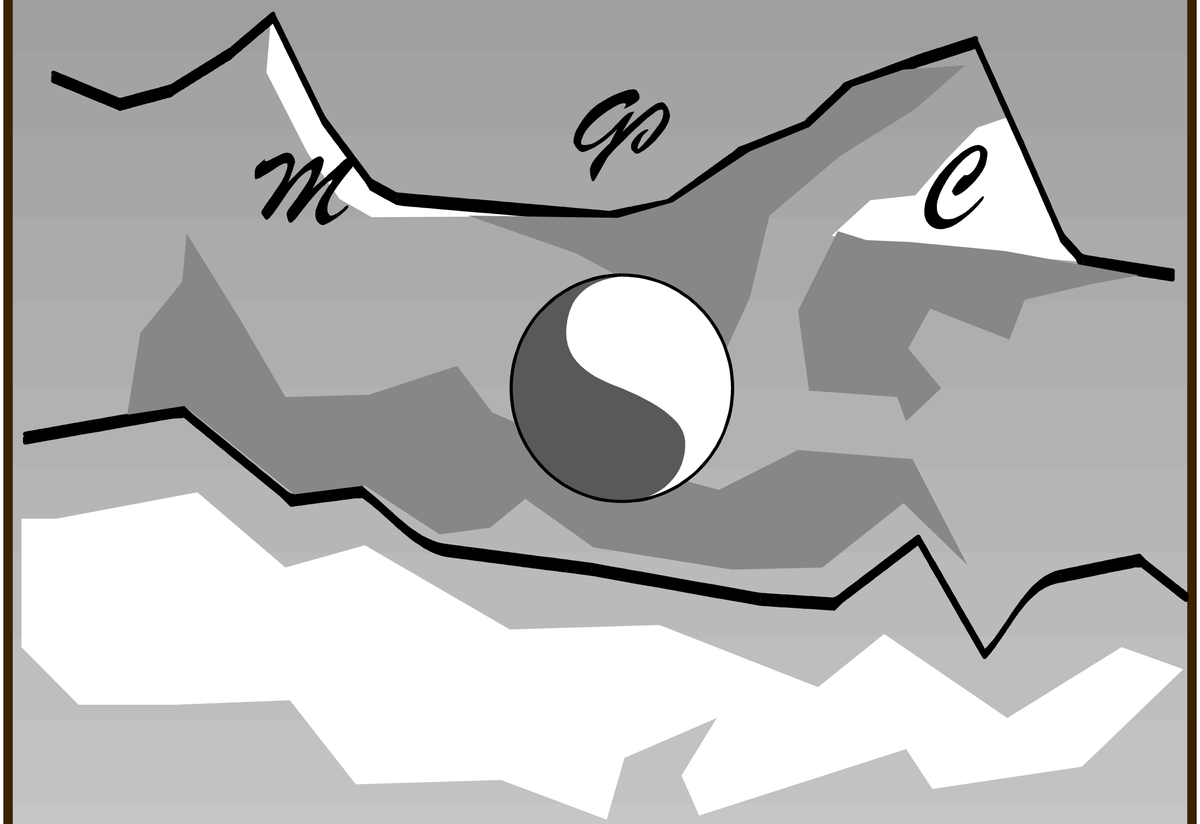
Г.Г. Михайличенко

Математический аппарат теории физических структур



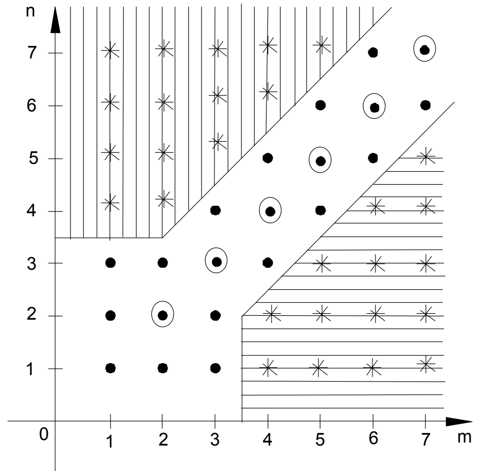
Горно-Алтайск

1997

Горно-Алтайский
государственный университет

Г.Г. Михайличенко

Математический аппарат теории физических структур



Горно-Алтайск
1997

УДК 517.948

Михайличенко Г. Г.
Математический аппарат теории физических структур. Издательство Горно-Алтайского университета. 1997.

Теория физических структур была предложена Ю.И.Кулаковым в 1968 г. для классификации законов физики. За прошедшие почти тридцать лет в работах научных школ Новосибирского, Московского и Горно-Алтайского университетов значительно расширился круг приложений этой теории и был разработан ее математический аппарат. В настоящем издании впервые дано полное и подробное описание математического аппарата теории физических структур, позволившего получить ее главный классификационный результат. Книга предназначена научным работникам, аспирантам и студентам старших курсов, специализирующимся в области теоретической и математической физики.

Mikhailichenko G. G.
Mathematical apparatus of Theory of physical structures. Publishing House is Gorno-Altaisk University. 1997.

The Theory of physical structures was suggested by prof. Y.I.Kulakov in 1968 for the classification of physics laws. For about thirty last years this theory has been widely used in the works of the scientific schools Novosibirsk, Moskow and Gorno-Altaisk Universities and its mathematical apparatus has been worked out. In this publication a detailed and full description of the mathematical appartus of the Theory of physical structures was given for the first time. This apparatus has enabled to get the main classificational result of this theory. The book is intended for scientists, post-graduators and students of senior cources, whose speciality is theoretical and mathematical physics.

Содержание

Введение

Автором теории физических структур является Юрий Иванович Кулаков. Одной из первых публикаций, представивших это новое метатеоретическое направление в физике, была его монография "Элементы теории физических структур", Новосибирск, НГУ, 1968. За прошедшие почти тридцать лет в работах научных школ Новосибирского, Московского и Горно-Алтайского университетов значительно расширился круг приложений этой теории и был разработан ее математический аппарат.

Главной целью настоящего издания является подробное изложение математического аппарата теории физических структур, позволившего получить ее основной классификационный результат [1]. Заметим, что в полном объеме этот аппарат описывается здесь впервые, так как в более ранних работах [2], [3] он был использован только для некоторых частных случаев.

Книга адресована научным работникам, аспирантам и студентам старших курсов, специализирующимся в области теоретической и математической физики. Она будет полезна всем тем, кто, зная о существовании теории физических структур, имеет желание определить ее место в современной физике и математике, а также приложить свои силы и способности к решению ее многочисленных и своеобразных задач.

Следуя Ю. И. Кулакову [4], рассмотрим второй закон Ньютона в механике и закон Ома в электродинамике постоянных токов, записав их в такой форме, которая выявляет феноменологическую симметрию этих законов.

Пусть i - материальное тело, масса которого равна $m(i)$, и α - ускоритель, представляющий собой любое другое тело, которое, действуя на материальное тело i, изменяет скорость его движения и характеризуется силой $F(\alpha)$. Множество материальных тел обозначим через M, а множество ускорителей через N. Измеряемой в опыте величиной является ускорение $a(i\alpha)$, которое телу i сообщает ускоритель α. Если через $a{:}\mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{R}$ обозначить функцию ускорения, то $a(i\alpha) \in \mathrm{R}$ есть ее значение для пары $\langle i\alpha\rangle \in \mathrm{M} \times \mathrm{N}$. Второй закон Ньютона в его традиционной форме утверждает, что произведение массы тела на сообщаемое ему ускорение равно действующей силе:

$$m(i)a(i\alpha) = F(\alpha) \quad . \qquad (1)$$

Пусть, далее, $i, j \in \mathrm{M}$ - два произвольных тела и $\alpha, \beta \in \mathrm{N}$ – два произвольных ускорителя. Тогда, дополнительно к соотношению (1), мы можем записать еще три:

$$\left.\begin{aligned} m(i)a(i\beta) &= F(\beta), \\ m(j)a(j\alpha) &= F(\alpha), \\ m(j)a(j\beta) &= F(\beta). \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

Величиной, непосредственно измеряемой в данном опыте, является только ускорение, масса же и сила такими величинами не являются. Оказывается, на что обратил особое внимание Ю.И.Кулаков [см (4], стр. 18-22), из четырех соотношений (1), (1') можно исключить массы $m(i)$, $m(j)$ и силы $F(\alpha)$, $F(\beta)$. В результате получается функциональная связь между измеряемыми в опыте ускорениями:

$$\begin{vmatrix} a(i\alpha) & a(i\beta) \\ a(j\alpha) & a(j\beta) \end{vmatrix} = 0 \, . \qquad (2)$$

По терминологии Ю.И.Кулакова, уравнение (2), справедливое для любых материальных тел $i, j \in \mathrm{M}$ и любых двух ускорителей α, $\beta \in \mathrm{N}$, представляет собой феноменологически инвариантную форму записи второго закона Ньютона, а функция ускорения a: $\mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{R}$ на множестве материальных тел и множестве ускорителей задает физическую структуру ранга (2,2).

В электродинамике постоянных токов проводнику i с сопротивлением $R(i)$ и источнику тока α с электродвижущей силой $\mathrm{E}(\alpha)$ и внутренним сопротивлением $r(\alpha)$ сопоставляется ток $\mathfrak{I}(i\alpha)$, измеряемый амперметром в соответствующей простой замкнутой цепи. Иными словами, функция тока $\mathfrak{I}$: $\mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{R}$ сопоставляет паре $\langle i\alpha\rangle \in \mathrm{M} \times \mathrm{N}$ численное значение $\mathfrak{I}(i\alpha) \in \mathrm{R}$ его силы, которая в случае полной цепи определяется законом Ома:

$$\mathfrak{I}(i\alpha) = \mathrm{E}(\alpha)/(R(i) + r(\alpha)) \quad . \qquad (3)$$

Пусть, далее, $i, j, k \in \mathrm{M}$ – три произвольных проводника и $\alpha, \beta \in \mathrm{N}$ – два произвольных источника тока. Тогда дополнительно к силе тока (3) можно записать еще пять ее значений:

$$\mathfrak{I}(i\beta), \mathfrak{I}(j\alpha), \mathfrak{I}(j\beta), \mathfrak{I}(k\alpha), \mathfrak{I}(k\beta) \quad . \qquad (3')$$

Оказывается, что сразу совсем не очевидно, из шести выражений(3), (3') можно исключить неизмеряемые сопротивления проводников $R(i), R(j), R(k)$, электродвижущие силы источников $\mathrm{E}(\alpha)$, $\mathrm{E}(\beta)$, их внутренние сопротивления $r(\alpha)$, $r(\beta)$ и получить функциональную зависимость только между измеряемыми в опыте силами токов:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{I}^{-1}(i\alpha) & \mathfrak{I}^{-1}(i\beta) & 1 \\ \mathfrak{I}^{-1}(j\alpha) & \mathfrak{I}^{-1}(j\beta) & 1 \\ \mathfrak{I}^{-1}(k\alpha) & \mathfrak{I}^{-1}(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad . \qquad (4)$$

Будем говорить, что уравнение (4), справедливое для любых трех проводников $i, j, k \in \mathrm{M}$ и любых двух источников тока $\alpha, \beta \in \mathrm{N}$ является феноменологически инвариантной формой закона Ома для полной цепи (см. [4], стр. 56-59), а функция тока $\mathfrak{I}$: $\mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{R}$ на множестве проводников M и множестве источников тока N задает физическую структуру ранга (3,2).

В монографии [4] (см. стр. 77-83), а также в работе [5], Ю. И. Кулаковым показано, как, исходя из феноменологически инвариантных форм (2) и (4) закона Ньютона и закона Ома, прийти к их традиционным формам (1) и (3), вводя естественным образом массу тела m, силу ускорителя F, сопротивление проводника R, электродвижущую силу источника E и его внутреннее сопротивление r.

Одно из основных предположений Ю.И.Кулакова заключается в том, что формы уравнений (2), (4) не случайны и являются следствием их феноменологической инвариантности. Не случайными поэтому оказываются и традиционные формы (1) и (3) закона Ньютона и закона Ома.

Сформулируем кратко и в общих чертах соответствующие задачи, опираясь на принцип феноменологической симметрии.

Пусть имеются одномерные множества M и N, а также функция a: $\mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{R}$, сопоставляющая каждой паре $\langle i\alpha\rangle \in \mathrm{M} \times \mathrm{N}$ некоторое вещественное число $a(i\alpha) \in \mathrm{R}$. Если m и F есть координаты точек в множествах M и N, то для функции a: $\mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{R}$ можно записать следующее координатное представление:

$$a(i\alpha) = a(m(i), F(\alpha)) \quad . \qquad (5)$$

Произвольной четверке $\langle ij,\alpha\beta\rangle \in \mathrm{M}^2 \times \mathrm{N}^2$ при этом будет сопоставлено четыре числа $(a(i\alpha), a(i\beta), a(j\alpha), a(j\beta))$, которые можно рассматривать как координаты точки в R^4. Предположим, что множество этих точек лежит на некоторой трехмерной гиперповерхности N, задаваемой уравнением $\Phi=0$, то есть

$$\Phi(a(i\alpha), a(i\beta), a(j\alpha), a(j\beta)) = 0 \qquad (6)$$

для любой четверки $\langle ij,\alpha\beta\rangle \in \mathrm{M}^2 \times \mathrm{N}^2$.

Феноменологически инвариатная связь (6) представляет собой уравнение как для функции Φ от четырех переменных, так и для функции a от двух переменных. Эта задача была решена самим Ю.И.Кулаковым (см. [4], стр. 63-68). Им было найдено наиболее общее выражение для функции (5):

$$a(i\alpha) = \psi^{-1}(A(m(i)\cdot B(F(\alpha))) \quad , \qquad (7)$$

где ψ, A, B - произвольные функции одной переменной. Поэтому, любая связь (6) может быть приведена к следующей канонической форме:

$$\begin{vmatrix} \psi(a(i\alpha)) & \psi(a(i\beta)) \\ \psi(a(j\alpha)) & \psi(a(j\beta)) \end{vmatrix} = 0 \quad . \qquad (8)$$

Таким образом, традиционная и феноменологически инвариантная формы (1) и (2) закона Ньютона являются частными решениями уравнения (6) и могут быть получены из общих решений (7) и (8), если в них положить $\psi(a) = a$, $A(m) = 1/m$, $B(F) = F$.

Сформулируем еще задачу, естественно возникающую при анализе закона Ома (3), (4).

Пусть имеются одномерное и двумерное множества M и N, а также функция $\mathfrak{I}: \mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{R}$. В некоторых системах координат R и E, r для функции $\mathfrak{I}$ имеем такое координатное представление:

$$\mathfrak{I}(i\alpha) = \mathfrak{I}(R(i), \mathrm{E}(\alpha), r(\alpha)) \quad . \qquad (9)$$

Кортежу $<ijk,\alpha\beta> \in \mathrm{M}^3 \times \mathrm{N}^2$ с помощью функции $\mathfrak{I}$ сопоставляется точка $(\mathfrak{I}(i\alpha), \mathfrak{I}(i\beta), \mathfrak{I}(j\alpha), \mathfrak{I}(j\beta), \mathfrak{I}(k\alpha), \mathfrak{I}(k\beta)) \in \mathrm{R}^6$. Предположим, что множество таких точек лежит на некоторой пятимерной гиперповерхности N, задаваемой уравнением Φ=0, то есть

$$\Phi(\mathfrak{I}(i\alpha), \mathfrak{I}(i\beta), \mathfrak{I}(j\alpha), \mathfrak{I}(j\beta), \mathfrak{I}(k\alpha), \mathfrak{I}(k\beta)) = 0 \qquad (10)$$

для любого кортежа $<ijk,\alpha\beta>$ из $\mathrm{M}^3 \times \mathrm{N}^2$. Необходимо найти наиболее общие выражения для функций $\mathfrak{I}$ и Φ, в отношении которых связь (10) является функциональным уравнением. Эта задача была решена автором (см. [6], стр. 182-191). Решением для функции (9) является выражение:

$$\mathfrak{I}(i\alpha) = \psi^{-1}(A(R(i))\, B(\mathrm{E}(\alpha), r(\alpha)) + C(\mathrm{E}(\alpha), r(\alpha))) \quad , \qquad (11)$$

где ψ, A и B, C - произвольные функции одной и двух переменных, ψ^{-1} - обратная функция, а любая связь (10) может быть приведена к следующей канонической форме:

$$\begin{vmatrix} \psi(\mathfrak{I}(i\alpha)) & \psi(\mathfrak{I}(i\beta)) & 1 \\ \psi(\mathfrak{I}(j\alpha)) & \psi(\mathfrak{I}(j\beta)) & 1 \\ \psi(\mathfrak{I}(k\alpha) & \psi(\mathfrak{I}(k\beta)) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad . \qquad (12)$$

Заметим, что обычная и феноменологичеси инвариантная формы (3) и (4) закона Ома получаются из общих решений (11) и (12) функционального уравнения (10), если в них положить $\psi(\mathfrak{I}) = 1/\mathfrak{I}$, $B(\mathrm{E}, r) = 1/\mathrm{E}$, $C(\mathrm{E}, r,) = r/\mathrm{E}$.

Рассмотренные выше две задачи допускают естественное обобщение, к которому сразу же пришел Ю.И.Кулаков (см. [4], стр. 60-63). Предварительно заметим, что функция (5) задает на множествах M и N, которые одномерны, физическую структуру ранга (2,2), а функция (9) на одномерном и двумерном множествах M и N задает физическую структуру ранга (3,2). То есть размерности множеств M и N тесно связаны с рангом задаваемой на них физической структуры. Это обстоятельство должно быть учтено в более общей формулировке обсуждаемой задачи.

Пусть имеются два множества M и N, размерности которых равны m и n, а также функция $f: \mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{R}$, сопоставляющая каждой паре $<i\alpha>$ из прямого произведения $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ некоторое число $f(i\alpha) \in \mathrm{R}$. Если $x^1, \dots, x^m$ и $\xi^1, \dots, \xi^n$ координаты точек в множествах M и N, то для функции f можно записать ее координатное представление:

$$f(i\alpha) = f(x^1(i), \dots, x^m(i), \xi^1(\alpha), \dots, \xi^n(\alpha)) \quad . \qquad (13)$$

Кортежу $<ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau> \in M^{n+1} \times N^{m+1}$ длины (n+1)+(m+1) сопоставляется при этом числовая матрица, содержащая (n+1) строк и (m+1) столбцов:

$$\left\| \begin{matrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\gamma) & \ldots & f(i\tau) \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\gamma) & \ldots & f(j\tau) \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\gamma) & \ldots & f(k\tau) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(\nu\alpha) & f(\nu\beta) & f(\nu\gamma) & \ldots & f(\nu\tau) \end{matrix} \right\| . \qquad (14)$$

Элементы матрицы (14), считываемые в естественном порядке (слева - направо и сверху - вниз), будем рассматривать как координаты точки в (n+1)(m+1) - мерном пространстве $R^{(m+1)(n+1)}$:

$$(f(i\alpha), f(i\beta), \ldots , f(\nu\tau)) \in R^{(m+1)(n+1)} . \qquad (15)$$

Предположим, далее, что множество точек (15) лежит на некоторой гиперповерхности *N* в $R^{(m+1)(n+1)}$, задаваемой уравнением $\Phi = 0$, то есть

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), \ldots , f(\nu\tau)) = 0 \qquad (16)$$

для любого кортежа $<ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau> \in M^{n+1} \times N^{m+1}$.

Будем говорить, что при наличии функциональной свзи (16) функция (13) задает на множествах M и N размерностей m и n физическую структуру ранга (n+1,m+1). Термин "физическая структура" был введен Ю.И.Кулаковым, предположившим, что фундаментальные законы физики могут быть записаны в виде феноменологически инвариантной связи типа (16) между значениями некоторой величины (13), измеряемой в опыте.

С математической точки зрения встает задача о нахождении наиболее общих выражений для функций f и Φ, в отношении которых связь (16) представляет собой особое функциональное уравнение с двухиндексными переменными.

Ниже будет дано подробное изложение общего метода решения функционального уравнения (16) для произвольных значений целых чисел m и n, позволившего построить полную классификацию физических структур любого ранга. Впервые этот метод был использован автором при решннии уравнения (6), то есть уравнения (16) для m=n=1 (см. [6], стр. 175-182) и существенно развит в работах [2] и [3] при решении уравнения (16) для частных случаев n≥m=1 (или m≥n=1) и n≥m=2 (или m≥n=2).

Выше формулировка принципа феноменологической симметрии и определение физической структуры, математическим выражением которых является уравнение (16), были даны кратко и только в общих чертах. Более полная и строгая аксиоматика, обеспечивающая надежную математическую базу классификации физических структур, будет дана в первом параграфе основной части.

Основная часть

В монографии [4], а также в некоторых последующих работах Ю.И.Кулаковым было дано первоначальное изложение теории физических структур, центральным постулатом которой был принцип феноменологической симметрии (см., например, [7], [8]). Им же был предложен координатный метод, с помощью которого были рассмотрены простейшие физические структуры рангов (2,2) и (3,2) [8], [9]. Однако в применении к физическим структурам более высоких рангов (см. [6], стр. 191-200) указанный метод привел к значительным трудностям чисто технического характера. С другой стороны, первоначальные определения и формулировки исходных аксиом, в какой-то мере, были даны с учетом координатного метода исследования. Ниже приводятся более естественные формулировки и применяется функциональный метод, предложенный автором и активно использованный им в работах [2], [3].

§ 1. Математическая формулировка теории физических структур. Основная классификационная теорема

Пусть имеются два множества M и N произвольной природы, в общем случае различной, точки которых будем обозначать строчными латинскими и греческими буквами соответственно, а также функция $f\colon \boldsymbol{G}_f \to \mathrm{R}$, где $\boldsymbol{G}_f \subset \mathrm{M} \times \mathrm{N}$, сопоставляющая каждой паре $<i\alpha>$ из $\boldsymbol{G}_f$ некоторое вещественное число $f(i\alpha) \in \mathrm{R}$. Заметим, что область определения $\boldsymbol{G}_f$ функции f не обязательно совпадает с прямым произведением $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$. Мы будем предполагать, что выполняется следующее условие:

A. Если две произвольные точки i, j из M (α, β из N) *различны, то для некоторого* $\gamma \in \mathrm{N}$ ($k \in \mathrm{M}$) *пары* $<i\gamma>, <j\gamma> \in \boldsymbol{G}_f$ и $f(i\gamma) \neq f(j\gamma)$ ($<k\alpha>, <k\beta> \in \boldsymbol{G}_f$ и $f(k\alpha) \neq f(k\beta)$).

Смысл условия A состоит в том, что рассматриваются только такие свойства множеств M и N, которые выражаются посредством функции f.

По функции f, удовлетворяющей условию A, на множествах M и N естественным образом можно определить отделимые топологии. Пусть, например, $i \in \mathrm{M}$ - произвольная точка, $\varepsilon > 0$ и $\gamma \in \mathrm{N}$. Если $<i\gamma> \in \boldsymbol{G}_f$, то через $U(i;\varepsilon,\gamma)$ обозначим множество всех тех точек $i' \in \mathrm{M}$, для которых $<i'\gamma> \in \boldsymbol{G}_f$ и имеет место неравенство $|f(i'\gamma)-f(i\gamma)| < \varepsilon$. Если же $<i\gamma> \notin \boldsymbol{G}_f$, то под $U(i;\varepsilon,\gamma)$ будем понимать все множество M. Пусть, далее, $\tilde{\mathrm{N}}$ - конечное множество из N и $U(i;\varepsilon,\tilde{\mathrm{N}})$ - пересечение всех $U(i;\varepsilon,\gamma)$, где $\gamma \in \tilde{\mathrm{N}}$. Семейство всех $U(i;\varepsilon,\tilde{\mathrm{N}})$ для произвольных конечных множеств $\tilde{\mathrm{N}} \subset \mathrm{N}$ и любых значений положительного числа ε принимается за фундаментальную систему окрестностей точки $i \in \mathrm{M}$. Пересечение множеств $U(i;\varepsilon_1,\tilde{\mathrm{N}}_1)$ и $U(i;\varepsilon_2,\tilde{\mathrm{N}}_2)$ содержит, очевидно, множество $U(i;\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2),\tilde{\mathrm{N}}_1 \cup \tilde{\mathrm{N}}_2)$. Окрестностью $U(i)$ точки i будем считать всякое множество из M, содержащее некоторую окрестность этой точки из фундаментальной системы. Совершенно аналогично вводится фундаментальная система окрестностей $U(\alpha;\varepsilon,\tilde{\mathrm{M}})$ для любой точки $\alpha \in \mathrm{N}$. Произвольную окрестность этой точки будем обозначать через $U(\alpha)$.

<u>Лемма 1.</u> *Введенные для каждой точки $i \in$* M *и каждой точки $\alpha \in$* N *системы множеств $U(i)$ и $U(\alpha)$ удовлетворяют всем аксиомам системы окрестностей и определяют на множествах* M *и* N *отделимые в смысле Хаусдорфа топологии.*

Доказательство леммы проведем только для системы окрестностей $U(i)$, так как соответствующее доказательство для системы окрестностей $U(\alpha)$ проводится вполне аналогично.

Всякое множество из M, содержащее окрестность $U(i)$, также является окрестностью точки i. Пересечение конечного числа окрестностей одной и той же точки есть окрестность этой точки. Точка i принадлежит каждой своей окрестности $U(i)$. Выполнение перечисленных трех аксиом непосредственно следует из определения системы множеств $U(i)$. Докажем теперь четвертую аксиому, согласно которой любая окрестность $U(i)$ содержит такое множество $U_1(i)$, что $U(i)$ является окрестностью для каждой точки из $U_1(i)$. Пусть $U(i)$ содержит окрестность $U(i;\varepsilon,\tilde{\mathrm{N}})$ из фундаментальной системы. В качестве $U_1(i)$ возьмем множество $U(i;\varepsilon_1,\tilde{\mathrm{N}})$, где $\varepsilon_1 < \varepsilon$. Рассмотрим у каждой точки $i' \in U_1(i)$ окрестность $U_2(i') = U(i';\varepsilon_2,\tilde{\mathrm{N}})$, где $\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1$.

Покажем, что точка i' входит в $U(i)$ вместе со своей окрестностью $U_2(i')$. Пусть $i'' \in U_2(i')$. Если $<i\gamma> \in \boldsymbol{G}_f$ для некоторого $\gamma \in$ Ñ , то $<i'\gamma>,<i''\gamma> \in \boldsymbol{G}_f$ и потому выполняется неравенство $|f(i''\gamma)-f(i\gamma)| \le |f(i''\gamma)-f(i'\gamma)| + |f(i'\gamma)-f(i\gamma)| < \varepsilon_2 + \varepsilon_1 = \varepsilon$, означающее, что $i'' \in U(i;\varepsilon,\gamma)$. Если же $<i\gamma> \notin \boldsymbol{G}_f$,то тем более $i'' \in U(i;\varepsilon,\gamma)$, поскольку тогда по определению $U(i;\varepsilon,\gamma) =$ M. Таким образом, $i'' \in U(i;\varepsilon,$ Ñ $) \subset U(i)$, то есть $U_2(i') \subset U(i)$ и четвертая, последняя, аксиома системы окрестностей также выполняется. Отделимость же по Хаусдорфу определенной в M топологии можно доказать следующим образом. Если $i \neq j$, то по условию A найдется такое $\gamma \in$ N, что $f(i\gamma) \neq f(j\gamma)$. Положим $|f(i\gamma) - f(j\gamma)| = 3\varepsilon$ и рассмотрим у точек i и j окрестности $U(i)=U(i;\varepsilon,\gamma)$ и $U(j)=U(j;\varepsilon,\gamma)$. Эти окрестности не пересекаются, так как,в противном случае, получим неравенство $|f(i\gamma) - f(j\gamma)| \le |f(i\gamma) - f(i'\gamma)| + |f(i'\gamma) - f(j\gamma)| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$, где $i' \in U(i) \cap U(j)$, то есть $|f(i\gamma) - f(j\gamma)| < 2\varepsilon$, что противоречит исходному определению $3\varepsilon = |f(i\gamma) - f(j\gamma)|$, из которого следует обратное неравенство $|f(i\gamma) - f(j\gamma)| > 2\varepsilon$. Лемма 1 доказана.

В дальнейшем под $U(i)$ и $U(\alpha)$ будем понимать открытые окрестности точек $i \in$ M и $\alpha \in$N. Топология в M $\times$ N вводится обычным образом, как произведение топологий в M и N. В $\boldsymbol{G}_f$ будем рассматривать топологию, индуцированную из M $\times$ N. Окрестность пары $<i\alpha>$ будем обозначать через $U(<i\alpha>)$.

Пусть m$\ge$1 и n$\ge$1 - целые числа. Для некоторых кортежей $<\gamma_1 ...\gamma_m> \in$ N^m длины m и $<k_1...k_n> \in$ M^n длины n введем функции $f^m = f[\gamma_1...\gamma_m]$ и $f^n = f[k_1...k_n]$, сопоставляя точкам $i \in$ M и $\alpha \in$N точки $(f(i\gamma_1),...,f(i\gamma_m)) \in$ R^m и $(f(k_1\alpha),...,f(k_n\alpha)) \in$ R^n , если пары $<i\gamma_1>$, ... ,$<i\gamma_m>$ и $<k_1\alpha>$, ... ,$<k_n\alpha>$ принадлежат $\boldsymbol{G}_f$. Функции f^m и f^n определены на некоторых подмножествах в M и N. Будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

I. Область определения $\boldsymbol{G}_f$ *функции* f *есть открытое и плотное в* $M \times$ N *множество.*

II. *Существуют открытые и плотные в M и* N *множества*, *для любых точек* i *и* α *которых найдутся в* N^m *и* M^n *такие кортежи длины* m *и* n, *что для них соответствующие отображения* f^m *и* f^n *некоторых окрестностей* $U(i)$ *и* $U(\alpha)$ *в* R^m *и* R^n *являются локальными гомеоморфизмами.*

Согласно аксиоме II открытые и плотные в M и N множества являются топологическими многообразиями размерности m и n, в которых локальные координаты можно ввести с помощью отображений f^m и f^n.

III. Функция f достаточно гладкая в локальных координатах, описанных в аксиоме II, и плотны в N^m и M^n множества таких кортежей длины m и n, для которых соответствующие отображения f^m и f^n имеют ранги m и n в точках плотных в M и N множеств.

Достаточная гладкость означает, что в указанных координатах непрерывна сама функция f и непрерывны все ее производные достаточно высокого порядка. Функцию f, удовлетворяющую условиям аксиомы III, будем называть <u>невырожденной</u>.

<u>Лемма 2.</u> *Существуют открытые и плотные в M и* N *множества*, *для каждой точки которых любые две описанные в аксиоме II системы локальных координат, определенные в этой точке, гладко связаны в некоторой ее окрестности.*

Действительно, пусть, например, $<\gamma_1...\gamma_m> \in$ N^m такой кортеж длины m, для которого, согласно аксиоме III, отображение $f^m = f[\gamma_1...\gamma_m]$ имеет ранг m в точках плотного в M множества. Тогда для каждой точки i этого множества с помощью отображения f^m можно ввести локальные координаты. Поскольку такие координаты гладко связаны с любыми локальными координатами, описанными в аксиоме II, эти последние гладко связаны между собой в некоторой окресности $U(i)$. Рассуждения в отношении множества N проводятся аналогично. Лемма доказана.

Таким образом, локальные координаты, описанные в аксиоме II, задают на некоторых открытых и плотных в M и N множествах структуру гладких m- и n- мерных многообразий. Из аксиом I, II, III и леммы 2 следует, что в $\boldsymbol{G}_f$ существует множество, открытое и плотное в $M \times$ N, для каждой пары которого функция f достаточно гладкая, причем координаты в точках этой пары гладко связаны. Ограничим в дальнейшем область определения функции f этим множеством, используя для него прежнее обозначение $\boldsymbol{G}_f$.

Введем еще функцию $\boldsymbol{F}$, сопоставляя кортежу $<ijk...\nu,\alpha\beta\gamma ...\tau> \in M^{n+1} \times$ N^{m+1} длины m+n+2 точку $(f(i\alpha),f(i\beta),... ,f(\nu\tau)) \in$ R$^{(m+1)(n+1)}$, координаты которой в R$^{(m+1)(n+1)}$ определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью значений функции f для всех пар его элементов: $<i\alpha>,<i\beta>,...,<\nu\tau>$, если эти пары принадлежат $\boldsymbol{G}_f$. Область определения введенной функции есть, очевидно, открытое и плотное в $M^{n+1} \times N^{m+1}$ множество, которое обозначим через $\boldsymbol{G_F}$. Область ее значений $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{G_F})$ в $R^{(m+1)(n+1)}$ обозначим через $\boldsymbol{N}$.

Определение 1. *Будем говорить, что функция f задает на множествах M и N физическую структуру ранга (n+1, m+1), если, кроме условия A и аксиом I, II, III, дополнительно имеет место следующая аксиома:*

IV. *Существует плотное в* $\mathbf{G_F}$ *множество, для каждого кортежа* $<ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau>$ *длины m+n+2 которого и некоторой его окрестности* $U(<i...\tau>)$ *найдется такая достаточно гладкая функция* $\Phi:\mathcal{E} \to R$, *определенная в некоторой области* $\mathcal{E} \subset R^{(m+1)(n+1)}$, *содержащей точку* $\boldsymbol{F}(<i...\tau>)$, *что в ней* $\mathrm{grad}\Phi \neq 0$ *и множество* $\boldsymbol{F}(U(<i...\tau>))$ *является подмножеством множества нулей функции* Φ, *то есть*

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), \ldots, f(\nu\tau)) = 0 \quad (1)$$

для всех кортежей из $U(<i...\tau>)$.

Аксиома IV составляет содержание принципа феноменологической симметрии в теории физических структур, предложенной Ю.И.Кулаковым [4] для классификации физических законов. Эта аксиома выражает собой требование, чтобы (m+1)(n+1) значений функции f для всех пар из любого кортежа $<ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau>$ длины m+n+2, принадлежащего окрестности $U(<i \ldots\tau>)$, были функционально связаны, то есть удовлетворяли некоторому уравнению (1), задающему аналитическое выражение физического закона. В этом законе, например, число $f(i\alpha)$ есть результат измерения физической величины f для объектов i и α из множеств M и N. Условие же $\mathrm{grad}\Phi \neq 0$, входящее в аксиому IV, означает просто, что функциональная связь (1) не- тривиальна.

Пусть $x = (x^1,...,x^m)$ и $\xi = (\xi^1,...,\xi^n)$ – локальные координаты в множествах M и N. Для исходной функции f в некоторой окрестности $U(i) \times U(\alpha)$ каждой пары $<i\alpha> \in \boldsymbol{G}_f$ получаем тогда локальное координатное представление:

$$f(i\alpha) = f(x(i),\xi(\alpha)) = f(x^1(i),...,x^m(i), \xi^1(\alpha),...,\xi^n(\alpha)) , \quad (2)$$

свойства которого определяются аксиомой III. Поскольку ранги отображений f^m и f^n максимальны, координаты x и ξ входят в представление (2) существенным образом. Последнее означает, что никакая локально обратимая гладкая замена координат не приведет к уменьшению их числа, то есть представление (2) для функции f ни для каких координат $\tilde{x}$ и $\tilde{\xi}$ нельзя записать в виде $f(i\alpha)$ $= \tilde{f}(\tilde{x}^1(i),..., \tilde{x}^{m'}(i), \tilde{\xi}^1(\alpha),..., \tilde{\xi}^{n'}(\alpha))$, где или m'<m, или n'<n. (см., например, [10], стр. 16).

Функцию f можно рассматривать как своего рода метрику в геометрии двух множеств. Но поскольку расстояние $f(i\alpha)$ определено для точек разных множеств, обычные метрические аксиомы здесь не могут быть наложены. Будем также говорить, что функция f задает на множествах M и N феноменологи- чески симметричную (m,n) -мерную геометрию ранга (n+1,m+1).

Используя представление (2), запишем локальное координатное задание для функции $\boldsymbol{F}$:

$$\left.\begin{aligned} f(i\alpha) &= f(x(i),\xi(\alpha)),\\ f(i\beta) &= f(x(i),\xi(\beta)),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f(\nu\tau) &= f(x(\nu),\xi(\tau)),\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

функциональная матрица которого

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f(i\alpha)}{\partial x(i)} \ldots & 0 & \dfrac{\partial f(i\alpha)}{\partial \xi(\alpha)} \ldots & 0 \\ \ldots \quad \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots & \ldots \\ 0 \quad \ldots \dfrac{\partial f(\nu\tau)}{\partial x(\nu)} & & 0 \quad \ldots & \dfrac{\partial f(\nu\tau)}{\partial \xi(\tau)} \end{matrix} \right\| \quad (4)$$

имеет (m+1)(n+1) строк и 2mn+m+n столбцов. Здесь через $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial\xi$ обозначены соответстующие строки производных от функции f по координатам $x = (x^1,...,x^m)$ и $\xi = (\xi^1,...,\xi^n)$.

Задание (3) для функции $\boldsymbol{F}$ представляет собой систему (m+1)(n+1) функций $f(i\alpha), f(i\beta), \ldots, f(\nu\tau)$, специальным образом зависящих от 2mn+m+n координат $x^1(i), \ldots, x^m(i), \ldots, x^1(\nu), \ldots, x^m(\nu), \xi^1(\alpha), \ldots, \xi^n(\alpha), \ldots, \xi^1(\tau), \ldots, \xi^n(\tau)$ всех точек кортежа $\langle ijk\ldots\nu, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle$ длины m+n+2. Поскольку число функций в системе (3) не больше общего числа координат, наличие связи (1) является нетривиальным фактом, не имеющим места для произвольных функций.

Определение 2. *Пусть множества* M *и* N *есть гладкие многообразия. Будем говорить, что гладкие функции* f: $\boldsymbol{G}_f \to R$ *и* g: $\boldsymbol{G}_g \to R$ *с открытыми и плотными в* $M \times N$ *областями определения* $\boldsymbol{G}_f$ *и* $\boldsymbol{G}_g$ *эквивалентны, если существуют такие локальные диффеоморфизмы* $\lambda: M \to M$, $\sigma: N \to N$, $\psi: R \to R$, *что для открытого и плотного в* $\boldsymbol{G}_f$ *множества пар* $\langle i\alpha\rangle$ *пара* $\langle\lambda(i), \sigma(\alpha)\rangle$ *принадлежит* $\boldsymbol{G}_g$ *и имеет место соотношение* $f(i\alpha)=\psi(g(\lambda(i), \sigma(\alpha)))$.

Теорема. *Физические структуры ранга* (n+1,m+1), *где* m≥1, n≥1, *существуют только для* m=n≥1, m=n+1≥2 *и* n=m+1≥2, m=n+2=3 и n=m+2=3. *Если функция* f *задает на множествах* M *и* N *физическую структуру ранга* (n+1,m+1), *то для некоторого открытого и плотного в* $\boldsymbol{G}_F \subset M^{n+1} \times N^{m+1}$ *множества кортежей* $\langle ijk\ldots\nu, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle$ *длины* m+n+2 *с точностью до эквивалентности локальное координатное представление (2) и функциональная связь (1) могут быть записаны в следующей канонической форме:*

для m=n=1, *то есть ранга (2,2):*

$$f(i\alpha) = x^1(i) + \xi^1(\alpha) \;, \tag{5}$$

$$f(i\alpha) - f(i\beta) - f(j\alpha) + f(j\beta) = 0 \;; \tag{6}$$

для m=n≥2, *то есть рангов (3,3), (4,4) и т. д.:*

$$f(i\alpha) = x^1(i)\xi^1(\alpha) + \ldots + x^{m-1}(i)\xi^{m-1}(\alpha) + x^m(i)\xi^m(\alpha) \;, \tag{7}$$

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & \ldots & f(i\tau) \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & \ldots & f(j\tau) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(\nu\alpha) & f(\nu\beta) & \ldots & f(\nu\tau) \end{vmatrix} = 0 \,, \tag{8}$$

а также

$$f(i\alpha) = x^1(i)\xi^1(\alpha) + \ldots + x^{m-1}(i)\xi^{m-1}(\alpha) + x^m(i) + \xi^m(\alpha) \;, \tag{9}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & f(i\alpha) & f(i\beta) & \ldots & f(i\tau) \\ 1 & f(j\alpha) & f(j\beta) & \ldots & f(j\tau) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & f(\nu\alpha) & f(\nu\beta) & \ldots & f(\nu\tau) \end{vmatrix} = 0 \,; \tag{10}$$

для m=n+1≥2, *то есть рангов (2,3), (3,4) и т. д.:*

$$f(i\alpha) = x^1(i)\xi^1(\alpha) + \ldots + x^{m-1}(i)\xi^{m-1}(\alpha) + x^m(i) \;, \tag{11}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\gamma) & \ldots & f(i\tau) \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\gamma) & \ldots & f(j\tau) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(\nu\alpha) & f(\nu\beta) & f(\nu\gamma) & \ldots & f(\nu\tau) \end{vmatrix} = 0 \,; \tag{12}$$

для n=m+1≥2, *то есть рангов (3,2), (4,3) и т. д.:*

$$f(i\alpha) = x^1(i)\xi^1(\alpha) + \ldots + x^m(i)\xi^m(\alpha) + \xi^{m+1}(\alpha)\ , \qquad (13)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & f(i\alpha) & f(i\beta) & \ldots & f(i\tau) \\ 1 & f(j\alpha) & f(j\beta) & \ldots & f(j\tau) \\ 1 & f(k\alpha) & f(k\beta) & \ldots & f(k\tau) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & f(v\alpha) & f(v\beta) & \ldots & f(v\tau) \end{vmatrix} = 0\ ; \qquad (14)$$

для m=n+2=3, *то есть ранга (2,4):*

$$f(i\alpha) = (x^1(i)\xi^1(\alpha) + x^2(i)) / (x^3(i) + \xi^1(\alpha))\ , \qquad (15)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\gamma) & f(i\delta) \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\gamma) & f(j\delta) \\ f(i\alpha)\times f(j\alpha) & f(i\beta)\times f(j\beta) & f(i\gamma)\times f(j\gamma) & f(i\delta)\times f(j\delta) \end{vmatrix} = 0\ ; \quad (16)$$

для n=m+2=3, *то есть ранга (4,2):*

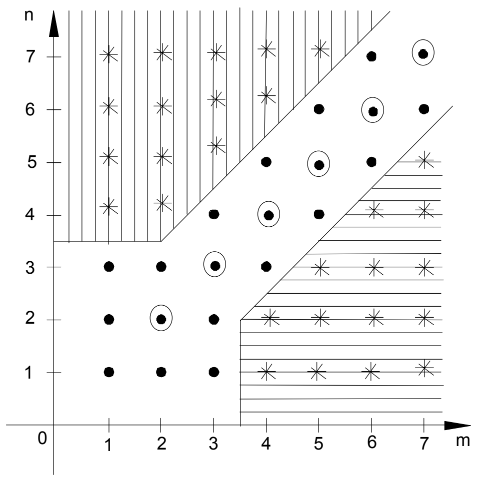
$$f(i\alpha) = (x^1(i)\xi^1(\alpha) + \xi^2(\alpha)) / (x^1(i) + \xi^3(\alpha))\ , \qquad (17)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\alpha)\times f(i\beta) \\ 1 & f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\alpha)\times f(j\beta) \\ 1 & f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\alpha)\times f(k\beta) \\ 1 & f(l\alpha) & f(l\beta) & f(l\alpha)\times f(l\beta) \end{vmatrix} = 0\,. \quad (18)$$

Для m≥n+2≥3 *и* n≥m+2≥3, *кроме случаев* m=n+2=3 *и* n=m+2=3, *физические структуры ранга* (n+1,m+1) *не существуют*.

Все дальнейшее изложение представляет собой последовательное доказательство сформулированной выше основной классификационной теоремы. Заметим, что результат локален. В процессе доказательства теоремы возникает большое число функциональных и функционально-дифференциальных уравнений, методика решения которых разработана автором. Исходная связь (1), постулируемая аксиомой IV, представляет собой особое функциональное уравнение с двухиндексными переменными. Его решениями с точностью до эквивалентности являются канонические формы (5)-(18) для функций f и Φ. Существование решений (5)-(6), (7)-(8), (11)-(12), (13)-(14) было предположено Ю.И.Кулаковым (см [4], стр. 60-70). Решения же (9)-(10), (15)-(16), (17)-(18) впервые были обнаружены автором (см [6], стр. 191-200). Кроме того, теорема утверждает, что с точностью до эквивалентности решения (5)-(18) исчерпывают все возможные, то есть никаких других решений уравнение (1) не имеет.

Для наглядности удобно результаты, составляющие содержание основной классификационной теоремы, представить на следующей диаграмме:



Точкой на диаграмме выделены те значения чисел m и n, для которых физические структуры существуют в одном варианте (с точностью до эквивалентности). Кружком с точкой - для которых физические структуры существуют в двух неэквивалентных формах. В заштрихованной области звездочкой отмечены те значения чи-сел m и n, для которых физические структуры не существуют.

В заключение отметим, что функциональные связи (6), (8), (10), (12), (14), (18) антисимметричны по перестановкам точек из одного множества. Введем оператор альтернирования $\hat{R}$, действие которого состоит в антисимметризации выражений, стоящих справа от него. Например, двухточечный оператор $\hat{R}(ij)$ действует следующим образом:

$$\hat{R}(ij)\,f(i\alpha) = f(i\alpha) - f(j\alpha),$$

а при антисимметризации по трем точкам, очевидно, получаем:

$$\hat{R}(ijk)\,f(i\alpha)f(j\beta) = \begin{vmatrix} 1 & f(i\alpha) & f(i\beta) \\ 1 & f(j\alpha) & f(j\beta) \\ 1 & f(k\alpha) & f(k\beta) \end{vmatrix} .$$

Многоточечные операторы $\hat{R}$ вводятся аналогично. Перечисленные выше функциональные связи (6), (8), ... , (18) можно записать в более компактном, чем через определитель, виде, используя операторы альтернирования $\hat{R}$:

$$\hat{R}(ij)\,\hat{R}(\alpha\beta)f(i\alpha) = 0 \;, \qquad (6')$$

$$\hat{R}(ij\ldots\nu)\,\hat{R}(\alpha\beta\ldots\tau)f(i\alpha)f(j\beta)\ldots f(\nu\tau) = 0 \;, \qquad (8')$$

$$\hat{R}(ij\ldots\nu)\,\hat{R}(\alpha\beta\ldots\tau)f(j\beta)\ldots f(\nu\tau) = 0 \;, \qquad (10')$$

$$\hat{R}(ij\ldots\nu)\,\hat{R}(\alpha\beta\gamma\ldots\tau)f(i\beta)f(i\gamma)\ldots f(\nu\tau) = 0 \;, \qquad (12')$$

$$\hat{R}(ijk\ldots\nu)\,\hat{R}(\alpha\beta\ldots\tau)f(j\alpha)f(k\beta)\ldots f(\nu\tau) = 0 \;, \qquad (14')$$

$$\hat{R}(ij)\,\hat{R}(\alpha\beta\gamma\delta)f(i\alpha)f(j\beta)f(i\gamma)f(j\gamma) = 0 \;, \qquad 16')$$

$$\hat{R}(ijkl)\,\hat{R}(\alpha\beta)f(i\alpha)f(j\beta)f(k\alpha)f(k\beta) = 0 \;. \qquad (18')$$

Напомним, что определение физических структур и их полная классификация были опубликованы автором в Докладах Академии наук [1] в 1972 г.

§2. Общие преобразования: n≥m≥1

Для исключения многочисленных оговорок в доказательстве основной классификационной теоремы введем ограничение n≥m, где m≥1 и n≥1 - целые числа, задающие локальную размерность множеств *M* и N. Это ограничение, очевидно, несущественно в силу равноправия множеств *M* и N в определении физических структур (см. §1). Распространение получаемых результатов на случай m≥n тривиально. Кроме того, для сокращения записи удобно ввести следующие обозначения: $(i\alpha)=f(i\alpha)$, $(i,\alpha\beta)=(f(i\alpha),f(i\beta))$, $(ij,\alpha)=(f(i\alpha), f(j\alpha))$, $(i,\alpha\beta...\tau)=(f(i\alpha),f(i\beta),...,f(i\tau))$ и т.д. В этих обозначениях точка $\boldsymbol{F}(<ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau>) \in R^{(m+1)(n+1)}$, сопоставляемая функцей $\boldsymbol{F}$ кортежу $<ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau> \in \boldsymbol{G_F}$ и имеющая координаты $(f(i\alpha), f(i\beta),...,f(\nu\tau))$, краткую запись имеет такую: $(ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau)$. При этом исходное функциональное уравнение (1) из §1 запишется в следующем виде:

$$\Phi[(ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau)] = 0 \ . \qquad (1)$$

Согласно аксиоме IV определения 1 из §1 grad$\Phi \neq 0$ в точках $(ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau)$ для некоторого плотного в $\boldsymbol{G_F}$ множества кортежей $<ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau>$. А это означает, что в точке $(ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau)$ отлична от нуля хотя бы одна из частных производных функции Φ, которая, напомним, определена в некоторой окресности $\mathcal{E} \ni (ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau)$ и достаточно гладкая в ней. Без ограничения общности можно предположить, что в данной точке отлична от нуля производная функции Φ по первому аргументу $(i\alpha)$. Но тогда по теореме о неявных функциях найдутся такие окрестности H и V точек $(i\alpha) \in R$ и $((jk...\nu, \beta\gamma...\tau),(i,\beta\gamma...\tau),(jk...\nu,\alpha)) \in R^{(m+1)(n+1)-1}$, что уравнение (1) может быть однозначно разрешено относительно $(i\alpha)$ в окрестности H × V $\subset \mathcal{E}$ исходной точки $(ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau) \in R^{(m+1)(n+1)}$:

$$(i\alpha)=\Gamma[(jk...\nu,\beta\gamma...\tau),(i,\beta\gamma...\tau),(jk...\nu,\alpha)] \ , \qquad (2)$$

причем функция Γ достаточно гладкая и определена в окрестности V. Ясно, что уравнение (2) выполняется не только для кортежа $<ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau>$, но и для некоторой его окрестности $U(<i...\tau>)$, в силу гладкости функции $\boldsymbol{F}$. Окрестности H и V выберем такие, чтобы производная $\Phi_{(i\alpha)}$ функции Φ по первому аргументу $(i\alpha)$ всюду в окрестности H × V была отлична от нуля и $\boldsymbol{F}(U(<i...\tau>)) \subset$ H × V.

<u>Лемма 1.</u> *Проекция множества* $\boldsymbol{F}(U(<i...\tau>))$ *на окрестность V* $\subset R^{(m+1)(n+1)-1}$ *содержит открытое в V подмножество.*

Матрица Якоби системы (m+1)(n+1)-1 функций $(jk...\nu,\beta\gamma...\tau),(i,\beta\gamma ... \tau),(jk...\nu,\alpha)$, входящих в правую часть уравнения (2), получается вычеркиванием в матрице (4) из §1 системы (m+1)(n+1) функций $(ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau)$ первой строки. В этой матрице имеется определитель порядка (m+1)(n+1)-1, по диагонали которого расположены Якобианы $\partial(f(i\beta),...,f(i\tau))/\partial(x^1(i),...,x^m(i))$, $\partial(f(j\alpha),...,f(\nu\alpha))/\partial(\xi^1(\alpha),...,\xi^n(\alpha))$, ... , $\partial(f(j\tau),...,f(\nu\tau))/\partial(\xi^1(\tau),...,\xi^n(\tau))$, не обращающиеся тождественно в нуль по условиям аксиомы III из §1. Произведение перечисленных Якобианов дает значение указанного определителя, которое тоже не обращается в нуль тождественно в окрестности $U(<i...\tau>)$. Следовательно, в этой окрестности найдется такой кортеж $<i_1...\tau_1>$, для которого ранг матрицы Якоби системы функций $(jk...\nu,\beta\gamma...\tau)$, $(i,\beta\gamma...\tau),(jk...\nu,\alpha)$, а также и полной матрицы (4) из §1, равен (m+1)(n+1)-1. Но тогда, поскольку функции f системы $(ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau)$ достаточно гладкие, для некоторой его окрестности $U_1(<i_1...\tau_1>) \subset U(<i...\tau>)$ проекция множества $\boldsymbol{F}(U_1(<i_1...\tau_1>))$ на V есть открытое в V подмножество. Лемма доказана.

Не усложняя обозначений, будем считать, что именно проекция множества $\boldsymbol{F}(U(<i...\tau>))$ на V является открытым в V подмножеством.

<u>Следствие.</u> *Функции системы* $(jk...\nu,\beta\gamma...\tau)$, $(i,\beta\gamma...\tau)$, $(jk ... ...\nu,\alpha)$, *входящие в правую часть уравнения (2), могут рассматриваться как независимые пременные функции* Γ.

Из данного следствия вытекает, что множество значений $\boldsymbol{F}(U(<ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau>))$ не только является подмножеством множества нулей функции Φ, но и совпадает с ним в окрестности H × V, являясь неособой поверхностью размерности (m+1)(n+1)-1, то есть гиперповерхностью $\boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{F}(U)$ в $R^{(m+1)(n+1)}$. Очевидно, что это локальное совпадение имеет место для полного и открытого в $\boldsymbol{G_F}$ множества кортежей, то есть $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{G_F})$ можно рассматривать как неособую гиперповерхность.

<u>Лемма 2.</u> *В окрестности* $U(<i...\tau>)$ *кортежа* $<i...\tau>$ *найдется такой кортеж* $<i_1...\tau_1>$ *и такая его окрестность* $U_1(<i_1...\tau_1>)$

$\subset$ *U(<i...τ>), что на проекции множества* ***F***$(U_1(<i_1...\tau_1>))$ *в* V *производная функции Γ, входящей в правую часть уравнения (2), по переменной* $(i\beta)$ *отлична от нуля*.

Предположим противное, то есть, что для всех кортежей из *U(<i...τ>)* и, следовательно, во всех точках открытой в V проекции множества ***F****(U(<i...τ>))* на V производная функции Γ по переменной $(i\beta)$ обращается в нуль. То есть на этом открытом множестве $\Gamma_{(i\beta)} \equiv 0$ и функция Γ не зависит от переменной $(i\beta)$:

$$(i\alpha) = \Gamma_1[(jk...\nu,\beta\gamma...\tau),(i,\gamma...\tau),(jk...\nu,\alpha)] \quad . \qquad (2')$$

Окрестность *U(<i...τ>)* содержит произведение $U(i)\times...\times U(\tau)$ некоторых окрестностей всех точек кортежа <i...τ>. По условию аксиомы III из §1 в окресткости $[U(\alpha)]^m \subset M^m$ найдется такой кортеж $<\alpha_1...\alpha_m>$ длины m, а в окрестности *U(i)* такая точка i_1, что в ней ранг отображения $f^m = f[\alpha_1...\alpha_m]$ множества *M* в R^m равен m. Но это невозможно, так как для некоторой окрестности $U_1(i_1) \subset U(i)$ согласно уравнению (2') m координат любой точки $(i',\alpha_1...\alpha_m) \in R^m$, где $i' \in U_1(i_1)$, зависят несущественным образом от m координат $x^1(i),...,x^m(i)$, поскольку эти координаты входят только в (m-1) функций $(i',\gamma...\tau)$. Установленное противоречие и доказывает лемму.

Не усложняя обозначений, будем считать, что производная функции Γ по переменной $(i\beta)$ отлична от нуля во всех точках открытой в V проекции множества ***F****(U(<i...τ>))* на V. Переходя к оставшимся переменным $(i,\gamma...\tau)$, содержащим точку i, а также к переменным $(jk..\nu,\alpha)$, содержащим точку α, последовательно для каждой из них доказываем леммы, аналогичнные лемме 2. Сначала для двух переменных $(i,\beta\gamma)$, затем для трех $(i,\beta\gamma\delta)$ и т. д. вплоть до всей совокупности m+n переменных $(i,\beta\gamma...\tau)$, $(jk..\nu,\alpha)$. В результате получаем, очевидно, доказательство следующей леммы:

<u>Лемма 3.</u> *В окрестности U(<i...τ>) кортежа <i...τ> найдется такой кортеж* $<i_1...\tau_1>$ *и такая его окрестность* $U_1(<i_1...\tau_1>) \subset$ *U(<i...τ>), что на проекции множества* ***F***$(U_1(<i_1...\tau_1>))$ *в* V *производная функции Γ, входящей в правую часть уравнения (2), по всем переменным* $(i,\beta\gamma...\tau),(jk..\nu,\alpha)$ *одновременно отличны от нуля*.

<u>Следствие.</u> *На множестве* ***F***$(U_1(<i_1...\tau_1>))$ *производные функции Φ из уравнения (1) по всем переменным* $(i\alpha)$, $(i,\beta\gamma...\tau),(jk..\nu,\alpha)$ *одновременно отличны от нуля*.

Производные функции Γ выражаются известным образом через производные функции Φ. Например, $\Gamma_{(i\beta)} = -\Phi_{(i\beta)}/\Phi_{(i\alpha)}$. Поскольку $\Phi_{(i\alpha)} \neq 0$, производные функции Φ и Γ одновременно либо отличны от нуля, либо равны нулю. Между множеством ***F***$(U_1(<i_1...\tau_1>))$ и его проекцией в V существует, очевидно, взаимно-однозначное соответствие. Поэтому во всех точках множества ***F***$(U_1(<i_1...\tau_1>))$ одновременно не обращаются в нуль производные функции Φ по переменным $(i,\beta\gamma...\tau)$, $(jk..\nu,\alpha)$. Учитывая также, что $\Phi_{(i\alpha)} \neq 0$ всюду в ***F***$(U_1(<i_1...\tau_1>))$, и приходим к доказательству следствия.

Не усложняя обозначений, будем считать, что производные функции Φ по всем переменным $(i\alpha),(i,\beta\gamma...\tau),(jk..\nu,\alpha)$ одновременно отличны от нуля во всех точках множества ***F****(U(<i...τ>))*.

<u>Лемма 4.</u> *В окрестности U(<i...τ>) кортежа <i...τ> найдется такой кортеж* $<i_1...\tau_1>$ *и такая его окрестность* $U_1(<i_1...\tau_1>)$ $\subset$ *U(<i...τ>), что производные функции Φ из уравнения (1) по всем ее переменным* $(ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau)$ *одновременно отличны от нуля*.

Согласно следствию леммы 3 в точке $(i...\tau)$ отлична от нуля, в частности, производная функции Φ по переменной $(i\beta)$. Но тогда по теореме о неявных функциях уравнение (1) может быть однозначно разрешено относительно $(i\beta)$ в некоторой окрестности $H' \times V' \subset \varepsilon$. Проведя рассуждения, аналогичные тем, которые были применены к уравнению (2), приходим к обобщению следствия леммы 3 на переменные $(ijk...\nu,\alpha\beta)$, $(i,\gamma...\tau)$. Затем можно разрешить уравнение (1) относительно $(i\gamma)$ и обобщить следствие леммы 3, добавив к прежним переменным еще и переменные $(ijk...\nu,\gamma)$. Перебирая последовательно все переменные $(i,\gamma...\tau)$, относительно которых уравнение (1) может быть однозначно разрешено, и каждый раз об- общая следствие леммы 3 на более широкую совокупность переменных, получаем полное доказательство леммы 4.

Опять, не вводя новых обозначений, будем считать, что все производные функции Φ отличны от нуля на множестве ***F****(U(<i...τ>))* для плотного в $\boldsymbol{G_F}$ множества кортежей <i...τ>. В результате приходим к следующей заключительной лемме:

Лемма 5. *Существует открытое и плотное в* $\boldsymbol{G_F}$ *множество таких кортежей* $<ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau>$ *длины* m+n+2*, что в соответствующей точке* $(ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau)$ *все первые частные производные функции* Φ *из уравнения* (1) *одновременно отличны от нуля.*

Запишем уравнения (1) для кортежей $<gik...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau>$ и $<gjk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau>$ из множества, о котором говорится в лемме 5, и разрешим их относительно переменной $(g\alpha)$:

$$(g\alpha) = \Gamma\,[(ik...\nu,\beta\gamma...\tau),(g,\beta\gamma...\tau),(ik...\nu,\alpha)]\ ,$$

$$(g\alpha) = \Gamma\,[(jk...\nu,\beta\gamma...\tau),(g,\beta\gamma...\tau),(jk...\nu,\alpha)]\ ,$$

откуда, приравнивая правые части, получаем соотношение

$$\mathcal{A}(ij)\Gamma\,[(ik...\nu,\beta\gamma...\tau),(g,\beta\gamma...\tau),(ik...\nu,\alpha)] = 0\ , \qquad (3)$$

где для сокращения записи был использован оператор альтернирования $\mathcal{A}$, введенный в конце §1. По условиям аксиомы III из §1 переменные $<g,\beta\gamma...\tau>$ независимы и по ним соотношение (3) является тождеством. Фиксируя эти переменные и вводя обозначение

$$\Omega[(ik...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau)] =$$

$$= \Gamma[(ik...\nu,\beta\gamma...\tau),(g,\beta\gamma...\tau),(ik...\nu,\alpha)]\big|_{(g,\beta\gamma...\tau)=const}\ ,$$

получаем уравнение

$$\mathcal{A}(ij)\Omega[(ik...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau)] = 0\ , \qquad (4)$$

которое, очевидно, можно считать выполняющимся для некоторого открытого и плотного в $\boldsymbol{G_F}$ множества кортежей $<ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau>$. Кроме того, из свойств функции Γ следует, что отличны от нуля все производные введенной функции Ω.

Запишем, далее, уравнения (1) для кортежей $<ijk...\nu,\ \rho\alpha\gamma...\tau>$ и $<ijk...\nu,\rho\beta\gamma...\tau>$ из множества леммы 5 и разрешим их относительно переменной $(i\rho)$:

$$(i\rho) = \Gamma[(jk...\nu,\alpha\gamma...\tau),(i,\alpha\gamma...\tau),(jk...\nu,\rho)]\ ,$$

$$(i\rho) = \Gamma[(jk...\nu,\beta\gamma...\tau),(i,\beta\gamma...\tau),(jk...\nu,\rho)]\ .$$

Приравнивая правые части, приходим к соотношению

$$\mathcal{A}(\alpha\beta)\Gamma[(jk...\nu,\alpha\gamma...\tau),(i,\alpha\gamma...\tau),(jk...\nu,\rho)] = 0\ ,$$

которое является тождеством по независимым согласно аксиоме III из §1 переменным $(jk...\nu,\rho)$. Если зафиксировать значения этих переменных и ввести обозначение

$$\Xi[(ijk...\nu,\ \alpha\gamma...\tau)] =$$

$$= \Gamma[(jk...\nu,\alpha\gamma...\tau),(i,\alpha\gamma...\tau),(jk...\nu,\rho)]\big|_{(jk...\nu,\rho)=const}\ ,$$

то получим уравнение

$$\mathcal{A}(\alpha\beta)\Xi[(ijk...\nu,\alpha\gamma...\tau)] = 0\ , \qquad (5)$$

свойства которого аналогичны свойствам уравнения (4). Функция Ξ, как и функция Ω, имеет отличные от нуля производные по всем входящим в нее переменным и, кроме того, отличны от нуля все производные левой части уравнения (5).

Два различных уравнения (4) и (5) задают одну и ту же гиперповерхность $\boldsymbol{N}$ в некоторой окрестности $\varepsilon \subset R^{(m+1)(n+1)}$ точки $(ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau)$, соответствующей кортежу $<ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau>$, множество которых открыто и плотно в $\boldsymbol{G_F}$. Это, естественно, налагает дополнительные ограничения на функции Ω и Ξ.

Разрешим уравнения (4) и (5) относительно $(i\alpha)$:

$$(i\alpha) = \chi\{\Omega[(jk,\ \alpha\beta\gamma)],(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)]\ , \qquad (6)$$

$$(i\alpha) = \chi_1\{\Xi[(ijk,\beta\gamma)],(ijk,\gamma),(jk,\alpha)]\ ,$$

откуда получаем функциональное уравнение для $\chi[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),\ (i,\beta\gamma)]$:

$$\chi\{\Omega[(jk,\alpha\beta\gamma)],(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)\} =$$

$$= \chi_1\{\Xi[(ijk,\beta\gamma)],(ijk,\gamma),(jk,\alpha)\}\ , \qquad (7)$$

так как по следствию леммы 1 все переменные, входящие в равенство (7), независимы и, кроме того, $\Omega_{(j\alpha)}\ [(jk,\alpha\beta\gamma)] \neq 0$.

Для сокращения записи внутри данного параграфа были опущены "неподвижные" точки кортежа $<ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau>$, следующие за k и γ. Ниже в итоговой формуле (12) они будут восстановлены. Производные левой и правой частей уравнения (7) по каждой из переменных отличны от нуля, откуда, в частности, следует, что не обращаются в нуль производные функций χ и χ_1 по первым аргументам Ω и Ξ.

Продифференцируем уравнение (7) по переменным $(i\beta)$, $(j\beta)$ и разделим правую и левую части второго результата дифференцирования на соответствующие части первого:

$$\frac{\chi_\lambda\{\Omega[(jk,\alpha\beta\gamma)],(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)\}\Omega_{(j\beta)}[(jk,\alpha\beta\gamma)]}{\chi_{(i\beta)}\{\Omega[(jk,\alpha\beta\gamma)],(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)\}} =$$

$$= \Xi_{(j\beta)}[(ijk,\beta\gamma)]\,/\,\Xi_{(i\beta)}[(ijk,\beta\gamma)]\ , \qquad (8)$$

где χ_λ - есть частная призводная функции χ по первому аргументу $\lambda = \Omega[(jk,\alpha\beta\gamma)]$. Равенство (8) имеет место для проекции на подпространство $R^{(m+1)(n+1)-1}$ точки $(ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau)$, соответсвующей кортежу $<ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau>$, множество которых открыто и плотно в $\boldsymbol{G_F}$. Поскольку все переменные, входящие в это равенство независимы, оно может рассматриваться как функционально-дифференциальное уравнение для $\chi[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),\ (i,\beta\gamma)]$. Заметим, что все производные в равенстве (8) отличны от нуля.

В уравнении (8) перейдем к переменной $\lambda = \Omega[(jk,\alpha\beta\gamma)]$, которая взаимно-однозначно связана с $(j\alpha) = \chi[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(j,\beta\gamma)]$, так как $\Omega_{(j\alpha)}[(jk,\ \alpha\beta\gamma)] \neq 0$:

$$\chi_\lambda[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)]\Omega_{(j\beta)}\{(k,\alpha\beta\gamma),(j,\beta\gamma),\chi[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(j,\beta\gamma)]\} =$$

$$= \chi_{(i\beta)}[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)]\{\Xi_{(j\beta)}[(ijk,\beta\gamma)]\,\big/\,\Xi_{(i\beta)}[(ijk,\beta\gamma)]\}.$$

Зафиксируем в последнем равенстве значения переменных $(j,\beta\gamma...\tau)$, от которых не зависит функция $\chi[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)]$:

$$\chi_\lambda[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)]A_1[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma)] +$$

$$+ \chi_{(i\beta)}[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)]B_1[(ik,\beta\gamma)] = 0\ .$$

Таким образом, по переменным λ и $(i\beta)$ для функции $\chi[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)]$ получено однородное дифференциальное уравнение в частных производных. Это уравнение не имеет особых точек, так как его коэффициенты A_1, B_1 отличны от нуля, и потому может быть решено методом характеристик:

$$\chi[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)] =$$

$$= \chi_2\{A[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma)] + B[(ik,\beta\gamma)],(k,\alpha\beta\gamma),(i,\gamma)\}\ . \qquad (9)$$

Здесь χ_2, A, B - достаточно гладкие функции, имеющие отличные от нуля производные по переменным $A+B,\lambda,(i\beta)$, так как $A_\lambda[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma)] = 1/A_1[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma)] \neq 0$, $B_{(i\beta)}[(ik,\beta\gamma)] = -1/B_1[(ik,\beta\gamma)] \neq 0$ и $\chi_\lambda[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)] \neq 0$.

Подставим решение (9) в уравнение (6):

$$(i\alpha) = \chi_2\{A[\Omega[(jk,\alpha\beta\gamma)],(k,\alpha\beta\gamma)] + B[(ik,\beta\gamma)],(k,\alpha\beta\gamma),(i,\gamma)\}$$

и разрешим результат подстановки относительно суммы A+B:

$$A\{\Omega[(jk,\alpha\beta\gamma)],(k,\alpha\beta\gamma)\} =$$

$$= (ik,\beta\gamma)] + \Theta_1[(ik,\alpha\gamma),(k,\beta)]\ . \qquad (10)$$

Запишем уравнение (10) для кортежей <$igk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau$>, <$jgk...\nu, \alpha\beta\gamma...\tau$>:

$$A\{\Omega[(gk,\alpha\beta\gamma)],(k,\alpha\beta\gamma)\} = - B[(ik,\beta\gamma)]+\Theta_1[(ik,\alpha\gamma),(k,\beta)] \ ,$$

$$A\{\Omega[(gk,\alpha\beta\gamma)],(k,\alpha\beta\gamma)\} = - B[(jk,\beta\gamma)]+\Theta_1[(jk,\alpha\gamma),(k,\beta)]$$

и приравняем правые части выписанных выражений, поскольку левые совпадают:

$$\hat{R}(ij)B[(ik,\beta\gamma)] = \hat{R}(ij)\Theta_1[(ik,\alpha\gamma),(k,\beta)] \ . \qquad (11)$$

Покажем, что производная функции $\Theta_1[(ik,\alpha\gamma),(k,\beta)]$ по первой переменой $(i\alpha)$ отлична от нуля. Для этого продифференцируем уравнение (11) по переменной $(i\beta)$, считая при этом $(i\alpha)$ функцией от $(i\beta)$, задаваемой уравнением (2):

$$B_{(i\beta)}[(ik,\beta\gamma)] = \Theta_{1(i\alpha)}[(ik,\alpha\gamma),(k,\beta)]\Gamma_{(i\beta)}[(jk,\beta\gamma),(i,\beta\gamma),(jk,\alpha)] \ .$$

Поскольку $B_{(i\beta)} \neq 0$, $\Gamma_{(i\beta)} \neq 0$, должно быть $\Theta_{1(i\alpha)} \neq 0$.

Записывая, далее результат (11) для кортежей <$ijk...\nu,\alpha\rho\gamma...\tau$> и <$ijk...\nu,\beta\rho\gamma...\tau$>, приходим к соотношению

$$\hat{R}(ij) \ \hat{R}(\alpha\beta)\Theta_1[(ik,\alpha\gamma),(k,\rho)] = 0 \ ,$$

которое является тождеством по независимым переменным $(k...\nu,\rho)$. Фиксируя значения этих переменных и вводя обозначение

$$\Theta[(ik,\alpha\gamma)] = \Theta_1[(ik,\alpha\gamma),(k,\rho)]\big|_{(k...\nu,\rho)=const} \ ,$$

получаем уравнение

$$\hat{R}(ij)\hat{R}(\alpha\beta)\Theta[(ikl...\nu,\alpha\gamma...\tau)] = 0 \ , \qquad (12)$$

где точка l следует за точкой k в полном исходном кортеже <$ijkl...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau$>.

Уравнение (12) является естественным следствием того обстоятельства, что одна и та же гиперповерхность ***N*** локально задается двумя различными уравнениями (4) и (5). Левая часть уравнения (12) имеет, очевидно, отличные от нуля производные по всем переменным $(ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau)$, причем само уравнение выполняется в некоторой окрестности кортежа <$ijk...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau$>, множество которых открыто и плотно в $\boldsymbol{G_F}$.

Запишем уравнение (12) для частного случая m=n=1, то есть для физической структуры ранка (2,2):

$$\Psi[(i\alpha)] - \Psi[(i\beta)] - \Psi[(j\alpha)] + \Psi[(j\beta)] = 0 \ , \qquad (13)$$

$\Psi \equiv \Theta$ – произвольная достаточно гладкая функция одной переменной с отличной от нуля производной, определенная и строго монотонная в некторых окрестностях проекции точки $(ij,\alpha\beta) \in R^4$ на одномерное пространство R.

Представим уравнение (13) в виде, разрешенном относительно переменной $(i\alpha)$ и запишем его для кортежа <$ij_0,\alpha\beta_0$> с фиксированными в нем точками $j_0 \in M$ и $\beta_0 \in N$:

$$(i\alpha) = \Psi^{-1}\{\Psi[(i\beta_0)] + \Psi[(j_0\alpha)] - \Psi[(j_0\beta_0)]\} \ .$$

Если ввести функции $\lambda(x^1(i)) = \Psi[(i\beta_0)] - \Psi[(j_0\beta_0)]/2$, $\sigma(\xi^1(\alpha)) = \Psi[(j_0\alpha)] - \Psi[(j_0\beta_0)]/2$, то для функции f получаем следующее локальное координатное представление:

$$(i\alpha) = f(i\alpha) = \Psi^{-1}[\lambda(x^1(i)) + \sigma(\xi^1(\alpha))] \ , \qquad (14)$$

причем, очевидно, $\lambda' \neq 0$ и $\sigma' \neq 0$. Рассмотрим монотонные функции λ, σ, Ψ как некоторые локальные диффеоморфизмы $\lambda:M \to M$, $\sigma:N \to N$, $\Psi:R \to R$. Тогда результаты (14) и (13) с точностью до эквивалентности, введенной в §1 определением 2, зададут соответственно канонические формы (5) и (6) основной классификационной теоремы (см. §1) для случая $m=n=1$, то есть для физической структуры ранга (2,2).

§3. Продолжение: n≥2

При последующих преобразованиях результата (12) из §2 будем предполагать, что n≥2, то есть что число точек $i,j,k,\ldots,\nu \in M$ в кортеже $<ijk\ldots\nu,\alpha\beta\gamma\ldots\tau>$, равное n+1, не меньше трех. Поскольку этот результат имеет место для открытого и плотного в $\boldsymbol{G_F}$ множества кортежей, запишем его для кортежа $<ikjl\ldots\nu, \alpha\beta\gamma\ldots\tau>$, в котором по отношению к исходному кортежу $<ijkl\ldots\nu, \alpha\beta\gamma\ldots\tau>$ переставлены точки j и k:

$$\hat{R}(ik)\,\hat{R}(\alpha\beta)\Theta[(ijl\ldots\nu,\alpha\gamma\ldots\tau)] = 0 \quad . \qquad (1)$$

Уравнение (1), так же как и уравнение (12) из §2, имеет отличные от нуля производные по всем переменным. Эти уравнения задают неявно $(i\alpha)$ как одну и ту же функцию остальных переменных, которые в соответствии со следствием леммы 1 из §2, независимы. Выразим по известным правилам из указанных неявных заданий производную функции $(i\alpha)$ по переменной $(j\alpha)$:

$$\frac{\partial(i\alpha)}{\partial(j\alpha)} = \frac{\Theta_{(j\alpha)}[(jkl\ldots\nu,\alpha\gamma\ldots\tau)]}{\Theta_{(i\alpha)}[(ikl\ldots\nu,\alpha\gamma\ldots\tau)]},$$

$$\frac{\partial(i\alpha)}{\partial(j\alpha)} = -\frac{\Theta_{(j\alpha)}[(ijl\ldots\nu,\alpha\gamma\ldots\tau)] - \Theta_{(j\alpha)}[(kjl\ldots\nu,\alpha\gamma\ldots\tau)]}{\Theta_{(i\alpha)}[(ijl\ldots\nu,\alpha\gamma\ldots\tau)]} \quad ,$$

откуда, приравнивая правые части, после некоторых простых и очевидных преобразований, получаем:

$$\frac{\Theta_{(i\alpha)}[(ijl,\alpha\gamma)]}{\Theta_{(i\alpha)}[(ikl,\alpha\gamma)]} + \frac{\Theta_{(j\alpha)}[(ijl,\alpha\gamma)]}{\Theta_{(j\alpha)}[(jkl,\alpha\gamma)]} = \frac{\Theta_{(j\alpha)}[(kjl,\alpha\gamma)]}{\Theta_{(j\alpha)}[(jkl,\alpha\gamma)]} \quad . \qquad (2)$$

В целях сокращения записи в равенстве (2) опущены все "неподвижные" точки, следующие в кортеже $<ijkl\ldots\nu,\alpha\beta\gamma\ldots\tau>$ за точками l и γ. В конечных результатах (37) и (40) данного параграфа опущенные точки будут восстановлены. Поскольку в равенстве (2) все переменные независимы и по ним оно выполняется тождественно, его можно рассматривать как функционально-дифференциальное уравнение для Θ. В полученном уравнении (2) нет особенностей, так как стоящая в знаменателях его правой и левой частей производная функции Θ по первому аргументу отлична от нуля. Фиксируя в нем значения независимых переменных $(k,\alpha\gamma\ldots\tau)$, приходим к неоднородному дифференциальному уравнению в частных производных для функции $\Theta[(ijl,\alpha\gamma)]$:

$$\Theta_{(i\alpha)}[(ijl,\alpha\gamma)]\mathrm{A}_1[(il,\alpha\gamma)] + \Theta_{(j\alpha)}[(ijl,\alpha\gamma)]\mathrm{A}_1[(jl,\alpha\gamma)] = \mathrm{B}_1[(jl,\alpha\gamma)] \;, \qquad (3)$$

причем коэффициенты $A_1[(il,\alpha\gamma)]$ и $A_1[(jl,\alpha\gamma)]$ по сути введеных обозначений отличны от нуля.

Решение уравнения (3) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного и частного решения неоднородного. Однородное уравнение решается методом характеристик. Если частное решение неоднородного взять не зависящим от переменных $(i,\alpha\gamma\ldots\tau)$, то общее решение уравнения (3) можно записать в следующем виде:

$$\Theta[(ijl,\alpha\gamma)] = B[(jl,\alpha\gamma)] +$$

$$+ P\{A[(il,\alpha\gamma)] - A[(jl,\alpha\gamma)], (l,\alpha\gamma), (ij,\gamma)\} \;, \qquad (4)$$

где функции P, A, B достаточно гладкие, причем P и A имеют отличные от нуля производные по их первым аргументам.

Подставим решение (4) дифференциального уравнения (3) в исходное функционально-дифференциальное уравнение (2):

$$\frac{P'\{A[(il,\alpha\gamma)] - A[(jl,\alpha\gamma)],(l,\alpha\gamma),(ij,\gamma)\}}{P'\{A[(il,\alpha\gamma)] - A[(kl,\alpha\gamma)],(l,\alpha\gamma),(ik,\gamma)\}} -$$

$$-\frac{P'\{A[(il,\alpha\gamma)] - A[(jl,\alpha\gamma)],(l,\alpha\gamma),(ij,\gamma)\}}{P'\{A[(jl,\alpha\gamma)] - A[(kl,\alpha\gamma)],(l,\alpha\gamma),(jk,\gamma)\}} =$$

$$= -\frac{P'\{A[(kl,\alpha\gamma)] - A[(jl,\alpha\gamma)],(l,\alpha\gamma),(kj,\gamma)\}}{P'\{A[(jl,\alpha\gamma)] - A[(kl,\alpha\gamma)],(l,\alpha\gamma),(jk,\gamma)\}} \;, \qquad (5)$$

где P' означает производную функции P по первому аргументу.

Зафиксируем в равенстве (5) значения переменных $(k,\alpha\gamma...\tau)$ и введем новые: x=A$[(il,\alpha\gamma)]$, y=A$[(jl,\alpha\gamma)]$, которые независимы, так как $A_{(i\alpha)}[(il,\alpha\gamma)] \neq 0$, $A_{(j\alpha)}[(jl,\alpha\gamma)] \neq 0$:

$$P'[x-y,(l,\alpha\gamma),(ij,\gamma)] = E[y,(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] \times$$
$$\times \{F[x,(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] - F[y,(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\}^{-1} . \qquad (6)$$

Свойства функций E и F выводятся из исходного равенства (5) согласно введенным при фиксировании в нем переменных $(k,\alpha\gamma...\tau)$ обозначениям. Эти функции гладкие, причем $E \neq 0$, $F \neq 0$ и, кроме того, не обращается в нуль разность $F[x,(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] - F[y,(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]$. Равенство (6) есть обычное функциональное уравнение относительно P', E, F, так как в производную P' переменные x и y входят в виде разности.

Продифференцируем уравнение (6) отдельно по переменным x и y. Левые части результатов дифференцирования будут отличаться только знаком. Сравнивая их правые части, после простых и очевидных преобразований получим:

$$\frac{E'[y,(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]}{E[y,(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]} = \frac{F'[x,(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] - F'[y,(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]}{F[x,(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] - F[y,(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]} , \qquad (7)$$

\`

где E', F' - производные функций E, F по входящим в них переменным x и y.

Переставим в равенстве (7) точки i, j, учитывая, что при этом должны также переставляться соответствующие переменные x= $A[(il,\alpha\gamma)]$, y=$A[(jl,\alpha\gamma)]$. Правая часть равенства (7) при такой перестановке не изменится. Сравнивая левые части, приходим к уравнению для функции E:

$$E'[x,(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] = C[(l,\alpha\gamma)]E[x,(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] . \qquad (8)$$

Уравнение же для функции F может быть легко получено из равенства (7) и уравнения (8):

$$F'[x,(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] = C_1[(l,\alpha\gamma)] + C[(l,\alpha\gamma)]F[x,(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] , \qquad (9)$$

где, очевидно, коэффициенты $C[(l,\alpha\gamma)]$ и $C_1[(l,\alpha\gamma)]$ являются гладкими функциями.

При интегрировании уравнений (8), (9) необходимо различать две возможности для значений коэффициента $C[(l,\alpha\gamma)]$: либо $C[(l,\alpha\gamma)] = 0$, либо $C[(l,\alpha\gamma)] \neq 0$. Поскольку он является гладкой функцией, локально обращение его в нуль можно считать тождественным: $C[(l,\alpha\gamma)] \equiv 0$, так как если $C[(l,\alpha\gamma)] \neq 0$, то всегда можно найти такую область изменения переменных $(l...v,\alpha\gamma...\tau)$, в которой всюду $C[(l,\alpha\gamma)] \neq 0$.

Предположим сначала, что для всех значений переменных $(l,\alpha\gamma)$ коэффициент $C[(l,\alpha\gamma)]$ отличен от нуля. В этом случае уравнения (8) и (9) имеют следующие решения:

$$\left.\begin{aligned} E[x,(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] &= K[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)\exp C[(l,\alpha\gamma)]]x, \\ F[x,(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] &= -C_1[(l,\alpha\gamma)]/C[(l,\alpha\gamma)] + \\ &+L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]\exp C[(l,\alpha\gamma)]x, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

где коэффициенты K и L являются гладкими функциями, причем $K \neq 0$, так как $E \neq 0$.

Если же коэффицент $C[(l,\alpha\gamma)]$ для всех значений переменных, входящих в него, обращается в нуль, то решения уравнений (8) и (9) будут такими:

$$\left.\begin{aligned} E[x,(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] &= K[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)], \\ F[x,(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] &= C_1[(l,\alpha\gamma)]x + L_1[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)], \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

где $K \neq 0$ и L_1 являются гладкими функциями.

Заметим, что решение (11) формально можно включить в решение (10), если положить в нем

$$L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] = L_1[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] + C_1[(l,\alpha\gamma)]/C[(l,\alpha\gamma)] \qquad (12)$$

и допустить возможность предельного перехода $C[(l,\alpha\gamma)] \to 0$.

Подставим общие решения (10) дифференциальных уравнений (8) и (9) в исходное функциональное уравнение (6):

$$P'[\text{x-y},(l,\alpha\gamma),(ij,\gamma)] = K[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] \times$$

$$\times \{L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]\exp C[(l,\alpha\gamma)](\text{x-y}) - L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\}^{-1} . \qquad (13)$$

В решении (13), напомним, $K \neq 0$ и не обращается в нуль выражение, стоящее в фигурных скобках его правой части. Легко проверить, что это решение превращает равенство (5) в тождество.

Проинтегрируем уравнение (13) по аргументу (x-y):

$$P[\text{x-y},(l,\alpha\gamma),(ij,\gamma)] = C_2[(l,\alpha\gamma),(ij,\gamma)] +$$

$$+ K[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] \times \{C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\}^{-1} \times$$

$$\times \ln\{L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] - L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\exp C[(l,\alpha\gamma)](\text{y-x})\} . \qquad (14)$$

В результате (14), естественно, сохраняется возможность предельного перехода $C[(l,\alpha\gamma)] \to 0$, но, кроме того, появляется еще возможность второго предельного перехода $C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] \to 0$, который, в силу обозначения (12), в общем случае не совпадает с первым предельным переходом.

Используя результат (14) можно выписать общее выражение для функции $\Theta[(ijl,\alpha\gamma)]$ в соотвествии с формулой (4):

$$\Theta[(ijl,\alpha\gamma)] = B[(jl,\alpha\gamma)] + C_2[(l,\alpha\gamma),(ij,\gamma)] +$$

$$+ K[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] \times \{C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\}^{-1} \times$$

$$\times \ln\{L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]-L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] \times$$

$$\times \exp C[(l,\alpha\gamma)][A[(jl,\alpha\gamma)]-A[(il,\alpha\gamma)]]\} . \qquad (15)$$

Выражение (15), естественно, имеет смысл и в том случае, когда произведение $C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]$, стоящее в знаменателе, обращается в нуль. Соответствующее этому случаю выражение для функции $\Theta[(ijl,\alpha\gamma)]$ получается из предыдущего, если в нем произвести допустимый предельный переход $C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] \to 0$, полагая предварительно $C_2[(l,\alpha\gamma),(ij,\gamma)] = C_3[(l,\alpha\gamma),(ij,\gamma)] - K[(l,\alpha\gamma)(j,\gamma)] \times \{C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\}^{-1}\ln\{L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] - L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\}$:

$$\Theta[(ijl,\alpha\gamma)] = B[(jl,\alpha\gamma)] + C_3[(l,\alpha\gamma),(ij,\gamma)] +$$

$$+ K[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] \times \{A[(il,\alpha\gamma)] - A[(jl,\alpha\gamma)]\}/\{L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] -$$

$$+ L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\} , \qquad (16)$$

причем разность $L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] - L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]$, входящая в знаменатель правой части, в нуль не обращается.

Подставим общее выражение (15) для функции Θ в уравнение (1):

$$\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)K[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] \times \{C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\}^{-1} \times$$

$$\times \ln\{L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] - L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] \times$$

$$\times \exp C[(l,\alpha\gamma)][A[(jl,\alpha\gamma)] - A[(il,\alpha\gamma)]]\} +$$

$$+ \hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)C_2[(l,\alpha\gamma),(ij,\gamma)] = 0 , \qquad (17)$$

после чего переставим в нем точки j и k:

$$\hat{R}(ij)\hat{R}(\alpha\beta)K[(l,\alpha\gamma),(k,\gamma)] \times \{C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(k,\gamma)]\}^{-1} \times$$

$$\times \ln\{L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] - L[(l,\alpha\gamma),(k,\gamma)] \times$$

$$\times \exp C[(l,\alpha\gamma)][A[(kl,\alpha\gamma)] -$$

$$- A[(il,\alpha\gamma)]\} + \hat{R}(ij)\hat{R}(\alpha\beta)C_2[(l,\alpha\gamma),(ik,\gamma)] = 0 \quad . \qquad (18)$$

Легко проверить, что левые части уравнения (17) и (18) имеют отличные от нуля производные по переменной $(i\alpha)$. Следовательно, они задают неявно $(i\alpha)$ как одну и ту же функцию всех оствльных переменных, в частности $(i\beta)$. Сравнивая производные $\partial(i\alpha)/\partial(i\beta)$, выраженные из неявных заданий (17) и (18), после простых преобразований получаем соотношение:

$$\hat{R}(jk)\hat{R}(\alpha\beta)\ln\{L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] - L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]\exp C[(l,\alpha\gamma)] \times$$

$$\times[A[(il,\alpha\gamma)]-A[(jl,\alpha\gamma)]\} - \hat{R}(jk)\hat{R}(\alpha\beta)\ln K[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]=0 \ , \quad (19)$$

в котором переставим точки i и j :

$$\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)\ln\{L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] - L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\exp C[(l,\alpha\gamma)] \times$$

$$\times [A[(jl,\alpha\gamma)]-A[(il,\alpha\gamma)]\} - \hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)\ln K[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]=0 \ . \quad (20)$$

Заметим, что выражения под логарифмами в уравнении (17) и соотношении (20) совпадают. Воспользуемся этим обстоятельством для преобразования уравнения (17) к следующему очевидному равенству:

$$\hat{R}(ik)K[(l,\beta\gamma),(j,\gamma)] \times \{C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\}^{-1}\times$$

$$\times \ln\{L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] - L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\exp C[(l,\alpha\gamma)][A[(jl,\alpha\gamma)] -$$

$$- A[(il,\alpha\gamma)]]\} + \hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)C_2[(l,\alpha\gamma),(ij,\gamma)] =$$

$$= \hat{R}(ik)K[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] \times \{C[(l,\beta\gamma)]L[(l,\beta\gamma),(j,\gamma)]\}^{-1}\times$$

$$\times \ln\{L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]-L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\exp C[(l,\alpha\gamma)][A[(jl,\alpha\gamma)] -$$

$$- A[(il,\alpha\gamma)]]\} - K[(l,\beta\gamma),(j,\gamma)] \times \{C[(l,\beta\gamma)]L[(l,\beta\gamma),(j,\gamma)]\}^{-1}\times$$

$$\times\{\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)\ln K[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]\} \quad . \qquad (21)$$

Равенство (21) есть тождество по всем входящим в него переменным, так как из полного их набора $(ijkl...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau)$ в него не вошли три переменные (ijk,β), а оставшиеся, очевидно, независимы (см. следствие леммы 1 из §2). Продифферинцируем это равенство по переменной $(i\alpha)$ и произведем в результате дифференцирования сокращение на все отличные от нуля множители:

$$\frac{C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma,(j,\gamma)]}{C[(l,\beta\gamma)]L[(l,\beta\gamma),(j,\gamma)]} = \frac{K[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]}{K[(l,\beta\gamma),(j,\gamma)]} \quad . \qquad (22)$$

Связь (22) коэффициентов CL и K выполняется не только для точки j, но и для точек i, k, так как в исходном равенстве (21) все три точки i, j, k можно свободно переставлять. Поскольку $K \neq 0$, из связи (22) следует, что произведение CL для точек α и β и любой из точек i, j, k обращаются или не обращаются в нуль одновременно. Аналогичное утверждение относительно любых двух произведений CL для точек i, j, или i, k, или j, k и одной из точек α, β из связи (22) не следует, поэтому ниже будут рассмотрены различные варианты значений этих произведений.

Предположим сначала, что только одно произведение CL из трех для точек i, j, k обращается в нуль, например, для точки j :

$$C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] \neq 0 \quad , \qquad (23)$$

$$C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] = 0 \quad , \qquad (24)$$

$$C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(k,\gamma)] \neq 0 \quad . \qquad (25)$$

Произведение CL, которое по выражению (12) равно CL_1+C_1, есть, очевидно, гладкая функция всех своих перемнных. Но тогда при локальном рассмотрении можно считатъ, что условие (24) выполняется тождественно в соответсвующей окрестности. Действительно, если в ней найдется такая точка, где $C[(l,\alpha\gamma)]\ L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] \neq 0$, то существует и такая ее окрестность, в которой всюду это произведение отлично от нуля. Поэтому будем считать, что условие (24) вы-полняется тождественно, в то время как всюду в локальной области изменения соответствующих переменных имеют место условия (23) и (25). В этом случае соотношение (20) может быть записано в следующем виде:

$$\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)\ln\{[L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] -$$

$$- L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]]/K[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]\} = 0$$

или, без знака логарифма ln и без операторов альтернирования $\hat{R}(ik)$ и $\hat{R}(\alpha\beta)$:

$$\frac{K[(l,\alpha\gamma),(k,\gamma)]}{K[(l,\beta\gamma),(k,\gamma)]}\cdot\frac{L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)-L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]]}{L[(l,\beta\gamma),(i,\gamma)-L[(l,\beta\gamma),(j,\gamma)]]}=$$

$$=\frac{K[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]}{K[(l,\beta\gamma),(i,\gamma)]}\cdot\frac{L[(l,\alpha\gamma),(k,\gamma)-L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]]}{L[(l,\beta\gamma),(k,\gamma)-L[(l,\beta\gamma),(j,\gamma)]]}. \qquad (26)$$

В полученном равенстве нет особенностей, так как разности, стоящие в числителе и знаменателе правой и левой частей, не обращаются в нуль. Кроме того, и $K \neq 0$.

Преобразуем правую часть равенства (26), используя связь (22) и условие (24):

$$\frac{C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]}{C[(l,\beta\gamma)]L[(l,\beta\gamma),(i,\gamma)]}\cdot\frac{L[(l,\alpha\gamma),(k,\gamma)]-L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]}{L[(l,\beta\gamma),(k,\gamma)]-L[(l,\beta\gamma),(j,\gamma)]}=$$

$$=\frac{L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]K[(l,\alpha\gamma),(k,\gamma)]}{L[(l,\beta\gamma),(i,\gamma)]K[(l,\beta\gamma),(k,\gamma)]},$$

после чего равенство (26) значительно упрощается:

$$\frac{L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]-L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]}{L[(l,\beta\gamma),(i,\gamma)]-L[(l,\beta\gamma),(j,\gamma)]}=\frac{L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]}{L[(l,\beta\gamma),(i,\gamma)]}. \qquad (27)$$

Поскольку разности, стоящие в числителе и знаменателе левой части равенства (27) есть отличные от нуля гладкие функции, а также, по условию (23), $L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] \neq 0$, $L[(l,\beta\gamma),(i,\gamma)] \neq 0$, это равенство еще более упростится:

$$L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] = L[(l,\beta\gamma),(j,\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]/L[(l,\beta\gamma),(i,\gamma)].$$

Но в таком случае коэффициенты $L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]$ и $L[(l,\beta\gamma),(j,\gamma)]$ либо одновременно обращаются в нуль, либо одновременно отличны от нуля. Рассмотрим эти две возможности в случае, задаваемом условиями (23), (24), (25):

$$1.\ L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] \neq 0.$$

Из условия (24) тогда следует, что $C[(l,\alpha\gamma)] = 0$ и, учитывая, что по выражению (12) $CL=CL_1+C_1$, имеем также и $C_1[(l,\alpha\gamma)] = 0$. Но при $C[(l,\alpha\gamma)] = 0$, все три произведения CL для точек i, j, k, стоящие в условиях (23), (24), (25), равны $C_1[(l,\alpha\gamma)]$ и потому одновременно обращаются в нуль, что противоречит этим исходным условиям.

$$2.\ L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] = 0. \qquad (28)$$

Если $C[(l,\alpha\gamma)] = 0$, то, как и в предыдущем случае, получаем также и $C_1[(l,\alpha\gamma)] = 0$, что приводит к нарушению условий (23), (25). Поэтому остается только одна возможность: $C[(l,\alpha\gamma)] \neq 0$, а из условий (23), (25) и гладкости произведения CL следует, что коэффициенты $L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)]$ и $L[(l,\alpha\gamma),(k,\gamma)]$ являются гладкими отличными от нуля функциями.

С учетом всех отмеченных моментов запишем уравнение (17), используя предельное выражение для функции $\Theta[(ijl,\alpha\gamma)]$, в котором надо положить $L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] = 0$:

$$\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)K[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] \times \{A[(il,\alpha\gamma)] - A[(jl,\alpha\gamma)]\} /$$

$$/\, L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] + \hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)C_3[(l,\alpha\gamma),(ij,\gamma)] = 0\,. \quad (29)$$

При тех же условиях, запишем соотношение (19):

$$\hat{R}(\alpha\beta)\ln\{ -L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] \,/\, \exp C[(l,\alpha\gamma)]A[(jl,\alpha\gamma)]\} -$$

$$-\hat{R}(\alpha\beta)\ln\{L[(l,\alpha\gamma),(k,\gamma)] \,/\, \exp C[(l,\alpha\gamma)]A[(il,\alpha\gamma)]\} -$$

$$-L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] \,/\, \exp C[(l,\alpha\gamma)]A[(kl,\alpha\gamma)]\} -$$

$$-\hat{R}(jk)\hat{R}(\alpha\beta)\ln K[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] = 0\,. \quad (30)$$

Условия (24) и (28) выполняются тождественно, поэтому они не налагают никаких дополнительных ограничений на изменение переменных $(ijkl...\nu,\alpha\beta\gamma...\tau)$, входящих в уравнения (29) и (30). С другой стороны, производные левых частей этих уравнений по переменной $(i\alpha)$, в чем легко убедиться, отличны от нуля. А это означает, что уравнения (29) и (30) задает неявно $(i\alpha)$ как одну и ту же функцию всех остальных переменных, в частности $(i\beta)$. Сравнивая выражения для производной $\partial(i\alpha)/\partial(i\beta)$, найденные из неявных заданий (29) и (30), получаем

$$\hat{R}(\alpha\beta)\ln\{L[(l,\alpha\gamma),(k,\gamma)] - L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] \times$$

$$\times \exp C[(l,\alpha\gamma)]A[(il,\alpha\gamma)] - A[(kl,\alpha\gamma)]\} +$$

$$+\hat{R}(\alpha\beta)\ln K[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] \,/$$

$$/\, C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] = 0\,. \quad (31)$$

В равенстве (31) нет зависимости от переменных $(j,\alpha\beta)$, поэтому по всем переменным, входящим в него, оно является тождеством. Продифференцируем тождество (31) по $(i\alpha)$, произведя затем сокращение на множители, отличные от нуля:

$$C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] = 0\,,$$

что противоречит предположенному условию (23).

Таким образом, обращение в нуль только одного произведения CL из трех, входящих в условия (23), (24), (25), невозможно. Поэтому остается предположить, что из трех этих произведений только одно отлично от нуля:

$$C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] = 0\,, \quad (32)$$

$$C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] = 0\,, \quad (33)$$

$$C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(k,\gamma)] \neq 0\,. \quad (34)$$

Если $C[(l,\alpha\gamma)] \neq 0$, то из условий (32), (33) следует, что $L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] = 0$, $L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] = 0$ и потому $L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] - L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] = 0$. Но выше было установлено из анализа предельного при условии (33) выражения (16) для функции $\Theta[(ijl,\alpha\gamma)]$, что эта разность не может обращаться в нуль. Если же $C[(l,\alpha\gamma)] = 0$, то по выражению (12) все три произведения CL раняются $C_1[(l,\alpha\gamma)]$ и потому обращаются или не обращаются в нуль одновременно, в противоречие с предполагаемыми условиями (32), (33), (34). А это означает, что и второй случай, когда из трех произведений CL только одно отлично от нуля, также невозможен.

Итак, ниже будем предполагать, что либо все три приозведения CL тождественно по своим переменным обращаются в нуль:

$$\left.\begin{aligned} C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] = 0\,, \\ C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] = 0\,, \\ C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(k,\gamma)] = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

либо все они в области изменения этих переменных всюду отличны от нуля:

$$\left.\begin{aligned} &C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)] \neq 0\,, \\ &C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(j,\gamma)] \neq 0\,, \\ &C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(k,\gamma)] \neq 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

так как другие предположения приводят к противоречиям.

Если имеют место условия (35), то в уравнение (1) необходимо подставить выражение (15) при $CL \to 0$:

$$\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)\frac{K[(l\ldots\nu,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(j,\gamma\delta\ldots\tau)]\{A[(il\ldots\nu,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]-A[(jl..\nu,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]\}}{L[(l\ldots\nu,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(i,\gamma\delta\ldots\tau)]-L[(l..\nu,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(j,\gamma\delta\ldots\tau)]}+$$

$$+\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)C_3[(l..\nu,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(ij,\gamma\delta\ldots\tau)]=0\,, \tag{37}$$

где точка δ следует за точкой γ в кортеже $<ijkl\ldots\nu,\alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau>$.

При выполнении же условий (36) производные левых частей соотношений (19) и (20) по переменной $(k\alpha)$ отличны от нуля. То есть, в действительности, соотношения (19) и (20) при условиях (36) являются уравнениями, задающими неявно $(k\alpha)$ как одну и ту же функцию остальных переменных, в частности $(k\beta)$. Сравнивая два выражения для производной $\partial(k\alpha)/\partial(k\beta)$, полученные из неявных заданий (19), (20), после некоторых простых и очевидных преобразований приходим к такому уравнению:

$$\hat{R}(ij)\hat{R}(\alpha\beta)\left\{\frac{\exp[-C[(l,\alpha\gamma)]A[(il,\alpha\gamma)]]}{C[(l,\alpha\gamma)]C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]}-\right.$$

$$\left.-\frac{\exp[-C[(l,\alpha\gamma)]A[(kl,\alpha\gamma)]]}{C[(l,\alpha\gamma)]C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(k,\gamma)]}\right\}=0\,. \tag{38}$$

Введем новое обозначение:

$$\Lambda[(il,\alpha\gamma)] = -\{C[(l,\alpha\gamma)]\tilde{C}_1[(l,\alpha\gamma)]\}^{-1} +$$

$$+\frac{\exp\{-C[(l,\alpha\gamma)]A[(il,\alpha\gamma)]\}}{C[(l,\alpha\gamma)]C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]}\,, \tag{39}$$

где отличная от нуля гладкая функция $\tilde{C}_1$ совпадает с C_1 при C=0 и такая, что $(\tilde{C}_1 - C_1)/C \to 0$ при $C \to 0$. Можно положить, например,

$$\tilde{C}_1(l,\alpha\gamma)] = C_1[(l,\alpha\gamma)] + a\{C[(l,\alpha\gamma)]\}^2\,,$$

где a = max$|C_1[(l,\alpha\gamma)]|$/min$\{C[(l,\alpha\gamma)]\}^2$ по той локальной области, где $C_1[(l,\alpha\gamma)] \neq 0$. Слагаемое $1/C\tilde{C}_1$ введено в выражение (39) с целью исключения особенностей и возможности предельного перехода $C[(l,\alpha\gamma)] \to 0$, при котором это выражение становится следующим:

$$\Lambda[(il,\alpha\gamma)] = -\frac{C_1[(l,\alpha\gamma)]A[(il,\alpha\gamma)] + L_1[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]}{C_1[(l,\alpha\gamma)]C_1[(l,\alpha\gamma)}\,.$$

Найдем производную функции $\Lambda[(il,\alpha\gamma)]$, задаваемой выражением (39) по переменной $(i\alpha)$:

$$\Lambda_{(i\alpha)}[(il,\alpha\gamma)] = -\frac{A_{(i\alpha)}[(il,\alpha\gamma)]\exp\{-C[(l,\alpha\gamma)]A[(il,\alpha\gamma)]\}}{C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]}\,,$$

которая, очевидно, в нуль не обращается.

Перепишем уравнение (38), воспользовавшись выражением (39):

$$\hat{R}(ij)\hat{R}(\alpha\beta)\ln\{[\Lambda[(il,\alpha\gamma)] - \Lambda[(kl,\alpha\gamma)]\} = 0\,,$$

или, после потенциирования, в форме определителя:

$$\begin{vmatrix} \Lambda[(il\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)] & \Lambda[(il\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)] & 1 \\ \Lambda[(jl\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)] & \Lambda[(jl\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)] & 1 \\ \Lambda[(kl\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)] & \Lambda[(kl\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \ , \qquad (40)$$

где так же, как и в уравнении (37), восстановлены все точки полного кортежа $<ijkl...v,\alpha\beta\gamma\delta...\tau>$, которые выше были опущены в промежуточных формулах настоящего параграфа в целях сокращения записи. Заметим, что любой минор второго порядка матрицы определителя уравнения (40), содержащий столбец из единиц, в нуль не обращается. Поэтому отлична от нуля, например, производная левой части уравнения (40) по переменной $(i\alpha)$. А это по лемме 5 из §2 означает, что все производные определителя (40) отличны от нуля одновременно на некотором открытом и плотном в $\boldsymbol{G_F}$ множестве кортежей.

Уравнение (37) для условий (35) и уравнение (40) для условий (36) являются следствием уравнений (1) и (12) из §2. Оказывается, однако, что уравнение (37) несовместимо с аксиомами теории физических структур. В четвертом параграфе это обстоятельство будет установлено для частного случая m=1, а в пятом - для более общего случая m≥2.

§4. Частный случай: n>m=1.

Уравнение (37) из §3 для n>m=1 записывается в следующем виде:

$$\hat{R}(\alpha\beta)K[(l\ldots v,\alpha)]\left\{\frac{A[(jl\ldots v,\alpha)]-A[(il\ldots v,\alpha)]}{L_2[(l\ldots v,\alpha)]-L_1[(l\ldots v,\alpha)]}-\right.$$

$$\left.-\frac{A[(jl\ldots v,\alpha)]-A[(kl\ldots v,\alpha)]}{L_2[(l\ldots v,\alpha)]-L_3[(l\ldots v,\alpha)]}\right\}+C_4[(l\ldots v,\alpha\beta)]=0\ , \quad (1)$$

где при переходе от уравнения (37) из §3 к уравнению (1) имеют место соответствия

$$L[(l\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]\to L_1[(l\ldots v,\alpha)]\ ,$$

$$L[(l\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]\to L_2[(l\ldots v,\alpha)]\ ,$$

$$L[(l\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(k,\gamma\ldots\tau)]\to L_3[(l\ldots v,\alpha)]\ ,$$

$$\hat{R}\,(ik)\,\hat{R}\,(\alpha\beta)C_3[(l\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(ij,\gamma\delta\ldots\tau)]\to C_4[(l\ldots v,\alpha\beta)]\ ,$$

причем не обращаются в нуль все взаимные разности L_1 - L_2, L_1 - L_3, L_2 - L_3 и, кроме того, K $\neq$ 0. Поскольку еще $A_{(i\alpha)}[(il\ldots v,\alpha)]\neq 0$, уравнение (1) может быть однозначно разрешено относительно переменной $(i\alpha)$.

Запишем уравнение (1) для кортежа $<ij_0k_0l_0\ldots v_0,\ \alpha\beta_0>$ с фиксированными в нем точками $j_0, k_0, l_0, \ldots, v_0\in M$ и $\beta_0\in$ N :

$$\hat{R}(\alpha\beta_0)K[(l_0\ldots v_0,\alpha)]\left\{\frac{A[(j_0l_0\ldots v_0,\alpha)]-A[(il_0\ldots v_0,\alpha)]}{L_2[(l_0\ldots v_0,\alpha)]-L_1[(l_0\ldots v_0,\alpha)]}-\right.$$

$$\left.-\frac{A[(j_0l_0\ldots v_0,\alpha)]-A[(k_0l_0\ldots v_0,\alpha)]}{L_2[(l_0\ldots v_0,\alpha)]-L_3[(l_0\ldots v_0,\alpha)]}\right\}+C_4[(l_0\ldots v_0,\alpha\beta_0)]=0\ , \quad (2)$$

Разрешая уравнение (2) относительно переменной $(i\alpha)$, после некоторых удобных обозначений получим следующее локальное координатное представление для функции f :

$$(i\alpha)=f(i\alpha)=\Gamma(\lambda(i),\sigma^1(\alpha),\ldots,\sigma^{n-1}(\alpha)))\ , \quad (3)$$

где $\lambda(i)=\lambda(x^1(i))$, $\sigma(\alpha)=\sigma(\xi^1(\alpha),\ldots,\xi^n(\alpha))$. В представление (3) n координат $\xi^1(\alpha),\ldots,\xi^n(\alpha)$ входят через n-1 функцию $\sigma^1(\alpha),\ldots,\sigma^{n-1}(\alpha)$, то есть несущественным образом, что, очевидно, приводит к противоречию с аксиомой III из §1.

Итак, уравнение (1),то есть уравнение (37) из §3 для случая n>m=1, несовместимо с аксиомами теории физических структур. Таким образом, из двух уравнений (37) и (40) из §3 остается только второе, которое для рассматриваемого случая n>m=1 запишется в следующем виде:

$$\begin{vmatrix}\Lambda[(ilf\ldots v,\alpha)] & \Lambda[(ilf\ldots v,\beta)] & 1\\ \Lambda[(jlf\ldots v,\alpha)] & \Lambda[(jlf\ldots v,\beta)] & 1\\ \Lambda[(klf\ldots v,\alpha)] & \Lambda[(klf\ldots v,\beta)] & 1\end{vmatrix}=0\ , \quad (4)$$

где точка f следует за точкой l в полном кортеже $<ijklf\ldots v,\alpha\beta>$.

Запишем уравнение (4) для n=2, то есть для физической структуры ранга (3,2):

$$\begin{vmatrix} \psi[(i\alpha)] & \psi[(i\beta)] & 1 \\ \psi[(j\alpha)] & \psi[(j\beta)] & 1 \\ \psi[(k\alpha)] & \psi[(k\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \ , \qquad (5)$$

где $\Psi \equiv \Lambda$ – гладкая функция одной переменной с отличной от нуля производной, причем в матрице определителя (5) все миноры второго порядка, содержащие столбец из единиц, не обращаются в нуль.

Уравнение (5) запишем для кортежа $<ij_0k_0,\alpha\beta_0>$ с фиксированными точками $j_0, k_0 \in M$, $\beta_0 \in N$ и разрешим его относительно переменной $(i\alpha)$:

$$(i\alpha) = \psi^{-1}\{\psi[(i\beta_0)][\psi[(j_0\alpha)]-\psi[(k_0\alpha)]]/[\psi[(j_0\beta_0)]-\psi[(k_0\beta_0)]] -$$

$$- [\psi[(j_0\alpha)]\psi[(k_0\beta_0)]-\psi[(k_0\alpha)]\psi[(j_0\beta_0)]]/[\psi[(j_0\beta_0)]-\psi[(k_0\beta_0)]]\} \ ,$$

где ψ^{-1} - функция, обратная к ψ, локальное существование которой гарантировано тем, что производная $\psi' \neq 0$. Если ввести удобные обозначения

$$\lambda^1[x^1(i)] = \psi[(i\beta_0)] \ ,$$

$$\sigma^1[\xi^1(\alpha),\xi^2(\alpha)] = \{\psi[(j_0\alpha)]-\psi[(k_0\alpha)]\}/\{\psi[(j_0\beta_0)]-\psi[(k_0\beta_0)]\} \ ,$$

$$\sigma^2[\xi^1(\alpha),\xi^2(\alpha)] = - \{\psi[(j_0\alpha)]\psi[(k_0\beta_0)] -$$

$$- \psi[(k_0\alpha)]\psi[(j_0\beta_0)]\}/\{\psi[(j_0\beta_0)]-\psi[(k_0\beta_0)]\} \ ,$$

то для функции $f(i\alpha)$ получается следующее локальное координатное представление:

$$(i\alpha) = f(i\alpha) = \psi^{-1}\{\lambda^1[x^1(i)]\sigma^1[\xi^1(\alpha),\xi^2(\alpha)] + \sigma^2[\xi^1(\alpha),\xi^2(\alpha)]\} \ , \quad (6)$$

в котором, как нетрудно проверить, отличен от нуля якобиан $\partial(\sigma^1,\sigma^2)/\partial(\xi^1,\xi^2)$ и, кроме того, не обращается в нуль производная $\partial\lambda^1/\partial x^1$.

Функция (6) задает на одномерном и двумерном многообразиях *M* и N физическую структуру ранка (3,2) с феноменологически инвариантной связью (5). Ясно, что результат (6),(5) с точностью до эквивалентности (см. определение 2 из §1) включен в результат (13), (14) из §1, как тот частный случай, когда n=m+1=2. Аналогичный результат для физической структуры ранга (2,3) легко воспроизводится по выражениям (6), (5), составляя частный случай результата (11), (12) основной классификационной теоремы из §1, когда m=n+1=2.

При последующих преобразованиях уравнения (4) будем предполагать, что n≥3, то есть, что число точек из множества *M* в кортеже $<ijklf\ldots v,\alpha\beta>$ не меньше четырех. Переставим в уравнении (4) точки k, l, записав его, тем самым, для кортежа $<ijlkf\ldots v,\alpha\beta>$:

$$\begin{vmatrix} \Lambda[(ikf\ldots v,\alpha)] & \Lambda[(ikf\ldots v,\beta)] & 1 \\ \Lambda[(jkf\ldots v,\alpha)] & \Lambda[(jkf\ldots v,\beta)] & 1 \\ \Lambda[(lkf\ldots v,\alpha)] & \Lambda[(lkf\ldots v,\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \ . \qquad (7)$$

Производная левых частей уравнений (4) и (7) по переменной $(i\alpha)$, очевидно, в нуль не обращается. Следовательно, эти уравнения задают неявно $(i\alpha)$ как одну и ту же функцию всех остальных переменных, в частности $(j\beta)$, по которой производная тоже отлична от нуля. Сравнивая два выражения для производной $\partial(i\alpha)/\partial(j\beta)$, найденные из неявных заданий (4) и (7), после простых преобразований получаем:

$$\frac{\Lambda_{(i\alpha)}[(ilf\dots v,\alpha)]}{\Lambda_{(i\alpha)}[(ikf\dots v,\alpha)]}\cdot\frac{\Lambda[(ikf\dots v,\alpha)]-\Lambda[(lkf\dots v,\alpha)]}{\Lambda[(ilf\dots v,\alpha)]-\Lambda[(klf\dots v,\alpha)]}=$$

$$=\frac{\Lambda_{(j\beta)}[(jlf\dots v,\beta)]}{\Lambda_{(j\beta)}[(jkf\dots v,\beta)]}\cdot\frac{\Lambda[(jkf\dots v,\beta)]-\Lambda[(lkf\dots v,\beta)]}{\Lambda[(jlf\dots v,\beta)]-\Lambda[(klf\dots v,\beta)]}\ . \qquad (8)$$

Равенство (8) по всем входящим в него переменным является тождеством, так как в нем нет переменных ($i\beta$) и ($j\alpha$). Поэтому оно представляет собой функционально-дифференциальное уравнение для Λ. Зафиксируем в правой части уравнения (8) переменные ($jklf\dots v,\beta$), входящие в нее:

$$\frac{\Lambda_{(i\alpha)}[(ilf..v,\alpha)]}{\Lambda_{(i\alpha)}[(ikf..v,\alpha)]}\cdot\frac{\Lambda[(ikf..v,\alpha)]-\Lambda[(lkf..v,\alpha)]}{\Lambda[(ilf..v,\alpha)]-\Lambda[(klf..v,\alpha)]}=a\ , \qquad (9)$$

где a - отличная от нуля постоянная. Если в новом уравнении (9) переставить точки k и l, то в левой его части числитель и знаменатель поменяются местами, правая же часть - постоянная a - не изменится. Отсюда легко получаем, что a^2=1, и потому для постоянной a возможны только два значения: a = +1 и a = -1.

В уравнении (9) зафиксируем значение переменной ($k\alpha$):

$$\Lambda_{(i\alpha)}[(ilf\dots v,\alpha)]\Big/\{\Lambda[(ilf\dots v,\alpha)]-\mathrm{B}[(lf\dots v,\alpha)]\}=$$

$$=a\Delta_{(i\alpha)}[(if\dots v,\alpha)]\Big/\{\Delta[(if\dots v,\alpha)]-[\Delta(lf\dots v,\alpha)]\}\ ,$$

откуда после элементарного интегрирования и потенциирования получаем выражение для функции Λ:

$$\Lambda[(ilf\dots v,\alpha)]=\mathrm{B}[(lf\dots v,\alpha)]+$$

$$+\ A[(lf\dots v,\alpha)]\{\Delta[(if\dots v,\alpha)]-[\Delta(lf\dots v,\alpha)]\}^{a}\ . \qquad (10)$$

В этом выражении, очевидно, $A[(lf\dots v,\alpha)]\neq 0$, $\Delta_{(i\alpha)}[(if\dots v,\alpha)]\neq 0$, $\Delta_{(l\alpha)}[(lf\dots v,\alpha)]\neq 0$ и, кроме того, отлична от нуля разность $\Delta[(if\dots v,\alpha)]-[\Delta(lf\dots v,\alpha)]$.

Подставим решение (10) в исходное уравнение (9):

$$\frac{\{\Delta[(if\dots v,\alpha)]-\Delta[(kf\dots v,\alpha)]\}^{a}-\{\Delta[(lf\dots v,\alpha)]-\Delta[(kf\dots v,\alpha)]\}^{a}}{\{\Delta[(if\dots v,\alpha)]-\Delta[(lf\dots v,\alpha)]\}^{a}-\{\Delta[(kf\dots v,\alpha)]-\Delta[(lf\dots v,\alpha)]\}^{a}}=$$

$$=\frac{\{\Delta[(if\dots v,\alpha)]-\Delta[(kf\dots v,\alpha)]\}^{a-1}}{\{\Delta[(if\dots v,\alpha)]-\Delta[(lf\dots v,\alpha)]\}^{a-1}}\ . \qquad (11)$$

Для постоянной a, как было отмечено выше, имеется всего два значения $a=\pm1$. Подставим первое из них: a = +1 в результат (11):

$$\Delta[(if\dots v,\alpha)]-[\Delta(lf\dots v,\alpha)]\}\Big/\{\Delta[(if\dots v,\alpha)]-[\Delta[(kf\dots v,\alpha)]\}=1,$$

то есть $\Delta[(kf\dots v,\alpha)]-\Delta[(lf\dots v,\alpha)]=0$, откуда получаем, например, $\Delta_{(l\alpha)}[(lf\dots v,\alpha)]=0$, что противоречит необращению в нуль производной по первому аргументу функции Δ, полученной из функции Λ фиксированием одной из переменных: $\Delta[(lf\dots v,\alpha)]=\Lambda[(lkf\dots v,\alpha)]|_{(k\alpha)=\mathrm{const}}$, и обладающей тем же свойством. Таким образом, значение a = +1 должно быть исключено. С другой стороны, легко проверить, что равенство (11) при подстановке значения a = -1 становится тождеством по функции Δ.

В итоге для функции Λ из формулы (10), в которой надо положить a = -1, получаем следующее окончательное выражение:

$$\Lambda[(ilf\dots v,\alpha)]=\mathrm{B}[(lf\dots v,\alpha)]+$$

$$+\ A[(lf\dots v,\alpha)]\{\Delta[(if\dots v,\alpha)]-[\Delta(lf\dots v,\alpha)]\}^{-1}\ . \qquad (12)$$

Подставим функцию (12) в уравнение (4), исключив при этом линейной комбинацией со столбцом из единиц аддитивное слагаемое B и вынося из первого и второго столбцов ненулевой множитель A:

$$\begin{vmatrix} \{\hat{R}(il)\Delta[(ifw..v,\alpha)]\}^{-1} & \{\hat{R}(il)\Delta[(ifw..v,\beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\hat{R}(jl)\Delta[(jfw..v,\alpha)]\}^{-1} & \{\hat{R}(jl)\Delta[(jfw..v,\beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\hat{R}(kl)\Delta[(kfw..v,\alpha)]\}^{-1} & \{\hat{R}(kl)\Delta[(kfw..v,\beta)]\}^{-1} & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (13)$$

где w - точка из M, следующая за точкой f в полном кортеже $<ijk\,lfw...v,\alpha\beta>$. Уравнение (13) является естественным следствием уравнений (4) и (7). Гладкая функция Δ имеет отличную от нуля производную по первому аргументу. Поскольку в определителе (13) не обращается в нуль разность, стоящая в фигурных скобках, а также миноры второго порядка, содержащие столбец из единиц, производные левой части уравнения (13) по каждой из переменных $(ijk,\alpha\beta)$, а следовательно, и по всем ос-тальным, отличны от нуля.

Запишем уравнение (13) для n=3, то есть для физической структуры ранга (4,2):

$$\begin{vmatrix} \{\psi[(i\alpha)-\psi[(l\alpha)]\}^{-1} & \{\psi[(i\beta)-\psi[(l\beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\psi[(j\alpha)-\psi[(l\alpha)]\}^{-1} & \{\psi[(j\beta)-\psi[(l\beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\psi[(k\alpha)-\psi[(l\alpha)]\}^{-1} & \{\psi[(k\beta)-\psi[(l\beta)]\}^{-1} & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (14)$$

где $\Psi \equiv \Delta$ - гладкая функция одной переменной с отличной от нуля производной. Определитель третьего порядка левой части уравнения (14) с помощью некоторых простых и очевидных преобразований может быть представлен в виде определителя четвертого порядка. В результате получим:

$$\begin{vmatrix} \psi[(i\alpha)] & \psi[(i\beta)] & \psi[(i\alpha)]\times\psi[(i\beta)] & 1 \\ \psi[(j\alpha)] & \psi[(j\beta)] & \psi[(j\alpha)]\times\psi[(j\beta)] & 1 \\ \psi[(k\alpha)] & \psi[(k\beta)] & \psi[(k\alpha)]\times\psi[(k\beta)] & 1 \\ \psi[(l\alpha)] & \psi[(l\beta)] & \psi[(l\alpha)]\times\psi[(l\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \;. \quad (15)$$

Уравнение (15) запишем для кортежа $<ij_0k_0l_0,\alpha\beta_0>$ с фиксированными точками $j_0, k_0, l_0 \in M$, $\beta_0 \in$ N и разрешим его относительно переменной $(i\alpha)$. После введения удобных и естественных обозначений функций λ^1 и σ^1, σ^2, σ^3 от координат x^1 и ξ^1, ξ^2, ξ^3, аналогично случаю n=2 с уравнением (4), получаем следующее локальное координатное представление функции $f(i\alpha)$= =$(i\alpha)$:

$$f(i\alpha) = \psi^{-1}\left\{\frac{\lambda^1[x^1(i)]\sigma^1[\xi^1(\alpha),\xi^2(\alpha),\xi^3(\alpha)] + \sigma^2[\xi^1(\alpha),\xi^2(\alpha),\xi^3(\alpha)]}{\lambda^1[x^1(i)] + \sigma^3[\xi^1(\alpha),\xi^2(\alpha),\xi^3(\alpha)]}\right\}, \quad (16)$$

в котором отличен от нуля якобиан $\partial(\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3)/\partial(\xi^1,\xi^2,\xi^3)$ и не обращается в нуль производная $\partial\lambda^1/\partial x^1$.

Функция (16) задает на одномерном и трехмерном многообразиях M и N физическую структуру ранга (4,2) с феноменологически инвариантной связью (15). Результат (16),(15) с точностью до эквивалентности совпадает с результатом (17),(18) из §1 для случая n=m+2=3. Аналогичный результат для физи-
еской структуры ранга (2,4) легко воспроизводится по выражениям (16),(15), совпадая в пределах эквивалентности с результатом (15), (16) из §1 для случая m=n+2=3.

Уравнение (15) впервые было найдено автором чисто интуитивно, однако попытка вывести его ранее предложенным координатным методом не была успешной из-за возникших технических трудностей, связанных с решением нелинейных дифференциальных уравнений.

При последующих преобразованиях результата (13) будем предполагать, что n≥4, то есть, что число точек из множества M в кортеже $<ijklfw...v,\alpha\beta>$ не меньше пяти. Переставим в уравнении (13) точки l и f, то есть запишем его для кортежа $<ijkflw...v,\alpha\beta>$:

$$\begin{vmatrix} \{\hat{R}(if)\Delta[(ilw\ldots v,\alpha)]\}^{-1} & \{R(if)\Delta[(ilw\ldots v,\beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\hat{R}(jf)\Delta[(jlw\ldots v,\alpha)]\}^{-1} & \{R(jf)\Delta[(jlw\ldots v,\beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\hat{R}(kf)\Delta[(klw\ldots v,\alpha)]\}^{-1} & \{R(kf)\Delta[(klw\ldots v,\beta)]\}^{-1} & 1 \end{vmatrix} = 0\ . \quad (17)$$

Производная левой части уравнения (17) по переменной $(i\alpha)$,как и для уравнения (13), очевидно, отлична от нуля. Но тогда оба эти уравнения задают неявно $(i\alpha)$ как одну и ту же функцию всех остальных переменных, в частности $(j\alpha)$,по которой производная тоже отлична от нуля. Сравнивая два выражения для производной $\partial(i\alpha)/\partial(j\alpha)$, найденные из неявных заданий (13) и (17), получаем:

$$\hat{R}(lf)\frac{\dfrac{\Delta_{(j\alpha)}[(jfw\ldots v,\alpha)]}{\{\hat{R}(jl)\Delta[(jfw\ldots v,\alpha)]\}^2}\cdot\begin{vmatrix}\{\hat{R}(il)\Delta[(ifw\ldots v,\beta)]\}^{-1} & 1\\ \{\hat{R}(kl)\Delta[(kfw\ldots v,\beta)]\}^{-1} & 1\end{vmatrix}}{\dfrac{\Delta_{(i\alpha)}[(ifw\ldots v,\alpha)]}{\{\hat{R}(il)\Delta[(ifw\ldots v,\alpha)]\}^2}\cdot\begin{vmatrix}\{\hat{R}(jl)\Delta[(jfw\ldots v,\beta)]\}^{-1} & 1\\ \{\hat{R}(kl)\Delta[(kfw\ldots v,\beta)]\}^{-1} & 1\end{vmatrix}} = 0\,. \quad (18)$$

Из уравнений (13) и (17) следует, что в результате (18) отношения определителей второго порядка со столбцом из единиц для точки β равно такому же их отношению для точки α. Раскрывая эти определители, приходим к соотношению

$$\hat{R}(lf)\{\Delta_{(j\alpha)}[(jfw\ldots v,\alpha)]\,/\,\Delta_{(i\alpha)}[(if\omega\ldots v,\alpha)]\}\times$$

$$\times\frac{\hat{R}(ik)\Delta[(ifw\ldots v,\alpha)]}{\hat{R}(jk)\Delta[(jfw\ldots v,\alpha)]}\cdot\frac{\hat{R}(il)\Delta[(ifw\ldots v,\alpha)]}{\hat{R}(jl)\Delta[(jfw\ldots v,\alpha)]} = 0\ . \quad (19)$$

Соотношение (19) выполняется тождественно по всем входящим в него переменным $<ijklfw\ldots v,\alpha>$, так как в нем нет их полного набора $<ijklfw\ldots v,\alpha\beta>$, и поэтому представляет собой функционально-дифференциальное уравнение для Δ. Зафиксируем в этом соотношении значение переменных (ijl,α), введя удобные обозначения:

$$A[(kw\ldots v,\alpha)]\frac{\Delta[(ilw\ldots v,\alpha)]-\Delta[(klw\ldots v,\alpha)]}{\Delta[(jlw\ldots v,\alpha)]-\Delta[(klw\ldots v,\alpha)]}\bigg|_{(ijl,\alpha)=const},$$

$$B[(fw\ldots v,\alpha)] = \frac{\Delta_{(j\alpha)}[(jfw\ldots v,\alpha)]}{\Delta_{(i\alpha)}[(ifw\ldots v,\alpha)]}\cdot\frac{\Delta[(ifw\ldots v,\alpha)]-\Delta[(lfw..v,\alpha)]}{\Delta[(jfw\ldots v,\alpha)]-\Delta[(lfw\ldots v,\alpha)]}\times$$

$$\times\frac{\Delta_{(i\alpha)}[(ilw\ldots v,\alpha)]}{\Delta_{(j\alpha)}[(jlw\ldots v,\alpha)]}\cdot\frac{\Delta[(jlw\ldots v,\alpha)]-\Delta[(flw\ldots v,\alpha)]}{\Delta[(ilw\ldots v,\alpha)]-\Delta[(flw\ldots v,\alpha)]}\bigg|_{(ijl,\alpha)=const},$$

$$B_1[(fw\ldots v,\alpha)] = -\,\Delta[(jfw\ldots v,\alpha)]\big|_{(j\alpha)\,=\,const},$$

$$B_2[(fw\ldots v,\alpha)] = B[(fw\ldots v,\alpha)]\{\Delta[(jfw\ldots v,\alpha)]\ -$$

$$-\,\Delta[(ifw\ldots v,\alpha)]\}_{(ij,\alpha)\,=\,const}\,.$$

Используя эти обозначения, из соотношения (19) для функции Δ получаем такое неявное задание:

$$\{\Delta[(kfw\ldots v,\alpha)] + B_1[(fw\ldots v,\alpha)]\}\times$$

$$\times\{A[(kw\ldots v,\alpha)] + B[(fw\ldots v,\alpha)]\} = B_2[(fw\ldots v,\alpha)]\,. \quad (20)$$

Согласно введенным обозначениям не обращаются в нуль функции A, B, B_2 и потому также A+B $\neq 0$. И, кроме того, как легко проверить, отлична от нуля производная функции A по первому аргументу, то есть, например, $A_{(k\alpha)}[(kw\ldots v,\alpha)] \neq 0$. С учетом вышесказанного из неявного задания (20) можно получить явное выражение для функции Δ:

$$\Delta[(kfw\ldots v,\alpha)] = -\,B_1[(fw\ldots v,\alpha)]\,+$$

$$+ B_2[(fw...v,\alpha)]/\{A[(kw...v,\alpha)] + B[(fw...v,\alpha)]\}\ , \qquad (21)$$

в котором вместо точки k можно подставить любую из точек $i,j,k,$ а вместо точки α точку β.

Перепишем уравнение (13), преобразуя определитель третьего порядка в определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} \Delta[(ifw...v,\alpha)] & \Delta[(ifw...v,\beta)] & \Delta[(ifw...v,\alpha)]\times\Delta[(ifw...v,\beta)] & 1 \\ \Delta[(jfw...v,\alpha)] & \Delta[(jfw...v,\beta)] & \Delta[(jfw...v,\alpha)]\times\Delta[(jfw...v,\beta)] & 1 \\ \Delta[(kfw...v,\alpha)] & \Delta[(kfw...v,\beta)] & \Delta[(kfw...v,\alpha)]\times\Delta[(kfw...v,\beta)] & 1 \\ \Delta[(lfw...v,\alpha)] & \Delta[(lfw...v,\beta)] & \Delta[(lfw...v,\alpha)]\times\Delta[(lfw...v,\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0$$

и затем подставим в него выражение (21) для функции Δ. После простых и очевидных преобразований, допустимых вследствие того, что $B_2 \neq 0$ и $A+B \neq 0$, получаем точно такой же определитель слева, в котором вместо функции Δ стоит функция A:

$$\begin{vmatrix} A[(iw...v,\alpha)] & A[(iw...v,\beta)] & A[(iw...v,\alpha)]\times A[(iw...v,\beta)] & 1 \\ A[(jw...v,\alpha)] & A[(jw...v,\beta)] & A[(jw...v,\alpha)]\times A[(jw...v,\beta)] & 1 \\ A[(kw...v,\alpha)] & A[(kw...v,\beta)] & A[(kw...v,\alpha)]\times A[(kw...v,\beta)] & 1 \\ A[(lw...v,\alpha)] & A[(lw...v,\beta)] & A[(lw...v,\alpha)]\times A[(lw...v,\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0\ .$$

Полученное соотношение, в действительности, является тождеством по всем входящим в него переменным $(ijklw...v,\alpha\beta)$, так как в нем отсутствуют переменные $(f,\alpha\beta)$. Напомним, что функция A имеет отличную от нуля производную по первому аргументу. Продифференцируем это соотношение последовательно по переменным $(i\alpha),(i\beta),(j\alpha),(k\beta)$:

$$A_{(i\alpha)}[(iw...v,\alpha)] \times A_{(i\beta)}[(iw...v,\beta)] \times$$

$$\times A_{(j\alpha)}[(jw...v,\alpha)] \times A_{(k\beta)}[(kw...v,\beta)] = 0\ ,$$

что противоречит установленному, в силу введенного обозначения, свойству функции A, согласно которому ее производная по первому аргументу в нуль не обращается. Выявленное противоречие означает, что физические структуры ранка (n+1,2) для n≥4, то есть ранга (5,2), (6,2) и т. д., не существуют.

Последнее утверждение не исчерпывает всех рангов, перечисленных в конце основной классификационной теоремы из §1, для которых физические структуры не существуют, а только для случая m>n+2=3 (и, по симметрии, для m>n+2=3). В последующих параграфах, где рассматриваются физические структуры ранга (n+1, m+1) для n≥m≥2, область их несуществования будет описана полностью, как она представлена заштрихованной частью диаграммы в конце первого параграфа.

§5. Общие преобразования: n≥m≥2

В третьем параграфе было показано, что уравнения (37) и (40) являются необходимым следствием уравнений (12) из §2 и (1) из §3. Таким образом, для n≥m≥*2* гиперповерхность N в окрестности $\varepsilon \subset R^{(m+1)(n+1)}$ задается либо уравнением (37) из §3, либо уравнением (40) из §3. Предположим для определенности, что в окрестности ε, содержащей точку $(ijkl...v,\ \alpha\beta\gamma\delta...\tau)$, имеет место уравнение (37) из §3. При перестановке точек β и γ в исходном кортеже $<ijkl...v,\alpha\beta\gamma\delta...\tau>$ и переходе, вообще говоря к другой точке $(ijkl...v,\ \alpha\gamma\beta\delta...\tau)$ и другой окрестности ε', в которой она содержится, это уравнение может сохранить свою форму, но может и изменить ее. То есть в окрестности ε' гиперповерхность N опять задается одним из уравнений (37) или (40) из §3.

Рассмотрим сначала случай, когда при перестановке точек β и γ уравнение (37) из §3 изменяет свою форму в разъясненном выше смысле и в окрестности ε' гиперповерхность N задается уравнением

$$\begin{vmatrix} \Lambda[(il\ldots v,\alpha\beta\delta\ldots\tau)] & \Lambda[(il\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)] & 1 \\ \Lambda[(jl\ldots v,\alpha\beta\delta\ldots\tau)] & \Lambda[(jl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)] & 1 \\ \Lambda[(kl\ldots v,\alpha\beta\delta\ldots\tau)] & \Lambda[(kl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \ , \qquad (1)$$

где δ - точка, следующая за точкой γ в исходном полном кортеже $<ijkl...v,\alpha\beta\gamma\delta...\tau>$.

Уравнение (1), также как и уравнение (37) из §3, имеет отличную от нуля производную по переменной $(i\alpha)$. Следовательно, оба эти уравнения задают неявно $(i\alpha)$ как одну и ту же функцию остальных переменных, в частности $(j\alpha)$, по которой производная тоже отлична от нуля. Найдем из неявных заданий (37) из §3 и (1) производную $\partial(i\alpha)/\partial(j\alpha)$ и сравним соответствующие выражения для нее:

$$\frac{A_{(j\alpha)}[(jl,\alpha\gamma\delta)]}{A_{(i\alpha)}[(il,\alpha\gamma\delta)]}\cdot\frac{L[(l,\alpha\gamma\delta),(i,\gamma\delta)]-L[(l,\alpha\gamma\delta),(k,\gamma\delta)]}{L[(l,\alpha\gamma\delta),(j,\gamma\delta)]-L[(l,\alpha\gamma\delta),(k,\gamma\delta)]}=$$

$$=\frac{\Lambda_{(j\alpha)}[(jl,\alpha\beta\delta)]}{\Lambda_{(i\alpha)}[(il,\alpha\beta\delta)]}\cdot\frac{\Lambda[(il,\gamma\beta\delta)]-\Lambda[(kl,\gamma\beta\delta)]}{\Lambda[(jl,\gamma\beta\delta)]-\Lambda[(kl,\gamma\beta\delta)]}\ , \qquad (2)$$

где, как обычно, в целях сокращения записи внутри данного параграфа в кортеже $<ijkl...v,\alpha\beta\gamma\delta...\tau>$ опущены точки из *M* и N, следующие после точек l и δ соответственно. В конечных результатах этого параграфа, переходящими в шестой, они, естественно, будут восстановлены.

Полученное равенство (2) инвариантно относительно перестановок трех точек i,j,k, так как в исходных уравнениях (37) из §3 и (1) эти точки можно свободно переставлять. В действительности, равенство (2) является тождеством по всем входящим в него переменным, вследствие отсутствия в нем зависимости от переменной $(k\alpha)$.

Продифференцируем тождество (2) по переменной $(k\beta)$. Учитывая, что отлична от нуля производная функции Λ по первому аргументу, а также не обращаются в нуль разности, стоящие в числителе и знаменателе правой части равенства (2), легко получаем: $\Lambda_{(k\beta)}[(kl,\gamma\beta\delta)]=0$, то есть функция $\Lambda[(kl,\gamma\beta\delta)]$ не зависит от переменной $(k\beta)$. Точно также, используя инвариантность равенства (2) относительно перестановок точек $i,j,\ k$, устанавливаем, что $\Lambda_{(i\beta)}[(il,\gamma\beta\delta)]=0$ и $\Lambda_{(j\beta)}[(jl,\gamma\beta\delta)]=0$.

Пусть $\gamma' \in U(\gamma)$. Запишем уравнение (1) для кортежа $<ijkl...v,\ \alpha\gamma'\beta\delta...\tau>$, в котором вместо точки γ стоит точка γ':

$$\begin{vmatrix} \Lambda[(il,\alpha\beta\delta)] & \Lambda[(il,\gamma'\beta\delta)] & 1 \\ \Lambda[(jl,\alpha\beta\delta)] & \Lambda[(jl,\gamma'\beta\delta)] & 1 \\ \Lambda[(kl,\alpha\beta\delta)] & \Lambda[(kl,\gamma'\beta\delta)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \ , \qquad (3)$$

причем производные $\Lambda_{(i\beta)}[(il,\gamma'\beta\delta)]$, $\Lambda_{(j\beta)}[(jl,\gamma'\beta\delta)]$ и $\Lambda_{(k\beta)}[(kl,\gamma'\beta\delta)]$ по-прежнему равны нулю, так как $\gamma' \in U(\gamma)$.

Из двух уравнений (1) и (3) как простое следствие получаем третье уравнение, в котором отсутствует точка α:

$$\begin{vmatrix} \Lambda[(il,\gamma\beta\delta)] & \Lambda[(il,\gamma'\beta\delta)] & 1 \\ \Lambda[(jl,\gamma\beta\delta)] & \Lambda[(jl,\gamma'\beta\delta)] & 1 \\ \Lambda[(kl,\gamma\beta\delta)] & \Lambda[(kl,\gamma'\beta\delta)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \ . \qquad (4)$$

Уравнение (4), в действительности, является тождеством из-за отсутствия зависимости от переменных (ijk,β), по которым производные функций Λ обращаются в нуль.

Тождество (4) продифференцируем по переменной ($i\gamma$). Поскольку в определителе его левой части отличны от нуля все миноры второго порядка, содержащие столбец из единиц, в результате получаем: $\Lambda_{(i\gamma)}[(il,\gamma\beta\delta)]=0$, что противоречит установленному в третьем параграфе при выводе уравнения (40) свойству этой функции, производная которой по первому аргументу в нуль не обращается. Полученное противоречие доказывает, что если и возможно задание гиперповерхности N в окрестности $\varepsilon \ni (ijkl...v,\ \alpha\beta\gamma\delta...\tau)$ уравнением (37) из §3, то при перестановке точек β и γ оно не может менять своей формы, то есть гиперповерхность N в соответствующей окрестности $\varepsilon' \ni (ijkl...v,\alpha\gamma\beta\delta...\tau)$ не может быть задана уравнением (1).

Перейдем к рассмотрению второго случая из двух возможных, когда при перестановке точек β и γ уравнение (37) из §3 сохраняет свою форму, то есть когда гиперповерхность N в окрестности $\varepsilon' \ni (ijkl...v,\alpha\gamma\beta\delta...\tau)$ задается уравнением:

$$\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\gamma)\frac{K[(l,\alpha\beta\delta),(j,\beta\delta)]\{A[(jl,\alpha\beta\delta)]-A[(il,\alpha\beta\delta)]\}}{L[(l,\alpha\beta\delta),(j,\beta\delta)]-L[(l,\alpha\beta\delta),(i,\beta\delta)]}+$$
$$+\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\gamma)C_3[(l,\alpha\beta\gamma),(ij,\beta\delta)]=0\ . \qquad (5)$$

Уравнение (5) и уравнение (37) из §3 имеют, очевидно, отличные от нуля производные по всем переменным и потому, например, задают неявно ($i\alpha$) как одну и ту же функцию переменной ($j\alpha$). Сравнивая два выражения для производной $\partial(i\alpha)/\partial(j\alpha)$, найденные из этих неявных заданий, получаем соотношение

$$\hat{R}(\gamma\beta)\frac{A_{(j\alpha)}[(jl,\alpha\gamma\delta)]}{A_{(i\alpha)}[(il,\alpha\gamma\delta)]}\cdot\frac{L[(l,\alpha\gamma\delta),(i,\gamma\delta)]-L[(l.\alpha\gamma\delta),(k,\gamma\delta)]}{L[(l,\alpha\gamma\delta),(j,\gamma\delta)]-L[(l.\alpha\gamma\delta),(k,\gamma\delta)]}=0\ , \qquad (6)$$

которое является тождеством по всем входящим в него переменным, так как среди них нет переменной ($k\alpha$). Заметим, что аналогичная ситуация была с равенством (2).

Продифференцируем тождество (6) по переменной ($k\alpha$), произведя затем сокращение на все множители, заведомо в нуль не обращающиеся: $L_{(k\gamma)}[(l,\alpha\gamma\delta),(k,\gamma\delta)]=0$, то есть функция $L[(l,\alpha\gamma\delta),(k,\gamma\delta)]$ от переменной ($k\gamma$) не зависит. Поскольку соотношение (6) инвариантно относительно перестановки точек i,j,k, аналогично устанавливаем, что функции $L[(l,\alpha\gamma\delta),(i,\gamma\delta)]$ и $L[(l,\alpha\gamma\delta),(j,\gamma\delta)]$ не зависят от переменных ($i\gamma$) и ($j\gamma$) соответственно.

Изучим теперь, как преобразуется уравнение (37) из §3 при перестановке точек β и δ. Переход к уравнению типа (40) из §3 невозможен, так как приводит к противоречию, аналогичному тому, которое было выявлено при сопоставлении уравнения (37) из §3 и (1): производная функции Λ по первому аргументу должна при этом обратиться в нуль, хотя, в действительности, она отлична от нуля. Если же уравнение (37) из §3 сохраняет свою форму при перестановке точек β и δ, то функция $L[(l,\alpha\gamma\delta),(i,\gamma\delta)]$, например, не должна зависеть также и от переменной ($i\delta$). Рассматривая поочередно перестановки в уравнении (37) из §3 точки β с каждой из точек $\gamma, \delta, ... , \tau$, следующих за ней в исходном полном кортеже $<ijkl...v,\alpha\beta\gamma\delta...\tau>$, необходимо получаем:

$$\left.\begin{aligned} L[(l,\alpha\gamma\delta),(i,\gamma\delta)] &= L_1[(l,\alpha\gamma\delta)]\ , \\ L[(l,\alpha\gamma\delta),(j,\gamma\delta)] &= L_2[(l,\alpha\gamma\delta)]\ , \\ L[(l,\alpha\gamma\delta),(k,\gamma\delta)] &= L_3[(l,\alpha\gamma\delta)]\ , \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

причем разности $L_1 - L_2$, $L_1 - L_3$, $L_2 - L_3$ являются отличными от нуля гладкими функциями.

Аналогичный результат получается и при детальном рассмотрении преобразований уравнения (37) из §3 при перестановки точки α с каждой из точек $\gamma,\delta,...,\tau$, следующих в кортеже $<ijkl...v,\alpha\beta\gamma\delta...\tau>$ за точками α и β. А это означает, что выражения (7) имеют место не только для точки α, но и для точки β.

Перепишем уравнение (37) из §3, подставляя в него выражения (7):

$$\hat{R}(\alpha\beta)K[(l,\alpha\gamma\delta),(j,\gamma\delta)]\left\{\frac{A[(jl,\alpha\gamma\delta)]-A[(il,\alpha\gamma\delta)]}{L_2[(l,\alpha\gamma\delta)]-L_1[(l,\alpha\gamma\delta)]}-\right.$$

$$\left.-\frac{A[(jl,\alpha\gamma\delta)]-A[(kl,\alpha\gamma\delta)]}{L_2[(l,\alpha\gamma\delta)]-L_3[(l,\alpha\gamma\delta)]}\right\}+\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)C_3[(l,\alpha\gamma\delta),(ij,\gamma\delta)]=0. \quad (8)$$

Заметим, что форма уравнения (8) для общего случая n≥m≥2 стала идентичной форме уравнения (1) из §4 для частного случая n>m=1, поэтому нижеследующие рассуждения в отношении уравнения (8) будут аналогичны. Поскольку К ≠ 0, $A_{(i\alpha)}[(il,\alpha\gamma\delta)] \neq 0$, уравнение (8) локально может быть однозначно разрешено относительно переменной $(i\alpha)$. Запишем это уравнение для кортежа $<ij_0k_0l_0...v_0, \alpha\beta_0\gamma_0\delta_0...\tau_0>$ с фиксированными в нем точками $j_0,k_0,l_0, ...,v_0 \in M$, $\beta_0,\gamma_0,\delta_0,...,\tau_0 \in N$ и разрешим его относительно переменной $(i\alpha)$. Вводя удобные обозначения, получаем следующее локальное координатное представление для функции f:

$$(i\alpha) = f(i\alpha) = \Gamma(\lambda^1(i), ... ,\lambda^m(i),\sigma^1(\alpha), ... ,\sigma^{n-1}(\alpha)) , \quad (9)$$

где $\lambda(i)=\lambda(x^1(i),...,x^m(i))$, $\sigma(\alpha)=\sigma(\xi^1(\alpha),...,\xi^n(\alpha))$. В представление (9), как и в представление (3) из §4 n координат $\xi^1(\alpha),...,\xi^n(\alpha)$ точки α входят только через n-1 функцию $\sigma^1(\alpha),...,\sigma^{n-1}(\alpha)$, то есть несущественным образом, что, очевидно, приводит к противоречию с аксиомой III из §1. Это противоречие доказывает, что невозможно также и сохранение формы уравнения (37) из §3 при перестановке точек β и γ, то есть, в действительности ни для одной окрестности $\varepsilon \ni (ijkl...v,\alpha\beta\gamma\delta...\tau)$ заданием гиперповерхности N не может быть уравнение (37) из §3.

Таким образом, в некоторой окрестности ε каждой точки $(ijkl...v,\alpha\beta\gamma\delta...\tau)$, соответствующей кортежу $<ijkl...v,\alpha\beta\gamma\delta...\tau>$ из открытого и плотного в $\boldsymbol{G_F}$ множества в рассматриваемом здесь общем случае n≥m≥2 гиперповерхность N может быть задана только уравнением (40) из §3. А это означает, в частности, что при перестановке точек β и γ уравнение (40) из §3, сохраняя свою форму, переходит в уравнение (1).

Уравнения (1) и (40) из §3 задают неявно, например $(i\alpha)$ как одну и ту же функцию остальных переменных, в частности $(j\alpha)$. Найдем из этих заданий по известным правилам два выражения для производной $\partial(i\alpha)/\partial(j\alpha)$ и сравним их:

$$\hat{R}(\beta\gamma)\frac{\Lambda_{(j\alpha)}[(jl,\alpha\gamma\delta)]}{\Lambda_{(i\alpha)}[(il,\alpha\gamma\delta)]}\cdot\frac{\Lambda[(il,\beta\gamma\delta)]-\Lambda[(kl,\beta\gamma\delta)]}{\Lambda[(jl,\beta\gamma\delta)]-\Lambda[(kl,\beta\gamma\delta)]}=0 \ . \quad (10)$$

Соотношение (10) из-за отсутствия переменной $(k\alpha)$ выполняется тождественно по всем входящим в него переменным и представляет собой функционально-дифференциальное уравнение для функции Λ. Зафиксируем в этом уравнении значение всех переменных, кроме $(il...v,\alpha\gamma\delta...\tau)$:

$$\Lambda_{(i\alpha)}[(il,\alpha\gamma\delta)] = A_{(i\alpha)}[(il,\alpha\delta)]A_1[(l,\alpha\gamma\delta)]B[(il,\gamma\delta)] , \quad (11)$$

причем ни один из сомножителей в правой части выражения (11) для производной $\Lambda_{(i\alpha)}[(il,\alpha\gamma\delta)]$ в нуль не обращается. Заметим, что из первого столбца определителя уравнения (40) из §3 всегда можно вынести общий множитель $A_1[(l,\alpha\gamma\delta)] \neq 0$, а из второго - множитель $A_1[(l,\beta\gamma\delta)] \neq 0$. Поэтому удобно предварительно переопределить функцию Λ с тем, чтобы заранее исключить этот ненулевой множитель. С учетом сделанного замечания, сохраняя прежние обозначения, после элементарного интегрирования выражения (11) для производной $\Lambda_{(i\alpha)}[(il,\alpha\gamma\delta)]$ получаем следующее выражение для самой функции $\Lambda[(il,\alpha\gamma\delta)]$:

$$\Lambda[(il,\alpha\gamma\delta)] = A[(il,\alpha\delta)]B[(il,\gamma\delta)] + C[(i,\gamma\delta),(l,\alpha\gamma\delta)]\ . \qquad (12)$$

Гладкие функции A, B, C выражения (12) можно найти, подставляя его в исходное функционально-дифференциальное уравнение (10):

$$\hat{R}(\beta\gamma)\frac{B[(jl,\gamma\delta)]}{B[(il,\gamma\delta)]}\cdot\frac{\Lambda[(il,\beta\gamma\delta)]-\Lambda[(kl,\beta\gamma\delta)]}{\Lambda[(jl,\beta\gamma\delta)]-\Lambda[(kl,\beta\gamma\delta)]}=0\ . \qquad (13)$$

В результате подстановки (13) зафиксируем значение переменных $(jk,\beta\gamma\delta...\tau)$:

$$\frac{\Lambda[(il,\beta\gamma\delta)]-C_1[(l,\beta\gamma\delta)]}{B[(il,\gamma\delta)]}=\frac{\Lambda[(il,\gamma\beta\delta)]-C_1[(l,\gamma\beta\delta)]}{a[(l.\beta\gamma\delta)]B[(il,\beta\delta)]}\ , \qquad (14)$$

где введение новых обозначений очевидно, причем $a[(l,\beta\gamma\delta)]\neq\neq 0$ (например, $C_1[(l,\beta\gamma\delta)]=\Lambda[(kl,\beta\gamma\delta)]|_{(k,\beta\gamma\delta...\tau)=const}$).

Равенство (14) раскроем полностью, подставляя в него выражение (12) для функции Λ; в котором, естествено, можно вместо точки α подставить точку β, переставить точки β и γ и т. д.:

$$A[(il,\beta\delta)]+\frac{C[(i,\gamma\delta),(l,\beta\gamma\delta)]-C_1[(l,\beta\gamma\delta)]}{B[(il,\gamma\delta)]}=$$

$$=\frac{A[(il,\gamma\delta)]}{a[(l,\beta\gamma\delta)]}+\frac{C[(i,\beta\delta),(l,\gamma\beta\delta)]-C_1[(l,\gamma\beta\delta)]}{a[(l,\beta\gamma\delta)]B[(il,\beta\delta)]}\ , \qquad (15)$$

Из равенства (15), фиксируя дополнительно значение переменной $(i\beta)$, получаем связь:

$$A[(il,\gamma\delta)]/a[(l,\beta\gamma\delta)]+E[(i,\delta),(l,\beta\gamma\delta)]=$$

$$=\{C[(i,\gamma\delta),(l,\beta\gamma\delta)]-C_1[(l,\beta\gamma\delta)]\}/B[(il,\gamma\delta)]\ . \qquad (16)$$

Воспользуемся связью (16) для некоторых преобразований выражения (12):

$$\Lambda[(il,\beta\gamma\delta)] = C_1[(l,\beta\gamma\delta)] + B[(il,\gamma\delta)]\times$$

$$\times\{E[(i,\delta),(l,\beta\gamma\delta)] + A[(il,\beta\delta)] + A[(il,\gamma\delta)]\big/a[(l,\beta\gamma\delta)]\}\ . \qquad (17)$$

Введем обозначение

$$F[(il,\beta\gamma\delta)] = E[(i,\delta),(l,\beta\gamma\delta)] +$$

$$+ A[(il,\beta\delta)] + A[(il,\gamma\delta)]\big/a[(l,\beta\gamma\delta)] \qquad (18)$$

для более короткой записи выражения (17):

$$\Lambda[(il,\beta\gamma\delta)] = C_1[(l,\beta\gamma\delta)] + B[(il,\gamma\delta)]F[(il,\beta\gamma\delta)]\ , \qquad (17')$$

что сделает менее громоздкими формулы последующего изложения.

Подставим выражение (17′) для функции Λ в уравнение (13):

$$\hat{R}(\beta\gamma)\frac{F[(il,\beta\gamma\delta)]/B[(kl,\gamma\delta)]-F[(kl,\beta\gamma\delta)]/B[(il,\gamma\delta)]}{F[(jl,\beta\gamma\delta)]/B[(kl,\gamma\delta)]-F[(kl,\beta\gamma\delta)]/B[(jl,\gamma\delta)]}=0\ . \qquad (19)$$

Разнесем слагаемые соотношения (19) в правую и левые стороны по оператору альтернирования $\hat{R}(\beta\gamma)$, продифференцируем его по переменной $(j\beta)$ и разделим его квадрат на результат дифференцирования, что, очевидно, вполне корректно:

$$\frac{F[(il,\gamma\beta\delta)] \,/\, B[(kl,\beta\delta)] - F[(kl,\gamma\beta\delta)] \,/\, B[(il,\beta\delta)]}{A_{(j\beta)}[(jl,\beta\delta)] \,/\, a[(l,\gamma\beta\delta)]B[(kl,\beta\delta) - F[(kl,\gamma\beta\delta)] \cdot \{1/\, B[(jl,\beta\delta)]\}_{(j\beta)}} =$$

$$= \frac{F[(il,\beta\gamma\delta)] \,/\, B[(kl,\gamma\delta)] - F[(kl,\beta\gamma\delta)] \,/\, B[(il,\gamma\delta)]}{A_{(j\beta)}[(jl,\beta\delta)] \,/\, B[(kl,\gamma\delta)]} \,. \qquad (20)$$

Равенство (20) продифференцируем по переменной $(i\beta)$:

$$\frac{A_{(i\beta)}[(il,\beta\delta)] / a[(l,\gamma\beta\delta)]B[(kl,\beta\delta)] - F[(kl,\gamma\beta\delta)] \cdot \{1/\, B[(il,\beta\delta)]\}_{(i\beta)}}{A_{(j\beta)}[(jl,\beta\delta)] / a[(l,\gamma\beta\delta)]B[(kl,\beta\delta)] - F[(kl,\gamma\beta\delta)] \cdot \{1/\, B[(jl,\beta\delta)]\}_{(j\beta)}} =$$

$$= A_{(i\beta)}[(il,\beta\delta)] \Big/ A_{(j\beta)}[(jl,\beta\delta)] \ ,$$

откуда легко получаем:

$$F[(kl,\gamma\beta\delta)]\{1 \Big/ B[(il,\beta\delta)]\}_{(i\beta)} \Big/ A_{(i\beta)}[(il,\beta\delta)] =$$

$$= F[(kl,\gamma\beta\delta)]\{1 \Big/ B[(jl,\beta\delta)]\}_{(j\beta)} \Big/ A_{(j\beta)}[(jl,\beta\delta)] \,. \qquad (21)$$

Равенство (21) продифференцируем по переменной $(k\gamma)$ и произведем сокращение на ненулевой множитель $A_{(k\gamma)}[(kl,\gamma\delta)]$:

$$\frac{\{1/\, B[(il,\beta\delta)]\}_{(i\beta)}}{A_{(i\beta)}[(il,\beta\delta)]} = \frac{\{1/\, B[(\,jl,\beta\delta)]\}_{(\,j\beta)}}{A_{(\,j\beta)}[(\,jl,\beta\delta)]} = b[(l,\beta\delta)] \ , \qquad (22)$$

откуда после интегрирования, например, по переменной $(i\beta)$ получаем связь между функциями A и B:

$$1 \Big/ B[(il,\beta\delta)] = b[(l,\beta\delta)]A[(il,\beta\delta)] + H[(i,\delta),[(l,\beta\delta)] \,. \qquad (23)$$

Связь (23) имеет место и в том случае, когда вместо точки i стоят точки j и k, а вместо точки β стоят точки α и γ, так как исходное соотношение (19) инвариантно относительно подстановок и перестановок этих точек. Поскольку гладкая функция B отлична от нуля, связь (23) не содержит никаких особенностей и слагаемое H, наряду с коэффициентом b, является гладкой функцией. Если при некоторых значениях своих переменных коэффициент b обращается в нуль, то слагаемое H в соответствующих своих переменных должно быть отлично от нуля, так как $1/B \neq 0$.

Равенство (20) продифференцируем по переменной $(i\gamma)$ и упростим:

$$\{1 \Big/ B[(kl,\beta\delta)]\} \cdot \{1 \Big/ B[(kl,\gamma\delta)]\} =$$

$$= \{1 \Big/ a[(l,\gamma\beta\delta)]B[(kl,\beta\delta)] - b[(l,\beta\delta)]F[(kl,\gamma\beta\delta)]\} \times$$

$$\times \{1 \Big/ a[(l,\beta\gamma\delta)]B[(kl,\gamma\delta)] - b[(l,\gamma\delta)]F[(kl,\beta\gamma\delta)]\} \,. \qquad (24)$$

Раскроем полностью результат (24), подставив в него обозначение (18), введеное для сокращения записи, и связь (23):

$$\{b[(l,\beta\delta)]A[(kl,\beta\delta)] + H[(k,\delta),(l,\beta\delta)]\} \times$$

$$\times \{b[(l,\gamma\delta)]A[(kl,\gamma\delta)] + H[(k,\delta),(l,\gamma\delta)]\} =$$

$$= \{b[(l,\beta\delta)][A[(kl,\gamma\delta)] + E[(k,\delta),(l,\gamma\beta\delta)] -$$

$$- H[(k,\delta),(l,\beta\delta)] \Big/ a[(l,\gamma\beta\delta)]\} \times \{b[(l,\gamma\delta)][A[(kl,\beta\delta)] +$$

$$+ E[(k,\delta),(l,\beta\gamma\delta)] - H[(k,\delta),(l,\gamma\delta)] \Big/ a[(l,\beta\gamma\delta)]\} \,. \qquad (25)$$

Если равенство (25) продифференцировать по переменной $(k\gamma)$, учитывая, что $A_{(k\gamma)}[(kl,\gamma\delta)] \neq 0$, то получим связь между функциями E и H:

$$b[(l,\beta\delta)]b[(l,\gamma\delta)]E[(k,\delta),(l,\beta\gamma\delta)] =$$

$$= b[(l,\beta\delta)]H[(k,\delta),(l,\gamma\delta)] \big/ a[(l,\beta\gamma\delta)] +$$

$$+ b[(l,\gamma\delta)]H[(k,\delta),(l,\beta\delta)] \; . \tag{26}$$

Заметим, что установленная связь допускает перестановку точек β и γ, что легко проверить, дифференцируя исходное равенство (25) по переменной $(k\beta)$.

Проанализируем связь (26) более подробно. Пусть, например, коэффициент $b[(l,\beta\delta)]$ при некоторых значениях переменных $(l..\nu,\beta\delta..\tau)$, входящих в него, обращается в нуль. Тогда по связи (25) имеем соотношение $b[(l,\gamma\delta)]H[(k,\delta),(l,\beta\delta)]=0$. Выше же было отмечено, что при $b[(l,\beta\delta)]=0$ функция $H[(k,\delta),(l,\beta\delta)]$ в нуль не обращается, и потому коэффициент $b[(l,\gamma\delta)]$ также должен быть равен нулю. Верно, очевидно, и обратное утверждение: при $b[(l,\gamma\delta)]=0$ коэффициент $b[(l,\beta\delta)]$ обращается в нуль.

Таким образом, коэффициенты $b[(l,\beta\delta)]$ и $b[(l,\gamma\delta)]$ либо одновременно равны нулю, либо одновременно отличны от нуля. Поскольку коэффициенты $b[(l,\beta\delta)]$ и $b[(l,\gamma\delta)]$ являются гладкими функциями своих переменных, можно считать, что либо во всей области определения они тождественно обращаются в нуль:

$$b[(l,\beta\delta)] = 0, \;\; b[(l,\gamma\delta)] = 0 \; , \tag{27}$$

либо всюду в этой области они одновременно отличны от нуля:

$$b[(l,\beta\delta)] \neq 0, \;\; b[(l,\gamma\delta)] \neq 0 \; . \tag{28}$$

Заметим, что с указанной оговоркой условия (27) и (28) никаких дополнительных ограничений и связей на переменные, входящие в коэффициенты $b[(l,\beta\delta)]$ и $b[(l,\gamma\delta)]$, не налагают.

Если в исходном равенстве (25) учесть первую связь (26) между функциями E и H, то легко устанавливаем вторую между теми же функциями:

$$H[(k,\delta),(l,\beta\delta)]H[(k,\delta),(l,\gamma\delta)] =$$

$$= \{b[(l,\beta\delta)]E[(k,\delta),(l,\gamma\beta\delta)] - H[(k,\delta),(l,\beta\delta)] \big/ a[(l,\gamma\beta\delta)]\} \times$$

$$\times \{b[(l,\gamma\delta)]E[(k,\delta),(l,\beta\gamma\delta)] - H[(k,\delta),(l,\gamma\delta)] \big/ a[(l,\beta\gamma\delta)]\} \; . \tag{29}$$

Третью связь между ними, необходимую для дальнейших рассуждений, можно получить из равенства (20). Предварительно заметим, что знаменатель правой части этого равенства не зависит от переменной $(k\beta)$, в чем легко убедиться, воспользовавшись введеным обозначением (18) и связью (23). Продифференцируем равенство (20) по переменной $(k\beta)$ с учетом только что сделанного замечания:

$$\frac{B[(kl,\gamma\delta)]}{B[(il,\gamma\delta)]} = \frac{1/a[(l,\gamma\beta\delta)]B[(il,\beta\delta)] - b[(l,\beta\delta)]F[(il,\gamma\beta\delta)]}{1/a[(l,\gamma\beta\delta)]B[(kl,\beta\delta)] - b[(l,\beta\delta)]F[(kl,\gamma\beta\delta)]}$$

и после подстановки обозначения (18) и связи (23):

$$\hat{R}(ik)\{b[(l,\gamma\delta)]A[(il,\gamma\delta)] + H[(i,\delta),(l,\gamma\delta)]\} \cdot \{b[(l,\beta\delta)] \times$$

$$\times [A[(kl,\gamma\delta)] + E[(k,\delta),(l,\gamma\beta\delta)]] -$$

$$- H[(k,\delta),(l,\beta\delta)] \big/ a[(l,\gamma\beta\delta)]\} = 0 \; . \tag{30}$$

Результат (30) можно значительно упростить, если воспользоваться первой связью (26):

$$\hat{R}(ik)H[(i,\delta),(l,\gamma\delta)] \cdot \{b[(l,\beta\delta)]E[(k,\delta),(l,\gamma\beta\delta)] -$$

$$- H[(k,\delta),(l,\beta\delta)] \big/ a[(l,\gamma\beta\delta)]\} = 0 \,. \qquad (31)$$

Полученная третья связь (31) между функциями E и H имеет место, разумеется, и при перестановке точек β и γ.

Запишем выражение для функции Λ, используя формулу (17) и связь (23) между A и B:

$$\Lambda[(il,\beta\gamma\delta)] = C_1[(l,\beta\gamma\delta)] +$$

$$+ \frac{A[(il,\beta\delta)] + A[(il,\gamma\delta)]\,/\,a[(l,\beta\gamma\delta)] + E[(i,\delta),(l,\beta\gamma\delta)]}{b[(l,\gamma\beta)]A[(il,\gamma\delta)] + H[(i,\delta),(l,\gamma\delta)]} \,, \qquad (32)$$

причем между функциями E и H имеют место три связи (26), (29) и (31).

Как было установлено выше, первая связь (26) приводит к выделению двух случаев значения коэффициентов $b[(l,\beta\delta)]$ и $b[(l,\gamma\delta)]$. Рассмотрим сначала первый из них, а именно случай (27), когда оба коэффициента в области изменения своих переменных тож-дественно обращаются в нуль. Исходная связь (26) превращается при этом в тривиальное тождество $0 \equiv 0$, а две другие связи (29) и (31) принимают более простой вид:

$$a[(l,\beta\gamma\delta)]\; a[(l,\gamma\beta\delta)] = 1 \,. \qquad (33)$$

$$\hat{R}(ik)H[(i,\delta),(l,\gamma\delta)]H[(k,\delta),(l,\beta\delta)] = 0 \,. \qquad (34)$$

Подставим условия (27) и связь (34) в равенство (20), учитывая так же и связь (23):

$$\hat{R}(ik)\{F[(il,\beta\gamma\delta)] -$$

$$- a[(l,\gamma\beta\delta)]F[(il,\gamma\beta\delta)]\}H[(k,\delta),(l,\beta\delta)] = 0 \,, \qquad (35)$$

после чего воспользуемся обозначением (18) и связью (33):

$$\hat{R}(ik)\{E[(i,\delta),(l,\beta\gamma\delta)] -$$

$$- a[(l,\gamma\beta\delta)]E[(i,\delta),(l,\gamma\beta\delta)]\}H[(k,\delta),(l,\beta\delta)] = 0 \,. \qquad (36)$$

Для функции H из связи (34), фиксируя в ней значение переменной $(k,\delta...\tau)$ и $(l...v,\gamma)$, получаем такое проедставление:

$$H[(i,\delta),(l,\beta\delta)] = H_1[(il,\delta)] \big/ H_2[(l,\beta\delta)] \,, \qquad (37)$$

причем, очевидно, $H_1 \neq 0$ и $H_2 \neq 0$. Фиксируя же в результате (36) только значения переменных $(k,\delta...\tau)$, устанавливаем свойства функции E по перестановке точек β и γ:

$$a[(l,\gamma\beta\delta)]E[(i,\delta),(l,\gamma\beta\delta)] =$$

$$= E[(i,\delta),(l,\beta\gamma\delta)] + c[(l,\gamma\beta\delta)]H_1[(il,\delta)] \,. \qquad (38)$$

В итоге для основной функции Λ в рассматриваемом случае (27) по формуле (32) и представлению (37) мы можем выписать следующее выражение:

$$\Lambda[(il,\beta\gamma\delta)] = C_1[(l,\beta\gamma\delta)] + \tilde{\Lambda}[(il,\beta\gamma\delta)] \big/ H_2[(l,\gamma\delta)] \,, \qquad (39)$$

где для сокращения записи введено новое обозначение:

$$\tilde{\Lambda}[(il,\beta\gamma\delta)] = \{A[(il,\beta\delta)] +$$

$$+ A[(il,\gamma\delta)] \big/ a[(l,\beta\gamma\delta)] + E[(i,\delta),(l,\beta\gamma\delta)]\} \big/ H_1[(il,\delta)] \,. \qquad (40)$$

Свойство функции Λ по перестановке точек β и γ получается из соответствующих свойств (33) и (38) коэффициента a и функции E:

$$\Lambda[(il,\gamma\beta\delta)] = C_1[(l,\gamma\beta\delta)] +$$

$$+\ a[(l,\beta\gamma\delta)]\{\tilde{\Lambda}[(il,\beta\gamma\delta)] + c[(l,\gamma\beta\delta)]\} \big/ H_2[(l,\beta\delta)]\ . \qquad (41)$$

Подставим выражения (39), (41) для функции Λ в уравнения (40) из §3 и (1), произведя некоторые простые и очевидные сокращения:

$$\begin{vmatrix} \tilde{\Lambda}[(il,\alpha\gamma\delta)] & \tilde{\Lambda}[(il,\beta\gamma\delta)] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[(jl,\alpha\gamma\delta)] & \tilde{\Lambda}[(jl,\beta\gamma\delta)] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[(kl,\alpha\gamma\delta)] & \tilde{\Lambda}[(kl,\beta\gamma\delta)] & 1 \end{vmatrix} = 0\ , \qquad (42)$$

$$\begin{vmatrix} \tilde{\Lambda}[(il,\alpha\beta\delta)] & \tilde{\Lambda}[(il,\beta\gamma\delta)] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[(jl,\alpha\beta\delta)] & \tilde{\Lambda}[(jl,\beta\gamma\delta)] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[(kl,\alpha\beta\delta)] & \tilde{\Lambda}[(kl,\beta\gamma\delta)] & 1 \end{vmatrix} = 0\ , \qquad (43)$$

Заметим, что полученные уравнения (42) и (43) обладают всеми свойствами исходных уравнений (40) из §3 и (1), так как при их выводе производились сокращения только на ненулевые множители, причем аддитивные слагаемые C_1 первых двух столбцов исчезали в линейной комбинации с третьим столбцом из единиц. Из выражения (40) заключаем, что в рассматриваемом случае (27) функция $\tilde{\Lambda}$ имеет отличные от нуля производные по первым двум аргументам, то есть, например, $\tilde{\Lambda}_{(i\beta)}[(il,\beta\gamma\delta)] \neq 0$ и $\tilde{\Lambda}_{(i\gamma)}[(il,\beta\gamma\delta)] \neq 0$.

В определителях уравнений (42) и (43) совпадают вторые и третьи столбцы. Вычтем левую часть одного уравнения из соответствующей части другого:

$$\begin{vmatrix} \tilde{\Lambda}[(il,\alpha\gamma\delta)] - \tilde{\Lambda}[(il,\alpha\beta\delta)] & \tilde{\Lambda}[(il,\beta\gamma\delta)] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[(jl,\alpha\gamma\delta)] - \tilde{\Lambda}[(jl,\alpha\beta\delta)] & \tilde{\Lambda}[(jl,\beta\gamma\delta)] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[(kl,\alpha\gamma\delta)] - \tilde{\Lambda}[(kl,\alpha\beta\delta)] & \tilde{\Lambda}[(kl,\beta\gamma\delta)] & 1 \end{vmatrix} = 0\ . \qquad (44)$$

Из выражения (40) для функции $\tilde{\Lambda}$ следует, что в первом столбце определителя результата (44) отсутствуют переменные (ijk,α), то есть этот результат является тождеством по каждой переменной, входящей в него.

Продифференцируем тождество (44) по переменным $(i\beta)$ и $(j\gamma)$, подставляя выражение (40) для функции $\tilde{\Lambda}$ и используя перестановочное свойство (33) коэффициента a:

$$a[(l,\gamma\beta\delta)] = -\ a[(l,\gamma\alpha\delta)] \big/ a[(l,\beta\alpha\delta)]\ ,$$

откуда, фиксируя значение переменных $(l\ldots v,\alpha)$, находим представление для коэффициента a:

$$a[(l,\gamma\beta\delta)] = -\ a_1[(l,\gamma\delta)] \big/ a_1[(l,\beta\delta)]\ . \qquad (45)$$

Тождество (44) продифференцируем теперь только по переменной $(i\beta)$, вынеся при этом из первой строки ненулевые множители:

$$\begin{vmatrix} -a[(l,\beta\alpha\delta)] & 1 & 0 \\ \tilde{\Lambda}[(jl,\alpha\gamma\delta)] - \tilde{\Lambda}[(jl,\alpha\beta\delta)] & \tilde{\Lambda}[(jl,\beta\gamma\delta)] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[(kl,\alpha\gamma\delta)] - \tilde{\Lambda}[(kl,\alpha\beta\delta)] & \tilde{\Lambda}[(kl,\beta\gamma\delta)] & 1 \end{vmatrix} = 0\ . \qquad (46)$$

Умножим второй столбец определителя тождества (46) на коэффициент $a[(l,\beta\alpha\delta)]$, прибавим его к первому и раскроем определитель:

$$\hat{R}(jk)\{\tilde{\Lambda}[(jl,\alpha\gamma\delta)] - \tilde{\Lambda}[(jl,\alpha\beta\delta)] +$$

$$+ a[(l,\beta\alpha\delta)]\tilde{\Lambda}[(jl,\beta\gamma\delta)]\} = 0 \ , \qquad (47)$$

после чего в результат (47) подставим обозначение (40) для функции $\tilde{\Lambda}$ и воспользуемся связью коэффициентов a:

$$1/a[(l,\alpha\gamma\delta)] = - a[(l,\beta\alpha\delta)]\Big/a[(l,\beta\gamma\delta)] \ ,$$

вытекающей, например, из представления (45):

$$\hat{R}(jk)\{E[(j,\delta),(l,\alpha\gamma\delta)] - E[(j,\delta),(l,\alpha\beta\delta)] +$$

$$+ a[(l,\beta\alpha\delta)]E[(j,\delta),(l,\beta\gamma\delta)]\}\Big/H_1[(jl,\delta)] = 0 \ . \qquad (48)$$

В полученном соотношении (48) зафиксируем значение переменных $(k,\delta...\tau)$ и $(l...v,\gamma)$, учтя при этом представление (45):

$$a_1[(l,\alpha\delta)]E[(j,\delta),(l,\alpha\beta\delta)]\Big/H_1[(jl,\delta)] =$$

$$= E_1[(j,\delta),(l,\alpha\delta)] - E_1[(j,\delta),[(l,\beta\delta)] + E_2[(l,\alpha\beta\delta)] \ . \qquad (49)$$

C помощью результата (49), имеющего место, очевидно, не только для точки j, выражение (40) для функции $\tilde{\Lambda}$ можно преобразовать к следующей форме:

$$\tilde{\Lambda}[(il,\beta\gamma\delta)] = \{a_1[(l,\beta\delta)]A[(il,\beta\delta)]\Big/H_1[(il,\delta)] -$$

$$- a_1[(l,\gamma\delta)]A[(il,\gamma\delta)]\Big/H_1[(il,\delta)] + E_1[(i,\delta),[(l,\beta\delta)] -$$

$$- E_1[(i,\delta),[(l,\gamma\delta)] + E_2[(l,\beta\gamma\delta)]\}\Big/a_1[(l,\beta\delta)] \ ,$$

откуда после естественного введения новой функции

$$\Pi[(il,\beta\delta)] = a_1[(l,\beta\delta)]A[(il,\beta\delta)]\Big/H_1[(il,\delta)] +$$

$$+ E_1[(i,\delta),(l,\beta\delta)] \ , \qquad (50)$$

получаем

$$\tilde{\Lambda}[(il,\beta\gamma\delta)] = \{\Pi[(il,\beta\delta)] - \Pi[(il,\gamma\delta)] +$$

$$+ E_2[(l,\beta\gamma\delta)]\}\Big/a_1[(l,\beta\delta)] \ . \qquad (51)$$

Заметим, что в соответствии с обозначением (50) производная функции Π по первому аргументу отлична от нуля.

Подставим последнее выражение (51) для функции $\tilde{\Lambda}$ в уравнение (42), произведем сокращение на ненулевой множитель $1/a_1$ в первом и второи столбцах определителя, исключим аддитивное слагаемое E_2 линейной комбинацией со столбцом из единиц и преобразум естественным образом определитель третьего порядка в определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \Pi[ilf...v,\alpha\delta...\tau] & \Pi[ilf...v,\beta\delta...\tau] & \Pi[ilf...v,\gamma\delta...\tau] \\ 1 & \Pi[jlf...v,\alpha\delta...\tau] & \Pi[jlf...v,\beta\delta...\tau] & \Pi[jlf...v,\gamma\delta...\tau] \\ 1 & \Pi[klf...v,\alpha\delta...\tau] & \Pi[klf...v,\beta\delta...\tau] & \Pi[klf...v,\gamma\delta...\tau] \end{vmatrix} = 0 \ , \qquad (52)$$

где точка f следует за точкой l в исходном полном кортеже $<ijklf...v,\alpha\beta\gamma\delta...\tau>$.

В определителе уравнения (42) были отличны от нуля все миноры второго порядка, содержащие столбец из единиц. Соответственно в определителе уравнения (52) будут отличны от нуля все миноры третьего порядка, окаймленные столбцом из единиц слева и строкой из единиц сверху с нулем на их пересечении. Поскольку, в частности, $\Pi_{(i\alpha)}[(il,\alpha\delta)] \neq 0$, производная левой части уравнения (52) по переменной $(i\alpha)$ тоже отлична от нуля, и потому это уравнение может быть локально однозначно разрешенно относительно переменной $(i\alpha)$, то есть записано в виде уравнения (2) из §2. Рассуждая аналогично, легко показать, что для некоторого открытого и плотного в $\boldsymbol{G_F}$ множества кортежей уравнение (52) локально однозначно разрешимо относительно любой из переменных $(ijklf...v,\alpha\beta\gamma\delta...\tau)$.

Перейдем теперь к рассмотрению второго из двух возможных и более простого случая (28), когда оба коэффициента $b[(l,\beta\delta)]$ и $b[(l,\gamma\delta)]$ в области изменения своих переменных одновременно отличны от нуля.

Для случая (28) первую связь (26) перепишем в несколько иной форме:

$$E[(k,\delta),(l,\beta\gamma\delta)] = H(k,\delta),(l,\beta\delta)]\}/b[(l,\beta\delta)] +$$

$$+ H(k,\delta),(l,\gamma\delta)]\}/a[(l,\beta\gamma\delta)]b[(l,\gamma\delta)] \ , \qquad (53)$$

причем оказывается, и в этом нетрудно убедиться, что две другие связи (29) и (31) являются только следствиями связи (53).

Используя связь (53) и вводя новое естественное обозначение:

$$T[(il,\beta\delta)] = A[(il,\beta\delta)] + H(i,\delta),(l,\beta\delta)]\}/b[(l,\beta\delta)] \ ,$$

выражение (32) для функции Λ можно записать в следующем виде:

$$\Lambda[(il,\beta\gamma\delta)] = C_1[(l,\beta\gamma\delta)] +$$

$$+ \frac{T[(il,\beta\delta)] + T[(il,\gamma\delta)]/a[(l,\beta\gamma\delta)]}{b[(l,\gamma\delta)]T[(il,\gamma\delta)]} \ . \qquad (54)$$

Заметим, что согласно введенному обозначению производная функции T по первому аргументу отлична от нуля и, кроме того, $T \neq 0$.

Подставим функцию (54) в уравнение (40) из §3, произведя при этом некотрые простые и очевидные преобразования:

$$\begin{vmatrix} T[(ilf...v,\alpha\delta...\tau)] & T[(ilf...v,\beta\delta...\tau)] & T[(ilf...v,\gamma\delta...\tau)] \\ T[(jlf...v,\alpha\delta...\tau)] & T[(jlf...v,\beta\delta...\tau)] & T[(jlf...v,\gamma\delta...\tau)] \\ T[(klf...v,\alpha\delta...\tau)] & T[(klf...v,\beta\delta...\tau)] & T[(klf...v,\gamma\delta...\tau)] \end{vmatrix} = 0 \ , \quad (55)$$

где, как и в уравнении (52), восстановлены те "неподвижные" точки, которые, начиная с равенства (2), были опущены в данном параграфе в целях сокращения записи. В определителе уравнения (40) из §3 отличны от нуля все миноры второго порядка, содержащие столбец из единиц. Соответственно и в определителе уравнения (55) все миноры второго порядка отличны от нуля. Поскольку еще $T \neq 0$, можно утверждать, что в определителе уравнения (55) миноры всех порядков, кроме третьего, не обращаются в нуль.

Уравнение (52) при условии (27) и уравнение (55) при условии (28) являются естественным следствием уравнений (40) из §3 и (1). Если m=n=2, то коэффициент b превращается в константу и потому локально девятимерная гиперповерхность N может быть задана либо уравнением (52), когда b=0, либо уравнением (55), когда $b\neq 0$.

Запишем уравнение (55) для m=n=2:

$$\begin{vmatrix} \psi[(i\alpha)] & \psi[(i\beta)] & \psi[(i\gamma)] \\ \psi[(j\alpha)] & \psi[(j\beta)] & \psi[(j\gamma)] \\ \psi[(k\alpha)] & \psi[(k\beta)] & \psi[(k\gamma)] \end{vmatrix} = 0 \ , \qquad (56)$$

где $\Psi \equiv T$ - произвольная достаточно гладкая функция одной переменной с отличной от нуля производной. Запишем, далее, уравнение (56) для кортежа $<ij_0k_0,\alpha\beta_0\gamma_0>$ с фиксированными в нем точками $j_0,k_0 \in M$ и $\beta_0,\gamma_0 \in$ N. Вводя удобным и очевидным образом функции λ^1, λ^2 и σ^1, σ^2 локальных координат x^1, x^2 и ξ^1, ξ^2 точек множеств M и N, получаем следующее локальное координатное представление функции f :

$$(i\alpha) = f(i\alpha) = \Psi^{-1}[\lambda^1(i)\sigma^1(\alpha) + \lambda^2(i)\sigma^2(\alpha)] \ , \qquad (57)$$

где $\lambda(i)=\lambda[x^1(i),x^2(i)]$ и $\sigma(\alpha)=\sigma[\xi^1(\alpha),\xi^2(\alpha)]$, причем $\partial(\lambda^1,\lambda^2)/\partial(x^1,x^2) \neq 0$ и $\partial(\sigma^1,\sigma^2)/\partial(\xi^1,\xi^2) \neq 0$.

Функция (57) задает на двумерных многообразих M и N физическую структуру ранга (3,3) с феноменологически инвариантной связью (56). Результат (57), (56), естественно, с точностью до эквивалентности содержится в общем результате (7), (8) основной классификационной теоремы из §1 как частный случай при n=m=2.

Запишем, далее, уравнение (52) для n=m=2:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \psi[(i\alpha)] & \psi[(i\beta)] & \psi[(i\gamma)] \\ 1 & \psi[(j\alpha)] & \psi[(j\beta)] & \psi[(j\gamma)] \\ 1 & \psi[(k\alpha)] & \psi[(k\beta)] & \psi[(k\gamma)] \end{vmatrix} = 0 \ , \qquad (58)$$

где $\Psi \equiv \Pi$ - произвольная достаточно гладкая функция одной переменной с отличной от нуля производной. Из уравнения (58), используя фиксированные эталонные точки $j_0,k_0, \in M$ и $\beta_0,\gamma_0 \in$ N, аналогично получаем локальное координатное пред ставление для функции f:

$$(i\alpha) = f(i\alpha) = \Psi^{-1}[\lambda^1(i)\sigma^1(\alpha) + \lambda^2(i) + \sigma^2(\alpha)] \ , \qquad (59)$$

в котором, по сравнению с представлением (57), произошло расщепление произведения функций $\lambda^2(i)$ и $\sigma^2(\alpha)$.

Функция (59), как и функция (57), задает на двумерных многообразиях M и N физическую структуру ранка (3,3) с феноменологически инвариантной связью (58). Результат (59), (58) с точностью до эквивалентности содержится в общем результате (9), (10) основной классификационной теоремы из §1 как частный случай при m=n=2.

Заметим в заключение, что функции (57) и (59), задающие на двумерных многообразиях M и N физические структуры симметричного ранга (3,3), между собой не эквивалентны. То есть существуют две различные физические структуры ранга (3,3), которые не могут быть сведены преобразованием эквивалентности к единой канонической форме. Аналогичная ситуация имеет место для всех физических структур более высокого симметричного ранга: (4,4), (5,5) и т. д., в то время как физическая структура минимального симметричного ранга (2,2) существует, с точностью до эквивалентности, в единственном варианте, причем канонической формой локального координатного представления функции f, задающей эту структуру, является выражение (5) из §1. Мультипликативный вариант записи этой функции: $f(i\alpha)=x^1(i)\xi^1(\alpha)$, очевидно, сведется к аддитивному простым логарифмированием и следующим преобразованием эквивалентности: $\ln f(i\alpha) \to f(i\alpha)$, $\ln x^1(i) \to x^1(i)$, $\ln\xi^1(\alpha) \to \xi^1(\alpha)$.

§6. Продолжение: $n \geq 3$

В предыдущем параграфе было установлено, что уравнения (52) и (55) являются двумя различными, но необходимыми и естественными следствиями уравнений (40) из §3 и (1) из §5. Это означает, что локально гиперповерхность N задается, вообще говоря, либо уравнением (52) из §5, либо уравнением (55) из §5.

Предположим для определенности, что в случае $n \geq 3$ в некоторой окрестности ε точки $(ijklf\ldots v, \alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau) \in R^{(m+1)(n+1)}$ гиперповерхность N локально, то есть в окрестности ε, задается уравнением (52) из §5. При перестановке точек k и l это уравнение может сохранить свою внешнюю форму, но может и изменить ее. Иначе говоря, в некоторой окрестности ε' точки $(ijlkf\ldots v, \alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau)$ эта гиперповерхность опять может задавать-ся одним из уравнений (52) и (55) из §5.

Рассмотрим сначала тот случай, когда при перестановке точек k и l в кортеже $\langle ijklf\ldots v, \alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau \rangle$ уравнение (52) из §5 сохраняет свою форму:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \Pi[(ikf\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)] & \Pi[(ikf\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] & \Pi[(ikf\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] \\ 1 & \Pi[(jkf\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)] & \Pi[(jkf\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] & \Pi[(jkf\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] \\ 1 & \Pi[(lkf\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)] & \Pi[(lkf\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] & \Pi[(lkf\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (1)$$

Производные левых частей уравнений (52) из §5 и (1) по переменной $(i\alpha)$, очевидно, отличны от нуля. То есть эти уравнения задают неявно $(i\alpha)$ как одну и ту же функцию всех остальных переменных, в частности $(i\beta)$. Найдем из этих неявных заданий по известным правилам два выражения для производной $\partial(i\alpha)/\partial(i\beta)$ и сравним их:

$$\hat{R}(kl)\frac{\Pi_{(i\beta)}[(ilf,\beta\delta)]\hat{R}(jk)\hat{R}(\alpha\gamma)\Pi[(jlf,\alpha\delta)]}{\Pi_{(i\alpha)}[(ilf,\alpha\delta)]\hat{R}(jk)\hat{R}(\beta\gamma)\Pi[(jlf,\beta\delta)]} = 0\ , \qquad (2)$$

где, как обычно, для сокращения записи временно, до конца данного параграфа, опущены "неподвижные" точки, следующие за точками f и δ в полном исходном кортеже $\langle ijklf\ldots v,\ \alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau \rangle$.

Полученное соотношение (2) не включает в себя переменную $(i\gamma)$, поэтому по всем другим переменным из их полного набора оно является тождеством. Разнесем слагаемые тож-дества (2) в правую и левую сторону по опрератору альтер-нирования $\hat{R}(kl)$, продифференцируем его по переменной $(i\beta)$ и разделим его квадрат на результат дифференцирования, что, очевидно, вполне корректно:

$$\frac{\Pi_{(i\beta)}[(ilf,\beta\delta)]\{\Pi[(jlf,\alpha\delta)] - \Pi[(jlf,\gamma\delta)] - \Pi[(klf,\alpha\delta)] + \Pi[(klf,\gamma\delta)]\}}{\Pi_{(i\alpha)}[(ilf,\alpha\delta)]\Pi_{(j\beta)}[(jlf,\beta\delta)]} =$$

$$= \frac{\Pi_{(i\beta)}[(ikf,\beta\delta)]\{\Pi[(jkf,\alpha\delta)] - \Pi[(jkf,\gamma\delta)] - \Pi[(lkf,\alpha\delta)] + \Pi[(lkf,\gamma\delta)]\}}{\Pi_{(i\alpha)}[(ikf,\alpha\delta)]\Pi_{(j\beta)}[(jkf,\beta\delta)]}\ . \qquad (3)$$

В равенстве (3) зафиксируем значение всех переменных, кроме $(ikf\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)$, введя удобные и естественные обозначения:

$$\Pi[(jkf,\alpha\delta)] = \{A[(jf,\alpha\delta)] - A[(kf,\alpha\delta)]\} \times$$

$$\times B[(jkf,\delta)]C[(kf,\alpha\delta)] + E[(jkf,\delta)] + F[(kf,\alpha\delta)]\ , \qquad (4)$$

причем $B \neq 0$, $C \neq 0$ и отлична от нуля производная функции A по первому аргументу.

Равенство (3) продифференцируем дополнительно по переменной $(j\gamma)$:

$$\frac{\Pi_{(i\beta)}[(ilf,\beta\delta)]\Pi_{(j\gamma)}[(jlf,\gamma\delta)]}{\Pi_{(i\alpha)}[(ilf,\alpha\delta)]\Pi_{(j\beta)}[(jlf,\beta\delta)]} = \frac{\Pi_{(i\beta)}[(ikf,\beta\delta)]\Pi_{(j\gamma)}[(jkf,\gamma\delta)]}{\Pi_{(i\alpha)}[(ikf,\alpha\delta)]\Pi_{(j\beta)}[(jkf,\beta\delta)]}$$

и подставим в него выражение (4) для функции Π, произведя при этом сокращение на ненулевые множители:

$$C[(lf,\gamma\delta)] \Big/ C[(lf,\alpha\delta)] = C[(kf,\gamma\delta)] \Big/ C[(kf,\alpha\delta)] \ .$$

В последнем результате зафиксируем значение переменных $(klf...v, \gamma)$ и $(l,\alpha\delta...\tau)$, введя удобные обозначения:

$$C[(kf,\alpha\delta)] = a[(f,\alpha\delta)]b[(kf,\delta)] \ , \qquad (5)$$

причем $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Если при подстановке коэффициента (5) ввести удобные переобозначения $aA \to A$ и $bB \to B$, то есть включить ненулевые множители a и b в функцию A и коэффициент B, то выражение (4) для функции Π несколько упростится:

$$\Pi[(jkf,\alpha\delta)] = \{A[(jf,\alpha\delta)] - A[(kf,\alpha\delta)]\}B[(jkf,\delta)] +$$

$$+ \mathrm{E}[(jkf,\delta)] + \mathrm{F}[(kf,\alpha\delta)] \ . \qquad (6)$$

Равенство (3) продифференцируем по переменной $(k\gamma)$:

$$\frac{\Pi_{(i\beta)}[(ilf,\beta\delta)]\,\Pi_{(k\gamma)}[(klf,\gamma\delta)]}{\Pi_{(i\alpha)}[(ilf,\alpha\delta)]\,\Pi_{(j\beta)}[(jlf,\beta\delta)]} =$$

$$= -\frac{\Pi_{(i\beta)}[(ikf,\beta\delta)]\{\Pi_{(k\gamma)}[(jkf,\gamma\delta)] - \Pi_{(k\gamma)}[(lkf,\gamma\delta)]\}}{\Pi_{(i\alpha)}[(ikf,\alpha\delta)]\,\Pi_{(j\beta)}[(jkf,\beta\delta)]}$$

и подставим в него выражение (6) для функции Π. После сокращения на ненулевые множители получаем следующее соотношение для коэффециента B:

$$\frac{B[(klf,\delta)]}{B[(jlf,\delta)]} = 1 - \frac{B[(lkf,\delta)]}{B[(jkf,\delta)]} \ ,$$

в котором зафиксируем значение переменных $(l,\delta...\tau)$, введя удобные обозначения:

$$1 \Big/ B[(jkf,\delta)] = \{H[(jf,\delta)] - H[(kf,\delta)]\}\mathrm{G}[(kf,\delta)] \ , \qquad (7)$$

причем $H \neq 0$, $\mathrm{G} \neq 0$ и $H[(jf,\delta)] - H[(kf,\delta)] \neq 0$.

Подставим выражение (6) для функции Π в уравнение (1). Слагаемые E и F исключаются линейными комбинациями со строкой и столбцом из единиц. Далее в левый столбец из каждой строки вынесем ненулевой множитель B, воспользовавшись для него выражением (7), после чего произведем в этом столбце сокращение на коэффициент $\mathrm{G} \neq 0$ и естественным образом перейдем к определителю пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ H[(if,\delta)] & A[(if,\alpha\delta)] & A[(if,\beta\delta)] & A[(if,\gamma\delta)] & 1 \\ H[(jf,\delta)] & A[(jf,\alpha\delta)] & A[(jf,\beta\delta)] & A[(jf,\gamma\delta)] & 1 \\ H[(kf,\delta)] & A[(kf,\alpha\delta)] & A[(kf,\beta\delta)] & A[(kf,\gamma\delta)] & 1 \\ H[(lf,\delta)] & A[(lf,\alpha\delta)] & A[(lf,\beta\delta)] & A[(lf,\gamma\delta)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \ , \qquad (8)$$

в котором, очевидно, отличны от нуля все алгебраические дополнения к минорам первого и второго порядков, включаю- щим только функции A.

Уравнение (8) является следствием уравнений (52) из §5 и (1) для того случая, когда при перестановке точек k и l уравнение (52) из §5 сохраняет свою форму. Рассмотрим теперь второй случай, когда при перестановке точек k и l это уравнение изменяет свою форму:

$$\begin{vmatrix} T[(ikf...v,\alpha\delta...\tau)] & T[(ikf...v,\beta\delta...\tau)] & T[(ikf...v,\gamma\delta...\tau)] \\ T[(jkf...v,\alpha\delta...\tau)] & T[(jkf...v,\beta\delta...\tau)] & T[(jkf...v,\gamma\delta...\tau)] \\ T[(lkf...v,\alpha\delta...\tau)] & T[(lkf...v,\beta\delta...\tau)] & T[(lkf...v,\gamma\delta...\tau)] \end{vmatrix} = 0 \ . \qquad (9)$$

Как и в первом рассмотренном выше случае, уравнение (52) из §5 и (9) задают неявно $(i\alpha)$ как одну и ту же функцию всех остальных прееменных, в частности $(i\beta)$. Сравнивая два выражения для производной $\partial(i\alpha)/\partial(i\beta)$, найденные из этих неявных заданий, легко получаем:

$$\frac{\Pi_{(i\beta)}[(ilf,\beta\delta)]\hat{R}(jk)\hat{R}(\alpha\gamma)\Pi[(jlf,\alpha\delta)]}{\Pi_{(i\alpha)}[(ilf,\alpha\delta)]\hat{R}(jk)\hat{R}(\beta\gamma)\Pi[(jlf,\beta\delta)]}=$$

$$=\frac{T_{(i\beta)}[(ikf,\beta\delta)]\hat{R}(jl)T[(jkf,\alpha\delta)]T[(lkf,\gamma\delta)]}{T_{(i\alpha)}[(ikf,\alpha\delta)]\hat{R}(jl)T[(jkf,\beta\delta)]T[(lkf,\gamma\delta)]}\ . \qquad (10)$$

Равенство (10), подобно соотношению (2), является тождеством. Продифференцируем это тождество по переменной $(j\beta)$ и разделим его квадрат на результат дифференцирования, что, очевидно, вполне корректно:

$$\frac{\Pi_{(i\beta)}[(ilf,\beta\delta)]\hat{R}(jk)\hat{R}(\alpha\gamma)\Pi[(jlf,\alpha\delta)]}{\Pi_{(i\alpha)}[(ilf,\alpha\delta)]\Pi_{(j\beta)}[(jlf,\beta\delta)]}=$$

$$=\frac{T_{(i\beta)}[(ikf,\beta\delta)]\hat{R}(jl)T[(jkf,\alpha\delta)]T[(lkf,\gamma\delta)]}{T_{(i\alpha)}[(ikf,\alpha\delta)]T_{(j\beta)}[(jkf,\beta\delta)]T[(lkf,\gamma\delta)]}\ . \qquad (11)$$

Результат (11) продифференцируем еще по переменной $(j\gamma)$:

$$\frac{\Pi_{(i\beta)}[(ilf,\beta\delta)]\Pi_{(j\gamma)}[(jlf,\gamma\delta)]\}}{\Pi_{(i\alpha)}[(ilf,\alpha\delta)]\Pi_{(j\beta)}[(jlf,\beta\delta)]}=$$

$$=\frac{T_{(i\beta)}[(ikf,\beta\delta)]T_{(j\gamma)}[(jkf,\gamma\delta)]T[(lkf,\alpha\delta)]}{T_{(i\alpha)}[(ikf,\alpha\delta)]T_{(j\beta)}[(jkf,\beta\delta)]T[(lkf,\gamma\delta)]}\ ,$$

зафиксируем в нем значения всех переменных, кроме $(lkf\ \dots\nu,\alpha\delta\dots\tau)$, и разрешим его относительно функции $T[(lkf,\alpha\delta)]$, вводя естественные и удобные обозначения:

$$T[(lkf,\alpha\delta)] = A[(lf,\alpha\delta)]B[(kf,\alpha\delta)]C[(lkf,\delta)]\ , \qquad (12)$$

причем $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, так как $T \neq 0$, и, кроме того, $A_{(l\alpha)}[(lf,\alpha\delta)] \neq 0$, поскольку отлична от нуля производная функции T по первому аргументу.

Подставим выражение (12) для функции T в уравнение (9), вынесем из строк и столбцов определителя этого уравнения ненулевые множители C и B, произведя их сокращение:

$$\begin{vmatrix} A[(if,\alpha\delta)] & A[(if,\beta\delta)] & A[(if,\gamma\delta)] \\ A[(jf,\alpha\delta)] & A[(jf,\beta\delta)] & A[(jf,\gamma\delta)] \\ A[(lf,\alpha\delta)] & A[(lf,\beta\delta)] & A[(lf,\gamma\delta)] \end{vmatrix} = 0\ . \qquad (13)$$

Примечание:

Уравнение (13) не содержит переменных $(k,\alpha\beta\gamma\delta\dots\tau)$ и поэтому, в действительности, по всем входящим в него переменным является тождеством. Продифференцируем тождество (13) по переменным $(i\alpha)$, $(j\beta)$, $(l\gamma)$:

$$A_{(i\alpha)}[(if,\alpha\delta)]A_{(j\beta)}[(jf,\beta\delta)]A_{(l\gamma)}[(lf,\gamma\delta)] = 0\ ,$$

что противоречит необращению в нуль производной функции A по первому аргументу. Установленное противоречие доказывает, что уравнение (52) из §5 при перестановке точек k и l не может изменить своей формы. В случае m≥3 оно, очевидно, не может менять своей формы и при перестаноке точек γ и δ.

В отношении же уравнения (55) из §5 верно, очевидно, следующее утверждение: при перестановке точек k и l это уравнение обязательно сохраняет свою форму, так как, в противном случае, при обратной перестановке тех же точек должно было бы изменить свою форму уравнение (52) из §5, что, как выше было показано, невозможно. Таким образом, уравнение (55) из §5 при перестановке точек

k и l может только сохранить свою форму, то есть гиперповерхность N в окрестности ε' точки $(ijlkf...\nu,\alpha\beta\gamma\delta...\tau)$ задается уравнением (9).

Как и в рассмотренных выше двух случаях, уравнения (55) из §5 и (9) задают неявно $(i\alpha)$ как одну и ту же функцию всех переменных, в частности $(i\beta)$. Сравнивая два выражения для производной $\partial(i\alpha)/\partial(i\beta)$, найденные из этих неявных заданий, легко получаем:

$$\hat{R}(kl)\frac{T_{(i\beta)}[(ilf,\beta\delta)]\hat{R}(jk)T[(jlf,\alpha\delta)]T[(klf,\gamma\delta)]}{T_{(i\alpha)}[(ilf,\alpha\delta)]\hat{R}(jk)T[(jlf,\beta\delta)]T[(klf,\gamma\delta)]}=0 \ . \qquad (14)$$

Соотношение (14) является тождестом, так как в нем отсутствует переменная $(i\gamma)$. Зафиксируем в нем значение всех переменных, кроме $(ikf...\nu,\alpha\delta...\tau)$ и разрешим его относительно производной $T_{(i\alpha)}[(ikf,\alpha\delta)]$:

$$T_{(i\alpha)}[(ikf,\alpha\delta)] = A_{(i\alpha)}[(if,\alpha\delta)]B_1[(kf,\alpha\delta)]B_2[(ikf,\delta)] \ ,$$

причем ни один из трех сомножителей справа в нуль не обращается. B определителе уравнения (9) из каждой строки можно вынести ненулевой множитель B_2, а из каждого столбца ненулевой множитель B_1 с последующим на них сокращением. Потом произведем несущественное переопределение функции T, исключив из нее множители B_1 и B_2. Выражение для производной функции T по первому аргументу тогда значительно упростится

$$T_{(i\alpha)}[(ikf,\alpha\delta)] = A_{(i\alpha)}[(if,\alpha\delta)] \ , \qquad (15)$$

приобретя следующее очевидное свойство:

$$T_{(i\alpha)}[(ikf,\alpha\delta)] = T_{(i\alpha)}[(ilf,\alpha\delta)] \ . \qquad (16)$$

Слагаемые тождества (14) разнесем в правую и левую стороны по оператору альтернирования $\hat{R}(kl)$, продифференцируем его по переменной $(j\beta)$ и разделим его квадрат на результат дифференцирования, учитывая свойство (16) производной функции T, что, очевидно, вполне корректно:

$$\{T[(jlf,\alpha\delta)]T[(klf,\gamma\delta)]-T[(klf,\alpha\delta)]T[(jlf,\gamma\delta)]\}/T[(klf,\gamma\delta)] =$$

$$= \{T[(jkf,\alpha\delta)]T[(lkf,\gamma\delta)]-$$

$$-T[(lkf,\alpha\delta)]T[(jkf,\gamma\delta)]\}/T[(lkf,\gamma\delta)] \ , \qquad (17)$$

после чего произведем дополнительное дифференцирование по переменной $(j\gamma)$:

$$T[(klf,\alpha\delta)]/T[(klf,\gamma\delta)] = T[(lkf,\alpha\delta)]/T[(lkf,\gamma\delta)] \ . \qquad (18)$$

Перепишем равенство (17) с учетом перестановочного свойства (18):

$$T[(lkf,\alpha\delta)]\{T[(jkf,\gamma\delta)] - T[(jlf,\gamma\delta)]\} =$$

$$= \{T[(lkf,\gamma\delta)]\{T[(jkf,\alpha\delta)] - T[(jlf,\alpha\delta)]\}$$

и продифференцируем его по переменной $(l\gamma)$:

$$T[(lkf,\alpha\delta)]T_{(l\gamma)}[(jlf,\gamma\delta)] =$$

$$=T_{(l\gamma)}[(lkf,\gamma\delta)]\{T[(jlf,\alpha\delta)] - T[(jkf,\alpha\delta)]\} \ , \qquad (19)$$

причем $T_{(l\gamma)}[(jlf,\gamma\delta)] \neq 0$ в силу перестановочного свойства (18).

Зафиксируем в результате (19) значение переменных $(j,\alpha\gamma\delta...\tau)$, $(klf...\nu,\gamma)$, введя удобные обозначения:

$$T[(lkf,\alpha\delta)] = a[(lf,\delta)][P[(lf,\alpha\delta)]] - P[(kf,\alpha\delta)]\} \ , \qquad (20)$$

причем $a \neq 0$ и не обращается в нуль разность в фигурных скобках. Функция P достаточно гладкая и имеет отличную от нуля производную по первому аргументу.

Подставим функцию (20) в уравнение (9), вынося из каждой строки ненулевой множитель a и переходя к определителю четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} P[(if\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)] & P[(if\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] & P[(if\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] & 1 \\ P[(jf\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)] & P[(jf\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] & P[(jf\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] & 1 \\ P[(kf\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)] & P[(kf\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] & P[(kf\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] & 1 \\ P[(lf\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)] & P[(lf\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] & P[(lf\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0\ . \qquad (21)$$

В определителе уравнения (21) отличны от нуля миноры второго и третьего порядков, содержащие столбец из единиц, так как не обращаются в нуль миноры первого и второго порядков в определителе уравнения (9). Уравнение (21) является естественным и необходимым следствием уравнений (55) из §5 и (9).

В заключение подведем итоги результатов данного шестого параграфа. Для рассмотренного в нем случая $n \geq 3$, когда в кортеже $<ijklf\ldots v,\alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau>$ число точек $i, j, k, l, f, \ldots, v$ из множества M, равное n+1, больше трех, гиперповерхность N в окрестности ε точки $(ijklf\ldots v,\alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau)$ может быть задана либо уравнением (8), либо уравнением (21). Первое из них является следствием уравнений (52) из §5 и (1), а второе - уравнений (55) из §5 и (9). И в том и в другом случае исходные уравнения (52) и (55) из §5 не меняли своей формы при перестановке точек k, l. Предположение же об их взаимном переходе при такой перестановке приводит к противоречию. Однако, более детальный анализ уравнения (8), который будет проведен в параграфах 7 и 8 для случаев m=2 и $m \geq 3$, показывает, что это уравнение несовместимо с аксиомами физической структуры, что, в итоге, означает невозможность локального задания гиперповерхности N уравнением (52) из §5 для случая $n \geq m \geq 2$. То есть в этом случае локально гиперповерхность N может задаваться только уравнением (55) из §5.

§7. Частный случай: n>m=2

Для рассматриваемого случая функции H левого столбца определителя уравнения (8) из §6 обращаются в попарно различные ненулевые константы H_1, H_2, H_3, H_4.

Понизим порядок этого определителя, вычитая предпоследний столбец из двух предыдущих:

$$\begin{vmatrix} H_1 & A[(if,\alpha)]-A[(if,\gamma)] & A[(if,\beta)]-A[(if,\gamma)] & 1 \\ H_2 & A[(jf,\alpha)]-A[(jf,\gamma)] & A[(jf,\beta)]-A[(jf,\gamma)] & 1 \\ H_3 & A[(kf,\alpha)]-A[(kf,\gamma)] & A[(kf,\beta)]-A[(kf,\gamma)] & 1 \\ H_4 & A[(lf,\alpha)]-A[(lf,\gamma)] & A[(lf,\beta)]-A[(lf,\gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \ . \qquad (1)$$

Запишем уравнение (1) для кортежа $<ij_0k_0l_0f_0...v_0,\alpha\beta_0\gamma_0>$ с фиксированными точками $j_0,k_0, ... ,v_0 \in M$, $\beta_0,\gamma_0 \in$ N и разложим определитель этого уравнения по элементам верхней строки, введя удобные обозначения:

$$\lambda^1(i) + \sigma^1(\alpha) + \lambda^2(i)\sigma^2(\alpha) + \Psi[(i\alpha),\sigma^3(\alpha),...,\sigma^{n-1}(\alpha)] = 0 \ ,$$

где $\lambda(i)=\lambda[x^1(i),x^2(i)]$, $\sigma(\alpha)=\sigma(\xi^1(\alpha),...,\xi^n(\alpha))$. Разрешая последний результат относительно $(i\alpha)$, для функции f получам локальное координатное представление:

$$(i\alpha) = f(i\alpha) = \chi(\lambda^1(i)+\sigma^1(\alpha)+\lambda^2(i)\sigma^2(\alpha), \sigma^3(\alpha),...,\sigma^{n-1}(\alpha)) \ ,$$

в которое n координат $\xi^1(\alpha),...,\xi^n(\alpha)$ точки α входят через n-1 функцию $\sigma^1(\alpha),...,\sigma^{n-1}(\alpha)$, то есть несущественным образом, что, как мы знаем, приводит к противоречию с аксиомой III из §1.

Таким образом, уравнение (1), то есть уравнение (8) из §6 для случая m=2, несовместно с аксиомами физической структуры и потому исходное уравнение (52) из §5, следствием которого является уравнение (1), не может в этом случае локально задавать гиперповерхность N.

Запишем теперь уравнение (21) из §6 для рассматриваемого частного случая n>m=2:

$$\begin{vmatrix} P[(ifw...v,\alpha)] & P[(ifw...v,\beta)] & P[(ifw...v,\gamma)] & 1 \\ P[(jfw...v,\alpha)] & P[(jfw...v,\beta)] & P[(jfw...v,\gamma)] & 1 \\ P[(kfw...v,\alpha)] & P[(kfw...v,\beta)] & P[(kfw...v,\gamma)] & 1 \\ P[(lfw...v,\alpha)] & P[(lfw...v,\beta)] & P[(lfw...v,\gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \ , \qquad (2)$$

где w - точка, следующая за точкой f в исходном полном кортеже $<ijklfw...v,\alpha\beta\gamma>$.

Если n=3 то из первого множества M в уравнение (2) входят четыре точки: i, j, k, l, а из второго множества N - три: α, β, γ:

$$\begin{vmatrix} \psi[(i\alpha)] & \psi[(i\beta)] & \psi[(i\gamma)] & 1 \\ \psi[(j\alpha)] & \psi[(j\beta)] & \psi[(j\gamma)] & 1 \\ \psi[(k\alpha)] & \psi[(k\beta)] & \psi[(k\gamma)] & 1 \\ \psi[(l\alpha)] & \psi[(l\beta)] & \psi[(l\gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \ , \qquad (3)$$

где $\Psi \equiv P$ - произвольная достаточно гладкая функция одной переменной с отличной от нуля производной.

Уравнение (3) запишем для кортежа $<ij_0k_0l_0,\alpha\beta_0\gamma_0>$ с фиксированными точками j_0, k_0, $l_0 \in M$ и β_0, $\gamma_0 \in$ N. Вводя удобные обозначения функций λ^1,λ^2 и $\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3$ локальных координат x^1,x^2 и ξ^1,ξ^2,ξ^3 множеств M и N, получаем локальное координатное представление функции f:

$$(i\alpha) = f(i\alpha) = \Psi[\lambda^1(i)\sigma^1(\alpha) + \lambda^2(i)\sigma^2(\alpha) + \sigma^3(\alpha)] \ , \qquad (4)$$

где $\lambda(i)=\lambda[x^1(i),x^2(i)]$, $\sigma(\alpha)=\sigma(\xi^1(\alpha),\xi^2(\alpha),\xi^3(\alpha))$, причем $\partial(\lambda^1,\lambda^2)/\partial(x^1,x^2) \neq 0$ и $\partial(\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3)/\partial(\xi^1,\xi^2,\xi^3) \neq 0$.

Функция (4) задает на двумерном и трехмерном многообразиях *M* и N физическую структуру ранга (4,3) с феноменологически инвариантной связью (3). Результат (4), (3) с точностью до эквивалентности содержится в общем результате (13), (14) основной классификационной теоремы из §1 в том случае, когда n=m+1=3. Аналогичный результат для физической структуры ранга (3,4) легко воспроизводится по выражениям (4), (3) и с точностью до эквивалентности содержится в результате (11), (12) как тот частный случай, когда m=n+1=3.

При последующих преобразованиях уравнения (2) будем предполагать, что $n \geq 4$, то есть что число точек $i, j, \ldots, v$ из множества *M* в кортеже $\langle ijklfw\ldots v,\alpha\beta\gamma\rangle$ не меньше пяти. В уравнении (2) переставим точки l и f:

$$\begin{vmatrix} P[(ilw\ldots v,\alpha)] & P[(ilw\ldots v,\beta)] & P[(ilw\ldots v,\gamma)] & 1 \\ P[(jlw\ldots v,\alpha)] & P[(jlw\ldots v,\beta)] & P[(jlw\ldots v,\gamma)] & 1 \\ P[(klw\ldots v,\alpha)] & P[(klw\ldots v,\beta)] & P[(klw\ldots v,\gamma)] & 1 \\ P[(flw\ldots v,\alpha)] & P[(flw\ldots v,\beta)] & P[(flw\ldots v,\gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \ . \qquad (5)$$

Уравнения (2) и (5), поскольку их производные по переменной $(i\alpha)$ отличны от нуля, задают неявно эту переменную как одну и ту же функцию остальных, в частности $(i\beta)$. Сравнивая два выражения для производной $\partial(i\alpha)/\partial(i\beta)$, найденные из этих неявных заданий, получаем:

$$\hat{R}(lf)\frac{P_{(i\beta)}[(ifw\ldots v,\beta)]\overline{P}[(ifw\ldots v,\beta)]}{P_{(i\alpha)}[(ifw\ldots v,\alpha)]\overline{P}[(ifw\ldots v,\alpha)]} = 0 \ , \qquad (6)$$

где через $\overline{P}$ обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителей уравнений (2) и (5).

Соотношение (6), в действительности, является тождеством, так как в нем отсутствует переменная $(i\gamma)$. В тождестве (6) зафиксируем значение всех переменных, кроме $(ifw\ldots v,\alpha)$, и разрешим его относительно производной, введя удобные обозначения:

$$P_{(i\alpha)}[(ifw\ldots v,\alpha)] = A_{(i\alpha)}[(iw\ldots v,\alpha)]B[(fw\ldots v,\alpha)] \ ,$$

откуда после интегрирования по перменной $(i\alpha)$ получаем выражение для функции P:

$$P[(ifw\ldots v,\alpha)] =$$

$$= A[(iw\ldots v,\alpha)]B[(fw\ldots v,\alpha)] + C[(fw\ldots v,\alpha)] \ , \qquad (7)$$

причем, очевидно, $B \neq 0$ и отлична от нуля производная функции A по первому аргументу.

Подставим функцию (7) в уравнение (2). Слагаемое C исключается линейной комбинацией со столбцом из единиц, а ненулевой множитель B можно вынести из первых трех столбцов и произвести на него сокращение:

$$\begin{vmatrix} A[(iw\ldots v,\alpha)] & A[(iw\ldots v,\beta)] & A[(iw\ldots v,\gamma)] & 1 \\ A[(jw\ldots v,\alpha)] & A[(jw\ldots v,\beta)] & A[(jw\ldots v,\gamma)] & 1 \\ A[(kw\ldots v,\alpha)] & A[(kw\ldots v,\beta)] & A[(kw\ldots v,\gamma)] & 1 \\ A[(lw\ldots v,\alpha)] & A[(lw\ldots v,\beta)] & A[(lw\ldots v,\gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \ . \qquad (8)$$

Уравнение (8), в действительности, является тождеством по всем входящим в него переменным $(f,\alpha\beta\gamma)$. Продифференцируем тождество (8) по переменным $(i\alpha)$, $(j\beta)$, $(k\gamma)$:

$$A_{(i\alpha)}[(iw\ldots v,\alpha)]A_{(j\beta)}[(jw\ldots v,\beta)]A_{(k\gamma)}[(kw\ldots v,\gamma)] = 0 \ ,$$

что противоречит необращению в нуль производной функции A по первому аргументу.

Таким образом, для $n \geq 4$ уравнение (2) не может задавать локально гиперповерхность N, так как перестановка точек l и f в нем приводит к противоречию. А это означает, что физические структуры ранга $(n+1,3)$ с $n\geq4$, то есть ранга (5,3), (6,3) и т. д., не существуют. В заключительной части основной классификационной теоремы из §1 говорится, что для $m\geq n+2\geq3$ и $n\geq m+2\geq3$, кроме случаев $m=n+2=3$ и $n=m+2=3$, физические структуры рангов $(n+1,m+1)$ не существуют. Доказаное выше утверждение о несуществовании физических структур рангов $(n+1,3)$ с $n\geq4$ и, естественно, $(3,m+1)$ с $m\geq4$, включаются в этот общий случай, когда $n\geq m+2=4$ и $m\geq n+2=4$. Результаты данного параграфа составляют содержание работы автора "Об одном функциональном уравнении с двухиндексными переменными" [2] и получены редукцией общего метода, используемого здесь, к соответствующему частному случаю.

Сравним результаты четвертого и седьмого параграфов. Если $m=1$, то физические структуры ранга $(n+1,2)$ существуют для $n=1$, 2, 3 и не существуют для $n\geq4$. Если же $m=2$, то физические структуры ранга $(n+1,3)$ существуют только для $n=2$, 3 и не существует для $n\geq4$. Заметно принципиальное различие этих случаев, так как существует физическая структура ранга (4,2), когда $n=m+2=3$ и не существует физическая структура ранга (5,3), когда $n=m+2=4$ и числа в ранге тоже отличаются на две единицы. Симметричный вариант, возникающий от перестановки чисел n и m в силу его очевидности отдельно не обсуждается. Учитывая все вышеизложенное, заключаем, что метод индукции удобно применить после вывода уравнений (52) и (55) из §5, когда $m\geq2$. Это и будет сделано в следующем параграфе.

§8. Метод индукции: n≥m≥m'≥2

В пятом параграфе было установлено, что для n≥m≥2 гиперповерхность N локально задается либо уравнением (52), либо уравнением (55). В определителе четвертого порядка уравнения (52) из §5 отличен от нуля любой минор второго и третьего порядка, окаймленный строкой из единиц сверху и столбцом из единиц слева. В определителе же третьего порядка уравнения (55) из §5 отличны от нуля все миноры первого и второго порядков. При этом не обращаются в нуль производные функций Π и T по первому аргументу. Но в таком случае любая производная левых частей этих уравнений отлична от нуля и поэтому их можно локально однозначно разрешить относительно любого из аргументов.

В шестом параграфе для случая n≥3 было показано, что требуемая феноменологической симметрией инвариантность уравнений (52) и (55) из §5 относительно перестановки точек k и l делает возможным переход от них к уравнениям (8) и (21). Однако, уравнение (8) из §6 приводит к противоречию с аксиомой III из §1. Для частного случая m=2 это было показано в начале седьмого параграфа, а для более общего случая m≥3 - будет показано ниже.

Запишем уравнение (8) из §6 для случая m≥3, когда число точек из множества N в кортеже <$ijklf...v,\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon...\tau$> не меньше четырех:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ H[(if,\delta\varepsilon)] & A[(if,\alpha\delta\varepsilon)] & A[(if,\beta\delta\varepsilon)] & A[(if,\gamma\delta\varepsilon)] & 1 \\ H[(jf,\delta\varepsilon)] & A[(jf,\alpha\delta\varepsilon)] & A[(jf,\beta\delta\varepsilon)] & A[(jf,\gamma\delta\varepsilon)] & 1 \\ H[(kf,\delta\varepsilon)] & A[(kf,\alpha\delta\varepsilon)] & A[(kf,\beta\delta\varepsilon)] & A[(kf,\gamma\delta\varepsilon)] & 1 \\ H[(lf,\delta\varepsilon)] & A[(lf,\alpha\delta\varepsilon)] & A[(lf,\beta\delta\varepsilon)] & A[(lf,\gamma\delta\varepsilon)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Переставим в уравнении (1) точки γ и δ. Поскольку это уравнение является следствием уравнения (52) из §5, не меняющего свою форму при перестановке точек γ и δ, не может изменить ее при такой перестановке и уравнение (1):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ H[(if,\gamma\varepsilon)] & A[(if,\alpha\gamma\varepsilon)] & A[(if,\beta\gamma\varepsilon)] & A[(if,\delta\gamma\varepsilon)] & 1 \\ H[(jf,\gamma\varepsilon)] & A[(jf,\alpha\gamma\varepsilon)] & A[(jf,\beta\gamma\varepsilon)] & A[(jf,\delta\gamma\varepsilon)] & 1 \\ H[(kf,\gamma\varepsilon)] & A[(kf,\alpha\gamma\varepsilon)] & A[(kf,\beta\gamma\varepsilon)] & A[(kf,\delta\gamma\varepsilon)] & 1 \\ H[(lf,\gamma\varepsilon)] & A[(lf,\alpha\gamma\varepsilon)] & A[(lf,\beta\gamma\varepsilon)] & A[(lf,\delta\gamma\varepsilon)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2), очевидно, задают неявно, например, $(i\alpha)$ как одну и ту же функцию переменной $(j\alpha)$. Сравнивая два выражения для производной $\partial(i\alpha)/\partial(j\alpha)$, найденные из этих неявных заданий, легко получаем равенство:

$$\frac{A_{(j\alpha)}[(jf,\alpha\delta\varepsilon)]\overline{A}[(jf,\alpha\delta\varepsilon)]}{A_{(i\alpha)}[(if,\alpha\delta\varepsilon)]\overline{A}[(if,\alpha\delta\varepsilon)]} = \frac{A_{(j\alpha)}[(jf,\alpha\gamma\varepsilon)]\overline{A}[(jf,\alpha\gamma\varepsilon)]}{A_{(i\alpha)}[(if,\alpha\gamma\varepsilon)]\overline{A}[(if,\alpha\gamma\varepsilon)]}, \quad (3)$$

где через $\overline{A}$ обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителей уравнений (1) и (2).

Равенство (3) является тождеством по всем входящим в него переменным, так как в нем отсутствуют переменные (kl,α). Тождество (3) продифференцируем по переменной $(i\beta)$, переставим в нем числитель и знаменатель, после чего дополнительно продифференцируем его по переменной $(k\beta)$:

$$\frac{A_{(i\alpha)}[(if,\alpha\delta\varepsilon)]A_{(k\beta)}[(kf,\beta\delta\varepsilon)]\{H[(jf,\delta\varepsilon)]-H[(lf,\delta\varepsilon)]\}}{A_{(j\alpha)}[(jf,\alpha\delta\varepsilon)]A_{(i\beta)}[(if,\beta\delta\varepsilon)]\{H[(kf,\delta\varepsilon)]-H[(lf,\delta\varepsilon)]\}} =$$

$$= \frac{A_{(i\alpha)}[(if,\alpha\gamma\varepsilon)]A_{(k\beta)}[(kf,\beta\gamma\varepsilon)]\{H[(jf,\gamma\varepsilon)]-H[(lf,\gamma\varepsilon)]\}}{A_{(j\alpha)}[(jf,\alpha\gamma\varepsilon)]A_{(i\beta)}[(if,\beta\gamma\varepsilon)]\{H[(kf,\gamma\varepsilon)]-H[(lf,\gamma\varepsilon)]\}}. \quad (4)$$

Заметим, что в полученном равенстве (4) ни один из сомножителей в числителе и знаменателе правой и левой частей, в том числе и разности, стоящие в фигурных скобках, в нуль не обращаются. Продифференцируем равенство (4) по переменной $(l\delta)$, произведя затем сокращение на все отличные от нуля сомножители:

$$H_{(l\delta)}[(lf,\delta\varepsilon)] = 0\ , \tag{5}$$

откуда находим, что функция H не зависит от своего первого аргумента. Аналогично, переставляя в уравнении (1) точку γ с каждой из точек $\varepsilon, \ldots, \tau$, можно показать, что, кроме производной (5), обращаются в нуль еще и следующие производные:

$$H_{(l\varepsilon)}[(lf,\delta\varepsilon)] = 0\ , \ \ldots\ , \ H_{(l\tau)}[(lf,\delta\varepsilon)] = 0\ , \tag{5'}$$

то есть:

$$H[(lf\ldots v,\delta\varepsilon\ldots\tau)] = H[(f\ldots v,\delta\varepsilon\ldots\tau)]\ . \tag{6}$$

Подставим выражение (6) для функции H в исходное уравнение (1):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ H_1[(f,\delta\varepsilon)] & A[(if,\alpha\delta\varepsilon)] & A[(if,\beta\delta\varepsilon)] & A[(if,\gamma\delta\varepsilon)] & 1 \\ H_2[(f,\delta\varepsilon)] & A[(jf,\alpha\delta\varepsilon)] & A[(jf,\beta\delta\varepsilon)] & A[(jf,\gamma\delta\varepsilon)] & 1 \\ H_3[(f,\delta\varepsilon)] & A[(kf,\alpha\delta\varepsilon)] & A[(kf,\beta\delta\varepsilon)] & A[(kf,\gamma\delta\varepsilon)] & 1 \\ H_4[(f,\delta\varepsilon)] & A[(lf,\alpha\delta\varepsilon)] & A[(lf,\beta\delta\varepsilon)] & A[(lf,\gamma\delta\varepsilon)] & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{7}$$

причем функции H_1, H_2, H_3, H_4 и все их взаимные разности в нуль не обращаются.

Определитель пятого порядка уравнения (7) преобразуем к определителю четвертого порядка, аналогичному по структуре определителю уравнения (1) из §7. Далее запишем это уравнение для кортежа $<ij_0k_0l_0f_0\ldots v_0,\alpha\beta_0\gamma_0\delta_0\varepsilon_0\ldots\tau_0>$ с фиксированными в нем точками j_0, k_0, $l_0, f_0, \ldots, v_0 \in M$, $\beta_0, \gamma_0, \delta_0, \varepsilon_0, \ldots, \tau_0 \in N$ и разложим преобразованный его определитель по элементам верхней строки, введя удобные обозначения:

$$\lambda^1(i) + \sigma^1(\alpha) + \lambda^2(i)\sigma^2(\alpha) +$$

$$+ \Psi[(i\alpha),\lambda^3(i),\ldots,\lambda^m(i),\sigma^3(\alpha),\ldots,\sigma^{n-1}(\alpha)] = 0\ ,$$

где $\lambda(i)=\lambda(x^1(i),\ldots,x^m(i))$, $\sigma(\alpha)=\sigma(\xi^1(\alpha),\ldots,\xi^n(\alpha))$. Разрешая последнее соотношение относительно $(i\alpha)$, для функции f получаем такое локальное координатное представление:

$$(i\alpha) = f(i\alpha) =$$

$$= \chi[\lambda^1(i) + \sigma^1(\alpha) + \lambda^2(i)\sigma^2(\alpha), \lambda^3(i),\ldots,\lambda^m(i),\sigma^3(\alpha),\ldots,\sigma^{n-1}(\alpha)]\ ,$$

в которое n координат $\xi^1(\alpha), \ldots, \xi^n(\alpha)$ точки α входят только через n-1 функцию $\sigma^1(\alpha), \ldots, \sigma^{n-1}(\alpha)$, то есть несущественным образом, что приводит к противоречию с аксиомой III из §1.

Итак, если n≥3, то уравнение (52) из §5 несовместно по перестановке элемнтов k и l, феноменологически неинвариантно и потому не может локально задавать гиперповерхность N. Уравнение же (55) из §5 всем этим условиям удовлетворяет, в частности, вследствие его инвариантности относительно перестановки точек k и l, оно естественно переходит в уравнение (21).

Будем, далее, использовать метод индукции. Пусть m' есть произвольное целое число, удовлетворяющее условию m≥m'≥2. Предположим, что для n≥m≥m' гиперповерхность N локально может быть задана одним из двух уравнений, имеющих такое же строение, как и уравнения (52) и (55) из §5:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \Pi[(ipq\dots\nu,\alpha\mu\dots\tau)] & \dots & \Pi[(ipq\dots\nu,\sigma\mu\dots\tau)] & \Pi[(ipq\dots\nu,\lambda\mu\dots\tau)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \Pi[(spq\dots\nu,\alpha\mu\dots\tau)] & \dots & \Pi[(spq\dots\nu,\sigma\mu\dots\tau)] & \Pi[(spq\dots\nu,\lambda\mu\dots\tau)] \\ 1 & \Pi[(rpq\dots\nu,\alpha\mu\dots\tau)] & \dots & \Pi[(rpq\dots\nu,\sigma\mu\dots\tau)] & \Pi[(rpq\dots\nu,\lambda\mu\dots\tau)] \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

$$\begin{vmatrix} T[(ipq\dots\nu,\alpha\mu\dots\tau)] & \dots & T[(ipq\dots\nu,\sigma\mu\dots\tau)] & T[(ipq\dots\nu,\lambda\mu\dots\tau)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T[(spq\dots\nu,\alpha\mu\dots\tau)] & \dots & T[(spq\dots\nu,\sigma\mu\dots\tau)] & T[(spq\dots\nu,\lambda\mu\dots\tau)] \\ T[(rpq\dots\nu,\alpha\mu\dots\tau)] & \dots & T[(rpq\dots\nu,\sigma\mu\dots\tau)] & T[(rpq\dots\nu,\lambda\mu\dots\tau)] \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

где точки r и λ из множеств *M* и N в полном исходном кортеже $\langle ijklf\dots srpqh\dots\nu,\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\dots\sigma\lambda\mu\nu\dagger\dots\tau\rangle$ являются (m'+1)-ми по счету. При этом в определителе (m'+2)-го порядка уравнения (8) отличны от нуля все миноры 2-го, 3-го, ... , (m'+1)-го порядков, окаймленные строкой из единиц сверху и столбцом из единиц слева. В определителе же (m'+1)-го порядка уравнения (9) отличны от нуля все миноры 1-го, 2-го, ... , m'-го порядков. Кроме того, производные функций Π и T по первому аргументу не обращаются в нуль и потому, как легко понять, уравнения (8) и (9) могут быть локально однозначно разрешены относительно любой из переменных. Предположим также, что в случае n≥m'+1 уравнение (8) феноменологически неинвариантно по перестановке точек r и p, так как возникает противоречие с аксиомой III из §1, и потому остается только уравнение (9).

Докажем, что для n≥m≥m'+1 гиперповерхность N локально может быть задана одним из двух уравнений, имеющих такое же строение, как и уравнения (8) и (9):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \Pi[(iqh\dots\nu,\alpha\nu\dots\tau)] & \dots & \Pi[(iqh\dots\nu,\lambda\nu\dots\tau)] & \Pi[(iqh\dots\nu,\mu\nu\dots\tau)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \Pi[(rqh\dots\nu,\alpha\nu\dots\tau)] & \dots & \Pi[(rqh\dots\nu,\lambda\nu\dots\tau)] & \Pi[(rqh\dots\nu,\mu\nu\dots\tau)] \\ 1 & \Pi[(pqh\dots\nu,\alpha\nu\dots\tau)] & \dots & \Pi[(pqh\dots\nu,\lambda\nu\dots\tau)] & \Pi[(pqh\dots\nu,\mu\nu\dots\tau)] \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

$$\begin{vmatrix} T[(iqh\dots\nu,\alpha\nu\dots\tau)] & \dots & T[(iqh\dots\nu,\lambda\nu\dots\tau)] & T[(iqh\dots\nu,\mu\nu\dots\tau)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T[(rqh\dots\nu,\alpha\nu\dots\tau)] & \dots & T[(rqh\dots\nu,\lambda\nu\dots\tau)] & T[(rqh\dots\nu,\mu\nu\dots\tau)] \\ T[(pqh\dots\nu,\alpha\nu\dots\tau)] & \dots & T[(pqh\dots\nu,\lambda\nu\dots\tau)] & T[(pqh\dots\nu,\mu\nu\dots\tau)] \end{vmatrix} = 0, \quad (11)$$

где точки p и μ из множеств *M* и N в полном исходном кортеже $\langle ijklf\dots srpqh\dots\nu,\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\dots\sigma\lambda\mu\nu\dagger\dots\tau\rangle$ являются (m'+2)-ми по счету. При этом в определителе (m'+3)-го порядка уравнения (10) будут отличны от нуля все миноры 2-го, 3-го, ... , (m'+1)-го и (m'+2)-го порядков, окаймленные строкой из единиц сверху и столбцом из единиц слева. В определителе же (m'+2)-го порядка уравнения (11) , будут отличны от нуля все миноры 2-го, 3-го, ... , m'-го и (m'+1)-го порядков. Производные функций Π и T по первому аргументу в нуль не обращаются и потому уравнения (10) и (11) могут быть локально однозначно разрешены отосительно любой из переменных. Будет показано, кроме того, что для случая n≥m'+2 уравнение (10) феноменологически неинвариантно по перестановке точек p и q, так как возникает противоречие с аксиомой III из §1, и потому остается только уравнение (11).

Приступим к доказательству. Пусть n≥m'+1 и гиперповерхность N локально задается только уравнением (9). Переставим в этом уравнении (m'+1)-ю точку r и следующую за ней точку p:

$$
\begin{vmatrix}
T[(irq...\nu,\alpha\mu...\tau)] & ... & T[(irq...\nu,\sigma\mu...\tau)] & T[(irq...\nu,\lambda\mu...\tau)] \\
... & ... & ... & ... \\
T[(srq...\nu,\alpha\mu...\tau)] & ... & T[(srq...\nu,\sigma\mu...\tau)] & T[(srq...\nu,\lambda\mu...\tau)] \\
T[(prq...\nu,\alpha\mu...\tau)] & ... & T[(prq...\nu,\sigma\mu...\tau)] & T[(prq...\nu,\lambda\mu...\tau)]
\end{vmatrix} = 0 \ , \quad (12)
$$

Уравнения (9) и (12), с чем мы неоднократно встречались раньше, задают неявно $(i\alpha)$ как одну и ту же функцию всех остальных переменных, в частности, $(i\beta)$. Сравнивая два выражения для производной $\partial(i\alpha)/\partial(i\beta)$, найденные из этих неявных заданий, легко получаем:

$$\hat{R}(rp)\frac{T_{(i\beta)}[(ipq,\beta\mu)]\overline{T}[(ipq,\beta\mu)]}{T_{(i\alpha)}[(ipq,\alpha\mu)]\overline{T}[(ipq,\alpha\mu)]} = 0 \ , \qquad (13)$$

где через $\overline{T}$ обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителей уравнений (9) и (12). В соотношении (13) временно, в целях сокращения записи, опущены "неподвижные" точки, следующие за точками q и μ.

Соотношение (13), в действительности, является тождеством по всем входящим в него переменным, так как в нем отсутствуют переменные $(i,\gamma...\sigma\lambda)$. В тождестве (13) зафиксируем значение всех переменных, кроме $(ipq...\nu,\alpha\mu...\tau)$ и разрешим его относительно производной $T_{(i\alpha)}[(ipq,\alpha\mu)]$:

$$T_{(i\alpha)}[(ipq,\alpha\mu)] = A_{(i\alpha)}[(iq,\alpha\mu)]B_1[(pq,\alpha\mu)]B_2[(ipq,\mu)] \ ,$$

причем ни один из трех сомножителей справа не обращается в нуль. В определителе уравнения (9) из каждой строки можно вынести ненулевой множитель B_2, а из каждого столбца ненулевой множитель B_1 с последующим на них сокращением. Произведем, поэтому, несущественное переопределение функции T, исключая из нее множители B_1 и B_2. Выражение для производной функции T по первому аргументу тогда станет более простым:

$$T_{(i\alpha)}[(ipq,\alpha\mu)] = A_{(i\alpha)}[(iq,\alpha\mu)] \ , \qquad (14)$$

и приобретает следующее свойство:

$$T_{(i\alpha)}[(ipq,\alpha\mu)] = T_{(i\alpha)}[(irq,\alpha\mu)] \ . \qquad (15)$$

Перепишем соотношение (13), учитывая свойство (15):

$$\hat{R}(rp)\overline{T}[(ipq,\alpha\mu)]\ \overline{T}[(irq,\beta\mu)] = 0 \ . \qquad (16)$$

Будем теперь понижать порядок алгебраических дополнений в соотношении (16). Продифференцируем его сначала по переменной $(j\alpha)$. Эта операция понизит на единицу порядок алгебраических дополнений $\overline{T}[(ipq,\beta\mu)]$ и $\overline{T}[(irq,\beta\mu)]$. Затем произведем дифференцирование по переменной $(j\gamma)$, что приведет к понижению на единицу порядка алгебраических дополнений $\overline{T}[(ipq,\alpha\mu)]$ и $\overline{T}[(irq,\alpha\mu)]$. Продолжим процесс понижения порядка, продифференцировав полученный результат сначала по переменной $(k\gamma)$, а затем - $(k\delta)$. Повторяя этот несложный процесс понижения порядка алгебраических дополнений, в итоге получим:

$$\hat{R}(rp)\frac{\hat{R}(sr)T[(spq,\sigma\mu)]T[(rpq,\lambda\mu)]}{\hat{R}(sr)T[(spq,\beta\mu)]T[(rpq,\lambda\mu)]} = 0$$

и с учетом свойства (15):

$$\hat{R}(rp)\frac{T_{(i\beta)}[(ipq,\beta\mu)]\hat{R}(sr)T[(spq,\sigma\mu)]T[(rpq,\lambda\mu)]}{T_{(i\sigma)}[(ipq,\sigma\mu)]\hat{R}(sr)T[(spq,\beta\mu)]T[(rpq,\lambda\mu)]} = 0 \ . \qquad (17)$$

Из сравнения уравнения (17) и уравнения (14) из §6 устанавливается их полная эквивалентность. Поэтому для функции T можно воспользоваться выражением (20) из §6, так как все рассуждения и формулы, следующие за уравнением (14) из §6, в отношении уравнения (17) повторяются дословно:

$$T[(prq,\sigma\mu)] = a[(pq,\mu)]\{P[(pq,\sigma\mu)] - P[(rq,\sigma\mu)]\} \ . \qquad (18)$$

причем $a \neq 0$ и не обращается в нуль разность, стоящая справа в фигурных скобках. Функция P достаточно гладкая и имеет отличную от нуля производную по первому аргументу.

Подставим функцию (18) в уравнение (12), вынося из каждой строки ненулевой множитель a и переходя к определителю (m'+2)-го порядка:

$$\begin{vmatrix} P[(iq\ldots\nu,\alpha\mu\nu\ldots\tau)] & \ldots & P[(iq\ldots\nu,\sigma\mu\nu\ldots\tau)] & P[(iq\ldots\nu,\lambda\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P[(sq\ldots\nu,\alpha\mu\nu\ldots\tau)] & \ldots & P[(sq\ldots\nu,\sigma\mu\nu\ldots\tau)] & P[(sq\ldots\nu,\lambda\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \\ P[(rq\ldots\nu,\alpha\mu\nu\ldots\tau)] & \ldots & P[(rq\ldots\nu,\sigma\mu\nu\ldots\tau)] & P[(rq\ldots\nu,\lambda\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \\ P[(pq\ldots\nu,\alpha\mu\nu\ldots\tau)] & \ldots & P[(pq\ldots\nu,\sigma\mu\nu\ldots\tau)] & P[(pq\ldots\nu,\lambda\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Заметим, что в определителе уравнения (19) отличны от нуля все миноры до порядка m'+1 включительно, содержащие столбец из единиц, так как не обращаются в нуль все миноры до порядка m' включительно в определителе уравнения (12). Уравнение (19) является естественным и необходимым следствием уравнений (9) и (12).

Дальнейшие преобразования уравнения (19) будем проводить по уже хорошо знакомой схеме. Переставим в уравнении (19) (m'+1) - ю точку λ и следующую за ней точку μ:

$$\begin{vmatrix} P[(iq\ldots\nu,\alpha\lambda\nu\ldots\tau)] & \ldots & P[(iq\ldots\nu,\sigma\lambda\nu\ldots\tau)] & P[(iq\ldots\nu,\mu\lambda\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P[(sq\ldots\nu,\alpha\lambda\nu\ldots\tau)] & \ldots & P[(sq\ldots\nu,\sigma\lambda\nu\ldots\tau)] & P[(sq\ldots\nu,\mu\lambda\nu\ldots\tau)] & 1 \\ P[(rq\ldots\nu,\alpha\lambda\nu\ldots\tau)] & \ldots & P[(rq\ldots\nu,\sigma\lambda\nu\ldots\tau)] & P[(rq\ldots\nu,\mu\lambda\nu\ldots\tau)] & 1 \\ P[(pq\ldots\nu,\alpha\lambda\nu\ldots\tau)] & \ldots & P[(pq\ldots\nu,\sigma\lambda\nu\ldots\tau)] & P[(pq\ldots\nu,\mu\lambda\nu\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

Уравнения (19) и (20) определяют, например, $(i\alpha)$ как одну и ту же функцию переменной $(j\alpha)$. Сравнивая два выражения для производной $\partial(i\alpha)/\partial(j\alpha)$, найденные из этих неявных заданий, получаем:

$$\hat{R}(\mu\lambda)\frac{P_{(j\alpha)}[(jq,\alpha\mu\nu)]\overline{P}[(jq,\alpha\mu\nu)]}{P_{(i\alpha)}[(iq,\alpha\mu\nu)]\overline{P}[(iq,\alpha\mu\nu)]} = 0 \ , \qquad (21)$$

где через $\overline{P}$ обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителей уравнений (19) и (20). Кроме того, как обычно, опущены "неподвижные" точки, следующие в данном случае за точками q и ν.

Соотношение (21) не содержит в себе переменных $(klf\ldots srp, \alpha)$ и потому по всем входящим в него переменным является тождеством. Зафиксируем в тождестве (21) значение всех переменных, кроме $(iq\ldots\nu,\alpha\mu\nu\ldots\tau)$, и разрешим его относительно производной функции P по первому аргументу:

$$P_{(i\alpha)}[(iq,\alpha\mu\nu)] = A_{(i\alpha)}[(iq,\alpha\nu)]B[(iq,\mu\nu)]B_1[(q,\alpha\mu\nu)] \ ,$$

причем ни один из трех сомножителей не обращается в нуль, в частности $A_{(i\alpha)}[(iq,\alpha\nu)] \neq 0$.

Заметим, что из каждого столбца определителя уравнения (19), кроме последнего, можно вынести общий ненулевой множитель B_1. Поэтому удобно провести несущественное переопре-деление функции P, исключив из нее этот множитель. Тогда для производной функции P по первому аргументу будем иметь более простое выражение:

$$P_{(i\alpha)}[(iq,\alpha\mu\nu)] = A_{(i\alpha)}[(iq,\alpha\nu)]B[(iq,\mu\nu)] \ . \qquad (22)$$

Преобразуем соотношение (21), используя выражение (22):

$$\hat{R}(\mu\lambda)B[(iq,\mu\nu)]B[(jq,\lambda\nu)]\overline{P}[(iq,\alpha\mu\nu)]\overline{P}[(jq,\alpha\lambda\nu)] = 0 \ . \ (23)$$

Будем теперь понижать порядок алгебраических дополнений, входящих в соотношение (23), по схеме, аналогичной той, которая была использована для соотношения (16). Продифференцируем сначала соотношение (23) по переменной ($j\beta$). Это приведет к понижению ровно на единицу порядка алгебраических дополнений $\overline{P}\,[(iq,\alpha\mu\nu)]$ и $\overline{P}\,[(iq,\alpha\lambda\nu)]$. Затем дифференцируем его по переменной ($k\beta$), что приведет к понижению также на единицу порядка алгебраичесих дополнений $\overline{P}\,[(jq,\alpha\mu\nu)]$ и $\overline{P}\,[(jq,\ \alpha\lambda\nu)]$. Возникающие при это множители B взаимно сокращаются. Далее продифференцируем полученный результат сначала по переменной ($k\gamma$), а потом ($l\gamma$), что приведет к понижению порядка всех алгебраических дополнений в нем еще на единицу. Продолжим описанный простой процесс понижения порядка до тех пор, пока не появятся алгебраичесие дополнения третьего порядка:

$$\hat{R}(\mu\lambda)\frac{B[(iq,\mu\nu)]\begin{vmatrix} P[(sq,\sigma\mu\nu)] & P[(sq,\lambda\mu\nu)] & 1 \\ P[(rq,\sigma\mu\nu)] & P[(rq,\lambda\mu\nu)] & 1 \\ P[(pq,\sigma\mu\nu)] & P[(pq,\lambda\mu\nu)] & 1 \end{vmatrix}}{B[(sq,\mu\nu)]\begin{vmatrix} P[(iq,\sigma\mu\nu)] & P[(iq,\lambda\mu\nu)] & 1 \\ P[(rq,\sigma\mu\nu)] & P[(rq,\lambda\mu\nu)] & 1 \\ P[(pq,\sigma\mu\nu)] & P[(pq,\lambda\mu\nu)] & 1 \end{vmatrix}} = 0 \ . \qquad (24)$$

Продифференцируем соотношение (24) по переменной ($s\sigma$), после чего переставим в нем местами числитель и знаменатель:

$$\hat{R}(\mu\lambda)\frac{\begin{vmatrix} P[(iq,\sigma\mu\nu)] & P[(iq,\lambda\mu\nu)] & 1 \\ P[(rq,\sigma\mu\nu)] & P[(rq,\lambda\mu\nu)] & 1 \\ P[(pq,\sigma\mu\nu)] & P[(pq,\lambda\mu\nu)] & 1 \end{vmatrix}}{B[(iq,\mu\nu)]\hat{R}(rp)P[(rq,\lambda\mu\nu)]} = 0 \qquad (25)$$

и продифференцируем по переменной ($r\sigma$):

$$\hat{R}(\mu\lambda)\frac{B[(rq,\mu\nu)]}{B[(iq,\mu\nu)]}\cdot\frac{P[(iq,\lambda\mu\nu)]-P[(pq,\lambda\mu\nu)]}{P[(rq,\lambda\mu\nu)]-P[(pq,\lambda\mu\nu)]} = 0 \ .$$

С учетом выражения (22) для производной функции P последующий результат, можно записать в следующей форме:

$$\hat{R}(\mu\lambda)\frac{P_{(r\alpha)}[(rq,\alpha\mu\nu)]}{P_{(i\alpha)}[(iq,\alpha\mu\nu)]}\cdot\frac{P[(iq,\lambda\mu\nu)]-P[(pq,\lambda\mu\nu)]}{P[(rq,\lambda\mu\nu)]-P[(pq,\lambda\mu\nu)]} = 0 \ . \qquad (26)$$

Соотношение (26) можно рассматривать как функционально-дифференциальное уравнение для функции P. Сравнивая уравнение (26) с уравнением (10) из §5, устанавливаем их полную эквивалентность. То есть уравнение (26) имеет два решения, которые можно выписать по двум решениям уравнения (10) из §5, а именно: первому решению (39)-(40) с дополнительными соотношениями (33), (38) в нем и второму решению (54).

Сначала рассмотрим первое решение уравнения (26):

$$P\,[(iq,\lambda\mu\nu)] = C_1[(q,\lambda\mu\nu)] + \tilde{P}\,[(iq,\lambda\mu\nu)] \big/ H_2[(q,\mu\nu)] \ , \qquad (27)$$

где

$$\tilde{P}\,[(iq,\lambda\mu\nu)] = \{A[(iq,\lambda\nu)] +$$

$$+ A[(iq,\mu\nu)] \big/ a[(q,\lambda\mu\nu)] + E[(i,\nu),(q,\lambda\mu\nu)]\} \big/ H_1[(iq,\nu)] \ , \qquad (28)$$

при следующих дополнительных соотношениях:

$$a[(q,\lambda\mu\nu)]a[(q,\mu\lambda\nu)] = 1 \ , \qquad (29)$$

$$a[(q,\mu\lambda\nu)]E[(i,\nu),(q,\mu\lambda\nu)] =$$

$$= E[(i,\nu),(q,\lambda\mu\nu)] + C[(q,\mu\lambda\nu)]\,H_1[(iq,\nu)] \ . \qquad (30)$$

Из выражений (27)-(28) найдем производную функции P по первому аргументу:

$$P_{(i\lambda)}[(iq,\lambda\mu\nu)] = A_{(i\lambda)}[(iq,\lambda\nu)] \Big/ H_1[(iq,\nu)]H_2[(q,\mu\nu)] \ ,$$

которую сопоставим с производной (22), откуда получаем связь

$$B[(iq,\mu\nu)] = 1 \Big/ H_1[(iq,\nu)]H_2[(q,\mu\nu)] \ . \qquad (31)$$

Подставим функцию (27) в уравнение (25), учитывая связь (31):

$$\hat{R}(\mu\lambda)\frac{\begin{vmatrix} \tilde{P}[(iq,\sigma\mu\nu)] & \tilde{P}[(iq,\lambda\mu\nu)] & 1 \\ \tilde{P}[(rq,\sigma\mu\nu)] & \tilde{P}[(rq,\lambda\mu\nu)] & 1 \\ \tilde{P}[(pq,\sigma\mu\nu)] & \tilde{P}[(pq,\lambda\mu\nu)] & 1 \end{vmatrix}}{\tilde{P}[(rq,\lambda\mu\nu)] - \tilde{P}[(pq,\lambda\mu\nu)]} = 0 \ . \qquad (32)$$

Используя перестановочное свойство функции $\tilde{P}$:

$$\tilde{P}[(iq,\mu\lambda\nu)] = a[(q,\lambda\mu\nu)]C[(q,\mu\lambda\nu)] + a[(q,\lambda\mu\nu)]\tilde{P}[(iq,\lambda\mu\nu)],$$

вытекающее очевидным образом из выражения (28) и дополнительных связей (29), (30), преобразуем соотношение (32) к следующей форме:

$$\begin{vmatrix} \tilde{P}[(iq,\sigma\mu\nu)] - \tilde{P}[(iq,\sigma\lambda\nu)] & \tilde{P}[(iq,\lambda\mu\nu)] & 1 \\ \tilde{P}[(rq,\sigma\mu\nu)] - \tilde{P}[(rq,\sigma\lambda\nu)] & \tilde{P}[(rq,\lambda\mu\nu)] & 1 \\ \tilde{P}[(pq,\sigma\mu\nu)] - \tilde{P}[(pq,\sigma\lambda\nu)] & \tilde{P}[(pq,\lambda\mu\nu)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \ . \qquad (33)$$

Замечаем, что соотношение (33) эквивалентно соотношению (44) из §5. Совпадают также выражение (28) для функции $\tilde{P}$ и выражение (40) из §5 для функции $\tilde{\Lambda}$. Поэтому можно использовать результаты (50)-(51) из §5 уже решенной задачи, по которой и воспроизведем выражение для функции $\tilde{P}$:

$$\tilde{P}[(iq,\lambda\mu\nu)] =$$

$$= \{\Pi[(iq,\lambda\nu)] - \Pi[(iq,\mu\nu)] + E_2[(q,\lambda\mu\nu)]\} \Big/ a_1[(q,\lambda\nu)] \ , \qquad (34)$$

где

$$\Pi[(iq,\lambda\nu)] =$$

$$= a_1[(q,\lambda\nu)]A[(iq,\lambda\nu)] \Big/ H_1[(iq,\nu)] + E_1[(i,\nu),(q,\lambda\nu)] \ , \qquad (35)$$

причем $\Pi_{(i\lambda)}[(iq,\lambda\nu)] \neq 0$.

В соответствии с формулами (27) и (34) выражение для исходной функции P будет следующим:

$$P[(iq,\lambda\mu\nu)] = C_1[(q,\lambda\mu\nu)] +$$

$$+\frac{\Pi[(iq,\lambda\nu)] - \Pi[(iq,\mu\nu)] + E_2[(q,\lambda\mu\nu)]}{a_1[(q,\lambda\nu)]H_2[(q,\mu\nu)]} \ . \qquad (36)$$

Функцию (36) подставим в уравнение (19). После некоторых простых и очевидных преобразований получаем уравнение (10). В определителе этого уравнения отличны от нуля все миноры, окаймленные строкой и столбцом из единиц, так как они возникли из ненулевых миноров определителя уравнения (19), содержащих столбец из единиц и имеющих на единицу меньший порядок. Поскольку к тому же производная функции Π по первому аргументу отлична от нуля, уравнение (10) локально может быть однозначно разрешено относительно любой переменной.

Рассмотрим теперь второе решение уравнения (26), аналогичное второму решению (54) уравнения (10) из §5:

$$
P[(iq,\lambda\mu\nu)] = C_1[(q,\lambda\mu\nu)] +
$$

$$
+\frac{T[(iq,\lambda\nu)] + T[(iq,\mu\nu)]/a[(q,\lambda\mu\nu)]}{b[(q,\mu\nu)]T[(iq,\mu\nu)]}\ , \qquad (37)
$$

причем $T \neq 0$ и отлична от нуля производная функции T по первому аргументу.

Подставим функцию (37) в уравнение (19). После некоторых простых преобразований получаем, очевидно, уравнение (11). В этом уравнении определитель имеет отличными от нуля все миноры до порядка m'+1 включительно, что непосредственно следует из связи соответствующих миноров определителей уравнений (19) и (11).

Итак, было показано, что для n≥m≥m'+1 гиперповерхность N действительно задается локально одним из двух уравнений (10), (11), если для n≥m≥m' эта гиперповерхность задавалась уравнением (9). Покажем, далее, что для n≥m'+2 уравнение (10) феноменологически неинвариантно по перестановкам точек p и q и потому остается только уравнение (11).

Предположим сначала, что при перестановке точек p и q уравнение (10) сохраняет свою форму:

$$
\begin{vmatrix}
0 & 1 & .... & 1 & 1 \\
1 & \Pi[(iph...v,\alpha\nu...\tau)] & .... & \Pi[(iph...v,\lambda\nu...\tau)] & \Pi[(iph...v,\mu\nu...\tau)] \\
.... & .... & .... & .... & .... \\
1 & \Pi[(rph...v,\alpha\nu...\tau)] & .... & \Pi[(rph...v,\lambda\nu...\tau)] & \Pi[(rph...v,\mu\nu...\tau)] \\
1 & \Pi[(qph...v,\alpha\nu...\tau)] & .... & \Pi[(qph...v,\lambda\nu...\tau)] & \Pi[(qph...v,\mu\nu...\tau)]
\end{vmatrix} = 0\ . \qquad (38)
$$

Уравнения (10) и (38) задают неявно, например, $(i\alpha)$ как одну и ту же функцию переменной $(i\beta)$. Сравнивая два выражения для производной $\partial(i\alpha)/\partial(i\beta)$, найденные из этих неявных заданий, получаем:

$$
\hat{R}(qp)\frac{\Pi_{(i\beta)}[(iqh,\beta\nu)\overline{\Pi}[(iqh,\beta\nu)]}{\Pi_{(i\alpha)}[(iqh,\alpha\nu)\overline{\Pi}[(iqh,\alpha\nu)]} = 0\ , \qquad (39)
$$

где через $\overline{\Pi}$ обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителей уравнений (10) и (38), а также для сокращения записи опущены "неподвижные" точки, следующие за точками h и ν в полном исходном кортеже $<i...qh...v,\alpha...\mu\nu...\tau>$.

Соотношение (39) не содержит переменных $(i,\gamma\delta\varepsilon...\sigma\lambda\mu)$ и потому по всем входящим в него переменным является тождеством. В тождестве (39) зафиксируем значение всех переменных, кроме $<iqh...v,\alpha\nu...\tau>$:

$$
\Pi_{(i\alpha)}[(iqh,\alpha\nu)] = A_{(i\alpha)}[(ih,\alpha\nu)]B[(iqh,\nu)]C[(qh,\alpha\nu)]\ , \qquad (40)
$$

причем ни один из трех сомножителей справа не обращается в нуль.

Перепишем соотношение (39) в более удобной для дальнейших преобразований форме:

$$
\hat{R}(qp)\frac{\overline{\Pi}[(iqh,\alpha\nu)\overline{\Pi}[(iph,\beta\nu)]}{\Pi_{(i\beta)}[(iqh,\beta\nu)\Pi_{(i\alpha)}[(iph,\alpha\nu)]} = 0\ . \qquad (41)
$$

Используя выражение (40) для производной функции Π по первому аргументу, будем понижать порядок алгебраических дополнений, входящих в соотношение (41), по уже знакомой схеме. Продифференцируем соотношение (41) сначала по переменной $(j\alpha)$. Это приведет к понижению на единицу порядка алгебраических дополнений $\overline{\Pi}[(iqh,\beta\nu)]$ и $\overline{\Pi}[(iph,\beta\nu)]$. Последующее дифференцирование по переменной $(j\gamma)$ понизит на единицу порядок алгебраических дополнений $\overline{\Pi}[(iqh,\alpha\nu)]$ и $\overline{\Pi}[(iph,\alpha\nu)]$. Дифференцирование же по переменным $(k\gamma)$ и $(k\delta)$ приведет к понижению еще на единицу порядка указанных алгебраических дополнений. Продолжая последовательно этот процесс пониже-ния порядка, приходим к соотношению с алгебраическими дополнениями третьего порядка, которые удобно записать с помощью операторов альтернирования:

$$\hat{R}(qp)\frac{\Pi_{(i\beta)}[(iqh,\beta\nu)\hat{R}(rp)\hat{R}(\lambda\mu)\Pi[(rqh,\lambda\nu)]}{\Pi_{(i\lambda)}[(iqh,\lambda\nu)\hat{R}(rp)\hat{R}(\beta\mu)\Pi[(rqh,\beta\nu)]} = 0 \ . \qquad (42)$$

Сравнивая соотношение (42) и соотношение (2) из §6, устанавливаем их полную эквивалентность как уравнений относительно функции Π. То есть обе задачи тождественны и для уравнения (42) можно воспользоваться решением эквивалентного уравнения (2) из §6:

$$\Pi[(iqh,\alpha\nu)] = \{A[(ih,\alpha\nu)] - A[(qh,\alpha\nu)]\}B[(iqh,\nu)] +$$

$$+ E[(iqh,\nu)] + F[(qh,\alpha\nu)] \ , \qquad (43)$$

где $1/B[(iqh,\nu)]=\{H[(ih,\nu)]-H[(qh,\nu)]\}G[(qh,\nu)]$, причем $H \neq 0$, $G \neq 0$ и не обращается в нуль разность, стоящая в фигурных скобках.

Подставим выражение (43) для функции Π в уравнение (10). После некоторых простых и очевидных преобразований получаем об-об-щение уравнения (8) из §6:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ H[(ih,\nu)] & A[(ih,\alpha\nu)] & \dots & A[(ih,\lambda\nu)] & A[(ih,\mu\nu)] & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H[(rh,\nu)] & A[(rh,\alpha\nu)] & \dots & A[(rh,\lambda\nu)] & A[(rh,\mu\nu)] & 1 \\ H[(ph,\nu)] & A[(ph,\alpha\nu)] & \dots & A[(ph,\lambda\nu)] & A[(ph,\mu\nu)] & 1 \\ H[(qh,\nu)] & A[(qh,\alpha\nu)] & \dots & A[(qh,\lambda\nu)] & A[(qh,\mu\nu)] & 1 \end{vmatrix} = 0, \ (44)$$

в определителе которого отличны от нуля все алгебраические дополнения к минорам 1-го, 2-го, ... , (m'+1)-го порядков, содержащим только функции A.

Рассмотрим отдельно в уравнении (44) случай m=m'+1, когда (m'+2) - я точка μ является последней в полном исходном кортеже <$ijklf\dots srpqh\dots\nu,\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\dots\sigma\lambda\mu$>. Функции H левого столбца определителя этого уравнения становятся тогда попарно различными ненулевыми константами H_1, H_2, ... , $H_{m'+3}$. Удобно для после-дующего анализа уравнения (44) понизиить порядок его определителя, вы-читая пред-последний столбец из всех предыдущих, кроме первого:

$$\begin{vmatrix} H_1 & A[(ih,\alpha)]-A[(ih,\mu)] & \dots & A[(ih,\lambda)]-A[(ih,\mu)] & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{m'+1} & A[(rh,\alpha)]-A[(rh,\mu)] & \dots & A[(rh,\lambda)]-A[(rh,\mu)] & 1 \\ H_{m'+2} & A[(ph,\alpha)]-A[(ph,\mu)] & \dots & A[(ph,\lambda)]-A[(ph,\mu)] & 1 \\ H_{m'+3} & A[(qh,\alpha)]-A[(qh,\mu)] & \dots & A[(qh,\lambda)]-A[(qh,\mu)] & 1 \end{vmatrix} = 0 . \ (45)$$

Запишем уравнение (45) для кортежа <$ij_0\dots\nu_0,\alpha\beta_0\dots\mu_0$> с фиксированными точками j_0, ... , $\nu_0 \in M$, β_0, ... , $\mu_0 \in N$ и разложим определитель этого уравнения по элементам первой строки, введя удобные обозначения:

$$\lambda^1(i) + \sigma^1(\alpha) + \lambda^2(i)\sigma^2(\alpha) + \dots + \lambda^{n-1}(i)\sigma^{n-1}(\alpha) + \psi[(i\alpha)] = 0 \ ,$$

если n=m'+2, и

$$\lambda^1(i) + \sigma^1(\alpha) + \lambda^2(i)\sigma^2(\alpha) + \dots + \lambda^{m'+1}(i)\sigma^{m'+1}(\alpha) +$$

$$+ \psi[(i\alpha),\sigma^{m'+2}(\alpha), \dots ,\sigma^{n-1}(\alpha)] = 0 \ ,$$

если n≥m'+3, где $\lambda(i)=\lambda(x^1(i),\dots,x^m(i))$, $\sigma(\alpha)=\sigma(\xi^1(\alpha),\dots,\xi^n(\alpha))$. Разрешая последние два соотношения относительно $(i\alpha)$, получаем локальное координатное представление для функции f:

$$f(i\alpha) = \chi[\lambda^1(i), \dots ,\lambda^m(i),\sigma^1(\alpha), \dots ,\sigma^{n-1}(\alpha)] \ ,$$

в которое n координат $\xi^1(\alpha)$, ... , $\xi^n(\alpha)$ точки α входят через n-1 функцию $\sigma^1(\alpha)$, ... , $\sigma^{n-1}(\alpha)$, то есть несущественным образом, что приводит к противоречию с аксиомой III из §1.

Пусть теперь в уравнении (44) m≥m'+2, и за (m'+2)-ой точкой μ в полном исходном кортеже $<ijklf...srpqh...\nu,\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon...\sigma\lambda\mu\nu\dagger...\tau>$ обязательно следует, по крайней мере, еще одна точка ν. Перепишем уравнение (44), указав явно для удобства последующих преобразований еще одну точку $\dagger$, возможно, следующую за ν, и выписывая строку, содержащую точку $j \in M$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ H[(ih,\nu\dagger)] & A[(ih,\alpha\nu\dagger)] & \dots & A[(ih,\lambda\nu\dagger)] & A[(ih,\mu\nu\dagger)] & 1 \\ H[(jh,\nu\dagger)] & A[(jh,\alpha\nu\dagger)] & \dots & A[(jh,\lambda\nu\dagger)] & A[(jh,\mu\nu\dagger)] & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H[(ph,\nu\dagger)] & A[(ph,\alpha\nu\dagger)] & \dots & A[(ph,\lambda\nu\dagger)] & A[(ph,\mu\nu\dagger)] & 1 \\ H[(qh,\nu\dagger)] & A[(qh,\alpha\nu\dagger)] & \dots & A[(qh,\lambda\nu\dagger)] & A[(qh,\mu\nu\dagger)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (46)$$

Переставим в уравнении (46) точки μ и ν:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ H[(ih,\mu\dagger)] & A[(ih,\alpha\mu\dagger)] & \dots & A[(ih,\lambda\mu\dagger)] & A[(ih,\nu\mu\dagger)] & 1 \\ H[(jh,\mu\dagger)] & A[(jh,\alpha\mu\dagger)] & \dots & A[(jh,\lambda\mu\dagger)] & A[(jh,\nu\mu\dagger)] & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H[(ph,\mu\dagger)] & A[(ph,\alpha\mu\dagger)] & \dots & A[(ph,\lambda\mu\dagger)] & A[(ph,\nu\mu\dagger)] & 1 \\ H[(qh,\mu\dagger)] & A[(qh,\alpha\mu\dagger)] & \dots & A[(qh,\lambda\mu\dagger)] & A[(qh,\nu\mu\dagger)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (47)$$

Уравнения (46) и (47) задают неявно, например, $(i\alpha)$ как одну и ту же функцию всех остальных переменных, в частности $(j\alpha)$. Сравнивая два выражения для производной $\partial(i\alpha)/\partial(j\alpha)$, найденные из этих неявных заданий, получаем равенство:

$$\frac{A_{(j\alpha)}[(jh,\alpha\nu\dagger)]\overline{A}[(jh,\alpha\nu\dagger)]}{A_{(i\alpha)}[(ih,\alpha\nu\dagger)]\overline{A}[(ih,\alpha\nu\dagger)]} = \frac{A_{(j\alpha)}[(jh,\alpha\mu\dagger)]\overline{A}[(jh,\alpha\mu\dagger)]}{A_{(i\alpha)}[(ih,\alpha\mu\dagger)]\overline{A}[(ih,\alpha\mu\dagger)]}, \quad (48)$$

где через $\overline{A}$ обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителей уравнений (46) и (47).

Равенство (48) выполняется тождественно по всем входящим в него переменным, так как в нем отсутствуют переменные $(kl...pq,\alpha)$. Тождество (48) продифференцируем по переменной $(i\beta)$, переставим в нем местами числитель и знаменатель, после чего, дополнительно продифференцируем его по переменной $(k\beta)$. Эта процедура уменьшит порядок алгебраических дополнений $\overline{A}$ на единицу. Вернем числитель и знаменатель на прежние места и повторим вышеописанную процедуру с парой переменных $(k\gamma)$, $(l\gamma)$, в результате чего порядок алгебраических дополнений, входящих в равенство (48), понизится еще на одну единицу. Продолжая этот процесс с парами переменных $(l\delta)$, $(f\delta)$; ..., $(s\sigma)$, $(r\sigma)$; $(r\lambda)$, $(p\lambda)$, в итоге получим алгебраические дополнения третьего порядка, в разложении которых присутствуют только функции H:

$$\hat{R}(\mu\nu)\frac{A_{(i\alpha)}[(ih,\alpha\nu\dagger)]A_{(k\beta)}[(kh,\beta\nu\dagger)]\dots A_{(p\lambda)}[(ph,\lambda\nu\dagger)]}{A_{(j\alpha)}[(jh,\alpha\nu\dagger)]A_{(i\beta)}[(ih,\beta\nu\dagger)]\dots A_{(r\lambda)}[(rh,\lambda\nu\dagger)]}\times$$

$$\times\{H[(jh,\nu\dagger)]-H[(qh,\nu\dagger)]\}/\{H[(ph,\nu\dagger)]-H[(qh,\nu\dagger)]\}=0. \quad (49)$$

Результат (49) продифференцируем по переменной $(q\nu)$, произведя затем сокращение на все отличные от нуля множители:

$$H_{(q\nu)}[(qh,\nu\dagger)] = 0, \quad (50)$$

откуда следует, что функция H не зависит от своего первого аргумента. Аналогично, переставляя в уравнении (46) точку μ с каждой из точек $\dagger$, ... , τ, можно показать, что, кроме производной (50), обращаются в нуль еще и следующие производные:

$$H_{(q\dagger)}[(qh,\nu\dagger)] = 0, \ldots, H_{(q\tau)}[(qh,\nu\dagger)] = 0 \quad , \qquad (50')$$

то есть

$$H[(qh\ldots v,\nu\dagger\ldots\tau)] = H[(h\ldots v,\ \nu\dagger\ldots\tau)] = 0 \quad . \qquad (51)$$

Подставим выражение (51) для функции H в уравнение (46):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 \\ H_1[(h,\nu\dagger)] & A[(ih,\alpha\nu\dagger)] & \ldots & A[(ih,\lambda\nu\dagger)] & A[(ih,\mu\nu\dagger)] & 1 \\ H_2[(h,\nu\dagger)] & A[(jh,\alpha\nu\dagger)] & \ldots & A[(jh,\lambda\nu\dagger)] & A[(jh,\mu\nu\dagger)] & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H_{m'+2}[(h,\nu\dagger)] & A[(ph,\alpha\nu\dagger)] & \ldots & A[(ph,\lambda\nu\dagger)] & A[(ph,\mu\nu\dagger)] & 1 \\ H_{m'+3}[(h,\nu\dagger)] & A[(qh,\alpha\nu\dagger)] & \ldots & A[(qh,\lambda\nu\dagger)] & A[(qh,\mu\nu\dagger)] & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (52)$$

причем не обращаются в нуль как сами функции $H_1, H_2, \ldots, H_{m'+3}$, так и все их взаимные разности.

Определитель (m'+4) - го порядка уравнения (52) преобразуем к определителю (m'+3) - го порядка, аналогичному по своему строению определителю уравнения (45). Затем запишем это уравнение для кортежа $<ij_0\ldots v_0,\alpha\beta_0\ldots\tau_0>$ с фиксированными в нем точками $j_0, \ldots, v_0 \in M$, $\beta_0, \ldots, \tau_0 \in N$ и разложим определитель этого уравнения по элементам первой строки, ведя удобные обозначения:

$$\lambda^1(i) + \sigma^1(\alpha) + \lambda^2(i)\sigma^2(\alpha) + \lambda^{n-1}(i)\sigma^{n-1}(\alpha) + \psi[(i\alpha),\lambda^m(i)] = 0 \quad ,$$

если n=m=m'+2, и

$$\lambda^1(i) + \sigma^1(\alpha) + \lambda^2(i)\sigma^2(\alpha) + \lambda^{m'+1}(i)\sigma^{m'+1}(\alpha) +$$

$$+ \psi[(i\alpha), \lambda^{m'+2}(i), \ldots, \lambda^m(i),\sigma^{m'+2}(\alpha), \ldots ,\sigma^{n-1}(\alpha)] = 0 \quad ,$$

если n>m=m'+2 или n≥m≥m'+3, где $\lambda(i)=\lambda(x^1(i),\ldots,x^m(i))$, $\sigma(\alpha)= =\sigma(\xi^1(\alpha),\ldots,\xi^n(\alpha))$. Разрешая последние два соотношения относительно $(i\alpha)$, получаем локальное координатное представление для функции f, в которое n координат $\xi^1(\alpha), \ldots, \xi^n(\alpha)$ входят, очевидно, только через n-1 функцию $\sigma^1(\alpha), \ldots, \sigma^{n-1}(\alpha)$, то есть несущественным образом, что приводит к противоречию с аксиомой III из §1.

Итак, выше было показано, что уравнение (10) при перестановке точек p и q не может сохранить свою форму. Но тогда остается только предположить, что при этой перестановке оно меняет свою форму, то есть становится подобным уравнению (11):

$$\begin{vmatrix} T[(iph\ldots v,\alpha\nu\ldots\tau)] & \ldots & T[(iph\ldots v,\lambda\nu\ldots\tau)] & T[(iph\ldots v,\mu\nu\ldots\tau)] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T[(rph\ldots v,\alpha\nu\ldots\tau)] & \ldots & T[(rph\ldots v,\lambda\nu\ldots\tau)] & T[(rph\ldots v,\mu\nu\ldots\tau)] \\ T[(qph\ldots v,\alpha\nu\ldots\tau)] & \ldots & T[(qph\ldots v,\lambda\nu\ldots\tau)] & T[(qph\ldots v,\mu\nu\ldots\tau)] \end{vmatrix} = 0. \quad (53)$$

Уравнения (10) и (53) задают неявно, например, $(i\alpha)$ как одну и ту же функцию переменной $(i\beta)$. Сравнивая два выражения для производной $\partial(i\alpha)/\partial(i\beta)$, найденные из этих неявных заданий, получаем равенство:

$$\Pi_{(i\beta)}[(iqh,\beta\nu)]\,\overline{\Pi}\,[(iqh,\beta\nu)] \Big/ \Pi_{(i\alpha)}[(iqh,\alpha\nu)]\,\overline{\Pi}\,[(iqh,\alpha\nu)] =$$

$$= T_{(i\beta)}[(iph,\beta\nu)]\,\overline{T}\,[(iph,\beta\nu)] \Big/ T_{(i\alpha)}[(iph,\alpha\nu)]\,\overline{T}\,[(iph,\alpha\nu)] \quad , \qquad (54)$$

где через $\overline{\Pi}$ и $\overline{T}$ обозначены алгебраические дополннния к соответствующим элементам определителей уравнений (10) и (53).

Равенство (54), подобно соотношению (39), не содержит переменных $(i,\gamma\delta\varepsilon\ldots\sigma\lambda\mu)$ и потому является тождеством по всем входящим в него переменным. Зафиксируем в тождестве (54) значение всех переменных, кроме $(iqh\ldots v,\alpha\nu\ldots\tau)$, и разрешим его относительно производной $\Pi_{(i\alpha)}[(iqh,\alpha\nu)]$:

$$\Pi_{(i\alpha)}[(iqh,\alpha\nu)] = A_{(i\alpha)}[(ih,\alpha\nu)]B[(iqh,\nu)]C\,[(qh,\alpha\nu)] \quad . \qquad (55)$$

Если же в тождестве (55) зафиксировать все переменные, кроме ($iph...\nu,\alpha\nu...\tau$), и учесть результат (55), то аналогично получим:

$$T_{(i\alpha)}[(iph,\alpha\nu)] = A_{(i\alpha)}[(ih,\alpha\nu)]B_1[(ph,\alpha\nu)]B_2[(iph,\nu)] \quad ,$$

причем ни один из трех сомножителей справа в этом результате, как и в предыдущем, не обращается в нуль.

В определителе уравнения (53) из каждой строки можно вынести ненулевой множитель B_2, а из каждого столбца - B_1, с последующим на них сокращением. Произведем, поэтому несу-щественное переопределение функции T, исключая из выражения для нее множители B_1, B_2. Тогда для производной функции T можно записать:

$$T_{(i\alpha)}[(iph,\alpha\nu)] = A_{(i\alpha)}[(ih,\alpha\nu)] \quad . \qquad (56)$$

Используя выражения (55) и (56) для производных функций Π и T по первому аргументу, будем понижать порядок алгебраических дополнений, входящих в равенство (54), по схеме, совпадающей с той, которая была применена к соотношению (39). В результате приходим к равенству

$$\frac{\Pi_{(i\beta)}[(iqh,\beta\nu)]\hat{R}(rp)\hat{R}(\lambda\mu)\Pi[(rqh,\lambda\nu)]}{\Pi_{(i\lambda)}[(iqh,\lambda\nu)]\hat{R}(rp)\hat{R}(\beta\mu)\Pi[(rqh,\beta\nu)]} =$$

$$= \frac{T_{(i\beta)}[(iph,\beta\nu)]\hat{R}(rq)T\,[(rph,\lambda\nu)]T\,[(qph,\mu\nu)]}{T_{(i\lambda)}[(iph,\lambda\nu)]\hat{R}(rq)T\,[(rph,\beta\nu)]T\,[(qph,\mu\nu)]} \quad ,$$

которое эквивалентно равенству (10) из §6. Но тогда для функции T можно выписать выражение (12) из §6:

$$T\,[(qph,\lambda\nu)] = A[(qh,\lambda\nu)]B[(ph,\lambda\nu)]C[(qph,\nu)] \quad . \qquad (57)$$

причем $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ и $A_{(q\lambda)}[(qh,\lambda\nu)] \neq 0$.

Подставим функцию (57) в уравнение (53), вынося из каждой строки ненулевой множитель C, а из каждого столбца - B, с последующим на них сокращением. Уравнение (53) превращается при этом в тождество, так как из него выпадают переменные (p, $\alpha\beta\gamma...\tau$). Дифференцируя это тождесво по переменным ($i\alpha$), ($j\beta$), ..., ($r\lambda$), ($q\mu$), получаем:

$$A_{(i\alpha)}[(ih,\alpha\nu)] \times ... \times A_{(r\lambda)}[(rh,\lambda\nu)]A_{(q\mu)}[(qh,\mu\nu)] = 0 \ ,$$

что противоречит необращению в нуль каждого из сомножителей.

Установленное противоречие доказывает, что при перестановке точек p и q уравнение (10) не может переходить в уравнение (53), то есть не может изменить свою форму. Поскольку это уравнение не может также, как было показано выше, и сохранить свою форму при перестановке точек p и q, оно оказывается феноменологически неинвариантным. Таким образом, для n≥m'+2 уравнение (10) не является локальным заданием гиперповерхности N и потому для задания этой гиперповерхности остается только уравнение (11).

Итоговым результатом настоящего восьмого параграфа, будет следующее утверждение, доказанное методом индукции:

для n≥m≥m'≥2 гиперповерхность **N** локально задается либо уравнением (8), либо уравнением (9). Если же n≥m'+1, то локальным заданием гиперповерхности **N** может быть только уравнение (9), естественным следствием которого является уравнение (20).

§9. Завершение доказательства основной классификационной теоремы

Для завершения доказательства основной классификационной теоремы общий случай n≥m≥2, подробно рассмотреный в §§5, 6, 7, 8, разобьем на три непересекающихся подслучая: n=m≥2, n=m+1≥3, n≥m+2≥4.

Рассмотрим сначала первый случай

$$n = m \geq 2 \;. \tag{1}$$

Запишем уравнения (8) и (9) из §8, полагая m'=m:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \psi[(i\alpha)] & \psi[(i\beta)] & \dots & \psi[(i\tau)] \\ 1 & \psi[(j\alpha)] & \psi[(j\beta)] & \dots & \psi[(j\tau)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \psi[(v\alpha)] & \psi[(v\beta)] & \dots & \psi[(v\tau)] \end{vmatrix} = 0 \;, \tag{2}$$

$$\begin{vmatrix} \psi[(i\alpha)] & \psi[(i\beta)] & \dots & \psi[(i\tau)] \\ \psi[(j\alpha)] & \psi[(j\beta)] & \dots & \psi[(j\tau)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi[(v\alpha)] & \psi[(v\beta)] & \dots & \psi[(v\tau)] \end{vmatrix} = 0 \;, \tag{3}$$

где $\Psi \equiv \Pi$ или $\Psi \equiv T$ - произвольная достаточно гладкая функция одной переменной с отличной от нуля производной.

Уравнения (2) и (3) запишем для кортежа $<ij_0 \dots v_0, \alpha\beta_0 \dots \tau_0>$ с фиксированными в нем точками $j_0, \dots, v_0 \in M$ и $\beta_0, \dots, \tau_0 \in$ N. Вводя удобные обозначения функций $\lambda^1, \dots, \lambda^m$ и $\sigma^1, \dots, \sigma^m$ локальных координат $x^1, \dots, x^m$ и $\xi^1, \dots, \xi^m$ множеств *M* и N, получаем локальные координатные представления функции f:

$$f(i\alpha)=\psi^{-1}[\lambda^1(i)\sigma^1(\alpha) +\dots+ \lambda^{m-1}(i)\sigma^{m-1}(\alpha) + \lambda^m(i) + \sigma^m(\alpha)] \;, \tag{4}$$

$$f(i\alpha)=\psi^{-1}[\lambda^1(i)\sigma^1(\alpha) +\dots+ \lambda^{m-1}(i)\sigma^{m-1}(\alpha) + \lambda^m(i)\,\sigma^m(\alpha)] \;, \tag{5}$$

где $\lambda(i) = \lambda[x^1(i),\dots,x^m(i)]$, $\sigma(\alpha) = \sigma[\xi^1(\alpha),\dots,\xi^m(\alpha)]$, причем $\partial(\lambda^1,\dots,\lambda^m)/\partial(x^1,\dots,x^m) \neq 0$, $\partial(\sigma^1,\dots,\sigma^m)/\partial(\xi^1,\dots,\xi^m) \neq 0$.

Функции (4) и (5) задают структуры ранга (m+1,m+1) с феноменологически мнвариантными связями (2) и (3) соответственно. Результаты (4), (2) и (5), (3) с точностью до эквивалентости совпадают с результатами (9), (10) и (7), (8) основной классифи-кационной теоремы из §1, включая в себя результаты (59), (58) и (57), (56) из §5 как частный случай, когда n=m=2.

Перейдем теперь, к рассмотрению второго случая, когда

$$n = m + 1 \geq 3 \;. \tag{6}$$

Запишем уравнение (19) из §8, полагая m'=m:

$$\begin{vmatrix} \psi[(i\alpha)] & \psi[(i\beta)] & \dots & \psi[(i\tau)] & 1 \\ \psi[(j\alpha)] & \psi[(j\beta)] & \dots & \psi[(j\tau)] & 1 \\ \psi[(k\alpha)] & \psi[(k\beta)] & \dots & \psi[(k\tau)] & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi[(v\alpha)] & \psi[(v\beta)] & \dots & \psi[(v\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \;, \tag{7}$$

где $\Psi \equiv P$ - произвольная достаточно гладкая функция одной переменной с отличной от нуля производной.

Запишем уравнение (7) для кортежа <$ij_0k_0...v_0,\alpha\beta_0...\tau_0$> с фиксированными в нем точками j_0, k_0, ... , $v_0 \in M$ и β_0, ... , $\tau_0 \in$ N. Вводя удобные обозначения функций λ^1, ... , λ^m и σ^1, ... , σ^m, σ^{m+1} локальных координат x^1, ... , x^m и ξ^1, ... , ξ^m, ξ^{m+1} множеств M и N, получаем локальное координатное представление функции f:

$$f(i\alpha) = \psi^{-1}\,[\lambda^1(i)\sigma^1(\alpha) + ... + \lambda^m(i)\sigma^m(\alpha) + \sigma^{m+1}(\alpha)]\ , \qquad (8)$$

где $\lambda(i) = \lambda[x^1(i),...,x^m(i)]$, $\sigma(\alpha) = \sigma[\xi^1(\alpha),...,\xi^m(\alpha),\xi^{m+1}(\alpha)]$, причем $\partial(\lambda^1,...,\lambda^m)/\partial(x^1,...,x^m) \neq 0$, $\partial(\sigma^1,...,\sigma^{m+1})/\partial(\xi^1,...,\xi^{m+1}) \neq 0$.

Функция (8) задает на m-мерном и (m+1)-мерном многообразиях M и N физическую структуру ранга (m+2,m+1) с феноменологически инвариантной связью (7). Заметим, что результат (4), (3) из §7 является частным случаем только что полученного, когда n=m+1=3, то есть m=2. С другой стороны, результат (8), (7) не включает в себя результатов (6), (5) из §4. Однако, строение определителя уравнения (5) из §4 и определителя уравнения (7) из настоящего параграфа совпадают. То же самое можно сказать о функциях (6) из §4 и (8) из данного. Поэтому можно объединить результаты (6), (5) из четвертого параграфа и (8), (7) из настоящего, которые тогда с точностью до эквивалентности совпадут с результатом (14), (13) основной классификационной теоремы из §1. Аналогичный результат для симметричного случая m=n+1≥2 легко воспроизводится по выражениям (4), (3) из §7 и выражениям (8), (7), совпадая с точностью до эквивалентности с результатами (11), (12) основной классификационной теоремы из §1.

Перейдем, наконец, к рассмотрению последнего, третьего, случая, когда

$$n \geq m + 2 \geq 4\ . \qquad (9)$$

Запишем уравнение (19) из §8, полагая m'=m:

$$\begin{vmatrix} P[(iqh...v,\alpha)] & P[(iqh...v,\beta)] & .... & P[(iqh...v,\tau)] & 1 \\ P[(jqh...v,\alpha)] & P[(jqh...v,\beta)] & .... & P[(jqh...v,\tau)] & 1 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ P[(rqh...v,\alpha)] & P[(rqh...v,\beta)] & .... & P[(rqh...v,\tau)] & 1 \\ P[(pqh...v,\alpha)] & P[(pqh...v,\beta)] & .... & P[(pqh...v,\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0\,. \quad (10)$$

Поскольку n≥m+2, за (m+2)-й точкой p в полном исходном кортеже <$ijk...srpqh...v,\alpha\beta\gamma...\tau$> следует, по крайней мере, еще одна точка q. Поэтому в уравнении (10) можно переставить точки p и q:

$$\begin{vmatrix} P[(iph...v,\alpha)] & P[(iph...v,\beta)] & .... & P[(iph...v,\tau)] & 1 \\ P[(jph...v,\alpha)] & P[(jph...v,\beta)] & .... & P[(jph...v,\tau)] & 1 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ P[(rph...v,\alpha)] & P[(rph...v,\beta)] & .... & P[(rph...v,\tau)] & 1 \\ P[(qph...v,\alpha)] & P[(qph...v,\beta)] & .... & P[(qph...v,\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0\ . \quad (11)$$

Уравнения (10) и (11) задают неявно, например, $(i\alpha)$ как одну и ту же функцию всех остальных переменных, в частности $(i\beta)$. Сравнивая два выражения для одной производной $\partial(i\alpha)/\partial(i\beta)$, найденные из этих неявных заданий, получаем:

$$\hat{R}(qp)\frac{P_{(i\beta)}[(iqh...v,\beta)]\overline{P}[(iqh...v,\beta)]}{P_{(i\alpha)}[(iqh...v,\alpha)]\overline{P}[(iqh...v,\alpha)]} = 0\ , \qquad (12)$$

где через $\overline{P}$ обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителей уравнений (10) и (11).

Соотношение (12) выполняется тождественно по всем входящим в него переменным, так как из полного их набора в нем отсутствуют переменные $(i,\gamma\delta...\tau)$. Зафиксируем в тождестве (12) значение всех переменных, кроме $(iqh...v,\alpha)$ и разрешим его относительно соответствующей производной функции P:

$$P_{(i\alpha)}[(iqh...v,\alpha)] = A_{(i\alpha)}[(ih...v,\alpha)]B[(qh...v,\alpha)] \quad ,$$

причем ни один из двух сомножителей справа в нуль не обращается. Интегрируя последний результат по переменной $(i\alpha)$, получаем выражение для функции P:

$$P[(iqh...v,\alpha)] =$$

$$= A[(ih...v,\alpha)]B[(qh...v,\alpha)] + C[(qh...v,\alpha)] \quad . \qquad (13)$$

Подставим функцию (13) в уравнение (10). Слагаемое С исключается в каждом столбце линейной комбинацией со столбцом из единиц. Ненулевой множитель В можно вынести из каждого столбца и произвести на него сокращение. В результате получаем:

$$\begin{vmatrix} A[(ih...v,\alpha)] & A[(ih...v,\beta)] & .... & A[(ih...v,\tau)] & 1 \\ A[(jh...v,\alpha)] & A[(jh...v,\beta)] & .... & A[(jh...v,\tau)] & 1 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ A[(rh...v,\alpha)] & A[(rh...v,\beta)] & .... & A[(rh...v,\tau)] & 1 \\ A[(ph...v,\alpha)] & A[(ph...v,\beta)] & .... & A[(ph...v,\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0\,. \quad (14)$$

Уравнение (14), в действительности, является тождеством по всем входящим в него переменным, так как из него "выпали" переменные $(q,\alpha\beta\gamma...\tau)$. Продифференцируем тождество (14) по переменным $(i\alpha)$, $(j\beta)$, $(k\gamma)$, ... , $(r\tau)$:

$$A_{(i\alpha)}[(ih...v,\alpha)] \times A_{(j\alpha)}[(jh...v,\beta)] \times ... \times A_{(r\tau)}[(rh...v,\tau)] = 0 \quad ,$$

что противоречит необращению в нуль производной по первому аргументу функции A из выражения (13). Установленное противоречие доказывает, что уравнение (10) феноменологически неинвариантно относительно перестановки точек p,q и потому не может быть локальным заданием гиперповерхности N. То есть физические структуры ранга (n+1,m+1) для n≥m+2≥4 не существуют.

В конце седьмого параграфа было доказано, что не существуют физические структуры ранга (n+1,3) для n≥4, то есть для n≥m+2=4. Очевидно, что это есть частный случай только что полученного результата, когда m=2. В конце же четвертого параграфа было доказано несуществование физических структур ранга (n+1,2) для n≥4. Объединяя оба результата конца четвертого и настоящего параграфов, можно сказать, что не существуют физические структуры ранга (n+1,m+1) для n≥m+2≥3, кроме случая n=m+2=3. Этот общий результат и симметричный ему по перестановке чисел m и n составляют содержание заключительного утверждения основной классификационной теоремы из §1.

Напомним еще, что с точностью до эквивалентности и симметрии по перестановке целых чисел m и n канонические формы для локального координатного представления функции f, задающей физическую структуру ранга (n+1,m+1) и соответствующая феноменологически инвариантная функциональная связь $\Phi = 0$, приведенные в тексте основной классификационной теоремы из §1, совпадают со следующими результатами, полученными в процессе ее доказательства:

(5),(6)	⇔	(14),(13) из §2
(7),(8)	⇔	(5),(3) из §9
(9),(10)	⇔	(4),(2) из §9
(11),(12)	↔	(6),(5) из §4 и (8),(7) из §9
(13),(14)	⇔	(6),(5) из §4 и (8),(7) из §9
(15),(16)	↔	(16),(15) из §4
(17),(18)	⇔	(16),(15) из §4

, где через ⇔ обозначено совпадение с точностью до эквивалентности, а через ↔ - совпадение с точностью до эквивалентности и симметрии по перестановке целых чисел m и n. Номера формул слева относятся к первому параграфу.

Таким образом, основная классификационная теорема, сформулированная в §1, полностью доказана.

Заключение

В основной части была построена классификация бинарных однометрических физических структур, когда функция f сопоставляет паре точек из разных множеств одно вещественное число. Имеется, однако, несколько естественных возможностей обобщения и развития понятия физической структуры, плодотворных не только в физическом, но и в математическом смыслах, в частности геометрическом.

Прежде всего отметим, что с геометрической точки зрения следует точно определить и подробно исследовать физические структуры на одном множестве, рассматривая функцию f как обычную метрику. С другой стороны, паре точек совсем не обязательно сопоставлять только одно вещественное число - идея полиметрических (двуметрических и т. д.) физических структур. Дополнительные возможности обобщения можно реализовать, рассматривая физические структуры на трех, четырех и т. д. множествах.

Ниже определение произвольных физических структур будет дано кратко и в самых общих чертах, так как целью автора является описание того спектра проблем и задач, которые естественно возникли в теории физических структур и к решению которых мог бы подключиться всякий, желающий испытать свои творческие силы и способности в новой для себя области.

Пусть имеются p множеств $M_1, \dots, M_p$ произвольной природы, каждое из которых в математическом смысле представляет собой гладкое многообразие размерности $m_1, \dots, m_p$ соответственно. Пусть также имеется функция

$$f: \mathbf{G}_f \to \mathrm{R}^s \tag{1}$$

с открытой и плотной в $\mathrm{M}_1^{q_1} \times \dots \times \mathrm{M}_p^{q_p}$ областью определения $\mathbf{G}_f$, сопоставляющая каждому кортежу длины $q = q_1 + \dots + q_p$ из $\mathbf{G}_f$ s вещественных чисел, то есть точку из R^s. Будем предполагать, что функция f невырождена в смысле аксиомы III из §1 основной части, то есть что она достаточно гладкая в своем координатном представлении и в это представление координаты точек каждого из множеств $M_1, \dots, M_p$ входят существенным образом. Числовой кортеж $<q_1, \dots, q_p>$ назовем кратностью физической структуры, сумму $q = q_1 + \dots + q_p$ чисел в кратности - арностью, а число s - порядком.

Пусть, далее, $\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_p$ - произвольные целые числа, такие что $\mathrm{M}_1 \ge q_1+1, \dots, \mathrm{M}_p \ge q_p+1$. Введем функцию

$$F: \mathbf{G}_F \to \mathrm{R}^{sC_{\mathrm{M}_1}^{q_1} \times \dots \times C_{\mathrm{M}_p}^{q_p}}, \tag{2}$$

где $\mathbf{G}_F \subset \mathrm{M}_1^{\mathrm{M}_1} \times \dots \times \mathrm{M}_p^{\mathrm{M}_p}$, сопоставляя кортежу длины $\mathrm{M}_1 + \dots + \mathrm{M}_p$ из $\mathbf{G}_F$ совокупность $sC_{\mathrm{M}_1}^{q_1} \times \dots \times C_{\mathrm{M}_p}^{q_p}$ чисел, соответсвующих всем кортежам длины $q = q_1 + \dots + q_p$, являющихся проекциями исходного кортежа на область $\mathbf{G}_f$. Аналогично введем функцию

$$F': \mathbf{G}_{F'} \to \mathrm{R}^{sC_{\mathrm{M'}_1}^{q_1} \times \dots \times C_{\mathrm{M'}_p}^{q_p}}, \tag{2'}$$

где $\mathbf{G}_{F'} \subset \mathrm{M}_1^{\mathrm{M'}_1} \times \dots \times \mathrm{M}_p^{\mathrm{M'}_p}$ и $\mathrm{M'}_1 \ge \mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M'}_p \ge \mathrm{M}_p$. Естественно, что области определения $\mathbf{G}_F$ и $\mathbf{G}_{F'}$ введенных функций являются открытыми и плотными множествами в соответствующих прямых произведениях.

Будем говорить, что функция (1) задает на многообразиях $M_1, \dots, M_p$ размерности $m_1, \dots, m_p$ q-арную физическую структуру ранга $(\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_p)$, кратности $<q_1, \dots, q_p>$ и порядка s, если на плотном в $\mathbf{G}_F$ множестве ранг функции $\boldsymbol{F}$ равен

$$s(C_{\mathrm{M}_1}^{q_1} \times \dots \times C_{\mathrm{M}_p}^{q_p} - 1), \tag{3}$$

а на плотном в $G_{F'}$ множестве ранг функции F' равен

$$\min(M'_1 m_1 + \ \ldots\ + M'_p m_p,\ sC_{M'_1}^{q_1} \times\ \ldots\ \times C_{M'_p}^{q_p} -$$

$$- \ sC_{M'_1 - M_1 + q_1}^{q_1} \times\ \ldots\ \times C_{M'_p - M_p + q_p}^{q_p}) \ , \qquad (3')$$

если $(M'_1,\ldots,M'_p) \neq (M_1,\ldots,M_p)$.

Другими словами, локально множество значений функции F является подмножеством множества нулей s-компонентной гладкой функции $\Phi = (\Phi_1,\ldots,\Phi_s)$ от $sC_{M_1}^{q_1} \times\ldots\times C_{M_p}^{q_p}$ переменных, причем s уравнений $\Phi = 0$ независимы и являются порождающими в том смысле, что любые другие нетривиальные связи будут только их следствием.

Перечислим теперь все те случаи в рамках общего определения, для которых построена полная классификация физических структур:

$$\left.\begin{array}{ll}
\mathbf{1}. & p = 1, m = 1, q = 2, s = 1, M = 3; \\
\mathbf{2}. & p = 1, m = 2, q = 2, s = 1, M = 4; \\
\mathbf{3}. & p = 1, m = 3, q = 2, s = 1, M = 5; \\
\mathbf{4}. & p = 1, m = 2, q = 2, s = 2, M = 3; \\
\mathbf{5}. & p = 1, m = 3, q = 2, s = 3, M = 3; \\
\mathbf{6}. & p = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 1, q_1 = 1, q_2 = 1, \\
 & q = 2, s = 1, M_1 = m_2 + 1, M_2 = m_1 + 1; \\
\mathbf{7}. & p = 2, m_1 = 2, m_2 = 2n_2, q_1 = 1, q_2 = 1, \\
 & q = 2, s = 2, M_1 = n_2 + 1, M_2 = 2.
\end{array}\right\} \qquad (4)$$

Задача №1 была одной из наиболее простых. Физическая структура в этом случае эквивалентна направленной евклидовой прямой (см. [6], стр. 200-205).

Задача №2 была решена автором и результатом ее решения была полная классификация всех плоских (двумерных) феноменологически симметричных геометрий, в которых шесть расстояний для любых четырех точек функционально связаны (см. [11] и [12]).

Задача №3 подобна предыдущей, но технически значительно сложнее. Ее решение составило предмет исследования В.ХЛьва в защищенной им кандидатской диссертации. В.Х.Лев построил полную классификацию трехмерных феноменологически симметричных геометрий, в которых десять взаимных расстояний для произвольных пяти точек функционально связаны (см. [13]).

Результатом решения задач №4 и №5 была полная классификация двуметрических и триметрических феноменологически симметричых геометрий минимального ранга, равного трем. Некоторые из таких необычных геометрий допускают содержательную физическую интерпретацию в термодинамике.

Решению задачи №6 посвящена настоящая монография. Соответствующая полная классификация бинарных однометрических физических структур приведена в классификационной теореме из §1 основной части и впервые была опубликована автором в ДАН [1] .

Задача №7 интересна в том плане, что среди ее решений есть и такие, которые могут быть получены комплексификацией (в широком смысле) решений задачи №6. Это обстоятельство позволяет с новой точки зрения посмотреть на природу не только обычных комплексных чисел, но также двойных и дуальных [14], [15] .

В разное время автором были рассмотрены тернарные однометрические физические структуры на одном, двух и трех множествах. Оказалось, что тернарные структуры, в отличие от бинарных, существуют только в простейших случаях минимально возможных рангов (см. [6], стр. 205-217, [16], [17]).

Среди большого числа нерешенных задач, содержательных как в физическом, так и математическом смыслах, автор выделил бы следующие:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{a)} & p=1, m\geq 4, q=2, s=1, M=m+2; \\
\text{b)} & p=1, m=2n, q=2, s=2, M=n+2; \\
\text{c)} & p=2, m_1=2n_1, m_2=2n_2, q_1=1, q_2=1, \\
 & q=2, s=2, M_1=n_2+1, M_2=n_1+1.
\end{array}\right\} \qquad (4')$$

Обратим внимание читателя на то, что в случае бинарных физических структур, не обязательно однометрических, имеются определенные связи между размерностями множеств, на которых задана структура, и ее рангом. Это обстоятельство не случайно и является следствием их групповых свойств. Оказывается, что функция f допускает группу движений с определенным числом параметров. Наример, если функция f на двумерном многообразии задает физическую структуру ранга 4, то эта функция допускает трехмерную группу движений, являясь для нее двухточечным инвариантом. Вторая монография автора будет посвящена рассмотрению групповых свойств физических структур. Предварительное знакомство с ними можно осуществить по его работам [18], [19].

Ю. С. Владимиров и его теоретическая школа из Московского университета в настоящее время работают над созданием единой теории пространства-времени и физических взаимодействий, полагая в основу своих построений комлексные физические структуры различных рангов [20]. Поэтому имеет смысл исследовать их независимо от вещественных. С другой стороны, комлексные однометрические физические структуры естественно считать частным случаем вещественных двуметрических. То есть какие-то результаты для комплексных структур, если не все, можно получить комплексификацией соответствующих результатов для вещественных, а по полным результатам для вещественных двуметрических структур можно установить феноменологические предпосылки происхождения комлексных чисел.

И, в заключение, остановимся кратко на некоторых геометрических следствиях физических структур.

Пусть множества M и N совпадают, то есть являются гладким многообразием M размерности m. Запишем для этого случая канонические выражения (5), (6); (7), (8) и (9), (10) из §1:

$$f(ii') = x^1(i) + \xi^1(i') \,, \tag{5}$$

$$f(ii') - f(ij') - f(ji') + f(jj') = 0 \;; \tag{6}$$

$$f(ii') = x^1(i)\xi^1(i') + \ldots + x^m(i)\xi^m(i') \,, \tag{7}$$

$$\begin{vmatrix} f(ii') & f(ij') & \ldots & f(iv') \\ f(ji') & f(jj') & \ldots & f(jv') \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(vi') & f(vj') & \ldots & f(vv') \end{vmatrix} = 0 \;; \tag{8}$$

$$f(ii') = x^1(i)\xi^1(i') + \ldots + x^{m-1}(i)\xi^{m-1}(i') + x^m(i) + \xi^m(i') \,, \tag{9}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & f(ii') & f(ij') & \ldots & f(iv') \\ 1 & f(ji') & f(jj') & \ldots & f(jv') \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & f(vi') & f(vj') & \ldots & f(vv') \end{vmatrix} = 0 \,. \tag{10}$$

В общем случае точки i и i', j и j', ... , v и v' не обязательно совпадают, а соответствующие их окрестности не обязательно пересекаются. Если же эти точки совпадают или их окрестности пересекаются, то в выписанных выше выражениях можно положить $i = i'$, $j = j'$, ... , $v = v'$:

$$f(ij) = x^1(i) + \xi^1(j) \,, \tag{5'}$$

$$f(ii) - f(ij) - f(ji) + f(jj) = 0 \;; \tag{6'}$$

$$f(ij) = x^1(i)\xi^1(j) + \ldots + x^m(i)\xi^m(j) \,, \tag{7'}$$

$$\begin{vmatrix} f(ii) & f(ij) & \ldots & f(iv) \\ f(ji) & f(jj) & \ldots & f(jv) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(vi) & f(vj) & \ldots & f(vv) \end{vmatrix} = 0 \;; \tag{8'}$$

$$f(ij) = x^1(i)\,\xi^1(j) + \ldots + x^{m-1}(i)\xi^{m-1}(j) + x^m(i) + \xi^m(j) \,, \tag{9'}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & f(ii) & f(ij) & \ldots & f(iv) \\ 1 & f(ji) & f(jj) & \ldots & f(jv) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & f(vi) & f(vj) & \ldots & f(vv) \end{vmatrix} = 0 \quad . \qquad (10')$$

где $\xi(i)=\xi(x^1(i),...,x^m(i))$.

Заметим, что определители (8') и (10') имеют строение определителей Грама и Кэли-Менгера соответственно. Поэтому уравнения (8') и (10') могут быть интерпретированы как некоторые известные соотношения в геометрии. Блюменталь Л. М. [21] в своей монографии рассматривал метрические пространства, взаимные расстояния между точками которых удовлетворяют соотношениям типа (8'), (10'). Результаты настоящей работы в каком-то смысле предваряют исследования Блюменталя, так как уравнения (8'), (10') естественно вытекают из аксиом теории физических структур. Блюменталь же постулирует эти уравнения, рассматривая их как исходные аксиомы своей геометрии расстояний.

Более конкретную геометрическую интерпретацию результатов (5’) - (10’) можно получить, введя дополнительные ограничения на функцию $f(ij)$, координатное представление которой задается выражениями (5’), (7’) и (9’):

<u>Аксиома симметрии</u>. *Для любых двух точек i, $j \in M$ таких, что пары <ij> и <ji> принадлежат $\boldsymbol{G}_f$, расстояния $f(ij)$ и $f(ji)$ связаны соотношением*

$$f(ij) = \Theta(f(ji)) \ ,$$

где Θ - некоторая строго монотонная функция одной переменной.

В работах автора [22], [23] установлено, что функция $f(ij)$ удовлетворяющая аксиоме симметрии, может быть либо симметричной, либо, с точностью до эквивалентности, антисимметричной. При этом в некоторой системе локальных координат $x=(x^1,...,x^{m-1},x^m)$ выражения для нее можно записать в следующем виде:

$$f(ij) = x(i) + a x(j) \ , \qquad (11)$$

$$f(ij) = g_{\lambda\sigma} x^\lambda(i)\, x^\sigma(j) \ , \qquad (12)$$

$$f(ij) = h_{\mu\nu}\, x^\mu(i)\, x^\nu(j) + x^m(i) + a x^m(j) \ , \qquad (13)$$

где $a = \pm1$, $g_{\lambda\sigma} = a g_{\sigma\lambda}$, $\lambda, \sigma = 1, \ldots, m$; $h_{\mu\nu} = a h_{\nu\mu}$, $\nu, \mu = 1, \ldots, m-1$, причем для $a = -1$ размерность m многообразия M четна в выра-жении (12) и нечетна в выражении (13).

Полагая $f(ii) = f \neq 0$ в выражении (12) при $a = +1$, получаем из него метрику римановых и псевдоримановых пространств постоянной ненулевой кривизны. Из выражения же (13) при $a = +1$ и условии $f(ii) = 0$ получаются метрики евклидовых и псевдоевклидовых пространств. Если же $a = -1$,то $f(ii) \equiv 0$ и выражения (11), (12), (13) задают антисимметричные метрики симплектических пространств <u>четной</u> - (12) и, обратим внимание, <u>нечетной</u> - (11), (13) размерности.

Литература

1. Михайличенко Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Докл. АН СССР.-1972.-Т. 206,№5.-С.1056-1058.

2. Михайличенко Г.Г. Об одном функциональном уравнении с двухиндексными переменными // Укр. мат. журн.-1973.-Т.25,№5.-С.589-598.

3. Михайличенко Г.Г. Об одной задаче в теории физических структур // Сиб. мат. журн.-1977.-Т.18,№6.-С.1342-1355.

4. Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур (дополнение Михайличенко Г.Г.).-Новосибирск:НГУ,1968.-226 с.

5. Кулаков Ю.И. О теории физических структур // Записки научных семинаров ЛОМИ.-Л.:Наука,1983.-Т.127.-С.103-151.

6. Михайличенко Г.Г. Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур // Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур.-Новосибирск: НГУ,1968.-С.175-226.

7. Кулаков Ю.И. Об одном принципе, лежащим в основании классической физики // Докл. АН СССР.-1970.-Т.193, №1. -С.72-75.

8. Кулаков Ю.И. Математическая формулировка теории физических структур // Сиб. мат. журн. -1971.-Т.12,№5,-С.1142-1145 .

9. Михайличенко Г.Г. Бинарная физическая структура ранга (3, 2) // Сиб. мат. журн.-1973.-Т.14, №5.-С.1057-1064.

10. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований.-М.: ИЛ,1947.-360 с.

11. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии // Докл. АН СССР.-1981.-Т.260,№ 4.-С.803-805.

12. Михайличенко Г.Г. Geometries a deux dimensions dans la theorie de structures physiques // Comptes Rendus Acad. Sc. Paris.-1981.-Vol.293, Ser.1.-P.529-531.

13. Лев В.Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычислительные системы.-Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988.-Вып.125.-С.90-103.

14. Михайличенко Г.Г. Двуметрические физические структуры и комплексные числа // Докл. АН СССР. -1991. -Т.321, №4. -С.677-680.

15. Михайличенко Г.Г. Двуметрические физические структуры ранга (n+1,2) // Сиб. мат журн. -1993.-Т.34, №3-С. 132-143.

16. Михайличенко Г.Г. Тернарная физическая структура ранга (3,2) // Укр. мат. журн.-1970.-Т.22,№6.-С.837-841.

17. Михайличенко Г.Г. Тернарная физическая структура ранга (2,2,2) // Изв. вузов. Математика.-1976.-№8(171).-С.60-67.

18. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // Докл. АН СССР. - 1983. -Т.269, №2. -С. 284-288.

19. Михайличенко Г.Г. Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физических структур) // Докл. АН СССР.-1985.-Т.284,№1.-С.39-41.

20. Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. Введение в теорию физических структур и бинарную гемет-рофизику.-М.: Архимед,1992.-184 с.

21. Blumenthal L.M. Theory and application of distance geometry.-Oxford,1953.

22. Михайличенко Г.Г. Некоторые следствия гипотезы о бинарной структуре пространства // Изв. вузов. Математика.-1991.-№6.-С.28-35.

23. Михайличенко Г.Г. К вопросу о симметрии расстояния в геометрии // Изв. вузов. Математика.-1994.-№4.-С.21-23.

А. А. Литвинцев

Комплексная физическая структура ранга (2,2)

Одним из возможных вариантов обобщения понятия физической структуры, является их комплексификация, когда двум точкам из разных множеств сопоставляется не действительное, а комплексное число. С другой стороны, комплексные физические структуры положены в основу нового направления - бинарной геометрофизики, целью которой является построение единой теории пространства-времени и физических взаимодействий [1].

В данной работе рассматривается комплексная физическая структура ранга (2,2) и для нее формулируется и доказывается теорема существования и единственности. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть имеются два одномерных комплексных многообразия M и N, элементы которых будем обозначать строчными латинскими и греческими буквами соответственно, и голоморфная функция f:$\boldsymbol{G}_f \to \mathrm{C}$, сопоставляющая каждой паре $<i\alpha> \in \boldsymbol{G}_f$ некоторое комплексное число $f(i\alpha) \in \mathrm{C}$, где $\boldsymbol{G}_f$ открыто и плотно в M $\times$ N.

Для некоторых точек $\gamma\in$N и $k\in$M введем функции $f[\gamma]$ и $f[k]$, сопоставляя точкам $i\in$M и $\alpha\in$N точки $f(i\gamma)\in\mathrm{C}$ и $f(k\alpha)\in\mathrm{C}$, если пары $<i\gamma>$ и $<k\alpha>$ принадлежат $\boldsymbol{G}_f$. Функции $f[\gamma]$ и $f[k]$ определены на некоторых подмножествах в M и N. Будем предполагать выполнение следующей **аксиомы**:

I. *В N и M существуют плотные множества точек γ и k, для каждой из которых ранги отображений $f[\gamma]$ и $f[k]$ равны единице для плотных в M и N множеств точек i и α соответственно.*

Введем еще отображение F:$\boldsymbol{G}_F \to \mathrm{C}^4$, сопоставляя кортежу $<ij,\alpha\beta>\in\boldsymbol{G}_F$ точку $F(<ij,\alpha\beta>)=(f(i\alpha),f(i\beta),f(j\alpha),f(j\beta))\in\mathrm{C}^4$, где $\boldsymbol{G}_F=\{<ij,\alpha\beta>: <i\alpha>,<i\beta>,<j\alpha>,<j\beta>\in\boldsymbol{G}_f\}$. Очевидно, что $\boldsymbol{G}_F$ открыто и плотно в $M^2 \times N^2$. Отображение F будет голоморфным, поскольку голоморфна каждая его компонента.

Определение 1. *Будем говорить, что функция f задает на многообразиях M и N комплексную физическую структуру ранга (2,2), если, кроме аксиомы I, дополнительно имеет место следующая* ***аксиома****:*

II.*Существует плотное в $\boldsymbol{G}_F$ множество, для каждого кортежа $<ij,\alpha\beta>$ которого и некоторой его окрестности U($<ij,\alpha\beta>$) найдется такая голоморфная функция $\Phi:\varepsilon\to C$, определенная в некоторой области $\varepsilon\subset C^4$, содержащей точку $F(<ij,\alpha\beta>)$, что в ней grad$\Phi\neq 0$ и выполняется условие*

$$\Phi(f(i\alpha),f(i\beta),f(j\alpha),f(j\beta)) = 0 \qquad (1)$$

для любого кортежа из U($<ij,\alpha\beta>$).

В некоторой окрестности $U(i)\times U(\alpha)$ каждой пары $<i\alpha>\in\boldsymbol{G}_f$ существуют системы локальных комплексных координат z и ξ, в которых для исходной функции f мы можем записать следующее локальное координатное представление:

$$f(i\alpha) = f(z(i),\xi(\alpha)) \ , \qquad (2)$$

свойства которого определяются аксиомой I. Поскольку ранги отображений $f[\gamma]$ и $f[k]$ равны единице, координаты z и ξ входят в представление (2) существенным образом. Последнее в данном случае означает, что частные производные $\partial f(i\alpha)/\partial z(i)$ и $\partial f(i\alpha)/\partial\xi(\alpha)$ не обращаются тождественнно в нуль.

Определение 2. *Пусть M и N есть комплексные многообразия. Будем говорить, что голоморфные функции f:$\boldsymbol{G}_f\to C$ и g:$\boldsymbol{G}_g\to C$ с открытыми и плотными в* M $\times$ N *областями определения $\boldsymbol{G}_f$ и $\boldsymbol{G}_g$ эквивалентны, если существуют такие локальные биголоморфные отображения λ:M$\to$M, σ:N$\to$N и $\psi:C\to C$, что для открытого и плотного в $\boldsymbol{G}_f$ множества пар $<i\alpha>$ пара $<\lambda(i),\sigma(\alpha)>$ принадлежит $\boldsymbol{G}_g$ и имеет место соотношение*

$$f(i\alpha) = \psi(g(\lambda(i),\sigma(\alpha))) \ .$$

Теорема. *Если голоморфная функция f задает на одномерных комплексных многообразиях M и N комплексную физическую структуру ранга (2,2), то для некоторого открытого и плотного в $\boldsymbol{G}_F \subset M^2 \times N^2$ множества кортежей $<ij,\alpha\beta>$ с точностью до эквива-*

лентности локальное координатное представление (2) и функциональная связь (1) могут быть записаны в следующей канонической форме:

$$f(i\alpha) = z(i) + \xi(\alpha) \ , \qquad (3)$$

$$f(i\alpha) - f(i\beta) - f(j\alpha) + f(j\beta) = 0 \ . \qquad (4)$$

Перейдем к последовательному и подробному доказательству этой теоремы.

Согласно аксиоме II grad$\Phi\neq0$ в точке $F(<ij,\alpha\beta>)$ для некоторого плотного в $\boldsymbol{G}_F$ множества кортежей $<ij,\alpha\beta>$. А это означает, что в точке $F(<ij,\alpha\beta>)$ отлична от нуля хотя бы одна из частных производных функции Φ, которая определена в окрестности $\varepsilon \ni F(<ij,\alpha\beta>)$ и голоморфна в ней. Без ограничения общности можно предположить, что в данной точке отлична от нуля производная функции Φ по первому аргументу $f(i\alpha)$. Но тогда согласно теореме [2,Ч.II,С.57] найдутся такие окрестности H и V точек $f(i\alpha)\in\mathrm{C}$ и $(f(i\beta),f(j\alpha),f(j\beta))\in\mathrm{C}^3$, что уравнение (1) может быть однозначно разрешено относительно $f(i\alpha)$ в окрестности $H\times V\subset\varepsilon$ исходной точки $F(<ij,\alpha\beta>)\in\mathrm{C}^4$:

$$f(i\alpha) = \Gamma(f(i\beta),f(j\alpha),f(j\beta)) \ , \qquad (5)$$

причем функция Γ голоморфна и определена в окрестности V. Ясно, что уравнение (5) выполняется не только для кортежа $<ij,\alpha\beta>$, но и для некоторой его окрестности $U(<ij,\alpha\beta>)$, в силу голоморфности функции F.

<u>Лемма 1.</u> *Проекция множества $F(U(<ij,\alpha\beta>))$ на окрестность $V\subset C^3$ содержит открытое в V подмножество.*

Рассмотрим матрицу Якоби системы функций, входящих в правую часть уравнения (5), - $f(i\beta),f(j\alpha),f(j\beta)$:

$$\left\| \begin{matrix} \partial f(i\beta)/\partial z(i) & 0 & 0 & \partial f(i\beta)/\partial\xi(\beta) \\ 0 & \partial f(j\alpha)/\partial z(j) & \partial f(j\alpha)/\partial\xi(\alpha) & 0 \\ 0 & \partial f(j\beta)/\partial z(j) & 0 & \partial f(j\beta)/\partial\xi(\beta) \end{matrix} \right\| . \qquad (6)$$

В матрице (6) имеется определитель третьего порядка, по диагонали которого расположены частные производные $\partial f(i\beta)/\partial z(i)$, $\partial f(j\alpha)/\partial\xi(\alpha)$, $\partial f(j\beta)/\partial\xi(\beta)$, не обращающиеся тождественно в нуль, поскольку координаты z и ξ входят в представление (2) существенным образом. Произведение перечисленных производных дает значение этого определителя, которое тоже тождественно не обращается в нуль в окрестности $U(<ij,\alpha\beta>)$. Следовательно, в этой окрестности найдется такой кортеж $<i_1j_1,\alpha_1\beta_1>$, для которого ранг матрицы Якоби системы функций $f(i\beta)$, $f(j\alpha)$, $f(j\beta)$, а также и полной матрицы, содержащей дополнительную строку

$$\left\| \begin{matrix} \partial f(i\alpha)/\partial z(i) & 0 & \partial f(i\alpha)/\partial\xi(\alpha) & 0 \end{matrix} \right\| ,$$

равен трем. Но тогда, поскольку функции f системы $f(i\alpha)$, $f(i\beta)$, $f(j\alpha)$, $f(j\beta)$ голоморфны, для некоторой его окрестности $U_1(<i_1j_1,\alpha_1\beta_1>)\subset U(<ij,\alpha\beta>)$ проекция множества $F(U_1(<i_1j_1,\alpha_1\beta_1>))$ на V есть открытое в V подмножество. Лемма доказана.

Не усложняя обозначений, будем считать, что именно проекция множества $U(<ij,\alpha\beta>)$ на V является открытым в V подмножеством.

<u>Следствие.</u> *Функции системы $f(i\beta)$, $f(j\alpha)$, $f(j\beta)$, входящие в правую часть уравнения (5), могут рассматриваться как независимые переменные функции Γ.*

<u>Лемма 2</u>. *В окрестности $U(<ij,\alpha\beta>)$ кортежа $<ij,\alpha\beta>$ найдется такой кортеж $<i_1j_1,\alpha_1\beta_1>$ и такая его окрестность $U_1(<i_1j_1,\alpha_1\beta_1>)\subset U(<ij,\alpha\beta>)$, что на проекции множе-ства $F(U_1(<i_1j_1,\alpha_1\beta_1>))$ в V все производные функции Γ, входящей в правую часть уравнения (5), по переменным $f(i\beta)$, $f(j\alpha)$, $f(j\beta)$ одновременно отличны от нуля.*

Предположим противное, то есть, что для всех кортежей из $U(<ij,\alpha\beta>)$ и, следовательно, во всех точках открытой в V проекции множества $F(U<ij,\alpha\beta>))$ на V, например, производная функции Γ по переменной $f(i\beta)$ обращается в нуль. То есть на этом открытом множестве $\partial\Gamma/\partial f(i\beta)\equiv 0$ и функция Γ не зависит от переменной $f(i\beta)$:

$$f(i\alpha) = \Gamma_1(f(j\alpha),f(j\beta)) \ . \tag{5'}$$

Но это невозможно, так как тогда, очевидно, тождественно обращается в нуль производная функции $f(i\alpha)$ по переменной $z(i)$ и , стало быть, координата $z(i)$ входит в представление (2) несущественным образом, что приводит к противоречию с аксиомой I. Установленное противоречие доказывет лемму относительно переменной $f(i\beta)$.

Не усложняя обозначений, будем считать, что производная функции Γ по переменной $f(i\beta)$ отлична от нуля во всех точках открытой в V проекции множества $F(U<ij,\alpha\beta>)$ на V.

Совершенно аналогично, доказывается, что отлична от нуля производная функции Γ также по переменной $f(j\alpha)$.

Подобно предыдущему, будем считать, что производная функции Γ во всех точках открытой в V проекции множества $F(U(<ij,\alpha\beta>))$ на V отлична от нуля по переменной $f(i\beta)$ и по переменной $f(j\alpha)$ одновременно.

Докажем также, что производная функции Γ и по переменной $f(j\beta)$ не обращается в нуль тождественно. Предположим противное, то есть, что $\partial\Gamma/\partial f(j\beta)\equiv 0$, и поэтому

$$f(i\alpha) = \Gamma_2(f(i\beta),f(j\alpha)) \ . \tag{7}$$

Так как $\partial\Gamma_2/\partial f(i\beta)\neq 0$, то по теореме [2,Ч.II,С.57] уравнение (7) может быть локально однозначно разрешено относительно переменной $f(i\beta)$:

$$f(i\beta) = \Gamma_3(f(i\alpha),f(j\alpha)) \ ,$$

и мы снова приходим к противоречию с аксиомой I, так как, очевидно, тождественно обращается в нуль производная функции $f(i\beta)$ по переменной $\xi(\beta)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *В окрестности $U(<ij,\alpha\beta>)$ кортежа $<ij,\alpha\beta>$ найдется такой кортеж $<i_1j_1,\alpha_1\beta_1>$ и такая его окрестность $U_1(<i_1j_1,\alpha_1\beta_1>)\subset U(<ij,\alpha\beta>)$, что производные функции Φ из уравнения (1) по всем переменным $f(i\alpha)$, $f(i\beta)$, $f(j\alpha)$, $f(j\beta)$ одновременно отличны от нуля*.

Производные функции Γ выражаются известным образом через производные функции Φ. Например,

$$\partial\Gamma/\partial f(i\beta) = -\frac{\partial\Phi/\partial f(i\beta)}{\partial\Phi/\partial f(i\alpha)} \ .$$

Поскольку $\partial\Phi/\partial f(i\alpha)\neq 0$, производные функции Φ и Γ одновременно либо отличны от нуля, либо равны нулю. Между множеством $F(U_1(<i_1j_1,\alpha_1\beta_1>))$, о котором говорится в лемме 2, и его проекцией в V существует, очевидно, взаимно-однозначное соответствие. Поэтому во всех точках множества $F(U_1(<i_1j_1,\alpha_1\beta_1>))$ одновременно не обращаются в нуль производные функции Φ по переменным $f(i\beta)$, $f(j\alpha)$, $f(j\beta)$. Учитывая также, что $\partial\Phi/\partial f(i\alpha)\neq 0$ всюду в $F(U_1(<i_1j_1, \alpha_1\beta_1>))$, приходим к доказательству леммы 3.

Опять, не вводя новых обозначений, будем считать, что все производные функции Φ отличны от нуля на множестве $F(U(<ij,\alpha\beta>))$ для плотного в $\boldsymbol{G}_F$ множества кортежей $<ij,\alpha\beta>$. В результате приходим к следующей заключительной лемме:

Лемма 4. *Существует открытое и плотное в $\boldsymbol{G}_F$ множество таких кортежей $<ij,\alpha\beta>$, что в соответствующей точке $(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta))$ все первые частные производные функции Φ из уравнения (1) одновременно отличны от нуля.*

Запишем уравнения (1) для кортежей $<gi,\alpha\beta>$ и $<gj,\alpha\beta>$ из множества, о котором говорится в лемме 4, и разрешим их относительно переменной $f(g\alpha)$:

$$f(g\alpha) = \Gamma(f(g\beta),f(i\alpha),f(i\beta)) \ ,$$

$$f(g\alpha) = \Gamma(f(g\beta),f(j\alpha),f(j\beta)) \ ,$$

откуда, приравнивая правые части, получим соотношение

$$\Gamma(f(g\beta),f(i\alpha),f(i\beta)) = \Gamma(f(g\beta),f(j\alpha),f(j\beta)) \ . \tag{8}$$

Соотношение (8) по независимой переменной $f(g\beta)$ является тождеством. Фиксируя эту переменную и вводя обозначение

$$\Omega(f(i\alpha),f(i\beta)) = \Gamma(f(g\beta),f(i\alpha),f(i\beta))\Big|_{f(g\beta)=const} \quad ,$$

получим уравнение

$$\Omega(f(i\alpha),f(i\beta)) - \Omega(f(j\alpha),f(j\beta)) = 0 \quad , \qquad (9)$$

которое, очевидно, можно считать выполняющимся для некоторого открытого и плотного в $\boldsymbol{G}_F$ множества кортежей $<ij,\alpha\beta>$, о котором говорится в лемме 4. Также как и функция Φ в уравнении (1), левая часть (9) локально имеет отличные от нуля производные по всем переменным $f(i\alpha)$, $f(i\beta)$, $f(j\alpha)$, $f(j\beta)$. Кроме того, из свойств функции Γ следует, что отличны от нуля все производные функции Ω.

Запишем, далее, уравнения (1) для кортежей $<ij,\rho\alpha>$ и $<ij,\rho\beta>$ из множества леммы 4 и разрешим их относительно переменной $f(i\rho)$:

$$f(i\rho) = \Gamma(f(i\alpha),f(j\alpha),f(j\rho)) \quad ,$$

$$f(i\rho) = \Gamma(f(i\beta),f(j\beta),f(j\rho)) \quad .$$

Приравнивая правые части, приходим к соотношению

$$\Gamma(f(i\alpha),f(j\alpha),f(j\rho)) = \Gamma(f(i\beta),f(j\beta),f(j\rho)) \quad ,$$

которое является тождеством по независимой переменной $f(j\rho)$. Если зафиксировать значение этой переменной и ввести обозначение

$$\Xi(f(i\alpha),f(j\alpha)) = \Gamma(f(i\alpha),f(j\alpha),f(j\rho))\Big|_{f(j\rho)=const} \quad ,$$

то получим уравнение

$$\Xi(f(i\alpha),f(j\alpha)) - \Xi(f(i\beta),f(j\beta)) = 0 \quad , \qquad (10)$$

свойства которого аналогичны свойсвам уравнения (9).

Функция Ξ, как и функция Ω, имеет отличные от нуля производные по всем входящим в нее переменным и, кроме того, отличны от нуля все производные левой части уравнения (10).

Два различных уравнения (9) и (10) задают локально одну и ту же гиперповерхность в некоторой окрестности $\varepsilon\subset C^4$ точки $F(<ij,\alpha\beta>)$, соответствующей кортежу $<ij,\alpha\beta>$, множество которых открыто и плотно в $\boldsymbol{G}_F$. Это, естественно, налагает дополнительные ограничения на функции Ω и Ξ .

Разрешим уравнения (9) и (10) относительно $f(i\alpha)$:

$$f(i\alpha) = \chi[\Omega(f(j\alpha),f(j\beta)),f(i\beta)] \quad , \qquad (11)$$

$$f(i\alpha) = \chi_1[\Xi(f(i\beta),f(j\beta)),f(j\alpha)] \quad ,$$

откуда получаем функциональное уравнение для $\chi[\Omega(f(j\alpha),f(j\beta)),f(i\beta)]$:

$$\chi[\Omega(f(j\alpha),f(j\beta)),f(i\beta)] = \chi_1[\Xi(f(i\beta),f(j\beta)),f(j\alpha)] \quad , \qquad (12)$$

так как по следствию леммы I все переменные, входящие в равенство (12), независимы и, кроме того, $\partial\Omega(f(j\alpha),f(j\beta))/\ f(j\alpha)\neq 0$.

Производные левой и правой частей уравнения (12) по каждой из переменных отличны от нуля, откуда, в частности, следует, что не обращаются в нуль производные функций χ и χ_1 по первым аргументам Ω и Ξ.

Продифференцируем уравнение (12) по переменным $f(i\beta)$, $f(j\beta)$ и разделим правую и левую часть второго результата дифференцирования на соответсвующие части первого:

$$\frac{\partial\chi[\Omega(f(j\alpha),f(j\beta)),f(i\beta)]/\partial\Omega(f(j\alpha),f(j\beta))\cdot\partial\Omega(f(j\alpha),f(j\beta))/\partial f(j\beta)}{\partial\chi[\Omega(f(j\alpha),f(j\beta)),f(i\beta)]/\partial f(i\beta)} =$$

$$= \frac{\partial\Xi(f(i\beta),f(j\beta))/\partial f(j\beta)}{\partial\Xi(f(i\beta),f(j\beta))/\partial f(i\beta)} \quad . \qquad (13)$$

Равенство (13) имеет место для проекции на подпространство C^3 точки $F(<ij,\alpha\beta>)$, соответствующей кортежу $<ij,\alpha\beta>$, множество которых открыто и плотно в $\boldsymbol{G}_F$. Поскольку все переменные, входящие в это равенство, независимы, оно может рассматриваться как функционально-дифференциальное уравнение для $\chi[\lambda,f(i\beta)]$, где $\lambda=\Omega(f(j\alpha),f(j\beta))$. Заметим, что все производные в равенстве (13) отличны от нуля.

В уравнении (13) перейдем к переменной λ, которая взаимно-однозначно связана с $f(j\alpha)=\chi[\lambda,f(j\beta)]$, так как $\partial\Omega(f(j\alpha), f(j\beta))/\partial f(j\alpha)\neq 0$:

$$\partial\chi[\lambda, f(i\beta)]/\partial\lambda \cdot \partial\Omega(\chi[\lambda, f(j\beta)], f(j\beta))/\partial f(j\beta) =$$

$$= \partial\chi[\lambda, f(i\beta)]/\partial f(i\beta)\cdot \frac{\partial\Xi(f(i\beta), f(j\beta))/\partial f(j\beta)}{\partial\Xi(f(i\beta), f(j\beta))/\partial f(i\beta)} \ .$$

Зафиксируем в последнем равенстве значение переменной $f(j\beta)$, от которой не зависит функция $\chi[\lambda,f(i\beta)]$:

$$\partial\chi[\lambda,f(i\beta)]/\partial\lambda\cdot A_1(\lambda)+\partial\chi[\lambda,f(i\beta)]/\partial f(i\beta)\cdot A_2(f(i\beta)) = 0 \ . \qquad (14)$$

Таким образом, по комплексным переменным λ и $f(i\beta)$ для голоморфной функции $\chi[\lambda,f(i\beta)]$ получено линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка. Это уравнение не имеет особых точек, так как локально его коэффициенты A_1, A_2 отличны от нуля.

Пусть $B_1(\lambda)$ и $B_2(f(i\beta))$ первообразные для голоморфных функций $1/A_1(\lambda)$, и $-1/A_2(f(i\beta))$, локальное существование которых обеспечивается теоремой комплексного анализа [2,Ч.I,С.89]. То есть $B_1'(\lambda) = 1/A_1(\lambda)$ и $B_2'(f(i\beta)) = -1/A_2(f(i\beta))$. Произведем в уравнении (14) замену переменных $B_1(\lambda) \to \lambda$, $B_2(f(i\beta)) \to f(i\beta)$:

$$\partial\varphi[\lambda,f(i\beta)]/\partial\lambda - \partial\varphi[\lambda,f(i\beta)]/\partial f(i\beta) = 0 \ , \qquad (14')$$

где

$$\chi[\lambda,f(i\beta)] = \varphi[B_1(\lambda),B_2(f(i\beta))] \ .$$

<u>Лемма 5.</u> *Голоморфная функция двух переменных $f(z_1,z_2)$ тогда и только тогда задается выражением $f(z_1,z_2)=\psi(z_1+z_2)$, где ψ - произвольная голоморфная функция одной переменной, когда выполняется условие*

$$\partial f(z_1,z_2)/\partial z_1 = \partial f(z_1,z_2)/\partial z_2 \ , \qquad (15)$$

<u>Необходимость</u>. Действительно, для любой функции $\psi(z_1+z_2)$ имеем:

$$\partial f/\partial z_1 = \partial\psi/\partial s\cdot\partial s/\partial z_1 = \partial\psi/\partial s \ ,$$

$$\partial f/\partial z_2 = \partial\psi/\partial s\cdot\partial s/\partial z_2 = \partial\psi/\partial s \ ,$$

где $s = z_1+z_2$. То есть получаем условие (15).

<u>Достаточность</u>. Пусть $f(z_1,z_2)$ будет функцией независимых переменных z_1 и z_2. Произведем замену переменных $z_1 = s - z_2$. Покажем, что на самом деле $f(s-z_2,z_2)$ является функцией только s при условии (15). Действительно производная этой функции по z_2 равна нулю:

$$\partial f(s-z_2,z_2)/\partial z_2 = \partial f(z_1,z_2)/\partial z_1\cdot\partial z_1/\partial z_2 + \partial f(z_1,z_2)/\partial z_2 =$$

$$= - \partial f(z_1,z_2)/\partial z_1 + \partial f(z_1,z_2)/\partial z_2 = 0 \ ,$$

следовательно, имеем $f(z_1,z_2) = \psi(s) = \psi(z_1+z_2)$.

Согласно лемме 5 $\varphi[\lambda,f(i\beta)]$ является функцией только переменной $\lambda+f(i\beta)$ при условии (14'). Стало быть, возвращаясь к старым переменным λ, $f(i\beta)$ уравнения (14), получаем следующие выражения для $\chi[\lambda,f(i\beta)]$:

$$\chi[\lambda,f(i\beta)] = \chi_2[B_1(\lambda) + B_2(f(i\beta))] \ , \qquad (16)$$

где χ_2, B_1, B_2 голоморфные функции одной переменной, имеющие отличные от нуля производные по аргументам B_1+B_2, λ, $f(i\beta)$, так как $B_1'(\lambda)=1/A_1(\lambda)\neq 0$, $B_2'(f(i\beta)) = -1/A_2(f(i\beta)) \neq 0$ и $\partial\chi[\lambda,f(i\beta)]/\partial\lambda\neq 0$.

Подставим выражение (16) в уравнение (11):

$$f(i\alpha) = \chi_2[B_1[\Omega(f(j\alpha),f(j\beta))] + B_2(f(i\beta))]$$

и разрешим результат подстановки относительно $B_1 + B_2$:

$$B_1[\Omega(f(j\alpha),f(j\beta))] = - B_2(f(i\beta)) + \psi(f(i\alpha)) \ , \qquad (17)$$

где $\psi = \chi_2^{-1}$ - обратная к χ_2 функция.

Запишем уравнение (17) для кортежей $<ig,\alpha\beta>$ и $<jg,\alpha\beta>$:

$$B_1[\Omega(f(g\alpha),f(g\beta))] = - B_2(f(i\beta)) + \psi(f(i\alpha)) \ ,$$

$$B_1[\Omega(f(g\alpha),f(g\beta))] = -B_2(f(j\beta)) + \psi(f(j\alpha))$$

и приравнивняем правые части выписанных выражений, поскольку левые совпадают:

$$B_2(f(i\beta)) - B_2(f(j\beta)) = \psi(f(i\alpha)) - \psi(f(j\alpha)) \ . \qquad (18)$$

Покажем, что производная функции $\psi(f(i\alpha))$ по переменной $f(i\alpha)$ отлична от нуля. Для этого продифференцируем уравнение (18) по переменной $f(i\beta)$, считая при этом $f(i\alpha)$ функцией от $f(i\beta)$, задаваемой уравнением (5):

$$\partial B_2(f(i\beta))/\partial f(i\beta) = \partial\psi(f(i\alpha))/\partial f(i\alpha) \cdot$$

$$\cdot \ \partial\Gamma(f(i\beta),f(j\alpha),f(j\beta))/\partial f(i\beta) \ .$$

Поскольку $\partial B_2/\partial f(i\beta)\neq 0$, $\partial\Gamma/\partial f(i\beta)\neq 0$, должно быть $\partial\psi/\partial f(i\alpha)\neq 0$.

Запишем далее результат (18) для кортежей $<ij,\alpha\rho>$ и $<ij,\beta\rho>$:

$$B_2(f(i\rho) - B_2(f(j\rho) = \psi(f(i\alpha)) - \psi(f(j\alpha)) \ ,$$

$$B_2(f(i\rho) - B_2(f(j\rho) = \psi(f(i\beta)) - \psi(f(j\beta)) \ .$$

Приравнивая правые части выписанных выражений, так левые совпадают, получим уравнение:

$$\psi(f(i\alpha)) - \psi(f(i\beta)) - \psi(f(j\alpha)) + \psi(f(j\beta)) = 0 \ , \qquad (19)$$

где ψ - произвольная голоморфная функция одной переменной с отличной от нуля производной, определенная в некоторых окрестностях проекции точки $F(<ij,\alpha\beta>)\in C^4$ на одномерное пространство C.

Уравнение (19) является следствием того обстоятельства, что одна и та же гиперповерхность локально задается двумя различными уравнениями (9) и (10).

Представим уравнение (19) в виде, разрешенном относительно переменной $f(i\alpha)$ и запишем его для кортежа $<ij_0,\alpha\beta_0>$ с фиксированными в нем точками $j_0\in$M и $\beta_0\in$N:

$$f(i\alpha) = \psi^{-1}[\psi(f(i\beta_0)) + \psi(f(j_0\alpha)) - \psi(f(j_0\beta_0))] \ .$$

Если ввести функции

$$\lambda(z(i)) = \psi(f(i\beta_0)) - \psi(f(j_0\beta_0))/2 \ ,$$

$$\sigma(\xi(\alpha)) = \psi(f(j_0\alpha)) - \psi(f(j_0\beta_0))/2 \ ,$$

то для функции f получим следующее локальное координатное представление:

$$f(i\alpha) = \psi^{-1}[\lambda(z(i)) + \sigma(\xi(\alpha))] \ , \qquad (20)$$

причем, очевидно, $\lambda'\neq 0$ и $\sigma'\neq 0$. Рассмотрим функции λ, σ, ψ как некоторые локальные биголоморфные отображения λ: M $\to$ M, σ:N $\to$ N и ψ:$C \to C$. Тогда результаты (20) и (19) с точностью до эквивалентности, введенной определением 2, зададут соответственно канонические формы (3) и (4) для комплексной физической структуры ранга (2,2). Теорема доказана.

Литература

1. Ю. И. Кулаков, Ю. С. Владимиров, А. В. Карнаухов. Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику. М.:Архимед, 1992.

2. Б. В. Шабат. Введение в комплексный анализ. Ч.I,II.М.Наука.: 1985
.