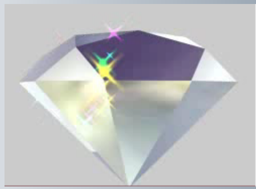
Механико-математический факультет
Кафедра ГАМЛ КазНУ им. аль-Фараби
К.А. Мейрембеков
meirembekov@mail.ru
Финальная версия 6 ноября 2007 г.
Алматы

Интерактивные тесты
по алгебре

Аннотация

Настоящий файл является дополнением к интерактивному электронному учебнику по алгебре-1 К.А. Мейрембекова опубликованному на сайтах *http://www.kazsu.kz/main.aspx?id=66* и *http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm*. В файле собраны интерактивные тесты по десяти разделам алгебры. Файл может стать важным пособием при подготовке к коллоквиумам, экзаменам, экзаменам промежуточного государственного контроля и экзаменам ГЭК.

Title Page
Contents
Page 2 of 112
Go Back
Close



О файле

Настоящий файл посвящен вспомогательной форме контроля знаний студентов – тестированию. Файл является дополнением к файлу автора *"Интерактивный электронный учебник по алгебре-1"*, который размещен на

- сайте КазНУ им. аль-Фараби, на страничке кафедры геометрии, алгебры и математической логики механико-математического факультета *http://www.kazsu.kz/main.aspx?id=66*
- и на сайте *http:/eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm.*

В этом учебнике имеется раздел "Как решать тесты". По всем возникающим вопросам читатель отсылается к указанному файлу. Читатель в интерактивном режиме, может решать тесты по десяти разделам алгебры. Автор будет признателен читателям, заметившим опечатки. Мой e-mail *meirembekov@mail.ru.* Автор планирует еще выпустить *"Интерактивный электронный учебник по алгебре-2"* и *"Интерактивный практикум по алгебре"*.

Из предлагаемых тестов, авторами 29-и из них являются действующие и бывшие сотрудники кафедры геометрии, алгебры и математической логики КазНУ им. аль-Фараби:

С.А. Бадаев 1.4, 10.18, 10.19, 10.20, 10.21.

Е.Р. Байсалов 3.14, 5.1, 5.2, 5.3, 5.5.

С.С. Заурбеков 2.1, 2.2, 2.3, 2.5, 2.6, 3.11, 3.12, 4.4, 4.6.

Г.Р. Каздаева 1.2, 1.3, 4.5, 4.8, 6.9, 6.10.

Остальные 210 тестов принадлежат автору настоящего файла. Коллаж на четвертой странице изготовлен старшим преподавателем ***А.Е. Велавичене***. Автор признателен всем перечисленным преподавателям за сотрудничество.

Для начала тестирования в любом из предлагаемых разделов необходимо вначале нажать Start ответить на вопросы раздела и нажать End. В графе Score будет показываться результат. При нажатии на фразу Correct будут показаны правильные ответы. В отличие от упоминавшегося электронного учебника, настоящий файл не содержит подробных решений тестов и, поэтому, не имеет скрытых страниц.

Легенда: В файле ✔ означает, что ответ студента совпадает с верным, а символ ✘ означает, что его ответ неверен, корректный ответ обозначен символом ●.

Навигация

Нажатие мышью на фразы или символы панели приводит к следующим действиям:

Title Page – переход на первую страницу;

Contents – переход на страницу оглавления;

◀◀ ▶▶ – переход на первую или последнюю страницу;

◀ ▶ – переход на предыдущую или следующую страницу;

Page – диалог перехода на нужную страницу.

Go Back – возврат на последнюю ранее посещенную страницу;

Close – диалог закрытия файла, на вопрос о сохранении изменений необходимо выбрать нет. Защита файла все равно не даст сделать изменения.

Наиболее быстрый способ навигации через Contents. Возможно также переходить на нужную страницу через Page или кнопками с символами, или просто щелкая левой или правой кнопками мыши.

al-Farabi Kazakh National University
Almaty
1934
Title Page
Contents
Page 6 of 112
Go Back
Close

Мой родной город и мой университет

Содержание

1. Комплексные числа

Start

1.1. Найти модуль комплексного числа $-1+i\sqrt{3}$.

Ответы:

☐ a) -1; ☐ b) $\sqrt{3}$; ☐ c) $\sqrt{3}-1$; ☐ d) 2; ☐ e) $1+\sqrt{3}$.

1.2. Найти аргумент комплексного числа $2+\sqrt{3}+i$.

Ответы:

☐ a) $\frac{\pi}{3}$, ☐ b) $\frac{\pi}{6}$, ☐ c) $\frac{\pi}{12}$, ☐ d) $-\frac{\pi}{6}$, ☐ e) $-\frac{\pi}{3}$.

1.3. Сколько решений имеет уравнение $x^4-2x^2+\sqrt{12}=0$ в поле комплексных чисел?

Ответы:

☐ a) 0, ☐ b) 2, ☐ c) 3, ☐ d) 4, ☐ e) 12.

1.4. Сколько пар различных сопряженных чисел содержит множество корней 7-й степени из 1 ?

Ответы:

☐ a) 0, ☐ b) 1, ☐ c) 2, ☐ d) 3, ☐ e) 4.

1.5. Пусть аргумент комплексного числа z равен φ . Каков аргумент числа $z+|z|$?

Ответы:

☐ a) 0, ☐ b) π, ☐ c) 2φ, ☐ d) $\varphi/2$, ☐ e) $\pi/6+\varphi$.

1.6. Пусть z ненулевое комплексное число и $|z| = |z - |z||$. Каков аргумент числа z ?
Ответы:

☐ a) $\pi/3$, ☐ b) $\pi/6$, ☐ c) $40°$, ☐ d) $\pi/4$, ☐ e) $\pi/2$.

1.7. Пусть z_1 и z_2 комплексные числа, аргументы которых подчиняются условию $Arg(z_1) = \varphi$ и $Arg(z_2) = \psi$. Каков аргумент числа $z_1 \cdot z_2$?
Ответы:

☐ a) 0, ☐ b) $\varphi + \psi$, ☐ c) $40°$, ☐ d) $\varphi - \psi$, ☐ e) $\varphi \cdot \psi$.

1.8. Пусть z_1 и z_2 комплексные числа, аргументы которых подчиняются условию $Arg(z_1) = \varphi$ и $Arg(z_2) = \psi$. Каков аргумент числа z_1/z_2 ?
Ответы:

☐ a) $\pi/3$, ☐ b) $\varphi + \psi$, ☐ c) $40°$, ☐ d) $\varphi - \psi$, ☐ e) $\varphi \cdot \psi$.

1.9. Пусть z_1 и z_2 комплексные числа, аргументы которых подчиняются условию $Arg(z_1) = \varphi$ и $Arg(z_2) = \psi$, причем $\varphi < \psi$. В каком наименьшем из следующих угловых интервалов находится аргумент числа $z_1 + z_2$?
Ответы:

☐ a) $(0,\ \pi/3)$, ☐ b) $(0,\ \varphi + \psi)$, ☐ c) $(\varphi,\ \varphi + \psi)$, ☐ d) $(\varphi,\ \psi)$, ☐ e) $(\varphi,\ \varphi \cdot \psi)$.

1.10. Пусть z_1 и z_2 комплексные числа, Каков модуль числа $z_1 \cdot z_2$?
Ответы:

☐ a) $z_1^2 + z_2^2$, ☐ b) $|z_1| - |z_2|$, ☐ c) $|z_1| + |z_2|$, ☐ d) $|z_1|/|z_2|$, ☐ e) $|z_1| \cdot |z_2|$.

1.11. Пусть z_1 и z_2 комплексные числа, Каков модуль числа z_1/z_2 ?
Ответы:
☐ a) $z_1^2 + z_2^2$, ☐ b) $|z_1| - |z_2|$, ☐ c) $|z_1| + |z_2|$, ☐ d) $|z_1|/|z_2|$, ☐ e) $|z_1| \cdot |z_2|$.

1.12. Пусть z_1 и z_2 комплексные числа такие, что $|z_1| = a < |z_2| = b$. В каком наименьшем из следующих интервалов находится модуль числа $z_1 + z_2$?
Ответы:
☐ a) $(b-a,\ a+b)$, ☐ b) $(b/a,\ ab)$, ☐ c) $(a,\ b)$, ☐ d) $(a,\ a+b)$, ☐ e) $(a,\ ab)$.

1.13. Пусть z_1 и z_2 комплексные числа такие, что $|z_1| = a < |z_2| = b$. В каком наименьшем из следующих интервалов находится модуль числа $z_1 - z_2$?
Ответы:
☐ a) $(b/a,\ ab)$, ☐ b) $(a,\ b)$, ☐ c) $(a,\ a+b)$, ☐ d) $(a,\ ab)$, ☐ e) $(b-a,\ a+b)$.

1.14. Пусть z комплексное число. При каких условиях оно будет и вещественным?
Ответы:
a) ☐ никогда не будет, b) ☐ только, если $z = 0$, c) ☐ только, если z^2 вещественно, d) ☐ если $z = \bar{z}$, e) ☐ только, если аргумент этого числа равен нулю.

1.15. Пусть z комплексное число. При каких условиях оно будет чисто мнимым?

Ответы:

☐ *a)* никогда не будет, ☐ *b)* только, если $z = 0$, ☐ *c)* только, если z^3 вещественно, ☐ *d)* если $z = -\bar{z}$, ☐ *e)* только, если аргумент этого числа равен $\pi/2$.

1.16. Сопряженное суммы двух комплексных чисел равно:

Ответы:

☐ *a)* сумме этих чисел, ☐ *b)* сумме сопряженных этих чисел, ☐ *c)* сумме их модулей, ☐ *d)* произведению их модулей, ☐ *e)* произведению этих чисел.

1.17. Сопряженное произведения двух комплексных чисел равно:

Ответы:

☐ *a)* произведению сопряженных этих чисел, ☐ *b)* сумме сопряженных этих чисел, ☐ *c)* сумме их модулей, ☐ *d)* произведению их модулей, ☐ *e)* произведению этих чисел.

1.18. Пусть $z = a + bi$ комплексное число. Чему равен модуль $|z|$?

Ответы:

☐ *a)* $a + b$, ☐ *b)* $|a| + |b|$, ☐ *c)* $|a| \cdot |b|$, ☐ *d)* $a^2 + b^2$, ☐ *e)* $\sqrt{a^2 + b^2}$.

1.19. Какое из следующих комплексных чисел записано в тригонометрической форме?

Ответы:

☐ a) $-(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ☐ b) $\cos\alpha - i\sin\alpha$, ☐ c) $\sin\alpha + i\cos\alpha$,

☐ d) $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$, ☐ e) $\cos\alpha + i\sin\alpha$.

1.20. Пусть $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ комплексное число. Какому из следующих выражений равна степень z^n числа z ?

Ответы:

☐ a) $\rho^n(\cos\alpha^n + i\sin\alpha^n)$, ☐ b) $\rho^n(\cos^n(\alpha) + i\sin^n(\alpha))$,

☐ c) $\rho^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$, ☐ d) $n\rho(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$,

☐ e) $\rho^n(\cos^n(n\alpha) + i\sin^n(n\alpha))$.

1.21. Пусть $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ комплексное число. Какому из следующих выражений равен корень n-ой степени из числа z ?

Ответы:

☐ a) $\sqrt[n]{\rho}\,[\sqrt[n]{\cos\alpha} + i\sqrt[n]{\sin\alpha}]$, ☐ b) $\sqrt[n]{\rho}\,[\cos(\sqrt[n]{\alpha}) + i\sin(\sqrt[n]{\alpha})]$,

☐ c) $\sqrt[n]{\rho}\,[\cos(\frac{\alpha}{n}) + i\sin(\frac{\alpha}{n})]$, ☐ d) $\sqrt[n]{\rho}\,[\cos(\frac{\alpha+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\alpha+2k\pi}{n})]$, где $0 \le k \le n-1$,

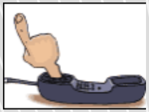
☐ e) $\sqrt[n]{\rho}\,[\sqrt[n]{\cos(\sqrt[n]{\alpha})} + i\sqrt[n]{\sin(\sqrt[n]{\alpha})}]$.

End Score: Correct

HELP! SOS!!!

Title Page
Contents
Page 12 of 112
Go Back
Close

2. Определители



Уровень некоторых размышлений

Start

2.1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ответы:

☐ *a)* 0, ☐ *b)* $4ab$, ☐ *c)* $-abcd$, ☐ *d)* $abcd$, ☐ *e)* $10ad$.

2.2. Выяснить, какое из следующих произведений не входит в развернутое выражение определителя шестого порядка

Ответы:

☐ *a)* $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$, ☐ *b)* $a_{31}a_{13}a_{52}a_{45}a_{24}a_{66}$, ☐ *c)* $a_{34}a_{21}a_{46}a_{16}a_{61}a_{43}$,
☐ *d)* $a_{11}a_{23}a_{34}a_{45}a_{56}a_{62}$, ☐ *e)* $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}a_{56}a_{65}$.

2.3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} log_a b & 1 \\ 1 & log_b a \end{vmatrix}$$

Ответы:

☐ *a)* $log_a b + 1$, ☐ *b)* 1, ☐ *c)* 0, ☐ *d)* $log_b a + 1$, ☐ *e)* $log_a b$.

2.4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Ответы:

☐ *a)* 1, ☐ *b)* 0, ☐ *c)* 100, ☐ *d)* -50, ☐ *e)* 50.

2.5. Выбрать значения i,j,k так, чтобы произведение $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$ входило в развернутое выражение определителя шестого порядка со знаком минус

Ответы:

☐ *a)* 2, 3, 2, ☐ *b)* 4, 5, 6, ☐ *c)* 5, 6, 1, ☐ *d)* 4, 2, 2, ☐ *e)* 3, 2, 3

2.6. Выбрать значения i,j,k так, чтобы произведение $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$ входило в развернутое выражение определителя шестого порядка со знаком плюс.

Ответы:

☐ *a)* 2, 3, 2, ☐ *b)* 2, 2, 3, ☐ *c)* 4, 5, 1, ☐ *d)* 2, 4, 2, ☐ *e)* 2, 5, 2

2.7. Определитель матрицы A равен нулю , если

Ответы:

☐ *a)* строки матрицы линейно независимы, ☐ *b)* ранг матрицы равен порядку матрицы, ☐ *c)* столбцы матрицы линейно независимы, ☐ *d)* матрица является единичной, ☐ *e)* строки матрицы линейно зависимы.

2.8. Для каких матриц существует определитель?

Ответы:

☐ *a)* для квадратных матриц, ранг которых совпадает с ☐ количеством строк, ☐ *b)* для любой матрицы, ☐ *c)* для любой квадратной матрицы, ☐ *d)* для вырожденных квадратных матриц, *e)* для неединичных матриц.

2.9. Чему равен определитель матрицы $4 \cdot A^{-1}$ для матрицы второго порядка A , если её определитель равен 3.

Ответы:

☐ *a)* 4, ☐ *b)* 3, ☐ *c)* 4/3, ☐ *d)* 16/3, ☐ *e)* 1/12.

2.10. Как изменится определитель порядка n , если одновременно из первой строки вычесть вторую, из второй третью и из третьей первую?
Ответы:

- ☐ *a)* изменит знак,
- ☐ *b)* не изменится,
- ☐ *c)* станет равным нулю,
- ☐ *d)* зависит от конкретного определителя,
- ☐ *e)* умножится на λ .

2.11. Как изменится определитель, если из удвоенной второй строки отнять утроенную третью?
Ответы:

- ☐ *a)* утроится,
- ☐ *b)* не изменится,
- ☐ *c)* умножится на -3,
- ☐ *d)* удвоится,
- ☐ *e)* изменит знак.

2.12. Сумма произведений каких миноров определителя на их алгебраические дополнения равна этому определителю по теореме Лапласа?
Ответы:

- ☐ *a)* главных миноров,
- ☐ *b)* миноров k-го порядка,
- ☐ *c)* угловых миноров,
- ☐ *d)* всех миноров в заданных k строках,
- ☐ *e)* всех миноров k-го порядка в заданных k строках.

2.13. В определителе третьего порядка все элементы нечетные числа делящиеся на пять. Найти наибольшее число из следующих на которое делится этот определитель

Ответы:

☐ *a)* 1000, ☐ *b)* 5!, ☐ *c)* 5, ☐ *d)* 125, ☐ *e)* 500.

2.14. В определителе четвертого порядка все элементы вещественны и находятся в сегменте $[-1, 1]$. В какой наименьший сегмент из нижеследующих попадает значение определителя?

Ответы:

☐ *a)* $[-4, 4]$, ☐ *b)* $[-50, 50]$, ☐ *c)* $[-24, 24]$, ☐ *d)* $[-100, 100]$, ☐ *e)* $[-1, 1]$.

2.15. Пусть в определителе Δ порядка n сумма строк с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами. Найти наиболее точную оценку величины определителя из следующих:

Ответы :

☐ *a)* четное число, ☐ *b)* $\leq n!$, ☐ *c)* любое число, ☐ *d)* нечетное число, ☐ *e)* 0.

2.16. Какие числа из следующих являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3+x & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Ответы:

☐ *a)* $5!$, ☐ *b)* 0, ☐ *c)* -1, ☐ *d)* любое число, ☐ *e)* корней нет.

2.17. Найти все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Ответы:

☐ *a)* 0, ☐ *b)* 1, ☐ *c)* $5!$, ☐ *d)* любое число, ☐ *e)* корней нет.

2.18. Какие числа из следующих являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ответы:

☐ a) 1, ☐ b) 5!, ☐ c) 0, ☐ d) любое число, ☐ e) корней нет.

2.19. Пусть Δ определитель 6-го порядка, все коэффициенты которого целые числа и k наибольший общий делитель всех миноров второго порядка в Δ . На какое наибольшее число из следующих делится Δ ? Да поможет вам Лаплас!

Ответы:

☐ a) 6, ☐ b) 6!, ☐ c) k, ☐ d) k^3, ☐ e) k^6.

2.20. Пусть Δ определитель 3-го порядка, все коэффициенты которого лежат в списке $\{-1, 1\}$. В каком наименьшем из следующих списков лежит Δ ?

Ответы:

☐ a) четные числа, ☐ b) нечетные числа, ☐ c) целые числа между -6 и 6, ☐ d) четные числа между -6 и 6, ☐ e) четные числа между -4 и 4.

2.21. Пусть Δ определитель порядка $n \geq 4$. Чему равна сумма произведений всех миноров в первых трех строках на их алгебраические дополнения?

Ответы:

☐ a) 0, ☐ b) Δ, ☐ c) $-\Delta$, ☐ d) 3Δ, ☐ e) 7Δ.

2.22. Пусть $\Delta = \det(a_{ij})_n^n$ определитель с комплексными коэффициентами и $\forall ij(a_{ij} = \bar{a}_{ji})$. Тогда определитель Δ является числом

Ответы:

☐ *a)* положительным, ☐ *b)* чисто мнимым, ☐ *c)* рациональным, ☐ *d)* равным 1, ☐ *e)* вещественным.

2.23. Пусть Δ определитель третьего порядка и $\forall ij[a_{ij} = \max\{i, j\}]$. Чему равен определитель Δ ?

Ответы:

☐ *a)* 0, ☐ *b)* 1, ☐ *c)* 3, ☐ *d)* 3!, ☐ *e)* -6.

2.24. Пусть Δ определитель третьего порядка и $\forall ij[a_{ij} = \min\{i, j\}]$. Чему равен определитель Δ ?

Ответы:

☐ *a)* 0, ☐ *b)* 1, ☐ *c)* 3, ☐ *d)* 3!, ☐ *e)* -5.

2.25. Пусть Δ определитель 4-го порядка. Чему равна сумма произведений всех миноров второго порядка в первых трех строках на их алгебраические дополнения?

Ответы:

☐ *a)* $-\Delta$, ☐ *b)* 2Δ, ☐ *c)* 4Δ, ☐ *d)* 0, ☐ *e)* 3Δ.

2.26. В определителе третьего порядка все элементы четные числа. Найти наибольшее число из следующих на которое делится этот определитель

Ответы:

☐ *a)* 2, ☐ *b)* 4, ☐ *c)* 3!, ☐ *d)* 8, ☐ *e)* 24.

2.27. В определителе переставили все строки так, чтобы они следовали в обратном порядке и затем в полученном определителе аналогичным образом переставили все столбцы. Как изменится этот определитель?

Ответы:

☐ *a)* изменит знак, ☐ *b)* не изменится, ☐ *c)* никакой закономерности не существует, ☐ *d)* умножится на 4!, ☐ *e)* может стать равным нулю .

2.28. В определителе n-го порядка ко всем элементам первой строки прибавили число 1 . Как при этом меняется величина определителя?

Ответы:

☐ *a)* изменит знак, ☐ *b)* не изменится, ☐ *c)* ни один из остальных ответов не является правильным, ☐ *d)* увеличится на 1, ☐ *e)* станет равным нулю.

2.29. В определителе второго порядка, величина которого равна числу Δ , каждый элемент заменили на его алгебраическое дополнение. Какому числу равен полученный определитель?

Ответы:

☐ *a)* 0, ☐ *b)* 1, ☐ *c)* Δ, ☐ *d)* $-\Delta$, ☐ *e)* 2Δ.

2.30. В определителе n-го порядка Δ все элементы первой строки равны числу 1 . Чему равна альтернированная сумма

$$A_{11} - A_{12} + A_{13} - A_{14} + \cdots + (-1)^n A_{1n}$$

алгебраических дополнений элементов первой строки?
Ответы:

☐ *a)* 0, ☐ *b)* 1, ☐ *c)* $-\Delta$, ☐ *d)* 2Δ, ☐ *e)* Δ.

2.31. Пусть Δ определитель третьего порядка. Чему будет равна величина этого определителя, если его повернуть относительно побочной диагонали?
Ответы:

☐ *a)* 0, ☐ *b)* Δ, ☐ *c)* 1, ☐ *d)* $-\Delta$, ☐ *e)* 2Δ.

2.32. В определителе Δ пятого порядка одновременно к первой строке прибавили все остальные и аналогично к последней строке прибавили все остальные строки. Чему будет равен полученный определитель?
Ответы:

☐ *a)* 0, ☐ *b)* Δ, ☐ *c)* 1, ☐ *d)* $-\Delta$, ☐ *e)* 2Δ.

2.33. Пусть задан определитель d порядка n. Определитель Δ получен из d заменой каждого элемента на его алгебраическое дополнение. Найти определитель Δ.

☐ *a)* d^{n-1}, ☐ *b)* $\frac{1}{d}$, ☐ *c)* d, ☐ *d)* 0, ☐ *e)* d^2.

End | Score: | Correct

Title Page
Contents
Page 22 of 112
Go Back
Close

3. Матрицы

Уровень определений

Start

3.1. Какие условия необходимы и достаточны для существования произведения матриц A и B ?

Ответы:

- ☐ *a)* число строк матрицы A равно числу столбцов матрицы B,
- ☐ *b)* число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B,
- ☐ *c)* матрицы должны быть квадратными,
- ☐ *d)* число строк и столбцов матрицы A равно, соответственно, числу строк и столбцов матрицы B,
- ☐ *e)* матрицы должны иметь одинаковый порядок.

3.2. Через штрих обозначается транспонирование матриц. Чему равно $(A \cdot B)'$?

Ответы:

☐ *a)* $A' \cdot B'$, ☐ *b)* $B \cdot A$, ☐ *c)* $A' \cdot B$, ☐ *d)* $A \cdot B$, ☐ *e)* $B' \cdot A'$.

3.3. Ранг матрицы равен :

Ответы:

- ☐ *a)* максимальному минору отличному от нуля,
- ☐ *b)* размеру минора отличного от нуля,
- ☐ *c)* числу строк,
- ☐ *d)* максимуму из порядков миноров отличных от нуля,
- ☐ *e)* числу миноров этой матрицы.

3.4. Пусть A некоторая матрица. Для того, чтобы она была обратима необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

Ответы:

- ☐ *a)* должна быть прямоугольной,
- ☐ *b)* должна быть квадратной,
- ☐ *c)* симметрической,
- ☐ *d)* должна быть квадратной невырожденной матрицей,
- ☐ *e)* должна быть единичной матрицей.

3.5. При каких преобразованиях из следующих ранг матрицы не меняется?
Ответы:

- ☐ *a)* при умножении строки на число,
- ☐ *b)* прибавление к столбцу другого столбца умноженного на $\lambda \neq 0$ и умножение столбцов на любое число,
- ☐ *c)* перестановка элементов матрицы местами,
- ☐ *d)* прибавление к строке другой строки умноженной на λ и умножение столбцов на любое число не равное нулю,
- ☐ *e)* возведении всех элементов некоторой строки в квадрат.

3.6. Пусть матрица A имеет m строк и n столбцов и матрица B имеющая k строк и s столбцов такова, что существуют оба произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$. Каким условиям подчиняются размеры матриц A, B ?
Ответы:

- ☐ *a)* должно быть только $m = n$ и B квадратная матрица порядка n,
- ☐ *b)* $n = k$ и $m = s$,
- ☐ *c)* $mn = k + s$,
- ☐ *d)* обе матрицы должны быть одинаковых размеров,
- ☐ *e)* размеры матриц могут быть любыми.

3.7. Пусть матрица A имеет m строк и n столбцов и существует матрица A^2 . Каким требованиям должна подчиняться эта матрица ?

Ответы:

☐ *a)* она должна быть квадратной, ☐ *b)* она должна состоять из одной строки, ☐ *c)* она должна состоять из одного столбца, ☐ *d)* она может быть любой, ☐ *e)* обязана быть обратимой.

3.8. Для того, чтобы матрица имела обратную необходимо и достаточно следующее условие:

Ответы:

☐ *a)* матрица должна быть квадратной, ☐ *b)* матрица является единичной, ☐ *c)* матрица является вырожденной, ☐ *d)* матрица является квадратной и невырожденной, ☐ *e)* любая матрица.

3.9. Какое из следующих предложений верно?

Ответы:

- ☐ *a)* ранг матрицы по столбцам меньше ранга матрицы,
- ☐ *b)* ранг матрицы по строкам больше ранга матрицы,
- ☐ *c)* ранг матрицы равен сумме рангов по строкам и по столбцам,
- ☐ *d)* ранг матрицы по строкам равен рангу по столбцам,
- ☐ *e)* ранг матрицы равен разнице рангов матрицы по столбцам и по строкам.

3.10. Пусть $r(A)$ – ранг основной матрицы, а $r(B)$ – ранг расширенной матрицы системы линейных уравнений. Необходимое и достаточное условие совместности системы:

Ответы:

- ☐ *a)* $r(A) = r(B) - 1$,
- ☐ *b)* $r(B) = r(A)$,
- ☐ *c)* $r(B) = r(A) +$ число ненулевых свободных членов,
- ☐ *d)* $r(A)$ равен числу неизвестных,
- ☐ *e)* $r(B)$ равен числу уравнений.

3.11. Укажите квадратную матрицу третьего порядка B такую, что для каждой матрицы третьего порядка A имеет место равенство
$A \cdot B = 5 \cdot A$

Ответы:

☐ a) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$; ☐ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ☐ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; ☐ d) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; ☐ e) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите A^3.

Ответы:

☐ a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}$; ☐ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 255 & 256 \end{pmatrix}$; ☐ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 63 & 64 \end{pmatrix}$; ☐ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 63 & 64 \end{pmatrix}$; ☐ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 64 & 63 \end{pmatrix}$.

3.13. Известно, что матрицы A, B и $A \cdot B$ – квадратные матрицы порядка n . Чему равна $(A \cdot B)^{-1}$?

Ответы:

☐ a) $A^{-1} \cdot B^{-1}$, ☐ b) $A^{-1} \cdot B$, ☐ c) $A \cdot B^{-1}$, ☐ d) $A \cdot B$, ☐ e) $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

3.14. Пусть A и B, C такие матрицы, что существуют произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, $B \cdot C$. Какое из следующих равенств безусловно верное.

Ответы:

☐ a) $A \cdot B = B \cdot A$, ☐ b) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, ☐ c) $A \cdot B = E$, ☐ d) $B \cdot A = E$, ☐ e) $A = E$ и $B = E$.

3.15. Пусть A квадратная матрица n-го порядка перестановочная с любой матрицей n-го порядка. Тогда матрица A обязана быть

Ответы:

☐ a) нулевой, ☐ b) единичной, ☐ c) равной матрице λE, ☐ d) треугольной, ☐ e) симметричной.

3.16. Пусть A целочисленная квадратная матрица. Тогда обратная матрица к A существует и целочисленна в том и только в том случае, когда

Ответы:

☐ a) A невырождена, ☐ b) $\det A = 1$, ☐ c) $\det A = -1$, ☐ d) $\det A = \pm 1$, ☐ e) каждый элемент в A равен $+1$ или -1.

3.17. Пусть определитель матрицы третьего порядка A равен 5. Чему равен определитель матрицы $2 \cdot A^2$?

Ответы:

☐ a) 10, ☐ b) 25, ☐ c) 50, ☐ d) 200, ☐ e) 500.

3.18. Пусть A и B невырожденные квадратные матрицы одного порядка. Каким из следующих свойств обладает матрица $A+B$?

Ответы:

☐ *a)* она нулевая, ☐ *b)* она единичная, ☐ *c)* невырожденная, ☐ *d)* ни один из остальных ответов не является правильным, ☐ *e)* симметрическая.

3.19. Пусть A и B невырожденные квадратные матрицы одного порядка. Каким из следующих свойств обладает матрица $A \cdot B$?

Ответы:

☐ *a)* она ортогональная, ☐ *b)* она единичная, ☐ *c)* невырожденная, ☐ *d)* ни один из остальных ответов не является правильным, ☐ *e)* симметрическая.

3.20. Пусть матрица A имеет три строки и два столбца, а матрица B имеет четыре строки и три столбца. Какие из следующих операций над этими матрицами имеют смысл?

Ответы:

☐ *a)* $A+B$, ☐ *b)* A^2, ☐ *c)* B^2, ☐ *d)* $A \cdot B$, ☐ *e)* $B \cdot A$.

3.21. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 матрицы, причем для любого $k \leq 4$ матрица A_k имеет k строк и $k+1$ столбец. Каковы размеры матрицы $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$?

Ответы:

- ☐ *a)* одна строка и пять столбцов,
- ☐ *b)* две строки четыре столбца,
- ☐ *c)* матрица четвертого порядка,
- ☐ *d)* произведение не имеет смысл,
- ☐ *e)* матрица первого порядка.

3.22. Пусть матрица A имеет обратную матрицу и ρ ненулевое число. Какова матрица $[(\rho A)^2]^{-1}$?

Ответы:

- ☐ *a)* ρA^{-1} ,
- ☐ *b)* не существует,
- ☐ *c)* $\rho^2(A^{-1})^2$,
- ☐ *d)* $\rho^{-2}(A^{-1})^2$,
- ☐ *e)* $\rho^{-2}A^{-1}$.

3.23. Пусть матрица A диагональная и A^{10} равна нулевой матрице. Тогда эта матрица обязана быть: ?

Ответы:

- ☐ *a)* вырожденной, но не обязательно нулевой,
- ☐ *b)* нулевой,
- ☐ *c)* нильпотентной, но не обязательно нулевой,
- ☐ *d)* единичной,
- ☐ *e)* невырожденной.

End | Score: | Correct

Title Page
Contents
Page 31 of 112
Go Back
Close

4. Системы линейных алгебраических уравнений

Start

4.1. Пусть некоторая система линейных алгебраических уравнений, далее называемая $SLAU_1$, имеет единственное решение $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n)$ и поменяв местами во всех уравнениях $SLAU_1$ коэффициенты при x_1 и x_2 получили $SLAU_2$. Какому условию подчиняется решения $SLAU_2$?

Ответы:

- ☐ *a)* имеет единственное решение $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$,
- ☐ *b)* она может быть несовместной,
- ☐ *c)* она может иметь бесконечно много решений,
- ☐ *d)* имеет нулевое решение,
- ☐ *e)* имеет единственное решение $(\beta_2, \beta_1, \beta_3, \ldots, \beta_n)$.

4.2. Пусть некоторая система линейных алгебраических уравнений, далее называемая $SLAU_1$, имеет единственное решение $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. $SLAU_2$ получается из $SLAU_1$ умножением на 2 коэффициентов при x_1 во всех уравнениях. Какому условию подчиняются решения $SLAU_2$?

Ответы:

- ☐ *a)* имеет единственное решение $(\frac{1}{2} \cdot \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$,
- ☐ *b)* она может быть несовместной,
- ☐ *c)* она может иметь бесконечно много решений,
- ☐ *d)* имеет нулевое решение,
- ☐ *e)* имеет единственное решение $(2 \cdot \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

4.3. Пусть нам задана система четырех линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными с вещественными коэффициентами. Тогда эта система может иметь следующее число решений :

Ответы:

- ☐ *a)* любое число $n \leq \infty$,
- ☐ *b)* ровно 4,
- ☐ *c)* ровно 2 или ровно одно,
- ☐ *d)* либо ни одного, либо одно, либо бесконечно много,
- ☐ *e)* не больше четырех.

4.4. При каких значениях α система имеет единственное решение ?

$$\begin{cases} \alpha x + 2y &= 3 \\ \alpha y + 2x &= 4 \end{cases}$$

Ответы:

- ☐ *a)* $\alpha \neq 0$;
- ☐ *b)* $\alpha \notin \{-2, 2\}$;
- ☐ *c)* $\alpha \neq 4$;
- ☐ *d)* при любом α;
- ☐ *e)* для всех α неверно.

4.5. Пусть имеется система n линейных уравнений. Каждое i-тое уравнение умножим на α_i и просуммируем. При каких условиях первое уравнение можно заменить на полученное?

Ответы:

- ☐ *a)* всегда;
- ☐ *b)* никогда;
- ☐ *c)* если $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0$;
- ☐ *d)* если $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 0$;
- ☐ *e)* если $\alpha_1 \neq 0$.

4.6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (1+i)x+(1-i)y &= 1+i \\ (1-i)x+(1+i)y &= 1+3i \end{cases}$$

Ответы:

☐ *a)* $(i, 1+i)$, ☐ *b)* $(1+i, i)$, ☐ *c)* $(i, 1-i)$,

☐ *d)* $(1-i, i)$, ☐ *e)* $(1+i, 1-i)$.

4.7. Для каких систем линейных уравнений применим метод Крамера?

Ответы:

☐ *a)* неоднородных и несовместных, ☐ *b)* квадратных, ☐ *c)* однородных, ☐ *d)* для всех, ☐ *e)* квадратных у которых определитель системы не равен нулю.

4.8. Какое из следующих утверждений для системы линейных алгебраических уравнений верно?

Ответы:

- ☐ a) совместность системы зависит только от свободных членов,
- ☐ b) совместность системы зависит только от коэффициента при x_1,
- ☐ c) совместность системы зависит только от коэффициента при x_n,
- ☐ d) совместность системы не зависит от свободных членов,
- ☐ e) совместность системы зависит от всех коэффициентов.

4.9. Пусть в системе линейных алгебраических уравнений переставили местами коэффициенты при неизвестных x_2, x_3 . Тогда полученная система всегда

Ответы:

- ☐ a) совместна,
- ☐ b) несовместна,
- ☐ c) имеет единственное решение,
- ☐ d) число её решений равно числу решений исходной системы,
- ☐ e) имеет бесконечное число решений.

4.10. Пусть в системе линейных однородных алгебраических уравнений все коэффициенты рациональные. Определить какое из следующих высказываний справедливо

Ответы:

☐ *a)* все решения вещественны, ☐ *b)* все решения рациональны, ☐ *c)* все решения целые, ☐ *d)* существуют решения в целых числах, ☐ *e)* существуют решения в натуральных числах.

4.11. Пусть задана система линейных алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами, причем число уравнений меньше числа неизвестных. Тогда эта система всегда является

Ответы:

☐ *a)* совместной, ☐ *b)* несовместной, ☐ *c)* имеет единственное решение, ☐ *d)* имеет хотя бы комплексное решение, ☐ *e)* если совместна, то имеет бесконечное число решений.

4.12. Пусть задана система линейных алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами, причем число уравнений равно числу неизвестных. Тогда эта система

Ответы:

- ☐ *a)* несовместна,
- ☐ *b)* если совместна, то имеет и вещественное решение,
- ☐ *c)* имеет единственное решение,
- ☐ *d)* имеет хотя бы комплексное решение,
- ☐ *e)* если совместна, то имеет бесконечное число решений.

4.13. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x + y &= 5 \\ x + 2y &= 4 \end{cases}$$

Ответы:

- ☐ *a)* несовместна,
- ☐ *b)* $(5, 4)$,
- ☐ *c)* имеет бесконечно много решений и все их не перечислить,
- ☐ *d)* $(2, 1)$,
- ☐ *e)* $(1, 2)$.

End Score: Correct

Title Page

Contents

Go Back

Close

5. Многочлены

Start

5.1. Какую наименьшую степень может иметь ненулевой многочлен, если известно, что он делится на $x^2 - 1$, а его производная – на $(x+1)^2$?

Ответы:

☐ *a)* 2; ☐ *b)* 3; ☐ *c)* 4; ☐ *d)* 5; ☐ *e)* такого многочлена не существует.

5.2. Какое наибольшее число различных целочисленных корней может иметь многочлен $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in Z[x]$ если $a_n = 6$?

Ответы:

☐ *a)* сколько угодно; ☐ *b)* 8; ☐ *c)* 3, ☐ *d)* 4; ☐ *e)* 6.

5.3. Какова наибольшая степень многочленов с вещественными коэффициентами неприводимых над полем вещественных чисел:

Ответы:

☐ *a)* 1; ☐ *b)* 2; ☐ *c)* 3; ☐ *d)* 4; ☐ *e)* наибольшей степени нет.

5.4. Определить кратность корня $x = 1$ многочлена $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$.

Ответы:

☐ a) 0; ☐ b) 1; ☐ c) 2; ☐ d) 3; ☐ e) 4.

5.5. Известно, что один из корней многочлена $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 10$ равен числу $1 + i$. Какое из следующих чисел обязано быть корнем этого многочлена?

Ответы:

☐ a) $-1 - i$, ☐ b) 1, ☐ c) $1 - i$, ☐ d) $-1 + i$, ☐ e) i.

5.6. Пусть $f(x), g(x)$ многочлены с вещественными коэффициентами. Тогда наибольшим общим делителем этих многочленов называется:

Ответы:

☐ a) наибольшая степень этих многочленов,

☐ b) наибольшее число на которое делятся эти многочлены,

☐ c) многочлен $f(x) + g(x)$,

☐ d) многочлен на который делятся и $f(x)$ и $g(x)$,

☐ e) многочлен со старшим коэффициентом 1, являющийся общим делителем $f(x), g(x)$, который делится на любой другой общий делитель этих многочленов.

5.7. Пусть многочлен $f(x)$ взаимно прост с многочленом $g(x)$ и тот в свою очередь взаимно прост с многочленом $h(x)$. Какое из высказываний о многочленах $f(x)$ и $h(x)$ справедливо?

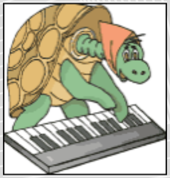
Ответы:

- ☐ a) их наибольший общий делитель взаимно прост с $g(x)$,
- ☐ b) они взаимно просты,
- ☐ c) $f(x)$ делится на $h(x)$,
- ☐ d) $h(x)$ делится на $f(x)$,
- ☐ e) ни один из остальных ответов не является верным.

5.8. Число α называется k-кратным корнем многочлена $f(x)$, если :

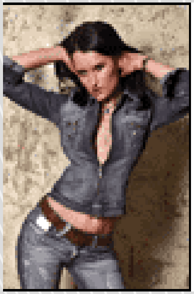
Ответы:

- ☐ a) $f(\alpha) = 0$,
- ☐ b) $f(x) = (x-\alpha)^k q(x)$, для некоторого $q(x)$,
- ☐ c) $f(x) = (x-\alpha)^k q(x)$, для некоторого $q(x)$ и $q(\alpha) \neq 0$,
- ☐ d) $f(x)$ делится на $x-\alpha$,
- ☐ e) $f(\alpha^k) = 0$.



End | Score: | Correct

6. Линейные пространства.



Start

6.1. Сколько может существовать в линейном пространстве нулевых элементов?

Ответы:

- a) один,
- b) два,
- c) конечное число,
- d) бесконечно много,
- e) ни одного.

6.2. Пусть x элемент линейного пространства над полем R, а μ – число из поля R. Что можно сказать о x и μ, если известно, что $\mu \cdot x = 0$?

Ответы:

- a) они линейно зависимы,
- b) они коллинеарны,
- c) оба равны нулю,
- d) число равно нулю или вектор нулевой,
- e) они линейно независимы.

Title Page
Contents
Page 42 of 112
Go Back
Close

6.3. Какая система векторов линейного пространства называется линейно независимой?

Ответы:

- ☐ *a)* если один из векторов нулевой,
- ☐ *b)* если только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору,
- ☐ *c)* если их линейная комбинация равна нулевому вектору,
- ☐ *d)* если она содержит пару одинаковых векторов,
- ☐ *e)* если некоторые из них компланарны.

6.4. Можно ли утверждать, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ n-мерного линейного пространства V линейно независимы, если данный вектор a из V однозначно представляется в виде линейной комбинации указанных n векторов ?

Ответы:

- ☐ *a)* да можно,
- ☐ *b)* можно, только если они образуют базис,
- ☐ *c)* не обязательно,
- ☐ *d)* можно, только если этот вектор нулевой,
- ☐ *e)* нет, это всегда не так.

6.5. Пусть в линейном пространстве V заданы n линейно независимых векторов. Что ещё надо потребовать, чтобы указанная совокупность векторов была базисом в данном линейном пространстве?

Ответы:

- ☐ *a)* они уже образуют базис,
- ☐ *b)* чтобы среди них не оказалось коллинеарных векторов,
- ☐ *c)* чтобы кроме них в пространстве V ничего не было,
- ☐ *d)* чтобы они образовывали максимальную линейно независимую систему векторов в пространстве V,
- ☐ *e)* чтобы размерность пространства V, была не менее n.

6.6. Сколько базисов имеется в линейном пространстве R^n ?

Ответы:

- ☐ *a)* один,
- ☐ *b)* n,
- ☐ *c)* $n!$,
- ☐ *d)* ни одного,
- ☐ *e)* бесконечно много.

6.7. Что называется подпространством линейного пространства V над полем K ?
Ответы:

- ☐ *a)* непустое подмножество,
- ☐ *b)* подмножество замкнутое относительно сложения векторов и умножения векторов на скаляры из K,
- ☐ *c)* непустое подмножество замкнутое относительно сложения векторов и умножения векторов на скаляры из K,
- ☐ *d)* подмножество состоящее только из нулевого вектора θ,
- ☐ *e)* все множество V.

6.8. Можно ли из порождающей системы векторов удалить некоторую часть, не изменив при этом её линейной оболочки ?
Ответы:

- ☐ *a)* можно,
- ☐ *b)* нельзя,
- ☐ *c)* можно, если порождающая система линейно независима,
- ☐ *d)* нельзя, если порождающая система линейно зависима,
- ☐ *e)* можно, если порождающая система линейно зависима.

6.9. Пусть C^n арифметическое векторное пространство над полем комплексных чисел и R^n линейное пространство над полем вещественных чисел. Тогда :

Ответы:

☐ *a)* R^n подпространство в C^n, ☐ *b)* R^n является ядром C^n, ☐ *c)* R^n не является подпространством в C^n, ☐ *d)* R^n является образом C^n, ☐ *e)* $R^n \cap C^n = \emptyset$.

6.10. Найти ранг системы векторов

$$x_1 = (-1, 4, -3, -2), x_2 = (3, -7, 5, 3), x_3 = (3, -2, 1, 0), x_4 = (-4, 1, 0, 1)$$

Ответы:

☐ *a)* 1, ☐ *b)* 2, ☐ *c)* 3, ☐ *d)* 4, ☐ *e)* 5.

6.11. Определить число всех баз системы векторов

$$x_1 = (-1, 4, -3, -2), x_2 = (3, -7, 5, 3), x_3 = (3, -2, 1, 0), x_4 = (-4, 1, 0, 1)$$

Ответы:

☐ *a)* 2, ☐ *b)* 3, ☐ *c)* 4, ☐ *d)* 5, ☐ *e)* 6.

6.12. В линейно зависимой системе, состоящей более чем из двух векторов верно одно из условий:

Ответы:

- ☐ *a)* содержится нулевой вектор,
- ☐ *b)* содержатся равные векторы,
- ☐ *c)* содержатся пропорциональные векторы,
- ☐ *d)* один из векторов является линейной комбинацией остальных,
- ☐ *e)* каждый вектор является линейной комбинацией остальных.

6.13. Сколько базисов, содержащих векторы $x_1 = (1,1,0,0), x_2 = (0,0,1,1)$, можно построить в арифметическом пространстве R^4 ?

Ответы:

- ☐ *a)* 2,
- ☐ *b)* 3,
- ☐ *c)* 4,
- ☐ *d)* 16,
- ☐ *e)* бесконечно много.

6.14. Пусть H_1 и H_2 подпространства линейного пространства V. Для того, чтобы их объединение $H_1 \cup H_2$ было подпространством необходимо и достаточно, чтобы:

Ответы:

- ☐ *a)* одно из них содержалось в другом,
- ☐ *b)* $H_1 \cup H_2 = V$,
- ☐ *c)* оно всегда подпространство,
- ☐ *d)* $H_1 \subseteq H_2$,
- ☐ *e)* $H_1 \cap H_2 = \{\theta\}$.

6.15. Пусть H_1 и H_2 подпространства линейного пространства V. Для того, чтобы их пересечение $H_1 \cap H_2$ было подпространством необходимо и достаточно, чтобы:

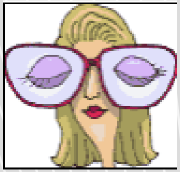
Ответы:

☐ a) одно из них содержалось в другом, ☐ b) $H_1 \cup H_2 = V$, ☐ c) оно всегда подпространство,

☐ d) $H_1 \subseteq H_2$, ☐ e) $H_1 \cap H_2 = \{\theta\}$.

End | Score: | Correct

7. Евклидовы и унитарные пространства.



Start

7.1. Что называется скалярным произведением векторов x, y в евклидовом пространстве ?

Ответы:

☐ *a)* произведение их модулей,

☐ *b)* вектор перпендикулярный к x и y,

☐ *c)* вектор перпендикулярный к x и y и составляющий с ними правую тройку, длина которого равна произведению их модулей на синус угла между ними,

☐ *d)* числовая коммутативная билинейная функция векторных аргументов x, y такая, что $\forall x[(x, x) > 0]$ при $x \neq \theta$,

☐ *e)* число равное произведению их модулей на синус угла между ними.

Title Page
Contents
Page 49 of 112
Go Back
Close

7.2. Как вводится длина (модуль) вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ в евклидовом пространстве ?

Ответы:

☐ a) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, ☐ b) $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i$, ☐ c) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$, ☐ d) $\sqrt{a}$, ☐ e) $\sqrt{(a,a)}$.

7.3. Как определяется угол между векторами a и b евклидова пространства ?

Ответы:

☐ a) $\cos\varphi = (a,b)/|a||b|$ если a и b отличны от нулевого вектора и не определен в противном случае,

☐ b) $ctg(\varphi) = (a,b)$,

☐ c) $\cos(\varphi) = (a,b)/|a||b|$,

☐ d) $tg(\varphi) = |a||b|/(a,b)$,

☐ e) $\sin(\varphi) = |a|/|a+b|$.

7.4. Какое неравенство называется неравенством Коши–Буняковского ?

Ответы:

☐ a) $(a,b) \le (a,a)\cdot(b,b)$,

☐ b) $(a,b)^2 \le (a,a)\cdot(b,b)$,

☐ c) $(a,b)^2 < (a,a)\cdot(b,b)$,

☐ d) $(a,b)^2 \ge (a,a)\cdot(b,b)$,

☐ e) $(a,b) \le (a,a)$.

7.5. Для каких векторов евклидова пространства неравенство Коши–Буняковского превращается в равенство ?

Ответы:

- ☐ *a)* ортогональных друг другу,
- ☐ *b)* коллинеарных,
- ☐ *c)* между которыми острый угол,
- ☐ *d)* между которыми тупой угол,
- ☐ *e)* ортонормированных векторов.

7.6. Как запишется скалярное произведение векторов $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ из евклидова пространства, координаты которых заданы в произвольном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$?

Ответы:

☐ a) $\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i)$, ☐ b) $\prod_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$, ☐ c) $\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$,
☐ d) $\sum_{i \neq j} \alpha_i \beta_j (e_i, e_j)$, ☐ e) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j (e_i, e_j)$.

7.7. Пусть скалярное произведение векторов a и b евклидова (унитарного) пространства равно нулю. Тогда эти векторы:

Ответы:

☐ a) линейно зависимы, ☐ b) линейно независимы, ☐ c) коллинеарны, ☐ d) линейно независимы, если оба вектора ненулевые, ☐ e) образуют острый угол между собой.

7.8. Как с помощью произвольного базиса евклидова пространства построить ортонормированный базис?

Ответы:

- ☐ a) нормировать каждый вектор этого базиса,
- ☐ b) менять векторы местами, пока система не станет ортогональной и затем нормировать эти векторы,
- ☐ c) применить к нему процесс ортогонализации и нормировать полученные векторы,
- ☐ d) применить к нему процесс ортогонализации, выбросить все получающиеся нулевые векторы и нормировать оставшиеся,
- ☐ e) нормировать эти векторы и затем менять их местами пока система не станет ортонормированной.

7.9. Сколько ортонормированных базисов можно указать в евклидовом пространстве размерности n ?

Ответы:

- ☐ a) n,
- ☐ b) $n!$,
- ☐ c) n^2,
- ☐ d) 2, если $n = 1$ и бесконечно много при $n > 1$.
- ☐ e) бесконечно много.

Title Page
Contents
Page 53 of 112
Go Back
Close

7.10. Как в ортонормированном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ евклидова пространства запишется скалярное произведение векторов $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ и $b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$?

Ответы:

☐ a) $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)$, ☐ b) $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$, ☐ c) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$,

☐ d) $\sum_{i \neq j} \alpha_i \beta_j$, ☐ e) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j$.

7.11. Чему равно скалярное произведение векторов $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ и $b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$ евклидова пространства R_n в ортогональном базисе?

Ответы:

☐ a) $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \alpha_i \beta_i$, где μ_i вещественные числа, ☐ b) $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \alpha_i \beta_i$, где μ_i неотрицательные числа,

☐ c) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} \alpha_i \beta_j$, ☐ d) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_j$,

☐ e) $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \alpha_i \beta_i$, где μ_i строго положительные числа.

7.12. Что называется ортогональным дополнением $L^\perp$ к подпространству L евклидова пространства V.

Ответы:

☐ *a)* разность $V \setminus L$ множеств V и L, ☐ *b)* множество векторов перпендикулярных к какому-либо вектору из L,

☐ *c)* ортогональный базис в $V \setminus L$. ☐ *d)* $\{a \in V : (\forall x \in L)[(a, x) = 0]\}$,

☐ *e)* множество всех векторов из L ортогональных к друг другу.

7.13. Пусть L подпространство евклидова пространства V . Ортогональное дополнение $L^\perp$ является :

Ответы:

☐ *a)* надмножеством L, ☐ *b)* подмножеством L, ☐ *c)* пустым множеством, ☐ *d)* подпространством пространства V, ☐ *e)* подпространством в L.

7.14. Как связаны между собой размерности L и $L^\perp$?

Ответы:

☐ *a)* $\dim L \le \dim L^\perp$, ☐ *b)* $\dim L + \dim L^\perp = \dim V$, ☐ *c)* $\dim L \ge \dim L^\perp$,

☐ *d)* $\dim(L) \cdot \dim(L^\perp) = \dim V$, ☐ *e)* $\dim L = \dim L^\perp$.

7.15. Как связаны между собой базисы пространства L, его ортогонального дополнения $L^\perp$ и всего евклидова пространства V?

Ответы:

- ☐ *a)* любой базис V есть объединение базисов L и $L^\perp$,
- ☐ *b)* объединение любых базисов L и $L^\perp$ есть базис V,
- ☐ *c)* существуют базисы в L и $L^\perp$, объединение которых не есть базис V.
- ☐ *d)* объединение базисов L и $L^\perp$ включено как собственная часть в базисе V,
- ☐ *e)* если выбросить из объединения базисов векторы зависящие от остальных, то получится базис V.

7.16. Что означает запись: $V = L \oplus L^\perp$?

Ответы:

- ☐ *a)* $V = \{x + y : x \in L, y \in L^\perp\}$ и $L \cap L^\perp = \emptyset$,
- ☐ *b)* $V = \{x + y : x \in L, y \in L^\perp\}$,
- ☐ *c)* $L \cap L^\perp = \emptyset$,
- ☐ *d)* $V = L \cup L^\perp$,
- ☐ *e)* $V \subseteq L + L^\perp$.

7.17. Найти скалярное произведение векторов $a = (1, 2, 3)$ и $b = (-1, 2, -2)$ в евклидовом пространстве.

Ответы:

- ☐ *a)* 0,
- ☐ *b)* 1,
- ☐ *c)* 5,
- ☐ *d)* -2,
- ☐ *e)* -3.

7.18. Найти скалярное произведение векторов $a = (1, -2, -3)$ и $b = (-1, 2, -2)$ в евклидовом пространстве.
Ответы:

☐ a) 1, ☐ b) 0, ☐ c) 5, ☐ d) -2, ☐ e) -3.

7.19. Найти скалярное произведение векторов $a = (3, -2, -1)$ и $b = (-2, 1, -2)$ в евклидовом пространстве.
Ответы:

☐ a) 1, ☐ b) 3, ☐ c) -6, ☐ d) -2, ☐ e) -3.

7.20. Найти скалярное произведение векторов $a = (1 + i, 2, 1 + i)$ и $b = (1 - i, 2, 1 + i)$ в унитарном пространстве.
Ответы:

☐ a) 0, ☐ b) $1 + i$, ☐ c) $6 + 2i$, ☐ d) $-2i$, ☐ e) -3.

7.21. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве R^3 задана ортонормированная система векторов e_1, e_2. Сколько ортогональных базисов R^3 содержат e_1, e_2?
Ответы:

☐ a) 1, ☐ b) 3, ☐ c) 2, ☐ d) 3!, ☐ e) бесконечно много.

7.22. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве R^3 задана ортонормированная система векторов e_1, e_2. Сколько ортонормированных базисов R^3 содержат e_1, e_2?
Ответы:
☐ *a)* 1, ☐ *b)* 2, ☐ *c)* 3, ☐ *d)* 3!, ☐ *e)* бесконечно много.

7.23. Пусть L подпространство евклидова пространства V, вектор $a \in V$ представлен в виде $a = x + y$, где $x \in L$, $y \in L^{\perp}$. Что называется углом между вектором a и подпространством V?
Ответы:
☐ *a)* угол между вектором a и вектором y, ☐ *b)* угол между вектором a и вектором x, ☐ *c)* угол между вектором x и вектором y, ☐ *d)* угол между вектором a и любым вектором подпространства L, ☐ *e)* угол между вектором a и нормалью к плоскости L.

7.24. Пусть L подпространство евклидова пространства V, вектор $a \in V$ представлен в виде $a = x + y$, где $x \in L$, $y \in L^{\perp}$. Что называется расстоянием между вектором a и подпространством V ?
Ответы:
☐ *a)* $|a|$, ☐ *b)* $|x|$, ☐ *c)* $|y|$, ☐ *d)* $\sqrt{x^2 + y^2}$, ☐ *e)* (a, a).

7.25. Пусть L подпространство евклидова пространства V, вектор $a \in V$ лежит в L. Каков угол между вектором a и подпространством L?

Ответы:

$\square$ *a)* 0, $\square$ *b)* $90°$, $\square$ *c)* $46°$, $\square$ *d)* $\cos\varphi = \frac{(a,a)}{|a|^2}$, $\square$ *e)* π.

7.26. Пусть L подпространство евклидова пространства V, вектор $a \in V$ лежит в L. Каково расстояние между вектором a и подпространством L?

Ответы:

$\square$ *a)* 0, $\square$ *b)* 1, $\square$ *c)* $|a|$, $\square$ *d)* (a,a), $\square$ *e)* a^2.

7.27. Пусть L подпространство евклидова пространства V, вектор $a \in V$ лежит в $L^\perp$. Каков угол между вектором a и подпространством L?

Ответы:

$\square$ *a)* 0, $\square$ *b)* $90°$, $\square$ *c)* $45°$, $\square$ *d)* $\cos\varphi = \frac{(a,a)}{|a|^2}$, $\square$ *e)* π.

7.28. Пусть L подпространство евклидова пространства V, вектор $a \in V$ лежит в $L^\perp$. Каково расстояние между вектором a и подпространством L?

Ответы:

$\square$ *a)* 0, $\square$ *b)* 1, $\square$ *c)* $|a|$, $\square$ *d)* (a,a), $\square$ *e)* a^2.

7.29. Пусть размерность евклидова пространства V равна пяти. Найти максимальное число k такое, что существуют k ненулевых векторов таких, что углы между любыми двумя из них равны $90°$.

Ответы:

☐ *a)* 0, ☐ *b)* 1, ☐ *c)* 2, ☐ *d)* 5, ☐ *e)* ∞.

7.30. Пусть система векторов $\{a_1, \ldots, a_k\}$ линейно зависима, к ней применили процесс ортогонализации и получили систему векторов $\{b_1, \ldots, b_k\}$. Какое из следующих высказываний о полученной системе векторов является верным?

Ответы:

☐ *a)* она ортонормирована, ☐ *b)* образует базис V, ☐ *c)* линейно независима,

☐ *d)* образует базис подпространства $\mathfrak{L}(a_1, \ldots, a_k)$, ☐ *e)* $(\exists s \le k)[b_s = \theta]$.

Title Page
Contents
Page 60 of 112
Go Back
Close

7.31. Пусть система векторов $\{a_1, \dots, a_k\}$ независима, к ней применили процесс ортогонализации и получили систему векторов $\{b_1, \dots, b_k\}$. Какое из следующих высказываний о полученной системе векторов является верным?

Ответы:

- ☐ *a)* она ортонормирована,
- ☐ *b)* образует базис V,
- ☐ *c)* линейно зависима,
- ☐ *d)* образует ортогональный базис подпространства $\mathfrak{L}(a_1, \dots, a_k)$,
- ☐ *e)* $(\exists s \leq k)[b_s = \theta]$.

7.32. Пусть $a_1, \dots, a_5$ векторы единичной длины в евклидовом пространстве R^5, причем $a_k \perp a_{k+1}$ для всех $k \in \{1, \dots, 4\}$ и $a_5 \perp a_1$. Тогда эта система является:

Ответы:

- ☐ *a)* базисом в R^5,
- ☐ *b)* ни один из остальных ответов не является верным,
- ☐ *c)* ортогональным базисом в R^5,
- ☐ *d)* ортонормированным базисом в R^5,
- ☐ *e)* линейно зависимой.

7.33. Пусть ненулевой вектор a лежит в подпространстве L евклидова пространства V, причем $2 \le \dim L < \dim V$. Пусть H ортогональное дополнение к вектору a. Какое из следующих высказываний является верным?

Ответы:

☐ a) $H \cap L \neq \{\theta\}$, ☐ b) $H \cap L = \emptyset$, ☐ c) $a \in H$, ☐ d) $H \cup L = V$, ☐ e) $H \subseteq L$.

7.34. Пусть V евклидово пространство и L_1, L_2 его подпространства, причем $L_1 \subset L_2$. Какое из следующих высказываний об ортогональных дополнениях к подпространствам L_1, L_2 является верным?

Ответы:

☐ a) $L_1^\perp \subset L_2^\perp$, ☐ b) $L_2^\perp \subset L_1^\perp$, ☐ c) $L_1^\perp \cap L_2^\perp = \{\theta\}$,

☐ d) $L_1^\perp = L_2^\perp$, ☐ e) $L_1^\perp + L_2^\perp = V$.

End Score: Correct

8. Линейные операторы.

Start

8.1. Какое отображение называется линейным оператором в линейном пространстве V над полем K ?

Ответы:

☐ a) $\pi : V \to V$ такое, что $\pi(\alpha a + \beta b) = \alpha\pi(a) + \beta\pi(b)$ для некоторых векторов $a, b \in V$ и скаляров $\alpha, \beta \in K$,

☐ b) $\pi : V \to V$ такое, $\pi(\alpha a + \beta b) = \alpha\pi(a) + \beta\pi(b)$ для всех векторов $a, b \in V$ и скаляров $\alpha, \beta \in K$,

☐ c) $\pi : V \to K$ такое, что $\pi(\alpha a + \beta b) = \alpha\pi(a) + \beta\pi(b)$ для всех векторов $a, b \in V$ и скаляров $\alpha, \beta \in K$,

☐ d) $\pi : V \to K$ такое, что $\pi(\alpha a + \beta b) = \alpha\pi(a) + \beta\pi(b)$ для некоторых векторов $a, b \in V$ и скаляров $\alpha, \beta \in K$,

☐ e) $\pi : V \to V$ такое, что $(\pi(a), a) = (a, \pi^*(a))$ для любого вектора $a \in V$.

8.2. Как определяется матрица A_π^e линейного оператора π в некотором базисе e линейного пространства V над полем K?

Ответы:

- ☐ *a)* если $\pi(e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_j$, то $A_\pi^e = (\alpha_{ij})_n^n$.
- ☐ *b)* матрица перехода между базисами e и $\pi(e)$,
- ☐ *c)* $A_\pi^e = Q^{-1} A_\pi^e Q$,
- ☐ *d)* $A_\pi^e = E$,
- ☐ *e)* $A_\pi^e = 0$.

8.3. По какому правилу преобразуются координаты вектора $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ в результате применения к этому вектору линейного оператора π с матрицей $A = A_\pi^e = (\alpha_{ij})_n^n$?

Ответы:

- ☐ *a)* $\pi(b) = A \cdot b$,
- ☐ *b)* $\pi(b) = \theta$,
- ☐ *c)* $\pi(b) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e_j$,
- ☐ *d)* $\pi(b) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_j$,
- ☐ *e)* $\pi(b) = b \cdot A$.

8.4. Пусть Q матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{e}'$ линейного пространства V. Как изменится матрица оператора π при переходе от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{e}'$?

Ответы:

- ☐ *a)* не изменится,
- ☐ *b)* $A_\pi^{e'} = Q A_\pi^e Q^{-1}$,
- ☐ *c)* транспонируется,
- ☐ *d)* $A_\pi^{e'} = Q^{-1} A_\pi^e Q$,
- ☐ *e)* $A_\pi^{e'} = QA$.

8.5. Какие операторы π и τ в линейном пространстве V размерности n называются равными?

Ответы:

☐ *a)* такие, что образы по π и τ некоторых случайно выбранных n векторов совпадают,

☐ *b)* такие, что оба оператора вырожденные,

☐ *c)* такие, что $\exists y \forall x[\pi(x) = \tau(y)]$,

☐ *d)* такие, что $\forall x \exists y[\pi(x) = \tau(y)]$,

☐ *e)* такие, что $\forall x[\pi(x) = \tau(x)]$.

8.6. Как определяется сумма линейных операторов π и τ?

Ответы:

☐ *a)* $\pi + \tau = \tau + \pi$,

☐ *b)* полагается $(\pi + \tau)(x) = \pi(x) + \tau(x)$ для некоторого вектора x,

☐ *c)* полагается $(\pi + \tau)(x) = \pi(x) + \tau(x)$ для каждого вектора x,

☐ *d)* $(\pi + \tau)(x) = (\pi(x), \tau(x))$,

☐ *e)* $(\pi + \tau)(x) = \pi(\tau(x))$.

8.7. Как определяется умножение линейных операторов π и τ?

Ответы:

- ☐ *a)* $\pi \cdot \tau = \tau \cdot \pi$,
- ☐ *b)* полагается $(\pi \cdot \tau)(x) = \pi(x) + \tau(x)$ для некоторого вектора x,
- ☐ *c)* полагается $(\pi \cdot \tau)(x) = \pi(x) + \tau(x)$ для каждого вектора x,
- ☐ *d)* $(\pi \cdot \tau)(x) = \pi(\tau(x))$,
- ☐ *e)* $(\pi \cdot \tau)(x) = (\pi(x), \tau(x))$.

8.8. Как определяется умножение линейного оператора π на скаляр λ?

Ответы:

- ☐ *a)* $\lambda\pi = \pi\lambda$,
- ☐ *b)* полагается $(\lambda\pi)(x) = \lambda(\pi(x))$ для каждого вектора x,
- ☐ *c)* полагается $(\lambda\pi)(x) = \lambda(\pi(x))$ для некоторого вектора x,
- ☐ *d)* $(\lambda\pi)(x) = \lambda x + \pi(x)$,
- ☐ *e)* $(\lambda\pi)(x) = (\lambda, \pi(x))$.

8.9. Чему равна матрица суммы операторов π и τ?

Ответы:

- ☐ *a)* $A^e_{\pi+\tau} = A^e_\tau + A^e_\pi$,
- ☐ *b)* $A^e_{\pi+\tau} = A^e_\tau \cdot A^e_\pi$,
- ☐ *c)* $A^e_{\pi+\tau} = A^e_\pi \cdot A^e_\tau$,
- ☐ *d)* E,
- ☐ *e)* $A^e_{\pi+\tau} = A^e_\tau - A^e_\pi$.

8.10. Чему равна матрица произведения операторов π и τ?

Ответы:

☐ *a)* $A^e_{\pi\tau} = A^e_\tau + A^e_\pi$, ☐ *b)* $A^e_{\pi\tau} = A^e_\tau \cdot A^e_\pi$, ☐ *c)* $A^e_{\pi\tau} = A^e_\pi \cdot A^e_\tau$,

☐ *d)* E, ☐ *e)* $A^e_{\pi\tau} = A^e_\tau (A^e_\pi)^{-1}$.

8.11. Чему равна матрица произведения оператора π на скаляр λ?

Ответы:

☐ *a)* $A^e_{\lambda\pi} = \bar{\lambda} A^e_\pi$, ☐ *b)* $A^e_{\lambda\pi} = \lambda^n A^e_\pi$, ☐ *c)* $A^e_{\lambda\pi} = \lambda A^e_\pi$,

☐ *d)* E, ☐ *e)* $A^e_{\lambda\pi} = \lambda (A^e_\pi)^{-1}$.

8.12. Какими свойствами обладает операция умножения линейных операторов?

Ответы:

☐ *a)* произведение линейных операторов является линейным функционалом, ☐ *b)* произведение линейных операторов является вектором, ☐ *c)* произведение линейных операторов является линейным оператором, ☐ *d)* произведение линейных операторов является подпространством, ☐ *e)* произведение линейных операторов является ядром.

8.13. Как определяется обратный оператор π^{-1} к оператору π?

Ответы:

- ☐ *a)* $\pi^{-1} \cdot \pi$ является нулевым оператором,
- ☐ *b)* как отображение $\tau : V \to V$ такое, что $\forall x \forall y [\pi(x) = y \iff \tau(y) = x]$,
- ☐ *c)* $\pi + \pi^{-1}$ является тождественным оператором,
- ☐ *d)* $\pi + \pi^{-1}$ является нулевым оператором,
- ☐ *e)* $\pi^{-1} = -\pi$.

8.14. Как связаны между собой матрицы линейных операторов π и π^{-1} в некотором базисе?

Ответы:

- ☐ *a)* $A^e_{\pi^{-1}} = A^e_\pi$,
- ☐ *b)* $A^e_{\pi^{-1}} = Q^{-1} A^e_\pi Q$ для некоторой матрицы Q,
- ☐ *c)* $A^e_{\pi^{-1}} = Q A^e_\pi Q^{-1}$ для некоторой матрицы Q,
- ☐ *d)* $A^e_{\pi^{-1}} = (A^e_\pi)^{-1}$,
- ☐ *e)* $A^e_{\pi^{-1}} = \pi$.

8.15. Какое подпространство L называется инвариантным относительно оператора π в линейном пространстве V?

Ответы:

- ☐ *a)* любое непустое подмножество,
- ☐ *b)* если $\forall x[\pi(x) \in L]$,
- ☐ *c)* все пространство V,
- ☐ *d)* если $(\forall x \in L)[\pi(x) = \theta]$,
- ☐ *e)* если $\forall x[x \in L \to \pi(x) \in L]$.

8.16. Найдите максимальный список подпространств инвариантных относительно оператора гомотетии $\lambda_0\varepsilon$, где ε тождественный оператор в линейном пространстве R^n.

Ответы:

- ☐ *a)* все подпространства R^n,
- ☐ *b)* любое непустое подмножество,
- ☐ *c)* нулевое пространство $\{\theta\}$ и все пространство V,
- ☐ *d)* все одномерные подпространства,
- ☐ *e)* все подпространства размерности n.

8.17. Справедливо ли утверждение : "Нулевое подпространство $\{\theta\}$ является инвариантным относительно любого линейного оператора в каждом линейном пространстве"?

Ответы:

- ☐ *a)* не обязательно,
- ☐ *b)* никогда не инвариантно,
- ☐ *c)* да,
- ☐ *d)* для некоторых операторов оно инвариантно,
- ☐ *e)* возможно это так только для тождественного оператора.

8.18. Что такое собственное значение λ_0 линейного оператора π действующего в линейном пространстве V над полем K?

Ответы:

☐ *a)* существует вектор a такой, что $\pi(a) = \lambda_0 a$,

☐ *b)* $\lambda_0 \in K$ и существует вектор $a \neq \theta$ такой, что $\pi(a) = \lambda_0 a$,

☐ *c)* λ_0 корень характеристического многочлена оператора π,

☐ *d)* если $\forall x[\pi(x) = \lambda_0 x]$,

☐ *e)* если $\lambda_0 = 0$.

8.19. Что называется собственным вектором a линейного оператора π действующего в линейном пространстве V над полем K?

Ответы:

☐ *a)* существует скаляр $\lambda_0 \neq 0$ такой, что $\pi(a) = \lambda_0 a$

☐ *b)* $\pi(a) = \lambda_0 a$,

☐ *c)* найдется скаляр $\lambda_0 \in K$, $\pi(a) = \lambda_0 a$ и при этом $a \neq \theta$,

☐ *d)* $a = \theta$,

☐ *e)* если $\pi(a) = a$.

8.20. Какие собственные векторы имеет линейный оператор поворота на угол 45 градусов в линейном пространстве R^2?

Ответы:

- ☐ a) собственных векторов нет,
- ☐ b) нулевой вектор θ является собственным вектором,
- ☐ c) вектор на биссектрисе первого квадранта – собственный,
- ☐ d) все векторы, модуль которых равен 1 собственные,
- ☐ e) все векторы собственные.

8.21. Пусть M_ρ – множество всех собственных векторов оператора π отвечающих собственному числу ρ . Чем является множество M_ρ?

Ответы:

- ☐ a) инвариантным подпространством оператора π,
- ☐ b) подпространством,
- ☐ c) ядром оператора π,
- ☐ d) если добавить нулевой вектор, то станет инвариантным подпространством оператора π,
- ☐ e) образом оператора π.

8.22. Какие собственные значения и собственные векторы имеет нулевой оператор $\mathcal{O}$?

Ответы:

- ☐ *a)* не имеет,
- ☐ *b)* только нулевой вектор собственный, который отвечает любому числу,
- ☐ *c)* все векторы собственные и отвечают нулю,
- ☐ *d)* все векторы собственные и отвечают любому числу,
- ☐ *e)* единичные вектора собственные и отвечают нулю.

8.23. Пусть a, b собственные векторы линейного оператора π отвечающие различным собственным числам. Тогда

Ответы:

- ☐ *a)* эти векторы ортогональны,
- ☐ *b)* коллинеарны,
- ☐ *c)* образуют базис пространства V,
- ☐ *d)* образуют базис ядра оператора π,
- ☐ *e)* линейно независимы.

8.24. Сколько собственных значений (возможно кратных) имеет линейный оператор в линейном пространстве R^n?

Ответы:

- ☐ *a)* n,
- ☐ *b)* $n!$,
- ☐ *c)* $\leq n$,
- ☐ *d)* ∞,
- ☐ *e)* $\leq n$, за исключением нулевого оператора для которого любое число является собственным.

8.25. Как зависят собственные значения линейного оператора от выбора базиса в линейном пространстве?

Ответы:

- ☐ *a)* можно найти базис для которого все собственные числа положительны,
- ☐ *b)* можно найти базис для которого все собственные числа равны 1 по модулю,
- ☐ *c)* никак не зависят,
- ☐ *d)* не зависят если оператор невырожден,
- ☐ *e)* для произвольных n чисел можно найти базис для которого эти числа станут собственными значениями оператора π.

8.26. Пусть λ_1, λ_2 не равные друг другу собственные значения линейного оператора в пространстве R^2. Каков простейший вид матрицы этого оператора в некотором базисе?

Ответы:

☐ *a)* E, ☐ *b)* O, ☐ *c)* диагональная матрица с λ_1, λ_2 на диагонали, ☐ *d)* $(\lambda_1 + \lambda_2)E$. ☐ *e)* матрица вида $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$,

8.27. Что такое ядро линейного оператора π?

Ответы:

☐ *a)* нулевое пространство, ☐ *b)* $\{x : \pi(x) = \theta\}$, ☐ *c)* $\{x : \exists y[\pi(y) = x]\}$,
☐ *d)* $\{x : \exists y[\pi(x) = y]\}$, ☐ *e)* все пространство V.

8.28. Пусть π линейный оператор в линейном пространстве V и $\ker \pi$, $Im(\pi)$ ядро и образ этого оператора. Каким из следующих требований они подчиняются?

Ответы:

☐ *a)* $\ker \pi \cap Im(\pi) = \emptyset$, ☐ *b)* $\ker \pi \cup Im(\pi) = V$, ☐ *c)* $\ker \pi \subseteq Im(\pi)$,
☐ *d)* $\dim \ker \pi + \dim Im(\pi) = \dim V$, ☐ *e)* $\ker \pi \supseteq Im(\pi)$.

8.29. Как найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора в линейном пространстве V над полем K?

Ответы:

☐ *a)* найти характеристические корни ρ и для каждого из них найти ядра $\ker(\pi - \rho\varepsilon)$ алгоритмом параллельного вычисления базиса ядра и образа оператора,

☐ *b)* найти характеристические корни ρ лежащие в K и для каждого из них найти ядра $\ker(\pi - \rho\varepsilon)$ алгоритмом параллельного вычисления базиса ядра и образа оператора,

☐ *c)* найти характеристические корни ρ , тогда единичные вектора и будут собственными,

☐ *d)* матрицу $(E|A)$ преобразованиями Гаусса строк привести к виду $(B|C)$, где C ступенчатая, тогда строки B продолжающиеся нулями в C и есть собственные векторы,

☐ *e)* матрицу $(E|A)$ преобразованиями Гаусса строк привести к виду $(B|C)$, где C ступенчатая, тогда ненулевые строки C и есть собственные векторы.

8.30. Каковы собственные значения и собственные векторы оператора дифференцирования в пространстве многочленов $R(x)$.

Ответы:

- ☐ *a)* многочлены первой степени отвечают собственному числу 2,
- ☐ *b)* многочлены нулевой степени отвечают собственному числу 0,
- ☐ *c)* многочлены вида x^n отвечают числу 1,
- ☐ *d)* многочлены у которых все коэффициенты одинаковы и равны числу β, причем оно и будет собственным числом,
- ☐ *e)* симметрические многочлены отвечают коэффициенту симметричности.

8.31. Пусть для оператора π существует обратный оператор π^{-1}. Какова связь между собственными векторами и собственными значениями этих операторов?

Ответы:

- ☐ *a)* собственные векторы одни и те же и $Sp(\pi^{-1}) = \{\rho^{-1} : \rho \in Sp(\pi)\}$,
- ☐ *b)* собственные значения и собственные векторы одни и те же,
- ☐ *c)* собственные числа одни и те же, а собственные векторы могут быть другими,
- ☐ *d)* собственные числа одни и те же, а векторы соответственно ортогональны,
- ☐ *e)* никакой закономерности нет.

Title Page
Contents
Page 77 of 112
Go Back
Close

8.32. Найти связь между собственными векторами и спектрами операторов π и $\mu_0 \cdot \pi$, где $\mu_0 \neq 0$.

Ответы:

☐ *a)* собственные значения и собственные векторы одни и те же,

☐ *b)* собственные числа одни и те же, а векторы соответственно ортогональны,

☐ *c)* собственные векторы одни и те же и $Sp(\mu_0\pi) = \{\mu_0 + \rho : \rho \in Sp(\pi)\}$,

☐ *d)* собственные векторы и собственные числа умножатся на μ_0,

☐ *e)* собственные векторы одни и те же и $Sp(\mu_0\pi) = \{\mu_0\rho : \rho \in Sp(\pi)\}$.

8.33. Найти связь между собственными векторами и собственными числами операторов π и $\pi + \mu_0 \cdot \varepsilon$, где μ_0 – некоторое число.

Ответы:

☐ *a)* если a собственный вектор для π, то $a + \mu_0 a$ собственный вектор для $\pi + \mu_0 \cdot \varepsilon$ отвечающий μ_0,

☐ *b)* собственные векторы одни и те же и $Sp(\pi + \mu_0\varepsilon) = \{\rho + \mu_0 : \rho \in Sp(\pi)\}$,

☐ *c)* собственные векторы и собственные числа умножатся на μ_0,

☐ *d)* $Sp(\pi + \mu_0\varepsilon) = \{\rho \cdot \mu_0 : \rho \in Sp(\pi)\}$ и собственные векторы одни и те же,

☐ *e)* никакой закономерности нет.

8.34. Пусть в линейном пространстве V задана система $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ собственных векторов оператора π и H их оболочка. Тогда:

Ответы:

- ☐ *a)* H является ядром оператора,
- ☐ *b)* H является образом оператора,
- ☐ *c)* $H = V$,
- ☐ *d)* H инвариантное подпространство относительно π,
- ☐ *e)* найдется базис V в котором матрица оператора диагональна.

8.35. Пусть $V = \mathcal{L}(\sin(x), \cos(x))$ – линейная оболочка. Какова матрица оператора дифференцирования, действующего в этом пространстве V в базисе $\{\sin(x), \cos(x)\}$?

Ответы:

- ☐ *a)* E,
- ☐ *b)* O,
- ☐ *c)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,
- ☐ *d)* $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$,
- ☐ *e)* $\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$.

8.36. В каком из следующих случаев линейный оператор в пространстве R^n имеет хотя бы одно собственное значение?

Ответы:

- ☐ *a)* матрица оператора кососимметрическая,
- ☐ *b)* матрица оператора ортогональная,
- ☐ *c)* оператор невырожден,
- ☐ *d)* n четно,
- ☐ *e)* n нечетно.

8.37. Каковы собственные векторы и собственные значения оператора дифференцирования в пространстве непрерывных функций вещественного переменного.

Ответы:

- ☐ *a)* многочлены от одного неизвестного отвечают числу 0,
- ☐ *b)* дробно-рациональные функции отвечают числу 1,
- ☐ *c)* тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$,
- ☐ *d)* только постоянные функции и они отвечают числу 0,
- ☐ *e)* собственные векторы – функции вида $Ce^{\alpha x}$, где и α любые числа, при этом α соответствующее собственное число.

8.38. Каковы собственные векторы и собственные значения оператора двухкратного дифференцирования в пространстве $\mathcal{L}(\sin 2x, \cos x, tg(x), ctg(x))$ (оболочка в пр-ве непрерывных функций) заданных на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$

Ответы:

- ☐ *a)* собственных векторов нет,
- ☐ *b)* $\sin 2x$ отвечает -4 и $\cos x$ отвечает -1,
- ☐ *c)* нулевая функция,
- ☐ *d)* любая функция отвечает числу 1,
- ☐ *e)* $\sin x + \cos x$ отвечает числу -1.

Title Page
Contents
Page 79 of 112
Go Back
Close

8.39. Известно, что размерность ядра линейного оператора действующего в пространстве многочленов не более чем пятой степени равна 2. Какая из следующих систем может быть базисом образа?

Ответы:

- ☐ *a)* $\{x^2-1, x^3-2x+1, x^5-4\}$,
- ☐ *b)* $\{1, x^3+x-1, x^4-x+1, x^5-x^3+x-1\}$,
- ☐ *c)* $\{1, x, 2x, x^2\}$,
- ☐ *d)* $\{1, x, x^2, x^3-2x, x^5-2\}$,
- ☐ *e)* ни одна из указанных систем не может быть базисом.

8.40. Как изменится матрица оператора в новом базисе, если он получен из старого перестановкой первого и третьего вектора.

Ответы:

- ☐ *a)* поменяется первый столбец с третьим столбцом,
- ☐ *b)* поменяется первая строка с третьей строкой,
- ☐ *c)* ничего не изменится,
- ☐ *d)* поменяется первый и третий столбец, первая и третья строка,
- ☐ *e)* все строки и столбцы расположатся в обратном порядке.

8.41. Каким из следующих свойств обладают жордановы матрицы?

Ответы:

☐ *a)* они симметрические, ☐ *b)* они кососимметрические, ☐ *c)* они верхние треугольные, ☐ *d)* они невырожденные, ☐ *e)* они нильпотентны.

8.42. Пусть A жорданова матрица n-го порядка. Тогда число ненулевых элементов в матрице A должно быть:

Ответы:

☐ *a)* не больше n, ☐ *b)* ровно n^2, ☐ *c)* ровно $n!$, ☐ *d)* не меньше n, ☐ *e)* не больше $2n-1$.

End Score: Correct

9. Линейные операторы в евклидовом и унитарном пространствах.

Start

9.1. Какой оператор называется симметрическим?

Ответы:

- ☐ *a)* оператор π в евклидовом пр-ве такой, что $\pi^* = \pi$,
- ☐ *b)* оператор π в унитарном пр-ве такой, что $\pi^* = \pi$,
- ☐ *c)* $\pi^* = -\pi$,
- ☐ *d)* матрица которого симметрическая в любом базисе,
- ☐ *e)* матрица которого симметрическая в любом ортогональном базисе.

9.2. Какой вид имеет матрица симметрического оператора в ортонормированном базисе?

Ответы:

☐ *a)* диагональная, ☐ *b)* распавшаяся, ☐ *c)* нильпотентная, ☐ *d)* симметрическая, ☐ *e)* единичная.

9.3. Если линейный оператор π симметрический в евклидовом пространстве V и L инвариантное подпространство относительно π, то

Ответы:

☐ *a)* π кососимметричен на L, ☐ *b)* π ортогонален на L, ☐ *c)* π симметричен на L, ☐ *d)* π вырожден на L, ☐ *e)* π унитарен на L.

9.4. Почему любой симметрический оператор имеет собственные векторы в евклидовом пространстве?

Ответы:

- ☐ *a)* так как его матрица диагональна,
- ☐ *b)* так как все его характеристические корни вещественны,
- ☐ *c)* из-за того, что он не имеет кратных собственных значений,
- ☐ *d)* так как он является проектированием,
- ☐ *e)* так как его характеристический многочлен имеет вещественные коэффициенты.

9.5. Сколько собственных значений имеет симметрический оператор в евклидовом пространстве R^n?

Ответы:

- ☐ *a)* 0,
- ☐ *b)* 1,
- ☐ *c)* $n!$,
- ☐ *d)* n с учетом кратности,
- ☐ *e)* бесконечно много.

9.6. Пусть a – собственный вектор симметрического оператора π, действующего в евклидовом пространстве V, а M– множество всех векторов y из евклидова пространства, ортогональных к a . Какое из следующих высказываний о M верно?

Ответы:

☐ a) все векторы M собственные для π,
☐ b) $M = \{\theta\}$,
☐ c) $M = V$,
☐ d) $M = \emptyset$,
☐ e) M инвариантно относительно оператора π.

9.7. Пусть π симметрический линейный оператор , действующий в евклидовом пространстве V . Какое из следующих высказываний о π верно?

Ответы:

☐ a) в пространстве V существует ортонормированный базис из собственных векторов этого оператора,
☐ b) матрица оператора в любом базисе симметрическая,
☐ c) матрица оператора в любом ортогональном базисе симметрическая,
☐ d) все собственные векторы для π ортогональны между собой,
☐ e) оператор π перестановочен с любым другим оператором.

9.8. Пусть матрица линейного оператора π в некотором базисе евклидового пространства V симметрическая. Тогда:

Ответы:

- ☐ *a)* в пространстве V существует ортонормированный базис из собственных векторов этого оператора,
- ☐ *b)* оператор π симметрический, если указанный базис ортонормирован,
- ☐ *c)* оператор кососимметричен,
- ☐ *d)* матрица оператора в любом ортогональном базисе симметрическая,
- ☐ *e)* оператор π симметрический.

9.9. Каким свойством обладают собственные векторы симметрического оператора, соответствующие различным собственным значениям?

Ответы:

- ☐ *a)* компланарны,
- ☐ *b)* коллинеарны,
- ☐ *c)* ортогональны к друг другу,
- ☐ *d)* лежат на одной прямой и направлены в противоположные стороны,
- ☐ *e)* образуют острые углы между собой.

9.10. Пусть π линейный оператор в евклидовом пространстве V . При каких условиях π ортогонален?

Ответы:

☐ *a)* если все собственные числа вещественны, ☐ *b)* если в пространстве V существует ортонормированный базис из собственных векторов π, ☐ *c)* собственные векторы π ортогональны друг другу, ☐ *d)* $\pi^* = \pi^{-1}$, ☐ *e)* π совпадает со своим сопряженным.

9.11. Пусть линейный оператор в евклидовом пространстве V, сохраняет длины всех векторов. Верно ли, что он:

Ответы:

☐ *a)* симметрический, ☐ *b)* ортогональный, ☐ *c)* нильпотентный, ☐ *d)* тождественный, ☐ *e)* является поворотом пространства.

9.12. Пусть π и τ ортогональные операторы в евклидовом пространстве. Тогда произведение операторов $\pi\tau$ будет:

Ответы:

- ☐ *a)* ортогональным оператором,
- ☐ *b)* симметрическим оператором,
- ☐ *c)* кососимметрическим оператором,
- ☐ *d)* будет ортогональным, только если $\pi\tau = \tau\pi$,
- ☐ *e)* может не иметь ни одного из указанных свойств.

9.13. Пусть π и τ симметрические операторы в евклидовом пространстве. Тогда произведение операторов $\pi\tau$ будет:

Ответы:

- ☐ *a)* ортогональным оператором,
- ☐ *b)* симметрическим оператором,
- ☐ *c)* кососимметрическим оператором,
- ☐ *d)* будет симметрическим, только если $\pi\tau = \tau\pi$,
- ☐ *e)* может не иметь ни одного из указанных свойств.

9.14. Пусть π и τ кососимметрические операторы в евклидовом пространстве. Тогда произведение операторов $\pi\tau$ будет:

Ответы:

- ☐ *a)* ортогональным оператором,
- ☐ *b)* симметрическим оператором,
- ☐ *c)* кососимметрическим оператором,
- ☐ *d)* будет симметрическим, только если $\pi\tau = \tau\pi$,
- ☐ *e)* может не иметь ни одного из указанных свойств.

Title Page
Contents
Page 89 of 112
Go Back
Close

9.15. Пусть π симметрический и τ кососимметрический операторы в евклидовом пространстве. Тогда произведение операторов $\pi\tau$ будет:

Ответы:

- ☐ *a)* ортогональным,
- ☐ *b)* симметрическим,
- ☐ *c)* кососимметрическим оператором, только если $\pi\tau = \tau\pi$
- ☐ *d)* кососимметрическим,
- ☐ *e)* может не иметь ни одного из указанных свойств.

9.16. Пусть π симметрический и τ ортогональный операторы в евклидовом пространстве. Тогда произведение операторов $\pi\tau$ будет:

Ответы:

- ☐ *a)* ортогональным,
- ☐ *b)* симметрическим,
- ☐ *c)* симметрическим оператором, только если $\pi\tau = \tau\pi$,
- ☐ *d)* кососимметрическим,
- ☐ *e)* может не иметь ни одного из указанных свойств.

9.17. Пусть π кососимметрический и τ ортогональный операторы в евклидовом пространстве. Тогда произведение операторов $\pi\tau$ будет:

Ответы:

- ☐ *a)* ортогональным,
- ☐ *b)* кососимметрическим,
- ☐ *c)* кососимметрическим оператором, только если $\pi\tau = \tau\pi$,
- ☐ *d)* симметрическим,
- ☐ *e)* может не иметь ни одного из указанных свойств.

9.18. Пусть π ортогональный оператор в евклидовом пространстве V . Какое из следующих утверждений об этом операторе справедливо?

Ответы:

- ☐ *a)* он вырожденный,
- ☐ *b)* нильпотентен,
- ☐ *c)* существует ортонормированный базис в пространстве V из собственных векторов оператора π,
- ☐ *d)* существует обратный оператор π^{-1} , который также ортогонален,
- ☐ *e)* он симметрический.

9.19. Пусть π оператор в линейном пространстве R^4 имеющий в некотором базисе матрицу

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & t \\ d & g & t & q \end{vmatrix}$$

Какое из следующих утверждений о π справедливо?

Ответы:

- ☐ *a)* ядро оператора нетривиально,
- ☐ *b)* образ оператора не совпадает с R^4,
- ☐ *c)* все собственные числа оператора совпадают между собой,
- ☐ *d)* в R^4 существует собственный вектор для π,
- ☐ *e)* собственных векторов оператор может не иметь.

Title Page

Contents

Page 91 of 112

Go Back

Close

9.20. Пусть матрица линейного оператора в ортогональном базисе симметрическая. Верно ли, что этот оператор симметрический?

Ответы:

☐ *a)* нет,

☐ *b)* да если базис ортонормирован,

☐ *c)* да,

☐ *d)* только если все векторы базиса являются собственными для этого оператора,

☐ *e)* нет, если векторы базиса не компланарны.

9.21. Пусть матрица линейного оператора в ортогональном базисе ортогональная. Верно ли, что этот оператор ортогональный ?

Ответы:

☐ *a)* да,

☐ *b)* нет,

☐ *c)* да, если векторы базиса образуют правую тройку,

☐ *d)* нет, если векторы базиса не являются собственными,

☐ *e)* да, если базис ортонормирован.

Title Page

Contents

Page 92 of 112

Go Back

Close

9.22. Пусть матрица линейного оператора в ортогональном базисе кососимметрическая. Верно ли, что этот оператор кососимметрический?

Ответы:

☐ *a)* да, если базис ортонормирован.

☐ *b)* да,

☐ *c)* нет,

☐ *d)* да, если векторы базиса образуют правую тройку,

☐ *e)* нет, если векторы базиса не являются собственными.

9.23. Какая матрица называется ортогональной ?

Ответы:

☐ *a)* матрица перехода между базисами,

☐ *b)* матрица ортогонального оператора в любом базисе,

☐ *c)* произведение которой на транспонированную, равно единичной матрице,

☐ *d)* единичная матрица,

☐ *e)* сумма квадратов всех элементов которой равна 1.

9.24. Квадратная матрица ортогональна, если и только если:

Ответы:

- ☐ *a)* сумма элементов любой строки равна 1,
- ☐ *b)* произведение элементов любой строки равно нулю,
- ☐ *c)* сумма квадратов элементов любой строки равна нулю, и сумма произведений элементов различных строк равна 1,
- ☐ *d)* сумма квадратов элементов любой строки равна 1, и сумма произведений элементов различных строк равна 0,
- ☐ *e)* сумма произведений элементов любых строк равна 1 .

9.25. Пусть π кососимметрический оператор в евклидовом пространстве. Тогда все его собственные векторы лежат:

Ответы:

- ☐ *a)* на осях координат,
- ☐ *b)* в ядре оператора,
- ☐ *c)* в образе оператора,
- ☐ *d)* собственных векторов нет,
- ☐ *e)* все векторы пространства собственные.

9.26. Пусть π и τ линейные операторы в унитарном пространстве, причем всякий вектор собственный для одного из этих операторов является собственным и для другого. Пусть спектры этих операторов являются множествами $S_1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ и $S_2 = \{\rho_1, \dots, \rho_n\}$. Каков спектр оператора $\pi + \tau$?

Ответы:

☐ a) $S_1 \cup S_2$, ☐ b) $S_1 \cap S_2$, ☐ c) $Sp(\pi + \tau) \subset \{\lambda_i \cdot \rho_j \ : \ i, j \leq n\}$,

☐ d) $Sp(\pi + \tau) \subset \{\lambda_i + \rho_j \ : \ i, j \leq n\}$, ☐ e) S_1.

9.27. Пусть π и τ линейные операторы в унитарном пространстве, причем всякий вектор собственный для одного из этих операторов является собственным и для другого. Пусть спектры этих операторов являются множествами $S_1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ и $S_2 = \{\rho_1, \dots, \rho_n\}$. Каков спектр оператора $\pi \cdot \tau$?

Ответы:

☐ a) $S_1 \cup S_2$, ☐ b) $S_1 \cap S_2$, ☐ c) $Sp(\pi \cdot \tau) \subset \{\lambda_i \cdot \rho_j \ : \ i, j \leq n\}$

☐ d) $Sp(\pi \cdot \tau) \subset \{\lambda_i + \rho_j \ : \ i, j \leq n\}$ ☐ e) S_1 .

9.28. Пусть π и τ симметрические линейные операторы в евклидовом пространстве. Тогда оператор $\pi + \tau$ является:

Ответы:

- ☐ *a)* невырожденным,
- ☐ *b)* кососимметрическим,
- ☐ *c)* симметрическим,
- ☐ *d)* ортогональным,
- ☐ *e)* ни один из остальных ответов не является верным.

9.29. Пусть π и τ кососимметрические линейные операторы в евклидовом пространстве. Тогда оператор $\pi + \tau$ является:

Ответы:

- ☐ *a)* невырожденным,
- ☐ *b)* кососимметрическим,
- ☐ *c)* симметрическим,
- ☐ *d)* ортогональным,
- ☐ *e)* ни один из остальных ответов не является верным.

9.30. Пусть π и τ ортогональные линейные операторы в евклидовом пространстве. Тогда оператор $\pi + \tau$ является:

Ответы:

- ☐ *a)* невырожденным,
- ☐ *b)* кососимметрическим,
- ☐ *c)* симметрическим,
- ☐ *d)* ортогональным,
- ☐ *e)* ни один из остальных ответов не является верным.

End Score: Correct

Title Page
Contents
Page 96 of 112
Go Back
Close

10. Квадратичные формы

Start

10.1. Какая из следующих матриц является матрицей квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 - 2x_1^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$?

Ответы:

☐ a) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, ☐ b) $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, ☐ c) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,

☐ d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, ☐ e) $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10.2. Пусть A_f матрица квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ и сделано линейное преобразование переменных с матрицей Q получена новая квадратичная форма с матрицей B_f . Как связаны между собой матрицы A_f и B_f.

Ответы:

☐ a) $B_f = Q^{-1}A_fQ$, ☐ b) $B_f = QA_fQ^{-1}$, ☐ c) $A_f = B_f$,

☐ d) $B_f = QA_fQ'$, ☐ e) $B_f = Q'A_fQ$.

10.3. Как изменится ранг квадратичной формы при невырожденном преобразовании переменных?

Ответы:

☐ *a)* увеличивается, ☐ *b)* уменьшается, ☐ *c)* не изменяется, ☐ *d)* может измениться и в меньшую и в большую сторону, ☐ *e)* не увеличивается.

10.4. Как изменится ранг квадратичной формы при вырожденном преобразовании переменных?

Ответы:

☐ *a)* увеличивается, ☐ *b)* уменьшается, ☐ *c)* не изменяется, ☐ *d)* может измениться и в меньшую и в большую сторону, ☐ *e)* не увеличивается.

10.5. Как изменяется число отличных от нуля канонических коэффициентов квадратичной формы при невырожденном преобразовании переменных.

Ответы:

☐ *a)* увеличивается, ☐ *b)* уменьшается, ☐ *c)* не изменяется, ☐ *d)* может измениться и в меньшую и в большую сторону, ☐ *e)* не уменьшается.

10.6. В чем суть метода Лагранжа для квадратичных форм?

Ответы:

- ☐ *a)* вычисление главных миноров матрицы,
- ☐ *b)* вычисление угловых миноров матрицы,
- ☐ *c)* вычисление ранга квадратичной формы,
- ☐ *d)* выделение полных квадратов линейных форм в данной квадратичной форме,
- ☐ *e)* перестановка переменных не меняет квадратичную форму.

10.7. Любую ли квадратичную форму можно привести к каноническому виду методом Лагранжа?

Ответы:

- ☐ *a)* имеющую только целые коэффициенты,
- ☐ *b)* да любую,
- ☐ *c)* имеющую только рациональные коэффициенты,
- ☐ *d)* только квадратичную форму с невырожденной матрицей,
- ☐ *e)* только положительно определенную.

10.8. Пусть дана квадратичная форма от n переменных. Каковы размеры матрицы невырожденного преобразования переменных, приводящего ее к каноническому виду?

Ответы:

☐ *a)* столбец из n строк, ☐ *b)* строка из n столбцов, ☐ *c)* матрица первого порядка, ☐ *d)* матрица порядка $n!$, ☐ *e)* матрица порядка n.

10.9. Как построить ортогональное преобразование переменных, приводящее данную квадратичную форму к каноническому виду?

Ответы:

☐ *a)* нужно строить ортонормированный базис из собственных векторов оператора с матрицей A_f, ☐ *b)* применить метод Лагранжа, ☐ *c)* найти ранг квадратичной формы, ☐ *d)* преобразовать квадратичную форму к нормальному виду, ☐ *e)* привести по Гауссу матрицу квадратичной формы к ступенчатому виду.

Title Page
Contents
Page 100 of 112
Go Back
Close

10.10. Какова связь между квадратичной формой f и ортонормированным базисом из собственных векторов линейного оператора π_f, в евклидовом пространстве, имеющего в некотором в ортонормированном базисе матрицу, равную матрице квадратичной формы?

Ответы:

- ☐ *a)* ранг квадратичной формы равен рангу этого базиса,
- ☐ *b)* квадратичная форма положительно определена в этом базисе,
- ☐ *c)* этот базис образует главные оси квадратичной формы,
- ☐ *d)* квадратичная форма и базис конгруэнтны,
- ☐ *e)* только в этом базисе матрица квадратичной формы симметрическая.

10.11. Как связаны канонические коэффициенты квадратичной формы, приведенной к каноническому виду ортогональным преобразованием переменных, с линейным оператором π_f , матрица которого в ортонормированном базисе евклидова пространства совпадает с матрицей рассматриваемой квадратичной формы?

Ответы:

- ☐ *a)* спектр оператора совпадает с набором канонических коэффициентов,
- ☐ *b)* канонические коэффициенты равны рангу матрицы оператора,
- ☐ *c)* канонические коэффициенты совпадают с коэффициентами характеристического многочлена оператора,
- ☐ *d)* набор канонических коэффициентов совпадает с набором абсолютных величин собственных чисел,
- ☐ *e)* канонические коэффициенты совпадают с диагональными коэффициентами матрицы оператора.

10.12. Как зависят канонические коэффициенты квадратичной формы от выбора ортогонального преобразования, приводящего ее к главным осям?

Ответы:

- ☐ *a)* не зависят, только если ортогональное преобразование невырожденно,
- ☐ *b)* никак не зависят,
- ☐ *c)* только знаки этих коэффициентов при разных преобразованиях могут быть различными,
- ☐ *d)* при разных преобразованиях коэффициенты могут стать совершенно различными,
- ☐ *e)* не зависят только для симметрических ортогональных преобразований.

10.13. Какую квадратичную форму можно привести к каноническому виду методом ортогонального преобразования переменных?

Ответы:

- ☐ *a)* любую вещественную,
- ☐ *b)* только имеющую целые коэффициенты,
- ☐ *c)* только имеющую рациональные коэффициенты,
- ☐ *d)* только положительно определенную,
- ☐ *e)* только с невырожденной матрицей.

10.14. Пусть квадратичная форма $f(x_1,\ldots,x_n)$ при линейном невырожденном преобразовании переменных $(x_1,\ldots,x_n)$ в переменные $(y_1,\ldots,y_n)$ переходит в квадратичную форму $g(y_1,\ldots,y_n)$. Как изменяется квадратичная форма $g(y_1,\ldots,y_n)$ при обратном преобразовании переменных $(y_1,\ldots,y_n)$ в переменные $(x_1,\ldots,x_n)$?

Ответы:

- ☐ *a)* переходит в канонический вид,
- ☐ *b)* приводится к главным осям,
- ☐ *c)* становится положительно определенной,
- ☐ *d)* переходит в $f(x_1,\ldots,x_n)$,
- ☐ *e)* изменяется ранг квадратичной формы.

10.15. Найдите среди заданных линейных преобразований неизвестных, невырожденные преобразования приводящие квадратичную форму
$f(x_1,x_2,x_3)=(x_2)^2-(x_3)^2$ к каноническому виду.

Ответы:

- ☐ *a)* $x_1=0, x_2=y_2, x_3=y_3$,
- ☐ *b)* $x_1=y_2+y_3, x_2=y_2, x_3=y_3$,
- ☐ *c)* $x_1=y_1, x_2=y_2+y_2, x_3=y_2-y_3$,
- ☐ *d)* $x_1=y_1, x_2=y_2, x_3=y_3$,
- ☐ *e)* $x_1=y_2, x_2=y_2, x_3=y_3$.

10.16. Как зависит число положительных канонических коэффициентов квадратичной формы от выбора невырожденного преобразования переменных, приводящего квадратичную форму к каноническому виду?

Ответы:

- ☐ *a)* это число является инвариантом преобразований только для невырожденных квадратичных форм,
- ☐ *b)* это число при преобразованиях уменьшается,
- ☐ *c)* никак не зависят,
- ☐ *d)* это число при преобразованиях увеличивается,
- ☐ *e)* не изменяется только для положительно определенных квадратичных форм.

10.17. Пусть собственные числа матрицы квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3)$ попарно различны. Сколько существует различных способов преобразования f к главным осям с точностью до перестановок новых переменных $g(y_1, y_2, y_3)$?

Ответы:

☐ *a)* 1, ☐ *b)* 2, ☐ *c)* 3, ☐ *d)* 4, ☐ *e)* 8.

10.18. Найти максимальное число попарно конгруэнтных квадратичных форм среди

$$x^2 - y^2, \quad 2x^2 - 3xy, \quad 3x^2 - 2y^2, \quad 2x^2 + 3xy$$

Ответы:

☐ *a)* 0, ☐ *b)* 1, ☐ *c)* 2, ☐ *d)* 3, ☐ *e)* 4.

10.19. Пусть квадратичная форма $F(x,y)$ принимает значение 1 на единичной окружности с центром в начале координат. Какие значения принимает $F(x,y)$ на окружности радиуса 2 с тем же центром?

Ответы:

☐ *a)* $\sqrt{2}$, ☐ *b)* 2, ☐ *c)* 4, ☐ *d)* любые положительные значения, ☐ *e)* любые значения.

10.20. Найти множество значений параметра λ , для которых квадратичная форма $x^2 - 2\lambda xy + 4y^2$ является положительно определенной.

Ответы:

☐ *a)* $\{0\}$, ☐ *b)* $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ☐ *c)* $(-1, 1)$, ☐ *d)* $(-2, 2)$, ☐ *e)* $(-4, 4)$.

10.21. Каково максимальное число попарно неконгруэнтных квадратичных форм $F(x,y)$?

Ответы:

☐ *a)* 3, ☐ *b)* 4, ☐ *c)* 5, ☐ *d)* 6, ☐ *e)* бесконечно много.

10.22. Каково максимальное число попарно не эквивалентных квадратичных форм $F(x, y)$ над полем вещественных чисел?

Ответы:

☐ *a)* 3, ☐ *b)* 4, ☐ *c)* 5, ☐ *d)* 6, ☐ *e)* бесконечно много.

10.23. Какие из квадратичных форм F_1, F_2, F_3, F_4 эквивалентны между собой над полем вещественных чисел, если

$$F_1 = 2y^2 + 4xy, \qquad F_2 = x^2 - 2xy + 5y^2,$$

$$F_3 = -3x^2 + 6xy - 3y^2, \qquad F_4 = -x^2 - 2xy - y^2\ ?$$

Ответы:

☐ *a)* F_1, F_2, ☐ *b)* F_1, F_3, ☐ *c)* F_2, F_3, ☐ *d)* F_2, F_4, ☐ *e)* F_3, F_4.

10.24. Пусть квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_i x_j$ положительно определена. Тогда

Ответы:

- ☐ *a)* все коэффициенты a_{ij} положительны,
- ☐ *b)* a_{44} положителен,
- ☐ *c)* все миноры в матрице $(a_{ij})_4^4$ положительны,
- ☐ *d)* знаки $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ чередуются,
- ☐ *e)* найдется ненулевой набор чисел $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$ такой, что $f(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) \leq 0$.

10.25. Какое из следующих свойств характеризует положительно определенные квадратичные формы?

Ответы:

- ☐ *a)* все её коэффициенты положительны,
- ☐ *b)* все её миноры положительны,
- ☐ *c)* при подстановке в неё любых чисел получается положительное число,
- ☐ *d)* при подстановке в неё любого ненулевого набора вещественных чисел получается положительное число,
- ☐ *e)* если она не является отрицательно определенной, то является положительно определенной.

10.26. Допустим, что квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3)$ принимает положительные значения в бесконечном числе точек. Верно ли, что f положительно определена?
Ответы:

☐ *a)* да,

☐ *b)* только при условии, что эти точки лежат на одной прямой,

☐ *c)* это всегда не так,

☐ *d)* только при условии, что существует плоскость в R^3 такая, что f положительна во всех точках этой плоскости.

☐ *e)* не обязательно.

10.27. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ положительно определенная квадратичная форма. Какое из следующих высказываний для f справедливо?
Ответы:

☐ *a)* все коэффициенты f определены,

☐ *b)* все коэффициенты f положительны,

☐ *c)* все угловые миноры положительны,

☐ *d)* все миноры положительны,

☐ *e)* при подстановке любых чисел в f получится строго положительное число.

10.28. Чем отличается положительно определенная квадратичная форма $f(x_1, \dots, x_n)$ от неотрицательной квадратичной формы $g(x_1, \dots, x_n)$?

Ответы:

- ☐ *a)* коэффициенты f строго положительны, а некоторые коэффициенты g могут быть равными нулю,
- ☐ *b)* ничем не отличаются,
- ☐ *c)* квадратичная форма g может иметь ранг меньший чем число неизвестных,
- ☐ *d)* существует набор чисел такой, что $g(\rho_1, \dots, \rho_n) < 0$,
- ☐ *e)* каноническая форма для g может содержать квадрат переменной с отрицательным коэффициентом.

10.29. Пусть f положительно определенная квадратичная форма от n переменных. Какие из следующих условий верны для f?

Ответы:

- ☐ *a)* она может иметь отрицательные канонические коэффициенты,
- ☐ *b)* может иметь канонические коэффициенты равные нулю,
- ☐ *c)* её ранг может быть меньше чем n,
- ☐ *d)* она обязана иметь только положительные канонические коэффициенты,
- ☐ *e)* при любом невырожденном преобразовании её к каноническому виду все коэффициенты при квадратах новых переменных равны 1.

10.30. Сформулируйте критерий Сильвестра.

Ответы:

- ☐ *a)* если квадратичная форма положительно определена, то все её миноры положительны,
- ☐ *b)* если все миноры квадратичной формы положительны, то она положительно определена,
- ☐ *c)* если все угловые миноры квадратичной формы положительны, то она положительно определена,
- ☐ *d)* квадратичная форма положительно определена, тогда и только тогда, когда все её миноры положительны,
- ☐ *e)* квадратичная форма положительно определена, тогда и только тогда, когда все её угловые миноры положительны.

End   Score: Correct