Министерство образования Российской Федерации

Барнаульский государственный педуниверситет

Горно-Алтайский государственный университет

Г.Г. Михайличенко

ГРУППОВАЯ СИММЕТРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Приложение
А.Н.Бородина

Барнаул
Горно-Алтайск
2003

ББК 181.15
М 69
УДК 514.1 + 512.816

Г.Г.Михайличенко. Групповая симметрия физических структур. Барнаул: Барн. гос. пед. ун-т, 2003, 204 стр.

Теория физических структур была предложена Ю.И.Кулаковым в 1968 году для классификации законов физики. Основной постулат этой теории – принцип феноменологической симметрии – обнаруживает себя не только в физических законах, но и в соотношениях геометрии. Точная математическая формулировка принципа феноменологической симметрии позволила установить её связь с групповой симметрией как в обычной геометрии, так и в самой теории физических структур, представляющей собой своеобразную геометрию двух множеств. Книга предназначена научным работникам, аспирантам и студентам старших курсов, специализирующимся в области геометрии и теоретической физики.

G.G.Mikhailichenko. Group symmetry of physical structures. Barnaul State Pedagogical University Publishing House, 2003, 204 p.

The theory of physical structures was put forward by professor Yuri Kulakov in 1968 to classify physical laws. The main postulate of this theory is the principle of phenomenological symmetry, which revels itself not only in physical laws but in geometrical relations as well. The exact mathematical formulation of the principle of phenomenological symmetry made it possible to establish its connection with group symmetry both in normative geometry and in the theory of physical structures. The latter is actually a peculiar geometry of two sets. The book is intended for scientists, researchers, post-graduate and undergraduate students specializing in geometry and theoretical physics.

ISBN 5–88210–226–X

Содержание

Введение

В своих исследованиях по основаниям физики Ю.И.Кулаков предложил математическую модель строения физического закона, рассматриваемого как феноменологически инвариантная связь между измеряемыми в опыте величинами [1]. Эта модель, именуемая физической структурой, приложима к обычной геометрии и представляет собой своеобразную геометрию двух множеств с метрической функцией, сопоставляющей паре точек из разных множеств одно или несколько чисел. В новой геометрии естественно определяется движение как пара таких преобразований исходных множеств, которые сохраняют метрическую функцию. Совокупность всех движений задает групповую симметрию этой геометрии.

Следуя Ю.И.Кулакову по его работам [1],[2],[3], рассмотрим второй закон Ньютона в механике и закон Ома в электродинамике, записав их в такой форме, которая позволит выявить феноменологическую симметрию указанных законов.

Пусть i – материальное тело, масса которого равна $m(i)$, и α – ускоритель, характеризуемый силой $F(\alpha)$. Под ускорителем подразумевается любое другое тело, которое при взаимодействии с данным изменяет его скорость. Измеряемой в опыте величиной является ускорение $a(i\alpha)$, которое телу i сообщает ускоритель α. Второй закон Ньютона в его традиционной форме утверждает, что произведение массы тела на сообщаемое ему ускорение равно действующей силе:

$$m(i)a(i\alpha) = F(\alpha). \tag{$B.1$}$$

Возьмем два произвольных тела i, j и два произвольных ускорителя α, β. Дополнительно к уравнению $(B.1)$ запишем еще три:

$$\left.\begin{aligned} m(i)a(i\beta) = F(\beta), \\ m(j)a(j\alpha) = F(\alpha), \\ m(j)a(j\beta) = F(\beta). \end{aligned}\right\} \tag{$B.1'$}$$

Из четырех уравнений $(B.1)$, $(B.1')$ можно исключить массы $m(i)$, $m(j)$, силы $F(\alpha)$, $F(\beta)$, получив при этом связь только между измеряемыми в опыте ускорениями:

$$a(i\alpha)a(j\beta) - a(i\beta)a(j\alpha) = 0. \tag{$B.2$}$$

По терминологии Ю.И.Кулакова функциональная связь $(B.2)$, имеющая место для любых двух материальных тел i, j и любых двух ускорителей α, β, представляет собой феноменологически инвариантную форму второго закона Ньютона.

В электродинамике проводнику i с сопротивлением $R(i)$ и источнику тока α с электродвижущей силой $\mathcal{E}(\alpha)$ и внутренним сопротивлением $r(\alpha)$ сопоставляется ток $I(i\alpha)$, измеряемый амперметром в соответствующей простой замкнутой цепи:

$$I(i\alpha) = \mathcal{E}(\alpha)/(R(i) + r(\alpha)). \qquad (B.3)$$

Возьмем три произвольных проводника i, j, k и два произвольных источника тока α, β. Тогда дополнительно к току $I(i\alpha)$ по выражению $(B.3)$ можно выписать еще пять его значений:

$$I(i\beta), I(j\alpha), I(j\beta), I(k\alpha), I(k\beta). \qquad (B.3')$$

Из шести выражений для токов $(B.3), (B.3')$ сравнительно просто исключаются сопротивления проводников $R(i), R(j), R(k)$, электродвижущие силы источников тока $\mathcal{E}(\alpha), \mathcal{E}(\beta)$ и их внутренние сопротивления $r(\alpha), r(\beta)$, в результате чего получается связь только между измеряемыми в опыте значениями величины тока I:

$$\begin{vmatrix} I^{-1}(i\alpha) & I^{-1}(i\beta) & 1 \\ I^{-1}(j\alpha) & I^{-1}(j\beta) & 1 \\ I^{-1}(k\alpha) & I^{-1}(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (B.4)$$

где $I^{-1} = 1/I$. Функциональная связь $(B.4)$, справедливая для любых трех проводников i, j, k и для любых двух источников тока α, β, представляет собой по Кулакову феноменологически инвариантную форму закона Ома.

В работе [3] Ю.И.Кулаковым показано, как, исходя из феноменологически инвариантных форм $(B.2)$ и $(B.4)$ второго закона Ньютона и закона Ома, прийти к их традиционным формам $(B.1)$ и $(B.3)$, вводя естественным образом массу тела m, силу ускорителя F и сопротивление проводника R, электродвижущую силу источника $\mathcal{E}$, его внутреннее сопротивление r.

Рассмотрим еще плоскость Евклида с точки зрения ее феноменологической симметрии, которая геометрам была известна давно [4], но на которую впервые особое внимание обратил Ю.И.Кулаков [5]. В декартовой прямоугольной системе координат (x,y) квадрат расстояния

$\rho(ij)$ между любыми точками $i = (x(i), y(i))$ и $j = (x(j), y(j))$ задается следующей метрической функцией:

$$f(ij) = \rho^2(ij) = (x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2. \qquad (B.5)$$

Возьмем четыре точки i, j, k, l и запишем для них шесть значений метрической функции $(B.5)$:

$$\rho^2(ij), \rho^2(ik), \rho^2(il), \rho^2(jk), \rho^2(jl), \rho^2(kl). \qquad (B.5')$$

Хорошо известно, что шесть взаимных расстояний между любыми четырьмя точками евклидовой плоскости функционально связаны, обращая в нуль определитель Кэли-Менгера пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \rho^2(ij) & \rho^2(ik) & \rho^2(il) \\ 1 & \rho^2(ij) & 0 & \rho^2(jk) & \rho^2(jl) \\ 1 & \rho^2(ik) & \rho^2(jk) & 0 & \rho^2(kl) \\ 1 & \rho^2(il) & \rho^2(jl) & \rho^2(kl) & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (B.6)$$

Геометрический смысл соотношения $(B.6)$ состоит в том, что объем тетраэдра с вершинами, лежащими на плоскости, равен нулю. По терминологии Ю.И.Кулакова [5] соотношение $(B.6)$, справедливое для любых четырех точек i, j, k, l, выражает феноменологическую симметрию евклидовой плоскости.

Обращает на себя внимание принципиальная общность соотношений $(B.2), (B.4), (B.6)$, которые выражают функциональные связи только между измеряемыми в опыте величинами, причем эти связи феноменологически инвариантны: для любых двух материальных тел i, j и любых двух ускорителей α, β выполняется соотношение $(B.2)$; для любых трех проводников i, j, k и любых двух источников тока α, β имеет место соотношение $(B.4)$; для любых четырех точек i, j, k, l евклидовой плоскости справедливо соотношение $(B.6)$. В каждом из трех рассмотренных примеров мы имеем дело с функцией пары точек, определяющей расстояние между ними, то есть с метрической функцией: в соотношении $(B.2)$ такой функцией является ускорение $(B.1)$, которое можно считать обобщенным расстоянием между точками физически различных множеств – множества материальных тел и множества ускорителей; аналогично в соотношении $(B.4)$ ток $(B.3)$ в некотором более общем смысле есть расстояние между точками различных множеств – множества проводников и множества источников тока; в соотношении $(B.6)$ метрической функцией является квадрат обычного расстояния $(B.5)$ между точками одной и той же евклидовой плоскости.

Согласно терминологии Ю.И.Кулакова [3] ускорение a на множестве материальных тел и множестве ускорителей задает физическую структуру ранга (2,2), а ток I на множестве проводников и множестве источников тока задает физическую структуру ранга (3,2). Эти физические структуры представляют собой своеобразные геометрии двух множеств, феноменологическая симметрия которых выражается соотношениями $(B.2)$ и $(B.4)$. Метрическая же функция $(B.5)$ задает на плоскости физическую структуру ранга 4, которая представляет собой геометрию обычной евклидовой плоскости. Ее феноменологическая симметрия выражается соотношением $(B.6)$.

Заметим также, что феноменологически инвариантные формы $(B.2)$ и $(B.4)$ законов Ньютона и Ома с точностью до некоторых естественных преобразований являются единственно возможными, что показано в работах [6], [7]. С другой стороны, соотношение $(B.6)$ принципом феноменологической симметрии определяется неоднозначно, так как имеется еще несколько геометрий на плоскости, для которых шесть взаимных расстояний между любыми четырьмя точками функционально связаны (плоскость Лобачевского, плоскость Минковского, двумерная сфера и т.д.). Полный список соответствующих метрических функций приведен автором в работах [8], [9].

По метрической функции $(B.5)$ можно найти множество ее движений, то есть таких гладких и обратимых преобразований плоскости:

$$x' = \lambda(x, y), \;\; y' = \sigma(x, y), \qquad (B.7)$$

относительно которых эта функция сохраняется. Действительно, если преобразование $(B.7)$ является движением, то для функций λ и σ получается функциональное уравнение

$$(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2 = (x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2,$$

все решения которого могут быть найдены чисто аналитически:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda(x, y) = ax - \varepsilon by + c, \\ y' &= \sigma(x, y) = bx + \varepsilon ay + d, \end{aligned}\right\} \qquad (B.8)$$

где $a^2 + b^2 = 1, \varepsilon = \pm 1$.

Множество всех движений $(B.8)$ есть, очевидно, группа, выражающая групповую симметрию евклидовой плоскости. С другой стороны, трехпараметрическая группа преобразований $(B.8)$ координатной плоскости определяет на ней по Ф.Клейну [10] евклидову геометрию. Метрическая функция $(B.5)$ является при этом ее двухточечным инвариантом, который находится решением соответствующего функционального уравнения:

$$f(\lambda(i),\sigma(i),\lambda(j),\sigma(j)) = f(x(i),y(i),x(j),y(j)).$$

На простом примере евклидовой плоскости с метрической функцией $(B.5)$ мы убедились, что ее групповая симметрия, выражаемая движениями $(B.8)$, и ее феноменологическая симметрия, выражаемая соотношением $(B.6)$, тесно между собой связаны. Естественно предположить, что аналогичная ситуация имеет место и в геометрии двух множеств – теории физических структур. Под движением в этой геометрии будем понимать совокупность двух одновременных преобразований каждого из множеств, сохраняющих обобщенное расстояние между любыми двумя их точками, для которых оно определено.

Преобразование множества материальных тел и преобразование множества ускорителей:

$$m' = \lambda(m),\ \ F' = \sigma(F)$$

является движением, если сохраняется ускорение, определяемое законом Ньютона:

$$\sigma(F(\alpha))/\lambda(m(i)) = F(\alpha)/m(i).$$

Относительно функций λ и σ из условия сохранения ускорения $a(i\alpha)$ получено простое функциональное уравнение, решение которого легко находится методом разделения переменных:

$$m' = cm,\ \ F' = cF, \tag{B.9}$$

где $c > 0$ – произвольный параметр. Однопараметрическая группа $(B.9)$ определяет групповую симметрию физической структуры ранга (2,2), задаваемой на множестве материальных тел и множестве ускорителей функцией ускорения $a = F/m$.

Если известна группа преобразований $(B.9)$, то ускорение a может быть найдено как ее двухточечный инвариант по уравнению

$$a(m',F') = a(m,F),$$

которое должно выполняться тождественно по переменным m, F и параметру c. Решение этого уравнения определяет закон Ньютона $(B.1)$ с точностью до одной функции от одной переменной:

$$a = \psi(F/m).$$

Содержательный смысл функции ψ состоит в возможности выбора шкалы акселерометра – прибора, измеряющего ускорение. Ясно, что физический смысл второго закона Ньютона, его феноменологическая и групповая симметрии не должны зависеть от градуировки шкалы акселерометра.

Найдем, далее, какие преобразования множества проводников и множества источников тока:

$$R' = \lambda(R),\ \mathcal{E}' = \sigma(\mathcal{E}, r),\ r' = \rho(\mathcal{E}, r)$$

сохраняют величину тока, определяемого законом Ома:

$$\frac{\sigma(\mathcal{E}(\alpha), r(\alpha))}{\lambda(R(i)) + \rho(\mathcal{E}(\alpha), r(\alpha))} = \frac{\mathcal{E}(\alpha)}{R(i) + r(\alpha)}.$$

Относительно функций λ, σ, ρ из условия сохранения тока получилось функциональное уравнение, которое удобно для нахождения его решений переписать в следующем виде:

$$(\lambda(R) + \rho(\mathcal{E}, r))/\sigma(\mathcal{E}, r) = (R + r)/\mathcal{E},$$

опустив для сокращения записи обозначения i и α, указывающие на отношение переменных R и $\mathcal{E}$, r к проводникам и источникам тока. Продифференцируем это уравнение по переменной R. После разделения переменных находим:

$$\sigma(\mathcal{E}, r)/\mathcal{E} = a = const$$

и, возвращаясь в исходное уравнение, получаем окончательно:

$$\lambda(R) = aR + b,\ \sigma(\mathcal{E}, r) = a\mathcal{E},\ \rho(\mathcal{E}, r) = ar - b,$$

причем, очевидно, $a > 0$.

Преобразования

$$R' = aR + b,\ \mathcal{E}' = a\mathcal{E},\ r' = ar - b \qquad (B.10)$$

составляют двухпараметрическую группу движений, которая определяет групповую симметрию физической структуры ранга (3,2), задаваемой на множестве проводников и множестве источников тока функцией тока $I = \mathcal{E}/(R+r)$. С другой стороны, по группе преобразований $(B.10)$ можно восстановить закон Ома, рассматривая функцию тока $I(R, \mathcal{E}, r)$ как ее двухточечный инвариант:

$$I(R', \mathcal{E}', r') = I(R, \mathcal{E}, r).$$

Решение этого функционального уравнения содержит произвол в одну функцию от одной переменной:

$$I = \psi(\mathcal{E}/(R+r)),$$

который не меняет физический смысл закона Ома, его феноменологическую и групповую симметрии, отражая возможность изменения градуировки шкалы амперметра – прибора для измерения тока.

Физические структуры, рассмотренные выше, были однометрическими геометриями, так как соответствующие метрические функции ускорения в законе Ньютона $(B.1)$, тока в законе Ома $(B.3)$ и квадрата расстояния $(B.5)$ на евклидовой плоскости соопоставляли двум точкам различных множеств или одного и того же множества только одно вещественное число. Но это совсем не обязательно и следующий пример из термодинамики иллюстрирует такую возможность.

Рассмотрим множество состояний некоторой термодинамической системы. Каждой паре состояний $< ij >$ сопоставим два числа, равные двум количествам тепла $Q^{TS}(ij)$ и $Q^{ST}(ij)$, которые система отдает внешним телам при ее переходе из состояния i в состояние j сначала по изотерме ($T = const$), а затем по адиабате ($S = const$), в первом случае – процесс TS и сначала по адиабате, а затем по изотерме, во втором – процесс ST, где T – температура и S – энтропия системы:

$$Q^{TS}(ij) = (S(i) - S(j))T(i), \; Q^{ST}(ij) = (S(i) - S(j))T(j). \qquad (B.11)$$

Двухкомпонентная числовая функция $Q = (Q^{TS}, Q^{ST})$ с выражениями $(B.11)$ для ее компонент задает на плоскости (S, T) состояний термодинамической системы двуметрическую геометрию, которая, подобно евклидовой геометрии на плоскости (x, y) с метрической функцией $(B.5)$ наделена феноменологической и групповой симметриями.

Возьмем на плоскости (S, T) три произвольные состояния $< ijk >$, порядок следования которых определяется записью тройки. Тогда дополнительно к двум количествам тепла $(B.11)$ можно выписать еще четыре:

$$Q^{TS}(ik),\, Q^{ST}(ik);\; Q^{TS}(jk),\, Q^{ST}(jk) \qquad (B.11')$$

для пар состояний $< ik >$ и $< jk >$. Из шести величин $(B.11)$, $(B.11')$ можно исключить все параметры $S(i), T(i),\, S(j), T(j),\, S(k), T(k)$ трех состояний i, j, k, в результате чего получаются две функциональные связи между ними, задаваемые двумя независимыми уравнениями:

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{vmatrix} 0 & -Q^{ST}(ij) & -Q^{ST}(ik) \\ Q^{TS}(ij) & 0 & -Q^{ST}(jk) \\ Q^{TS}(ik) & Q^{TS}(jk) & 0 \end{vmatrix} = 0, \\
\\
\begin{vmatrix} Q^{TS}(ij) & Q^{TS}(jk) & -Q^{ST}(ik) \\ Q^{TS}(ik) & 0 & -Q^{ST}(ik) \\ Q^{TS}(ik) & -Q^{ST}(ij) & -Q^{ST}(jk) \end{vmatrix} = 0.
\end{array}\right\} \qquad (B.12)$$

Соотношения $(B.12)$, справедливые для любой тройки состояний $< ijk >$, выражают феноменологическую симметрию двуметрической геометрии, задаваемой на плоскости (S, T) двухкомпонентной функцией $(B.11)$.

Группа движений метрической функции $(B.11)$ состоит из всех тех преобразований

$$S' = \lambda(S, T),\, T' = \sigma(S, T) \qquad (B.13)$$

плоскости (S, T), которые удовлетворяют следующим двум функциональным уравнениям:

$$\left.\begin{array}{l}
(\lambda(i) - \lambda(j))\sigma(i) = (S(i) - S(j))T(i), \\
(\lambda(i) - \lambda(j))\sigma(j) = (S(i) - S(j))T(j),
\end{array}\right\}$$

являющимся следствием инвариантности ее компонент. Решения этих уравнений легко находятся с помощью дифференцирования по координатам состояний i, j и последующего разделения переменных:

$$\lambda(S, T) = aS + b,\, \sigma(S, T) = T/a, \qquad (B.14)$$

где $a > 0$.

Множество всех преобразований $(B.13)$ с решениями $(B.14)$ является полной группой движений функции $(B.11)$, выражая групповую симметрию двуметрической геометрии, задаваемой на плоскости (S, T) этой функцией.

Полиметрические геометрии на одном и двух множествах не единственная возможность обобщения понятия геометрии. Например, каждой тройке точек $< ijk >$ на координатной плоскости (x, y) можно сопоставить ориентированную площадь треугольника с вершинами в этих точках:

$$S(ijk) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x(i) & x(j) & x(k) \\ y(i) & y(j) & y(k) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (B.15)$$

Для произвольной четверки $< ijkl >$ точек этой плоскости четыре площади треугольников $< ijk >, < ijl >, < ikl >, < jkl >$ функционально связаны следующим очевидным соотношением:

$$S(ijk) - S(ijl) + S(ikl) - S(jkl) = 0. \qquad (B.16)$$

С другой стороны, функция $(B.15)$ допускает пятипараметрическую группу движений:

$$x' = ax + by + c,\ y' = gx + hy + d, \qquad (B.17)$$

где $ah - bg = 1$, которая может быть найдена как решение функционального уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda(i) & \lambda(j) & \lambda(k) \\ \sigma(i) & \sigma(j) & \sigma(k) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x(i) & x(j) & x(k) \\ y(i) & y(j) & y(k) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

являющегося следствием инвариантности площади $(B.15)$ при преобразованиях $(B.7)$.

Функция площади $(B.15)$ задает на плоскости тернарную геометрию, которая, с одной стороны, феноменологически симметрична, а с другой – наделена групповой симметрией. Тернарной эта геометрия называется потому, что число $S(ijk)$ сопоставляется в ней тройке точек $< ijk >$, в то время как во всех ранее рассмотренных случаях число сопоставлялось паре точек из одного или разных множеств. Такие геометрии и физические структуры можно было бы назвать бинарными. Заметим, однако, что функциональная связь $(B.16)$ не является порождающей в смысле определения 1 из §10 основной части. Поэтому, строго говоря, тернарная геометрия площадей $(B.15)$ не должна рассматриваться как тернарная физическая структура, которая групповой симметрией не может быть наделена, что установлено в упомянутом §10.

Одной из основных задач настоящей монографии является исследование групповой симметрии физических структур. Используя связь феноменологической и групповой симметрий, удалось построить полную классификацию некоторых двуметрических и триметрических физических структур на одном и двух множествах. Изучаются также дополнительные возможности обобщения и развития понятия физической структуры.

Приложение написано А.Н.Бородиным, который исследовал физические структуры на абстрактных множествах. Их предварительное изучение показало, что такие известные алгебраические структуры, как груда и группа, являются естественными следствиями принципа феноменологической симметрии в теории физических структур.

Основная часть

Главной задачей Основной Части является установление и исследование групповой симметрии физических структур. В §1 дается точное определение физической структуры на двух множествах и доказывается, что ее феноменологическая симметрия эквивалентна групповой. Затем в §2 для известных ранее функций, задающих эти структуры, решением соответствующих функциональных уравнений их инвариантности находятся локальные группы движений однометрических геометрий на двух множествах. Анализ полученных результатов приводит к выводу, что для вычисления двухточечных инвариантов недостаточно проводить классификацию групп преобразований с точностью до подобия, как это делал Софус Ли. Более тонкая классификация с точностью до эквивалентности необходима для решения многих задач, возникающих в теории физических структур. Соотношение подобия и эквивалентности групп преобразований обсуждается в §3, а затем на примере физической структуры ранга (3,3) это соотношение исследуется более детально. В §4 проводится полная с точностью до эквивалентности классификация четырехмерных алгебр Ли преобразований плоскости, которая затем сравнивается с соответствующей классификацией С.Ли. В §5 функции, задающие физическую структуру ранга (3,3), находятся как двухточечные инварианты четырехмерных групп преобразований плоскости. Устанавливается, что без более точной, чем у С.Ли, классификации эти инварианты найдены быть не могут. В §6 и §7 изучаются групповые свойства физических структур ранга $(n+1,2)$. Если для однометрических структур этого ранга был воспроизведен полученный ранее другим методом результат, что, естественно, подтверждает эквивалентность групповой и феноменологической симметрий, то для двуметрических структур результат оказался значительно более интересным, в частности, получена их полная классификация. Ее анализ позволил выйти на проблему обоснования существования трех типов комплексных чисел. В §8 строится полная классификация триметрических физических структур минимального ранга (2,2). Этот результат раньше, до установления эквивалентности феноменологической и групповой симметрий, вообще не мог быть получен. Гипотеза о бинарной структуре пространства, предполагающая, что каждая его точка есть слияние двух точек из разных множеств, позволяет выявить его структуру и найти соответствующую метрическую функцию. В §9 строится полная классификация таких пространств. Одной из "экзотик" является симплектическая геометрия нечетной размерности. §10 посвящен максимальному обобщению понятия физической структуры и установлению ее групповых свойств. Оказывается, что групповой симметрией могут быть наделены только бинарные физические структуры. Отсутствие групповой симметрии у небинарных физических структур приводит к тому, что их классификация оказывается очень бедной. Например, тернарные физические структуры на трех множествах существуют только в случае минимального ранга (2,2,2), в то время как бинарные физические структуры на двух множествах существуют для любого симметричного ранга $(n+1, n+1)$, для ранга отличного от симметричного на единицу: $(n+2, n+1)$ и $(n+1, n+2)$, где $n \geq 1$, и даже для рангов (4,2) и (2,4). Заметим при этом, что бинарные физические структуры на одном и двух множествах не только наделены групповой симметрией, но и допускают содержательную интерпретацию в физике и геометрии. Принцип феноменологической симметрии естественно приводит к функциональным уравнениям, и некоторые из них рассматриваются в §11. Эти уравнения являются тождествами и потому, как показано в Приложении, могут определять так называемые феноменологические алгебры, например, груды и группы.

§1. Феноменологическая симметрия физических структур и ее эквивалентность групповой симметрии в геометрии двух множеств

Пусть имеются два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, являющиеся sm-мерным и sn-мерным многообразиями, где s, m и n – натуральные числа, точки которых будем обозначать строчными латинскими и греческими буквами соответственно, а также функция $f : \mathfrak{S}_f \to R^s$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, сопоставляющая каждой паре $< i\alpha > \in \mathfrak{S}_f$ некоторую совокупность s вещественных чисел $f(i\alpha) = (f^1(i\alpha), \dots, f^s(i\alpha)) \in R^s$. Заметим, что в общем случае $\mathfrak{S}_f \neq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, то есть функция f не всякой паре из $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляет s чисел, но в последующем изложении удобно в явной записи значения $f(i\alpha)$ этой функции для пары $< i\alpha >$ подразумевать, что $< i\alpha > \in \mathfrak{S}_f$. Обозначим через $U(i)$ и $U(\alpha)$ окрестности точек $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$, через $U(< i\alpha >)$ – окрестность пары $< i\alpha > \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ и аналогично окрестности кортежей из других прямых произведений множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ на себя или друг на друга.

Для некоторых кортежей $< \gamma_1 \ldots \gamma_m > \in \mathfrak{N}^m$ и $< k_1 \ldots k_n > \in \mathfrak{M}^n$ введем функции $f^m = f[\gamma_1 \ldots \gamma_m]$ и $f^n = f[k_1 \ldots k_n]$, сопоставляя точкам $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ точки $(f(i\gamma_1), \ldots, f(i\gamma_m)) \in R^{sm}$ и $(f(k_1\alpha), \ldots, f(k_n\alpha)) \in R^{sn}$, если пары $< i\gamma_1 >, \ldots, < i\gamma_m >$ и $< k_1\alpha >, \ldots, < k_n\alpha >$ принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Заметим, что функции f^m и f^n не обязательно определены всюду на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

I. Область определения $\mathfrak{S}_f$ функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ множество.

II. Функция f в области своего определения есть достаточно гладкая функция.

III. В $\mathfrak{N}^m$ и $\mathfrak{M}^n$ плотны множества таких кортежей длины m и n для которых функции f^m и f^n имеют максимальные ранги, равные sm и sn, в точках плотных в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множеств соответственно.

Достаточная гладкость означает, что в области своего определения непрерывна как сама функция f, так и все ее производные достаточно высокого порядка. Гладкую функцию f, для которой выполняется условие III, будем называть *невырожденной*. Заметим также, что ограничения в аксиомах I, II, III открытыми и плотными подмножествами связано с тем, что исходные множества могут содержать исключительные подмножества меньшей размерности, где эти аксиомы не выполняются.

Введем еще функцию F, сопоставляя кортежу $< ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau >$ длины $m + n + 2$ из $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ точку $(f(i\alpha), f(i\beta), \ldots, f(v\tau)) \in R^{s(m+1)(n+1)}$, координаты которой в $R^{s(m+1)(n+1)}$ определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью значений функции f для всех пар его элементов: $< i\alpha >, < i\beta >, \ldots, < v\tau >$, если эти пары принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Область определения введенной функции есть, очевидно, открытое и плотное в $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ множество, которое обозначим через $\mathfrak{S}_F$.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$, удовлетворяющая аксиомам I, II, III, задает на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *s-метрическую физическую структуру ранга* $(n+1, m+1)$, если дополнительно выполняется следующая аксиома:

IY. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество, для каждого кортежа $< ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau >$ длины $m + n + 2$ которого и некоторой его окрестности $U(< i \ldots \tau >)$ найдется такая достаточно гладкая s- компонентная функция $\Phi : \mathcal{E} \to R^s$, определенная в некоторой области $\mathcal{E} \subset R^{s(m+1)(n+1)}$, содержащей точку $F(< i \dots \tau >)$, что в ней $rang \Phi = s$ и множество $F(U(< i \dots \tau >))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), \dots, f(v\tau)) = 0 \tag{1.1}$$

для всех кортежей из $U(< ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau >)$.

Аксиома IY составляет содержание принципа феноменологической симметрии в теории физических структур, предложенной Ю.И. Кулаковым [1] в 1968 году для классификации физических законов. Уравнения (1.1) задают s функциональных связей между $s(m+1)(n+1)$ измеряемыми в опыте значениями физических величин $f = (f^1, \dots, f^s)$ и являются аналитическим выражением физического закона, записанного в феноменологически инвариантной форме. Условие $rang \Phi = s$ означает, что уравнения $\Phi = 0$ (то есть $\Phi_1 = 0, \dots, \Phi_s = 0$) независимы.

Пусть $x = (x^1, \dots, x^{sm})$ и $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{sn})$ – локальные координаты в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Для исходной функции f в некоторой окрестности $U(i) \times U(\alpha)$ каждой пары $< i\alpha > \in \mathfrak{S}_f$ получаем тогда локальное координатное представление

$$f(i\alpha) = f(x(i), \xi(\alpha)) = f(x^1(i), \dots, x^{sm}(i), \xi^1(\alpha), \dots, \xi^{sn}(\alpha)), \tag{1.2}$$

свойства которого определяются аксиомами II и III. Поскольку по аксиоме III ранги функций f^m и f^n максимальны, координаты x и ξ входят в представление (1.2) существенным образом. Последнее означает, что никакая гладкая локально обратимая замена координат не приведет к уменьшению их числа в представлении (1.2), то есть ни для какой локальной системы координат его невозможно записать в виде

$$f(i\alpha) = f(x^1(i), \dots, x^{m'}, \xi^1(\alpha), \dots, \xi^{n'}(\alpha)),$$

где или $m' < sm$, или $n' < sn$. Действительно, если,например, $m' < sm$, то для любого кортежа $< \alpha_1 \dots \alpha_m > \in (U(\alpha))^m$ длины m и для любой точки из $U(i)$ ранг функции $f^m = f[\alpha_1 \dots \alpha_m]$ будет заведомо меньше sm, что противоречит аксиоме III. Заметим, однако, что существенная зависимость представления (1.2) от локальных коорддинат $x(i)$ и $\xi(\alpha)$ еще не гарантирует выполнения аксиомы III. То есть при наличии всех координат в любом представлении (1.2) функция f может оказаться вырожденной.

Функцию $f = (f^1, \ldots, f^s)$ можно рассматривать как s-метрику в геометрии двух множеств. Но поскольку s расстояний $f(i\alpha)$ определены для точек разных множеств, обычные метрические аксиомы здесь не имеют смысла. Будем также говорить, что s-компонентная функция f задает на многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ размерности sm и sn полиметрическую феноменологически симметричную геометрию ранга $(n+1, m+1)$.

Используя представление (1.2), запишем локальное координатное задание для введенной выше функции F:

$$\left.\begin{array}{l} f(i\alpha) = f(x(i), \xi(\alpha)), \\ f(i\beta) = f(x(i), \xi(\beta)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(v\tau) = f(x(v), \xi(\tau)), \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

функциональная матрица которого

$$\left\| \begin{array}{cccccccccc} \dfrac{\partial f(i\alpha)}{\partial x(i)} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \dfrac{\partial f(i\alpha)}{\partial \xi(\alpha)} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \dfrac{\partial f(v\tau)}{\partial x(v)} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \dfrac{\partial f(v\tau)}{\partial \xi(\tau)} \end{array} \right\| \tag{1.4}$$

имеет $s(m+1)(n+1)$ строк и $s(2mn+m+n)$ столбцов. Здесь через $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial \xi$ кратко обозначены соответствующие матрицы Якоби для компонент функции $f = (f^1, \ldots, f^s)$ по координатам $x = (x^1, \ldots, x^{sm})$ и $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{sn})$ соответственно:

$$\partial f/\partial x = \left\| \begin{array}{ccc} \partial f^1/\partial x^1 & \cdots & \partial f^1/\partial x^{sm} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial f^s/\partial x^1 & \cdots & \partial f^s/x^{sm} \end{array} \right\|,$$

$$\partial f/\partial \xi = \left\| \begin{array}{ccc} \partial f^1/\partial \xi^1 & \cdots & \partial f^1/\partial \xi^{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial f^s/\partial \xi^1 & \cdots & \partial f^s/\partial \xi^{sn} \end{array} \right\|.$$

Задание (1.3) для функции F представляет собой систему $s(m+1)(n+1)$ функций $f^1(i\alpha), \ldots, f^s(i\alpha), \ldots, f^1(v\tau), \ldots, f^s(v\tau)$, специальным образом зависящих от $s(2mn+m+n)$ переменных $x^1(i), \ldots, x^{sm}(i), \ldots, \xi^1(\tau), \ldots, \xi^{sn}(\tau)$ — координат всех точек кортежа $< ijk...v, \alpha\beta\gamma...\tau >$ длины $m+n+2$. Поскольку число функций в системе (1.3) не больше общего числа переменных, наличие связи (1.1) является нетривиальным фактом, не имеющим места для произвольных функций в этой системе.

Простые примеры геометрий одного и двух множеств, рассмотренные во Введении, показывают, что их феноменологическая и групповая симметрии тесно между собой связаны, взаимно обуславливая друг друга. Так, связь между шестью расстояниями для любых четырех точек плоской (то есть двумерной) геометрии, не обязательно евклидовой, приводит к существованию в ней группы движений, число параметров которой равно трем. Но движение в геометрии двух множеств имеет свою специфику, отличную от привычных свойств движения в геометрии одного множества. Поэтому необходимо дать соответствующие точные определения.

Под локальным движением в геометрии двух множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ будем понимать такую пару взаимно однозначных гладких отображений (преобразований)

$$\lambda : U \to U' \text{ и } \sigma : V \to V', \tag{1.5}$$

где $U, U' \subset \mathfrak{M}$ и $V, V' \subset \mathfrak{N}$ – открытые области, при которых функция f сохраняется. Последнее означает, что для каждой пары $< i\alpha > \in \mathfrak{S}_f$, такой что $i \in U$, $\alpha \in V$ и $< i'\alpha' > \in \mathfrak{S}_f$, где $i' = \lambda(i) \in U'$, $\alpha' = \sigma(\alpha) \in V'$, имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \sigma(\alpha)) = f(i\alpha), \tag{1.6}$$

выполняющееся для каждой из компонент $f^1, \ldots, f^s$ функции f.

Множество всех движений (1.5) есть локальная группа, для которой функция f, согласно равенству (1.6), является *двухточечным инвариантом.* Преобразования λ и σ в движениях (1.5) сами составляют две отдельные группы, а группа движений есть их взаимное расширение. Если функция f известна, например, в своем локальном координатном представлении (1.2), то равенство (1.6) представляет собой функциональное уравнение относительно преобразований λ и σ. Нам же о функции f известно только, что она невырождена и феноменологически инвариантна, то есть удовлетворяет некоторой системе s независимых уравнений (1.1). Но этого оказывается достаточно для установления факта существования группы ее движений, зависящей от smn параметров.

Для большей ясности последующего изложения воспроизведем в наших обозначениях определение локальной группы Ли преобразований, следуя монографии Л.С. Понтрягина "Непрерывные группы" (см.[11], стр.435). Пусть G^r – r-мерная локальная группа Ли и U – некоторая область гладкого многообразия $\mathfrak{M}$. Допустим, что каждому элементу $a \in G^r$ поставлено в соответствие непрерыно зависящее от a инъективное отображение $\lambda_a : U \to U'$ области U в некоторую область U' многообразия $\mathfrak{M}$, относящее каждой точке $i \in U$ некоторую точку $i' \in U'$, то есть $i' = \lambda_a(i) = \lambda(i, a)$. Будем говорить, что G^r есть *локальная группа Ли преобразований* области U, если выполнены следующие три условия: **1)** единице e группы G^r соответствует тождественное преобразование $i' = \lambda(i, e) = i$ области U на себя и $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ab)$, то есть произведению $ab \in G_r$ соответствует композиция преобразований, причем сначала λ_a, а затем λ_b, но допустим и другой порядок; **2)** два преобразования λ_a и λ_b совпадают тогда и только тогда, когда $a = b$, или, иначе, преобразование λ_a является тождественным лишь при условии, что a есть единица e группы G^r; **3)** в координатной форме $\lambda(i, a)$ есть достаточное число раз дифференцируемая функция точки $i \in U$ и элемента $a \in G^r$.

Определенная только что группа преобразований по условию 2) эффективна и потому сами элементы группы G^r могут считаться преобразованиями. То есть можно говорить о r-мерной локальной группе Ли локальных преобразований многообразия $\mathfrak{M}$, которую обозначим через $G^r(\lambda)$. Таким образом, в области U задано эффективное гладкое действие группы G^r, причем условия 1), 2), 3) выполняются для некоторой ее части, то есть некоторой, зависящей от U, окрестности единичного элемента $e \in G^r$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f = (f^1, \ldots , f^s)$, удовлетворяющая аксиомам I, II, III, задает на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *s-метрическую геометрию, наделенную групповой симметрией степени smn*, если дополнительно выполняется следующая аксиома:

IY$'$. Существуют открытые и плотные в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множества, для всех точек i и α которых определены эффективные гладкие действия smn-мерной локальной группы Ли в некоторых окрестностях $U(i)$ и $U(\alpha)$, такие, что действия ее в окрестностях $U(i), U(j)$ и $U(\alpha), U(\beta)$ точек i, j и α, β совпадают в пересечениях $U(i) \cap U(j)$ и $U(\alpha) \cap U(\beta)$ и что функция f является двухточечным инвариантом по каждой из своих s компонент.

Группы преобразований, о которых говорится в аксиоме IY$'$, определяют своеобразную локальную подвижность жестких фигур ("твердых тел") в пространстве $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ с smn степенями свободы. Заметим, что глобальной подвижности при этом может и не быть. Множество пар $< i\alpha >$, для которых функция f определена и одновременно является двухточечным инвариантом, очевидно, открыто и плотно в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$.

Согласно аксиоме IY$'$, на открытых и плотных в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множествах заданы smn-мерные линейные семейства гладких векторных полей X и Ξ, замкнутые относительно операции коммутирования, то есть алгебры Ли преобразований (см.[11],§60). В некоторых локальных системах координат в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ базисные векторные поля этих семейств запишем в операторной форме:

$$\left.\begin{array}{r} X_\omega = \lambda^\mu_\omega(x)\partial/\partial x^\mu, \\ \Xi_\omega = \sigma^\nu_\omega(\xi)\partial/\partial \xi^\nu, \end{array}\right\} \tag{1.7}$$

где $\omega = 1, \ldots, smn$, а по "немым" индексам μ и ν производится суммирование от 1 до sm и от 1 до sn соответственно. По инфинитезимальному критерию инвариантности (см.[12],§17,стр.229 или [13],§17,стр.77) функция $f(i\alpha)$ будет инвариантом локальной группы преобразований некоторой окрестности $U(i) \times U(\alpha)$, то есть двухточечным инвариантом, в том и только в том случае, если она покомпонентно удовлетворяет системе smn уравнений

$$X_\omega(i)f(i\alpha) + \Xi_\omega(\alpha)f(i\alpha) = 0$$

с операторами (1.7):

$$\lambda^\mu_\omega(i)\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x^\mu(i)} + \sigma^\nu_\omega(\alpha)\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \xi^\nu(\alpha)} = 0, \tag{1.8}$$

где $\lambda^\mu_\omega(i) = \lambda^\mu_\omega(x(i)) = \lambda^\mu_\omega(x^1(i), \ldots, x^{sm}(i))$ и $\sigma^\nu_\omega(\alpha) = \sigma^\nu_\omega(\xi(\alpha)) = \sigma^\nu_\omega(\xi^1(\alpha), \ldots, \xi^{sn}(\alpha))$.

Ненулевые векторные поля X и Ξ могут обращаться в нуль в некоторых точках областей своего задания, но хотя бы в одной из их точек должны быть отличны от нуля. Если же для соответствующих групп Ли преобразований, алгебрам Ли которых принадлежат поля X и Ξ, невырожденная функция f является двухточечным инвариантом, то имеет место следующая лемма:

Лемма 1. *Множества точек, где ненулевые векторные поля X и Ξ алгебр Ли локальных групп Ли локальных преобразований, удо-*

влетворяющих аксиоме IY$'$, *отличны от нуля, открыты и плотны в многообразиях* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *соответственно.*

Предположим противное. Пусть, например, ненулевое векторное поле $X = a^\omega X_\omega$, где $a^\omega, \omega = 1, \dots, smn$ – постоянные, не все равные нулю одновременно, в некоторой окрестности $U(i)$ точки i обращается в нуль тождественно. Рассмотрим соответствующее ненулевое векторное поле $\Xi = a^\omega \Xi_\omega$, которое в какой-то точке α, а значит, и в некоторой ее окрестности $U(\alpha)$, отлично от нуля. Поскольку по аксиоме I область определения $\mathfrak{S}_f$ функции f открыта и плотна в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, можно считать, что пара $< i\alpha >$ принадлежит $\mathfrak{S}_f$. Тогда, согласно аксиоме IY$'$, функция $f(i\alpha)$ будет двухточечным инвариантом, являясь решением системы уравнений (1.8). Поскольку, по сделанному предположению, $X(i) = a^\omega X_\omega(i) = 0$, а $\Xi(\alpha) = a^\omega \Xi_\omega(\alpha) \neq 0$, следствием smn уравнений системы (1.8) будет одно уравнение:

$$a^\omega \sigma^\nu_\omega(\alpha) \partial f(i\alpha)/\partial \xi^\nu(\alpha) = 0, \tag{1.9}$$

в которое входят производные только по координатам точки α и от этих же только координат зависят коэффициенты уравнения $a^\omega \sigma^\nu_\omega(\alpha)$, причем, по крайней мере, один из них отличен от нуля. Уравнение (1.9) может быть решено методом характеристик. Система уравнений характеристик для него имеет не более $sn-1$ независимых интегралов и потому общее решение уравнения (1.9) будет таким:

$$f(i\alpha) = f(x^1(i), \dots, x^{sm}(i), \psi^1(\alpha), \dots, \psi^{n'}(\alpha)), \tag{1.10}$$

где $n' < sn$. В полученное выражение для функции $f(i\alpha)$ sn координат $\xi^1(\alpha), \dots, \xi^{sn}(\alpha)$ входят несущественным образом через меньшее число функций $\psi^1(\alpha), \dots, \psi^{n'}(\alpha)$, так как $n' < sn$, что противоречит аксиоме III. Таким образом, в окрестности $U(i)$ обязательно найдется точка, где исходное векторное поле X отлично от нуля. Поскольку область задания поля X открыта и плотна в $\mathfrak{M}$, множество точек, где оно отлично от нуля, плотно и, очевидно, открыто в $\mathfrak{M}$. Рассуждения в отношении векторного поля Ξ проводятся совершенно аналогично.

Следствие. *Множества точек, где базисные векторные поля* X_ω *и* Ξ_ω, $\omega = 1, \dots, smn$ *алгебр Ли локальных групп Ли локальных преобразований, удовлетворяют аксиоме* IY$'$, *одновременно отличны от* *нуля, открыты и плотны в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно.*

Следствие очевидно, так как пересечения конечного числа ($= smn$) открытых и плотных в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множеств, для всех точек которых ненулевые базисные векторные поля X_ω и Ξ_ω по лемме 1 отличны от нуля, являются открытыми и плотными в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множествами.

Смысл только что доказанной леммы 1 и ее следствия состоит в том, если группы преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, составляющие группу движений невырожденной функции f, действуют эффективно в некоторых открытых множествах $U \subseteq \mathfrak{M}$ и $V \subseteq \mathfrak{N}$, то они действуют эффективно и в любых их открытых подмножествах $U' \subset U$ и $V' \subset V$.

Теорема 1. *Если функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$, удовлетворяющая аксиомам I,II,III, задает на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ s-метрическую геометрию, наделенную групповой симметрией степени smn, то она на тех же многообразиях задает s- метрическую физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$.*

Пусть $< ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau >$ такой кортеж из $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ длины $m+n+2$, что его точки $i, j, k, \ldots v$ и $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \tau$ принадлежат открытым и плотным в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множествам, о которых говорится в аксиоме IY$'$. Ясно, что множество таких кортежей открыто и плотно в $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$, а его пересечение с $\mathfrak{S}_F$ открыто и плотно в $\mathfrak{S}_F$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $< i \ldots \tau > \in \mathfrak{S}_F$. По условию аксиомы IY$'$ существуют такие окрестности $U(i), \ldots, U(\tau)$ точек кортежа $< ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau >$, что smn-мерные локальные группы Ли их преобразований сохраняют покомпонентно все функции $f : U(i) \times U(\alpha) \to R^s, \ldots, f : U(v) \times U(\tau) \to R^s$. Рассмотрим, далее, произвольную $(m+n+2)$-точечную фигуру, соответствующую некоторому кортежу длины $m+n+2$ из окрестности $U(i) \times \ldots \times U(\tau)$. Движение этой фигуры как "твердого тела" означает, что при изменении положения ее точек все "расстояния" в ней сохраняются, то есть являются двухточечными инвариантами. В некоторой локальной системе координат эти "расстояния" определяются системой функций (1.3). Инвариантность же функций (1.3) при локальных преобразованиях, задаваемых векторными полями $X = \lambda^\mu(x)\partial/\partial x^\mu$ и $\Xi = \sigma^\nu(\xi)\partial/\partial \xi^\nu$ в окрестностях $U(i), \ldots, U(v)$ и $U(\alpha), \ldots, U(\tau)$, по инфинитезимальному критерию, упомянутому выше при записи уравнений (1.8), означает, что эти функции покомпонентно являются решениями следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda^\mu(i)\partial f(i\alpha)/\partial x^\mu(i)+\sigma^\nu(\alpha)\partial f(i\alpha)/\partial\xi^\nu(\alpha)=0,\\ \lambda^\mu(i)\partial f(i\beta)/\partial x^\mu(i)+\sigma^\nu(\beta)\partial f(i\beta)/\partial\xi^\nu(\beta)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \lambda^\mu(v)\partial f(v\tau)/\partial x^\mu(v)+\sigma^\nu(\tau)\partial f(v\tau)/\partial\xi^\nu(\tau)=0.\end{array}\right\} \tag{1.11}$$

Система (1.11) при известной функции $f=(f^1,\dots,f^s)$ может быть рассмотрена как алгебраическая система $s(m+1)(n+1)$ линейных однородных уравнений относительно $s(2mn+m+n)$ компонент векторных полей X и Ξ в окрестностях $U(i),\dots,U(v)$ и $U(\alpha),\dots,U(\tau)$ точек $i,j,k,\dots,v$ и $\alpha,\beta,\gamma,\dots,\tau$. Матрица системы (1.11) совпадает, очевидно, с функциональной матрицей (1.4). Алгебры Ли векторных полей X и Ξ smn-мерны, так как именно такую размерность по аксиоме IY$'$ имеют локальные группы Ли преобразований окрестностей $U(i),\dots,U(\tau)$. Следовательно, система (1.11) имеет решение:

$$\left.\begin{array}{r}\lambda^\mu(i)=a^\omega\lambda^\mu_\omega(i),\dots,\lambda^\mu(v)=a^\omega\lambda^\mu_\omega(v),\\ \sigma^\nu(\alpha)=a^\omega\sigma^\nu_\omega(\alpha),\dots,\sigma^\nu(\tau)=a^\omega\sigma^\nu_\omega(\tau),\end{array}\right\} \tag{1.12}$$

где a^ω – произвольные константы и суммирование по "немому" индексу ω производится в пределах от 1 до smn, причем функции λ^μ_ω с $\mu=1,\dots,sm$ и σ^ν_ω с $\nu=1,\dots,sn$ линейно независимы по нижнему индексу ω с постоянными коэффициентами в соответствующих окрестностях каждой точки кортежа $<ijk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau>$.

Таким образом, система (1.11) имеет smn линейно независимых с постоянными коэффициентами решений. Эти решения можно получить из решения (1.12), беря соответствующее число линейно независимых векторов $(a^1,a^2,\dots,a^{smn})$, например, $(1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)$:

$$\left.\begin{array}{r}\lambda^\mu_\omega(i),\lambda^\mu_\omega(j),\dots,\lambda^\mu_\omega(v),\\ \sigma^\nu_\omega(\alpha),\sigma^\nu_\omega(\beta),\dots,\sigma^\nu_\omega(\tau).\end{array}\right\} \tag{1.12$'$}$$

Лемма 2. *Решения* (1.12$'$) *линейно независимы по нижнему индексу ω не только с постоянными коэффициентами, но линейно независимы по нему также и с переменными коэффициентами, то есть в общем смысле.*

Предположим противное. Пусть найдутся такие переменные коэффициенты $c^\omega = c^\omega(< ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau >)$, $\omega = 1, \ldots, smn$, что имеют место следующие $s(2mn + m + n)$ соотношений:

$$\left.\begin{array}{c} c^\omega \lambda^\mu_\omega(i) = 0, c^\omega \lambda^\mu_\omega(j) = 0, \ldots, c^\omega \lambda^\mu_\omega(v) = 0, \\ c^\omega \sigma^\nu_\omega(\alpha) = 0, c^\omega \sigma^\nu_\omega(\beta) = 0, \ldots, c^\omega \sigma^\nu_\omega(\tau) = 0, \end{array}\right\} \qquad (1.13)$$

вытекающие из предполагаемой линейной зависимости решений (1.12′), которые, напомним, линейно независимы с постоянными коэффициентами. Коэффициеты c^ω есть решение алгебраической однородной системы уравнений (1.13) и являются некоторыми функциями координат точек кортежа $< ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau >$, одновременно в нуль не обращающимися. Заметим, что система (1.13) не обязательно имеет ненулевое решение, так как число уравнений в ней ($= s(2mn+m+n)$) больше числа неизвестных ($= smn$).

Рассмотрим движение произвольной фигуры $< jk \ldots v, \beta\gamma \ldots \tau >$, содержащей $m+n$ точек, и движение фигуры $< ijk \ldots v, \beta\gamma \ldots \tau >$, содержащей $m+n+1$ точку. Переход от первой фигуры ко второй состоит в добавлении точки i. Поскольку при движении второй фигуры сохраняются дополнительно sm "расстояний" $f(i\beta), \ldots, f(i\tau)$, относительно sm компонент векторного поля $X(i)$, то есть поля $X = \lambda^\mu(x)\partial/\partial x^\mu$ в некоторой окрестности $U(i)$ точки i, возникает алгебраическая система sm линейных однородных уравнений:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda^\mu(i)\partial f(i\beta)/\partial x^\mu(i) = -\sigma^\nu(\beta)\partial f(i\beta)/\partial \xi^\nu(\beta), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda^\mu(i)\partial f(i\tau)/\partial x^\mu(i) = -\sigma^\nu(\tau)\partial f(i\tau)/\partial \xi^\nu(\tau). \end{array}\right\}$$

Ранг матрицы этой системы по условиям аксиомы III равен sm, по крайней мере, для одного кортежа $< \beta \ldots \tau >$ и одной точки i из соответствующих окрестностей $U(\beta) \times \ldots \times U(\tau)$ и $U(i)$. Решая уравнения системы, находим выражение для компонент векторного поля $X(i)$ в окрестности $U(i)$ через компоненты векторных полей $\Xi(\beta), \ldots, \Xi(\tau)$ в окрестностях $U(\beta), \ldots, U(\tau)$:

$$\lambda^\mu(i) = b^\mu_{1\nu}\sigma^\nu(\beta) + \ldots + b^\mu_{m\nu}\sigma^\nu(\tau),$$

где, например, $b^\mu_{1\nu} = b^\mu_{1\nu}(< i, \beta\gamma \ldots \tau >)$, причем $\mu = 1, \ldots, sm$ и $\nu = 1, \ldots, sn$. В соответствии с решением (1.12) и в силу произвольности коэффициентов a^ω в нем, из этих выражений получаем линейную связь:

$$\lambda^{\mu}_{\omega}(i) = b^{\mu}_{1\nu}\sigma^{\nu}_{\omega}(\beta) + \ldots + b^{\mu}_{m\nu}\sigma^{\nu}_{\omega}(\tau). \tag{1.14}$$

Запишем подсистему из $2smn$ уравнений системы (1.13), относящуюся к укороченному кортежу $< jk \ldots v, \beta\gamma \ldots \tau >$ длины $m + n$:

$$\left. \begin{array}{l} c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(j) = 0, \ldots, c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(v) = 0, \\ c^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\beta) = 0, \ldots, c^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\tau) = 0. \end{array} \right\} \tag{1.13$'$}$$

Соответствующая подсистема системы (1.13) для кортежа $< ijk \ldots v$, $\beta\gamma \ldots \tau >$ длины $m+n+1$ получается добавлением к подсистеме $(1.13')$ уравнений $c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i) = 0$. Но эти уравнения в силу линейной связи (1.14) являются следствием уравнений подсистемы $(1.13')$. То есть ранги матриц подсистем системы (1.13), относящиеся к кортежам $< jk \ldots v$, $\beta\gamma \ldots \tau >$ и $< ijk \ldots v, \beta\gamma \ldots \tau >$, совпадают. Пусть ранг матрицы подсистемы $(1.13')$ равен r. Ясно, что этот ранг не превышает числа неизвестных $(= smn)$, а по следствию леммы 1 он не меньше единицы. В случае $r = smn$ подсистема $(1.13')$ и полная система (1.13) будут иметь только нулевое решение, что противоречит сделанному предположению относительно коэффициентов c^{ω}. Если $smn = 1$, то обязательно должно быть $smn = r$, поэтому будем считать,что $smn > 1$, то есть что либо $s > 1$, либо $m > 1$, либо $n > 1$. Тогда в матрице подсистемы $(1.13')$ найдется такая квадратная подматрица ненулевого порядка $r < smn$, определитель которой отличен от нуля. Возьмем определитель $r + 1$ порядка, содержащий эту подматрицу в качестве минора порядка r и одну строку из матрицы подсистемы системы (1.13) для кортежа $< ijk \ldots v, \beta\gamma \ldots \tau >$, в которую входят функции $\lambda^{\mu}_{\omega}(i)$. Поскольку, как было установлено выше, ранг матрицы подсистемы системы (1.13) для кортежа $< ijk \ldots v, \beta\gamma \ldots \tau >$ то же равен r, указанный определитель $r + 1$ порядка должен обращаться в нуль. Раскрывая его по элементам строки, содержащей фкнкции $\lambda^{\mu}_{\omega}(i)$, для всех значений индекса $\mu = 1, \ldots, sm$ получаем связь

$$\tilde{c}^{\omega}(< jk \ldots v, \beta\gamma \ldots \tau >)\lambda^{\mu}_{\omega}(i) = 0,$$

где $\tilde{c}^{\omega}(< jk \ldots v, \beta\gamma \ldots \tau >)$ есть алгебраические дополнения к $\lambda^{\mu}_{\omega}(i)$, зависящие от координат точек кортежа $< jk \ldots v, \beta\gamma \ldots \tau >$ и не зависящие от координат точки i. Заметим, что хотя бы одно из этих алгебраических дополнений обязательно отлично от нуля. Фиксируя в полученной связи координаты точек кортежа $< jk \ldots v, \beta\gamma \ldots \tau >$, по которым уравнение связи выполняется тождественно, уставнавливаем, что функции $\lambda^\mu_\omega(i)$ линейно зависимы по нижнему индексу ω с постоянными коэффициентами. Но этот результат противоречит основному условию аксиомы IY$'$, согласно которому размерность локальной группы Ли преобразований окрестности $U(i)$ равна smn, и потому такую же размерность имеет соответствующая алгебра Ли векторных полей $X(i)$ с базисом $X_\omega(i) = \lambda^\mu_\omega(i)\partial/\partial x^\mu(i)$, где $\omega = 1, \ldots, smn$. Установленное противоречие и доказывает лемму 2.

Лемма 3. *Ранг матрицы алгебраической системы уравнений* (1.11) *точно равен* $s(m+1)(n+1) - s$ *для плотного в* $\mathfrak{S}_F$ *множества кортежей и этот ранг максимален в* $\mathfrak{S}_F$.

Предположим, что в окрестности $U(i) \times \ldots \times U(\tau)$ найдется такой кортеж, что ранг матрицы системы (1.11), то есть ранг матрицы (1.4), равен $s(m+1)(n+1) - s'$, где $s' < s$ – целое неотрицательное число, и этот ранг максимален. В силу гладкости функции f ранг матрицы (1.4) будет равен тому же значению и в некоторой окрестности указанного кортежа, содержащейся в окрестности $U(i) \times \ldots \times U(\tau)$. Как известно, максимальное число линейно независимых (для системы (1.11) – в общем смысле) ненулевых решений алгебраической системы линейных однородных уравнений равно чилу неизвестных минус ранг матрицы системы. В предполагаемом случае для системы (1.11) оно будет равно: $s(2mn + m + n) - s(m+1)(n+1) + s' = mns - (s - s')$, то есть меньше mns, хотя, в действительности, по лемме 2 эта система имеет mns линейно независимых в общем смысле ненулевых решений (1.12$'$). Таким образом, ранг матрицы (1.4) в окрестности $U(i) \times \ldots \times U(\tau)$ не может быть больше $s(m+1)(n+1) - s$. С другой стороны, в матрице (1.4) имеется квадратная подматрица порядка $s(m+1)(n+1) - s$, по диагонали которой расположены функциональные матрицы $\partial(f(i\beta), \ldots, f(i\tau))/\partial(x^1(i), \ldots, x^{sm}(i))$, $\partial(f(j\alpha), \ldots, f(v\alpha))$ / $\partial(\xi^1(\alpha), \ldots, \xi^{sn}(\alpha))$, …, $\partial(f(j\tau), \ldots, f(v\tau))/\partial(\xi^1(\tau), \ldots, \xi^{sn}(\tau))$. Определители этих матриц не обращаются в нуль по условиям аксиомы III, а их произведение равно определителю описанной выше квадратной подматрицы, который также оказывается отличным от нуля. Следовательно, в окрестности $U(i) \times \ldots \times U(\tau)$ плотного в $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ множества кортежей всегда найдется такой кортеж, для которого ранг матрицы (1.4) точно равен $s(m+1)(n+1) - s$.

Множество таких кортежей, очевидно, плотно в $\mathfrak{S}_F$, причем ни для одного кортежа из $\mathfrak{S}_F$ ранг матрицы (1.4), как было установлено выше, не превышает значения $s(m+1)(n+1)-s$, то есть этот ранг максимален. Лемма 3 доказана.

Пусть, далее, для некоторого кортежа $< ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau >$ из плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества, устанавливаемого леммой 3, ранг матрицы (1.4) равен $s(m+1)(n+1)-s$, причем в любой его окрестности этот ранг не больше указанного значения, поскольку он максимален. Но тогда по хорошо известной из математического анализа теореме о функциональной зависимости для некоторой окрестности $U(< i\ldots\tau >)$ существует такая достаточно гладкая s-компонентная функция $\Phi : \mathcal{E} \to R^s$, определенная в некоторой области $\mathcal{E} \subset R^{s(m+1)(n+1)}$, содержащей точку $F(< i\ldots\tau >)$, в которой ее ранг равен s, что множество $F(U(< i\ldots\tau >))$ принадлежит множеству нулей функции Φ, то есть имеет место уравнение (1.1) для всех кортежей из $U(< i\ldots\tau >)$. Ясно также, поскольку ранг матрицы (1.4) для кортежа $< i\ldots\tau >$ равен $s(m+1)(n+1)-s$, что существует такая его окрестность $U_1(< i\ldots\tau >) \subset U(< i\ldots\tau >)$ и такая область $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$, что множество значений $F(U_1(< i\ldots\tau >))$ совпадает с множеством нулей этой функции в $\mathcal{E}_1$, являясь неособой поверхностью коразмерности s в $R^{s(m+1)(n+1)}$. Теорема 1 полностью доказана.

Лемма 4. *Если функция $f = (f^1,\ldots,f^s)$, удовлетворяющая аксиомам* I,II,III,*задает на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ s-метрическую геометрию, наделенную групповой симметрией, то степень этой симметрии не превышает smn.*

Предположим противное. Пусть функция f допускает такую группу движений, размерность которой больше smn. Это означает, что у системы (1.11) число линейно независимых с постоянными коэффициентами решений (1.12$'$) будет больше smn. Возьмем из них любые $smn+1$ решение. Эти решения будут линейно независимы не только с постоянными коэффициентами, но и с переменными, то есть в общем смысле. Для установления их линейной зависимости в общем смысле достаточно повторить рассуждения, следующие за системой уравнений (1.13), заменяя ограничение $\omega \leq smn$ на условие $\omega \leq smn+1$. Поскольку система (1.11) в предполагаемом случае имеет, по крайней мере, $smn+1$ линейно независимое ненулевое решение, ранг ее матрицы, то есть матрицы (1.4), всюду должен быть меньше $s(m+1)(n+1)-s$. Однако в матрице (1.4) имеется отличный от нуля определитель порядка $s(m+1)(n+1)-s$, упомянутый в доказательстве леммы 3, по диагонали которого расположены квадратные матрицы Якоби, определители которых не обращаются в нуль по условиям аксиомы III. То есть общий ранг функциональной матрицы (1.4) не может быть меньше $s(m+1)(n+1)-s$. Установленное противоречие и доказывает лемму 4.

Теорема 2. *Если функция* $f=(f^1,\ldots,f^s)$, *удовлетворяющая аксиомам* I,II,III, *задает на* sm*-мерном и* sn*-мерном многообразиях* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ s*-метрическую физическую структуру ранга* $(n+1,m+1)$, *то она на тех же многообразиях задает* s*-метрическую геометрию, наделенную групповой симметрией степени* smn.

Согласно аксиоме IY определения 1 в любой окрестности произвольного кортежа из $\mathfrak{S}_F$ найдется такой кортеж $< ijk\ldots v,\alpha\beta\gamma\ldots\tau >$ и такая его окрестность $U(< i\ldots\tau >)$, что множество значений $F(U(< i\ldots\tau >))$ будет удовлетворять s независимым уравнениям (1.1), причем $rang\Phi=s$ в точке $F(< i\ldots\tau >)$. Поскольку функция Φ достаточно гладкая, можно, не ограничивая общности, считать, что $rang\Phi=s$ для всех точек локальной области $\mathcal{E}\subset R^{s(m+1)(n+1)}$, где она определена, и, конечно же, на множестве значений $F(U(< i\ldots\tau >))$. Тогда множество нулей функции Φ, но не обязательно множество $F(U(< i\ldots\tau >))$, будет гладкой без особых точек поверхностью в $R^{s(m+1)(n+1)}$ коразмерности s.

Продифференцируем уравнение (1.1) по каждой из $sm(n+1)+sn(m+1)$ координат $x^1(i),\ldots,x^{sm}(i),\ldots,x^1(v),\ldots,x^{sm}(v)$, $\xi^1(\alpha),\ldots,\xi^{sn}(\alpha),\ldots,\ \xi^1(\tau),\ldots,\ \xi^{sn}(\tau)$ точек кортежа $< ijk\ldots v,\alpha\beta\gamma\ldots\tau >$. В результате получим $s(2mn+m+n)$ линейных однородных уравнений относительно $s(m+1)(n+1)$ производных от компонент функции $\Phi=(\Phi_1,\ldots,\Phi_s)$:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial\Phi_\sigma}{\partial f(i\alpha)}\dfrac{\partial f(i\alpha)}{\partial x(i)}+\ldots+\dfrac{\partial\Phi_\sigma}{\partial f(i\tau)}\dfrac{\partial f(i\tau)}{\partial x(i)}=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{\partial\Phi_\sigma}{\partial f(i\tau)}\dfrac{f(i\tau)}{\partial\xi(\tau)}+\ldots+\dfrac{\partial\Phi_\sigma}{\partial f(v\tau)}\dfrac{\partial f(v\tau)}{\partial\xi(\tau)}=0,
\end{array}\right\}\qquad(1.15)$$

где $\sigma = 1, \dots, s$, $\partial\Phi_\sigma/\partial f = \|\partial\Phi_\sigma/\partial f^1, \dots, \partial\Phi_\sigma/\partial f^s\|$, а $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial \xi$ есть те же матрицы Якоби, которые фигурировали в сокращенной записи функциональной матрицы (1.4). Матрица же самой алгебраической системы уравнений (1.15) с точностью до транспонирования, очевидно, совпадает с этой функциональной матрицей.

Лемма 5. *Ранг матрицы алгебраической системы уравнений (1.15) точно равен $s(m+1)(n+1)-s$ для плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества кортежей и этот ранг максимален в $\mathfrak{S}_F$.*

Доказательство леммы 5 аналогично доказательству леммы 3. Действительно, если для некоторого кортежа из $\mathfrak{S}_F$ ранг матрицы системы (1.15), то есть ранг матрицы (1.4), равен $s(m+1)(n+1)-s'$, где $s' < s$ – целое неотрицательное число, и этот ранг максимален, то в какой-то его окрестности U система будет иметь только s' линейно независимых в общем смысле ненулевых решений, так как в ней имеется $s(m+1)(n+1)$ неизвестных. С другой стороны, согласно аксиоме IY $rang\Phi = s$ для плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества кортежей. Следовательно, в некоторой открытой части окрестности U эта система должна иметь $s > s'$ линейно независимых в общем смысле ненулевых решений. Установленное противоречие доказывает, что ранг матрицы (1.4) не может быть больше $s(m+1)(n+1)-s$. А поскольку в ней имеется квадратная подматрица порядка $s(m+1)(n+1)-s$ с отличным от нуля определителем, описанная в доказательстве леммы 3, ранг всей матрицы (1.4), то есть ранг матрицы системы уравнений (1.15), равен $s(m+1)(n+1)-s$ для плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества кортежей и этот ранг максимален. Лемма 5 доказана.

Пусть для кортежа $< ijk\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau >$ из устанавливаемого леммой 5 плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества ранг матрицы (1.4) равен $s(m+1)(n+1)-s$, а поскольку он максимален, можно считать его равным тому же значению для всех кортежей из некоторой окрестности $U(i)\times\dots\times U(\tau)$ исходного. Число столбцов в матрице (1.4), равное $s(2mn+m+n)$, больше ее ранга, поэтому между ними существует линейная связь. Запишем эту связь по элементам каждой строки:

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda^\mu[i]\partial f(i\alpha)/\partial x^\mu(i) + \sigma^\nu[\alpha]\partial f(i\alpha)/\partial\xi^\nu(\alpha) = 0,\\
\lambda^\mu[i]\partial f(i\beta)/\partial x^\mu(i) + \sigma^\nu[\beta]\partial f(i\beta)/\partial\xi^\nu(\beta) = 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\lambda^\mu[v]\partial f(v\tau)/\partial x^\mu(v) + \sigma^\nu[\tau]\partial f(v\tau)/\partial\xi^\nu(\tau) = 0,
\end{array}\right\} \qquad (1.16)$$

где, например, $\lambda^\mu[i]$ и $\sigma^\nu[\alpha]$ – коэффициенты линейной зависимости при столбцах с дифференцированием по координатам $x^\mu(i), \mu = 1, \ldots, sm$ и $\xi^\nu(\alpha), \nu = 1, \ldots, sn$ соответственно, а для их отличия от компонент $\lambda^\mu(i)$ и $\sigma^\nu(\alpha)$ векторных полей X и Ξ в окрестностях $U(i)$ и $U(\alpha)$, входящих в уравнения системы (1.11), здесь использованы квадратные скобки.

Соотношения связи (1.16) при известной функции $f = (f^1, \ldots, f^s)$ естественно рассматривать как алгебраическую систему $s(m+1)(n+1)$ линейных однородных уравнений относительно $s(2mn+m+n)$ коэффициентов линейной зависимости $\lambda^\mu[i], \ldots, \lambda^\mu[v], \mu = 1, \ldots, sm$ и $\sigma^\nu[\alpha]$, $\ldots, \sigma^\nu[\tau], \nu = 1, \ldots, sn$, которые одновременно в нуль не обращаются в окрестности $U(i) \times \ldots \times U(\tau)$. Матрица системы (1.16) совпадает с матрицей (1.4), поэтому ее ранг равен $s(m+1)(n+1)-s$. Максимальное число линейно независимых (в общем смысле) ненулевых решений системы (1.16) равно числу неизвестных минус ранг матрицы системы, то есть равно smn. Выпишем ее общее решение:

$$\left.\begin{array}{c}
\lambda^\mu[i] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i, < ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau >), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda^\mu[v] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(v, < ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau >), \\
\sigma^\nu[\alpha] = c^\omega \sigma^\nu_\omega(\alpha, < ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau >), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sigma^\nu[\tau] = c^\omega \sigma^\nu_\omega(\tau, < ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau >),
\end{array}\right\} \tag{1.17}$$

где c^ω – линейные коэффициенты общего решения в его выражении через линейно независимые ненулевые решения этой же системы, причем суммирование по "немому" индексу ω производится в пределах от 1 до smn. Но в отличие от решения (1.12) аналогичной системы (1.11), здесь учтена возможная зависимость выражений $\lambda^\mu[i], \ldots,$ $\lambda^\mu[v], \sigma^\nu[\alpha], \ldots, \sigma^\nu[\tau]$ не только от координат той точки, по координате которой проводится дифференцирование в соответствующем столбце матрицы (1.4), но и от координат всех других точек, входящих в коэффициеты уранений (1.16), условно обозначенная исходным кортежем $< ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau >$. Кроме того, в решении (1.17) коэффициенты c^ω являются, в общем случае, произвольными функциями, тогда как в решении (1.12) коэффициенты a^ω были только произвольными константами.

Лемма 6. *Общее решение* (1.17) *системы уравнений* (1.16) *может* *быть записано в такой форме, что координаты точки i и координаты точки α входят явно в функции λ^μ_ω и σ^ν_ω только для выражений $\lambda^\mu[i]$ и $\sigma^\nu[\alpha]$ соответственно.*

Возьмем кортеж $< jk\dots v, \beta\gamma\dots\tau >$ длины $m+n$, полученный из первоначального кортежа $< ijk\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau >$ длины $m+n+2$ опусканием точек i и α. Выделим из системы уравнений (1.16) подсистему уравнений для кортежа $< jk\dots v, \beta\gamma\dots\tau >$, в коэффициенты которых не входят координаты точки i из окрестности $U(i)$ и координаты точки α из окрестности $U(\alpha)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^\mu[j]\partial f(j\beta)/\partial x^\mu(j) + \sigma^\nu[\beta]\partial f(j\beta)/\partial\xi^\nu(\beta) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda^\mu[v]\partial f(v\tau)/\partial x^\mu(v) + \sigma^\nu[\tau]\partial f(v\tau)/\partial\xi^\nu(\tau) = 0. \end{array}\right\} \qquad (1.16')$$

В матрице подсистемы $(1.16')$ имеется минор порядка smn, не обращающийся в нуль по условиям аксиомы III. Соответствующая квадратная матрица ступенчатая и ее диагональными клетками являются следующие квадратные матрицы Якоби:

$$\left.\begin{array}{l} \partial(f(j\beta),\dots,f(j\tau))/\partial(x^1(j),\dots,x^{sm}(j)), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \partial(f(v\beta),\dots,f(v\tau))/\partial(x^1(v),\dots,x^{sm}(v)) \end{array}\right\}$$

(см. аналогичную ситуацию в доказательстве леммы 3). То есть ранг матрицы подсистемы $(1.16')$ равняется своему максимальному значению smn, по крайней мере, для одного укороченного кортежа $< jk\dots v, \beta\gamma\dots\tau >$ и некоторой его окрестности. Но тогда подсистема $(1.16')$ имеет smn и не более линейно независимых в общем смысле ненулевых решений, поскольку максимальное число таких решений равно числу входящих в нее неизвестных $\lambda^\mu[j],\dots,\lambda^\mu[v],\sigma^\nu[\beta],\dots,\sigma^\nu[\tau]$ $(= 2smn)$ минус ранг матрицы подсистемы $(= smn)$. В матрице подсистемы $(1.16')$ нет зависимости от координат точек i и α и потому ее общее решение можно записать в такой форме, в которой функции λ^μ_ω

и σ^ν_ω не зависят от этих координат:

$$\left.\begin{array}{r}\lambda^\mu[j]=c^\omega\lambda^\mu_\omega(j,<jk\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau>),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda^\mu[v]=c^\omega\lambda^\mu_\omega(v,<jk\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau>),\\ \sigma^\nu[\beta]=c^\omega\sigma^\nu_\omega(\beta,<jk\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau>),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \sigma^\nu[\tau]=c^\omega\sigma^\nu_\omega(\tau,<jk\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau>),\end{array}\right\} \tag{1.18}$$

причем суммирование по "немому" индексу ω, как и в общем решении (1.17) всей системы (1.16) производится в тех же пределах от 1 до smn.

Выделим из системы (1.16) подсистему sm уравнений, коэффициенты которых содержат координаты точки i:

$$\left.\begin{array}{c}\lambda^\mu[i]\partial f(i\beta)/\partial x^\mu(i)+\sigma^\nu[\beta]\partial f(i\beta)/\partial\xi^\nu(\beta)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda^\mu[i]\partial f(i\tau)/\partial x^\mu(i)+\sigma^\nu[\tau]\partial f(i\tau)/\partial\xi^\nu(\tau)=0\end{array}\right\} \tag{1.16''}$$

и подсистему sn уравнений, коэффициенты которых содержат координаты точки α:

$$\left.\begin{array}{c}\lambda^\mu[j]\partial f(j\alpha)/\partial x^\mu(j)+\sigma^\nu[\alpha]\partial f(j\alpha)/\partial\xi^\nu(\alpha)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda^\mu[v]\partial f(v\alpha)/\partial x^\mu(v)+\sigma^\nu[\alpha]\partial f(v\alpha)/\partial\xi^\nu(\alpha)=0.\end{array}\right\} \tag{1.16'''}$$

Относительно sm неизвестных $\lambda^\mu[i]$ и sn неизвестных $\sigma^\nu[\alpha]$ выделенные подсистемы неоднородны и по условиям аксиомы III имеют ранги sm и sn соответственно. Но тогда неизвестные коэффициенты $\lambda^\mu[i]$ и $\sigma^\nu[\alpha]$ могут быть однозначно выражены через общее решение (1.18) подсистемы (1.16$'$):

$$\left.\begin{array}{r}\lambda^\mu[i]=c^\omega\lambda^\mu_\omega(i,<jk\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau>),\\ \sigma^\nu[\alpha]=c^\omega\sigma^\nu_\omega(\alpha,<jk\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau>).\end{array}\right\} \tag{1.19}$$

Ранг подсистемы системы (1.16) без первых s уравнений

$$\lambda^\mu[i]\partial f(i\alpha)/\partial x^\mu(i)+\sigma^\nu[\alpha]\partial f(i\alpha)/\partial\xi^\nu(\alpha)=0, \tag{1.16''''}$$

содержащих функцию $f(i\alpha)=(f^1(i\alpha),\ldots,f^s(i\alpha))$, равен рангу самой системы (1.16), в чем легко убедиться, составляя ее из подсистем $(1.16'),(1.16'')$ и $(1.16''')$. Таким образом, уравнения $(1.16'''')$ в системе

(1.16) являются следствием всех остальных и никаких дополнительных ограничений на решения (1.19) не налагают. Совокупность решений (1.18) и (1.19) подсистем $(1.16')$ и $(1.16'')$,$(1.16''')$ тогда задает общее решение исходной системы (1.16) в соответствующей окрестности некоторого кортежа из $U(i) \times \ldots \times U(\tau)$, причем в этом решении координаты точек i и α входят явно в функции λ^μ_ω и σ^ν_ω только для коэффициентов $\lambda^\mu[i]$ и $\sigma^\nu[\alpha]$. Лемма 6 доказана.

Рассмотрим, далее, такой кортеж $< p \ldots q, \delta \ldots \rho > \in \mathfrak{M}^n \times \mathfrak{N}^m$ длины $n+m$, что все пары его точек: $< p\delta >, \ldots , < q\rho >$ принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Множество таких кортежей, очевидно, плотно в $\mathfrak{M}^n \times \mathfrak{N}^m$. Запишем систему уравнений $(1.16')$ для кортежа $< p \ldots q, \delta \ldots \rho >$ и некоторой его окрестности $U(p) \times \ldots \times U(\rho)$. Эта система, как было показано выше, имеет не более smn линейно независимых ненулевых решений. Ее общее решение можно записать по общему решению (1.18) простой заменой точек кортежа $< jk \ldots v, \beta\gamma \ldots \tau >$ на соответствующие точки кортежа $< p \ldots q, \delta \ldots \rho >$:

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda^\mu[p] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(p, < p \ldots q, \delta \ldots \rho >), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda^\mu[q] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(q, < p \ldots q, \delta \ldots \rho >), \\
\sigma^\nu[\delta] = c^\omega \sigma^\nu_\omega(\delta, < p \ldots q, \delta \ldots \rho >), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sigma^\nu[\rho] = c^\omega \sigma^\nu_\omega(\rho, < p \ldots q, \delta \ldots \rho >),
\end{array}\right\} \tag{1.20}$$

причем для всей совокупности точек кортежа $< p \ldots q, \delta \ldots \rho >$ и всех значений верхних индексов μ, ν функции λ^μ_ω, σ^ν_ω линейно независимы в общем смысле по нижнему индексу ω.

Пусть i и α – такие точки из $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, что все пары $< i\delta >, \ldots , < i\rho >$ и $< p\alpha >, \ldots , < q\alpha >$, а также пара $< i\alpha >$ принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Запишем систему уравнений $(1.16'')$ для кортежа $< i, \delta \ldots \rho >$ и некоторой его окрестности $U(i) \times U(\delta) \times \ldots \times U(\rho)$:

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda^\mu[i]\partial f(i\delta)/\partial x^\mu(i) + \sigma^\nu[\delta]\partial f(i\delta)/\partial \xi^\nu(\delta) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda^\mu[i]\partial f(i\rho)/\partial x^\mu(i) + \sigma^\nu[\rho]\partial f(i\rho)/\partial \xi^\nu(\rho) = 0
\end{array}\right\} \tag{1.21}$$

и систему sn уравнений $(1.16''')$ для кортежа $< p \ldots q, \alpha >$ и некоторой его окрестности $U(p) \times \ldots \times U(q) \times U(\alpha)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^\mu[p]\partial f(p\alpha)/\partial x^\mu(p) + \sigma^\nu[\alpha]\partial f(p\alpha)/\partial \xi^\nu(\alpha) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda^\mu[q]\partial f(q\alpha)/\partial x^\mu(q) + \sigma^\nu[\alpha]\partial f(q\alpha)/\partial \xi^\nu(\alpha) = 0. \end{array}\right\} \tag{1.22}$$

Решение этих систем можно записать по решению (1.19):

$$\left.\begin{array}{r} \lambda^\mu[i] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i, < p \ldots q, \delta \ldots \rho >), \\ \sigma^\nu[\alpha] = c^\omega \sigma^\nu_\omega(\alpha, < p \ldots q, \delta \ldots \rho >), \end{array}\right\} \tag{1.23}$$

где, напомним, суммирование по "немому" индексу ω производится в пределах от 1 до smn.

Лемма 7. *Функции $\lambda^\mu_\omega(i, < p \ldots q, \delta \ldots \rho >)$, $\sigma^\nu_\omega(\alpha, < p \ldots q, \delta \ldots \rho >)$ в решении (1.23) линейно независимы по нижнему индексу ω с любыми коэффициентами $a^\omega = a^\omega(< p \ldots q, \delta \ldots \rho >)$.*

Предположим противное, то есть что найдутся такие коэффициенты $a^\omega = a^\omega(< p \ldots q, \delta \ldots \rho >)$, $\omega = 1, \ldots, smn$, не все равные нулю одновременно, с которыми, например, для каждого значения индекса $\mu = 1, \ldots, sm$ имеет место соотношение $a^\omega \lambda^\mu_\omega(i, < p \ldots q, \delta \ldots \rho >) = 0$, в то время как для некоторого значения индекса $\nu = 1, \ldots, sn$ будет неравенство $a^\omega \sigma^\nu_\omega(\alpha, < p \ldots q, \delta \ldots \rho >) \neq 0$. Подставим выражения для коэффициентов $\lambda^\mu[i]$ и $\sigma^\nu[\alpha]$ из решений (1.23) в первые s уравнений системы (1.16), записанные для кортежа $< ip \ldots q, \alpha\delta \ldots \rho >$, то есть в уравнение ($1.16''''$). С учетом независимости переменных коэффициентов c^ω имеем уравнения

$$\begin{array}{c} \lambda^\mu_\omega(i, < p \ldots q, \delta \ldots \rho >)\partial f(i\alpha)/\partial x^\mu(i) + \\ + \ \sigma^\nu_\omega(\alpha, < p \ldots q, \delta \ldots \rho >)\partial f(i\alpha)/\partial \xi^\nu(\alpha) = 0, \end{array}$$

из которых при сделанных предположениях получаем:

$$a^\omega \sigma^\nu_\omega(\alpha, < p \ldots q, \delta \ldots \rho >)\partial f(i\alpha)/\partial \xi^\nu(\alpha) = 0. \tag{1.24}$$

В уравнении (1.24) неизвестными будем считать компоненты функции $f(i\alpha) = (f^1(i\alpha), \ldots, f^s(i\alpha))$. Координаты точек кортежа $< p \ldots q$, $\delta \ldots \rho >$ не входят в выражение для функции $f(i\alpha)$ и по ним это уравнение выполняется тождественно. Фиксируя в нем указанные координаты, приходим для пары $< i\alpha >$ к уравнению типа (1.9), следствием которого является несущественная зависимость функции $f(i\alpha)$ от координат точки α, что приводит к противоречию с аксиомой III. Значит, кроме предполагаемого соотношения $a^\omega\lambda^\mu_\omega(i,<p\ldots q,\delta\ldots\rho>)=0$, должно иметь место второе, аналогичное: $a^\omega\sigma^\nu_\omega(\alpha,<p\ldots q,\delta\ldots\rho>)=0$ для всех значений индекса ν. Но поскольку решение (1.20) общее, хотя бы для одной точки кортежа $<p\ldots q,\delta\ldots\rho>$ и одного из значений индексов μ,ν должно быть противоположное соотношение неравенства нулю: $a^\omega\lambda^\mu_\omega\neq 0$ или $a^\omega\sigma^\nu_\omega\neq 0$. Пусть, например, для некоторого индекса ν и точки δ имеем: $a^\omega\sigma^\nu_\omega(\delta,<p\ldots q,\delta\ldots\rho>)\neq 0$. Подставим в первые s уравнений системы (1.21) выражения для коэффициентов $\lambda^\mu[i]$ и $\sigma^\nu[\delta]$ из решений (1.23) и (1.20). С учетом независимости коэффициентов c^ω приходим к уравнениям

$$\lambda^\mu_\omega(i,<p\ldots q,\delta\ldots\rho>)\partial f(i\delta)/\partial x^\mu(i)+$$
$$+\ \sigma^\nu_\omega(\delta,<p\ldots q,\delta\ldots\rho>)\partial f(i\delta)/\partial\xi^\nu(\delta)=0,$$

из которых в предполагаемом случае получаем:

$$a^\omega\sigma^\nu_\omega(\delta,<p\ldots q,\delta\ldots\rho>)\partial f(i\delta)/\partial\xi^\nu(\delta)=0,$$

то есть уравнение, почти совпадающее с уравнением (1.24). Если в нем зафиксировать координаты всех точек кортежа $<p\ldots q,\delta\ldots\rho>$, кроме координат точки δ , то для пары $<i\delta>$ уже точно получим уравнение (1.9). Но его следствием, как мы знаем, является несущественная зависимость функции $f(i\delta)$ от координат точки δ, приводящая к противоречию с условиями аксиомы III. Случай, когда неравенство $a^\omega\lambda^\mu_\omega\neq 0$ имеет место, например, для точки p и некоторого значения индекса μ рассматривается совершенно аналогично. Тогда в функции $f(p\alpha)$ возникает несущественная зависимость от координат точки p, противоречащая той же аксиоме III. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Множества решений* (1.23) *различных систем* (1.21), (1.22), *отличающихся друг от друга выражкниями (1.20) для множителей* $\lambda^\mu[p],\ldots,\lambda^\mu[q]$,$\sigma^\nu[\delta],\ldots,\sigma^\nu[\rho]$, *образуют линейные семейства.*

Пусть $\lambda^\mu[i]$, $\sigma^\nu[\alpha]$ и $\tilde\lambda^\mu[i]$, $\tilde\sigma^\nu[\alpha]$ — два решения систем уравнений (1.21), (1.22) с множителями $\lambda^\mu[p],\ldots,\lambda^\mu[q]$, $\sigma^\nu[\delta],\ldots,\sigma^\nu[\rho]$ и $\tilde\lambda^\mu[p],\ldots,\ \tilde\lambda^\mu[q]$, $\tilde\sigma^\nu[\delta],\ldots,\tilde\sigma^\nu[\rho]$ соответственно. Эти множители, в свою очередь, получаются из выражений общего решения (1.20) при подстановке каких-то коэффициентов c^ω и $\tilde{c}^\omega$. Тогда линейные комбинации $a\lambda^\mu[i] + \tilde{a}\tilde{\lambda}^\mu[i]$, $a\sigma^\nu[\alpha] + \tilde{a}\tilde{\sigma}^\nu[\alpha]$, где $a, \tilde{a}$ – произвольные постоянные, также будут решениями систем (1.21),(1.22) с множителями $a\lambda^\mu[p] + \tilde{a}\tilde{\lambda}^\mu[p], \ldots, a\lambda^\mu[q] + \tilde{a}\tilde{\lambda}^\mu[q]$, $a\sigma^\nu[\delta] + \tilde{a}\tilde{\sigma}^\nu[\delta], \ldots, a\sigma^\nu[\rho] + \tilde{a}\tilde{\sigma}^\nu[\rho]$, которые можно получить из общего решения (1.20) при подстановке коэффициентов $ac^\omega + \tilde{a}\tilde{c}^\omega$. Лемма 8 доказана.

Согласно аксиоме III в окрестности $U(\delta) \times \ldots \times U(\rho) \subset \mathfrak{N}^m$ и $U(p) \times \ldots \times U(q) \subset \mathfrak{M}^n$ найдутся такие кортежи $< \delta_0 \ldots \rho_0 >$ и $< p_0 \ldots q_0 >$ длины m и n, для которых соответствующие функции $f^m = f[\delta_0 \ldots \rho_0]$ и $f^n = f[p_0 \ldots q_0]$ имеют максимальные ранги, равные sm и sn, в точках i и α плотных в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множеств. Записывая системы уравнений (1.21) и (1.22) для кортежей $< i, \delta_0 \ldots \rho_0 >$ и $< p_0 \ldots q_0, \alpha >$ и некоторых их окрестностей, получаем решения этих уравнений:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda^\mu[i] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i, < p_0 \ldots q_0, \delta_0 \ldots \rho_0 >) = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i), \\ \sigma^\nu[\alpha] = c^\omega \sigma^\nu_\omega(\alpha, < p_0 \ldots q_0, \delta_0 \ldots \rho_0 >) = c^\omega \sigma^\nu_\omega(\alpha), \end{array}\right\} \tag{1.23'}$$

которые по доказанной выше лемме 8 образуют линейные семейства, причем точки i и α принадлежат некоторым открытым и плотным в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множествам.

Расмотрим такой кортеж $< ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau > \in \mathfrak{S}_F$, что каждая его точка принадлежит области определения линейного семейства (1.23′). Множество таких кортежей, очевидно, открыто и плотно в $\mathfrak{S}_F$. Тогда в некоторой окрестности $U(i) \times \ldots \times U(\tau) \in \mathfrak{S}_F$ определится линейное семейство

$$\left.\begin{array}{c} \lambda^\mu[i] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i), \ldots, \lambda^\mu[v] = c^\omega \lambda^\mu_\omega(v), \\ \sigma^\nu[\alpha] = c^\omega \sigma^\nu_\omega(\alpha), \ldots, \sigma^\nu[\tau] = c^\omega \sigma^\nu_\omega(\tau), \end{array}\right\} \tag{1.25}$$

где, например, $\lambda^\mu_\omega(i) = \lambda^\mu_\omega(x^1(i), \ldots, x^{sm}(i))$ и $\sigma^\nu_\omega(\alpha) = \sigma^\nu_\omega(\xi^1(\alpha), \ldots, \xi^{sn}(\alpha))$. Коэффициенты (1.25) являются некоторыми решениями системы (1.16), аналогично тому, как решения (1.19) подсистем (1.16″) и (1.16‴) являлись некоторым решением уравнений (1.16⁗), то есть первых s уравнений системы (1.16). Беря для коэффициентов $(c^1, \ldots, c^{smn})$ значения $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$, получим следующее множество решений системы (1.16):

$$\lambda^\mu_\omega(i), \ldots, \lambda^\mu_\omega(v), \sigma^\nu_\omega(\alpha), \ldots, \sigma^\nu_\omega(\tau), \tag{1.26}$$

где $\omega = 1, \ldots, smn$. Эти решения, как следует из леммы 7, линейно независимы по нижнему индексу ω с коэффициентами $a^\omega =$

$a^\omega(< p_0 \dots q_0, \delta_0 \dots \rho_0 >)$. Однако они оказываются линейно независимыми не только с этими постоянными коэффициентами, но и с переменными, то есть в общем смысле, что можно установить точно также, как это было сделано в отношении решений $(1.12')$ системы (1.11) при доказательстве леммы 2. Поскольку, с другой стороны, система (1.16) имеет не более smn линейно независимых в общем смысле ненулевых решений, ее общее решение может быть записано в форме (1.25) с произвольными переменными коэффициентами $c^\omega = c^\omega(< ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau >)$.

Каждое из smn решений (1.26) определяет в некоторой окрестности $U(i) \times \dots \times U(\tau)$ исходного кортежа $< ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau >$ длины $m + n + 2$ гладкое векторное поле. Совокупность всех решений (1.26) образует базис smn-мерного линейного семейства таких полей. Любое поле этого семейства может быть представлено в базисе (1.26) выражениями

$$\left.\begin{array}{c} \lambda^\mu(i) = a^\omega \lambda^\mu_\omega(i), \dots, \lambda^\mu(v) = a^\omega \lambda^\mu_\omega(v), \\ \sigma^\nu(\alpha) = a^\omega \sigma^\nu_\omega(\alpha), \dots, \sigma^\nu(\tau) = a^\omega \sigma^\nu_\omega(\tau), \end{array}\right\} \tag{1.27}$$

где, в отличие от аналогичных выражений (1.25), a^ω – постоянные коэффициенты.

Лемма 9. *Линейное smn-мерное семейство гладких векторных полей (1.27) с базисом (1.26) замкнуто относительно операции коммутирования.*

Пусть векторное поле

$$\lambda^\mu(i), \dots, \lambda^\mu(v), \sigma^\nu(\alpha), \dots, \sigma^\nu(\tau) \tag{1.28}$$

есть коммутатор каких-либо двух векторных полей семейства (1.27). Ясно, что коммутатор любых двух векторных полей из этого семейства имеет форму (1.28) вследствие независимости координат, относящихся к различным точкам кортежа $< ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau >$. С другой стороны, коммутатор (1.28), очевидно, является некоторым решением системы (1.16). Поэтому коммутатор (1.28) может быть записан по ее общему решению (1.25):

$$\left.\begin{array}{c} \lambda^\mu(i) = c^\omega \lambda^\mu_\omega(i), \dots, \lambda^\mu(v) = c^\omega \lambda^\mu_\omega(v), \\ \sigma^\nu(\alpha) = c^\omega \sigma^\nu_\omega(\alpha), \dots, \sigma^\nu(\tau) = c^\omega \sigma^\nu_\omega(\tau), \end{array}\right\} \tag{1.29}$$

в котором кэффициенты c^ω, вообще говоря, могут быть некоторыми функциями координат точек кортежа $< ijk\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau >$. Убедимся, однако, в том, что в решении (1.29) коэффициенты c^ω, в действительности, постоянны. Для этого будем рассматривать совокупность выражений (1.29) как систему $s(2mn + m + n)$ линейных, в общем случае, неоднородных уравнений относительно коэффициентов c^ω, где $\omega = 1, \dots, smn$. Выделим из нее подсистему $s(2mn + m)$ уравнений, опуская выражения $\sigma^\nu(\alpha) = c^\omega\sigma^\nu_\omega(\alpha)$, где $\nu = 1, \dots, sn$. Столбцами матрицы этой подсистемы являются ненулевые решения

$$\lambda^\mu_\omega(i), \lambda^\mu_\omega(j), \dots, \lambda^\mu_\omega(v), \sigma^\nu_\omega(\beta), \dots, \sigma^\nu_\omega(\tau)$$

$s(mn+m)$ уравнений $(1.16')$ и $(1.16'')$ системы (1.16), линейная независимость которых в общем смысле устанавливается точно также, как и линейная независимость в общем смысле решений $(1.12')$ системы (1.11) в доказательстве леммы 2. Таким образом, выделенная из системы (1.29) опусканием sn выражений $\sigma^\nu(\alpha) = c^\omega\sigma^\nu_\omega(\alpha)$ подсистема $s(2mn+m)$ уравнений имеет ранг smn, точно равный числу неизвестных коэффициентов c^ω, и потому ее решение может зависеть только от координат точек укороченного кортежа $< ijk\dots v, \beta\gamma\dots\tau >$, то есть $c^\omega = c^\omega(< ijk\dots v, \beta\gamma\dots\tau >)$. Подставим это решение в опущенные выражения:

$$\sigma^\nu(\alpha) = c^\omega(< ijk\dots v, \beta\gamma\dots\tau >)\sigma^\nu_\omega(\alpha) \tag{1.30}$$

и предположим, что для некоторого линейного коэффициента c^ω производная по какой-либо из координат точек укороченного кортежа $< ij$ $k\dots v, \beta\gamma\dots\tau >$ отлична от нуля. Дифференцируя правую и левую части выражения (1.30) по этой координате, а затем фиксируя координаты всех точек, кроме точки α, приходим к соотношению $a^\omega\sigma^\nu_\omega(\alpha) = 0$, в котором коэффициенты a^ω – постоянные и, по крайней мере, один из них отличен от нуля. Но такой результат противоречит лемме 7, так как по обозначению в решении $(1.23')$ $\sigma^\nu_\omega(\alpha) = \sigma^\nu_\omega(\alpha, < p_0\dots q_0, \delta_0\dots$ $\rho_0 >)$. Следовательно, в выражениях (1.29) для коммутатора (1.28) c^ω=const при $\omega = 1, \dots, smn$, то есть коммутатор (1.28) принадлежит семейству векторных полей (1.27), которое, тем самым, оказывается замкнутым относительно операции коммутирования. Лемма 9 доказана.

Линейное семейство гладких векторных полей (1.27) с базисом (1.26), замкнутое по лемме 9 относительно операции коммутирования, является smn-мерной алгеброй Ли преобразований некоторой окрестности $U(i)\times\ldots\times U(\tau)$ кортежа $< ijk\ldots v,\alpha\beta\gamma\ldots\tau >$, множество которых открыто и плотно не только в $\mathfrak{S}_F$, но и, очевидно, в $\mathfrak{M}^{n+1}\times\mathfrak{N}^{m+1}$. В окрестностях же $U(i)$ и $U(\alpha)$ составляющими семейства (1.27)

$$\lambda^{\mu}(i)=a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i) \text{ и } \sigma^{\nu}(\alpha)=a^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha) \tag{1.31}$$

определяются smn-мерные линейные семейства гладких векторных полей с теми же структурными константами коммутационных соотношений в базисах

$$\lambda^{\mu}_{\omega}(i) \text{ и } \sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha), \tag{1.32}$$

что и у исходного семейства (1.27) в базисе (1.26). Поэтому семейства (1.31) являются smn-мерными алгебрами Ли преобразований окрестностей $U(i)$ и $U(\alpha)$, изоморфными алгебре (1.27), причем базисы (1.32) и (1.26) соответствуют друг другу.

Множество точек i и α, в некоторых окрестностях $U(i)$ и $U(\alpha)$ которых определены векторные поля $\lambda^{\mu}(i)$ и $\sigma^{\nu}(\alpha)$, открыты и плотны в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Поэтому, не конкретизируя обозначения точек i и α, векторные поля (1.31) удобно записать в общекоординатной операторной форме

$$X=\lambda^{\mu}(x)\partial/\partial x^{\mu} \text{ и } \Xi=\sigma^{\nu}(\xi)\partial/\partial\xi^{\nu}, \tag{1.31$'$}$$

а базисные векторные поля (1.32) – в операторной форме (1.7):

$$X_{\omega}=\lambda^{\mu}_{\omega}(x)\partial/\partial x^{\mu} \text{ и } \Xi_{\omega}=\sigma^{\nu}_{\omega}(\xi)\partial/\partial\xi^{\nu}. \tag{1.32$'$}$$

Векторные поля $\lambda^{\mu}(i),\lambda^{\mu}(j)$ и $\sigma^{\nu}(\alpha),\sigma^{\nu}(\beta)$, заданные в окрестностях $U(i),U(j)$ и $U(\alpha),U(\beta)$, совпадают, очевидно, в пересечениях $U(i)\cap U(j)$ и $U(\alpha)\cap U(\beta)$. Если пара $< i\alpha >$ принадлежит $\mathfrak{S}_f$, то функция $f(i\alpha)=(f^1(i\alpha),\ldots,f^s(i\alpha))$ удовлетворяет уравнению $(1.16'''')$:

$$\lambda^{\mu}(i)\partial f(i\alpha)/\partial x^{\mu}(i)+\sigma^{\nu}(\alpha)\partial f(i\alpha)/\partial\xi^{\nu}(\alpha)=0, \tag{1.33}$$

из которого в соответствующих базисах (1.32) получается система smn уравнений (1.8).

Согласно второй (обращенной) теореме С.Ли (см., например, [11], стр.438) smn-мерные алгебры Ли векторных полей (1.31) с сопряженными базисами (1.32) однозначно определяют эффективные гладкие действия некоторой smn-мерной локальной группы Ли в окрестностях $U(i)$ и $U(\alpha)$ точек i и α, множество которых открыто и плотно в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно, причем действия ее в окрестностях $U(i),U(j)$ и

$U(\alpha), U(\beta)$ точек i, j и α, β совпадают в пересечениях $U(i) \cap U(j)$ и $U(\alpha) \cap U(\beta)$. То есть алгебры Ли с сопряженными базисами (1.32) (в операторной общекоординатной форме – (1.7)), имеющие в них одинаковые структурные константы, определяют smn-мерные локальные группы Ли локальных преобразований некоторых открытых и плотных в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множеств, для которых исходная функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$, удовлетворяющая системе уравнений (1.8), является двухточечным инвариантом по каждой из своих s компонент. Теорема 2 полностью доказана.

Итоговым результатом изложенного в этом параграфе является вывод об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий полиметрической геометрии двух множеств, задаваемой на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ функциией $f = (f^1, \ldots, f^s)$. Эта эквивалентность является естественным следствием доказанных выше двух теорем, каждая из которых является обратной по отношению к другой.

Теорема 3. *Для того, чтобы функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$, удовлетворяющая аксиомам* I,II,III, *задавала на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ s-метрическую геометрию, наделенную групповой симметрией степени smn, необходимо и достаточно, чтобы она на тех же многообразиях задавала s-метрическую физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$.*

В работе [14] автором для $s = 1$ и произвольных $m \geq 1$ и $n \geq 1$ приведены все возможные явные выражения для функции f, задающей на m-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ однометрическую физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$. Решая уравнения (1.6), можно найти группу движений, допускаемых этой функцией. Соответствующие исследования, подтверждающие лемму 4 и теорему 2, составляют содержание следующего §2.

Заметим, что s-метрические физические структуры ранга $(n+1, m+1)$ в случае $s \geq 2$ еще не все изучены, не построена их полная классификация. Однако и по ним получены некоторые предварительные результаты. В частности, устанавливаемая теоремой 3 эквивалентность феноменологической и групповой симметрий была использована автором при построении классификации двуметрических физических структур ранга $(n+1, 2)$, то есть для случая $s = 2, n \geq 1$ и

$m = 1$ [15], [16]. Далее, поскольку простейшие триметрические геометрии в пространстве и триметрические физические структуры ранга (2,2) допускают трехмерные группы движений, оказалось возможным по имеющейся классификации первых [17] воспроизвести классификацию вторых.

Особый интерес представляют изучение и классификация комплексных физических структур. В работе Ю.С.Владимирова [18] комплексная физическая структура ранга (3,3) была использована, с одной стороны, для обоснования размерности и сигнатуры классического пространства - времени, а с другой – для введения спиноров и биспиноров, с помощью которых в современной квантовой теории поля описываются состояния частиц и античастиц с спином 1/2. Комплексные физические структуры более высокого ранга им же были использованы для описания основных физических взаимодействий и построения их единой теории [19],[20].

С математической точки зрения комплексные физические структуры есть частный случай вещественных двуметрических. Если бы была построена полная классификация последних, то по ней можно было бы воспроизвести соответствующую классификацию первых. Комплексные физические структуры, используемые в вышеупомянутых работах Ю.С.Владимирова, получены из известных по работе [14] вещественных однометрических с помощью естественно определяемой процедуры комплексификации, состоящей в замене вещественных переменных и функций комплексными. Однако, за исключением простейших комплексных физических структур ранга (2,2) и (3,2), рассмотренных в работах [21],[22], нет никакой гарантии того, что получающаяся при этой процедуре классификация комплексных физических структур является полной. Таким образом, проблема классификации однометрических комплексных физических структур произвольного ранга к настоящему времени еще не решена.

В заключение отметим, что основные положения и результаты настоящего параграфа опубликованы автором в работе [23].

§2. Группы движений однометрических физических структур

Согласно §1 и работе [24] феноменологически симметричная однометрическая геометрия двух множеств (физическая структура) в общих чертах и кратко может быть определена следующим образом. Пусть множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ есть соответственно m-мерное и n-мерное гладкие многообразия. Обозначим локальные координаты этих многообразий через $x = (x^1, \ldots, x^m)$ и $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$, считая для определенности, что $m \leq n$. Пусть, далее, имеется функция f с открытой и плотной в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ областью определения $\mathfrak{S}_f$, сопоставляющая каждой паре из нее некоторое число, то есть $f : \mathfrak{S}_f \to R$. Функцию f будем называть 1-метрикой или просто метрикой, не требуя от нее выполнения обычных метрических аксиом, тем более, что расстояния для двух точек только из $\mathfrak{M}$ или двух точек только из $\mathfrak{N}$ не определены. Предполагается, что локальное координатное представление метрики f задается достаточно гладкой функцией (1.2) для случая $s = 1$, которую в исследованиях настоящего параграфа удобно записать, не конкретизируя обозначения точек i и α:

$$f(x, \xi) = f(x^1, \ldots, x^m, \xi^1, \ldots, \xi^n). \tag{2.1}$$

Вследствие невырожденности метрики f, в представление (2.1) координаты x и ξ входят существенным образом. Последнее означает, что никакая гладкая локально обратимая замена координат не приведет к уменьшению их числа в представлении (2.1).

Построим функцию F с естественной в $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ областью определения $\mathfrak{S}_F$, сопоставляя каждому кортежу длины $m+n+1$ из $\mathfrak{S}_F$ все $(m+1)(n+1)$ возможные по метрике f расстояния. Будем говорить, что функция f задает на m-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ феноменологически симметричную геометрию (физическую структуру) ранга $(n+1, m+1)$, если локально множество значений $F(\mathfrak{S}_F)$ в $R^{(m+1)(n+1)}$ является подмножеством множества нулей некоторой достаточно гладкой функции Φ от $(m+1)(n+1)$ переменных с $grad\Phi \neq 0$ на плотном в $\mathfrak{S}_F$ подмножестве.

В работе [14] приведена полная сводка локальных результатов для однометрических физических структур произвольного ранга $(n+1, m+1)$, где $n \geq m \geq 1$, а в работах [25],[26] и монографии [27] показаны математические методы, которыми получены все эти результаты. Запишем их здесь с точностью до локально обратимой замены координат в многообразиях $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ и масштабного преобразования $\psi(f) \to f$, где ψ – произвольная гладкая функция одной переменной с отличной от нуля производной:

$m = 1, n = 1$:

$$f = x + \xi; \tag{2.2}$$

$m = 1, n = 2$:

$$f = x\xi + \eta; \tag{2.3}$$

$m = 1, n = 3$:

$$f = (x\xi + \eta)/(x + \vartheta); \tag{2.4}$$

$m = n \geq 2$:

$$f = x^1\xi^1 + \ldots + x^{m-1}\xi^{m-1} + x^m\xi^m, \tag{2.5}$$

$$f = x^1\xi^1 + \ldots + x^{m-1}\xi^{m-1} + x^m + \xi^m; \tag{2.6}$$

$m = n - 1 \geq 2$:

$$f = x^1\xi^1 + \ldots + x^m\xi^m + \xi^{m+1}. \tag{2.7}$$

Для всех остальных пар значений натуральных чисел m и n при оговоренном выше условии $m \leq n$ однометрические физические структуры ранга $(n + 1, m + 1)$ не существуют.

Под движением в геометрии двух множеств следует понимать такую пару гладких локальных преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$:

$$x' = \lambda(x), \ \xi' = \sigma(\xi), \tag{2.8}$$

при которых функция (2.1) сохраняется:

$$f(\lambda(x), \sigma(\xi)) = f(x, \xi). \tag{2.9}$$

Если метрическая функция f задана в ее явном координатном представлении (2.1), то равенство (2.9) является функциональным уравнением относительно двух преобразований (2.8), решая которое можно найти группу движений и установить ее размерность. В настоящем параграфе находятся полные локальные группы локальных движений для каждой из шести метрик (2.2)–(2.7) как общие решения соответствующих уравнений (2.9), причем на функции $\lambda(x)$ и $\sigma(\xi)$ преобразований (2.8), кроме гладкости и локальной обратимости, никакие дополнительные ограничения (например, линейность) не вводятся.

Теорема 1. *Полная локальная группа движений (2.8) однометрической феноменологически симметричной геометрии двух множеств с одной из метрических функций (2.2)–(2.7) задается следующими локальными преобразованиями многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$:*

для метрической функции (2.2):

$$x' = x + a,\ \xi' = \xi - a; \tag{2.10}$$

для метрической функции (2.3):

$$x' = ax + b,\ \xi' = \xi/a,\ \eta' = \eta - b\xi/a, \tag{2.11}$$

причем $a > 0$;

для метрической функции (2.4):

$$\left.\begin{array}{c} x' = (ax+b)/(cx+d),\ \xi' = (d\xi - c\eta)/(d - c\vartheta), \\ \eta' = (a\eta - b\xi)/(d - c\vartheta),\ \vartheta' = (a\vartheta - b)/(d - c\vartheta), \end{array}\right\} \tag{2.12}$$

причем $ad - bc = 1$;

для метрической функции (2.5):

$$\left.\begin{array}{c} x'^{\mu} = a^{\mu 1}x^1 + \ldots + a^{\mu m}x^m, \\ \xi'^{\mu} = \tilde{a}^{1\mu}\xi^1 + \ldots + \tilde{a}^{m\mu}\xi^m, \end{array}\right\} \tag{2.13}$$

где $\mu = 1, \ldots, m, a$ – квадратная невырожденная матрица порядка m с $\det a > 0, \tilde{a}$ – обратная к ней матрица;

для метрической функции (2.6):

$$\left.\begin{array}{c} x'^{\nu} = a^{\nu 1}x^1 + \ldots + a^{\nu,m-1}x^{m-1} + b^{\nu}, \\ x'^{m} = x^m + c^1x^1 + \ldots + c^{m-1}x^{m-1} + b^m, \\ \xi'^{\nu} = \tilde{a}^{1\nu}(\xi^1 - c^1) + \ldots + \tilde{a}^{m-1,\nu}(\xi^{m-1} - c^{m-1}), \\ \xi'^{m} = \xi^m - (b^1\tilde{a}^{11} + \ldots + b^{m-1}\tilde{a}^{1,m-1})(\xi^1 - c^1) - \ldots - \\ -(b^1\tilde{a}^{m-1,1} + \ldots + b^{m-1}\tilde{a}^{m-1,m-1})(\xi^{m-1} - c^{m-1}) - b^m, \end{array}\right\} \tag{2.14}$$

где $\nu = 1, \ldots, m-1, a$ – квадратная невырожденная матрица порядка $m-1$ с $\det a > 0, \tilde{a}$ – обратная к ней матрица;

для метрической функции (2.7):

$$\left.\begin{array}{c} x'^{\mu} = a^{\mu 1}x^1 + \ldots + a^{\mu m}x^m + b^{\mu}, \\ \xi'^{\mu} = \tilde{a}^{1\mu}\xi^1 + \ldots + \tilde{a}^{m\mu}\xi^m, \\ \xi'^{m+1} = \xi^{m+1} - (b^1\tilde{a}^{11} + \ldots + b^m\tilde{a}^{1m})\xi^1 - \\ - \ldots - (b^1\tilde{a}^{m1} + \ldots + b^m\tilde{a}^{mm})\xi^m, \end{array}\right\} \tag{2.15}$$

где $\mu = 1, \ldots, m, a$ *– квадратная невырожденная матрица порядка* m *с* $\det a > 0, \tilde{a}$ *– обратная к ней матрица.*

Все перечисленные в теореме 1 группы движений зависят от конечного числа существенных параметров, максимальное число которых в соответствии с леммой 4 и теоремой 2 из предыдущего §1 при $s = 1$ равно произведению mn размерностей m и n многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Для сравнения заметим, что в n-мерной однометрической феноменологически симметричной ранга $n + 2$ геометрии одного множества $\mathfrak{M}$ это число равно $n(n + 1)/2$. Отметим также, что не для всякой метрической функции (2.1) уравнение (2.9) имеет нетривиальное решение, то есть полная группа движений может состоять только из тождественных преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Нетрудно, например, установить, что для метрической функции $f(x, \xi) = x\xi + \xi^3$ уравнение (2.9) имеет только тривиальное решение: $\lambda(x) = x, \sigma(\xi) = \xi$, и потому полная группа движений соответствующей геометрии двух множеств содержит только тождественные преобразования $x' = x$ и $\xi' = \xi$ одномерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Согласно теореме 3 из §1 наделенная такой тривиальной групповой симметрией геометрия, задаваемая на одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ метрической функциией $f(x, \xi) = x\xi + \xi^3$, не является физической структурой ранга (2,2).

Приступим к доказательству сформулированной выше теоремы 1. Запишем сначала уравнение (2.9) для самой простой метрической функции (2.2):

$$\lambda(x) + \sigma(\xi) = x + \xi$$

и разделим в нем переменные x и ξ:

$$\lambda(x) - x = -\sigma(\xi) + \xi = a = const,$$

откуда находим явные выражения для функций $\lambda(x)$ и $\sigma(\xi)$ преобразований (2.8) одномерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$:

$$\lambda(x) = x + a, \ \sigma(\xi) = \xi - a. \tag{2.16}$$

Выражения (2.16) задают локальную однопараметрическую группу локальных движений (2.10) метрической функции (2.2). Заметим, что эта группа состоит из согласованных общностью параметра a двух параллельных переносов в каждом из многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. При $a = 0$ имеем тождественное преобразование, то есть отсутствие движения.

Запишем теперь функциональное уравнение (2.9) для метрики (2.3):

$$\lambda(x)\sigma(\xi,\eta)+\rho(\xi,\eta)=x\xi+\eta. \tag{2.17}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае многообразие $\mathfrak{M}$ одномерно, а многообразие $\mathfrak{N}$ – двумерно, и потому преобразования (2.8), более конкретно, имеют следующий вид:

$$x'=\lambda(x),\ \xi'=\sigma(\xi,\eta),\ \eta'=\rho(\xi,\eta), \tag{2.8$'$}$$

откуда становится понятным происхождение уравнения (2.17) из его общей формы (2.9).

Уравнение (2.17) дважды продифференцируем по переменной x: $\lambda''(x)\sigma(\xi,\eta)=0$, откуда, учитывая, что в преобразованиях (2.8$'$) $\sigma(\xi,\eta)$ $\neq 0$, получаем $\lambda''(x)=0$ и потому

$$\lambda(x)=ax+b, \tag{2.18}$$

где a,b – постоянные, причем $a\neq 0$, так как $\lambda'(x)\neq 0$ вследствие обратимости преобразований (2.8$'$)

Подставим найденное для функции $\lambda(x)$ выражение (2.18) в исходное уравнение (2.17):

$$(ax+b)\sigma(\xi,\eta)+\rho(\xi,\eta)=x\xi+\eta.$$

Сравним справа и слева коэффициенты при независимой переменной x и свободные от нее члены:

$$a\sigma(\xi,\eta)=\xi,\ b\sigma(\xi,\eta)+\rho(\xi,\eta)=\eta,$$

откуда легко получаем:

$$\sigma(\xi,\eta)=\xi/a,\ \rho(\xi,\eta)=\eta-b\xi/a. \tag{2.19}$$

Выражения (2.18),(2.19) задают группу всех движений (2.8) или, более конкретно, (2.8$'$) метрической функции (2.3), состоящую из двух несвязных компонент с $a>0$ и $a<0$. Первая связная компонента содержит тождественное преобразование при $a=1,b=0$ и является полной локальной двумерной группой локальных движений (2.11) этой метрики, входя в группу всех ее движений как подгруппа.

Запишем, далее, уравнение (2.9) для метрической функции (2.4):

$$\frac{\lambda(x)\sigma(\xi,\eta,\vartheta)+\rho(\xi,\eta,\vartheta)}{\lambda(x)+\tau(\xi,\eta,\vartheta)}=\frac{x\xi+\eta}{x+\vartheta}, \tag{2.20}$$

где, вследствие трехмерности многообразия $\mathfrak{N}$, его преобразование в движении (2.8) имеет следующий вид:

$$\xi' = \sigma(\xi,\eta,\vartheta),\ \ \eta' = \rho(\xi,\eta,\vartheta),\ \ \vartheta' = \tau(\xi,\eta,\vartheta), \tag{2.8$''$}$$

в то время как для одномерного многообразия $\mathfrak{M}$ соответствующее преобразование записывается как и в предыдущем случае: $x' = \lambda(x)$.

Продифференцируем уравнение (2.20) по переменной x, умножив его затем на $(\lambda+\tau)^2$:

$$(\sigma\tau-\rho)\lambda'(x) = (\lambda(x)+\tau)^2(\xi\vartheta-\eta)/(x+\vartheta)^2.$$

Повторное дифференцирование этого равенства по переменной x приводит к следующим двум соотношениям:

$$\begin{gathered}
c(\sigma\tau-\rho)^2\lambda''(x) = 2(\lambda(x)+\tau)^3(\xi\vartheta-\eta)^2/(x+\vartheta)^4 - \\
-2(\sigma\tau-\rho)(\lambda(x)+\tau)^2(\xi\vartheta-\eta)/(x+\vartheta)^3, \\
(\sigma\tau-\rho)^3\lambda'''(x) = 6(\lambda(x)+\tau)^4(\xi\vartheta-\eta)^3/(x+\vartheta)^6 - \\
-12(\sigma\tau-\rho)(\lambda(x)+\tau)^3(\xi\vartheta-\eta)^2/(x+\vartheta)^5 + \\
+6(\sigma\tau-\rho)^2(\lambda(x)+\tau)^2(\xi\vartheta-\eta)/(x+\vartheta)^4,
\end{gathered}$$

откуда, имея в виду, что, вследствие обратимости преобразования (2.8$''$) трехмерного многообразия $\mathfrak{N}$, $\sigma\tau-\rho \neq 0$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\lambda(x)$:

$$2\lambda'(x)\lambda'''(x) = 3(\lambda''(x))^2.$$

Общее решение этого уравнения записывается в следующем виде:

$$\lambda(x) = (ax+b)/(cx+d), \tag{2.21}$$

где a,b,c,d – постоянные (см. [28], стр. 526, №7.10). Поскольку $\lambda'(x) = (ad-bc)/(cx+d) \neq 0$, получаем, что $\Delta = ad-bc \neq 0$. Вводя естественные переобозначения $a/\sqrt{|\Delta|} \to a$, $b/\sqrt{|\Delta|} \to b$, $c/\sqrt{|\Delta|} \to c$, $d/\sqrt{|\Delta|} \to d$, связь между параметрами в решении (2.21) можно записать в следующем виде:

$$\Delta = ad - bc = \pm 1. \tag{2.22}$$

Таким образом, из четырех параметров a,b,c,d, задающих преобразование одномерного многообразия $\mathfrak{M}$, существенных, из-за наличия связи (2.22), только три.

Подставим решение (2.21) в исходное функциональное уравнение (2.20):

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\sigma+\rho\right)(x+\vartheta)=\left(\frac{ax+b}{cx+d}+\tau\right)(x\xi+\eta),$$

приведем его к общему знаменателю, перемножим скобки и сравним в числителях правой и левой частей коэффициенты при переменной x, ее квадрате x^2 и свободные от нее члены. В результате относительно функций σ,τ,ρ получается алгебраическая система трех линейных неоднородных уравнений:

$$\left.\begin{array}{c} a\sigma+c\rho-c\xi\tau=a\xi,\\ (b+a\vartheta)\sigma+(d+c\vartheta)\rho-(d\xi+c\eta)\tau=b\xi+a\eta,\\ b\vartheta\sigma+d\vartheta\rho-d\eta\tau=b\eta, \end{array}\right\}$$

определитель которой, равный $(ad-bc)(d-c\vartheta)(\xi\vartheta-\eta)$, очевидно, отличен от нуля. Используя формулы Крамера, найдем решение этой системы:

$$\left.\begin{array}{c} \sigma(\xi,\eta,\vartheta)=(d\xi-c\eta)/(d-c\vartheta),\\ \rho(\xi,\eta,\vartheta)=(a\eta-b\xi)/(d-c\vartheta),\\ \tau(\xi,\eta,\vartheta)=(a\vartheta-b)/(d-c\vartheta). \end{array}\right\} \tag{2.23}$$

Преобразования $x'=\lambda(x)$ и $(2.8'')$ с функциями (2.21) и (2.23) одномерного и трехмерного многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ задают группу всех движений метрической функции (2.4), состоящую, согласно условию (2.22), из двух связных компонент с $\Delta=+1$ и $\Delta=-1$. Первая связная компонента с $\Delta=+1$ содержит тождественное преобразование при $a=d=1,\ b=c=0$ и является полной локальной трехмерной группой локальных движений (2.12) этой метрики, входя в группу всех ее движений как подгруппа.

Перейдем теперь к рассмотрению симметричных физических структур ранга $(m+1,m+1)$ с $m\geq 2$, для которых имеются две метрические функции (2.5) и (2.6). Они не могут быть переведены друг в друга никакой локально обратимой заменой координат в m-мерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ и никаким масштабным преобразованием $\psi(f)\to f$ метрической функции f. Запишем сначала функциональное уравнение (2.9) для первой метрики (2.5):

$$\lambda^1(x)\sigma^1(\xi)+\ldots+\lambda^m(x)\sigma^m(\xi)=x^1\xi^1+\ldots+x^m\xi^m \tag{2.24}$$

и продифференцируем его по каждой из переменных $\xi^1,\ldots,\xi^m$:

$$\lambda^1(x)\sigma^1_{\xi^\mu}(\xi)+\ldots+\lambda^m(x)\sigma^m_{\xi^\mu}(\xi)=x^\mu, \tag{2.25}$$

где $\mu = 1, \ldots, m$. Относительно функций $\lambda^1(x), \ldots, \lambda^m(x)$ результаты дифференцирования (2.25) представляют собой алгебраическую систему m линейных неоднородных уравнений. Матрица этой системы одновременно является матрицей Якоби для функций $\sigma^1(\xi), \ldots, \sigma^m(\xi)$ по переменным $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m)$ и определитель ее отличен от нуля, так как, вследствие локальной обратимости преобразования m-мерного многообразия $\mathfrak{N}$ в движении (2.8), эти функции независимы. Решение системы (2.25) найдем по правилу Крамера:

$$\lambda^\mu(x) = a^{\mu 1}x^1 + \ldots + a^{\mu m}x^m. \tag{2.26}$$

Нетрудно убедиться в том, что элементы матрицы a в решениях (2.26) постоянны. Действительно,

$$\partial\lambda^\mu(x)/\partial x^\nu = a^{\mu\nu}(\xi) = a^{\mu\nu} = const,$$

где $\mu, \nu = 1, \ldots, m$. Таким образом, матрица a в решении (2.26) квадратная, с постоянными элементами и невырожденная, так как функции $\lambda^1(x), \ldots, \lambda^m(x)$, задавая локально обратимое преобразование m-мерного многообразия $\mathfrak{M}$ в движении (2.8), независимы.

Выражения (2.26) для функций $\lambda^\mu(x)$ подставим в исходное уравнение (2.24):

$$(a^{11}x^1 + \ldots + a^{1m}x^m)\sigma^1(\xi) + \ldots +$$
$$+ (a^{m1}x^1 + \ldots + a^{mm}x^m)\sigma^m(\xi) = x^1\xi^1 + \ldots + x^m\xi^m.$$

Сравним в правой и левой частях последнего равенства коэффициенты при совпадающих переменных $x^1, \ldots, x^m$:

$$a^{1\mu}\sigma^1(\xi) + \ldots + a^{m\mu}\sigma^m(\xi) = \xi^\mu. \tag{2.27}$$

Относительно функций $\sigma^1(\xi), \ldots, \sigma^m(\xi)$ получена алгебраическая система линейных неоднородных уравнений. Матрица этой системы имеет отличный от нуля определитель, так как она с точностью до транспонирования совпадает с матрицей a в выражениях (2.26). Поэтому система (2.27) может быть решена методом Крамера:

$$\sigma^\mu(\xi) = \tilde{a}^{1\mu}\xi^1 + \ldots + \tilde{a}^{m\mu}\xi^\mu, \tag{2.28}$$

где $\tilde{a}$ – обратная к a матрица. Выражения (2.26) и (2.28) задают группу всех движений (2.8) метрической функции (2.5), состоящую из двух несвязных компонент с $\det a > 0$ и $\det a < 0$. Первая связная компонента с $\det a > 0$ содержит тождественное преобразование при $a = \mathrm{I}$ и является полной локальной m^2-мерной группой локальных движений (2.13) этой метрики.

Запишем, далее, уравнение (2.9) для второй метрической функции (2.6) симметричной физической структуры ранга $(m{+}1, m{+}1)$ с $m \geq 2$:

$$\begin{aligned} \lambda^1(x)\sigma^1(\xi) + \ldots + \lambda^{m-1}(x)\sigma^{m-1}(\xi) + \lambda^m(x) + \sigma^m(\xi) = \\ = x^1\xi^1 + \ldots + x^{m-1}\xi^{m-1} + x^m + \xi^m \end{aligned} \tag{2.29}$$

и продифференцируем его по каждой из переменных $\xi^1, \ldots, \xi^{m-1}, \xi^m$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^1(x)\sigma^1_{\xi^\nu}(\xi) + \ldots + \lambda^{m-1}(x)\sigma^{m-1}_{\xi^\nu}(\xi) + \sigma^m_{\xi^\nu}(\xi) = x^\nu, \\ \lambda^1(x)\sigma^1_{\xi^m}(\xi) + \ldots + \lambda^{m-1}(x)\sigma^{m-1}_{\xi^m}(\xi) + \sigma^m_{\xi^m}(\xi) = 1, \end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

где $\nu = 1, \ldots, m-1$. Относительно $m-1$ функций $\lambda^1(x), \ldots, \lambda^{m-1}(x)$ получена алгебраическая система m линейных неоднородных уравнений, ранг матрицы которой равен $m-1$, так как функции $\sigma^1(\xi), \ldots,$ $\sigma^{m-1}(\xi)$ независимы вследствие локальной обратимости преобразования m-мерного многообразия $\mathfrak{N}$ в движении (2.8). Согласно теореме Кронекера-Капелли для совместности системы уравнений (2.30) необходимо и достаточно, чтобы ранг ее расширенной матрицы тоже равнялся $m-1$, то есть чтобы обращался в нуль следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} \sigma^1_{\xi^1}(\xi) & \ldots & \sigma^{m-1}_{\xi^1}(\xi) & x^1 - \sigma^m_{\xi^1}(\xi) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma^1_{\xi^{m-1}}(\xi) & \ldots & \sigma^{m-1}_{\xi^{m-1}}(\xi) & x^{m-1} - \sigma^m_{\xi^{m-1}}(\xi) \\ \sigma^1_{\xi^m}(\xi) & \ldots & \sigma^{m-1}_{\xi^m}(\xi) & 1 - \sigma^m_{\xi^m}(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

В силу независимости переменных $x^1, \ldots, x^{m-1}$ отсюда получаем, что у системы функций $\sigma^1(\xi), \ldots, \sigma^{m-1}(\xi)$ обращается в нуль якобиан по любой совокупности $m-1$ переменных из $\xi^1, \ldots, \xi^{m-1}, \xi^m$, если среди них есть переменная ξ^m, а поскольку $\partial(\sigma^1, \ldots, \sigma^{m-1})/\partial(\xi^1, \ldots, \xi^{m-1}) \neq 0$, дополнительно имеем: $\sigma^m_{\xi^m}(\xi) = 1$. Таким образом, в системе (2.30) первые $m-1$ уравнений линейно независимы и их решение можно найти по формулам Крамера:

$$\lambda^\nu(x) = a^{\nu 1}x^1 + \ldots + a^{\nu, m-1}x^{m-1} + b^\nu, \tag{2.31}$$

где, напомним, $\nu = 1, \ldots, m-1$. Выражения (2.31) подставим в исходное функциональное уравнение (2.29) и разрешим его относительно $\lambda^m(x)$:

$$\lambda^m(x) = x^m + c^1x^1 + \ldots + c^{m-1}x^{m-1} + b^m. \qquad (2.31')$$

Заметим, что строение функции $\lambda^m(x)$ по выражению (2.31$'$) отличается от строения функций $\lambda^\nu(x)$, $\nu = 1, \ldots, m-1$ по выражениям (2.31). Аналогично предыдущему случаю в выражениях (2.26), нетрудно убедиться в том, что и в выражениях (2.31),(2.31$'$) постоянны элементы матрицы a, строки $(c^1, \ldots, c^{m-1})$ и столбца $(b^1, \ldots, b^{m-1}, b^m)$. Вследствие независимости функций $\lambda^1(x), \ldots, \lambda^{m-1}(x), \lambda^m(x)$, матрица Якоби для них по переменным $x^1, \ldots, x^{m-1}, x^m$ должна быть невырожденной. Но переменная x^m не входит явно в систему функций (2.31), поэтому квадратная матрица a, имеющая порядок $m-1$, также невырождена.

Подставим выражения (2.31),(2.31$'$) в исходное уравнение (2.29) и сравним в его правой и левой частях коэффициенты при переменных $x^1, \ldots, x^{m-1}$ и свободные от них члены:

$$\left.\begin{array}{r} a^{1\nu}\sigma^1(\xi) + \ldots + a^{m-1,\nu}\sigma^{m-1}(\xi) + c^\nu = \xi^\nu, \\ \sigma^m(\xi) + b^1\sigma^1(\xi) + \ldots + b^{m-1}\sigma^{m-1}(\xi) + b^m = \xi^m. \end{array}\right\} \qquad (2.32)$$

Решение первых $m-1$ уравнений системы (2.32) относительно функций $\sigma^1(\xi), \ldots, \sigma^{m-1}(\xi)$ может быть найдено по формулам Крамера, а затем из последнего уравнения этой системы найдем и функцию $\sigma^m(\xi)$. В результате получаем:

$$\left.\begin{array}{r} \sigma^\nu(\xi) = \tilde{a}^{1\nu}(\xi^1 - c^1) + \ldots + \tilde{a}^{m-1,\nu}(\xi^{m-1} - c^{m-1}), \\ \sigma^m(\xi) = \xi^m - (b^1\tilde{a}^{11} + \ldots + b^{m-1}\tilde{a}^{1,m-1})(\xi^1 - c^1) - \ldots - \\ -(b^1\tilde{a}^{m-1,1} + \ldots + b^{m-1}\tilde{a}^{m-1,m-1})(\xi^{m-1} - c^{m-1}) - b^m, \end{array}\right\} \qquad (2.33)$$

где $\nu = 1, \ldots, m-1$ и $\tilde{a}$ – обратная к a матрица порядка $m-1$. Выражения (2.31),(2.31$'$) и (2.33) задают группу всех движений (2.8) метрической функции (2.6), состоящую из двух несвязных компонент с $\det a > 0$ и $\det a < 0$. Первая связная компонента с $\det a > 0$ содержит тождественное преобразование при $a = \mathrm{I}$, $b^1 = \ldots = b^{m-1} = b^m = 0$, $c^1 = \ldots = c^{m-1} = 0$ и является полной локальной m^2-мерной группой локальных движений (2.14) метрики (2.6). Эта группа зависит от m^2 существенных параметров, а именно: $(m-1)^2$ элементов квадратной матрицы a, имеющей порядок $m-1$; $(m-1)$ элементов строки

$(c^1, \ldots, c^{m-1})$ и m элементов столбца $(b^1, \ldots, b^{m-1}, b^m)$, входя в группу всех движений как подгруппа.

Запишем, наконец, функциональное уравнение (2.9) для последней метрики (2.7), когда многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ имеют различные размерности, отличающиеся на единицу:

$$\begin{gathered}\lambda^1(x)\sigma^1(\xi) + \ldots + \lambda^m(x)\sigma^m(\xi) + \sigma^{m+1}(\xi) = \\ = x^1\xi^1 + \ldots + x^m\xi^m + \xi^{m+1}\end{gathered} \tag{2.34}$$

и продифференцируем его по каждой из переменных $\xi^1, \ldots, \xi^m, \xi^{m+1}$:

$$\left.\begin{gathered}\lambda^1(x)\sigma^1_{\xi^\mu}(\xi) + \ldots + \lambda^m(x)\sigma^m_{\xi^\mu}(\xi) + \sigma^{m+1}_{\xi^\mu}(\xi) = x^\mu, \\ \lambda^1(x)\sigma^1_{\xi^{m+1}}(\xi) + \ldots + \lambda^m(x)\sigma^m_{\xi^{m+1}}(\xi) + \sigma^{m+1}_{\xi^{m+1}}(\xi) = 1,\end{gathered}\right\} \tag{2.35}$$

где $\mu = 1, \ldots, m$. Система уравнений (2.35) вполне аналогична системе (2.30) и ее решение можно записать сразу по выражениям (2.31):

$$\lambda^\mu(x) = a^{\mu 1}x^1 + \ldots + a^{\mu m}x^m + b^\mu. \tag{2.36}$$

Квадратная матрица a в решении (2.36) имеет порядок m и невырождена, так как функции $\lambda^1(x), \ldots, \lambda^m(x)$, задавая в движении (2.8) локально обратимое преобразование m-мерного многообразия $\mathfrak{M}$, независимы. Легко показать, как и в случае решения (2.26), что элементы матрицы a и столбца $(b^1, \ldots, b^m)$ постоянны.

Подставим решение (2.36) в исходное функциональное уравнение (2.34) и сравним в его правой и левой частях коэффициенты при переменных $x^1, \ldots, x^m$ и свободные от них члены:

$$\left.\begin{gathered}a^{1\mu}\sigma^1(\xi) + \ldots + a^{m\mu}\sigma^m(\xi) = \xi^\mu, \\ b^1\sigma^1(\xi) + \ldots + b^m\sigma^m(\xi) + \sigma^{m+1}(\xi) = \xi^{m+1}.\end{gathered}\right\} \tag{2.37}$$

Система уравнений (2.37) вполне аналогична частному случаю системы (2.32) при $c^1 = \ldots = c^{m-1} = 0$ и $b^m = 0$, поэтому ее решение можно записать по выражениям (2.33);

$$\left.\begin{gathered}\sigma^\mu(\xi) = \tilde{a}^{1\mu}\xi^1 + \ldots + \tilde{a}^{m\mu}\xi^m, \\ \sigma^{m+1}(\xi) = \xi^{m+1} - (b^1\tilde{a}^{11} + \ldots + b^m\tilde{a}^{1m})\xi^1 - \\ - \ldots - (b^1\tilde{a}^{m1} + \ldots + b^m\tilde{a}^{mm})\xi^m,\end{gathered}\right\} \tag{2.38}$$

где $\mu = 1, 2, \ldots, m$, $\tilde{a}$ – обратная к a матрица порядка m. Выражения (2.36) и (2.38) задают группу всех движений (2.8) метрической функции (2.7), зависящую от $m(m+1)$ существенных параметров – m^2 элементов квадратной матрицы a, имеющей порядок m, и m элементов столбца $(b^1, \ldots, b^m)$. Ее связная компонента с $\det a > 0$, содержащая тождественное преобразование при $a = \mathrm{I}$ и $b^1 = \ldots = b^m = 0$, является полной локальной $m(m+1)$-мерной группой локальных движений (2.15) метрики (2.7), входя в группу всех движений этой метрики как подгруппа. Теорема 1 полностью доказана.

В каждой из групп движений (2.10) – (2.15) группы преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, имея одну и ту же параметрическую группу, изоморфны, но не обязательно эквивалентны, то есть не обязательно переходят друг в друга при некотором локально обратимом гладком отображении $\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$. Эквивалентность имеет место только в однопараметрической группе (2.10), в которой локальное движение состоит из двух параллельных переносов. Неэквивалентность в группах движений (2.11), (2.12),(2.15) обусловлена тем, что преобразуемые в них многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ имеют различную размерность. В группах движений (2.13) и (2.14) эти многообразия имеют одинаковую размерность и естественно было ожидать эквивалентности групп их преобразований, однако имеет место следующая теорема:

Теорема 2 *Локальные группы локальных преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, составляющие группы движений* (2.13), (2.14) *метрических функций* (2.5), (2.6)*, неэквивалентны.*

Докажем сначала теорему 2 для группы движкний (2.13) метрической функции (2.5). Тождественному преобразованию многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответствует единичная матрица: $a = \tilde{a} = \mathrm{I}$. Рассматривая бесконечно малое движение, из уравнений (2.13) очень просто найти инфинитезимальные операторы $X_{\mu\nu}$ и $\Xi_{\mu\nu}$, однозначно задающие соответствующие бесконечно малые преобразования многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$:

$$X_{\mu\nu} = x^\nu \partial/\partial x^\mu, \ \Xi_{\mu\nu} = -\ \xi^\mu \partial/\partial \xi^\nu, \tag{2.39}$$

где $\mu, \nu = 1, \ldots, m$ (см. [29], стр. 48-49). Операторы $X_{\mu\nu}$ и $\Xi_{\mu\nu}$ являются базисными для соответствующих m^2-мерных алгебр Ли, причем в этих базисах совпадают структурные константы их коммутационных соотношений. Для того, чтобы в группе движений (2.13) были эквивалентны локальные группы преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, необходимо и достаточно, чтобы были эквивалентны их алгебры Ли с базисными операторами (2.39) (см. §3 гл. II и [12], стр. 220).

Предположим, что при некотором локально обратимом отображе-

нии
$$\xi = \varphi(x) \tag{2.40}$$
операторы $X_{\mu\nu}$ и $\Xi_{\mu\nu}$, определяемые выражениями (2.39), переходят соответственно друг в друга. Из формул преобразования операторов $X_{\mu\nu}$ при замене координат (2.40) и сравнения их с операторами $\Xi_{\mu\nu}$ для m функций $\varphi(x) = (\varphi^1(x), \dots, \varphi^m(x))$ получаем следующую систему m^3 дифференциальных уравнений:
$$x^\nu \partial\varphi^\lambda/\partial x^\mu = -\ \delta^{\nu\lambda}\varphi^\mu, \tag{2.41}$$
где $\delta^{\nu\lambda}$ – симметричный символ Кронекера, для которого $\delta^{\nu\lambda} = 1$ при $\nu = \lambda$ и $\delta^{\nu\lambda} = 0$ при $\nu \neq \lambda$. Поскольку $\mu, \nu, \lambda = 1, \dots, m$ и $m \geq 2$, для любого λ можно найти такое ν, что $\lambda \neq \nu$. Но тогда из уравнений (2.41) следует, что $\partial\varphi^\lambda/\partial x^\mu = 0$ для любых μ, λ. То есть $\varphi(x) \equiv const$, что, очевидно, противоречит локальной обратимости отображения (2.40). Установленное противоречие означает, что алгебры Ли с базисными операторами (2.39) неэквивалентны и потому неэквивалентны соответствующие локальные группы преобразований m-мерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ в группе движений (2.13) метрики (2.5).

Рассмотрим теперь группу движений (2.14) метрической функции (2.6). Инфинитезимальные операторы, однозначно задающие соответствующие бесконечно малые преобразования многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, как нетрудно установить, определяются такими выражениями:
$$\left.\begin{array}{ll}
X_{\mu\nu} = x^\nu\partial/\partial x^\mu, & \Xi_{\mu\nu} = -\xi^\mu\partial/\partial\xi^\nu, \\
X_{\mu m} = \partial/\partial x^\mu, & \Xi_{\mu m} = -\xi^\mu\partial/\partial\xi^m, \\
X_{m\mu} = x^\mu\partial/\partial x^m, & \Xi_{m\mu} = -\partial/\partial\xi^\mu, \\
X_{mm} = \partial/\partial x^m, & \Xi_{mm} = -\partial/\partial\xi^m,
\end{array}\right\} \tag{2.42}$$
где $\mu, \nu = 1, \dots, m-1$. Предположим, что алгебры Ли с базисами (2.42) эквивалентны, то есть что операторы $X_{\mu\nu}, X_{\mu m}, X_{m\mu}, X_{mm}$ переходят соответственно в операторы $\Xi_{\mu\nu}, \Xi_{\mu m}, \Xi_{m\mu}, \Xi_{mm}$ при некотором локально обратимом отображении (2.40). Тогда относительно m функций $\varphi(x) = (\varphi^1(x), \dots, \varphi^m(x))$ этого отображения, так же как и в предыдущем случае, получаем следующую систему m^3 дифференци-

альных уравнений:

$$\left.\begin{array}{ll} x^\nu \partial\varphi^\lambda/\partial x^\mu = -\delta^{\nu\lambda}\varphi^\mu, & x^\nu \partial\varphi^m/\partial x^\mu = 0, \\ \partial\varphi^\lambda/\partial x^\mu = 0, & \partial\varphi^m/\partial x^\mu = -\varphi^\mu, \\ x^\mu \partial\varphi^\lambda/\partial x^m = -\delta^{\mu\lambda}, & x^\mu \partial\varphi^m/\partial x^m = 0, \\ \partial\varphi^\lambda/\partial x^m = 0, & \partial\varphi^m/\partial x^m = -1, \end{array}\right\} \quad (2.43)$$

где $\mu, \nu, \lambda = 1, \ldots, m-1$. Система (2.43) явно несовместна. Например, из двух последних уравнений второго столбца получаем противоречие: $\partial\varphi^m/\partial x^m = 0$ и $\partial\varphi^m/\partial x^m \neq 0$ одновременно. Неэквивалентность алгебр Ли с базисными операторами (2.42) означает неэквивалентность соответствующих локальных групп преобразований m-мерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ в группе движений (2.14) метрики (2.6). Теорема 2 полностью доказана.

Заметим, что неэквивалентные алгебры Ли с базисами (2.39) становятся эквивалентными, если в одной из них перейти к другому базису. Например, автоморфизм $X_{\mu\nu} \to -X_{\nu\mu}$ и тривиальное отображение $\xi = x$ переводит базис первой алгебры в базис второй. Автоморфизм алгебр индуцируется, очевидно, некоторым автоморфизмом параметрической группы и в этом случае говорят, что группы преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ слабо эквивалентны. Но, как отмечено в [30], на стр. 44, не всегда слабо эквивалентные группы преобразований эквивалентны. Аналогично, неэквивалентные алгебры Ли с базисными операторами (2.42) становятся эквивалентными при тривиальнои отображении (2.40), а именно $\xi = x$, и автоморфизме $X_{\mu\nu} \to -X_{\nu\mu}, X_{\mu m} \to -X_{m\mu}, X_{m\mu} \to -X_{\mu m}, X_{mm} \to -X_{mm}$, что говорит о слабой эквивалентности соответствующих неэквивалентных групп преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ в группе движений (2.14).

Установленная в §1 связь групповой и феноменологической симметрий в геометрии двух множеств, утверждаемая теоремой 3 из него, естественно приводит к следующей задаче в теории групп Ли преобразований:

Для всех эквивалентных и неэквивалентных эффективных гладких локальных действий smn-мерных локальных групп Ли в sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ найти невырожденные двухточечные инварианты, удовлетворяющие уравнению (2.9).

Так сформулированная задача предполагает предварительное проведение классификации локальных групп преобразований с точностью до эквивалентности (замены координат) в каждом локально изоморфном классе действующих групп. Однако имеющаяся полная классификация С.Ли (см. [29], стр.24–27) проведена только для одномерного и двумерного многообразий, причем с точностью до слабой эквивалентности. Поскольку слабо эквивалентные группы преобразований могут оказаться неэквивалентными, а также в силу теоремы 2 настоящего параграфа, такая точность классификации для решения сформулированной выше задачи может оказаться недостаточной.

С другой стороны, для случая $s = 1$ все возможные невырожденные феноменологически инвариантные метрические функции (2.1) геометрии двух множеств при любых размерностях m и n многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ были найдены методами теории физических структур без предварительной классификации mn-мерных групп их преобразований. По известным выражениям (2.2)–(2.7) этих метрик, решая функциональное уравнение (2.9), оказалось возможным найти полные локальные группы их локальных движений (2.10)–(2.15) и соответствующие группы преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, что и явилось основным содержанием настоящего второго параграфа.

В заключение приведем пример двуметрической физической структуры ранга (2,2), задаваемой на двумерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ с локальными системами координат (x, y) и (ξ, η) двухкомпонентной функцией $f = (f^1, f^2)$. Возможны два и только два типа таких структур (см. [31] и §7 настоящей монографии). Двуметрическая физическая структура ранга (2,2) первого типа есть простое наложение двух однометрических структур того же ранга:

$$f^1 = x + \xi, \ f^2 = y + \eta. \tag{2.44}$$

Двуметрическая физическая структура ранга (2,2) второго типа не сводится к случаю $s = 1$:

$$f^1 = (x + \xi)y, \ f^2 = (x + \xi)\eta. \tag{2.45}$$

Соответствующие группы локальных движений задаются следующими преобразованиями двумерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$:

$$\left.\begin{aligned} x' = x + a, \ y' = y + b, \\ \xi' = \xi - a, \ \eta' = \eta - b; \end{aligned}\right\} \tag{2.44$'$}$$

$$\left.\begin{aligned} x' = ax + b, \ y' = y/a, \\ \xi' = a\xi - b, \ \eta' = \eta/a. \end{aligned}\right\} \tag{2.45$'$}$$

Феноменологическая симметрия геометрии двух множеств с метрическими функциями (2.44),(2.45) выражается следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} f^1(i\alpha) - f^1(i\beta) - f^1(j\alpha) + f^1(j\beta) = 0, \\ f^2(i\alpha) - f^2(i\beta) - f^2(j\alpha) + f^2(j\beta) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{2.44$''$}$$

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} f^1(i\alpha) - f^1(i\beta) & f^1(i\alpha)f^2(j\alpha) \\ f^1(j\alpha) - f^1(j\beta) & f^1(j\alpha)f^2(i\alpha) \end{vmatrix} = 0, \\ \\ \begin{vmatrix} f^2(i\alpha) - f^2(j\alpha) & f^2(i\alpha)f^1(i\beta) \\ f^2(i\beta) - f^2(j\beta) & f^2(i\beta)f^1(i\alpha) \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.45$''$}$$

Результаты §2 опубликованы автором в работе [32].

§3. Об изоморфизме, подобии и эквивалентности групп преобразований

Из теоремы 2 предыдущего §2 следует, что задача вычисления метрических функций как двухточечных инвариантов групп преобразований предполагает проведение их классификации с точностью до эквивалентности в каждом локально изоморфном классе действующих групп, допускающей только замену координат в преобразуемом многообразии. Слабая эквивалентность, допускающая также и некоторую замену параметров в действующей группе, для этой цели оказывается недостаточной. Например, метричекие функции (2.5) и (2.6) из §2 не могут быть получены, если классификация групп преобразований проведена только с точностью до слабой эквивалентности, представляющей собой частный случай подобия в смысле С.Ли, допускающего произвольную замену параметров. В работе [33] автором на примере трехмерных групп Ли преобразований плоскости было установлено различие классификаций с точностью до эквивалентности и с точностью до слабой эквивалентности. В следующем §4 на примере четырехмерных групп преобразований плоскости наглядно будет показана существенность этого различия, а в §5 его роль при изучении групповых свойств однометрической физической структуры ранга (3,3). В настоящем же §3 будут даны точные определения локальных изоморфизма и подобия, слабой эквивалентности и эквивалентности групп преобразований, обсуждены их связи и различия в свете задач, возникающих в теории физических структур.

В начале §1 (во втором после равенства (1.6) абзаце) по монографии Л.С. Понтрягина "Непрерывные группы" (см. [11], стр. 435) было дано определение локальной группы Ли $G^r(\lambda)$ преобразований области U многообразия $\mathfrak{M}$, как эффективного действия λ локальной группы Ли G^r в U. Будем говорить, что задана локальная группа Ли локальных преобразований многообразия $\mathfrak{M}$, если для каждой его точки задано эффективное гладкое действие λ группы G^r в некоторой ее окрестности, причем действия эти совпадают в пересечении окрестностей двух точек. Сохраним для описанной группы преобразований прежнее обозначение $G^r(\lambda)$.

Рассмотрим локальную r-мерную группу Ли $G^r(\lambda)$ локальных преобразованй m-мерного многообразия $\mathfrak{M}$:

$$x' = \lambda(x, a), \tag{3.1}$$

где $a \in G^r, x, x' \in \mathfrak{M}$ и λ – эффективное гладкое действие группы G^r в $\mathfrak{M}$. Группу $G^r(\lambda)$ естественно рассматривать как точное представление (реализацию) r-мерной локальной группы Ли G^r локальными преобразованиями m-мерного многообразия (см. [12], стр. 210). Группу Ли G^r с законом умножения

$$ab = \varphi(a, b), \tag{3.2}$$

где $a, b, \varphi(a, b) \in G^r$, обычно называют параметрической группой группы преобразований $G^r(\lambda)$. Выбрав некоторую локальную систему координат $x = (x^1, \ldots, x^m)$ в преобразуемом многообразии $\mathfrak{M}$ и некоторую локальную систему параметров $a = (a^1, \ldots, a^r)$ в действующей в нем группе G^r, обозначим через

$$X_\omega = \lambda^\mu_\omega(x)\partial/\partial x^\mu \tag{3.3}$$

инфинитезимальные операторы группы $G^r(\lambda)$, где $\omega = 1, \ldots, r$ и по "немому" индексу μ производится суммирование в пределах от 1 до m. Поскольку группа G^r действует в многообразии $\mathfrak{M}$ эффективно, операторы X_ω линейно независимы с постоянными коэффициентами, однозначно определяют бесконечно малые (инфинитезимальные) преобразования и составляют базис соответствующей r-мерной алгебры Ли. Коммутаторы операторов (3.3) выражаются линейно через эти же операторы с помощью структурных констант: $[X_\omega, X_{\omega'}] = C^{\omega''}_{\omega\omega'} X_{\omega''}$, причем по индексу ω'' производится суммирование в пределах от 1 до r.

Пусть имеется еще одна локальная r-мерная группа Ли H^r локальных преобразований n-мерного многообразия $\mathfrak{N}$:

$$\xi' = \sigma(\xi, \alpha), \tag{3.4}$$

где $\alpha \in H^r, \xi, \xi' \in \mathfrak{N}$ и σ – эффективное гладкое действие группы H^r в $\mathfrak{N}$. Закон умножения в параметрической группе H^r будет:

$$\alpha\beta = \psi(\alpha, \beta), \tag{3.5}$$

где $\alpha, \beta, \psi(\alpha, \beta) \in H^r$.

Выбрав некоторую локальную систему координат $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ в преобразуемом многообразии и некоторую локальную систему параметров $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^r)$ в действующей в нем группе H^r, обозначим через

$$\Xi_\omega = \sigma^\nu_\omega(\xi)\partial/\partial\xi^\nu \tag{3.6}$$

инфинитезимальные операторы группы $H^r(\sigma)$, где $\omega = 1, \ldots, r$ и по "немому" индексу ν производится суммирование в пределах от 1 до n. Операторы Ξ_ω, как и операторы (3.3), составляют базис соответствующей r-мерной алгебры Ли преобразований со следующей структурой коммутационных соотношений в нем: $[\Xi_\omega, \Xi_{\omega'}] = \tilde{C}^{\omega''}_{\omega\omega'}\Xi_{\omega''}$, причем не обязательно $\tilde{C}^{\omega''}_{\omega\omega'} = C^{\omega''}_{\omega\omega'}$.

Заметим, что группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $H^r(\sigma)$ зависят от одинакового числа параметров, равного r, однако заранее не предполагается, что законы умножения (3.2) и (3.5) в их параметрических группах как-то связаны. Многообразия же $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, в которых действуют группы G^r и H^r, могут иметь различные размерности. Отметим также, что, например, замена параметров $a = (a^1, \ldots, a^r)$ в группе G^r индуцирует линейное преобразование базиса (3.3) соответствующей алгебры Ли, изменяющего, в общем случае, структурные константы $C^{\omega''}_{\omega\omega'}$, в то время как замена локальных координат $x = (x^1, \ldots, x^m)$ в многообразии $\mathfrak{M}$, меняет только выражения для базисных операторов X_ω, сохраняя неизменной структуру коммутационных соотношений (см. [13], стр. 35).

Определение 1. Группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $H^r(\sigma)$ называются *локально изоморфными*, если локально изоморфны их параметрические группы G^r и H^r.

Локальный изоморфизм групп G^r и H^r, как известно (см. [12], стр. 152), означает, что существует такое локально обратимое отображение $u : G^r \to H^r$, при котором законы умножения (3.2) и (3.5) переходят друг в друга, то есть имеет место следующее равенство:

$$u(\varphi(a, b)) = \psi(u(a), u(b)) \tag{3.7}$$

для всех a, b из некоторой окрестности единичного элемента $e \in G^r$.

Из хорошо известных теорем С.Ли о соответствии локальных групп преобразований и их алгебр непосредственно вытекает следующая лемма:

Лемма 1. *Для того, чтобы группы преобразований* $G^r(\lambda)$ *и* $H^r(\sigma)$ *были локально изоморфными, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое невырожденное линейное преобразование базиса* (3.3)*, при котором совпадали бы структурные константы в новом базисе и в базисе* (3.6).

Определение 2. Группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $H^r(\sigma)$ называются *локально подобными*, если существуют такие локально обратимые отображения $u : G^r \to H^r$ и $v : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$, при которых законы умножения (3.2) и (3.5), а также действия (3.1) и (3.4), переходят друг в друга, то есть, кроме равенства (3.7), имеет место еще одно равенство:

$$v(\lambda(x, a)) = \sigma(v(x), u(a)) \tag{3.8}$$

для всех x из некоторой окрестности каждой точки в $\mathfrak{M}$ и всех a из некоторой окрестности единичного элемента $e \in G^r$.

Подобные группы изоморфны, однако изоморфные группы преобразований не обязательно подобны. В частности, подобие невозможно, когда преобразуемые многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ имеют различные размерности m и n. Но даже и при $m = n$ изоморфные группы преобразований могут не быть подобными. Например, группа движений плоскости Лобачевского локально изоморфна группе движений симплектической плоскости, но подобия между этими группами нет, что говорит о принципиальном различии соответствующих геометрий.

Лемма 2. *Для того, чтобы группы преобразований* $G^r(\lambda)$ *и* $H^r(\sigma)$ *были локально подобны, необходимо и достаточно, чтобы существовали такое невырожденное линейное преобразование базиса* (3.3) *и* *такая локально обратимая замена координат $x \to \xi$, при которых в новом базисе и в базисе* (3.6) *операторы с одним и тем же индексом ω имели бы одинаковые выражения.*

Все свои результаты по классификации групп преобразований С.Ли получал с точностью до подобия. Действительно, в его работах (см., например, [34]) постоянно используется линейное преобразование базиса соответствующей алгебры Ли для приведения его к "системе операторов возможно более высоких порядков" (см. [29], стр. 213) и система координат, в которой эти операторы задаются наиболее простыми выражениями.

Рассмотрим теперь две такие локальные группы $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ локальных преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ размерности m и n, у которых одна и та же параметрическая группа G^r:

$$x' = \lambda(x, a) \text{ и } \xi' = \sigma(\xi, a), \tag{3.9}$$

где $a \in G^r$, $x, x' \in \mathfrak{M}$ и $\xi, \xi' \in \mathfrak{N}$, λ и σ – эффективные гладкие действия группы G^r в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. В этом случае базисы (3.3) и (3.6) однозначно соответствуют друг другу с точностью до совпадения структурных констант: $C^{\omega''}_{\omega\omega'} = \tilde{C}^{\omega''}_{\omega\omega'}$.

Определение 3. Группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$, имеющие одну и ту же параметрическую группу G^r, называются *локально слабо эквивалентными*, если существует такой локальный автоморфизм $u : G^r \to G^r$ и такое локально обратимое отображение $v : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$, что для действий (3.9) имеет место равенство (3.8).

Таким образом, слабая эквивалентность групп $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ есть их подобие, причем в подразумеваемом равенстве (3.7) должно быть $\psi = \varphi$, так как отображение u в определении 3 является автоморфизмом.

Лемма 3. *Для того, что бы группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$, имеющие одну и ту же параметрическую группу G^r, были локально слабо эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы существовали такое невырожденное линейное преобразование базиса* (3.3)*, сохраняющее структурные константы, и такая локально обратимая замена координат $x \to \xi$, при которых в новом базисе и в базисе* (3.6) *операторы с одним и тем же индексом ω имели бы одинаковые выражения.*

Определение 4. Группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$, имеющие одну и ту же параметрическую группу G^r, называются *локально эквивалентными*, если существует такое локально обратимое отображение $w : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$, при котором действия (3.9) переходят друг в друга, то есть имеет место равенство

$$w(\lambda(x, a)) = \sigma(w(x), a) \tag{3.10}$$

для всех x из некоторой окрестности каждой точки в $\mathfrak{M}$ и всех a из некоторой окрестности единичного элемента $e \in G^r$.

Лемма 4. *Для того, чтобы группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$, имеющие одну и ту же параметрическую группу G^r, были локально эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая локально обратимая замена координат $x \to \xi$, при которой в соответствующих базисах (3.3) и (3.6) операторы X_ω и Ξ_ω с одним и тем же индексом ω имели бы одинаковые выражения.*

Так же, как и лемма 1, леммы 2,3,4 являются следствием теорем С.Ли о соответствии групп преобразований и их алгебр (см., например, [11], §60). Имея в виду леммы 1 – 4, будем говорить, что изоморфны, подобны, слабо эквивалентны или эквивалентны алгебры Ли преобразований с базисами (3.3) и (3.6), если изоморфны, подобны, слабо эквивалентны или эквивалентны группы преобразований с эффективными действиями λ и σ, которым эти алгебры соответствуют.

Эквивалентные группы преобразований одновременно и слабо эквивалентны согласно определениям 3 и 4, так как тождественное преобразование группы G^r, очевидно, является ее автоморфизмом. Но слабо эквивалентные группы преобразований не обязательно эквивалентны, хотя те и другие подобны по определению 2. То есть, если уравнения (3.8) при заданных действиях λ и σ имеют решение относительно автоморфизма u и отображения v, то соответствующие эквивалентности уравнения (3.10) относительно отображения w могут оказаться несовместными.

Заметим, что различию между эквивалентностью и слабой эквивалентностью в теории групп преобразований либо не придают особого значения, либо его вовсе не замечают. Например, Эйзенхарт Л.П. в своей монографии "Непрерывные группы преобразований" [13] на стр. 95 следующим образом формулирует критерий подобия групп преобразований: пусть базисы (3.3) и (3.6) соответствующих алгебр Ли выбраны так, что структурные константы в них совпадают; тогда необходимым и достаточным условием подобия является тождество координатных выражений для базисных операторов обеих алгебр при некоторой замене координат. Однако линейное преобразование базисов, приводящее к совпадению структурных констант, определяется только с точностью до автоморфизмов. И не для всякого автоморфизма можно найти такую замену координат, которая возвращает базисным операторам их прежние выражения, что будет показано ниже на конкретных примерах. То есть критерий подобия (в частности, слабой эквивалентности и эквивалентности), сформулированный Эйзенхартом, является только достаточным условием, но не необходимым.

В работе [33] автором были найдены с точностью до эквивалентности в каждом изоморфном классе все трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости. Рассмотрим из нее достаточно подробно пример слабо эквивалентных, но не эквивалентных, алгебр Ли со следующими базисами:

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = y\partial_x,\ X_3 = -\partial_y; \tag{3.11}$$

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = y\partial_x + \delta\partial_y, \tag{3.12}$$

где δ – произвольная постоянная. В этих базисах обе алгебры имеют одинаковые коммутационные соотношения:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_3, X_1] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1. \tag{3.13}$$

Если в первой алгебре с базисом (3.11) перейти к другому базису, а именно: $X_1' = X_1,\ X_2' = -X_3,\ X_3' = X_2 - \delta X_3$, то даже без замены координат получаем совпадение операторов X_1', X_2', X_3' ее нового базиса с операторами X_1, X_2, X_3 базиса (3.12) второй алгебры. Если же в первой алгебре не переходить к указанному базису, то в заданных базисах (3.11) и (3.12) никакая локально обратимая замена координат на плоскости

$$\xi = v(x, y),\ \eta = w(x, y) \tag{3.14}$$

не приведет к совпадению выражений для соответствующих базисных операторов. Докажем это, предположив обратное. Тогда для функций $v(x, y)$ и $w(x, y)$ из формул преобразования трех базисных операторов (3.11) при замене координат (3.14) и сравнения их с соответствующими базисными операторами (3.12), переписанными в координатах ξ, η, получаем следующую систему шести дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{array}{c} v_x = 1,\ w_x = 0,\ yv_x = 0, \\ yw_x = 1,\ -v_y = w,\ -w_y = \delta. \end{array}\right\} \tag{3.15}$$

Система эта явно несовместна, что и доказывает неэквивалентность алгебр Ли с базисами (3.11) и (3.12). Заметим также, что алгебры Ли с базисами (3.12), в которых постоянная δ принимает различные значения, неэквивалентны, в то время как аналогично устроенные алгебры Ли с базисами

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = y\partial_x,\ X_3 = -\partial_y + \delta y \partial_x$$

все эквивалентны друг другу и эквивалентны алгебре Ли с базисом (3.11).

По инфинитезимальным базисным операторам (3.11), (3.12) можно найти локальные эффективные действия λ и σ соответствующих групп преобразований:

$$\left.\begin{array}{c} x' = x + a^1 + a^2 y - a^2 a^3/2, \\ y' = y - a^3; \end{array}\right\} \tag{3.11$'$}$$

$$\left.\begin{array}{c} x' = x + a^1 + a^3 y + a^3(a^2 + \delta a^3)/2, \\ y' = y + a^2 + \delta a^3 \end{array}\right\} \tag{3.12$'$}$$

и закон умножения (3.2) в их общей параметрической группе G^3:

$$\left.\begin{array}{c} \varphi^1(a,b) = a^1 + b^1 + (a^2 b^3 - a^3 b^2)/2, \\ \varphi^2(a,b) = a^2 + b^2, \\ \varphi^3(a,b) = a^3 + b^3, \end{array}\right\} \tag{3.16}$$

в который, обратим внимание, постоянная δ не входит, так же как она не входила и в коммутационные соотношения (3.13).

Автоморфизм $a^1 \to a^1,\ a^2 \to a^3,\ -a^3 - \delta a^2 \to a^2$, оставляя неизменным закон умножения (3.16), переводит действие (3.11$'$) в действие (3.12$'$) при тех же координатах. Таким образом, эти группы преобразований слабо эквивалентны согласно определению 3, но они не эквивалентны в смысле определения 4, так как без указанного автоморфизма действия (3.11$'$) и (3.12$'$) не переходят друг в друга ни при какой замене координат (3.14). В самом деле, если бы эти группы были эквивалентны, то уравнения (3.10) из определения 4 для функций $w^1 = v$ и

$w^2 = w$ локальной замены координат (3.14) в плоскости представились бы следующей системой двух функциональных уравнений:

$$\left.\begin{array}{c} v(x + a^1 + a^2 y - a^2 a^3/2,\ y - a^3) = \\ = v(x, y) + a^1 + a^3 w(x, y) + a^3(a^2 + \delta a^3)/2, \\ w(x + a^1 + a^2 y - a^2 a^3/2,\ y - a^3) = \\ = w(x, y) + a^2 + \delta a^3. \end{array}\right\}$$

Если продифференцировать эти уравнения по каждому из независимых параметров a^1, a^2, a^3, положив затем $a^1 = 0,\ a^2 = 0,\ a^3 = 0$, то снова получим систему шести дифференциальных уравнений (3.15), которая явно несовместна. Аналогично слабо эквивалентны, но не эквивалентны группы преобразований с эффективными действиями (3.12′) при различных значениях постоянной δ.

Более кратко из работы [33] рассмотрим еще и второй случай (из двух возможных) слабо эквивалентных, но не эквивалентных, трехмерных алгебр Ли преобразований плоскости со следующими базисами:

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = x\partial_x + \delta\partial_y, \tag{3.17}$$

где δ – произвольная постоянная, имеющих в них одинаковые коммутационные соотношения:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_3, X_1] = -X_1,\ [X_2, X_3] = 0. \tag{3.18}$$

По инфинитезимальным базисным операторам (3.17) можно найти порождающие отображения соответствующих групп преобразований:

$$\left.\begin{array}{c} x' = x \exp a^3 + a^1, \\ y' = y + a^2 + \delta a^3 \end{array}\right\} \tag{3.17′}$$

и закон умножения (3.2) в их общей параметрической группе G^3:

$$\left.\begin{array}{c} \varphi^1(a, b) = a^1 \exp b^3 + b^1, \\ \varphi^2(a, b) = a^2 + b^2, \\ \varphi^3(a, b) = a^3 + b^3, \end{array}\right\} \tag{3.19}$$

в который произвольная постоянная δ, как и в коммутаторы (3.18), не входит. Слабая эквивалентность алгебр Ли с базисами (3.17) и групп преобразований с эффективными действиями (3.17′) при различных значениях постоянной δ очевидна. Их неэквивалентность при замене координат (3.14) устанавливается точно также, как и в первом случае: соответствующая система уравнений, аналогичная системе (3.15), оказывается явно несовместной при $\delta_1 \neq \delta_2$. Нетрудно проверить, что законы умножения (3.16) и (3.19) в параметрических группах G^3 трехмерных групп $(3.11'), (3.12')$ и $(3.17')$ преобразований плоскости удовлетворяют аксиомам локальной группы Ли (см. [12], стр. 150):

$$\left.\begin{array}{c}\varphi(\varphi(a,b),c) = \varphi(a,\varphi(b,c)),\\ \varphi(a,0) = \varphi(0,a) = a.\end{array}\right\}$$

Отмеченное выше различие между слабой эквивалентностью и эквивалентностью имеет непосредственное отношение к вопросу о классификации групп преобразований. Обычно ее проводят с точностью до подобия, то есть с точностью до изоморфизма и слабой эквивалентности в каждом изоморфном классе. Но имеет смысл провести эту классификацию и с другой точностью, а именно с точностью до изоморфизма и эквивалентности в каждом изоморфном классе. Поскольку слабо эквивалентные группы преобразований могут оказаться неэквивалентными, вторая классификация, в общем случае, не совпадает с первой, уточняет и дополняет ее, являясь, по существу, более тонкой классификацией. На вопрос о том, в каком случае возможно такое уточнение и дополнение обычной классификации, отвечает следующая теорема:

Теорема. *Если группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ слабо эквивалентны , но не эквивалентны, то их параметрическая группа G^r имеет внешние автоморфизмы.*

Предположим обратное, то есть что параметрическая группа G^r имеет только внутренние автоморфизмы. Тогда, вследствие слабой эквивалентности групп $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$, уравнения (3.8) имеют решение относительно отображения $v(x)$ и внутреннего автоморфизма $u(a) = bab^{-1}$, где $b \in G^r$, то есть

$$v(\lambda(x,a)) = \sigma(v(x), bab^{-1}). \tag{3.20}$$

Покажем, что тогда отображение $w(x) = v(\lambda(x,b))$ является решением уравнения (3.10). Действительно, подставляя его в это уравнение, получаем следующее соотношение:

$$v(\lambda(\lambda(x,a),b)) = \sigma(v(\lambda(x,b)),a),$$

которое, очевидно, переходит в равенство (3.20) при подстановке $\lambda(x,b) \to x, b^{-1}ab \to a$. Таким образом, группы $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$, в противоречие с условием теоремы, оказываются эквивалентными, что и означает неверность сделанного предположения об отсутствии у параметрической группы G^r внешних автоморфизмов. Установленное противоречие и доказывает теорему.

Автоморфизм параметрической группы индуцирует такое линейное преобразование базиса (3.3), которое сохраняет коммутационные соотношения с точностью до совпадения структурных констант. Это преобразование будет автоморфизмом соответствующей алгебры Ли. Ясно, что уточнение в пределах эквивалентности возможно только для тех алгебр Ли с базисом (3.3), у которых есть внешние автоморфизмы (например, нильпотентных). Простые и полупростые алгебры Ли, как известно, имеют только внутренние автоморфизмы, поэтому для них классификации с точностью до слабой эквивлентности и с точностью до эквивалентности совпадают.

Результаты работы [33] показывают, что из всех трехмерных алгебр Ли преобразований плоскости в классификации С.Ли только две допускают уточнение в пределах эквивалентности. Уточнение первой из них с базисом $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$, $X_3 = y\partial_x$ и коммутационными соотношениями (3.13) приводит к неэквивалентным алгебрам Ли с базисами (3.11) и (3.12). Уточнение же второй с базисом $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$, $X_3 = x\partial_x$ и коммутационными соотношениями (3.18) дает неэквивалентные алгебры (3.17) при различных значениях произвольной постоянной δ.

Рассмотрим теперь несколько задач, для решения которых уточнение классификации С.Ли в пределах эквивалентности имеет принципиальное значение.

Для четырехмерной абстрактной алгебры Ли с базисом X_1, X_2, X_3, X_4 и коммутационными соотношениями в нем:

$$\left.\begin{array}{l} [X_1,X_2]=0,\ [X_3,X_1]=0,\ [X_2,X_3]=X_1, \\ [X_1,X_4]=X_1,\ [X_2,X_4]=X_2,\ [X_3,X_4]=0 \end{array}\right\} \tag{3.21}$$

найдем все слабо неэквивалентные представления (реализации) инфинитезимальными операторами преобразований плоскости. Поскольку первые три оператора составляют базис трехмерной подалгебры с коммутаторами (3.13), для нее в пределах слабой эквивалентности естественно взять трехмерную алгебру с базисными операторами (3.12) при $\delta = 0$. Выражение для оператора X_4 возьмем в самом общем виде:

$$X_4 = \lambda(x,y)\partial_x + \sigma(x,y)\partial_y. \tag{3.22}$$

Подставляя операторы (3.12) при $\delta = 0$ и (3.22) в последние три коммутатора соотношений (3.21), для функций $\lambda(x,y)$ и $\sigma(x,y)$ получаем следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_x = 1,\ \sigma_x = 0,\ \lambda_y = 0, \\ \sigma_y = 1,\ y\lambda_x - \sigma = 0,\ y\sigma_x = 0. \end{array}\right\}$$

Система эта совместна и имеет такое решение:

$$\lambda(x,y) = x + a,\ \sigma(x,y) = y.$$

Постоянная a из выражения (3.22) для оператора X_4 с этими решениями может быть исключена допустимой заменой координат: $x + a \to x,\ y \to y$, оставляющей неизменными выражения для операторов X_1, X_2, X_3. В результате получаем только одну четырехмерную алгебру Ли преобразований плоскости с коммутационными соотношениями (3.21):

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = y\partial_x,\ X_4 = x\partial_x + y\partial_y. \tag{3.23}$$

Однако по классификации С.Ли, воспроизведенной в монографии [35] на стр. 25–27, имеется еще одна четырехмерная алгебра, слабо не эквивалентная алгебре (3.23), с теми же коммутаторами (3.21):

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = y\partial_x,\ X_3 = -\partial_y,\ X_4 = x\partial_x \tag{3.24}$$

(см. также выражения (4.8.3) из следующего §4). Но алгебра (3.24) может быть получена аналогично алгебре (3.23) только в том случае, если в качестве трехмерной подалгебры взять не алгебру (3.12) при $\delta = 0$, а слабо эквивалентную ей, но не эквивалентную алгебру (3.11). То есть у слабо неэквивалентных алгебр могут быть слабо эквивалентные, но не эквивалентные подалгебры.

Рассмотрим, далее, две группы $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ преобразований многообразия $\mathfrak{M}$ и многообразия $\mathfrak{N}$ с порождающими отображениями (3.9), имеющих одну и ту же параметрическую группу G^r, как группу преобразований многообразия $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$. Обозначим эту группу через $G^r(\lambda, \sigma)$.

Определение 5. Группа $G^r(\lambda, \sigma)$ преобразований прямого произведения $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ называется *взаимным расширением* групп преобразований $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$.

Пусть базисные операторы алгебр Ли групп $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ задаются выражениями (3.3) и (3.6) соответственно. Ясно, что в этих базисах их коммутационные соотношения будут одинаковыми, то есть будут совпадать структурные константы с одним и тем же набором индексов. Тогда базисные операторы Z_ω алгебры Ли группы $G^r(\lambda, \sigma)$ будут, очевидно, задаваться следующими выражениями:

$$Z_\omega = X_\omega + \Xi_\omega = \lambda^\mu_\omega(x)\partial/\partial x^\mu + \sigma^\nu_\omega(\xi)\partial/\partial\xi^\nu, \tag{3.25}$$

где $\omega = 1, \ldots, r;\ \mu = 1, \ldots, m;\ \nu = 1, \ldots, n.$

Определение $5'$. Алгебру Ли группы $G^r(\lambda, \sigma)$ с базисными операторами (3.25) будем называть *взаимным расширением* исходных алгебр Ли групп $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ с базисными операторами (3.3) и (3.6).

Следует отметить, что взаимное расширение может быть эквивалентным, а может быть и неэквивалентным. Если группы преобразований (3.9) и соответствующие им алгебры (3.3), (3.6) эквивалентны, то и расширение называется эквивалентным; если же они неэквивлентны, то и расширение называется неэквивалентным. Эквивалентные (кратные) взаимные расширения используются в обычной геометрии одного множества для определения метрики как двухточечного инварианта (см. [12], стр. 237), в то время как неэквивалентные взаимные расширения задают группы движений в геометрии двух множеств, размерность которых, как многообразий, может быть различной (см. §2).

Для слабо эквивалентных алгебр с базисными операторами (3.11) и (3.12) возможны как эквивалентные взаимные расширения:

$$Z_1 = \partial_x + \partial_\xi,\ Z_2 = y\partial_x + \eta\partial_\xi,\ Z_3 = -\partial_y - \partial_\eta; \tag{3.26}$$

$$Z_1 = \partial_x + \partial_\xi,\ Z_2 = \partial_y + \partial_\eta,\ Z_3 = y\partial_x + \delta\partial_y + \eta\partial_\xi + \delta\partial_\eta, \tag{3.27}$$

так и неэквивалентные:

$$Z_1 = \partial_x + \partial_\xi,\ Z_2 = y\partial_x + \partial_\eta,\ Z_3 = -\partial_y + \eta\partial_\xi + \delta\partial_\eta; \tag{3.28}$$

$$Z_1 = \partial_x + \partial_\xi,\ Z_2 = \partial_y + \partial_\eta,\ Z_3 = y\partial_x + \delta_1\partial_y + \eta\partial_\xi + \delta_2\partial_\eta, \tag{3.29}$$

причем $\delta_1 \neq \delta_2$.

Заметим, что эквивалентные расширения (3.26) и (3.27) слабо эквивалентны, в то время как неэквивалентные расширения (3.28) и (3.29) слабо неэквивалентны между собой при допустимой замене координат (3.14) и слабо неэквивалентны эквивалентному расширению (3.26). Если в пределах слабой эквивалентности из взаимного расширения (3.28) можно исключить постоянную δ, то никаким преобразованием базиса и никакой допустимой заменой координат (3.14) невозможно из расширения (3.29) исключить одновременно обе постоянные δ_1 и δ_2.

Для алгебр с базисными операторами (3.17) возможно одно эквивалентное взаимное расширение:

$$Z_1 = \partial_x + \partial_\xi,\ Z_2 = \partial_y + \partial_\eta,\ Z_3 = x\partial_x + \delta\partial_y + \xi\partial_\xi + \delta\partial_\eta \tag{3.30}$$

и одно неэквивалентное:

$$Z_1 = \partial_x + \partial_\xi,\ Z_2 = \partial_y + \partial_\eta,\ Z_3 = x\partial_x + \delta_1\partial_y + \xi\partial_\xi + \delta_2\partial_\eta, \tag{3.31}$$

где $\delta_1 \neq \delta_2$. Все эквивалентные расширения (3.30) для разных значений постоянной δ слабо эквивалентны между собой, но неэквивалентному расширению (3.31) они слабо неэквивалентны. Постоянные δ_1 и δ_2 в пределах слабой эквивалентности из взаимного расширения (3.31) исключить одновременно невозиожно.

Определение 6. Гладкую функцию $f(x,\xi)$ будем называть *двухточечным инвариантом* групп $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ с эффективными действиями (3.9), если она является инвариантом их взаимного расширения $G^r(\lambda,\sigma)$, то есть если для всех x,ξ из некоторых окрестностей точек в $\mathfrak{M},\mathfrak{N}$ и всех a из некоторой окрестности единичного элемента $e \in G^r$ имеет место равенство

$$f(\lambda(x,a),\sigma(\xi,a)) = f(x,\xi). \tag{3.32}$$

Согласно инфинитезимальному критерию инвариантности (см. [12], стр. 229 и [13], стр. 77) функция $f(x,\xi)$ будет инвариантом группы $G^r(\lambda,\sigma)$ в том и только в том случае, если в некоторых локальных системах координат $x = (x^1,\ldots,x^m)$, $\xi = (\xi^1,\ldots,\xi^n)$ и параметров $a = (a^1,\ldots,a^r)$ она удовлетворяет следующей системе r уравнений:

$$Z_\omega f(x,\xi) = 0 \tag{3.33}$$

с операторами (3.25):

$$\lambda^\mu_\omega(x)\partial f(x,\xi)/\partial x^\mu + \sigma^\nu_\omega(\xi)\partial f(x,\xi)/\partial\xi^\nu = 0. \tag{3.33$'$}$$

Двухточечный инвариант $f(x,\xi)$ имеет содержательный смысл не только при эквивалентном (кратном) взаимном расширении групп преобразований, когда он задает метрику пространства в обычной геометрии одного множества. При неэквивалентном взаимном расширении этот инвариант можно рассматривать как метрическую функцию в геометрии двух множеств, размерности которых не обязательно совпадают. Такая геометрия естественно появляется в теории физических структур Ю.И.Кулакова [1],[2],[3], в которой расстояние $f(x,\xi)$ интерпретируется как измеряемая в опыте величина.

Решая сравнительно простые системы уравнений (3.33), нетрудно установить, что двухточечные инварианты $f(x,y,\xi,\eta)$ эквивалентных взаимных расширений (3.26) и (3.27) вырождены:

$$f = y - \eta,$$

в то время как для неэквивалентных расширений (3.28) и (3.29) эти инварианты не вырождены:

$$f = x - \xi - y\eta - \delta y^2/2,$$

$$f = (\delta_1 - \delta_2)(x - \xi) - (y - \eta)^2/2,$$

где, напомним, $\delta_1 \neq \delta_2$. Аналогично, для эквивалентного взаимного расширения (3.30) двухточечный инвариант $f(x,y,\xi,\eta)$ вырожден:

$$f = y - \eta,$$

а для неэквивалентного расширения (3.31) он не вырожден:

$$f = y - \eta - (\delta_1 - \delta_2)\ln|x - \xi|,$$

где, по-прежнему, $\delta_1 \neq \delta_2$.

Вычисление двухточечных инвариантов наглядно показывает существенность различия между эквивалентностью и слабой эквивалентностью групп преобразований. Действительно, структура и свойства этих инвариантов оказываются совсем разными при эквивалентном и неэквивалентном взаимных расширениях, хотя при неэквивалентном расширении группы, его составляющие, слабо эквивалентны. Отсюда вытекает, что для решения задач нахождения метрических функций как двухточечных инвариантов классификация С.Ли групп преобразований должна быть уточнена в пределах эквивалентности в каждом изомофном классе и с этой же точностью надо ее изначально проводить.

Такой вывод проиллюстрируем еще более наглядным примером. Рассмотрим две слабо эквивалентные, но не эквивалентные четырехмерные алгебры Ли преобразований плоскости с базисами

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = y\partial_x,\ X_3 = -\partial_y,\ X_4 = -y\partial_y; \tag{3.34}$$

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = y\partial_x,\ X_4 = y\partial_y \tag{3.35}$$

(см. выражения (4.8.1) и (4.8.2) при $\delta = 0$ из следующего §4) и запишем для них два взаимных расширения. Одно – эквивалентное:

$$Z_1 = \partial_x + \partial_\xi,\ Z_2 = y\partial_x + \eta\partial_\xi,\ Z_3 = -\partial_y - \partial_\eta,\ Z_4 = -y\partial_y - \eta\partial_\eta, \tag{3.36}$$

а другое – неэквивалентное:

$$Z_1 = \partial_x + \partial_\xi,\ Z_2 = y\partial_x + \partial_\eta,\ Z_3 = -\partial_y + \eta\partial_\xi,\ Z_4 = -y\partial_y + \eta\partial_\eta. \tag{3.37}$$

Для взаимных расширений (3.36) и (3.37) можно записать системы уравнений (3.33). Решая эти системы, легко устанавливаем, что двухточечный инвариант $f(x, y, \xi, \eta)$ эквивалентного расширения (3.36) тривиален:

$$f = const, \tag{3.38}$$

в то время как для неэквивалентного взаимного расширения (3.37) он не только не тривиален, но и не вырожден:

$$f = x - \xi - y\eta. \tag{3.39}$$

Ясно, что не только допустимая замена координат (3.14), но и никакая их другая замена, "перемешивающая" все четыре координаты x, y, ξ, η, не переведет двухточечные инварианты (3.38) и (3.39) друг в друга. А это означает, что эквивалентное и неэквивалентное взаимные расширения (3.36) и (3.37) слабо эквивалентных алгебр Ли с базисами (3.34), (3.35) слабо не эквивалентны как алгебры Ли преобразований четырехмерного пространства R^4.

Результаты настоящего параграфа опубликованы автором в работах [36], [54], [55].

§4. Четырехмерные алгебры Ли преобразований плоскости

В дополнение к результатам работы [33] проведем полную классификацию четырехмерных алгебр Ли преобразований плоскости с точностью до эквивалентности в каждом изоморфном классе. Сравнение этой классификации с соответствующей классификацией С.Ли [34], [35] еще более явно, чем в трехмерном случае, подтверждает существенность различия слабой эквивалентности и эквивалентности групп преобразований. Действительно, только две трехмерные алгебры в классификации С.Ли допускают уточнение в пределах эквивалентности, в то время как четырехмерных алгебр, допускающих такое уточнение, значительно больше. Кроме того, полная классификация четырехмерных алгебр Ли преобразований плоскости оказывается необходимой для анализа групповых свойств физической структуры ранга (3,3), то есть феноменологически симметричной геометрии двух множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, каждое из которых представляет собой двумерное многообразие (см. следующий §5). Степень групповой симметрии этой геометрии, согласно теореме 2 из §1, равна четырем.

Локальная четырехпараметрическая группа Ли локальных преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{M}$ задается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda(x, y; a^1, a^2, a^3, a^4), \\ y' &= \sigma(x, y; a^1, a^2, a^3, a^4), \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

причем $\lambda_x\sigma_y - \lambda_y\sigma_x \neq 0$. При специальном выборе параметров $a = (a^1, a^2, a^3, a^4)$, когда их нулевым значениям и только им соответствует тождественное преобразование, по конечным уравнениям (4.1) можно записать бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование, близкое к тождественному:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a^\omega\lambda_\omega(x, y), \\ y' &= y + a^\omega\sigma_\omega(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

где индекс ω принимает значения 1,2,3,4 и по нему происходит суммирование в этих пределах, а $\lambda_\omega(x, y) = \partial\lambda/\partial a^\omega|_{a=0}$ и $\sigma_\omega(x, y) = \partial\sigma/\partial a^\omega|_{a=0}$.

Инфинитезимальные операторы

$$X_\omega = \lambda_\omega(x, y)\partial_x + \sigma_\omega(x, y)\partial_y, \tag{4.3}$$

однозначно определяющие бесконечно малое преобразование (4.2), линейно независимы с постоянными коэффициентами и составляют базис четырехмерной алгебры Ли преобразований плоскости.

Существует полная классификация вещественных абстрактных четырехмерных алгебр Ли с точностью до изоморфизма (см., например, [37], стр. 72–74). Приведем ниже эту классификацию, записывая шесть коммутаторов $[X_1, X_2]$, $[X_3, X_1]$, $[X_2, X_3]$, $[X_1, X_4]$, $[X_2, X_4]$, $[X_3, X_4]$ в соответствующей последовательности:

$$0, \; 0, \; 0, \; \varepsilon X_1, \; kX_2, \; lX_3; \tag{4.4}$$

$$0, \; 0, \; 0, \; kX_1 + X_2, \; -X_1 + kX_2, \; lX_3; \tag{4.5}$$

$$0, \; 0, \; 0, \; kX_1 + X_2, \; kX_2, \; \varepsilon X_3; \tag{4.6}$$

$$0, \; 0, \; 0, \; kX_1 + X_2, \; kX_2 + X_3, \; \varepsilon X_3; \tag{4.7}$$

$$0, \; 0, \; X_1, \; cX_1, \; X_2, \; (c-1)X_3; \tag{4.8}$$

$$0, \; 0, \; X_1, \; 2X_1, \; X_2, \; X_2 + X_3; \tag{4.9}$$

$$0, \; 0, \; X_1, \; qX_1, \; X_3, \; -X_2 + qX_3; \tag{4.10}$$

$$0, \; -X_1, \; 0, \; 0, \; X_2, \; 0; \tag{4.11}$$

$$0, \; -X_1, \; X_2, \; X_2, \; -X_1, \; 0; \tag{4.12}$$

$$X_3, \; X_2, \; X_1, \; 0, \; 0, \; 0; \tag{4.13}$$

$$X_3, \; X_2, \; -X_1, \; 0, \; 0, \; 0, \tag{4.14}$$

где $\varepsilon = 0, 1$; $q^2 < 4$; k, l, c – произвольные постоянные.

В этой классификации для удобства по сравнению с источником [37] в алгебрах (4.11) и (4.14) осуществлен переход к другим базисам (в алгебре (4.11) была произведена перестановка операторов X_1 и X_2, а в алгебре (4.14) переход к новому базису был следующим: $(X_1+X_3)/2 \to X_1$, $X_2 \to X_2$, $(X_1-X_3)/2 \to X_3$, $X_4 \to X_4$). Заметим еще, что алгебра (4.7) для двух случаев: $\varepsilon = 0$, $k \neq 0$ и $\varepsilon = 1$, $k \neq 1$ изоморфна алгебре (4.6) с $\varepsilon = 0$, $k \neq 0$ и $\varepsilon = 1$, $k \neq 1$ соответственно. Изоморфизм устанавливается следующим преобразованием базиса алгебры (4.6): $X_1 + X_3/k^2 \to X_1$, $X_2 - X_3/k \to X_2$, $X_3 \to X_3$, $X_4 \to X_4$ – для случая $\varepsilon = 0$, $k \neq 0$ и $X_1 + X_3/(k-1)^2 \to X_1$, $X_2 - X_3/(k-1) \to X_2$, $X_3 \to X_3$, $X_4 \to X_4$ – для случая $\varepsilon = 1$, $k \neq 1$.

Согласно приведенной классификации (4.4)–(4.14) четырехмерных алгебр первые три оператора образуют базис трехмерной подалгебры.

Выпишем из классификационной теоремы работы [33] соответствующие выражения для базисных операторов X_1, X_2, X_3 трехмерной алгебры Ли преобразований плоскости с точностью до эквивалентности:

для алгебр (4.4), (4.5), (4.6), (4.7):

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ \lambda(y)\partial_x; \tag{4.15}$$

для алгебр (4.8), (4.9), (4.10):

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ -\partial_y; \tag{4.16}$$

$$\partial_x, \partial_y,\ y\partial_x + \delta\partial_y; \tag{4.17}$$

для алгебры (4.11):

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ x\partial_x + y\partial_y; \tag{4.18}$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_x + \delta\partial_y; \tag{4.19}$$

для алгебры (4.12):

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ x\partial_x; \tag{4.20}$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_x + y\partial_y; \tag{4.21}$$

для алгебры (4.13):

$$\partial_x,\ \mathrm{tg} y \sin x\partial_x + \cos x\partial_y,\ \mathrm{tg} y \cos x\partial_x - \sin x\partial_y; \tag{4.22}$$

для алгебры (4.14):

$$\partial_x,\ \sin x\partial_x,\ \cos x\partial_x; \tag{4.23}$$

$$\partial_x,\ \sin x\partial_x + \cos x\partial_y,\ \cos x\partial_x - \sin x\partial_y; \tag{4.24}$$

$$\partial_x,\ -\mathrm{th} y \sin x\partial_x + \cos x\partial_y,\ -\mathrm{th} y \cos x\partial_x - \sin x\partial_y; \tag{4.25}$$

$$\partial_x,\ -\mathrm{cth} y \sin x\partial_x + \cos x\partial_y,\ -\mathrm{cth} y \cos x\partial_x - \sin x\partial_y, \tag{4.26}$$

где $\lambda' \neq \mathrm{const}$, δ – произвольная постоянная.

Для того, чтобы провести полную с точностью до эквивалентности в каждом изоморфном классе классификацию четырехмерных алгебр Ли преобразований плоскости, необходимо общее выражение

$$X_4 = \lambda(x, y)\partial_x + \sigma(x, y)\partial_y \tag{4.27}$$

для оператора X_4 и выражения (4.15)–(4.26) для операторов X_1, X_2, X_3 подставить в последние три коммутатора $[X_1, X_4]$, $[X_2, X_4]$, $[X_3, X_4]$

каждой из четырехмерных алгебр (4.4)–(4.14). При этом получаются дифференциальные уравнения относительно функций λ и σ выражения (4.27), и могут также возникнуть дополнительные ограничения на операторы X_1, X_2, X_3. В частности, оказывается, не всякие три оператора из списка (4.15)–(4.26) составляют базис трехмерной подалгебры четырехмерной алгебры Ли преобразований плоскости с оператором (4.27). Кроме того, в отличие от трехмерного случая, рассмотренного в работе [33], некоторые из четырехмерных абстрактных алгебр (4.4)–(4.14) не могут быть представлены инфинитезимальными операторами преобразований плоскости.

Теорема. *Базисные операторы X_1, X_2, X_3, X_4 четырехмерной алгебры Ли локальной группы Ли локальных преобразований плоскости, имеющей в этом базисе структуру коммутационных соотношений (4.4)–(4.14), с точностью до эквивалентности и в надлежаще выбранной системе локальных координат (x, y) задаются следующими выражениями:*

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ \lambda(y)\partial_x,\ \varphi(y)\partial_x; \tag{4.4.1}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ hy^{l/k}\partial_x,\ -ky\partial_y; \tag{4.4.2}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ \lambda(y)\partial_x,\ x\partial_x; \tag{4.4.3}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ hy^{(1-l)/(1-k)}\partial_x,\ x\partial_x+(1-k)y\partial_y; \tag{4.4.4}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ h\sqrt{1+y^2}e^{(k-l)\operatorname{arctg} y}\partial_x,\ (k+y)x\partial_x+(1+y^2)\partial_y; \tag{4.5.1}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ hye^{-k/y}\partial_x,\ (k+y)x\partial_x+y^2\partial_y; \tag{4.6.1}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ hye^{(1-k)/y}\partial_x,\ (k+y)x\partial_x+y^2\partial_y; \tag{4.6.2}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ y^2/2\partial_x,\ xy\partial_x+y^2/2\partial_y; \tag{4.7.1}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ (1\pm\sqrt{1-hy^2})/h\partial_x,\ xy\partial_x-(1-hy^2\pm\sqrt{1-hy^2})/h\partial_y; \tag{4.7.2}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ y^2/2\partial_x,\ (1+y)x\partial_x+y^2/2\partial_y; \tag{4.7.3}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ (1\pm\sqrt{1-hy^2})/h\partial_x,\ (1+y)x\partial_x-(1-hy^2\pm\sqrt{1-hy^2})h\partial_y; \tag{4.7.4}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ -\partial_y,\ \delta\partial_x-y\partial_y; \tag{4.8.1}$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ y\partial_x,\ \delta\partial_x+y\partial_y; \tag{4.8.2}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ -\partial_y,\ x\partial_x; \tag{4.8.3}$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ y\partial_x,\ x\partial_x + y\partial_y; \tag{4.8.4}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ -\partial_y,\ 2x\partial_x + y\partial_y; \tag{4.8.5}$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ y\partial_x + \delta\partial_y,\ 2x\partial_x + y\partial_y; \tag{4.8.6}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ -\partial_y,\ cx\partial_x + (c-1)y\partial_y; \tag{4.8.7}$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ y\partial_x,\ cx\partial_x + y\partial_y; \tag{4.8.8}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ -\partial_y,\ (2x - y^2/2)\partial_x + y\partial_y; \tag{4.9.1}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ x\partial_x + y\partial_y,\ -y\partial_y; \tag{4.11.1}$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_x,\ y\partial_y; \tag{4.11.2}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ x\partial_x,\ xy\partial_x + (1+y^2)\partial_y; \tag{4.12.1}$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_x + y\partial_y,\ -y\partial_x + x\partial_y; \tag{4.12.2}$$

$$\partial_x,\ \sin x\partial_x,\ \cos x\partial_x, \partial_y; \tag{4.14.1}$$

$$\partial_x,\ \sin x\partial_x + \cos x\partial_y,\ \cos x\partial_x - \sin x\partial_y,\ h\partial_y, \tag{4.14.2}$$

где h, c, δ *– произвольные постоянные, причем* $h \neq 0$ *и* $c \neq 0, 1, 2$; $\lambda' \neq \mathrm{const}$, $\varphi' - a\lambda' \neq \mathrm{const}$.

В приведенной таблице операторы представляют следующие абстрактные алгебры Ли: (4.4.1) $\to$ (4.4) при $\varepsilon = k = l = 0$; (4.4.2) $\to$ (4.4) при $\varepsilon = 0, k \neq 0, l \neq 0, k \neq l$; (4.4.3) $\to$ (4.4) при $\varepsilon = k = l = 1$; (4.4.4) $\to$ (4.4) при $\varepsilon = 1, k \neq 1, l \neq 1, k \neq l$; (4.6.1) $\to$ (4.6) при $\varepsilon = 0, k \neq 0$; (4.6.2) $\to$ (4.6) при $\varepsilon = 1, k \neq 1$; (4.7.1) и (4.7.2) $\to$ (4.7) при $\varepsilon = k = 0$; (4.7.3) и (4.7.4) $\to$ (4.7) при $\varepsilon = k = 1$; (4.8.1) и (4.8.2) $\to$ (4.8) при $c = 0$; (4.8.3) и (4.8.4) $\to$ (4.8) при $c = 1$; (4.8.5) и (4.8.6) $\to$ (4.8) при $c = 2$; (4.8.7) и (4.8.8) $\to$ (4.8) при $c \neq 0, 1, 2$. Следующие абстрактные алгебры: (4.4) при $l \neq k = \varepsilon = 0$, $k \neq l = \varepsilon = 0$, $k = l \neq \varepsilon = 0$, $l \neq k = \varepsilon = 1$, $k \neq l = \varepsilon = 1$, $k = l \neq \varepsilon = 1$; (4.6) при $\varepsilon = k = 0$, $\varepsilon = k = 1$; (4.10) и (4.13) не могут быть представлены инфинитезимальными операторами преобразований плоскости. Кроме того, как было отмечено выше, абстрактные алгебры Ли (4.6), (4.7) изоморфны при $\varepsilon = 0$, $k \neq 0$ и $\varepsilon = 1$, $k \neq 1$, поэтому из табдицы теоремы выпущены представления алгебры (4.7) для этих значений постоянных ε и k.

Среди двадцати шести представлений следующие пары алгебр слабо эквивалентны но не эквивалентны: (4.7.1–2), (4.7.3–4), (4.8.1–2), (4.8.5–6), (4.8.7–8); (4.4.2), (4.4.4), (4.5.1), (4.6.1), (4.6.2), (4.7.2), (4.7.4), (4.14.2) – при различных значениях постоянной $h \neq 0$; (4.8.1), (4.8.2), (4.8.6) – при разных значениях постоянной δ. Пары алгебр (4.8.3–4), (4.11.1–2), (4.12.1–2), (4.14.1–2) изоморфны, но слабой эквивалентности между ними нет. Таким образом, уточнение в пределах эквивалентности допускают следующие одиннадцать четырехмерных алгебр Ли преобразований плоскости: (4.4.2), (4.4.4), (4.5.1), (4.6.1), (4.6.2), (4.14.2) при $h = 1$; (4.8.2), (4.8.6) при $\delta = 0$; (4.7.1), (4.7.3), (4.8.8).

Общая схема доказательства сформулированной выше теоремы достаточно проста. Подставляя выражения (4.15)–(4.26) для операторов X_1, X_2, X_3 и выражение (4.27) для оператора X_4 в коммутаторы $[X_1, X_4]$, $[X_2, X_4]$, $[X_3, X_4]$ четырехмерных алгебр (4.4)–(4.14), получаем систему шести дифференциальных уравнений для функций $\lambda(x, y)$ и $\sigma(x, y)$. Условие совместности уравнений этой системы и линейная независимость базисных операторов X_1, X_2, X_3, X_4 приводят к дополнительным ограничениям на выражения (4.15)–(4.26), на структурные константы коммутационных соотношений (4.4)–(4.14) и для некоторых из них вообще не могут выполняться. С учетом сделанного замечания, рассмотрим следующие пять характерных случаев из полного доказательства теоремы.

Подставим сначала выражения (4.15), (4.27) в коммутаторы $[X_1, X_4]$, $[X_2, X_4]$, $[X_3, X_4]$ алгебры (4.4) и в каждом из них сравним в правой и левой частях коэффициенты при линейно независимых операторах дифференцирования ∂_x и ∂_y. В результате получаем следующую систему шести дифференциальных уравнений относительно функций $\lambda(x, y)$ и $\sigma(x, y)$:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_x = \varepsilon, \ \sigma_x = 0, \ y\lambda_x - \sigma = ky, \\ y\sigma_x = 0, \ \lambda(y)\lambda_x - \lambda'(y)\sigma = l\lambda(y), \ \lambda(y)\sigma_x = 0. \end{array}\right\} \qquad (4.28)$$

Из первого уравнения системы (4.28) находим: $\lambda(x, y) = \varepsilon x + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – произвольная функция одной переменной. Из первого и третьего уравнений устанавливаем: $\sigma(x, y) = (\varepsilon - k)y$, при этом второе, четвертое и шестое уравнения дополнительных ограничений на функцию $\sigma(x, y)$ не налагают. Наконец, подставляя найденные для $\lambda(x, y)$ и $\sigma(x, y)$ выражения в пятое уравнение системы (4.28), получаем уравнение

$$(\varepsilon - k)y\lambda'(y) = (\varepsilon - l)\lambda(y), \qquad (4.29)$$

которому должна удовлетворять нелинейная функция $\lambda(y)$ в подалгебре (4.15). Из уравнения (4.29), поскольку $\lambda(y) \neq 0$ и $\lambda'(y) \neq 0$, следует, что при $\varepsilon = k$ $(\varepsilon \neq k)$ должно быть $\varepsilon = l$ $(\varepsilon \neq l)$ и обратно. Если $k = l \neq \varepsilon$, то уравнение (4.29) имеет только линейное решение, что в отношении функции $\lambda(y)$ не допускается. Таким образом, из всевозможных значений постоянных ε, k, l алгебры (4.4) в случае ее представления инфинитезимальными операторами преобразований плоскости уравнением (4.29) допускаются только следующие четыре варианта их значений: $\varepsilon = k = l = 0$; $\varepsilon = 0, k \neq 0, l \neq 0, k \neq l$; $\varepsilon = k = l = 1$; $\varepsilon = 1, k \neq 1, l \neq 1, k \neq l$. Остальные шесть вариантов: $l \neq k = \varepsilon = 0,\ k \neq l = \varepsilon = 0,\ k = l \neq \varepsilon = 0,\ l \neq k = \varepsilon = 1,\ k \neq l = \varepsilon = 1,\ k = l \neq \varepsilon = 1$ уравнением (4.29) не допускаются.

Заметим, что функция $\varphi(y)$ в выражении

$$X_4 = (\varepsilon x + \varphi(y))\partial_x + (\varepsilon - k)y\partial_y \tag{4.30}$$

для оператора X_4 в случае $\varepsilon^2 + k^2 \neq 0$ может быть исключена заменой координат $x + \psi(y) \to x,\ y \to y$, если $\varepsilon\psi(y) - (\varepsilon - k)y\psi'(y) = \varphi(y)$. То есть при $\varepsilon^2 + k^2 \neq 0$ в выражении (4.30) можно положить $\varphi = 0$.

Таким образом, окончательный результат будет следующим:

Если $\varepsilon = k = l = 0$, то уранение (4.29) обращается в тривиальное тождество $0 = 0$, а поскольку $\varepsilon^2 + k^2 = 0$, приходим к представлению (4.4.1) алгебры (4.4), в котором $\lambda' \neq \mathrm{const}$ и $\varphi' - a\lambda' \neq \mathrm{const}$, так как базисные операторы X_1, X_2, X_3, X_4 линейно независимы.

Если $\varepsilon = 0, k \neq 0, l \neq 0, k \neq l$, то уранение (4.29) имеет решение $\lambda(y) = hy^{l/k}$, причем, очевидно, $h \neq 0$. Поскольку $\varepsilon^2 + k^2 \neq 0$, функцию $\varphi(y)$ из выражения (4.30) можно исключить удобной заменой координат, о которой говорилось выше. В итоге получаем представление (4.4.2) алгебры (4.4).

Совершенно аналогично для третьего и четвертого случаев ($\varepsilon = k = l = 1$ и $\varepsilon = 1, k \neq 1, l \neq 1, k \neq l$) получаем представления (4.4.3) и (4.4.4) четырехмерной абстрактной алгебры Ли (4.4).

Подставим теперь выражения (4.17),(4.27) в последние три коммутатора алгебры (4.8):

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_x = c,\ \sigma_x = 0,\ \lambda_y = 0,\ \sigma_y = 1, \\ y\lambda_x + \delta\lambda_y - \sigma = (c-1)y, \\ y\sigma_x + \delta\sigma_y = (c-1)\delta. \end{array}\right\} \tag{4.31}$$

Из первого и третьего уравнений системы (4.31) находим: $\lambda(x, y) =$

$cx + d$, где d – произвольная постоянная. Из пятого уравнения по известной функции $\lambda(x, y)$ определяем: $\sigma(x, y) = y$. В результате получаем выражение

$$X_4 = (cx + d)\partial_x + y\partial_y \tag{4.32}$$

для оператора X_4. Постоянная δ в операторе X_3 трехмерной подалгебры (4.17) должна удовлетворять дополнительному условию: $(c-2)\delta = 0$, вытекающему из шестого уравнения системы (4.31) при $\sigma = y$. То есть постоянная δ действительно произвольна только в случае $c = 2$. Если же $c \neq 2$, то необходимо должно быть $\delta = 0$. Заметим еще, что в случае $c \neq 0$ постоянная d из выражения (4.32) может быть исключена заменой координат $x + d/c \to x,\ y \to y$, то есть при $c \neq 0$ можно положить $d = 0$. Если же $c = 0$, то постоянная d принимает любые значения и ее удобно переобозначить: $d = \delta$. В задаче определения представлений алгебры (4.8) инфинитезимальными операторами преобразований плоскости выделим следующие четыре случая: $c = 0,\ c = 1,\ c = 2$ и $c \neq 0, 1, 2$, которые дадут соответственно представления (4.8.2),(4.8.4),(4.8.6) и (4.8.8).

Представления (4.8.1),(4.8.3),(4.8.5) и (4.8.7) алгебры Ли (4.8) получаются для тех же четырех случаев $c = 0,\ c = 1,\ c = 2$ и $c \neq 0, 1, 2$, когда ее трехмерной подалгеброй будет алгебра Ли с базисои (4.16).

Подставим, далее, операторы (4.16) и (4.2.7) в последние три коммутатора соотношений (4.9). Операторы дифференцирования $\partial_x = \partial/\partial x$ и $\partial_y = \partial/\partial y$ линейно независимы в общем смысле. Сравнивая коэффициенты при них в правой и левой частях каждого коммутатора, получаем следующую систему шести дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_x = 2,\ \sigma_x = 0,\ y\lambda_x - \sigma = y, \\ y\sigma_x = 0,\ \lambda_y = -y,\ \sigma_y = 1. \end{array}\right\} \tag{4.33}$$

Из первого и третьего уравнений этой системы находим функцию σ, а из первого и пятого – функцию λ:

$$\lambda = 2x - y^2/2 + a,\ \sigma = y, \tag{4.34}$$

где a – произвольная постоянная, которая из выражения (4.27) может быть исключена заменой координат $x + a/2 \to x,\ y \to y$. Система (4.33) совместна, так как решение (4.34) удовлетворяет каждому ее уравнению. Для оператора X_4 по формуле (4.27) с коэффициентами

(4.34) после исключения постоянной a получаем следующее выражение: $X_4 = (2x - y^2/2)\partial_x + y\partial_y$, что вместе с операторами трехмерной подалгебры (4.16) и дает представление (4.9.1) алгебры Ли (4.9).

Если же в коммутаторы $[X_1, X_4]$, $[X_2, X_4]$, $[X_3, X_4]$ той же алгебры (4.9) подставить операторы (4.17) и (4.27), то относительно функций $\lambda(x, y)$ и $\sigma(x, y)$ получаем другую систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_x = 2,\ \sigma_x = 0,\ \lambda_y = 0,\ \sigma_y = 1, \\ y\lambda_x + \delta\lambda_y - \sigma = y,\ y\sigma_x + \delta\sigma_y = 1 + \delta, \end{array}\right\} \tag{4.35}$$

которая, в отличие от системы (4.33), явно несовместна. Действительно, подставляя в шестое уравнение этой системы $\sigma_x = 0$ и $\sigma_y = 1$ из второго и четвертого, приходим к противоречию: 0=1. То есть трехмерная алгебра (4.17) не может быть подалгеброй четырехмерной алгебры с коммутационными соотношениями (4.9). Таким образом, для четырехмерной алгебры (4.9) представление (4.9.1) является ее единственным представлением инфинитезимальными операторами преобразований плоскости.

Подставим еще операторы (4.22) и (4.27) в последние три коммутатора алгебры (4.13), полагая для сокращения записи $\nu(y) = \mathrm{tg} y$:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_x = 0,\ \sigma_x = 0, \\ \lambda_x\nu\sin x + \lambda_y\cos x - \lambda\nu\cos x - \sigma\nu'\sin x = 0, \\ \sigma_x\nu\sin x + \sigma_y\cos x + \lambda\sin x = 0, \\ \lambda_x\nu\cos x - \lambda_y\sin x + \lambda\nu\sin x - \sigma\nu'\cos x = 0, \\ \sigma_x\nu\cos x - \sigma_y\sin x + \lambda\cos x = 0. \end{array}\right\} \tag{4.36}$$

При $\sigma_x = 0$, согласно второму уравнению, четвертое и шестое уравнения относительно λ, σ_y образуют линейную однородную подсистему системы (4.36), которая, очевидно, имеет только нулевое решение: $\lambda = 0$, $\sigma_y = 0$. Но при $\lambda = 0$ из третьего уравнения системы (4.36) получается, что и $\sigma = 0$. Однако при $\lambda = 0$ и $\sigma = 0$ оператор X_4 по выражению (4.27) становится нулевым, что противоречит линейной независимости базисных операторов X_1, X_2, X_3, X_4. Установленное противоречие означает, что трехмерная алгебра (4.22) не может быть подалгеброй четырехмерной алгебры с коммутационными соотношениями (4.13). Таким образом, четырехмерная абстрактная алгебра Ли (4.13) не имеет ни одного представления инфинитезимальными операторами преобразований плоскости.

При подстановке операторов (4.25),(4.27) и (4.26),(4.27) в последние три коммутатора алгебры (4.14) получается та же система (4.36), в которой $\nu(y) = -\mathrm{th}y$ для операторов (4.25) и $\nu(y) = -\mathrm{cth}y$ для операторов (4.26). Поскольку из решений системы (4.36) следует противоречие: $X_4 = 0$, ни одна из двух трехмерных алгебр (4.25) и (4.26) не может быть подалгеброй четырехмерной алгебры с коммутационными соотношениями (4.14).

Все остальные случаи (из девятнадцати возможных) подстановки операторов (4.15)–(4.26) и (4.27) в коммутаторы $[X_1, X_4]$, $[X_2, X_4]$, $[X_3, X_4]$ алгебр (4.4)–(4.14) исследуются аналогично и при этом никаких принципиальных трудностей не возникает. Поэтому автор считает разумным в доказательстве теоремы ограничиться пятью рассмотренными случаями решения систем уранений (4.28), (4.31), (4.33), (4.35), (4.36).

Если в алгебрах (4.7.1) и (4.7.3) произвести линейное преобразование базиса:

$$X_1 + hX_3/2 \to X_1,\ X_2 \to X_2,\ X_3 \to X_3,\ X_4 \to X_4$$

и следующую замену координат:

$$x/(1 + hy^2/4) \to x,\ y/(1 + hy^2/4) \to y,$$

то получим базисные операторы (4.7.2) и (4.7.4) соответственно. То есть четырехмерные алгебры Ли (4.7.1) и (4.7.2), а также (4.7.3) и (4.7.4) слабо эквивалентны в смысле леммы 3 из §3. Слабая эквивалентность алгебр Ли с базисами (4.8.1) и (4.8.2), (4.8.5) и (4.8.6), (4.8.7) и (4.8.8), а также алгебр Ли с базисами (4.4.2), (4.4.4), (4.5.1), (4.6.1), (4.6.2), (4.7.2), (4.7.4), (4.14.2) при различных значениях постоянной $h \neq 0$ и алгебр Ли (4.8.1), (4.8.2), (4.8.6) при различных значениях постоянной δ – очевидна.

Учитывая только что сказанное, заключаем, что полная с точностью до слабой эквивалентности в каждом изоморфном классе, то есть с точностью до подобия, классификация четырехмерных алгебр Ли преобразований плоскости будет содержать следующие двадцать одну алгебру из классификационной таблицы теоремы настоящего параграфа: (4.4.2), (4.4.4), (4.5.1), (4.6.1), (4.6.2), (4.14.2) при $h = 1$; (4.8.2),(4.8.6) при $\delta = 0$; (4.4.1), (4.4.3), (4.7.1), (4.7.3), (4.8.3), (4.8.4), (4.8.8), (4.9.1), (4.11.1), (4.11.2), (4.12.1), (4.12.2), (4.14.1).

Напомним, что Софус Ли проводил свою классификацию с точностью до подобия, то есть с точностью до слабой эквивалентности в каждом изоморфном классе. Поэтому сопоставление результатов данного параграфа и соответствующих результатов Софуса Ли необходимо делать с указанной точностью.

Выпишем сначала из полного списка конечномерных алгебр Ли преобразований плоскости, составленного С.Ли в 1893 году (см. монографии [34] и [35]), базисные операторы Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 всех четырехмерных алгебр:

$$\mathbf{33}.\ \partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_y - y\partial_x,\ x\partial_x + y\partial_y;$$

$$\mathbf{7}.\ y\partial_y,\ \partial_x,\ x\partial_x,\ x^2\partial_x + xy\partial_y;$$

$$\mathbf{9}.\ \partial_y,\ x\partial_y,\ \partial_x,\ x\partial_x + cy\partial_y,\ c \neq 1;$$

$$\mathbf{10}.\ \partial_y,\ x\partial_y,\ \partial_x,\ x\partial_x + (2y + x^2)\partial_y;$$

$$\mathbf{11'_1}.\ \exp\alpha x\cos\beta x\partial_y,\ y\partial_y,\ \exp\alpha x\sin\beta x\partial_y,\ \partial_x;$$

$$\mathbf{11'_2}.\ \exp\alpha x\partial_y,\ y\partial_y,\ x\exp\alpha x\partial_y,\ \partial_x;$$

$$\mathbf{11'_3}.\ \exp\alpha_1 x\partial_y,\ y\partial_y,\ \exp\alpha_2 x\partial_y,\ \partial_x;$$

$$\mathbf{12}.\ \partial_y,\ x\partial_y,\ F(x)\partial_y,\ y\partial_y;$$

$$\mathbf{15}.\ \partial_y,\ x\partial_y,\ \partial_x,\ x\partial_x + y\partial_y;$$

$$\mathbf{17'_1}.\ \partial_y,\ x\partial_y,\ x^2\partial_y,\ \partial_x;$$

$$\mathbf{17'_2}.\ \exp\alpha x\partial_y,\ x\exp\alpha x\partial_y,\ x^2\exp\alpha x\partial_y,\ \partial_x,\ \alpha \neq 0;$$

$$\mathbf{17'_3}.\ \exp\alpha_1 x\partial_y,\ \partial_x,\ \exp\alpha_2 x\cos\beta x\partial_y,\ \exp\alpha_2 x\sin\beta x\partial_y;$$

$$\mathbf{17'_4}.\ \exp\alpha_1 x\partial_y,\ x\exp\alpha_1 x\partial_y,\ \partial_x,\ \partial_y;$$

$$\mathbf{17'_5}.\ \exp\alpha_1 x\partial_y,\ x\exp\alpha_1 x\partial_y,\ \partial_x,\ \exp\alpha_2 x\partial_y,\ \alpha_2 \neq 0;$$

$$\mathbf{17'_6}.\ \partial_y,\ \exp\alpha_2 x\partial_y,\ \exp\alpha_3 x\partial_y,\ \partial_x;$$

$$\mathbf{17'_7}.\ \exp\alpha_1 x\partial_y,\ \exp\alpha_2 x\partial_y,\ \exp\alpha_3 x\partial_y,\ \partial_x,\ \alpha_1 \neq 0;$$

$$\mathbf{18}.\ \partial_y,\ x\partial_y,\ F_1(x)\partial_y,\ F_2(x)\partial_y;$$

$$\mathbf{22}.\ \partial_y,\ y\partial_y,\ y^2\partial_y,\ \partial_x;$$

$$\mathbf{24}.\ \partial_y,\ y\partial_y,\ \partial_x,\ x\partial_x,$$

где слева указан номер по классификации С.Ли (см. [35], стр. 25–27).

Результаты настоящего параграфа, изложенные в теореме, сопоставим в пределах подобия (слабой эквивалентности в каждом изоморфном классе) с приведенной выше классификацией С.Ли. Для каждой четырехмерной алгебры Ли из этой классификации укажем такое линейное преобразование ее базиса Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 и такую замену координат $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, при которых получаются базисные операторы X_1, X_2, X_3, X_4 из списка теоремы, естественно, после возвращения к прежним обозначениям координат: $\xi \to x$, $\eta \to y$.

Четырехмерные алгебры Ли преобразований плоскости из классификации С.Ли подобны следующим алгебрам из списка классификационной теоремы настоящего параграфа:

алгебра **33.** – алгебре (4.12.2):

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = Y_1,\ X_2 = Y_2,\ X_3 = Y_4,\ X_4 = Y_3, \\ \xi = x,\ \eta = y; \end{array}\right\}$$

алгебра **7.** – алгебре (4.14.2) с $h = 1$:

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = (Y_2 + Y_4)/2,\ X_2 = (2Y_3 + Y_1)/2, \\ X_3 = (Y_2 - Y_4)/2,\ X_4 = Y_1/2, \\ \xi = \mathrm{arctg}(2x/(1 - x^2)),\ \eta = \ln(y^2/(1 + x^2)); \end{array}\right\}$$

алгебра **9.** – алгебре (4.8.2) с $\delta = 0$ при $c = 0$, алгебре (4.8.6) с $\delta = 0$ при $c = 2$ и алгебре (4.8.8) при $c \neq 0, 1, 2$:

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = Y_1,\ X_2 = Y_3,\ X_3 = Y_2,\ X_4 = Y_4, \\ \xi = y,\ \eta = x; \end{array}\right\}$$

алгебра **10.** – алгебре (4.9.1):

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = -8Y_1,\ X_2 = -4Y_2,\ X_3 = -2Y_3,\ X_4 = Y_4, \\ \xi = -y/8,\ \eta = x/2; \end{array}\right\}$$

алгебра $\mathbf{11'_1}$. – алгебре (4.12.1):

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = Y_3,\ X_2 = Y_1,\ X_3 = Y_2,\ X_4 = -(Y_4 + \alpha Y_2)/\beta, \\ \xi = y \exp(-\alpha x)/\sin\beta x,\ \eta = \mathrm{ctg}\beta x; \end{array}\right\}$$

алгебра $\mathbf{11'_2}$. – алгебре (4.8.3):

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = Y_1,\ X_2 = Y_2,\ X_3 = -\alpha Y_3 - Y_4,\ X_4 = Y_3, \\ \xi = y \exp(-\alpha x),\ \eta = x; \end{array}\right\}$$

алгебра $\mathbf{11'_3}$. – алгебре (4.11.1):

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = Y_1,\ X_2 = Y_3,\ X_3 = (\alpha_2 Y_2 + Y_4)/(\alpha_2 - \alpha_1), \\ X_4 = -(\alpha_1 Y_2 + Y_4)/(\alpha_2 - \alpha_1), \\ \xi = y \exp(-\alpha_1 x),\ \eta = \exp(\alpha_2 - \alpha_1)x; \end{array}\right\}$$

алгебра $\mathbf{12}$. – алгебре (4.4.3):

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = Y_1,\ X_2 = Y_2,\ X_3 = Y_3,\ X_4 = Y_4, \\ \xi = y,\ \eta = x; \end{array}\right\}$$

алгебра $\mathbf{15}$. – алгебре (4.8.4):

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = Y_1,\ X_2 = Y_3,\ X_3 = Y_2,\ X_4 = Y_4, \\ \xi = y,\ \eta = x; \end{array}\right\}$$

алгебра $\mathbf{17'_1}$. – алгебре (4.7.1):

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = Y_3/2,\ X_2 = -Y_2,\ X_3 = Y_1,\ X_4 = Y_4, \\ \xi = 2y/x^2,\ \eta = -2/x; \end{array}\right\}$$

алгебра $\mathbf{17'_2}$. – алгебре (4.7.3):

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = \alpha Y_3/2,\ X_2 = Y_2,\ X_3 = Y_1/\alpha,\ X_4 = -Y_4/\alpha, \\ \xi = 2y \exp(-\alpha x)/\alpha x^2,\ \eta = 2/\alpha x; \end{array}\right\}$$

алгебра $\mathbf{17'_3}$. – алгебре (4.5.1) с $h = 1$:

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = Y_3,\ X_2 = Y_4,\ X_3 = Y_1,\ X_4 = Y_2/\beta, \\ \xi = y \exp(-\alpha_2 x)/\cos\beta x,\ \eta = \mathrm{tg}\beta x; \end{array}\right\}$$

алгебра $\mathbf{17'_4}$. – алгебре (4.6.1) с $h = 1$:

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = Y_2,\ X_2 = Y_1,\ X_3 = Y_4,\ X_4 = -Y_3, \\ \xi = y \exp(-\alpha_1 x)/x,\ \eta = 1/x; \end{array}\right\}$$

алгебра $\mathbf{17'_5}$. – алгебре (4.6.2) с $h = 1$:

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = \alpha_2 Y_2,\ X_2 = Y_1,\ X_3 = Y_4,\ X_4 = -Y_3/\alpha_2, \\ \xi = y \exp(-\alpha_1 x)/\alpha_2 x,\ \eta = 1/\alpha_2 x; \end{array}\right\}$$

алгебра $\mathbf{17'_6}$. – алгебре (4.4.2) с $h = 1$:

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = Y_1,\ X_2 = Y_2,\ X_3 = Y_3,\ X_4 = -Y_4, \\ \xi = y,\ \eta = \exp\alpha_2 x; \end{array}\right\}$$

алгебра $\mathbf{17'_7}$. – алгебре (4.4.4) с $h=1$:

$$\left.\begin{array}{c} X_1=Y_1,\ X_2=Y_2,\ X_3=Y_3,\ X_4=-Y_4/\alpha_1, \\ \xi=y\exp(-\alpha_1 x),\ \eta=\exp(\alpha_2-\alpha_1)x; \end{array}\right\}$$

алгебра **18.** – алгебре (4.4.1):

$$\left.\begin{array}{c} X_!=Y_1,\ X_2=Y_2,\ X_3=Y_3,\ X_4=Y_4, \\ \xi=y,\ \eta=x; \end{array}\right\}$$

алгебра **22.** – алгебре (4.14.1):

$$\left.\begin{array}{c} X_1=(Y_1+Y_3)/2,\ X_2=Y_2,\ X_3=(Y_1-Y_3)/2,\ X_4=Y_4, \\ \xi=2\mathrm{arctg}y,\ \eta=x; \end{array}\right\}$$

алгебра **24.** – алгебре (4.11.2):

$$\left.\begin{array}{c} X_1=Y_3,\ X_2=Y_1,\ X_3=Y_4,\ X_4=Y_2, \\ \xi=x,\ \eta=y. \end{array}\right\}$$

Проведенное сопоставление показывает, что в пределах подобия (слабой эквивалентности в каждом изоморфном классе) имеется взаимно - однозначное соответствие между множеством всех четырехмерных алгебр Ли преобразований плоскости по классификации С.Ли [34],[35] и множеством четырехмерных алгебр по классификационной теореме данного параграфа. Таким же был результата сопоставления и для трехмерных алгебр Ли преобразований плоскости. Однако, если только две трехмерные алгебры Ли из классификации С.Ли допускали уточнение в пределах эквивалентности, то в случае четырехмерных алгебр их будет значительно больше. По таблице С.Ли, приведенной выше, это будут следующие четырехмерные алгебры: **7.**; **9.** с $c=0$; **9.** с $c=2$; **9.** с $c\neq 0,1,2$; $\mathbf{17'_1}$.; $\mathbf{17'_2}$.; $\mathbf{17'_3}$.; $\mathbf{17'_4}$.; $\mathbf{17'_5}$.; $\mathbf{17'_6}$.; $\mathbf{17'_7}$..

Таким образом, результаты настоящего параграфа, так же как и результаты работы [33], дополняют соответствующую классификацию С.Ли с точностью до эквивалентности в смысле определения 4 из §3, то есть с точностью до подобия в более узком, чем у С.Ли, смысле, когда в каждом изоморфном классе допускается только замена координат на плоскости без замены параметров в действующей на ней группе. Необходимость такого уточнения подтверждается вычислением двухточечных инвариантов (см. конец следующего §5).

Например, алгебры (4.14.2) с разными значениями постоянной h все подобны алгебре 7., поэтому С.Ли их не различает. Но эта постоянная в базисе (4.14.2) не исключается никакой заменой координат. То есть соответствующие алгебры при различных значениях h все неэквивалентны друг другу, уточняют алгебру 7. в пределах эквивалентности. Оказывается, что без такого уточнения не может быть получена как двухточечный инвариант в смысле определения 6 из §3 метрическая функция (5.3) из §5, которая является одной из двух возможных метрических функций, задающих на двумерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ феноменологически симметричные геометрии ранга (3,3).

Отметим, что результаты данного параграфа составляют содержание §1 работы [38].

§5. Групповая симметрия однометрической физической структуры ранга (3,3)

Однометрическая физическая структура ранга (3,3) кратко может быть определена следующим образом (см. также начало §2). Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ есть двумерные многообразия с локальными координатами x, y и ξ, η соответственно. Пусть, далее, имеется функция f с открытой и плотной в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ областью определения $\mathfrak{S}_f$, сопоставляющая каждой паре из $\mathfrak{S}_f$ некоторое число. Функцию f назовем *1-метрикой*, или просто метрикой, и будем предполагать, что ее координатное представление

$$f = f(x, y, \xi, \eta) \tag{5.1}$$

есть достаточно гладкая функция, в которую координаты x, y и ξ, η входят существенным образом.

Построим функцию F с естественной в $\mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^3$ областью определения $\mathfrak{S}_F$, сопоставляя каждому шеститочечному кортежу из $\mathfrak{S}_F$ девять возможных по метрике f расстояний. Будем говорить, что функция f задает на двумерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *однометрическую физическую структуру* (феноменологически симметричную геометрию) ранга (3,3), если локально множество значений $F(\mathfrak{S}_F)$ является подмножеством множества нулей некоторой гладкой функции Φ от девяти переменных с $\mathrm{grad}\Phi \neq 0$ на плотном в $\mathfrak{S}_F$ подмножестве.

В работе [25] автором установлено, что существуют всего два типа однометрических физических структур ранга (3,3). Метрическая функция (5.1) с точностью до замены координат и масштабного преобразования $\psi(f) \to f$ задается следующими двумя каноническими выражениями:

$$f = x\xi + y + \eta \tag{5.2}$$

для первого типа и

$$f = x\xi + y\eta \tag{5.3}$$

для второго.

Функциональная связь $\Phi = 0$ между девятью расстояниями для точек кортежа $< ijk, \alpha\beta\gamma > \in \mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^3$, выражающая феноменологическую симметрию физической структуры ранга (3,3), легко находится:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\gamma) \\ 1 & f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\gamma) \\ 1 & f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\gamma) \end{vmatrix} = 0$$

для метрики (5.2) и

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\gamma) \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\gamma) \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\gamma) \end{vmatrix} = 0$$

для метрики (5.3), где, например, $f(i\alpha) = f(x(i), y(i), \xi(\alpha), \eta(\alpha))$.

Под движением в рассматриваемом случае следует понимать такую пару достаточно гладких локальных преобразований двумерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$:

$$\left.\begin{aligned} x' = \lambda(x, y),\ \ y' = \sigma(x, y), \\ \xi' = \tau(\xi, \eta),\ \ \eta' = \rho(\xi, \eta), \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

при которых метрика (5.1) сохраняется:

$$f(x', y', \xi', \eta') = f(x, y, \xi, \eta). \tag{5.5}$$

Множество всех движений (5.4) составляет локальную группу, для которой метрика f согласно уравнению (5.5) является инвариантом. Преобразования многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ в движениях (5.4) сами составляют две изоморфные группы, причем группа движений есть их взаимное расширение в смысле определения 5 из §3, а метрика (5.1) есть их двухточечный инвариант в соответствии с определением 6 из §3.

Заметим, что взаимное расширение групп преобразований многообразий может быть и неэквивалентным, когда эти преобразования не переходят друг в друга ни при какой замене координат $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, то есть ни при каком диффеоморфизме $\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$.

Число независимых и существенных параметров множества движений (5.4) согласно теореме 2 из §1 равно четырем. Нестрого это число можно установить также из следующих простых соображений. Рассмотрим некоторую шеститочечную фигуру из $\mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^3$ и пусть она движется как твердое тело. Поскольку множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ являются двумерными многообразиями, для определения положения фигуры надо задать двенадцать координат шести ее точек. При движении этой фигуры должны сохраняться все девять ($9 = 3 \times 3$) расстояний, из которых вследствие феноменологической симметрии, то есть связи $\Phi = 0$ с $\mathrm{grad}\Phi \neq 0$, только восемь независимых. Число степеней свободы есть разность между числом независимых координат (=12) и числом независимых связей на них (=8), возникающих при сохранении восьми расстояний, и равно, следовательно, четырем. Ясно, что эти простые соображения нельзя рассматривать как доказательство.

В настоящем параграфе на примере однометрической физической структуры ранга (3,3) более детально, чем в §2, изучается групповая симметрия геометрии двух множеств. Для этого используется полная классификация четырехмерных алгебр Ли преобразований плоскости, полученная в предыдущем §4 с точностью до эквивалентности в каждом изоморфном классе. Рассматривая 1-метрику как двухточечный инвариант, автор показывает, что выражения (5.2) и (5.3) являются единственно возможными. Поскольку эти выражения возникают только при неэквивалентном взаимном расширении, уточнение в пределах эквивалентности классификации С.Ли, осуществленное в предыдущем §4, оказываеся необходимым.

Итак, полная локальная группа локальных движений метрической функции (5.1) зависит существенным образом от четырех параметров:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda(x, y; a^1, a^2, a^3, a^4), \\ y' &= \sigma(x, y; a^1, a^2, a^3, a^4), \\ \xi' &= \tau(\xi, \eta; a^1, a^2, a^3, a^4), \\ \eta' &= \rho(\xi, \eta; a^1, a^2, a^3, a^4). \end{aligned}\right\} \tag{5.4'}$$

Инфинитезимальные операторы этой группы:

$$Z_\omega = \lambda_\omega(x, y)\partial_x + \sigma_\omega(x, y)\partial_y + \tau_\omega(\xi, \eta)\partial_\xi + \rho_\omega(\xi, \eta)\partial_\eta, \tag{5.6}$$

где $\omega = 1, 2, 3, 4$, линейно независимы с постоянными коэффициентами c^ω и образуют базис четырехмерной алгебры Ли. Базисные операторы (5.6) естественно разлагаются в сумму операторов (4.3) из §4, однозначно задающих бесконечно малое преобразование многообразия $\mathfrak{M}$ в движении (5.4′), и операторов

$$\Xi_\omega = \tau_\omega(\xi, \tau)\partial_\xi + \rho_\omega(\xi, \eta)\partial_\eta, \qquad (5.7)$$

задающих бесконечно малое преобразование многообразия $\mathfrak{N}$ в том же движении:

$$Z_\omega = X_\omega + \Xi_\omega. \qquad (5.6')$$

Алгебра Ли с базисом (5.6) представляет собой взаимное расширение (в смысле определения 5′ из §3) алгебр Ли с базисами (4.3) и (5.7).

Согласно инфинитезимальному критерию инвариантности (см. например, [13], стр. 77), метрическая функция (5.1) будет инвариантом группы (5.4′) в том и только в том случае, если она удовлетворяет системе четырех дифференциальных уравнений $Z_\omega f = 0$ с операторами (5.6):

$$\lambda_\omega(x, y)f_x + \sigma_\omega(x, y)f_y + \tau_\omega(\xi, \eta)f_\xi + \rho_\omega(\xi, \eta)f_\eta = 0. \qquad (5.8)$$

Относительно же производных $f_x = \partial f/\partial x$, $f_y = \partial f/\partial y$, $f_\xi = \partial f/\partial \xi$, $f_\eta = \partial f/\partial \eta$ эти уравнения образуют однородную систему линейных алгебраических уравнений. Для того, чтобы система (5.8) имела ненулевое решение и, следовательно, метрика (5.1) не была тривиальной, то есть $f \neq \mathrm{const}$, необходимо и достаточно, чтобы определитель ее матрицы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \sigma_1 & \tau_1 & \rho_1 \\ \lambda_2 & \sigma_2 & \tau_2 & \rho_2 \\ \lambda_3 & \sigma_3 & \tau_3 & \rho_3 \\ \lambda_4 & \sigma_4 & \tau_4 & \rho_4 \end{vmatrix} = \Delta = 0. \qquad (5.9)$$

Операторы X_ω и Ξ_ω, задаваемые выражениями (4.3) из §4 и (5.7), образуют базисы изоморфных четырехмерных алгебр Ли. Действительно, по теореме 2 из §1 алгебры Ли с базисными операторами X_ω и Ξ_ω, где $\omega = 1, 2, 3, 4$, четырехмерны. С другой стороны, вследствие разложения (5.6′) и взаимного коммутирования этих операторов, зависящих от разных координат, коммутационные соотношения для них совпадают с коммутационными соотношениями для операторов Z_ω.

Будучи изоморфными, имея одинаковые структурные константы, алгебры с базисными операторами (4.3) из §4 и (5.7) не обязательно эквивалентны. Ясно, что выражения для операторов Ξ_ω получаются из соответствующих выражений классификационной теоремы предыдущего §4 простым переобозначением координат: $x \to \xi$, $y \to \eta$. При использовании этих выражений для построения системы уравнений (5.8) не следует забывать о возможности неэквивалентности алгебр с базисными операторами X_ω и Ξ_ω. В частности, у них могут не совпадать постоянные h и δ, так как, не входя в коммутаторы (4.4) – (4.14) из §4, эти постоянные при варьировании не нарушают изомофизма алгебр.

Теорема. *Для четырехпараметрических групп преобразований* $(5.4')$ *четырехмерных многообразий* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *существуют два и только два типа невырожденных двухточечных инвариантов, которые в надлежаще выбранных системах локальных координат* (x, y) *и* (ξ, η) *и с точностью до масштабных преобразований* $\psi(f) \to f$ *задаются каноническими выражениями* (5.2) *и* (5.3).

Рассмотрим всевозможные пары изоморфных четырехмерных алгебр Ли с базисными операторами X_ω и Ξ_ω, задающих локальную группу локальных движений $(5.4')$, при которых сохраняется метрическая функция (5.1), удовлетворяющая системе уравнений (5.8). Таких пар в соответствии с классификационной теоремой из §4 будет тридцать пять: 1. (4.4.1) + (4.4.1), 2. (4.4.2) + (4.4.2), 3. (4.4.3) + (4.4.3), 4. (4.4.4) + (4.4.4), 5. (4.5.1) + (4.5.1), 6. (4.6.1) + (4.6.1), 7. (4.6.2) + (4.6.2), 8. (4.7.1) + (4.7.1), 9. (4.7.1) + (4.7.2), 10. (4.7.2) + (4.7.2), 11. (4.7.3) + (4.7.3), 12. (4.7.3) + (4.7.4), 13. (4.7.4) + (4.7.4), 14. (4.8.1) + (4.8.1), 15. (4.8.1) + (4.8.2), 16. (4.8.2) + (4.8.2), 17. (4.8.3) + (4.8.3), 18. (4.8.3) + (4.8.4), 19. (4.8.4) + (4.8.4), 20. (4.8.5) + (4.8.5), 21. (4.8.5) + (4.8.6), 22. (4.8.6) + (4.8.6), 23. (4.8.7) + (4.8.7), 24. (4.8.7) + (4.8.8), 25. (4.8.8) + (4.8.8), 26. (4.9.1) + (4.9.1), 27. (4.11.1) + (4.11.1), 28. (4.11.1) + (4.11.2), 29. (4.11.2) + (4.11.2), 30. (4.12.1) + (4.12.1), 31. (4.12.1) + (4.12.2), 32. (4.12.2) + (4.12.2), 33. (4.14.1) + (4.14.1), 34. (4.14.1) + (4.14.2), 35. (4.14.2) + (4.14.2).

Непосредственным вычислением можно убедиться в том, что определитель (5.9) матрицы системы (5.8) для следующих восьми пар базисных операторов X_ω и Ξ_ω отличен от нуля: 18. $\Delta = x - \xi - y\eta$;

21. $\Delta = 2(x-\xi-y\eta)-\delta y$; 22. $\Delta = (y-\eta)^2+2(\delta_2-\delta_1)(x-\xi)$; 24. $\Delta = c(x-\xi-y\eta)$; 28. $\Delta = -y(x-\xi-y\eta)$; 31. $\Delta = (1+y^2)(x-\xi-y\eta)$; 32. $\Delta = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2$; 34. $\Delta = \cos(x-\xi)-1$. Поскольку во всех перечисленных выше восьми случаях $\Delta \neq 0$, система (5.8) относительно производных f_x, f_y, f_ξ, f_η имеет только нулевое решение, то есть метрика (5.1) для них тривиальна: $f(x,y,\xi,\eta) \equiv \mathrm{const}$. Для двадцати пяти пар, а именно: 1. – 14., 16., 17., 19., 20., 23., 25., 26., 27., 29., 30., 33. в системе (5.8) найдется такая подсистема двух уравнений, которая относительно производных f_x и f_ξ имеет только нулевое решение, и потому метрическая функция (5.1) оказывается вырожденной, так как в ней координаты x и ξ отсутствуют: $f(x,y,\xi,\eta) = \varphi(y,\eta)$.

Таким образом, из тридцати пяти пар базисных операторов X_ω и Ξ_ω невырожденная 1-метрика (5.1) как решение системы уравнений (5.8) может получиться только для двух пар: 15. (4.8.1)+(4.8.2) и 35. (4.14.2)+(4.14.2). Рассмотрим сначала первую из них. Локальное движение (5.4$'$) в этом случае состоит из преобразований множества $\mathfrak{M}$, задаваемого алгеброй (4.8.1), и изоморфного, но не эквивалентного ему преобразования множества $\mathfrak{N}$ задаваемого алгеброй (4.8.2). Для того, чтобы система (5.8) относительно производных f_x, f_y, f_ξ, f_η имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель (5.9) ее матрицы обращался в нуль. Раскрывая его, приходим к уравнению $\Delta = \delta_1 - \delta_2 = 0$, откуда получаем $\delta_1 = \delta_2$. В системе (5.8) при $\Delta = 0$ независимыми будут только три уравнения:

$$f_x + f_\xi = 0,\ y f_x + f_\eta = 0,\ -f_y + \eta f_\xi = 0, \tag{5.10}$$

Решение первого уравнения системы (5.10) задается выражением

$$f = \theta(x-\xi, y, \eta), \tag{5.11}$$

где $\theta(u,v,w)$ – произвольная функция трех переменных. Подставим его в остальные два уравнения: $v\theta_u + \theta_w = 0$, $w\theta_u + \theta_v = 0$, откуда легко получаем новое уравнение $v\theta_v - w\theta_w = 0$ с очевидным решением

$$\theta(u,v,w) = \chi(u, vw), \tag{5.12}$$

где $\chi(s,t)$ – произвольная функция уже двух переменных. Подставляя последний результат в уравнение $v\theta_u + \theta_w = 0$, получаем: $\chi_s + \chi_t = 0$, откуда:

$$\chi(s,t) = \psi(t-s), \tag{5.13}$$

где ψ – произвольная функция только одной переменной.

Подставим решение (5.13) в функцию (5.12), которую, в свою очередь, подставим в выражение (5.11). Для невырожденной метрической функции f, удовлетворяющей системе уравнений (5.10), приходим окончательно к следующему выражению:

$$f = \psi(y\eta - x + \xi). \tag{5.14}$$

Результат (5.14) масштабным пребразованием $\psi(f) \to f$ и очевидной заменой координат $x \to -y$, $y \to x$, $\xi \to \eta$, $\eta \to \xi$ приводится к канонической форме (5.2) – одной из двух возможных.

Рассмотрим теперь второй случай, когда локальное движение (5.4′) состоит из изоморфных преобразований множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, задаваемых алгеброй (4.14.2) из §4 с различными, вообще говоря, значениями постоянной h. Из условия обращения в нуль определителя (5.9) получаем: $\Delta = (h_1+h_2)(\cos(x-\xi)-1) = 0$, откуда следует: $h_2 = -h_1$, то есть как и в первом случае, преобразование двумерных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ в группе движений (5.4′) неэквивалентны. При условии $\Delta = 0$ одно из уравнений системы (5.8) является следствием трех других. Удобно в этой системе для алгебры (4.14.2) из §4 при $h_2 = -h_1$ оставить первое, четвертое и второе уравнения:

$$\left.\begin{array}{c} f_x + f_\xi = 0,\ f_y - f_\eta = 0, \\ \sin x\ f_x + \cos x\ f_y + sin\xi\ f_\xi + cos\xi\ f_\eta = 0. \end{array}\right\} \tag{5.15}$$

Из первого и второго уравнений системы (5.15), применяя метод характеристик, находим:

$$f = \chi(x - \xi,\ y + \eta), \tag{5.16}$$

где $\chi(s,t)$ – произвольная функция двух переменных. Подставим решение (5.16) в третье уравнение системы (5.15), воспользовавшись известными формулами для разности синусов и суммы косинусов:

$$\sin(s/2)\chi_s + \cos(s/2)\chi_t = 0.$$

Это последнее уравнение также решаем методом характеристик:

$$\chi(s,t) = \psi(\exp(-t/2)\sin(s/2)), \tag{5.17}$$

где ψ – произвольная функция только одной переменной.

Подставим выражение (5.17) для функции $\chi(s,t)$ в решение (5.16) первых двух уравнений системы (5.15). В результате получаем невырожденную метрическую функцию

$$f = \psi(\exp(-\frac{y+\eta}{2})\sin\frac{x-\xi}{2}), \qquad (5.18)$$

которая масштабным преобразованием $\psi(f) \to f$ и следующей заменой координат: $\exp(-y/2)\sin(x/2) \to x$, $\exp(-y/2)\cos(x/2) \to -y$, $\exp(-\eta/2)\cos(\xi/2) \to \xi$, $\exp(-\eta/2) sin(\xi/2) \to \eta$ приводится ко второй канонической форме (5.3). Теорема полностью доказана.

Заметим, что результаты только что доказанной теоремы на частном примере подтверждают установленную в §1 эквивалентность феноменологической и групповой симметрий в геометрии двух множеств. Можно надеяться, что эта эквивалентность, имеющая место также и в геометрии одного множества [39], позволит методами теории физических структур решить такие задачи в теории групп преобразований, которые обычно в ней не рассматривались из-за отсутствия классификации групп преобразований, причем не только с точностью до эквивалентности, но и с точностью до подобия. Одной из таких задач является вычисление всех невырожденных двухточечных инвариантов, то есть полная классификация феноменологически инвариантных метрик, имеющих содержательную физическую интерпретацию.

Анализ деталей доказательства теоремы позволяет сделать еще одно заключительное замечание. Если исходить из классификации С.Ли (см. [34] и [35]), то ни одна из метрических функций (5.2) и (5.3) не может быть получена как инвариант группы преобразований (5.4$'$), так как С.Ли в пределах подобия не различает алгебры (4.8.1) и (4.8.2) и не различает алгебры (4.14.2) с $h_1 \neq h_2$, которые в пределах эквивалентности не совпадают. В пределах же подобия алгебры (4.8.1) и (4.8.2) сводятся к одной алгебре **9.** при $c = 0$, а алгебры (4.14.2) с различными значениями постоянной h сводятся к алгебре **7.** по приведенной в §4 таблице из монографии [35]. Таким образом, для вычисления двухточечных инвариантов необходимо уточнять классификацию С.Ли в пределах эквивалентности в смысле определения 4 из §3, когда допускается только замена координат преобразуемого многообразия в каждом изоморфном классе, как это было сделано в §4 для четырехмерных алгебр Ли преобразований плоскости.

Отметим, что результаты настоящего §5, как и предыдущего, опубликованы автором в работе [38], составляя содержание ее второго параграфа.

§6. Групповая симметрия однометрических физических структур ранга (n+1,2)

Будем исходить из общего и краткого определения однометрической феноменологически симметричной геометрии двух множеств, данного в начале §2. Множество $\mathfrak{M}$ в рассматриваемом случае будет одномерным многообразием, а множество $\mathfrak{N}$ – n-мерным. Для метрической функции (2.1) из §2 координатное задание будет следующим:

$$f(x,\xi) = f(x,\xi^1,\dots,\xi^n), \tag{6.1}$$

где справа $x = x^1$.

Согласно результатам работы [26] однометрические физические структуры ранга $(n+1,2)$ существуют только для $n = 1,2,3$ и не существуют для $n \geq 4$. Метрика (6.1) с точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$ и замены локальных координат в многообразиях $\mathfrak{M},\mathfrak{N}$, а также функциональная связь, определяющая феноменологическую симметрию соответствующей геометрии двух множеств, задаются следующими каноническими выражениями и уравнениями:

для $n = 1$:

$$f = x + \xi, \tag{6.2}$$

$$f(i\alpha) - f(i\beta) - f(j\alpha) + f(j\beta) = 0, \tag{6.2$'$}$$

где $\xi = \xi^1,\ i,j \in \mathfrak{M},\ \alpha,\beta \in \mathfrak{N}$ и, например, $f(i\alpha) = x(i) + \xi(\alpha)$;

для $n = 2$:

$$f = x\xi + \eta, \tag{6.3}$$

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{6.3$'$}$$

где $\xi = \xi^1,\ \eta = \xi^2,\ i,j,k \in \mathfrak{M},\ \alpha,\beta \in \mathfrak{N}$ и, например, $f(i\alpha) = x(i)\xi(\alpha)+$ $+\,\eta(\alpha)$;

для $n = 3$:

$$f = (x\xi + \eta)/(x + \vartheta), \tag{6.4}$$

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\alpha)f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\alpha)f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\alpha)f(k\beta) & 1 \\ f(l\alpha) & f(l\beta) & f(l\alpha)f(l\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{6.4$'$}$$

где $\xi = \xi^1$, $\eta = \xi^2$, $\vartheta = \xi^3$, $i, j, k, l \in \mathfrak{M}$, $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ и, например, $f(i\alpha) = (x(i)\xi(\alpha) + \eta(\alpha))/(x(i) + \vartheta(\alpha))$.

Группа движений метрической функции (6.1) согласно теореме 2 из §1 зависит от n существенных параметров:

$$\left.\begin{array}{r} x' = \lambda(x; a^1, \ldots, a^n), \\ \xi'^\nu = \sigma^\nu(\xi^1, \ldots, \xi^n; a^1, \ldots, a^n), \end{array}\right\} \tag{6.5}$$

где $\nu = 1, \ldots, n$. Локальное преобразование одномерного многообразия $\mathfrak{M}$ в группе движений (6.5) однозначно задается линейно независимыми инфинитезимальными операторами

$$X_\omega = \lambda_\omega(x)\partial_x, \tag{6.6}$$

где $\omega = 1, \ldots, n$. Если в операторах (6.6) произвести замену координат $\int dx/\lambda_1(x) \to x$, то для первого оператора X_1 получим максимально простое выражение и тогда в прежних обозначениях можем записать:

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \lambda_2(x)\partial_x,\ \ldots,\ X_n = \lambda_n(x)\partial_x. \tag{6.6$'$}$$

Теорема 1. (С.Ли). *Максимальная размерность алгебр Ли преобразований одномерного многообразия равна трем. С точностью до подобия (слабой эквивалентности) базисный оператор X_1 одномерной алгебры задается выражением*

$$X_1 = \partial_x; \tag{6.7}$$

базисные операторы X_1, X_2 двумерной алгебры задаются выражениями

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = x\partial_x \tag{6.8}$$

с коммутатором

$$[X_1, X_2] = X_1; \tag{6.9}$$

базисные операторы X_1, X_2, X_3 трехмерной алгебры задаются выражениями

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = x\partial_x,\ X_3 = x^2\partial_x \tag{6.10}$$

с коммутаторами

$$[X_1, X_2] = X_1,\ [X_1, X_3] = 2X_2,\ [X_2, X_3] = X_3. \qquad (6.11)$$

Результат, изложенный в теореме 1, принадлежит Софусу Ли. Следует, однако, подчеркнуть, что его доказательство, воспроизведенное, например, в монографии Чеботарева Н.Г. [29] на стр. 213, приводит к этому результату не с точностью до эквивалентности, а с точностью до подобия (или слабой эквивалентности) в смысле леммы 2 (или 3) из §3, когда в исходной группе преобразований допускается как замена координат в преобразуемом многообразии, так и замена параметров в действующей группе. Но подобие (слабая эквивалентность) не равносильна эквивалентности, когда в каждом изоморфном классе допускается только замена координат в преобразуемом многообразии (см., например, [30], стр. 44). С другой стороны, при нахождении феноменологически инвариантных метрик (6.1), являющихся невырожденными инвариантами группы преобразований (6.5) многообразия $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, следует, в общем случае, как показано в §3, проводить классификацию групп Ли преобразований и соответствующих алгебр Ли с точностью до эквивалентности в смысле определения 4 и леммы 4 из §3. Поэтому имеет смысл уточнить результат теоремы 1 в пределах эквивалентности.

Теорема 2. *Классификация алгебр Ли преобразований одномерного многообразия с точностью до подобия (слабой эквивалентности) совпадает с их классификацией с точностью до эквивалентности.*

Базисный оператор X_1 одномерной алгебры Ли с точностью до эквивалентности, согласно выражениям (6.6′), может быть записан в своей максимально простой форме (6.7). Базисные операторы X_1, X_2 двумерной алгебры Ли, согласно тем же самым выражениям (6.6′), могут быть записаны в виде

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \lambda(x)\partial_x, \qquad (6.12)$$

где $\lambda(x) = \lambda_2(x)$. Подставим операторы (6.12) в коммутатор (6.9): $\lambda'(x)\partial_x = \partial_x$, откуда получаем уравнение $\lambda'(x) = 1$ с решением $\lambda(x) = x + a$. Аддитивная постоянная a может быть исключена простой заменой координат $x + a \to x$, не меняющей оператор X_1, в результате чего с точностью до эквивалентности приходим к выражениям (6.8).

Заметим, что в трехмерной алгебре с коммутационными соотношениями (6.11) содержится двумерная неабелевая подалгебра с коммутатором (6.9). Поэтому ее базисные операторы $X_1,\ X_2,\ X_3$, объединяя выражения (6.8) и (6.6′), можно записаить в следующем виде:

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = x\partial_x,\ X_3 = \lambda(x)\partial_x, \tag{6.13}$$

где $\lambda_2(x) = x$, а $\lambda_3(x) = \lambda(x)$. Операторы (6.13) подставим во второй и третий коммутаторы соотношений (6.11): $\lambda'(x)\partial_x = 2x\partial_x$ и $(x\lambda'(x) - \lambda(x))\partial_x = \lambda(x)\partial_x$, откуда относительно функции $\lambda(x)$ получаем два уравнения: $\lambda'(x) = 2x$ и $x\lambda'(x) = 2\lambda(x)$ с единственным решением $\lambda(x) = x^2$. Подставив его в выражения (6.13), получим с точностью до эквивалентности базисные операторы (6.10) трехмерной алгебры Ли преобразований одномерного многообразия. Для $n \geq 4$, очевидно, нет n-мерных алгебр Ли преобразований одномерного многообразия с точностью до эквивалентности, как нет их по теореие 1 и с точностью до подобия (слабой эквивалентности). Отмеченное последнее обстоятельство и завершает доказательство теоремы 2.

Из теорем 1,2 следует, что для $n \geq 4$ локальное действие любой n-мерной группы Ли в одномерном многообразии $\mathfrak{M}$ не может быть эффективным, то есть соответствующая группа преобразований не может зависеть существенно более чем от трех параметров.

Локальные преобразования n-мерного многообразия $\mathfrak{N}$ в группе движений (6.5) однозначно задаются линейно независимыми инфинитезимальными операторами

$$\Xi_\omega = \sigma^\nu_\omega(\xi^1, \ldots, \xi^n)\partial/\partial\xi^\nu, \tag{6.14}$$

где $\omega, \nu = 1, \ldots, n$. Полностью же локальная группа движений (6.5) однозначно задается инфинитезимальными операторами $Z_\omega = X_\omega + \Xi_\omega$, которые образуют базис n-мерной алгебры Ли преобразований многообразия $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$. Поскольку операторы X_ω и Ξ_ω, завися от разных переменных x и $\xi^1, \ldots, \xi^n$, коммутируют между собой, коммутационные соотношения для них совпадают с коммутационными соотношениями для операторов Z_ω. То есть n-мерные алгебры Ли с базисными операторами X_ω и Ξ_ω изоморфны с точностью до совпадения структурных констант в соответствующих базисах. Поэтому, согласно теореме 2 и определению 2 из §1, дополнительно к результатам теорем 1 и 2 настоящего параграфа необходимо только найти с точностью до эквивалентности все двумерные алгебры Ли преобразований двумерного многообразия с коммутатором (6.9) и все трехмерные алгебры Ли преобразований трехмерного многообразия с коммутационными соотношениями (6.11).

Теорема 3. *С точностью до эквивалентности базисный оператор Ξ_1 одномерной алгебры Ли преобразований одномерного многообразия задается выражением*

$$\Xi_1 = \partial_\xi; \tag{6.15}$$

базисные операторы Ξ_1, Ξ_2 двумерной алгебры Ли преобразований двумерного многообразия с коммутатором

$$[\Xi_1, \Xi_2] = \Xi_1 \tag{6.16}$$

задаются выражениями:

$$\Xi_1 = \partial_\xi,\ \Xi_2 = \xi\partial_\xi; \tag{6.17}$$

$$\Xi_1 = \partial_\xi,\ \Xi_2 = \xi\partial_\xi + \partial_\eta; \tag{6.18}$$

базисные операторы Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 трехмерной алгебры Ли преобразований трехмерного многообразия с коммутационными соотношениями

$$[\Xi_1, \Xi_2] = \Xi_1,\ [\Xi_1, \Xi_3] = 2\Xi_2,\ [\Xi_2, \Xi_3] = \Xi_3 \tag{6.19}$$

задаются выражениями:

$$\Xi_1 = \partial_\xi,\ \Xi_2 = \xi\partial_\xi,\ \Xi_3 = \xi^2\partial_\xi; \tag{6.20}$$

$$\Xi_1 = \partial_\xi,\ \Xi_2 = \xi\partial_\xi + \partial_\eta,\ \Xi_3 = \xi^2\partial_\xi + 2\xi\partial_\eta; \tag{6.21}$$

$$\left.\begin{array}{c} \Xi_1 = \partial_\xi,\ \Xi_2 = \xi\partial_\xi + \partial_\eta, \\ \Xi_3 = (\xi^2 \pm \exp 2\eta)\partial_\xi + 2\xi\partial_\eta; \end{array}\right\} \tag{6.22}$$

$$\left.\begin{array}{c} \Xi_1 = \partial_\xi,\ \Xi_2 = \xi\partial_\xi + \partial_\eta, \\ \Xi_3 = \xi^2\partial_\xi + 2\xi\partial_\eta + \exp\eta\ \partial_\vartheta. \end{array}\right\} \tag{6.23}$$

Выражение (6.15) для оператора Ξ_1 получается сразу же из выражения (6.7) для оператора X_1 простой заменой координат $x \to \xi$, так как при $n = 1$ множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ являются одномерными многообразиями.

Если $n = 2$, то множество $\mathfrak{N}$ является двумерным многообразием с локальными координатами $\xi = \xi^1$, $\eta = \xi^2$. Базисные операторы Ξ_1, Ξ_2

двумерной алгебры Ли преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{N}$ в соответствии с общим выражением (6.14) можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \Xi_1 = \sigma_1(\xi,\eta)\partial_\xi + \rho_1(\xi,\eta)\partial_\eta, \\ \Xi_2 = \sigma_2(\xi,\eta)\partial_\xi + \rho_2(\xi,\eta)\partial_\eta. \end{aligned}\right\} \tag{6.24}$$

Произведем замену координат $\varphi(\xi,\eta) \to \xi,\ \psi(\xi,\eta) \to \eta$, где функции φ и ψ являются некоторыми независимыми решениями уравнений $\sigma_1\varphi_\xi + \rho_1\varphi_\eta = 1$ и $\sigma_1\psi_\xi + \rho_1\psi_\eta = 0$. Тогда для оператора Ξ_1 получаем максимально простое выражение: $\Xi_1 = \partial_\xi$. В результате упростится запись операторов (6.24):

$$\Xi_1 = \partial_\xi,\ \Xi_2 = \sigma(\xi,\eta)\partial_\xi + \rho(\xi,\eta)\partial_\eta, \tag{6.24$'$}$$

которые подставим в коммутатор (6.16): $\sigma_\xi(\xi,\eta)\partial_\xi + \rho_\xi(\xi,\eta)\partial_\eta = \partial_\xi$, откуда получаем уравнения $\sigma_\xi(\xi,\eta) = 1,\ \rho_\xi(\xi,\eta) = 0$ и после интегрирования по переменной ξ получаем их общие решения $\sigma(\xi,\eta) = \xi + \sigma(\eta),\ \rho(\xi,\eta) = \rho(\eta)$. Произведем дополнительную замену координат $\xi + \varphi(\eta) \to \xi,\ \psi(\eta) \to \eta$, которая сохраняет за оператором Ξ_1 его простую форму. Если $\rho(\eta) = 0$, то, полагая $\varphi(\eta) = \sigma(\eta)$, получим выражение (6.17). Если же $\rho(\eta) \neq 0$, то полагая $-\varphi(\eta) + \sigma(\eta) + \rho(\eta)\varphi'(\eta) = 0,\ \rho(\eta)\psi'(\eta) = 1$, получим выражение (6.18). Заметим, что алгебры Ли с базисными операторами (6.17) и (6.18) изоморфны, но не эквивалентны, причем не только в смысле определения 4 из §3, но и в смысле определения 3 из §3, то есть слабо не эквивалентны. Это означает, что никакой автоморфизм и никакая замена координат не сведут алгебры (6.17) и (6.18) друг к другу.

Для $n = 3$ множество $\mathfrak{N}$ является трехмерным многообразием, локальные координаты которого обозначим через $\xi = \xi^1,\ \eta = \xi^2,\ \vartheta = \xi^3$. Базисные операторы $\Xi_1,\ \Xi_2,\ \Xi_3$ трехмерной алгебры Ли преобразований трехмерного многообразия $\mathfrak{N}$ согласно общим выражениям (6.14) запишутся тогда в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \Xi_1 = \sigma_1(\xi,\eta,\vartheta)\partial_\xi + \rho_1(\xi,\eta,\vartheta)\partial_\eta + \tau_1(\xi,\eta,\vartheta)\partial_\vartheta \\ \Xi_2 = \sigma_2(\xi,\eta,\vartheta)\partial_\xi + \rho_2(\xi,\eta,\vartheta)\partial_\eta + \tau_2(\xi,\eta,\vartheta)\partial_\vartheta, \\ \Xi_3 = \sigma_3(\xi,\eta,\vartheta)\partial_\xi + \rho_3(\xi,\eta,\vartheta)\partial_\eta + \tau_3(\xi,\eta,\vartheta)\partial_\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{6.25}$$

Заменой координат $\varphi(\xi,\eta,\vartheta) \to \xi,\ \psi(\xi,\eta,\vartheta) \to \eta,\ \kappa(\xi,\eta,\vartheta) \to \vartheta$ с независимыми функциями $\varphi,\ \psi,\ \kappa$, являющимися некоторыми решениями уравнений $\sigma_1\varphi_\xi + \rho_1\varphi_\eta + \tau_1\varphi_\vartheta = 1,\ \ \sigma_1\psi_\xi + \rho_1\psi_\eta + \tau_1\psi_\vartheta = 0,$

$\sigma_1\kappa_\xi + \rho_1\kappa_\eta + \tau_1\kappa_\vartheta = 0$, выражение для оператора Ξ_1 можно сделать максимально простым:

$$\Xi_1 = \partial_\xi. \tag{6.26}$$

Заметим, что выражение (6.26), в котором $\sigma_1 = 1$, $\rho_1 = 0$, $\tau_1 = 0$, сохраняет свою простую форму при любой замене координат вида

$$\xi + \varphi(\eta,\vartheta) \to \xi,\ \psi(\eta,\vartheta) \to \eta,\ \kappa(\eta,\vartheta) \to \vartheta, \tag{6.27}$$

где φ, ψ, κ – произвольные функции двух переменных при условии, конечно, что функции ψ и κ независимы.

Подставим оператор (6.26) и оператор Ξ_2 из (6.25) в первый коммутатор соотношений (6.19): $\sigma_{2\xi}\partial_\xi + \rho_{2\xi}\partial\eta + \tau_{2\xi}\partial_\vartheta = \partial_\xi$, откуда получаем уравнения $\sigma_{2\xi} = 1$, $\rho_{2\xi} = 0$, $\tau_{2\xi} = 0$, с очевидными решениями $\sigma_2 = \xi + \sigma(\eta,\vartheta)$, $\rho_2 = \rho(\eta,\vartheta)$, $\tau_2 = \tau(\eta,\vartheta)$. Для оператора Ξ_2 теперь имеем выражение $\Xi_2 = (\xi + \sigma(\eta,\vartheta))\partial_\xi + \rho(\eta,\vartheta)\partial_\eta + \tau(\eta,\vartheta)\partial_\vartheta$, которое можно значительно упростить, используя допустимую замену координат (6.27). Если $\rho^2 + \tau^2 = 0$, то, полагая $\varphi = \sigma$, получим

$$\Xi_2 = \xi\partial_\xi. \tag{6.28}$$

Если же $\rho^2 + \tau^2 \neq 0$, то, беря функции φ, ψ, κ как некоторые решения уравнений $\sigma - \varphi + \rho\varphi_\eta + \tau\varphi_\vartheta = 0$, $\rho\psi_\eta + \tau\psi_\vartheta = 1$, $\rho\kappa_\eta + \tau\kappa_\vartheta = 0$, получим второе выражение:

$$\Xi_2 = \xi\partial_\xi + \partial_\eta. \tag{6.29}$$

Подставим операторы (6.26),(6.28) и оператор Ξ_3 из (6.25) во второй и третий коммутаторы соотношений (6.19): $\sigma_{3\xi}\partial_\xi + \rho_{3\xi}\partial_\eta + \tau_{3\xi}\partial_\vartheta = 2\xi\partial_\xi$ и $\xi\sigma_{3\xi}\partial_\xi + \xi\rho_{3\xi}\partial_\eta + \xi\tau_{3\xi}\partial_\vartheta - \sigma_3\partial_\xi = \sigma_3\partial_\xi + \rho_3\partial_\eta + \tau_3\partial_\vartheta$, откуда получаем систему шести уравнений: $\sigma_{3\xi} = 2\xi$, $\rho_{3\xi} = 0$, $\tau_{3\xi} = 0$, $\xi\sigma_{3\xi} = 2\sigma_3$, $\xi\rho_{3\xi} = \rho_3$, $\xi\tau_{3\xi} = \tau_3$, решение которых легко находится: $\sigma_3 = \xi^2$, $\rho_3 = 0$, $\tau_3 = 0$. Используя найденные решения в выражении для оператора Ξ_3 из (6.25) и добавляя к нему выражения (6.26) и (6.28) для операторов Ξ_1 и Ξ_2, приходим к результату (6.20) доказываемой теоремы.

Подставим теперь операторы (6.26),(6.29) и оператор Ξ_3 из (6.25) в последние два коммутатора соотношений (6.19): $\sigma_{3\xi}\partial_\xi + \rho_{3\xi}\partial_\eta + \tau_{3\xi}\partial_\vartheta = 2\xi\partial_\xi + 2\partial_\eta$, $(\xi\sigma_{3\xi} + \sigma_{3\eta})\partial_\xi + (\xi\rho_{3\xi} + \rho_{3\eta})\partial_\eta + (\xi\tau_{3\xi} + \tau_{3\eta})\partial_\vartheta - \sigma_3\partial_\xi = \sigma_3\partial_\xi + \rho_3\partial_\eta + \tau_3\partial_\vartheta$, откуда получаем систему из шести уравнений: $\sigma_{3\xi} = 2\xi$, $\rho_{3\xi} = 2$, $\tau_{3\xi} = 0$, $\xi\sigma_{3\xi} + \sigma_{3\eta} = 2\sigma_3$, $\xi\rho_{3\xi} + \rho_{3\eta} = \rho_3$, $\xi\tau_{3\xi} + \tau_{3\eta} = \tau_3$. Решения этих уравнений нетрудно найти: $\sigma_3 = \xi^2 + \sigma(\vartheta)\exp 2\eta$, $\rho_3 =$

$2\xi+\rho(\vartheta)\exp\eta$, $\tau_3=\tau(\vartheta)\exp\eta$, где $\sigma(\vartheta)$, $\rho(\vartheta),\tau(\vartheta)$ – произвольные функции одной переменной. Подставим эти решения в оператор Ξ_3 из (6.25):

$$\Xi_3=(\xi^2+\sigma(\vartheta)\exp 2\eta)\partial_\xi+(2\xi+\rho(\vartheta)\exp\eta)\partial_\eta+\tau(\vartheta)\exp\eta\partial_\vartheta$$

и произведем в нем замену координат $\xi+\varphi(\vartheta)\exp\eta\to\xi$, $\eta+\psi(\vartheta)\to\eta$, $\kappa(\vartheta)\to\vartheta$, сохраняющую выражения (6.26) и (6.29) для операторов Ξ_1 и Ξ_2. Если $\tau=0$ и $4\sigma+\rho^2=0$, то, полагая $\varphi=\rho/2$, приходим к результату (6.21). Если же $\tau=0$ и $4\sigma+\rho^2\neq 0$, то, полагая $\varphi=\rho/2$ и $-\varphi^2+\sigma+\rho\varphi=\pm\exp 2\psi$, приходим к результату (6.22). Если же, наконец, $\tau\neq 0$, то, полагая $-\varphi^2+\sigma+\rho\varphi+\tau\varphi'=0$, $-2\varphi+\rho+\tau\psi'=0$, $\tau\kappa'=\exp\psi$, приходим к последнему результату (6.23). Теорема 3 полностью доказана.

Заметим, что изоморфные трехмерные алгебры Ли с базисными операторами (6.20)–(6.23) попарно и не эквивалентны и не подобны, то есть не эквивалентны и в слабом смысле, хотя в указанных базисах имеют одни и те же коммутационные соотношения, то есть изоморфны между собой.

Локально движение (6.5) задается суммой операторов (6.6) и (6.14):

$$Z_\omega=\lambda_\omega(x)\partial/\partial x+\sigma^\nu_\omega(\xi^1,\dots,\xi^n)\partial/\partial\xi^\nu, \tag{6.30}$$

где, напомним, $\omega=1,\dots,n$. Сопоставляя результаты первой, второй и третьей теорем настоящего §6, можно получить конкретные выражения для операторов (6.30), которые составят базис взаимного расширения алгебр (6.6) и (6.14). Базисный оператор Z_1 одномерной алгебры Ли движений (6.5) для случая $n=1$ определится суммой выражений (6.7) и (6.15). Базисные операторы Z_1, Z_2 двумерной алгебры Ли движений (6.5) для случая $n=2$ определяются суммами выражений (6.8) и (6.17), а также (6.8) и (6.18). Базисные операторы Z_1, Z_2, Z_3 трехмерной алгебры Ли движений (6.5) для случая $n=3$ определяются суммами выражений (6.10) и (6.20), (6.10) и (6.21), (6.10) и (6.22), (6.10) и (6.23).

Согласно инфинитезимальному критерию инвариантности (см., например, [13], стр. 77), метрическая функция (6.1) будет инвариантом группы преобразований (6.5) в том и только в том случае, если она удовлетворяет системе дифференциальных уравнений $Z_\omega f=0$ с операторами (6.30):

$$\lambda_\omega(x)\partial f/\partial x+\sigma^\nu_\omega(\xi^1,\dots,\xi^n)\partial f/\partial\xi^\nu. \tag{6.31}$$

Теорема 4. *С точностью до масштабных преобразований* $\psi(f) \to f$ *и в надлежаще выбранных в многообразиях* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *системах локальных координат невырожденная метрическая функция* (6.1), *определяемая как двухточечный инвариант группы преобразований* (6.5), *задается следующими каноническими выражениями*: (6.2) *для* $n = 1$, (6.3) *для* $n = 2$ *и* (6.4) *для* $n = 3$.

В случае $n = 1$ метрическая функция $f(x, \xi)$ является решением уравнения (6.31) с операторами (6.7) и (6.15):

$$f_x + f_\xi = 0, \tag{6.32}$$

которое легко находится методом характеристик:

$$f(x, \xi) = \psi(x - \xi), \tag{6.33}$$

где ψ – произвольная функция одной переменной с отличной от нуля производной. Решение (6.33) с точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$ и очевидной замены координат: $x \to x$, $\xi \to -\xi$ совпадает с выражением (6.2).

Если $n = 2$, то метрическая функция $f(x, \xi, \eta)$ является решением одной из двух систем уравнений (6.31) либо с операторами (6.8) и (6.17), либо с операторами (6.8) и (6.18). Однако из первой системы легко устанавливаем, что $\partial f/\partial x = 0$ и $\partial f/\partial \xi = 0$, то есть метрическая функция оказывается вырожденной, так как не зависит от координат x и ξ. Запишем поэтому вторую систему:

$$\left.\begin{array}{r} f_x + f_\xi = 0, \\ x f_x + \xi f_\xi + f_\eta = 0. \end{array}\right\} \tag{6.34}$$

Решением первого уравнения системы (6.34) будет, очевидно, выражение

$$f(x, \xi, \eta) = \chi(x - \xi, \eta), \tag{6.35}$$

где $\chi(u, v)$ – произвольная функция двух переменных с отличными от нуля производными χ_u и χ_v. Подставим функцию (6.35) во второе уравнение системы (6.34), полагая $u = x - \xi$, $v = \eta$. В результате получаем уравнение для функции $\chi(u, v)$:

$$u\chi_u + \chi_v = 0,$$

решение которого легко находится:

$$\chi(u,v) = \psi(u\exp(-v)), \tag{6.36}$$

где ψ – произвольная функция только одной переменной. Из последних выражений (6.35) и (6.36) получаем решение исходной системы (6.34):

$$f(x,\xi,\eta) = \psi((x-\xi)\exp(-\eta)), \tag{6.37}$$

которое с точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$ и замены координат $x \to x$, $\exp(-\eta) \to \xi$, $\xi\exp(-\eta) \to -\eta$ совпадает с выражением (6.3).

Для случая $n = 3$ метрическая функция $f(x,\xi,\eta,\vartheta)$ является решением одной из четырех систем уравнений (6.31) с операторами (6.10) и (6.20), (6.10) и (6.21), (6.10) и (6.22), (6.10) и (6.23). Но первая система относительно производных f_x, f_ξ, вторая и третья системы относительно производных f_x, f_ξ, f_η имеют только нулевые решения, что, очевидно, приводит к вырождению метрической функции. Запишем четвертую систему:

$$\left.\begin{array}{c} f_x + f_\xi = 0, \\ xf_x + \xi f_\xi + f_\eta = 0, \\ x^2 f_x + \xi^2 f_\xi + 2\xi f_\eta + \exp\eta\ f_\vartheta = 0, \end{array}\right\} \tag{6.38}$$

в которой первые два уравнения составляют систему (6.34). Ее решение легко получить, используя выражение (6.37):

$$f(x,\xi,\eta,\vartheta) = \theta((x-\xi)\exp(-\eta),\vartheta), \tag{6.39}$$

где $\theta(s,t)$ – произвольная функция двух переменных с $\theta_s \neq 0$ и $\theta_t \neq 0$. Подставим решение (6.39) в третье уравнение системы (6.38), полагая $s = (x-\xi)\exp(-\eta)$, $t = \vartheta$:

$$s^2\theta_s + \theta_t = 0. \tag{6.40}$$

Уравнение (6.40) интегрируем методом характеристик:

$$\theta(s,t) = \psi((st+1)/s), \tag{6.41}$$

где ψ – произвольная функция только одной переменной с отличной от нуля производной. Из выражений (6.39), (6.41) получаем решение исходной системы (6.38):

$$f(x,\xi,\eta,\vartheta) = \psi(\frac{(x-\xi)\vartheta\exp(-\eta)+1}{(x-\xi)\exp(-\eta)}), \tag{6.42}$$

которое с точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$ и следующей замены координат: $x \to x,\ \vartheta \to \xi,\ \xi \to -\vartheta,\ -\xi\vartheta + \exp\eta \to \eta$ совпадает с выражением (6.4). Теорема 4 полностью доказана.

Для случая $n \geq 4$, как было отмечено выше после доказательства теоремы 2, действие любой n-мерной локальной группы Ли в одномерном многообразии $\mathfrak{M}$ не эффективно. То есть никакая функция (6.1) в случае $n \geq 4$ согласно определению 2 из §1 не может задавать на одномерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ однометрическую геометрию, наделенную групповой симметрией степени n, и потому никакая функция (6.1) по теореме 2 из §1 для $n \geq 4$ не может задавать на этих многообразиях однометрическую физическую структуру ранга $(n+1, 2)$. Таким образом, однометрические физические структуры ранга $(n+1, 2)$ для $n \geq 4$, то есть ранга (5,2), (6,2) и т.д., не существуют.

Результаты настоящего параграфа опубликованы автором в работах [26] и [40].

§7. Двуметрические физические структуры ранга (n+1,2) и комплексные числа

Краткое и ясное определение двуметрической физической структуры ранга $(n+1, 2)$ естественно получается из соответствующего общего определения s-метрической физической структуры ранга $(n+1, m+1)$, данного в начале §1, если положить в нем $s = 2$ и $m = 1$.

Пусть имеются два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, являющиеся 2-мерным и $2n$-мерным многообразиями соответственно, где n – натуральное число. Обозначим локальные координаты в этих многообразиях через $x = (x^1, x^2)$ и $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{2n})$. Пусть также имеется функция f с открытой и плотной в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ областью определения $\mathfrak{S}_f$, сопоставляющая каждой паре из нее два вещественных числа, то есть $f : \mathfrak{S}_f \to R^2$. Двухкомпонентную функцию $f = (f^1, f^2)$ будем называть *двуметрикой*. Предполагается, что локальное координатное представление этой двуметрики задается достаточно гладкой невырожденной функцией

$$f(x, \xi) = f(x^1, x^2, \xi^1, \ldots, \xi^{2n}), \tag{7.1}$$

выражение для которой получается из выражения (1.2) при $s = 2$ и $m = 1$. Невырожденность двуметрики (7.1) понимается в смысле аксиомы III из §1 и, вообще говоря, в отличие от случая $s = 1$, то есть однометрических физических структур, означает нечто большее, чем просто ее существенную зависимость от координат $x = (x^1, x^2)$ и $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{2n})$. А именно, должны быть отличны от нуля якобианы $\partial f(i\gamma_1)/\partial x(i)$ и $\partial(f(k_1\alpha), \dots, f(k_n\alpha))/\partial\xi(\alpha)$ для плотных множеств пар $< i\gamma_1 > \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ и кортежей $< k_1 \dots k_n, \alpha > \in \mathfrak{M}^n \times \mathfrak{N}$ длины $n + 1$.

Далее строим функцию F с естественной в $\mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^2$ областью определения $\mathfrak{S}_F$, сопоставляя каждому кортежу длины $n+3$ из $\mathfrak{S}_F$ все $4(n + 1)$ возможные по двуметрике $f = (f^1, f^2)$ расстояния. Будем говорить, что двухкомпонентная функция f с локальным координатным представлением (7.1) задает на 2-мерном и $2n$-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *двуметрическую физическую структуру* (или феноменологически симметричную геометрию) *ранга* $(n + 1, 2)$, если локально множество значений $F(\mathfrak{S}_F)$ в $R^{4(n+1)}$ принадлежит множеству нулей некоторой достаточно гладкой двухкомпонентной функции $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ с независимыми компонентами Φ_1 и Φ_2, то есть имеет место уравнение

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), \dots, f(v\alpha), f(v\beta)) = 0 \qquad (7.1')$$

для всех кортежей $< ijk \dots v, \alpha\beta >$ из некоторого плотного и открытого в $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^2$ множества. Таким образом, локально множество $F(\mathfrak{S}_F)$ принадлежит некоторой регулярной коразмерности 2 поверхности в $R^{4(n+1)}$, не обязательно совпадая с ней.

Заметим, что не всякая двухкомпонентная функция $f = (f^1, f^2)$ может задавать двуметрическую физическую структуру и потому основной задачей теории является их полная классификация, которая, как обычно, проводится с точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$, в данном случае двумерного, и возможности выбора в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ любых допустимых систем локальных координат.

Два локальных диффеоморфизма

$$x' = \lambda(x), \ \ \xi' = \sigma(\xi) \qquad (7.2)$$

составляют по определению *движение*, если они сохраняют двуметрику f:

$$f(\lambda(x), \sigma(\xi)) = f(x, \xi). \qquad (7.3)$$

Множество всех движений есть, очевидно, локальная группа, для которой двуметрика по равенству (7.3) является двухточечным инвариантом. Согласно итоговой теореме 3 и определениям 1,2 из §1 для рассматриваемого случая невырожденная двухкомпонентная функция $f = (f^1, f^2)$ задает на 2-мерном и $2n$-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ двуметрическую физическую структуру ранга $(n+1, 2)$ в том и только в том случае, если она допускает $2n$-параметрическую локальную группу локальных движений

$$x' = \lambda(x, a),\ \xi' = \sigma(\xi, a), \tag{7.2$'$}$$

где $a = (a^1, \ldots, a^{2n}) \in G^{2n}$, которые сохраняют обе ее компоненты:

$$f(\lambda(x, a), \sigma(\xi, a)) = f(x, \xi). \tag{7.3$'$}$$

Таким образом, на открытых и плотных в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множествах заданы $2n$-мерные линейные семейства гладких векторных полей X и Ξ, замкнутые относительно операции коммутирования, то есть алгебры Ли преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ (см. [11], §60). Соответствующие линейно независимые базисные векторные поля этих семейств запишем в операторной форме:

$$X_\omega = \lambda^\mu_\omega(x)\partial/\partial x^\mu,\ \Xi_\omega = \sigma^\nu_\omega(\xi)\partial/\partial\xi^\nu, \tag{7.4}$$

где $\omega = 1, \ldots, 2n;\ \mu = 1, 2;\ \nu = 1, \ldots, 2n$, причем по немым индексам μ и ν производится суммирование в указанных пределах.

Известно (см. [13], §17), что функция $f(x, \xi)$ будет по (7.3$'$) двухточечным инвариантом группы движений (7.2$'$) в том и только в том случае, если она покомпонентно удовлетворяет системе уравнений $X_\omega f + \Xi_\omega f = 0$ с операторами (7.4):

$$\lambda^\mu_\omega(x)\partial f(x, \xi)/\partial x^\mu + \sigma^\nu_\omega(\xi)\partial f(x, \xi)/\partial\xi^\nu = 0. \tag{7.5}$$

Лемма 1. *В группе движений невырожденной функции $f(x, \xi)$ локальное действие $\sigma(\xi, a)$ группы G^{2n} в $2n$-мерном многообразии $\mathfrak{N}$ локально транзитивно.*

Предположим противное, то есть что группа G^{2n} действует в многообразии $\mathfrak{N}$ интранзитивно. Тогда общий ранг квадратной матрицы $\sigma^\nu_\omega(\xi)$ для операторов Ξ_ω из (7.4) будет меньше $2n$ (см. [12], §16.10). А это означает, что найдутся такие переменные коэффициенты $c^\omega(\xi)$, не все одновременно и тождественно равные нулю, для которых выполняется равенство $c^\omega(\xi)\sigma^\nu_\omega(\xi) = 0$. Из системы (7.5) при этом легко получаем уравнение

$$c^{\omega}(\xi)\lambda^{\mu}_{\omega}(x)\partial f(x,\xi)/\partial x^{\mu}=0, \tag{7.6}$$

которому удовлетворяют обе компоненты функции $f=(f^1,f^2)$. Будем рассматривать уравнение (7.6), записанное для f^1 и f^2, как систему двух алгебраических линейных однородных уравнений относительно двух выражений $c^{\omega}(\xi)\lambda^1_{\omega}(x)$ и $c^{\omega}(\xi)\lambda^2_{\omega}(x)$, считая их неизвестными. Поскольку функция f невырождена в смысле аксиомы III из §1, якобиан $\partial(f^1,f^2)/\partial(x^1,x^2)$ отличен от нуля, и потому эта система имеет только нулевое решение: $c^{\omega}(\xi)\lambda^1_{\omega}(x)=0$, $c^{\omega}(\xi)\lambda^2_{\omega}(x)=0$. Для операторов $X_{\omega}=\lambda^1_{\omega}(x)\partial/\partial x^1+\lambda^2_{\omega}(x)\partial/\partial x^2$ по выражениям (7.4), где $\mu=1,2$, тогда имеем $c^{\omega}(\xi)X_{\omega}=0$. Полагая в последнем соотношении $\xi=\mathrm{const}$, то есть фиксируя координаты $\xi=(\xi^1,\ldots,\xi^{2n})$, не входящие в X_{ω}, получаем линейную связь $c^{\omega}X_{\omega}=0$ с постоянными не обращающимися одновременно в нуль коэффициентами c^{ω}. Но это невозможно, так как группа G^{2n} действует в многообразии $\mathfrak{M}$ эффективно (см. §1) и потому базисные векторные поля X_{ω} линейно независимы. Полученное противоречие и доказывает лемму 1.

Лемма 2. *В группе движений невырожденной двухкомпонентной функции $f(x,\xi)$ локальное действие $\lambda(x,a)$ группы G^{2n} в 2-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ совпадает с этой функцией с точностью до масштабного преобразования $\psi: R^2\to R^2$ и локальных диффеоморфизмов $v:\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ и $w:\mathfrak{N}\to G^{2n}$.*

Поскольку размерность группы G^{2n} и многообразия $\mathfrak{N}$ совпадают, ее локальное действие $\sigma(\xi,a)$ в $\mathfrak{N}$ не только транзитивно согласно лемме 1, но и просто транзитивно. А все просто транзитивные действия, как известно (см. [12], §16.11), эквивалентны в смысле определения 4 из §3 первой параметрической группе и, очевидно, любому ее просто транзитивному действию в себе, например, $b'=a^{-1}b$, где $a,b\in G^{2n}$. Это означает, что найдется такой локальный диффеоморфизм $w:\mathfrak{N}\to G^{2n}$, что имеет место соотношение $\sigma(\xi,a)=w^{-1}(a^{-1}w(\xi))$, выполняющееся тождественно для всех $a\in G^{2n}$ и ξ из некоторой окрестности $U\subset\mathfrak{N}$. Подставим это соотношение в уравнение (7.3′): $f(\lambda(x,a),w^{-1}(a^{-1}w(\xi)))=f(x,\xi)$, положим в нем $a=w(\xi)$ и введем дополнительно обозначение $f(\lambda(x,w(\xi),w^{-1}(e))=\psi(\lambda(x,w(\xi)))$, где $e\in G^{2n}$ – единичный элемент группы. В результате получаем связь между функцией $f(x,\xi)$ и действием $\lambda(x,a)$:

$$f(x,\xi)=\psi(\lambda(x,w(\xi)), \tag{7.7}$$

в которой функция $\psi : R^2 \to R^2$ имеет, очевидно, ранг, равный двум. Установленная связь и доказывает лемму 2, причем диффеоморфизм $v : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ оказался тождественным преобразованием.

Лемма 3. *Всякое невырожденное локальное действие $\lambda(x,a)$ группы G^{2n} в 2-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ совпадает с точностью до масштабного преобразования $\psi : R^2 \to R^2$ и локальных диффеоморфизмов $v : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ и $w : \mathfrak{N} \to G^{2n}$ с некоторой функцией $f(x,\xi)$, задающей на 2-мерном и $2n$-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ двуметрическую физическую структуру ранга $(n+1,2)$.*

Пусть $w : \mathfrak{N} \to G^{2n}$ есть некоторый локальный диффеоморфизм. По данному действию $\lambda(x,a)$ определим функцию $f(x,\xi)$ следующим образом: $f(x,\xi)=\lambda(x,w(\xi))$. Покажем, что эта функция допускает $2n$-мерную группу движений, состоящую из локальных действий $\lambda(x,a)$ и $\sigma(\xi,a)=w^{-1}(a^{-1}w(\xi))$, то есть что для них выполняется уравнение $(7.3')$. Действительно, $f(\lambda(x,a),\sigma(\xi,a)) = \lambda(\lambda(x,a),w(w^{-1}(a^{-1}w(\xi))))$ $=\lambda(\lambda(x,a),a^{-1}w(\xi))=\lambda(x,w(\xi))=f(x,\xi)$. Поскольку действие $\lambda(x,a)$ по условию доказываемой леммы 3 невырождено, невырожденная в смысле аксиомы III из §1 функция $f(x,\xi)$, допускающая $2n$-мерную группу движений, будет, согласно теореме 1 из §1, задавать на 2-мерном и $2n$-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ двуметрическую физическую структуру ранга $(n+1,2)$. Лемма 3 доказана.

Перейдем теперь к основной задаче настоящего параграфа, то есть к полной классификации двуметрических физических структур ранга $(n+1,2)$, где $n \geq 1$, задаваемых на 2-мерном и $2n$-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ двухкомпонентной функцией $f=(f^1,f^2)$ с локальным координатным представлением (7.1).

В двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ локальные координаты x^1,x^2 обозначим через x,y. Согласно доказанным только что леммам 2,3 любая невырожденная функция $f=(f^1,f^2)$, задающая на многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ размерности 2 и $2n$ двуметрическую физическую структуру ранга $(n+1,2)$, некоторым масштабным преобразованием $\psi : R^2 \to R^2$ и локальными диффеоморфизмами $v : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ и $w : \mathfrak{N} \to G^{2n}$ может быть приведена к невырожденному локальному действию $\lambda=(\lambda^1,\lambda^2)$ группы G^{2n} в 2-мерном многообразии $\mathfrak{M}$, причем верно и обратное утверждение. То есть функция f и действие λ в указанном смысле эквивалентны. Следовательно, с точностью до этой эквивалентности полная классификация двуметрических физических структур ранга $(n+1,2)$ совпадает с полной классификацией невырожденных локальных действий группы G^{2n} в 2-мерном многообразии $\mathfrak{M}$.

Не ограничивая общности результатов и следуя доказательству леммы 3, будем обычно полагать:

$$\left.\begin{aligned} f^1(x,y,\xi) &= \lambda^1(x,y,w^1(\xi),\ldots,w^{2n}(\xi)),\\ f^2(x,y,\xi) &= \lambda^2(x,y,w^1(\xi),\ldots,w^{2n}(\xi)),\end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

где $\xi=(\xi^1,\ldots,\xi^{2n})$ и $w:\mathfrak{N}\to G^{2n}$ – некоторый локальный диффеоморфизм. Однако в некоторых случаях удобно для упрощения получающихся по формуле (7.8) выражений использовать еще и специально подобранные масштабное преобразование $\psi: R^2\to R^2$ и локальный диффеоморфизм $v:\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$.

По двуметрическим физическим структурам ранга $(n+1,2)$ можно получить исчерпывающий ответ, так как имеется полная классификация всех гладких локальных действий конечномерных групп Ли в плоскости, проведенная в 1883 году самим Софусом Ли (см. [34], стр. 71–73, 280). Поскольку эта классификация существенно используется в последующем изложении, воспроизведем ее полностью в обозначениях С.Ли (см. также [35], стр. 25–26).

Теорема С.Ли. *Базисные операторы вещественной конечномерной алгебры Ли локальной группы Ли локальных преобразований плоскости R^2 с точностью до подобия и в надлежаще выбранной системе локальных координат (x,y) задаются следующими выражениями, в которых $p=\partial/\partial x,\ q=\partial/\partial y$:*

1. $p,\ q,\ xq,\ xp-yq,\ xp+yq,\ x^2p+xyq,\ xyp+y^2q,\ yp;$

2. $p,\ q,\ xq,\ xp-yq,\ yp,\ xp+yq;$

3. $p,\ q,\ xq,\ xp-yq,\ yp;$

4. $q,\ xq,\ p,\ 2xp+yq,\ x^2p+xyq;$

5. $q,\ xq,\ \ldots,\ x^rq,\ p,\ 2xp+ryq,\ x^2p+rxyq\ (r>2);$

6. $q,\ xq,\ \ldots,\ x^rq,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2p+rxyq\ (r>0);$

7. $yq,\ p,\ xp,\ x^2p + xyq;$

8. $q,\ xq,\ \ldots,\ x^r q,\ yq,\ p,\ xp\ (r > 0);$

9. $q,\ xq,\ \ldots,\ x^r q,\ p,\ xp + cyq\ (r > 0,\ c \neq 1);$

10. $q,\ xq,\ \ldots,\ x^{r-1}q,\ p,\ xp + (ry + x^r)q\ (r > 1);$

11. $$\left.\begin{array}{c} \exp\alpha_k x\cos\beta_k xq,\ x\exp\alpha_k x\cos\beta_k xq,\ \ldots, \\ x^{m_k}\exp\alpha_k x\cos\beta_k xq,\ yq,\ \exp\alpha_k x\sin\beta_k xq,\ x\exp\alpha_k x\sin\beta_k xq, \\ \ldots,\ x^{m_k}\exp\alpha_k x\sin\beta_k xq,\ p\ (k = 1, 2, \ldots, l); \end{array}\right\}$$

12. $q,\ xq,\ F_1(x)q,\ \ldots,\ F_r(x)q,\ yq(r \geq 0);$

13. $q,\ xq,\ x^2q,\ p,\ xp + yq,\ x^2p + 2xyq;$

14. $p,\ 2xp + yq,\ x^2p + xyq;$

15. $q,\ xq,\ \ldots,\ x^r q,\ p,\ xp + yq\ (r > 0);$

16. $q,\ p,\ xp + (x + y)q;$

17. $$\left.\begin{array}{c} \exp\alpha_k x\cos\beta_k xq,\ x\exp\alpha_k x\cos\beta_k xq,\ \ldots, \\ x^{m_k}\exp\alpha_k x\cos\beta_k xq,\ p,\ \exp\alpha_k x\sin\beta_k xq,\ x\exp\alpha_k x\sin\beta_k xq, \\ \ldots,\ x^{m_k}\exp\alpha_k x\sin\beta_k xq\ (k = 1, 2, \ldots, l); \end{array}\right\}$$

18. $q,\ xq,\ F_1(x)q,\ \ldots,\ F_r(x)q\ (r \geq 0);$

19. $q,\ yq,\ y^2q,\ p,\ xp,\ x^2p;$

20. $p + q,\ xp + yq,\ x^2p + y^2q;$

21. $q,\ yq,\ y^2q,\ p,\ xp;$

22. $q,\ yq,\ y^2q,\ p;$

23. $q,\ yq,\ y^2q;$

24. $q,\ yq,\ p,\ xp;$

25. $q,\ p,\ xp + cyq\ (c \neq 0, 1);$

26. $q,\ yq,\ p;$

27. $q,\ yq;$

28. $p,\ q,\ xp + yq;$

29. $q,\ xp + yq;$

30. $p,\ q;$

31. $q;$

$$\mathbf{32}.\ p,\ q,\ xq-yp,\ xp+yq,\ (x^2-y^2)p+2xyq,\ 2xyp+(y^2-x^2)q;$$

$$\mathbf{33}.\ p,\ q,\ xq-yp,\ xp+yq;$$

$$\mathbf{34}.\ p,\ q,\ xq-yp+c(xp+yq);$$

$$\mathbf{35}.\ p+(x^2-y^2)p+2xyq,\ q+2xyp+(y^2-x^2)q,\ yp-xq;$$

$$\mathbf{36}.\ p-(x^2-y^2)p-2xyq,\ q-2xyp-(y^2-x^2)q,\ yp-xq.$$

Обратим внимание на то, что Софус Ли проводил свою классификацию с точностью до подобия, которая была недостаточной при исследовании групповой симметрии однометрической физической структуры ранга (3,3) в §5. Однако в исследованиях настоящего §7 такая точность классификации оказывается достаточной. Действительно, при нахождении метрической функции $f(x,\xi)$ как двухточечного инварианта групп преобразований $(7.2')$ по уравнению $(7.3')$ только для одной из них, например $\xi'=\sigma(\xi,a)$, необходимо провести полную классификацию с точностью до эквивалентности в смысле определения 4 из §3, как это было сделано в предыдущем параграфе (см. теорему 3 из §6). Для другой же группы, то есть группы $x'=\lambda(x,a)$, вполне достаточно, не ограничивая общности результата, полную классификацию провести с точностью только до подобия в смысле опеределения 2 из §3. Очевидно, что при этом ни одно из решений уравнения $(7.3')$ не будет потеряно и классификация двуметрик $f=(f^1,f^2)$ будет полной.

Теорема. *Двуметрические физические структуры ранга* $(n+1,2)$ *существуют только для* $n=1,2,3,4$, *то есть ранга* $(2,2)$, $(3,2)$, $(4,2)$, $(5,2)$, *и не существуют для* $n\geq 5$, *то есть ранга* $(6,2),(7,2)$ *и т.д. С точностью до масштабных преобразований* $\psi(f)\to f$ *функция* $f=(f^1,f^2)$, *задающая на* 2*-мерном и* $2n$*-мерном многообразиях* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *двуметрическую физическую структуру ранга* $(n+1,2)$, *в надлежаще выбранных в них системах локальных координат* $x=(x^1,x^2)=(x,y)$ *и* $\xi=(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4,\dots)=(\xi,\eta,\mu,\nu,\dots)$ *определяется следующими каноническими выражениями:*

для $n=1$, *то есть ранга* $(2,2)$:

$$f^1=x+\xi,\ f^2=y+\eta; \tag{7.9}$$

$$f^1=(x+\xi)y,\ f^2=(x+\xi)\eta; \tag{7.10}$$

для $n+2$, то есть ранга $(3,2)$:

$$f^1 = x\xi + \varepsilon y\eta + \mu,\ f^2 = x\eta + y\xi + \nu,\ \varepsilon = 0, \pm 1, \tag{7.11}$$

$$f^1 = x\xi + \mu,\ f^2 = x\eta + y\xi^c + \nu,\ c \neq 1, \tag{7.12}$$

$$f^1 = x\xi + \mu,\ f^2 = x\eta + y\xi^2 + x^2\xi^2 \ln \xi + \nu, \tag{7.13}$$

$$f^1 = x\xi + y\mu,\ f^2 = x\eta + y\nu; \tag{7.14}$$

для $n = 3$, то есть ранга $(4,2)$:

$$\left.\begin{aligned} f^1 &= \frac{(x\xi + \varepsilon y\eta + \mu)(x+\rho) - \varepsilon(x\eta + y\xi + \nu)(y+\tau)}{(x+\rho)^2 - \varepsilon(y+\tau)^2}, \\ f^2 &= \frac{(x\xi + \varepsilon y\eta + \mu)(y+\tau) - (x\eta + y\xi + \nu)(x+\rho)}{(x+\rho)^2 - \varepsilon(y+\tau)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

где $\varepsilon = 0, \pm 1$,

$$f^1 = \frac{x\xi + \mu}{x+\rho},\ f^2 = \frac{x\eta + y\nu + \tau}{x+\rho}, \tag{7.16}$$

$$f^1 = x\xi + y\mu + \rho,\ f^2 = x\eta + y\nu + \tau; \tag{7.17}$$

для $n = 4$, то есть ранга $(5,2)$:

$$f^1 = \frac{x\xi + y\mu + \rho}{x\varphi + y + \omega},\ f^2 = \frac{x\eta + y\nu + \tau}{x\varphi + y + \omega}. \tag{7.18}$$

Двуметрики (7.14), (7.17), (7.18), а также двуметрика (7.12) для случая $c = 0$ в форме $f^1 = x\xi + y + \mu$, $f^2 = x\eta + y + \nu$, ранее были обнаружены Е.Л.Лозицким (частное сообщение), остальные же впервые найдены автором. Сформулированная выше теорема утверждает полноту приведенной в ней классификации двуметрик. Доказательство теоремы представляет собой последовательное вычисление по соответствующим из списка **1–36** базисным операторам приведенной в теореме С.Ли классификационной таблицы всех невырожденных локальных действий $\lambda = (\lambda^1(x,y,a^1,\ldots,a^{2n}), \lambda^2(x,y,a^1,\ldots,a^{2n}))$ группы G^{2n} в 2-мерном многообразии $\mathfrak{M}$. Эти действия определяют по формуле (7.8) функцию $f = (f^1, f^2) = (\lambda^1(x,y,w^1(\xi),\ldots,w^{2n}(\xi))$, $\lambda^2(x,y,w^1(\xi),\ldots,w^{2n}(\xi)))$, задающую на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ (2-мерном и $2n$-мерном многообразиях) двуметрическую физическую структуру ранга $(n+1,2)$. Приступим к доказательству.

Пусть сначала $n = 1$. В этом случае действующая группа G^2 и многообразие $\mathfrak{N}$ двумерны. Обозначим локальные координаты ξ^1, ξ^2 в многообразии $\mathfrak{N}$ через ξ, η. В приведенной выше полной классификации С.Ли **1–36** имеются четыре двумерные группы преобразований плоскости, базисные векторные поля X_1, X_2 которых (генераторы по С.Ли) задаются выражениями **18, 27, 29, 30**:

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{18}.\ X_1 = q,\ X_2 = xq;\\ \mathbf{27}.\ X_1 = q,\ X_2 = yq;\\ \mathbf{29}.\ X_1 = q,\ X_2 = xp + yq;\\ \mathbf{30}.\ X_1 = p,\ X_2 = q.\end{array}\right\} \tag{7.19}$$

С помощью экспоненциального отображения (см., например, [41], гл. I, §9) найдем соответствующие локальные действия групп G^2 в 2-мерном многообразии $\mathfrak{M}$:

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{18}.\ \lambda^1 = x,\ \lambda^2 = y + a^2 x + a^1;\\ \mathbf{27}.\ \lambda^1 = x,\ \lambda^2 = y \exp a^2 + a^1;\\ \mathbf{29}.\ \lambda^1 = x \exp a^2,\ \lambda^2 = y \exp a^2 + a^1;\\ \mathbf{30}.\ \lambda^1 = x + a^1,\ \lambda^2 = y + a^2;\end{array}\right\} \tag{7.19$'$}$$

Из четырех локальных действий списка (7.19$'$) только действия **29** и **30** будут невырожденными, так как для них якобианы $\partial(\lambda^1, \lambda^2)/\partial(x, y)$ и $\partial(\lambda^1, \lambda^2)/\partial(a^1, a^2)$ отличны от нуля. Действия **18** и **27** вырождены, так как для них обращается в нуль второй якобиан. Вводя для действия **30** диффеоморфизм $a^1 = \xi,\ a^2 = \eta$, получаем первое выражение (7.9) для функции $f = (f^1, f^2)$, задающей на 2-мерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ двуметрическую физическую структуру ранга (2,2). Второе выражение (7.10) для этой функции получается из действия **29** при масштабном преобразовании $f^1 = \lambda^2/\lambda^1,\ f^2 = \lambda^2$, диффеоморфизме $a^1 = \xi\eta,\ a^2 = \ln \eta$ и следующей замене координат в $\mathfrak{M} : y \to x,\ 1/x \to y$.

Заметим, что вырождение действий **18** и **27** можно было бы установить сразу по выражениям соответстующих базисных операторов из списка (7.19). Действительно, ни одно из них не содержит оператора дифференцирования $p = \partial/\partial x$ и потому $\lambda^1 = x$. Но тогда $\partial(\lambda^1, \lambda^2)/\partial(a^1,\ a^2) = 0$ при любой второй компоненте $\lambda^2(x, y, a^1, a^2)$ действия $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$, что и означает его вырождение. Аналогичные рассуждения позволят в дальнейшем сразу устанавливать, какие базисные операторы классификации С.Ли определяют вырожденные локальные действия $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$, не вычисляя их заранее с помощью экспоненциального отображения.

Пусть, далее, $n = 2$. В этом случае действующая группа G^4 и многообразие $\mathfrak{N}$ четырехмерны. Обозначим локальные координаты $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ в многообразии $\mathfrak{N}$ через ξ, η, μ, ν. Якобиан $\partial(\lambda^1, \lambda^2)/\partial(x, y)$ отличен от нуля, так как действие $\lambda = (\lambda^1(x, y, a^1, a^2, a^3, a^4), \lambda^2(x, y, a^1, a^2, a^3, a^4))$ обратимо. Поэтому оно будет невырожденным, если для плотного и открытого в $\mathfrak{M}^2$ множества пар $< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >$ дополнительно отличен от нуля еще и якобиан $\partial(\lambda^1(1), \lambda^2(1), \lambda^1(2), \lambda^2(2))/\partial(a^1, a^2, a^3, a^4)$, где, например, $\lambda^1(1) = \lambda^1(x_1, y_1, a^1, a^2, a^3, a^4)$.

В классификации С.Ли **1–36** имеются одиннадцать четырехмерных групп преобразований плоскости, базисные векторные поля которых задаются выражениями **7, 9, 10, 11, 12, 15, 17, 18, 22, 24, 33.** Однако в выражениях **11, 12, 17, 18, 22** оператор дифференцирования $p = \partial/\partial x$ присутствует явно не более чем в одном из четырех базисных операторов, что приводит к вырождению соответствующих локальных действий $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$, так как в них компонента действия λ^1 зависит не более чем от одного из четырех параметров $a = (a^1, a^2, a^3, a^4)$ групп G^4. Выпишем ниже только те выражения для операторов X_1, X_2, X_3, X_4, для которых эти действия невырождены:

$$\left.\begin{array}{c}
\mathbf{7}.\ yq,\ p,\ xp,\ x^2p + xyq; \\
\mathbf{9}.\ q,\ xq,\ p,\ xp + cyq,\ c \neq 1; \\
\mathbf{10}.\ q,\ xq,\ p,\ xp + (2y + x^2)q; \\
\mathbf{15}.\ q,\ xq,\ p,\ xp + yq; \\
\mathbf{24}.\ q,\ yq,\ p,\ xp; \\
\mathbf{33}.\ p,\ q,\ xq - yp,\ xp + yq.
\end{array}\right\} \tag{7.20}$$

Соответствующие локальные действия $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ групп G^4 в 2-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ найдем по экспоненциальному отображению:

$$\left.\begin{array}{c}
\mathbf{7}.\ \lambda^1 = ((1 - a^1 + a^3)x + a^2)/(1 - a^4x - a^1), \\
\lambda^2 = y/(1 - a^4x - a^1); \\
\mathbf{9}.\ \lambda^1 = x\exp a^4 + a^3,\ \lambda^2 = y\exp ca^4 + a^2x + a^1; \\
\mathbf{10}.\ \lambda^1 = x\exp a^4 + a^3, \\
\lambda^2 = y\exp 2a^4 + a^2x + x^2a^4\exp 2a^4 + a^1; \\
\mathbf{15}.\ \lambda^1 = x\exp a^4 + a^3,\ \lambda^2 = y\exp a^4 + a^2x + a^1; \\
\mathbf{24}.\ \lambda^1 = x\exp a^4 + a^3,\ \lambda^2 = y\exp a^2 + a^1; \\
\mathbf{33}.\ \lambda^1 = x(\exp a^4 + \cos a^3 - 1) - y\sin a^3 + a^1, \\
\lambda^2 = y(\exp a^4 + cos a^3 - 1) + x\sin a^3 + a^2.
\end{array}\right\} \tag{7.20'}$$

Из шести локальных действий $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ списка (7.20$'$) найдем выражения (7.11–14) для функции $f = (f^1, f^2)$, задающей на 2-мерном и 4-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ двуметрическую физическую структуру ранга (3,2). Двуметрики (7.11), где $\varepsilon = 0, +1, -1$, получаются из локальных действий **15, 24, 33** соответственно; двуметрика (7.12) получается из действия **9**; двуметрика (7.13) – из действия **10** и последняя двуметрика (7.14) – из действия **7**. Локальные диффеоморфизмы $v : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, $w : \mathfrak{N} \to G^4$ и масштабная функция $\psi : R^2 \to R^2$, устанавливающие связь действий $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ и соответствующих двуметрик $f = (f^1, f^2)$, в каждом из шести случаев очевидны.

Рассмотрим теперь случай $n = 3$, когда действующая группа G^6 и многообразие $\mathfrak{N}$ шестимерны. Локальные координаты $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^6$ многообразия $\mathfrak{N}$ обозначим через $\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau$ соответственно. Локальное действие $\lambda = (\lambda^1(x, y, a^1, \dots, a^6), \lambda^2(x, y, a^1, \dots, a^6))$ обратимо и потому $\partial(\lambda^1, \lambda^2)/\partial(x, y) \neq 0$. Невырожденность действия $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ означает, что дополнительно для плотного и открытого в $\mathfrak{M}^3$ множества троек $< (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) >$ отличен от нуля якобиан $\partial(\lambda^1(1), \lambda^2(1), \lambda^1(2), \lambda^2(2), \lambda^1(3), \lambda^2(3))/\partial(a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6)$.

В классификации С.Ли **1–36** имеются тринадцать шестимерных групп преобразований плоскости, базисные векторные поля которых задаются выражениями **2, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 32**. Однако оператор дифференцирования $p = \partial/\partial x$ в выражениях **8, 9, 10, 11, 12, 15, 17, 18** присутствует явно не более чем в двух базисных операторах из шести, что приводит к вырождению соответствующих локальных действий $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$, так как в них компонента λ^1 зависит не более чем от двух из шести параметров $a = (a^1, a^2, \dots, a^6)$ группы G^6. Из перечисленных выше тринадцати выражений для операторов $X_1, X_2, \dots, X_6$ выпишем ниже только те, которые приводят к невырожденным действиям:

$$\left.\begin{array}{c}
\mathbf{2}.\ p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp,\ xp + yq; \\
\mathbf{6}.\ q,\ xq,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2p + xyq; \\
\mathbf{13}.\ q,\ xq,\ x^2q,\ p,\ xp + yq,\ x^2p + 2xyq; \\
\mathbf{19}.\ q,\ yq,\ y^2q,\ p,\ xp,\ x^2p; \\
\mathbf{32}.\ p,\ q,\ xq - yp,\ xp + yq, \\
(x^2 - y^2)p + 2xyq,\ 2xyp + (y^2 - x^2)q.
\end{array}\right\} \tag{7.21}$$

По экспоненциальному отображению найдем соответствующие локальные действия $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ групп G^6 в 2-мерном многообразии $\mathfrak{M}$:

$$\left.\begin{array}{c}
\mathbf{2}.\ \lambda^1 = a^1x + a^2y + a^3,\ \lambda^2 = a^4x + a^5y + a^6;\\
\mathbf{6}.\ \lambda^1 = (a^1x + a^2)/(a^3x + a^4),\\
\lambda^2 = (a^5x + a^6y + a^7)/(a^3x + a^4),\\
\text{где } a^1a^4 - a^2a^3 = 1;\\
\mathbf{13}.\ \lambda^1 = (a^1x + a^2)/(a^3x + a^4),\\
\lambda^2 = (y + a^5x + a^6x^2 + a^7)/(a^3x + a^4)^2,\\
\text{где } a^1a^4 - a^2a^3 = 1;\\
\mathbf{19}.\ \lambda^1 = (a^1x + a^2)/(a^3x + a^4),\\
\lambda^2 = (a^5y + a^6)/(a^7y + a^8),\\
\text{где } a^1a^4 - a^2a^3 = 1,\ a^5a^8 - a^6a^7 = 1;\\
\mathbf{32}.\ \lambda = (az + b)/(cz + d),\\
\text{где } \lambda = \lambda^1 + i\lambda^2,\ z = x + iy,\ a = a^1 + ia^2,\ b = a^3 + ia^4,\\
c = a^5 + ia^6,\ d = a^7 + ia^8,\ i^2 = -1, \text{ причем } ad - bc = 1.
\end{array}\right\} \qquad (7.21')$$

Из пяти локальных действий $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ списка $(7.21')$ найдем выражения (7.15), (7.16), (7.17) для функции $f = (f^1, f^2)$, задающей на 2-мерном и 6-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ двуметрическую физическую структуру ранга (4,2). Двуметрики (7.15), где $\varepsilon = 0, +1, -1$, получаются из локальных действий **13, 19, 32** соответственно; двуметрика (7.16) получается из действия **6**, а двуметрика (7.17) – из действия **2**. Для каждой из двуметрик (7.15–17) очевидны локальные диффеоморфизмы $v : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, $w : \mathfrak{N} \to G^6$ и масштабная функция $\psi : R^2 \to R^2$, устанавливающие их связь с соответствующими локальными действиями из списка $(7.21')$.

Еще рассмотрим случай $n = 4$, когда действующая группа G^8 и многообразие $\mathfrak{N}$ восьмимерны. Локальные координаты $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^8$ в многообразии $\mathfrak{N}$ обозначим через $\xi, \eta, \mu, \nu, \rho, \tau, \varphi, \omega$. По-прежнему якобиан $\partial(\lambda^1, \lambda^2)/\partial(x, y)$ отличен от нуля, так как локальное действие $\lambda = (\lambda^1(x, y, a^1, \dots, a^8), \lambda^2(x, y, a^1, \dots, a^8))$ группы G^8 в $\mathfrak{M}$ обратимо. Невырожденность действия $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ поэтому означает, что дополнительно отличен от нуля якобиан $\partial(\lambda^1(1), \lambda^2(1), \dots, \lambda^1(4), \lambda^2(4))/\partial(a^1, \dots, a^8)$ для открытого и плотного в $\mathfrak{M}^4$ множества четверок $< (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) >$.

В полной классификации С.Ли **1–36** имеется одиннадцать восьмимерных групп преобразований плоскости, базисные векторные поля которых задаются выражениями **1, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 17, 18.** Заметим, однако, что во всех этих выражениях, кроме первого, оператор дифференцирования $p = \partial/\partial x$ присутствует явно не более чем в трех генераторах из восьми, что приводит к вырождению соответствующих локальных действий $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$, так как в них компонента λ^1 зависит не более чем от трех из восьми параметров $a = (a^1, a^2, \ldots, a^8)$ групп G^8. Выпишем поэтому только выражение **1** для операторов $X_1, X_2, \ldots, X_8$:

$$\left.\begin{array}{c} p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ xp + yq, \\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q,\ yp \end{array}\right\} \tag{7.22}$$

и по экспоненциальному отображению найдем соответствующее невырожденное локальное действие $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ группы G^8 в 2-мерном многообразии $\mathfrak{M}$:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^1 = (a^1x + a^2y + a^3)/(a^7x + a^8y + a^9), \\ \lambda^2 = (a^4x + a^5y + a^6)/(a^7x + a^8y + a^9), \end{array}\right\} \tag{7.22$'$}$$

причем $\det a = 1$. По локальному действию (7.22$'$) легко получим выражение (7.18) для функции $f = (f^1, f^2)$, задающей на 2-мерном и 8-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ двуметрическую физическую структуру ранга (5.2).

И в заключение рассмотрим случай $n \geq 5$, когда размерность действующей группы G^{2n} и размерность многообразия $\mathfrak{N}$, равные $2n$, не меньше десяти. В классификации С.Ли **1–36** имеется десять групп преобразований плоскости с такой размерностью. Базисные векторные поля $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$ для них задаются выражениями **5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 17, 18.** Однако во всех этих выражениях оператор дифференцирования $p = \partial/\partial x$ присутствует не более чем для трех базисных операторов. Соответствующие локальные действия $\lambda = (\lambda^1(x, y, a^1, \ldots, a^{2n}), \lambda^2(x, y, a^1, \ldots, a^{2n}))$ оказываются вырожденными, так как первая компонента λ^1 в них зависит не более чем от трех из $2n$ параметров $a = (a^1, \ldots, a^{2n})$ групп G^{2n} и потому для всех кортежей $< (x_1, y_1), \ldots, (x_n,\ y_n) >$ длины n из $\mathfrak{M}^n$ обращается в нуль якобиан $\partial(\lambda^1(1), \lambda^2(1), \ldots,\ \lambda^1(n), \lambda^2(n))/\partial(a^1, a^2, \ldots, a^{2n})$. Поскольку для $n \geq 5$ нет невырожденных локальных действий групп G^{2n} в 2-мерном многообразии $\mathfrak{M}$, по лемме 2 нет также и невырожденных функций $f = (f^1, f^2)$, задающих на 2-мерном и $2n$-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ двуметрические физические структуры ранга $(n + 1, 2)$, то есть двуметрические физические структуры ранга (6,2), (7,2) и т.д., не существуют. Теорема полностью доказана.

Сравним результаты предыдущего §6 по однометрическим физическим структурам ранга $(n+1,2)$ с результатами настоящего §7 по двуметрическим физическим структурам того же ранга. Прежде всего замечаем,что двуметрические структуры, исключая случай $n=4$, то есть ранга (5,2), не единственны. Двуметрики (7.11) и (7.15) могут быть получены комплексификацией соответствующих по рангу структуры однометрических выражений (6.3) и (6.4), которые выпишем здесь в следующем виде:

$$f = x\xi + \mu;\ f = (x\xi+\mu)/(x+\rho). \tag{7.23}$$

Комплексификация состоит из двух этапов: **а)** замены в выражениях (7.23) вещественных функций и координат на комплексные по схеме: $f \to f^1 + ef^2,\ x \to x + ey,\ \xi \to \xi + e\eta,\ \mu \to \mu + e\nu,\ \rho \to \rho + e\tau$, где e – либо обычная мнимая единица ($e^2 = -1$), либо дуальная мнимая единица ($e^2 = 0$), либо двойная мнимая единица ($e^2 = +1$) в зависимости от типа комплексного числа; **б)** отделения вещественной (реальной) и невещественной (мнимой) частей из получающихся комплексных выражений. Дополнительно заметим, что двуметрики (7.11) и (7.15) для случая $\varepsilon = +1$ являются еще и прямой композицией соответствующих однометрических выражений

$$f^1 = x\xi + \mu,\ f^2 = y\eta + \nu; \tag{7.11$'$}$$

$$f^1 = (x\xi+\mu)/(x+\rho),\ f^2 = (y\eta+\nu)/(y+\tau), \tag{7.15$'$}$$

которые могут быть из них получены с помощью некоторой масштабной функции $\psi : R^2 \to R^2$ и удобного переобозначения координат. Выражения (7.11$'$) получаются из двуметрики (7.11) для $\varepsilon = +1$:

$$f^1 = x\xi + y\eta + \mu,\ f^2 = x\eta + y\xi + \nu$$

следующим образом: $f^1 + f^2 \to f^1,\ f^1 - f^2 \to f^2,\ x + y \to x,\ x - y \to y,\ \ \xi + \eta \to \xi,\ \xi - \eta \to \eta,\ \mu + \nu \to \mu,\ \mu - \nu \to \nu$. Выражение же (7.15$'$) получаются из двуметрики (7.15) для $\varepsilon = +1$ с помощью той же масштабной функции, но другой замены координат: $x+y \to y,\ x-y \to x,\ \xi+\eta \to \eta,\ \xi-\eta \to \xi,\ \mu+\nu \to \nu,\ \mu-\nu \to \mu,\ \rho+\tau \to \tau,\ \rho-\tau \to \rho$.

Обратим теперь внимание на уравнение (7.1$'$), которое выражает феноменологическую симметрию двуметрической физической структуры ранга $(n+1,2)$. Не для всех двуметрик (7.9–18) эти уравнения найдены. Выпишем ниже те из них, которые известны:

для двуметрики (7.9):

$$\left.\begin{array}{l} f^1(i\alpha)-f^1(i\beta)-f^1(j\alpha)+f^1(j\beta)=0, \\ f^2(i\alpha)-f^2(i\beta)-f^2(j\alpha)+f^2(j\beta)=0; \end{array}\right\} \tag{7.24}$$

для двуметрики (7.10):

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} f^1(i\alpha)-f^1(i\beta) & f^1(i\alpha)f^2(j\alpha) \\ f^1(j\alpha)-f^1(j\beta) & f^1(j\alpha)f^2(i\alpha) \end{vmatrix} = 0, \\ \\ \begin{vmatrix} f^2(i\alpha)-f^2(j\alpha) & f^2(i\alpha)f^1(i\beta) \\ f^2(i\beta)-f^2(j\beta) & f^2(i\beta)f^1(i\alpha) \end{vmatrix} = 0; \end{array}\right\} \tag{7.25}$$

для двуметрики (7.11) уравнение (7.1′) можно получить, комплексифицируя уравнение (6.3′), то есть подставляя в него комплексную функцию $f = f^1 + ef^2$, где $e^2 = \varepsilon = 0, \pm 1$, и затем отделяя в нем реальную и мнимую части:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^1(j\beta) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1 \end{vmatrix} + \varepsilon \begin{vmatrix} f^2(i\alpha) & f^2(i\beta) & 1 \\ f^2(j\alpha) & f^2(j\beta) & 1 \\ f^2(k\alpha) & f^2(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ \\ \begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\beta) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^2(j\beta) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\beta) & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f^2(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1 \\ f^2(j\alpha) & f^1(j\beta) & 1 \\ f^2(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0; \end{array}\right\} \tag{7.26}$$

для двуметрики (7.12) уравнение (7.1′) найдено А.А.Симоновым (частное сообщение):

$$\hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\frac{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \end{vmatrix}}{(f^1(i\alpha)-f^1(j\alpha))^{c+1}} = 0, \quad \begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^1(j\beta) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{7.27}$$

где $\hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)$ – оператор альтернирования (антисимметризации) по элементам α, β (то есть $\hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha\beta) - \varphi(\beta\alpha)$);

для двуметрики (7.13) уравнение (7.1′) также найдено А.А.Симоновым:

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^1(j\beta) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \\
&\hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)(f^1(i\alpha) - f^1(j\alpha))^{-3}\{\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^2(i\alpha) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^2(j\alpha) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^2(k\alpha) & 1 \end{vmatrix} - \\
&-\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & (f^1(i\alpha))^2 & 1 \\ f^1(j\alpha) & (f^1(j\alpha))^2 & 1 \\ f^1(k\alpha) & (f^1(k\alpha))^2 & 1 \end{vmatrix} \ln(f^1(i\alpha) - f^1(j\alpha))\} = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{7.28}$$

для двуметрики (7.14) уравнение (7.1′) будет следующим:

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{R}}(ij)\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) \\ f^1(k\alpha) & f^1(k\beta) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f^2(j\alpha) & f^2(j\beta) \\ f^2(k\alpha) & f^2(k\beta) \end{vmatrix} = 0, \\
&\hat{\mathbf{R}}(ik)\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) \\ f^1(j\alpha) & f^1(j\beta) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f^2(k\alpha) & f^2(k\beta) \\ f^2(j\alpha) & f^2(j\beta) \end{vmatrix} = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{7.29}$$

уравнение (7.1′) для двуметрики (7.15) можно получить, комплексифицируя уравнение

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\alpha)f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\alpha)f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\alpha)f(k\beta) & 1 \\ f(l\alpha) & f(l\beta) & f(l\alpha)f(l\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{7.30}$$

то есть уравнение (6.4′), полагая в нем $f = f^1 + ef^2$, где $e^2 = \varepsilon = 0, \pm 1$, и отделяя затем реальную и мнимую части;

для двуметрики (7.16) уравнение (7.1′) пока не найдено;

для двуметрики (7.17) уравнение (7.1′) легко находится, так же как и для двуметрики (7.14):

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{R}}(ij)\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1 \\ f^1(l\alpha) & f^1(l\beta) & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f^2(j\alpha) & f^2(j\beta) & 1 \\ f^2(k\alpha) & f^2(k\beta) & 1 \\ f^2(l\alpha) & f^2(l\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0, \\
&\hat{\mathbf{R}}(kl)\begin{vmatrix} f^1(i\alpha) & f^1(i\beta) & 1 \\ f^1(j\alpha) & f^1(j\beta) & 1 \\ f^1(k\alpha) & f^1(k\beta) & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f^2(i\alpha) & f^2(i\beta) & 1 \\ f^2(j\alpha) & f^2(j\beta) & 1 \\ f^2(l\alpha) & f^2(l\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{7.31}$$

для последней двуметрики (7.18), задающей физическую структуру ранга (5,2), уравнение (7.1′), тоже пока не найдено, как и для двуметрики (7.16).

Таким образом, из десяти двуметрик (7.9–18) только для двух, а именно (7.16) и (7.18) неизвестны уравнения (7.1′), выражающие феноменологическую симметрию соответствующих физических структур ранга (4,2) и (5,2).

Полная классификация двуметрических физических структур ранга $(n+1, m+1)$ для $n \geq m \geq 2$ пока не проведена. Некоторые двуметрики для рангов $(m+1, m+1)$ и $(m+1, m)$ можно найти комплексификацией выражений (2.5–6) и (2.7) соответственно для однометрических физических структур того же ранга.

Двуметрики (7.9) и (7.10), задающие на двумерных многообразиях физические структуры ранга (2,2), можно использовать для одновременного определения в R^2 двух бинарных операций – сложения и умножения:

$$(x, y) \oplus (\xi, \eta) = (x + \xi, y + \eta), \tag{7.32}$$

$$(x, y) \odot (\xi, \eta) = ((x + \xi)y, (x + \xi)\eta). \tag{7.33}$$

Сложение (7.32) обычное, а умножение (7.33) не обладает привычными свойствами умножения: оно некоммутативно, неассоциативно, недистрибутивно относительно сложения (7.32) и не допускает обратную операцию деления. Поэтому, сохраняя сложение (7.32), определим умножение в R^2 с помощью любой из трех двуметрик (7.11), (7.12), (7.13), задающих на 2-мерном и 4-мерном многообразиях физическую структуру ранга (3,2), опуская в них аддитивные координаты μ и ν:

$$(x, y) \odot (\xi, \eta) = (x\xi + \varepsilon y\eta, x\eta + y\xi), \ \varepsilon = 0, \pm 1; \tag{7.34}$$

$$(x, y) \odot (\xi, \eta) = (x\xi, x\eta + y\xi^c), \ c \neq 1; \tag{7.35}$$

$$(x,y)\odot(x\xi, x\eta+y\xi^2+x^2\xi^2\ln\xi). \tag{7.36}$$

Умножение (7.34) коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно. Единица умножения равна (1,0). Деление на (x,y) возможно, если $x^2-\varepsilon y^2\neq 0$. Ясно, что элементы плоскости R^2 с операциями (7.32) и (7.34) оказываются комплексными числами трех типов: обычными ($\varepsilon=-1$), дуальными ($\varepsilon=0$) или двойными ($\varepsilon=+1$). Умножение (7.35) некоммутативно, ассоциативно, дистрибутивно справа, но не дистрибутивно слева. Деление на (x,y) возможно, если $x\neq 0$, единица равна (1,0). Умножение (7.36) некоммутативно, неассоциативно и недистрибутивно. Деление на (x,y) возможно, если $x\neq 0$, левая единица равна (1,0), а правая отсутствует.

Замечаем, что из из четырех бинарных операций (7.33), (7.34), (7.35), (7.36), интерпретируемых как умножение, только операция (7.34) позволяет задать в R^2 структуру кольца, поскольку только она дистрибутивна по отношению к сложению (7.32). Операция (7.34) является также единственной операцией умножения, которую можно однозначно определить при сложении (7.32) с помощью двуметрики (7.15), задающей физическую структуру ранга (4,2). Двуметрики (7.16) и (7.17) структуры ранга (4,2), а также двуметрики (7.14) и (7.18) структур ранга (3,2) и (5,2) не могут определять при сложении (7.32) бинарных операций умножения. Отмеченное обстоятельство можно рассматривать как своего рода обоснование введения трех типов комплексных чисел. Содержательный физический и математический смысл трех бинарных операций умножения (7.33), (7.35), (7.36) пока остается неясным. Поэтому имеет смысл более детально исследовать алгебры с этими операциями.

В заключение отметим, что коммутативные гиперкомплексные числа размерности $s\geq 3$ должны естественным образом появиться при рассмотрении s-метрических физических структур ранга (3,2).

Основные результаты настоящего параграфа опубликованы авторм в работах [15] и [16].

§8. Триметрическая физическая структура ранга (2,2)

Согласно общему определению s-метрической физической структуры ранга $(n+1,m+1)$, данному в §1, триметрическая структура ранга (2,2), для которой $s=3$, $m=1$, $n=1$, задается функцией

$f = (f^1, f^2, f^3)$ на 3-мерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Обозначим локальные координаты в этих многообразиях через x, y, z и ξ, η, ϑ. Тогда локальное представление триметрики f запишется в следующем виде:

$$f = f(x, y, z, \xi, \eta, \vartheta), \tag{8.1}$$

причем для конкретной пары $< i\alpha >$ из области ее определения $\mathfrak{S}_f$ будем иметь:

$$f(i\alpha) = f(x(i), y(i), z(i), \xi(\alpha), \eta(\alpha), \vartheta(\alpha)). \tag{8.1$'$}$$

Невырожденность триметрики (8.1) означает отличие от нуля двух якобианов:

$$\frac{\partial(f^1(i\gamma), f^2(i\gamma), f^3(i\gamma))}{\partial(x(i), y(i), z(i))} \neq 0, \ \frac{\partial(f^1(k\alpha), f^2(k\alpha), f^3(k\alpha))}{\partial(\xi(\alpha), \eta(\alpha), \vartheta(\alpha))} \neq 0 \tag{8.2}$$

для плотных множеств пар $< i\gamma > \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ и $< k\alpha > \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$.

Феноменологическая симметрия рассматриваемой физической структуры выражается уравнением

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)) = 0, \tag{8.3}$$

в котором независимы все три компоненты функции $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$. А это означает, что множество значений функции $F : \mathfrak{S}_F \to R^{12}$, где $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^3$ – естественная ее область определения, локально принадлежит девятимерной поверхности в R^{12}, задаваемой тремя уравнениями $\Phi = 0$.

По теореме 2 из §1 функция (8.1), задающая на 3-мерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ триметрическую физическую структуру ранга (2,2), допускает трехмерную группу движений, состоящую из двух действий группы G^3 в этих многообразиях. Выпишем явно действия этой группы в $\mathfrak{M}$:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda(x, y, z; a^1, a^2, a^3), \\ y' &= \sigma(x, y, z; a^1, a^2, a^3), \\ z' &= \tau(x, y, z; a^1, a^2, a^3), \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

где $a = (a^1, a^2, a^3) \in G^3$. Действие же группы G^3 во втором многообразии $\mathfrak{N}$ записывается аналогично:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \tilde{\lambda}(\xi, \eta, \vartheta; a^1, a^2, a^3), \\ \eta' &= \tilde{\sigma}(\xi, \eta, \vartheta; a^1, a^2, a^3), \\ \vartheta' &= \tilde{\tau}(\xi, \eta, \vartheta; a^1, a^2, a^3), \end{aligned}\right\} \tag{8.4$'$}$$

причем функции $\tilde{\lambda}, \tilde{\sigma}, \tilde{\tau}$, задающие это действие, не обязательно совпадают с функциями λ, σ, τ в действии (8.4). Но если действия (8.4) и (8.4′) эквивалентны в смысле определения 4 из §3, то всегда можно найти такие системы координат в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, для которых $\lambda = \tilde{\lambda}$, $\sigma = \tilde{\sigma}$, $\tau = \tilde{\tau}$.

Инвариантность триметрики (8.1) относительно группы движений, состоящей из действий (8.4) и (8.4′), означает ее сохранение согласно уравнению

$$f(x', y', z', \xi', \eta', \vartheta') = f(x, y, z, \xi, \eta, \vartheta), \tag{8.5}$$

которое для каждой ее компоненты f^1, f^2, f^3 выполняется тождественно по координатам точек многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, а также параметрам a^1, a^2, a^3 группы G^3.

Три леммы предыдущего §7 верны и для триметрических физических структур, так как в их доказательствах двуметричность существенной роли не играла. Поэтому выпишем соответствующие три леммы для нашего случая, опуская доказательства, которые проводятся совершенно аналогично.

Лемма 1. *В группе движений невырожденной трехкомпонентной функции* (8.1) *локальные действия* (8.4) *и* (8.4′) *группы* G^3 *в* 3*-мерных многообразиях* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *локально транзитивны.*

Лемма 2. *В группе движений невырожденной трехкомпонентной функции* (8.1) *локальное действие* (8.4) *группы* G^3 *в* 3*-мерном многообразии* $\mathfrak{M}$ *совпадает с этой функцией с точностью до масштабного преобразования* $\psi : R^3 \to R^3$ *и локальных диффеоморфизмов* $v : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ *и* $w : \mathfrak{N} \to G^3$.

Лемма 3. *Всякое невырожденное локальное действие* (8.4) *группы* G^3 *в* 3*-мерном многообразии* $\mathfrak{M}$ *совпадает с точностью до масштабного преобразованя* $\psi : R^3 \to R^3$ *и локальных диффеоморфизмов* $v : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ *и* $w : \mathfrak{N} \to G^3$ *с некоторой функцией* (8.1), *задающей на* 3*-мерных многообразиях* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *триметрическую физическую структуру ранга* (2, 2).

Таким образом, полная классификация триметрических физических структур ранга (2,2) совпадает с полной классификацией невырожденных локальных действий (8.4), которые по лемме 1 должны быть локально транзитивны. Невырожденность действия (8.4) по параметрам группы G^3 означает отличие от нуля следующего якобиана:

$$\partial(\lambda, \sigma, \tau)/\partial(a^1, a^2, a^3) \neq 0. \tag{8.6}$$

Невырожденность же этого действия по координатам многообразия $\mathfrak{M}$, то есть неравенство нулю второго якобиана:

$$\partial(\lambda, \sigma, \tau)/\partial(x, y, z) \neq 0, \tag{8.6'}$$

связана с его обратимостью.

В отличие от плоскости R^2, для которой Софус Ли еще в 1883 году нашел все конечномерные локальные группы преобразований (см. список алгебр в теореме С.Ли из §7), аналогичной классификации для 3-мерного пространства R^3 до настоящего времени никто не построил. Поэтому ниже с точностью до эквивалентности будет проведена полная классификация локально транзитивных действий (8.4), достаточная, согласно леммам 2,3, для классификации всех триметрических физических структур ранга (2,2), задаваемых функцией (8.1) на 3-мерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Обозначим через

$$X_\omega = \lambda_\omega(x, y, z)\partial_x + \sigma_\omega(x, y, z)\partial_y + \tau_\omega(x, y, z)\partial_z, \tag{8.7}$$

где $\omega = 1, 2, 3$, инфинитезимальные операторы группы преобразований (8.4). Поскольку группа G^3 действует в 3-мерном многообразии $\mathfrak{M}$ эффективно, операторы X_ω линейно независимы с постоянными коэффициентами и образуют естественный базис трехмерной алгебры Ли преобразований $\mathfrak{M}$, которая соответствует группе (8.4). Действие группы G^3 в $\mathfrak{M}$ будет, очевидно, локально транзитивным только в том случае, если

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(x, y, z) & \sigma_1(x, y, z) & \tau_1(x, y, z) \\ \lambda_2(x, y, z) & \sigma_2(x, y, z) & \tau_2(x, y, z) \\ \lambda_3(x, y, z) & \sigma_3(x, y, z) & \tau_3(x, y, z) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{8.8}$$

Полная с точностью до изоморфизма классификация трехмерных вещественных абстрактных алгебр Ли была дана Бианки в 1918 г. Приведем ее здесь по монографии [37], записывая соответствующие выражения для трех возможных коммутаторов $[X_1, X_2]$, $[X_3, X_1]$, $[X_2, X_3]$ базисных операторов X_1, X_2, X_3:

$$0,\ 0,\ 0; \tag{8.9}$$

$$0,\ 0,\ X_1; \tag{8.10}$$

$$0,\ -X_1,\ X_1+X_2; \tag{8.11}$$

$$0,\ -X_1,\ pX_2; \tag{8.12}$$

$$0,\ -X_2,\ -X_1+qX_2; \tag{8.13}$$

$$X_3,\ X_2,\ X_1; \tag{8.14}$$

$$X_3,\ X_2,\ -X_1, \tag{8.15}$$

где $-1 \le p \le +1;\ 0 \le q < 2.$

Теорема 1. *Базисные операторы* (8.7) *трехмерной алгебры Ли локальной группы Ли локально транзитивных преобразований* 3*-мерного пространства* R^3, *имеющей в базисе* X_1, X_2, X_3 *структуру коммутационных соотношений* $(8.9-15)$, *в надлежаще выбранной системе локальных координат* x, y, z *задаются следующими выражениями:*

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z; \tag{8.9$'$}$$

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = y\partial_x + \partial_z; \tag{8.10$'$}$$

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = (x+y)\partial_x + y\partial_y + \partial_z; \tag{8.11$'$}$$

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = x\partial_x + py\partial_y + \partial_z; \tag{8.12$'$}$$

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = -y\partial_x + (x+qy)\partial_y + \partial_z; \tag{8.13$'$}$$

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = \partial_x, \\ X_2 = tg\ y \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \sec y \sin x\partial_z, \\ X_3 = tg\ y \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \sec y \cos x\partial_z; \end{array}\right\} \tag{8.14$'$}$$

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = \partial_x, \\ X_2 = \sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \exp y \sin x\partial_z, \\ X_3 = \cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \exp y \cos x\partial_z, \end{array}\right\} \tag{8.15$'$}$$

где $-1 \le p \le +1;\ 0 \le q < 2.$

Произведем в R^3 локально обратимую гладкую замену координат

$$\xi = \varphi(x,y,z),\ \eta = \psi(x,y,z),\ \vartheta = \kappa(x,y,z), \tag{8.16}$$

причем $\partial(\varphi, \psi, \kappa)/\partial(x, y, z) \neq 0$. В новых координатах ξ, η, ϑ для операторов (8.7) будем иметь следующие выражения:

$$
\begin{gathered}
X_\omega = (\lambda_\omega \varphi_x + \sigma_\omega \varphi_y + \tau_\omega \varphi_z)\partial_\xi + \\
+(\lambda_\omega \psi_x + \sigma_\omega \psi_y + \tau_\omega \psi_z)\partial_\eta + (\lambda_\omega \kappa_x + \sigma_\omega \kappa_y + \tau_\omega \kappa_z)\partial_\vartheta.
\end{gathered} \tag{8.17}
$$

Пусть функции φ, ψ, κ в замене координат (8.16) являются независимыми решениями системы уравнений

$$
\left.
\begin{array}{l}
\lambda_1 \varphi_x + \sigma_1 \varphi_y + \tau_1 \varphi_z = 1, \\
\lambda_1 \psi_x + \sigma_1 \psi_y + \tau_1 \psi_z = 0, \\
\lambda_1 \kappa_x + \sigma_1 \kappa_y + \tau_1 \kappa_z = 0,
\end{array}
\right\} \tag{8.18}
$$

в которой, очевидно, $\lambda_1^2 + \sigma_1^2 + \tau_1^2 \neq 0$. Тогда для оператора X_1 получаем максимально простое выражение: $X_1 = \partial_\xi$. Возвращаясь в (8.17) к прежним обозначениям коэффициентов и координат, можем записать:

$$
\left.
\begin{array}{c}
X_1 = \partial_x, \\
X_2 = \lambda_2(x, y, z)\partial_x + \sigma_2(x, y, z)\partial_y + \tau_2(x, y, z)\partial_z, \\
X_3 = \lambda_3(x, y, z)\partial_x + \sigma_3(x, y, z)\partial_y + \tau_3(x, y, z)\partial_z.
\end{array}
\right\} \tag{8.19}
$$

В выражениях (8.19) $\lambda_1 = 1, \ \sigma_1 = 0, \ \tau_1 = 0$. Система уравнений (8.18) с такими коэффициентами значительно упрощается: $\varphi_x = 1, \ \psi_x = 0, \ \kappa_x = 0$ и ее независимые решения

$$
\xi = x + \varphi(y, z), \ \eta = \psi(y, z), \ \vartheta = \kappa(y, z), \tag{8.20}
$$

в которых $\partial(\psi, \kappa)/\partial(y, z) \neq 0$, определяют такую замену координат в R^3, которая за оператором X_1 сохраняет его простейшую форму.

По классификации (8.9–15) коммутатор $[X_1, X_2]$ либо равен нулю, либо совпадает с оператором X_3. Рассмотрим сначала первый случай:

$$
[X_1, X_2] = 0. \tag{8.21}
$$

Подставим в коммутатор (8.21) выражения (8.19) для операторов X_1 и X_2. В результате получаем уравнения $\lambda_{2x} = 0, \ \sigma_{2x} = 0, \ \tau_{2x} = 0$ с решениями $\lambda_2 = \lambda(y, z), \ \sigma_2 = \sigma(y, z), \ \tau_2 = \tau(y, z)$ и потому

$$
X_2 = \lambda(y, z)\partial_x + \sigma(y, z)\partial_y + \tau(y, z)\partial_z. \tag{8.22}
$$

Если в операторах (8.19) $\sigma_2 = 0$ и $\tau_2 = 0$, то не будет выполняться условие локальной транзитивности (8.8), то есть в операторе (8.22) должно быть $\sigma^2+\tau^2\neq 0$. Осуществим в нем допустимую замену координат (8.20):

$$X_2=(\lambda+\sigma\varphi_y+\tau\varphi_z)\partial_\xi+(\sigma\psi_y+\tau\psi_z)\partial_\eta+(\sigma\kappa_y+\tau\kappa_z)\partial_\vartheta.$$

Пусть функции φ,ψ,κ являются решениями уравнений $\lambda+\sigma\varphi_y+\tau\varphi_z=0$, $\sigma\psi_y+\tau\psi_z=1$, $\sigma\kappa_y+\tau\kappa_z=0$ с $\partial(\psi,\kappa)/\partial(y,z)\neq 0$. Тогда для оператора X_2 получаем: $X_2=\partial_\eta$ и, возвращаясь к прежним обозначениям координат, приходим к выражениям

$$\left.\begin{array}{c} X_1=\partial_x,\ X_2=\partial_y, \\ X_3=\lambda(x,y,z)\partial_x+\sigma(x,y,z)\partial_y+\tau(x,y,z)\partial_z \end{array}\right\} \tag{8.23}$$

с допустимой заменой координат

$$\xi=x+\varphi(z),\ \eta=y+\psi(z),\ \vartheta=\kappa(z), \tag{8.24}$$

в которой $\kappa'(z)\neq 0$.

Обратимся теперь ко второму коммутатору $[X_3,X_1]$, который для случая (8.21) согласно классификации (8.9–15) может быть равен 0, $-X_1$, $-X_2$. Пусть

$$[X_3,X_1]=0. \tag{8.25}$$

Подставляя операторы (8.23) в коммутатор (8.25), получаем уравнения $\lambda_x=0$, $\sigma_x=0$, $\tau_x=0$ с решениями $\lambda=\lambda(y,z)$, $\sigma=\sigma(y,z)$, $\tau=\tau(y,z)$, то есть вместо (8.23) можем записать

$$\left.\begin{array}{c} X_1=\partial_x,\ X_2=\partial_y, \\ X_3=\lambda(y,z)\partial_x+\sigma(y,z)\partial_y+\tau(y,z)\partial_z. \end{array}\right\} \tag{8.26}$$

Выясним теперь, какие возникают дополнительные ограничения на выражения (8.26), если третий коммутатор обращается в ноль: $[X_2,X_3]=0$. Подставляя в это условие операторы (8.26), получаем уравнения $\lambda_y=0$, $\sigma_y=0$, $\tau_y=0$ и, соответственно, для оператора X_3 выражение:

$$X_3=\lambda(z)\partial_x+\sigma(z)\partial_y+\tau(z)\partial_z,$$

в котором произведем допустимую замену координат (8.24):

$$X_3=(\lambda+\tau\varphi')\partial_\xi+(\sigma+\tau\psi')\partial_\eta+\tau\kappa'\partial_\vartheta.$$

По условию (8.8) $\tau\neq 0$ и потому функции φ,ψ,κ можно взять из решений уравнений $\lambda+\tau\varphi'=0$, $\sigma+\tau\psi'=0$, $\tau\kappa'=1$. В результате получаем: $X_3=\partial_\vartheta$ и, в прежних обозначениях, операторы (8.9′).

Итак, для абелевой алгебры (8.9) получено с точностью до эквивалентности одно представление операторами локально транзитивных преобразований пространства R^3, задаваемое выражениями (8.9′) в формулировке теоремы 1.

Пусть, далее, операторы (8.26) удовлетворяют коммутационному условию $[X_2, X_3] = X_1$ алгебры (8.10). Подставляя в это условие операторы (8.26), получаем уравнения $\lambda_y = 1,\ \sigma_y = 0,\ \tau_y = 0$ и после их интегрирования для оператора X_3 выражение

$$X_3 = (y + \lambda(z))\partial_x + \sigma(z)\partial_y + \tau(z)\partial_z.$$

Произведем в нем допустимую замену координат (8.24):

$$X_3 = (y + \lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (\sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\kappa'\partial_\vartheta.$$

Поскольку $\tau \neq 0$, функции φ, ψ, κ возьмем из решений уравнений $\tau\kappa' = 1,\ \sigma + \tau\psi' = 0,\ -\psi + \lambda + \tau\varphi' = 0$, то есть $X_3 = \eta\partial_\xi + \partial_\vartheta$ и в прежних обозначениях координат получаем выражения (8.10′) базисных операторов представления алгебры (8.10).

Выше был полностью рассмотрен случай коммутирования по условию (8.25) операторов X_1 и X_3. Перейдем теперь ко второму случаю из трех возможных, когда коммутатор $[X_3, X_1]$ по классификации (8.9–15) при условии (8.21) равен $-X_1$:

$$[X_3, X_1] = -X_1. \tag{8.27}$$

Подставим операторы (8.23), удовлетворяющие условию (8.21), в коммутатор (8.27). Интегрируя получающиеся при этом уравнения $\lambda_x = 1$, $\sigma_x = 0$, $\tau_x = 0$, приходим к таким выражениям:

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y, \\ X_3 = (x + \lambda(y,z))\partial_x + \sigma(y,z)\partial_y + \tau(y,z)\partial_z \end{array}\right\} \tag{8.28}$$

с допустимой заменой координат (8.24).

Операторы (8.28) удовлетворяют двум коммутационным соотношениям (8.21) и (8.27). По общей классификации (8.9–15) третий коммутатор $[X_2, X_3]$ может принимать при этом значения $X_1 + X_2$ и pX_2, где $-1 \leq p \leq +1$. Рассмотрим отдельно эти два случая. Предположим сначала, что $[X_2, X_3] = X_1 + X_2$. Подставляя в это условие операторы (8.28) и интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda_y = 1,\ \sigma_y = 1,\ \tau_y = 0$, для оператора X_3 получаем выражение

$$X_3 = (x + y + \lambda(z))\partial_x + (y + \sigma(z))\partial_y + \tau(z)\partial_z,$$

в котором произведем замену координат (8.24):

$$X_3 = (x + y + \lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (y + \sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\kappa'\partial_\vartheta.$$

По условию локальной транзитивности (8.8) $\tau \neq 0$ и потому функции φ, ψ, κ можно взять из решений системы уравнений $\lambda - \varphi - \psi + \tau\varphi' = 0,\ \sigma - \psi + \tau\psi' = 0,\ \tau\kappa' = 1$. Для оператора X_3 имеем тогда выражение $X_3 = (\xi+\eta)\partial_\xi + \eta\partial_\eta + \partial_\vartheta$ и в прежних обозначениях координат получаем базисные операторы ($8.11'$) представления алгебры (8.11).

Предположим теперь, что $[X_2, X_3] = pX_2$, где $-1 \leq p \leq +1$. Подставим в этот коммутатор операторы (8.28). Интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda_y = 0,\ \sigma_y = p,\ \tau_y = 0$, для операторя X_3 приходим к выражению

$$X_3 = (x + \lambda(z))\partial_x + (py + \sigma(z))\partial_y + \tau(z)\partial_z,$$

в котором произведем допустимую замену координат (8.24):

$$X_3 = (x + \lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (py + \sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\kappa'\partial_\vartheta.$$

Поскольку по условию (8.8) в операторах (8.28) $\tau \neq 0$, функции φ, ψ, κ можно взять из решений системы уравнений $\lambda - \varphi + \tau\varphi' = 0,\ \sigma - p\psi + \tau\psi' = 0,\ \tau\kappa' = 1$. Для оператора X_3 приходим к выражению $X_3 = \xi\partial_\xi + p\eta\partial_\eta + \partial_\vartheta$, а после возвращения к прежним обозначениям координат получаем базисные операторы ($8.12'$) представления алгебры (8.12).

Вернемся к операторам (8.23), подчиняющимся коммутационному соотношению (8.21), и потребуем, чтобы они удовлетворяли также соотношению

$$[X_3, X_1] = -X_2, \tag{8.29}$$

входящему в алгебру (8.13). Подставим в соотношение (8.29) операторы (8.23). Интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda_x = 0,\ \sigma_x = 1,\ \tau_x = 0$, получаем выражения

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y, \\ X_3 = \lambda(y,z)\partial_x + (x + \sigma(y,z))\partial_y + \tau(y,z)\partial_z \end{array}\right\} \tag{8.30}$$

с допустимой заменой координат (8.24).

Операторы (8.30) удовлетворяют соотношениям (8.21) и (8.29). Потребуем для них выполнения еще и третьего коммутационного соотношения $[X_2, X_3] = -X_1 + qX_2$, где $0 \leq q < 2$, входящего в алгебру (8.13).

Интегрируя возникающие при этом уравнения $\lambda_y = -1,\ \sigma_y = q,\ \tau_y = 0$, приходим к следующему выражению для оператора X_3:

$$X_3 = (-y + \lambda(z))\partial_x + (x + qy + \sigma(z))\partial_y + \tau(z)\partial_z,$$

в котором произведем допустимую замену координат (8.24):

$$X_3 = (-y + \lambda + \tau\varphi')\partial_\xi + (x + qy + \sigma + \tau\psi')\partial_\eta + \tau\kappa'\partial_\vartheta.$$

Поскольку $\tau \neq 0$, функции φ, ψ, κ можно взять из решений системы уравнений $\lambda + \psi + \tau\varphi' = 0,\ \sigma - \varphi + q\psi + \tau\psi' = 0,\ \tau\kappa' = 1$ и тогда $X_3 = -\eta\partial_\xi + (\xi + q\eta)\partial_\eta + \partial_\vartheta$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем базисные операторы (8.13′) представления алгебры (8.13).

Выше был полностью рассмотрен случай, когда по классификации (8.9–15) первый коммутатор $[X_1, X_2]$ обращается в ноль. Перейдем к исследованию второго возможного случая, когда этот коммутатор отличен от нуля:

$$[X_1, X_2] = X_3. \tag{8.31}$$

При подстановке операторов (8.19) в коммутационное соотношение (8.31) устанавливаются следующие связи: $\lambda_{2x} = \lambda_3,\ \sigma_{2x} = \sigma_3,\ \tau_{2x} = \tau_3$, используя которые перепишем эти операторы, опустив для сокращения записи индекс " 2 ":

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \lambda(x,y,z)\partial_x + \sigma(x,y,z)\partial_y + \tau(x,y,z)\partial_z, \\ X_3 &= \lambda_x(x,y,z)\partial_x + \sigma_x(x,y,z)\partial_y + \tau_x(x,y,z)\partial_z, \end{aligned}\right\} \tag{8.32}$$

причем замена координат (8.20) по-прежнему остается допустимой.

Пусть еще для операторов (8.32) выполняется второе коммутационное соотношение алгебр (8.14) и (8.15):

$$[X_3, X_1] = X_2. \tag{8.33}$$

При подстановке операторов (8.32) в соотношение (8.33) получаем уравнения $\lambda_{xx} + \lambda = 0,\ \sigma_{xx} + \sigma = 0,\ \tau_{xx} + \tau = 0$, общие решения которых хорошо известны:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(x,y,z) &= \lambda(y,z)\sin x + \mu(y,z)\cos x, \\ \sigma(x,y,z) &= \sigma(y,z)\sin x + \nu(y,z)\cos x, \\ \tau(x,y,z) &= \tau(y,z)\sin x + \rho(y,z) cos x, \end{aligned}\right\} \tag{8.34}$$

где по условию локальной транзитивности (8.8) $\sigma^2+\nu^2 \neq 0,\ \tau^2+\rho^2 \neq 0$.

Произведем в операторах (8.32) с коэффициентами (8.34) допустимую замену координат (8.20). Фунцию φ возьмем из решений уравнения $\mu\cos\varphi - \lambda\sin\varphi + (\nu\cos\varphi - \sigma\sin\varphi)\varphi_y + (\rho\cos\varphi - \tau\sin\varphi)\varphi_z = 0$. Если $\nu\sin\varphi + \sigma\cos\varphi = 0$ и $\rho\sin\varphi + \tau\cos\varphi = 0$ (и потому, очевидно, $\nu\cos\varphi - \sigma\sin\varphi \neq 0$ и $\rho\cos\varphi - \tau\sin\varphi \neq 0$), то, беря функцию κ из решений уравнения $(\nu\cos\varphi - \sigma\sin\varphi)\kappa_y + (\rho\cos\varphi - \tau\sin\varphi)\kappa_z = 0$, приходим к противоречию с условием (8.8). Аналогичная ситуация возникает и при $\nu\cos\varphi - \sigma\sin\varphi = 0$ и $\rho\cos\varphi - \tau\sin\varphi = 0$. Поэтому будем предполагать, что $\nu\sin\varphi + \sigma\cos\varphi \neq 0$ или $\rho\sin\varphi + \tau\cos\varphi \neq 0$ и $\nu\cos\varphi - \sigma\sin\varphi \neq 0$ или $\rho\cos\varphi - \tau\sin\varphi \neq 0$. Функции ψ и κ возьмем из решений уравнений

$$(\nu\sin\varphi + \sigma\cos\varphi)\psi_y + (\rho\sin\varphi + \tau\cos\varphi)\psi_z = 0,$$

$$(\nu\cos\varphi - \sigma\sin\varphi)\kappa_y + (\rho\cos\varphi - \tau\sin\varphi)\kappa_z = 1,$$

которые всегда имеют независимые решения. Действительно, если $\nu\tau - \sigma\rho = 0$, то независимы отличное от постоянной решение ψ первого уравнения и любое решение κ второго уравнения. Если же $\nu\tau - \sigma\rho \neq 0$, то независимы отличные от постоянных решения ψ и κ_0 первого уравнения и однородной части второго. Поэтому, если решение ψ и некоторое частное решение κ_1 второго уравнения окажутся зависимыми, то независимыми будут, очевидно, решения ψ и $\kappa = \kappa_0 + \kappa_1$. Для оператора X_2, например, в прежних обозначениях можем записать тогда следующее выражение:

$$X_2 = \lambda(y,z)\sin x\partial_x + \nu(y,z)\cos x\partial_y + (\tau(y,z)\sin x + \cos x)\partial_z. \quad (8.35)$$

Произведем в нем допустимую замену координат (8.20) с $\varphi(y,z) = 0$:

$$\begin{aligned} X_2 = \lambda\sin x\partial_\xi + (\tau\psi_z\sin x + (\nu\psi_y + \psi_z)\cos x)\partial_\eta + \\ + (\tau\kappa_z\sin x + (\nu\kappa_y + \kappa_z)\cos x)\partial_\vartheta. \end{aligned} \quad (8.35')$$

Если $\tau = 0$, то полагаем $\nu\kappa_y + \kappa_z = 0$. Если же $\tau \neq 0$, но $\nu = 0$, то полагаем $\kappa_z = 0$. В обоих случаях приходим к противоречию с условием (8.8). Поэтому будем предполагать ниже, что одновременно $\tau \neq 0$ и $\nu \neq 0$.

Забегая несколько вперед, подставим операторы (8.32) с явным выражением (8.35) в третий коммутатор $[X_2, X_3] = \varepsilon X_1$ алгебр (8.14) и (8.15), где $\varepsilon = +1$ и $\varepsilon = -1$ соответственно. При такой подстановке, в частности, получается уравнение $\tau\nu_z = 0$, из которого при $\tau \neq 0$ следует $\nu_z = 0$, то есть $\nu(y,z) = \nu(y)$. Поэтому функции ψ и κ в операторе (8.35′) возьмем из независимых решений уравнений $\psi_z = 0,\ \nu\psi_y = 1,\ \nu\kappa_y + \kappa_z = 0$ с $\kappa_z \neq 0$ и тогда

$$X_2 = \tilde{\lambda}(\eta,\vartheta)\sin\xi\partial_\xi + \cos\xi\partial_\eta + \tilde{\tau}(\eta,\vartheta)\sin\xi\partial_\vartheta.$$

Возвращаясь к прежним обозначениям коэффициетов и координат, для операторов X_1, X_2, X_3 получаем следующие выражения:

$$\left.\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \\ X_2 = \lambda(y,z)\sin x\partial_x + \cos x\partial_y + \tau(y,z)\sin x\partial_z, \\ X_3 = \lambda(y,z)\cos x\partial_x - \sin x\partial_y + \tau(y,z)\cos x\partial_z, \end{gathered}\right\} \tag{8.36}$$

где, очевидно, $\tau \neq 0$.

Операторы (8.36) удовлетворяют первым двум коммутационным соотношениям (8.31) и (8.33) алгебр (8.14), (8.15). Предположим, что они удовлетворяют еще и третьему коммутационному соотношению $[X_2, X_3] = X_1$ алгебры (8.14). Уравнения $\lambda_y = \lambda^2 + 1$ и $\tau_y - \lambda\tau = 0$, возникающие при этом, легко интегрируются:

$$\lambda(y,z) = \mathrm{tg}(y + a(z)),\ \ \tau(y,z) = \tau(z)\sec(y + a(z)), \tag{8.37}$$

где $a(z)$ и $\tau(z)$ – произвольные функции одной переменной, причем $\tau(z) \neq 0$.

Произведем в операторах (8.36) с коэффициентами (8.37) замену координат (8.24), полагая в ней $\varphi(z) = 0,\ \psi(z) = a(z)$ и $\tau(z)\kappa'(z) = 1$. Для оператора X_2, например, в прежних обозначениях получим такое выражение:

$$X_2 = \mathrm{tg}y\sin x\partial_x + (\cos x + \sigma(z)\sec y\sin x)\partial_y + \sec y\sin x\partial_z,$$

где $\sigma(z)$ – произвольная функция одной переменной. В последнем выражении произведем общую допустимую замену координат (8.20). Функции φ, ψ, κ при этом возьмем из решений следующей системы шести уравнений:

$$\left.\begin{gathered} \varphi_y = \sin\varphi\mathrm{tg}\psi,\ \ \psi_y = \cos\varphi,\ \ \kappa_y = \sin\varphi\sec\psi, \\ \varphi_z = \cos y\cos\varphi\mathrm{tg}\psi - \sigma(z)\sin\varphi\mathrm{tg}\psi - \sin y, \\ \psi_z = -\sin\varphi\cos y - \sigma(z)\cos\varphi, \\ \kappa_z = \cos y\cos\varphi\sec\psi - \sigma(z)\sin\varphi\sec\psi, \end{gathered}\right\}$$

которая интегрируема, так как $\varphi_{yz} = \varphi_{zy}$, $\psi_{yz} = \psi_{zy}$, $\kappa_{yz} = \kappa_{zy}$, и, кроме того, $\partial(\psi,\kappa)/\partial(y,z) \neq 0$. В результате получаем базисные операторы (8.14$'$) представления алгебры (8.14).

Подставим, в заключение, операторы (8.36) в третий коммутатор $[X_2, X_3] = -X_1$ алгебры (8.15). Возникающие при этом уравнения имеют следующие четыре решения:

$$\lambda(y,z) = 1,\ \tau(y,z) = \tau(z)\exp y; \tag{8.38}$$

$$\lambda(y,z) = -1,\ \tau(y,z) = \tau(z)\exp(-y); \tag{8.39}$$

$$\lambda(y,z) = -\mathrm{th}(y + a(z)),\ \tau(y,z) = \tau(z)/\mathrm{ch}(y + a(z)); \tag{8.40}$$

$$\lambda(y,z) = -\mathrm{cth}(y + a(z)),\ \tau(y,z) = \tau(z)/\mathrm{sh}(y + a(z)), \tag{8.41}$$

где $a(z)$ и $\tau(z)$ – произвольные функции одной переменной, причем $\tau(z) \neq 0$.

Произведем в операторах (8.36) с коэффициентами (8.38) замену координат $\xi = x$, $\eta = y$, $\vartheta = \kappa(z)$, полагая $\tau(z)\kappa'(z) = 1$. В прежних обозначениях координат получаем базисные операторы (8.15$'$) представления алгебры (8.15). Аналогично, если в операторах (8.36) с коэффициентами (8.39) произвести замену координат $\xi = x + \pi$, $\eta = -y$, $\vartheta = \kappa(z)$ и положить $\tau(z)\kappa'(z) = -1$, то в прежних обозначениях координат снова получаем базисные операторы (8.15$'$).

В операторах (8.36) с коэффициентами (8.40) и (8.41) предварительно произведем замену координат (8.24), полагая в ней $\varphi(z) = 0$, $\psi(z) = a(z)$, $\tau(z)\kappa'(z) = 1$. В прежних обозначениях для оператора X_2, например, получаем такое выражение:

$$X_2 = \lambda(y)\sin x\partial_x + (\cos x + \sigma(z)\tau(y)\sin x)\partial_y + \tau(y)\sin x\partial_z,$$

где либо $\lambda(y) = -\mathrm{th}y$ и $\tau(y) = 1/\mathrm{ch}y$, либо $\lambda(y) = -\mathrm{cth}y$ и $\tau(y) = 1/\mathrm{sh}y$, а $\sigma(z)$ – произвольная функция одной переменной.

Далее в последнем выражении произведем допустимую замену координат (8.20). Функции φ, ψ, κ при этом возьмем из решений следующей интегрируемой системы уранений:

$$\left.\begin{array}{c}
\varphi_y = \sin\varphi,\ \psi_y = \cos\varphi,\ \kappa_y = \sin\varphi\exp\psi, \\
\varphi_z = \cos\varphi/\tau(y) - \sigma(z)\sin\varphi - \lambda(y)/\tau(y), \\
\psi_z = -\sin\varphi/\tau(y) - \sigma(z)cos\varphi, \\
\kappa_z = \cos\varphi\exp\psi/\tau(y) - \sigma(z)\sin\varphi\exp\psi,
\end{array}\right\}$$

для которой якобиан $\partial(\psi,\kappa)/\partial(y,z)$ отличен от нуля. В результате снова получаем базисные операторы $(8.15')$ представления алгебры (8.15). Этим утверждением и завершается доказательство теоремы 1.

Заметим, что каждая из трехмерных вещественных абстрактных алгебр Ли (8.9–15) имеет соответственно единственное с точностью до эквивалентности координатное представление $(8.9'-15')$ операторами локально транзитивных преобразований плоскости. Конечные уравнения (8.4) для каждой из них можно получить с помощью экспоненциального отображения (см. [41]), активно использованного в предыдущем §7. Однако это отображение не для всех указанных алгебр осуществляется просто, а для некоторых из них, например, последних двух, технически оказывается достаточно сложным и громоздким. Поэтому, в отличие от §7, здесь удобнее будет найти функцию (8.1) как двухточечный инвариант группы преобразований с действиями $(8.4),(8.4')$, решая функциональное уравнение (8.5). По инфинитезимальному критерию инвариантности, как известно, функция (8.1) будет двухточечным инвариантом только в том случае, если она удовлетворяет следующим трем дифференциальным уравнениям:

$$X_\omega f + \Xi_\omega f = 0, \tag{8.42}$$

где X_ω и Ξ_ω, $\omega = 1,2,3,$ – инфинитезимльные операторы действий (8.4) и $(8.4')$. Выражения для операторов X_ω приведены в тексте теоремы 1, а соответствующие выражения для операторов

$$\Xi_\omega = \tilde\lambda_\omega(\xi,\eta,\vartheta)\partial_\xi + \tilde\sigma_\omega(\xi,\eta,\vartheta)\partial_\eta + \tilde\tau_\omega(\xi,\eta,\vartheta)\partial_\vartheta \tag{8.7''}$$

могут быть получены простым переобозначением операторов и координат: $X_\omega \to \Xi_\omega,\ x\to\xi,\ y\to\eta,\ z\to\vartheta$:

$$\Xi_1=\partial_\xi,\ \Xi_2=\partial_\eta,\ \Xi_3=\partial_\vartheta; \tag{8.9''}$$

$$\Xi_1=\partial_\xi,\ \Xi_2=\partial_\eta,\ \Xi_3=\eta\partial_\xi+\partial_\vartheta; \tag{8.10''}$$

$$\Xi_1=\partial_\xi,\ \Xi_2=\partial_\eta,\ \Xi_3=(\xi+\eta)\partial_\xi+\eta\partial_\eta+\partial_\vartheta; \tag{8.11''}$$

$$\Xi_1=\partial_\xi,\ \Xi_2=\partial_\eta,\ \Xi_3=\xi\partial_\xi+p\eta\partial_\eta+\partial_\vartheta; \tag{8.12''}$$

$$\Xi_1=\partial_\xi,\ \Xi_2=\partial_\eta,\ \Xi_3=-\eta\partial_\xi+(\xi+q\eta)\partial_\eta+\partial_\vartheta; \tag{8.13''}$$

$$\left.\begin{array}{c}\Xi_1=\partial_\xi,\\ \Xi_2=\mathrm{tg}\eta\sin\xi\partial_\xi+\cos\xi\partial_\eta+\sec\eta\sin\xi\partial_\vartheta,\\ \Xi_3=\mathrm{tg}\eta\cos\xi\partial_\xi-\sin\xi\partial_\eta+\sec\eta\cos\xi\partial_\vartheta;\end{array}\right\} \tag{8.14''}$$

$$\left.\begin{aligned} \Xi_1 &= \partial_\xi, \\ \Xi_2 &= \sin\xi\partial_\xi + \cos\xi\partial_\eta + \exp\eta\sin\xi\partial_\vartheta, \\ \Xi_3 &= \cos\xi\partial_\xi - \sin\xi\partial_\eta + \exp\eta\cos\xi\partial_\vartheta, \end{aligned}\right\} \tag{8.15''}$$

где $-1 \leq p \leq +1;\ 0 \leq q < 2$.

Теорема 2. *С точностью до масштабных преобразований $\psi(f) \to f$ функция $f = (f^1, f^2, f^3)$, задающая на 3-мерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ триметрическую физическую структуру ранга $(2,2)$, в надлежаще выбранных в них системах локальных координат x, y, z и ξ, η, ϑ определяется следующими семью каноническими выражениями:*

$$f^1 = x + \xi,\ f^2 = y + \eta,\ f^3 = z + \vartheta; \tag{8.43}$$

$$f^1 = y - \eta,\ f^2 = (x+\xi)y + z + \vartheta,\ f^3 = (x+\xi)\eta + z + \vartheta; \tag{8.44}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = (x+\xi)^2\exp(2(y+\eta)/(x+\xi)), \\ f^2 = (x+\xi)z,\ f^3 = (x+\xi)\vartheta; \end{array}\right\} \tag{8.45}$$

$$f^1 = (x+\xi)^p/(y+\eta),\ f^2 = (x+\xi)z,\ f^3 = (x+\xi)\vartheta; \tag{8.46}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = ((x+\xi)^2 + (y+\eta)^2)\exp(2\gamma\, arctg((y+\eta)/(x+\xi))), \\ f^2 = z + arctg((y+\eta)/(x+\xi)), \\ f^3 = \vartheta + arctg((y+\eta)/(x+\xi)); \end{array}\right\} \tag{8.47}$$

$$\left.\begin{array}{c} f^1 = \sin y\sin\eta\cos(x+\xi) + cos y\cos\eta, \\ f^2 = z + sign(\partial f^1/\partial y)\times \\ \times\arcsin(\sin(x+\xi)\sin y/\sqrt{1-(f^1)^2}), \\ f^3 = \vartheta + sign(\partial f^1/\partial\eta)\times \\ \times\arcsin(\sin(x+\xi)\sin\eta/\sqrt{1-(f^1)^2}); \end{array}\right\} \tag{8.48}$$

$$f^1 = (x+\xi)y\eta,\ f^2 = z + 1/(x+\xi)y^2,\ f^3 = \vartheta + 1/(x+\xi)\eta^2, \tag{8.49}$$

где $-1 \leq p \leq +1$; $\gamma = q/\sqrt{4-q^2}$, причем $0 \leq \gamma < \infty$, так как $0 \leq q < 2$.

Запишем сначала систему уравнений (8.42) с операторами (8.9′), (8.9″):

$$f_x + f_\xi = 0,\ f_y + f_\eta = 0,\ f_z + f_\vartheta = 0. \tag{8.50}$$

Три ее независимые решения $f^1 = x - \xi,\ f^2 = y - \eta,\ f^3 = z - \vartheta$ определяют три компоненты функции (8.43) с точностью до следующей замены координат: $-\xi \to \xi,\ -\eta \to \eta,\ -\vartheta \to \vartheta$.

Запишем теперь систему уравнений (8.42) с операторами (8.10′), (8.10″):

$$f_x + f_\xi = 0,\ f_y + f_\eta = 0,\ yf_x + f_z + \eta f_\xi + f_\vartheta = 0. \tag{8.51}$$

Общее решение первых двух уравнений системы (8.51)

$$f = \theta(x - \xi, y - \eta, z, \vartheta), \tag{8.52}$$

где θ – произвольная функция четырех переменных, подставим в ее третье уравнение, полагая $u = x - \xi,\ v = y - \eta$: $v\theta_u + \theta_z + \theta_\vartheta = 0$. Соответствующие уравнения характеристик имеют следующие три независимые интеграла: $z - \vartheta = c_1,\ vz - u = c_2,\ v\vartheta - u = c_3$. После удобной замены координат: $x \to -z,\ y \to x,\ z \to y$ и $\xi \to \vartheta,\ \eta \to -\xi,\ \vartheta \to \eta$ в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ получаем три компоненты (8.44) невырожденной функции f.

Запишем, далее, систему уравнений (8.42) с операторами (8.11′), (8.11″):

$$\left.\begin{array}{c} f_x + f_\xi = 0,\ f_y + f_\eta = 0, \\ (x + y)f_x + yf_y + f_z + (\xi + \eta)f_\xi + \eta f_\eta + f_\vartheta = 0. \end{array}\right\} \tag{8.53}$$

Общее решение первых двух уравнений системы (8.53), как и предыдущей, задается выражением (8.52), которое подставим в ее третье уравнение: $(u + v)\theta_u + v\theta_v + \theta_z + \theta_\vartheta = 0$. Уравнения характеристик для него имеют три независимые интеграла: $v^2 \exp(-2u/v) = c_1,\ v\exp(-z) = c_2,\ v\exp(-\vartheta) = c_3$, из которых получаются три компоненты (8.45) невырожденной функции f после следующей замены координат: $x \to -y,\ y \to x,\ z \to -\ln z$ и $\xi \to \eta,\ \eta \to -\xi,\ \vartheta \to -\ln \vartheta$.

Запишем систему уравнений (8.42) с операторами (8.12′), (8.12″):

$$\left.\begin{array}{c} f_x + f_\xi = 0,\ f_y + f_\eta = 0, \\ xf_x + pyf_y + f_z + \xi f_\xi + p\eta f_\eta + f_\vartheta = 0, \end{array}\right\} \tag{8.54}$$

где $-1 \leq p \leq +1$.

Подставим общее решение (8.52) первых двух уравнений (8.54) в ее третье уравнение: $u\theta_u + pv\theta_v + \theta_z + \theta_\vartheta = 0$. При любых возможных значениях параметра p уравнения характеристик для него имеют следующие три независимые интеграла: $u^p/v = c_1,\ u\exp(-z) = c_2,\ u\exp(-\vartheta) = c_3$. Вводя новые координаты $x \to x,\ y \to y,\ z \to -\ln z$

и $\xi \to -\xi,\ \eta \to -\eta,\ \vartheta \to -\ln\vartheta$ в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, получаем из них три компоненты (8.46) невырожденной функции f.

Запишем еще систему уравнений (8.42) с операторами (8.13′), (8.13″):

$$\left.\begin{aligned} f_x + f_\xi = 0,\ f_y + f_\eta = 0,\\ -yf_x + (x+qy)f_y + f_z - \eta f_\xi + (\xi + q\eta)f_\eta + f_\vartheta = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.55}$$

где $0 \le q < 2$.

Решение (8.52) первых двух уравнений системы (8.55) подставим в ее третье уравнение: $-v\theta_u + (u+qv)\theta_v + \theta_z + \theta_\vartheta = 0$. Три независимые интеграла соответствующих уравнений характеристик находятся сравнительно легко, но внешне они достаточно громоздки:

$$((2u+qv)^2 + v^2(4-q^2))\exp\frac{2q}{\sqrt{4-q^2}}\mathrm{arctg}\frac{2u+qv}{v\sqrt{4-q^2}} = c_1,$$

$$z + \frac{2}{\sqrt{4-q^2}}\mathrm{arctg}\frac{2u+qv}{v\sqrt{4-q^2}} = c_2,$$

$$\vartheta + \frac{2}{\sqrt{4-q^2}}\mathrm{arctg}\frac{2u+qv}{v\sqrt{4-q^2}} = c_3.$$

Введем в этих интегралах новый параметр $\gamma = q/\sqrt{4-q^2}$ и удобную замену координат: $x \to (y-\gamma x)/2$, $y \to x/\sqrt{4-q^2}$, $z \to 2z/\sqrt{4-q^2}$, $\xi \to -(\eta - \gamma\xi)/2$, $\eta \to -\xi/\sqrt{4-q^2}$, $\vartheta \to 2\vartheta/\sqrt{4-q^2}$. В результате получаем три компоненты (8.47) невырожденной функции f.

Запишем также систему уравнений (8.42) с операторами (8.14′), (8.14″):

$$\left.\begin{gathered} f_x + f_\xi = 0,\\ \mathrm{tg}y\sin x f_x + \cos x f_y + \sec y \sin x f_z +\\ + \mathrm{tg}\eta \sin\xi f_\xi + \cos\xi f_\eta + \sec\eta\sin\xi f_\vartheta = 0,\\ \mathrm{tg}y\cos x f_x - \sin x f_y + \sec y\cos x f_z +\\ + \mathrm{tg}\eta\cos\xi f_\xi - \sin\xi f_\eta + \sec\eta\cos\xi f_\vartheta = 0. \end{gathered}\right\} \tag{8.56}$$

Очевидное решение

$$f = \theta(x-\xi, y, \eta, z, \vartheta) \tag{8.57}$$

первого уравнения системы (8.56), где θ – произвольная функция пяти переменных, подставим в ее второе и третье уравнения, введя обозначение $u = x - \xi$. После этого из второго уравнения, умноженного на

$\cos\xi(\cos x)$ вычтем третье, умноженное на $\sin\xi(\sin x)$:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tg}y\sin u\theta_u + \cos u\theta_y + \theta\eta + \sec y\sin u\theta_z = 0,\\ \mathrm{tg}\eta\sin u\theta_u + \theta_y + \cos u\theta_\eta - \sec\eta\sin u\theta_\vartheta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.58}$$

Умножим первое из полученных уравнений системы (8.58) на $\mathrm{tg}\eta$ и вычтем из него второе, умноженное на $\mathrm{tg}y$:

$$(\mathrm{tg}\eta\cos u - \mathrm{tg}y)\theta_y - (\mathrm{tg}y\cos u - \mathrm{tg}\eta)\theta_\eta +$$
$$+\sec y\ \mathrm{tg}\eta\sin u\theta_z + \sec\eta\ \mathrm{tg}y\sin u\theta_\vartheta = 0.$$

Три независимые интеграла

$$\cos y\cos\eta\cos u + siny\sin\eta = c_1,$$
$$z + \mathrm{sign}(c_{1y})\arcsin\frac{\sin u\cos\eta}{\sqrt{1-c_1^2}} = c_2,$$
$$\vartheta - \mathrm{sign}(c_{1\eta})\arcsin\frac{\sin u\cos y}{\sqrt{1-c_1^2}} = c_3$$

соответствующих уравнений характеристик являются, как нетрудно проверить, решениями исходной системы (8.56) и определяют три компоненты (8.48) невырожденной функции f после следующей очевидной замены координат: $x\to x$, $y\to y-\pi/2$, $z\to z$ и $\xi\to-\xi$, $\eta\to\eta-\pi/2$, $\vartheta\to-\vartheta$, а также масштабной функции $f^1\to f^1$, $f^2\to f^2$, $f^3\to -f^3$.

Запишем, наконец, систему уравнений (8.42) с операторами (8.15′), (8.15″):

$$\left.\begin{aligned} f_x + f_\xi = 0,\\ \sin xf_x + \cos xf_y + \exp y\sin xf_z +\\ +\sin\xi f_\xi + \cos\xi f_\eta + \exp\eta\sin\xi f_\vartheta = 0,\\ \cos xf_x - \sin xf_y + \exp y\cos xf_z +\\ +\cos\xi f_\xi - \sin\xi f_\eta + \exp\eta\cos\xi f_\vartheta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.59}$$

Общее решение (8.57) первого уравнения системы (8.59) подставим в ее второе и третье уравнения. Умножим затем второе уравнение на $\sin x(\sin\xi)$ и сложим с третьим, умноженным на $\cos x(\cos\xi)$:

$$\left.\begin{aligned} (1-\cos u)\theta_u + e^y\theta_z + \sin u\theta_\eta + e^\eta\cos u\theta_\vartheta = 0,\\ (\cos u - 1)\theta_u - \sin u\theta_y + e^y\cos u\theta_z + e^\eta\theta_\vartheta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.60}$$

Складывая два уравнения системы (8.60), исключаем производную θ_u:

$$\sin u(\theta_y - \theta_\eta) - (1 + \cos u)(e^y\theta_z + e^\eta\theta_\vartheta) = 0.$$

Соответствующие уравнения характеристик имеют три независимые интеграла: $\exp(-(y+\eta)/2)\sin(u/2) = c_1$, $z + \exp y \operatorname{ctg}(u/2) = c_2$, $\vartheta - \exp\eta \operatorname{ctg}(u/2) = c_3$, которые одновременно являются решениями системы (8.60) и, естественно, исходной системы (8.59). Производя в этих интегралах удобную замену координат: $x \to 2\mathrm{arctg}x$, $y \to -\ln((1+x^2)y^2)$, $z \to z + x/(1+x^2)y^2$ и $\xi \to -2\mathrm{arctg}\xi$, $\eta \to -\ln((1+\xi^2)\eta^2)$, $\vartheta \to \vartheta + \xi/(1+\xi^2)\eta^2$, а также масштабное преобразование $f^1 \to f^1$, $f^2 \to f^2$, $f^3 \to -f^3$, получаем три компоненты (8.49) невырожденной функции f, что и завершает доказательство теоремы 2.

Перейдем теперь к уравнению (8.3), выражающему феноменологическую симметрию триметрическмх физических структур. Не для всех семи триметрик (8.43–49), перечисленных в теореме 2, такие уравнения найдены. Исключая тривиальный случай триметрики (8.43), для которой уравнение (8.3) находится элементарно, а также триметрик (8.47) и (8.48), для которых уравнения (8.3) еще не найдены, для оставшихся четырех триметрик (8.44), (8.45), (8.46) и (8.49) уравнения (8.3) нашел А.А.Симонов (частное сообщение):

для триметрики (8.43):

$$\left.\begin{array}{l} f^1(i\alpha) - f^1(i\beta) - f^1(j\alpha) + f^1(j\beta) = 0, \\ f^2(i\alpha) - f^2(i\beta) - f^2(j\alpha) + f^2(j\beta) = 0, \\ f^3(i\alpha) - f^3(i\beta) - f^3(j\alpha) + f^3(j\beta) = 0; \end{array}\right\} \tag{8.61}$$

для триметрики (8.44):

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a(i\alpha) & a(i\beta) \\ 1 & a(j\alpha) & a(j\beta) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & b(i\alpha) & b(i\beta) \\ 1 & b(j\alpha) & b(j\beta) \end{vmatrix} = 0, \\ \\ \begin{vmatrix} a(i\alpha) & b(i\alpha) & 1 \\ a(j\alpha) & b(j\alpha) & 1 \\ a(j\beta) & b(j\beta) & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & c(i\alpha) & c(i\beta) \\ 1 & c(j\alpha) & c(j\beta) \end{vmatrix} = 0, \end{array}\right\} \tag{8.62}$$

где $a = f^1$, $b = (f^2 - f^3)/f^1$, $c = f^2 + f^3$.

для триметрики (8.45):

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\begin{vmatrix} a(i\alpha) & c(i\alpha) \\ a(j\alpha) & c(j\alpha) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} c(i\alpha) & c(i\beta) \\ c(j\alpha) & c(j\beta) \end{vmatrix} = 0, \\ \hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\{\begin{vmatrix} b(i\alpha) & c(i\alpha) \\ b(j\alpha) & c(j\alpha) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a(i\alpha) & c(i\alpha)\ln c(i\alpha) \\ a(j\alpha) & c(j\alpha)\ln c(j\alpha) \end{vmatrix}\} = 0,\end{aligned}\right\} \tag{8.63}$$

где $a = \sqrt{f^2 f^3}$, $b = \sqrt{f^2 f^3}\ln\sqrt{f^1/f^2 f^3}$, $c = \sqrt{f^2/f^3}$ и $\hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)$ – оператор альтернирования (антисимметризации) по элементам α, β, использованный также в уравнениях (7.27) предыдущего §7;

для триметрики (8.46):

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\begin{vmatrix} a(i\alpha) & c(i\alpha) \\ a(j\alpha) & c(j\alpha) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} c(i\alpha) & c(j\alpha) \\ c(i\beta) & c(j\beta) \end{vmatrix} = 0, \\ \hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\begin{vmatrix} b(i\alpha) & c^p(i\alpha) \\ b(j\alpha) & c^p(j\alpha) \end{vmatrix} = 0,\end{aligned}\right\} \tag{8.64}$$

где $a = \sqrt{f^2 f^3}$, $b = (\sqrt{f^2 f^3})^p/f^1$, $c = \sqrt{f^2/f^3}$;

для триметрик (8.47) и (8.48) до настоящего времени уравнения (8.3) еще не найдены;

для последней седьмой триметрики (8.49):

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\begin{vmatrix} a(i\alpha) & c(i\alpha) \\ a(j\alpha) & c(j\alpha) \end{vmatrix} = 0, \\ \hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)a^{-1}(j\alpha)[b(j\alpha)\begin{vmatrix} a(i\alpha) & c(i\alpha) \\ a(j\alpha) & c(j\alpha) \end{vmatrix} - a(i\alpha)] = 0. \\ \hat{\mathbf{R}}(\alpha\beta)\{(a(i\alpha) + b(i\alpha))a^{-1}(i\alpha)a^{-1}(j\alpha)\times \\ \times[b(j\alpha)\begin{vmatrix} a(i\alpha) & c(i\alpha) \\ a(j\alpha) & c(j\alpha) \end{vmatrix} - a(i\alpha)] + b(j\alpha)a^{-1}(i\alpha)\} = 0,\end{aligned}\right\} \tag{8.65}$$

где $a = f^1$, $b = f^1 f^2$, $c = f^1 f^3$.

В заключение отметим, что результаты, изложенные в теореме 1, были опубликованы автором ранее в работе [42], в то время как результаты, изложенные в теореме 2, в настоящей монографии публикуются впервые.

§9. Некоторые следствия гипотезы о бинарной структуре пространства

Физические предпосылки гипотезы о бинарной структуре пространства были изложены Ю.С.Владимировым в его книге "Пространство-время: явные и скрытые размерности" [43] на стр. 47–55. Действительно, классические пространственно-временные отношения присущи объектам макромира, то есть сложным образованиям, состоящим из разноименно заряженных микрочастиц. С другой стороны, идея бинарности отношений естественно включена в теорию физических структур Ю.И.Кулакова [1],[2],[3], которая исходит из очень общих и естественных предположений. В настоящем параграфе автор, опираясь на гипотезу о бинарной структуре пространства и используя свои классификационные результаты в теории физических структур [14], устанавливает симметрию метрики физического пространства и находит для этой метрики явное выражение.

В начале §2 было дано краткое в общих чертах определение феноменологически симметричной однометрической геометрии двух множеств, то есть обычной физической структуры ранга $(n+1, m+1)$ на двух многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ размерности m и n. Там же была воспроизведена полная сводка локальных результатов, взятая из работы [14]. В приложении к геометрии естественно ограничиться случаем $m = n \geq 1$, когда многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ имеют одинаковую размерность. Соответствующие канонические выражения для метрической функции $f(i\alpha)$, где $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$, будут следующими:

для $m = n = 1$:

$$f(i\alpha) = x(i) + \xi(\alpha); \tag{9.1}$$

для $m = n \geq 2$:

$$f(i\alpha) = x^1(i)\xi^1(\alpha) + \ldots + x^{n-1}(i)\xi^{n-1}(\alpha) + x^n(i) + \xi^n(\alpha), \tag{9.2}$$

$$f(i\alpha) = x^1(i)\xi^1(\alpha) + \ldots + x^n(i)\xi^n(\alpha). \tag{9.3}$$

Обратим внимание на то, что для физической структуры ранга (2,2) имеется только одна каноническая форма (9.1) метрической функции, в то время как для физической структуры более высокого ранга $(n+1, n+1)$ с $n \geq 2$ таких форм будет две: (9.2) и (9.3), причем они не сводимы друг к другу никакими заменами координат в многообразиях $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ и масштабным преобразованием $\psi(f) \to f$. То есть в указанном смысле метрические функции (9.2) и (9.3) неэквивалентны.

Для каждой из метрик (9.1),(9.2),(9.3) запишем еще и уравнение (1.1), выражающее феноменологическую симметрию задаваемой ею геометрии двух множеств:

для метрической функции (9.1):

$$f(i\alpha) - f(i\beta) - f(j\alpha) + f(j\beta) = 0; \tag{9.4}$$

для метрической функции (9.2):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & f(i\alpha) & f(i\beta) & \dots & f(i\tau) \\ 1 & f(j\alpha) & f(j\beta) & \dots & f(j\tau) \\ . & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ 1 & f(v\alpha) & f(v\beta) & \dots & f(v\tau) \end{vmatrix} = 0, \tag{9.5}$$

причем в кортеже $< ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau >$ $n+1$ элементов $i, j, k, \dots, v \in \mathfrak{M}$ и $n+1$ элементов $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \tau \in \mathfrak{N}$, то есть $< ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau > \in \mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{n+1}$, где $n \geq 2$;

для метрической функции (9.3):

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & \dots & f(i\tau) \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & \dots & f(j\tau) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ f(v\alpha) & f(v\beta) & \dots & f(v\tau) \end{vmatrix} = 0, \tag{9.6}$$

причем, как и в предыдущем случае, $< ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau > \in \mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{n+1}$, где $n \geq 2$.

Математическим выражением гипотезы о бинарной структуре пространства согласно идеям Ю.И.Кулакова [5] и физическим предпосылкам Ю.С.Владимирова [43], по мнению автора, должна быть следующая

Аксиома. Существует такое взаимно однозначное локально гладкое отображение $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$, что метрика ρ n-мерного пространства $\mathfrak{M}$, задаваемая выражением

$$\rho(ij) = f(i, \varphi(j)), \tag{9.7}$$

удовлетворяет условию

$$\rho(ij) = \theta(\rho(ji)), \tag{9.8}$$

где θ – некоторая функция одной переменной с отличной от нуля производной θ'.

Теорема. *Метрическая функция* (9.7) *n-мерного пространства $\mathfrak{M}$, удовлетворяющая условию* (9.8)*, с точностью до локально обратимой замены координат в $\mathfrak{M}$ и масштабного преобразования $\psi(\rho) \to \rho$ задается выражениями:*

$$\rho(ij) = x(i) + ax(j) \tag{9.9}$$

для $n = 1$;

$$\rho(ij) = h_{\mu\nu}x^{\mu}(i)x^{\nu}(j) + x^{n}(i) + ax^{n}(j), \tag{9.10}$$

$$\rho(ij) = g_{\lambda\sigma}x^{\lambda}(i)x^{\sigma}(j) \tag{9.11}$$

для $n \geq 2$, где $h_{\mu\nu} = ah_{\nu\mu}$, $\mu, \nu = 1, \dots, n-1$; $g_{\lambda\sigma} = ag_{\sigma\lambda}$, $\lambda, \sigma = 1, \dots, n$; $a = \pm 1$ и по "немым" индексам μ, ν и λ, σ производится суммирование в соответствующих пределах: $1 \leq \mu, \nu \leq n-1$ и $1 \leq \lambda, \sigma \leq n$, причем в случае антисимметрии, когда $a = -1$, выражение (9.10) *определяет метрику только нечетномерного пространства ($n = 3, 5, 7, \dots$), а выражение* (9.11) *– только четномерного ($n = 2, 4, 6, \dots$).*

Запишем сначала метрику одномерного пространства $\mathfrak{M}$, подставляя в ее определение (9.7) каноническое выражение (9.1) для физической структуры ранга (2,2):

$$\rho(ij) = x(i) + \varphi(j), \tag{9.12}$$

где $\varphi(j) = \varphi(x(j))$, причем условие (9.8):

$$x(i) + \varphi(j) = \theta(x(j) + \varphi(i)) \tag{9.13}$$

есть функциональное уравнение относительно отображения φ и функции θ.

Продифференцируем уравнение (9.13) по координатам $x(i)$ и $x(j)$: $1 = \theta'(\rho(ji))d\varphi(i)/dx(i)$ и $d\varphi(j)/dx(j) = \theta'(\rho(ji))$, откуда получаем

$$d\varphi(i)/dx(i) = (d\varphi(j)/dx(j))^{-1}, \tag{9.14}$$

для любой пары $< ij >$, а так как координаты $x(i)$ и $x(j)$ разделены, то $d\varphi/dx = a$ и после интегрирования имеем:

$$\varphi(x) = ax. \tag{9.15}$$

При интегрировании опущена аддитивная постоянная, так как результат доказываемой теоремы формулируется с точностью до масштабного преобразования $\psi(\rho) \to \rho$, которым эта постоянная всегда может быть исключена. Подставляя выражение (9.15) в предыдущее соотношение (9.14), находим,что $a = a^{-1}$ или $a^2 = 1$, то есть $a = \pm 1$, а используя затем функцию (9.15) в определении метрики (9.12), получаем выражение (9.9) для нее. Поскольку, как легко установить, $\rho(ij) = a\rho(ji)$, метрика одномерного пространства $\mathfrak{M}$, задаваемая выражением (9.9), удовлетворяет условию (9.13), причем она может быть либо симметричной ($a = +1$ и потому $\theta(u) = u$), либо антисимметричной ($a = -1$ и потому $\theta(u) = -u$).

Перейдем, далее, к рассмотрению первого канонического выражения (9.2) для физических структур ранга $(n+1, n+1)$, где $n \geq 2$, то есть ранга (3,3), (4,4) и т.д. Подставим это выражение в определение (9.7) метрики n-мерного пространства $\mathfrak{M}$:

$$\rho(ij) = x^{\mu}(i)\varphi_{\mu}(j) + x^{n}(i) + \varphi_{n}(j), \tag{9.16}$$

где $\varphi_{\mu}(j) = \varphi_{\mu}(x^1(j), \ldots, x^{n-1}(j), x^n(j))$ и аналогично для $\varphi_n(j)$, причем суммирование по "немому" индексу μ производится в пределах от 1 до $n-1$. Условие (9.8) для метрической функции (9.16):

$$x^{\mu}(i)\varphi_{\mu}(j) + x^{n}(i) + \varphi_{n}(j) = \theta(x^{\mu}(j)\varphi_{\mu}(i) + x^{n}(j) + \varphi_{n}(i)), \tag{9.17}$$

которое является функциональным уравнением относительно отображения φ и функции θ, продифференцируем по координатам $x^{\nu}(i)$, $\nu = 1, \ldots, n-1$:

$$\varphi_{\nu}(j) = \theta'(\rho(ji))(x^{\mu}(j)\partial\varphi_{\mu}(i)/\partial x^{\nu}(i) + \partial\varphi_{n}(i)/\partial x^{\nu}(i)), \tag{9.18}$$

а также по координатам $x^n(i)$ и $x^n(j)$:

$$1 = \theta'(\rho(ji))(x^{\mu}(j)\partial\varphi_{\mu}(i)/\partial x^{n}(i) + \partial\varphi_{n}(i)/\partial x^{n}(i)), \tag{9.19}$$

$$x^{\mu}(i)\partial\varphi_{\mu}(j)/\partial x^{n}(j) + \partial\varphi_{n}(j)/\partial x^{n}(j) = \theta'(\rho(ji)). \tag{9.20}$$

Поскольку в условии (9.8) $\theta'(\rho(ji)) \neq 0$, из результатов дифференцирования (9.18) и (9.19) получаем связь:

$$\varphi_{\nu}(j) = \frac{x^{\mu}(j)\partial\varphi_{\mu}(i)/\partial x^{\nu}(i) + \partial\varphi_{n}(i)/\partial x^{\nu}(i)}{x^{\mu}(j)\partial\varphi_{\mu}(i)/\partial x^{n}(i) + \partial\varphi_{n}(i)/\partial x^{n}(i)}, \tag{9.21}$$

из которой легко выводим, что

$$\partial\varphi_\mu/\partial x^n = 0. \tag{9.22}$$

С учетом следствия (9.22) из результатов дифференцирования (9.19) и (9.20) устанавливаем соотношение производных:

$$\partial\varphi_n(i)/\partial x^n(i) = (\partial\varphi_n(j)/\partial x^n(j))^{-1},$$

для любой пары $< ij >$, аналогичное соотношению (9.14), откуда получаем

$$\partial\varphi_n/\partial x^n = a, \tag{9.23}$$

причем, очевидно, $a^2 = 1$, то есть $a = \pm 1$.

Связь же (9.21) с учетом следствий (9.22) и (9.23) значительно упрощается:

$$a\varphi_\nu(j) = x^\mu(j)\partial\varphi_\mu(i)/\partial x^\nu(i) + \partial\varphi_n(i)/\partial x^\nu(i) \tag{9.21$'$}$$

и из нее вытекает, что $\partial\varphi_\mu/\partial x^\nu = h_{\mu\nu} = \mathrm{const}$. После интегрирования этих уравнений и уравнения (9.22) получаем выражения для компонент φ_μ, где $\mu = 1, \dots, n-1$, взаимно однозначного отображения $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n)$:

$$\varphi_\mu = h_{\mu\nu}x^\nu + c_\mu, \tag{9.24}$$

причем квадратная матрица коэффициентов $h_{\mu\nu}$, имеющая порядок $n-1$, должна быть невырожденной, так как функции φ_μ независимы.

Подставим выражения (9.24) в предыдущую упрощенную связь (9.21$'$):

$$a(h_{\nu\mu}x^\mu(j) + c_\nu) = h_{\mu\nu}x^\mu(j) + \partial\varphi_n(i)/\partial x^\nu(i),$$

откуда легко получаем:

$$h_{\mu\nu} = ah_{\nu\mu}, \tag{9.25}$$

$$\partial\varphi_n/\partial x^\mu = ac_\mu, \tag{9.26}$$

где, напомним, $a = \pm 1$, $h_{\mu\nu} = \mathrm{const}$, $c_\mu = \mathrm{const}$. Соотношения (9.23) и (9.26) представляют собой систему n дифференциальных уравнений относительно последней компоненты φ_n отображения $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$. Интегрируя систему, находим эту компоненту:

$$\varphi_n = a(c_\mu x^\mu + x^n), \tag{9.27}$$

причем аддитивная постоянная опущена по тем же соображениям, что и в выражении (9.15). Подставим выражение (9.24) и (9.27) для компонент φ_μ и φ_n отображения φ в определение метрики (9.16):

$$\rho(ij) = h_{\mu\nu}x^\mu(i)x^\nu(j) + c_\mu x^\mu(i) + x^n(i) + a(c_\mu x^\mu(j) + x^n(j)). \qquad (9.28)$$

Вводя затем естественное преобразование координат $x^\mu \to x^\mu$, $c_\mu x^\mu + x^n \to x^n$, приходим к первому выражению (9.10) для метрической функции $\rho(ij)$ в случае $n \geq 2$.

Из окончательного выражения (9.10) и результата (9.25) следует, что $\rho(ij) = a\rho(ji)$, то есть что определяемая выражением (9.16) и удовлетворяющая условию (9.17) метрика n-мерного пространства $\mathfrak{M}$ может быть либо симметричной ($a = +1$), либо антисимметричной ($a = -1$), причем, как и для случая $n = 1$, функция $\theta(u)$, будучи решением функционального уравнения (9.17), задается тем же выражением: $\theta(u) = au$.

Дополнительно заметим, что в случае антисимметрии метрической функции (9.10), когда $a = -1$, порядок невырожденной квадратной матрицы $h_{\mu\nu}$, равный $n-1$, должен быть четным, так как определитель антисимметричеой матрицы нечетного порядка всегда равен нулю, то есть такая матрица всегда вырождена. Таким образом, в выражении (9.10) для случая $a = -1$ размерность пространства $\mathfrak{M}$ нечетная ($n = 3, 5, 7, \dots$), а для четной размерности ($n = 2, 4, 6, \dots$) метрика (9.10) становится вырожденной в том смысле, что некоторой линейной заменой координат из нее можно исключить, по крайней мере, одну координату, то есть зависимость от них становится несущественной.

Рассмотрим, наконец, второе каноническое выражение (9.3) для физических структур ранга $(n+1, n+1)$, где по-прежнему $n \geq 2$, то есть ранга (3,3), (4,4) и т.д. Подставим его в определение (9.7) метрики n-мерного пространства $\mathfrak{M}$:

$$\rho(ij) = x^\lambda(i)\varphi_\lambda(j), \qquad (9.29)$$

причем "немое" суммирование по индексу λ производится в пределах от 1 до n, в отличие от метрики (9.16), где аналогичное суммирование по индексу μ производилось в пределах от 1 до $n-1$.

Условие (9.8) для метрической функции (9.29):

$$x^\lambda(i)\varphi_\lambda(j) = \theta(x^\lambda(j)\varphi_\lambda(i)) \qquad (9.30)$$

также является функциональным уравнением относительно отображения φ и функции θ, как и условие (9.17). Продифференцируем уравнение (9.30) по координатам $x^\sigma(i), x^\tau(i), x^\tau(j)$:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_\sigma(j) = \theta'(\rho(ji))x^\lambda(j)\partial\varphi_\lambda(i)/\partial x^\sigma(i),\\ \varphi_\tau(j) = \theta'(\rho(ji))x^\lambda(j)\partial\varphi_\lambda(i)/\partial x^\tau(i),\\ x^\lambda(i)\partial\varphi_\lambda(j)/\partial x^\tau(j) = \theta'(\rho(ji))\varphi_\tau(i),\end{array}\right\} \tag{9.31}$$

откуда, исключая отличную от нуля производную $\theta'(\rho(ji))$, получаем два соотношения:

$$\frac{\varphi_\sigma(j)}{\varphi_\tau(j)} = \frac{x^\lambda(j)\partial\varphi_\lambda(i)/\partial x^\sigma(i)}{x^\lambda(j)\partial\varphi_\lambda(i)/\partial x^\tau(i)}, \tag{9.32}$$

$$\frac{\varphi_\sigma(j)}{x^\lambda(i)\partial\varphi_\lambda(j)/\partial x^\tau(j)} = \frac{x^\lambda(j)\partial\varphi_\lambda(i)/\partial x^\sigma(i)}{\varphi_\tau(i)}, \tag{9.33}$$

которые являются тождествами по координатам точек i и j.

Зафиксируем в первом соотношении (9.32) координаты точки i:

$$\varphi_\sigma/g_{\sigma\lambda}x^\lambda = \varphi_\tau/g_{\tau\lambda}x^\lambda,$$

причем слева и справа нет суммирования по повторяющимся индексам σ и τ, то есть

$$\varphi_\lambda = cg_{\lambda\sigma}x^\sigma, \tag{9.34}$$

где $g_{\lambda\sigma} = \text{const}$, а c – некоторая функция координат. Поскольку отображение $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ взаимно однозначное, его компоненты φ_λ, $\lambda = 1, \dots, n$ должны быть независимы, а потому определитель квадратной матрицы коэффициентов $g_{\lambda\sigma}$ должен быть отличен от нуля и, кроме того, $c \neq 0$.

Итак, из первого соотношения (9.32) было получено выражение (9.34), на которое второе соотношение (9.33) налагает дополнительное ограничение. Положим в соотношении (9.33) сначала $i = j$, а затем $\sigma = \tau$, откуда получаем

$$\varphi_\sigma = ax^\lambda\partial\varphi_\lambda/\partial x^\sigma, \tag{9.35}$$

где $a^2 = 1$, то есть $a = \pm 1$.

В новое уравнение (9.35), а также в предыдущие соотношения (9.32) и (9.33) подставим полученное ранее выражение (9.34):

$$g_{\lambda\tau}x^\lambda x^\tau\partial c/\partial x^\sigma = (ag_{\sigma\lambda} - g_{\lambda\sigma})x^\lambda c, \tag{9.36}$$

$$\frac{g_{\sigma\lambda}x^\lambda(j)}{g_{\tau\lambda}x^\lambda(j)} = \frac{g_{\lambda\sigma}x^\lambda(j)c(i) + g_{\lambda\varepsilon}x^\lambda(j)x^\varepsilon(i)\partial c(i)/\partial x^\sigma(i)}{g_{\lambda\tau}x^\lambda(j)c(i) + g_{\lambda\varepsilon}x^\lambda(j)x^\varepsilon(i)\partial c(i)/\partial x^\tau(i)}, \tag{9.37}$$

$$\begin{gathered}\frac{g_{\sigma\lambda}x^\lambda(j)c(j)}{g_{\lambda\tau}x^\lambda(i)c(j) + g_{\lambda\varepsilon}x^\lambda(i)x^\varepsilon(j)\partial c(j)/\partial x^\tau(j)} = \\ = \frac{g_{\lambda\sigma}x^\lambda(j)c(i) + g_{\lambda\varepsilon}x^\lambda(j)x^\varepsilon(i)\partial c(i)/\partial x^\sigma(i)}{g_{\tau\lambda}x^\lambda(i)c(i)}.\end{gathered} \tag{9.38}$$

Соотношения (9.36), (9.37), (9.38) будем исследовать в таких двух предположениях: либо $g_{\lambda\sigma} = ag_{\sigma\lambda}$ для всех индексов λ, σ, либо $g_{\lambda\sigma} \neq ag_{\sigma\lambda}$ для некоторых индексов λ, σ. Рассмотрим сначала первый случай:

$$g_{\lambda\sigma} = ag_{\sigma\lambda}, \tag{9.39}$$

когда матрица коэффициентов $g_{\lambda\sigma}$ симметрична ($a = +1$) или антисимметрична ($a = -1$) по перестановке индексов λ и σ. Соотношение (9.37) при этом значительно упростится:

$$g_{\sigma\lambda}x^\lambda(j)\partial c(i)/\partial x^\tau(i) = g_{\tau\lambda}x^\lambda(j)\partial c(i)/\partial x^\sigma(i),$$

откуда, дифференцируя по координате $x^\lambda(j)$, получаем связь производных:

$$g_{\sigma\lambda}\partial c/\partial x^\tau = g_{\tau\lambda}\partial c/\partial x^\sigma.$$

Покажем, что $c = \mathrm{const}$. Действительно, предположим противное, то есть что хотя бы одна из производных функции c не обращается в нуль, например, $\partial c/\partial x^{\sigma'} \neq 0$. Тогда при $\tau = \sigma'$ из последней связи производных устанавливаем, что $g_{\sigma\lambda} = g_{\sigma'\lambda}(\partial c/\partial x^\sigma)/(\partial c/\partial x^{\sigma'})$ для любых индексов λ и σ. Но при таком мультипликативном расщеплении индексов в коэффициентах $g_{\sigma\lambda}$ определитель их матрицы обращается в нуль, что противоречит независимости функций (9.34), являющихся компонентами взаимно однозначного отображения $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$. Таким образом, предположение о том, что хотя бы одна из производных функции c в выражении (9.34) отлична от нуля, приводит к противоречию. Следовательно, $\partial c/\partial x^\lambda = 0$ для всех индексов $\lambda = 1, \ldots, n$ и потому в предположении (9.39) функция $c = \mathrm{const}$.

Рассмотрим теперь второй случай, когда

$$g_{\lambda\sigma} \neq ag_{\sigma\lambda} \tag{9.40}$$

для некоторых индексов λ, σ, причем, как это следует из уравнения (9.36), должно быть $g_{\lambda\sigma} x^\lambda x^\sigma \neq 0$.

Подставим выражение для производной $\partial c/\partial x^\sigma$ из уравнения (9.36) в соотношение (9.38):

$$\frac{g_{\sigma\lambda} x^\lambda(j)}{g_{\lambda\tau} x^\lambda(i) + c_\tau(j)\tilde{c}_\lambda(j) x^\lambda(i)} = \frac{g_{\lambda\sigma} x^\lambda(j) + c_\sigma(i)\tilde{c}_\lambda(i) x^\lambda(j)}{g_{\tau\lambda} x^\lambda(i)}, \tag{9.41}$$

где для удобства введены обозначения $c_\sigma = (a g_{\sigma\lambda} - g_{\lambda\sigma}) x^\lambda / g_{\tau\varepsilon} x^\tau x^\varepsilon$, $\tilde{c}_\lambda = g_{\lambda\varepsilon} x^\varepsilon$, из которых следует, что $c_\sigma \neq 0$ и $\tilde{c}_\lambda \neq 0$ для некоторых индексов σ и λ. Из соотношения (9.41) получаем:

$$g_{\lambda\sigma} x^\lambda(j) + c_\sigma(i)\tilde{c}_\lambda(i) x^\lambda(j) = A(ij) g_{\sigma\lambda} x^\lambda(j), \tag{9.42}$$

причем для коэффициента $A(ij)$ имеем следующее перестановочное свойство:

$$A(ij) = 1/A(ji). \tag{9.43}$$

Предположим, что в рамках условия (9.40) коэффициет $A(ij)$ зависит явным образом от координат обеих точек i и j, то есть

$$\partial A(ij)/\partial x^\lambda(i) \neq 0 \text{ и } \partial A(ij)/\partial x^\sigma(j) \neq 0 \tag{9.44}$$

для некоторых индексов λ и σ. Продифференцируем соотношение (9.42) по координате $x^\lambda(j)$:

$$g_{\lambda\sigma} + c_\sigma(i)\tilde{c}_\lambda(i) = g_{\sigma\lambda} A(ij) + g_{\sigma\varepsilon} x^\varepsilon(j) \partial A(ij)/\partial x^\lambda(j),$$

после чего зафиксируем координаты точки j:

$$g_{\lambda\sigma} = A(i) g_{\sigma\lambda} - c_\sigma(i)\tilde{c}_\lambda(i) + d_\sigma \tilde{d}_\lambda(i).$$

Полученую связь подставим в исходное соотношение (9.42), разрешим его относительно $g_{\sigma\lambda} x^\lambda(j)$ и продифференцируем по координате $x^\lambda(j)$:

$$g_{\sigma\lambda} = d_\sigma \partial[\tilde{d}_\varepsilon(i) x^\varepsilon(j)/(A(ij) - A(i))]/\partial x^\lambda(j),$$

причем в силу предположения (9.44) знаменатель $A(ij) - A(i)$ правой части отличен от нуля. Но мультипликативное расщепление индексов σ и λ в полученном выражении означает обращение в нуль определителя матрицы коэффициентов $g_{\sigma\lambda}$, что противоречит независимости функций (9.34).

Предположим тогда, что в рамках условия (9.40) коэффициет $A(ij)$ из соотношения (9.42) не зависит явно от координат какой-либо из точек i и j, то есть

$$\partial A(ij)/\partial x^\lambda(i) = 0 \text{ или } \partial A(ij)/\partial x^\sigma(j) = 0 \tag{9.45}$$

для всех индексов λ или σ. Из перестановочного свойства (9.43) в этом случае получаем $A(ij) = A = \text{const}$, причем $A = \pm 1$, то есть $A = a$. Продифференцируем соотношение (9.42) по координате $x^\lambda(j)$, учитывая последний результат: $g_{\lambda\sigma} + c_\sigma(i)\tilde{c}_\lambda(i) = ag_{\sigma\lambda}$, откуда следует $c_\sigma(i)\tilde{c}_\lambda(i) = c_\sigma(j)\tilde{c}_\lambda(j)$. В силу предполагаемого условия (9.40) для некоторого индекса $\sigma = \sigma'$ отличен от нуля коэффициент $c_{\sigma'}$ и тогда $\tilde{c}_\lambda(i) = c_{\sigma'}(j)\tilde{c}_\lambda(j)/c_{\sigma'}(i)$. По введенному в соотношении (9.41) обозначению $\tilde{c}_\lambda(i) = g_{\lambda\sigma}x^\sigma(i)$ и с учетом предыдущего выражения имеем: $g_{\lambda\sigma}x^\sigma(i) = c_{\sigma'}(j)\tilde{c}_\lambda(j)/c_{\sigma'}(i)$. Дифференцируя этот результат по по координате $x^\sigma(i)$, снова получаем мультипликативное расщепление индексов λ и σ в выражении для коэффициентов $g_{\lambda\sigma}$ функций (9.34), что противоречит их независимости.

Таким образом, условие (9.40) приводит к противоречию и потому не может выполняться. Остается поэтому только условие (9.39), при котором, как было показано выше, в выражениях (9.34) функция $c = \text{const}$. Без ограничения общности результата можно, очевидно, положить $c = 1$ и тогда

$$\varphi_\lambda = g_{\lambda\sigma}x^\sigma, \tag{9.46}$$

причем $g_{\lambda\sigma} = ag_{\sigma\lambda}$, $a = \pm 1$ и матрица этих коэффициентов невырожденная. Подставляя функцию (9.46) в определение (9.29), приходим ко второму выражению (9.11) метрики $\rho(ij)$ в случае $n \geq 2$, которая также оказывается либо симметричной, либо антисимметричной, поскольку из связи (9.39) для нее следует: $\rho(ij) = a\rho(ji)$, где $a = \pm 1$. Относительно же функции $\theta(u)$ исходное функциональное уравнение (9.30) имеет, очевидно, решение $\theta(u) = au$, совпадающее с решениями для нее функциональных уравнений (9.13) и (9.17). Заметим еще, что в случае антисимметричной метрики (9.11) при $a = -1$, когда $g_{\lambda\sigma} = -g_{\sigma\lambda}$, порядок квадратной матрицы коэффициентов $g_{\lambda\sigma}$, равный n, должен быть четным ($n = 2, 4, 6, \dots$). Если же порядок ее нечетный ($n = 3, 5, 7, \dots$), то матрица $g_{\lambda\sigma}$ всегда вырождена, что приводит к вырождению метрической функции (9.11). Таким образом, выражение (9.11) в случае антисимметрии, когда $a = -1$, определяет метрику только четномерного симплектического пространства. Теорема полностью доказана.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию полученных результатов. Предположим сначала, что $a = +1$, то есть что метрика $\rho(ij)$ симметрична:

$$\rho(ij) = \rho(ji). \tag{9.47}$$

Выражение (9.9) в этом случае будет следующим:

$$\rho(ij) = x(i) + x(j), \tag{9.48}$$

то есть $\exp \rho(ij)$ локально представляет собой скалярное произведение.

Выражение (9.10) при $a = +1$ запишется:

$$\rho(ij) = h_{\mu\nu} x^{\mu}(i) x^{\nu}(j) + x^n(i) + x^n(j), \tag{9.10$'$}$$

где $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ и $\mu, \nu = 1, \ldots, n-1$. Пусть для всех точек $i \in \mathfrak{M}$ дополнительно выполняется условие $\rho(ii) = \mathrm{const}$, которое уменьшает число независимых координат, так как $2x^n + h_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = \mathrm{const}$. Если воспользоваться этой связью координат, то для метрики (9.10$'$) получим выражение

$$\rho(ij) = -0,5 h_{\mu\nu} (x^{\mu}(i) - x^{\mu}(j))(x^{\nu}(i) - x^{\nu}(j)) + \mathrm{const}.$$

Вследствие симметрии и невырожденности матрицы коэффициетов $h_{\mu\nu}$ можно ввести такую замену координат в многообразии $\mathfrak{M}$, что эта квадратичная форма станет диагональной:

$$\rho(ij) = \varepsilon_{\mu} (x^{\mu}(i) - x^{\mu}(j))^2, \tag{9.49}$$

причем $\varepsilon_{\mu} = \pm 1$, $\mu = 1, \ldots, n-1$ и по "немому" индексу μ производится суммирование в пределах от 1 до $n-1$, а аддитивная постоянная исключена масштабным преобразованием. Полученное выражение (9.49) задает симметричную невырожденную квадратичную метрику в евклидовом и псевдоевклидовых пространствах размерности $n - 1 \geq 1$, так как $n \geq 2$. Вопрос о геометрической интерпретации исходного выражения (9.10$'$) без дополнительного условия $\rho(ij) = \mathrm{const}$ пока остается открытым.

Выражение (9.11) при $a = +1$, когда $g_{\lambda\sigma} = g_{\sigma\lambda}$, диагонализуем некоторой заменой координат:

$$\rho(ij) = \varepsilon_{\lambda} x^{\lambda}(i) x^{\lambda}(j), \tag{9.50}$$

где $\varepsilon_\lambda = \pm 1$, $\lambda = 1, \ldots, n$ и по "немому" индексу λ производится суммирование в пределах от 1 до n. Метрику (9.50) можно интерпретировать как симметричное скалярное или псевдоскалярное произведение в евклидовом или псевдоевклидовых пространствах размерности $n \geq 2$. Наложением на нее дополнительного условия $\rho(ii) = \mathrm{const}$ выделяется класс пространств постоянной кривизны (гиперсферы или гиперпсевдосферы).

Предположим теперь, что $a = -1$, то есть что метрика $\rho(ij)$ антисимметрична:

$$\rho(ij) = -\rho(ji). \tag{9.51}$$

Выражения (9.9), (9.10) и (9.11) при $a = -1$ будут следующими:

$$\rho(ij) = x(i) - x(j), \tag{9.52}$$

$$\rho(ij) = h_{\mu\nu} x^\mu(i) x^\nu(j) + x^n(i) - x^n(j), \tag{9.53}$$

$$\rho(ij) = g_{\lambda\sigma} x^\lambda(i) x^\sigma(j), \tag{9.54}$$

причем $h_{\mu\nu} = -h_{\nu\mu}$, $\mu, \nu = 1, \ldots, n-1$, где $n = 3, 5, 7, \ldots$ в выражении (9.53) и $g_{\lambda\sigma} = -g_{\sigma\lambda}$, $\lambda, \sigma = 1, \ldots, n$, где $n = 2, 4, 6, \ldots$ в выражении (9.54). Первые два выражения (9.52) и (9.53) задают нелинейную невырожденную метрику симплектического пространства *нечетной* размерности, в то время как третье выражение (9.54) задает обычную билинейную невырожденную метрику симплектического пространства *четной* размерности. Обратим внимание на то, что симплектические пространства нечетной размерности "выпали" из поля зрения геометров, так как формы (9.52) и (9.53), определяющие их метрические функции, не удовлетворяют естественному условию билинейности.

Поскольку квадратные антисимметричные матрицы $h_{\mu\nu}$ и $g_{\lambda\sigma}$ в выражениях (9.53) и (9.54) имеют четный порядок и невырождены, некоторой заменой координат их можно привести к диагональному виду, причем элементарной клеткой будет антисимметричная единичная матрица второго порядка:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

а сами метрические функции приобретут естественный для симплектического пространства вид:

$$\rho(ij) = \sum_{s=1}^{(n-1)/2} (x^s(i) y^s(j) - x^s(j) y^s(i)) + x^n(i) - x^n(j),$$

когда n – нечетно, то есть $n = 3, 5, 7, \ldots$, и

$$\rho(ij) = \sum_{t=1}^{n/2}(x^t(i)y^t(j) - x^t(j)y^t(i)),$$

когда n – четно, то есть $n = 2, 4, 6, \ldots$. В заключение отметим, что все результаты настоящего параграфа опубликованы автором ранее в работах [44] и [45].

§10. Групповая симметрия произвольных физических структур

Бинарные физические структуры как феноменологически симметричные геометрии естественно определяются на одном и двух множествах. Двухточечная функция, задающая такую геометрию, допускает нетривиальную группу движений с конечным числом параметров, которое было названо степенью групповой симметрии. При определенном соотношении между рангом физической структуры, числом существенных параметров группы движений и размерностью множеств групповая и феноменологическая симметрии соответствующей геометрии оказываются эквивалентными. Эти соотношения были заложены в определение физической структуры ее феноменологической и групповой симметрий. Естественно возникает вопрос об их происхождении и обосновании. Кроме того, имеется много возможностей обобщения и развития понятия физической структуры, одна из которых была реализована в монографии автора "Полиметрические геометрии" [46] и в §1 настоящей монографии, когда двум точкам сопоставлялось несколько действительных чисел. Другая возможность обобщения реализуется в определении тернарных физических структур, когда исходная функция, задающая структуру, сопоставляет число не паре точек, а трем точкам. Тернарные физические структуры естественно определяются на одном, двух и трех множествах и их простейшие случаи были рассмотрены автором в работах [47],[48],[49]. Однако уже предварительное их исследование показало, что тернарные структуры в отличие от бинарных не наделяются групповой симметрией, то есть исходная трехточечная функция не допускает нетривиальной группы движений. Этот результат в какой-то мере объясняет, почему столь богаты и содержательны в физическом и математическом смыслах бинарные структуры, в то время как тернарные существуют только в случае наименьшего возможного ранга. Поэтому возникает еще вопрос о внутренних причинах такого различия между бинарными и тернарными физическими структурами.

Для полного ответа на вопрос о соотношении между рангом физической структуры, степенью групповой симметрии и размерностью множеств (многообразий), на которых она задана, а также о причинах различия бинарных и полиарных (в частности, тернарных) структур, необходимо исходить из более общего определения физической структуры. Тогда можно будет установить, при каких соотношениях между основными характеристиками структуры она наделена групповой симметрией, а при каких нет. Естественно предположить, что только те структуры содержательны в физическом и математическом смыслах, группы движений которых нетривиальны. Для краткости последующего изложения определение произвольных физических структур будет дано в самом общем виде, достаточном, однако, для проведения доказательных рассуждений.

Пусть имеются p множеств $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$ произвольной природы, каждое из которых в математическом смысле представляет собой гладкое многообразие размерности $m_1, \ldots, m_p$ соответственно. Пусть также имеется функция

$$f : \mathfrak{S}_f \to R^s, \tag{10.1}$$

где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_1^{q_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{q_p}$, сопоставляющая каждому кортежу длины $q = q_1 + \ldots + q_p$ из $\mathfrak{S}_f$ некоторую точку из R^s, то есть s действительных чисел. Предполагается, что область определения $\mathfrak{S}_f$ функции f открыта и плотна в q-арном прямом произведении $\mathfrak{M}_1^{q_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{q_p}$ исходных множеств $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$, а ее координатное представление гладкое и невырожденное, в частности, с существенной зависимостью от координат. Числовой кортеж $(q_1, \ldots, q_p)$ назовем кратностью, число $q = q_1 + \ldots + q_p$ – арностью, а функцию (10.1) метрической или просто метрикой.

Пусть $M_1, \ldots, M_p$ – произвольные целые числа, такие что $M_1 > q_1, \ldots, M_p > q_p$. Построим отображение

$$F : \mathfrak{S}_F \to R^{sC_{M_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_p}^{q_p}}, \tag{10.2}$$

где $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}_1^{M_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{M_p}$, сопоставляя каждому кортежу длины

$M_1 + \ldots + M_p$ из $\mathfrak{S}_F$ совокупность $sC_{M_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_p}^{q_p}$ чисел, соответствующих всем упорядоченным кортежам длины $q = q_1 + \ldots + q_p$, которые являются проекциями исходного кортежа на область $\mathfrak{S}_f$. Область определения $\mathfrak{S}_F$ функции (10.2) будет, очевидно, открытой и плотной в $\mathfrak{M}_1^{M_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{M_p}$. Аналогично построим второе отображение

$$F' : \mathfrak{S}_{F'} \to R^{sC_{M_1'}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_p'}^{q_p}}, \tag{10.2'}$$

где $\mathfrak{S}_{F'} \subseteq \mathfrak{M}_1^{M_1'} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{M_p'}$ и $M_1' \geq M_1, \ldots, M_p' \geq M_p$. Проекцию отображения F' на пространство размерности, меньшей $sC_{M_1'}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_p'}^{q_p}$, получим,опуская из области его значений все числа, соответствующие по функции (10.1) некоторой совокупности кортежей длины $q = q_1 + \ldots + q_p$.

Определение 1. Будем говорить, что функция (10.1) задает на $m_1, \ldots, m_p$-мерных многообразиях $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$ q-арную s- метрическую физическую структуру ранга $(M_1, \ldots, M_p)$ и кратности $(q_1, \ldots, q_p)$, если на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве ранг отображения F равен $s(C_{M_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_p}^{q_p} - 1)$, а ранг любой проекции отображения F', не включающей в себя всю область отображения F, максимален на плотном в $\mathfrak{S}_{F'}$ множестве.

Другими словами, локально множество значений отображения F является подмножеством множества нулей системы s независимых функций $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_s)$ от $sC_{M_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_p}^{q_p}$ переменных, причем s функциональных связей

$$\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_s) = 0 \tag{10.3}$$

являются порождающими в том смысле, что любые другие нетривиальные связи будут только их следствием.

Определение 2. Будем говорить, что определенная выше физическая структура наделена групповой симметрией степени $r \geq 1$, если заданы такие эффективные гладкие локальные действия некоторой r-мерной локальной группы Ли G^r в многообразиях $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$, что для взаимного расширения этих действий на прямое произведение $\mathfrak{M}_1^{q_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{q_p}$ метрическя функция (10.1), задающая структуру, является q-точечным инвариантом, где $q = q_1 + \ldots + q_p$.

Поскольку преобразуемые многообразия конечномерны и метрика f невырождена, естественно предположить, что максимальное число существенных параметров полной локальной группы локальных движений конечно, то есть что $r < \infty$ и она является конечномерной локальной группой Ли специальных преобразований многообразия $\mathfrak{M}_1^{q_1} \times \ldots \times \mathfrak{M}_p^{q_p}$ размерности $q_1 m_1 + \ldots + q_p m_p$, которые есть взаимное расширение преобразований многообразий $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$ в смысле определения 5 из §3.

Запишем систему $sC_{M_1'}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_p'}^{q_p}$ уравнений сохранения метрической функции (10.1):

$$Df|_{F'} = 0 \tag{10.4}$$

относительно $M_1' m_1 + \ldots + M_p' m_p$ дифференциалов координат точек кортежа из $\mathfrak{S}_{F'}$. Если физическая структура наделена групповой симметрией, то однородная система (10.4), с одной стороны, должна иметь хотя бы одно ненулевое решение, а с другой, число ее линейно независимых ненулевых решений для любых чисел $M_1', \ldots, M_p'$ не должно превышать некоторого конечного значения, равного степени групповой симметрии. Число таких решений равно, как известно, числу неизвестных в системе минус ранг ее матрицы. Но матрица системы уравнений (10.4) есть матрица Якоби для системы функций f, соответствующих всем упорядоченным проекциям области определения $\mathfrak{S}_{F'}$ отображения (10.2$'$) на область определения $\mathfrak{S}_f$ исходной функции (10.1). Ранг матрицы системы уравнений (10.4), очевидно, не изменится, если из системы функций $f|_{F'}$ исключить зависимые по связи (10.3). Исключив их, получим максимальную проекцию отображения (10.2$'$), не содержащую в себе отображения (10.2). Обозначим число функций f в этой максимальной проекции через $N(M_1', \ldots, M_p')$. Тогда по определению физической структуры ранг матрицы системы уравнений (10. 4) будет равен

$$\min(M_1' m_1 + \ldots + M_p' m_p; N(M_1', \ldots, M_p')). \tag{10.5}$$

Если найдутся такие значения чисел $M_1', \ldots, M_p'$, для которых $M_1' m_1 + \ldots + M_p' m_p \leq N(M_1', \ldots, M_p')$, то ранг матрицы системы уравнений (10.4) для них будет равен $M_1' m_1 + \ldots + M_p' m_p$, то есть числу неизвестных в ней. Но тогда система (10.4) будет иметь только нулевое решение, что означает отсутствие нетривиальной групповой симметрии у рассматриваемой физической структуры. Если же для любых значений $M_1', \ldots, M_p'$ выполняется строгое неравенство $N(M_1', \ldots, M_p') < M_1' m_1 + \ldots + M_p' m_p$, то ранг матрицы системы уравнени (10.4) будет равен $N(M_1', \ldots, M_p')$ и число ее линейно независимых ненулевых решений окажется равным

$$r' = M_1'm_1 + \ldots + M_p'm_p - N(M_1', \ldots, M_p') > 0. \qquad (10.6)$$

Число r', как было отмечено выше, в случае наделения физической структуры групповой симметрией, не должно превышать некоторого конечного значения. Из такого условия установим, при каких соотношениях между размерностью множеств, кратностью и рангом физическая структура, задаваемая s-метрикой (10.1), может быть наделена групповой симметрией и определить степень r этой симметрии.

Рассмотрим сначала достаточно подробно бинарные структуры на одном и двух множествах, а также тернарные структуры на одном, двух и трех множествах.

Бинарная s-метрическая физическая структура ранга $M \geq 3$ и кратности 2 на одном множестве $\mathfrak{M}$, которое является m-мерным многообразием, задается функцией (10.1), где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, причем по определению структуры ранг отображения $F : \mathfrak{S}_F \to R^{sM(M-1)/2}$, где $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^M$, равен $sM(M-1)/2 - s$. Найдем, сколько в системе $sM'(M'-1)/2$ функций отображения $F' : \mathfrak{S}_{F'} \to R^{sM'(M'-1)/2}$, где $\mathfrak{S}_{F'} \subseteq \mathfrak{M}^{M'}$ и $M' \geq M$, при этом будет зависимых. На матрицу пар для кортежа длины M' из $\mathfrak{S}_{F'}$ будем последовательно налагать матрицу пар для кортежа длины F из $\mathfrak{S}_F$. При каждом полном наложении вычеркнем одну пару, например, последнюю. Эта процедура повторяется до тех пор, пока возможно наложение без пропуска. Число зависимых функций будет равно, очевидно, числу состоявшихся наложений, умноженному на число s. Нетрудно установить, что искомое число равно $s(M'-M+1)(M'-M+2)/2$ и потому ранг матрицы Якоби всей системы функций $f|_{F'}$ по определению физической структуры будет равным

$$\min(M'm; sM'(M'-2)/2 - s(M'-M+1)(M'-M+2)/2).$$

Если $m < s(M-2)$, то для достаточно больших значений M' ранг матрицы системы уравнений (10.4) в рассматриваемом случае равен $M'm$, то есть числу неизвестных в ней, и потому она имеет для этих значений M' только нулевое решение. Следовательно при $m < s(M-2)$ физическая структура не может быть наделена групповой симметрией. Если же $m \geq s(M-2)$, то для всех $M' \geq M$ ранг матрицы системы (10.4) меньше $M'm$ и она по формуле (10.6) имеет

$$r' = M'm - sM'(M-2) + s(M-1)(M-2)/2$$

линейно независимых ненулевых решений. При $m > s(M-2)$ с ростом M' число решений r' может стать сколь угодно большим, что противоречит предположению о конечности степени r групповой симметрии, поскольку должно быть $r' < r$. Поэтому, если физическая структура наделена групповой симметрией конечной ненулевой степени, то размерность m многообразия $\mathfrak{M}$ и ее ранг должны быть связаны соотношением

$$\mathbf{m} = \mathbf{s}(\mathbf{M} - \mathbf{2}). \tag{10.7}$$

При соотношении (10.7) число линейно независимых ненулевых решений r' системы уравнений (10.4) равно числу существенных и независимых параметров группы движений, то есть степени r групповой симметрии:

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}(\mathbf{M} - \mathbf{1})(\mathbf{M} - \mathbf{2})/\mathbf{2} = \mathbf{m}(\mathbf{m} + \mathbf{s})/\mathbf{2s}. \tag{10.8}$$

Выведенные соотношения (10.7) и (10.8) между размерностью m многообразия $\mathfrak{M}$, рангом M физической структуры, задаваемой на нем s-метрикой (10.1), и степенью r групповой симметрии были использованы в основных определениях работ автора [50], [51], [52] и его монографии [46].

Рассмотрим теперь бинарные физические структуры ранга (M, N) и кратности (1,1), где $M \geq 2$ и $N \geq 2$, задаваемых на двух множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, являющихся многообразиями размерности m и n соответственно, s-метрикой (10.1), где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$. По определению физической структуры ранг отображения $F : \mathfrak{S}_F \to R^{sMN}$, где $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^M \times \mathfrak{N}^N$, равен $s(MN-1)$. Число зависимых функций в системе $sM'N'$ функций отображения $F' : \mathfrak{S}_{F'} \to R^{sM'N'}$, где $\mathfrak{S}_{F'} \subseteq \mathfrak{M}^{M'} \times \mathfrak{N}^{N'}$ и $M' \geq M$, $N' \geq N$, определяется описанным выше способом наложения на матрицу пар для кортежа длины $M' + N'$ из области $\mathfrak{S}_{F'}$ матрицы пар для кортежа длины $M + N$ из области $\mathfrak{S}_F$. Число это находится достаточно просто и равно $s(M' - M + 1)(N' - N + 1)$. Поэтому ранг матрицы Якоби системы функций $f|_{F'}$, а следовательно, и системы уравнений (10.4) по тому же определению структуры будет равным

$$\min(M'm + N'n; sM'N' - s(M' - M + 1)(N' - N + 1)).$$

Если $m < s(N-1)$ или $n < s(M-1)$, то для некоторых значений M' и N' ранг системы уравнений (10.4) равен числу неизвестных $M'm +$

$N'n$ в ней и она имеет для этих значений только нулевое решение, что и означает отсутствие групповой симметрии у рассматриваемой физической структуры. Если же $m \geq s(N-1)$ и $n \geq s(M-1)$, то ранг матрицы системы уравнений (10.4) для любых значений M' и N' равен $sM'N' - s(M'-M+1)(N'-N+1)$ и она потому имеет

$$r' = M'm + N'n - sM'(N-1) - sN'(M-1) + s(M-1)(N-1)$$

линейно независимых ненулевых решений. При $m > s(N-1)$ или $n > s(M-1)$ с ростом M' и N' число r' таких решений может стать сколь угодно большим, что противоречит предположению о конечности степени r групповой симметрии, поскольку должно быть $r' < r$. Поэтому бинарная физическая структура ранга (M, N), задаваемая на m-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ s-метрической функцией (10.1), будет наделена групповой симметрией только при выполнении следующих соотношений:

$$\mathbf{m} = \mathbf{s}(\mathbf{N}-\mathbf{1}), \ \mathbf{n} = \mathbf{s}(\mathbf{M}-\mathbf{1}). \tag{10.9}$$

Степень r групповой симметрии, то есть число независимых и существенных параметров группы движений, равно числу r' линейно независимых ненулевых решений системы уравнений (10.4) при соотношениях (10.9):

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}(\mathbf{M}-\mathbf{1})(\mathbf{N}-\mathbf{1}) = \mathbf{mn}/\mathbf{s}. \tag{10.10}$$

Соотношения (10.9) и (10.10) были использованы в основных определениях работы автора [24] и §1 настоящей монографии. При сопоставлении надо учесть только следующую сдвижку обозначений $M \to n+1$, $N \to m+1$, $m \to sm$, $n \to sn$. То есть на sm-мерном и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ s-метрика (10.1) задает физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$, которая наделена групповой симметрией степени $r = smn$.

Перейдем, далее, к менее подробному рассмотрению тернарных структур. Для тернарной физической структуры ранга M и кратности 3, где $M \geq 4$, задаваемой на одном множестве $\mathfrak{M}$, представляющем собой m-мерное многообразие, s-метрикой (10.1), где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}^3$, ранг отображения $F : \mathfrak{S}_F \to R^{sM(M-1)(M-2)/6}$, где $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^M$, равен по определению структуры $sM(M-1)(M-2)/6 - s$. Найдем ранг отображения $F' : \mathfrak{S}_{F'} \to R^{sM'(M'-1)(M'-2)/6}$, где $\mathfrak{S}_{F'} \subseteq \mathfrak{M}^{M'}$ и $M' \geq M$. Среди всех

$sM'(M'-1)(M'-2)/6$ функций $f|_{F'}$ этого отображения число зависимых определяется методом наложения матрицы троек для кортежа длины M из $\mathfrak{S}_F$ на матрицу троек для кортежа длины M' из $\mathfrak{S}_{F'}$. Этот метод был описан выше при рассмотрении бинарных структур на одном множестве. Для числа зависимых функций отображения F' аналогично получаем значение $s(M'-M+1)(M'-M+2)(M'-M+3)/6$. По определению физической структуры ранг матрицы системы уравнений (10.4) будет равен

$$\min(M'm; sM'(M'-1)(M'-2)/6 -$$
$$- s(M'-M+1)(M'-M+2)(M'-M+3)/6).$$

Поскольку $M > 3$, для достаточно больших значенй M' этот ранг равен $M'm$, то есть числу неизвестных в системе уравнений (10.4) и она поэтому для таких значений M' имеет только нулевое решение. Таким образом, тернарные физические структуры на одном множестве не могут быть наделены групповой симметрией.

Тернарные физические структуры ранга (M, N) и кратности (2,1), где $M \geq 3,\ N \geq 2$, задаются на двух множествах – m-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ – s-метрической функцией (10.1), где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}$. По определению такой структуры ранг отображения $F : \mathfrak{S}_F \to R^{sM(M-1)N/2}$, где $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^M \times \mathfrak{N}^N$, равен $sM(M-1)N/2 - s$, а ранг отображения $F' : \mathfrak{S}_{F'} \to R^{sM'(M'-1)N'/2}$, где $\mathfrak{S}_{F'} \subseteq \mathfrak{M}^{M'} \times \mathfrak{N}^{N'}$ и $M' \geq M,\ N' \geq N$, то есть ранг матрицы системы уравнений (10.4), найдем, налагая матрицу троек для кортежа длины $M+N$ из области $\mathfrak{S}_F$ на матрицу троек для кортежа длины $M'+N'$ из области $\mathfrak{S}_{F'}$:

$$\min(M'm + N'n; sM'(M'-1)N'/2 -$$
$$- s(M'-M+1)(M'-M+2)(N'-N+1)/2).$$

Поскольку $M > 2$ и $N > 1$, для достаточно больших значений M' и N' этот ранг равен $M'm + N'n$, то есть числу неизвестных в системе уравнений (10.4), которая будет тогда иметь только нулевое решение. Таким образом, тернарные физические структуры и на двух множествах не могут быть наделены групповой симметрией.

Для тернарной физической структуры ранга (M, N, L) и кратности (1,1,1), где $M \geq 2,\ N \geq 2,\ L \geq 2$, задаваемой на трех множествах $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{L}$ – многообразиях размерности m, n, l соответственно – s-метрикой (10.1), где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{L}$, ранг отображения $F : \mathfrak{S}_F \to$

R^{sMNL}, где $\mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^M \times \mathfrak{N}^N \times \mathfrak{L}^L$, по ее определению равен $sMNL - s$. Ранг же отображения $F' : \mathfrak{S}_{F'} \to R^{sM'N'L'}$, где $\mathfrak{S}_{F'} \subseteq \mathfrak{M}^{M'} \times \mathfrak{N}^{N'} \times \mathfrak{L}^{L'}$ и $M' \geq M, \ N' \geq N, \ L' \geq L$, то есть ранг матрицы системы уравнений (10.4), нетрудно найти методом наложения, использованным и подробно описанным выше:

$$\min(M'm + N'n + L'l; sM'N'L' -$$
$$- s(M' - M + 1)(N' - N + 1)(L' - L + 1)).$$

Поскольку $M > 1, \ N > 1, \ L > 1$, для достаточно больших значений M', N', L' ранг отображения F' равен $M'm + N'n + L'l$, то есть числу неизвестных в системе уравнений (10.4), которая для этих значений будет иметь только нулевое решение. Таким образом, и на трех множествах тернарные физические структуры не могут быть наделены групповой симметрией.

Произвольные физические структуры ранга $(M_1, \ldots, M_p)$ и кратности $(q_1, \ldots, q_p)$, где $M_1 \geq q_1 + 1, \ldots, M_p \geq q_p + 1$, задаются на p множествах $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$ – многообразиях размерности $m_1, \ldots, m_p$ соответственно – s-метрической функцией (10.1). Ранг отбражения (10.2) по определению физической структуры равен $sC^{q_1}_{M_1} \times \ldots \times C^{q_p}_{M_p} - s$, а ранг отображения (10.2′), то есть ранг матрицы системы уравнени (10.4), можно найти, налагая на матрицу кортежей длины $q = q_1 + \ldots + q_p$ для кортежа длины $M'_1 + \ldots + M'_p$ из области $\mathfrak{S}_{F'}$ матрицу кортежей той же длины q для кортежа длины $M_1 + \ldots + M_p$ из области $\mathfrak{S}_F$:

$$\begin{gathered}\min(M'_1 m_1 + \ldots + M'_p m_p; sC^{q_1}_{M'_1} \times \ldots \times C^{q_p}_{M'_p} - \\ - sC^{q_1}_{M'_1 - M_1 + q_1} \times \ldots \times C^{q_p}_{M'_p - M_p + q_p}).\end{gathered} \tag{10.5′}$$

Поскольку бинарные ($q = 2$) и тернарные ($q = 3$) физические структуры выше были рассмотрены, будем предполагать, что их арность $q > 3$. Число неизвестных в системе уравнений (10.4) от $M'_1, \ldots, M'_p$ зависит линейным образом. В то же время разность, входящая во вторую половину выражения (10.5′), содержит по тем же переменным $M'_1, \ldots, M'_p$ члены порядка $q - 1 > 2$, которые неограниченно возрастают, так как $M_1 > q_1, \ldots, M_p > q_p$. А это означает, что для достаточно больших значений $M'_1, \ldots, M'_p$ ранг матрицы системы уравнений (10.4) равен числу неизвестных в ней, и потому она для них будет иметь только нулевое решение. Таким образом, q-арные физические структуры, задаваемые на множествах $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$ функцией (10.1), и в случае $q > 3$ не могут быть наделены групповой симметрией.

Окончательный вывод, к которому мы приходим по результатам проведенного выше исследования выражает следующая

Теорема. *Групповой симметрией могут быть наделены только бинарные физические структуры на одном и двух множествах, в то время как для q-арных физических структур с $q \geq 3$ функция* (10.1) *не допускает никаких нетривиальных локальных движений.*

Только что сформулированной теореме об отсутствии групповой симметрии у всех q-арных физических структур с $q \geq 3$ как будто бы противоречит приведенный в конце Введения пример тернарной феноменологически симметричной ранга 4 геометрии, задаваемой на плоскости $R^2 = \{x, y\}$ функцией (В.15), которая сопоставляет каждой тройке точек $< ijk >$ площадь $S(ijk)$ ориентированного треугольника с вершинами в этих точках. Для произвольной четверки точек $< ijkl >$ между площадями $S(ijk), S(ijl), S(ikl), S(jkl)$, соответствующими всем упорядоченным по исходной четверке тройкам точек $< ijk >, < ijl >, < ikl >, < jkl >$, имеется функциональная связь (В.16), причем сама функция (В.15) допускает пятипараметрическую группу движений (В.17), состоящую из евклидовых движений и сдвигов. Однако только наличия функциональной связи (В.16), согласно определению 1 настоящего параграфа, не является достаточным условием того, чтобы функция (В.15) задавала на плоскости тернарную физическую структуру ранга 4. Необходимо еще, чтобы связь (В.16) была порождающей в следующем смысле: всякая другая нетривиальная связь должна быть ее следствием. Покажем , что именно этому условию она и не удовлетворяет. Возьмем на плоскости семерку точек $< ijklpmn >$, которой по функции (В.15) сопоставим все тридцать пять площадей $S(ijk)$, $S(ijl), \ldots, S(imn)$; $S(jkl)$, $S(jkp), \ldots, S(pmn)$ соответствующих треугольников $< ijk >, \ldots, < pmn >$. Из этих тридцати пяти площадей по связи (В.16) можно исключить двадцать: $S(jkl), S(jkp), \ldots, S(pmn)$. Между оставшимися пятнадцатью площадями $S(ijk), S(ijl), \ldots, S(imn)$ имеется тривиальная связь, так как они зависят только от четырнадцати координат $x_i, y_i, x_j, y_j, \ldots, x_n, y_n$. Если связь (В.16) порождающая, то, исключая площадь $S(ijk)$, получаем четырнадцать площадей

$$S(ijl), S(ijp), \ldots, S(imn), \tag{10.11}$$

которые должны быть независимыми. Тривиальной связи между ними быть не может, так как они являются функциями четырнадцати координат точек семерки $< ijklpmn >$, но нетривиальные связи между ними, в действительности, есть, в чем можно убедиться из следующих простых соображений. Если бы таких связей не было, то семиточечная фигура $< ijklpmn >$ не имела бы для своего движения ни одной степени свободы, так как на четырнадцать координат ее точек было бы наложено столько же независимых соотношений, обусловленных инвариантностью четырнадцати площадей (10.11). В действительности же, семиточечная фигура $< ijklpmn >$, сохраняя площади всех тридцати пяти треугольников, может перемещаться по плоскости с пятью степенями свободы: одно вращение, два параллельных переноса и два сдвига. Соответствующая группа движений задается пятипараметрической группой (В.17) преобразований плоскости. Установленное противоречие и доказывает, что между четырнадцатью площадями (10.11) должны существовать дополнительные нетривиальные функциональные связи, не являющиеся следствием основной связи (В.16), которая, таким образом, не является порождающей. Функция (В.15) не задает на плоскости $\mathfrak{M} = R^2$ тернарную физическую структуру ранга 4 в смысле определения 1 настоящего параграфа, несмотря на наличие функциональной связи (В.16), так как ранг проекции отображения $F' : \mathfrak{M}^7 \to R^{35}$, задаваемой четырнадцатью площадями (10.11) и не содержащей отображения $F : \mathfrak{M}^4 \to R^4$, меньше четырнадцати, то есть не максимален.

Групповая симметрия бинарных физических структур, которым было уделено основное внимание в монографии автора "Полиметрические геометрии" [46] и в настоящей монографии, является определяющей. То есть функция $f : \mathfrak{S}_f \to R^s$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}^2$ или $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, будет задавать физическую структуру в том и только в том случае, если она допускает нетривиальную конечномерную группу движений. Условие наделения физических структур групповой симметрией определяет ее степень, устанавливая связь этой степени с размерностью множеств и рангом структуры соотношениями (10.7),(10.8) и (10.9),(10.10). С другой стороны, без предположения о групповой симметрии даже соотношения (10.7) и (10.9,), устанавливающие связь размерности множеств и ранга структуры и не содержащие степень групповой симметрии, должны в исходных аксиомах оговариваться дополнительно без достаточно убедительного обоснования этой связи.

В заключение отметим, что результаты настоящего параграфа опубликованы автором в работе [53].

§11. Функциональные уравнения в теории физических структур (ТФС)

В математическом аппарате ТФС функциональные уравнения играют ключевую роль, причем феноменологическая и групповая симметрии приводят к различному их типу. В настоящем параграфе в основном будут рассмотрены функциональные уравнения для физических структур на двух множествах. Для геометрических же структур на одном множестве соответствующие функциональные уравнения будут приведены только в плане иллюстрации и сопоставления.

Физическая структура ранга $(n+1, m+1)$ задается невырожденной s-метрикой (1.2):

$$f(i\alpha) = f(x(i), \xi(\alpha)) = f(x^1(i), \dots, x^{sm}(i),\ \xi^1(\alpha), \dots, \xi^{sn}(\alpha)), \quad (11.1)$$

где $m, n, s \geq 1$, на sm- и sn-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Ее феноменологическая симметрия означает, что для каждого кортежа $< ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau >$ из некоторой окрестности $U \subset \mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества кортежей выполняется тождество (1.1):

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), \dots, f(v\tau)) = 0, \quad (11.2)$$

где функция Φ имеет s независимых компонент.

Тождество (11.2) есть, с одной стороны, аналитическое выражение принципа феноменологической симметрии, а с другой, представляет собой основное функциональное уравнение в ТФС. В общем случае неизвестными в уравнении (11.2) являются и функция $f = (f^1, \dots, f^s)$, задающая физическую структуру, и функция $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_s)$, выражающая этим уравнением ее феномеологическую симметрию. Понимаемое именно в таком смысле, уравнение (11.2) решено только в некоторых случаях. Полностью для $s = 1$ (см. §2 и монографию [27]), частично для $s = 2$ (см. §7 и статьи [15],[16]) и $s = 3$ (см §8). Более простым является тот вариант уравнения (11.2), когда в нем из двух функций f и Φ какая-то известна. На страницах настоящей монографии чаще всего оказывалась известной s-метрика f, поэтому именно такой вариант уравнения (11.2) мы рассмотрим ниже достаточно подробно.

Простейшие случаи уравнения (11.2) с известной функцией f возникают при анализе структуры второго закона Ньютона и закона Ома, проведенном во Введении. Если закон Ньютона записать формулой (В.1), указывающей явно материальное тело i и ускоритель α:

$$m(i)a(i\alpha) = F(\alpha), \tag{11.3}$$

где a – функция ускорения тела массы m под действием ускорителя силы F, то для любых двух материальных тел i, j и для любых двух ускорителей α, β легко находится связь (В.2), в которую входят только четыре измеряемые в опыте ускорения:

$$a(i\alpha)a(j\beta) - a(i\beta)a(j\alpha) = 0. \tag{11.4}$$

Феноменологически симметричная форма (11.4) второго закона Ньютона является решением функционального уравнения

$$\Phi(a(i\alpha), a(i\beta), a(j\alpha), a(j\beta)) = 0, \tag{11.5}$$

в котором функция ускорения a известна по обычной форме (11.3) этого закона. Функция a задает на множестве материальных тел $\mathfrak{M}$ и множестве ускорителей $\mathfrak{N}$ физическую структуру минимального ранга (2,2), поэтому и уравнение (11.5) оказалось достаточно простым. Ясно, что это уравнение есть частный случай общего уравнения (11.2) для случая $m = n = s = 1$, если в нем положить $f = a$.

Перейдем теперь к закону Ома, в формуле (В.3) которого явно указаны проводник i и источник тока α:

$$I(i\alpha) = \mathcal{E}(\alpha)/(R(i) + r(\alpha)), \tag{11.6}$$

где I – функция тока, измеряемая амперметром в замкнутой цепи, содержащей проводник с сопротивлением R и источник тока с электродвижущей силой $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r. Для любых трех проводников i, j, k и любых двух источников тока α, β шесть возможных значений тока связаны соотношением (В.4), в котором отсутствуют параметры этих проводников и источников:

$$\begin{vmatrix} I^{-1}(i\alpha) & I^{-1}(i\beta) & 1 \\ I^{-1}(j\alpha) & I^{-1}(j\beta) & 1 \\ I^{-1}(k\alpha) & I^{-1}(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{11.7}$$

Соотношение (11.7) задает феноменологически симметричную форму закона Ома, являющуюся решением функционального уравнения

$$\Phi(I(i\alpha), I(i\beta), I(j\alpha), I(j\beta), I(k\alpha), I(k\beta)) = 0, \tag{11.8}$$

в которм функция тока I известна по обычной форме (11.6) этого закона. Заметим, что функция I задает на множестве проводников $\mathfrak{M}$ и множестве источников тока $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга (3,2), а уравнение (11.8) получается из общего уравнения (11.2) при $n = 2, m = s = 1$, если в нем положить $f = I$.

В §2 по работе [14] и монографии [27] приведены все возможные канонические выражения для функции f, задающей на m-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ однометрическую физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$. Воспроизведем их здесь по формулам (2.2)–(2.7), указывая явно точку i множества $\mathfrak{M}$ и точку α множества $\mathfrak{N}$:

$m = 1,\ n = 1$:

$$f(i\alpha) = x(i) + \xi(\alpha); \tag{11.9}$$

$m = 1,\ n = 2$:

$$f(i\alpha) = x(i)\xi(\alpha) + \eta(\alpha); \tag{11.10}$$

$m = 1,\ n = 3$:

$$f(i\alpha) = (x(i)\xi(\alpha) + \eta(\alpha))/(x(i) + \vartheta(\alpha)); \tag{11.11}$$

$m = n \geq 2$:

$$f(i\alpha) = x^1(i)\xi^1(\alpha) + \ldots + x^{m-1}(i)\xi^{m-1}(\alpha) + x^m(i)\xi^m(\alpha), \tag{11.12}$$

$$f(i\alpha) = x^1(i)\xi^1(\alpha) + \ldots + x^{m-1}(i)\xi^{m-1}(\alpha) + x^m(i) + \xi^m(\alpha); \tag{11.13}$$

$m = n - 1 \geq 2$:

$$f(i\alpha) = x^1(i)\xi^1(\alpha) + \ldots + x^m(i)\xi^m(\alpha) + \xi^{m+1}(\alpha), \tag{11.14}$$

где предполагается, что $m \leq n$. Выражения же функции $f(i\alpha)$ для трех случаев $n = 1, m = 2$; $n = 1, m = 3$ и $n = m - 1 \geq 2$, когда $m > n$, легко записать по выражениям (11.10),(11.11) и (11.14):

$n = 1,\ m = 2$:

$$f(i\alpha) = x(i)\xi(\alpha) + y(i); \tag{11.15}$$

$n = 1,\ m = 3$:

$$f(i\alpha) = (x(i)\xi(\alpha) + y(i))/(\xi(\alpha) + z(i)); \tag{11.16}$$

$n = m - 1 \geq 2$;

$$f(i\alpha) = x^1(i)\xi^1(\alpha) + \ldots + x^n(i)\xi^n(\alpha) + x^{n+1}(i). \qquad (11.17)$$

Для каждой из метрических функций (11.9)–(11.17), кроме, может быть, (11.11) и (11.16), решение функционального уравнения (11.2) находится сравнительно просто и чисто алгебраически: из $(m+1)(n+1)$ значений функции f для всех пар кортежа $< ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau > \in \mathfrak{S}_F \subseteq \mathfrak{M}^{n+1} \times \mathfrak{N}^{m+1}$ исключаются координаты всех точек этого кортежа.

Функция (11.9) задает на одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга (2,2) и для нее функциональное уравнение (11.2):

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)) = 0 \qquad (11.18)$$

имеет следующее решение:

$$f(i\alpha) - f(i\beta) - f(j\alpha) + f(j\beta) = 0. \qquad (11.19)$$

Функция (11.10) на одномерном и двумерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ задает физическую структуру ранга (3,2) и для нее функциональное уравнение (11.2):

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta)) = 0 \qquad (11.20)$$

имеет следующее решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & f(i\alpha) & f(i\beta) \\ 1 & f(j\alpha) & f(j\beta) \\ 1 & f(k\alpha) & f(k\beta) \end{vmatrix} = 0. \qquad (11.21)$$

Обратим внимание на то, что решения (11.19) и (11.21) подстановками $f = \ln a$ и $f = 1/I$ переводятся в соотношения (11.4) и (11.7), определяющие закон Ньютона и закон Ома в их феноменологически инвариантной форме.

Функция (11.11) задает на одномерном и трехмерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга (4,2) и для нее функциональное уравнение (11.2):

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), f(k\alpha), f(k\beta), f(l\alpha), f(l\beta)) = 0 \qquad (11.22)$$

имеет следующее решение

$$\begin{vmatrix} 1 & f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\alpha)f(i\beta) \\ 1 & f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\alpha)f(j\beta) \\ 1 & f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\alpha)f(k\beta) \\ 1 & f(l\alpha) & f(l\beta) & f(l\alpha)f(l\beta) \end{vmatrix} = 0. \tag{11.23}$$

Функция (11.12) задает на m-мерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, где $m \geq 2$, физическую структуру ранга $(m+1, m+1)$, то есть ранга (3,3), (4,4), (5,5), ... , и для нее функциональное уравнение (11.2) имеет следующее решение:

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & \dots & f(i\tau) \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & \dots & f(j\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(v\alpha) & f(v\beta) & \dots & f(v\tau) \end{vmatrix} = 0. \tag{11.24}$$

Функция (11.13) на тех же многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ задает другую физическую структуру, но того же ранга, что и функция (11.12). Для нее функциональное уравнение (11.2) имеет следующее решение:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & f(i\alpha) & f(i\beta) & \dots & f(i\tau) \\ 1 & f(j\alpha) & f(j\beta) & \dots & f(j\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & f(v\alpha) & f(v\beta) & \dots & f(v\tau) \end{vmatrix} = 0. \tag{11.25}$$

Заметим, что функции (11.12) и (11.13) не переходят друг в друга ни при каких заменах координат в многообразиях $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ и масштабном преобразовании $f \to \psi(f)$, то есть они задают принципиально различные физические структуры ранга $(m+1, m+1)$ на m-мерных многообразиях, где, напомним, $m \geq 2$.

Функция (11.14) задает на m-мерном и $(m+1)$-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, где $m \geq 2$, физическую структуру ранга (4,3), (5,4), (6,5), ... , и для нее функциональное уравнение (11.2) имеет следующее решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & f(i\alpha) & f(i\beta) & \dots & f(i\tau) \\ 1 & f(j\alpha) & f(j\beta) & \dots & f(j\tau) \\ 1 & f(k\alpha) & f(k\beta) & \dots & f(k\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & f(v\alpha) & f(v\beta) & \dots & f(v\tau) \end{vmatrix} = 0. \tag{11.26}$$

Функция (11.15) задает на двумерном и одномерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга (2,3) и для функционального уравнения (11.2):

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(i\gamma), f(j\alpha), f(j\beta), f(j\gamma)) = 0 \tag{11.27}$$

имеет следующее решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\gamma) \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\gamma) \end{vmatrix} = 0. \tag{11.28}$$

Функция (11.16) задает на трехмерном и одномерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга (2,4) и для нее функциональное уравнение (11.2):

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(i\gamma), f(i\delta), f(j\alpha), f(j\beta), f(j\gamma), f(j\delta)) = 0 \tag{11.29}$$

имеет следующее решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\gamma) & f(i\delta) \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\gamma) & f(j\delta) \\ f(i\alpha)f(j\alpha) & f(i\beta)f(j\beta) & f(i\gamma)f(j\gamma) & f(i\delta)f(j\delta) \end{vmatrix} = 0. \tag{11.30}$$

И наконец, функция (11.17) задает на $(n+1)$-мерном и n-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, где $n \geq 2$, физическую структуру ранга $(n+1, n+2)$, то есть ранга (3,4), (4,5), (5,6), ... , и для нее функциональное уравнение (11.2) имеет следующее решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\gamma) & \dots & f(i\tau) \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\gamma) & \dots & f(j\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(v\alpha) & f(v\beta) & f(v\gamma) & \dots & f(v\tau) \end{vmatrix} = 0. \tag{11.31}$$

В §7, воспроизводящем содержание работ [15] и [16], получены все возможные канонические выражения двуметрики, задающей на двумерном и $2n$-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга $(n+1, 2)$, где $n \geq 1$. Воспроизведем их здесь по формулам (7.9)–(7.18), указывая явно точки i и α множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$:

$n = 1$:

$$f^1(i\alpha) = x(i) + \xi(\alpha),\ \ f^2(i\alpha) = y(i) + \eta(\alpha); \tag{11.32}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(i\alpha) &= (x(i) + \xi(\alpha))y(i), \\ f^2(i\alpha) &= (x(i) + \xi(\alpha))\eta(\alpha); \end{aligned}\right\} \tag{11.33}$$

$n = 2$:

$$\left.\begin{aligned} f^1(i\alpha) &= x(i)\xi(\alpha) + \varepsilon y(i)\eta(\alpha) + \mu(\alpha), \\ f^2(i\alpha) &= x(i)\eta(\alpha) + y(i)\xi(\alpha) + \nu(\alpha), \end{aligned}\right\} \tag{11.34}$$

где $\varepsilon = 0, \pm 1$;

$$\left.\begin{aligned} f^1(i\alpha) &= x(i)\xi(\alpha) + \mu(\alpha), \\ f^2(i\alpha) &= x(i)\eta(\alpha) + y(i)\xi^c(\alpha) + \nu(\alpha), \end{aligned}\right\} \tag{11.35}$$

где $c \neq 1$;

$$\left.\begin{aligned} f^1(i\alpha) &= x(i)\xi(\alpha) + \mu(\alpha), \\ f^2(i\alpha) &= x(i)\eta(\alpha) + y(i)\xi^2(\alpha) + x^2(i)\xi^2(\alpha)\ln\xi(\alpha) + \nu(\alpha); \end{aligned}\right\} \tag{11.36}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(i\alpha) &= x(i)\xi(\alpha) + y(i)\mu(\alpha), \\ f^2(i\alpha) &= x(i)\eta(\alpha) + y(i)\nu(\alpha); \end{aligned}\right\} \tag{11.37}$$

$n = 3$:

$$\left.\begin{aligned} f^1(i\alpha) = {} & [(x(i)\xi(\alpha) + \varepsilon y(i)\eta(\alpha)) + \mu(\alpha))(x(i) + \rho(\alpha)) - \\ & - \varepsilon(x(i)\eta(\alpha) + y(i)\xi(\alpha) + \nu(\alpha))(y(i) + \tau(\alpha))]/ \\ & /[(x(i) + \rho(\alpha))^2 - \varepsilon(y(i) + \tau(\alpha))^2], \\ f^2(i\alpha) = {} & [(x(i)\xi(\alpha) + \varepsilon y(i)\eta(\alpha) + \mu(\alpha))(y(i) + \tau(\alpha)) - \\ & - (x(i)\eta(\alpha) + y(i)\xi(\alpha) + \nu(\alpha))(x(i) + \rho(\alpha))]/ \\ & /[(x(i) + \rho(\alpha))^2 - \varepsilon(y(i) + \tau(\alpha))^2], \end{aligned}\right\} \tag{11.38}$$

где $\varepsilon = 0, \pm 1$;

$$\left.\begin{aligned} f^1(i\alpha) &= (x(i)\xi(\alpha) + \mu(\alpha))/(x(i) + \rho(\alpha)), \\ f^2(i\alpha) &= (x(i)\eta(\alpha) + y(i)\nu(\alpha) + \tau(\alpha))/(x(i) + \rho(\alpha); \end{aligned}\right\} \tag{11.39}$$

$$\left.\begin{aligned} f^1(i\alpha) &= x(i)\xi(\alpha) + y(i)\mu(\alpha) + \rho(\alpha), \\ f^2(i\alpha) &= x(i)\eta(\alpha) + y(i)\nu(\alpha) + \tau(\alpha); \end{aligned}\right\} \tag{11.40}$$

$n = 4$:

$$\left.\begin{aligned} f^1(i\alpha) = {} & (x(i)\xi(\alpha) + y(i)\mu(\alpha) + \rho(\alpha))/ \\ & /(x(i)\varphi(\alpha) + y(i) + \omega(\alpha)), \\ f^2(i\alpha) = {} & (x(i)\eta(\alpha) + y(i)\nu(\alpha) + \tau(\alpha))/ \\ & /(x(i)\varphi(\alpha) + y(i) + \omega(\alpha)). \end{aligned}\right\} \tag{11.41}$$

Функциональное уравнение (11.2) для двуметрической физической структуры ранга $(n+1,2)$ записывается в виде $(7.1')$:

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta), \dots, f(v\alpha), f(v\beta)) = 0, \tag{11.42}$$

причем надо помнить, что функции f и Φ двухкомпонентные, то есть $f = (f^1, f^2)$ и $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$.

Функциональное уравнение (11.42) для двуметрик (11.32) и (11.33), задающих на двумерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга (2,2), имеет решения (7.24) и (7.25) соответственно.

Функциональное уравнение (11.42) для двуметрик (11.34), (11.35), (11.36) и (11.37), задающих на двумерном и четырехмерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга (3,2), имеет решения (7.26), (7.27), (7.28) и (7.29) соответственно.

Функциональное уравнение (11.42) для двуметрик (11.38) и (11.40), задающих на двумерном и шестимерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга (4,2), имеет решение (7.30) и (7.31) соответственно.

Для двуметрики (11.39), также задающей на двумерном и шестимерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга (4,2), решение функционального уравнения (11.42) пока не найдено. Не решено это уравнение еще и для двуметрики (11.41), задающей на двумерном и восьмимерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ единственную физическую структуру ранга (5,2).

В §8 получена исчерпывающая классификация триметрик $f = (f^1, f^2, f^3)$, задающих на трехмерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга (2,2). Соответствующие семь выражений (8.43)–(8.49) можно переписать, указывая явно точки i и α множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Для этого надо только осуществить в них следующие подстановки: $f \to f(i\alpha)$, $x \to x(i)$, $y \to y(i)$, $z \to z(i)$, $\xi \to \xi(\alpha)$, $\eta \to \eta(\alpha)$, $\vartheta \to \vartheta(\alpha)$, чего, однако, явно мы ниже делать не будем.

Функциональное уравнение (11.2) для триметрических физических структур ранга (2,2) записывается в виде (8.3):

$$\Phi(f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta)) = 0, \tag{11.43}$$

которое, в отличие от уравнения (11.18), есть система трех функциональных уравнений, так как в нем функции $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ и $f = (f^1, f^2, f^3)$ трехкомпонентные.

Функциональное уравнение (11.43) для триметрик (8.43), (8.44), (8.45), (8.46) и (8.49) имеет решения (8.60), (8.61), (8.62), (8.63) и (8.64) соответственно. Для триметрик же (8.47) и (8.48) решения этого уравнения еще не найдены.

Другой вариант функционального уравнения (11.2), когда при известной функции $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_s)$ необходимо найти s-метрику $f = (f^1, \ldots, f^s)$, задающую на многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ размерности sm и sn физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$, решается следующим образом. В прямых произведениях $\mathfrak{M}^n$ и $\mathfrak{N}^m$ фиксируются кортежи $< j_0 k_0 \ldots v_0 >$ и $< \beta_0 \gamma_0 \ldots \tau_0 >$ длины n и m. Точки этих кортежей выбираются такие, чтобы уравнение (11.2), записанное для кортежа $< i j_0 k_0 \ldots v_0, \alpha \beta_0 \gamma_0 \ldots \tau_0 > \in \mathfrak{S}_F$, могло быть однозначно разрешено, по крайней мере локально, относительно $f(i\alpha)$. Затем удобным образом вводятся локальные координаты $x^1(i), x^2(i), \ldots, x^{sm}(i)$ и $\xi^1(\alpha), \xi^2(\alpha), \ldots, \xi^{sn}(\alpha)$, через которые и выражается s-метрика (11.1). Если она невырождена и при ее подстановке в исходное уравнение (11.2) оно превращается в тождество по всем координатам кортежа $< ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau >$, то полученная s-метрика действительно задает физическую структуру соответствующего ранга.

Проиллюстрируем описанный выше метод решения функционального уравнения (11.2) на примере однометрической и двуметрической физической структуры минимального ранга (2,2).

Уравнение (11.19) запишем для четверки $< i j_0, \alpha \beta_0 >$:

$$f(i\alpha) - f(i\beta_0) - f(j_0\alpha) + f(j_0\beta_0) = 0,$$

после чего разрешим его относительно переменной $f(i\alpha)$:

$$f(i\alpha) = f(i\beta_0) + f(j_0\alpha) - f(j_0\beta_0).$$

Вводя локальные координаты $x(i) = f(i\beta_0)$ и $\xi(\alpha) = f(j_0\alpha) - f(j_0\beta_0)$, где $f(j_0\beta_0)$, очевидно, константа, получаем координатное представление (11.9), которое при подстановке в уравнение (11.19) обращает его в тождество, подтверждая тем самым, что эта функция задает на одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ однометрическую физическую структуру ранга (2,2).

Перейдем к рассмотрению более сложного случая двуметрической физической структуры ранга (2,2) с феноменологически симметричным соотношением (7.25). Рассмотрим это соотношение как систему двух функциональных уравнений и сначала запишем их для четверки $< j_0 i, \beta_0 \alpha >$:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{vmatrix} f^1(j_0\beta_0) - f^1(j_0\alpha) & f^1(j_0\beta_0)f^2(i\beta_0) \\ f^1(i\beta_0) - f^1(i\alpha) & f^1(i\beta_0)f^2(j_0\beta_0) \end{vmatrix} = 0, \\ \\ \begin{vmatrix} f^2(j_0\beta_0) - f^2(i\beta_0) & f^2(j_0\beta_0)f^1(j_0\alpha) \\ f^2(j_0\alpha) - f^2(i\alpha) & f^2(j_0\alpha)f^1(j_0\beta_0) \end{vmatrix} = 0, \end{array}\right\}$$

после чего разрешим относительно $f(i\alpha) = (f^1(i\alpha), f^2(i\alpha))$:

$$\left.\begin{array}{l} f^1(i\alpha) = [f^2(i\beta_0)f^1(j_0\beta_0) + f^1(j_0\alpha)f^2(j_0\beta_0) - \\ \qquad - f^1(j_0\beta_0)f^2(j_0\beta_0)]f^1(i\beta_0)/f^2(i\beta_0)f^1(j_0\beta_0), \\ \\ f^2(i\alpha) = [f^2(i\beta_0)f^1(j_0\beta_0) + f^1(j_0\alpha)f^2(j_0\beta_0) - \\ \qquad - f^1(j_0\beta_0)f^2(j_0\beta_0)]f^2(j_0\alpha)/f^1(j_0\alpha)f^2(j_0\beta_0). \end{array}\right\}$$

Вводя естественным образом удобные локальные координаты $x(i) = f^2(i\beta_0)f^1(j_0\beta_0)$, $y(i) = f^1(i\beta_0)/f^2(i\beta_0)f^1(j_0\beta_0)$ и $\xi(\alpha) = (f^1(j_0\alpha) - f^1(j_0\beta_0))f^2(j_0\beta_0)$, $\eta(\alpha) = f^2(j_0\alpha)/f^1(j_0\alpha)f^2(j_0\beta_0)$ в двумерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, получаем явное координатное представление (11.33) двуметрики, задающей на этих многообразиях физическую структуру ранга (2,2), так как ее подстановка в уравнение (7.25) обращает его в тождество.

Все другие случаи функционального уравнения (11.2) с известной функцией Φ решаются аналогично, хотя для некоторых из них возникают значительные чисто технические трудности его однозначного разрешения относительно переменной $f(i\alpha)$ и рационального введения локальных координат в многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Описанный выше метод решения функционального уравнения (11.2) может быть применен к любой наперед заданной функции Φ. Но если равенство $\Phi = 0$ не определяет феноменологически симметричное соотношение для физической структуры соответствующего ранга, то полученное координатное представление функции $f(i\alpha)$ при подстановке в уравнение (11.2) не обращает его в тождество по всем координатам точек кортежа $< ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau >$. Приведем интересный в этом смысле пример.

Обобщая феноменологически симметричное соотношение (11.23) для однометрической физической структуры ранга (4,2), естественно было предположить, что аналогичное соотношение для физической структуры ранга (5,3) должно записываться в виде равенства нулю следующего определителя пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\gamma) & f(i\alpha)f(i\beta)f(i\gamma) \\ 1 & f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\gamma) & f(j\alpha)f(j\beta)f(j\gamma) \\ 1 & f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\gamma) & f(k\alpha)f(k\beta)f(k\gamma) \\ 1 & f(l\alpha) & f(l\beta) & f(l\gamma) & f(l\alpha)f(l\beta)f(l\gamma) \\ 1 & f(q\alpha) & f(q\beta) & f(q\gamma) & f(q\alpha)f(q\beta)f(q\gamma) \end{vmatrix} = 0. \tag{11.44}$$

Соотношение (11.44) запишем для кортежа $< ij_0k_0l_0q_0, \alpha\beta_0\gamma_0 >$, разрешим его относительно переменной $f(i\alpha)$ и введем удобные локальные координаты $x(i), y(i)$ в двумерном многообразии $\mathfrak{M}$ и $\xi(\alpha)$, $\eta(\alpha)$, $\mu(\alpha)$, $\nu(\alpha)$ в четырехмерном многообразии $\mathfrak{N}$. В результате для функции $f(i\alpha)$ получаем следующее локальное координатное представление:

$$f(i\alpha) = \frac{x(i)\xi(\alpha) + y(i)\eta(\alpha) + \mu(\alpha)}{x(i)y(i) + \nu(\alpha)}. \tag{11.45}$$

Однако подстановка функции (11.45) в уравнение (11.44) не обращает его в тождество, что было установлено с помощью компьютерной программы "Maple 6", позволяющей раскрывать определители. Этот результат можно было предвидеть заранее, так как согласно основной классификационной теореме для однометрических физических структур, доказанной автором в монографии [27], физическая структура ранга (5,3) не существует.

Для геометрических физических структур на одном множестве феноменологически симметричная связь $\Phi(f) = 0$ может рассматриваться как функциональное уравнение для обеих функций Φ и f одновременно. В таком смысле это уравнение решено для сравнительно небольшого числа случаев, в частности, для одномерного, двумерного и трехмерного многообразий. Более подробную информацию о всех найденных решениях можно найти в монографии автора [46].

Если же одна из функций f или Φ известна, то функциональное уравнение $\Phi(f) = 0$ становится более простым. Например, для метрики евклидовой плоскости (B.5) функциональное уравнение

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl)) = 0, \tag{11.46}$$

где $f = \rho^2$, имеет решение (B.6). Для функции же (B.15), определяющей площадь $S(ijk)$ треугольника $< ijk >$, функциональное уравнение

$$\Phi(f(ijk), f(ijl), f(ikl), f(jkl)) = 0, \tag{11.47}$$

где $f = S$, имеет решение (В.16). И наконец, для функции (В.11), определяющей количество тепла, которое термодинамическая система отдает внешним телам при ее переходе из одного состояния в другое, функциональное уравнение

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(jk)) = 0, \tag{11.48}$$

где $f = (f^1, f^2) = (Q^{TS}, Q^{ST})$, имеет решение (В.12).

При известной же функции Φ функциональное уравнение $\Phi(f) = 0$ решается с помощью фиксирования элементов в множестве $\mathfrak{M}$ и введения локальных координат через расстояния до них. Последнее возможно только для бинарной функции f, которая сопоставляет число паре точек. Легко проверить, что решениями функциональных уравнений (В.6) и (В.12) являются метрические функции (В.5) и (В.11) соответственно.

Заметим, что уравнения (11.46), (11.48) и уравнение (11.47) решены в предположении, что обе функции f и Φ неизвестны, то есть в общем смысле (см. монографию [46] и дополнение [47] к монографии [1]).

Установленная в §1 эквивалентность феноменологической симметрии групповой, согласно которой функция f, задающая на двух множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру, является двухточечным инвариантом некоторой группы их преобразований, приводит к функциональному уравнению (1.6):

$$f(\lambda(i), \sigma(\alpha)) = f(i\alpha), \tag{11.49}$$

принципиально отличному от рассмотренного выше уравнения (11.2), хотя решения этих уравнений для функции f должны совпадать.

Ниже удобно будет в уравнении (11.49) опустить явное указание точек i и α многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, записывая его в следующем виде:

$$f(\lambda(x), \sigma(\xi)) = f(x, \xi), \tag{11.50}$$

где $\lambda : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, $\sigma : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ – локальные отображения, а $x = (x^1, \ldots, x^{sm})$, $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{sn})$ – локальные координаты.

В общем случае функциональное уравнение (11.50), как и уравнение (11.2), допускает два толкования. В первом случае неизвестны как метрическая функция f, так и функции λ, σ, задающие преобразование многообразий $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$. Тогда, зная по итоговой теореме 3 из §1 размерность группы движений функции f, сначала проводим полную с точностью до эквивалентности классификацию smn-мерных групп преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ размерности sm и sn, после чего находим по уравненю (11.50) невырожденные двухточечные инварианты. Но такой метод решения функционального уравнения (11.59) для больших размерностей многообразий $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ и группы их преобразований наталкивается на непреодолимые чисто технические трудности, связанные с классификацией этих групп, и может быть проведен до конца только для малых их размерностей (см. §5, §6, §7 и §8 настоящей монографии). Во втором случае, когда известна метрическая функция f или известны отображения λ и σ, задающие группы преобразований многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, функциональное уравнение (11.50) может быть решено сведением его к системе диффереciальных уравнений в частных производных. Ниже будут рассмотрены некоторые примеры решения этого уравнения, начиная с простейших, приведенных во Введении.

Ускорение по второму закону Ньютона (В.1) определяется выражением $a = F/m$ после опускания в нем явного указания тела i и ускорителя α. Преобразования $m' = \lambda(m)$ и $F' = \sigma(F)$ множества материальных тел $\mathfrak{M}$ и множества ускорителей $\mathfrak{N}$ являются движением, если они сохраняют функцию ускорения:

$$\sigma(F)/\lambda(m) = F/m. \tag{11.51}$$

Решением этого функционального уравнения является полная однопараметрическая группа движений (В.9) для физической структуры ранга (2,2), задаваемой функцией ускорения: $m' = \lambda(m) = cm$, $F' = \sigma(F) = cF$, где $c > 0$.

Обратно, по известной группе преобразований, решая функциональное уравнение

$$a(cm, cF) = a(m, F), \tag{11.52}$$

находим функцию ускорения как двухточечный инвариант: $a = \psi(F/m)$. Этот инвариант также задает на множестве материальных тел $\mathfrak{M}$ и множестве ускорителей $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга (2,2), причем произвольная функция одной переменной ψ определяет градуировку шкалы акселерометра – прибора для измерения ускорения.

Ток по закону Ома для полной цепи (В.3) определяется выражением $I = \mathcal{E}/(R+r)$. Движение же, сохраняющее функцию тока, задается следующими преобразованиями множества проводников $\mathfrak{M}$ и множества источников тока $\mathfrak{N}$: $R' = \lambda(R)$ и $\mathcal{E}' = \sigma(\mathcal{E}, r)$, $r' = \rho(\mathcal{E}, r)$. Функциональное уравнение инвариантности тока

$$\sigma(\mathcal{E}, r)/(\lambda(R) + \rho(\mathcal{E}, r)) = \mathcal{E}/(R + r) \tag{11.53}$$

имеет решением двухпараметрическую группу движений (В.10): $R' = \lambda(R) = aR + b$, $\mathcal{E}' = a\mathcal{E}$, $r' = \rho(\mathcal{E}, r) = ar - b$, где $a > 0$. Двухточечный инвариант этой группы преобразований находится как решение функционального уравнения

$$I(aR + b, a\mathcal{E}, ar - b) = I(R, \mathcal{E}, r) \tag{11.54}$$

с точностью до масштабной функции ψ, определяющей градуировку шкалы амперметра, измеряющего ток: $I = \psi(\mathcal{E}/(R + r))$. Полученная функция тока, как и исходная, задает на множестве проводников $\mathfrak{M}$ и множестве источников тока $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга (3,2).

Для функции (2.2): $f = x + \xi$, задающей физическую структуру ранга (2,2) на одномерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, функциональное уравнение (11.50):

$$\lambda(x) + \sigma(\xi) = x + \xi \tag{11.55}$$

имеет решение (2.16): $\lambda(x) = x + a$, $\sigma(\xi) = \xi - a$, определяющее однопараметрическую группу движений (2.10) этой функции, а двухточечный инвариант полученной группы преобразований $x' = x + a$, $\xi' = \xi - a$ находится как решение того же функционального уравнения (11.50):

$$f(x + a, \xi - a) = f(x, \xi) \tag{11.56}$$

с точностью, как обычно, до масштабной фунции: $f(x, \xi) = \psi(x + \xi)$,

Для функции (2.3): $f = x\xi + \eta$, задающей на одномерном и двумерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга (3,2), функциональное уравнение (11.50) запишется в виде (2.17):

$$\lambda(x)\sigma(\xi, \eta) + \rho(\xi, \eta) = x\xi + \eta \tag{11.57}$$

и имеет решение (2.18),(2.19): $\lambda(x) = ax + b$, $\sigma(\xi, \eta) = \xi/a$, $\rho(\xi, \eta) = \eta - b\xi/a$, где $a \neq 0$, задающее двухпараметрическую группу движений (2.11) этой функции. Сама же функция (2.3) может быть найдена как двухточечный инвариант этой группы преобразований по функциональному уравнению (11.50):

$$f(ax + b, \xi/a, \eta - b\xi/a) = f(x, \xi, \eta) \tag{11.58}$$

с точностью до масштабного преобразования: $f = \psi(x\xi + \eta)$. Заметим, что функциональные уравнения (11.53), (11.54) и (11.57), (11.58) соответственно по сути одинаковы, так как функция тока I также задает физическую структуру ранга (3,2).

Для функции (2.4): $f = (x\xi + \eta)/(x + \vartheta)$, задающей физическую структуру ранга (4,2) на одномерном и трехмерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, функциональное уравнение (11.50) запишется в виде (2.20):

$$\frac{\lambda(x)\sigma(\xi,\eta,\vartheta) + \rho(\xi,\eta,\vartheta)}{\lambda(x) + \tau(\xi,\eta,\vartheta)} = \frac{x\xi + \eta}{x + \vartheta} \tag{11.59}$$

и имеет решение (2.21), (2.23), задающее трехпараметрическую группу движений (2.12) этой функции. Сама же функция (2.4) может быть найдена как двухточечный инвариант группы преобразований (2.12) по функциональному уравнению (11.50):

$$f\left(\frac{ax+b}{cx+d}, \frac{d\xi - c\eta}{d - c\vartheta}, \frac{a\eta - b\xi}{d - c\vartheta}, \frac{a\vartheta - b}{d - c\vartheta}\right) = f(x,\xi,\eta,\vartheta). \tag{11.60}$$

где, согласно (2.22), $\Delta = ad - bc = \pm 1$. Решение этого уравнения совпадает с функцией (2.4) с точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$.

Для функции (2.5): $f = x^1\xi^1 + \ldots + x^{m-1}\xi^{m-1} + x^m\xi^m$ с $m \geq 2$, задающей на m-мерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ первую физическую структуру симметричного ранга $(m+1, m+1)$, функциональное уравнение (11.50) запишется в виде (2.24):

$$\begin{gathered}\lambda^1(x)\sigma^1(\xi) + \ldots + \lambda^{m-1}(x)\sigma^{m-1}(\xi) + \lambda^m(x)\sigma^m(\xi) = \\ = x^1\xi^1 + \ldots + x^{m-1}\xi^{m-1} + x^m\xi^m,\end{gathered} \tag{11.61}$$

где $\lambda(x) = \lambda(x^1, \ldots, x^m)$, $\sigma(\xi) = \sigma(\xi^1, \ldots, \xi^m)$, и имеет решение (2.26), (2.28), задающее m^2-параметрическую группу (2.13) движений этой функции. Сама же функция (2.5), будучи двухточечным инвариантом группы преобразований (2.13), является решением функционального уравнения (11.50):

$$\begin{gathered}f(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^m(x), \sigma^1(\xi), \ldots, \sigma^m(\xi)) = \\ = f(x^1, \ldots, x^m, \xi^1, \ldots, \xi^m),\end{gathered} \tag{11.62}$$

совпадая с ним с точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$.

Для функции (2.6): $f = x^1\xi^1 + \ldots + x^{m-1}\xi^{m-1} + x^m + \xi^m$ с $m \geq 2$, задающей на тех же m-мерных многообразиях вторую физическую структуру симметричного ранга $(m+1, m+1)$, функциональное уравнение (11.50) запишется в виде (2.29):

$$\begin{aligned}\lambda^1(x)\sigma^1(\xi) + \ldots + \lambda^{m-1}(x)\sigma^{m-1}(\xi) + \lambda^m(x) + \sigma^m(\xi) = \\ = x^1\xi^1 + \ldots + x^{m-1}\xi^{m-1} + x^m + \xi^m\end{aligned} \tag{11.63}$$

и имеет решение (2.31), (2.31′), (2.33), задающее m^2-параметрическую группу (2.14) движений этой функции. Сама же функция (2.6) как двухточечный инвариант группы преобразований (2.14) находится решением того же функционального уравнения (11.62) с точностью до масштабного преобразования.

Для последней функции (2.7): $f = x^1\xi^1 + \ldots + x^m\xi^m + \xi^{m+1}$ с $m \geq 2$, задающей на m-мерном и $(m+1)$-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физическую структуру ранга $(m+2, m+1)$, функциональное уравнение (11.62) имеет вид (2.34):

$$\begin{aligned}\lambda^1(x)\sigma^1(\xi) + \ldots + \lambda^m(x)\sigma^m(\xi) + \sigma^{m+1}(\xi) = \\ = x^1\xi^1 + \ldots + x^m\xi^m + \xi^{m+1}\end{aligned} \tag{11.64}$$

и имеет решение (2.36), (2.38), задающее $m(m+1)$-мерную группу движений (2.15) этой функции. Сама же функция (2.7) восстанавливается с точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$ как двухточечный инвариант группы преобразований (2.15), будучи решением функционального уравнения (11.50):

$$\begin{aligned}f(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^m(x), \sigma^1(\xi), \ldots, \sigma^m(\xi), \sigma^{m+1}(\xi)) = \\ = f(x^1, \ldots, x^m, \xi^1, \ldots, \xi^m, \xi^{m+1}).\end{aligned} \tag{11.65}$$

Перейдем к рассмотрению двуметрических физических структур ранга $(n+1, 2)$, задаваемых функциями (7.9)–(7.18) на двумерном и $2n$-мерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, где $n = 1, 2, 3, 4$. Функциональное уравнение (11.50), как следствие инвариантности двуметрики, есть система двух уравнений:

$$\begin{aligned}f^\alpha(\lambda^1(x,y), \lambda^2(x,y), \sigma^1(\xi), \ldots, \sigma^{2n}(\xi)) = \\ = f^\alpha(x, y, \xi^1, \ldots, \xi^{2n}),\end{aligned} \tag{11.66}$$

где $\alpha = 1, 2$, относительно $2n$-параметрической группы движений $x' = \lambda^1(x,y)$, $y' = \lambda^2(x,y)$, $\xi'^1 = \sigma^1(\xi), \ldots, \xi'^{2n} = \sigma^{2n}(\xi)$. С точностью до масштабных преобразований $\psi^1(f^1,f^2)\to f^1,\ \psi^2(f^1,f^2)\to f^2$ двуметрика $f=(f^1,f^2)$ восстанавливается как двухточечный инвариант соответствующей группы преобразований по двум независимым решениям функционального уравнения (11.66).

Например, для двуметрики (7.9), задающей физическую структуру ранга (2,2) на двумерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, система двух функциональных уравнений (11.66) записывается в виде

$$\left.\begin{array}{c}\lambda^1(x,y)+\sigma^1(\xi,\eta)=x+\xi,\\ \lambda^2(x,y)+\sigma^2(\xi,\eta)=y+\eta\end{array}\right\} \qquad (11.67)$$

и имеет решение: $\lambda^1(x,y)=x+a,\ \lambda^2(x,y)=y+b,\ \sigma^1(\xi,\eta)=\xi-a,\ \sigma^2(\xi,\eta)=\eta-b$, задающее двухпараметрическую группу движений (2.44$'$) рассматриваемой двуметрики: $x'=x+a,\ y'=y+b,\ \xi'=\xi-a,\ \eta'=\eta-b$. Сама же двуметрика восстанавливается с точностью до масштабного преобразования как двухточечный инвариант найденной группы преобразований по двум независимым решениям функционального уравнения

$$f(x+a,y+b,\xi-a,\eta-b)=f(x,y,\xi,\eta). \qquad (11.68)$$

Аналогично для двуметрики (7.10), задающей на тех же многообразиях вторую физическую структуру ранга (2,2), не сводимую к первой, функциональное уравнение (11.66) запишется в виде следующей системы:

$$\left.\begin{array}{c}(\lambda^1(x,y)+\sigma^1(\xi,\eta))\lambda^2(x,y)=(x+\xi)y,\\ (\lambda^1(x,y)+\sigma^1(\xi,\eta))\sigma^2(\xi,\eta)=(x+\xi)\eta\end{array}\right\} \qquad (11.69)$$

и имеет решение: $\lambda^1(x,y)=ax+b,\ \lambda^2(x,y)=y/a,\ \sigma^1(\xi,\eta)=a\xi-b,\ \sigma^2(\xi,\eta)=\eta/a$, где $a\neq 0$, задающее двухпараметрическую группу ее движений (2.45$'$): $x'=ax+b,\ y'=y/a,\ \xi'=a\xi-b,\ \eta'=\eta/a$. Сама же двуметрика (7.10) находится как двухточечный инвариант по тому же уравнению (11.66):

$$f(ax+b,y/a,a\xi-b,\eta/a)=f(x,y,\xi,\eta) \qquad (11.70)$$

с точностью до масштабного преобразования.

Для всех остальных двуметрик (7.11)–(7.18) группа движений находится аналогично, как решение функционального уравнения (11.66), а сама она восстанавливается как двухточечный инвариант соответствующей группы преобразований по решению того же уравнения (11.66), но с точностью до масштабной функции $\psi^1(f^1, f^2) \to f^1$, $\psi^2(f^1, f^2) \to f^2$.

Запишем еще функциональное уравнение (11.66) для двуметрик (7.11)–(7.14), задающих на двумерном и четырехмерном многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физические структуры ранга (3,2):

$$\left.\begin{array}{c} \lambda^1\sigma^1 + \varepsilon\lambda^2\sigma^2 + \sigma^3 = x\xi + \varepsilon y\eta + \mu, \\ \lambda^1\sigma^2 + \lambda^2\sigma^1 + \sigma^4 = x\eta + y\xi + \nu; \end{array}\right\} \tag{11.71}$$

$$\left.\begin{array}{c} \lambda^1\sigma^1 + \sigma^3 = x\xi + \mu, \\ \lambda^1\sigma^2 + \lambda^2(\sigma^1)^c + \sigma^4 = x\eta + y\xi^c + \nu; \end{array}\right\} \tag{11.72}$$

$$\left.\begin{array}{c} \lambda^1\sigma^1 + \sigma^3 = x\xi + \mu, \\ \lambda^1\sigma^2 + \lambda^2(\sigma^1)^2 + (\lambda^1\sigma^1)^2\ln\sigma^1 + \sigma^4 = \\ = x\eta + y\xi^2 + (x\xi)^2\ln\xi + \nu; \end{array}\right\} \tag{11.73}$$

$$\left.\begin{array}{c} \lambda^1\sigma^1 + \lambda^2\sigma^3 = x\xi + y\mu, \\ \lambda^1\sigma^2 + \lambda^2\sigma^4 = x\eta + y\nu, \end{array}\right\} \tag{11.74}$$

где $\varepsilon = 0, \pm 1$; $c \neq 1$, $\lambda = \lambda(x, y)$, $\sigma = \sigma(\xi, \eta, \mu, \nu)$. Решения этих систем задают четырехпараметрические группы движений соответствующих двуметрик, по которым она может быть найдена как двухточечный инвариант, удовлетворяющий уравнению (11.66) с $n = 2$ и $\xi^1 = \xi$, $\xi^2 = \eta$, $\xi^3 = \mu$, $\xi^4 = \nu$.

Для семи триметрик (8.43)–(8.49), задающих на трехмерных многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ физические структуры ранга (2,2), функциональное уравнение (11.50) представляется следующей системой:

$$f^\alpha(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = f^\alpha(x, y, z, \xi, \eta, \vartheta), \tag{11.75}$$

где $\alpha = 1, 2, 3$; $\lambda = \lambda(x, y, z)$, $\sigma = \sigma(\xi, \eta, \vartheta)$. Решение этой системы задает трехпараметрическую группу движений соответствующей триметрики, по которой ее можно найти как решение той же системы (11.75) с точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$, где $f = (f^1, f^2, f^3)$ и $\psi = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$ – трехкомпонентные функции. При этом система функциональных уравнений (11.75) переходит в систему трех дифференциальных уравнений (8.42) с базисными операторами X_1, X_2, X_3 и Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3, явный вид которых задается выражениями $(8.9') - (8.15')$ и $(8.9'') - (8.15'')$.

Для геометрических физических структур на одном множестве также имеет место эквивалентность групповой и феноменологической симметрий, которая приводит к функциональному уравнению

$$f(\lambda(i), \lambda(j)) = f(ij), \tag{11.76}$$

причем, в отличие от уравнения (11.49)–(11.50), здесь во избежание путаницы нельзя опустить явное обозначение точек i и j, так как тогда у них совпадут обозначения соответствующих координат $x(i)$ и $x(j)$. Рассмотрим некоторые примеры решения уравнения (11.76).

Для метрической функции (B.5) евклидовой плоскости: $f(ij) = (x(i)-x(j))^2+(y(i)-y(j))^2$ функциональное уравнение (11.76) на группу движений (B.7): $x' = \lambda(x, y)$, $y' = \sigma(x, y)$ имеет вид:

$$(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2 = (x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2 \tag{11.77}$$

и его решение (B.8): $\lambda(x, y) = ax - \varepsilon by + c$, $\sigma(x, y) = bx + \varepsilon ay + d$, где $a^2 + b^2 = 1$, $\varepsilon = \pm 1$, определяет трехпараметрическую группу всех ее движений, собственных ($\varepsilon = +1$) и несобственных ($\varepsilon = -1$). С другой стороны, метрическая функция евклидовой плоскости может быть найдена как двухточечный инвариант группы ее движений (B.8) решением следующего функционального уравнения:

$$\begin{gathered} f(ax(i) - \varepsilon by(i) + c, bx(i) + \varepsilon ay(i) + d, ax(j) - \varepsilon by(j) + c, \\ bx(j) + \varepsilon ay(j) + d) = f(x(i), y(i), x(j), y(j)). \end{gathered} \tag{11.78}$$

В общем случае для метрической функции двумерной геометрии $f(ij) = f(x(i), y(i), x(j), y(j))$ решение функционального уравнения

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j)) = f(x(i), y(i), x(j), y(j)) \tag{11.79}$$

задает группу ее движений (B.7), зависящую от трех параметров, по которой она находится с точностью до масштабного преобразования решением того же функционального уравнения (11.79), но уже на двухточечный инвариант.

Для двуметрики (B.11): $f^1(ij) = (x(i) - x(j))y(i)$, $f^2(ij) = (x(i) - x(j))y(j)$, задающей на плоскости физическую структуру ранга 3, функциональное уравнение (11.79) представляется системой двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} (\lambda(i) - \lambda(j))\sigma(i) = (x(i) - x(j))y(i), \\ (\lambda(i) - \lambda(j))\sigma(j) = (x(i) - x(j))y(j) \end{aligned}\right\} \tag{11.80}$$

и их решение $\lambda(x,y) = ax + b,\ \sigma(x,y) = y/a$, где $a \neq 0$, определяет двухпараметрическую группу ее движений (В.7). Сама же двуметрика находится как решение исходного уравнения (11.79), будучи двухточечным инвариантом группы всех своих движений:

$$f(ax(i)+b, y(i)/a, ax(j)+b, y(j)/a) = f(x(i), y(i), x(j), y(j)). \quad (11.81)$$

Для тернарной геометрии на плоскости с метрической функцией (В.15): $2f(ijk) = x(i)(y(j)-y(k)) - x(j)(y(i)-y(k)) + x(k)(y(i)-y(j))$ группа движений (В.17): $x' = ax+by+c,\ y' = gx+hy+d$, где $ah-bg = 1$, находится как решение функционального уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda(i) & \sigma(i) & 1 \\ \lambda(j) & \sigma(j) & 1 \\ \lambda(k) & \sigma(k) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x(i) & y(i) & 1 \\ x(j) & y(j) & 1 \\ x(k) & y(k) & 1 \end{vmatrix}. \quad (11.82)$$

Сама же метрическая функция $f(ijk)$ восстанавливается как трехточечный инвариант найденной группы ее движений (В.17), являясь, с точностью до масштабного преобразования $\psi(f) \to f$, решением функционального уравнения

$$\begin{aligned} &f(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j), \lambda(k), \sigma(k)) = \\ &= f(x(i), y(i), x(j), y(j), x(k), y(k)), \end{aligned} \quad (11.83)$$

где $\lambda(x,y) = ax + by + c,\ \sigma(x,y) = gx + hy + d$ и $ah - bg = 1$.

Функциональные уравнения естественно появляются в самой теории групп преобразований при установлении их изоморфизма и эквивалентности. Например, для групп преобразований $G^r(\lambda)$ и $H^r(\sigma)$ многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ с действиями (3.1): $x' = \lambda(x,a)$ и (3.4): $\xi' = \sigma(\xi,\alpha)$, где $a \in G^r$ и $\alpha \in H^r$, с законами умножения (3.2): $ab = \varphi(a,b)$ и (3.5): $\alpha\beta = \psi(\alpha,\beta)$ в соответствующих параметрических группах G^r и H^r их изоморфизм в смысле определения 1 из §3 устанавливается по решению функционального уравнения (3.7):

$$u(\varphi(a,b)) = \psi(u(a), u(b)) \quad (11.84)$$

относительно взаимно однозначного отображения $u : G^r \to H^r$, а их подобие в смысле определения 2 из §3 – по решению системы двух функциональных уравнений (11.84) и (3.8):

$$v(\lambda(x,a)) = \sigma(v(x), u(a)) \quad (11.85)$$

относительно обратимых отображений $u : G^r \to H^r$ и $v : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$. Ясно, что подобие возможно только при совпадении размерностей многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Слабая и сильная эквивалентности в смысле определений 3 и 4 из §3 групп преобразований $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ с действиями (3.9): $x' = \lambda(x, a)$ и $\xi' = \sigma(\xi, a)$, имеющих одну и ту же параметрическую группу G^r, устанавливается по решению системы функциональных уравнений (11.84), (11.85), где $\psi = \varphi$, относительно автоморфизма $u : G^r \to G^r$ и обратимого отображения $v : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ и уравнения

$$w(\lambda(x, a)) = \sigma(w(x), a) \tag{11.86}$$

относительно обратимого отображеня $w : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$.

Заметим, что вполне возможен случай, когда система функциональных уравнений (11.84), (11.85) с $\psi = \varphi$ имеет решение, в то время как функциональное уравнение (11.86) решения не имеет, то есть группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$, будучи слабо эквивалентными по определению 3 из §3, не эквивалентны в сильном смысле по определению 4 из того же параграфа.

В рамках гипотезы о бинарной структуре пространства, рассмотренной в §9, его метрика определяется функцией (9.7): $\rho(ij) = f(i, \varphi(j))$, которая удовлетворяет естественному условию симметрии (9.8): $\rho(ij) = \theta(\rho(ji))$. При известной функции $f(i\alpha)$, определяемой тремя выражениями (9.1) и (9.2), (9.3), задающей физические структуры симметричного ранга (2,2) и $(n+1, n+1)$, где $n \geq 2$, получаем три функциональные уравнения (9.13), (9.17), (9.30) соответственно:

$$x(i) + \varphi(j) = \theta(x(j) + \varphi(i)), \tag{11.87}$$

$$x^\mu(i)\varphi_\mu(j) + x^n(i) + \varphi_n(j) = \theta(x^\mu(j)\varphi_\mu(i) + x^n(j) + \varphi_n(i)), \tag{11.88}$$

$$x^\lambda(i)\varphi_\lambda(j) = \theta(x^\lambda(j)\varphi_\lambda(i)), \tag{11.89}$$

где суммирование по индексу μ производится в пределах от 1 до $n-1$, а по индексу λ – от 1 до n. Неизвестными в этих уравнениях являются отображение $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ и функция θ, определяющая симметрию метрики $\rho(ij)$. Все три функциональные уравнения (11.87), (11.88), (11.89) относительно функции θ имеют одно и то же решение: $\theta(u) = au$, где $a = \pm 1$. Относительно же отображения φ решение задается тремя различными выражениями: $\varphi = ax$; $\varphi_\mu = h_{\mu\nu}x^\nu + c_\mu$, $\varphi_n =$

$a(c_\mu x^\mu + x^n)$, где $h_{\mu\nu} = ah_{\nu\mu}$, $\mu, \nu = 1, \dots, n-1$; $\varphi_\lambda = g_{\lambda\sigma}x^\sigma$, где $g_{\lambda\sigma} = ag_{\sigma\lambda}$, $\lambda, \sigma = 1, \dots, n-1, n$.

Завершая настоящий параграф, запишем еще функциональное уравнение для цикла, который определяется как такая невырожденная кривая $x = x(t)$, по которой может свободно скользить жесткий треугольник $< ijk >$ без изменения длин его сторон $f(ij)$, $f(ik)$, $f(jk)$. При заданной метрической функции $f(ij) = f(x(i), x(j))$ функциональное уравнение для цикла будет следующим:

$$f(x(t_i), x(t_j)) = \psi(t_i - t_j). \tag{11.90}$$

Например, для евклидовой плоскости с метрической функцией (В.5) функциональное уравнение (11.90):

$$(x(t_i) - x(t_j))^2 + (y(t_i) - y(t_j))^2 = \psi(t_i - t_j) \tag{11.91}$$

имеет два решения. Первое: $x = at + b$, $y = ct + d$, где $a^2 + c^2 \neq 0$, задает прямые на плоскости, а второе: $x = R\cos t + a$, $y = R\sin t + b$, где $R \geq 0$, задает окружности радиуса R с центром в точке (a, b).

Ясно, что цикл допускает однопараметрическую группу движений, которая является подгруппой группы собственных движений $x' = \lambda(x, a)$ метрической функции f. Таким образом для цикла можно записать другое функциональное уравнение:

$$x(t + \alpha) = \lambda(x(t), a(\alpha)), \tag{11.92}$$

где α – параметр подгруппы. Решения уравнений (11.90) и (11.92) должны, очевидно, определять одно и то же множество циклов. Для группы собсвенных движений евклидовой плоскости (В.8) с $\varepsilon = +1$ уравнение (11.92) запишется в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x(t + \alpha) &= a(\alpha)x(t) - b(\alpha)y(t) + c(\alpha), \\ y(t + \alpha) &= b(\alpha)x(t) + a(\alpha)y(t) + d(\alpha), \end{aligned}\right\} \tag{11.93}$$

где $a^2 + b^2 = 1$. Можно показать, что решения функционального уравнения (11.93), как и решения функционального уравнения (11.91), задают на евклидовой плоскости те же два множества циклов – прямые и окружности. Заметим только, что решения уравнений (11.92) и (11.93) определяют не только сами циклы, но и те однопараметрические подгруппы, относительно которых они инвариантны.

Заключение

Это Заключение в некотором смысле продолжает аналогичное Заключение предыдущей второй монографии автора "Полиметрические геометрии" [46], так как главной целью его написания является обзор математических задач теории физических структур в надежде, что некоторые из них могут заинтересовать читателя.

Итак, феноменологическая симметрия, лежащая в основе определения физической структуры, согласно теореме 3 из §1 эквивалентна групповой симметрии в следующем смысле: невырожденная s-метрика f допускает smn-мерную группу движений в том и только в том случае, если она задает на sm- и sn-мерных многообразиях физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$. А это означает, что задача решения функционального уравнения (11.2), выражающего феноменологическую симметрию физической структуры, в котором неизвестными являются s-метрика f и функция Φ, равносильна задаче решения функционального уравнения (11.49), в котором неизвестными являются та же s-метрика f и действия λ, σ, выражающие ее групповую симметрию.

Заметим, что метод решения уравнения (11.2), описанный в первой монографии автора "Математический аппарат теории физических структур" [27], совершенно отличен от метода решения уравнения (11.49), использованного в настоящей монографии. Но, поскольку в конечном счете решается одна и та же задача классификации s-метрических физических структур произвольного ранга, эти методы дополняют друг друга. Одни s-метрики найдены только как решения функционального уравнения (11.2), другие – только как решения функционального уравнения (11.49). Есть и такие s-метрики, которые находятся одновременно как решения обоих уравнений (11.2) и (11.49), что подтверждает эквивалентность феноменологической и групповой симметрий (см. §5 и §6). Однако полная классификация s-метрических физических структур, исключая однометрические (см. §2, работу [14] и монографию [27]) еще не построена. Поэтому имеет смысл, как и в Заключении монографии "Полиметрические геометрии", представить в виде таблицы обзор задач классификации физических структур на двух множествах. Решение таких задач интересно не только с чисто математической точки зрения, но и с физической, так как результатом их решения являются возможные формы физических законов. Будем надеяться, что, может быть, кому-то из читателей удастся плодотворно объединить оба метода или найти какой-то третий, который позволит не только продолжить классификацию s-метрических физических структур произвольного ранга, но и завершить ее.

Классификация s-метрических физических структур									
№	s	m	n	sm	sn	(u,v)	smn	реш.	ист.
1	1	$\geqslant 1$	$\geqslant m$	m	n	(u,v)	mn	+	§2
2	2	1	$\geqslant 1$	1	$2n$	$(u,2)$	$2n$	+	§7
3	2	$\geqslant 2$	$\geqslant m$	$2m$	$2n$	(u,v)	$2mn$	–	–
4	3	1	1	3	3	(2,2)	3	+	§8
5	3	1	$\geqslant 2$	3	$3n$	$(u,2)$	$3n$	–	–
6	3	$\geqslant 2$	$\geqslant m$	$3m$	$3n$	(u,v)	$3mn$	–	–
7	4	1	1	4	4	(2,2)	4	?	–
8	4	1	$\geqslant 2$	4	$4n$	$(u,2)$	$4n$	–	–
9	4	$\geqslant 2$	$\geqslant m$	$4m$	$4n$	(u,v)	$4mn$	–	–
10	$\geqslant 5$	$\geqslant 1$	$\geqslant m$	$\geqslant 5m$	$\geqslant 5n$	(u,v)	$\geqslant 5mn$	–	–

где $u = n+1, \ v = m+1$. Напомним, что $s \geq 1$ – число компонент s-метрики, то есть невырожденной функции $f = (f^1, \ldots, f^s)$, задающей на sm- и sn-мерных многообразиях физическую структуру ранга $(u,v) = (n+1, m+1)$, наделенную групповой симметрией степени smn. Условие $n \geq m$ введено с целью уменьшить число строк в таблице, так как результат классификации симметричен относительно перестановки натуральных чисел m и n. В предпоследнем столбце таблицы знаками плюс (+) и минус (−) отмечено, что данная задача решена (+) или не решена (−). Знаком вопроса (?) отмечено незавершенное решение (В.А.Кыров, частное сообщение), в котором проведена только классификация четырехмерных алгебр Ли преобразований R^4, но еще не найдены все двухточечные инварианты, которые и являются соответствующей 4-метрикой. В последнем столбце таблицы указан номер параграфа Основной части настоящей монографии, где приведена классификация и изложены методы решения или указаны дополнительные источники, в которых с этими методами можно подробно ознакомиться.

Литература

1. Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур (дополнение Михайличенко Г.Г). Новосибирск: НГУ, 1968.

2. Кулаков Ю.И. О теории физических структур//Записки научных семинаров ЛОМИ. Л.: Наука, 1983, Т.127, С.103–151.

3. Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику. М.: Архимед, 1992.

4. Берже М. Геометрия. М.: Мир, 1984, Т.1.

5. Кулаков Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур//Докл. АН СССР, 1970, Т.193, №5, С.985–987.

6. Кулаков Ю.И. Математическая формулировка теории физических структур//Сиб.мат.журн., 1971, Т.12, №5, С.1142–1145.

7. Михайличенко Г.Г. Бинарная физическая структура ранга (3,2) //Сиб.мат.журн., 1973, Т.14, №5, С.1057–1064.

8. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии//Докл. АН СССР, 1981. Т.260, №4, С.803–805.

9. Mikhailichenko G.G. Geometries a deux dimensions dans la theorie de structures physiques//Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, 1981, T.293, Ser.1, P.529–531.

10.Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований ("Эрлангенская программа")//Об основаниях геометрии. М.: 1956, С.402–434.

11. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.

12. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

13. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. М.: ИЛ, 1947.

14. Михайличенко Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур//Докл. АН СССР, 1972, Т.206, №5, С.1056–1058.

15. Михайличенко Г.Г. Двуметрические физические структуры и комплексные числа//Докл. АН СССР, 1991, Т.321, №4, С.677–680.

16. Михайличенко Г.Г. Двуметрические физические структуры ранга $(n+1,2)$//Сиб.мат.журн., 1993, Т.34, №3, С.132–143.

17. Михайличенко Г.Г. Простейшие полиметрические геометрии// Докл. АН РФ, 1996, Т.348, №1, С.22–24.

18. Владимиров Ю.С. Биспиноры и физическая структура ранга (3,3)//Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1988, Вып.125, С.42–60.

19. Владимиров Ю.С. Описание взаимодействий в рамках теории физических структур//Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1988, Вып.125, С.61–87.

20. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений, 1996. Часть 2. Теория физических взаимодействий, 1988. Издательство Московского университета.

21. Литвинцев А.А. Комплексная физическая структура ранга (2,2)//Михайличенко Г.Г. Математический аппарат теории физических структур. Горно-Алтайск: ГАГУ, 1997, С.133–144.

22. Литвинцев А.А. Комплексная физическая структура ранга (3,2)//Материады XXXV международной научной студенческой конференции. Новосибирск: НГУ, 1997, С.62–63.

23. Михайличенко Г.Г. Групповые свойства физических струтур// Ред."Сиб.мат.журн.", 1989, 35с. Деп. в ВИНИТИ 10.03.89, №1584–В89. (Реферат//Сиб.мат.журн., 1990, Т.31,№3, С.210).

24. Михайличенко Г.Г. Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физических структур)// Докл. АН СССР, 1985, Т.24, №1, С.39–41.

25. Михайличенко Г.Г. Об одном функциональном уравнении с двухиндексными переменными//Укр.мат.журн., 1973, Т.25, №5, С.589–598.

26. Михайличенко Г.Г. Об одной задаче в теории физических структур//Сиб.мат.журн., 1977, Т.18, №6., С.1342–1355.

27. Михайличенко Г.Г. Математический аппарат теории физических структур. Горно-Алтайск: ГАГУ, 1997.

28.Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.

29. Чеботарев Н.Г. Терия групп Ли. М.: ГИТТЛ, 1940.

30. Бредон Г.Э. Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980.

31. Михайличенко Г.Г., Лозицкий Е.Л. Простейшие двуметрические физические структуры//Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ, 1988. Вып.125, С.88–89.

32. Михайличенко Г.Г. Группы движений в геометрии двух мно-

жеств / Ред."Сиб.мат.журн.", 1989, 18с. Деп. в ВИНИТИ 26.09.89, №6016–В89 (Реферат//Сиб.мат.журн., 1990, Т.31, №5, С.204).

33. Михайличенко Г.Г. Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости//Сиб.мат.журн., 1982, Т.23, №5, С.132–141.

34. Lie S., Engel F. Teorie der Transformations-gruppen, Bd 3. – Leipzig: Teubner, 1893.

35. Владимиров С.А. Группы симметрии дифференциальных уравнений и релятивистские поля. М.: Атомиздат, 1979.

36. Михайличенко Г.Г. Некоторые замечаня об изоморфизме и подобии групп преобразований, их расширении и двухточечных инвариантах / Ред."Сиб.мат.журн.", 1987, 13с. Деп. в ВИНИТИ 29.05.87, №3858–В87 (Реферат//Сиб.мат.журн., 1989, Т.30, №1, С.223).

37. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.

38. Михайличенко Г.Г. Групповые свойства физической структуры ранга (3,3)//Ред."Сиб.мат.журн.", 1987, 22с. Деп. в ВИНИТИ 29.05.87, №3855–В87 (Реферат//Сиб.мат.журн., 1989, Т30, №1, С.222).

39. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии//Докл. АН СССР, 1983, Т.269, №2, С.284–288.

40. Михайличенко Г.Г. Групповая симметрия геометрии двух множеств//Укр.мат.журн., 1989, Т.41, №11, С.1501–1506.

41. Зуланке Р. Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. М.: Мир, 1975.

42. Михайличенко Г.Г. Трехмерные алгебры Ли локально транзитивных преобразований пространства//Известия вузов. Математика. 1997, №9(424), С.41–48.

43. Владимиров Ю.С. Пространство-время: явные и скрытые размерности. М.: Наука, 1989.

44. Михайличенко Г.Г. Некоторые следствия гипотезы о бинарной структуре пространства//Известия вузов. Математика. 1991, №6, С. 28–35.

45. Михайличенко Г.Г. К вопросу о симметрии расстояния в геометрии//Известия вузов. Математика. 1994, №4(383), С.21–23.

46. Михайличенко Г.Г. Полиметрические геометрии (приложение В.А.Кырова). Новосибирск: НГУ, 2001.

47. Михайличенко Г.Г. Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур//Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур. Новосибирск: НГУ, 1968, С.175–226.

48. Михайличенко Г.Г. Тернарная физическая структура ранга (3,2) //Укр.мат.журн., 1970, Т.22, №6, С.837–841.

49. Михайличенко Г.Г. Тернарная физическая структура ранга(2,2,2) //Известия вузов. Математика., 1976, №8(171), С.60–67.

50. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии//Сиб.мат.журн., 1984, Т.25, №5, С.99–113.

51. Михайличенко Г.Г. Простейшие полиметрические геометрии. I. //Сиб.мат.журн., 1998, Т.39, №2, С.377–395.

52. Михайличенко Г.Г. Простейшие полиметрические геометрии. II.//Наука, культура, образование, 2001, №8/9, С.7–16.

53. Михайличенко Г.Г. Групповые свойства произвольных физических структур//Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ, 1990, Вып.135, С.27–39.

54. Михайличенко Г.Г. Некоторые замечания к классификации Ли групп преобразований//Вест. МГУ., Сер.1, Математика, механика, 1986, №5, С.93.

55. Михайличенко Г.Г. Об эвивалентности групп преобразований// Наука, культура, образование, 2000, №4/5, С.103–108.

Груда и группа как физическая структура

А.Н. Бородин

Хорошо известно [1], что *грудой* называется алгебра G с тернарной операцией $\varphi : G^3 \to G$, удовлетворяющей следующим тождествам:

$$\varphi(\varphi(x,y,z),u,v) = \varphi(x,\varphi(u,z,y),v) = \varphi(x,y,\varphi(z,u,v)), \tag{1}$$

$$\varphi(x,y,y) = \varphi(y,y,x) = x. \tag{2}$$

Если имеют место только тождества (1), то алгебра G называется *полугрудой*. Ее элемент e называется *биунитарным*, если для него выполняется тождество $\varphi(x,e,e) = \varphi(e,e,x) = x$. Таким образом, в груде каждый элемент биунитарен.

В тождествах (1) обращает на себя внимание среднее звено, в котором происходит перестановка второго и четвертого элементов кортежа $< xyzuv >$, что кажется не совсем естественным. С другой стороны, в их правом звене исходный порядок элементов этого кортежа сохраняется. Оказывается, среднее звено тождеств (1) в определении груды может быть опущено.

Лемма 1. *Тождества* (1), (2)*, которым удовлетворяет тернарная операция* φ*, эквивалентны тождествам*

$$\varphi(\varphi(x,y,z),u,v) = \varphi(x,y,\varphi(z,u,v)), \tag{3}$$

$$\varphi(x,y,y) = \varphi(y,y,x) = x. \tag{4}$$

Ясно, что тождества (3), (4) содержатся в тождествах (1), (2) и потому следуют из них. Докажем следование в обратном порядке. Сначала, исходя из более простых тождеств (3), (4), установим не совсем очевидное соотношение: $\varphi(\varphi(x,y,z),u,\varphi(u,z,y)) = x$. Действительно: $\varphi(\varphi(x,y,z),u,\varphi(u,z,y)) = \varphi(\varphi(\varphi(x,y,z),u,u),z,y) = \varphi(\varphi(x,y,z),z,y)$ $= \varphi(x,y,\varphi(z,z,y)) = \varphi(x,y,y) = x$. Далее, опираясь на только что установленное соотношение, будем преобразовывать среднее звено тождеств (1): $\varphi(x,\varphi(u,z,y),v) = \varphi(\varphi(\varphi(x,y,z),u,\varphi(u,z,y)),\varphi(u,z,y),v)$

$= \varphi(\varphi(x,y,z),u,\varphi(\varphi(u,z,y),\ \varphi(u,z,y),v)) = \varphi(\varphi(x,y,z),u,v)$. Таким образом, первое из двух тождеств (1), а именно, равенство левого и среднего звеньев, является следствием тождеств (3), (4). Второе же, то есть равенство левого и правого звеньев, просто совпадает с тождеством (3). Совпадают также тождества (2) и (4), что и завершает доказательство леммы 1.

Определение 1. Алгебра G с тернарной операцией φ называется *грудой*, если эта операция удовлетворяет тождествам (3),(4).

Из леммы 1 следует, что определение груды тождествами (1),(2) по лекциям А.Г.Куроша [1], о чем говорилось в начале Приложения, эквивалентно ее определению тождествами (3),(4).

Лемма 2. *Тождества* (3), (4)*, которым удовлетворяет тернарная операция* φ*, эквивалентны тождествам*

$$\varphi(x,y,z) = \varphi(\varphi(x,y,s),s,z) = \varphi(x,s,\varphi(s,y,z)), \tag{5}$$

$$\varphi(x,y,y) = \varphi(y,y,x) = x. \tag{6}$$

Запишем тождество (3) для двух кортежей $< xyssz >$ и $< xssyz >$ соответственно, используя также тождества (4): $\varphi(\varphi(x,y,s),s,z) = \varphi(x,y,\varphi(s,s,z)) = \varphi(x,y,z)$ и $\varphi(x,s,\varphi(s,y,z)) = \varphi(\varphi(x,s,s),y,z) = \varphi(x,y,z)$, то есть получаем тождества (5), которые, таким образом, следуют из тождеств (3),(4). С другой стороны, исходя из тождеств (5),(6), очевидно, имеем: $\varphi(\varphi(x,y,z),u,v) = \varphi(\varphi(x,y,z),z,\varphi(z,u,v)) = \varphi(x,y,\varphi(z,z,\varphi(z,u,v))) = \varphi(x,y,\varphi(z,u,v))$. Поскольку при этом совпадают тождества (4) и (6), лемма 2 доказана.

Определение 2. Алгебра G с тернарной операцией φ называется *грудой*, если эта операция удовлетворяет тождествам (5),(6).

Лемма 3. *Определение* 1 *и определение* 2 *груды, как алгебры* G *с тернарной операцией* φ*, удовлетворяющей тождествам* (3), (4) *и тождествам* (5), (6) *соответственно, эквивалентны.*

Лемма 3 является прямым следствием леммы 2, устанавливающей эквивалентность тождеств (3), (4) и (5), (6), входящих в определения 1 и 2 груды, соответственно.

Определение груды тождествами (5), (6) имеет существенное преимущество по следующей причине: оказывается, что эти тождества есть прямое следствие принципа феноменологической симметрии в теории физических структур [2]. Главной задачей этой теории, в формулировке ее автора Ю.И.Кулакова, является исследование и обоснование строения физических законов. Возникающие из принципа феноменологической симметрии тождества (5), (6) фактически представляют собой функциональные уравнения относительно тернарной операции φ. Перейдем к определению простейшей физической структуры минимального ранга (2,2).

Пусть имеются три множества $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ и G произвольной природы, причем элементы первых двух, а именно $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, будем обозначать строчными латинскими и греческими буквами соответственно. Пусть имеется также функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to G$, сопоставляющая каждой паре $< i\alpha >$ из прямого произведения $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ некоторый элемент $f(i\alpha)$ из множества G. В отношении функции f будем предполагать выполнение следующего условия:

A. Для любых элементов $\beta \in \mathfrak{N}$ и $j \in \mathfrak{M}$ частичные отображения $\mathfrak{M} \times \{\beta\} \to G$ и $\{j\} \times \mathfrak{N} \to G$ соответственно сюръективны, то есть являются отображениями *на* множество G.

Иными словами для произвольного элемента $g \in G$ уравнения $f(i\beta) = g$ и $f(j\alpha) = g$ имеют решения относительно $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$, причем элементы $\beta \in \mathfrak{N}$ и $j \in \mathfrak{M}$ тоже произвольные.

Введем еще функцию $F : \mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2 \to G^4$, сопоставляя четырехточечному кортежу $< ij, \alpha\beta >$ из $\mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2$ кортеж $< f(i\alpha), f(i\beta), f(j\alpha), f(j\beta) >$ длины четыре из G^4, элементы которого есть образы всех возможных пар $< i\alpha >, < i\beta >, < j\alpha >, < j\beta >$, упорядоченные по исходному кортежу.

Определение 3. Будем говорить, что функция $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to G$, удовлетворяющая условию **A**, задает на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ *физическую структуру ранга* (2,2), если существует такая тернарная алгебраическая операция $\varphi : G^3 \to G$, что для всех четверок $< ij, \alpha\beta >$ выполняется следующее соотношение:

$$f(i\alpha) = \varphi(f(i\beta), f(j\beta), f(j\alpha)). \tag{7}$$

Соотношение (7), справедливое для любого кортежа $< ij, \alpha\beta > \in \mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2$, составляет содержание *принципа феноменологической симметрии* в теории физических структур. Согласно этому принципу образ прямого произведения $\mathfrak{M}^2 \times \mathfrak{N}^2$ в G^4 при отображении F не совпадает со всем G^4, а является его некоторым подмножеством. В свою очередь, соотношение (7) налагает на исходную функцию f достаточно сильное ограничение, так как не для всякой такой функции найдется тернарная операция φ, выражающая это соотношение.

Теорема 1. *Тернарная алгебраическая операция φ из определения 3 физической структуры ранга $(2, 2)$, устанавливающая феноменологически симметричное соотношение (7), задает на множестве G груду.*

Положим в соотношении (7) $i = j: \ f(i\alpha) = \varphi(f(i\beta), f(i\beta), f(i\alpha))$ и $\alpha = \beta: \ f(i\alpha) = \varphi(f(i\alpha), f(j\alpha), f(j\alpha))$. В соответствии с условием **A** пары переменных $f(i\alpha), f(i\beta)$ и $f(i\alpha), f(j\alpha)$ независимы. Вводя для них обозначение $x = f(i\alpha), \ y = f(i\beta)$ в первом случае и $x = f(i\alpha), \ y = f(j\alpha)$ – во втором, получаем тождества (6). Для получения же основных тождеств (5) в определении 2 груды возьмем в множестве $\mathfrak{M}$ дополнительно к паре $< ij >$ третий элемент k и запишем соотношение (7) еще для других двух кортежей $< ik, \alpha\beta >$ и $< jk, \alpha\beta >$:

$$\left.\begin{array}{l} f(i\alpha) = \varphi(f(i\beta), f(k\beta), f(k\alpha)), \\ f(j\alpha) = \varphi(f(j\beta), f(k\beta), f(k\alpha)). \end{array}\right\} \qquad (7')$$

Из трех соотношений $(7), (7')$ легко устанавливаем равенство

$$\varphi(f(i\beta), f(k\beta), f(k\alpha)) = \varphi(f(i\beta), f(j\beta), \varphi(f(j\beta), f(k\beta), f(k\alpha))),$$

с независимыми по условию **A** переменными $f(i\beta), f(k\beta), f(k\alpha), f(j\beta)$. Вводя для них обозначение $x = f(i\beta), \ y = f(k\beta), \ z = f(k\alpha), \ s = f(j\beta)$, получаем вторoе из двух тождеств (5). Первое же из тождеств (5) получим аналогично, беря дополнительно к паре $< \alpha\beta >$ третий элемент γ из множества $\mathfrak{N}$. Запишем соотношение (7) еще для других двух кортежей $< ij, \alpha\gamma >$ и $< ij, \beta\gamma >$:

$$\left.\begin{array}{l} f(i\alpha) = \varphi(f(i\gamma), f(j\gamma), f(j\alpha)), \\ f(i\beta) = \varphi(f(i\gamma), f(j\gamma), f(j\beta)). \end{array}\right\} \qquad (7'')$$

Из трех соотношений $(7), (7'')$ следует равенство

$$\varphi(f(i\gamma), f(j\gamma), f(j\alpha)) = \varphi(\varphi(f(i\gamma), f(j\gamma), f(j\beta)), f(j\beta), f(j\alpha)),$$

с независимыми по условию **A** переменными $f(i\gamma), f(j\gamma), f(j\alpha), f(j\beta)$. Вводя для них обозначение $x = f(i\gamma)$, $y = f(j\gamma)$, $z = f(j\alpha)$, $s = f(j\beta)$, приходим к первому из тождеств (5). Таким образом, установлены все тождества (5),(6), входящие в определение 2 груды, что и завершает доказательство теоремы 1.

Обратим теперь внимание на различную роль тождеств (5) и (6) в определении 2 груды. Первые из них явно основополагающие, имеющие характер функциональных уравнений, определяющих груду, вторые же отражают частные ее свойства. Поэтому имеет смысл в новом определении груды сохранить тождества (5), а тождества (6) заменить некоторым более естественным усдовием, налагаемым на тернарную операцию φ. Это условие можно плучить из того же феноменологически симметричного соотношения (7) для физической структуры ранга (2,2).

Лемма 4. *Тернарная алгебраическая операция φ из определения 3 физической структуры ранга $(2,2)$ удовлетворяет следующему необходимому условию:*

B. *Для любых двух элементов $q, h \in G$ частичные отображения $x \mapsto \varphi(x, q, h)$, $x \mapsto \varphi(q, x, h)$, $x \mapsto \varphi(q, h, x)$ сюръективны.*

Рассмотрим сначала первое отображение $x \mapsto \varphi(x, q, h)$. По условию **A** найдется такая пара $< j\alpha >$, для которой $f(j\alpha) = h$. Далее, по тому же условию **A** для точек $j \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ предыдущей пары найдутся такие точки $i \in \mathfrak{M}$ и $\beta \in \mathfrak{N}$, для которых $f(j\beta) = q$ и $f(i\alpha) = p$, где p – произвольный элемент из G. Но тогда, полагая $x = f(i\beta)$, по соотношению (7) получаем $p = \varphi(x, q, h)$. То есть у произвольного элемента $p \in G$ при частичном отображении $x \mapsto \varphi(x, q, h)$ имеется хотя бы один прообраз, что и доказывает сюръективность этого отображения. Сюръективность оставшихся частичных отображений $x \mapsto \varphi(q, x, h)$ и $x \mapsto \varphi(q, h, x)$ устанавливается совершенно аналогично. Лемма 4 доказана.

Условие **B** имеет более привычную для алгебраистов эквивалентную форму:

B′. Для любых трех элементов p, q, h из множества G каждое из уравнений $p = \varphi(x, q, h)$, $p = \varphi(q, x, h)$ и $p = \varphi(q, h, x)$ имеет решение относительно x.

Заменим не совсем естественные тождества (6) в определении (2) груды более естественным условием $\mathbf{B}$, которое также является следствием феноменологической симметрии.

Определение 4. Алгебра G с тернарной операцией φ, удовлетворяющей условию $\mathbf{B}$ (или эквивалентному ему условию $\mathbf{B}'$), называется грудой, если для нее выполняются следующие два тождества:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x,y,z)=\varphi(\varphi(x,y,s),s,z),\\ \varphi(x,y,z)=\varphi(x,s,\varphi(s,y,z)).\end{array}\right\} \tag{8}$$

Лемма 5. *Определение 2 и определение 4 груды как алгебры G с тернарной операцией φ, удовлетворяющей четырем тождествам (5),(6) или при условии* $\mathbf{B}$ *двум тождествам* (8) *соответственно, эквивалентны.*

Тождества (5) и (8) совпадают, поэтому сначала из условия $\mathbf{B}$ и тождеств (8) получим тождества (6). Запишем первое из тождеств (8) для кортежа $< xyyy >$, а второе для кортежа $< yyxy >$: $\varphi(x,y,y) = \varphi(\varphi(x,y,y),y,y)$, $\varphi(y,y,x)=\varphi(y,y,\varphi(y,y,x))$. По условию $\mathbf{B}$ отображения $x\mapsto\varphi(x,y,y)$ и $x\mapsto\varphi(y,y,x)$ сюръективны. Введя соответствующие переобозначения элементов $\varphi(x,y,y)$ и $\varphi(y,y,x)$ из G, получаем тождества (6). Покажем теперь, что условие $\mathbf{B}$ есть следствие тождеств (5),(6). Предположим противное, то есть что найдутся такие три элемента p,q,h из множества G, что одно из трех уравнений условия $\mathbf{B}'$ не имеет решения. Без ограничения общности доказательства предположим, что не имеет решения уравнение $p=\varphi(x,q,h)$. Запишем первое из тождеств (5) для кортежа $< phhq >$: $\varphi(p,h,h) = \varphi(\varphi(p,h,q),q,h)$, откуда, используя одно из тождеств (6), получаем: $p=\varphi(\varphi(p,h,q),q,h)$. Таким образом, уравнение $p=\varphi(x,q,h)$ имеет решение $x=\varphi(p,h,q)$, что противоречит сделанному предположению. Два других уравнения из условия $\mathbf{B}'$ исследуются аналогично. Устанавливаемые при этом противоречия и показывают, что условие $\mathbf{B}'$ (или эквивалентное ему условие $\mathbf{B}$) является следствием тождеств (5),(6). Лемма 5 доказана.

Условие $\mathbf{B}$, на первый взгляд может показаться слишком сильным, тем более, что в доказательстве леммы 5 при получении тождеств (6) условие $\mathbf{B}$ использовалось не в полном объеме, поскольку имела значение только сюръективность отображений $x\mapsto\varphi(x,y,y)$ и $x\mapsto\varphi(y,y,x)$ для произвольного элемента y. Сформулируем это более слабое условие:

C. Для любого элемента $q \in G$ сюръективны частичные отображения, задаваемые функциями $x \mapsto \varphi(x, q, q)$ и $x \mapsto \varphi(q, q, x)$.

Более привычный по форме и эквивалентный вариант этого условия будет следующий:

C′. Для любых двух элементов $p, q \in G$ каждое из уравнений $p = \varphi(x, q, q)$ и $p = \varphi(q, q, x)$ имеет решение относительно $x \in G$.

Заметим, однако, что слабое условие **C** кажется менее естественным, чем сильное и "полнокровное" условие **B**.

Определение 5. Алгебра G с тернарной операцией φ, удовлетворяющей условию **C** (или эквивалентному ему условию **C′**) и тождествам (8), называется грудой.

Лемма 6. *Определение 2 и определение 5 груды как алгебры G с тернарной операцией φ, удовлетворяющей четырем тождествам* $(5), (6)$ *или при условии* **C** *двум тождествам* (8) *эквивалентны.*

Доказательство леммы 6 в первой его части получения тождеств (6) повторяет соответствующую часть доказательства леммы 5, а сюръективность отображений $x \mapsto \varphi(x, q, q)$ и $x \mapsto \varphi(q, q, x)$, требуемая условием **C**, есть непосредственное следствие тождеств (6).

Теорема 2. *Все четыре определения груды, а именно, определения* $1, 2, 4, 5$ *эквивалентны между собой.*

Теорема 2 является совокупным следствием лемм 3, 5, 6, устанавливающих эквивалентность пар определений 1 и 2, 2 и 4, 2 и 5, а также транзитивности этого отношения эквивалентности.

Пусть имеется груда G с тернарной алгебраической операцией φ и пусть e – некоторый ее фиксированный элемент. Определим на множестве G бинарную алгебраическую операцию по формуле

$$xy = \varphi(x, e, y). \tag{9}$$

Теорема 3 (Бэра-Вагнера [1]). *Множество G с бинарной алгебраической операцией* (9) *является группой.*

Нейтральным элементом будет, очевидно, фиксированный элемент

e, поскольку в силу тождеств (6) $xe = \varphi(x,e,e) = x$ и $ex = \varphi(e,e,x) = x$. Обратный к x элемент x^{-1} определится выражением: $x^{-1} = \varphi(e,x,e)$, так как в силу тождеств (5), (6) имеем: $xx^{-1} = \varphi(x,e,\varphi(e,x,e)) = \varphi(x,x,e) = e$, $x^{-1}x = \varphi(\varphi(e,x,e),e,x) = \varphi(e,x,x) = e$. Ассоциативность же бинарной операции (9) есть следствие только тождеств (5): $(xy)z = \varphi(\varphi(x,e,y),e,z) = \varphi(\varphi(x,e,y),y,\varphi(y,e,z)) = \varphi(x,e,\varphi(y,e,z)) = x(yz)$, что и завершает доказательство теоремы 3.

Заметим, что исходная тернарная алгебраическая операция φ для груды однозначно выражается через бинарное групповое умножение (9) по следующей формуле:

$$\varphi(x,y,z) = xy^{-1}z, \tag{10}$$

поскольку $xy^{-1}z = \varphi(\varphi(x,e,\varphi(e,y,e)),e,z) = \varphi(\varphi(x,y,e),e,z) = \varphi(x,y,z)$. Группы, получаемые из груды с помощью двух фиксированных элементов e и e', изоморфны между собой, причем их изоморфизм задается отображением $x \mapsto \varphi(x,e,e')$.

Таким образом, функциональные уравнения (5),(6), являющиеся следствием принципа феноменологической симметрии для физической структуры ранга (2,2), своими решениями определяют не только груду с тернарной операцией φ, но и группу с бинарной операцией (9). То есть группа как одна из универсальных алгебр выделена тем, что ее естественным истоком является принцип феноменологической симметрии. Функциональные уравнения (5),(6) впервые были получены при исследовании действительной физической структуры ранга (2,2), когда $G = R$ [3]. В этом частном случае были найдены все их решения: $\varphi(x,y,z) = \psi^{-1}(\psi(x) - \psi(y) + \psi(z))$, где ψ – произвольная функция одной переменной с отличной от нуля производной, а ψ^{-1} – обратная к ней функция. Представляет, очевидно, интерес поиск решения уравнений (5),(6) и для других множеств G, например, $G = R^2$. Такие задачи возникают при классификации двуметрических физических структур, когда паре $< i\alpha > \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляется не одно число, а два: $f(i\alpha) = (f^1(i\alpha), f^2(i\alpha)) \in R^2$ [4].

Автор выражает благодарность проф. Г.Г.Михайличенко и участникам научного семинара по теории физических структур в Горно-Алтайском университете за поддержку данного исследования и многочисленные обсуждения предварительных результатов.

Литература

1. Курош А.Г. Общая алгебра. Лекции 1969–1970 учебного года. М. 1974.

2. Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур. Новосибирск: НГУ, 1968.

3. Михайличенко Г.Г. Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур. Дополнение к [2], С.175–226.

4. Михайличенко Г.Г. Двуметрические физические структуры и комплексные числа//Докл. АН СССР, 1991, Т.321, №4, С.677-680.

Михайличенко
Геннадий Григорьевич

1942 года рождения. В 1967 окончил физический факультет Новосибирского госуниверситета, в 1970 – аспирантуру при нем. До 1994 – доцент кафедры теоретической физики Новосибирского госпединститута, с 1994 по настоящее время работает в должности профессора кафедры физики Горно-Алтайского госуниверситета. Имеет ученую степень доктора физико-математических наук (с 1994) и ученое звание профессора (с 2000), член-корреспондент Академии Естествознания (с 1997). Автор более пятидесяти работ и двух научных монографий: "Математический аппарат теории физических структур" и "Полиметрические геометрии". Настоящая третья его монография, составляя по теме исследования единое целое с предыдущими двумя, посвящена изучению групповой симметрии физических структур как геометрий двух множеств. Основная область исследования – теория физических структур, в которой строение физических законов определяется из принципа феноменологической симметрии, аналогичного по своей общности принципу наименьшего действия в механике.