with more than one distance, emerge in a natural way in the theory of physical structures, in particular, in axiomatic basing of thermodynamics. In this theory space metric is understood, in the most general sence, to be a numarical function of a pair of points, and according to the axiom of fenomenological symmetry, all point-to-point distances for some finite number of points are functionally related. The exact mathematical formulation of the principle of the phenomenological symmetry made it possible to establish its connection with the group simmetry and to carry out a coplete classification of some polimetric geometries. The book is intended for members of staff of scientific body, post-graduate and undergraduate students specialazing in geometry and theoretical physics (http://www.mixGG.narod.ru).

Содержание

Отзыв о книге "Полиметрические геометрии"

Метрическая точка зрения на геометрию, возникшая в 19 веке в работах Гельмгольца и Пуанкаре, тесно связана с групповой концепцией геометрии Клейна. Принципиально важная теорема автора книги устанавливает эквивалентность обоих классических подходов к геометрии. Другой традиционной чертой геометрии всегда была симметричность расстояний (как в случае евклидовой, псевдоевклидовой и гиперболической геометрий) или антисимметричность (как в случае симплектической геометрии). Теория феноменологической симметрии Ю.И.Кулакова, создавшая достаточно общую концепцию расстояния, позволила автору доказать, что с точностью до естественной эквивалентности все метрические геометрии симметричны или антисимметричны.

Далее, с точки зрения теории Ю.И.Кулакова, метрические геометрии вообще составляют частный случай его "физических структур", охватывающих все "элементарные" законы физики. При этом Ю.И. Кулаков заметил, что в основании термодинамики лежат две метрики, к которым Г.Г.Михайличенко прибавил третью. Полученные таким образом три метрики позволяют дать геометрическую аксиоматику термодинамики, принципиально отличную (и, как я полагаю, более простую), чем известная аксиоматика Каратеодори.

Автор книги, Г.Г.Михайличенко, дал в свое время полную классификацию "однометрических" физических структур, представляющую выдающееся достижение исчерпывающей математической классификации. Полиметрический случай гораздо труднее, и пока имеются лишь первые результаты, составляющие основное содержание рассматриваемой книги: изучаются простейшие двуметрические и триметрические структуры. Одна из последних составляет логическую основу термодинамики.

Аспирант Г.Г.Михайличенко, В.А.Кыров, написал приложение об алгебрах Ли, связанных с трехмерными геометриями.

Книгу Г.Г.Михайличенко можно смело рекомендовать к изданию как по ее содержанию, так и по математическому мастерству.

Доктор физико-математических наук А.И. Фет.

Введение

Для иллюстрации феноменологической и групповой симметрий в геометрии, а также связи между ними, рассмотрим сначала однометрическую плоскость Евклида. В декартовой прямоугольной системе координат (x,y) квадрат расстояния $\rho(ij)$ между любыми точками i = (x(i), y(i)) и j = (x(j),y(j)) задается функцией

$$f(ij) = \rho^2(ij) = (x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2. \qquad (1)$$

Возьмем четыре точки i, j, k, l и запишем для них шесть значений метрической функции (1): $f(ij)$, $f(ik)$, $f(il)$, $f(jk)$, $f(jl)$, $f(kl)$. Хорошо известно, что шесть взаимных расстояний между любыми четырьмя точками евклидовой плоскости функционально связаны, обращая в нуль определитель Кэли-Менгера пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(ij) & f(ik) & f(il) \\ 1 & f(ij) & 0 & f(jk) & f(jl) \\ 1 & f(ik) & f(jk) & 0 & f(kl) \\ 1 & f(il) & f(jl) & f(kl) & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Геометрический смысл соотношения (2) состоит в том, что объем тетраэдра с вершинами, лежащими на плоскости, равен нулю. По терминологии Ю.И. Кулакова [1] соотношение (2), справедливое для любой четверки $<ijkl>$, выражает феноменологическую симметрию евклидовой плоскости.

По метрической функции (1) можно найти множество ее движений, то есть таких гладких и обратимых преобразований

$$x' = \lambda(x, y), \quad y' = \sigma(x, y) \qquad (3)$$

плоскости, относительно которых эта функция сохраняется. Действительно, если преобразование (3) является движением, то для функций λ и σ получается функциональное уравнение

$$(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2 = (x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2,$$

все решения которого могут быть найдены чисто аналитически:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda(x, y) = ax - \varepsilon by + c, \\ \sigma(x, y) = bx + \varepsilon ay + d\ , \end{array}\right\} \qquad (4)$$

где $a^2 + b^2 = 1$, $\varepsilon = \pm 1$.

Множество всех движений (3) с функциями (4) есть, очевидно, группа, выражающая групповую симметрию евклидовой плоскости. С другой стороны, трехпараметрическая группа преобразований (4) координатной плоскости (x, y) задает на ней по Ф. Клейну [2] евклидову геометрию.

Выясним теперь, имеется ли связь феноменологической и групповой симметрий для плоской геометрии с метрической функцией

$$f(ij) = f(x(i), y(i), x(j), y(j)), \tag{5}$$

обобщающей выражение (1). Жесткая фигура на плоскости при любом разумном определении понятия движения имеет три степени свободы. Возьмем фигуру из четырех точек i, j, k, l, каждая из которых задается двумя координатами, а вся фигура, соответственно, восемью. Шесть значений функции (5) для этой фигуры должны быть зависимы, так как, иначе, при ее движении число степеней свободы будет равно только двум: 8 - 6 = 2. Таким образом, для любой четверки $< ijkl >$ должна существовать функциональная связь

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl)) = 0, \tag{6}$$

выражающая феноменологическую симметрию плоской геометрии с метрической функцией (5).

Аналогичные простые соображения приводят к выводу о том, что если имеет место связь (6), то существует трехпараметрическая группа движений метрической функции (5):

$$\left.\begin{array}{r} x' = \lambda(x, y; a^1, a^2, a^3), \\ y' = \sigma(x, y; a^1, a^2, a^3)\ , \end{array}\right\} \tag{7}$$

относительно которой она является двухточечным инвариантом, удовлетворяя уравнению

$$f(x'(i), y'(i), x'(j), y'(j)) = f(x(i), y(i), x(j), y(j)). \tag{8}$$

Множество всех движений (7) определяет групповую симметрию плоской геометрии с метрической функцией (5).

Заметим, что приведенные выше соображения о связи феноменологической и групповой симметрий применимы не только в отношении плоскости Евклида, но и в отношении других плоских геометрий (плоскости Лобачевского, плоскости Минковского, симплектической плоскости, двумерной сферы и т.д.).

Г.Гельмгольц в его знаменитой работе "О фактах, лежащих в основании геометрии" [3] высказал предположение, что метрика n–мерного пространства не может быть произвольной если в нем твердое тело имеет $n(n+1)/2$ степеней свободы. Но в таком случае между всеми взаимными расстояниями для $n+2$ точек твердого тела должна существовать функциональная связь, так как при ее отсутствии число степеней свободы $(n+2)$-точечной жесткой фигуры с общим расположением точек, движение которой однозначно определяет движение всего твердого тела, уменьшится ровно на единицу. Поэтому естественно было предположить, что и феноменологическая симметрия n–мерного пространства невозможна при произвольной метрике. Для $n=1$ и $n=2$ это было показано в работах автора [4] и [5], а для $n=3$ – в работе В.Х.Лева [6]. Заметим еще, что задачу определения всех плоских ($n=2$) геометрий, в которых "положение фигуры задается тремя условиями", впервые четко сформулировал А.Пуанкаре в его известной работе "Об основных гипотезах геометрии" [7]. Классификация таких геометрий с невырожденной метрической функцией (5) будет проведена в §6 основной части.

Задание метрической функции определяет геометрию пространства. Действительно, по этой функции можно найти полную группу ее движений, относительно которой она является двухточечным инвариантом. Групповая же симметрия лежит в основе "Эрлангенской программы" Ф.Клейна [1], согласно которой геометрия есть теория инвариантов некоторой группы преобразований данного многообразия. Тем самым метрическое и групповое определения геометрии оказываются эквивалентными, что отмечено автором и G.P. Wene в работах [8] и [9] соответственно. С другой стороны, в геометрии обнаруживает себя так называемая феноменологическая симметрия, на которую впервые особое внимание обратил Ю.И.Кулаков [1], сделав ее основным принципом своей теории физических структур [10]. Сущность же феноменологической симметрии n–мерного пространства состоит в следующем: имеется функциональная связь между $(n+1)(n+2)/2$ взаимными расстояниями для любых $n+2$ точек.

Рассмотрим, далее, множество состояний некоторой термодинамической системы. Каждой паре состояний $< ij >$ сопоставим два числа

$f^1(ij)$ и $f^2(ij)$, равные двум количествам тепла $Q^{TS}(ij)$ и $Q^{ST}(ij)$, которые система отдает внешним телам при ее переходе из состояния i в состояние j по двум различным путям TS и ST, состоящим из равновесных изотермического ($T = const$) и адиабатического ($S = const$) процессов:

$$\left.\begin{array}{r} f^1(ij) = (x(i) - x(j))y(i), \\ f^2(ij) = (x(i) - x(j))y(j)\ , \end{array}\right\} \tag{9}$$

где $x = S$ — энтропия и $y = T$ — температура системы.

Двухкомпонентная числовая функция $f = (f^1, f^2)$ с выражениями (9) для ее компонент задает на плоскости (x, y) двуметрическую геометрию, которая, подобно евклидовой геометрии на плоскости с метрической функцией (1), наделена феноменологической и групповой симметриями.

Возьмем на плоскости три произвольные точки i, j, k. Тогда дополнительно к двум расстояниям (9) можно выписать еще четыре: $f^1(ik)$, $f^2(ik)$ и $f^1(jk)$, $f^2(jk)$ для пар точек $< ik >$ и $< jk >$. Из этих шести расстояний можно исключить все шесть координат $x(i)$, $y(i)$, $x(j)$, $y(j)$, $x(k)$, $y(k)$ трех точек i, j, k, в результате чего получаются две функциональные связи между ними, задаваемые двумя независимыми уравнениями:

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 0 & -f^2(ij) & -f^2(ik) \\ f^1(ij) & 0 & -f^2(jk) \\ f^1(ik) & f^1(jk) & 0 \end{vmatrix} = 0, \\ \\ \begin{vmatrix} f^1(ij) & f^1(jk) & -f^2(ik) \\ f^1(ik) & 0 & -f^2(ik) \\ f^1(ik) & -f^2(ij) & -f^2(jk) \end{vmatrix} = 0. \end{array} \tag{10}$$

Соотношения (10), справедливые для любой тройки $< ijk >$, выражают феноменологическую симметрию двуметрической геометрии задаваемой на плоскости (x, y) двухкомпонентной функцией (9). Плоскость термодинамических состояний (S, T) является одной из интерпретаций такой геометрии. Возможны и другие интерпретации.

Группа движений метрической функции (9) состоит из всех тех преобразований (3) плоскости (x, y), которые удовлетворяют следующим двум функциональным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda(i)-\lambda(j))\sigma(i)=(x(i)-x(j))y(i),\\(\lambda(i)-\lambda(j))\sigma(j)=(x(i)-x(j))y(j)\ ,\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

являющимся следствием инвариантности ее компонент. Решения этих уравнений легко находятся с помощью дифференцирования и последующего разделения переменных:

$$\lambda(x,y)=ax+b, \quad \sigma(x,y)=y/a, \tag{12}$$

где $a\neq 0$.

Множество всех преобразований (3) с решениями (12) является полной группой движений метрической функции (9), выражая групповую симметрию двуметрической геометрии, задаваемой на плоскости (x,y) этой функцией.

Легко установить, что феноменологическая симметрия любой двуметрической геометрии, задаваемой на плоскости некоторой двухкомпонентной функцией

$$f(ij)=f(x(i),y(i),x(j),y(j)), \tag{13}$$

где $f=(f^1,f^2)$, выражается соотношением

$$\Phi(f(ij),f(ik),f(jk))=0, \tag{14}$$

где $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2)$. Групповая же симметрия этой геометрии выражается полной группой движений функции (3):

$$x'=\lambda(x,y;a^1,a^2), \quad y'=\sigma(x,y;a^1,a^2),$$

зависящей от двух параметров (a^1,a^2), причем обе симметрии, как и в случае плоскости Евклида, рассмотренной выше, взаимно обуславливают друг друга.

Первые два параграфа основной части посвящены формулировкам достаточно общих и строгих определений феноменологической и групповой симметрий полиметрической геометрии, в рамках которых доказывается их эквивалентность. Эта эквивалентность дает возможность построить полную классификацию двуметрических геометрий на плоскости (§3) и триметрических геометрий в пространстве (§5). Предварительно для решения второй задачи в §4 были найдены все трехмерные алгебры Ли преобразований пространства. А поскольку при этом автоматически получались и трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости, оказалось возможным найти все феноменологически симметричные геометрии на ней с однокомпонентной метрической функцией (§6). Последние два параграфа основной части посвящены изложению некоторых естественных следствий идеи феноменологической симметрии. В §7 решено простейшее функциональное уравнение

$$\varphi(x, y) = \varphi(\varphi(x, z), \varphi(y, z)),$$

что позволило найти расстояние для однометрической феноменологически симметричной геометрии на прямой. А в §8 поставлен и в некотором смысле решен вопрос о симметрии расстояния в геометрии, если предположить, что расстояния $f(ij)$ и $f(ji)$ функционально зависимы, то есть

$$\Phi(f(ij), f(ji)) = 0.$$

Все результаты, изложенные в Основной Части настояшей монографии, опубликованы автором в центральных математических журналах (см. список литературы перед Приложением).

Приложение "Шестимерные алгебры Ли групп движений трехмерных феноменологически симметричных геометрий" написано моим аспирантом В.А.Кыровым. По известным каноническим выражениям для метрических функций $f(ij)$ этих геометрий он находит базисные инфинитезимальные операторы $X = \lambda(x, y, z)\partial_x + \sigma(x, y, z)\partial_y + \tau(x, y, z)\partial_z$ шестимерных алгебр Ли, рассматривая соответствующие дифференциальные уравнения инвариантности метрики $X(i)f(ij) + X(j)f(ij) = 0$ как функциональные уравнения на их коэффициенты λ, σ, τ.

Основная часть

Обычную однометрическую геометрию можно рассматривать как физическую структуру на одном множестве, наделенную одновременно феноменологической и групповой симметриями, связанными между собой, как зто было показано во Введении на примере плоскости Евклида. Геометрические физические структуры допускают всевозможные обобщения, если на метрическую функцию не налагать стандартных аксиом, считая ее просто некоторой числовой функцией пары точек, не обязательно даже однокомпонентной. Такие обобщения могут иметь содержательные физические интерпретации, что было проиллюстрировано во Введении примером плоскости состояний термодинамичекой системы, двуметрическая геометрия которой, подобно плоскости Евклида, наделена феноменологической и групповой симметриями. Таким образом, полиметрические геометрии, как естественное обобщение обычных однометрических, имеют право на точное определение и подробное исследование.

§1. Феноменологическая симметрия полиметрической геометрии

Пусть имеется множество $\mathfrak{M}$, являющееся sn-мерным многообразием, где s и n – натуральные числа, точки которого обозначим строчными латинскими буквами, а также функция $f : \mathfrak{S}_f \to R^s$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, сопоставляющая каждой паре $< ij > \in \mathfrak{S}_f$ некоторую совокупность s вещественных чисел $f(ij) = (f^1(ij), \dots, f^s(ij)) \in R^s$. Функцию $f = (f^1, \dots, f^s)$ будем называть *s-метрикой*, не требуя, однако, положительной определенности ее компонент и выполнения для каждой из них аксиом обычной 1-метрики. Заметим, что в общем случае $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, то есть, возможно, функция f не всякой паре из $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ сопоставляет s чисел, но в последующем изложении удобно в явной записи s-расстояния $f(ij)$ подразумевать, что $< ij > \in \mathfrak{S}_f$. Обозначим через $U(i)$ окрестность точки $i \in \mathfrak{M}$, через $U(< ij >)$ – окрестность пары $< ij > \in$

$\mathfrak{M} \in \mathfrak{M}$ и аналогично окрестности кортежей из других прямых произведений множества $\mathfrak{M}$ на себя.

Для некоторого кортежа $< k_1 \dots k_n > \in \mathfrak{M}^n$ введем функции $\bar{f}^n = \bar{f}[k_1 \dots k_n]$ и $\bar{\bar{f}}^n = \bar{\bar{f}}[k_1 \dots k_n]$, сопоставляя точке $i \in \mathfrak{M}$ точки $(f(ik_1), \dots, f(ik_n)) \in R^{sn}$ и $(f(k_1 i), \dots, f(k_n i)) \in R^{sn}$ соответственно, если $< ik_1 >, \dots, < ik_n > \in \mathfrak{S}_f$ и $< k_1 i >, \dots, < k_n i > \in \mathfrak{S}_f$. Заметим, что области определения введенных функций $\bar{f}^n$ и $\bar{\bar{f}}^n$ могут не совпадать друг с другом и с самим множеством $\mathfrak{M}$.

В отношении пространства $\mathfrak{M}$ с s-метрикой $f = (f^1, \dots, f^s)$ будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

I. Область определения $\mathfrak{S}_f$ функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ множество.

II. Функция f в области своего определения есть достаточно гладкая функция.

III. В $\mathfrak{M}^n$ плотно множество таких кортежей длины n, для которых функция $\bar{f}^n(\bar{\bar{f}}^n)$ имеет максимальный ранг, равный sn, в точках плотного в $\mathfrak{M}$ множества.

Достаточная гладкость означает, что в области ее определения непрерывна как сама функция f, так и все ее производные достаточно высокого порядка. Гладкую s-метрику $f = (f^1, \dots, f^s)$, для которой выполняется аксиома III, будем называть *невырожденной*. Заметим, что ограничения в аксиомах I, II, III открытыми и плотными множествами связано с тем, что исходные множества могут содержать исключительные подмножества меньшей размерности, где эти аксиомы не выполняются.

Пусть, далее, $m = n + 2$. Введем еще функцию F, сопоставляя кортежу $< ijk \dots vw >$ длины m из $\mathfrak{M}^m$ точку $(f(ij), f(ik), \dots, f(vw)) \in R^{sm(m-1)/2}$, координаты которой в $R^{sm(m-1)/2}$ определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью $sm(m-1)/2$ расстояний для следующих пар его точек: $< ij >, < ik >, \dots, < vw >$, если все эти пары принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Область определения функции F обозначим через $\mathfrak{S}_F$. Очевидно, что область $\mathfrak{S}_F$ есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}^m$ множество.

Определение. Будем говорить, что функция $f = (f^1, \dots, f^s)$ задает на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ *полиметрическую феноменологически симметричную геометрию* (физическую структуру) ранга $m = n + 2$, если, кроме аксиом I, II, III, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IV. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество, для каждого кортежа $< ijk \ldots vw >$ длины $m = n + 2$ которого и некоторой его окрестности $U(< ijk \ldots vw >)$ найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi : \mathcal{E} \to R^s$, определенная в некоторой области $\mathcal{E} \subset R^{sm(m-1)/2}$, содержащей точку $F(< ijk \ldots vw >)$, что в ней $rang\Phi = s$ и множество $F(U(< ijk \ldots vw >))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть

$$\Phi(f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)) = 0 \tag{1}$$

для всех кортежей из $U(< ijk \ldots vw >)$.

Аксиома IV составляет содержание принципа феноменологической симметрии. Эта аксиома выражает требование, чтобы $sm(m-1)/2$ расстояний между точками любого кортежа длины $m = n + 2$ из $U(< ijk \ldots vw >)$ были функционально связаны, удовлетворяя системе s уравнений (1). Условие $rang\Phi = s$ означает, что уравнения $\Phi = 0$ (то есть $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_s = 0$) независимы.

Если $x = (x^1, \ldots, x^{sn})$ – локальные координаты в многообразии $\mathfrak{M}$, то для s-метрики $f = (f^1, \ldots, f^s)$ в некоторой окрестности $U(i) \times U(j)$ каждой пары $< ij > \in \mathfrak{S}_f$ можно выписать явно ее локальное координатное представление

$$f(ij) = f(x(i), x(j)) = f(x^1(i), \ldots, x^{sn}(i), x^1(j), \ldots, x^{sn}(j)), \tag{2}$$

свойства которого определяются аксиомами II и III. Поскольку в соответствии с аксиомой III ранги функций $\bar{f}^n$ и $\bar{\bar{f}}^n$, равные sn, максимальны, координаты $x(i)$ и $x(j)$ входят в представление (2) существенным образом. Последнее означает, что никакая локально обратимая гладкая замена координат не приведет к уменьшению их числа в представлении (2), то есть не существует такой локальной системы координат, в которой оно может быть записано в виде

$$f(ij) = f(x^1(i), \ldots, x^{n'}(i), x^1(j), \ldots, x^{n''}(j)),$$

где или $n' < sn$ или $n'' < sn$. Действительно, если, например, $n' < sn$, то для любого кортежа $< j_1 \ldots j_n > \in (U(j))^n$ длины n и для любой точки из $U(i)$ ранг функции $\bar{f}^n = \bar{f}[j_1 \ldots j_n]$ будет заведомо меньше sn, что противоречит аксиоме III. Заметим, однако, что существенная зависимость представления (2) от локальных координат $x(i)$ и $x(j)$ не гарантирует выполнения аксиомы III.

Используя выражение (2), запишем локальное координатное представление введенной выше функции F:

$$\left.\begin{aligned} f(ij) &= f(x(i), x(j)), \\ f(ik) &= f(x(i), x(k)), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(vw) &= f(x(v), x(w)) \ , \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

матрица Якоби которой

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f(ij)}{\partial x(i)} & \frac{\partial f(ij)}{\partial x(j)} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(ik)}{\partial x(i)} & 0 & \frac{\partial f(ik)}{\partial x(k)} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{\partial f(vw)}{\partial x(v)} & \frac{\partial f(vw)}{\partial x(w)} \end{matrix} \right\| \tag{4}$$

имеет $sm(m-1)/2$ строк и smn столбцов. Здесь через $\partial f/\partial x$ кратко обозначена матрица Якоби для s-метрики $f = (f^1, \ldots, f^s)$ по координатам $x = (x^1, \ldots, x^{sn})$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{sn}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f^s}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial f^s}{\partial x^{sn}} \end{matrix} \right\| \tag{5}$$

Представление (3) задается системой $sm(m-1)/2$ функций $f(ij)$, $f(ik), \ldots, f(vw)$, зависящих специальным образом от smn координат $x^1(i), \ldots, x^{sn}(i), \ldots, x^1(w), \ldots, x^{sn}(w)$ всех точек кортежа $< ijk \ldots vw >$ длины $m = n + 2$. Поскольку число функций – компонент полиметрики f – в системе (3) не больше общего числа координат, наличие связи (1) является нетривиальным фактом, не имеющим места для произвольной системы (3).

Функция F, согласно ее локальному координатному представлению (3), отображает окрестность $U(< ijk \ldots vw >) \subset \mathfrak{S}_F$ в $R^{sm(m-1)/2}$. Функциональной матрицей этого отображения является матрица Якоби (4) системы функций (3), а его рангом называется ранг этой матрицы.

Теорема. *Для того, чтобы функция* $f = (f^1, \dots, f^s))$, *удовлетворяющая аксиомам I, II, III, задавала на* sn*-мерном многообразии* $\mathfrak{M}$ *полиметрическую феноменологически симметричную геометрию (физическую структуру) ранга* $m = n + 2$, *необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения* F *был равен* $sm(m-1)/2 - s$ *на плотном в* $\mathfrak{S}_F$ *множестве.*

Докажем сначала необходимость условия теоремы о ранге отображения F.

Лемма 1. *В функциональной матрице (4) отображения* F *с координатным представлением (3) имеется квадратная подматрица порядка* $sm(m-1)/2 - s$, *определитель которой отличен от нуля.*

Выделим в матрице (4) квадратную ступенчатую подматрицу, диагональными клетками которой являются следующие квадратные матрицы Якоби: для sn функций $f(ik), \dots, f(iw)$ по sn переменным $x(i)$, для sn функций $f(jk), \dots, f(jw)$ по sn переменным $x(j)$, для $s(n-1)$ функций $f(kl), \dots, f(kw)$ по $s(n-1)$ переменным из $x(k), \dots$, для s функций $f(vw)$ по s переменным из $x(v)$. Из аксиомы III, очевидно, следует, что для любого $r \leqslant sn$ в матрице Якоби функции $\bar{f}^n$ обязательно найдется минор порядка r, который не обращается в нуль. Поэтому ранг выделенной выше ступенчатой подматрицы для некоторого кортежа из $U(< ijk \dots vw >)$ оказывается равным $sn + sn + s(n-1) + \dots + s = sn(n+3)/2 = sm(m-1)/2 - s$, где $m = n + 2$. Лемма 1 доказана.

Следствие. Ранг функциональной матрицы (4) не может быть меньше $sm(m-1)/2 - s$.

Согласно аксиоме IV в любой окрестности произвольного кортежа из $\mathfrak{S}_F$ найдется такая его окрестность $U(< ijk \dots\ vw >)$, что множество значений $F(U(< ijk \dots vw >))$ будет удовлетворять s уравнениям (1), причем $rang\Phi = s$ в точке $F(< ijk \dots vw >)$. Поскольку функция Φ достаточно гладкая, можно, без ограничения общности, считать, что $rang\Phi = s$ для всех точек области ее определения $\mathcal{E} \subset R^{sm(m-1)/2}$ и, конечно же, на множестве значений $F(U(< ijk \dots vw >))$. Тогда множество нулей функции Φ, но не обязательно множество $F(U(< ijk \dots vw >))$, будет гладкой без особых точек поверхностью в $R^{sm(m-1)/2}$ коразмерности s.

Продифференцируем уравнение (1) по каждой из smn координат $x^1(i), \dots, x^{sn}(i), \dots, x^1(w), \dots, x^{sn}(w)$ точек кортежа $< ijk \dots vw >$. В результате получаем smn линейных однородных уравнений относительно $sm(m-1)/2$ производных от компонент функции $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_s)$:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial f(ij)} \cdot \frac{\partial f(ij)}{\partial x(i)} + \dots + \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial f(iw)} \cdot \frac{\partial f(iw)}{\partial x(i)} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial f(iw)} \cdot \frac{\partial f(iw)}{\partial x(w)} + \dots + \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial f(vw)} \cdot \frac{\partial f(vw)}{\partial x(w)} = 0, \end{array}\right\} \qquad (6)$$

где $\sigma = 1, \dots, s$, $\partial \Phi_\sigma / \partial f = ||\partial \Phi_\sigma / \partial f^1, \dots, \partial \Phi_\sigma / \partial f^s||$, а $\partial f / \partial x$ есть матрица Якоби (5). Матрица же самой системы (6) с точностью до транспонирования совпадает, очевидно, с матрицей Якоби (4) системы функций (3).

Лемма 2. *Ранг матрицы системы уравнений (6) не может быть больше чем* $sm(m-1)/2 - s$.

Предположим противное, то есть что ранг матрицы системы (6) равен $sm(m-1)/2 - s'$, где $s' < s$. Но тогда система (6) будет иметь всего s' линейно независимых ненулевых решений, число которых, как известно, равно разности между числом неизвестных в системе ($= sm(m-1)/2$) и рангом ее матрицы ($= sm(m-1)/2 - s'$). Однако уравнения системы (6) имеют, по крайней мере, s таких решений в некоторой окрестности $U(< ijk \dots vw >)$, так как по аксиоме IV $rang \Phi = s$ в точке $F(< ijk \dots vw >)$. Установленное противоречие и доказывает лемму 2.

Из леммы 2 и следствия леммы 1 однозначно вытекает, что ранг матрицы (4) для некоторого кортежа $< i_1 j_1 k_1 \dots v_1 w_1 > \in U(< ijk \dots vw >)$ будет равен $sm(m-1)/2 - s$. Легко понять, что множество таких кортежей плотно в $\mathfrak{S}_F$, так как плотно в $\mathfrak{S}_F$ множество кортежей $< ijk \dots vw >$, о которых говорится в аксиоме IV. На этом завершается доказательство необходимости условия теоремы 1.

Перейдем теперь к доказательству достаточности условия теоремы 1 о ранге отображения F.

Лемма 3. *Ни для какого кортежа из $\mathfrak{S}_F$ ранг матрицы (4), то есть ранг отображения F, не может быть больше $sm(m-1)/2-s$.*

Действительно, если для некоторого кортежа из $\mathfrak{S}_F$ ранг матрицы (4) будет больше чем $sm(m-1)/2-s$, то он в силу гладкости функций системы (3), будет больше того же значения и в какой-то его окрестности $U \subset \mathfrak{S}_F$. Но тогда в этой окрестности не найдется ни одного кортежа, для которого ранг отображения F был бы равен $sm(m-1)/2-s$, что противоречит условию доказываемой теоремы.

Пусть для кортежа $< ijk \dots vw >$ из плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества, о котором говорится в условии теоремы 1, ранг отображения F, задаваемого системой функций (3), равен $sm(m-1)/2-s$. Из леммы 3, очевидно, следует, что для любой окрестности кортежа $< ijk \dots vw >$ ранг матрицы Якоби (4) не больше $sm(m-1)/2-s$ и равен для него этому значению. По известной теореме математического анализа о функциональной зависимости для некоторой окрестности $U(< ijk \dots\ vw >)$ существует такая достаточно гладкая функция $\Phi : \mathcal{E} \to R^s$, определенная в соответствующей области $\mathcal{E} \subset R^{sm(m-1)/2}$, содержащей точку $F(< ijk \dots vw >)$, в которой $rang\Phi = s$, что множество $F(U(< ijk \dots vw >))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть имеют место уравнения (1) для всех кортежей из $U(< ijk \dots vw >)$. Поскольку ранг матрицы (4) для исходного кортежа $< ijk \dots vw >$ равен $sm(m-1)/2-s$ и максимален в окрестности $U(< ijk \dots vw >)$, из той же теоремы о функциональной зависимости следует, что существует такая его окрестность $U' \subset U$ и соответствующая область $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$, для которых множество значений $F(U')$ совпадает с множеством нулей функции Φ в $\mathcal{E}$, являясь гладкой без особых точек поверхностью в $R^{sm(m-1)/2}$ коразмерности s. Теорема 1 полностью доказана.

§2. Групповая симметрия полиметрической геометрии и ее эквивалентность феноменологической симметрии

Рассмотрим теперь групповые свойства полиметрической феноменологически симметричной геометрии, введенной выше определением из §1.

Пусть U и U' – открытые области в многообразии $\mathfrak{M}$, не обязательно связные. Гладкое инъективное отображение

$$\lambda : U \to U' \tag{1}$$

называется локальным *движением*, если оно сохраняет s-метрику $f = (f^1, \ldots, f^s)$. Последнее означает, что для любой пары $< ij > \in \mathfrak{S}_f$, такой что $i, j \in U$, и соответствующей пары $< \lambda(i), \lambda(j) >$, если она принадлежит $\mathfrak{S}_f$, имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \lambda(j)) = f(ij), \tag{2}$$

выполняющееся для каждой из компонент $f^1, \ldots, f^s$ s-метрики f.

Множество всех движеней (1) есть локальная группа преобразований, для которой s-метрика согласно равенству (2) является *двухточечным инвариантом.* Если s-метрика f задана явно (например, в своем координатном представлении (2) из §1), то равенство (2) является функциональным уравнением, решая которое можно найти полную группу локальных движений (1). Нам же о s-метрике известно только, что она невырождена и удовлетворяет некоторой системе s уравнений (функциональных связей) (1) из §1. Но этого оказывается достаточно для установления факта существования $sn(n-1)/2$ – параметрической группы ее движений.

Для большей ясности последующего изложения воспроизведем в наших обозначениях определение локальной группы Ли преобразований, следуя монографии Л.С. Понтрягина "Непрерывные группы преобразований" (см. [11], с.435). Пусть G^r – r-мерная локальная группа Ли и U – некоторая область гладкого многообразия $\mathfrak{M}$. Допустим, что каждому элементу $a \in G^r$ поставлено в соответствие непрерывно зависящее от a инъективное отображение $\lambda_a : U \to U'$ области U в некоторую область U' многообразия $\mathfrak{M}$, относящее каждой точке $i \in U$ некоторую точку $i' \in U'$, то есть $i' = \lambda_a(i) = \lambda(i, a)$. Будем говорить, что G^r есть локальная группа Ли преобразований области U, если выполнены следующие три условия:

1, Единице e группы G^r соответсвует тождественное преобразование $i' = \lambda(i, e) = i$ области U на себя и $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ab)$, то есть произведению $ab \in G^r$ соответствует композиция преобразований: сначала λ_a и затем λ_b (возможен и другой порядок: $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ba)$).

2. Два преобразования λ_a и λ_b совпадают тогда и только тогда, когда $a = b$ (это условие можно сформулировать иначе, потребовав,

чтобы преобразование λ_a было тождественным лишь при условии, что a есть единица e группы G^r).

3. В координатной форме $\lambda(i, a)$ есть достаточное число раз дифференцируемая функция точки $i \in U$ и элемента $a \in G^r$.

Определенная только что группа преобразований по условию 2 эффективна и потому сами элементы группы G^r могут считаться преобразованиями. То есть можно говорить о r-мерной локальной группе преобразований многообразия $\mathfrak{M}$, которую обозначим через $G^r(\lambda)$. Таким образом, в области U задано эффективное гладкое действие группы G^r, причем условия 1, 2, 3 выполняются для некоторой ее части, то есть некоторой, зависящей от U, окрестности единичного элемента $e \in G^r$.

В последующем изложении удобно считать, что область $U \subset \mathfrak{M}$ не обязательно связна, например, может состоять из двух связных областей: $U = U_1 \cup U_2$, причем $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Определение. Будем говорить, что функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$ задает на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ *полиметрическую геометрию, наделенную групповой симметрией* степени $sn(n+1)/2$, если, кроме аксиом I, II, III из §1, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IV'. Существует открытое и плотное в $\mathfrak{M}$ множество, для каждой точки i которого задано эффективное гладкое действие $sn(n+1)/2$-мерной локальной группы Ли в некоторой окрестности $U(i)$, такое, что действия ее в окрестностях $U(i)$, $U(j)$ двух точек i, j совпадают в пересечении $U(i) \cap U(j)$ и что функция $f(ij)$ по каждой из своих s компонент является двухточечным инвариантом.

Группы преобразований, о которых говорится в аксиоме IV', определяют локальную подвижность жестких фигур в sn-мерном пространстве $\mathfrak{M}$, аналогичную подвижности твердых тел в евклидовом пространстве. Заметим, что глобальной подвижности при этом может и не быть, так как, хотя локальные действия группы $G^{sn(n+1)/2}$ определены согласно аксиоме IV' в некоторой окрестности каждой точки открытого и плотного в $\mathfrak{M}$ множества, может оказаться, что на всем этом множестве действует только единичный элемент группы. Множество пар $< ij >$, для которых s-метрика f определена и является двухточечным инвариантом, очевидно, открыто и плотно в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$. Будем говорить также, что s-метрика f *допускает* $sn(n+1)/2$-мерную локальную группу Ли локальных движений.

Из аксиомы IV' следует также, что на открытом и плотном в $\mathfrak{M}$ множестве задано $sn(n+1)/2$-мерное линейное семейство гладких векторных полей X, замкнутое относительно операции коммутирования, то есть алгебра Ли преобразований (см. [11], §60). В некоторой локальной системе координат базисные векторные поля этого семейства запишем в операторной форме:

$$X_\omega = \lambda^\mu_\omega(x)\partial/\partial x^\mu, \tag{3}$$

где $\omega = 1, 2, \ldots, sn(n+1)/2$, а по немому индексу μ производится суммирование в пределах от 1 до sn. Полиметрика $f = (f^1, \ldots, f^s)$ будет двухточечным инвариантом локальной группы Ли преобразований некоторых окрестностей $U(i)$ и $U(j)$ точек i и j в том и только в том случае, если она покомпонентно удовлетворяет системе $sn(n+1)/2$ уравнений

$$X_\omega(i)f(ij) + X_\omega(j)f(ij) = 0 \tag{4}$$

с операторами (3):

$$\lambda^\mu_\omega(i)\partial f(ij)/\partial x^\mu(i) + \lambda^\mu_\omega(j)\partial f(ij)/\partial x^\mu(j) = 0,$$

где $\lambda^\mu_\omega(i) = \lambda^\mu_\omega(x(i)) = \lambda^\mu_\omega(x^1(i), \ldots, x^{sn}(i))$ и аналогично для $\lambda^\mu_\omega(j)$ (см. [12], с.229 и 237).

Если векторное поле X ненулевое, то в области его задания есть хотя бы одна точка в которой оно отлично от нуля. Однако в других точках этой области поле X может обращаться в нуль. Если же для соответствующей группы Ли преобразований, алгебре Ли которой принадлежит поле X, s-метрика f является невырожденным двухточечным инвариантом, то имеет место следующая лемма:

Лемма 1. *Множество точек, где ненулевое векторное поле X алгебры Ли локальной группы Ли преобразований, удовлетворяющей аксиоме $IV^{'}$, отлично от нуля, открыто и плотно в $\mathfrak{M}$.*

Предположим противное. Пусть ненулевое векторное поле $X = a^\omega X_\omega$, где a^ω, $\omega = 1, 2, \ldots, sn(n+1)/2$ – постоянные, не все равные нулю одновременно, в некоторой окрестности $U(i)$ точки i обращается в нуль тождественно. Поле X ненулевое, поэтому в какой-то другой точке j, а значит и в некоторой ее окрестности $U(j)$, оно отлично от нуля. Поскольку область $\mathfrak{S}_f$ открыта и плотна в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ по аксиоме I, можно считать, что пара $< ij > \in \mathfrak{S}_f$. Но тогда, согласно аксиоме $IV^{'}$,

s-метрика $f(ij)$ будет двухточечным инвариантом, являясь решением системы $sn(n+1)/2$ уравнений (4). С учетом того, что по предположению $X(i) = a^\omega X_\omega(i) = 0$ и $X(j) = a^\omega X_\omega(j) \neq 0$, из этой системы получаем уравнение:

$$a^\omega \lambda^\mu_\omega(j) \partial f(ij)/\partial x^\mu(j) = 0, \tag{$4'$}$$

в которое входят производные только по координатам точки j и от этих же только координат зависят коэффициенты $a^\omega \lambda^\mu_\omega$ при производных, причем, по крайней мере, один из них отличен от нуля. Следовательно, уравнение $(4')$ может быть решено методом характеристик. Система уравнений характеристик для него имеет не более $sn-1$ независимых интегралов, и потому общее решение уравнения $(4')$ будет:

$$f(ij) = f(x^1(i), \ldots, x^{sn}(i), \psi^1(j), \ldots, \psi^{n'}(j)),$$

где $n' \leqslant sn-1$ и $\psi(j) = \psi(x^1(j), \ldots, x^{sn}(j))$. Но в полученное выражение для s-метрики f sn координат точки j входят несущественным образом через $n' < sn$ функций $\psi^1(j), \ldots, \psi^{n'}(j)$, что, очевидно, противоречит аксиоме III из §1. Таким образом, в окрестности $U(i)$ обязательно найдется точка, где исходное векторное поле отлично от нуля. Поскольку область задания поля X плотна и открыта в $\mathfrak{M}$, множество точек, где оно отлично от нуля, тоже плотно и открыто в $\mathfrak{M}$, хотя может и не совпадать с областью его задания. Лемма 1 доказана.

Следствие. Множество точек, где базисные векторные поля X_ω, $\omega = 1, \ldots, sn(n+1)/2$, алгебры Ли локальной группы Ли локальных преобразований, удовлетворяющей аксиоме IV', одновременно отличны от нуля, открыто и плотно в $\mathfrak{M}$.

Следствие очевидно, так как по доказанной выше лемме 1 каждое базисное векторное поле X_ω отлично от нуля на открытом и плотном в $\mathfrak{M}$ множестве. Пересечение же конечного числа $(= sn(n+1)/2)$ таких множеств открыто и плотно в $\mathfrak{M}$.

Теорема 1. *Для того, чтобы функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$, удовлетворяющая аксиомам I, II, III из §1, задавала на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ полиметрическую геометрию, наделенную групповой симметрией степени $sn(n+1)/2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен $sm(m-1)/2 - s$, где $m = n+2$, на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.*

Докажем сначала необходимость условия теоремы 1 о ранге отображения F.

Пусть $< ijk\dots vw > \in \mathfrak{M}^m$ такой кортеж длины $m = n+2$, что его точки $i, j, k, \dots, v, w$ принадлежат открытому и плотному в $\mathfrak{M}$ множеству, о котором говорится в аксиоме IV' определения настоящего параграфа. Ясно, что множество таких кортежей открыто и плотно в $\mathfrak{M}^m$, а его пересечение с $\mathfrak{S}_F$ открыто и плотно в $\mathfrak{S}_F$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $< ijk\dots vw > \in \mathfrak{S}_F$. Согласно аксиоме IV' существуют такие окрестности $U(i), U(j), \dots, U(w)$ точек этого кортежа, что действия некоторой $sn(n+1)/2$-мерной локальной группы Ли в них сохраняет s-метрику f, определенную в каждой из окрестностей $U(i)\times U(j), U(i)\times U(k), \dots, U(v)\times U(w)$ пар $< ij >, < ik >, \dots, < vw >$. Возьмем теперь произвольную m-точечную фигуру, соответствующую некоторому кортежу длины m из окрестности $U(i)\times U(j)\times\dots\times U(w)\subset\mathfrak{S}_F$. Движение этой фугуры как жесткой конструкции означает, что при действии группы $G^{sn(n+1)/2}$ в окрестностях $U(i), U(j), \dots, U(w)$, то есть изменении координат ее точек, все $sm(m-1)/2$ расстояний в ней, определяемых системой функций (3) из §1, сохраняются, являясь двухточечными инвариантами. Инвариантность же этих функций при локальных преобразованиях, задаваемых векторными полями

$$X = \lambda^\mu(x)\partial/\partial x^\mu \tag{5}$$

в окрестностях $U(i), U(j), \dots, U(w)$, означает, что эти функции удовлетворяют следующей системе уравнений, аналогичных уравнению (4) с операторами (3):

$$\left.\begin{aligned}
\lambda^\mu(i)\partial f(ij)/\partial x^\mu(i) + \lambda^\mu(j)\partial f(ij)/\partial x^\mu(j) = 0,\\
\lambda^\mu(i)\partial f(ik)/\partial x^\mu(i) + \lambda^\mu(k)\partial f(ik)/\partial x^\mu(k) = 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\lambda^\mu(v)\partial f(vw)/\partial x^\mu(v) + \lambda^\mu(w)\partial f(vw)/\partial x^\mu(w) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Система (6) при известной s-метрике $f = (f^1, \dots, f^s)$ может быть рассмотрена как система $sm(m-1)/2$ линейных однородных уравнений относительно $m(sn)$ компонент векторных полей (5) в некоторых окрестностях точек $i, j, k, \ldots, v, w$. Заметим, что матрица этой системы совпадает с функциональной матрицей (4) из §1 отображения F. Алгебры Ли векторных полей (5) $sn(n+1)/2$-мерны, так как такую размерность имеют согласно аксиоме IV' локальные группы Ли преобразований окрестностей $U(i), U(j), \ldots, U(w)$. Система (6), следовательно, имеет решение

$$\lambda^{\mu}(i) = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i), \ldots, \lambda^{\mu}(w) = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(w), \tag{7}$$

где a^{ω} – произвольные константы и по "немому" индексу ω производится суммирование в пределах от 1 до $sn(n+1)/2$, причем функции $\lambda^{\mu}_{\omega}(x)$ линейно независимы по этому индексу с постоянными коэффициентами в соответствующих окрестностях каждой точки кортежа $< ijk \ldots vw >$.

Таким образом, система (6) имеет $sn(n+1)/2$ линейно независимых с постоянными коэффициентами ненулевых решений. Эти решения можно выписать по общему решению (7), беря $sn(n+1)/2$ линейно независимых ненулевых векторов $(a^1, \ldots, a^{sn(n+1)/2})$, например, $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$:

$$\lambda^{\mu}_{\omega}(i), \lambda^{\mu}_{\omega}(j), \ldots, \lambda^{\mu}_{\omega}(w), \tag{7'}$$

где $\mu = 1, \ldots, sn$ и $\omega = 1, \ldots, sn(n+1)/2$.

Лемма 2. *Решения (7') линейно независимы по нижнему индексу ω не только с постоянными коэффициентами, но линейно независимы по нему также и с переменными коэффициентами, то есть в общем смысле.*

Предположим противное. Пусть найдутся такие переменные коэффициенты $c^{\omega} = c^{\omega}(< ijk \ldots vw >)$, $\omega = 1, \ldots, sn(n+1)/2$, что имеют место следующие $m \cdot (sn)$ соотношений

$$c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i) = 0, c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(j) = 0, \ldots, c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(w) = 0, \tag{8}$$

вытекающие из предполагаемой линейной зависимости решений (7'), которые, напомним, линейно независимы с постоянными коэффициентами. Коэффициенты c^{ω} есть решения системы уравнений (8) и являются некоторыми функциями координат точек кортежа $< ijk \ldots vw >$, одновременно в нуль не обращающимися ни для одного из таких кортежей. Заметим, что система (8) не обязательно имеет ненулевое решение, так как число уравнений в ней ($= smn$) больше числа неизвестных ($= sn(n+1)/2$).

Рассмотрим движение призвольной фигуры $< k \dots vw >$, содержащей n точек, и фигуры $< jk \dots vw >$, содержащей $n+1$ точку, причем переход от первой фигуры ко второй состоит в добавлении точки j. Поскольку при движении второй фигуры сохраняются дополнительно sn расстояний $f(jk), \dots, f(jw)$, относительно sn компонент векторного поля $X(j)$, то есть поля (5) в некоторой окрестности $U(j)$ точки j, естественно возникает система sn линейных неоднородных уравнений:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda^\mu(j)\partial f(jk)/\partial x^\mu(j) = -\lambda^\mu(k)\partial f(jk)/\partial x^\mu(k), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda^\mu(j)\partial f(jw)/\partial x^\mu(j) = -\lambda^\mu(w)\partial f(jw)/\partial x^\mu(w). \end{array}\right\}$$

Ранг матрицы этой системы согласно аксиоме III из §1 равен sn по крайней мере для одного кортежа $< k \dots vw >$ и одной точки j из соответствующих окрестностей. Решая уравнения системы, находим выражения для компонент векторного поля $X(j)$ через компоненты векторных полей $X(k), \dots, X(w)$:

$$\lambda^\mu(j) = b^\mu_{1\nu}\lambda^\nu(k) + \dots + b^\mu_{n\nu}\lambda^\nu(w),$$

где, например, $b^\mu_{1\nu} = b^\mu_{1\nu}(< ijk \dots vw >)$, причем $\mu, \nu = 1, \dots, sn$. В соответствии с решением (7) и в силу произвольности коэффициентов a^ω в нем, из этих выражений получаем линейную связь:

$$\lambda^\mu_\omega(j) = b^\mu_{1\nu}\lambda^\nu_\omega(k) + \dots + b^\mu_{n\nu}\lambda^\nu_\omega(w). \tag{9}$$

Запишем подсистему из sn^2 уравнений системы (8), относящуюся к укороченному кортежу $< k \dots vw >$ длины n:

$$c^\omega\lambda^\mu_\omega(k) = 0, \dots, c^\omega\lambda^\mu_\omega(w) = 0. \tag{8$'$}$$

Соответствующая подсистема системы (8) для кортежа $< jk \dots vw >$ длины $n+1$ получается добавлением к подсистеме (8$'$) sn уравнений $c^\omega\lambda^\mu_\omega(j) = 0$. Но эти уравнения в силу линейной связи (9) являются следствием уравнений подсистемы (8$'$). То есть ранги матриц подсистем системы (8), относящихся к кортежам $< k \dots vw >$ и $< jk \dots vw >$, совпадают. Пусть ранг матрицы подсистемы $(8')$ равен r. Ясно, что этот ранг не превышает значения $sn(n+1)/2$, а по следствию леммы 1 не может быть меньше единицы. В случае $r = sn(n+1)/2$ вся система (8) будет иметь только нулевое решение, что противоречит сделанному предположению. Если $sn(n+1)/2 = 1$, то обязательно должно быть $r = sn(n+1)/2$, поэтому будем считать, что $sn(n+1)/2 > 1$, то есть что или $n > 1$ или $s > 1$. Тогда в матрице подсистемы $(8')$ найдется такая квадратная подматрица ненулевого порядка $r < sn(n+1)/2$, определитель которой отличен от нуля. Возьмем определитель $r+1$ порядка, содержащий эту квадратную подматрицу в качестве минора порядка r и одну строку из матрицы подсистемы (8) для кортежа $< jk \ldots vw >$, в которую входят функции $\lambda^{\mu}_{\omega}(j)$. Поскольку по доказанному выше ранг матрицы подсистемы системы (8) для кортежа $< jk \ldots vw >$ тоже равен r, указанный определитель $r+1$ порядка должен обращаться в нуль. Раскрывая этот определитель по элементам строки, содержащей функции $\lambda^{\mu}_{\omega}(j)$, для каждого индекса $\mu = 1, \ldots, sn$ получаем связь

$$\tilde{c}^{\omega}(< k \ldots vw >)\lambda^{\mu}_{\omega}(j) = 0,$$

где $\tilde{c}^{\omega}(< k \ldots vw >)$ есть алгебраическое дополнение к $\lambda^{\mu}_{\omega}(j)$, зависящее от координат точек кортежа $< k \ldots vw >$ и не зависящее от координат точки j. Заметим, что хотя бы одно из этих алгебраических дополнений тождественно в нуль не обращается. Фиксируя в полученной связи координаты точек кортежа $< k \ldots vw >$, по которым эта связь выполняется тождественно, устанавливаем, что функции $\lambda^{\mu}_{\omega}(j)$ линейно зависимы по нижнему индексу ω с постоянными коэффициентами. Но этот результат противоречит основному условию аксиомы IV', согласно которому размерность локальной группы Ли преобразований окрестности $U(j)$ равна $sn(n+1)/2$, и потому такую же размерность имеет соответствующая алгебра Ли векторных полей $X(j)$ с базисом $X_{\omega}(j) = \lambda^{\mu}_{\omega}(j)\partial/\partial x^{\mu}(j)$, где $\omega = 1, \ldots, sn(n+1)/2$. Установленное противоречие и доказывает лемму 2.

Итак, по только что доказанной лемме 2 система уравнений (6) имеет $sn(n+1)/2$ линейно независимых в общем смысле ненулевых решений в некоторой окрестности $U(i) \times U(j) \times \cdots \times U(w)$ кортежа $< ijk \ldots vw >$. Предположим, что в этой окрестности найдется такой кортеж длины $m = n+2$, для которого ранг матрицы (4) из §1, то есть ранг матрицы системы (6), равен $sm(m-1)/2 - s'$, где $s' < s$ – целое неотрицательное число, и этот ранг максимален. В силу гладкости s-метрики f ранг матрицы (4) из §1 будет равен $sm(m-1)/2-s'$ и в некоторой окрестности указанного кортежа, содержащейся в окрестности $U(i)\times\cdots\times U(w)$. Как известно, максимальное число линейно независимых (для системы (6) – в общем смысле) ненулевых решений алгебраической системы линейных уравнений равно числу неизвестных минус ранг матрицы системы. В предполагаемом случае для системы (6) оно будет равно: $smn-sm(m-1)/2+s' = sn(n+1)/2-(s-s')$, то есть меньше $sn(n+1)/2$, хотя, в действительности, по лемме 2 эта система имеет $sn(n+1)/2$ линейно независимых в общем смысле ненулевых решений (7′). Таким образом, ранг матрицы (4) из §1 в окрестности $U(i)\times\cdots\times U(w)$ не может быть больше $sm(m-1)/2-s$. С другой стороны, в этой матрице по лемме 1 из §1 имеется квадратная подматрица порядка $sm(m-1)/2-s$ с отличным от нуля определителем для некоторого кортежа из окрестности $U(i)\times\cdots\times U(w)$. Следовательно, в любой окрестности плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества кортежей $< ijk\ldots vw >$, описанных в самом начале доказательства теоремы 1, найдется такой кортеж, для которого ранг матрицы (4) из §1, то есть ранг отображения F, задаваемого системой функций (3) из §1, равен точно $sn(n+1)/2-s$. Множество таких кортежей, очевидно, плотно в $\mathfrak{S}_F$.

На этом доказательство необходимости условия теоремы 1 о ранге отображения F завершено. Перейдем к более сложному доказательству достаточности этого условия.

Пусть для кортежа $< ijk\ldots vw >$ длины $m=n+2$ из плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества, о котором говорится в условии теоремы 1, ранг отображения F с функциональной матрицей (4) из §1 равен $sm(m-1)/2-s$. Опираясь на лемму 3 из §1, можем полагать, что ранг матрицы (4) из §1 будет равен $sm(m-1)/2-s$ для всех кортежей из некоторой окрестности $U(i)\times U(j)\times\cdots\times U(w)\subset\mathfrak{S}_F$ исходного кортежа. Поскольку число столбцов в этой матрице, равное smn, больше ее ранга, между ними существует линейная связь, которую запишем по элементам каждой строки:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda^\mu[i]\partial f(ij)/\partial x^\mu(i)+\lambda^\mu[j]\partial f(ij)/\partial x^\mu(j)=0,\\
\lambda^\mu[i]\partial f(ik)/\partial x^\mu(i)+\lambda^\mu[k]\partial f(ik)/\partial x^\mu(k)=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\lambda^\mu[v]\partial f(vw)/\partial x^\mu(v)+\lambda^\mu[w]\partial f(vw)/\partial x^\mu(w)=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

где, например, $\lambda^\mu[i]$ – коэффициент линейной зависимости при столбце с дифференцированием по координате $x^\mu(i)$, $\mu = 1, \ldots, sn$, а для его отличия от компоненты $\lambda^\mu(i)$ векторного поля (5) в окрестности $U(i)$, входящей в уравнения системы (6), здесь использованы квадратные скобки.

Соотношения (10) при известной s-метрике $f = (f^1, \ldots, f^s)$ представляют собой алгебраическую систему $sm(m-1)/2$ линейных однородных уравнений относительно smn коэффициентов линейной зависимости $\lambda^\mu[i]$, $\lambda^\mu[j], \ldots, \lambda^\mu[w]$, которые одновременно в нуль не обращаются в окрестности $U(i)\ \times U(j) \times \cdots \times U(w)$. Максимальное число линейно независимых (в общем смысле) ненулевых решений системы (10) равно числу неизвестных минус ранг матрицы системы, то есть равно $sn(n+1)/2$. Выпишем общее решение системы (10):

$$\left.\begin{aligned} \lambda^\mu[i] &= c^\omega \lambda^\mu_\omega(i, < ijk \ldots vw >), \\ \lambda^\mu[j] &= c^\omega \lambda^\mu_\omega(j, < ijk \ldots vw >), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda^\mu[w] &= c^\omega \lambda^\mu_\omega(w, < ijk \ldots vw >), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $c^\omega = c^\omega(< ijk \ldots vw >)$ – коэффициенты общего решения в его выражении через линейно независимые ненулевые решения этой же системы, причем суммирование по "немому" индексу ω производится в пределах от 1 до $sn(n+1)/2$. Однако в отличие от решения (7) аналогичной системы (6) здесь учтена возможная зависимость выражений $\lambda^\mu[i]$, $\lambda^\mu[j], \ldots, \lambda^\mu[w]$ не только от координат той точки, по координате которой проводится дифференцирование в соответствующем столбце функциональной матрицы (4) из §1, но и от координат всех точек исходного кортежа $< ijk \ldots vw >$, входящих в коэффициенты уравнений (10). Кроме того, в решении (11) линейные коэффициенты c^ω являются, в общем случае, функциями, тогда как в решении (7) коэффициенты a^ω были только произвольными константами.

Лемма 3. *Общее решение (11) системы уравнений (10) может быть записано в такой форме, что координаты точки i и координаты точки j входят явно в функции λ^μ_ω только для выражений $\lambda^\mu[i]$ и $\lambda^\mu[j]$ соответственно.*

Пусть сначала $n = 1$. Тогда в системе (10) будет $3s$ уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^\mu[i]\partial f(ij)/\partial x^\mu(i) + \lambda^\mu[j]\partial f(ij)/\partial x^\mu(j) = 0, \\ \lambda^\mu[i]\partial f(ik)/\partial x^\mu(i) + \lambda^\mu[k]\partial f(ik)/\partial x^\mu(k) = 0, \\ \lambda^\mu[j]\partial f(jk)/\partial x^\mu(j) + \lambda^\mu[k]\partial f(jk)/\partial x^\mu(k) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10^*}$$

где $\mu = 1, \ldots, s$. Ранг матрицы этой системы равен $2s$ в окрестности $U(i) \times U(j) \times U(k)$, поэтому она имеет там s линейно независимых ненулевих решений. По аксиоме III из §1 в этой окрестности найдется такая тройка (кортеж длины 3), для которой отличны от нуля якобианы $|\partial f(ik)/\partial x(i)|$ и $|\partial f(jk)/\partial x(j)|$, где $\partial f/\partial x$ есть матрица Якоби (5) из §1, которая для случая $n = 1$ будет квадратной порядка s. Поскольку первые s уравнений системы (10^*) являются следствиями независимых остальных $2s$ уравнений, общее ее решение запишется, очевидно, в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^\mu[k] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(k, < k >), \\ \lambda^\mu[i] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i, < k >), \\ \lambda^\mu[j] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(j, < k >), \end{aligned}\right\} \tag{11^*}$$

где $\omega = 1, \ldots, s$ и через $< k >$ условно обозначено возможное присутствие координат точки k во всех выражениях этого решения.

Пусть теперь $n \geqslant 2$. Обозначим через l точку, следующую за точкой k в исходном кортеже $< ijkl \ldots vw >$. Выделим из системы (10) подсистему $sn(n-1)/2$ уравнений для укороченного кортежа $< kl \ldots vw >$ длины $n = m - 2$, которые не включают в себя коэффициентов с координатами точек i и j:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^\mu[k]\partial f(kl)/\partial x^\mu(k) + \lambda^\mu[l]\partial f(kl)/\partial x^\mu(l) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda^\mu[v]\partial f(vw)/\partial x^\mu(v) + \lambda^\mu[w]\partial f(vw)/\partial x^\mu(w) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{$10'$}$$

В матрице подсистемы ($10'$) имеется минор порядка $sn(n-1)/2$, не обращающейся в нуль по аксиоме III из §1. Соответствующая квадратная матрица ступенчатая и ее диагональными клетками являются следующие квадратные матрицы Якоби: для $s(n-1)$ функций $f(kl),\ldots,f(kw)$ по некоторым $s(n-1)$ переменным из $x(k),\ldots$, для s функций $f(vw)$ по некоторым s переменным из $x(v)$ (см. аналогичную ситуацию в доказательстве леммы 1 из §1). То есть ранг матрицы подсистемы $(10')$ равняется своему максимальному значению $sn(n-1)/2$, по крайней мере, для одного укороченного кортежа длины n из $U(k)\times\cdots\times U(w)$ и некоторой его окрестности. Но тогда подсистема $(10')$ имеет в этой окрестности $sn(n-1)/2$ и не более в общем смысле линейно независимых ненулевых решений, поскольку максимальное число таких решений равно числу входящих в нее неизвестных ($= sn^2$) минус ее ранг ($= sn(n-1)/2$). В матрице подсистемы $(10')$ нет зависимости от коотдинат точек i, j и потому ее общее решение можно записать в такой форме, в которой функции λ^μ_ω не зависят от этих координат:

$$\left.\begin{array}{r}\lambda^\mu[k]=c^\omega\lambda^\mu_\omega(k,<k\ldots vw>),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda^\mu[w]=c^\omega\lambda^\mu_\omega(w,<k\ldots vw>),\end{array}\right\}\qquad(12)$$

причем "немое" суммирование по индексу ω, как и в общем решении (11) всей системы (10), производится в тех же пределах от 1 до $sn(n+1)/2$.

Выделим из системы (10) подсистему sn уравнений, коэффициенты которых содержат координаты точки i:

$$\left.\begin{array}{r}\lambda^\mu[i]\partial f(ik)/\partial x^\mu(i)+\lambda^\mu[k]\partial f(ik)/\partial x^\mu(k)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda^\mu[i]\partial f(iw)/\partial x^\mu(i)+\lambda^\mu[w]\partial f(iw)/\partial x^\mu(w)=0\end{array}\right\}\qquad(10'')$$

и подсистему sn уравнений, коэффициенты которых содержат координаты точки j:

$$\left.\begin{array}{r}\lambda^\mu[j]\partial f(jk)/\partial x^\mu(j)+\lambda^\mu[k]\partial f(jk)/\partial x^\mu(k)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda^\mu[j]\partial f(jw)/\partial x^\mu(j)+\lambda^\mu[w]\partial f(jw)/\partial x^\mu(w)=0.\end{array}\right\}\qquad(10''')$$

Относительно sn неизвестных $\lambda^\mu[i]$ и $\lambda^\mu[j]$ выделенные подсистемы неоднородны и по аксиоме III из §1 имеют ранг sn. Но тогда $\lambda^\mu[i]$ и $\lambda^\mu[j]$ могут быть однозначно выражены через общее решение (12) подсистемы $(10')$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^\mu[i] &= c^\omega \lambda^\mu_\omega(i, < k \dots vw >), \\ \lambda^\mu[j] &= c^\omega \lambda^\mu_\omega(j, < k \dots vw >). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Ранг подсистемы системы уравнений (10) без первых s уравнений

$$\lambda^\mu[i]\partial f(ij)/\partial x^\mu(i) + \lambda^\mu[j]\partial f(ij)/\partial x^\mu(j) = 0 \tag{14}$$

равен рангу самой системы (10), в чем легко убедиться, составляя ее из подсистем $(10')$, $(10'')$ и $(10''')$. Поэтому первые s уравнений системы (10), то есть уравнения (14), являются следствием всех остальных и никаких дополнительных ограничений на решения (13) не налагают. Совокупность решений (12) и (13) подсистем $(10')$ и $(10'')$, $(10''')$ для $n \geqslant 2$, а также решение (11^*) системы (10^*) для $n = 1$ в соответствующей окрестности некоторого кортежа из $U(i) \times U(j) \times \dots \times U(w)$ для любого $n \geqslant 1$ задает общее решение системы (10), причем в этом решении координаты точек i и j входят явно в функции λ^μ_ω только для выражений $\lambda^\mu[i]$ и $\lambda^\mu[j]$ соответственно. Лемма 3 доказана.

Рассмотрим, далее, такой кортеж $< p \dots q > \in \mathfrak{M}^n$ длины $n \geqslant 2$, что любая упорядоченная по нему пара его точек принадлежит $\mathfrak{S}_f$. Множество таких кортежей, очевидно, открыто и плотно в $\mathfrak{M}^n$. Запишем систему уравнений $(10')$ для этого кортежа и некоторой его окрестности $U(p) \times \dots \times U(q)$. Эта система, как было показано выше, имеет не более $sn(n+1)/2$ линейно независимых ненулевых решений. Общее ее решение можно записать по решению (12) простой заменой точек кортежа $< kl \dots vw >$ на соответствующие точки кортежа $< p \dots q >$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^\mu[p] &= c^\omega \lambda^\mu_\omega(p, < p \dots q >), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda^\mu[q] &= c^\omega \lambda^\mu_\omega(q, < p \dots q >), \end{aligned}\right\} \tag{12*}$$

причем для совокупности точек кортежа $< p \dots q >$ и всех значений верхнего индекса μ функции λ^μ_ω линейно независимы в общем смысле по нижнему индексу ω. Случай $n = 1$ можно включить в решение (12*), полагая просто $\lambda^\mu[p] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(p, < p >)$.

Пусть i – такая точка из $\mathfrak{M}$, что все пары $< ip >, \ldots, < iq > \in \mathfrak{S}_f$. Запишем систему sn уравнений (10″) для кортежа $< ip \ldots q >$ длины $n + 1$ и некоторой его окрестности $U(i) \times U(p) \times \cdots \times U(q)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^\mu[i]\partial f(ip)/\partial x^\mu(i) + \lambda^\mu[p]\partial f(ip)/\partial x^\mu(p) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda^\mu[i]\partial f(iq)/\partial x^\mu(i) + \lambda^\mu[q]\partial f(iq)/\partial x^\mu(q) = 0. \end{array}\right\} \qquad (15)$$

Решение этой системы можно записать по решению (13):

$$\lambda^\mu[i] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i, < p \ldots q >), \qquad (16)$$

где, напомним, суммирование по "немому" индексу ω производится в пределах от 1 до $sn(n + 1)/2$.

Лемма 4. *Функции $\lambda^\mu_\omega(i, < p \ldots q >)$ в решении (16) системы уравнений (15) линейно независимы по нижнему индексу ω с коэффициентами $a^\omega = a^\omega(< p \ldots q >)$.*

Предположим противное, то есть что найдутся такие коэффициенты $a^\omega = a^\omega(< p \ldots q >)$, $\omega = 1, \ldots, sn(n + 1)/2$, не все равные нулю одновременно, с которыми для каждого значения индекса $\mu = 1, \ldots, sn$ имеет место соотношение $a^\omega \lambda^\mu_\omega(i, < p \ldots q >) = 0$. Естественно при этом, что хотя бы для одной из точек кортежа $< p \ldots q >$ и некоторого значения индекса μ в отношении функций λ^μ_ω решений (12*) будет выполняться неравенство $a^\omega \lambda^\mu_\omega \neq 0$, например, $a^\omega \lambda^\mu_\omega(p, < p \ldots q >) \neq 0$. Подставим выражение (16) для $\lambda^\mu[i]$ и выражение для $\lambda^\mu[p]$ из решений (12*) в первые s уравнений системы (15). С учетом независимости переменных коэффициентов c^ω имеем уравнения

$$\lambda^\mu_\omega(i, < p \ldots q >)\partial f(ip)/\partial x^\mu(i) + \lambda^\mu_\omega(p, < p \ldots q >)\partial f(ip)/\partial x^\mu(p) = 0,$$

где $\omega = 1, \ldots, sn(n + 1)/2$, из которых при сделанных предположениях получаем уравнение:

$$a^\omega \lambda^\mu_\omega(p, < p \ldots q >)\partial f(ip)/\partial x^\mu(p) = 0.$$

В полученном уравнении независимыми будут считаться компоненты s-метрики $f = (f^1, \ldots, f^s)$. Фиксируя в нем координаты всех точек кортежа $< ip \ldots q >$, кроме координат точек i и p, приходим для пары $< ip >$ к уравнению типа $(4')$, следствием которого является несущественная зависимость s-метрики $f(ip)$ от координат точки p, что, очевидно, приводит к противоречию с аксиомой III из §1. Значит, должно быть равенство $a^\omega \lambda^\mu_\omega(p, < p \ldots q >) = 0$. Аналогично устанавливается, что равенство $a^\omega \lambda^\mu_\omega = 0$ будет иметь место и для всех остальных точек кортежа $< p \ldots q >$ в решении (12^*). Однако это противоречит тому, что решение (12^*) системы $(10')$ для кортежа $< p \ldots q >$ общее и максимальное число ее линейно независимых (в общем смысле) ненулевых решений равно $sn(n+1)/2$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Множество решений (16) различных систем (15), отличающихся друг от друга выражениями* (12^*) *для множителей* $\lambda^\mu[p]$ $, \ldots, \lambda^\mu[q]$, *образуют линейное семейство.*

Пусть $\lambda[i]$ и $\tilde{\lambda}[i]$ два решения системы уравнений (15) с множителями $\lambda^\mu[p], \ldots, \lambda^\mu[q]$ и $\tilde{\lambda}^\mu[p], \ldots, \tilde{\lambda}^\mu[q]$ соответственно. Эти множители, в свою очередь, получаются из выражений общего решения (12^*) при подстановке каких-то коэффициентов c^ω и $\tilde{c^\omega}$. Тогда линейная комбинация $a\lambda[i] + \tilde{a}\tilde{\lambda}[i]$, где a и $\tilde{a}$ – произвольные постоянные, также будет решением системы (15) с множителями $a\lambda[p] + \tilde{a}\tilde{\lambda}[p], \ldots, a\lambda[q] + \tilde{a}\tilde{\lambda}[q]$, которые можно получить из общего решения (12^*) при подстановке коэффициентов $a\lambda + \tilde{a}\tilde{\lambda}$. Лемма 5 доказана.

Согласно аксиоме III из §1 в окрестности $U(p) \times \cdots \times U(q) \subset \mathfrak{M}^n$ найдется такой кортеж $< p_0 \ldots q_0 >$ длины n, что ранг функции $\bar{f}^n = \bar{f}[p_0 \ldots q_0]$ будет равен sn для некоторого плотного в $\mathfrak{M}$ множества точек i. Записывая системы уравнений (15) для кортежей $< ip_0 \ldots q_0 >$ длины $n+1$ и некоторых их окрестностей, получаем решения этих уравнений:

$$\lambda^\mu[i] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i, < p_0 \ldots q_0 >) = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i), \qquad (16')$$

которые по доказанной выше лемме 5 образуют линейное семейство, причем точка i принадлежит некоторому открытому и плотному в $\mathfrak{M}$ множеству.

Рассмотрим такой кортеж $< ijk \ldots vw > \in \mathfrak{S}_F$, что каждая его точка принадлежит области определения линейного семейства $(16')$. Множество таких кортежей, очевидно, открыто и плотно в $\mathfrak{S}_F$. Тогда в некоторой окрестности $U(i) \times U(j) \times \cdots \times U(w) \subset \mathfrak{S}_F$ определяется линейное семейство

$$\lambda^\mu[i] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i), \ldots, \lambda^\mu[w] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(w). \qquad (17)$$

Коэффициенты (17) являются некоторым решением системы (10), аналогично тому, как решения (13) подсистем ($10''$) и ($10'''$) являлись некоторым решением уравнений (14), то есть первых s уравнений системы (10). Беря для коэффициентов $(c^1, \ldots, c^{sn(n+1)/2})$ значения $(1, 0, \ldots, 0)$ $, \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$, получаем следующее множество решений системы (10):

$$\lambda^\mu_\omega(i), \lambda^\mu_\omega(j), \ldots, \lambda^\mu_\omega(w), \qquad (18)$$

где $\omega = 1, \ldots, sn(n+1)/2$. Эти решения, как следует из леммы 4, линейно независимы по нижнему индексу ω с коэффициентами $a^\omega = a^\omega(< p_0 \ldots q_0 >)$. Однако они оказываются линейно независимыми не только с этими постоянными коэффициентами, но и с переменными, то есть в общем смысле, что можно установить точно также, как это было сделано в отношении решений ($7'$) системы (6) при доказательстве леммы 2. Поскольку, с другой стороны, система (10) имеет не более $sn(n+1)/2$ линейно независимых в общем смысле ненулевых решений, ее общее решение может быть записано в форме (17) с произвольными переменными коэффициентами $c^\omega = c^\omega(< ijk \ldots vw >)$.

Каждое из $sn(n+1)/2$ решений (18) определяет в некоторой окрестности $U(i) \times U(j) \times \cdots \times U(w)$ исходного кортежа $< ijk \ldots vw >$ длины $m = n + 2$ гладкое векторное поле. Совокупность всех решений (18) образует базис $sn(n+1)/2$-мерного линейного семейства таких полей. Любое поле этого семейства может быть представленно в базисе (18) выражениями

$$\lambda^\mu(i) = a^\omega \lambda^\mu_\omega(i), \ldots, \lambda^\mu(w) = a^\omega \lambda^\mu_\omega(w), \qquad (19)$$

где, в отличие от аналогичных выражений (17), a^ω – постоянные коэффициенты.

Лемма 6. *Линейное $sn(n+1)/2$-мерное семейство гладких векторных полей (19) с базисом (18) замкнуто относительно операции коммутирования.*

Пусть векторное поле

$$\lambda^\mu(i), \lambda^\mu(j), \ldots, \lambda^\mu(w) \tag{20}$$

есть коммутатор каких-либо двух векторных полей семейства (19). Ясно, что коммутатор любых двух векторных полей этого семейства имеет форму (20), вследствие независимости координат, относящихся к различным точкам кортежа $< ijk \ldots vw >$. С другой стороны, коммутатор (20), очевидно, является некоторым решением системы (10). Поэтому коммутатор (20) может быть записан по ее общему решению (17):

$$\lambda^\mu(i) = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i), \ldots, \lambda^\mu(w) = c^\omega \lambda^\mu_\omega(w), \tag{21}$$

в котором коэффициенты c^ω, вообще говоря, могут быть некоторыми функциями координат точек кортежа ($< ijk \ldots vw >$). Убедимся, однако, в том, что в решении (21) коэффициенты c^ω, в действительности, постоянны. Для этого будем рассматривать совокупность выражений (21) как систему smn линейных, в общем случае, неоднородных уравнений относительно коэффициентов c^ω, где $\omega = 1, \ldots, sn(n+1)/2$. Выделим из нее подсистему $sn(n+1)/2$ уравнений, опуская выражения $\lambda^\mu(i) = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i)$, где $\mu = 1, \ldots, sn$. Столбцами матрицы этой подсистемы являются ненулевые решения $\lambda^\mu_\omega(j), \ldots, \lambda^\mu_\omega(w)$ уравнений ($10'$), ($10'''$) системы (10), линейная независимость которых в общем смысле устанавливается точно так же, как и линейная независимость в общем смысле решений ($7'$) системы (6) в доказательстве леммы 2. Таким образом, выделенная из системы (21) опусканием sn выражений для $\lambda^\mu(i)$ подсистема $sn(n+1)/2$ уравнений имеет ранг $sn(n+1)/2$, точно равный числу неизвестных коэффициентов c^ω, и потому ее решение может зависеть только от координат точек укороченного кортежа $< jk \ldots vw >$, то есть $c^\omega = c^\omega(< jk \ldots vw >)$. Подставим это решение в опущенные выражения:

$$\lambda^\mu(i) = c^\omega(< jk \ldots vw >)\lambda^\mu_\omega(i) \tag{22}$$

и предположим, что для некоторого коэффициента c^ω его производная по какой-либо из координат точек кортежа ($< jk \ldots vw >$) отлична от нуля. Дифференцируя правую и левую части выражений (22) по указанной координате, а затем фиксируя все координаты, кроме координаты точки i, приходим к соотношению $a^\omega \lambda^\mu_\omega(i) = 0$, в котором коэффициенты a^ω – постоянные и, по крайней мере, один из них отличен от нуля.

Но такой результат противоречит лемме 4, так как, по обозначению в решении $(16')$ $\lambda^\mu_\omega(i) = \lambda^\mu_\omega(i, < p_0 \dots q_0 >)$. Следовательно, в выражениях (21) для коммутатора (20) $c^\omega = const$, $\omega = 1, \dots, sn(n+1)/2$, то есть коммутатор (21) принадлежит семейству векторных полей (19), которое, тем самым, оказывается замкнутым относительно операции коммутирования. Лемма 6 доказана.

Линейное семейство гладких векторных полей (19) с базисом (18), замкнутое по лемме 6 относительно операции коммутирования, является $sn(n+1)/2$-мерной алгеброй Ли преобразований некоторой окрестности $U(i) \times U(j) \times \dots \times U(w)$ кортежа $< ijk \dots vw >$, множество которых открыто и плотно не только в $\mathfrak{S}_F$, но и, очевидно, в $\mathfrak{M}^m$, где $m = n+2$. В окрестности же $U(i)$ составляющей семейства (19)

$$\lambda^\mu(i) = a^\omega \lambda^\mu_\omega(i) \tag{23}$$

определяется $sn(n+1)/2$-мерное линейное семейство гладких векторных полей с теми же структурными константами коммутационных соотношений в базисе

$$\lambda^\mu_\omega(i), \tag{24}$$

что и у исходного семейства (19) в базисе (18). Поэтому семейство (23) является $sn(n+1)/2$-мерной алгеброй Ли преобразований окрестности $U(i)$, изоморфной алгебре (19), причем базисы (24) и (18) соответствуют друг другу.

Множество точек i, в некоторой окрестности $U(i)$ которых определены векторные поля $\lambda^\mu(i)$, открыто и плотно в $\mathfrak{M}$. Поэтому не конкретизируя обозначение точки i, векторные поля (23) удобно записать в общекоординатной операторной форме (5), а базисные векторные поля (24) – в операторной форме (3). Векторные поля $\lambda^\mu(i)$ и $\lambda^\mu(j)$, заданные в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ двух точек i и j, совпадают, очевидна, в пересечении $U(i) \cap U(j)$. Если пара $< ij >$ принадлежит $\mathfrak{S}_f$, то s-метрика $f(ij) = (f^1(ij) \dots, f^s(ij))$ удовлетворяет уравнению (14):

$$\lambda^\mu(i) \partial f(ij) / \partial x^\mu(i) + \lambda^\mu(j) \partial f(ij) / \partial x^\mu(j) = 0, \tag{25}$$

из которого в соответствующих базисах $\lambda^\mu_\omega(i)$ и $\lambda^\mu_\omega(j)$ получается система уравнений (4).

Согласно второй (обращенной) теореме С.Ли (см., например, [11], с.438) $sn(n+1)/2$-мерная алгебра Ли гладких векторных полей (23) с базисом (24) однозначно определяет эффективное гладкое действие $sn(n+1)/2$-мерной группы Ли в некоторой окрестности точки i, множество которых открыто и плотно в $\mathfrak{M}$, причем действия ее в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ двух точек i и j совпадают в пересечении $U(i) \cap U(j)$. То есть алгебра Ли векторных полей (23) (в операторной форме – (5)) с базисом (24) (в операторной форме – (3)) определяет $sn(n+1)/2$-мерную локальныю группу Ли локальных преобразований некоторого открытого и плотного в sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ множества, для которой s-метрика $f = (f^1, \ldots, f^s)$, удовлетворяющая уравнению (25), а в соответствующих базисах – системе уравнений (4), является двухточечным инвариантом. Теорема 1 полностью доказана.

Иноговым результатом изложенного в §1 и §2 является вывод об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий полиметрической геометрии, задаваемой на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ функцией $f = (f^1, \ldots, f^s)$. Эта эквивалентность является следствием доказанных выше теоремы из §1 и теоремы 1 из настоящего параграфа, необходимые и достаточные условия которых о ранге отображения F совпадают.

Теорема 2. *Для того, чтобы функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$ задавала на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ полиметрическую феноменологически симметричную геометрию (физическую структуру) ранга $m = n+2$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция задавала на $\mathfrak{M}$ полиметрическую геометрию, наделенную групповой симметрией степени $sn(n+1)/2$.*

Заметим, что условие о ранге отображения F можно сформулировать как четвертую аксиому в определении полиметрической геометрии. Такая геометря будет, с одной стороны, феноменологически симметрична, а с другой стороны – наделена групповой симметрией, причем обе симметрии в смысле теоремы 2 окажутся эквивалентными.

Теорема 3. *Размерность локальной группы локальных движений, допускаемых s-метрикой $f = (f^1, \ldots, f^s)$, задающей на sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию ранга $m = n+2$, или геометрию, наделенную групповой симметрией степени $sn(n+1)/2$, не превышает этой степени.*

Предположим противное, то есть что s-метрика $f = (f^1, \dots, f^s)$ допускает группу движений, размерность которой более $sn(n+1)/2$. Тогда система уравнений (6) будет иметь более $sn(n+1)/2$ линейно независимых с постоянными коэффициентами ненулевых решений. Эти решения будут также линейно независимы и с переменными коэффициентами, то есть в общем смысле. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно повторить рассуждения, следующие за системой уравнений (8) в доказательстве леммы 2. Поскольку система (6) в предполагаемом случае имеет более чем $sn(n+1)/2$ линейно независимых в общем смысле ненулевых решений, ранг ее матрицы, то есть функциональной матрицы (4) из §1, должен быть меньше $sm(m-1)/2 - s$, где $m = n+2$. Однако это противоречит следствию леммы 1 из §1. Полученное противоречие и доказывает теорему 3.

§3. Классификация двуметрических геометрий на плоскости

Одной из основных задач теории физических структур является отыскание явного вида s-метрики $f = (f^1, \dots, f^s)$ в ее локальном координатном представлении (2) из §1, удовлетворяющей некоторой системе s уравнений (1) из §1. Как было отмечено во Введении, в случае $s = 1$ эта задача была решена полностью для прямой ($n = 1$), плоскости ($n = 2$) и пространства ($n = 3$). Поэтому в настоящем §3 и следующих §4, §5 будут рассмотрены случаи $s = 2$ на плоскости ($n = 1$) и $s = 3$ в пространстве ($n = 1$), то есть двуметрические и триметрические феноменологически симметричные геометрии минимального ранга.

Определение. Будем говорить, что гладкие функции $f : \mathfrak{S}_f \to R^s$ и $g : \mathfrak{S}_g \to R^s$ с открытыми и плотными в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ областями определения $\mathfrak{S}_f$ и $\mathfrak{S}_g$ эквивалентны, если существуют такие локальные диффеоморфизмы $\lambda : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, $\psi : R^s \to R^s$, что для открытого и плотного в $\mathfrak{S}_f$ множества пар $< ij >$ пара $< \lambda(i), \lambda(j) >$ принадлежит $\mathfrak{S}_g$ и имеет место соотношение $f(ij) = \psi(g(\lambda(i), \lambda(j)))$.

Согласно теореме 2 из §2 s-метрика феноменологически симметричной геометрии ранга $m = n + 2$ на sn-мерном многообразии допускает

$sn(n+1)/2$-мерную группу движений. Таким образом, 2-метрика феноменологически симметричной ранга 3 геометрии на двумерном многообразии, для которой $s=2$ и $n=1$, допускает двумерную группу движений. Пусть x, y – локальные координаты в многообразии, которое в некоторой окрестности своих точек является плоскостью. Тогда для 2-метрики $f=(f^1, f^2)$ по выражению (2) из §1 в некоторой окрестности пары $< ij > \in \mathfrak{S}_f$ получаем такое координатное представление:

$$f(ij) = f(x(i), y(i), x(j), y(j)) \tag{1}$$

или в более подробной записи по компонентам:

$$\left.\begin{array}{r} f^1(ij) = f^1(x(i), y(i), x(j), y(j)), \\ f^2(ij) = f^2(x(i), y(i), x(j), y(j)). \end{array}\right\} \tag{1'}$$

В соответствии с аксиомой III из §1 2-метрика (1) будет невырожденной, если выполняются следующие два условия:

$$\left.\begin{array}{r} \partial(f^1(ij), f^2(ij))/\partial(x(i), y(i)) \neq 0, \\ \partial(f^1(ij), f^2(ij))/\partial(x(j), y(j)) \neq 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

для открытого и плотного в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ множества пар $< ij >$.

Если 2-метрика (1) задает на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию ранга 3, то для любой тройки $< ijk >$ из плотного и открытого в $\mathfrak{M}^3$ множества, такой что пары $< ij >, < ik >, < jk >$ принадлежат $\mathfrak{S}_f$, шесть взаимных расстояний между точками i, j, k функционально связаны двумя независимыми уравнениями:

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(jk)) = 0, \tag{3}$$

или, в более подробной записи по компонентам:

$$\left.\begin{array}{r} \Phi_1(f^1(ij), f^2(ij), f^1(ik), f^2(ik), f^1(jk), f^2(jk)) = 0, \\ \Phi_2(f^1(ij), f^2(ij), f^1(ik), f^2(ik), f^1(jk), f^2(jk)) = 0. \end{array}\right\} \tag{3'}$$

Независимость уравнений (3) означает, что $rang \Phi = 2$.

2-метрика (1), как уже было сказано выше, допускает двумерную группу движений, то есть таких эффективных гладких локальных действий в плоскости некоторой двухпараметической локальной группы Ли G^2:

$$x' = \lambda(x, y; a^1, a^2), \quad y' = \sigma(x, y; a^1, a^2), \tag{4}$$

где $a = (a^1, a^2) \in G^2$, что каждая компонента 2-метрики сохраняется:

$$f(x'(i), y'(i), x'(j), y'(j)) = f(x(i), y(i), x(j), y(j)). \tag{5}$$

Запишем базисные векторные поля X_1, X_2 двумерной алгебры Ли локальных преобразований (4) двумерного многообразия $\mathfrak{M}$ в операторной форме:

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \lambda_1(x,y)\partial_x + \sigma_1(x,y)\partial_y, \\ X_2 = \lambda_2(x,y)\partial_x + \sigma_2(x,y)\partial_y, \end{array}\right\} \tag{6}$$

где $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$ и, например, $\lambda_1(x,y) = \partial\lambda(x,y;a^1,a^2) /\partial a^1|_{a^1=a^2=0}$, предполагая, что при $a^1 = a^2 = 0$ имеем тождественное преобразование в группе (4). 2-метрика (1), будучи по равенству (5) двухточечным инвариантом группы преобразований (4), необходимо является решением системы дифференциальных уравнений (4) из §2 с операторами (6):

$$\left.\begin{array}{r} X_1(i)f(ij) + X_1(j)f(ij) = 0, \\ X_2(i)f(ij) + X_2(j)f(ij) = 0. \end{array}\right\} \tag{7}$$

В отношении системы двух уравнений (7), так же как и в отношении более общей системы (4) из §2, содержащей $sn(n+1)/2$ уравнений, частным случаем которой является система (7) при $s = 2$ и $n = 1$, необходимо отметить следующее неочевидное обстоятельство. Алгебры Ли преобразований окрестностей $U(i)$ и $U(j)$ изоморфны с точностью до совпадения структурных констант в соответствующих базисах. Но базисые операторы $X_1(i)$, $X_2(i)$ и $X_1(j)$, $X_2(j)$ (или $X_\omega(i)$ и $X_\omega(j)$, где $\omega = 1, 2, \ldots, sn(n+1)/2$ в общем случае системы уравнений (4) из §2) не обязательно переходят друг в друга при некотором диффеоморфизме $U(i) \to U(j)$. В частности, это может быть тогда, когда точки i и j принадлежат различным несвязным компонентам многообразия, в котором действует группа преобразований.

В свое время (1893) Софус Ли дал полную классификацию конечномерных локальных групп преобразований плоскости [13], которая воспроизведена также в монографии [14] на стр. 25 – 26. Из этой классификации можно выделить базисные операторы (6) всех двумерных алгебр Ли преобразований плоскости. Нам, однако, удобнее будет для демонстрации методов, отличных от соответствующих методов Софуса Ли, провести эту простую классификацию независимо, рассматривая двумерную алгебру Ли преобразований плоскости как представление двумерной абстрактной вещественной алгебры операторами (6). Эти методы будут использованы в следующем §4 для классификации всех локальных действий трехмерной группы Ли G^3 в пространстве, которая необходима для классификации в нем всех феноменологически инвариантных 3-метрик ранга 3.

Хорошо известно, что с точностью до изоморфизма имеются всего две двумерные абстрактные вещественные алгебры Ли. В некотором базисе X_1, X_2 коммутатор $[X_1, X_2]$ либо равен нулю, либо отличен от нуля:

$$[X_1, X_2] = 0, \tag{8}$$

$$[X_1, X_2] = X_1. \tag{9}$$

Лемма. *Базисные операторы (6) двумерной алгебры Ли локальной группы Ли локальных преобразований двумерного многообразия, имеющей в этом базисе структуру коммутационных соотношений (8), (9), в надлежаще выбранной системе локальных координат (x, y) задаются следующими выражениями:*

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x; \tag{8.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y; \tag{8.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x; \tag{9.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x + \partial_y. \tag{9.2}$$

Осуществим в выражениях (6) для операторов X_1, X_2 обратимую замену локальных координат

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

где, вследствие ее обратимости, $\partial(\varphi, \psi)/\partial(x, y) \neq 0$:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = (\lambda_1 \varphi_x + \sigma_1 \varphi_y)\partial_\xi + (\lambda_1 \psi_x + \sigma_1 \psi_y)\partial_\eta, \\ X_2 = (\lambda_2 \varphi_x + \sigma_2 \varphi_y)\partial_\xi + (\lambda_2 \psi_x + \sigma_2 \psi_y)\partial_\eta. \end{array}\right\}$$

Если функции φ и ψ взять из решений интегрируемых уравнений $\lambda_1 \varphi_x + \sigma_1 \varphi_y = 1$ и $\lambda_1 \psi_x + \sigma_1 \psi_y = 0$, в которых $\lambda_1^2 + \sigma_1^2 \neq 0$, так как базисный оператор X_1 ненулевой, то для него получим максимально простое выражение: $X_1 = \partial_\xi$. Возвращаясь к прежним обозначениям коэффициентов и координат, а также опуская ставший излишним индекс "2", можем записать:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \lambda(x, y)\partial_x + \sigma(x, y)\partial_y. \tag{10}$$

Заметим, что полученные выражения (10) допускают замену координат

$$\xi = x + \varphi(y), \quad \eta = \psi(y) \tag{11}$$

с $\psi' \neq 0$, которая сохраняет за оператором X_1 его максимально простую форму.

Подставим сначала операторы (10) в коммутатор (8): $\lambda_x \partial_x + \sigma_x \partial_y = 0$, откуда, в силу линейной независимости операторов дифференцирования ∂_x и ∂_y, следует, что $\lambda_x = 0$, $\sigma_x = 0$, то есть $\lambda(x, y) = \lambda(y)$, $\sigma(x, y) = \sigma(y)$, и потому $X_2 = \lambda(y)\partial_x + \sigma(y)\partial_y$. В этом выражении осуществим допустимую замену координат (11):

$$X_2 = (\lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y))\partial_\xi + \sigma(y)\psi'(y)\partial_\eta.$$

Если $\sigma(y) = 0$, то $X_2 = \lambda_y \partial_\xi$, причем $\lambda'(y) \neq 0$, так как операторы X_1 и X_2 линейно независимы. Полагая $\psi(y) = \lambda(y)$ и возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем выражения (8.1) для базисных операторов X_1, X_2 первого представления алгебры (8). Если же $\sigma(y) \neq 0$, то пусть функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ замены координат (11) являются решениями уравнений $\lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y) = 0$ и $\sigma(y)\psi'(y) = 1$. В этом случае в прежних обозначениях координат получим выражения (8.2) для базисных операторов X_1, X_2 второго представления алгебры (8).

Подставим теперь операторы (10) в коммутатор (9): $\lambda_x \partial_x + \sigma_x \partial_y = \partial_x$, откуда следует: $\lambda_x = 1$, $\sigma_x = 0$ и после интегрирования: $\lambda(x, y) =$

$x + \lambda(y)$, $\sigma(x, y) = \sigma(y)$. Для оператора X_2, следовательно, имеем выражение $X_2 = (x + \lambda(y))\partial_x + \sigma(y)\partial_y$, в котором произведем допустимую замену координат (11):

$$X_2 = (x + \lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y))\partial_\xi + \sigma(y)\psi'(y)\partial_\eta .$$

Если $\sigma(y) = 0$, то $X_2 = (x+\lambda(y))\partial_\xi$. Полагая $\varphi(y) = \lambda(y)$, в прежних обозначениях координат получаем выражения (9.1) для базисных операторов X_1, X_2 первого представления алгебры (9). Если же $\sigma(y) \neq 0$, то функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ можно взять из решений уравнений $\lambda(y)-\varphi(y)+\sigma(y)\varphi'(y) = 0$ и $\sigma(y)\psi'(y) = 1$. В этом случае, возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем выражения (9.2) для базисных операторов X_1, X_2 второго представления алгебры (9). Лемма доказана,

Результаты леммы совпадают с соответствующими результатами С.Ли, извлеченными из его полной классификации (см. выражения 18, 30 и 27, 29 по списку алгебр, помещенному на стр. 25 – 26 монографии [14]). Заметим, что такого совпадения могло и не быть, так как свою классификацию С.Ли проводил с точностью до подобия, допускающего не только замену координат в плоскости, но и переход к другому базису с сохранением структурных констант.

Теорема. *С точностью до эквивалентности существуют только две невырожденные 2-метрики $f = (f^1, f^2)$, задающие на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию ранга 3. В надлежаще выбранной системе локальных координат x, y эти 2-метрики могут быть представлены следующими выражениями:*

$$f^1(ij) = x(i) - x(j), \quad f^2(ij) = y(i) - y(j); \tag{12}$$

$$f^1(ij) = (x(i) - x(j))\ y(i), \quad f^2(ij) = (x(i) - x(j))\ y(j). \tag{13}$$

Компоненты 2-метрик $f = (f^1, f^2)$ являются независимыми решениями системы уравнений (7). Для базисных операторов (8.1) и (8.2) представлений алгебры Ли (8), учитывая замечание, сделанное после уравнений (7), можно записать только три принципиально различных системы:

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\ y(i)\partial f(ij)/\partial x(i) + y(j)\partial f(ij)/\partial x(j) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{array}{r}\partial f(ij)/\partial x(i)+\partial f(ij)/\partial x(j)=0,\\ \partial f(ij)/\partial y(i)+\partial f(ij)/\partial y(j)=0;\end{array}\right\}\qquad(15)$$

$$\left.\begin{array}{r}\partial f(ij)/\partial x(i)+\partial f(ij)/\partial x(j)=0,\\ y(i)\partial f(ij)/\partial x(i)+\partial f(ij)/\partial y(j)=0,\end{array}\right\}\qquad(16)$$

ранг которых равен двум. Поскольку в уравнениях (14) и (16) отсутствует оператор дифференцирования $\partial/\partial y(i)$, их независимыми решениями будут функции $y(i)$ и $\varphi(ij)$. То есть для 2-метрики потлучаем выражение $f(ij)=f(y(i),\varphi(ij))$. Поскольку для нее не выполняется второе из условий (2), такая 2-метрика оказывается вырожденной. С другой стороны, два независимых решения системы (15), которые легко находятся методом характеристик, совпадают в своем явном координатном представлении с компонентами 2-метрики (12). Эта 2-метрика невырождена, так как оба якобиана из условия (2) равны единице для нее, то есть отличны от нуля. Общий вид 2-метрики в тех же координатах будет, очевидно, следующим: $f^1(ij)=\psi^1(x(i)-x(j),y(i)-y(j))$, $f^2(ij)=\psi^2(x(i)-x(j),y(i)-y(j))$, где $\psi=(\psi^1,\psi^2)$ – произвольная гладкая двухкомпонентная функция двух переменных ранга 2.

Для базисных операторов (9.1) и (9.2) представлений алгебры (9) также имеем три принципиально различные системы уравнений (7):

$$\left.\begin{array}{r}\partial f(ij)/\partial x(i)+\partial f(ij)/\partial x(j)=0,\\ x(i)\partial f(ij)/\partial x(i)+x(j)\partial f(ij)/\partial x(j)=0;\end{array}\right\}\qquad(17)$$

$$\left.\begin{array}{r}\partial f(ij)/\partial x(i)+\partial f(ij)/\partial x(j)=0,\\ x(i)\partial f(ij)/\partial x(i)+\partial f(ij)/\partial y(i)+\\ +x(j)\partial f(ij)/\partial x(j)+\partial f(ij)/\partial y(j)=0;\end{array}\right\}\qquad(18)$$

$$\left.\begin{array}{r}\partial f(ij)/\partial x(i)+\partial f(ij)/\partial x(j)=0,\\ x(i)\partial f(ij)/\partial x(i)+x(j)\partial f(ij)/\partial x(j)+\partial f(ij)/\partial y(j)=0,\end{array}\right\}\qquad(19)$$

ранг которых равен двум. 2-метрики, являющиеся решениями систем уравнений (17) и (19), в которых нет оператора $\partial/\partial y(i)$, очевидно, вырождены. Общее решение $f(ij)=\chi(x(i)-x(j),y(i),y(j))$ первого уравнения системы (18) подставим во второе: $u\chi_u+\chi_{y(i)}+\chi_{y(j)}=0$, где

$u = x(i) - x(j)$. Соответствующая система уравнений характеристик $du/u = dy(i) = dy(j)$ имеет два независимых интеграла: $uexp(-y(i)) = const$, $uexp(-y(j)) = const$, по которым можно определить компоненты 2-метрики: $f(ij) = (f^1(ij), f^2(ij)) = ((x(i) - x(j))exp(-y(i)), (x(i) - x(j))exp(-y(j)))$. Произведя затем удобную замену координат $x \to x$, $exp(-y) \to y$, получаем 2-метрику (13), которая невырождена, так как для нее якобианы (2) отличны от нуля. Общий вид 2-метрики задается выражением $f(ij) = \psi(x(i) - x(j))y(i), x(i) - x(j))y(j))$, где ψ – произвольная гладкая двухкомпонентная функция двух переменных ранга 2. Теорема доказана.

Компоненты 2-метрики (12) можно, например, интерпретировать проекциями вектора на координатные оси. Соответствующая функциональная связь (3) задается двумя независимыми уравнениями

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij) - f^1(ik) + f^1(jk) = 0, \\ f^2(ij) - f^2(ik) + f^2(jk) = 0. \end{array}\right\}$$

2-метрика (13) допускает содержательную интерпретацию в термодинамике, о чем говорилось уже во Введении. В этой интерпретации компоненты $f^1(ij)$ и $f^2(ij)$ суть количества тепла $Q^{TS}(ij)$ и $Q^{ST}(ij)$, которые термодинамическая система отдает внешним телам при ее переходе из состояния i в состояние j по двум путям: TS и ST, составленным из равновесных изотермического ($T = const$) и адиабатического ($S = const$) процессов:

$$\left.\begin{array}{c} f^1(ij) = Q^{TS}(ij) = (S(i) - S(j))T(i), \\ f^2(ij) = Q^{ST}(ij) = (S(i) - S(j))T(j), \end{array}\right\}$$

где T и S – температура и энтропия системы. Соответствующая функциональная связь (7) задается двумя независимыми уравнениями (10) из Введения.

Переходя, далее к классификации триметрических феноменологически симметричных геометрий ранга 3 в пространстве, то есть к случаю $s = 3$, $n = 1$, заметим, что по теореме 2 из §2 соответствующая 3-метрика $f = (f^1, f^2, f^3)$ допускает трехмерную группу движений и является решением системы уравнений (4) из §2, где $\omega = 1, 2, 3$. Поэтому естественно возникает задача предварительной полной классификации трехмерных групп Ли преобразований пространства. Имея в виду объемность такой задачи, а также собственную значимость результатов и методов ее решения, посвятим ей весь следующий параграф.

§4. Трехмерные алгебры Ли преобразований пространства

Рассмотрим трехмерную локальную группу Ли локальных преобразований пространства, то есть трехмерного многообразия в некоторой его окрестности. Если (x, y, z) –локальные координаты преобразуемого многообразия и $a = (a^1, a^2, a^3)$ – локальные параметры действующей группы Ли G^3, то преобразования будут задаваться следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda(x, y, z; a^1, a^2, a^3), \\ y' &= \sigma(x, y, z; a^1, a^2, a^3), \\ z' &= \tau(x, y, z; a^1, a^2, a^3), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

причем $\partial(\lambda, \sigma, \tau)/\partial(x, y, z) \neq 0$ вследствие их обратимости. При специальном выборе параметров действующей в R^3 группы G^3, когда их нулевым значениям и, вследствие эффективности действия (1), только им соответствует тождественное преобразование $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование, близкое к тождественному, запишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + \lambda_1(x, y, z)a^1 + \lambda_2(x, y, z)a^2 + \lambda_3(x, y, z)a^3, \\ y' &= y + \sigma_1(x, y, z)a^1 + \sigma_2(x, y, z)a^2 + \sigma_3(x, y, z)a^3, \\ z' &= z + \tau_1(x, y, z)a^1 + \tau_2(x, y, z)a^2 + \tau_3(x, y, z)a^3, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где, например, $\lambda_1 = (\partial\lambda/\partial a^1)|_{a=0}$.

Операторы

$$X_\alpha = \lambda_\alpha(x, y, z)\partial_x + \sigma_\alpha(x, y, z)\partial_y + \tau_\alpha(x, y, z)\partial_z, \tag{3}$$

где $\alpha = 1, 2, 3$, $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_z = \partial/\partial z$, линейно независимы, однозначно задают инфинитезимальные преобразования (2) и составляют естественный координатный базис трехмерной алгебры Ли преобразований R^3 с коммутаторами

$$[X_\alpha, X_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma,$$

причем структурные константы $C^\gamma_{\alpha\beta}$, как известно, антисимметричны по нижним индексам α, β и удовлетворяют тождеству Якоби:

$$C^\delta_{\alpha\beta} C^\varepsilon_{\delta\gamma} + C^\delta_{\beta\gamma} C^\varepsilon_{\delta\alpha} + C^\delta_{\gamma\alpha} C^\varepsilon_{\delta\beta} = 0.$$

Полная с точностью до изоморфизма классификация трехмерных вещественных абстрактных алгебр Ли была дана Бианки в 1918 г. Приведем ее здесь по монографии [15], записывая соответствующие выражения для трех возможных коммутаторов $[X_1, X_2]$, $[X_3, X_1]$, $[X_2, X_3]$ базисных векторов X_1, X_2, X_3:

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = 0, \quad [X_2, X_3] = 0; \tag{4}$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = 0, \quad [X_2, X_3] = X_1; \tag{5}$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \quad [X_2, X_3] = X_1 + X_2; \tag{6}$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \quad [X_2, X_3] = pX_2; \tag{7}$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \quad [X_2, X_3] = X_2; \tag{8}$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \quad [X_2, X_3] = 0; \tag{9}$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \quad [X_2, X_3] = -X_2; \tag{10}$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_2, \quad [X_2, X_3] = -X_1 + qX_2; \tag{11}$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_2, \quad [X_2, X_3] = -X_1; \tag{12}$$

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_3, X_1] = X_2, \quad [X_2, X_3] = X_1; \tag{13}$$

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_3, X_1] = X_2, \quad [X_2, X_3] = -X_1, \tag{14}$$

где $0 < p^2 < 1$ и $0 < q < 2$.

Теорема. *Базисные операторы (3) трехмерной алгебры Ли локальных преобразований пространства, имеющей в базисе X_1, X_2, X_3 структуру коммутационных соотношений (4) – (14), в надлежаще* *выбранной системе локальных координат* (x, y, z) *задаются следующими выражениями:*

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = \lambda(y)\partial_x; \tag{4.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = z\partial_x; \tag{4.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = \partial_z; \tag{4.3}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \lambda(z)\partial_x + \sigma(z)\partial_y; \tag{4.4}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z; \tag{4.5}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = -\partial_y; \tag{5.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x + \delta\partial_y; \tag{5.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x + z\partial_y; \tag{5.3}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x + \partial_z; \tag{5.4}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x - \partial_y; \tag{6.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = (x+y)\partial_x + y\partial_y; \tag{6.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = (x+y)\partial_x + y\partial_y + \partial_z; \tag{6.3}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x + (1-p)y\partial_y; \tag{7.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + py\partial_y; \tag{7.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + py\partial_y + \partial_z; \tag{7.3}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x; \tag{8.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x + \partial_z; \tag{8.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + y\partial_y; \tag{8.3}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + y\partial_y + \partial_z; \tag{8.4}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x + y\partial_y; \tag{9.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + \delta\partial_y; \tag{9.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + z\partial_y; \tag{9.3}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + \partial_z; \tag{9.4}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x + 2y\partial_y; \tag{10.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x - y\partial_y; \tag{10.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x - y\partial_y + \partial_z; \tag{10.3}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = xy\partial_x + (1 - qy + y^2)\partial_y; \tag{11.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -y\partial_x + (x + qy)\partial_y; \tag{11.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -y\partial_x + (x + qy)\partial_y + \partial_z; \tag{11.3}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = xy\partial_x + (1+y^2)\partial_y; \tag{12.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -y\partial_x + x\partial_y; \tag{12.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -y\partial_x + x\partial_y + \partial_z; \tag{12.3}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= tgy\ \sin x\partial_x + \cos x\partial_y, \\ X_3 &= tgy\ \cos x\partial_x - \sin x\partial_y; \end{aligned}\right\} \tag{13.1}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= tgy\ \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \sec y\ \sin x\partial_z, \\ X_3 &= tgy\ \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \sec y\ \cos x\partial_z; \end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \sin x\partial_x, \quad X_3 = \cos x\partial_x; \tag{14.1}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \sin x\partial_x + \cos x\partial_y, \\ X_3 &= \cos x\partial_x - \sin x\partial_y; \end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= -thy\ \sin x\partial_x + \cos x\partial_y, \\ X_3 &= -thy\ \cos x\partial_x - \sin x\partial_y; \end{aligned}\right\} \tag{14.3}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= -cthy\ \sin x\partial_x + \cos x\partial_y, \\ X_3 &= -cthy\ \cos x\partial_x - \sin x\partial_y; \end{aligned}\right\} \tag{14.4}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \exp y\ \sin x\partial_z, \\ X_3 &= \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \exp y\ \cos x\partial_z, \end{aligned}\right\} \tag{14.5}$$

где $0 < p^2 < 1$ *и* $0 < q < 2$; $\lambda''(y) \neq 0$, $(\lambda'(z))^2 + (\sigma'(z))^2 \neq 0$, δ *– любое число.*

В пространстве R^3 произведем локально обратимую гладкую замену координат

$$\xi = \varphi(x, y, z), \quad \eta = \psi(x, y, z), \quad \vartheta = \varkappa(x, y, z), \tag{15}$$

причем $\partial(\varphi, \psi, \varkappa)/\partial(x, y, z) \neq 0$. В новых координатах ξ, η, ϑ для инфинитезимальных операторов (3) будем иметь такие выражения:

$$\begin{gathered} X_\alpha = (\lambda_\alpha \varphi_x + \sigma_\alpha \varphi_y + \tau_\alpha \varphi_z)\partial_\xi + \\ +(\lambda_\alpha \psi_x + \sigma_\alpha \psi_y + \tau_\alpha \psi_z)\partial_\eta + (\lambda_\alpha \varkappa_x + \sigma_\alpha \varkappa_y + \tau_\alpha \varkappa_z)\partial_\vartheta. \end{gathered} \tag{16}$$

Пусть функции φ, ψ, $\varkappa$ в замене координат (15) являются независимыми решениями системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 \varphi_x + \sigma_1 \varphi_y + \tau_1 \varphi_z &= 1, \\ \lambda_1 \psi_x + \sigma_1 \psi_y + \tau_1 \psi_z &= 0, \\ \lambda_1 \varkappa_x + \sigma_1 \varkappa_y + \tau_1 \varkappa_z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

в которой, очевидно, $\lambda_1^2 + \sigma_1^2 + \tau_1^2 \neq 0$. Тогда для оператора X_1 получаем максимально простое выражение: $X_1 = \partial_\xi$. Возвращаясь в (16) к прежним обозначениям коэффициентов и координат, можем записать:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \lambda_2(x, y, z)\partial_x + \sigma_2(x, y, z)\partial_y + \tau_2(x, y, z)\partial_z, \\ X_3 &= \lambda_3(x, y, z)\partial_x + \sigma_3(x, y, z)\partial_y + \tau_3(x, y, z)\partial_z. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

В полученных выражениях (18) имеем: $\lambda_1 = 1$, $\sigma_1 = 0$, $\tau_1 = 0$. Система уравнений (17) с такими коэффициентами значительно упрощается: $\varphi_x = 1$, $\psi_x = 0$, $\varkappa_x = 0$ и ее независимые решения

$$\xi = x + \varphi(y, z), \quad \eta = \psi(y, z), \quad \vartheta = \varkappa(y, z), \tag{19}$$

в которых $\partial(\psi, \varkappa)/\partial(y, z) \neq 0$, определяют такую замену координат в R^3, которая за оператором X_1 сохраняет его простейшую форму.

По классификации (4) – (14) коммутатор $[X_1, X_2]$ либо равен нулю, либо совпадает с оператором X_3. Рассмотрим сначала первый случай:

$$[X_1, X_2] = 0. \tag{20}$$

Подставим в коммутатор (20) выражения (18) для операторов X_1 и X_2. В результате получаем уравнения $\lambda_{2x} = 0$, $\sigma_{2x} = 0$, $\tau_{2x} = 0$ с решениями $\lambda_2 = \lambda(y, z)$, $\sigma_2 = \sigma(y, z)$, $\tau_2 = \tau(y, z)$ и потому

$$X_2 = \lambda(y, z)\partial_x + \sigma(y, z)\partial_y + \tau(y, z)\partial_z.$$

Осуществим, далее, допустимую замену координат (19):

$$X_2 = (\lambda + \sigma\varphi_y + \tau\varphi_z)\partial_\xi + (\sigma\psi_y + \tau\psi_z)\partial_\eta + (\sigma\varkappa_y + \tau\varkappa_z)\partial_\vartheta .$$

Предположим сначала, что $\sigma^2 + \tau^2 = 0$. Тогда необходимо должно быть $\lambda \neq const$, так как операторы X_1 и X_2 линейно независимы. Полагая $\psi = \lambda$, для оператора X_2 получаем: $X_2 = \eta\partial_\xi$ и, возвращаясь к прежним обозначениям координат, можем записать выражения

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \\ X_3 = \lambda(x,y,z)\partial_x + \sigma(x,y,z)\partial_y + \tau(x,y,z)\partial_z, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

сохраняющиеся при замене координат

$$\xi = x + \varphi(y,z), \quad \eta = y, \quad \vartheta = \varkappa(y,z), \tag{22}$$

где $\varkappa_z \neq 0$.

Если же $\sigma^2 + \tau^2 \neq 0$, то функции φ, ψ, $\varkappa$ в замене координат (19) возьмем из таких решений уравнений $\lambda + \sigma\varphi_y + \tau\varphi_z = 0$, $\sigma\psi_y + \tau\psi_z = 1$, $\sigma\varkappa_y + \tau\varkappa_z = 0$, для которых $\partial(\psi,\varkappa)/\partial(y,z) \neq 0$. Очевидно, что такие решения существуют. Тогда для оператора X_2 получаем: $X_2 = \partial_\eta$ и, возвращаясь к прежним обозначениям координат, приходим к выражениям

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \\ X_3 = \lambda(x,y,z)\partial_x + \sigma(x,y,z)\partial_y + \tau(x,y,z)\partial_z \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

с допустимой заменой координат

$$\xi = x + \varphi(z), \quad \eta = y + \psi(z), \quad \vartheta = \varkappa(z), \tag{24}$$

в которой $\varkappa'(z) \neq 0$.

Итак, коммутирование операторов X_1, X_2 в рассмотренном выше случае (20) привело к двум выражениям (21) и (23) с допустимыми заменами координат (22) и (24) соответственно.

Обратимся теперь ко второму коммутатору $[X_3, X_1]$, который для случая (20) согласно классификации (4) – (14) может быть равен 0, $-X_1$ и $-X_2$.

Пусть

$$[X_3, X_1] = 0. \tag{25}$$

Для операторов (21) коммутационное соотношение (25) приводит к уравнениям $\lambda_x = 0$, $\sigma_x = 0$, $\tau_x = 0$, решая которые находим выражение для оператора X_3:

$$X_3 = \lambda(y,z)\partial_x + \sigma(y,z)\partial_y + \tau(y,z)\partial_z\,. \tag{26}$$

Произведем в операторе (26) допустимую замену координат (22):

$$X_2 = (\lambda + \sigma\varphi_y + \tau\varphi_z)\partial_\xi + \sigma\partial_\eta + (\sigma\varkappa_y + \tau\varkappa_z)\partial_\vartheta\,.$$

Предположим, что $\sigma^2+\tau^2 = 0$ и $\lambda_z = 0$, то есть $\lambda(y,z) = \lambda(y)$. Тогда $X_3 = \lambda(\eta)\partial_\xi$ и в прежних обозначениях координат получаем выражения

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = \lambda(y)\partial_x\,. \tag{27}$$

причем $\lambda''(y) \neq 0$, так как операторы X_1, X_2, X_3 линейно независимы.

Если же $\sigma^2 + \tau^2 = 0$ и $\lambda_z \neq 0$, то полагаем $\varkappa = \lambda$. Тогда $X_3 = \vartheta\partial_\xi$ и в прежних обозначениях координат приходим к выражениям

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = z\partial_x. \tag{28}$$

Предположим, далее, что $\sigma^2+\tau^2 \neq 0$ и $\sigma = 0$. Функции φ и $\varkappa$ возьмем из решений уравнений $\lambda + \tau\varphi_z = 0$, $\tau\varkappa_z = 1$. Тогда для X_3 получаем выражение $X_3 = \partial_\vartheta$ и в прежних обозначениях координат

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = \partial_z\,. \tag{29}$$

Если же $\sigma^2 + \tau^2 \neq 0$ и $\sigma \neq 0$, то функции φ и $\varkappa$ возьмем из таких решений уравнений $\lambda + \sigma\varphi_y + \tau\varphi_z = 0$, $\sigma\varkappa_y + \tau\varkappa_z = 0$, для которых $\varkappa_z \neq 0$. Тогда $X_3 = \tilde{\sigma}(\eta,\vartheta)\partial_\eta$. Возвращаясь к прежним обозначениям коэффициентов и координат, получаем:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = \sigma(y,z)\partial_y\,. \tag{30}$$

При подстановке операторов (23) в коммутатор (25) аналогично получаем уравнения $\lambda_x = 0$, $\sigma_x = 0$, $\tau_x = 0$ и, следовательно, выражение (26) для оператора X_3:

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \\ X_3 = \lambda(y,z)\partial_x + \sigma(y,z)\partial_y + \tau(y,z)\partial_z \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

с допустимой заменой координат (24).

Выясним теперь, какие возникают дополнительные ограничения на операторы (27) – (31), если третий коммутатор $[X_2, X_3]$ обращается в ноль:

$$[X_2, X_3] = 0. \tag{32}$$

Для операторов (27), (28), (29), совпадающих с операторами (4.1), (4.2), (4.3), коммутационное соотношение (32) выполняется автоматически. Для операторов же (30) это соотношение выполняться не может, так как $[X_2, X_3] = -\sigma\partial_x$, а $\sigma \neq 0$.

Подставляя в условие (32) операторы (31), получаем уравнения $\lambda_y = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_y = 0$ и, соответственно, для оператора X_3 выражение

$$X_3 = \lambda(z)\partial_x + \sigma(z)\partial_y + \tau(z)\partial_z.$$

Произведем допустимую замену координат (24):

$$X_3 = (\lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (\sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\varkappa'\partial_\vartheta.$$

Если $\tau = 0$, то $X_3 = \tilde{\lambda}(\vartheta)\partial_\xi + \tilde{\sigma}(\vartheta)\partial_\eta$ и в прежних обозначениях коэффициентов и координат приходим к выражениям (4.4), причем, $(\lambda')^2 + (\sigma')^2 \neq 0$, так как операторы X_1, X_2, X_3 линейно независимы.

Если же $\tau \neq 0$, то функции φ, ψ, $\varkappa$ возьмем из решений уравнений $\lambda + \tau\varphi' = 0$, $\sigma + \tau\psi' = 0$, $\tau\varkappa' = 1$. В результате получаем $X_3 = \partial_\vartheta$ и в прежних обозначениях операторы (4.5).

Итак, для абелевой алгебры (4) получено пять различных, не сводимых друг к другу никакой заменой координат (15) представлений операторами преобразований пространства R^3, задаваемых выражениями (4.1) – (4.5) в формулировке теоремы.

Пусть, далее, операторы (30) и (31) удовлетворяют условию

$$[X_2, X_3] = X_1. \tag{33}$$

которое для операторов (27), (28), (29) не выполняется.

Для операторов (30) из условия (33) легко получаем: $\sigma = -1$ и $X_3 = -\partial_y$, то есть выражения (5.1) базисных операторов, представляющих алгебру (5).

Подставляя в коммутатор (33) операторы (31), получаем уравнения $\lambda_y = 1$, $\sigma_y = 0$, $\tau_y = 0$ и для оператора X_3 после их интегрирования выражение

$$X_3 = (y + \lambda(z))\partial_x + \sigma(z)\partial_y + \tau(z)\partial_z.$$

Произведем допустимую замену координат (24):

$$X_3 = (y + \lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (\sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\varkappa'\partial_\vartheta. \tag{34}$$

Если $\tau = 0$ и $\sigma = \delta = const$, то, полагая $\psi = \lambda$, получаем в прежних обозначениях базисные операторы (5.2) представления алгебры (5), причем постоянная δ может принимать любые значения. Поскольку в выражении (5.2) для оператора X_3 постоянная δ никакой заменой координат не может быть изменена, соответствующие разным значениям этой постоянной представления алгебры (5) не сводимы друг к другу.

Если же в выражении (34) $\tau = 0$ и $\sigma \neq const$, то, полагая $\psi = \lambda$ и $\varkappa = \sigma$, в прежних обозначениях получаем выражения (5.3) базисных операторов представления алгебры (5).

Если же, наконец, в выражении (34) $\tau \neq 0$, то функции φ, ψ, $\varkappa$ возьмем из решений уравнений $\tau\varkappa' = 1$, $\sigma + \tau\psi' = 0$, $-\psi + \lambda + \tau\varphi' = 0$, то есть $X_3 = \eta\partial_\xi + \partial_\vartheta$ и в прежних обозначениях координат получаем выражения (5.4) базисных операторов последнего представления алгебры (5).

Выше был полностью рассмотрен случай коммутирования по условию (25) операторов X_1 и X_3. Перейдем ко второму случаю из трех возможных, когда коммутатор $[X_3, X_1]$ по классификации (4) – (14) при условии (20) отличен от нуля и равен $-X_1$:

$$[X_3, X_1] = -X_1. \tag{35}$$

Подставим операторы (21) и (23), удовлетворяющие условию (20), в коммутатор (35). Итегрируя получающиеся при этом уравнения $\lambda_x = 1$, $\sigma_x = 0$, $\tau_x = 0$, приходим к таким для них выражениям соответственно:

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \\ X_3 = (x + \lambda(y,z))\partial_x + \sigma(y,z)\partial_y + \tau(y,z)\partial_z; \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \\ X_3 = (x + \lambda(y,z))\partial_x + \sigma(y,z)\partial_y + \tau(y,z)\partial_z, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

с допустимыми заменами координат (22) и (24).

Операторы (36) и (37) удовлетворяют двум коммутационным соотношениям (20) и (35). По общей классификации (4) – (14) третий коммутатор $[X_2, X_3]$ может принимать при этом такие значения: $X_1 + X_2$;

pX_2, где $0 < p^2 < 1$; X_2; 0; $-X_2$. Рассмотрим отдельно все эти пять случаев.

Предположим сначала, что

$$[X_2, X_3] = X_1 + X_2. \tag{38}$$

Подставляя в условие (38) операторы (36), легко находим: $\sigma = -1$, то есть

$$X_3 = (x + \lambda(y,z))\partial_x - \partial_y + \tau(y,z)\partial_z\,,$$

после чего произведем допустимую замену координат (22):

$$X_3 = (x + \lambda - \varphi_y + \tau\varphi_z)\partial_\xi - \partial_\eta + (-\varkappa_y + \tau\varkappa_z)\partial_\vartheta\,.$$

Функции φ и $\varkappa$ возьмем из решений уравнений $\lambda - \varphi - \varphi_y + \tau\varphi_z = 0$, $-\varkappa_y + \tau\varkappa_z = 0$ с $\varkappa_z \neq 0$ и тогда $X_3 = \xi\partial_\xi - \partial_\eta$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем выражения (6.1) базисных операторов представления алгебры (6).

Подставим таперь в коммутационное соотношение (38) операторы (37). Интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda_y = 1$, $\sigma_y = 1$, $\tau_y = 0$, для оператора X_3 получаем выражение

$$X_3 = (x + y + \lambda(z))\partial_x + (y + \sigma(z))\partial_y + \tau(z)\partial_z\,,$$

в котором произведем допустимую замену координат (24):

$$X_3 = (x + y + \lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (y + \sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\varkappa'\partial_\vartheta\,.$$

Если $\tau = 0$, то полагая $\varphi = \lambda - \sigma$, $\psi = \sigma$ и возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем базисные операторы (6.2) представления алгебры (6).

Если же $\tau \neq 0$, то функции φ, ψ, $\varkappa$ возьмем из решений системы уравнений $\lambda - \varphi - \psi + \tau\varphi' = 0$, $\sigma - \psi + \tau\psi' = 0$, $\tau\varkappa' = 1$. Для оператора X_3 имеем тогда выражение: $X_3 = (\xi + \eta)\partial_\xi + \eta\partial_\eta + \partial_\vartheta$ и в прежних обозначениях координат получаем базисные операторы (6.3) представления алгебры (6).

Заметим, что алгебра (6) имеет три различных представления, которые не сводятся друг к другу никакой общей заменой координат (15).

Предположим теперь, что коммутатор $[X_2, X_3]$ для операторов (40) и (41) равен pX_2:

$$[X_2, X_3] = pX_2, \tag{39}$$

где $0 < p^2 < 1$, то есть $p \neq +1, 0, -1$.

Подставим сначала в условие (39) операторы (36). В результате получаем: $\sigma = (1-p)y$ и для оператора X_3 выражение:

$$X_3 = (x + \lambda(y,z))\partial_x + (1-p)y\partial_y + \tau(y,z)\partial_z\,,$$

в котором произведем допустимую замену координат (22):

$$\begin{aligned} X_3 = (x + \lambda + (1-p)y\varphi_y + \tau\varphi_z)\partial_\xi + (1-p)y\partial_\eta + \\ + ((1-p)y\varkappa_y + \tau\varkappa_z)\partial_\vartheta\,. \end{aligned} \tag{40}$$

Беря функции φ и $\varkappa$ из решений уравнений $\lambda - \varphi + (1-p)y\varphi_y + \tau\varphi_z = 0$, $(1-p)y\varkappa_y + \tau\varkappa_z = 0$ с $\varkappa_z \neq 0$, поскольку $p \neq 1$, и возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем базисные операторы (7.1) представления алгебры (7).

Подставим в коммутатор (39) операторы (37). Интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda_y = 0$, $\sigma_y = p$, $\tau_y = 0$, для оператора X_3 приходим к выражению

$$X_3 = (x + \lambda(z))\partial_x (py + \sigma(z))\partial_y + \tau(z)\partial_z\,,$$

в котором произведем допустимую замену координат (24):

$$X_3 = (x + \lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (py + \sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\varkappa'\partial_\vartheta\,. \tag{41}$$

Если $\tau = 0$, то положим $\varphi = \lambda$, $\psi = \sigma/p$, поскольку $p \neq 0$, и тогда будем иметь: $X_3 = \xi\partial_\xi + p\eta\partial_\eta$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем базисные операторы (7.2) представления алгебры (7).

Если же $\tau \neq 0$, то функции φ, ψ, $\varkappa$ возьмем из решений системы уравнений $\lambda - \varphi + \tau\varphi' = 0$, $\sigma - p\psi + \tau\psi' = 0$, $\tau\varkappa' = 1$. Для оператора X_3 приходим к выражению $X_3 = \xi\partial_\xi + p\eta\partial_\eta + \partial_\vartheta$, а после возвращения к прежним обозначениям получаем базисные операторы (7.3) представления алгебры (7).

Пусть, далее, третий коммутатор $[X_2, X_3]$ для операторов (36) и (37) равен X_2:

$$[X_2, X_3] = X_2. \tag{42}$$

Формально коммутационное соотношение (42) можно считать частным случаем соотношения (39), если в нем для p допустить значение, равное единице. Положим, поэтому, в выражении (40) для оператора X_2 $p=1$:

$$X_3 = (x + \lambda + \tau\varphi_z)\partial_\xi + \tau\varkappa_z\partial_\vartheta.$$

Если $\tau = 0$, то при $\varphi = \lambda$, имеем $X_3 = \xi\partial_\xi$, и в прежних обозначениях координат, получает базисные операторы (8.1) представления алгебры (8).

Если же $\tau \neq 0$, то функции φ и $\varkappa$ берем из решений уравнений $\lambda - \varphi + \tau\varphi_z = 0$ и $\tau\varkappa_z = 1$ и тогда $X_3 = \xi\partial_\xi + \partial_\vartheta$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем базисные операторы (8.2) представления алгебры (8).

Заметим, что в последующих преобразованиях выражения (41) для оператора X_3 условие $p \neq 1$ не использовалось, поэтому, полагая в операторах (7.2) и (7.3) $p=1$, получаем базисные оператору (8.3) и (8.4) представления алгебры (8).

Перейдем к рассмотрению случая коммутирования операторов X_2, X_3:

$$[X_2, X_3] = 0. \tag{43}$$

Формально условие (43) можно получить из коммутационного соотношения (39), если допустить в нем нулевое значение для p. Поскольку в последующих преобразованиях выражения (40) ограничение $p \neq 0$ не использовалось, положим в операторах (7.1) $p=0$. В результате получаем базисные операторы (9.1) представления алгебры (9).

Запишем еще выражение (41) для оператора X_3, полагая в нем $p=0$:

$$X_3 = (x + \lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (\sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\varkappa'\partial_\vartheta.$$

Если $\tau = 0$ и $\sigma' = 0$, то положим $\varphi = \lambda$, то есть $X_3 = \xi\partial_\xi + \delta\partial_\eta$, где δ – произвольная постоянная. Если же $\tau = 0$ и $\sigma' \neq 0$, то положим $\varphi = \lambda$, $\varkappa = \sigma$ и тогда $X_3 = \xi\partial_\xi + \vartheta\partial_\eta$. Если же, наконец, $\tau \neq 0$, то функции φ, ψ и $\varkappa$ возьмем из решений уравнений $\lambda - \varphi + \tau\varphi' = 0$, $\sigma + \tau\psi' = 0$. $\tau\varkappa' = 1$ и тогда $X_3 = \xi\partial_\xi + \partial_\vartheta$. В итоге получае базисные операторы (9.2), (9.3) и (9.4) представления алгебры (9).

Пусть, в заключение,

$$[X_2, X_3] = -X_2. \tag{44}$$

Коммутационное соотношение (44) формально может быть получено из соотношения (39), если в нем положить $p=-1$. С другой стороны, при преобразованиях выражений (40) и (41) ограничение $p\neq -1$ не использовалось. Поэтому, полагая в окончательных выражениях (7.1), (7.2), (7.3) $p=-1$, получаем соответственно базисные операторы (10.1), (10.2), (10.3) представления алгебры (10).

Вернемся к операторам (21), (23), подчиняющимся коммутационному соотношению (20), и потребуем, чтобы они удовлетворяли также соотношению

$$[X_3, X_1] = -X_2, \tag{45}$$

входящему в алгебры (11) и (12).

Подставим сначала в соотношение (45) операторы (21). Интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda_x = y$, $\sigma_x = 0$, $\tau_x = 0$, получаем выражения

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x\,, \\ X_3 = (xy + \lambda(y,z))\partial_x + \sigma(y,z)\partial_y + \tau(y,z)\partial_z \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

с допустимой заменой координат (22).

Подставим в то же соотношение (45) операторы (23). Интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda_x = 0$, $\sigma_x = 1$, $\tau_x = 0$, получаем выражения

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y\,, \\ X_3 = \lambda(y,z)\partial_x + (x + \sigma(y,z))\partial_y + \tau(y,z)\partial_z \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

с допустимой заменой координат (24).

Операторы (46) и (47) удовлетворяют соотношениям (20), (45). Потребуем для них выполнения третьего коммутационного соотношения, входящего в алгебру (11):

$$[X_2, X_3] = -X_1 + qX_2, \tag{48}$$

где $0 < q < 2$.

Подставляя в соотношение (48) операторы (46), легко находим;

$$\sigma(y,z) = y^2 - qy + 1, \tag{49}$$

после чего произведем допустимую замену координат (22):

$$X_3 = (xy + \lambda + \sigma\varphi_y + \tau\varphi_z)\partial_\xi + \sigma\partial_\eta + (\sigma\varkappa_y + \tau\varkappa_z)\partial_\vartheta\,.$$

Поскольку согласно выражению (49) $\sigma \neq 0$, функции φ и $\varkappa$ можно взять из решений уравнений $\lambda - y\varphi + \sigma\varphi_y + \tau\varphi_z = 0$ и $\sigma\varkappa_y + \tau\varkappa_z = 0$, то есть $X_3 = \xi\eta\partial_\xi + (\eta^2 - q\eta + 1)\partial_\eta$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем базисные операторы (11.1) представления алгебры (11).

Подставим теперь в соотношение (48) операторы (47). Интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda_y = -1$, $\sigma_y = q$, $\tau_y = 0$, приходим к следующему выражению для оператора X_3:

$$X_3 = (-y + \lambda(z))\partial_x + (x + qy + \sigma(z))\partial_y + \tau(z)\partial_z,$$

в котором произведем допустимую замену координат (24):

$$X_3 = (-y + \lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (x + qy + \sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\varkappa'\partial_\vartheta.$$

Если $\tau = 0$, то положим $\psi = -\lambda$, $\varphi = q\lambda + \sigma$ и тогда $X_3 = -\eta\partial_\xi + (\xi + q\eta)\partial_\eta$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем базисные операторы (11.2) представления алгебры (11). Если же $\tau \neq 0$, то функции φ, ψ, $\varkappa$ берем из решений системы уравнений $\lambda + \psi + \tau\varphi' = 0$, $\sigma - \varphi - q\psi + \tau\psi' = 0$, $\tau\varkappa' = 1$ и тогда $X_3 = -\eta\partial_\xi + (\xi + q\eta)\partial_\eta + \partial_\vartheta$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем базисные операторы (11.3) представления алгебры (11).

Третий коммутатор алгебры (12): $[X_2, X_3] = -X_1$ формально можно рассматривать как частный случай коммутатора (48), если в нем для q допустить нулевое значение. С другой стороны, при подстановке операторов (46), (47) в коммутатор (48) и последующих их преобразованиях с помощью замен координат (22), (24) ограничение $q \neq 0$ не использовалось. Поэтому из базисных операторов (11.1), (11.2), (11.3) представлений алгебры (11) можно сразу получить соответствующие представления (12.1), (12.2), (12.3) алгебры (12), если просто положить в них $q = 0$.

Выше был полностью рассмотрен случай, когда по классификации (4) – (14) первый коммутатор $[X_1, X_2]$ обращается в нуль. Перейдем к исследованию второго возможного случая, когда этот коммутатор отличен от нуля:

$$[X_1, X_2] = X_3. \tag{50}$$

При подстановке операторов (22) в коммутационное соотношение (50) устанавливаются следующие связи: $\lambda_{2x} = \lambda_3$, $\sigma_{2x} = \sigma_3$, $\tau_{2x} = \tau_3$, используя которые перепишем эти операторы, опустив для упрощения записи индекс "2":

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \lambda(x,y,z)\partial_x + \sigma(x,y,z)\partial_y + \tau(x,y,z)\partial_z, \\ X_3 &= \lambda_x(x,y,z)\partial_x + \sigma_x(x,y,z)\partial_y + \tau_x(x,y,z)\partial_z, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

причем замена координат (19) по-прежнему остается допустимой.

Пусть еще для операторов (51) выполняется второе коммутационное соотношение алгебр (13) и (14):

$$[X_3, X_1] = X_2. \tag{52}$$

при подстановке в которое этих операторов получаем уравнения: $\lambda_{xx} + \lambda = 0$, $\sigma_{xx} + \sigma = 0$, $\tau_{xx} + \tau = 0$, решения которых хорошо известны:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(x,y,z) &= \lambda(y,z)\sin x + \mu(y,z)\cos x, \\ \sigma(x,y,z) &= \sigma(y,z)\sin x + \nu(y,z)\cos x, \\ \tau(x,y,z) &= \tau(y,z)\sin x + \rho(y,z)\cos x, \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

где $\lambda^2+\sigma^2+\tau^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2 \neq 0$, так как X_2, X_3 – ненулевые операторы.

Произведем в операторах (51) с коэффициентами (53) допустимую замену координат (19). Выражение для оператора X_2, например, после некоторых очевидных преобразований при такой замене станет следующим:

$$\begin{aligned} X_2 = \{&[\mu\ \sin\varphi + \lambda\ \cos\varphi + \\ &+ (\nu\ \sin\varphi + \sigma\ \cos\varphi)\varphi_y + (\rho\ \sin\varphi + \tau\ \cos\varphi)\varphi_z]\sin\xi + \\ &+ [\mu\ \cos\varphi - \lambda\ \sin\varphi + \\ &+ (\nu\ \cos\varphi - \sigma\ \sin\varphi)\varphi_y + (\rho\ \cos\varphi - \tau\ \sin\varphi)\varphi_z]\cos\xi\}\partial_\xi + \\ &+ \{[(\nu\ \sin\varphi + \sigma\ \cos\varphi)\psi_y + (\rho\ \sin\varphi + \tau\ \cos\varphi)\psi_z]\sin\xi + \\ &+ [(\nu\ \cos\varphi - \sigma\ \sin\varphi)\psi_y + (\rho\ \cos\varphi - \tau\ \sin\varphi)\psi_z]\cos\xi\}\partial_\eta + \\ &+ \{[(\nu\ \sin\varphi + \sigma\ \cos\varphi)\varkappa_y + (\rho\ \sin\varphi + \tau\ \cos\varphi)\varkappa_z]\sin\xi + \\ &+ [(\nu\ \cos\varphi - \sigma\ \sin\varphi)\varkappa_y + (\rho\ \cos\varphi - \tau\ \sin\varphi)\varkappa_z]\cos\xi\}\partial_\vartheta. \end{aligned}$$

Функцию φ возьмем из решений уравнения

$$\begin{aligned} &\mu\ \cos\varphi - \lambda\ \sin\varphi + \\ &+ (\nu\ \cos\varphi - \sigma\ \sin\varphi)\varphi_y + (\rho\ \cos\varphi - \tau\ \sin\varphi)\varphi_z = 0. \end{aligned}$$

Если $\sigma^2+\nu^2+\tau^2+\rho^2=0$ (и потому $\lambda^2+\mu^2\neq 0$), то в прежних обозначениях коэффициентов и координат получаем выражения для операторов X_1, X_2, X_3:

$$X_1=\partial_x,\quad X_2=\lambda(y,z)\sin x\partial_x,\quad X_3=\lambda(y,z)\cos x\partial_x. \tag{54}$$

Если же $\sigma^2+\nu^2+\tau^2+\rho^2\neq 0$, но при этом $\nu\ \sin\varphi+\sigma\ \cos\varphi=0$ и $\rho\ \sin\varphi+\tau\ \cos\varphi=0$ (и потому, очевидно, $\nu\ \cos\varphi-\sigma\ \sin\varphi\neq 0$ или $\rho\ \cos\varphi-\tau\ \sin\varphi\neq 0$), то функции ψ и $\varkappa$ возьмем из независимых решений уравнений

$$\begin{aligned}(\nu\ \cos\varphi-\sigma\ \sin\varphi)\psi_y+(\rho\ \cos\varphi-\tau\ \sin\varphi)\psi_z=1,\\ (\nu\ \cos\varphi-\sigma\ \sin\varphi)\varkappa_y+(\rho\ \cos\varphi-\tau\ \sin\varphi)\varkappa_z=0\end{aligned}$$

и тогда для операторов X_1, X_2, X_3 в прежних обозначениях получаем следующие выражения

$$\left.\begin{aligned}X_1=\partial_x,\quad X_2=\lambda(y,z)\sin x\partial_x+\cos x\partial_y,\\ X_3=\lambda(y,z)\cos x\partial_x-\sin x\partial_y.\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Если же, далее, $\sigma^2+\nu^2+\tau^2+\rho^2\neq 0$, но при этом $\nu\ \cos\varphi-\sigma\ \sin\varphi=0$ и $\rho\ \cos\varphi-\tau\ \sin\varphi=0$ (и потому, очевидно, $\nu\ \sin\varphi+\sigma\ \cos\varphi\neq 0$ или $\rho\ \sin\varphi+\tau\ \cos\varphi\neq 0$), то функции ψ и $\varkappa$ возьмем из независимых решений уравнений

$$\begin{aligned}(\nu\ \sin\varphi+\sigma\ \cos\varphi)\psi_y+(\rho\ \sin\varphi+\tau\ \cos\varphi)\psi_z=1,\\ (\nu\ \sin\varphi+\sigma\ \cos\varphi)\varkappa_y+(\rho\ \sin\varphi+\tau\ \cos\varphi)\varkappa_z=0\end{aligned}$$

и тогда для операторов X_1, X_2, X_3 в прежних обозначениях получаем следующие выражения

$$\left.\begin{aligned}X_1=\partial_x,\quad X_2=\lambda(y,z)\sin x\partial_x+\sin x\partial_y,\\ X_3=\lambda(y,z)\cos x\partial_x+\cos x\partial_y.\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Если же, наконец, при $\sigma^2+\nu^2+\tau^2+\rho^2\neq 0$ имеем $\nu\ \sin\varphi+\sigma\ \cos\varphi\neq 0$ или $\rho\ \sin\varphi+\tau\ \cos\varphi\neq 0$ и $\nu\ \cos\varphi-\sigma\ \sin\varphi\neq 0$ или $\rho\ \cos\varphi-\tau\ \sin\varphi\neq 0$, то функции ψ и $\varkappa$ возьмем из независимых решений уравнений

$$\begin{aligned}(\nu\ \sin\varphi+\sigma\ \cos\varphi)\psi_y+(\rho\ \sin\varphi+\tau\ \cos\varphi)\psi_z=0,\\ (\nu\ \cos\varphi-\sigma\ \sin\varphi)\varkappa_y+(\rho\ \cos\varphi-\tau\ \sin\varphi)\varkappa_z=1,\end{aligned}$$

которые всегда имеют независимые решения. Действительно, если $\nu\tau - \sigma\rho = 0$, то независимы отличное от постоянной решение ψ первого уравнения и любое решение $\varkappa$ второго уравнения. Если же $\nu\tau - \sigma\rho \neq 0$, то независимы отличные от постоянных решения ψ и $\varkappa_0$ первого уравнения и однородной части второго. Поэтому, если решение ψ и некоторое частное решение $\varkappa_1$ второго уравнения окажутся зависимыми, то независимыми будут, очевидно, решения ψ и $\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1$. Для операторов X_1, X_2, X_3 поэтому в прежних обозначениях можем записать следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \lambda(y,z)\sin x\partial_x + \nu(y,z)\cos x\partial_y + (\tau(y,z)\sin x + \cos x)\partial_z, \\ X_3 &= \lambda(y,z)\cos x\partial_x - \nu(y,z)\sin x\partial_y + (\tau(y,z)\cos x - \sin x)\partial_z. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Произведем в операторах (57) допустимую замену координат

$$\xi = x, \quad \eta = \psi(y,z), \quad \vartheta = \varkappa(y,z). \tag{58}$$

Для оператора X_2, в частности, тогда имеем:

$$\begin{aligned} X_2 = \lambda\sin x\partial_\xi + (\tau\psi_z\sin x + (\nu\psi_y + \psi_z)\cos x)\partial_\eta + \\ + (\tau\varkappa_z\sin x + (\nu\varkappa_y + \varkappa_z)\cos x)\partial_\vartheta. \end{aligned}$$

Если $\tau = 0$, то функции ψ и $\varkappa$ возьмем из независимых решений уравнений $\nu\psi_y + \psi_z = 1$ и $\nu\varkappa_y + \varkappa_z = 0$, то есть $X_2 = \tilde\lambda(\eta,\vartheta)\sin\xi\partial_\xi + \cos\xi\partial_\eta$ и в прежних обозначениях возвращаемся к выражениям (55).

Если же $\tau \neq 0$, но $\nu = 0$, то функции ψ и $\varkappa$ берем из независимых решений уравнений $\tau\psi_z = 1$ и $\varkappa_z = 0$, то есть $X_2 = \tilde\lambda(\eta,\vartheta)\ sin\xi\partial_\xi + (\sin\xi + \tilde\nu(\eta,\vartheta)\cos\xi)\partial_\eta$, и в прежних обозначениях коэффициентов и координат для операторов X_1, X_2, X_3 получаем такие выражения:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \lambda(y,z)\sin x\partial_x + (\sin x + \nu(y,z)\cos x)\partial_y, \\ X_3 &= \lambda(y,z)\cos x\partial_x + (\cos x - \nu(y,z)\sin x)\partial_y, \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

причем здесь $\nu \neq 0$.

Пусть теперь одновременно $\tau \neq 0$ и $\nu \neq 0$. Забегая вперед, подставим операторы (57) в третий коммутатор алгебр (13) и (14) $[X_2, X_3] = \varepsilon X_1$, где $\varepsilon = +1$ и $\varepsilon = -1$ соответственно. При этой подстановке, в частности, получаем уравнение $\tau\nu_z = 0$, из которого при $\tau \neq 0$ следует $\nu_z = 0$, то есть $\nu(y,z) = \nu(y)$. Поэтому функции ψ и $\varkappa$ замены (58) возьмем из независимых решений уравнений $\psi_z = 0$, $\nu\psi_y = 1$, $\nu\varkappa_y + \varkappa_z = 0$ с $\varkappa_z \neq 0$ и тогда $X_2 = \tilde\lambda(\eta,\vartheta)\sin\xi\partial_\xi + \cos\xi\partial_\eta + \tilde\tau(\eta,\vartheta)\sin\xi\partial_\vartheta$. Возвращаясь к прежним обозначениям, получаем для операторов X_1, X_2, X_3 следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \lambda(y,z)\sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \tau(y,z)\sin x\partial_z, \\ X_3 &= \lambda(y,z)\cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \tau(y,z)\cos x\partial_z, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

где, очевидно, $\tau \neq 0$.

Операторы (54), (55), (56) и (59), (60) удовлетворяют первым двум коммутационным соотношениям (50) и (52) алгебр (13), (14). Предположим, что они удовлетворяют третьему коммутационному соотношению алгебры (13):

$$[X_2, X_3] = X_1. \tag{61}$$

Подставим сначала в коммутатор (61) операторы (54). Относительно коэффициента λ получаем уравнение $\lambda^2 = -1$, которое в области действительных функций решения не имеет. То есть операторы (54) коммутационному соотношению (61) удовлетворять не могут ни при каких выражениях для коэффициента λ.

Подставим теперь в коммутатор (61) операторы (55). Относительно коэффициента λ получаем уравнение $\lambda_y = \lambda^2 + 1$, решение которого легко находится: $\lambda = tg(y + a(z))$, где a – произвольная функция одной переменной. Произведем допустимую замену координат $\xi = x$, $\eta = y + \psi(z)$, $\vartheta = \varkappa(z)$, в которой положим $\psi(z) = a(z)$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем базисные операторы (13.1) представления алгебры (13).

Подстамим, далее, в коммутатор (61) операторы (56). Относительно коэффициента λ получаем два явно несовместимых следствия: $\lambda^2 = -1$ и $\lambda = 0$. То есть операторы (56) коммутационному соотношению (61) удовлетворять не могут.

В операторах (59), где $\nu \neq 0$, предварительно произведем общую допустимую замену координат (19):

$$\begin{aligned} X_2 = \{&[\lambda\ \cos\varphi + (\nu\ \sin\varphi + \cos\varphi)\varphi_y]\sin\xi + \\ &+ [-\lambda\ \sin\varphi + (\nu\ \cos\varphi - \sin\varphi)\varphi_y]\cos\xi\}\partial_\xi + \\ &+[(\nu\ \sin\varphi + \cos\varphi)\psi_y\sin\xi + (\nu\ \cos\varphi - \sin\varphi)\psi_y\cos\xi]\partial_\eta + \\ &+[(\nu\ \sin\varphi + \cos\varphi)\varkappa_y\sin\xi + (\nu\ \cos\varphi - \sin\varphi)\varkappa_y\cos\xi]\partial_\vartheta. \end{aligned}$$

Функции φ, ψ и $\varkappa$ возьмем из решений системы уравнений $\nu\ \sin\varphi + \cos\varphi = 0$, $(\nu\ \cos\varphi - \sin\varphi)\psi_y = 1$, $\varkappa_y = 0$. Дифференцируя первое из уравнений системы по y и используя уравнение $\lambda + \nu_y = 0$, возникающее при подстановке операторов (59) в коммутатор (61), устанавливаем, дополнительно, что $(\nu\ \cos\varphi - \sin\varphi)\varphi_y - \lambda\ sin\varphi = 0$ и потому $X_2 = \tilde{\lambda}(\eta,\vartheta)\sin\xi\partial_\xi + \cos\xi\partial_\eta$. Возвращаясь к прежним обозначениям коэффициентов и координат, получаем для операторов X_1, X_2, X_3 выражения (55), которые выше уже были рассмотрены.

Подставим, наконец, в коммутатор (61) операторы (60). Уравнения $\lambda_y = \lambda^2 + 1$ и $\tau_y - \lambda\tau = 0$, возникающие при этом, легко интегрируются и их решения имеют следующий вид:

$$\lambda(y,z) = tg(y + a(z)), \quad \tau(y,z) = \tau(z)/\cos(y + a(z)), \tag{62}$$

где $a(z)$ и $\tau(z)$ – произвольные функции одной переменной, причем $\tau(z) \neq 0$.

Произведем в операторах (60) с коэффициентами (62) допустимую замену координат (24) с $\varphi(z) = 0$. Для оператора X_2, в частности, получаем:

$$X_2 = tg(y + a(z))\sin x\partial_\xi +$$
$$(\cos x + \tau(z)\psi'(z)\sec(y + a(z))\sin x)\partial_\eta + \tau(z)\sec(y + a(z))\sin x\ \varkappa'(z)\partial_\vartheta.$$

Полагая $\psi(z) = a(z)$ и $\tau(z)\varkappa'(z) = 1$, в прежних обозначениях приходим к такому выражению:

$$X_2 = tgy\ \sin x\partial_x + (\cos x + \sigma(z)\ \sec y\ \sin x)\partial_y + \sec y\ \sin x\partial_z, \tag{63}$$

где $\sigma(z)$ – произвольная функция одной переменной.

Далее в выражении (63) произведем общую допустимую замену координат (19):

$$\begin{aligned}X_2 = \{&[tgy\ \cos\varphi + (\sin\varphi + \sigma(z)\sec y\ \cos\varphi)\varphi_y + \sec y\ \cos\varphi\ \varphi_z]\sin\xi + \\ &+ [-tgy\ \sin\varphi + (\cos\varphi - \sigma(z)\sec y\ \sin\varphi)\varphi_y - \sec y\ \sin\varphi\ \varphi_z]\cos\xi\}\partial_\xi + \\ &+ \{[(\sin\varphi + \sigma(z)\sec y\ \cos\varphi)\psi_y + \sec y\ cos\varphi\ \psi_z]\sin\xi + \\ &+ [(\cos\varphi - \sigma(z)\sec y\ \sin\varphi)\psi_y - \sec y\ \sin\varphi\ \psi_z]\cos\xi\}\partial_\eta + \\ &+ \{[(\sin\varphi + \sigma(z)\sec y\ \cos\varphi)\varkappa_y + \sec y\ \cos\varphi\ \varkappa_z]\sin\xi + \\ &+ [(\cos\varphi - \sigma(z)\sec y\ \sin\varphi)\varkappa_y - \sec y\ \sin\varphi\ \varkappa_z]\cos\xi\}\partial_\vartheta.\end{aligned}$$

Функции φ, ψ, $\varkappa$ возьмем из решений следующей системы шести уравнений:

$$\begin{aligned}
&tgy\ \cos\varphi + (\sin\varphi + \sigma(z)\sec y\ \cos\varphi)\varphi_y + \sec y\ \cos\varphi\ \varphi_z = tg\psi,\\
&-tgy\ \sin\varphi + (\cos\varphi - \sigma(z)\sec y\ \sin\varphi)\varphi_y - \sec y\ \sin\varphi\ \varphi_z = 0,\\
&(\sin\varphi + \sigma(z)\sec y\ \cos\varphi)\psi_y + \sec y\ \cos\varphi\ \psi_z = 0,\\
&(\cos\varphi - \sigma(z)\sec y\ \sin\varphi)\psi_y - \sec y\ \sin\varphi\ \psi_z = 1,\\
&(\sin\varphi + \sigma(z)\sec y\ \cos\varphi)\varkappa_y + \sec y\ \cos\varphi\ \varkappa_z = \sec\psi,\\
&(\cos\varphi - \sigma(z)\sec y\ \sin\varphi)\varkappa_y - \sec y\ \sin\varphi\ \varkappa_z = 0.
\end{aligned} \tag{64}$$

Перепишем систему (64) в виде, разрешенном относительно частных производных от неизвестных функций φ, ψ, $\varkappa$:

$$\begin{aligned}
&\varphi_y = \sin\varphi\ tg\psi,\\
&\varphi_z = \cos y\ \cos\varphi\ tg\psi - \sigma(z)\sin\varphi\ tg\psi - \sin y,\\
&\psi_y = \cos\varphi,\\
&\psi_z = -\sin\varphi\ \cos y - \sigma(z)\cos\varphi,\\
&\varkappa_y = \sin\varphi\ \sec\psi,\\
&\varkappa_z = \cos y\ \cos\varphi\ \sec\psi - \sigma(z)\sin\varphi\ \sec\psi.
\end{aligned}$$

Используя эти выражения, легко можно установить, во-первых, отличие от нуля якобиана $\partial(\psi,\varkappa)/\partial(y,z)$ и, во-вторых, равенство смешанных производных: $\varphi_{yz} = \varphi_{zy}$, $\psi_{yz} = \psi_{zy}$, $\varkappa_{yz} = \varkappa_{zy}$, что, как известно, является условием, необходимым и достаточным, интегрируемости системы уравнений (64).

Таким образом, произвольная функция $\sigma(z)$ может быть исключена из выражения (63) заменой координат (19) с функциями φ, ψ, $\varkappa$, являющимися решениями ситемы уравнений (64). В результате получаем базисные операторы (13.2) представления алгебры (13).

Подставим, в заключение, операторы (54), (55), (56) и (59), (60) в третий коммутатор алгебры (14):

$$[X_2, X_3] = -X_1. \tag{65}$$

Для операторов (54) при подстановке в коммутатор (65) получаем уравнение $\lambda^2 = 1$ и потому $\lambda = \pm 1$. При $\lambda = +1$ получаем базисные операторы (14.1) представления алгебры (14). Если же $\lambda = -1$, то замена координат $\xi = x + \pi$, $\eta = y$, $\vartheta = z$ приводит к тем же выражениям (14.1).

Подставим теперь операторы (55) в коммутатор (65). Возникающее при этом уравнение $\lambda_y = \lambda^2 - 1$ имеет четыре различных решения: $\lambda = \pm 1$, $\lambda = -th(y + a(z))$, $\lambda = -cth(y + a(z))$, где $a(z)$ – произвольная функция одной переменной. При $\lambda = +1$ получаем базисные операторы (14.2) представления алгебры (14). Если же $\lambda = -1$, то, производя замену координат $\xi = x + \pi$, $\eta = -y$, $\vartheta = z$, приходим к тем же выражениям (14.2). Если $\lambda = -th(y + a(z))$ или $\lambda = -cth(y + a(z))$, то после допустимой замены координат $\xi = x$, $\eta = y + \psi(z)$, $\vartheta = z$, полагая $\psi(z) = a(z)$, получаем соответственно базисные операторы (14.3) или (14.4) представления алгебры (14).

При подстановке операторов (56) в коммутатор (65) получаем явно несовместимые следствия: $\lambda^2 = 1$ и $\lambda = 0$. То есть операторы (56) коммутационному соотношению (65), точно так же, как и соотношению (61), ни при каком выражении для коэффициента λ удовлетворять не могут.

Подставляя операторы (59) в коммутатор (65), получаем, в частности, уравнение $\lambda + \nu_y = 0$. Как было показано выше при исследовании аналогичного случая (61), общей допустимой заменой координат (19), с учетом уравнения $\lambda + \nu_y = 0$, выражения (59) могут быть сведены к выражениям (55), которые выше уже были рассмотрены.

Подставляя в коммутатор (65) операторы (60), получаем уравнения $\lambda_y = \lambda^2 - 1$, $\tau_y - \lambda\tau = 0$, которые имеют следующие четыре решения:

$$\lambda(y,z) = 1, \quad \tau(y,z) = \tau(z)\exp y; \tag{66}$$

$$\lambda(y,z) = -1, \quad \tau(y,z) = \tau(z)\exp(-y); \tag{67}$$

$$\lambda(y,z) = -th(y + a(z)), \quad \tau(y,z) = \tau(z)/ch(y + a(z)); \tag{68}$$

$$\lambda(y,z) = -cth(y + a(z)), \quad \tau(y,z) = \tau(z)/sh(y + a(z)), \tag{69}$$

где $a(z)$ и $\tau(z)$ – произвольные функции одной переменной, причем $\tau(z) \neq 0$.

Произведем в операторах (60) с коэффициентами (66) допустимую замену координат

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \vartheta = \varkappa(z).$$

Для оператора X_2, в частности, получаем:

$$X_2 = \sin x \partial_\xi + \cos x \partial_\eta + \tau(z)\varkappa'(z) \exp y \ \sin x \partial_\vartheta .$$

Полагая $\tau(z)\varkappa'(z) = 1$, в прежних обозначениях координат получаем базисные операторы (14.5) представления алгебры (14).

Если в операторах (60) с коэффициентами (67) произвести допустимую замену координат $\xi = x + \pi$, $\eta = -y$, $\vartheta = \varkappa(z)$ и положить $\tau(z)\varkappa'(z) = -1$, то в прежних обозначениях координат снова получаем базисные операторы (14.5) представления алгебры (14).

В операторах (60) с коэффициентами (68) и (69) предварительно произведем допустимую замену координат (24) с $\varphi(z) = 0$. Полагая $\psi(z) = a(z)$ и $\tau(z) \ \varkappa'(z) = 1$, в прежних обозначениях приходим к такому выражению для оператора X_2:

$$X_2 = \lambda(y) \sin x \partial_x + (\cos x + \sigma(z)\tau(y) \sin x)\partial_y + \tau(y) \sin x \partial_z , \tag{70}$$

где либо $\lambda(y) = -th(y)$, $\tau(y) = ch^{-1}(y)$, либо $\lambda(y) = -cth(y)$, $\tau(y) = sh^{-1}(y)$, а $\sigma(z)$ – произвольная функция одной переменной.

Далее в выражении (70) произведем общую допустимую замену координат (19). Функции φ, ψ, $\varkappa$ этой замены возьмем из решений следующей системы шести уравнений:

$$\begin{aligned}
&\lambda(y) \cos\varphi + (\sin\varphi + \sigma(z)\tau(y)\cos\varphi)\varphi_y + \tau(y)\cos\varphi \ \varphi_z = 1,\\
&-\lambda(y)\sin\varphi + (\cos\varphi - \sigma(z)\tau(y)\sin\varphi)\varphi_y - \tau(y)\sin\varphi \ \varphi_z = 0,\\
&(\sin\varphi + \sigma(z)\tau(y)\cos\varphi)\psi_y + \tau(y)\cos\varphi \ \psi_z = 0,\\
&(\cos\varphi - \sigma(z)\tau(y)\sin\varphi)\psi_y - \tau(y)\sin\varphi \ \psi_z = 1,\\
&(\sin\varphi + \sigma(z)\tau(y)\cos\varphi)\varkappa_y + \tau(y)\cos\varphi \ \varkappa_z = \exp\psi,\\
&(\cos\varphi - \sigma(z)\tau(y)\sin\varphi)\varkappa_y - \tau(y)\sin\varphi \ \varkappa_z = 0,
\end{aligned} \tag{71}$$

которая вполне аналогична системе (64). Разрешая систему (71) относительно производных φ_y, φ_z, ψ_y, ψ_z, $\varkappa_y$, $\varkappa_z$, легко проверяем отличие от нуля якобиана $\partial(\psi, \varkappa)/\partial(y, z)$ и выполнение необходимого и достаточного условия ее интегрируемости: $\varphi_{yz} = \varphi_{zy}$, $\psi_{yz} = \psi_{zy}$, $\varkappa_{yz} = \varkappa_{zy}$. В результате снова получаем базисные операторы (14.5) представления алгебры (14). Этим утверждением и завершается доказательство теоремы настоящего параграфа, сформулированной сразу после приведения списка (4) – (14) всех трехмерных вещественных абстрактных алгебр Ли.

§5. Классификация триметрических геометрий в пространстве

Результаты предыдущего §4 дают возможность провести полную с точностью до эквивалентности (в смысле определения из §3) классификацию всех триметрических ($s = 3$) феноменологически симметричных геометрий ранга три ($n = 1$), задаваемых на трехмерном ($sn = 3$) многообразии $\mathfrak{M}$ функцией $f : \mathfrak{S}_f \to R^3$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$.

Пусть (x, y, z) – локальные координаты в $\mathfrak{M}$. Для 3-метрики $f = (f^1, f^2, f^3)$ в некоторой окрестности пары $< ij > \in \mathfrak{S}_f$ по выражению (2) из §1 при $s = 3$ и $n = 1$ можно записать следующее координатное представление:

$$f(ij) = f(x(i), y(i), z(i), x(j), y(j), z(j)). \tag{1}$$

Невырожденность 3-метрики (1) согласно аксиоме III из §1 означает необращение в нуль двух якобианов третьего порядка:

$$\left.\begin{array}{r} \partial(f^1(ij), f^2(ij), f^3(ij))/\partial(x(i), y(i), z(i)) \neq 0, \\ \partial(f^1(ij), f^2(ij), f^3(ij))/\partial(x(j), y(j), z(j)) \neq 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

для открытого и плотного в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ множества пар $< ij >$.

Если невырожденная 3-метрика (1) задает на трехмерном многообразии (в пространстве) феноменологически симметричную геометрию ранга 3, то по аксиоме IV из §1 найдется такая трехкомпонентная функция $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ ранга 3 от девяти переменных, что девять взаимных расстояний между точками открытого и плотного в $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^3$ множества троек $< ijk >$ функционально связаны тремя независимыми уравнениями

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(jk)) = 0. \tag{3}$$

Согласно теореме 2 из §2 3-метрика (1) допускает трехмерную локальную группу Ли локальных движений, преобразования которой задаются уравнениями (1) из §4. 3-метрика (1) сохраняется при всех преобразованиях этой группы:

$$\begin{aligned} &f(x'(i), y'(i), z'(i), x'(j), y'(j), z'(j)) = \\ &= f(x(i), y(i), z(i), x(j), y(j), z(j)), \end{aligned} \tag{4}$$

то есть является ее невырожденным двухточечным инвариантом.

Обозначим через

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = \lambda_1(x,y,z)\partial_x + \sigma_1(x,y,z)\partial_y + \tau_1(x,y,z)\partial_z, \\ X_2 = \lambda_2(x,y,z)\partial_x + \sigma_2(x,y,z)\partial_y + \tau_2(x,y,z)\partial_z, \\ X_3 = \lambda_3(x,y,z)\partial_x + \sigma_3(x,y,z)\partial_y + \tau_3(x,y,z)\partial_z \end{array}\right\} \qquad (5)$$

базисные операторы трехмерной алгебры Ли группы локальных движений (1) из §4 3-метрики (1). Если в функциональное уравнение (4) подставить бесконечно малые (инфинитезимальные) преобразования (2) из §4, то, учитывая независимость параметров группы (a^1, a^2, a^3), для 3-метрики (1) получаем систему трех линейных однородных уравнений в частных производных:

$$\left.\begin{array}{r} X_1(i)f(ij) + X_1(j)f(ij) = 0, \\ X_2(i)f(ij) + X_2(j)f(ij) = 0, \\ X_3(i)f(ij) + X_3(j)f(ij) = 0, \end{array}\right\} \qquad (6)$$

с операторами (5). Замечание, сделанное сразу после записи уравнений (7) из §3, имеет отношение и к системе (6): операторы $X_1(i)$, $X_2(i)$, $X_3(i)$ и $X_1(j)$, $X_2(j)$, $X_3(j)$ не обязательно сводятся друг к другу некоторым локальным диффеоморфизмом $U(i) \to U(j)$.

Таким образом, задача классификации 3-метрик (1) сводится к классификации трехмерных алгебр Ли преобразований трехмерного многообразия (локально пространства) с базисными операторами (5) и к интегрированию соответствующих систем уравнений (6). 3-метрика, являющаяся решением этой системы, должна быть по аксиоме III из §1 невырожденной, то есть удовлетворять двум условиям (2). Вырожденность триметрики как совокупности трех независимых решений системы (6) в большинстве случаев можно установить до ее интегрирования, если использовать известные представления о транзитивности и интранзитивности групп преобразований. Группа преобразований называется локально *транзитивной*, если для любых двух точек из некоторой окрестности одной из них существует преобразование, не обязательно единственное, которое переводит первую точку во вторую. Если же такое преобразование существует не для любых двух точек, то группа называется *интранзитивной.*

Базисные операторы (5) линейно независимы с постоянными коэффициентами и однозначно определяют инфинитезимальные преобразования (2) из §4 трехмерной локальной группы Ли (1) из §4.

Лемма 1. *Для того. чтобы трехмерная локальная группа Ли локальных преобразований с базисными операторами (5) соответствующей алгебры Ли была локально транзитивной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы*

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1(x,y,z) & \sigma_1(x,y,z) & \tau_1(x,y,z) \\ \lambda_2(x,y,z) & \sigma_2(x,y,z) & \tau_2(x,y,z) \\ \lambda_3(x,y,z) & \sigma_3(x,y,z) & \tau_3(x,y,z) \end{Vmatrix} \tag{7}$$

был равен трем.

Достаточность очевидна. Действительно, если ранг матрицы (7) равен трем и ее определитель отличен от нуля, то для любых двух точек (x, y, z) и (x', y', z') из некоторой окрестности $U((x, y, z))$ три уравнения инфинитезимальных преобразований (2) из §4 однозначно разрешимы относительно параметров (a^1, a^2, a^3), которые и задают преобразование, переводящее точку (x, y, z) в точку (x', y', z'). Докажем теперь необходимость. Предположим противное, то есть что ранг матрицы (7) меньше трех. В этом случае между ее столбцами существует линейная связь с переменными коэффициентами $\alpha = \alpha(x, y, z)$, $\beta = \beta(x, y, z)$, $\gamma = \gamma(x, y, z)$:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\lambda_1 + \beta\sigma_1 + \gamma\tau_1 = 0, \\ \alpha\lambda_2 + \beta\sigma_2 + \gamma\tau_2 = 0, \\ \alpha\lambda_3 + \beta\sigma_3 + \gamma\tau_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

причем $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$. Умножая уравнения инфинитезимальных преобразований (2) из §4 на коэффициенты α, β, γ соответственно и складывая их, получаем в координатах (x', y', z') уравнение плоскости

$$\alpha(x' - x) + \beta(y' - y) + \gamma(z' - z) = 0, \tag{9}$$

проходящей через точку (x, y, z). Таким образом, множество тех точек (x', y', z'), в которые локально может переходить точка (x, y, z), лежат на плоскости, задаваемой уравнением (9). То есть локально группа преобразований с базисными операторами (5) соответствующей алгебры Ли будет интранзитивной, так как никакое ее локальное преобразование не переводит точку (x, y, z) в ту точку окрестности $U((x, y, z))$, которая не лежит на плоскости, задаваемой уравнением (9). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если 3-метрика невырождена, то базисные операторы $X_1(i)$, $X_2(i)$, $X_3(i)$ и $X_1(j)$, $X_2(j)$, $X_3(j)$ определяют транзитивные группы Ли преобразований окрестностей $U(i)$ и $U(j)$ в локальной группе ее движений.*

3-метрика $f = (f^1, f^2, f^3)$ является совокупностью трех независимых решений системы уравнений (6), матрица коэффициентов которой

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1(i) & \sigma_1(i) & \tau_1(i) & \lambda_1(j) & \sigma_1(j) & \tau_1(j) \\ \lambda_2(i) & \sigma_2(i) & \tau_2(i) & \lambda_2(j) & \sigma_2(j) & \tau_2(j) \\ \lambda_3(i) & \sigma_3(i) & \tau_3(i) & \lambda_3(j) & \sigma_3(j) & \tau_3(j) \end{Vmatrix} \tag{10}$$

составлена из матриц (7) коэффициентов базисных операторов $X_1(i)$, $X_2(i)$, $X_3(i)$ и $X_1(j)$, $X_2(j)$, $X_3(j)$.

Предположим сначала, что ранг матрицы (7) в окрестности $U(i)$ равен трем, а в окрестности $U(j)$ – меньше трех. В этом случае по лемме 1 группа преобразований окрестности $U(i)$ транзитивна, а группа преобразований окрестности $U(j)$ интранзитивна. В окрестности $U(j)$ введем такую систему координат, чтобы инвариантные плоскости (9) задавались уравнениями $z(j) = const$. В выражениях (5) для операторов $X_1(j)$, $X_2(j)$, $X_3(j)$ тогда исчезнет оператор дифференцирования $\partial/\partial z(j)$. Ранг матрицы (10) равен трем и потому система уравнений (6) имеет следующие три независимые решения: $z(j)$, $\varphi(ij)$, $\psi(ij)$. Их число равно числу переменных (= 6) минус ранг матрицы системы (= 3). Общее выражение 3-метрики, построенное на этих решениях, будет следующим: $f(ij) = f(z(j), \varphi(ij), \psi(ij))$, где $f : R^3 \to R^3$. Но такая 3-метрика не удовлетворяет, очевидно, первому условию (2) и потому вырождена.

Пусть теперь ранг матрицы (7) в окрестности $U(i)$ равен двум, а в окрестности $U(j)$ меньше трех, так как случай, когда он равен трем, аналогичен рассмотренному выше. В окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ введем такие ситемы координат, чтобы инвариантные плоскости (9) задавались уравнениями $z(i) = const$ и $z(j) = const$. Но тогда в выражениях (5) для операторов $X_1(i)$, $X_2(i)$, $X_3(i)$ и $X_1(j)$, $X_2(j)$, $X_3(j)$ будут отсутствовать операторы дифференцирования $\partial/\partial z(i)$ и $\partial/\partial z(j)$. С другой стороны, ранг матрицы (10) равен трем. Действительно, если предположить, что он равен двум, то любой определитель третьего порядка, содержащий три столбца этой матрицы, будет равен нулю. Поскольку по начальному предположению ранг матрицы (7) в окрестности $U(i)$

равен двум, легко получаем следующие три связи между компонентами матрицы (7) в окрестности $U(j)$:

$$\left.\begin{array}{r} c_1(i)\lambda_1(j)+c_2(i)\lambda_2(j)+c_3(i)\lambda_3(j)=0,\\ c_1(i)\sigma_1(j)+c_2(i)\sigma_2(j)+c_3(i)\sigma_3(j)=0,\\ c_1(i)\tau_1(j)+c_2(i)\tau_2(j)+c_3(i)\tau_3(j)=0, \end{array}\right\}$$

причем $c_1^2+c_2^2+c_3^2\neq 0$. Фиксируя координаты точки i, получаем линейную связь строк матрицы (7) в окрестности $U(j)$ с постоянными коэффициентами. Но тогда будут линейно зависимы с постоянными коэффициентами базисные операторы $X_1(j)$, $X_2(j)$, $X_3(j)$, что противоречит их линейной независимости. Таким образом, ранг матрицы (10) равен трем и система уравнений (6) имеет три и только три независимые решения: $z(i)$, $z(j)$, $\varphi(ij)$. Общий вид 3-метрики будет тогда следующим: $f(ij)=f(z(i),z(j),\varphi(ij))$, где $f:R^3\to R^3$. Но для такой 3-метрики не выполняется ни одно из двух условий (2), то есть она оказывается вырожденной.

Предположим, наконец, что ранг матрицы (7) в окрестности $U(i)$ равен единице, то есть своему минимальному значению. В окрестности $U(j)$ пусть этот ранг тоже равен единице, так как случаи, когда он там равен трем или двум, аналогичны рассмотренным выше. Между столбцами матрицы (7), если ее ранг равен единице, существуют две независимые связи (8). А это означает, что множество точек (x',y',z'), в которые может переходить точка (x,y,z), лежит на пересечении двух различных плоскостей, задаваемых двумя линейно независимыми уравнениями типа (9), то есть на прямой, проходящей через точку (x,y,z). Введем такую систему координат в окрестности точки (x,y,z), чтобы соответствующие ей инвариантные прямые задавались уравнениями $y=const$, $z=const$. Но тогда в базисных операторах (5) явно будет присутствовать только оператор дифференцирования $\partial/\partial x$, а в матрице (7) будет отличен от нуля только первый столбец. Его элементы λ_1, λ_2, λ_3 должны быть отличны от нуля и линейно независимы с постоянными коэффициентами, поскольку исходные операторы (5) ненулевые и базисные. В матрице (10) будет всего два ненулевых столбца – первый и четвертый. То есть ранг ее заведомо меньше трех. Легко видеть, что он равен двум, так как, например, определитель из элементов матрицы (10), стоящих на пересечении первой, второй строк и первого, четвертого столбцов, отличен от нуля вследствие линейной независимости фунукций λ_1, λ_2, λ_3 с постоянными коэффициентами. Но тогда система

(6) будет иметь следующие четыре и только четыре независимые решения: $y(i)$, $z(i)$, $y(j)$, $z(j)$, а общий вид 3-метрики будет задаваться выражением $f(ij) = f(y(i), y(j), z(i), z(j))$, где $f : R^4 \to R^3$, в котором отсутствуют координаты $x(i)$ и $x(j)$. Ясно, что такая 3-метрика вырождена, поскольку она не удовлетворяет ни одному из условий невырожденности (2). Лемма 2 доказана полностью, так как выше были рассмотрены все возможные случаи, когда хотя бы одна из групп преобразований окрестностей $U(i)$ и $U(j)$ интранзитивна.

Исчерпывающая классификация конечномерных локальных групп Ли локальных преобразований пространства автору неизвестна. Софус Ли в 1893г. нашел все конечномерные локальные группы преобразований плоскости [13]. Однако в отношении групп преобразований трехмерного пространства его результаты и результаты его последователей носят в основном предварительный и частный характер. Классификация же трехмерных локальных групп Ли преобразований пространства была проведена в предыдущем §4. Согласно лемме 2 невырожденные 3-метрики являются решениями системы уравнений (6), для которых операторы (5) как в окрестности $U(i)$, так и в окрестности $U(j)$ определяют транзитивные группы преобразований. Учитывая это обстоятельство, классификационную теорему из §4 воспроизведем ниже в следующем сокращенном варианте, доказанном в работе [16]:

Теорема 1. *Базисные операторы (5) трехмерной алгебры Ли локальной группы Ли локально транзитивных преобразований трехмерного многообразия (пространства) с точностью до изоморфизма и в надлежаще выбранной системе локальных координат (x, y, z) задаются следующими выражениями:*

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z; \tag{11}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x + \partial_z; \tag{12}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = (x+y)\partial_x + y\partial_y + \partial_z; \tag{13}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + py\partial_y + \partial_z; \tag{14}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -y\partial_x + (x+qy)\partial_y + \partial_z; \tag{15}$$

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \\ X_2 = tgy\ \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \sec y\ sinx\partial_z, \\ X_3 = tgy\ \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \sec y\ \cos x\partial_z; \end{array}\right\} \qquad (16)$$

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \\ X_2 = \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \exp y\ \sin x\partial_z, \\ X_3 = \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \exp y\ \cos x\partial_z, \end{array}\right\} \qquad (17)$$

где $-1 \leqslant p \leqslant 1,\ 0 \leqslant q < 2$.

Обратим внимание на то, что в теореме 1 параметр p может принимать значения $0, +1, -1$, а параметр q – значение 0, что для локально транзитивных групп преобразований оказалось возможным, в то время как в общей классификационной теореме из §4 эти случаи надо было записывать отдельно.

Теорема 2. *С точностью до эквивалентности и в надлежаще выбранной системе локальных координат* (x, y, z) *3-метрика* $f = (f^1, f^2, f^3)$, *задающая на трехмерном многообразии* $\mathfrak{M}$ *феноменологически симметричную геометрию ранга 3, может быть представлена одним из следующих семи выражений:*

$$\left.\begin{array}{r} f^1(ij) = x(i) - x(j), \\ f^2(ij) = y(i) - y(j), \\ f^3(ij) = z(i) - z(j); \end{array}\right\} \qquad (18)$$

$$\left.\begin{array}{r} f^1(ij) = y(i) - y(j), \\ f^2(ij) = (x(i) - x(j))y(i) + z(i) - z(j), \\ f^3(ij) = (x(i) - x(j))y(j) + z(i) - z(j); \end{array}\right\} \qquad (19)$$

$$\left.\begin{array}{r} f^1(ij) = (x(i) - x(j))^2\ exp\left(2\frac{y(i)-y(j)}{x(i)-x(j)}\right), \\ f^2(ij) = (x(i) - x(j))z(i), \\ f^3(ij) = (x(i) - x(j))z(j); \end{array}\right\} \qquad (20)$$

$$\left.\begin{array}{r} f^1(ij) = (x(i) - x(j))^p/\ (y(i) - y(j)), \\ f^2(ij) = (x(i) - x(j))z(i), \\ f^3(ij) = (x(i) - x(j))z(j); \end{array}\right\} \qquad (21)$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) = ((x(i)-x(j))^2 + (y(i)-y(j))^2)\times \\ \times exp\left(2\gamma arctg\frac{y(i)-y(j)}{x(i)-x(j)}\right), \\ f^2(ij) = z(i) + arctg[(y(i)-y(j))/(x(i)-x(j))], \\ f^3(ij) = z(j) + arctg[(y(i)-y(j))/(x(i)-x(j))]; \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) = \sin y(i)\sin y(j)\cos(x(i)-x(j)) + \cos y(i)\cos y(j), \\ f^2(ij) = z(i) - sign\left(\frac{\partial f^1(ij)}{\partial y(i)}\right)\times \\ \times arcsin\left(\frac{\sin(x(i)-x(j))\sin y(i)}{\sqrt{1-(f^1(ij))^2}}\right), \\ f^3(ij) = z(j) + sign\left(\frac{\partial f^1(ij)}{\partial y(j)}\right)\times \\ \times arcsin\left(\frac{\sin(x(i)-x(j))\sin y(j)}{\sqrt{1-(f^1(ij))^2}}\right); \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(ij) = (x(i)-x(j))y(i)y(j), \\ f^2(ij) = z(i) + 1/(x(i)-x(j))y^2(i), \\ f^3(ij) = z(j) - 1/(x(i)-x(j))y^2(j), \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

где $-1 \leqslant p \leqslant 1$, $\gamma = q/\sqrt{4-q^2}$, *причем* $0 \leqslant \gamma < \infty$, *так как* $0 \leqslant q < 2$.

Забегая несколько вперед к результатам следующего параграфа, обратим внимание на такое любопытное обстоятельство: первые компоненты f^1 3-метрик (20) – (24) совпадают с точностью до эквивалентности в смысле определения из §3 с плоскими 1-метриками (4), (5), (7), (9) – (13) из §6. Ниже приведена таблица совпадений с описанием эквивалентности, которая в каждом случае устанавливает это совпадение (замена координат на плоскости: $R^2 \to R^2$ и диффеоморфизм метрик: $R \to R$).

$f^1(ij)$	условие	$f(ij)$	$R^2 \to R^2$	$R \to R$
(20)	—	(12)	$x \to x,\ y \to y$	$f^1 \to f$
(21)	$0 < p^2 < 1$	(11)	$x \to x - y,\ y \to x + y$	$f^1 \to f^{2/(p-1)}$
(21)	$p = -1$	(7)	$x \to x - y,\ y \to x + y$	$f^1 \to 1/f$
(21)	$p = 0$	нет	—	—
(21)	$p = +1$	(10)	$x \to x,\ y \to y$	$f^1 \to 1/f$
(22)	$\gamma > 0$	(13)	$x \to x,\ y \to y$	$f^1 \to f$
(22)	$\gamma = 0$	(4)	$x \to x,\ y \to y$	$f^1 \to f$
(23)	—	(5)	$x \to x,\ y \to y$	$f^1 \to f$
(24)	—	(9)	$x \to x/y,\ y \to y$	$f^1 \to f$

,

где в первом столбце указан номер компоненты $f^1(ij)$ 3-метрики из теоремы 2 настоящего параграфа, а в третьем – соответствующий номер 1-метрики $f(ij)$ из теоремы 1 следующего шестого параграфа.

Приступим теперь к доказательству теоремы 2. Запишем сначала систему уравнений (6) с операторами (11):

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\ \partial f(ij)/\partial y(i) + \partial f(ij)/\partial y(j) = 0, \\ \partial f(ij)/\partial z(i) + \partial f(ij)/\partial z(j) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Ранг системы (25) равен трем и три ее независимые решения легко находятся методом характеристик, определяя компоненты невырожденной 3-метрики (18), для которой якобианы (2) равны по модулю единице.

Запишем теперь систему уравнений (6) с операторами (12):

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\ \partial f(ij)/\partial y(i) + \partial f(ij)/\partial y(j) = 0, \\ y(i)\partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial z(i) + \\ +y(j)\partial f(ij)/\partial x(j) + \partial f(ij)/\partial z(j) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Общее решение первых двух уравнений системы (26) легко найти:

$$f(ij) = \Theta(x(i) - x(j), y(i) - y(j), z(i), z(j)), \tag{27}$$

где Θ – произвольная функция четырех переменных. Подставим это решение в третье уравнение системы (26), полагая $x(i) - x(j) = u$, $y(i) - y(j) = v$: $v\Theta_u + \Theta_{z(i)} + \Theta_{z(j)} = 0$. Соответствующие уравнения характеристик: $du/v = dz(i) = dz(j) = dv/0$ имеют следующие три независимые интеграла: $z(i) - z(j) = c_1$, $vz(i) - u = c_2$, $vz(j) - u = c_3$, с помощью которых можно выразить любое решение системы (26), так как ранг ее равен трем. Введя дополнительно удобную замену координат: $x \to -z$, $y \to x$, $z \to y$, получаем компоненты невырожденной 3-метрики (19), для которой якобианы (2), равные по модулю $|y(i)-y(j)|$, отличны от нуля.

Запишем, далее, систему уравнений (6) с операторами (13):

$$\left.\begin{aligned}
\partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0,\\
\partial f(ij)/\partial y(i) + \partial f(ij)/\partial y(j) = 0,\\
(x(i)+y(i))\partial f(ij)/\partial x(i)+\\
+y(i)\partial f(ij)/\partial y(i) + \partial f(ij)/\partial z(i)+\\
+(x(j)+y(j))\partial f(ij)/\partial x(j)+\\
+y(j)\partial f(ij)/\partial y(j) + \partial f(ij)/\partial z(j) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Ранг этой системы равен трем и потому у нее имеется только три независимые решения, которые определяют компоненты 3-метрики. Общее решение первых двух уравнений системы (28), задаваемое, очевидно, выражением (27), подставим в ее третье уравнение: $(u+v)\Theta_u + v\Theta_v + \Theta_{z(i)} + \Theta_{z(j)} = 0$, где $u = x(i) - x(j)$, $v = y(i) - y(j)$. Соответствующие уравнения характеристик: $du/(u+v) = dv/v = dz(i) = dz(j)$ имеют три независимые интеграла: $v^2\ exp(-2u/v) = c_1$, $v\ exp(-z(i)) = c_2$, $v\ exp(-z(j)) = c_3$, из которых получим компоненты невырожденной 3-метрики (20) после следующей удобной замены координат: $x \to -y$, $y \to x$, $z \to -lnz$.

Запишем систему уравнений (6) с операторами (14):

$$\left.\begin{aligned}
\partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0,\\
\partial f(ij)/\partial y(i) + \partial f(ij)/\partial y(j) = 0,\\
x(i)\partial f(ij)/\partial x(i) + py(i)\partial f(ij)/\partial y(i) + \partial f(ij)/\partial z(i)+\\
+x(j)\partial f(ij)/\partial x(j) + py(j)\partial f(ij)/\partial y(j) + \partial f(ij)/\partial z(j) = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

где $-1 \leqslant p \leqslant 1$.

Общее решение первых двух уравнений системы (29) задается выражением (27), которое подставим в третье уравнение: $u\Theta_u + pv\Theta_v + \Theta_{z(i)} + \Theta_{z(j)} = 0$, где по-прежнему $u = x(i) - x(j)$, $v = y(i) - y(j)$. Соответствующие уравнения характеристик: $du/u = dv/pv = dz(i) = dz(j)$ при любых возможных значениях параметра p имеют три независимые интеграла: $u^p/v = c_1$, $uexp(-z(i)) = c_2$, $uexp(-z(j)) = c_3$. Производя удобную замену координат: $x \to x$, $y \to y$, $z \to -lnz$, получаем из этих интегралов компоненты невырожденной 3-метрики (21).

Запишем еще систему уравнений (6) с операторами (15):

$$
\left.\begin{array}{r}
\partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\
\partial f(ij)/\partial y(i) + \partial f(ij)/\partial y(j) = 0, \\
-y(i)\partial f(ij)/\partial x(i) + \\
+(x(i) + qy(i))\partial f(ij)/\partial y(i) + \partial f(ij)/\partial z(i) - \\
-y(j)\partial f(ij)/\partial x(j) + \\
+(x(j) + qy(j))\partial f(ij)/\partial y(j) + \partial f(ij)/\partial z(j) = 0,
\end{array}\right\} \qquad (30)
$$

где $0 \leqslant q < 2$.

Ранг этой системы равен трем, поэтому она имеет только три независимые решения. Общее решение первых двух уравнений системы (30), как и в предыдущих трех случаях, задается выражением (27). Подставим его в третье уравнение: $-v\Theta_u + (u + qv)\Theta_v + \Theta_{z(i)} + \Theta_{z(j)} = 0$, где $u = x(i) - x(j)$, $v = y(i) - y(j)$. Соответствующие уравнения характеристик: $-du/v = dv/(u + qv) = dz(i) = dz(j)$ для любых возможных значений параметра q имеют три независимые интеграла:

$$
\left.\begin{array}{r}
((2u + qv)^2 + v^2(4 - q^2)) \exp \dfrac{2q}{\sqrt{4 - q^2}}\ arctg\ \dfrac{2u + qv}{v\sqrt{4 - q^2}} = c_1, \\
z(i) + \dfrac{2}{\sqrt{4 - q^2}}\ arctg\ \dfrac{2u + qv}{v\sqrt{4 - q^2}} = c_2, \\
z(j) + \dfrac{2}{\sqrt{4 - q^2}}\ arctg\ \dfrac{2u + qv}{v\sqrt{4 - q^2}} = c_3.
\end{array}\right\}
$$

Произведем в этих интегралах переобозначение параметра: $\gamma = q/\sqrt{4 - q^2}$ и удобную замену координат: $x \to (y\sqrt{4 - q^2} - qx)/2\sqrt{4 - q^2}$, $y \to x/\sqrt{4 - q^2}$, $z \to 2z/\sqrt{4 - q^2}$. В результате получаем компоненты невырожденной 3-метрики (22), в которой $0 \leqslant \gamma < \infty$, так как $0 \leqslant q < 2$.

Запишем также систему уравнений (6) с операторами (16):

$$
\left.\begin{array}{r}
\partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\
tgy(i) \sin x(i)\partial f(ij)/\partial x(i) + \cos x(i)\partial f(ij)/\partial y(i) + \\
+ \sec y(i) \sin x(i)\partial f(ij)/\partial z(i) + \\
+tgy(j) \sin x(j)\partial f(ij)/\partial x(j) + \cos x(j)\partial f(ij)/\partial y(j) + \\
+ \sec y(j) \sin x(j)\partial f(ij)/\partial z(j) = 0, \\
tgy(i) \cos x(i)\partial f(ij)/\partial x(i) - \sin x(i)\partial f(ij)/\partial y(i) + \\
+ \sec y(i) \cos x(i)\partial f(ij)/\partial z(i) + \\
+tgy(j) \cos x(j)\partial f(ij)/\partial x(j) - \sin x(j)\partial f(ij)/\partial y(j) + \\
+ \sec y(j) \cos x(j)\partial f(ij)/\partial z(j) = 0.
\end{array}\right\} \qquad (31)
$$

Общее решение первого уравнения системы (31)

$$f(ij) = \Theta(x(i) - x(j), y(i), y(j), z(i), z(j)), \tag{32}$$

где Θ – произвольная функция пяти переменных, подставим в ее второе и третье уравнения, введя обозначение $u = x(i) - x(j)$. После этого умножим второе уравнение на $\cos x(j)(\cos x(i))$ и вычтем из него третье, умноженное на $\sin x(j)(\sin x(i))$:

$$\left.\begin{array}{r} tgy(i)\sin u\Theta_u + \cos u\Theta_{y(i)} + \Theta_{y(j)} + \sec y(i)\sin u\Theta_{z(i)} = 0, \\ tgy(j)\sin u\Theta_u + \Theta_{y(i)} + \cos u\Theta_{y(j)} - \sec y(j)\sin u\Theta_{z(j)} = 0. \end{array}\right\} \tag{33}$$

Умножим первое из полученных уравнений системы (33) на $tgy(j)$ и вычтем из него второе, умноженное на $tgy(i)$:

$$\begin{gathered}(tgy(j)\cos u - tgy(i))\Theta_{y(i)} - (tgy(i)\cos u - tgy(j))\Theta_{y(j)} + \\ + \sec y(i)tgy(j)\sin u\Theta_{z(i)} + \sec y(j)tgy(i)\sin u\Theta_{z(j)} = 0.\end{gathered}$$

Соответствующие уравнения характеристик: $du/0 = dy(i)/(tgy(j)\cos u - tgy(i)) = -dy(j)/(tgy(i)\cos u - tgy(j)) = dz(i)/\sec y(i)tgy(j)\sin u = dz(j)/secy(j)tgy(i)sinu$ имеют следующие три независимые интеграла:

$$\left.\begin{array}{r} \cos y(i)\cos y(j)\ \ \cos u + \sin y(i)\sin y(j) = c_1, \\ z(i) + signc_{1y(i)}\ arcsin\left(\dfrac{\sin u\ \ \cos y(j)}{\sqrt{1-(c_1)^2}}\right) = c_2, \\ z(j) - signc_{1y(j)}\ arcsin\left(\dfrac{\sin u\ \ \cos y(i)}{\sqrt{1-(c_1)^2}}\right) = c_3, \end{array}\right\}$$

которые являются также интегралами и исходной системы (33). Подставляя в них $u = x(i) - x(j)$ и производя замену координат: $x \to x$, $y \to (\pi - 2y)/2$, $z \to z$, получаем компоненты невырожденной 3-метрики (23).

Запишем, наконец, систему уравнений (6) с операторами (17):

$$\left.\begin{aligned}\partial f(ij)/\partial x(i)+\partial f(ij)/\partial x(j)=0,\\ \sin x(i)\partial f(ij)/\partial x(i)+\cos x(i)\partial f(ij)/\partial y(i)+\\ +\exp y(i)\sin x(i)\partial f(ij)/\partial z(i)+\\ +\sin x(j)\partial f(ij)/\partial x(j)+\cos x(j)\partial f(ij)/\partial y(j)+\\ +\exp y(j)\sin x(j)\partial f(ij)/\partial z(j)=0,\\ \cos x(i)\partial f(ij)/\partial x(i)-\sin x(i)\partial f(ij)/\partial y(i)+\\ +\exp y(i)\cos x(i)\partial f(ij)/\partial z(i)+\\ +\cos x(j)\partial f(ij)/\partial x(j)-\sin x(j)\partial f(ij)/\partial y(j)+\\ +\exp y(j)\cos x(j)\partial f(ij)/\partial z(j)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(34)$$

Общее решение первого уравнения системы (34), задаваемое выражением (32), подставим в ее второе и третье уравнения. Умножим затем второе уравнение на $\sin x(i)$ $(\sin x(j))$ и сложим с третьим, умноженным на $\cos x(i)(\cos x(j))$:

$$\left.\begin{aligned}(1-\cos u)\Theta_u+e^{y(i)}\Theta_{z(i)}+\sin u\Theta_{y(j)}+e^{y(j)}\cos u\Theta_{z(j)}=0,\\ (\cos u-1)\Theta_u-\sin u\Theta_{y(i)}+e^{y(i)}\cos u\Theta_{z(i)}+e^{y(j)}\Theta_{z(j)}=0,\end{aligned}\right\}\qquad(35)$$

где $u=x(i)-x(j)$. Складывая эти два уравнения, исключаем производную Θ_u:

$$\sin u(\Theta_{y(i)}-\Theta_{y(j)})-(1+\cos u)(e^{y(i)}\Theta_{z(i)}+e^{y(j)}\Theta_{z(j)})=0.$$

Соответствующие уравнения характеристик: $du/0=dy(i)/\sin u=-dy(j)/\sin u=-dz(i)/(1+\cos u)\exp y(i)=-dz(j)/(1+\cos u)\exp y(j)$ имеют три независимые интеграла: $exp(-(y(i)+y(j))/2)\sin(u/2)=c_1$, $z(i)+\exp y(i)ctg(u/2)=c_2$, $z(j)-\exp y(j)ctg(u/2)=c_3$, которые являются одновременно решениями системы (35). Подставляя в них $u=x(i)-x(j)$ и производя удобную замену координат: $x\to 2arctgx$, $y\to -ln((1+x^2)y^2)$, $z\to z+x/(1+x^2)y^2$, получаем компоненты 3-метрики (24), что и завершает доказательство теоремы 2.

Компоненты 3-метрики (18) можно, очевидно, интерпретировать проекциями вектора $\overrightarrow{ji}$ на координатные оси. Соответствующая функциональная связь (3) задается системой трех независимых уравнений:

$$\left.\begin{aligned}f^1(ij)-f^1(ik)+f^1(jk)=0,\\ f^2(ij)-f^2(ik)+f^2(jk)=0,\\ f^3(ij)-f^3(ik)+f^3(jk)=0.\end{aligned}\right\}$$

3-метрика (19) допускает содержательную физическую интерпретацию в термодинамике. Первую ее компоненту представим как разность температур $T(i)$ и $T(j)$ термодинамической системы в состояниях i и j, а вторую и третью – как работы $A^{TS}(ij)$ и $A^{ST}(ij)$ внешних тел над ней при ее переходе из состояния i в состояние j по двум путям (TS и ST), составленным из равновесных изотермического ($T = const$) и адиабатического ($S = const$) процессов:

$$\left.\begin{array}{r} f^1(ij) = T(i) - T(j), \\ f^2(ij) = A^{TS}(ij) = (S(i) - S(j))T(i) - U(i) + U(j), \\ f^3(ij) = A^{ST}(ij) = (S(i) - S(j))T(j) - U(i) + U(j), \end{array}\right\}$$

где S и U - энтропия и внутренняя энергия системы. Соответствующая феноменологически симметричная функциональная связь (3) задается в этом случае тремя независимыми уравнениями:

$$\left.\begin{array}{r} f^1(ij) - f^1(ik) + f^1(jk) = 0, \\ (f^2(ij) - f^3(ij))/f^1(ij) - (f^2(ik) - f^3(ik))/f^1(ik) + \\ +(f^2(jk) - f^3(jk))/f^1(jk) = 0, \\ (f^3(ij) - f^3(ik) + f^2(jk))f^1(ik) - (f^2(ik) - f^3(ik))f^1(jk) = 0. \end{array}\right\}$$

В термодинамике можно интерпретировать еще и компоненты 3-метрики (21) при $p = 0$ разностью температур и работами по путям PV и VP, где P и V – давление и объем системы. Вопрос о физической и математической интерпретации остальных 3-метрик остается пока открытым. Их нетривиальные симметрии, групповая и феноменологическая, обуславливающие друг друга, дают основание надеяться, что такие интерпретации будут найдены и для других 3-метрик из теоремы 2 настоящего параграфа.

Классификации феноменологически симметричных ранга три двуметрических геометрий на плоскости (теорема из §3) и триметрических геометрий в пространстве (теорема 2 настоящего параграфа) опубликованы автором без доказательства в работе [17].

§6. Классификация однометрических геометрий на плоскости

Однометрические ($s = 1$) геометрии на плоскости (x, y) задаются однокомпонентной гладкой функцией f, координатное представление которой запишем по выражению (2) из §1:

$$f(ij) = f(x(i), y(i), x(j), y(j)). \qquad (1)$$

Если эта 1-метрика задает на двумерном многообразии (локально – плоскости) феноменологически симметричную геометрию ранга 4 ($n = 2, sn = 2$), то по аксиоме IV из §1 шесть ее значений для четверки $< ijkl >$ фукционально связаны:

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl)) = 0. \qquad (2)$$

Невырожденная 1-метрика (1) по аксиоме III из §1 должна удовлетворять следующим двум условиям:

$$\left.\begin{array}{r} \partial(f(ik), f(il))/\partial(x(i), y(i)) \neq 0, \\ \partial(f(kj), f(lj))/\partial(x(j), y(j)) \neq 0 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

для открытого и плотного в $\mathfrak{M}^3$ множества троек $< ikl >$ и $< klj >$.

Плоскость Евклида с метрической функцией $f(ij) = (x(i) - x(j))^2 +$ $+(y(i) - y(j))^2$, которая во Введении была рассмотрена в качестве примера, является одной из таких геометрий. Но сколько их может существовать? Эта задача была решена автором и результаты опубликованы в работе [5].

Теорема 1. *С точностью до эквивалентности и в надлежаще выбранной системе локальных координат (x, y) 1-метрика $f(ij)$, задающая на двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию ранга 4, может быть представлена одним из следующих выражений:*

$$f(ij) = (x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2, \qquad (4)$$

$$f(ij) = \sin y(i) \sin y(j) \cos(x(i) - x(j)) + \cos y(i) \cos y(j), \qquad (5)$$

$$f(ij) = shy(i)shy(j)\cos(x(i) - x(j)) - chy(i)chy(j), \tag{6}$$

$$f(ij) = (x(i) - x(j))^2 - (y(i) - y(j))^2, \tag{7}$$

$$f(ij) = chy(i)chy(j)\cos(x(i) - x(j)) - shy(i)shy(j), \tag{8}$$

$$f(ij) = x(i)y(j) - x(j)y(i), \tag{9}$$

$$f(ij) = \frac{y(i) - y(j)}{x(i) - x(j)}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} f(ij) = ((x(i) - x(j))^2 - (y(i) - y(j))^2) \times \\ \times \exp\left(2\beta ar(c)th\frac{y(i) - y(j)}{x(i) - x(j)}\right), \end{aligned} \tag{11}$$

$$f(ij) = (x(i) - x(j))^2 \exp\left(2\frac{y(i) - y(j)}{x(i) - x(j)}\right), \tag{12}$$

$$f(ij) = ((x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2) \exp\left(2\gamma arctg\frac{y(i) - y(j)}{x(i) - x(j)}\right), \tag{13}$$

$$f(ij) = ((x(i) - x(j))^2 + \varepsilon_i y^2(i) + \varepsilon_j y^2(j))/y(i)y(j), \tag{14}$$

где $\beta > 0$ *и* $\beta \neq 1$, $\gamma > 0$, $\varepsilon_i = 0, \pm 1$, $\varepsilon_j = 0, \pm 1$, *причем не обязательно* $\varepsilon_i = \varepsilon_j$.

Выражения (4) – (9) определяют метрические функции хорошо известных плоских геометрий: (4) – евклидовой плоскости, (5) – двумерной сферы, (6) – плоскости Лобачевского, (7) – плоскости Минковского, (8) – двумерного однополостного гиперболоида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, (9) – симплектической плоскости. Метрические функции (10), (11), (12), (13), по-видимому, до настоящего времени в геометрии не рассматривались. Выражение (14) определяет метрическую функцию на несвязном двумерном многообразии, на связных компонентах которого будет либо симплектическая плоскось ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = 0$), либо плоскость Лобачевского в модели Пуанкаре ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = 1$), либо двумерный однополостной гиперболоид ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = -1$). Двумерную геометрию с метрической функцией (13) автор назвал *плоскостью Гельмгольца*, так как окружностью в ней является логарифмическая спираль, о чем Гельмгольц кратко сообщает в своей работе "О фактах, лежащих в основании геометрии" [3].

Профессор А.М.Широков (кафедра геометрии Казанского университета) обратил внимание автора на то, что с точностью до эквивалентности три метрические функции (11), (12) и (13) можно записать единообразно, используя три типа комплексных чисел $z = x + ey$:

$$f(ij) = (z(i) - z(j))\overline{(z(i) - z(j))}\ exp\ 2\gamma Arg(z(i) - z(j)),$$

где $\bar{z} = x - ey$, $e^2 = +1$, $e^2 = 0$ и $e^2 = -1$ для выражений (11), (12) и (13) соответственно, $\gamma > 0$ и, дополнительно, $\gamma \neq 1$, если $e^2 = +1$, так как 1-метрика (11) становится при $\gamma = 1$ вырожденной.

Напомним, что большая часть 1-метрик (4) – (14), кроме (6), (8) и (14) при $\varepsilon_i \neq 0$ или $\varepsilon_j \neq 0$, с точностью до эквивалентности совпадает с первыми компонентами 3-метрик (20) – (24) из предыдущего §5. Если же $\varepsilon_i = \varepsilon_j = 0$, то 1-метрика (14) переходит в первую компоненту $f^1(ij)$ 3-метрики (24) из §5 при замене координат $x \to x$, $y \to 1/y^2$ и диффеоморфизме $f \to (f^1)^2$.

В работе [5] результаты (4) – (14) приведены без доказательства, поэтому ниже мы кратко изложим его схему. Феноменологическая симметрия плоской (двумерной) геометрии означает, что шесть взаимных расстояний

$$\left.\begin{aligned} f(ij) &= f(x(i), y(i), x(j), y(j)), \\ f(ik) &= f(x(i), y(i), x(k), y(k)), \\ f(il) &= f(x(i), y(i), x(l), y(l)), \\ f(jk) &= f(x(j), y(j), x(k), y(k)), \\ f(jl) &= f(x(j), y(j), x(l), y(l)), \\ f(kl) &= f(x(k), y(k), x(l), y(l)), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

соответствующих всем упорядоченным парам в кортеже $< ijkl >$, функционально связаны, то есть удовлетворяют некоторому уравнению (2).

Шесть функций (15) зависят в общей сложности от восьми координат $x(i)$, $y(i)$, $x(j)$, $y(j)$, $x(k)$, $y(k)$, $x(l)$, $y(l)$ четырех точек кортежа $< ijkl >$, поэтому связь между ними возможна не всегда. Согласно теореме из §1 для того, чтобы шесть метрических функций системы (15) были функционально связаны каким-либо уравнением (2), необходимо и достаточно, чтобы общий ранг матрицы Якоби для нее:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \frac{\partial f(ij)}{\partial x(i)} & \frac{\partial f(ik)}{\partial x(i)} & \frac{\partial f(il)}{\partial x(i)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(ij)}{\partial y(i)} & \frac{\partial f(ik)}{\partial y(i)} & \frac{\partial f(il)}{\partial y(i)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(ij)}{\partial x(j)} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial x(j)} & \frac{\partial f(jl)}{\partial x(j)} & 0 \\ \frac{\partial f(ij)}{\partial y(j)} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial y(j)} & \frac{\partial f(jl)}{\partial y(j)} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f(ik)}{\partial x(k)} & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial x(k)} & 0 & \frac{\partial f(kl)}{\partial x(k)} \\ 0 & \frac{\partial f(ik)}{\partial y(k)} & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial y(k)} & 0 & \frac{\partial f(kl)}{\partial y(k)} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f(il)}{\partial x(l)} & 0 & \frac{\partial f(jl)}{\partial x(l)} & \frac{\partial f(kl)}{\partial x(l)} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f(il)}{\partial y(l)} & 0 & \frac{\partial f(jl)}{\partial y(l)} & \frac{\partial f(kl)}{\partial y(l)} \end{array} \right\| \tag{16}$$

был равен пяти. А это означает, что любой определитель шестого порядка, полученный из матрицы (16) вычеркиванием каких-то двух ее строк, должен обращаться в нуль.

Рассмотрим определитель, полученный из матрицы (16) вычеркиванием последних двух строк. Поскольку по координатам точек кортежа $< ijkl >$ он тождественно обращается в нуль, зафиксируем в нем координаты точек k, l и разложим его по элементам первого столбца. В результате относительно функции $f(ij)$ получаем линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, которое после введения удобных обозначений коэффициентов при производных можно записать в следующем виде:

$$A(i)\frac{\partial f(ij)}{x(i)} + B(i)\frac{\partial f(ij)}{y(i)} + A(j)\frac{\partial f(ij)}{x(j)} + B(j)\frac{\partial f(ij)}{y(j)} = 0,$$

где, например, $A(i) = A(x(i), y(i))$. Полученное уравнение интегрируемо, так как $A \neq 0$, $B \neq 0$, и может быть решено методом характеристик:

$$f(ij) = \chi(\varphi(i) - \varphi(j), \psi(i), \psi(j)),$$

где $\chi(u, v, w)$ – произвольная функция трех переменных, а функции φ и ψ независимы. После естественной замены координат $\varphi \to x$, $\psi \to y$ это решение запишется в более простом виде:

$$f(ij) = \chi(x(i) - x(j), y(i), y(j)). \tag{17}$$

Подставим решение (17) в матрицу (16) и рассмотрим два определителя шестого порядка, полученные вычеркиванием первой, второй и первой, четвертой строк. Эти определители обращаются в нуль тождественно по всем восьми координатам точек кортежа $< ijkl >$. Фиксируя затем координаты $x(k)$, $y(k)$, $x(l)$, $y(l)$, приходим к следующим двум соотношениям:

$$\left.\begin{array}{r} \chi_w(ij)/\chi_u(ij) = \mu(j) + \nu(j)(\lambda(i) - \lambda(j))/(\sigma(i) - \sigma(j)), \\ \chi_v(ij)/\chi_u(ij) = -\mu(i) - \nu(i)(\lambda(i) - \lambda(j))/(\sigma(i) - \sigma(j)). \end{array}\right\} \tag{18}$$

Соотношения (18) представляют собой, прежде всего, систему двух функциональных уравнений относительно функций μ, ν, λ, σ, так как в левые их части координаты $x(i)$ и $x(j)$ входят в виде разности $x(i) - x(j)$. Решив эти функциональные уравнения и найдя явные выражения для μ, ν, λ, σ, превратим соотношения (18) в систему двух дифференциальных уравнений относительно функции $\chi(u, v, w)$. Решение этой системы и определяет одну из феноменологически инвариантных метрических функций (4) – (14) на плоскости. Наиболее сложный этап – нахождение явных выражений для функций μ, ν, λ, σ из функциональных уравнений (18), так как они имеют большое число решений.

Согласно теореме 2 из §2 каждая феноменологически инвариантная метрическая функция (1) допускает трехпараметрическую локальную группу движений, то есть таких гладких и обратимых преобразований:

$$\left.\begin{array}{l} x' = \lambda(x, y; a^1, a^2, a^3), \\ y' = \sigma(x, y; a^1, a^2, a^3) \end{array}\right\} \tag{19}$$

с $\partial(\lambda, \sigma)/\partial(x, y) \neq 0$, которые ее сохраняют:

$$f(x'(i), y'(i), x'(j), y'(j)) = f(x(i), y(i), x(j), y(j)). \tag{20}$$

Таким образом, метрическая функция является двухточечным инвариантом группы ее движений. Если известно явное выражение (1) для метрической функции, то условие (20) представляет собой функциональное уравнение относительно группы ее движений (19). Если же, наоборот, задана трехпараметрическая группа преобразований (19), то условие (20) можно рассматривать как функциональное уравнение относительно метрической функции (1).

Основной целью настоящего §6 является воспроизведение результатов теоремы 1 с помощью классификации трехмерных групп преобразований плоскости (19), которую, оказывается, легко построить по известной из §4 классификации трехмерных групп преобразований пространства.

Пусть нулевым значениям параметров $a = (a^1, a^2, a^3)$ соответствует тождественное преобразование из группы (19). Тогда бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование, близкое к тождественному, запишется в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + \lambda_1(x, y)a^1 + \lambda_2(x, y)a^2 + \lambda_3(x, y)a^3, \\ y' &= y + \sigma_1(x, y)a^1 + \sigma_2(x, y)a^2 + \sigma_3(x, y)a^3, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где, например, $\lambda_1 = \partial\lambda/\partial a^1)|_{a=0}$.

Операторы

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \lambda_1(x, y)\partial_x + \sigma_1(x, y)\partial_y, \\ X_2 &= \lambda_2(x, y)\partial_x + \sigma_2(x, y)\partial_y, \\ X_3 &= \lambda_3(x, y)\partial_x + \sigma_3(x, y)\partial_y, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, однозначно задаваемые преобразованиями (21), линейно независимы с постоянными коэффициентами и образуют базис трехмерной алгебры Ли преобразований плоскости с коммутаторами $[X_1, X_2]$, $[X_3, X_1]$, $[X_2, X_3]$.

В §4 приведена по монографии [15] классификация трехмерных вещественных абстрактных алгебр Ли (4) – (14), с помощью которой была построена полная классификация трехмерных алгебр Ли преобразований пространства, зафиксированная в теореме этого параграфа. Ясно, что интранзитивные трехмерные группы Ли преобразований пространства с базисными операторами (5) из §5 соответствующей алгебры Ли, для которых матрица (7) из §5 имеет ранг меньше трех, и есть группы преобразований плоскости. При этом, конечно, надо опускать те трехмерные алгебры Ли преобразований пространства, для которых базисные операторы X_1, X_2, X_3 на инвариантной плоскости линейно зависимы с постоянными коэффициентами.

Проиллюстрируем сказанное выше на примере алгебр (4.1) – (4.5) из §4. Транзитивной будет толька та группа преобразований пространства, которой соответствует алгебра (4.5). Все остальные будут интранзитивны. Алгебра (4.1) есть алгебра Ли преобразований плоскости $z = const$. На этой же плоскости линейно зависимы операторы (4.2) и (4.4), а операторы (4.3) линейно зависимы на инвариантной плоскости $y = const$. Таким образом, из пяти алгебр (4.1) – (4.5) только алгебра с базисными операторами

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = \lambda(y)\partial_x, \tag{23}$$

где $\lambda''(y) \neq 0$, является трехмерной алгеброй Ли преобразований плоскости.

Рассуждая аналогично в отношении всех алгебр Ли преобразований пространства, по результатам теоремы из §4 получаем полную классификацию трехмерных алгебр Ли преобразований плоскости:

Теорема 2. *Базисные операторы (22) трехмерной алгебры Ли локальной группы Ли локальных преобразований двумерного многообразия (плоскости) с точностью до изоморфизма и в надлежаще выбранной системе локальных координат задаются следующими выражениями:*

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = \lambda(y)\partial_x; \tag{24.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = -\partial_y; \tag{25.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x + \delta\partial_y; \tag{25.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x - \partial_y; \tag{26.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = (x+y)\partial_x + y\partial_y; \tag{26.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x + (1-p)y\partial_y; \tag{27.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + py\partial_y; \tag{27.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x; \tag{28.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + y\partial_y; \tag{28.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x + y\partial_y; \tag{29.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + \delta\partial_y; \tag{29.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x + 2y\partial_y; \tag{30.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x - y\partial_y; \tag{30.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = xy\partial_x + (1 - qy + y^2)\partial_y; \tag{31.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -y\partial_x + (x + qy)\partial_y; \tag{31.2}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = xy\partial_x + (1 + y^2)\partial_y; \tag{32.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -y\partial_x + x\partial_y; \tag{32.2}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= tgy\ \sin x\partial_x + \cos x\partial_y, \\ X_3 &= tgy\ \cos x\partial_x - \sin x\partial_y; \end{aligned}\right\} \tag{33.1}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \sin x\partial_x, \quad X_3 = \cos x\partial_x; \tag{34.1}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \sin x\partial_x + \cos x\partial_y, \\ X_3 &= \cos x\partial_x - \sin x\partial_y; \end{aligned}\right\} \tag{34.2}$$

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \\ X_2 = -thy\ \sin x\partial_x + \cos x\partial_y, \\ X_3 = -thy\ \cos x\partial_x - \sin x\partial_y; \end{array}\right\} \qquad (34.3)$$

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \\ X_2 = -cthy\ \sin x\partial_x + \cos x\partial_y, \\ X_3 = -cthy\ \cos x\partial_x - \sin x\partial_y; \end{array}\right\} \qquad (34.4)$$

где $0 < p^2 < 1$, $0 < q < 2$, $\lambda''(y) \neq 0$, δ *– любое число.*

Алгебра (30.2) есть алгебра движений плоскости Минковского, (32.2) - евклидовой плоскости, (33.1) - двумерной сферы, (34.2) - симплектической плоскости, (34.3) - однополостного двумерного гиперболоида в трехмерном пседоевклидовом пространстве, (34.4) - плоскости Лобачевского, то есть двухполостного двумерного гиперболоида в том же пространстве, (25.1) - плоскости Галилея, (30.1) - антипсевдоевклидовой плоскости и т.д. Приведенные в теореме 2 результаты исчерпывают все трехмерные локальные группы Ли локальных преобразований плоскости, определяющие на ней все двумерные геометрии, удовлетворяющие двум гипотезам Пуанкаре [7]. Девять плоских геометрий Кэли-Клейна (см., например, [18]) естественно входят сюда как частный случай.

Заметим, что базисные операторы (25.1) и (25.2) с различными значениями δ, так же, как и базисные операторы (29.2) с различными значениями δ, не могут быть сведены друг к другу никакой локально обратимой заменой координат на плоскости. То есть они определяют изоморфные с точностью до совпадения структурных констант в соответствующих базисах, но различные действия одной и той же трехмерной группы G^3 на плоскости. В классификации же самого С.Ли [13], проведенной им с точностью до подобия, допускающего автоморфизм, то есть переход в одной из сопоставляемых алгебр к другому базису с сохранением структурных констант, эти алгебры отождествляются и остаются только алгебры (25.1) и (29.2) с $\delta = 0$.

Базисные операторы (34.2), (34.3), (34.4) изоморфных алгебр Ли можно записать единообразно, если в выражениях для них произвести соответственно следующие замены координат:

$$\xi = \sin x/(\cos x + 1), \quad \eta = \exp y/(\cos x + 1),$$

$$\xi = \sin x/(\cos x - thy), \quad \eta = 1/(\cos x - thy)chy,$$

$$\xi = \sin x/(\cos x - cthy), \quad \eta = 1/(\cos x - cthy)shy$$

и возвратиться к их прежним обозначениям:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2}(1 + x^2 - \varepsilon y^2)\partial_x + xy\partial_y, \\ X_2 &= x\partial_x + y\partial_y, \\ X_3 &= \frac{1}{2}(1 - x^2 + \varepsilon y^2)\partial_x - xy\partial_y, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

где $\varepsilon = 0$ для (34.2), $\varepsilon = -1$ для (34.3) и $\varepsilon = +1$ для (34.4). Результаты теоремы 2 опубликованы автором в работе [19].

Подставим в уравнение (20) бесконечно малые преобразования (21) окрестностей $U(i)$ и $U(j)$ и продифференцируем его отдельно по каждому из независимых параметров a^1, a^2, a^3, полагая затем в результатах дифференцирования $a^1 = a^2 = a^3 = 0$. В результате относительно метрической функции (1), которая является двухточечным инвариантом группы преобразований (19), получаем систему трех линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} X_1(i)f(ij) + X_1(j)f(ij) = 0, \\ X_2(i)f(ij) + X_2(j)f(ij) = 0, \\ X_3(i)f(ij) + X_3(j)f(ij) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

с операторами (22), где, например, $X_1(i) = \lambda_1(x(i), y(i))\partial/\partial x(i) + \sigma_1(x(i), y(i))\partial/\partial y(i)$. Согласно инфинитезимальному критерию инвариантности (см. [20], с.77) все решения системы (36) являются также решениями исходного функционального уравнения (20).

Базисные операторы $X_1(i)$, $X_2(i)$, $X_3(i)$ задают локальные преобразования окрестности $U(i)$, а операторы $X_1(j)$, $X_2(j)$, $X_3(j)$ – окрестности $U(j)$. При нахождении метрической функции $f(ij)$ по уравнению (36) рассматриваются преобразования окрестности $U(i) \times U(j)$, задаваемые операторами $X_\alpha(ij) = X_\alpha(i) + X_\alpha(j)$, где $\alpha = 1, 2, 3$. Поскольку операторы $X_\alpha(i)$ и $X_\alpha(j)$ коммутируют между собой, соответствующие алгебры изоморфны алгебре с базисом $X_\alpha(ij)$ с точностью до совпадения структурных констант. Однако это вовсе не означает, что операторы $X_\alpha(i)$ и $X_\alpha(j)$ переходят друг в друга при некотором локальном диффеоморфизме $U(i) \to U(j)$. Поэтому, если, например, имеются две изоморфные, но различные трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости, то двухточечный инвариант $f(ij)$ необходимо искать для всех трех принципиально различных сочетаний базисных операторов $X_1(i)$, $X_2(i)$, $X_3(i)$ и $X_1(j)$, $X_2(j)$, $X_3(j)$ в системе уравнений (36).Заметим, что в двойной нумерации результатов теоремы 2 (так же, как и теоремы из §4) первые цифры одинаковы для изоморфных алгебр, базисные операторы которых не сводятся друг к другу никакой локально обратимой заменой координат $x \to \varphi(x,y)$, $y \to \psi(x,y)$.

Лемма. *Если группа преобразований некоторой окрестности* $U \subset \mathfrak{M}$ *задается алгеброй Ли с базисными операторами* X_1, X_2, X_3 *из классификационной теоремы 2, причем* $X_1 = \partial_x$, $X_2 = y\partial_x$ *или* $X_1 = \partial_x$, $X_2 = sinx\partial_x$, *то любой ее двухточечный инвариант* f *вырожден.*

Запишем первые два уравнения системы (36) с этими операторами:

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\ y(i)\partial f(ij)/\partial x(i) + y(j)\partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\ sinx(i)\partial f(ij)/\partial x(i) + sinx(j)\partial f(ij)/\partial x(j) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Обе системы имеют ранг равный двум, поэтому $\partial f(ij)/\partial x(i) = 0$, $\partial f(ij)/\partial x(j) = 0$ и их решение не зависит от координат $x(i)$ и $x(j)$:

$$f(ij) = \chi(y(i), y(j)).$$

Ясно, что такой двухточечный инвариант вырожден, так как не удовлетворяет ни одному из условий (3). Лемма доказана.

Таким образом, при нахождении двухточечных инвариантов трехпараметрических групп преобразований плоскости как решений систем уравнений (36) те алгебры Ли из классификационной теоремы 2, у которых либо $X_1 = \partial_x$, $X_2 = y\partial_x$, либо $X_1 = \partial_x$, $X_2 = sinx\partial_x$, то есть алгебры (24.1) – (32.1), (34.1) можно не рассматривать.

Теорема 3. *Невырожденные двухточечные инварианты трехпараметрических групп Ли локальных преобразований двумерного многообразия с точностью до эквивалентности совпадают с 1-метриками*

(4) – (14) из теоремы 2, задающими на нем феноменологически симметричные геометрии ранга 4.

Запишем систему уравнений (36) с операторами (25.2):

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\ \partial f(ij)/\partial y(i) + \partial f(ij)/\partial y(j) = 0, \\ y(i)\partial f(ij)/\partial x(i) + \delta\partial f(ij)/\partial y(i) + \\ +y(j)\partial f(ij)/\partial x(j) + \delta\partial f(ij)/\partial y(j) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Из первых двух уравнений легко находим:

$$f(ij) = \chi(x(i) - x(j), y(i) - y(j)), \qquad (38)$$

где $\chi(u, v)$ – произвольная гладкая функция двух переменных

$$u = x(i) - x(j), \quad v = y(i) - y(j). \qquad (39)$$

Подставляя результат (38) в третье уравнение системы (37), получаем $v\chi_u(u, v) = 0$, то есть $\chi_u(u, v) = 0$ и $\chi(u, v) = \psi(v)$, где ψ – произвольная функция одной переменной. Двухточечный инвариант (38) с такой функцией $\chi(u, v)$ явно вырожден, так как в нем нет зависимости от координат $x(i)$ и $x(j)$:

$$f(ij) = \psi(y(i) - y(j)). \qquad (40)$$

Запишем систему уравнений (36) с операторами (26.2):

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\ \partial f(ij)/\partial y(i) + \partial f(ij)/\partial y(j) = 0, \\ (x(i) + y(i))\partial f(ij)/\partial x(i) + y(i)\partial f(ij)/\partial y(i) + \\ +(x(j) + y(j))\partial f(ij)/\partial x(j) + y(j)\partial f(ij)/\partial y(j) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Общее решение первых двух уравнений системы (41) задается выражением (38). Подставляя его в третье уравнение системы (41), получаем уравнение для функции $\chi(u, v)$:

$$(u + v)\chi_u(u, v) + v\chi_v(u, v) = 0,$$

решение которого легко находится методом характеристик:

$$\chi(u, v) = \psi(v^2 exp(-2u/v)), \qquad (42)$$

где ψ есть уже произвольная функция одной переменной. По решениям (38), (42) и обозначению (39) получаем двухточечный инвариант

$$f(ij) = \psi((y(i) - y(j))^2 exp(-2(x(i) - x(j))/(y(i) - y(j))), \qquad (43)$$

который в случае $\psi' \neq 0$ невырожден, так как для него выполняются условия (3). Инвариант (43) эквивалентен 1-метрике (12), переходящей в него при локальном диффеоморфизме $f \to \psi(f)$ и замене координат $x \to y$, $y \to -x$. Заметим, что плоскость с такой 1-метрикой в геометрии не рассматривалась.

Запишем систему уравнений (36) с операторами (27.2):

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\ \partial f(ij)/\partial y(i) + \partial f(ij)/\partial y(j) = 0, \\ x(i)\partial f(ij)/\partial x(i) + py(i)\partial f(ij)/\partial y(i) + \\ +x(j)\partial f(ij)/\partial x(j) + py(j)\partial f(ij)/\partial y(j) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

причем $0 < p^2 < 1$. Общее решение первых двух уравнений системы (44) задается выражением (38). Подставляя его в последнее уравнение этой системы, получаем уравнение для функции χ:

$$u\chi_u(u, v) + pv\chi_v(u, v) = 0,$$

которое легко интегрируется методом характеристик:

$$\chi(u, v) = \psi(u^p/v), \qquad (45)$$

где ψ – произвольная функция одной переменной. По решениям (38), (45) и обозначению (39) получаем двухточечный инвариант

$$f(ij) = \psi((x(i) - x(j))^p/(y(i) - y(j))), \qquad (46)$$

который при $\psi' \neq 0$ удовлетворяет условиям (3) и потому невырожден. Инвариат (46) эквивалентен 1-метрике (11), в которую он переходит при замене координат $x \to x - y$, $y \to x + y$, введении нового параметра $\beta = (1 + p)/(1 - p)$, причем $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$, и следующем локальном диффеоморфизме: $f \to (\psi^{-1}(f))^{2/(p-1)}$, если $|(y(i)-y(j))/(x(i)-x(j))| < 1$ и $f \to ((-1)^{(p+1)/2}\psi^{-1}(f))^{2/(p-1)}$, если $|(y(i) - y(j))/(x(i) - x(j))| > 1$. В первом случае в показатель экспоненты выражения (11) для 1-метрики входит гиперболический ареатангенс – $arth$, а во втором – гиперболический ареакотангенс – $arcth$.

Плоскость с 1-метрикой (46) в геометрии рассматривалась только для $p = 1/2$ и $\psi(t) = 1/t^2$, когда она становится финслеровой: $df = dy^2/dx$, причем при $dx \to \lambda dx$, $dy \to \lambda dy$ имеем $df \to \lambda df$, то есть локально выполняется требование однородности метрики.

Система уравнений (36) с операторами (28.2) может быть получена из системы (44), если в ней положить $p = +1$. С другой стороны, при интегрировании уравнений этой системы условие $p \neq +1$ не было использовано. В результате, полагая в решении (46) $p = 1$, получаем невырожденный двухточечный инвариант

$$f(ij) = \psi\left(\frac{x(i) - x(j)}{y(i) - y(j)}\right). \tag{47}$$

Инвариант (47) эквивалентен 1-метрике (10), переходящей в него при локальном диффеоморфизме $f \to \psi(f^{-1})$. Плоскость с 1-метрикой (10) в геометрии не изучалась.

Запишем систему уравнений (36) с операторами (29.2);

$$\left.\begin{aligned} \partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\ \partial f(ij)/\partial y(i) + \partial f(ij)/\partial y(j) = 0, \\ x(i)\partial f(ij)/\partial x(i) + \delta\partial f(ij)/\partial y(i) + \\ +x(j)\partial f(ij)/\partial x(j) + \delta\partial f(ij)/\partial y(j) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Интегрирование системы (48) аналогично интегрированию системы (37), также содержащей постоянную δ в третьем уравнении. В результате получаем вырожденный двухточечный инвариант (40).

Система уравнений (36) для алгебры (30.2) может быть формально получена из системы (44), если в ней положить $p = -1$. Но при интегрировании этой системы условие $p \neq -1$ не было использовано. Полагая в решении (46) $p = -1$, получаем невырожденный двухточечный инвариант;

$$f(ij) = \psi\left(\frac{1}{(x(i) - x(j))(y(i) - y(j))}\right). \tag{49}$$

Инвариант (49) эквивалентен 1-метрике (7), так как она переходит в него при локальном диффеоморфизме $f \to \psi(f^{-1})$ и замене координат $x \to (x+y)$, $y \to (x-y)$. Напомним, что 1-метрика (7) является метрической функцией псевдоевклидовой плоскости – плоскости Минковского.

Запишем систему уравнений (36) для операторов (31.2):

$$\left.\begin{array}{r} \partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\ \partial f(ij)/\partial y(i) + \partial f(ij)/\partial y(j) = 0, \\ -y(i)\partial f(ij)/\partial x(i) + (x(i)+qy(i))\partial f(ij)/\partial y(i)- \\ -y(j)\partial f(ij)/\partial x(j) + (x(j)+qy(j))\partial f(ij)/\partial y(j) = 0, \end{array}\right\} \qquad (50)$$

причем $0 < q < 2$. Общее решение первых двух уравнений системы (50) задается выражением (38). Подставляя его в последнее уравнение этой системы, получаем уравнение для функции χ:

$$-v\chi_u(u,v) + (u+qv)\chi_v(u,v) = 0,$$

решение которого находится методом характеристик:

$$\begin{array}{r} \chi(u,v) = \psi(ln((2u+qv)^2 + (4-q^2)v^2)+ \\ +\dfrac{2q}{\sqrt{4-q^2}}\ arctg\dfrac{2u+qv}{v\sqrt{4-q^2}}), \end{array} \qquad (51)$$

где ψ – произвольная функция одной переменной. По решениям (38), (51) и обозначению (39) получаем двухточечный инвариант

$$\begin{array}{r} f(ij) = \\ = \psi\{ln[(2(x(i)-x(j)) + q(y(i)-y(j)))^2 + (4-q^2)(y(i)-y(j))^2]+ \\ +\dfrac{2q}{\sqrt{4-q^2}}\ arctg\dfrac{2(x(i)-x(j)) + q(y(i)-y(j))}{(y(i)-y(j))\sqrt{4-q^2}}\}, \end{array} \qquad (52)$$

который при $\psi' \neq 0$ удовлетворяет условиям (3) и потому невырожден. Инвариант (52) эквивалентен 1-метрике (13), переходящей в него при локальном диффеоморфизме $f \to \psi(f)$, переобозначении параметра: $\gamma = q/\sqrt{4-q^2}$ и удобной замене координат: $x \to (y\sqrt{4-q^2} - qx)/2\sqrt{4-q^2}$, $y \to x/\sqrt{4-q^2}$. 1-метрика (13) определяет метрическую функцию плоскости Гельмгольца (термин автора), геометрию которой еще предстоит исследовать.

Система уравнений (36) с операторами (32.2) может быть получена из системы (50), если в ней положить $q = 0$. При ее интегрировании условие $q \neq 0$ не было использовано. Поэтому соответствующий невырожденный двухточечный инвариант можно получить из выражения (52) при $q = 0$:

$$f(ij) = \psi[ln(4(x(i)-x(j))^2 + 4(y(i)-y(j))^2)]. \qquad (53)$$

Инвариант (53) эквивалентен 1-метрике (4) плоскости Евклида, которая переходит в него при локальном диффеоморфизме $f \to \psi(ln(4f))$.

Запишем систему уравнений (36) с операторами (33.1);

$$\left.\begin{array}{r}\partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0,\\ tgy(i)\sin x(i)\partial f(ij)/\partial x(i) + \cos x(i)\partial f(ij)/\partial y(i)+\\ +tgy(j)\sin x(j)\partial f(ij)/\partial x(j) + \cos x(j)\partial f(ij)/\partial y(j) = 0,\\ tgy(i)\cos x(i)\partial f(ij)/\partial x(i) - \sin x(i)\partial f(ij)/\partial y(i)+\\ +tgy(j)\cos x(j)\partial f(ij)/\partial x(j) - \sin x(j)\partial f(ij)/\partial y(j) = 0.\end{array}\right\} \qquad (54)$$

Общее решение первого уравнения системы (54) задается, очевидно, следующим выражением:

$$f(ij) = \Theta(x(i) - x(j), y(i), y(j)), \qquad (55)$$

где $\Theta(u, v, w)$ – произвольная гладкая функция трех переменных. Подставим это выражение во второе и третье уравнения системы (54). Затем умножим второе уравнение на $cosx(i)$ (соответственно, на $\cos x(j)$) и сложим с третьим, умноженным на $-\sin x(j)$ (соответственно, на $-\sin x(i)$). В результате получаем систему двух уравнений для функции $\Theta(u, v, w)$:

$$\left.\begin{array}{r} tgv\ \sin u\Theta_u + \cos u\Theta_v + \Theta_w = 0,\\ tgw\ \sin u\Theta_u + \Theta_v + \cos u\Theta_w = 0,\end{array}\right\} \qquad (56)$$

где, напомним,

$$u = x(i) - x(j), \quad v = y(i), \quad w = y(j). \qquad (57)$$

Умножим, далее, первое уравнение системы (56) на tgw и сложим со вторым, умноженным на $-tgv$:

$$(tgw\ \cos u - tgv)\Theta_v - (tgv\ \cos u - tgw)\Theta_w = 0.$$

Это последнее уравнение решается методом характеристик:

$$\Theta(u, v, w) = \chi(u, \cos v\ \cos w\ \cos u + \sin v\ \sin w),$$

где $\chi(s, t)$ – произвольная функция двух переменных. Подставим полученное решение в первое уравнение системы (56): $\chi_s(s, t) = 0$, то есть

$$\Theta(u, v, w) = \chi(\cos v\ \cos w\ \cos u + \sin v\ \sin w), \qquad (58)$$

где ψ – произвольная функция только одной переменной. По решениям (55), (58) и обозначению (57) находим двухточечный инвариант

$$f(ij) = \psi(\cos y(i)\cos y(j)\cos(x(i) - x(j)) + \sin y(i)\sin y(j)), \qquad (59)$$

который при $\psi' \neq 0$ невырожден, так как для него выполняется условие (3). Инвариант (59) эквивалентен 1-метрике (5), которая переходит в него при локальном диффеоморфизме $f \to \psi(f)$ и замене координат $x \to x$, $y \to (\pi - 2y)/2$. Заметим, что 1-метрика (5) определяет метрическую функцию двумерной единичной сферы в трехмерном евклидовом пространстве.

Запишем систему уравнений (36) с операторами (34.2):

$$\left.\begin{array}{r} \partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\ \sin x(i)\partial f(ij)/\partial x(i) + \cos x(i)\partial f(ij)/\partial y(i) + \\ + \sin x(j)\partial f(ij)/\partial x(j) + \cos x(j)\partial f(ij)/\partial y(j) = 0, \\ \cos x(i)\partial f(ij)/\partial x(i) - \sin x(i)\partial f(ij)/\partial y(i) + \\ + \cos x(j)\partial f(ij)/\partial x(j) - \sin x(j)\partial f(ij)/\partial y(j) = 0. \end{array}\right\} \qquad (60)$$

Из первого уравнения системы (60) получаем выражение (55). Подставим его во второе и третье уравнения системы. Затем умножим второе уравнение на $\sin x(i)$ (соответственно, на $\sin x(j)$),третье - на $\cos x(i)$ (соответственно, - на $\cos x(j)$) и сложим их:

$$\left.\begin{array}{l} (1 - \cos u)\Theta_u + \sin u\Theta_w = 0, \\ (1 - \cos u)\Theta_u + \sin u\Theta_v = 0, \end{array}\right\} \qquad (61)$$

Из системы (61) легко получаем уравнение $\Theta_v - \Theta_w = 0$, решение которого есть

$$\Theta(u, v, w) = \chi(u, v + w), \qquad (62)$$

где $\chi(s, t)$ – произвольная гладкая функция двух переменных

$$s = u, \quad t = v + w. \qquad (63)$$

Подставим выражение (62) в первое уравнение системы (61):

$$(1 - \cos s)\chi_s + \sin s\ \chi_t = 0$$

и решим его методом характеристик:

$$\chi(s, t) = \psi\left(\exp\left(-\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{s}{2}\right)\right), \qquad (64)$$

где ψ – произвольная функция одной переменной. По решениям (64), (62), (55) и обозначениям (63), (57) получаем двухточечный инвариант

$$f(ij) = \psi\left(\exp\left(-\frac{y(i)+y(j)}{2}\right)\sin\left(\frac{x(i)-x(j)}{2}\right)\right), \tag{65}$$

который при $\psi' \neq 0$ удовлетворяет условию (3) и потому невырожден. Инвариант (65) эквивалентен 1-метрике (9), которая переходит в него при локальном диффеоморфизме $f \to \psi(f)$ и замене координат $x \to \exp(-y/2)\sin(x/2)$, $y \to \exp(-y/2)\cos(x/2)$. Заметим, что 1-метрика (9) определяет метрическую функцию симплектической плоскости, геометрия которой изучена в достаточной подробности.

Запишем систему уравнений (36) с операторами (34.3):

$$\left.\begin{array}{r}\partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0,\\ -thy(i)\sin x(i)\partial f(ij)/\partial x(i) + \cos x(i)\partial f(ij)/\partial y(i)-\\ -thy(j)\sin x(j)\partial f(ij)/\partial x(j) + \cos x(j)\partial f(ij)/\partial y(j) = 0,\\ -thy(i)\cos x(i)\partial f(ij)/\partial x(i) - \sin x(i)\partial f(ij)/\partial y(i)-\\ -thy(j)\cos x(j)\partial f(ij)/\partial x(j) - \sin x(j)\partial f(ij)/\partial y(j) = 0.\end{array}\right\} \tag{66}$$

Из первого уравнения системы (66) следует, что в двухточечный инвариант $f(ij)$ координаты $x(i)$ и $x(j)$ входят в виде разности $x(i)-x(j)$. Общее решение этой системы удобно искать в следующем виде:

$$f(ij) = \Theta(chy(i)chy(j)\cos(x(i)-x(j)) - shy(i)shy(j), y(i), y(j)), \tag{67}$$

где $\Theta(u,v,w)$ – произвольная гладкая функция трех переменных

$$\left.\begin{array}{r}u = chy(i)chy(j)\cos(x(i)-x(j)) - shy(i)shy(j),\\ v = y(i), \quad w = y(j),\end{array}\right\} \tag{68}$$

поскольку выражение для первой из них является, как нетрудно проверить, одним из ее решений. Подставим выражение (67) во второе и третье уравнения системы (66):

$$\left.\begin{array}{r}\cos x(i)\Theta_v + \cos x(j)\Theta_w = 0,\\ \sin x(i)\Theta_v + \sin x(j)\Theta_w = 0,\end{array}\right\}$$

откуда следует, что $\Theta_v = 0$, $\Theta_w = 0$ и потому

$$\Theta(u,v,w) = \psi(u), \tag{69}$$

где ψ – произвольная функция одной переменной. По решениям (67), (69) и обозначению (68) находим двухточечный инвариант

$$f(ij) = \psi(chy(i)chy(j)\cos(x(i) - x(j)) - shy(i)shy(j)), \qquad (70)$$

который невырожден при $\psi' \neq 0$, так как удовлетворяет условиям (3). Инвариант (70) эквивалентен 1-метрике (8), которая переходит в него при локальном диффеоморфизме $f \to \psi(f)$ без замены координат. Заметим, что 1-метрика (8) задает метрическую функцию однополостного двумерного гиперболоида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве. Геометрию такого гиперболоида можно рассматривать как объединение двух плоских геометрий Кэли-Клейна (см. [18]), а именно гиперболической и дважды гиперболической.

Запишем систему уравнений (36) с операторами (34.4):

$$\left.\begin{array}{r}\partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\ -cthy(i)\sin x(i)\partial f(ij)/\partial x(i) + \cos x(i)\partial f(ij)/\partial y(i) - \\ -cthy(j)\sin x(j)\partial f(ij)/\partial x(j) + \cos x(j)\partial f(ij)/\partial y(j) = 0, \\ -cthy(i)\cos x(i)\partial f(ij)/\partial x(i) - \sin x(i)\partial f(ij)/\partial y(i) - \\ -cthy(j)\cos x(j)\partial f(ij)/\partial x(j) - \sin x(j)\partial f(ij)/\partial y(j) = 0.\end{array}\right\} \qquad (71)$$

Система (71) решается методом, в деталях совпадающим с тем, который был использован в отношении предыдущей системы (66). В результате получаем двухточечный инвариант

$$f(ij) = \psi(shy(i)shy(j)\cos(x(i) - x(j)) - chy(i)chy(j)), \qquad (72)$$

где ψ – произвольная функция одной переменной. Инвариант (72) при $\psi' \neq 0$ удовлетворяет условиям невырожденности и эквивалентен 1-метрике (6), которая задает метрическую функцию плоскости Лобачевского, реализуемой на одной из полостей двухполостного двумерного гиперболоида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве.

Для рассмотрения смешанных вариантов, когда локальные преобразования окрестностей $U(i)$ и $U(j)$ могут задаваться изоморфными, но различными алгебрами Ли с базисными операторами (34.2), (34.3), (34.4), удобно для последних использовать единообразную форму (35).

Запишем систему уравнений (36) с операторами (35):

$$\left.\begin{aligned}
(1+x^2(i)-\varepsilon_i y^2(i))\partial f(ij)/\partial x(i)+\\
+2x(i)y(i)\partial f(ij)/\partial y(i)+\\
+(1+x^2(j)-\varepsilon_j y^2(j))\partial f(ij)/\partial x(j)+\\
+2x(j)y(j)\partial f(ij)/\partial y(j)=0,\\
x(i)\partial f(ij)/\partial x(i)+y(i)\partial f(ij)/\partial y(i)+\\
x(j)\partial f(ij)/\partial x(j)+y(j)\partial f(ij)/\partial y(j)=0,\\
(1-x^2(i)+\varepsilon_i y^2(i))\partial f(ij)/\partial x(i)-\\
-2x(i)y(i)\partial f(ij)/\partial y(i)+\\
+(1-x^2(j)+\varepsilon_j y^2(j))\partial f(ij)/\partial x(j)-\\
-2x(j)y(j)\partial f(ij)/\partial y(j)=0,
\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

где $\varepsilon_i=0,\pm1$; $\varepsilon_j=0,\pm1$, причем не обязательно $\varepsilon_i=\varepsilon_j$. Сложим первое и третье уравнения системы (73):

$$\partial f(ij)/\partial x(i)+\partial f(ij)/\partial x(j)=0,$$

откуда следует, что координаты $x(i)$ и $x(j)$ входят в инвариант $f(ij)$ в виде разности $x(i)-x(j)$. Общее решение системы (73) будем искать в следующем виде:

$$f(ij)=\Theta\left(\frac{(x(i)-x(j))^2+\varepsilon_i y^2(i)+\varepsilon_j y^2(j)}{y(i)y(j)}, y(i), y(j)\right), \tag{74}$$

поскольку дробный аргумент справа, как легко проверить, является одним из ее решений, $\Theta(u,v,w)$ – произвольная гладкая функция трех переменных

$$\left.\begin{aligned}
u=((x(i)-x(j))^2+\varepsilon_i y^2(i)+\varepsilon_j y^2(j))/y(i)y(j),\\
v=y(i),\quad w=y(j).
\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Подставим выражение (74) в первое и второе уравнения системы (73):

$$\left.\begin{aligned}
x(i)y(i)\Theta_v+x(j)y(j)\Theta_w=0,\\
y(i)\Theta_v+y(j)\Theta_w=0,
\end{aligned}\right\}$$

откуда следует, что $\Theta_v=0$, $\Theta_w=0$ и потому

$$\Theta(u,v,w)=\psi(u), \tag{76}$$

где ψ – произвольная функция одной переменной. По решениям (74), (76) и обозначению (75) получаем двухточечный инвариант

$$f(ij) = \psi[((x(i) - x(j))^2 + \varepsilon_i y^2(i) + \varepsilon_j y^2(j))/y(i)y(j)], \qquad (77)$$

очевидно, невырожденный при $\psi' \neq 0$. Инвариант (77) эквивалентен 1-метрике (14), которая переходит в него при локальном диффеоморфизме $f \to \psi(f)$. Если для любых двух точек i, j многообразия $\varepsilon_i = \varepsilon_j = \varepsilon$, то 1-метрика (14) эквивалентна: 1-метрике (9) симплектической плоскости при $\varepsilon = 0$; 1-метрике (6) плоскости Лобачевского при $\varepsilon = +1$; 1-метрике (8) однополостного гиперболоида при $\varepsilon = -1$. Если же многообразие $\mathfrak{M}$ несвязно и для некоторых его точек i, j имеем $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$, то 1-метрика (14) определяет "расстояние" между точками его различных компонент, в то время как на каждой из его компонент реализуется одна из трех геометрий - симплектическая, Лобачевского или однополостного гиперболоида.

Теорема 3, доказательство которой только что было завершено, является частной иллюстрацией равносильности (эквивалентности) феноменологической и групповой симметрий, утверждаемой теоремой 2 из §2 при точном и корректном определении этих симметрий.

В работе [21] автором были найдены все двухточечные инварианты как решения системы (36) для всевозможных изоморфных алгебр Ли с базисными операторами $X_1(i)$, $X_2(i)$, $X_3(i)$ и $X_1(j)$, $X_2(j)$, $X_3(j)$. Многие из таких систем в настоящем параграфе не рассматривались по условиям леммы о вырождении двухточечного инварианта, доказанной перед теоремой 3. Например, система (36) с операторами (30.1) и (30.2):

$$\left.\begin{array}{r} \partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\ y(i)\partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial y(j) = 0, \\ x(i)\partial f(ij)/\partial x(i) + 2y(i))\partial f(ij)/\partial y(i) + \\ x(j)\partial f(ij)/\partial x(j) - y(j))\partial f(ij)/\partial y(j) = 0, \end{array}\right\} \qquad (78)$$

имеет общее решение

$$f(ij) = \psi[(x(i) - x(j) - y(i)y(j))/\sqrt{y(i)}], \qquad (79)$$

в то время как она с операторами (30.1):

$$\left.\begin{array}{r} \partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\ y(i)\partial f(ij)/\partial x(i) + y(j)\partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\ x(i)\partial f(ij)/\partial x(i) + 2y(i)\partial f(ij)/\partial y(i) + \\ x(j)\partial f(ij)/\partial x(j) + 2y(j)\partial f(ij)/\partial y(j) = 0, \end{array}\right\} \qquad (80)$$

имеет решение

$$f(ij) = \psi(y(i)/y(j)), \tag{81}$$

в котором отсутствуют координаты $x(i)$ и $x(j)$. Система же (36) с операторами (30.2) была рассмотрена выше (система (44) при $p = -1$) и ее решение

$$f(ij) = \psi[1/(x(i) - x(j))(y(i) - y(j))] \tag{49}$$

определяет 1-метрику плоскости Минковского.

Пусть многообразие $\mathfrak{M}$ несвязно и преобразование его различных компонент задается изоморфными, но различными алгебрами Ли с базисными операторами (30.1) и (30.2). Тогда в целом двухточечный инвариант представляется совокупностью трех решений (81), (49), (79) и оказывается вырожденным, так как не удовлетворяет условию (3) для той компоненты многообразия, преобразование которой задается алгеброй Ли с базисными операторами (30.1), а сам инвариант - решением (81). Заметим, что в аналогичных условиях двухточечный инвариант (77) всюду невырожден,так как для него условие (3) выполняется и "внутри" каждой компоненты многообразия, когда обе точки принадлежат ей, и "между" ними, когда эти точки находятся в разных компонентах.

§7. Геометрическое фукциональное уравнение

Рассмотрим простейшую однометрическую феноменологически симметричную геометрию ранга 3. Пусть имеется одномерное многообразие $\mathfrak{M}$ и функция (1-метрика) $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$, сопоставляющая паре $< ij > \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ некоторое число $f(ij) \in R$. Предположим, что функция f гладкая и имеет отличные от нуля производные. Тройке $< ijk >$ функция f естественно сопоставляет точку $(f(ij), f(ik), f(jk))$ в R^3. Согласно определению из §1 функция f задает на одномерном многообразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию ранга 3, если все такие точки лежат на некоторой двумерной гиперповерхности в R^3, задаваемой уравнением

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(jk)) = 0, \tag{1}$$

причем $grad\Phi \neq 0$.

Представим уравнение (1) в виде, разрешенном относительно одного из аргументов, например первого:

$$f(ij) = \varphi(f(ik), f(jk)), \tag{$1'$}$$

где $\varphi(u, v)$ – гладкая функция двух переменных u и v с отличными от нуля производными φ_u и φ_v, что следует из аксиомы III первого параграфа.

Возьмем теперь.упорядоченную четверку точек $< ijkl >$ и запишем уравнение ($1'$) для троек $< ijk >, < ijl >, < ikl >, < jkl >$ из нее:

$$\left.\begin{array}{r} f(ij) = \varphi(f(ik), f(jk)), \\ f(ij) = \varphi(f(il), f(jl)), \\ f(ik) = \varphi(f(il), f(kl)), \\ f(jk) = \varphi(f(jl), f(kl)). \end{array}\right\} \tag{$1''$}$$

Из четырех связей ($1''$) легко получить соотношение

$$\varphi[\varphi(f(il), f(kl)), \varphi(f(jl), f(kl))] = \varphi(f(il), f(jl)),$$

в котором,очевидно, независимы все три переменные $f(il), f(jl), f(kl)$. Если для них ввести обозначения $x = f(il), y = f(jl), z = f(kl)$, то для функции $\varphi(u, v)$ приходим к следующему функциональному уравнению:

$$\varphi(\varphi(x, z), \varphi(y, z)) = \varphi(x, y). \tag{2}$$

Уравнение (2) является естественным следствием принципа феноменологической симметрии, имеет нетривиальное решение, содержательное как в физическом, так и математическом смыслах, в частности, геометрическом.

Теорема 1. *Общее решение функционального уравнения (2) задается выражением*

$$\varphi(u, v) = \psi^{-1}(\psi(u) - \psi(v)), \tag{3}$$

где ψ – произвольная гладкая функция одной переменной с $\psi' \neq 0$, ψ^{-1} – обратная к ней функция.

Уравнение (2) явно выражает зависимость трех функций φ_1, φ_2, φ_3, в которые три переменные x, y, z входят особым образом: $\varphi_1 = \varphi(x, y)$,

$\varphi_2 = \varphi(x,z)$, $\varphi_3 = \varphi(y,z)$. Матрица Якоби для функций φ_1, φ_2, φ_3 по соответствующей теореме математического анализа имеет ранг меньше трех. Матрица эта квадратная и потому ее определитель - якобиан $\partial(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)/\partial(x,y,z)$ - должен обращаться в нуль:

$$\begin{vmatrix} \varphi_u(x,y) & \varphi_v(x,y) & 0 \\ \varphi_u(x,z) & 0 & \varphi_v(x,z) \\ 0 & \varphi_u(y,z) & \varphi_v(y,z) \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Функционально-дифференциальное уравнение (4) является следствием функционального уравнения (2) и потому любое решение последнего есть также решение уравнения (4). Обратное же не всегда верно. То есть общее решение уравнения (4) необходимо еще подставить в исходное уравнение (2) для установления дополнительных ограничений на это решение.

Разложим определитель уравнения (4) по элементам первой строки и разделим в нем переменные x, y:

$$\varphi_u(x,y)\varphi_v(x,z)/\varphi_u(x,z) + \varphi_v(x,y)\varphi_v(y,z)/\varphi_u(y,z) = 0.$$

Уравнение (2) и все его следствия при подстановке решения должны обращаться в тождества по каждой из переменных x, y, z. Поэтому в последнем результате можно зафиксировать переменную z, введя удобное сокращающее обозначение $\varphi_v(x,z)/\varphi_u(x,z)|_{z=const} = A(x)$. Переходя затем к переменным u и v, получаем для искомой функции $\varphi(u,v)$ линейное однородное уравнение в частных производных:

$$\varphi_u(u,v)A(u) + \varphi_v(u,v)A(v) = 0, \tag{5}$$

причем, очевидно, $A(u) \neq 0$, $A(v) \neq 0$. Предположим, что в уравнении (5) с разделенными переменными u и v коэффициенты $A(u)$ и $A(v)$ есть произвольные совпадающие ненулевые функции. Такое уравнение легко решается методом характеристик:

$$\varphi(u,v) = \chi(\psi(u) - \psi(v)), \tag{6}$$

где χ и ψ – произвольные гладкие функции одной переменной с отличными от нуля производными χ' и ψ', так как, например, $\varphi_u(u,v) = \chi'(\psi(u) - \psi(v))\psi'(u) \neq 0$ и $\psi'(u) = 1/A(u) \neq 0$. Решение (6) уравнения (5), в чем легко убедиться, является также решением функционально-дифференциального уравнения (4). Таким образом, в дифференциальном уравнении (5) коэффициенты $A(u)$ и $A(v)$ действительно являются произвольными совпадающими ненулевыми функциями, а его решение (6) есть общее решение функционально-дифференциального уравнения (4).

Подставим решение (6) в исходное функциональное уравнение (2) для установления связи между функциями χ и ψ. Эта связь и является тем дополнительным ограничением на решение, о котором говорилось выше:

$$\chi(\psi(\varphi(x,z))-\psi(\varphi(y,z)))=\chi(\psi(x)-\psi(y)).$$

Поскольку при $\chi'\neq 0$ функция χ монотонна, из этого равенства следует

$$\psi(\chi(\psi(x)-\psi(z)))-\psi(\chi(\psi(y)-\psi(z)))=\psi(x)-\psi(y)$$

и после простых преобразований

$$\psi(\chi(\psi(x)-\psi(z)))-(\psi(x)-\psi(z))=$$
$$=\psi(\chi(\psi(y)-\psi(z)))-(\psi(y)-\psi(z))=c=const,$$

так как $\psi(x)-\psi(z)$ и $\psi(y)-\psi(z)$ являются независисимыми переменными. Таким образом, $\psi(\chi(t))=t+c$, то есть $\chi(t)=\psi^{-1}(t+c)$ и потому по решению (6) получаем

$$\varphi(u,v)=\psi^{-1}(\psi(u)-\psi(v)+c), \tag{7}$$

где ψ – произвольная гладкая функция одной переменной с $\psi'\neq 0$, ψ^{-1} – обратная к ней функция, а c – произвольная постоянная. Чтобы ее исключить из решения, введем следующую замену: $\tilde{\psi}(u)=\psi(u)-c$. Для обратной функции $\tilde{\psi}^{-1}(u)$ имеем тогда такое выражение: $\tilde{\psi}^{-1}(u)=\psi^{-1}(u+c)$. Действительно, $\tilde{\psi}^{-1}(\tilde{\psi}(u))=\tilde{\psi}^{-1}(\psi(u)-c)=\psi^{-1}(\psi(u)-c+c)=\psi^{-1}(\psi(u))=u$ и $\tilde{\psi}(\tilde{\psi}^{-1}(u))=\tilde{\psi}(\psi^{-1}(u+c))=\psi(\psi^{-1}(u+c))-c=u+c-c=u$. То есть в выражении для решения (7) постоянная c может быть опущена:

$$\varphi(u,v)=\tilde{\psi}^{-1}(\tilde{\psi}(u)-\tilde{\psi}(v)),$$

где, как и раньше, $\tilde{\psi}$ – произвольная гладкая функция одной переменной с $\tilde{\psi}'\neq 0$, $\tilde{\psi}^{-1}$ – обратная к ней функция, поскольку $\tilde{\psi}=\psi-c$. Возвращаясь к прежнему обозначению функции ψ, получаем общее решение (3) функционального уравнения (2). Теорема 1 доказана.

Подставим решение (3) в уравнение $(1')$:

$$f(ij) = \psi^{-1}(\psi(f(ik)) - \psi(f(jk))), \tag{8}$$

откуда получаем функциональную связь

$$\psi(f(ij)) - \psi(f(ik)) + \psi(f(jk)) = 0, \tag{9}$$

к которой может быть приведено любое уравнение (1), если функция f задает на одномерном многобразии $\mathfrak{M}$ однометрическую феноменологически симметричную геометрию ранга (3).

Координатное представление для 1-метрики можно получить из уравнения (8), если в нем зафиксировать точку k:

$$f(ij) = \psi^{-1}(\varphi(x(i)) - \varphi(x(j))), \tag{10}$$

где $\varphi(x(i)) = \psi(f(x(i), x(k)))$, причем $\varphi' \neq 0$.

Теорема 2. *С точностью до эквивалентности и в надлежаще выбранной системе локальных координат x 1-метрика f, задающая на одномерном многобразии $\mathfrak{M}$ феноменологически симметричную геометрию ранга 3, может быть представлена следующим выражением:*

$$f(ij) = x(i) - x(j). \tag{11}$$

Действительно 1-метрика (11) переходит в 1-метрику (10) при локальном диффеоморфизме $f \to \psi^{-1}(f)$ и замене координат $x \to \varphi(x)$. Форма записи уравнения (9) при этом значительно упрощается:

$$f(ij) - f(ik) + f(jk) = 0. \tag{12}$$

Результаты (11), (12) допускают естественную физическую и геометрическую интерпретации. Если многообразие $\mathfrak{M}$ является направленной евклидовой прямой, то 1-метрика f есть обычное расстояние L между двумя точками с учетом их взаимного расположения, а связь трех расстояний для произвольных трех точек $< ijk >$ задается следующим уравнением:

$$L(ij) - L(ik) + L(jk) = 0. \tag{13}$$

В общем случае 1-метрику f можно интерпретировать как квазирасстояние, измеряемое линейкой с произвольной шкалой. Однако существует такая функция ψ, отражающая свойства линейки, что уравнение (9) задает связь (13) трех истинных расстояний $L(ij) = \psi(f(ij))$, $L(ik) = \psi(f(ik))$, $L(jk) = \psi(f(jk))$. Таким образом, квазирасстояние f задает на одномерном многообразии структуру направленной евклидовой прямой: $L(ij) = \psi(f(ij)) = x(i) - x(j)$.

Пусть, далее, многообразие $\mathfrak{M}$ представляет собой множество одноместных событий. Тогда 1-метрика f есть промежуток времени T между двумя событиями, а связь трех промежутков времени для трех произвольных событий $< ijk >$ задается уравнением

$$T(ij) - T(ik) + T(jk) = 0. \tag{14}$$

В общем случае 1-метрику f можно интерпретировать как промежуток квазивремени, измеряемый неравномерно идущими часами. Но для некоторой функции ψ, корректирующей неравномерный ход часов, уравнение (9) задает связь (14) трех промежутков истинного времени $T(ij) = \psi(f(ij))$, $T(ik) = \psi(f(ik))$, $T(jk) = \psi(f(jk))$ для трех произвольных событий. Таким образом, квазивремя f выявляет на множестве событий структуру одномерного истинного времени, измеряемого, как обычно говорят, равномерно идущими часами, существование которых не очевидно [22].

В заключение отметим, что метод решения функционального уравнения (2) предложен автором в работе [4], в которой и получен результат, зафиксированный в теоремах данного параграфа. Если множество $\mathfrak{M}$ произвольной природы, а не только одномерное многообразие, то решение функционального уравнения (2), как показали исследования А.А. Симонова (частное сообщение), задает на нем с точностью до изотопии операцию группового умножения.

§8. К вопросу о симметрии расстояния в геометрии

Обычно расстояние $L(ij)$ между точками i и j пространства $\mathfrak{M}$ определяется с помощью некоторой функции $L : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$, удовлетворяющей известной системе метрических аксиом: 1) $L(ij) \geqslant 0$, причем $L(ij) = 0$ тогда и только тогда, когда $i = j$; 2) $L(ij) = L(ji)$;

3) $L(ik) + L(jk) \geqslant L(ij)$. Согласно второй аксиоме для любых точек $i, j \in \mathfrak{M}$ выполняется равенство $L(ij) = L(ji)$, то есть предполагается, что расстояние симметрично. Однако в геометрии нельзя исключить из рассмотрения так называемые симплектические пространства, для которых расстояние между точками определяется с помощью антисимметричной функции, так что $L(ij) = -L(ji)$. И хотя такую функцию не называют метрической, но в некотором более широком смысле она является таковой. Аналогично симметричный интервал $S(ij)$ между двумя событиями i и j в псевдоевклидовом пространстве-времени Минковского, не удовлетворяющий аксиомам 1) и 3), есть метрика в некоторм более широком смысле. Естественно возникает вопрос: почему в геометрии допускаются только симметричные или антисимметричные расстояния. Оказывается, что если предположить согласно идее феноменологической симметрии существование какой-либо функциональной связи между расстояниями $L(ij)$ и $L(ji)$, то будут возможны только такие два типа симметрии. Перейдем к более точным формулировкам.

Пусть имеются множество $\mathfrak{M} = \{i, j, k, \ldots\}$ произвольной природы, а также функция $L : G_L \to R$, где $G_L \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, сопоставляющая упорядоченной паре $< ij > \in G_L$ некоторое вещественное число $L(ij) \in R$. Функцию L будем называть метрической в некотором более широком смысле, не требуя от нее выполнения обычных аксиом метрики. В общем случае область определения G_L функции L не обязательно совпадает со всем прямым произведением $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$. Однако естественно предположить, что если $< ij > \in G_L$, то и $< ji > \in G_L$, то есть расстояния $L(ij)$ и $L(ji)$ определены или не определены одновременно.

Определение. Будем говорить, что метрические функции L и L' эквивалентны, если совпадают их области обределения G_L и $G_{L'}$ в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ и существует строго монотонная функция $\psi : L(G_L) \to R$ такая, что для любой пары $< ij > \in G_L$ имеет место равенство $L'(ij) = \psi(L(ij))$.

Исходя из замечания в работе Ю.И. Кулакова [1], аксиому симметрии будем формулировать следующим образом [23]:

A.S. Для любых двух точек $i, j \in \mathfrak{M}$ таких, что пары $< ij >$ и $< ji >$ принадлежат G_L, расстояния $L(ij)$ и $L(ji)$ связаны соотношением

$$L(ij) = \Theta(L(ji)), \tag{1}$$

где Θ – некоторая строго монотонная функция одной переменной, область определения и область значений которой совпадают с областью значений $L(G_L))$ исходной метрической функции.

Теорема. *Если расстояние между точками пространства $\mathfrak{M}$, определяемое метрической функцией $L : G_L \to R$, где $G_L \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, удовлетворяет аксиоме симметрии A.S., то это расстояние может быть либо симметричным, либо, с точностью до эквивалентности, антисимметричным.*

Из соотношения (1) для любой пары $< ij > \in G_L$ получаем тождество $\Theta(\Theta(L(ij))) = L(ij)$, означающее, что функция Θ является решением функционального уравнения

$$\Theta(\Theta(x)) = x, \tag{2}$$

где $x \in L(G_L) \subseteq R$. По предположению функция Θ строго монотонная и поэтому имеет к себе обратную. Если функция Θ монотонно возрастает, то $\Theta(x) = x$ и расстояние оказывается симметричным. Если же функция Θ монотонно убывает, то, перейдя к эквивалентной метрической функции $L' = \psi(L)$, где $\psi(L) = L - \Theta(L)$, имеем в силу (1): $L'(ij) = L(ij) - \Theta(L(ij)) = L(ij) - L(ji) = -L'(ji)$, то есть антисимметричное расстояние. Теорема доказана.

Симметрия или антисимметрия расстояния в геометрии при наличии связи (1) были ранее установлены автором в работе "Некоторые следствия гипотезы о бинарной структуре пространства" [24] для того случая, когда это расстояние определялось с помощью функции $f : G_f \to R$, где $G_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, задающей на n-мерных многообразиях $\mathfrak{M} = \{i, j, k, \ldots\}$ и $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ физическую структуру ранга $(n+1, n+1)$, и некоторого локального диффеоморфизма $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$:

$$L(ij) = f(i, \varphi(j)). \tag{3}$$

Для расстояния (3) соотношение (1) при известной функции f становится функциональным уравнением относительно функции Θ и диффеоморфизма φ:

$$f(i, \varphi(j)) = \Theta(f(j, \varphi(i))).$$

Решая это уравнение для функций из [25]:

$$f(i\alpha) = x^1(i)\xi^1(\alpha) + \cdots + x^n(i)\xi^n(\alpha),$$
$$f(i\alpha) = x^1(i)\xi^1(\alpha) + \cdots + x^{n-1}(i)\xi^{n-1}(\alpha) + x^n(i) + \xi^n(\alpha),$$

где $x^1, \ldots, x^n$ и $\xi^1, \ldots, \xi^n$ локальнве координаты в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, можно найти одновременно и диффеоморфизм φ и функцию Θ, определяющую тип симметрии расстояния (3). В надлежаще выбранной в многообразии $\mathfrak{M}$ системе локальных координат выражения для расстояния $L(ij)$ с точностью до локальной эквивалентности можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} L(ij) &= g_{\lambda\sigma}x^\lambda(i)x^\sigma(j), \\ L(ij) &= h_{\mu\nu}x^\mu(i)x^\nu(j) + x^n(i) + ax^n(j), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $a = +1, -1$; $g_{\lambda\sigma} = ag_{\sigma\lambda}$, $\lambda, \sigma = 1, \ldots, n$; $h_{\mu\nu} = ah_{\nu\mu}$, $\mu, \nu = 1, \ldots, n-1$, причем для $a = -1$ размерность n многообразия $\mathfrak{M}$ четна в первом из выражений (4) и нечетна во втором.

Из выражений (4) при некоторых естественных дополнительных условиях в случае $a = +1$ можно получить симметричные метрики римановых и псевдоримановых пространств постоянной кривизны. В случае же $a = -1$ выражения (4) определяют антисимметричные метрические функции симплектических пространств *четной* и, обратим внимание, *нечетной* размерности.

Заключение

Классификация полиметрических феноменологически симметричных геометрий еще не завершена. Поэтому имеет смысл представить в обозримом виде перед читателем перечень всех задач, как решенных, так и не решенных. Тогда каждый, у кого появится интерес к геометрическим физическим структурам и возникнет желание испытать свои силы и способности, сможет легко сориентироваться и выбрать для себя любую из них по душе (в том числе и решенную – для разработки новых методов исследования и проверки уже полученных результатов). Приведем этот перечень в виде следующей таблицы:

Классификация полиметрических геометрий							
№	s	n	sn	$m=n+2$	$sn(n+1)/2$	реш.	ист.
1	1	1	1	3	1	+	§7; [23]
2	1	2	2	4	3	+	§6; [5]
3	1	3	3	5	6	+	[6]
4	1	4	4	6	10	—	—
5	1	$\geqslant 5$	$5,6,\ldots$	$7,8,\ldots$	$15,21,\ldots$	—	—
6	2	1	2	3	2	+	§7; [16]
7	2	$\geqslant 2$	$4,6,\ldots$	$4,5,\ldots$	$6,12,\ldots$	—	—
8	3	1	3	3	3	+	§5; [16]
9	3	$\geqslant 2$	$6,9,\ldots$	$4,5,\ldots$	$9,18,\ldots$	—	—
10	4	1	4	3	4	—	—
11	4	$\geqslant 2$	$8,12,\ldots$	$4,5,\ldots$	$12,24,\ldots$	—	—
12	$\geqslant 5$	$\geqslant 1$	$\geqslant 5$	$\geqslant 3$	$\geqslant 5$	—	—

Напомним, что s – число компонент полиметрики $f=(f^1,\ldots,f^s)$, которая на sn-мерном многообразии задает феноменологически симметричную геометрию ранга $m=n+2$, группа движений которой зависит от $sn(n+1)/2$ параметров. В последних двух столбцах таблицы знаком плюс сделана отметка о решении данной задачи и указаны соответствующие источники, причем параграфы – по основной части настоящего издания, а ссылки [5], [6], [16], [23] – по списку литературы после Заключения в нем же (перед Приложением).

Итак, феноменологически симметричные полиметрики являются невырожденными двухточечными инвариантами некоторых групп преобразований исходного многообразия. Задача их классификации естественно предполагала предварительную полную классификацию групп преобразований с определенным числом параметров. Однако рассмотренные в Основной части примеры показывают, что с ростом числа компонент полиметрики и ранга феноменологической симметрии проведение полной классификации групп преобразований становится технически слишком сложной задачей, которая вряд ли может быть доведена до конца, Тем более что отсутствует классификация r-мерных абстрактных алгебр Ли уже для $r > 6$. Поэтому естественно возникает вопрос: является ли предварительная полная классификация групп преобразований действительно необходимой. Ведь для многих из них двухточечные инварианты вырождены. Следовательно, имеет смысл предварительно установить, каким дополнительным условиям должна удовлетворять группа преобразований, чтобы ее двухточечный инвариант был невырожденным. Например, при классификации триметрических геометрий в пространстве таким условием оказалось требование транзитивности групп преобразований (лемма 2 из §5). В исследованиях В.Х. Лева [6] для случая $s = 1, n = 3$ соответствующие ограничения возникли в процессе классификации метрических функций, но они носили частный характер и не формулировались в виде лемм. В целом вопрос об общих ограничениях на группы преобразований, следующих из невырожденности двухточечного инварианта, остается открытым.

Отметим еще, что все определения и результаты Основной части локальны. Их глобализация требует качественно нового шага в развитии метода исследования и является новой проблемой, значимость которой обуславливается содержательной интерпретацией полиметрических геометрий и не только в самой геометрии, но и в физике.

Литература

1. Кулаков Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур // Докл. АН СССР. 1970. Т.193,№5. С.985-987.

2. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований ("Эрлангеская программа") // Об основаниях геометрии. М.,1956. С.402-434

3. Гельмгольц Г. О фактах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. М.,1956. С.366-388.

4. Михайличенко Г.Г. Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур // Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур. Новосибирск: НГУ,1968. С.175-226.

5. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии //Докл. АН СССР. 1981. Т.260,№4. С. 803-805 (Mikhaylitchenko G.G. Geometries a deux dimensions dans la theorie de structures physiques // Comptes Rendus de L'Academie des Sciences. Paris, 16 novembre 1981. T.293. Serie 1. P.529-531).

6. Лев В.Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. Вып.125. С.90-103.

7. Пуанкаре А. Об основных гипотезах геометрии // Об основаниях геометрии. М.,1956. С.388-398.

8. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии. // Докл. АН СССР. 1983. Т.269,№2. С.284-288.

9. Wene G.P. Comments of the geometry of Lie algebras and Lie-homotopic algebras // Hadronic J. 1985. Vol.8,№2. P.63-74.

10. Кулаков Ю.И. О теории физических структур // Записки научных семинаров ЛОМИ. Л.: Наука,1983. Т.127. С.103-151.

11. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.

12. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

13. Lie S., Engel F. Theorie der Transformations gruppen, Bd 3, Leipzig: Teubner, 1893.

14. Владимиров С.А. Группы симметрии дифференциальных уравнений и релятивистские поля. М.: Атомиздат, 1979.

15. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.

16. Михайличенко Г.Г. Трехмерные алгебры Ли локально транзитивных преобразований пространства // Изв. вузов. Математика. 1997. №9(424). С.41-48.

17. Михайличенко Г.Г. Простейшие полиметрические геометрии // Докл. АН РФ. 1996. Т.348,№1. С.22-24.

18. Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. М.: Наука, 1969.

19. Михайличенко Г.Г. Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости // Сиб. мат. журн. 1982. Т23,№5. С.132-141.

20. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. М.: ИЛ, 1947.

21. Михайличенко Г.Г. Метрика плоскости как двухточеччный инвариант / Сиб. мат. журн." 1984. 38с. Деп. в ВИНИТИ 30.10.84, №6980-84. (Реферат // Сиб. мат. журн. 1985. Т.26,№5. С.198)

22. Кулаков Ю.И. Инвариантная формулировка классической теории измерений. // Teorie a metoda. 1973. V.2. P.55-65.

23. Михайличенко Г.Г. К вопросу о симметрии расстояния в геометрии // Изв. вузов. Математика.1994. №4(383). С.21-23.

24. Михайличенко Г.Г. Некоторые следствия гипотезы о бинарной структуре пространства // Изв. вузов. Математика.1991. №6. С.28-35.

25. Михайличенко Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Докл. АН СССР. 1972. Т.206,№5. С.1056-1058.

Приложение

Шестимерные алгебры Ли групп движений трехмерных феноменологически симметричных геометрий

В.А. Кыров

§1. Введение

Г.Г. Михайличенко в работе [1] получил полную классификацию метрических функций всех двумерных феноменологически симметричных геометрий. В силу теоремы об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий каждая из таких геометрий допускает трехпараметрическию группу движений. Зная эту метрическую функцию мы восстанавливаем группу движений, а от последней возвращаемся к метрике. В.Х. Лев в своей диссертации [2] получил классификацию метрических функций трехмерных феноменологически симметричных геометрий, которые допускают шестимерную группу движений. Целью этого приложения является нахождение базисных инфинитезимальных операторов шестимерных алгебр Ли этих групп движений.

Согласно [1] феноменологически симметричное двумерное многообразие $\mathfrak{F}$ представляет собой множество таких точек $i = (x_i, y_i)$ двумерного многообразия $\mathfrak{M}$, что любой паре $< ij >$ из открытого и плотного в $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$ множества $\mathfrak{S}_f$ сопоставляется действительное число

$$f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \tag{1}$$

причем для произвольного кортежа четырех точек $< ijkl >$ таких, что пары $< ij >, \ldots, < kl > \in \mathfrak{S}_f$, шесть взаимных расстояний $f(ij)$, $\ldots$, $f(kl)$ функционально связаны. В §1 Основной части настоящей монографии постулируется локальная невырожденность метрической функции

(1). Г.Г. Михайличенко – автором Основной части – в §6 были найдены с точностью до эквивалентности все плоские метрические функции ((4) – (14) из §6). В §2 доказывается, что феноменологическая симметрия ранга 4 эквивалентна групповой симметрии степени 3, то есть каждая невырожденная метрическая функция (4) – (14) из §6 допускает трехпараметрическую группу движений, относительно которой она является двухточечным инвариантом. Ранее [3] он же нашел трехмерные группы преобразований, которые оставляют инвариантными эти метрические функции. Базисные операторы алгебр Ли соответствующих групп выпишем из теоремы 2 §6, учитывая каноническую форму записи метрической функции. Они будут идти в том же порядке, что и метрические функции (4) – (14) из §6:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -y\partial_x + x\partial_y; \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \\ X_2 = tgy\ sinx\partial_x + cosx\partial_y, \\ X_3 = tgy\ cosx\partial_x - sinx\partial_y; \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \\ X_2 = -thy\ sinx\partial_x + cosx\partial_y, \\ X_3 = -thy\ cosx\partial_x - sinx\partial_y; \end{array}\right\} \tag{4}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x + x\partial_y; \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{r} X_1 = \partial_x, \\ X_2 = -cthy\ sinx\partial_x + cosx\partial_y, \\ X_3 = -cthy\ cosx\partial_x - sinx\partial_y; \end{array}\right\} \tag{6}$$

$$X_1 = y\partial_x, \quad X_2 = x\partial_y, \quad X_3 = x\partial_x - y\partial_y; \tag{7}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + y\partial_y; \tag{8}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = (y - \beta x)\partial_x + (x - \beta y)\partial_y; \tag{9}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + (y - 2x)\partial_y; \tag{10}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -(y + \gamma x)\partial_x + (x - \gamma y)\partial_y, \tag{11}$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x + y\partial_y, \quad X_3 = (x^2 - \varepsilon y^2)\partial_x + 2xy\partial_y, \tag{12}$$

где $\gamma > 0$, $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$, $\varepsilon = 0, \pm 1$.

Из [1] следует, что феноменологически симметричное пространство $\mathfrak{F}$ есть множество таких точек $i = (x_i, y_i, z_i)$ трехмерного многообразия $\mathfrak{M}$, что любой паре $< ij >$ из открытого и плотного множества $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$ сопоставляется число

$$f(ij) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j). \tag{13}$$

Метрическая функция (13), согласно §1 должна быть невырожденной, причем все десять расстояний между произвольными пятью точками функционально связаны. В.Х. Лев [2] с точностью до эквивалентности нашел все трехмерные невырожденные метрические функции (13). Приведем эту классификацию

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2, \tag{14}$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (z_i - z_j)^2, \tag{15}$$

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] e^{2\left(\gamma arctg \dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j\right)}, \tag{16}$$

$$f(ij) = [(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2] e^{2\left(\beta Ar(c)th \dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j\right)}, \tag{17}$$

$$f(ij) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} e^{z_i + z_j}, \tag{18}$$

$$f(ij) = (x_i - x_j)^2 e^{\dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j}, \tag{19}$$

$$f(ij) = x_i y_j - x_j y_i + z_i - z_j, \qquad (20)$$

$$f(ij) = sinz_i \ sinz_j (siny_i \ siny_j \ cos(x_i - x_j) + cosy_i \ cosy_j) + cosz_i \ cosz_j, \qquad (21)$$

$$f(ij) = chz_i \ chz_j (siny_i \ siny_j \ cos(x_i - x_j) + cosy_i \ cosy_j) - shz_i \ shz_j, \qquad (22)$$

$$f(ij) = chz_i \ chz_j (chy_i \ chy_j \ cos(x_i - x_j) - shy_i \ shy_j) - shz_i \ shz_j, \qquad (23)$$

$$f(ij) = shz_i \ shz_j (siny_i \ siny_j \ cos(x_i - x_j) + cosy_i \ cosy_j) - chz_i \ chz_j, \qquad (24)$$

где $\gamma \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ и $\beta \neq 1$.

Согласно теореме об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий (§2 настоящей монографии) метрические функции (14) – (24) допускают шестимерные группы движений, причем их алгебры Ли имеют следующий базис:

$$X_\mu = \lambda_\mu(x, y, z)\partial x + \sigma_\mu(x, y, z)\partial y + \tau_\mu(x, y, z)\partial z, \qquad (25)$$

где $\mu = 1, 2, \ldots, 6$. Очевидно, что произвольный оператор этой алгебры задается выражением

$$X = \lambda(x, y, z)\partial x + \sigma(x, y, z)\partial y + \tau(x, y, z)\partial z, \qquad (26)$$

где

$$\lambda = a^\nu \lambda_\nu, \quad \sigma = a^\nu \sigma_\nu, \quad \tau = a^\nu \tau_\nu,$$

причем $a^\nu = const$ и по "немому индексу" ν ведется суммирование от 1 до 6. Шести независимым параметрам a^ν можно сопоставить элемент $(a^1, \ldots, a^6)$ вещественного линейного пространства V^6 так, что базису из V^6 будет соответствовать базис алгебры Ли операторов (26).

Поскольку метрическая функция (13) является двухточечным инвариантом группы движений с базисом (25) соответствующей алгебры Ли, по инфинитезимальному критерию инвариантности

$$X(i)f(ij) + X(j)f(ij) = 0$$

или в развернутой форме:

$$\begin{aligned}&\lambda(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i}+\sigma(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial y_i}+\tau(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i}+\\&+\lambda(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial x_j}+\sigma(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial y_j}+\tau(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial z_j}=0.\end{aligned}\tag{27}$$

В нашем случае метрическая функция $f(ij)$ известна, поэтому (27) представляет собой функциональное уравнение на коэффициенты произвольного оператора алгебры Ли группы движений. Справедлива следующая основная

Теорема. *Базисные операторы (25) шестимерных алгебр Ли групп движений пространств с метрическими функциями (4) – (14) в надлежаще выбранной системе локальных координат задаются соответственно следующими выражениями:*

$$\begin{aligned}&X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\quad X_4=-y\partial_x+x\partial_y,\\&X_5=-z\partial_x+x\partial_z,\quad X_6=-z\partial_y+y\partial_z;\end{aligned}\tag{28}$$

$$\begin{aligned}&X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\quad X_4=-y\partial_x+x\partial_y,\\&X_5=z\partial_x+x\partial_z,\quad X_6=z\partial_y+y\partial_z;\end{aligned}\tag{29}$$

$$\begin{aligned}&X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=-(y+\gamma x)\partial_x+(x-\gamma y)\partial_y,\\&X_4=(\gamma y-x)\partial_x-(y+\gamma x)\partial_y+\frac{1+\gamma^2}{2}\partial_z,\\&X_5=(-x^2+y^2+2\gamma xy)\partial_x-(\gamma(x^2-y^2)+2xy)\partial y+(1+\gamma^2)x\partial_z,\\&X_6=(\gamma(y^2-x^2)-2xy)\partial x+(x^2-y^2-2\gamma xy)\partial_y+(1+\gamma^2)y\partial_z;\end{aligned}\tag{30}$$

$$\begin{aligned}&X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=(\beta x-y)\partial_x+(\beta y-x)\partial_y,\\&X_4=(\beta y-x)\partial_x+(\beta x-y)\partial_y+\frac{1-\beta^2}{2}\partial_z,\\&X_5=-(x^2+y^2-2\beta xy)\partial_x+(\beta(x^2+y^2)-2xy)\partial y+(1-\beta^2)x\partial_z,\\&X_6=(\beta(x^2+y^2)-2xy)\partial x-(x^2+y^2-2\beta xy)\partial_y+(1-\beta^2)y\partial_z;\end{aligned}\tag{31}$$

$$\begin{aligned}&X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + y\partial_y, \\ &X_4 = x\partial_x - y\partial_y + \partial_z, \quad X_5 = x^2\partial_x + x\partial z, \quad X_6 = -y^2\partial_y + y\partial_z;\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}&X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + (y-2x)\partial_y, \\ &X_4 = -2x\partial_y + \partial_z, \quad X_5 = -x^2\partial_y + x\partial_z, \\ &X_6 = -x^2\partial x + 2(x^2 - xy)\partial_y + y\partial_z;\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}&X_1 = y\partial_x, \quad X_2 = x\partial_y, \quad X_3 = x\partial_x - y\partial_y, \\ &X_4 = \partial_z, \quad X_5 = \partial_x + y\partial_z, \quad X_6 = \partial_y - x\partial_z;\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}&X_1 = -\partial_x, \quad X_2 = -ctgy\ cosx\partial_x - sinx\partial_y, \\ &X_3 = ctgy\ sinx\partial_x - cosx\partial_y, \\ &X_4 = ctgz\ sin^{-1}y\ cosx\partial_x + ctgz\ cosy\ sinx\partial_y + siny\ sinx\partial_z, \\ &X_5 = -ctgz\ sin^{-1}y\ sinx\partial_x + ctgz\ cosy\ cosx\partial_y + siny\ cosx\partial_z, \\ &X_6 = -ctgz\ siny\partial_y + cosy\partial_z;\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}&X_1 = -\partial_x, \quad X_2 = -ctgy\ cosx\partial_x - sinx\partial_y, \\ &X_3 = ctgy\ sinx\partial_x - cosx\partial_y, \\ &X_4 = thz\ sin^{-1}y\ cosx\partial_x + thz\ cosy\ sinx\partial_y + siny\ sinx\partial_z, \\ &X_5 = -thz\ sin^{-1}y\ sinx\partial_x + thz\ cosy\ cosx\partial_y + siny\ cosx\partial_z, \\ &X_6 = -thz\ siny\partial_y + cosy\partial_z;\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}&X_1 = -\partial_x, \quad X_2 = thy\ cosx\partial_x + sinx\partial_y, \\ &X_3 = -thy\ sinx\partial_x + cosx\partial_y, \\ &X_4 = thz\ ch^{-1}y\ cosx\partial_x - thz\ shy\ sinx\partial_y + chy\ sinx\partial_z, \\ &X_5 = -thz\ ch^{-1}y\ sinx\partial_x - thz\ shy\ cosx\partial_y + chy\ cosx\partial_z, \\ &X_6 = thz\ chy\partial_y - shy\partial_z;\end{aligned} \tag{37}$$

$$X_1 = -\partial_x, \quad X_2 = -ctgy\ cosx\partial_x - sinx\partial_y,$$
$$X_3 = ctgy\ sinx\partial_x - cosx\partial_y,$$
$$X_4 = cthz\ sin^{-1}y\ cosx\partial_x + cthz\ cosy\ sinx\partial_y + siny\ sinx\partial_z, \qquad (38)$$
$$X_5 = -cthz\ sin^{-1}y\ sinx\partial_x + cthz\ cosy\ cosx\partial_y + siny\ cosx\partial_z,$$
$$X_6 = -cthz\ siny\partial_y + cosy\partial_z,$$

где $\gamma \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ *и* $\beta \neq 1$.

Из этой теоремы вытекает следующее

Следствие. Алгебры Ли групп движений с базисными операторами (28) – (38) удовлетворяют соответственно следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = 0, [X_1, X_3] = 0, [X_1, X_4] = X_2,\\
&[X_1, X_5] = X_3, [X_1, X_6] = 0, [X_2, X_3] = 0,\\
&[X_2, X_4] = -X_1, [X_2, X_5] = 0, [X_2, X_6] = X_3,\\
&[X_3, X_4] = 0, [X_3, X_5] = -X_1, [X_3, X_6] = -X_2,\\
&[X_4, X_5] = -X_6, [X_4, X_6] = X_5, [X_5, X_6] = -X_4;
\end{aligned} \qquad (28')$$

$$\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = 0, [X_1, X_3] = 0, [X_1, X_4] = X_2,\\
&[X_1, X_5] = X_3, [X_1, X_6] = 0, [X_2, X_3] = 0,\\
&[X_2, X_4] = -X_1, [X_2, X_5] = 0, [X_2, X_6] = X_3,\\
&[X_3, X_4] = 0, [X_3, X_5] = X_1, [X_3, X_6] = X_2,\\
&[X_4, X_5] = -X_6, [X_4, X_6] = X_5, [X_5, X_6] = X_4;
\end{aligned} \qquad (29')$$

$$\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = 0, [X_1, X_3] = -\gamma X_1 + X_2, [X_1, X_4] = -X_1 - \gamma X_2,\\
&[X_1, X_5] = 2X_4, [X_1, X_6] = 2X_3, [X_2, X_3] = -X_1 - \gamma X_2,\\
&[X_2, X_4] = \gamma X_1 - X_2, [X_2, X_5] = -2X_3, [X_2, X_6] = 2X_4,\\
&[X_3, X_4] = 0, [X_3, X_5] = -X_6 - \gamma X_5, [X_3, X_6] = X_5 - \gamma X_6,\\
&[X_4, X_5] = \gamma X_6 - X_5, [X_4, X_6] = -\gamma X_5 - X_6, [X_5, X_6] = 0;
\end{aligned} \qquad (30')$$

$$\begin{aligned}
&[X_1,X_2]=0,[X_1,X_3]=\beta X_1-X_2,[X_1,X_4]=-X_1+\beta X_2,\\
&[X_1,X_5]=2X_4,[X_1,X_6]=2X_3,[X_2,X_3]=-X_1+\beta X_2,\\
&[X_2,X_4]=\beta X_1-X_2,[X_2,X_5]=2X_3,[X_2,X_6]=2X_4,\\
&[X_3,X_4]=0,[X_3,X_5]=-X_6+\beta X_5,[X_3,X_6]=-X_5+\beta X_6,\\
&[X_4,X_5]=\beta X_6-X_5,[X_4,X_6]=\beta X_5-X_6,[X_5,X_6]=0;
\end{aligned}\tag{31'}$$

$$\begin{aligned}
&[X_1,X_2]=0,[X_1,X_3]=X_1,[X_1,X_4]=X_1,\\
&[X_1,X_5]=X_4+X_3,[X_1,X_6]=0,[X_2,X_3]=X_2,\\
&[X_2,X_4]=-X_2,[X_2,X_5]=0,[X_2,X_6]=X_4-X_3,\\
&[X_3,X_4]=0,[X_3,X_5]=X_5,[X_3,X_6]=X_6,\\
&[X_4,X_5]=X_5,[X_4,X_6]=-X_6,[X_5,X_6]=0;
\end{aligned}\tag{32'}$$

$$\begin{aligned}
&[X_1,X_2]=0,[X_1,X_3]=X_1-2X_2,[X_1,X_4]=-2X_2,\\
&[X_1,X_5]=X_4,[X_1,X_6]=-2X_3,[X_2,X_3]=X_2,\\
&[X_2,X_4]=0,[X_2,X_5]=0,[X_2,X_6]=X_4,\\
&[X_3,X_4]=0,[X_3,X_5]=X_5,[X_3,X_6]=X_6-2X_5,\\
&[X_4,X_5]=0,[X_4,X_6]=-2X_5,[X_5,X_6]=0;
\end{aligned}\tag{33'}$$

$$\begin{aligned}
&[X_1,X_2]=-X_3,[X_1,X_3]=2X_1,[X_1,X_4]=0,\\
&[X_1,X_5]=0,[X_1,X_6]=-X_5,[X_2,X_3]=-2X_2,\\
&[X_2,X_4]=0,[X_2,X_5]=-X_6,[X_2,X_6]=0,\\
&[X_3,X_4]=0,[X_3,X_5]=-X_5,[X_3,X_6]=X_6,\\
&[X_4,X_5]=0,[X_4,X_6]=0,[X_5,X_6]=-X_4;
\end{aligned}\tag{34'}$$

$$\begin{aligned}
&[X_1,X_2]=-X_3,[X_1,X_3]=X_2,[X_1,X_4]=-X_5,\\
&[X_1,X_5]=X_4,[X_1,X_6]=0,[X_2,X_3]=-X_1,\\
&[X_2,X_4]=-X_6,[X_2,X_5]=0,[X_2,X_6]=X_4,\\
&[X_3,X_4]=0,[X_3,X_5]=-X_6,[X_3,X_6]=X_5,\\
&[X_4,X_5]=-X_1,[X_4,X_6]=-X_2,[X_5,X_6]=-X_3;
\end{aligned}\tag{35'}$$

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = -X_3, [X_1, X_3] = X_2, [X_1, X_4] = -X_5,\\
&[X_1, X_5] = X_4, [X_1, X_6] = 0, [X_2, X_3] = -X_1,\\
&[X_2, X_4] = -X_6, [X_2, X_5] = 0, [X_2, X_6] = X_4,\\
&[X_3, X_4] = 0, [X_3, X_5] = -X_6, [X_3, X_6] = X_5,\\
&[X_4, X_5] = X_1, [X_4, X_6] = X_2, [X_5, X_6] = X_3;
\end{aligned} \tag{36'}
$$

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = -X_3, [X_1, X_3] = X_2, [X_1, X_4] = -X_5,\\
&[X_1, X_5] = X_4, [X_1, X_6] = 0, [X_2, X_3] = X_1,\\
&[X_2, X_4] = -X_6, [X_2, X_5] = 0, [X_2, X_6] = -X_4,\\
&[X_3, X_4] = 0, [X_3, X_5] = -X_6, [X_3, X_6] = -X_5,\\
&[X_4, X_5] = X_1, [X_4, X_6] = X_2, [X_5, X_6] = X_3,
\end{aligned} \tag{37'}
$$

причем коммутационные соотношения для алгебры Ли (38) и (36) совпадают.

Из структуры коммутационных соотношений алгебр Ли групп движений с базисными операторами (28) – (38) и структурных признаков подалгебр [3] следует, что операторы X_1, X_2, X_4 алгебр Ли (28) – (29) и X_1, X_2, X_3 алгебр Ли (30) – (38) образуют трехмерные подалгебры Ли, которые будем обозначать символом A_3.

Пусть L – произвольная алгебра Ли. Коммутантом алгебры Ли L называется ее идеал $L^{(1)} = [L, L]$, который состоит из элементов вида: $[u, v]$, где $u, v \in L$. Второй коммутант определяется так: $L^{(2)} = [L^1, L^1]$ и, наконец, по индукции $L^{(k+1)} = [L^k, L^k]$. Естественным образом приходим к ряду коммутантов алгебры Ли L:

$$
L \supset L^{(1)} \supset L^{(2)} \supset \ldots \supset L^{(n)} \supset \ldots \tag{38}
$$

Алгебра Ли L называется разрешимой, если ее ряд коммутантов (38) заканчивается нулевым идеалом.

Легко проверяется, что подалгебра A_3 алгебр Ли с операторами (28) – (33) разрешима, а с операторами (34) – (38) неразрешима.

§2. Доказательство основной теоремы для алгебр Ли с разрешимой подалгеброй

Приступим к доказательству основной теоремы для групп движений с операторами (28) – (33).

Для метрической функции (14) функциональное уравнение (27) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}&\lambda(i)(x_i - x_j) + \sigma(i)(y_i - y_j) + \tau(i)(z_i - z_j) - \\ &- \lambda(j)(x_i - x_j) - \sigma(j)(y_i - y_j) - \tau(j)(z_i - z_j) = 0.\end{aligned} \tag{39}$$

Продифференцируем уравнение (39) по координатам точки i, а результаты дифференцирований по координатам точки j

$$\lambda_x(i) + \lambda_x(j) = 0, \quad \sigma_x(i) + \lambda_y(j) = 0, \quad \tau_x(i) + \lambda_z(j) = 0, \tag{40.1}$$

$$\lambda_y(i) + \sigma_x(j) = 0, \quad \sigma_y(i) + \sigma_y(j) = 0, \quad \tau_y(i) + \sigma_z(j) = 0, \tag{40.2}$$

$$\lambda_z(i) + \tau_x(j) = 0, \quad \sigma_z(i) + \tau_y(j) = 0, \quad \tau_z(i) + \tau_z(j) = 0. \tag{40.3}$$

Разделяя переменные, относящиеся к координатам различных точек, в системах (40.1) – (40.3) и интегрируя полученные уравнения, приходим к выражениям:

$$\left.\begin{aligned}\lambda(x, y, z) &= -a_1 y - a_2 z + a_4, \\ \sigma(x, y, z) &= a_1 x - a_3 z + a_5, \\ \tau(x, y, z) &= a_2 x + a_3 y + a_6.\end{aligned}\right\}$$

Как говорилось во введении кортеж $(a_4, a_5, a_6, a_1, a_2, a_3)$ принадлежит вещественному линейному пространству V^6 и поэтому базису (1,0,0,0,0,0), (0,1,0,0,0,0), (0,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1,0), (0,0,0,0,0,1) соответствует базис (28).

Подставим в уравнение (27) выражение (15)

$$\begin{aligned}&\lambda(i)(x_i - x_j) + \sigma(i)(y_i - y_j) - \tau(i)(z_i - z_j) - \\ &- \lambda(j)(x_i - x_j) - \sigma(j)(y_i - y_j) + \tau(j)(z_i - z_j) = 0.\end{aligned} \tag{41}$$

Продифференцируем уравнение (41) по координатам x_i, y_i, z_i, после чего результаты этих дифференцирований по координатам x_j, y_j, z_j:

$$\lambda_x(i) + \lambda_x(j) = 0, \quad \sigma_x(i) + \lambda_y(j) = 0, \quad \tau_x(i) - \lambda_z(j) = 0, \tag{42.1}$$

$$\lambda_y(i)+\sigma_x(j)=0, \quad \sigma_y(i)+\sigma_y(j)=0, \quad \tau_y(i)-\sigma_z(j)=0, \tag{42.2}$$

$$-\lambda_z(i)+\tau_x(j)=0, \quad -\sigma_z(i)+\tau_y(j)=0, \quad \tau_z(i)+\tau_z(j)=0. \tag{42.3}$$

Рассуждая, далее, в отношении системы (42.1) – (42.3) точно также как и в отношении к системе (40.1) – (40.3), приходим к базисным операторам (29).

Приступим теперь к нахождению базисных операторов шестимерной алгебры Ли группы движений, допускаемой метрической функцией (16). Поскольку

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i}=[(x_i-x_j)-\gamma(y_i-y_j)]\alpha, \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j}=-[(x_i-x_j)-\gamma(y_i-y_j)]\alpha,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial y_i}=[(y_i-y_j)+\gamma(x_i-x_j)]\alpha, \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j}=-[(y_i-y_j)+\gamma(x_i-x_j)]\alpha,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i}=[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2]\alpha, \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j}=[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2]\alpha,$$

где $\alpha=2exp[2\gamma arctg\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}+2z_i+2z_j]$, $\gamma\geqslant 0$, то исходное функциональное уравнение (27) примет следующий вид:

$$\begin{gathered}[(x_i-x_j)-\gamma(y_i-y_j)]\lambda(i)-[(x_i-x_j)-\gamma(y_i-y_j)]\lambda(j)+\\ +[(y_i-y_j)+\gamma(x_i-x_j)]\sigma(i)-[(y_i-y_j)+\gamma(x_i-x_j)]\sigma(j)+\\ +[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2]\tau(i)+[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2]\tau(j)=0.\end{gathered} \tag{43}$$

Продифференцируем уравнение (43) сначала по координатам x_i, y_i, z_i точки i, а результаты дифференцирования по координатам x_j, y_j, z_j точки j

$$\begin{gathered}-\lambda_x(i)-\lambda_x(j)-\gamma\sigma_x(i)-\gamma\sigma_x(j)-2\tau(i)-2\tau(j)-\\ -2(x_i-x_j)\tau_x(i)+2(x_i-x_j)\tau_x(j)=0,\end{gathered} \tag{44.1}$$

$$\gamma\lambda_x(i)-\lambda_y(j)-\sigma_x(i)-\gamma\sigma_y(j)-2(y_i-y_j)\tau_x(i)+2(x_i-x_j)\tau_y(j)=0, \tag{44.2}$$

$$-\lambda_z(j)-\gamma\sigma_z(j)+2(x_i-x_j)\tau_z(j)=0, \tag{44.3}$$

$$-\lambda_y(i)+\gamma\lambda_x(j)-\gamma\sigma_y(i)-\sigma_x(j)-2(x_i-x_j)\tau_y(i)+2(y_i-y_j)\tau_x(j)=0, \tag{44.4}$$

$$\begin{aligned}&\gamma\lambda_y(i)+\gamma\lambda_y(j)-\sigma_y(i)-\sigma_y(j)-2\tau(i)-2\tau(j)-\\&-2(y_i-y_j)\tau_y(i)+2(y_i-y_j)\tau_y(j)=0,\end{aligned} \tag{44.5}$$

$$\gamma\lambda_z(j)-\sigma_z(j)+2(y_i-y_j)\tau_z(j)=0, \tag{44.6}$$

$$-\lambda_z(i)-\gamma\sigma_z(i)-2(x_i-x_j)\tau_z(i)=0, \tag{44.7}$$

$$\gamma\lambda_z(i)-\sigma_z(i)-2(y_i-y_j)\tau_z(i)=0. \tag{44.8}$$

Дифференцируя уравнения (44.1) и (44.2) по координате x_i, а затем по x_j, (44.2) и (44.5) – по y_i, а затем по y_j, (44.3) – по x_i, (44.7) – по x_j, получаем следующие тождества:

$$\begin{aligned}\tau_z(i)=\tau_z(j)=0, \lambda_z(i)+\gamma\sigma_z(i)=\lambda_z(j)+\gamma\sigma_z(j)=0,\\ \gamma\lambda_z(i)-\sigma_z(i)=\gamma\lambda_z(j)-\sigma_z(j)=0, \tau_{xx}(i)+\tau_{xx}(j)=0,\\ \tau_{yy}(i)+\tau_{yy}(j)=0, \tau_{xy}(i)+\tau_{xy}(j)=0.\end{aligned}$$

Разделяя в этой системе переменные, относящиеся к координатам различных точек, и интегрируя полученные уравнения, приходим к функциям:

$$\lambda(x,y,z)=\lambda(x,y), \quad \sigma(x,y,z)=\sigma(x,y), \quad \tau(x,y,z)=a_1x+a_2y+a_3.$$

Из уравнений (44.1), (44.5), (44.2), (44.4), разделяя переменные, получаем

$$\begin{aligned}\lambda_x+\gamma\sigma_x+2\tau=0, \quad \gamma\lambda_y-\sigma_y-2\tau=0,\\ \gamma\lambda_x-\sigma_x-2a_1y+2a_2x=a_4, \quad \lambda_y+\gamma\sigma_y-2a_1y+2a_2x=a_4,\end{aligned}$$

или, разрешая относительно производных λ_x, λ_y, σ_x, σ_y:

$$\begin{aligned}(1+\gamma^2)\lambda_x &= 2a_1(\gamma y - x) - 2a_2(y+\gamma x) - 2a_3 + \gamma a_4,\\ (1+\gamma^2)\sigma_x &= -2a_1(y+\gamma x) + 2a_2(x-\gamma y) - a_4 - 2\gamma a_3,\\ (1+\gamma^2)\lambda_y &= 2a_1(y+\gamma x) - 2a_2(x-\gamma y) + a_4 + 2\gamma a_3,\\ (1+\gamma^2)\sigma_y &= 2a_1(\gamma y - x) - 2a_2(y+\gamma x) - 2a_3 + \gamma a_4\end{aligned}$$

и после интегрирования:

$$\begin{aligned}\lambda(x,y,z) =& \frac{a_1}{1+\gamma^2}(-x^2+y^2+2\gamma xy) - \frac{a_2}{1+\gamma^2}(\gamma(x^2-y^2)+2xy) -\\ &- \frac{2a_3}{1+\gamma^2}(x-\gamma y) + \frac{a_4}{1+\gamma^2}(y+\gamma x) + a_5,\\ \sigma(x,y,z) =& -\frac{a_1}{1+\gamma^2}(\gamma(x^2-y^2)+2xy) + \frac{a_2}{1+\gamma^2}(x^2-y^2-2\gamma xy) -\\ &- \frac{2a_3}{1+\gamma^2}(y+\gamma x) - \frac{a_4}{1+\gamma^2}(x-\gamma y) + a_6,\\ \tau(x,y,z) =& a_1x + a_2y + a_3.\end{aligned}$$

В результате получаем базисные операторы (30).

Для метрической функции (17):

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} = [(x_i-x_j)-\beta(y_i-y_j)]\alpha, \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} = -[(x_i-x_j)-\beta(y_i-y_j)]\alpha,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} = [\beta(x_i-x_j)-(y_i-y_j)]\alpha, \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} = -[\beta(x_i-x_j)-(y_i-y_j)]\alpha,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} = [(x_i-x_j)^2-(y_i-y_j)^2]\alpha, \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = [(x_i-x_j)^2-(y_i-y_j)^2]\alpha,$$

где $\alpha = 2exp[2\beta Ar(c)th\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j} + 2z_i + 2z_j]$, $\beta \geqslant 0$, $\beta \neq 1$, и потому функциональное уравнение (27) примет такой вид:

$$\begin{aligned}&[(x_i-x_j)-\beta(y_i-y_j)]\lambda(i) - [(x_i-x_j)-\beta(y_i-y_j)]\lambda(j) +\\ &+[\beta(x_i-x_j)-(y_i-y_j)]\sigma(i) - [\beta(x_i-x_j)-(y_i-y_j)]\sigma(j) +\\ &+[(x_i-x_j)^2-(y_i-y_j)^2]\tau(i) + [(x_i-x_j)^2-(y_i-y_j)^2]\tau(j) = 0.\end{aligned} \qquad (45)$$

Продифференцируем уравнение (45) по координатам x_i, y_i, z_i, а результаты – по x_j, y_j, z_j

$$\begin{aligned}&-\lambda_x(i)-\lambda_x(j)-\beta\sigma_x(i)-\beta\sigma_x(j)-2\tau(i)-2\tau(j)-\\&-2(x_i-x_j)\tau_x(i)+2(x_i-x_j)\tau_x(j)=0,\end{aligned}$$

$$\beta\lambda_x(i)-\lambda_y(j)+\sigma_x(i)-\beta\sigma_y(j)+2(y_i-y_j)\tau_x(i)+2(x_i-x_j)\tau_y(j)=0,$$

$$-\lambda_z(j)-\beta\sigma_z(j)+2(x_i-x_j)\tau_z(j)=0,$$

$$\beta\lambda_z(j)+\sigma_z(j)-2(y_i-y_j)\tau_z(j)=0,$$

$$-\lambda_y(i)+\beta\lambda_x(j)-\beta\sigma_y(i)+\sigma_x(j)-2(x_i-x_j)\tau_y(i)-2(y_i-y_j)\tau_x(j)=0,$$

$$\begin{aligned}&\beta\lambda_y(i)+\beta\lambda_y(j)+\sigma_y(i)+\sigma_y(j)+2\tau(i)+2\tau(j)+\\&+2(y_i-y_j)\tau_y(i)-2(y_i-y_j)\tau_y(j)=0,\end{aligned}$$

$$-\lambda_z(i)-\beta\sigma_z(i)-2(x_i-x_j)\tau_z(i)=0,$$

$$\beta\lambda_z(i)+\sigma_z(i)+2(y_i-y_j)\tau_z(i)=0.$$

Далее, рассуждая точно также, как при решении функционального уравнения (43), приходим к функциям:

$$\begin{aligned}\lambda(x,y,z)=&-\frac{a_1}{1-\beta^2}(x^2+y^2-2\beta xy)+\frac{a_2}{1-\beta^2}(\beta(x^2+y^2)-2xy)-\\&-\frac{2a_3}{1-\beta^2}(x-\beta y)+\frac{a_4}{1-\beta^2}(\beta x-y)+a_5,\\\sigma(x,y,z)=&\frac{a_1}{1-\beta^2}(\beta(x^2+y^2)-2xy)-\frac{a_2}{1-\beta^2}(x^2+y^2-2\beta xy)+\\&+\frac{2a_3}{1-\beta^2}(\beta x-y)-\frac{a_4}{1-\beta^2}(x-\beta y)+a_6,\\\tau(x,y,z)=&a_1x+a_2y+a_3,\end{aligned}$$

от которых к базису алгебры Ли (31).

Приступим теперь к нахождению базисных операторов алгебры Ли группы движений, двухточечным инвариантом которой является метрическая функция (18). Поскольку

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} = -\frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2}\alpha, \quad \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} = \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2}\alpha,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} = \frac{1}{x_i - x_j}\alpha, \quad \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} = -\frac{1}{x_i - x_j}\alpha,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\alpha, \quad \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\alpha,$$

где $\alpha = exp(z_i + z_j)$, то функциональное уравнение (27) принимает вид:

$$\begin{gathered} -(y_i - y_j)\lambda(i) + (y_i - y_j)\lambda(j) + (x_i - x_j)\sigma(i) - (x_i - x_j)\sigma(j) + \\ +(x_i - x_j)(y_i - y_j)\tau(i) + (x_i - x_j)(y_i - y_j)\tau(j) = 0. \end{gathered} \tag{46}$$

Продифференцируем уравнение (46) по x_i, y_i, z_i, а результаты по x_j, y_j, z_j

$$-\sigma_x(i) - \sigma_x(j) - (y_i - y_j)\tau_x(i) + (y_i - y_j)\tau_x(j) = 0,$$

$$\lambda_x(i) - \sigma_y(j) - \tau(i) - (x_i - x_j)\tau_x(i) - \tau(j) + (y_i - y_j)\tau_y(j) = 0,$$

$$-\sigma_z(j) + (y_i - y_j)\tau_z(j) = 0, \quad \lambda_z(j) + (x_i - x_j)\tau_z(j) = 0,$$

$$\lambda_x(j) - \sigma_y(i) - \tau(i) - (y_i - y_j)\tau_y(i) - \tau(j) + (x_i - x_j)\tau_x(j) = 0,$$

$$\lambda_y(i) + \lambda_y(j) - (x_i - x_j)\tau_y(i) + (x_i - x_j)\tau_y(j) = 0,$$

$$-\sigma_z(i) - (y_i - y_j)\tau_z(i) = 0, \quad \lambda_z(i) - (x_i - x_j)\tau_z(i) = 0.$$

Рассуждая аналогично, приходим к функциям:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(x,y,z) &= a_2x^2 + (a_3 + a_4)x + a_5, \\ \sigma(x,y,z) &= -a_1y^2 + (a_3 - a_4)y + a_6, \\ \tau(x,y,z) &= a_1x + a_1y + a_3, \end{aligned}\right\}$$

а от них к операторам (32).

И, наконец, для метрической функции (19):

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} = [2(x_i - x_j) - (y_i - y_j)]\alpha, \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} = -[2(x_i - x_j) - (y_i - y_j)]\alpha,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} = (x_i - x_j)\alpha, \frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} = -(x_i - x_j)\alpha,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} = (x_i - x_j)^2\alpha, \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = (x_i - x_j)^2\alpha,$$

где $\alpha = exp[\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j]$, поэтому функциональное уравнение (27) принимает такой вид:

$$\begin{aligned} &[2(x_i - x_j) - (y_i - y_j)]\lambda(i) - [2(x_i - x_j) - (y_i - y_j)]\lambda(j) + \\ &+ (x_i - x_j)\sigma(i) - (x_i - x_j)\sigma(j) + \\ &+ (x_i - x_j)^2\tau(i) + (x_i - x_j)^2\tau(j) = 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Продифференцируем уравнение (47) по x_i, y_i, z_i, а полученные результаты по x_j, y_j, z_j

$$\begin{aligned} &- 2\lambda_x(i) - 2\lambda_x(j) - \sigma_x(i) - \sigma_x 9j) - 2\tau(i) - 2\tau(j) - \\ &- 2(x_i - x_j)\tau_x(i) + 2(x_i - x_j)\tau_x(j) = 0, \end{aligned}$$

$$\lambda_x(i) - 2\lambda_y(j) - \sigma_y(j) + 2(x_i - x_j)\tau_y(j) = 0,$$

$$-2\lambda_z(i) - \sigma_z(i) - 2(x_i - x_j)\tau_z(i) = 0,$$

$$-2\lambda_z(j) - \sigma_z(j) + 2(x_i - x_j)\tau_z(j) = 0,$$

$$-\lambda_y(i) - \lambda_y(j) = 0, \quad \lambda_z(i) = \lambda_z(j) = 0,$$

$$-2\lambda_y(i) - \lambda_x(j) - \sigma_y(i) - 2(x_i - x_j)\tau_y(i) = 0.$$

Рассуждая также, как и при решении функционального уравнения (43), приходим к функциям:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(x,y,z) &= -a_1x^2 + a_2x + a_3, \\ \sigma(x,y,z) = (2a_1 - a_5)x^2 - 2a_1xy &- 2(a_2 + a_6)x + a_2y + a_4, \\ \tau(x,y,z) &= a_1x + a_5y + a_6, \end{aligned}\right\}$$

а затем к базисным операторам (33).

Этим доказательство первой части основной теоремы для алгебр Ли с разрешимой подалгеброй A_3 завершается.

§3. Доказательство основной теоремы для алгебр Ли с неразрешимой подалгеброй

В этом параграфе проведем доказательство для алгебр Ли групп движений, двухточечными инвариантами которых являются метрические функции (20) – (24), а подалгебра Ли A_3 неразрешима.

С учетом выражения (20) для метрической функции $f(ij)$ исходное функциональное уравнение (27) принимает такой вид:

$$y_j\lambda(i) - x_j\sigma(i) - y_i\lambda(j) + x_i\sigma(j) + \tau(i) - \tau(j) = 0. \tag{48}$$

Продифференцируем тождество (48) по координатам x_i, y_i, z_i, а результаты по координатам x_j, y_j, z_j:

$$-\sigma_x(i) + \sigma_x(j) = 0, \quad \lambda_x(i) + \sigma_y(j) = 0, \quad \lambda_z(i) = \lambda_z(j) = 0,$$

$$\sigma_z(i) = \sigma_z(j) = 0, \quad \sigma_y(i) + \lambda_x(j) = 0, \quad \lambda_y(i) - \lambda_y(j) = 0.$$

Разделяя переменные, интегрируя, возвращаясь затем в тождество (48) и снова разделяя переменные, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \lambda(x,y,z) &= a_1x + a_2y + a_4, \\ \sigma(x,y,z) &= a_3x - a_1y + a_5, \\ \tau(x,y,z) &= -a_5x + a_4y + a_6. \end{aligned}$$

Строки $(a_2, a_3, a_1.a_6, a_4, a_5)$ принадлежат шестимерному линейному пространству V^6, причем его базису (1,0,0,0,0,0,), (0,1,0,0,0,0), (0,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1,0), (0,0,0,0,0,1) будет соответствовать система базисных операторов (34).

При доказательстве теоремы для оставшихся метрических функций $f(ij)$ будет применяться одна и та же методика. Поэтому подробные рассуждения будут вестись только в отношении группы движений с метрической функцией (21).

Докажем сейчас теорему для группы движений с метрической функцией (21). Для удобства последующих вычислений эту метрическую функцию запишем в следующей форме:

$$f(ij) = \bar{x}_i\bar{x}_j + \bar{y}_i\bar{y}_j + \bar{z}_i\bar{z}_j + \bar{w}_i\bar{w}_j, \tag{49}$$

где введены обозначения

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} = sinx\ siny\ sinz, \quad \bar{y} = cosx\ siny\ sinz,\\ \bar{z} = cosy\ sinz, \quad \bar{w} = cosz, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

причем $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 + \bar{w}^2 = 1$. В дальнейшем удобно ввести переобозначение координат: $\bar{x} \to x$, $\bar{y} \to y$, $\bar{z} \to z$, $\bar{w} \to w$. Тогда

$$f(ij) = x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j + w_i w_j. \tag{49$'$}$$

Поскольку

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x_i} = x_j - \frac{x_i}{w_i}w_j, \quad \frac{\partial f(ij)}{\partial x_j} = x_i - \frac{x_j}{w_j}w_i, \quad \frac{\partial f(ij)}{\partial y_i} = y_j - \frac{y_i}{w_i}w_j,$$

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial y_j} = y_i - \frac{y_j}{w_j}w_i, \quad \frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} = z_j - \frac{z_i}{w_i}w_j, \quad \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = z_i - \frac{z_j}{w_j}w_i,$$

функциональное уравнение (27) запишется в виде:

$$\begin{aligned} &\lambda(i)\frac{x_j w_i - x_i w_j}{w_i} + \sigma(i)\frac{y_j w_i - y_i w_j}{w_i} + \tau(i)\frac{z_j w_i - z_i w_j}{w_i} - \\ &- \lambda(j)\frac{x_j w_i - x_i w_j}{w_j} - \sigma(j)\frac{y_j w_i - y_i w_j}{w_j} - \tau(j)\frac{z_j w_i - z_i w_j}{w_j} = 0. \end{aligned} \tag{51}$$

Продифференцируем это уравнение по координатам x_i, y_i, z_i, а результаты по координатам x_j, y_j, z_j

$$\begin{aligned}
&\lambda_x(i)\Big(1+\frac{x_i x_j}{w_i w_j}\Big)+\lambda(i)\frac{x_j(1-y_i^2-z_i^2)}{w_i^3 w_j}+\lambda_x(j)\Big(1+\frac{x_i x_j}{w_i w_j}\Big)+\\
&+\lambda(i)\frac{x_i(1-y_j^2-z_j^2)}{w_i w_j^3}+\sigma_x(i)\frac{y_i x_j}{w_i w_j}+\sigma(i)\frac{x_i y_i x_j}{w_i^3 w_j}+\\
&+\sigma_x(j)\frac{y_j x_i}{w_i w_j}+\sigma(j)\frac{x_i y_j x_j}{w_i w_j^3}+\tau_x(i)\frac{z_i x_j}{w_i w_j}+\tau(i)\frac{x_i z_i x_j}{w_i^3 w_j}+\\
&+\tau_x(j)\frac{z_j x_i}{w_i w_j}+\tau(j)\frac{x_i z_j x_j}{w_i w_j^3}=0,
\end{aligned}\tag{52.1}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_x(i)\frac{x_i y_j}{w_i w_j}+\lambda(i)\frac{y_j(1-y_i^2-z_i^2)}{w_i^3 w_j}+\lambda_y(j)\Big(1+\frac{x_i x_j}{w_i w_j}\Big)+\\
&+\lambda(j)\frac{x_i x_j y_j}{w_i w_j^3}+\sigma_x(i)\Big(1+\frac{y_i y_j}{w_i w_j}\Big)+\sigma(i)\frac{x_i y_i y_j}{w_i^3 w_j}+\sigma_y(j)\frac{y_j x_i}{w_i w_j}+\\
&+\sigma(j)\frac{x_i(1-x_j^2-z_j^2)}{w_i w_j^3}+\tau_x(i)\frac{z_i y_j}{w_i w_j}+\tau(i)\frac{x_i z_i y_j}{w_i^3 w_j}+\\
&+\tau_y(j)\frac{z_j x_i}{w_i w_j}+\tau(j)\frac{x_i z_j y_j}{w_i w_j^3}=0,
\end{aligned}\tag{52.2}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_x(i)\frac{x_i z_j}{w_i w_j}+\lambda(i)\frac{z_j(1-y_i^2-z_i^2)}{w_i^3 w_j}+\lambda_z(j)\Big(1+\frac{x_i x_j}{w_i w_j}\Big)+\\
&+\lambda(j)\frac{x_i x_j z_j}{w_i w_j^3}+\sigma_x(i)\frac{y_i z_j}{w_i w_j}+\sigma(i)\frac{x_i y_i z_j}{w_i^3 w_j}+\sigma_z(j)\frac{y_j x_i}{w_i w_j}+\\
&+\sigma(j)\frac{x_i y_j z_j}{w_i w_j^3}+\tau_x(i)\Big(1+\frac{z_i z_j}{w_i w_j}\Big)+\tau(i)\frac{x_i z_i z_j}{w_i^3 w_j}+\\
&+\tau_z(j)\frac{z_j x_i}{w_i w_j}+\tau(j)\frac{x_i(1-x_j^2-y_j^2)}{w_i w_j^3}=0,
\end{aligned}\tag{52.3}$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_y(i)\Big(1+\frac{x_ix_j}{w_iw_j}\Big)+\lambda(i)\frac{x_iy_ix_j}{w_i^3w_j}+\lambda_x(j)\frac{y_ix_j}{w_iw_j}+\\
&+\lambda(j)\frac{y_i(1-y_j^2-z_j^2)}{w_iw_j^3}+\sigma_y(i)\frac{y_ix_j}{w_iw_j}+\sigma(i)\frac{x_j(1-x_i^2-z_i^2)}{w_i^3w_j}+\\
&+\sigma_x(j)\Big(1+\frac{y_iy_j}{w_iw_j}\Big)++\sigma(j)\frac{y_ix_jy_j}{w_iw_j^3}+\tau_y(i)\frac{z_ix_j}{w_iw_j}+\tau(i)\frac{y_iz_ix_j}{w_i^3w_j}+\\
&+\tau_x(j)\frac{z_jy_i}{w_iw_j}+\tau(j)\frac{y_ix_jz_j}{w_iw_j^3}=0,
\end{aligned}
\tag{52.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_y(i)\frac{x_iy_j}{w_iw_j}+\lambda(i)\frac{x_iy_iy_j}{w_i^3w_j}+\lambda_y(j)\frac{y_ix_j}{w_iw_j}+\lambda(j)\frac{y_ix_jy_j}{w_iw_j^3}+\\
&+\sigma_y(i)\Big(1+\frac{y_iy_j}{w_iw_j}\Big)+\sigma(i)\frac{y_j(1-x_i^2-z_i^2)}{w_i^3w_j}+\sigma_y(j)\Big(1+\frac{y_iy_j}{w_iw_j}\Big)+\\
&+\sigma(j)\frac{y_i(1-x_j^2-z_j^2)}{w_iw_j^3}+\tau_y(i)\frac{z_iy_j}{w_iw_j}+\tau(i)\frac{y_iz_iy_j}{w_i^3w_j}+\\
&+\tau_y(j)\frac{z_jy_i}{w_iw_j}+\tau(j)\frac{y_iy_jz_j}{w_iw_j^3}=0,
\end{aligned}
\tag{52.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_y(i)\frac{x_iz_j}{w_iw_j}+\lambda(i)\frac{x_iy_iz_j}{w_i^3w_j}+\lambda_z(j)\frac{y_ix_j}{w_iw_j}+\lambda(j)\frac{y_ix_jz_j}{w_iw_j^3}+\\
&+\sigma_y(i)\frac{y_iz_j}{w_iw_j}+\sigma(i)\frac{z_j(1-x_i^2-z_i^2)}{w_i^3w_j}+\sigma_z(j)\Big(1+\frac{y_iy_j}{w_iw_j}\Big)+\\
&+\sigma(j)\frac{y_iy_jz_j}{w_iw_j^3}+\tau_y(i)\Big(1+\frac{z_iz_j}{w_iw_j}\Big)+\tau(i)\frac{y_iz_iz_j}{w_i^3w_j}+\\
&+\tau_z(j)\frac{z_jy_i}{w_iw_j}+\tau(j)\frac{y_i(1-x_j^2-y_j^2)}{w_iw_j^3}=0,
\end{aligned}
\tag{52.6}
$$

$$
\begin{gathered}
\lambda_z(i)\Big(1+\frac{x_ix_j}{w_iw_j}\Big)+\lambda(i)\frac{x_iz_ix_j}{w_i^3w_j}+\lambda_x(j)\frac{z_ix_j}{w_iw_j}+\\
+\lambda(j)\frac{z_i(1-y_j^2-z_j^2)}{w_iw_j^3}+\sigma_z(i)\frac{y_ix_j}{w_iw_j}+\sigma(i)\frac{y_iz_ix_j}{w_i^3w_j}+\sigma_x(j)\frac{z_iy_j}{w_iw_j}+\\
+\sigma(j)\frac{z_ix_jy_j}{w_iw_j^3}+\tau_z(i)\frac{z_ix_j}{w_iw_j}+\tau(i)\frac{x_j(1-x_i^2-y_i^2)}{w_i^3w_j}+\\
+\tau_x(j)\Big(1+\frac{z_iz_j}{w_iw_j}\Big)+\tau(j)\frac{z_ix_jz_j}{w_iw_j^3}=0,
\end{gathered}
\tag{52.7}
$$

$$
\begin{gathered}
\lambda_z(i)\frac{x_iy_j}{w_iw_j}+\lambda(i)\frac{x_iz_iy_j}{w_i^3w_j}+\lambda_y(j)\frac{z_ix_j}{w_iw_j}+\\
+\lambda(j)\frac{z_ix_jy_j}{w_iw_j^3}+\sigma_z(i)\Big(1+\frac{y_iy_j}{w_iw_j}\Big)+\sigma(i)\frac{y_iz_iy_j}{w_i^3w_j}+\sigma_y(j)\frac{y_iz_j}{w_iw_j}+\\
+\sigma(j)\frac{z_i(1-x_j^2-z_j^2)}{w_iw_j^3}+\tau_z(i)\frac{z_iy_j}{w_iw_j}+\tau(i)\frac{y_j(1-x_i^2-y_i^2)}{w_i^3w_j}+\\
+\tau_y(j)\Big(1+\frac{z_iz_j}{w_iw_j}\Big)+\tau(j)\frac{z_iy_jz_j}{w_iw_j^3}=0,
\end{gathered}
\tag{52.8}
$$

$$
\begin{gathered}
\lambda_z(i)\frac{x_iz_j}{w_iw_j}+\lambda(i)\frac{x_iz_iz_j}{w_i^3w_j}+\lambda_z(j)\frac{z_ix_j}{w_iw_j}+\\
+\lambda(j)\frac{z_ix_jz_j}{w_iw_j^3}+\sigma_z(i)\frac{y_iz_j}{w_iw_j}+\sigma(i)\frac{y_iz_iz_j}{w_i^3w_j}+\sigma_z(j)\frac{z_iy_j}{w_iw_j}+\\
+\sigma(j)\frac{z_iy_jz_j}{w_iw_j^3}+\tau_z(i)\Big(1+\frac{z_iz_j}{w_iw_j}\Big)+\tau(i)\frac{z_j(1-x_i^2-y_i^2)}{w_i^3w_j}+\\
+\tau_z(j)\Big(1+\frac{z_iz_j}{w_iw_j}\Big)+\tau(j)\frac{z_i(1-x_j^2-y_j^2)}{w_iw_j^3}=0,
\end{gathered}
\tag{52.9}
$$

Умножим (52.1) на w_iw_j/x_ix_j, (52.2) – на w_iw_j/x_iy_j, (52.3) – на w_iw_j/x_iz_j, (52.4) – на w_iw_j/y_ix_j, (52.5) – на w_iw_j/y_iy_j, (52.6) – на

w_iw_j/y_iz_j, (52.7) – на w_iw_j/z_ix_j, (52.8) – на w_iw_j/z_iy_j, (52.9) – на w_iw_j/z_iz_j:

$$\Big(1+\frac{w_iw_j}{x_ix_j}\Big)\lambda_x(i)+\frac{1-y_i^2-z_i^2}{x_iw_i^2}\lambda(i)+\Big(1+\frac{w_iw_j}{x_ix_j}\Big)\lambda_x(j)+ \\ +\frac{1-y_j^2-z_j^2}{x_jw_j^2}\lambda(j)+\frac{y_i}{x_i}\sigma_x(i)+\frac{y_i}{w_i^2}\sigma(i)+\frac{y_j}{x_j}\sigma_x(j)+\frac{y_j}{w_j^2}\sigma(j)+ \\ +\frac{z_i}{x_i}\tau_x(i)+\frac{z_i}{w_i^2}\tau(i)+\frac{z_j}{x_j}\tau_x(j)+\frac{z_j}{w_j^2}\tau(j)=0, \tag{53.1}$$

$$\lambda_x(i)+\frac{1-y_i^2-z_i^2}{x_iw_i^2}\lambda(i)+\frac{w_iw_j+x_ix_j}{x_iy_j}\lambda_y(j)+\frac{x_j}{w_j^2}\lambda(j)+ \\ +\frac{w_iw_j+y_iy_j}{x_iy_j}\sigma_x(i)+\frac{y_i}{w_i^2}\sigma(i)+\sigma_y(j)+\frac{1-x_j^2-z_j^2}{y_jw_j^2}\sigma(j)+ \\ +\frac{z_i}{x_i}\tau_x(i)+\frac{z_i}{w_i^2}\tau(i)+\frac{z_j}{y_j}\tau_y(j)+\frac{z_j}{w_j^2}\tau(j)=0, \tag{53.2}$$

$$\lambda_x(i)+\frac{1-y_i^2-z_i^2}{x_iw_i^2}\lambda(i)+\frac{w_iw_j+x_ix_j}{x_iz_j}\lambda_z(j)+\frac{x_j}{w_j^2}\lambda(j)+ \\ +\frac{y_i}{x_i}\sigma_x(i)+\frac{y_i}{w_i^2}\sigma(i)+\frac{y_j}{z_j}\sigma_z(j)+\frac{y_j}{w_j^2}\sigma(j)+ \\ +\frac{w_iw_j+z_iz_j}{w_iw_j}\tau_x(i)+\frac{z_i}{w_i^2}\tau(i)+\tau_z(j)+\frac{1-x_j^2-y_j^2}{z_jw_j^2}\tau(j)=0, \tag{53.3}$$

$$\frac{w_iw_j+x_ix_j}{w_iw_j}\lambda_y(i)+\frac{x_i}{w_i^2}\lambda(i)+\lambda_x(j)+\frac{1-y_j^2-z_j^2}{x_jw_j^2}\lambda(j)+ \\ +\sigma_y(i)+\frac{1-x_i^2-z_i^2}{y_iw_i^2}\sigma(i)+\frac{w_iw_j+y_iy_j}{y_ix_j}\sigma_x(j)+\frac{y_j}{w_j^2}\sigma(j)+ \\ +\frac{z_i}{y_i}\tau_y(i)+\frac{z_i}{w_i^2}\tau(i)+\frac{z_j}{x_j}\tau_x(j)+\frac{z_j}{w_j^2}\tau(j)=0, \tag{53.4}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{x_i}{y_i}\lambda_y(i) + \frac{x_i}{w_i^2}\lambda(i) + \frac{x_j}{y_j}\lambda_y(j) + \frac{x_j}{w_j^2}\lambda(j) + \\
&+ \Big(1 + \frac{w_i w_j}{y_i y_j}\Big)\sigma_y(i) + \frac{1 - x_i^2 - z_i^2}{y_i w_i^2}\sigma(i) + \Big(1 + \frac{w_i w_j}{y_i y_j}\Big)\sigma_y(j) + \\
&+ \frac{1 - x_j^2 - z_j^2}{y_j w_j^2}\sigma(j) + \frac{z_i}{y_i}\tau_y(i) + \frac{z_i}{w_i^2}\tau(i) + \frac{z_j}{y_j}\tau_y(j) + \frac{z_j}{w_j^2}\tau(j) = 0,
\end{aligned} \tag{53.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{x_i}{y_i}\lambda_y(i) + \frac{x_i}{w_i^2}\lambda(i) + \frac{x_j}{z_j}\lambda_z(j) + \frac{x_j}{w_j^2}\lambda(j) + \\
&+ \sigma_y(i) + \frac{1 - x_i^2 - z_i^2}{y_i w_i^2}\sigma(i) + \frac{w_i w_j + y_i y_j}{y_i z_j}\sigma_z(j) + \frac{y_j}{w_j^2}\sigma(j) + \\
&+ \frac{w_i w_j + z_i z_j}{y_i z_j}\tau_y(i) + \frac{z_i}{w_i^2}\tau(i) + \tau_z(j) + \frac{1 - x_j^2 - y_j^2}{z_j w_j^2}\tau(j) = 0,
\end{aligned} \tag{53.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{w_i w_j + x_i x_j}{z_i x_j}\lambda_z(i) + \frac{x_i}{w_i^2}\lambda(i) + \lambda_x(j) + \frac{1 - y_j^2 - z_j^2}{x_j w_j^2}\lambda(j) + \\
&+ \frac{y_i}{z_i}\sigma_z(i) + \frac{y_i}{w_i^2}\sigma(i) + \frac{y_j}{x_j}\sigma_x(j) + \frac{y_j}{w_j^2}\sigma(j) + \\
&+ \tau_z(i) + \frac{1 - x_i^2 - y_i^2}{z_i w_i^2}\tau(i) + \frac{w_i w_j + z_i z_j}{z_i x_j}\tau_x(j) + \frac{z_j}{w_j^2}\tau(j) = 0,
\end{aligned} \tag{53.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{x_i}{z_i}\lambda_z(i) + \frac{x_i}{w_i^2}\lambda(i) + \frac{x_j}{y_j}\lambda_y(j) + \frac{x_j}{w_j^2}\lambda(j) + \\
&+ \frac{w_i w_j + y_i y_j}{z_i y_j}\sigma_z(i) + \frac{y_i}{w_i^2}\sigma(i) + \sigma_y(j) + \frac{1 - x_j^2 - z_j^2}{y_j w_j^2}\sigma(j) + \\
&+ \tau_z(i) + \frac{1 - x_i^2 - y_i^2}{y_i w_i^2}\tau(i) + \frac{w_i w_j + z_i z_j}{z_i y_j}\tau_y(j) + \frac{z_j}{w_j^2}\tau(j) = 0,
\end{aligned} \tag{53.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{x_i}{z_i}\lambda_z(i) + \frac{x_i}{w_i^2}\lambda(i) + \frac{x_j}{z_j}\lambda_z(j) + \frac{x_j}{w_j^2}\lambda(j) + \\
&+ \frac{y_i}{z_i}\sigma_z(i) + \frac{y_i}{w_i^2}\sigma(i) + \frac{y_j}{z_j}\sigma_z(j) + \frac{y_j}{w_j^2}\sigma(j) + \Big(1 + \frac{w_i w_j}{z_i z_j}\Big)\tau_z(i) + \\
&+ \frac{1 - x_i^2 - y_i^2}{z_i w_i^2}\tau(i) + \Big(1 + \frac{w_i w_j}{z_i z_j}\Big)\tau_z(j) + \frac{1 - x_j^2 - y_j^2}{z_j w_j^2}\tau(j) = 0,
\end{aligned} \tag{53.9}
$$

Продифференцируем (53.1) сначала по y_i и y_j, а затем по z_i и z_j, (53.5) – сначала по x_i и x_j, а затем по z_i и z_j, (53.9) – сначала по x_i и x_j, а затем по y_i и y_j:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_x(i) - \frac{w_i^2}{y_i}\lambda_{xy}(i) + \lambda_x(j) - \frac{w_j^2}{y_j}\lambda_{xy}(j) = 0, \\ \lambda_x(i) - \frac{w_i^2}{z_i}\lambda_{xz}(i) + \lambda_x(j) - \frac{w_j^2}{z_j}\lambda_{xz}(j) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{54.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y(i) - \frac{w_i^2}{x_i}\sigma_{yx}(i) + \sigma_y(j) - \frac{w_j^2}{x_j}\sigma_{yx}(j) = 0, \\ \sigma_y(i) - \frac{w_i^2}{z_i}\sigma_{yz}(i) + \sigma_y(j) - \frac{w_j^2}{z_j}\sigma_{yz}(j) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{54.2}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_z(i) - \frac{w_i^2}{x_i}\tau_{zx}(i) + \tau_z(j) - \frac{w_j^2}{x_j}\tau_{zx}(j) = 0, \\ \tau_z(i) - \frac{w_i^2}{y_i}\tau_{zy}(i) + \tau_z(j) - \frac{w_j^2}{y_j}\tau_{zy}(j) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{54.3}$$

Разделяя в системах (54.1) – (54.3) переменные, относящиеся к координатам различных точек, получаем:

$$\begin{aligned} &\lambda_x - \frac{w^2}{y}\lambda_{xy} = 0, \quad \lambda_x - \frac{w^2}{z}\lambda_{xz} = 0, \quad \sigma_y - \frac{w^2}{x}\sigma_{yx} = 0, \\ &\sigma_y - \frac{w^2}{z}\sigma_{yz} = 0, \quad \tau_z - \frac{w^2}{x}\tau_{zx} = 0, \quad \tau_z - \frac{w^2}{y}\tau_{zy} = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя эту систему дифференциальных уравнений, находим:

$$\lambda_x = \frac{c_1(x)}{w}, \quad \sigma_y = \frac{c_2(y)}{w}, \quad \tau_z = \frac{c_3(z)}{w}. \tag{55}$$

Продифференцируем (53.2) по y_i и x_j, (53.3) – по z_i и x_j, (53.4) – по

x_i и y_j, (53.6) – по z_i и y_j, (53.7) – по x_i и z_j, (53.8) – по y_i и z_j:

$$\begin{aligned}
&\lambda_y(j) - \frac{w_j^2}{x_j}\lambda_{yx}(j) + \sigma_x(i) - \frac{w_i^2}{y_i}\sigma_{xy}(i) = 0,\\
&\lambda_z(j) - \frac{w_j^2}{x_j}\lambda_{zx}(j) + \tau_x(i) - \frac{w_i^2}{z_i}\tau_{xz}(i) = 0,\\
&\lambda_y(i) - \frac{w_i^2}{x_i}\lambda_{xy}(i) + \sigma_x(j) - \frac{w_j^2}{y_j}\sigma_{xy}(j) = 0,\\
&\sigma_z(j) - \frac{w_j^2}{y_j}\sigma_{zy}(j) + \tau_y(i) - \frac{w_i^2}{z_i}\tau_{yz}(i) = 0,\\
&\lambda_z(i) - \frac{w_i^2}{x_i}\lambda_{zx}(i) + \tau_x(j) - \frac{w_j^2}{z_j}\tau_{xz}(j) = 0,\\
&\sigma_z(i) - \frac{w_i^2}{y_i}\sigma_{zy}(i) + \tau_y(j) - \frac{w_j^2}{z_j}\tau_{yz}(j) = 0.
\end{aligned}$$

Разделяя переменные, приходим к уравнениям:

$$\lambda_y - \frac{w^2}{x}\lambda_{yx} = a_1, \quad \sigma_x - \frac{w^2}{y}\sigma_{xy} = -a_1, \quad \lambda_z - \frac{w^2}{x}\lambda_{zx} = a_2,$$
$$\tau_x - \frac{w^2}{z}\tau_{xz} = -a_2, \quad \sigma_z - \frac{w^2}{y}\sigma_{zy} = a_3, \quad \tau_y - \frac{w^2}{z}\tau_{yz} = -a_3.$$

Учитывая (55), от последней системы приходим к следующей:

$$\begin{aligned}
&\lambda_y = a_1 + \frac{y}{x}\frac{c_1(x)}{w}, \quad \lambda_z = a_2 + \frac{z}{x}\frac{c_1(x)}{w},\\
&\sigma_x = -a_1 + \frac{x}{y}\frac{c_2(y)}{w}, \quad \sigma_z = a_3 + \frac{z}{y}\frac{c_2(y)}{w},\\
&\tau_x = -a_2 + \frac{x}{z}\frac{c_3(z)}{w}, \quad \tau_y = -a_3 + \frac{y}{z}\frac{c_3(z)}{w},
\end{aligned}$$

интегрируя которую, получаем

$$\begin{aligned}
&\lambda(x,y,z) = a_1 y + a_2 z - \frac{c_1(x)}{x}w + c_4(x),\\
&\sigma(x,y,z) = -a_1 x + a_3 z - \frac{c_2(y)}{y}w + c_5(y),\\
&\tau(x,y,z) = -a_2 x - a_3 y - \frac{c_3(z)}{z}w + c_6(z).
\end{aligned}$$

Дифференцируя λ по x, σ по y, τ по z и учитывая (55), получаем $c_4' = c_5' = c_6' = 0$, $(c_1/x)' = 0$, $(c_2/y)' = 0$, $(c_3/z)' = 0$ и поэтому

$$\begin{aligned}
\lambda(x,y,z) &= a_1 y + a_2 z + a_4 w + a_7,\\
\sigma(x,y,z) &= -a_1 x + a_3 z + a_5 w + a_8,\\
\tau(x,y,z) &= -a_2 x - a_3 y + a_6 w + a_9.
\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в исходное функциональное уравнение (51), устанавливаем, что $a_7 = a_8 = a_9 = 0$ и после возвращения к прежним обозначениям координат $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{w}$, окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
\lambda(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= a_1\bar{y} + a_2\bar{z} + a_4\bar{w},\\
\sigma(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= -a_1\bar{x} + a_3\bar{z} + a_5\bar{w},\\
\tau(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= -a_2\bar{x} - a_3\bar{y} + a_6\bar{w},
\end{aligned}$$

где, напомним, $\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2+\bar{w}^2 = 1$. Поэтому мы имеем такие операторы:

$$\begin{aligned}
&X_1 = -\bar{y}\partial_{\bar{x}} + \bar{x}\partial_{\bar{y}}, \quad X_2 = -\bar{z}\partial_{\bar{x}} + \bar{x}\partial_{\bar{z}},\\
&X_3 = -\bar{z}\partial_{\bar{y}} + \bar{y}\partial_{\bar{z}}, \quad X_4 = \bar{w}\partial_{\bar{x}}, \quad X_5 = \bar{w}\partial_{\bar{y}}, \quad X_6 = \bar{w}\partial_{\bar{z}}.
\end{aligned}$$

В этих операторах переходя к координатам x, y, z, получаем выражения (35).

Замена координат

$$\left.\begin{aligned}
\bar{x} = sinx\ siny\ chz, \quad \bar{y} = cosx\ siny\ chz,\\
\bar{z} = cosy\ chz, \quad \bar{w} = shz,
\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

где $\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2-\bar{w}^2 = 1$, позволяет метрическую функцию (22) записать в компактном виде

$$f(ij) = \bar{x}_i\bar{x}_j + \bar{y}_i\bar{y}_j + \bar{z}_i\bar{z}_j - \bar{w}_i\bar{w}_j. \tag{57}$$

Исходное функциональное уравнение (27) примет тогда такой вид:

$$\begin{aligned}
&\lambda(i)\frac{\bar{x}_j\bar{w}_i - \bar{x}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_i} + \sigma(i)\frac{\bar{y}_j\bar{w}_i - \bar{y}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_i} + \tau(i)\frac{\bar{z}_j\bar{w}_i - \bar{z}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_i} -\\
&\lambda(j)\frac{\bar{x}_j\bar{w}_i - \bar{x}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_j} - \sigma(j)\frac{\bar{y}_j\bar{w}_i - \bar{y}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_j} - \tau(j)\frac{\bar{z}_j\bar{w}_i - \bar{z}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_j} = 0.
\end{aligned} \tag{58}$$

Далее, повторяя рассуждения, использованные при решении функционального уравнения (51), находим функции:

$$\begin{aligned}
\lambda(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= a_1\bar{y} + a_2\bar{z} + a_4\bar{w},\\
\sigma(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= -a_1\bar{x} + a_3\bar{z} + a_5\bar{w},\\
\tau(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= -a_2\bar{x} - a_3\bar{y} + a_6\bar{w},
\end{aligned}$$

где, напомним, $\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2-\bar{w}^2=1$. Тогда мы приходим к операторам

$$
\begin{array}{l}
X_1=-\bar{y}\partial_{\bar{x}}+\bar{x}\partial_{\bar{y}}, \quad X_2=-\bar{z}\partial_{\bar{x}}+\bar{x}\partial_{\bar{z}}, \\
X_3=-\bar{z}\partial_{\bar{y}}+\bar{y}\partial_{\bar{z}}, \quad X_4=\bar{w}\partial_{\bar{x}}, \quad X_5=\bar{w}\partial_{\bar{y}}, \quad X_6=\bar{w}\partial_{\bar{z}}.
\end{array}
$$

В этих операторах переходя по формулам (56) к прежним координатам x, y, z, получаем для них выражения (36).

Приступим теперь к нахождению базисных операторов алгебры Ли группы движений, двухточечным инвариантом которой является метрическая функция (23). Введем новые координаты

$$
\left.\begin{array}{r}
\bar{x}=sinx\ chy\ chz, \quad \bar{y}=cosx\ chy\ chz, \\
\bar{z}=shy\ chz, \quad \bar{w}=shz,
\end{array}\right\} \tag{59}
$$

где $\bar{x}^2+\bar{y}^2-\bar{z}^2-\bar{w}^2=1$. Тогда метрическая функция (23) примет такой вид:

$$
f(ij)=\bar{x}_i\bar{x}_j+\bar{y}_i\bar{y}_j-\bar{z}_i\bar{z}_j-\bar{w}_i\bar{w}_j. \tag{60}
$$

Для исходного функционального уравнения (27) имеем:

$$
\begin{array}{l}
\lambda(i)\dfrac{\bar{x}_j\bar{w}_i-\bar{x}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_i}+\sigma(i)\dfrac{\bar{y}_j\bar{w}_i-\bar{y}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_i}-\tau(i)\dfrac{\bar{z}_j\bar{w}_i-\bar{z}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_i}- \\
-\lambda(j)\dfrac{\bar{x}_j\bar{w}_i-\bar{x}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_j}-\sigma(j)\dfrac{\bar{y}_j\bar{w}_i-\bar{y}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_j}+\tau(j)\dfrac{\bar{z}_j\bar{w}_i-\bar{z}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_j}=0.
\end{array} \tag{61}
$$

Рассуждая так же, как при решении уравнения (51), приходим к следующим выражениям для коэффициентов λ, σ, τ:

$$
\begin{array}{l}
\lambda(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=-a_1\bar{y}+a_2\bar{z}+a_4\bar{w}, \\
\sigma(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=a_1\bar{x}+a_3\bar{z}+a_5\bar{w}, \\
\tau(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=a_2\bar{x}+a_3\bar{y}+a_6\bar{w}.
\end{array}
$$

Поэтому

$$
\begin{array}{l}
X_1=-\bar{y}\partial_{\bar{x}}+\bar{x}\partial_{\bar{y}}, \quad X_2=\bar{z}\partial_{\bar{x}}+\bar{x}\partial_{\bar{z}}, \\
X_3=\bar{z}\partial_{\bar{y}}+\bar{y}\partial_{\bar{z}}, \quad X_4=\bar{w}\partial_{\bar{x}}, \quad X_5=\bar{w}\partial_{\bar{y}}, \quad X_6=\bar{w}\partial_{\bar{z}}.
\end{array}
$$

Переходя по формулам (59) к прежним координатам x, y, z, будем иметь операторы (37).

С помощью замены координат

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} = sinx\ siny\ shz, \quad \bar{y} = cosx\ siny\ shz, \\ \bar{z} = cosy\ shz, \quad \bar{w} = chz, \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

где $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - \bar{w}^2 = -1$, метрическая функция (24) записывается в более удобном для решения нашей задачи виде

$$f(ij) = \bar{x}_i\bar{x}_j + \bar{y}_i\bar{y}_j + \bar{z}_i\bar{z}_j - \bar{w}_i\bar{w}_j. \tag{63}$$

Тогда уравнение (27) примет такой вид:

$$\begin{aligned} \lambda(i)\frac{\bar{x}_j\bar{w}_i - \bar{x}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_i} + \sigma(i)\frac{\bar{y}_j\bar{w}_i - \bar{y}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_i} + \tau(i)\frac{\bar{z}_j\bar{w}_i - \bar{z}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_i} - \\ - \lambda(j)\frac{\bar{x}_j\bar{w}_i - \bar{x}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_j} - \sigma(j)\frac{\bar{y}_j\bar{w}_i - \bar{y}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_j} - \tau(j)\frac{\bar{z}_j\bar{w}_i - \bar{z}_i\bar{w}_j}{\bar{w}_j} = 0. \end{aligned} \tag{64}$$

Решая уравнение (64) точно так же, как и уравнение (51), получаем коэффициенты:

$$\begin{aligned} \lambda(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= -a_1\bar{y} - a_2\bar{z} + a_4\bar{w}, \\ \sigma(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= a_1\bar{x} - a_3\bar{z} + a_5\bar{w}, \\ \tau(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= a_2\bar{x} + a_3\bar{y} + a_6\bar{w} \end{aligned}$$

и соответствующие базисные операторы:

$$\begin{aligned} &X_1 = -\bar{y}\partial\bar{x} + \bar{x}\partial\bar{y}, \quad X_2 = -\bar{z}\partial\bar{x} + \bar{x}\partial\bar{z}, \\ &X_3 = -\bar{z}\partial\bar{y} + \bar{y}\partial\bar{z}, \quad X_4 = \bar{w}\partial\bar{x}, \quad X_5 = \bar{w}\partial\bar{y}, \quad X_6 = \bar{w}\partial\bar{z}. \end{aligned}$$

Переходя к прежним координатам по формулам (62), получаем операторы (38).

Этим утверждением полностью завершается доказательство основной теоремы.

Литература

1. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии//Докл. АН СССР. 1981. Т.260,№4. С. 803-805.

2. Лев В.Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур// Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. Вып. 125. С.90-103.

3. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

Отзыв о монографии "Полиметрические геометрии"

Монография Г.Г. Михайличенко представляет собой расширенный вариант первой части его докторской диссертации, защищённой в 1993 году в специализированном совете Института математики СО РАН. В монографии учтены все результаты,полученные автором после защиты, а также (в приложении) результаты, полученные его аспирантом В.А. Кыровым.

Полиметрические геометрии есть геометрии с более чем одним расстоянием, которые допускают содержательную физическую интерпретацию. Автор даёт строгое определение таких геометрий, их феноменологической (холотропной) и групповой симметрий и доказывает эквивалентность этих симметрий. На основе этой эквивалентности осуществляется полная классификация некоторых полиметрических геометрий, в частности, однометрических и двуметрических геометрий на плоскости и триметрических геометрий в пространстве.

Результаты монографии прошли квалифицированную апробацию и опубликованы в центральных научных журналах. Монография, объединяя их все, придаёт исследованиям новую перспективу. Метод исследования, разработанный автором, достаточно оригинален, особенно метод классификации групп преобразований. Монография адресована научным работникам, аспирантам и студентам старших курсов по профилю геометрия и теоретическая физика.

Профессор Горно-Алтайского госуниверситета Ю.И. Кулаков