Интерактивный электронный учебник

Механико-математический факультет

Кафедра ГАМЛ КазНУ им. аль-Фараби

К.А. Мейрембеков

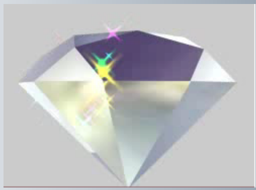
Финальная версия 27 сентября 2007 г.

Алматы

Алгебра-I

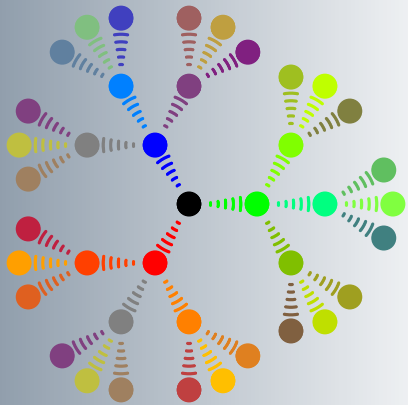
Аннотация

Приведены определения и результаты курса алгебры в первом семестре для всех специальностей ММФ. Теоремы, отсутствующие в стандартных книгах, доказываются полностью. Навыки алгебры отрабатываются в интерактивных примерах и тестах. Текст прошит гиперссылками. Автор надеется, что этот файл станет ***гидом*** студента при изучении курса алгебры. Это означает, что он не заменяет собой преподавателя, конспект лекций, учебники и задачники, но точно выстраивает нить курса, показывает, где искать полные доказательства, помогает получить основные навыки, дает способы решения тестов. Файл может стать важным пособием при подготовке к коллоквиумам, экзаменам, ПГК и экзаменам ГЭК.



О файле

Здесь обычно в книгах ставится структурная схема зависимости разделов. Мы этого не будем делать, так как у нас эта схема достаточно свободная и кроме того файл имеет гипертекстовые преимущества по сравнению с бумагой. В качестве украшения построим вместо схемы забавный рисунок.



Файл изготовлен в Latex-2e с использованием новейших пакетов Acrotex D.P. Story, Pdfscreen C.V. Radhakrishnan, Pstricks D. Girou, TikZ Till Tantau, Polynom Carsten Heinz под общим управлением драйвера pdftex. Среда обработки — Texmaker 1.5 вместе с Miktex 2.4 и Adobe Acrobat 6.0. Часть рисунков взята из коллекции "Эмоции" пакета Ghostscript и из Интернета. Рисунки также готовились в программе TpX 1.3 Александра Цыплакова. Конвертация рисунков выполнялась с помощью программ ImageMagick и ConversionArtist.

Легенда: В файле ✔ означает, что студент дает верный ответ, а символ ✘ означает в этом случае неверный ответ, корректный ответ обозначен символом ●. В каждом разделе бледно-желтый бокс выделяет важнейшие определения, а бокс цвета pink важнейшие результаты.

Навигация

Нажатие мышью на фразы или символы панели приводит к следующим действиям:

Title Page – переход на первую страницу;

Contents – переход на страницу оглавления;

◀◀ ▶▶ – переход на первую или последнюю страницу;

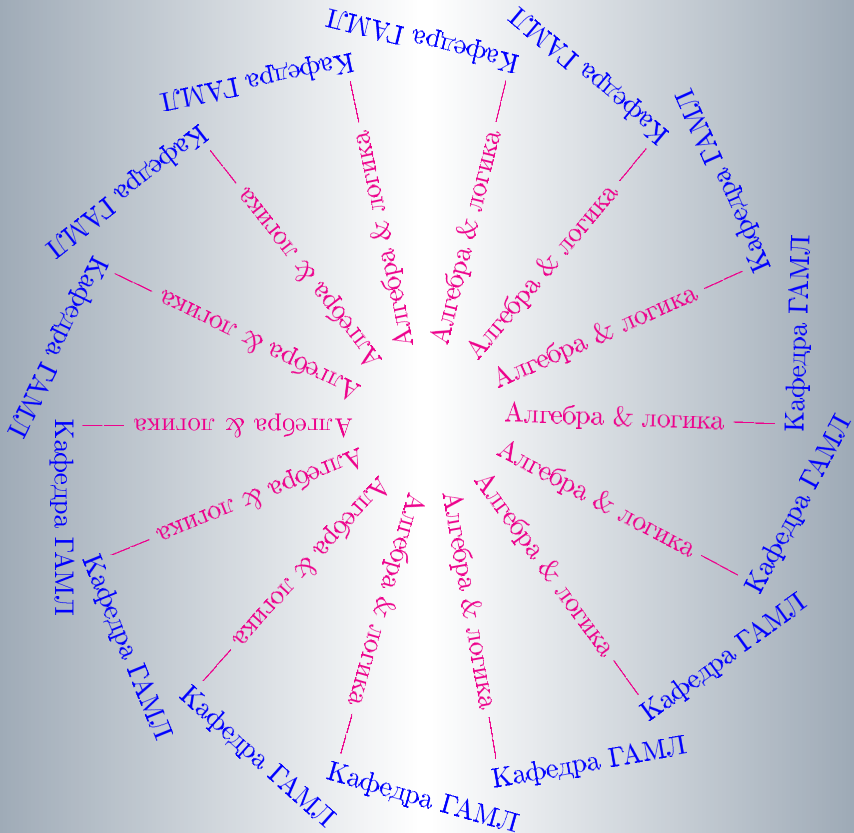
◀ ▶ – переход на предыдущую или следующую страницу;

Page – диалог перехода на нужную страницу.

Go Back – возврат на последнюю ранее посещенную страницу;

Close – диалог закрытия файла, на вопрос о сохранении изменений необходимо выбрать нет. Защита файла все равно не даст сделать изменения.

Наиболее быстрый способ навигации через Contents. Возможно также переходить на нужную страницу через Page или кнопками с символами или просто щелкая левой или правой кнопками мыши. Единственное исключение, раздел оглавления Solution of quizzes, содержащий решения заданий и тестов. При нажатии на него система перенаправит вас к условиям заданий. После выполнения заданий, раздел с решениями доступен. Нажатие на красный квадратик в разделе решений вернет вас обратно к заданию. Все файлы, используемые в этом пособии, присоединены к основному файлу как вложения. Дата создания файла 27 сентября 2007 г., размер файла 3.62 mb=3 801619 b. В байтах размер может отличаться от этого значения на $\pm 20b$, так как трудно после компиляции попасть на те же цифры объема pdf-файла. Не закрывая файла, нажмите AltTab и в Windows посмотрите эти атрибуты данного файла. Вернитесь в файл. При соответствии авторским атрибутам, можно безбоязнено открывать все Attach-файлы при помощи выделения символа кнопки правой кнопкой мыши.


Алгебра & логика
Кафедра ГАМЛ
Алгебра & логика
Кафедра ГАМЛ
Алгебра & логика
Кафедра ГАМЛ
Алгебра & логика
Кафедра ГАМЛ
Алгебра & логика
Кафедра ГАМЛ
Алгебра & логика
Кафедра ГАМЛ
Алгебра & логика
Кафедра ГАМЛ
Алгебра & логика
Кафедра ГАМЛ
Алгебра & логика
Кафедра ГАМЛ
Алгебра & логика
Кафедра ГАМЛ
Алгебра & логика
Кафедра ГАМЛ
Алгебра & логика
Кафедра ГАМЛ
Алгебра & логика
Кафедра ГАМЛ
Алгебра & логика
Кафедра ГАМЛ
Алгебра & логика
Кафедра ГАМЛ
Алгебра & логика
Кафедра ГАМЛ

Выбор траектории изучения алгебры

Для математиков курс алгебры читается два семестра и один семестр читается курс аналитической геометрии. Для прочих специальностей учебный план предусматривает некий симбиоз этих курсов. Настоящий файл содержит материал, покрывающий потребности в алгебре всех специальностей ММФ. Разные разделы файла написаны достаточно независимо друг от друга. Мы лишь пометим цветом, какие разделы курса алгебры необходимо изучить студентам соответствующих специальностей.

Математика – все разделы, независимо от цвета в оглавлении, цвета заголовков разделов и колонтитулов.

Механика Все разделы кроме помеченных цветом magenta.

Информатика Все разделы кроме помеченных цветом magenta.

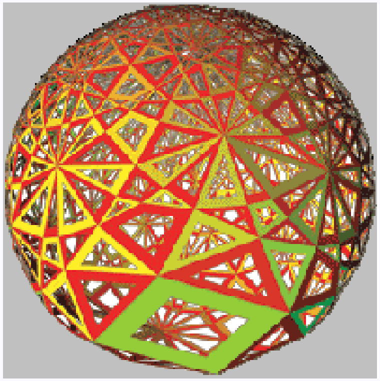
Информационные системы Все разделы кроме помеченных цветом magenta.

Математическое и компьютерное моделирование Все разделы кроме помеченных цветом magenta.

Впрочем, здесь могут быть вариации, в зависимости от вкуса лектора. Кафедра подумает о переводе настоящего файла на казахский язык. Ясно, что файлы такого класса делаются не один месяц, во всяком случае, мне не хватило для этого отпуска. При этом несмотря на репутацию Latex-гуру на факультете, для изготовления файла пришлось знать кроме четырех томов путеводителя по пакету Latex, еще гору технической литературы на английском, французском и немецком языках о пакетах, о которых говорится на 2-ой странице файла и книгу о взломах *pdf*. Файл по аналитической геометрии с траекторией её изучения для всех специальностей ММФ готовит доцент Н.П. Азанов в формате *.chm*

Содержание

1. ВВЕДЕНИЕ



Требования к компьютеру и программному обеспечению. Компьютер может быть любым, начиная с Pentium-II. Для чтения файла нужен Adobe Acrobat или Adobe Reader версии не ниже 6.0 с Java script-модулем. Для проигрывания flash-роликов необходим Macromedia Flash player версии 7.0 или выше. Adobe Reader и Macromedia Flash player являются бесплатными программами и могут быть найдены поисковиком http://www.google.ru. Если у вас ничего этого нет кроме Adobe Reader, то все равно большая часть файлов будет читаться, но вложенные не pdf-файлы, нет.

На файлы наложена некоторая авторская защита, но вы понимаете, что pdf – это web-технологии, тысячи хакеров ищут уязвимости в web, поэтому полной надежды на защиту нет. В ходе чтения файла вам придется заполнять некоторые формы (отвечая на вопросы тестирования), по окончании сеанса работы с файлом эти изменения не сохранятся. В новом сеансе вы работаете с чистого листа. В каждом разделе выделено цветом ключевое определение или результат. Цветом отмечены также гиперссылки, нажатие на которые приводит переходу в соответствующий раздел.

Чтобы напомнить студенту некоторые сведения из элементарной математики посмотрите следующий большой flash-ролик. Этот ролик готовился в 2004 г. и стал сердцевиной мультимедийного обучающего пособия по алгебре для 8 – 9 классов средней школы. Пособие готовила большая группа авторов и программистов КазНУ и оно разошлось в CD-дисках по Казахстану. Автор отвечал за координацию работы коллектива авторов над МОП и за раздел тригонометрии. Я являюсь единоличным автором всех идей, положенных в основу упомянутого flash-ролика. Все пункты меню ролика: конвертеры, трансформеры, решатели, анимация, графики были вначале смоделированы автором в Maple и эти подробные модели были реализованы flash-программистами мехмата КазНУ.

Во flash-ролике работают все пункты меню, кроме конструктора графиков и симметрий графиков относительно прямых, требующих ActiveX. Не жмите на эти пункты, это приведет к зависанию FlashPlayer. Если случайно включили, то снимите с зависания FlashPlayer и вы вновь читаете исходный файл в pdf и можете повторно запустить flash-ролик. Музыка во flash-ролике убрана ради экономии памяти. Может быть этот swf-ролик станет для вас вспомогательным инструментом при решении некоторых задач по алгебре, геометрии и математическому анализу. Предварительно сделайте ассоциацию swf-файлов с браузером Internet Explorer. Для этого войдите в Пуск/Мой компьютер/сервис/свойства папки/типы файлов. Где найти Flash Player см. 25.

Запустить ли вложенный swf-файл?

Требования к знаниям студентов. Для понимания курса необходимо владение элементарной математикой в объеме курса средней школы. Результаты курса используются всеми другими математическими дисциплинами. Настоящий сокращенный конспект лекций содержит определения всех используемых понятий, формулировки всех результатов курса. В конспекте приведены полные доказательства результатов курса, которые отсутствуют в стандартных книгах. Файл оптимизирован для отображения в электронном виде и не предназначен для отображения на бумаге. Причина заключается не только в дизайне, хотя и это немаловажно, и надеюсь что читать файл с монитора приятно. Мы используем возможность снабдить файл разнообразными гиперссылками и даже вступить со студентом в интерактивное общение посредством этого файла. Это происходит в разделе *Как решать тесты* и по ходу изложения в разбираемых примерах. Подобных целей в бумажном варианте достичь невозможно.

1.1. Числовые кольца и поля, кольца вычетов

Пусть K непустое множество имеющее особый элемент, обозначаемый символом 0, на котором определены две двухместные операции $+$ сложение и $\cdot$ умножение, т.е. если $x, y \in K$ следует, что $x + y \in K$ и и $x \cdot y \in K$. В наиболее распространенных случаях эти операции удовлетворяют следующим свойствам:

$$\forall x \forall y \forall z[(x+y)+z = x+(y+z)] \quad \text{–ассоциативность операций}$$

$$\forall x \forall y[x+y = y+x] \quad \text{– коммутативность сложения}$$

$$\forall x[x+0 = x] \quad \text{– нейтральность нуля}$$

$$\forall x \exists y[x+y = 0] \quad \text{– противоположный элемент}$$

$$\forall x \forall y \forall z[x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z], \quad \forall x \forall y \forall z[(y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x] \quad \text{дистрибутивность}$$

Определение 1 *Если множество K обладает всеми этими свойствами, то оно называется кольцом.*

Факт 1 *Нейтральный относительно сложения элемент в кольце единственнен. Для каждого элемента x кольца противоположный элемент y единственнен и обозначается через $-x$.*

Title Page
Contents
Page 12 of 149
Go Back
Close

Определение 2 *Кольцо K называется ассоциативным, если в нем дополнительно ассоциативно умножение*

$$\forall x \forall y \forall z [(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)].$$

Определение 3 *Кольцо K называется коммутативным, если в нем дополнительно коммутативно умножение*

$$\forall x \forall y [x \cdot y = y \cdot x)].$$

Определение 4 *Кольцо K имеет единицу 1, если $\forall x [x \cdot 1 = x = 1 \cdot x]$.*

Определение 5 *Если K кольцо с единицей, то элемент x называется обратимым, если существует $y \in K$ такой, что $x \cdot y = 1 = y \cdot x$. Элемент y называется обратным к x.*

Факт 2 *Если кольцо содержит единицу, то только одну. Если K кольцо с единицей, то если элемент x обратим, то обратный к x элемент единственнен и обозначается через x^{-1}.*

Определение 6 *Ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей называется полем, если каждый элемент отличный от нуля обратим.*

В кольцах перечисленные свойства могут выполнятся в различных сочетаниях, причем классификационное название этому кольцу дается по максимуму сочетаемых свойств.

Пример 1 *Рассмотрим различные множества $(K, +, \cdot, =)$ и заданные на нем операции $+, \cdot$.*

1. $(Q, +, \cdot, =)$ *и* $(R, +, \cdot, =)$ *являются полями рациональных и действительных чисел..*

2. $(Z, +, \cdot, =)$ *целые числа – ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей.*

3. $(2Z, +, \cdot, =)$ *четные числа – ассоциативное и коммутативное кольцо без единицы.*

Прочие разделяющие примеры некоммутативных и (или) неассоциативных колец будут определяться по ходу изложения.

Определение 7 *Пусть* $n \geq 2$ *– фиксированное натуральное число.На множестве* $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ *определим две операции* $\oplus_n, \otimes_n$ *по правилу* $x \oplus_n y = irem(x+y, n)$ *и* $x \otimes_n y = irem(x \cdot y, n)$*, где через* $irem(z, n)$ *обозначен остаток от деления* z *на* n*. Это множество* $(Z_n, \oplus_n, \otimes_n)$ *называется кольцом вычетов по модулю* n*. Если это ясно из контекста, то обозначения упрощают до* $(Z_n, +, \cdot, =)$*.*

Элемент x кольца K называется (правым) делителем нуля, если $x \neq 0$ и существует $y \neq 0$ такой, что $x \cdot y = 0$. Например, в кольце вычетов Z_6 элемент 2 является делителем нуля.

Факт 3 *В любом поле не существует делителей нуля.*

Теорема 1 *Кольцо вычетов* Z_n *является полем тогда и только тогда, когда* n *простое число.*

Определение 8 *Если для кольца K существует натуральное число m такое, что $\forall x(mx = 0)$, то наименьшее из таких чисел называется характеристикой кольца K и обозначается через $char(K)$. Есcли таких m нет, то характеристика кольца считается равной нулю. Например, $char(R) = 0 = char(Q)$ и $char(Z_n) = n$.*

Теорема 2 *Характеристика любого поля либо нуль, либо простое число.*

Теорема 3

1. *Всякое поле характеристики нуль содержит в качестве подполя поле рациональных чисел.*
2. *Всякое поле простой характеристики p содержит в качестве подполя поле вычетов Z_p.*

Литература – книга Кострикина [4].

1.2. Алгебраическая запись комплексного числа

Поле вещественных чисел $(R, +, \cdot, 0, 1, =)$ удовлетворяло потребностям экономики и евклидовой геометрии, но имело один недостаток, существовали многочлены с вещественными коэффициентами, например, $f(x) = x^2 + 1$ не имеющие вещественных корней. Обозначим через i новый символ не лежащий в R и полагаем $i^2 = -1$,

Определение 9 *Множеством комплексных чисел называем множество C формальных выражений $\{a+bi \mid a, b \in R\}$, где полагается $i^2 = -1$ и $a_1+b_1i = a_2+c_2i \iff a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$.*

Определение 10 *Определим операции на множестве комплексных чисел, полагая для $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$, что $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ и $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$.*

Title Page
Contents
Page 16 of 149
Go Back
Close

Begin (2^{pts}) Вычислить произведение

$$(3+2i)\cdot(4-i)=\square+\square i$$

End | | | Correct | Ans: $\square$

ScoreField PointsField

Теорема 4 *Множество C комплексных чисел относительно операций $+, \cdot$ образует поле расширяющее поле вещественных чисел.*

Эта теорема является основной причиной, что все арифметические действия над комплексными числами (в частности формулы сокращенного умножения) точно такие же как и для вещественных чисел.

Определение 11 *Если $z=a+bi$ – комплексное число, то сопряженным к z числом называется число $\bar{z}=a-bi$.*

Факт 4

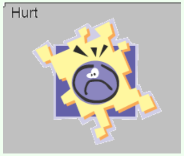
1. $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$,
2. $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
3. $z \in R \iff z = \bar{z}$,
4. $z \in iR \iff \bar{z} = -z$, *такие числа называются чисто мнимыми,*
5. $z + \bar{z} \in R$,

6. $x \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in R^+$

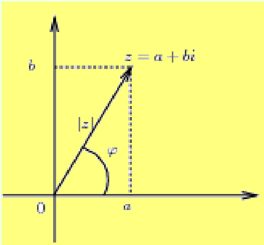
Вещественные числа имеют геометрическое представление как точки на вещественной оси. Комплексные числа изображаются точками плоскости. Числу вида $z = a + bi$ сопоставляется точка плоскости с координатой (a, b). Расстояние от этой точки до начала координат называется модулем комплексного числа z. Таким образом понятие модуля комплексного числа оказывается обобщением понятия абсолютной величины вещественного числа. Другое представление комплексных чисел – сопоставление комплексному числу $z = a + bi$ вектора идущего из начала координат в точку с координатами (a, b). Это представление полезно тем, что сумме двух комплексных чисел соответствует обычная геометрическая сумма соответствующих векторов.

Литература – книга Куроша [3].

1.3. Тригонометрическая форма комплексного числа



Положение точки на комплексной плоскости кроме декартовой системы координат однозначно задается в полярной системе координат: расстоянием от этой точки до начала координат между прямой OX и лучом на правленным из начала координат на данную точку. Положительным направлением отсчета углов считается направление против часовой стрелки. Этот угол называется полярным углом. Понятно, что лучи α и $2\pi+\alpha$ совпадают. Поэтому считается, что $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Найдем запись комплексного числа $z = a + bi$.



Обозначим $|z|$ через ρ. По теореме Пифагора $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ и $\sin(\varphi) = \frac{b}{\rho}$, $\cos(\varphi) = \frac{a}{\rho}$. Пара чисел $\sin(\varphi), \cos(\varphi)$ однозначно определяет угол в пределах от нуля до 2π. Если оба числа положительны, то этот угол лежит в первой четверти, если

Title Page
Contents
Page 19 of 149
Go Back
Close

оба отрицательны, то этот угол лежит в третьей четверти. Если синус положителен, а косинус отрицателен, то это вторая четверть и, наконец, если синус отрицателен, а косинус положителен, то это четвертая четверть. Тогда $a = \rho\cos(\varphi)$, $b = \rho\sin(\varphi)$. Отсюда

$z = a + bi = \rho[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]$. Последняя запись называется тригонометрической формой комплексного числа.

Пример 2 *Найти тригонометрическую форму числа* $\sqrt{3} - i$.

Найдем вначале модуль этого числа $|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$. В тригонометрической записи числа модуль вытаскивается вперед. Учтем это. Тогда $\sqrt{3} - i = 2[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i]$. Следовательно, $\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin(\varphi) = -\frac{1}{2}$. По вышеприведенному правилу угол φ лежит в четвертой четверти. В любой четверти можно оказаться прибавляя или отнимая к углам 0 или π острый угол. Не обращая внимания на знаки, в первой четверти $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому искомый угол равен $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Отсюда $\sqrt{3} - i = 2[\cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3})]$.

Алгебраическая форма записи комплексного числа удобна для сложения и вычитания комплексных чисел и имеет ясную геометрическую интерпретацию этих операций. Тригонометрическая форма комплексных чисел удобна для умножения комплексных чисел, возведения в степень и извлечения корня произвольной степени из комплексного числа.

Begin (3^{pts}) Найти тригонометрическую форму комплексного числа

$$1-\sqrt{3}i = \boxed{}[\cos(\boxed{}) + i\sin(\boxed{})]$$

End $\underbrace{\boxed{}}_{\text{ScoreField}}\underbrace{\boxed{}}_{\text{PointsField}}$ Correct

Ans: $\boxed{}$

Теорема 5 *Если* $z_1 = r[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]$, $z_2 = \rho[\cos(\psi) + i\sin(\psi)]$, *то*

$$z_1z_2 = r\rho[\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)],$$

в частности, модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей и аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей. Разумеется, если сумма аргументов превышает 2π, *то от суммы аргументов необходимо отминусовать угол полного оборота* 2π.

Следствие 1 (Формула Муавра) *Если* $z = r[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]$, *то*

$$z^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)].$$

В отличие от действительных чисел из каждого комплексного числа извлекаются корни, причем любой степени. Более того, если число не равно нулю, то из него извлекается ровно n различных корней.

Теорема 6 *Если* $z = r[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]$, *то*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right], \quad 0 \le k \le n-1.$$

Определение 12 *Корнем* n*-ой степени из единицы называется комплексное число* α *такое, что* $\alpha^n = 1$. *Корни* n*-ой степени из единицы образуют циклическую группу* n*-го порядка, т.е. множество этих корней замкнуто относительно произведения и взятия обратных элементов. Все корни* n*-ой степени из единицы порождаются из одного из корней как степени этого корня. Такие корни называются первообразными корнями* n*-ой степени из единицы.*

Число α является первообразным корнем n-ой степени из единицы тогда и только тогда, когда $\alpha^n = 1$ и $(\forall k < n)[\alpha^k \neq 1]$. Корни из единицы расположены в вершинах правильного многоугольника, вписанного в окружность радиуса 1, причем одна из вершин является действительным числом 1.

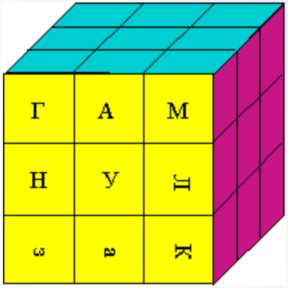
Begin (3^{pts}) Найти все корни из комплексного числа

$$\sqrt[3]{-2+2i} = \sqrt{\boxed{}}[\cos(\boxed{}) + i\sin(\boxed{})]$$

End $\underbrace{\boxed{}}_{\text{ScoreField}}\underbrace{\boxed{}}_{\text{PointsField}}$ Correct Ans: $\boxed{}$

Литература – книга Куроша [3].

1.4. Определители

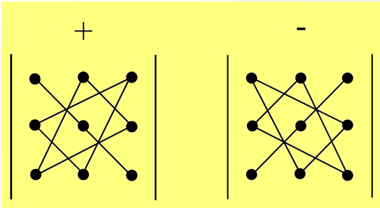


Пусть K какое-нибудь поле из числа тех, которые нам известны или будут построены позднее. На данный момент мы знаем поля рациональных, вещественных и комплексных чисел, а также поля вычетов по простому модулю. Эти поля кратко обозначаются символами Q, R, C, Z_p. Определителем (синоним – детерминантом) второго порядка называется квадратная таблица из двух строк и двух столбцов, которой сопоставлено следующее число из поля K:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1},$$

являющееся разностью произведений чисел лежащих на главной диагонали и побочной диагонали. Здесь используется координатная запись элементов определителя: элемент $a_{i,j}$ лежит на пересечении i-ой строки и j-го столбца. Определителем третьего порядка называется квадратная таблица из трех строк и трех столбцов, которой сопоставлено следующее число из поля K:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}\cdot a_{2,2}\cdot a_{3,3} + a_{1,2}\cdot a_{2,3}\cdot a_{3,1} + a_{1,3}\cdot a_{2,1}\cdot a_{3,2} - \\ - a_{1,3}\cdot a_{2,2}\cdot a_{3,1} - a_{1,1}\cdot a_{2,3}\cdot a_{3,2} - a_{1,2}\cdot a_{2,1}\cdot a_{3,3}$$



Запомнить формулу для Δ_3 уже труднее, но существует мнемоническое правило которое гласит, что произведение троек чисел соответствующих вершинам треугольников или главной диагонали первой таблицы входит в определитель со знаком плюс, а для второй таблицы соответствующие произведения входят в Δ_3 со знаком минус. Определители второго порядка легко вычисляются по заданной формуле. Мы не рекомендуем вычислять определитель третьего порядка по приведенной формуле. Гораздо практичнее вычислять определители третьего и большего порядков усвоив ряд свойств определителей n-го порядка.

Пусть n – фиксированное натуральное число, обозначим через J_n множество чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$. Перестановкой множества J_n называется упорядоченная последовательность $\pi = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ различных чисел из J_n. Через $S(n)$ обозначим множество всех перестановок на J_n. Например, при $n = 3$ множество $S(3)$ состоит из следующих перестановок:

$$(1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2),\ (3,2,1).$$

Лемма 1 *Число перестановок в множестве $S(n)$ равно $n!$.*

Заметим, что число $n!$ растет с огромной скоростью с ростом n. Вот последовательность его значений $2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720, 7! = 5040, 8! = 40320, 9! = 362880$ и число $10! == 3628800$ превышает три миллиона. Число $13! = 6227020800$ превышает шесть миллиардов и число $100!$ имеет в своей записи 158 цифр, т.е. значительно превышает гугл (гугл – единица со ста нулями, от этого имени произошел google – знаменитый поисковик в Интернете)

Следующее вложение – забавная анимация со звуком, еще раз показывает, что перестановки один из наиболее распространенных комбинаторных объектов в природе. Для запуска анимации необходим Macromedia Flash Player версии 7.0 или выше. Если вы пользуетесь Интернетом, то он скорее всего у Вас уже встроен в браузер. Если файл не показывается, то в любом Интернет-кафе зайдите на http://www.google.ru и ищите Macromedia Flash Player . Найдите по ссылкам download этой программы, скачайте на флешку и установите на свой компьютер. Как ею пользоваться см. 10. Возврат по Go Back. Эта программа бесплатная. Выделите символ кнопки правой кнопкой мыши и во всплывшем меню выбрать открыть swf-файл.

Определение 13 *Пусть π перестановка $\pi = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Два символа α_i, α_j составляют в перестановке π инверсию (беспорядок), $i < j$, но $\alpha_i > \alpha_j$. Число беспорядков в перестановке π обозначим через $I(\pi)$. Перестановка называется четной, если четно число $I(\pi)$ и нечетной в противном случае.*

Определение 14 *Пусть π, τ перестановки из $S(n)$. Говорим, что τ получена из π транспозицией, если найдутся два символа α_i, α_j в π такие, что только эти два символа меняются в τ местами по сравнению с π.*

Теорема 7 *Всякая транспозиция в заданной перестановке меняет её четность.*

Пример 3 *Кубик Рубика один из ярких примеров использования перестановок. Допустим в нашем кубике Рубика на одной из граней написаны слова см. начало раздела. Сделали несколько десятков разных поворотов граней кубика. Затем решили собрать цвета граней кубика в исходное положение. Верно ли, что независимо от процесса сборки все буквы займут первоначальное положение, не меняя своей ориентации?*

Определение 15 *Дадим определение детерминанта n-го порядка. Вначале приведем формулу*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in S(n)} (-1)^{I(\pi)} a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \dots a_{n,\pi(n)}$$

Поясним эту достаточно сложную формулу:

- определитель есть сумма $n!$ слагаемых (суммирование по $\pi \in S(n)$);
- каждое слагаемое в Δ_n есть произведение n сомножителей лежащих в разных строках таблицы Δ_n;

- каждое слагаемое в Δ_n есть произведение n сомножителей лежащих в разных столбцах таблицы Δ_n (Так как вторые символы образуют перестановку из $S(n)$);
- знак с которым входит слагаемое в определитель зависит от четности перестановки из вторых символов.

Ключевыми свойствами определителей являются первые два свойства на понимание которых необходимо затратить больше усилий.

Свойство 1 Если поменять местами две строки определителя, то он изменит знак.

Свойство 2 При транспонировании (вращении определителя вокруг главной диагонали) величина определителя не изменяется. Это свойство позволяет распространять доказываемые свойства о строках на столбцы.

Свойство 3 Определитель имеющий нулевую строку равен нулю.

Свойство 4 Определитель имеющий две равные строки равен нулю.

Свойство 5 Если строку определителя умножить на число λ, то величина определителя изменится в λ раз.

Свойство 6 Определитель имеющий две пропорциональные строки равен нулю.

Свойство 7 Определитель, элементы одной из строк которого представлены в виде суммы двух слагаемых равен сумме двух определителей в первом из них в этой строке стоят первые слагаемые, а во втором в этой строке вторые слагаемые, прочие элементы этих определителей совпадают с элементами исходного определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{i,1}+a'_{i,1} & a_{i,2}+a'_{i,2} & \dots & a_{i,n}+a'_{i,n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & \dots & \dots & \\ a'_{i,1} & a'_{i,2} & \dots & a'_{i,n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Свойство 8 Определитель не меняется, если к одной из его строк прибавить другую строку умноженную на любое число λ.

Свойство 9 Если в определителе одна из строк является линейной комбинацией других строк, то определитель равен нулю.

Мы в задачах будем применять символы: $(i) \leftrightarrow (j)$ – для обозначения перестановки i-ой и j-ой строки местами, $\lambda(i)$ – для обозначения умножения i-ой строки на число λ и $(i)+\lambda(j)$ – для обозначения прибавления к i-ой строке j-ой умноженной на число λ. При этом j-я строка остается без изменений, а все изменения происходят в i-ой строке. Аналогичные обозначения применяются для преобразований Гаусса со столбцами. Единственное отличие в записи: $[i]$ – означает i-й столбец.

Quiz Выяснить каким преобразованием второй определитель получен из первого?

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\square\square\square.\square} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$$

Ans

Clear

Чтобы решать следующие задачи, требуемые для проверки усвоения, надо нажать кнопку *Start*, затем заполнить в каждой задаче правильные по вашему мнению ответы, ткнув мышкой на нужные радиокнопки. Повторное нажатие *Start* очищает ранее введенный выбор и система готова, чтобы заново приступить к обучению. Для проверки решений нажать в конце задач кнопку *end* и проверить ответы задач на совпадения, нажав на *Correct*. Нажатие на зеленый кружочек с правильным ответом переведет вас на страницу с решением соответствующей задачи. Нажатие на красный квадрат на странице с решением вернет вас к рассматриваемому заданию.

Start

1. Как изменится определитель, если из удвоенной первой строки отнять вторую строку?
Ответы:

☐ не изменится, ☐ станет равным нулю, ☐ удвоится.

2. Как изменится определитель, если одновременно от первой строки отнять вторую, от второй третью и от третьей первую?
Ответы:

☐ станет равным нулю, ☐ не изменится, ☐ изменит знак.

End Score: Correct

Литература – книга Куроша [3].

1.5. Определители n-го порядка.

Без овладения всеми свойствами определителей нельзя надежно вычислять их. Приведем правила для запоминания и классификации свойств. Сейчас нет нужды записывать эти свойства по порядку их доказательства. Читатель, сравнивая списки свойств, сам разберется в мнемонических обозначениях свойств, разбитых на три группы.

I. $\Delta = 0$

a) $\Delta[(k) = \theta] = 0$;

b) $\Delta[(k) = (s)] = 0$;

c) $\Delta[(k) = \lambda \cdot (s)] = 0$;

d) $\Delta[(k) = \sum_{i \neq k} \lambda_i \cdot (i)] = 0$.

II. Δ не меняется.

a) $\Delta' = \Delta$; (штрих означает операцию транспонирования)

b) $\Delta[(k) + \lambda \cdot (s)] = \Delta$.

III. Δ изменяется.

a) $\Delta[(k) \leftrightarrow (s)] = -\Delta$;

b) $\Delta[\lambda \cdot (k)] = \lambda \cdot \Delta$;

c) $\Delta[(k) = (k') + (k'')] = \Delta[(k')] + \Delta[(k'')]$.

Имеется ряд определителей частного вида, величина которых моментально подсчитывается по определению детерминанта. К ним относится верхний треугольный определитель

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} \cdot \dots \cdot a_{n,n}$$

Пример 4 *Вычислить определитель*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Приведем заданный определитель к треугольному виду, пользуясь свойством II.b и с осторожностью свойством III.a (памятуя о том, что перестановка строк в определителе меняет его знак). Мы будем сопровождать вас. Над равенствами стоят наши символические обозначения манипуляций. Здесь $(k) \leftrightarrow (s)$ означает перестановку k-ой и s-ой строк и $(k)+\lambda(s)$ означает прибавление к k-ой строке s-ой строки умноженной на λ. Аналогичные преобразования со столбцами будут мнемонически обозначаться через $[k] \leftrightarrow [s]$ и $[k]+\lambda[s]$. При заполнении пунктов будут всплывать сообщения Right или Wrong. Выключите их. Правильные пункты вычислений будут обводиться зеленой рамкой, неверные – красной. В пункте Ans будет выводиться количество неверных попыток. Нажатие на Ans будет давать правильный ответ в соответствующем пункте. Процесс заполнения можно ускорить, если вы знаете, что строка не изменяется.

Quiz Вычислить определитель приведением к треугольному виду

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \overset{(2)+2(1)}{=} \\ (3)\text{-}3\ (1) \\ (4)\ \text{-}(1) \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{vmatrix} \overset{(3)+(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{vmatrix} \overset{(3)\leftrightarrow(4)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{vmatrix} = \square$$

Ans

Clear

Нетрудно понять, что любой определитель может такими преобразованиями сведен к верхнему треугольному виду. Подсчитаем число требуемых для этого арифметических операций. При необходимости поменяем местами строки, чтобы элемент в левом

Title Page
Contents
Page 32 of 149
Go Back
Close

верхнем углу стал бы не равным нулю. По нашему алгоритму необходимо из всех строк начиная со второй вычесть первую умноженную на подходящее число, чтобы певый элемент строки стал равным нулю. Для этого надо сделать $n(n-1)$ умножений и $n(n-1)$ вычитаний. После этого надо повторить такие же процедуры с меньшей таблицей без первой строки и первого столбца. Значит общее число операций умножения будет равно

$$n(n-1)+(n-1)(n-2)+(n-2)(n-3)+\cdots+3\cdot 2+2\cdot 1=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)=\frac{n(n^2-1)}{3}$$

Такое же количество потребуется операций сложения. Значит для вычисления определителя n-го порядка сведением к треугольному виду неоходимо сделать порядка $\frac{2}{3}n^3$ арифметических операций. Так для вычисления определителя 100-го порядка потребуется проделать порядка миллиона арифметических операций и это несопоставимо с трилионами гуглов операций требуемых по определению детерминанта. Определитель 100-го порядка вполне вычисляем на вашем персональном компьютере.

Определение 16 *Пусть Δ определитель n-го порядка и $1\leq k\leq n$. Если мы рассмотрим два набора чисел $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n$ и $1\leq j_1<j_2<\cdots<j_k\leq n$, то таблица содержащаяся в Δ на пересечении строк с номерами $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n$ и столбцов с номерами $1\leq j_1<j_2<\cdots<j_k\leq n$ образует определитель k-го порядка, называемым минором в Δ.*

Миноров k-го порядка в определителе Δ имеется $\binom{n}{k}^2$ штук. Миноры первого порядка – это просто элементы определителя. Минор n-го порядка это сам определитель

Δ. Дополнительным минором $\widetilde{M}$ к минору M называется минор $(n-k)$-го порядка, получаемый вычеркиванием из Δ строк и столбцов, в которых находится M. Обозначим через S_M число $i_1 + i_2 + \cdots + i_k + j_1 + j_2 + \cdots + j_k$.

Теорема 8 (о миноре) *Произведение $M \cdot (-1)^{S_M} \widetilde{M}$ состоит из слагаемых разложения определителя Δ, причем с теми же знаками.*

Из теоремы о миноре чисто комбинаторными методами следует

Теорема 9 (Лапласса) *Пусть Δ определитель n-го порядка и $1 \le k < n$ и задан набор чисел. $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$. Обозначим через Ω множество всевозможных миноров k-го порядка в строках с номерами $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$. Тогда*

$$\Delta = \sum_{M \in \Omega} M \cdot (-1)^{S_M} \widetilde{M}.$$

Определение 17 *Если $a_{i,j}$ – элемент определителя Δ, то алгебраическим дополнением $A_{i,j}$ для $a_{i,j}$ называется $(-1)^{i+j} M_{i,j}$, где $M_{i,j}$ дополнительный минор к элементу $a_{i,j}$.*

При вычислении определителей в основном используется следующие тождества

Следствие 2 *Разложение определителя по строке или столбцу.*

a) $\Delta = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \dots + a_{i,n}A_{i,n};$

b) $\Delta = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \dots + a_{n,j}A_{n,j}.$

В следующем определителе есть особенность, одни и те же числа в разных строках. Тогда, суммы элементов каждой из строк одинаковы. Следовательно, если прибавить к первому столбцу остальные три столбца, то в первом столбце будут одинаковые числа.

Quiz Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix} \underset{=}{[1]+[2]+[3]+[4]} \begin{vmatrix}\square&1&1&1\\\square&2&1&1\\\square&1&2&1\\\square&1&1&2\end{vmatrix} \underset{=}{\textit{из (2), (3), (4) строк отнять первую}} \begin{vmatrix}\square&1&1&1\\\square&\square&\square&\square\\\square&\square&\square&\square\\\square&\square&\square&\square\end{vmatrix} = \square$$

Ans

Clear

В следующем определителе особенностей не видно. Поэтому решаем его понижением порядка. Вначале нащупаем слабости этого определителя – они в первой строке. Значит перед нами стоит первая цель – получить в первой строке много нулей.

Quiz Вычислить определитель понижением порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix} \begin{array}{c} [1]+[2] \\ = \\ [3]+[2] \\ [4]\ \text{-}2[2] \end{array} \begin{vmatrix} \square & -1 & \square & \square \\ \square & 3 & \square & \square \\ \square & -1 & \square & \square \\ \square & 0 & \square & \square \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{vmatrix} \begin{array}{c} (1)+2(2) \\ = \\ (2)+2(3) \end{array} \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix} = \square$$

Ans

Clear

Литература – книга Куроша [3].

Title Page

Contents

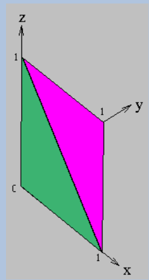
Page 36 of 149

Go Back

Close

1.6. Системы линейных алгебраических уравнений.

Определение 18 *Системой линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется система уравнений вида*



$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = b_m, \end{cases} \tag{1.6.1}$$

где коэффициенты $a_{i,j}, b_i$ лежат в числовом поле K. Система называется однородной, если все свободные члены системы равны нулю.

Нам понадобится сокращенная запись этих уравнений, которые кратко будем называть СЛАУ.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i, \quad 1 \le i \le m. \tag{1.6.2}$$

Со временем мы будем использовать и матричную форму записи таких уравнений.

Определение 19 *Упорядоченный набор чисел $\bar{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$ называется решением СЛАУ (1.6.2), если при подстановке $x_j = \rho_j$ для $1 \le j \le n$ эти уравнения превращаются в тождества. СЛАУ называется несовместной, если она не имеет решения и совместной в противном случае. Совместная СЛАУ называется определенной, если эта СЛАУ имеет единственное решение.*

Title Page
Contents
Page 37 of 149
Go Back
Close

Определение 20 *Две системы уравнений от одних и тех же неизвестных называются эквивалентными, если множества их решений совпадают.*

Существует определенный тип СЛАУ (ступенчатые) для которых легко определить все решения (если они есть или понять, что их не существует).

Пример 5 *Найти все решения СЛАУ*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 & = 5 \\ \qquad\quad x_2 + 4x_3 - 2x_4 & = -2 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 + 2x_4 & = -4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_4 & = 1 \end{cases}$$

Для этого СЛАУ легко с конца находим $x_4 = 1$, подставляем в третье уравнение и находим $x_3 = -6$, результаты подставляем во второе уравнение и получаем $x_2 = 24$ и наконец из первого уравнения находим $x_1 = -26$. Следовательно СЛАУ имеет единственное решение (-26,24,-6,1). Теперь у нас появилась цель: для произвольной СЛАУ найти равносильную ей СЛАУ в ступенчатом виде.

Определение 21 *Рассмотрим следующие важнейшие манипуляции с уравнениями (1.6.1), называемые преобразованиями Гаусса, которые будут в других обличьях возникать в теории матриц и теории линейных пространств на протяжении всего курса алгебры:*

a) **Перестановка уравнений местами;**

b) **Умножение одного из уравнений на число $\lambda \neq 0$.**

c) **Прибавление к одному уравнению другого умноженного на любое λ.**

Заметим, что эти манипуляции не независимы и а) можно заменить некоторой цепочкой преобразований вида b) и c).

Предложение 1 *Если СЛАУ получена из другой СЛАУ конечной цепочкой преобразований Гаусса, то эти СЛАУ эквивалентны.*

Теорема 10 *Всякая СЛАУ может быть приведена преобразованиями Гаусса к ступенчатому виду. Если ступенчатый вид содержит равенства $0 = b_i$, где $b_i \neq 0$, то СЛАУ несовместна. Если ступенчатый вид треугольный и не содержит таких равенств, то СЛАУ имеет единственное решение. Если ступенчатый вид трапециодальный и не содержит таких равенств, то система имеет неединственное решение.*

Пример 6 *Для иллюстрации несовместных СЛАУ рассмотрим прямоугольную равнобедренную пирамиду в начале раздела, у которой прямоугольные вершины сходятся*

Title Page
Contents
Page 39 of 149
Go Back
Close

в начале координат и оси идут по трем смежным ребрам. Уравнения плоскостей граней пирамиды следующие:

$$\begin{cases} x = & 0 \\ y = & 0 \\ z = & 0 \\ x + y + z = & 1 \end{cases}$$

Любые три из них имеют решение (любые три грани пирамиды имеют общую точку), но все четыре уравнения несовместны.

Метод Гаусса, хотя и старый, но является самым быстрым методом решения общих СЛАУ. Для практического решения СЛАУ (1.6.1) ей сопоставляется таблица Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & b_2 \\ & & \ldots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

Тогда преобразованиям Гаусса с уравнениями соответствуют следующие преобразования Гаусса со строками таблицы:

a) Перестановка строк местами;

b) Умножение одной из строк на число $\lambda \neq 0$.

c) Прибавление к одной из строк другой строки умноженной на любое λ.

Цель преобразований привести таблицу Гаусса к ступенчатому виду. По существу в таблицах Гаусса можно делать такие же преобразования со строками, как и в определителях, но дополнительно совершенно без нарушения эквивалентности, можно переставлять строки и умножать строку на любое число $\lambda \neq 0$. Преобразования со столбцами при решении СЛАУ не имеют смысла. Для человека удобнее делать ведущим элементом число ± 1.

При решении задач на СЛАУ необходимо составить таблицу Гаусса, затем выбрать ведущий элемент в левом верхнем углу таблицы. Добьемся сперва, чтобы он стал единицей. После этого преобразованиями Гаусса сделаем все элементы ниже ведущего нулями и т.д.

Quiz Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 & = 10 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 & = -7 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & 2 & 10 \\ -1 & 3 & -4 & -7 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{(3)+(2)}{\overset{(1)+(2)}{=}} \left(\begin{array}{ccc|c} \square & \square & \square & \square \\ -1 & 3 & -4 & -7 \\ \square & \square & \square & \square \end{array}\right) \overset{(2)+(1)}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array}\right) \overset{(2)-7(3)}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array}\right)$$

Ans

Ans

Ответ: $(\square, \square, \square)$

Clear

Литература – книга Куроша [3].

1.7. Правило Крамера

Рассмотрим квадратную СЛАУ, т.е. систему уравнений, в которой число неизвестных равно числу уравнений.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n &= b_n \end{cases} \tag{1.7.1}$$

Главным определителем СЛАУ (1.7.1) называется определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ & \ldots & \ldots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Title Page
Contents
Page 42 of 149
Go Back
Close

Вспомогательным определителем Δ_j для $1 \le j \le n$ называется определитель, получаемый из Δ заменой j-го столбца на столбец свободных членов системы. Справедливы следующие равенства:

$$b_1 A_{1,j} + b_2 A_{2,j} + \cdots + b_n A_{n,j} = \Delta_j; \tag{1.7.2}$$

$$a_{1,i} A_{1,j} + a_{2,i} A_{2,j} + \cdots + a_{n,j} A_{n,j} = \begin{cases} \Delta & \text{если } i = j \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{1.7.3}$$

Лемма 2 *Другими словами формула (1.7.3) говорит, что сумма произведений элементов столбца определителя на алгебраические дополнения элементов другого столбца этого определителя равна нулю, а на свои алгебраические дополнения равна определителю. Аналогично формулируется строчный вариант этой леммы.*

Теорема 11 (Правило Крамера) *Если главный определитель квадратной СЛАУ (1.7.1) отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение*

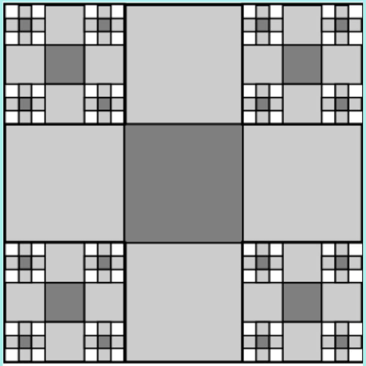
$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

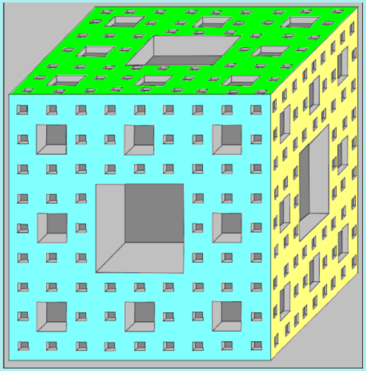
Надо заметить, что эта теорема наряду с меньшей областью применимости, не эффективна по сравнению с методом Гаусса. Решение СЛАУ методом Крамера требует приблизительно в n раз больше арифметических операций, чем метод Гаусса. Но в приложениях к дифференциальным уравнениям любят пользоваться этой рядовой теоремой линейной алгебры для формулировки единственности решения некоторых систем дифференциальных уравнений.

Если СЛАУ однородна, то она всегда совместна, так как нулевой набор является её решением. Для квадратной однородной СЛАУ тогда нетрудно распознать, когда она имеет ненулевое решение.

Следствие 3 *Квадратная однородная СЛАУ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда главный определитель системы равен нулю.*

Задача 1 *Ковер Серпинского получается из единичного квадрата следующим процессом: стороны квадрата делятся на три равные части и средний крест выкидывается, затем в четырех квадратах по углам со стороной со стороной* $\frac{1}{3}$ *выбрасываются средние кресты и т.д. Аналогично строится куб Серпинского. Какова площадь ковра и объем куба Серпинского?*





Литература – книга Куроша [3]

1.8. Введение в алгебру матриц.

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из m строк и n столбцов из чисел лежащих в некотором поле K.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \tag{1.8.1}$$

Подчеркнем, что даже при $m = n$ следует отличать матрицы от определителей. Матрице никакая величина не сопоставляется. Две матрицы равны, только если они одинаковых размеров и на одинаковых местах этих матриц стоят равные элементы. Примером матрицы является бухгалтерская ведомость начисления членам бригады заработной платы по дням месяца.

Сокращенно матрицу (1.8.1) будем обозначать через $(a_{ij})_m^n$. Введем три операции над матрицами, первые две из которых тривиальны.

1.8.1. Сумма матриц

Если $A = (a_{i,j})_m^n$ и $B = (b_{i,j})_m^n$ матрицы одинакового размера, то сумма $A + B$ определяется как $(a_{i,j} + b_{i,j})_m^n$.

Title Page
Contents
Page 45 of 149
Go Back
Close

1.8.2. Произведение матрицы на число.

Если $A = (a_{i,j})_m^n$ матрица и λ число из поля K, то матрица λA определяется как матрица $(\lambda a_{ij})_m^n$.

1.8.3. Произведение матриц

Если $A = (a_{i,j})_m^n$ и $B = (b_{i,j})_n^k$ матрицы такие, что число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, то матрица $C = (c_{i,j})_m^k$ является произведением матриц $A \cdot B$, если

$$(\forall i \leq m)(\forall j \leq k)[c_{ij} = a_{i1}b_{1,j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}].$$

Подчеркнем, что матрица C имеет столько строк, сколько имеет первая матрица A и столько столбцов, сколько имеет вторая матрица B.

Start

1. (4^{pts}) Вычислить произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

End Correct

Answers:

Свойства операций над матрицами

Следующие тождества следует понимать так, что если одна из частей тождества определена, то определена и другая и эти части равны. Для любых матриц A, B, C и чисел (скаляров) λ, μ верны тождества:

1. $A + B = B + A$ – коммутативность сложения (матрицы одинаковых размеров);
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ –ассоциативность сложения;
3. $A + \theta = A$. Здесь θ матрица того же размера, что и A составленная из нулей;
4. $A+(-A) = \theta$. Здесь $-A$ матрица, элементы которой противоположны элементам матрицы A;
5. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
7. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
8. $1 \cdot A = A$.

Доказательство очень просто и следует из свойств чисел поля K. Строго говоря, умножение на скаляр матрицы не является бинарной операцией, так как производится над объектами разной природы. Это точнее говоря, действие скаляра на матрицу. В доказательствах более сложных свойств матриц используются свойства сумм. Отвлечемся, чтобы сформулировать эти свойства.

1. В символе суммирования можно заменить индекс суммирования на любой другой, не участвующий в границах суммирования или по которому не ведется другое суммирование.
$$\sum_{i=1}^{n} b_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак суммирования
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda b_i = \lambda b_1 + \lambda b_2 + \cdots + \lambda b_n = \lambda(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \lambda \sum_{i=1}^{n} b_i$$

3. Если каждое слагаемое суммы является суммой двух слагаемых, то эта сумма разлагается следующим образом
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

4. В двойной сумме можно поменять порядок суммирования
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})+(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})+\cdots+(a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn})$$

   Наглядно эту сумму можно представить как сумму сумм строчек таблицы (1.8.1). Эту сумму можно перегруппировать, представив её как сумму сумм столбцов той же таблицы

$$(a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{m1})+(a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{m2})+\cdots+(a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{mn}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}.$$

Сложными являются доказательства следующих свойств матриц:

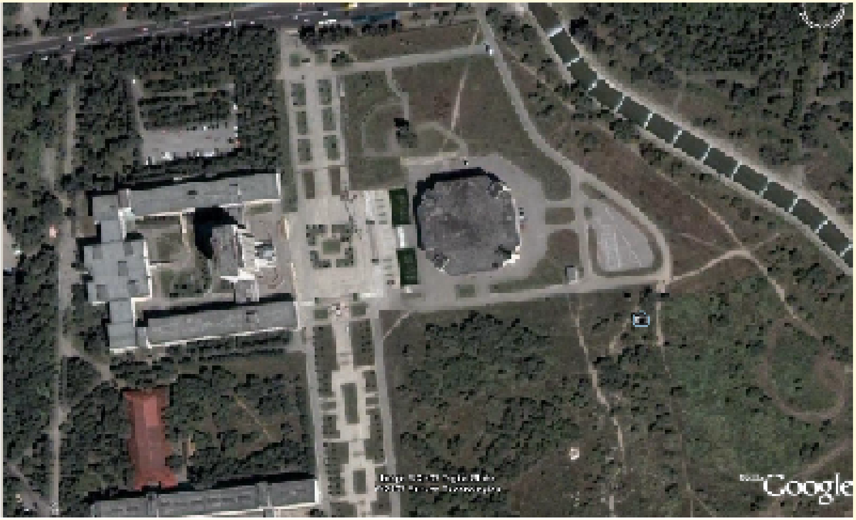
1. Если A, B, C – матрицы следующих размеров $A = (a_{ij})_m^n$, $B = (b_{ij})_n^k$, $C = (c_{ij})_k^s$, тогда $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
2. Если A, B, C – матрицы следующих размеров $A = (a_{ij})_m^n$, $B = (b_{ij})_n^k$, $C = (c_{ij})_n^k$, тогда $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
3. Если A, B, C – матрицы следующих размеров $A = (a_{ij})_k^s$, $B = (b_{ij})_n^k$, $C = (c_{ij})_n^k$, тогда $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$.

Заметим, что свойство 3) не следует из свойства 2). Это было бы так если умножение матриц было бы коммутативным. Но для матриц может существовать произведение $A \cdot B$ и при этом произведение $B \cdot A$ не имеет смысла, Но даже, если оба произведения существуют (обе матрицы квадратные одного порядка), они не обязаны совпадать, в чем можно убедиться, если взять произведение каких-либо достаточно нетривиальных матриц второго порядка.

Большей частью мы будем производить вычисления с квадратными матрицами n-го порядка над полем K. Будем обозначать это множество через $M_n(K)$. Перечисленные действия над матрицами из $M_n(K)$ обладают свойством неограниченной применимости: $A, B \in M_n(K) \Longrightarrow A + B, A \cdot B \in K$ и $\lambda \in K, A \in M_n(K) \Longrightarrow \lambda A \in M_n(K)$.

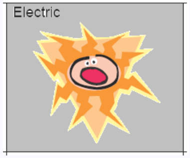
Следовательно, доказанные свойства показывают, что множество $M_n(K)$ вместе с операциями сложения и умножения образует ассоциативное кольцо (с единицей, что будет доказано на следующей лекции). Кольцо, в котором определено действие умножения его элементов на скаляры из поля, удовлетворяющее свойствам 5. — 8. называется алгеброй. Следовательно $(M_n(K), +, \cdot, \odot_\lambda, =)_{\lambda \in K}$ – ассоциативная алгебра (с единицей).

Литература – книга Куроша [3].



Снимок GoogleEarth из космоса кампуса КазНУ

1.9. Обратная матрица.



Если не оговорено противное далее все матрицы квадратные одного порядка из $M_n(K)$. Матрица E называется единичной, если $(\forall X \in M_n(K))[X \cdot E = X = E = X]$.

Факт 5 *Справедлив общий факт теории колец, в любом кольце единичный элемент, если существует, то единственнен.*

Если E_1, E_2 два единичных элемента, то $E_1 = E_1 \cdot E_2 = E_2$. В кольце $M_n(K)$ единичный элемент существует. Этим свойством, как нетрудно вычислить, обладает

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица B называется обратной к матрице A, если $A \cdot B = E = B \cdot A$.

Факт 6 *Справедливо общее утверждение теории ассоциативных колец с единицей, в таком кольце, если элемент имеет обратный, то только один.*

Допустим, что B_1, B_2 два обратных элемента для A. Тогда $(B_1 \cdot A) \cdot B_2 = E \cdot B_2 = B_2$. С другой стороны, в силу ассоциативности эта матрица равна $B_1 \cdot (A \cdot B_2) = B_1 \cdot E = B_2$. Так как обратная матрица если существует, то единственна, она обозначается через A^{-1}. Главное свойство обратной матрицы $A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$.

Теорема 12 *Если $A, B \in M_n(K)$, то определитель произведения матриц $det(A \cdot B)$ совпадает с произведением определителей сомножителей.*

Идея доказательства состоит в том, что рассматривается всомогательный гибридный определитель порядка $2n$, составленный из клеток $A, 0, -E, B$ n-го порядка следующего вида:

$$\Delta = \left|\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0 \\ \hline \text{-E} & \mathrm{B} \end{array}\right|$$

Напрямую из теоремы Лапласса следует, что $\Delta = det(A) \cdot \det(B)$. С другой стороны преобразуем определитель действиями со столбцами так, чтобы клетка в которой расположена матрица B стала нулевой.

$$\Delta = \left|\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{D} \\ \hline \text{-E} & 0 \end{array}\right|$$

Надо убедиться, что матрица D совпадет с матрицей $C = A \cdot B$ и $\Delta = det(C)$.

Следствие 4 *Если матрица A имеет обратную, то $det(A) \neq 0$.*

Теорема 13 *Пусть $A = (a_{ij})_n^n$ матрица такая, что $det(A) = d \neq 0$. Тогда обратная матрица A^{-1} существует и равна матрице*

$$B = \frac{1}{d} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Доказательство теоремы простое, достаточно перемножить матрицы A и B и с помощью свойств доказанных в (1.7.2, 1.7.3) понять, что $AB = E = BA$. Для запоминания этой формулы мысленно замените каждый элемент матрицы A на его алгебраическое дополнение, полученную матрицу транспонируйте и разделите на число d. Надо заметить, что вычисление обратной матрицы по рецепту доказанной теоремы крайне не эффективно. Оно требует вычисления n^2 определителей $(n-1)$-го порядка и одного определителя n-го порядка. Уже для матриц третьего порядка этот путь не рационален.

1.9.1. Вычисление обратной матрицы элементарными преобразованиями

Приведем эффективный способ вычисления обратной матрицы для матрицы A, либо доказательство не существования обратной матрицы. Пусть $A = (a_{ij})_n^n$ заданная матрица. Ищем обратную матрицу A^{-1} в неопределенном виде $A^{-1} = X = (x_{ij})_n^n$. Задача сводится к матричному уравнению $AX = E$. Матричное уравнение $AX = E$ эквивалентно n системам скалярных уравнений.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_{11} + a_{1,2}x_{21} + \dots + a_{1,n}x_{n1} & = 1 \\ a_{2,1}x_{11} + a_{2,2}x_{21} + \dots + a_{2,n}x_{n1} & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1}x_{11} + a_{n,2}x_{21} + \dots + a_{n,n}x_{n1} & = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_{1,1}x_{12} + a_{1,2}x_{22} + \dots + a_{1,n}x_{n2} & = 0 \\ a_{2,1}x_{12} + a_{2,2}x_{22} + \dots + a_{2,n}x_{n2} & = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1}x_{11} + a_{n,2}x_{21} + \dots + a_{n,n}x_{n2} & = 0 \end{cases}, \dots$$

$$\dots, \begin{cases} a_{1,1}x_{1n} + a_{1,2}x_{2n} + \dots + a_{1,n}x_{nn} & = 0 \\ a_{2,1}x_{1n} + a_{2,2}x_{2n} + \dots + a_{2,n}x_{nn} & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1}x_{1n} + a_{n,2}x_{2n} + \dots + a_{n,n}x_{nn} & = 1 \end{cases}$$

Первая система относительно неизвестных первого столбца обратной матрицы, вторая система относительно неизвестных второго столбца и т.д. Свободные члены этих квадратных СЛАУ являются столбцами единичной матрицы. Решить однозначно первую систему методом Гаусса это означает привести таблицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & |1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & |0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & |1 \end{pmatrix} \text{ к виду } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & |b_{11} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & |b_{21} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & |b_{n1} \end{pmatrix}$$

В таком случае получится $x_{11} = b_{11}, x_{21} = b_{21}, \dots, x_{n1} = b_{n1}$ и найдем элементами первого столбца обратной матрицы A^{-1}. Аналогичные замечания можно сделать для второй СЛАУ относительно неизвестных второго столбца. Как одновременно решать все n СЛАУ? Заметим, что хотя неизвестные в системах разные, но матрица при неизвестных одна и та же. Свободные члены в этих системах также разные. Тогда возникает такая идея, стремимся преобразовать комбинированную таблицу преобразованиями Гаусса со строками

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & |1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & |0 & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & |0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

т.е. матрицу вида $(A|E)$ к матрице вида $(E|B)$ Если мы забываем про все столбцы матрицы E кроме первого, то решаем первое СЛАУ и находим первый столбец обратной матрицы. Если мы забываем про все столбцы матрицы E кроме второго, то решаем второе СЛАУ и находим второй столбец обратной матрицы и т.д. Если в процессе преобразований одна из строк матрицы A обнуляется, то матрица A не будет иметь обратную. Итак мы доказали следующий сложный, но эффективный способ вычисления обратной матрицы:

Теорема 14 *Для вычисления обратной матрицы для матрицы A достаточно организовать гибридную таблицу $(A|E)$ и преобразовать её преобразованиями Гаусса со строками к виду $(E|B)$. Если это удается (ни одна строка A не обнуляется), то B и есть обратная матрица для A. В противном случае, матрица A^{-1} не существует.*

Quiz Вычислить обратную матрицу для матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-(2)]{(2)-2(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array}\right) \xrightarrow[(1)+(2)]{(3)+2(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array}\right) \xrightarrow[(1)+(3)]{(2)-(3)}$$

Ans

$$\xrightarrow[(1)+(3)]{(2)-(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array}\right) \xrightarrow[-1(2)]{-1(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array}\right)$$

Ans

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$

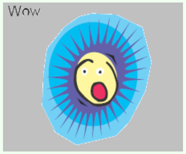
Ans

Clear

Литература – книга Куроша [3].

Title Page
Contents
Page 56 of 149
Go Back
Close

1.10. Подобие матриц



Теория матриц – сложный и богатый раздел математики, имеющий большое число приложений и и в котором проводятся интенсивные научные исследования. Цель раздела – ввести начальные понятия теории матриц, подобия матриц, инвариантов подобия и прояснить вычислительную технологию работы с матрицами.

Определение 22 *Пусть n фиксированное число и $i, j \leq n$. Матричной единицей называется матрица n-го порядка e_{ij}, у которой все элементы равны нулю, кроме элемента на пересечении i-ой строки и j-го столбца равного единице. Справедливо тождество*

$$e_{ij} \cdot e_{ks} = \begin{cases} e_{is} & \text{если } j = k, \\ 0 & \text{если } j \neq k \end{cases}$$

Всякая матрица $A = (a_{ij})_n^n$ является однозначной линейной комбинацией матричных единиц.

Определение 23 *Элементарными матрицами называются матрицы вида $t_{ij}(\alpha) = E + \alpha \cdot e_{ij}$ для $i \neq j$ и диагональные матрицы вида $d_i(\beta)$, у которой все элементы диагонали равны 1, кроме i–го элемента, равного β.*

Умножение матрицы A на элементарные матрицы моделирует преобразования Гаусса с этой матрицей.

Предложение 2

- *Умножение матрицы A слева (справа) на матрицу $d_i(\beta)$ равносильно умножению i-ой строки (столбца) матрицы A на число β.*

- *Умножение матрицы A слева на матрицу $t_{ij}(\alpha)$ равносильно прибавлению к i-ой строке матрицы A его j-ой строки умноженной на число α. Умножение $A \cdot t_{ij}(\alpha)$ равносильно прибавлению к j-му столбцу i-го столбца умноженного на α.*

Центром $Z(M_n(k))$ кольца матриц $M_n(K)$ называется совокупность всех матриц перестановочных с любой матрицей из $M_n(K)$.

Предложение 3 *Центр $M_n(K)$ состоит из скалярных матриц, т.е. матриц вида ρE, где $\rho \in K$.*

Допустим, что $A \in Z(M_n(K))$. Тогда так как $A \cdot d_i(\alpha) = d_i(\alpha) \cdot A$ и при $\alpha \neq 1$, то элементы i-ой строки и i-го столбца матрицы A должны быть равны нулю. Следовательно, матрица A должна быть диагональной. Если эта матрица не скалярная и её i-й и j-й диагональные элементы различны, то матрицы $A \cdot t_{ij}(\beta) \neq t_{ij}(\beta)A$ при $\beta \neq 0$.

Предложение 4 *Матрица тогда и только тогда невырождена, когда она представляется в виде произведения конечного числа элементарных матриц.*

Невырожденная матрица приводится преобразованиями Гаусса со строками и столбцами к единичной матрице. В силу предыдущего утверждения $E = U_1 \cdot U_2 \dots U_k \cdot A \cdot$

$V_1 \cdot V_2 \ \dots V_m$. Так как обратная матрица к элементарной матрице сама элементарна, то A есть произведение элементарных матриц.

Определение 24 *Следом $tr(A)$ матрицы A называется сумма диагональных элементов.*

Предложение 5 *Если оба произведения матриц AB и BA существуют (в частности если обе матрицы квадратные одного порядка), то $tr(AB) = tr(BA)$.*

Предложение 6 *При транспонировании произведения любых матриц справедливо тождество $(A \cdot B)' = B' \cdot A'$.*

Более простые свойства следа и транспонирования объединены в следующем утверждении

Предложение 7

- $tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$;
- $tr(\beta A) = \beta \cdot tr(A)$;
- $(A \pm B)' = A' \pm B'$;
- $\beta A)' = \beta A'$;
- $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.

Определение 25 *Характеристическим многочленом квадратной матрицы называется многочлен $\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda \cdot E)$, а его корни называются характеристическими числами этой матрицы.*

Если $f(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1} + a_k$ многочлен и A квадратная матрица, то под $f(A)$ понимается матрица $f(A) = a_0A^k + a_1A^{k-1} + \cdots + a_{k-1}A + a_k \cdot E$.

Задача 2 *Пусть нам задана матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Доказать, что эта матрица является матричным корнем следующего уравнения $x^2 - tr(A) \cdot x + det(A) = 0$.*

Определение 26 *Кольцевым коммутатором $[A, B]$ двух матриц $A, B \in M_n(K)$ называется матрица $AB - BA$.*

Прямое доказательство следующего утверждения было бы мучительно громоздким.

Задача 3 *Доказать, что для любых матриц $A, B, C \in M_2(K)$ справедливо тождество $[[A, B]^2, C] = 0$.*

Указание: положить $D = [A, B]$ и доказать с помощью предыдущей задачи, что D^2 является скалярной матрицей.

Определение 27 *Две матрицы $A, B \in M_n(K)$ называются подобными, если $(\exists C \in M_n(K))[A = C^{-1}BC]$ и этот факт записывается в виде $A \approx B$.*

Факт 7 *Подобие матриц является отношением эквивалентности, т.е. рефлексивно $A \approx A$, симметрично $A \approx B \Rightarrow B \approx A$ и транзитивно $A \approx B, B \approx C \Rightarrow A \approx C$.*

Определение 28 *Если для некоторого числа k справедливо равенство $A^k = 0$, то A называется нильпотентной, если $A^2 = A$, то идемпотентной, если $A^2 = E$, то инволютивной, если $A^k = A$, то периодической.*

Теорема 15 *Пусть матрица A подобна матрице B, т.е. $A = C^{-1}BC$. Тогда*

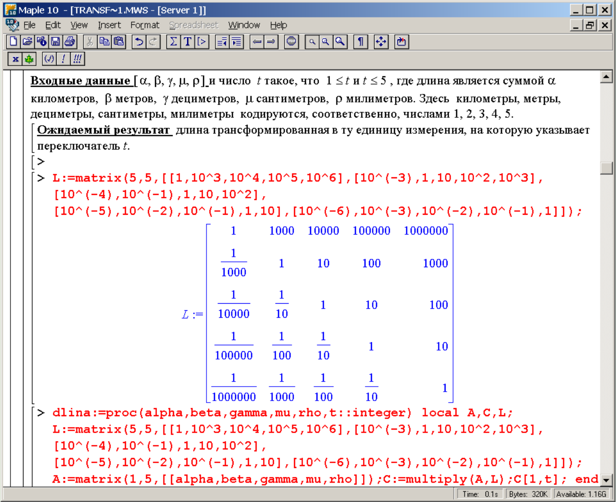
- $A^k = C^{-1}B^kC$;
- $tr(A) = tr(B)$;
- $det(A) = det(B)$;
- *характеристические многочлены подобных матриц совпадают;*
- *Если одна из двух подобных матриц обладает одним из свойств: нильпотентность, идемпотентность, инволютивность, периодичность, то и вторая обладает соответствующим свойством.*

Возникает следующая задача по данной матрице A найти как можно более простую матрицу B и трансформирующую матрицу C такую, что $A = C^{-1}BC$. Эта задача имеет чрезвычайное значение в вычислениях с матрицами. Решение очень сложное и будет достигнуто при изучении темы линейные операторы.

Пример. В swf-ролике цитированном на странице 10 в меню трансформеры имелись инструменты для трансформации мер длины, площади, времени и т.п. Например допустим вам необходимо трансформировать длину выраженную в смешанных единицах

$$\alpha\,\mathrm{km} + \beta\,\mathrm{m} + \gamma\,\mathrm{dm} + \delta\,\mathrm{sm} + \rho\,\mathrm{mm}$$

в одну из единиц измерения *km, m, dm, sm, mm*. Обозначим через t натуральное число $1 \leq t \leq 5$, говорящее о положении выбранной единицы измерения в последнем списке.



Легко составить матрицу L о взаимоотношениях этих единиц измерения как на рисунке. Если обозначить через A матрицу строку $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho)$, то для решения задачи находим матрицу строку AL и затем находим её t-й элемент. Интересно заметить, что на рисунке приведен полный код в Maple для решения этой задачи. Программист, кстати хорошего класса, взялся программировать эту задачу во Flash используя только оператор ветвления. Исписав десяток страниц кода и так и не отладив свою программу, он обратился ко мне, и посмотрев Maple-программу, реализовал её во Flash.

Задача. При просмотре боев бусидо часто составляет некоторую проблему составляет английская мера длин и весов. Построить матрицы перевода английских мер длины и массы в меры СИ. Например рост бойца 5 футов 11 дюймов. Сколько это будет см?

Литература на все сложные случаи – фундаментальная монография Хорна и Джонсона [6]. Элементарная книга – пособие Скорнякова [5].

Title Page
Contents
Page 62 of 149
Go Back
Close

1.11. Алгоритм деления с остатком для полиномов от одного неизвестного

С простейшими полиномами $f(x) = ax+b = b+ax$ и $g(x) = ax^2+bx+c = c+bx+ax^2$ студенты встречались ещё в школе. Полиномом (синоним многочленом) от одной неизвестной над полем K называется выражение вида $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$, где n – натуральное число и коэффициенты a_i лежат в поле K. Эта запись называется записью многочлена по возрастающим степеням неизвестного. Всякое число из K является многочленом. Используется и запись многочлена по убывающим степеням неизвестного $f(x) = d_0x^n + d_1x^{n-1} + \cdots + d_n = \sum_{i=0}^{n} d_ix^{n-i}$. Кроме тривиального случая $f = 0$ в этой записи предполагается, что $d_0 \neq 0$ и тогда число n называется степенью многочлена f и обозначается через $deg(f)$. Над двумя полиномами $f(x), g(x)$ определяются естественным образом операции сложения и умножения. Если $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ и $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$, то $f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i$. Если $f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ и $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$, то $f(x) \cdot g(x) = c_0x^{n+m} + c_1x^{n+m-1} + \cdots + c_{n+m}$, где $c_k = \sum_{i+j=k} c_kx^{n+m-k}$. В частности $c_0 = a_0b_0$ и поэтому произведение ненулевых полиномов само ненулевой полином и степень произведения полиномов равна сумме степеней сомножителей. Множество всех многочленов от одной неизвестной над полем K будет обозначаться через $K[x]$.

Quiz Перемножить многочлены

$$(2x^2 - 3x + 4)(x^2 + 5x - 2) = \square x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x + \square$$

Ans

Clear

Теорема 16 *Множество многочленов $K[x]$ относительно операций сложения и умножения многочленов образует коммутативное и ассоциативное кольцо с единицей без делителей нуля.*

Во многом свойства кольца $(K[x], +, \cdot, =)$ похожи на свойства кольца целых чисел. Оба кольца принадлежат к классу евклидовых колец, т.е. колец в которых имеется деление с остатком. Если m, n целые числа такие, что $n \neq 0$, то существуют и единственны целое число q и неотрицательное целое число $r < |n|$ такие, что $m = nq + r$. При этом число q называется частным, а r остатком от этого деления.

Теорема 17 *Если $f(x), g(x) \in K[x]$ и $g(x) \neq 0$, то существуют и единственны многочлены $q(x), r(x) \in K[x]$ такие, что $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ и $deg(r(x)) < deg(g(x))$.*

Практически деление с остатком одного многочлена на другой на основании доказанной теоремы проводится углом. Кстати отсюда следует обоснование деления углом натуральных чисел в арифметике. Действительно, к примеру, надо разделить с остатком число 3289 на число 48. Тогда представим оба числа в десятичной записи $3289 = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 9, \quad 48 = 4 \cdot 10 + 8$. Рассмотрим многочлены $f(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 9, \quad g(x) = 4 \cdot x + 8$. Тогда достаточно разделить углом первый многочлен на второй $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$. Подставив сюда вместо x число 10, получим $3289 = f(10) = g(10) \cdot q(10) + r(10)$.

Часто приходится делить многочлен $f(x)$ на линейный двучлен $x - c$. В этом случае более эффективно воспользоваться схемой Горнера. Пусть $f(x) = a_0^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$. Ищем частное в виде $q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \cdots + b_{n-2} x + b_{n-1}$. Тогда $f(x) = (x - c)q(x) + r$, где r многочлен нулевой степени, т.е. число. Подставляя сюда $f(x)$, $g(x)$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях получим

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1 - cb_0, a_2 = b_2 - cb_1, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1} - cb_{n-2}, a_n = r - cb_n$$

Переписав эти равенства относительно b_i , получим схему Горнера:

$$b_0 = a_0, b_1 = a_1 + cb_0, b_2 = a_2 + cb_1, \ldots, b_{n-1} = a_{n-1} + cb_{n-2}, r = a_n + cb_{n-1}$$

Трудно найти теорему с более легким доказательством, чем следующая и вместе с тем настолько часто использующуюся

Теорема 18 (Безу) *Число c является корнем многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится на многочлен $x - c$, то есть $f(x) = (x - c)q(x)$.*

Определение 29 *Число c называется k-кратным корнем полинома $f(x)$, если $f(x) = (x - c)^k \cdot q(x)$, где число c не является корнем полинома $q(x)$*

Теорема 19 *Если c является k-кратным корнем полинома $f(x)$, то c является $(k - 1)$-кратным корнем производной $f'(x)$.*

С помощью схемы Горнера нетрудно проверять корни полинома на кратность. Иногда необходимо разложить полином $f(x)$ по другому основанию, т.е. найти разложение вида

$$f(x) = A_0(x-c)^n + A_1(x-c)^{n-1} + A_2(x-c)^{n-2} + \cdots + A_{n-1}(x-c) + A_n.$$

Эту задачу можно решить тремя способами:

- Методом неопределенных коэффициентов. Для нахождения $n+1$ коэффициента $A_0, A_1, \ldots, A_n$ необходимо составить СЛАУ с $n+1$ неизвестным. Для генерации уравнений надо подставлять вместо x в $f(x)$ по меньшей мере $n+1$ различных значений;
- Можно разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки c

$$f(x) = f(c) + \frac{f^{(1)}(c)}{1!}\cdot(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}\cdot(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n,$$

  который для $f(x)$ окажется полиномом. Кстати из этой формулы ясно, что $A_0 = a_0, \quad A_n = f(c)$;
- Самый быстрый способ для решения задачи это делить по схеме Горнера $f(x)$ на $x-c$ получив равенство $f(x) = (x-c)q_1(x) + r_0$, далее необходимо также делить первое частное $q_1(x) = (x-c)q_2(x) + r_1$ и т.д., пока частное не станет числом $q_{n-1} = (x-c)\cdot q_n + r_{n-1}$. Нетрудно понять, что тогда

$$f(x) = q_n(x-c)^n + r_{n-1}(x-c)^{n-1} + \cdots + r_1(x-c) + r_0.$$

Title Page
Contents
Page 66 of 149
Go Back
Close

Следующее упражнение понадобится нам в другой лекции для нахождения рациональных корней полиномов с целыми коэффициентами.

Задача 4 *Пусть* $f(x)$ *полином с целыми коэффициентами (кратко пишем* $f(x) \in Z[x]$ *) и* c *– целое число. Тогда в разложении*

$$f(x) = A_0(x-c)^n + A_1(x-c)^{n-1} + A_2(x-c)^{n-2} + \cdots + A_{n-1}(x-c) + A_n$$

все коэффициенты являются целыми числами.

Чтобы отработать навык деления многочленов с остатком и схемы Горнера нужно обратиться к вложенному файлу, который в динамике показывает все этапы деления. Причина того, что мы обращаемся к отдельному файлу кроется в том, что динамика достигается как в кино: на каждое действие отдельный кадр, при этом резко увеличивается число страниц. Это разрушает систему навигации исходного файла. В прикрепленном файле при нажатии выделенного красного слова *Возврат* вы вернетесь в исходный файл. Не сохранять изменения, все равно это не удастся, на файлах стоит защита.

Запустить ли вложенный pdf-файл?

Для этого выделите правой кнопкой мыши символ кнопки и откройте внешний файл, не обращая внимания на предупреждения системы.

Title Page
Contents
Page 67 of 149
Go Back
Close

А теперь проверим, как вы усвоили алгоритмы из прикрепленного файла. Добивайтесь минимального количества промахов.

Quiz Разделить многочлен $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на многочлен $g(x) = x^2 - 3x + 1$.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 & x^2 - 3x + 1 \\
\cline{2-2}
\Box x^4 + \Box x^3 + \Box x^2 & \Box x^2 + \Box x + \Box \\
\cline{1-1}
\Box x^3 + \Box x^2 + \Box x + \Box & \\
\Box x^3 + \Box x^2 + \Box x & \\
\cline{1-1}
\Box x^2 + \Box x + \Box & \\
\Box x^2 + \Box x + \Box & \\
\cline{1-1}
\Box x + \Box &
\end{array}
$$

Ans

Ответ: $f(x) = g(x) \cdot (\Box x^2 + \Box x + \Box) + (\Box x + \Box)$

Ans

Clear

Quiz Разделить многочлен $f(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 2x + 5$ на многочлен $g(x) = x + 2$ по схеме Горнера.

	1	-3	-10	2	5
c=-2	$\Box$	$\Box$	$\Box$	$\Box$	$\Box$

Ans

Ответ: $f(x) = (x + 2)(\Box x^3 + \Box x^2 + \Box x + \Box) + \Box$

Ans

Clear

Title Page
Contents
Page 68 of 149
Go Back
Close

Quiz Разложить многочлен $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 10x + 20$ по степеням $x + 2$ по схеме Горнера.

	1	4	6	10	20
c=-2	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	
	$\square$	$\square$	$\square$		
	$\square$	$\square$			

Ans

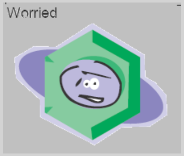
Ответ: $f(x) = \square(x+2)^4 + \square(x+2)^3 + \square(x+2)^2 + \square(x+2) + \square$

Ans

Clear

Литература – книга Куроша [3].

1.12. Наибольший общий делитель полиномов



Определение 30 *Говорим, что полином $f(x)$ делится на полином $g(x)$, если существует полином $q(x)$ такой, что $f(x) = g(x) \cdot q(x)$. Другими словами остаток от деления $f(x)$ на $g(x)$ равен нулю.*

Свойства делимости многочленов

Свойства делимости многочленов похожи на свойства делимости целых чисел и эта аналогия позволяет проще запомнить их.

- Если полином $f(x)$ делится на полином $g(x)$ и полином $g(x)$ делится на полином $h(x)$, то полином $f(x)$ делится на полином $h(x)$;
- Если полином $f(x)$ делится на полином $h(x)$ и полином $g(x)$ делится на полином $h(x)$, то полином $f(x) \pm g(x)$ делится на полином $h(x)$;
- Если полином $f(x)$ делится на полином $h(x)$ и полином $g(x)$ делится на полином $h(x)$ и $u(x), v(x)$ – произвольные многочлены, то полином $f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x)$ делится на полином $h(x)$;

- Если полином $f(x)$ делится на полином $g(x)$ и $c \neq 0$, то $f(x)$ делится на многочлен $c \cdot g(x)$;
- Если полином $f(x)$ делится на полином $g(x)$ и полином $g(x)$ делится на полином $f(x)$, то найдется константа c такая, что $f(x) = c \cdot g(x)$.

Вспомним понятие наибольшего общего делителя двух целых чисел. Поясним на примере,пусть нам заданы числа -24 и 36. У первого числа делителями являются числа из списка $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ и их противоположные. Для второго числа делителями являются числа из списка $1, 2, 3.4.6, 9, 12, 18, 36$. Общими делителями заданных чисел являются числа из списка $1, 2, 3, 4, 6, 12$ и им противоположные. Наибольшим общим делителем $gcd(-24, 36)$ признается число 12 просто в силу упорядоченности кольца целых чисел. Но как по аналогии дать определение наибольшего общего делителя двух многочленов? Для многочленов нет естественного хорошего линейного упорядочения. Если внимательнее присмотреться к рассмотренному числовому примеру можно заметить, что 12 и -12 являются общими делителями заданных чисел, которые в свою очередь делятся на любой другой общий делитель этих чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

Определение 31 *Наибольшим общим делителем двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется многочлен $gcd(f(x), g(x)) = d(x)$ такой, что*

- *$d(x)$ является общим делителем $f(x)$ и $g(x)$;*
- *$d(x)$ делится на любой другой общий делитель $f(x)$ и $g(x)$;*
- *старший коэффициент $d(x)$ равен 1.*

Делители многочленов определяются с точностью до числовых множителей и поэтому последнее условие определения необходимо для однозначного нахождения наибольшего общего делителя.

1.12.1. Алгоритм Евклида

Для поиска наибольшего общего делителя двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ поделим с остатком $f(x)$ на $g(x)$, затем $g(x)$ на первый остаток, после первый остаток делим на второй и т.д. пока очередной остаток не разделится на следующий нацело. Этот момент обязательно наступит, так как степени остатков уменьшаются и само позднее через $deg(g(x))$ шагов процесс закончится.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x)\cdot q_0(x) + r_0(x)\\
g(x) &= r_0(x)\cdot q_1(x) + r_1(x)\\
r_0(x) &= r_1(x)\cdot q_2(x) + r_2(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
r_{k-2}(x) &= r_{k-1}(x)\cdot q_k(x) + r_k(x)\\
r_{k-1}(x) &= r_k(x)\cdot q_{k+1}(x)
\end{aligned}
$$

Теорема 20 *Наибольший общий делитель $d(x) = gcd(f(x), g(x))$ равен $c \cdot r_k(x)$. где число c подбирается так, чтобы старший коэффициент многочлена $c \cdot r_k(x)$ был бы равен* 1.

Пример. Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x) = x^4 + x^3 - 3 * x^2 - 4 * x - 1$ и $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$. Применим пакет *polynom* в Latex для машинного построения полиномов из алгоритма Евклида

Применяем алгоритм Евклида

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1 &= \big(x^3 + x^2 - x - 1\big) \cdot x + \big(-2x^2 - 3x - 1\big) \\ x^3 + x^2 - x - 1 &= \big(-2x^2 - 3x - 1\big) \cdot \big(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\big) + \big(-\tfrac{3}{4}x - \tfrac{3}{4}\big) \\ -2x^2 - 3x - 1 &= \big(-\tfrac{3}{4}x - \tfrac{3}{4}\big) \cdot \big(\tfrac{8}{3}x + \tfrac{4}{3}\big) + 0 \end{aligned}$$

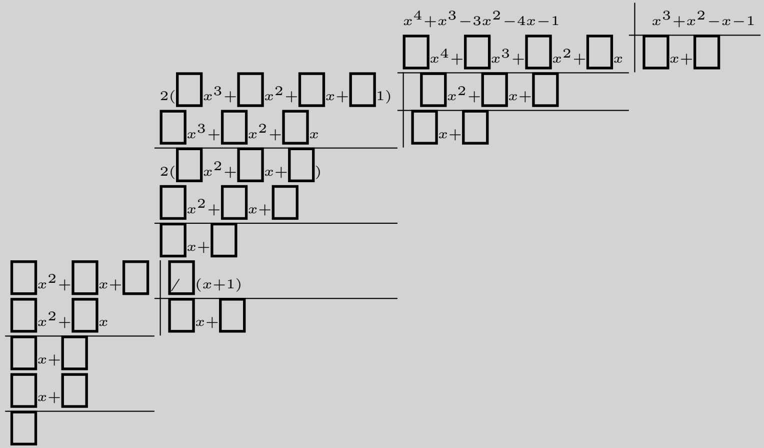
Из этой записи видно, что последним многочленом в процессе, на который нацело делится предыдущий многочлен, является многочлен

$$-\frac{3}{4}x - -\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}(x + 1).$$

Следовательно, ответ: $\boxed{gcd(f(x), g(x)) = x + 1}$

Замечание. В примере деление проводилось точное и в конце множитель $-\frac{3}{4}$ отбрасывался. Человек не машина, которая с легкостью вычисляет с любыми числами. Как избежать дробей в алгоритме Евклида? Ответ очень прост: если $f(x) = g(x)q(x)+r(x)$, то $cf(x) = g(x)(cq(x))+cr(x)$ и $f(x) = (cg(x))(c^{-1}q(x))+r(x)$ при $c \neq 0$. При этих преобразованиях остатки не меняются, либо меняются несущественно. Такие преобразования допустимы при нахождении наибольшего общего делителя на любом этапе. Эти простые замечания позволяют избежать вычислений с дробями для нахождения *gcd* для многочленов с целыми коэффициентами, что немаловажно для человека и несущественно для компьютера..

Quiz Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ и $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.



Ans

Ответ: $gcd(f(x), g(x)) = \square x + \square$

Ans

Clear

Важную роль в расширениях полей играет следующая

Теорема 21 *Если* $d(x) = gcd(f(x), g(x))$, *то существуют многочлены* $u(x), v(x) \in K[x]$ *такие, что* $d(x) = f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x)$ *и* $deg(u(x)) < deg(g(x))$, $deg(v(x)) < deg(f(x))$.

Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен 1.

Факт 8 *Многочлены* $f(x)$ *и* $g(x)$ *взаимно просты тогда и только тогда, когда существуют многочлены* $u(x), v(x)$ *такие, что* $f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x) = 1$.

Теорема 22

- *Если многочлен* $f(x)$ *взаимно прост с* $h(x)$ *и* $f(x) \cdot g(x)$ *делится на* $h(x)$, *то* $g(x)$ *делится на* $h(x)$;
- *Если многочлен* $f(x)$ *делится на многочлены* $g(x)$ *и* $h(x)$, *причем* $g(x)$ *и* $h(x)$ *взаимно просты, то* $f(x)$ *делится на многочлен* $g(x) \cdot h(x)$.

В решении следующей задачи студент получит очень полезный совет.

Start

1. В книге "Сборник задач по алгебре под ред. Кострикина, М. Факториал, 1995" приводится задача 2502k: Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ и $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ и в качестве ответа указывается многочлен $d(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x - 1$. Является ли этот ответ реальным? *Ответы:*

a) ☐ да, b) ☐ нет.

End Score: Correct

Литература: книга Куроша [3].

1.13. Корни многочленов

Многочлен первой степени $f(x) = a_0x + a_1$ независимо от природы поля имеет один корень $x = -a_1/a_0$. Для полинома второй степени $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ дело сложнее. Из формулы корней

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0} \tag{1.13.1}$$

получаем, что в зависимости от детерминанта в поле R не более двух корней и в поле C имеется ровно два корня $f(x)$ (возможно совпадающих).

Теорема 23 *Для любого поля K полином $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \in K[x]$ степени n может иметь не более n корней с учетом их кратности в любом поле $F \supset K$. Если $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ корни многочлена $f(x)$ в поле F, то*

$$f(x) = a_0(x - \rho_1)(x - \rho_2)\dots(x - \rho_n).$$

Доказательство проводится тривиальной индукцией.

1.13.1. Формулы Виета

Пусть $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ многочлен со старшим коэффициентом 1 и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ все его корни. Тогда

$$\begin{cases} a_1 = -\sum_i \lambda_i \\ a_2 = \sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j \\ a_3 = -\sum_{i<j<k} \lambda_i\lambda_j\lambda_k \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n = (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i \end{cases}$$

Start

1. Найти сумму квадратов корней многочлена $x^3 - 5x^2 + 4x + 1$.

a) ☐ 0 , b) ☐ 20 , c) ☐ 8.

End Score: Correct

В случае конечного поля K корни многочлена $f(x) \in K[x]$ в K могут на основании доказанной теоремы 23 находиться, в конце концов, конечным перебором делением $f(x)$ на всевозможные одночлены $x - \rho$, где $\rho \in K$. Для бесконечных полей K задача нахождения корня многочлена $f(x)$ является одной из самых востребованных в приложениях, но вместе с тем очень нетривиальной. Имеются сведения, что формула корней квадратного уравнения (1.13.1) была известна в глубокой древности 2 – 3 тысячи лет назад, а точная формула решения в радикалах уравнений третьей и четвертой степени получена по этим меркам совсем недавно в 16-ом веке Кардано и Тарталья. Любопытные могут взглянуть на эти формулы в книгу [3]. После Кардано и Тарталья многие математики бились над проблемой решения уравнений пятой и выше степени, пока в районе 1825 – 1830 г. два великих юных гения, независимо во Франции Эварист Галуа, и Норвегии Нильс Абель, не доказали, что общего алгоритма вычисления в радикалах корней уравнений пятой степени и выше не существует. Решение Галуа привело к появлению абстрактных алгебраических структур и на столетия вперед определило важнейшие направления развития алгебры.

Мы предложим некоторые методы, которые в частных случаях могут облегчить поиск корней полинома.

1.13.2. Отделение кратных корней.

Допустим, что полином $f(x)$ имеет кратные корни

$$f(x) = a_0(x-\lambda_1)^{k_1}(x-\lambda_2)^{k_2}\dots(x-\lambda_s)^{k_s},$$

где все числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ различны. Мы делаем анализ и на самом деле корни многочлена нам неизвестны. Как найти многочлен $g(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_s)$, не имеющий кратных корней, все корни которого являются корнями $f(x)$? Наше решение основано на теореме 19. По этой теореме
$f'(x) = (x-\lambda_1)^{k_1-1}(x-\lambda_2)^{k_2-1}\dots(x-\lambda_s)^{k_s-1}\cdot h(x)$, где $h(x)$ взаимно прост с $f(x)$. Отсюда наибольший общий делитель $d(x) = gcd(f(x), f'(x))$ равен
$(x-\lambda_1)^{k_1-1}(x-\lambda_2)^{k_2-1}\dots(x-\lambda_s)^{k_s-1}$. Следовательно, $f(x) = a_0\cdot d(x)\cdot g(x)$ и задача выделения кратных корней решена.

Quiz Отделить кратные множители многочлена $f(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$.
Решение. Находим производную $f'(x) = 5(x^4 - 6x^2 - 8x - 3) =: 5g(x)$ и затем наибольший общий делитель полинома и производной.

$$\begin{array}{r|l}
x^5-10x^3-20x^2-15x-4 & x^4-6x^2-8x-3 \\
\square x^5+\square x^3+\square x^2+\square x & \square x+\square \\
\hline
\square x^3+\square x^2+\square x+\square &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
\square x^4+\square x^2+\square x+\square & \cancel{\square}(x^3+\square x^2+\square x+\square) \\
\square x^4+\square x^3+\square x^2+\square x & \square x+\square \\
\hline
\square x^3+\square x^2+\square x+\square & \\
\square x^3+\square x^2+\square x+\square & \\
\hline
\square &
\end{array}$$

Ans

Следовательно, $d(x) = gcd(f(x), g(x)) = \square x^3 + \square x^2 + \square x + 1 = (\square x + \square)^3$ Ans

Clear

Так как частные в этом процессе не искажались до получения остатка более чем один раз при каждом делении, то эти деления пригодны для нахождения разложения. Имеем

$$g(x) = (x+1)^3(x-3)$$

$$f(x) = g(x)x-4(x+1)^3 = (x+1)^3(x-3)x-4(x+1)^3 = (x+1)^3[(x-3)x-4] = (x+1)^4(x-4)$$

Ответ: $f(x) = (x+1)^4(x-4)$

Title Page
Contents
Page 80 of 149
Go Back
Close

1.13.3. Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами.

Если многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ имеет целые коэффициенты, то совершенно точно можно найти все рациональные корни $f(x)$:

Теорема 24 *Если $f(x) \in Z[x]$ и несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем $f(x)$, то*

- *p делитель a_n;*
- *q делитель a_0;*
- *$(\forall m \in Z)[(p - mq)|f(m)]$, в частности $p - q$ делитель $f(1)$ и $p + q$ делитель $f(-1)$.*

Эта теорема отбирает в кандидаты в корни многочлена конечное число чисел. Третий пункт служит резкому сужению круга таких кандидатов. В доказательстве этого пункта понадобится упражнение 4. Проверку числа на корень многочлена удобно производить по схеме Горнера.

Quiz Найти рациональные корни многочлена $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$.
Решение. Кандидатами в рациональные корни $f(x)$ будут те несократимые дроби $\frac{p}{q}$ для которых $p \in \{\pm1, \pm2, \pm3 \pm 4, \pm6, \pm12\}$ и $q \in \{1, 2, 3, 6\}$. Эти числа должны еще выдержать два испытания $p + q$ является делителем $f(1) = 4$ и $p - q$ делитель числа $f(-1) = 18$. Чертим отборочную таблицу, заполненую знаками плюс или минус и цифрами ±1, так что дроби $\frac{p}{q}$ соответствует ячейка на пересечении строки содержащей q и столбца содержащего p. Вначале на всех сократимых местах и в точках $1, -1$ ставим минусы. Проставьте число 1 в клетку с квадратиком, если соответствующее

число выдерживает оба испытания и -1, в противном случае.

$q \setminus p$	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	6	-6	12	-12
1	-	-	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
2	$\square$	$\square$	-	-	$\square$	$\square$	-	-	-	-	-	-
3	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	-	-	$\square$	$\square$	-	-	-	-
6	$\square$	$\square$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Ans

Следовательно, кандидатами в корни после этой фильтрации остаются только числа

$$\square,\ \square,\ \frac{\square}{\square},\ \frac{\square}{\square}$$

Ans

Какое из этих чисел действительно является корнем, установим по схеме Горнера. По теореме Безу число c является корнем многочлена лишь если остаток от деления этого многочлена на $x-c$ равен нулю. Последовательно делим $f(x)$ на $x-c$, где c числа найденного списка. Если остаток не равен нулю, то соответствующую строку в упор не видим и это c не корень. Напротив, если остаток равен нулю, то это c корень и для проверки остальных чисел надо частное делить на следующую скобку $x-c$.

	6	19	-7	-26	12
$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
$\frac{\square}{\square}$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	

Ans

Title Page
Contents
Page 82 of 149
Go Back
Close

Отсюда следует, что

$$f(x) = \left(x + \square\right)\left(x - \frac{\square}{\square}\right)\left[\square x^2 + \square x + \square\right]$$

Ans

И наконец, завершая марафон, раскрываем инкогнито, два рациональных корня $f(x)$, два других являются иррациональными корнями квадратного трехчлена в последней скобке.

$$\square, \quad \frac{\square}{\square}.$$

Ans

Clear

1.13.4. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.

Одним из главных достижений математики 18-го века была теорема Гаусса о существовании комплексного корня у любого многочлена с комплексными коэффициентами. Эта теорема даже получила название основной теоремы алгебры. Сейчас это достаточно рядовая теорема, в принципе доступная студентам. Но все же все имеющиеся доказательства этой теоремы используют непрерывность многочлена как функции комплексного переменного, существование точки минимума на компакте и т.п. В курсе математического анализа такие понятия возникают значительно позднее и, поэтому эта теорема, пожалуй единственная формулируемая нами без доказательства.

Следствие 5 *Если $f(x) \in C[x]$ многочлен n-ой степени, то $f(x)$ имеет ровно n корней в C с учетом их кратностей.*

1.13.5. Корни многочленов с вещественными коэффициентами.

Теорема 25 *Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ многочлен с вещественными коэффициетнтами и $\alpha \in C - R$ корень $f(x)$ кратности k. Тогда $\bar{\alpha}$ также корень многочлена $f(x)$ кратности k.*

Отсюда следует, что всякий многочлен с вещественными коэффициентами разлагается в произведение многочленов первой и (или) второй степени с вещественными коэффициентами.

1.13.6. Интерполяция

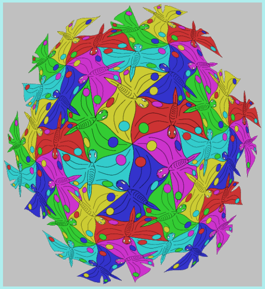
Пусть на заданы n различных чисел $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ и произвольные числа $b_0, b_1, \ldots, b_n$. Требуется найти многочлен $f(x)$ такой, что $f(\rho_i) = b_i$ для $1 \leq i \leq n$. Нетрудно понять, что следующий многочлен $n-1$-ой степени обладает требуемыми свойствами

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{i-1})(x-\rho_{i+1})\ldots(x-\rho_n)}{(\rho_i-\rho_1)(\rho_i-\rho_2)\ldots(\rho_i-\rho_{i-1})(\rho_i-\rho_{i+1})\ldots(\rho_i-\rho_n)} \cdot b_i$$

Эта формула называется интерполяционной формулой Лагранжа. Эта формула ставит крест на эмпирических рассуждениях некоторых практиков. Они проведя сотни измерений и чертя график, вдруг обнаруживают, что их график похож скажем на график синуса. Не следует спешить кричать, что найден новый закон изменения этих параметров в виде графика синуса. Через заданное конечное число точек пройдет и многочлен и его предположение нуждается в строгой проверке.

Литература: книга Куроша [3].

1.14. Метод Штурма



Пусть $f(x)$ многочлен с вещественными коэффициентами. Нас интересует сколько вещественных корней имеет $f(x)$ в интервале (a, b). Простой признак существования корня в этом интервале – это разные знаки $f(x)$ на концах интервала (a, b). Но четкий критерий количества корней многочлена в интервале непрост и принадлежит Э. Штурму. Вначале упростим задачу считаем, что $f(x)$ не имеет кратных корней. Как этого добиться объяснено в предыдущем разделе.

Если нам задана конечная упорядоченная последовательность вещественных чисел, то число перемен знаков в этой системе подсчитывается следующим образом: выбрасываются все нули в этой последовательности, затем от оставшихся чисел оставляют только знаки и соседство разных знаков называется переменой знаков. Например, системе чисел $-3, -5, 0, -1, 2, 4, -5, -6, 0$ соответствует система знаков $-, -, -, +, +, -, -,$ в которой имеется две перемены знаков.

Title Page
Contents
Page 85 of 149
Go Back
Close

1.14.1. Система Штурма

Упорядоченная последовательность многочленов $f_0(x), f_1(x), \dots, f_k(x)$ называется системой Штурма для многочлена $f(x)$, если

- $f(x) = f_0(x)$;
- $f_k(x)$ не имеет вещественных корней;
- Соседние многочлены системы $f_i(x), f_{i+1}(x), \quad 0 \le i \le k-1$ не имеют общих вещественных корней.
- Если α вещественный корень вспомогательного многочлена $f_i(x)$ для $1 \le i \le k-1$, то $f_{i-1}(\alpha) \cdot f_{i+1}(\alpha) < 0$.
- Если α вещественный корень многочлена $f_0(x)$, то произведение $f_0(x)f_1(x)$ возрастает в достаточно малой окрестности α.

Теорема 26 *Для любого многочлена с вещественными коэффициентами, не имеющего кратных корней существует система Штурма.*

Построение системы Штурма похоже на алгоритм Евклида. Вначале полагаем

$$f_0(x) = f(x).$$
$$f_1(x) = f'(x)$$

Затем делим $f_0(x)$ на $f_1(x)$ с остатком и остаток с обратным знаком назовем $f_2(x)$ и т.д.

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f_1(x)\cdot q_0(x) - f_2(x)\\ f_1(x) &= f_2(x)\cdot q_1(x) - f_3(x)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_{i-1}(x) &= f_i(x)\cdot q_{i-1}(x) - f_{i+1}(x)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_{k-1}(x) &= f_k(x)\cdot q_{k-1}(x) \end{aligned}$$

1.14.2. Теорема Штурма

Более подробно рассмотрим ключевые моменты метода, используя возможности электронного документа. Через $W(\alpha)$ будем обозначать число перемен знаков в таблице чисел системы Штурма $f_0(\alpha), f_1(\alpha), \ldots, f_k(\alpha)$ многочлена $f(x)$.

Теорема 27 *Если $f(x)$ многочлен с вещественными коэффициентами, не имеющий кратных корней, и числа $a < b$ не являются корнями $f(x)$, то число вещественных корней многочлена в интервале (a, b) равно $W(a) - W(b)$.*

Функция $W(x)$ принимает натуральные значения, поэтому может изменяться скачками. Так как многочлены являются непрерывными функциями, то точки в которых могут происходить такие скачки обязательно являются корнями одного из многочленов системы Штурма. Так как каждый многочлен имеет только конечное число корней, то число точек в которых происходят скачки конечно. Пусть x меняется от $-\infty$ и встречается одна из таких точек α.

Случай 1. α **корень вспомогательного многочлена** $f_i(x)$, $\quad i \geq 1$. Выберем достаточно маленькое положительное число ε такое что в интервале $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ функции $f_{i-1}(x), f_{i+1}(x)$ имеют постоянный знак. Определим как меняется значение локальной части функции перемены знака $W'(\alpha-\varepsilon)$ и $W'(\alpha+\varepsilon)$ для функций $f_{i-1}(x), f_i(x), f_{i+1}(x)$. Заполним таблицу

x	$f_{i-1}(x)$	$f_i(x)$	$f_{i+1}(x)$	$W'(x)$
$\alpha-\varepsilon$	$+$ / $-$	$-$	$-$ / $+$	1
	$+$ / $-$	$+$	$-$ / $+$	1
$\alpha+\varepsilon$	$+$ / $-$	$+$	$-$ / $+$	1
	$+$ / $-$	$-$	$-$ / $+$	1

Комментарии к таблице. Одинаковым набором трех цветов в точках до и после α указаны возможные ситуации до и после корня полинома $f_i(x)$. Функция $f_i(x)$ в указанной окрестности может менять знак с минуса на плюс или наоборот. В свою очередь соседи слева и справа от $f_i(x)$ постоянны по знаку и противоположны друг другу. Тогда до точки α четыре возможности и после точки α соответствующие четыре возможности. В любом случае изменений в числе перемен знаков нет.

Случай 1. α **корень многочлена** $f_0(x)$,

Title Page
Contents
Page 88 of 149
Go Back
Close

Выберем достаточно маленькое положительное число ε такое что в интервале $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ функции $f_1(x)$ имеет постоянный знак. Заполним таблицу поведения фрагмента $W'(X)$ описывающего перемены знаков в подсистеме $f_0(x), f_1(x)$ до и после α.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$W'(x)$
$\alpha-\varepsilon$	$-$	$+$	1
	$+$	$-$	
$\alpha+\varepsilon$	$+$	$+$	0
	$-$	$-$	

Комментарий к таблице. Одинаковым набором двух цветов указаны ситуации до и после корня. Так как $f(x)$ не имеет кратных корней, то в окрестности любого своего корня эта функция либо возрастает, либо убывает (график не может касаться оси абцисс). По последнему свойству многочленов системы Штурма такое поведение $f_0(x)$ может сочетаться только с тем поведением $f_1(x)$, который отражен в таблице. В итоге при проходе корня теряется одна перемена знаков. Следовательно функция $W(x)$ может только убывать и изменения в этой функции происходят лишь в точках являющихся корнями $f(x)$. Следовательно число корней $f(x)$ в интервале (a, b) равно $W(a) - W(b)$.

Теорема доказана.

Алгоритм примененный в доказательстве этой теоремы вполне эффективен и пригоден для приближенного подсчета корней в комбинации с методом половинного де-

Title Page
Contents
Page 89 of 149
Go Back
Close

ления.

Quiz Отделить корни многочлена $f(x) = x^3 - 3x - 1$ методом Штурма .

Решение.

$f_0(x) = x^3 - 3x - 1$ $f_1(x) = \frac{1}{3} f'(x) = x^2 - 1$

$$\begin{array}{l|l} x^3-3x-1 & x^2-1 \\ \cline{2-2} \square x^4 + \square x & \square x + \square \\ \hline \square x + \square & \end{array}$$

Ans

Следовательно, $f_2(x) = 2x + 1$

$$\begin{array}{l|l} 2(x^2-1) & \square x + \square \\ \cline{2-2} \square x^2 + \square x & \square x + \square \\ \hline \square(\square x + \square) & \\ \square x + \square & \\ \hline \square & \end{array}$$

Ans

Следовательно, $f_3(x) = 3$. Строим теперь таблицу Штурма для локализации корней. Вместо знаков + или - проставляйте числа +1 или -1, это требование Java Script.

Title Page
Contents
Page 90 of 149
Go Back
Close

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$W(x)$
$-\infty$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
∞	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
0	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
-1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
-2	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
1	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
2	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$

Ans

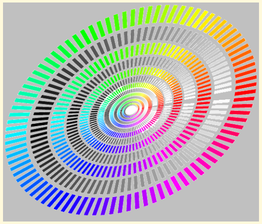
Ответ: три корня в интервалах$(\square,\square)\cup(\square,\square)\cup(\square,\square)$

Ans

Clear

Литература: книга Куроша [3].

1.15. Системы полиномиальных уравнений



Полиномом от n переменных над полем K называется конечная алгебраическая сумма одночленов вида $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, где $a \in K$ и $k_1, k_2, \dots, k_n \in N$. Множество всех полиномов от n переменных над полем K будет обозначаться через $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ полином и x_i одна из переменных, то слагаемые в f можно записать по убыванию степеней x_i

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_0(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)x_i^{m_i} + \varphi_1(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)x_i^{m_i-1} + \dots \\ \dots + \varphi_{m_i-1}(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)x_i + \varphi_{m_i}(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \end{aligned}$$

при этом число m_i называются степенью многочлена по переменной x_i и обозначается через $deg_{x_i}(f)$. Коэффициенты в этом разложении сами являются полиномами от остальных переменных.

Бухбергер вначале 70-х годов 20-го века в своей диссертации опубликовал метод решения полиномиальных уравнений, получивший имя его научного руководителя – метод Гребнера. Этот метод оказался очень эффективным и быстрым, легко программируемым. Идейно метод Гребнера является обобщением метода Гаусса решения СЛАУ, тем удивительней что он открыт относительно недавно.

Title Page
Contents
Page 92 of 149
Go Back
Close

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ g_2(0, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ g_3(0, 0, x_3, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(0, 0, \ldots, x_m, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Необходимо преобразовать систему полиномиальных уравнений (не потеряв корни) к ступенчатой системе полиномиальных уравнений. Обычные СЛАУ также являются системами полиномиальных уравнений и для них заявленная цель достигается методом Гаусса.

Преобразования Гребнера

В системе полиномиальных уравнений допускаются преобразования следующего вида:

- перестановка уравнений местами;
- умножение любого из уравнений системы на произвольный ненулевой многочлен $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
- прибавление к одному из многочленов другого умноженного на любой многочлен.

Заметим, что в отличие от преобразований Гаусса, преобразования Гребнера не эквивалентные, множество корней преобразованной системы, может измениться, но обязательно содержит решения исходной системы.

Лемма 3 *Если у нас имеется система двух полиномиальных уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases},$$

то её можно свести преобразованиями Гребнера к виду

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ g_2(0, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases},$$

Доказательство ведется постепенным снижением степени $deg_{x_1}(f_i)$ с помощью преобразований Гребнера. Отсюда общий результат для произвольных систем полиномиальных уравнений следует моментально. Решения ступенчатой системы следует ещё проверить, удовлетворяют ли они исходной системе.

Пример 7 *Решить систему полиномиальных уравнений*

$$\begin{cases} y^2 - 7xy + 4x^2 + 13x - 2y - 3 & = 0 \\ y^2 - 14xy + 9x^2 + 28x - 4y - 5 & = 0 \end{cases}$$

Решение. Запишем указанные уравнения как полиномы от y с коэффициентами из $R[x]$:

$$\begin{cases} y^2 - (7x + 2)y + (4x^2 + 13x - 3) & = 0 \\ y^2 - (14x + 4)y + (9x^2 + 28x - 5) & = 0 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим уравнение первой степени относительно y. Скомпоновав с исходным первым уравнением получим

$$\begin{aligned}(7x+2)y-(5x^2+15x-2)&=0\\ y^2-(7x+2)y+(4x^2+13x-3)&=0\end{aligned}$$

Умножив первое уравнение на y, а второе на $(7x+2)$ мы уравняем коэффициенты при y^2 эти уравнения получим еще одно уравнение первой степени относительно y. Скомпонуем с первым полученным уравнением первой степени относительно y.

$$\begin{aligned}(44x^2+13x+6)y-(28x^3+99x^2+5x-6)&=0\\ (7x+2)y-(5x^2+15x-2)&=0\end{aligned}$$

Теперь уравняем коэффициенты при y. Для этого домножим первое уравнение на $(7x+2)$, а второе на $(44x^2+13x+6)$ и вычтем полученные уравнения. Получим уравнение не содержащее y

$$24x^4-24x^3-96x^2+96x=0$$

Исходная система путем преобразований Гребнера приводится к ступенчатому виду

$$\begin{cases} y^2-(7x+2)y+(4x^2+13x-3) &= 0\\ 24x^4-24x^3-96x^2+96x &= 0\end{cases}$$

Последнее уравнение от одной переменной легко решается

$$24x(x^3-x^2-4x+4)=24x[x(x^2-4)-(x^2-4)]=24x(x^2-4)(x-1)=24x(x-1)(x-2)(x+2)$$

Итак $x\in\{0,1,2,-2\}$. Подставляя эти значения в первое уравнение, получаем:

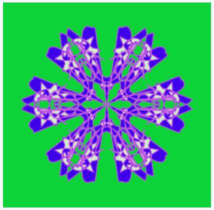
- Если $x = 0$, то $y^2 - 2y - 3 = 0$. Откуда $y \in \{3, -1\}$;
- Если $x = 1$, то $y^2 - 9y + 14 = 0$. Откуда $y \in \{2, 7\}$;
- Если $x = 2$, то $y^2 - 16y + 39 = 0$. Откуда $y \in \{3, 13\}$;
- Если $x = -2$, то $y^2 + 12y - 13 = 0$. Откуда $y \in \{-13, 1\}$.

Подставляя эти числа и во второе уравнение, убеждаемся, что решением являются только наборы $(-2, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ $(0, -1)$.

Раньше метод исключения неизвестных при решении пары полиномиальных уравнений выполнялся через специальный определитель – результант многочленов [3]. Любой математический профессиональный пакет прекрасно работает с многочленами. Метод Гребнера теперь включен во все современные системы компьютерной математики Maple, Mathematica, Matlab, Mathcad, став основным полиномиальным алгоритмом.

Литература: настоящая лекция.

1.16. Линейные пространства



1.16.1. Арифметические векторные пространства

Конечно студентам уже встречалось понятие вектора на плоскости или в пространстве как направленного отрезка в курсах геометрии или физики. Мы хотим прийти к общему понятию вектора аксиоматически, причем ранее известные студенту понятия станут только их частным случаем. Пусть K числовое поле. Элементы K будем называть скалярами и обозначать греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \rho, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, \dots$. Пусть $n \geq 1$ фиксированное натуральное число. Упорядоченную последовательность длины n вида $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ будем называть вектором. Векторы будут обозначаться буквами $x, y, z, a, b, c, d, a_1, a_2, \dots$ поэтому студент никогда не спутает вектор со скаляром. Два вектора $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $y = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ считаются равными лишь только, если они буквально совпадают, т.е. $\alpha_1 = \beta_1, \ \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$.

Определим сложение векторов по правилу

$$x + y = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n).$$

Определим умножение скаляра $\beta \in K$ на вектор x по правилу

$$\beta \cdot x = \beta \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta\alpha_1, \beta\alpha_2, \dots, \beta\alpha_n)$$

Множество всех векторов будет обозначаться через $(K^n, +.\odot_\lambda, =)_{\lambda \in K}$ или сокращенно через K^n. Здесь в обозначении $(K^n, +.\odot_\lambda, =)_{\lambda \in K}$ на самом деле говорится, что множество K^n рассматривается вместе с операциями сложения векторов и умножения скаляров на векторы. K^n и называется арифметическим векторным пространством над полем K.

Quiz Вычислить линейную комбинацию $a_1 - 3a_2 + 4a_3$ векторов $a_1 = (1, 2, -3)$, $a_2 = (-2, 3, -4)$, $a_3 = (4, 1, -5)$.

$$a_1 - 3a_2 + 4a_3 = \left(\square, \square, \square\right)$$

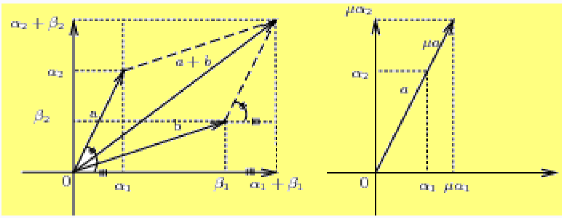
Ans

Clear

Справедливы следующие тождества в векторном пространстве K^n

$$
\begin{aligned}
&\forall x \forall y [x + y = y + x]\\
&\forall x \forall y \forall z [(x + y) + z = x + (y + z)]\\
&\exists \theta \forall x [x + \theta = x], \quad \theta \text{ нулевой элемент}\\
&\forall x \exists y [x + y = \theta], \quad \text{противоположный элемент}\\
&(\forall \lambda \in K) \forall x \forall y [\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y]\\
&(\forall \lambda \in K)(\forall \mu \in K) \forall x [(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda x + \mu x]\\
&(\forall \lambda \in K)(\forall \mu \in K) \forall x [(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)]\\
&\forall x [1 \cdot x = x \wedge 0 \cdot x = \theta].
\end{aligned}
\tag{1.16.1}
$$

На первый взгляд кажется, что понятие вектора на плоскости или в пространстве в геометрии и наше понятие вектора в R^2 или в R^3 различны. Но оказывается, что если векторы a и b имеют общее начало в начале координат и координаты концов этих векторов находятся в точках (α_1, α_2) и (β_1, β_2), то координаты конца суммы этих векторов по правилу параллелограмма, в точности, равны $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$.



Аналогично, координаты конца произведения вектора a на число μ, в точности, равны

Title Page
Contents
Page 99 of 149
Go Back
Close

$(\mu\alpha_1, \mu\alpha_2)$. Вспоминая, что векторы считаются равными, если они налагаются друг на друга при параллельном переносе, понимаем, что любой вектор в геометрии или физике равен некоторому вектору исходящему из начала координат. Тем самым мы доказали, что векторы в физике, геометрии являются частным случаем векторов из R^2 и R^3. Это собственный частный случай, так как для нас n любое натуральное число и поле K произвольное из числа тех которые мы уже знаем Q, R, C и Z_p, где p – простое число, или построим впоследствии.

1.16.2. Линейные пространства над полем

Пусть V произвольное множество, на котором задана бинарная операция $+$. Пусть K – числовое поле и любому числу $\beta \in K$ и вектору $a \in V$ однозначно сопоставлен вектор, обозначаемый через βa. Тогда $(V, +, \odot_\lambda, =)_{\lambda \in K}$ называется линейным пространством над полем K, если эти операции удовлетворяют свойствам (1.16.1) из определения арифметического линейного пространства.

Примеры линейных пространств над полем.

- Арифметическое линейное пространство K^n над полем K для любого $n \geq 1$;
- Множество $M_n(K)$ квадратных матриц над полем K с операциями сложения матриц и умножения матрицы на число;
- Множество многочленов $K^n[x]$ с коэффициентами из поля K, степень которых не превышает числа n, относительно сложения многочленов и умножения многочленов на числа из K;

- Множество K^ω бесконечных последовательностей чисел из K относительно покомпонентного сложения последовательностей и умножения на скаляры;
- Множество $K[x]$ всех многочленов над K относительно сложения многочленов и умножения их на числа;
- Множество $L_p^{a,b}$ всех непрерывных веществнннных функций относительно поточечного сложения функций и умножения их на скаляр.

Несмотря на разнообразие линейных прстранств над полем, мы докажем, что любые два линейных пространства над одним и тем же полем одинаковой размерности, независимо от природы их элементов, изоморфны, т.е. свойства операций сложения и умножения на скаляры в них одинаковы. Предметом изучения в курсе алгебры являются конечномерные линейные пространства (например, в первых трех случаях) и мы до поры до времени специально не оговариваем это, пока нам не обременительно формулировать и доказывать результаты независимо от размерности пространства.

Факт 9

- *Нулевой элемент в линейном пространстве единственнен;*
- *Для каждого элемента линейного пространства противоположный к нему элемент единственнен.*

Определение 32 *Непустое подмножество линейного пространства V называется подпространством в V, если оно замкнуто относительно сложения своих векторов и умножения их на любые скаляры из поля K.*

Любое линейное пространство содержит нулевое подпространство $\{\theta\}$ и подпространство $V \subseteq V$, называемые тривиальными подпространствами.

Определение 33 *Линейной комбинацией векторов* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *называется сумма вида* $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_k a_k$. *Эта комбинация называется нетривиальной, если существует индекс* i *такой, что* $\mu_i \neq 0$.

Определение 34 *Линейной оболочкой* $\mathfrak{L}(J)$ *системы векторов* $J = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *называется совокупность всевозможных линейных комбинаций* $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_k a_k$ *векторов из* J.

Факт 10 *Линейная оболочка системы векторов* J *является является подпространством пространства* V, *причем наименьшим из содержащих* J.

Одним из центральных понятий линейной алгебры является понятие линейной зависимости векторов.

Определение 35 *Система векторов* $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *называется линейно зависимой, если существует нетривиальная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору.*

Это понятие используется кроме алгебры в дифференциальных уравнениях, уравнениях математической физики, в функциональном анализе. Поэтому все математики-профессионалы его хорошо знают. Тем досаднее, что даже на ГЭК по математике встречаются студенты, которые путаются в этом понятии. Этой путанице способствует наличие четырех достаточных признаков линейной зависимости векторов, понятие линейной независимости векторов. Чтобы понять все разнообразие этих эквивалентов линейной зависимости достаточно знание элементарных законов математической логики.

Определение 36 *Система векторов* $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *называется линейно независимой, если* $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_k a_k = \theta \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k = 0$.

Признаки линейной зависимости системы векторов.

- Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима;
- Если система векторов содержит два одинаковых вектора, то она линейно зависима;
- Если система векторов содержит два пропорциональных вектора, то она линейно зависима:
- Если один из векторов системы является линейной комбинацией остальных векторов, то эта система линейно зависима.

Пытливый ум может увидеть странную похожесть этих признаков с признаками равенства нулю определителя. На самом деле далее будет вскрыта глубинная связь определителей и их строк (столбцов), рассматриваемых как векторы.

Лемма 4 *Система векторов* $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *линейно зависима тогда и только тогда, когда найдется наименьший индекс* j *такой, что* a_j *является линейной комбинацией предыдущих векторов, либо* $a_1 = \theta$.

Лемма 5 *Если* H *подпространство линейного пространства* V *и* $H = \mathfrak{L}(J)$ *и вектор* a *является линейной комбинацией остальных векторов из* J*, то* $H = \mathfrak{L}(J - \{b\})$.

Теорема 28 *Если* H *подпространство линейного пространства* V *и* $H = \mathfrak{L}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \mathfrak{L}(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *причем система* $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *линейно независима. Тогда* $k \leq m$.

Определение 37 *Система векторов* $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *называется базисом подпространства* H *пространства* V*, если она является максимально линейно независимой в* H.

Нас интересуют в первую очередь пространства имеющие конечный базис. Число векторов базиса называется *размерностью подпространства и обозначается через* $\dim(H)$.

Теорема 29 (Теорема о базисе.) *Любые два базиса подпространства* H *равномощны.*

Факт 11 *Всякую линейно независимую систему векторов в* H *можно расширить до базиса* H.

Quiz Будет ли семейство векторов $a_1 = (2, 1, 0)$, $a_2 = (0, 1, -2)$, $a_3 = (0, 1, 1)$ базисом пространства R_3?

Решение. Вычислим вспомогательный определитель, строки которого являются данными векторами.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \square \neq 0$$

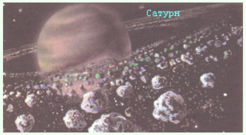
Ans

Значит ни одна из строк этого определителя не может быть линейной комбинацией остальных, поэтому они линейно независимы. Число векторов совпадает с размерностью пространства, следовательно, эти векторы образуют базис пространства R_3.

Clear

Литература – книга Архангельского [1]

1.17. Сумма и пересечение подпространств



Факт 12 *Если* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *базис линейного пространства* V *над полем* K*, то любой вектор* $a \in V$ *имеет однозначное разложение* $a = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_n e_n$*. Коэффициенты этого разложения называются координатами вектора a в базисе* $e_1, e_2, \ldots, e_n$*. Тогда вектору a сопоставляют строку* $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$*.*

Для определения координат вектора в базисе e приходится решать СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей A', где A матрица строки которой совпадают с векторами $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а столбец свободных членов совпадает с вектором a'.

Определение 38 *Два линейных пространства* V_1, V_2 *над одним и тем же полем называются изоморфными, если существует биекция* $\pi : V_1 \xrightarrow[\text{на}]{1-1} V_2$ *такая, что* $(\forall \alpha \in K)(\forall \beta \in K)\forall x \forall y[\pi(\alpha x + \beta y) = \alpha\pi(x) + \beta\pi(y)]$

Теорема 30 *Два линейных пространства* V_1, V_2 *над одним и тем же полем являются изоморфными, если и только, если* $\dim(V_1) = \dim(V_2)$*.*

Таким образом все линейные пространства размерности n над полем K, независимо от природы их элементов, идентичны арифметическому линейному пространству K^n.

Определение 39 *Если* H_1, H_2 *подпространства линейного пространства* V*, то их суммой называется множество* $H_1 + H_2 = \{x + y \mid x \in H_1 \wedge y \in H_2\}$*.*

Теорема 31 *Если H_1, H_2 подпространства линейного пространства V, то*

- *пересечение $H_1 \cap H_2 = \{x \mid x \in H_1 \wedge x \in H_2\}$ является подпространством пространства V.*
- *сумма $H_1 + H_2$ является наименьшим подпространством V, содержащим $H_1 \cup H_2$.*

Теорема 32 (Модулярный закон) *Если H_1, H_2 подпространства линейного пространства V, то*

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2)$$

Сумма подпространств H_1, H_2 называется прямой, если $H_1 \cap H_2 = \{\theta\}$. В этом случае эта сумма обозначается $H_1 \oplus H_2$.

Предложение 8 *Пусть H_1, H_2 подпространства линейного пространства V и H их сумма. Тогда*

$$H = H_1 \oplus H_2 \Leftrightarrow (\forall x \in H)(\exists! y \in H_1)(\exists! z \in H_2)[x = y + z]$$

Здесь квантор $\exists! y$ читается как существует единственный y.

Quiz Найти базис пересечения подпространств $\mathcal{L}(a_1, a_2)$ и $\mathcal{L}(b_1, b_2)$, где $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (1, 1, -1)$, $b_1 = (1, 2, 2)$, $b_2 = (1, 1, -3)$.

Решение. Пусть вектор t лежит в пересечении заданных подпространств. Тогда $t = x_1 a_1 + x_2 a_2$ и $t = x_3 b_1 + x_4 b_2$. Равенство векторов $x_1 a_1 + x_2 a_2 = x_3 b_1 + x_4 b_2$ дает систему алгебраических уравнений.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Решаем эту систему уравнений методом Гаусса. Составляем таблицу Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-2(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \square & \square & \square & \square & 0 \\ \square & \square & \square & \square & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-1(2)]{(3)-2(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \square & \square & \square & \square & 0 \\ \square & \square & \square & \square & 0 \end{array}\right)$$

Ans

Следовательно, $x_4 = \beta$, $x_3 = 2\beta$, $x_2 = \beta$, $x_1 = 2\beta$. Отсюда $x = 2\beta a_1 + \beta a_2 = 2\beta b_1 + \beta b_2$. Поэтому, вектор

$$d = 2a_1 + a_2 = (\square, \square, \square)$$

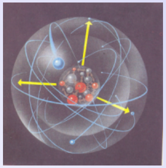
Ans

является базисом пересечения заданных подпространств

Clear

Литература – книга Куроша [3].

1.18. Ранг матрицы



Пусть $A = (\alpha_{ij})_m^n$ матрица над полем K. Строки матрицы A будут обозначаться символами $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Столбцы этой матрицы будут обозначаться символами другого начертания $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$. Строки матрицы A являются векторами в линейном пространстве K^n, а столбцы в линейном пространстве K^m.

Определение 40 *Введем временные термины:*

- *строчным рангом матрицы A назовем число* $r_c(A) = \dim(A_1, A_2, \ldots, A_m)$.
- *вертикальным рангом матрицы A назовем число* $r_b(A) = \dim(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_m)$.

Если $k \leq \min(m, n)$ и все миноры k-го порядка в матрице A равны нулю, то все миноры $(k+1)$-го порядка в A также равны нулю, так как, разложив такой минор по первой строке, мы видим что дополнительные миноры к элементам этой строки являются минорами k-го порядка в матрице A.

Определение 41 *Рангом матрицы A называется максимум из порядков миноров отличных от нуля этой матрицы. Он будет обозначаться символом $r(A)$.*

Из определения сразу следует, что $r(A) \leq \min(m, n)$. Очевидна следующая

Лемма 6

- *Для любой матрицы A справедливы равенства* $r_c(A) = r_b(A'), \quad r_b(A) = r_c(A')$;
- *для любой матрицы A верно равенство* $r(A') = r(A)$.

Лемма следует из того, что при транспонировании матрицы строки становятся столбцами, а столбцы строками. Если M минор в матрице A не равный нулю, то в матрице A' на симметричном M относительно главной диагонали месте будет стоять ненулевой минор M'. Имеется класс матриц, для которого нетрудно понять, что $r_c(A) = r(A)$.

Предложение 9 *Если A ступенчатая матрица, то $r(A)$ и $r_c(A)$ равны числу ненулевых ступенек в A.*

Любую матрицу можно привести к ступенчатому виду преобразованиями Гаусса со строками. Для доказательства того, что все три понятия ранга совпадают, достаточно понять, что ранг матрицы и строчный ранг матрицы являются инвариантом преобразований Гаусса со строками.

Теорема 33 *Пусть матрица B получена из матрицы A конечной цепочкой преобразований Гаусса со строками. Тогда* $r_c(A) = r_c(B), \quad r(A) = r(B)$.

Эта теорема дает и наиболее эффективный способ вычисления ранга матрицы.

Следствие 6 (Теорема о ранге матрицы.) *Для любой матрицы A все три понятия ранга матрицы $r_c(A), r(A), r_b(A)$ совпадают.*

Title Page
Contents
Page 110 of 149
Go Back
Close

Теперь на системы линейных уравнений можно взглянуть с точки зрения векторов

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = b_m, \end{cases}$$

Эту систему можно рассматривать в матричном виде

$$Ax = b$$

Если столбец $[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n]$ решение СЛАУ, то столбец свободных членов b является линейной комбинацией с коэффициентами $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ столбцов $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ матрицы A. Через $\widetilde{A}$ обозначим матрицу полученную из A присоединением столбца свободных членов b. Нами фактически получена

Теорема 34 (Кронекера-Капелли) *Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда $r(A) = r(\widetilde{A})$.*

Сходные идеи нужны для доказательства следующего утверждения.

Предложение 10

- *Пусть A, B матрицы для которых существует произведение AB. Тогда $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$.*
- *Пусть A квадратная невырожденная матрица и B матрица, для которой существует произведение AB. Тогда $r(AB) = r(B)$. Аналогично, если существует матрица BA, то $r(BA) = r(B)$.*

Quiz Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение. Также как и при вычислении корней СЛАУ приводим матрицу преобразованиями Гаусса к ступенчатому виду. Здесь разрешается делать преобразования

Гаусса кроме строк также для столбцов.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&2&1\\1&4&1&1\\5&1&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{(4)-5(1)\\(5)-(1)\\(6)-(1)}]{\substack{(2)-4(1)\\(3)-(1)}}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\\square&\square&\square&\square\\\square&\square&\square&\square\\\square&\square&\square&\square\\\square&\square&\square&\square\\\square&\square&\square&\square\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{(3)\leftrightarrow(5)\\(4)\leftrightarrow(6)}]{(2)\leftrightarrow(3)}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\\square&\square&\square&\square\\\square&\square&\square&\square\\\square&\square&\square&\square\\\square&\square&\square&\square\\\square&\square&\square&\square\end{pmatrix}$$

Ans

Конечно, сократив вторую строку на 3 и третью на 2, можно вычитая из пятой и четвертой строки подходящую комбинацию второй, третьей и четвертой строк, сделать пятую и шестую строки нулевыми. Но мы не будем тратить на это своих сил. В последней матрице и так видно, что минор четвертого порядка в первых четырех строках ступенчатый и не равен нулю. Так как матрица A имеет 4 столбца, то её ранг не может превышать 4, следовательно

$$r(A)=\square.$$

Ans

Clear

Литература – книга Скорнякова [5]

Title Page
Contents
Page 113 of 149
Go Back
Close

1.19. Евклидовы и унитарные пространства

При изучении линейных пространств над полем K, мы пока мало обращали внимания на природу поля K. Точнее говоря, все результаты предыдущих лекций остаются справедливыми при любом выборе поля K. Настало время, когда от выбора основного поля многое зависит. В этом разделе будут рассматриваться линейные пространства над полем комплексных чисел, в котором задан некоторый бинарный функционал отображающий пары векторов в числа из C – унитарные пространства. Аналогично, будут рассматриваться линейные пространства над полем вещественных чисел, в котором задан некоторый бинарный функционал отображающий пары векторов в числа из R – евклидовы пространства.

Все теоремы вначале доказываются для унитарных пространств, их аналоги для евклидовых пространств следуют моментально. Ни в коем случае не следует доказывать результаты только для евклидовых пространств, так как это резко сузит область применения и при изучении темы *Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах* делать будет нечего. Надо заметить, что полные результаты практически не длиннее результатов в евклидовом случае. Для других полей мало, что известно, во всяком случае для конечных полей многие утверждения этого раздела

Title Page
Contents
Page 114 of 149
Go Back
Close

не проходят.

Определение 42 *Пусть каждой паре векторов x, y сопоставлено однозначно комплексное число, обозначаемое (x, y). Тогда (x, y) называется скалярным произведением векторов x, y если справедливы следующие равенства:*

a) $\forall x \forall y[(x, y) = \overline{(y, x)}]$,

b) $(\forall \lambda \in C)\forall x \forall y[(\lambda x, y) = \lambda(x, y)]$,

c) $\forall x \forall x' \forall y[(x + x', y) = (x, y) + (x', y)]$;

d) $\forall x\{(x, x) \in R \wedge [(x, x) = 0 \to x = \theta]\}$.

В случае вещественных векторов скалярным произведением (x, y) называется вещественное число, для которого выполняются свойства a) – d) предыдущего определения, правда свойство a) примет вид a') $\forall x \forall y[(x, y) = (y, x)]$, поскольку (y, x) вещественно.

Определение 43 *Множество* $(V, +, \odot_\lambda, (,), =)_{\lambda \in C}$, *где* $(V, +, \odot_\lambda, =)_{\lambda \in C}$ *линейное пространство над полем комплексных чисел и* $(,)$ *скалярное произведение, называется унитарным пространством. Множество* $(V, +, \odot_\lambda, (,), =)_{\lambda \in R}$, *где* $(V, +, \odot_\lambda, =)_{\lambda \in R}$ *линейное пространство над полем вещественных чисел и* $(,)$ *скалярное произведение, называется евклидовым пространством.*

Предложение 11 *В унитарном пространстве справедливы следующие тождества:*

- $(x, \theta) = 0$;
- $(x, y + y') = (x, y) + (x, y')$;
- $(x, \mu y) = \bar{\mu}(x, y)$;
- $(\sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \rho_j y_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_i \bar{\rho_j} (x_i, y_j)$.

В евклидовом пространстве справедливо все то же самое, но проще из-за отсутствия сопряжений.

Пример 8

- *Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ произвольный фиксированный набор положительных чисел. Для векторов $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ полагаем $(x, y) = \mu_1 \alpha_1 \bar{\beta_1} + \mu_2 \alpha_2 \bar{\beta_2} + \cdots + \mu_n \alpha_n \bar{\beta_n}$. Нетрудно проверить, что (x, y) скалярное произведение.*
- *В пространстве непрерывных функций (1.16.2) $L_p^{a,b}$ следующий интеграл определяет скалярное произведение $(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x) g(x) dx$.*

Определение 44 *Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называется ортогональной, если $(a_i, a_j) = 0$ при $i \neq j$. Ортогональность друг другу пары векторов будем записывать в виде $x \perp y$.*

Предложение 12 *Всякая ортогональная система ненулевых векторов в унитарном (евклидовом) пространстве линейно независима.*

Теорема 35 (Процесс ортогонализации.) *Если* $H = \mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *подпространство унитарного пространства* V, *то существует ортогональная система векторов* $b_1, b_2, \ldots, b_k$ *порождающая* H, *которая строится следующим образом:*

$$b_1 = a_1 \tag{1.19.1}$$

$$b_2 = a_2 + \lambda_{2,1} b_1 \tag{1.19.2}$$

$$b_3 = a_3 + \lambda_{3,1} b_1 + \lambda_{3,2} b_2 \tag{1.19.3}$$

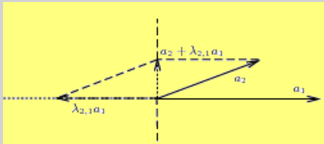
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{1.19.4}$$

$$b_k = a_k + \lambda_{k,1} b_1 + \lambda_{k,2} b_2 + \cdots + \lambda_{k,k-1} b_{k-1}, \tag{1.19.5}$$

где коэффициенты подбираются так, чтобы очередной вектор был ортогонален всем предыдущим

$$\lambda_{ij} = -\frac{(a_i, b_j)}{(b_j, b_j)}, \quad j < i \leq k$$

Надо заметить, что если получится $b_{i_0} = \theta$, то нет необходимости вычислять $\lambda_{i_0,j}$ для всех $j < i_0$, так как эти коэффициенты по формулам (**??**) умножаются на нулевой вектор. Геометрически построение ортогональной системы по паре неколлинеарных векторов поясняется на чертеже.



Title Page
Contents
Page 117 of 149
Go Back
Close

Определение 45 *Вектор a называется нормированным, если* $(a, a) = 1$.

Любой ненулевой вектор a можно нормировать разделив на $\sqrt{(a, a)}$.

Следствие 7 *Всякое подпространство унитарного (евклидова) пространства имеет ортонормированный базис.*

Предложение 13 *Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормированный базис унитарного пространства V и $a = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$, $\quad b = \sum_{j=1}^{n} \rho_j e_j$. Тогда $(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \bar{\rho}_i$. Для евклидовых пространств справедливо аналогичное равенство без сопряжений,*

Определение 46 *Отображение π биективно переводящее унитарное (евклидово) пространство V_1 на другое унитарное (евклидово) пространство V_2 называется изоморфизмом, если оно является изоморфизмом этих пространств как линейных и* $\forall x \forall y [(x, y) = (\pi(x), \pi(y))]$.

Предложение 14

- *Два унитарных пространства V_1, V_2 изоморфны тогда и только тогда, когда* $\dim(V_1) = \dim(V_2)$*;*
- *Два евклидовых пространства V_1, V_2 изоморфны тогда и только тогда, когда* $\dim(V_1) = \dim(V_2)$.

Quiz Дополнить до ортонормированного базиса векторы $a_1 = \frac{1}{3}(1, 2, -2), \quad a_2 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$.

Решение. Вначале вычислим скалярные произведения $(a_1, a_1) = \frac{1}{9}[1 + 4 + 4] = 1, \quad (a_2, a_2) = \frac{1}{9}[4 + 1 + 4] = 1$, поэтому заданные векторы нормированные. Вычислим скалярное произведение $(a_1, a_2) = \frac{1}{9}[2 + 2 - 4] = 0$, следовательно, заданные векторы ортогональны друг другу, и дополнять их до ортонормированного базиса имеет смысл. Ищем третий вектор в неопределенном виде $a_3 = (x_1, x_2, x_3)$. Тогда он обязан подчиняться требованиям

$$(a_1, a_3) = 0$$
$$(a_2, a_3) = 0$$
$$(a_3, a_3) = 1$$

Первые два равенства дадут СЛАУ, в которой уравнения сразу будут умножены на число $\frac{1}{3}$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Решаем эту СЛАУ методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-2(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ \square & \square & \square & 0 \end{array}\right)$$ Ans

Полагая $x_3 = \beta$, получаем

$$a_3 = \beta \cdot (\square, \square, \square)$$ Ans

Так как $(a_3, a_3) = 1$, то

$$\beta^2\square = 1 \quad \text{значит} \quad \beta = \pm\frac{\square}{\square} \quad \text{и} \quad a_3 = \pm\frac{\square}{\square}\left(\square,\square,\square\right).$$

Ans

Clear

Quiz Применить процесс ортогонализации к системе векторов $a_1 = (1, 2, 2, -1)$, $a_2 = (1, 1, -5, 3)$, $a_3 = (3, 2, 8, -7)$.

Решение. Действуем согласно формулам из теоремы 35. Тогда $b_1 = a_1 = (1, 2, 2, -1)$ и $b_2 = a_2 + \lambda_{21} b_1$, где

$$\lambda_{21} = -\frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{\square\cdot\square+\square\cdot\square+\square\cdot\square+\square\cdot\square}{(\square)^2+(\square)^2+(\square)^2+(\square)^2} = \square, \quad b_2 = a_2+\square b_1 = \left(\square,\square,\square,\square\right)$$

Ans

Тогда $b_3 = a_3 + \lambda_{31} b_1 + \lambda_{32} b_2$, где коэффициенты $\lambda_{31}, \lambda_{32}$ вычисляются по формулам

$$\lambda_{31} = -\frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{\square\cdot\square+\square\cdot\square+\square\cdot\square+\square\cdot\square}{(\square)^2+(\square)^2+(\square)^2+(\square)^2} = \square,$$

Ans

$$\lambda_{32} = -\frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{\square\cdot\square+\square\cdot\square+\square\cdot\square+\square\cdot\square}{(\square)^2+(\square)^2+(\square)^2+(\square)^2} = \square, \quad b_3 = a_3+\square b_1+\square b_2 = \left(\square,\square,\square,\square\right)$$

Ans

Clear

Литература – книга Головиной [2]

1.20. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

Определение 47 *Нормой (или длиной) вектора* $|a|$ *назовем положительное число* $\sqrt{(a,a)}$

Теорема 36 (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца) *Для любых векторов* x, y *унитарного пространства* V *справедливо неравенство*

$$|(x,y)|^2 \le (x,x)(y,y)$$

Равенство здесь достигается если и только, если векторы x, y *коллинеарны в* V*, т.е. существует скаляр* α *такой, что* $x = \alpha y$.

Замечание. Здесь $|(x,y)|$ – модуль комплексного числа (x,y), не путать с нормой вектора.

Доказательство. Пусть t вещественная переменная. Рассмотрим вектор $x + ty$. Из аксиом скалярного произведения следует, что $(x+ty, x+ty) \ge 0$. Раскроем это неравенство по дистрибутивности, учитывая вещественность t.

$$(x,x) + t(x,y) + t(y,x) + t^2(y,y) \ge 0$$

Учтем, что $(y,x) = \overline{(x,y)}$ и $(x,y) + \overline{(x,y)} = 2Re((x,y))$ – вещественное число. (Здесь $Re(z)$ обозначает вещественную часть комплексного числа z.) Получим квадратный трехчлен от t с вещественными коэффициентами, больший нуля

$$(y,y)t^2 + 2Re((x,y))t + (x,x) \ge 0. \tag{1.20.1}$$

Следовательно дискриминант этого многочлена неположителен.

$$4[Re((x,y))]^2 - 4(x,x)(y,y) \le 0$$

Отсюда получаем неравенство

$$[Re((x,y))]^2 \le (x,x)(y,y) \qquad (1.20.2)$$

В евклидовом пространстве $Re((x,y)) = (x,y)$ и доказанное неравенство превратится в неравенство Коши-Буняковского для вещественных векторов

$$(x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$$

В общем унитарном случае неравенство (1.20.2) верно для любых векторов x, y, поэтому оно останется справедливым при замене y на вектор $\underline{(x,y)y}$. Преобразуем получающееся неравенство, учитывая, что $Re(x,(x,y)y) = Re(\overline{(x,y)}(x,y) = |(x,y)|^2$ и $((x,y)y,(x,y)y) = (x,y)\cdot\overline{(x,y)}(y,y) = |(x,y)|^2(y,y)$. Тогда получаем

$$|(x,y)|^4 \le (x,x)(y,y)|(x,y)|^2$$

Если $(x,y) = 0$, то доказываемое неравенство очевидно. В противном случае, сокращая обе части последнего неравенства на положительную величину $|(x,y)|^2$, получаем

$$|(x,y)|^2 \le (x,x)(y,y).$$

Если $x = \alpha y$, то $x - \alpha y = \theta$. Поэтому $(x - \alpha y, x - \alpha y) = 0$ и значит дискриминант (1.20.2) равен нулю. Это приведет к требуемому равенству $|(x,y)|^2 \le (x,x)(y,y)$.

Теорема доказана.

Заметим, что норма вектора в унитарном (евклидовом) пространстве удовлетворяет следующим свойствам

- $|x| \geq 0$ – неотрицательность нормы;
- $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
- $\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|$ – однородность;
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ – неравенство треугольника.

Доказательство этих свойств тривиально за исключением неравенства треугольника, проверим его.

$$|x+y| = \sqrt{(x+y, x+y)} = \sqrt{(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)} = \sqrt{|x|^2+|y|^2+2Re((x,y))}$$

В силу доказанного неравенства (1.20.2) получаем

$$|x+y| \leq \sqrt{|x|^2+|y|^2+2|x||y|} \leq |x|+|y|$$

Эти свойства нормы векторов является важнейшим моментом для распространения свойств непрерывных функций от одной (вещественной или комплексной) переменной на непрерывные функции от n переменных. Главное здесь это близким значениям аргумента должны соответствовать близкие значения функций.

Если x, y ненулевые векторы, то угол α между этими векторами определяется так, что

$$\cos(\alpha) = \frac{(x,y)}{|x||y|}.$$

Корректность этого определения следует из неравенства Коши-Буняковского, так как

$$\frac{(x,y)^2}{(x,x)(y,y)} \leq 1.$$

Title Page
Contents
Page 123 of 149
Go Back
Close

Для понятия ортогональных векторов, это определение согласуется с ранее введенным понятием $x \perp y \iff (x, y) = 0 \iff cos(\alpha) = 0 \iff \alpha = \frac{\pi}{2}$.

Заметим, что неравенство Коши-Буняковского-Шварца появляется в разных частях математики в некоторых частных формулировках и под разными именами. Приведем их.

1. Для любых вещественных чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ и $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ верно неравенство $(\mu_1\rho_1 + \mu_2\rho_2 + \cdots + \mu_n\rho_n)^2 \le (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_n^2) \cdot (\rho_1^2 + \rho_2^2 + \cdots + \rho_n^2)$;
2. Для любых комплексных чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ и $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ верно неравенство $|\mu_1\bar{\rho_1} + \mu_2\bar{\rho_2} + \cdots + \mu_n\bar{\rho_n}|^2 \le (|\mu_1|^2 + |\mu_2|^2 + \cdots + |\mu_n|^2) \cdot (|\rho_1|^2 + |\rho_2|^2 + \cdots + |\rho_n|^2)$;
3. Для любых вещественных непрерывных функций $f(x), g(x) \in L_p^{a,b}$ справедливо неравенство
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b [f(x)]^2 dx\right)\left(\int_a^b [g(x)]^2 dx\right)$$

Не так уж просто по отдельности найти связь между этими неравенствами. Тем не менее все они есть частные случаи неравенства Коши-Буняковского-Шварца в евклидовых (унитарных) пространствах при подходящем выборе скалярного произведения. Поэтому доказательство этих неравенств вне общего контекста скалярных произведений является потерей общности и проявлением узости взгляда на явления. Первые два пункта следуют из выбора ортонормированного базиса в R^n (C^n) и скалярного произведения в таком базисе. Третий пункт следует из того, что отображение
$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

является скалярным произведением в пространстве $L_p^{a,b}$. Ясно, что каждому скалярному произведению соответствует свое неравенство Коши-Буняковского-Шварца, а их можно придумать огромное количество согласно предыдущей лекции.

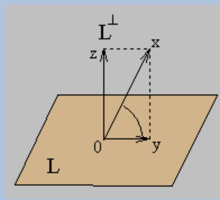
Если H подпространство унитарного (евклидова) пространства V то через $H^\perp$ обозначим множество $\{x \in V \mid (\forall y \in H)(x \perp y)\}$ и назовем ортогональным дополнением к H.

Предложение 15 *Если H подпространство V, то $H^\perp$ также подпространство пространства V.*

Теорема 37 *Если H подпространство V, то $V = H \oplus H^\perp$. Другими словами, пространство V является прямой суммой подпространства H и его ортогонального дополнения.*

Quiz Найти угол меду вектором x и подпространством $L = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3)$. Найти также расстояние от конца вектора x до подпространства L. Здесь $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 2, -1)$, $a_3 = (1, 0, 0, 3)$ и $x = (4, -1, -3, 4)$.

Решение. Легко видеть, что $a_3 = 2a_1 - a_2$, поэтому $L = \mathcal{L}(a_1, a_2)$ и вектор a_3 не нужен.



Представим вектор x в виде $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in L^\perp$. Тогда $y = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2$. Составим систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
(x, a_1) &= (y + z, a_1) = (y, a_1) + (z, a_1) = (y, a_1) = \mu_1(a_1, a_1) + \mu_2(a_1, a_2) \\
(x, a_2) &= (y + z, a_1) = (y, a_2) + (z, a_2) = (y, a_2) = \mu_1(a_1, a_2) + \mu_2(a_2, a_2)
\end{aligned}
$$

Title Page
Contents
Page 125 of 149
Go Back
Close

Приступим к вычислениям

$$\begin{aligned} 4\mu_1 + 4\mu_2 &= 4 \\ 4\mu_1 + 10\mu_2 &= -8 \end{aligned}$$

Решим эту систему

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 10 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}(2)]{(2)-(1)} \left(\begin{array}{cc|c} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{array}\right), \quad \mu_2 = \square, \quad \mu_1 = \square$$

Ans

Следовательно,

$$y = \square a_1 + \square a_2 = (\square, \square, \square, \square) \quad \text{и} \quad z = x - y = (\square, \square, \square, \square).$$

Ans

Угол α между вектором x и подпространством L есть угол между векторами x и y.

$$\cos(\alpha) = \frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|} = \frac{\square\cdot\square + \square\cdot\square + \square\cdot\square + \square\cdot\square}{\sqrt{\square^2 + \square^2 + \square^2 + \square^2}\sqrt{\square^2 + \square^2 + \square^2 + \square^2}} = \sqrt{\frac{\square}{\square}}$$

Ans

Расстояние от конца вектора x до подпространства L равно модулю вектора z. Итак

$$\alpha = \arccos\sqrt{\frac{\square}{\square}}, \quad |z| = \sqrt{(z,z)} = \sqrt{\square^2 + \square^2 + \square^2 + \square^2}$$

Ans

Clear

Литература – книга Хорна и Джонсона [6]

Список литературы

[1] *А.А. Архангельский*, Конечномерные векторные пространства, М. Наука, 1991.

[2] *Л.А. Головина*, Линейная алгебра и некоторые её применения, М. Наука, 1990.

[3] *А.Г. Курош*, Курс высшей алгебры, М. Наука, 1998.

[4] *А.И. Кострикин*, Введение в алгебру, М. Наука, 1999.

[5] *Л.С. Скорняков*, Элементы алгебры, М. Наука, 1991.

[6] *Р. Хорн, Ч. Джонсон*, Матричный анализ, М., Мир, 1989.

2. ПРЕДМЕТНЫЙ ИНДЕКС

3. ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО АЛГЕБРЕ

Ректорат КазНУ

1. Комплексные числа и операции над ними.
2. Свойства операций над комплексными числами.
3. Извлечение квадратного корня из комплексного числа.
4. Свойства операции сопряжения.

Title Page
Contents
Page 134 of 149
Go Back
Close

5. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма.
6. Умножение, деление, возведение в степень комплексного числа.
7. Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа.
8. Перестановки конечного множества и их количество.
9. Лемма о транспозициях, подстановки.
10. Формула определителя n-го порядка.
11. Признаки равенства определителя нулю.
12. Преобразования определителя не изменяющие его величины.
13. Перестановка строк, умножение строки на число и разложение определителя в сумму двух определителей.
14. Теорема о миноре.
15. Теорема Лапласса.
16. Разложение определителя по строке.
17. Методы вычисления определителей.
18. Системы линейных алгебраических уравнений, эквивалентность систем.
19. Преобразования Гаусса. Метод Гаусса.

20. Ступенчатые СЛАУ.
21. Сумма произведений элементов столбца определителя на алгебраические дополнения чужого столбца.
22. Правило Крамера.
23. Алгебраические операции над матрицами и их свойства.
24. Ассоциативность умножения матриц.
25. Свойства дистрибутивности для матриц.
26. Транспонирование матриц.
27. След матрицы.
28. Определитель произведения матриц.
29. Единичная и обратная матрицы.
30. Формула обратной матрицы.
31. Вычисление обратной матрицы элементарными преобразованиями.
32. Матричные уравнения.
33. Матричная запись СЛАУ.
34. Ранг ступенчатой матрицы.

35. Сохранение ранга матрицы при транспонировании.
36. Инвариантность ранга матрицы относительно преобразований Гаусса.
37. Теорема о ранге матрицы.
38. Многочлены от одного неизвестного. Алгоритм деления с остатком.
39. Наибольший общий делитель многочленов. Алгоритм Евклида.
40. Линейное представление наибольшего общего делителя двух многочленов.
41. Схема Горнера. Теорема Безу.
42. Кратные корни многочлена.
43. Основная теорема о существовании корня многочлена и ее следствия.
44. Взаимно простые многочлены.
45. Формулы Виета.
46. Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами.
47. Система Штурма.
48. Теорема Штурма.
49. Решение систем полиномиальных уравнений от n неизвестных методом Гребнера.

50. Многочлены от многих переменных, лексикографический порядок.
51. Основная теорема о симметрических многочленах.
52. Арифметические линейные пространства.
53. Линейные пространства, подпространства, оболочки.
54. Теорема о базисе.
55. Связь между базисами пространства.
56. Сумма и пересечение подпространств.
57. Евклидовы и унитарные пространства.
58. Ортогональные системы векторов, процесс ортогонализации.
59. Изоморфизм унитарных пространств одинаковой размерности.
60. Неравенство Коши-Буняковского.

декабрь 2006 г.

доцент К.А. Мейрембеков

4. КАК РЕШАТЬ ТЕСТЫ

Вам предлагается образец тестов по тематике алгебры, охватывающий первый семестр. Сложность теста значительно выше тех, которые предлагаются на ПГК центром тестирования РК в конце четвертого семестра. К сожалению, я встречал чужие тесты, для которых гарантирую, сам автор этих тестов не найдет ответа и за десять – пятнадцать минут. Оснований для таких заявлений, автор настоящего файла имеет достаточно. Во-первых, он сам решает задачи очень быстро ещё со школьных времен, в силу своего олимпиадного прошлого. Во вторых, он является автором нескольких сотен качественных тестов по алгебре и логике, часть из которых задействована в этом файле. Примерами плохих тестов являются встречающиеся задачи об определителях четвертого – пятого порядков с большими числами, либо СЛАУ четвертого порядка, ответы которых не содержат никаких особенностей. Качественные тесты должны быть намного более разнообразными, проверяющими различные стороны предмета, и вместе с тем требовать мало времени на решение для знающего студента. Это означает, что тест не должен содержать утомительных вычислений и при знании студентом, ответ должен занимать 10 – 30 секунд. Но это не означает, что тест решается тривиально. Хороший набор тестов качественно проверяет владение студентом основных определений, результатов и навыков. Студент должен знать, что в каждом тесте ровно один из ответов правильный. Последний факт часто помогает отсекать заведомо неверные ответы.

Студент может проверить себя вступая в *интерактивное общение с машиной.* При этом он находится в уникальной ситуации, когда нет необходимости никого обхитрить, не слышать упреки преподавателя на отставание от группы. Никому, кроме вас, неизвестны сейчас результаты интерактивного общения. Но эта ситуация требует от студента, стремящегося к действительным знаниям, честно выполнять задания, просмотреть их результаты, взглянуть на авторское решение и обдумать причины своих неудачных ответов. Только такая тактика, а не слепое зазубривание ответов 12а, 54с и т.п. ведет к знаниям. Иной путь гибелен, тем более, что тесты могут создаваться из гигантских баз данных, перемешиваться в зависимости от тем в определенных пропорциях, причем порядок следования ответов в тестах может также автоматически изменяться без потери связи с ключом теста. Путь зазубривания известных тестов не дает никаких знаний, требует бесполезного напряжения памяти и свидетельствует о нерациональном использовании интеллекта.

Чтобы начать **тестирование** надо нажать кнопку *Start*, затем заполнить в каждом тесте правильные по вашему мнению ответы, ткнув мышкой на нужный пункт. Повторное нажатие очищает ранее введенный выбор и система готова, чтобы заново приступить к тестированию. Для проверки нажать в конце тестов красную фразу *end Quiz* и проверить ответы тестов на совпадения. Нажатие на зеленую галочку или зеленый кружочек с правильным ответом переведет вас на страницу с решением соответствующего теста. Нажатие на красный квадрат на странице с решением вернет вас к рассматриваемому тесту.

Если вы хорошо проработали настоящий файл, то легко справитесь с заданием. Но будьте внимательны, в грамотных тестах, каждая фраза имеет смысл и нет ничего лишнего. Я верю, что вы выбьете (в чисто спортивном смысле) хорошие баллы.

Start

1. Найти модуль числа $-1 + i\sqrt{3}$.
Ответы:

☐ a) -1; ☐ b) $\sqrt{3}$; ☐ c) $\sqrt{3}-1$; ☐ d) 2; ☐ e) $1+\sqrt{3}$.

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ответы:

☐ a) 0 , ☐ b) $4ab$, ☐ c) $-abcd$, ☐ d) $abcd$, ☐ e) $10ad$

3. Выбрать значения (i, j, k) так, чтобы произведение $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$ входило в развернутое выражение определителя шестого порядка со знаком минус
Ответы:

☐ a) $(2,3,2)$, ☐ b) $(4,5,6)$, ☐ c) $(5,6,1)$, ☐ d) $(4,2,2)$, ☐ e) $(3,2,3)$

4. В определителе третьего порядка все элементы нечетные числа делящиеся на пять. Тогда этот определитель делится по крайней мере на
Ответы:

☐ a) 125 , ☐ b) 5! , ☐ c) 5 , ☐ d) 1000 , ☐ e) 500 .

5. Пусть в определителе Δ порядка n сумма строк с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами. Найти наиболее точную оценку величины определителя из следующих:
Ответы :

☐ a) четное число, ☐ b) $\leq n!$, ☐ c) любое число, ☐ d) нечетное число, ☐ e) 0 .

6. Пусть A некоторая матрица. Для того, чтобы она была обратима необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:
Ответы:

☐ a) должна быть прямоугольной, ☐ b) должна быть квадратной, ☐ c) её определитель отличен от нуля, ☐ d) должна быть квадратной невырожденной матрицей, ☐ e) должна быть единичной матрицей.

7. Пусть определитель матрицы третьего порядка A равен 5 . Чему равен определитель матрицы $2 \cdot A^2$? *Ответы:*

☐ a) 10 , ☐ b) 25 , ☐ c) 50 , ☐ d) 200 , ☐ e) 500 .

8. Пусть некоторая система линейных алгебраических равнений, далее называемая $SLAU_1$, имеет единственное решение $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n)$ и поменяв местами во всех уравнениях $SLAU_1$ коэффициенты при x_1 и x_2 получили $SLAU_2$. Какому условию подчиняется $SLAU_2$?
Ответы:

☐ a) имеет единственное решение $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n)$ ☐ b) она может быть несовместной, ☐ c) она может иметь бесконечно много решений, ☐ d) имеет нулевое решение, ☐ e) имеет единственное решение $(\beta_2, \beta_1, \beta_3, \ldots, \beta_n)$

9. Пусть задана система линейных алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами, причем число уравнений больше числа неизвестных. Тогда эта система всегда является

Ответы:

- ☐ a) несовместной,
- ☐ b) если совместна, то имеет и вещественное решение,
- ☐ c) имеет единственное решение,
- ☐ d) имеет хотя бы комплексное решение,
- ☐ e) если совместна, то имеет бесконечное число решений.

10. Пусть $f(x), g(x)$ многочлены с вещественными коэффициентами. Тогда наибольшим общим делителем этих многочленов называется:
Ответы:

☐ a) наибольшая степень этих многочленов, ☐ b) наибольшее число на которое делятся эти многочлены, ☐ c) многочлен $f(x)+g(x)$, ☐ d) многочлен на который делятся и $f(x)$ и $g(x)$, ☐ e) многочлен со старшим коэффициентом 1 , являющийся общим делителем $f(x), g(x)$, который делится на любой другой общий делитель этих многочленов.

11. Известно, что один из корней многочлена $f(x)=x^4+x^3+x^2-4x+10$ равен числу $1+i$. Какое из следующих чисел обязано быть корнем этого многочлена?
Ответы:

☐ a) $-1-i$, ☐ b) 1 , ☐ c) $1-i$, ☐ d) $-1+i$, ☐ e) i .

12. Пусть x элемент линейного пространства над полем R , а μ – число из поля R . Что можно сказать о x и μ , если известно, что $\mu\cdot x=0$?

Ответы:

- ☐ *1* они линейно зависимы,
- ☐ *2* они коллинеарны,
- ☐ *3* оба равны нулю,
- ☐ *4* число равно нулю или вектор нулевой,
- ☐ *5* они линейно независимы.

13. Какая система векторов линейного пространства называется линейно независимой ?
Ответы:

- ☐ a) если один из векторов нулевой ,
- ☐ b) если только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору,
- ☐ c) если их линейная комбинация равна нулевому вектору,
- ☐ d) если она содержит пару одинаковых векторов,
- ☐ e) если некоторые из них коллинеарны.

14. Можно ли утверждать, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейного пространства V линейно независимы, если данный вектор a из V однозначно представляется в виде линейной комбинации указанных n векторов ?
Ответы:

☐ a) да можно, ☐ b) можно, только если они образуют базис, ☐ c) не обязательно, ☐ d) можно, только если этот вектор нулевой, ☐ e) нет, это всегда не так.

15. Как запишется скалярное произведение векторов $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ из евклидова пространства, координаты которых заданы в произвольном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$?

Ответы:

☐ a) $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i)$ ☐ b) $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$, ☐ c) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$, ☐ d) $\sum_{i\neq j} \alpha_i\beta_j(e_i, e_j)$, ☐ e) $\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\beta_j(e_i, e_j)$

16. Пусть скалярное произведение векторов a и b евклидова (унитарного) пространства равно нулю. Тогда эти векторы :

Ответы:

☐ a) линейно зависимы, ☐ b) линейно независимы, ☐ c) коллинеарны, ☐ d) линейно независимы если оба вектора ненулевые, ☐ образуют острый угол между собой.

17. Как с помощью произвольного базиса евклидова пространства построить ортонормированный базис ?

Ответы:

- ☐ a) нормировать каждый вектор этого базиса,
- ☐ b) менять векторы местами, пока система не станет ортогональной и затем нормировать эти векторы,
- ☐ c) применить к нему процесс ортогонализации и нормировать полученные векторы,
- ☐ d) применить к нему процесс ортогонализации, выбросить все получающиеся нулевые векторы и нормировать оставшиеся,
- ☐ e) нормировать эти векторы и затем менять их местами пока система не станет ортонормированной.

18. Какие числа из следующих являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ответы:

- ☐ a) 1 ,
- ☐ b) 5! ,
- ☐ c) 0 ,
- ☐ d) любое число ,
- ☐ e) корней нет.

19. В определителе четвертого порядка все элементы вещественны и находятся в сегменте $[-1, 1]$. В какой наименьший сегмент из нижеследующих попадает значение

определителя?
Ответы:

☐ a) $[-4, 4]$, ☐ b) $[-50, 50]$, ☐ c) $[-24, 24]$, ☐ d) $[-90, 90]$, ☐ e) $[-1, 1]$.

20. При каких преобразованиях из следующих ранг матрицы не меняется?
Ответы:

☐ a) при умножении строки на число,

☐ b) прибавление к столбцу другого столбца умноженного на $\lambda \neq 0$ и умножение столбцов на любое число,

☐ c) перестановка элементов матрицы местами,

☐ d) прибавление к строке другой строки умноженной на λ и умножение столбцов на любое число не равное нулю,

☐ e) возведении всех элементов некоторой строки в квадрат.

End Score: Correct

Solutions to Quizzes

Solution to Quiz: Если удвоить первую строку то определитель удвоится. Если далее в полученном определителе отнять из первой строки вторую, то этот второй определитель не изменит свою величину и станет таким как требуется в задаче. Следовательно при таких преобразованиях определитель удваивается.

∎

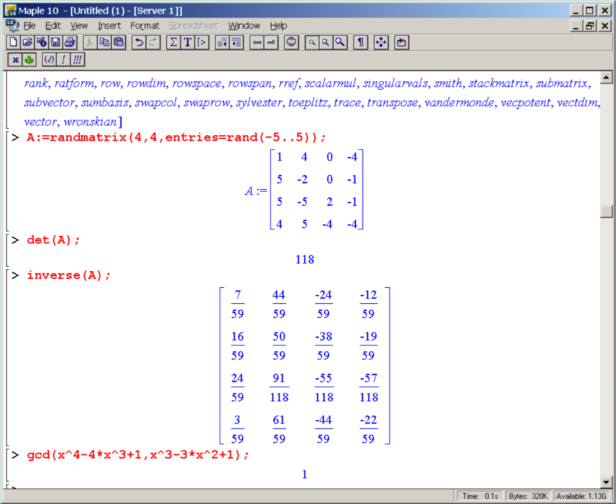
Solution to Quiz: Если в полученном определителе к первой строке прибавить вторую и третью то получится нулевая строка. Действительно ясно, что

$$[(1)-(2)]+[(2)-(3)]+[(3)-(1)]=\theta.$$

Здесь через (i) обозначена i-я строка исходного определителя. Следовательно определитель станет равным нулю

■

Solution to Quiz: Оба многочлена $f(x)$ и $g(x)$ имеют рациональные коэффициенты, поэтому по алгоритму Евклида их наибольший общий делитель должен иметь рациональные коэффициенты. Так как число $\sqrt{2}$ иррациональное, то указанный многочлен не может быть наибольшим общим делителем данных многочленов. Студент конечно должен уважать авторов известных книг, но и не верить на слово, ко всему относиться критически. Мы не будем тратить время на эту ересь, а лучше приведем экранный снимок с пакета Maple, где мимоходом решается и эта задача.



Я рекомендую студентам найти дистрибутив Maple. Это профессиональный математический пакет для работы во всех областях математики. Он очень легок в освоении, достаточно пройти в Help экскурсию по применению Maple в разных областях математики, чтобы уже самому научиться пользоваться. На снимке задана случайная матрица четвертого порядка и найден её определитель и обратная матрица. Наибольший общий делитель нашей задачи равен 1.

Title Page
Contents
Page 152 of 149
Go Back
Close

Solution to Quiz: В этой задаче нет необходимости находить сами корни многочлена. Обозначим их через x_1, x_2, x_3. Тогда при помощи формул Виета, получаем

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 5^2 - 2 \cdot 4 = 8$$

Solution to Quiz: Модуль вычисляется по формуле

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

.

Solution to Quiz: Разлагаем определитель сперва по последней строке, полученный определитель по первому столбцу получаем, что он равен $abcd$.

Метод отбора: Ясно, что определитель зависит от d, так как при подстановке $d = 0$ он обращается в нуль. Аналогично он зависит от c. Поэтому он должен как многочлен от своих параметров делиться на cd. Не зная других свойств определителей у вас альтернатива с выбором ответов a), c), d).

■

Solution to Quiz: Метод отбора: Запишем это произведение по порядку строк, получим

$$a_{1j}a_{i6}a_{35}a_{44}a_{51}a_{6k}/$$

Видно, что пропущенный номер строки i должен быть равен 2. У нас только первый ответ начинается с 2, поэтому он и верный.

Для убедительности, если есть время можно подсчитать число инверсий в перестановке $(j, 6, 5, 4, 1, k)$ при $j = 3$ и $k = 2$. Оно равно 11. Следовательно правильный ответ – первый.

■

Solution to Quiz: Так как все три строки определителя делятся на пять, то он делится на $5^3 = 125$. Но мы не использовали тот факт, что все элементы определителя нечетные числа. Если прибавить ко второй и третьей строке первую, то получим две строки с четными числами. Значит наш определитель ещё делится на $2^2 = 4$ и значит он обязан делиться на 500. Правильный ответ e).

Метод отбора: Ясно, что 5! здесь возникает в надежде на формальные знания определителя как суммы $n!$ слагаемых. Определитель из нечетных чисел, имеющий порядок $n > 1$ всегда число четное. У вас альтернатива между d) и e).

Solution to Quiz: Метод отбора: Из условия следует, что рассматривается определитель не ниже второго порядка. Определитель второго порядка с заданным условием имеет равные строки и поэтому равен нулю. Значит верен ответ е).

В общем случае, если есть время разобраться, прибавим к первой строке все другие строки с нечетными номерами и ко второй строке все остальные строки с четными номерами. Тогда ясно, что получится определитель с одинаковыми строками и он равен нулю.

■

Solution to Quiz: Матрица называется обратимой, если она квадратная и её определитель отличен от нуля. Ответ d).

Метод отбора: Очевидно, что нулевую матрицу на что ни умножай будет матрица из нулей. Поэтому отпадают ответы a), b), e). У вас альтернатива между c) и d), которая легко решается из условий теста в пользу d).

Solution to Quiz: Определитель матрицы A^2 равен $(det(A))^2 = 25$. При умножении матрицы на число все её строки умножаются на это число. Поэтому $det(2A^2) = 2^3(det(A))^2 = 200$.

Метод отбора: У матрицы $2 \cdot A^2$ все элементы четные, поэтому ответ b) неверен. Когда матрицу возводят в квадрат её определитель также возводится в квадрат по теореме об определителе произведения. Поэтому ответ a) также отпадает. У вас альтернатива между c), d), e).

Solution to Quiz: Если поменять местами два слагаемых в одной части тождества равенство сохранится. Ответ e) очевиден.

Метод отбора: Ответ d) бесмысленен, так как легко построить СЛАУ не имеющее нулевых решений, удовлетворяющее этому свойству. У вас веселая альтернатива между ответами a), b), c) и e).

Solution to Quiz: Из метода Гаусса следует, что совместная ступенчатая система над полем K имеет решение в поле K. Всякая СЛАУ эквивалентна ступенчатой системе. Поэтому правилен ответ b).

Метод отбора: Сразу отпадают ответы a), c), e) так как противоречат практике повседневного решения простейших систем с двумя неизвестными. У вас альтернатива между b) и d).

■

Solution to Quiz: Наибольшим общим делителем двух многочленов называется многочлен со старшим коэффициентом 1 , являющийся общим делителем $f(x), g(x)$, который делится на любой другой общий делитель этих многочленов.Заметим, что он существует для любой пары многочленов, хотя бы один из которых отличен от нуля. Ответ e).

Метод отбора: $gcd(f(x), g(x)$ – это многочлен, поэтому отпадают ответы a) и b). Он должен быть делителем обеих многочленов. Поэтому отпадает ответ c). У вас альтернатива между d) и e).

Solution to Quiz: Если α корень многочлена с вещественными коэффициентами, то и $\bar{\alpha}$ корень этого многочлена той же кратности. Ответ c).

Метод отбора: Ясно, что $f(1) = 9 \neq 0$, поэтому ответ b) отпадает. Аналогично $f(i) = 1 - i - 1 - 4i + 10 \neq 0$ и поэтому ответ e) ложен. У вас альтернатива между a), c) и d).

Solution to Quiz: Очевидно ответ d).

Метод отбора: Вектор и число разного поля ягоды. Поэтому ответы a), b), c) и e) бесмысленны.

■

Solution to Quiz: Система векторов линейного пространства называется линейно независимой если только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору.

Метод отбора: Если $a_2 = \lambda a_1$, то о какой независимости векторов друг от друга может идти речь? Поэтому ответы a), d) и e) отпадают. Ответ c) также неверен так как тривиальная комбинация векторов равна нулевому вектору. Остается только a).

Solution to Quiz: Пусть $a = \mu_1 a_1 + \mu 2 a_2 + \cdots + \mu_n a_n$ и векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно зависимы. Тогда $\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2 + \cdots + \rho_n a_n = \theta$ при некоторых нетривиальных $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$. Тогда $a = a + \theta$ будет иметь неоднозначное разложение. Ответ а).

Метод отбора: сомнителен пункт е), для остальных нужны знания.

Solution to Quiz: Вспоминая закон дистрибутивности скалярного произведения по обеим координатам, убеждаемся, что верен только ответ e).

Метод отбора: В ортонормированном базисе $(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$. Но здесь любой базис. Поэтому отпадают ответы b), c). У вас альтернатива между a), d), e).

Solution to Quiz: Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима. Ответ d).

Метод отбора: Если $a \neq \theta$, то $(a, a) \neq 0$. Поэтому ответы a), c) отпадают. У вас альтернатива между b), d) и e).

Solution to Quiz: Процесс ортогонализации преобразует произвольный базис в ортогональный базис.

Метод отбора: Из геометрических соображений ответы a), b), e) бессмысленны. У вас альтернатива между c) и d).

Solution to Quiz: Разлагая определитель по последней строке получаем , что он равен минору не содержащему x и этот минор явно не равен нулю. Решений нет. Ответ e).

Метод отбора: ничего не можем забраковать, нужны знания.

∎

Solution to Quiz: Определитель 4-го порядка есть сумма $4! = 24$ слагаемых со знаками, каждое из которых находится в интервале $[-1, 1]$. Следовательно верный ответ c).

Метод отбора: Метод отбора: ничего не можем забраковать, нужны знания.

Solution to Quiz: Преобразования Гаусса не меняют ранга матрицы. Ответ d).

Метод отбора: Ответ e) экзотичен, и поэтому неверен. Ответ a) также неверен, если число взять равным нулю, то всю матрицу можно занулить. Ответ c) слишком вольные преобразования с матрицей, поэтому неверен. У вас альтернатива между b) и d).

■