МАЛЫЙ МЕХМАТ — математические кружки для школьников при механико-математическом факультете МГУ. Занятия проходят по субботам в главном здании МГУ на Воробьёвых горах для учащихся 6—8 классов с 16^{00} до 18^{00}, для учащихся 9—11 классов с 18^{00} до 20^{00}. С вопросами обращайтесь по адресу электронной почты mmmf@mmmf.mccme.ru или по телефону 939 39 43.

ПРИГЛАШАЮТСЯ ВСЕ ЖЕЛАЮЩИЕ!

Каждую субботу сотни школьников стекаются в главное здание МГУ на Воробьёвых горах на занятия Малого мехмата. Здесь школьники учатся решать задачи и математически строго излагать найденные решения. Каждый школьник получает в начале занятия листок с задачами, которые, как правило, объединены одной темой. Свои решения школьники рассказывают преподавателям — студентам и аспирантам «большого» мехмата.

Основные принципы кружков: они открыты для всех желающих и бесплатны. Более того, можно посещать кружок, начиная с любого занятия.

Участие в кружке не даёт никаких льгот при поступлении в вузы и других формальных преимуществ. Поэтому сюда приходят только те, кому интересен сам процесс решения задач, кто действительно хочет почувствовать красоту математики. А это, по большому счёту, оказывается значительно существеннее всевозможных льгот.

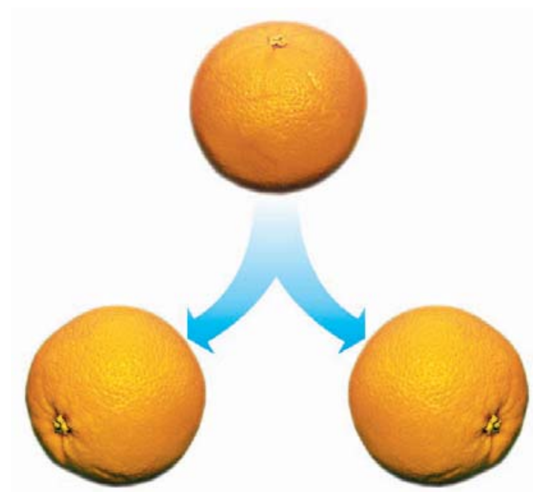
ISBN 5-94057-003-8
9 785940 570035

Фото М. Ю. Панова.

Библиотека
«Математическое просвещение»

И. В. Ященко

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ



Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2002

Серия основана в 1999 году.

Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 20

И. В. Ященко

ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2002

УДК 510.2
ББК 22.12
Я97

Аннотация

При развитии теории множеств, на которой базируется вся современная математика, возникали парадоксы. Например, парадокс брадобрея, формулируемый следующим образом:

Бреет ли себя брадобрей, если он бреет тех и только тех, кто сам себя не бреет?

В брошюре рассказывается о том, как теория множеств обходится с подобными ситуациями, а также о других парадоксах, в том числе возникающих при рассмотрении аксиомы выбора. В частности, вы узнаете, как из одного апельсина сделать два.

В приложении 3 приведены задачи, самостоятельное решение которых поможет читателю более полно разобраться в материале брошюры.

Текст брошюры представляет собой обработанные записи лекций, прочитанных автором 8 апреля 2000 года на Малом мехмате для школьников 9—11 классов (запись Е. Н. Осьмовой) и в июле 2001 года в рамках летней школы «Современная математика» для школьников 10—11 классов и студентов 1—2 курса (запись Ю. Л. Притыкина).

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов младших курсов, учителей.

Издание осуществлено при поддержке Московской городской Думы и Московского комитета образования.

ISBN 5-94057-003-8

Ященко Иван Валериевич.

Парадоксы теории множеств.

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“»).
М.: МЦНМО, 2002. — 40 с.: ил.

Редактор *Ю. Л. Притыкин.* Техн. редактор *М. Ю. Панов.*

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано к печати 7/X 2002 года. Формат бумаги 60×88 1/16. Офсетная бумага № 1. Офсетная печать. Физ. печ. л. 2,50. Усл. печ. л. 2,44. Уч.-изд. л. 2,31. Тираж 3000 экз. Заказ 3424.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
121002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 05 00.

Отпечатано в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ».
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.

ЧТО ТАКОЕ МНОЖЕСТВО?

Когда мы собираемся что-то изучать, возникает потребность очертить круг объектов, с которыми мы будем работать: например, «Возьмём всех учеников 9-го класса...», «Рассмотрим все вершины треугольника...», «Рассмотрим все буквы русского алфавита...».

Собственно, именно это множеством и называется: *множество — это коллекция (совокупность) объектов, определённая некоторым правилом*[1]. Можно представлять себе множества коробками, в которых лежат элементы.

[1] Хотя на самом деле никто толком и не знает, что такое множество.

Но такое на первый взгляд «безобидное» определение порождает некоторые проблемы. Рассмотрим слово

М Н О Ж Е С Т В О.

Что из себя представляет множество букв этого слова? Наверняка вы уже знаете, что множество записывают так: в фигурных скобках — список элементов, из которых это множество состоит. Итак, пишем:

$$\{М,\ Н,\ О,\ Ж,\ Е,\ С,\ Т,\ В\}.$$

Вот и возникла первая проблема: в русском алфавите одна буква О, а в слове МНОЖЕСТВО две. Почему вторую букву О писать не надо, можно объяснить, произнеся такое заклинание:

множество определяется своими элементами,

т. е. каждый элемент в множестве встречается только один раз. Теперь можно сказать, что вторая буква О не нужна, поскольку буква О в нашем множестве уже есть.

Но что делать, если нам всё-таки нужны две буквы О? Например, мы играем в такую игру: составляем слова из букв слова МНОЖЕСТВО. Понятно, что если букву О можно использовать два раза, то мы составим больше слов. Значит, надо как-то различать эти две буквы О, например, назвать их $О_1$ и $О_2$. Тогда множество букв в слове МНОЖЕСТВО будет выглядеть так:

$$\{М,\ Н,\ О_1,\ Ж,\ Е,\ С,\ Т,\ В,\ О_2\}.$$

Теперь с точки зрения русского языка всё в порядке: букв О две, и мы можем спокойно составлять слова с двумя буквами О. С точки зрения теории множеств тоже всё хорошо: двух одинаковых элементов в одном множестве нет.

Итак, эту проблему мы решили.

Вторая, более серьёзная проблема возникает из-за того, что нам хочется рассматривать большие и непонятно как определённые множества, вроде множества всех людей или множества всех деревьев, и в фигурных скобках не выписывать, например, список всех учеников школы, а просто писать

{все ученики школы}.

Но прежде чем рассказать об этой проблеме, обсудим одно замечательное множество.

ПУСТОЕ МНОЖЕСТВО

Что значит, что множество A является подмножеством множества B? Это значит, что все элементы множества A принадлежат и множеству B. Если представлять себе множества в виде коробок, то множество B — это большая коробка, а множество A — коробка поменьше, в которой лежат некоторые из элементов, лежащих в коробке B. Обозначение: $A \subset B$.

Например, множество всех чётных чисел является подмножеством множества всех целых чисел, а множество $\{0, 1, 2\}$ — подмножеством множества $\{0, 1, 2, 3\}$.

Рассмотрим два множества:

{все летающие крокодилы} и {все участники олимпиады}.

Является ли одно из них подмножеством другого?

Как вообще доказать, что $A \subset B$? Можно проверить, что любой элемент a множества A лежит в B. А можно применить метод от противного[2]: если A не является подмножеством B, то найдётся элемент $a \in A$, такой что $a \notin B$, а если такого a нет, то $A \subset B$.

[2] Противного, мерзкого, гадкого…

Но можно ли найти летающего крокодила, не участвующего в олимпиаде? Да где вообще найдёшь летающего крокодила… Поэтому

{все летающие крокодилы} $\subset$ {все участники олимпиады}[3].

Множество летающих крокодилов — это *пустое* множество: в нём нет элементов. Это множество настолько важное, что для него даже придумали особый символ: $\varnothing$ [4]. Символ для пустого множества только один, потому что пустое множество единственно. В самом деле, предположим, что существуют два разных пустых множества. Но что значит, что множества разные? Это значит, что в одном из них найдётся элемент, который не принадлежит другому. Но в пустых множествах вообще элементов нет!

[3] Что же получается: все летающие крокодилы участвуют в олимпиаде?

[4] А программисты стащили этот символ и используют для обозначения нуля.

Итак, мы доказали, что пустое множество единственно и является подмножеством любого другого множества.

ПАРАДОКС БРАДОБРЕЯ

Это довольно известная история, и у неё есть много версий.

В одном полку жил-был полковой парикмахер, которого по историческим причинам называют брадобреем. Однажды командир

приказал ему брить тех и только тех, кто не бреется сам[5]. Брадобрей, получив приказ, сначала обрадовался, потому что многие солдаты умели бриться сами, побрил тех, кто бриться сам не умел, а потом сел на пенёк и задумался: а что ему с собой-то делать? Ведь если он будет брить себя, то нарушит приказ командира не брить тех, кто бреется сам. Брадобрей уже решил было, что брить себя не будет. Но тут его осенила мысль, что если он сам себя брить не будет, то окажется, что он сам не бреется, и по приказу командира он должен всё-таки себя побрить…

[5] Приказ довольно разумный: если солдат бреется сам, то зачем тратить на него время полковому парикмахеру? Наверное, полк был большой, и брадобрей просто не справлялся.

Что с ним стало, история умалчивает.

Причём же здесь теория множеств? А вот причём: командир пытался определить множество людей, которых брадобрею нужно брить, таким образом:

{те и только те, кто не бреется сам}.

Казалось бы, обычное множество, описывается несколькими русскими словами, чем оно хуже, например, множества

{все ученики школы}?

Но с этим множеством тут же возникает проблема: непонятно, принадлежит ли этому множеству брадобрей.

Вот другая версия этого парадокса.

Прилагательное русского языка назовём *рефлексивным*, если оно обладает свойством, которое определяет. Например, прилагательное «русский» — рефлексивное, а прилагательное «английский» — нерефлексивное, прилагательное «трёхсложный» — рефлексивное (это слово состоит из трёх слогов), а прилагательное «четырёхсложный» — нерефлексивное (состоит из пяти слогов)[6]. Вроде бы ничто не мешает нам определить множество

[6] Интересно, а прилагательное «трудновыговариваемое» является рефлексивным?

{все рефлексивные прилагательные}.

Но давайте рассмотрим прилагательное «нерефлексивный». Оно рефлексивное или нет?

Можно заявить, что прилагательное «нерефлексивный» не является ни рефлексивным, ни нерефлексивным. Но как тогда быть с таким заклинанием:

верно либо утверждение, либо его отрицание?

(Это заклинание называется законом исключённого третьего; на нём, собственно, и основан метод от противного.)

Наконец, третья версия парадокса. Рассмотрим множество

$$M = \{\text{множества } A, \text{ такие что } A \notin A\}$$

— мы включаем во множество M только те множества A, которые принадлежат сами себе. Бывают же множества, которые содержат другие множества. Например, пусть

$$A=\{1,\ 2,\ 3\}, \qquad B=\{\{1,\ 2\},\ 3\},$$

множеству A принадлежат числа 1, 2, 3, а множеству B — два элемента: множество $\{1,\ 2\}$ и число 3. Возвращаясь к коробкам, это можно сказать так: одни коробки можно класть в другие коробки. (Оказывается, что в каждой такой последовательности вложенных коробок всегда конечное число элементов — этому есть глубокие причины.)

Рассмотренное множество M — это своего рода «брадобрей». Если предположить, что $M\in M$, сразу приходим к выводу, что $M\notin M$. Если же предположить, что $M\notin M$ — получаем, что $M\in M$.

Столкнувшись с этими парадоксами, создатели теории множеств осознали, что *нельзя задавать множества произвольными словосочетаниями*. После этого они стали бороться с парадоксами двумя способами.

Первый способ — способ Кантора, придумавшего «наивную теорию множеств», в которой запрещаются все действия и операции, ведущие к парадоксам. Идея в следующем: разрешается работать со множествами, которые «встречаются в природе», также разрешается работать со множествами, которые получаются из них разумными теоретико-множественными операциями. Пусть, например,

$$A=\{\text{множество учащихся школы}\},$$
$$B=\{\text{множество непрерывных функций}\}$$

(эти множества «встречаются в природе»), из них можно получить объединение $A\cup B$, пересечение $A\cap B$. Можно даже умножить множество A на множество B: по определению

$$A\times B=\{(a,\ b)\colon\ a\in A,\ \ b\in B\}$$

— множество пар, в которых первый элемент из первого множества, а второй — из второго. В нашем случае $A\times B$ — это множество пар, в которых первый элемент — учащийся школы, а второй — какая-нибудь непрерывная функция.

Другой способ — аксиоматический. Этот способ преодоления парадоксов развивали Цермело и Френкель (система аксиом Цермело—Френкеля), Гёдель и Бернайс (система аксиома Гёделя—Бернайса). Согласно этой теории, множество — это нечто, удовлетворяющее аксиомам, например, следующим*).

---

*) Справа приведены записи аксиом на «языке кванторов». Вот значения использованных кванторов: $\forall\ x$ — для любого x; $\exists\ x$ — существует x; $\exists!\ x$ — существует единственный x; $\mathrm{Set}\{...\}$ — $\{...\}$ является множеством; $\{x\colon \varphi(x)\}$ — множество тех и только тех x, которые удовлетворяют условию $\varphi(x)$; $\vee$ — логическое «или»; $\wedge$ — логическое «и». Подробнее об аксиоматике теории множеств см. книгу [4].

1. *Аксиома объёмности.* Множество определяется своими элементами: множества, состоящие из одних и тех же элементов, равны.

$$1.\ \forall\ z\ \ (z\in x\ \Leftrightarrow\ z\in y)\ \Rightarrow\ x=y.$$

2. *Аксиома объединения.* Объединение всех элементов множества есть множество.

$$2.\ \mathrm{Set}\{z\colon\ \exists\ y\in x\ (z\in y)\}.$$

3. *Аксиома выделения.* Для каждого множества A и каждого условия φ существует множество

$$B=\{x\colon\ x\in A,\ \ \varphi(x)\}$$

— подмножество элементов множества A, удовлетворяющих условию φ.

$$3.\ \forall\ x\ \ (\varphi(x)\Rightarrow x\in y)\Rightarrow\ \Rightarrow \mathrm{Set}\{x\colon\ \varphi(x)\}.$$

Другими словами, мы не можем взять множество всех летающих крокодилов со всего мира или множество тех множеств, которые не содержат сами себя, а можем, взяв некоторое множество, выделить в нём «кусочек» — множество его элементов, удовлетворяющих некоторому условию.

4. *Аксиома степени.* Множество всех подмножеств данного множества есть множество.

$$4.\ \mathrm{Set}\{y\colon\ y\subseteq x\}.$$

5. *Аксиома подстановки.* Пусть X — множество, а $\varphi(y,\ z)$ — произвольная формула. Тогда если для каждого y существует и единственен z, такой что истинно $\varphi(y,\ z)$, то существует множество всех z, для которых найдётся $y\in X$, такой что $\varphi(y,\ z)$ истинно.

$$5.\ \forall\ y\ \ \exists!\ z\ \ \varphi(y,\ z)\Rightarrow\ \Rightarrow \mathrm{Set}\{z\colon\ \exists\ y\in x\ \ \varphi(y,\ z)\}.$$

6. *Аксиома фундирования.* Не существует бесконечной последовательности вложенных множеств: каждая цепочка множеств

$$A_1\ni A_2\ni A_3\ni\ldots$$

конечна.

$$6.\ \exists\ y\ \ (y\in x)\Rightarrow\ \Rightarrow \exists\ y\in x\ \ \forall\ z\in y\ \ (z\notin x).$$

7. *Аксиома бесконечности.* Существуют бесконечные множества, т. е. такие множества A, что A равномощно $A\cup\{A\}$.

$$7.\ \exists\,x\ ((\exists\,y\in x\ \forall\,z\ (z\notin y))\wedge\ \wedge\ \forall\ y\in x\ \exists z\in x\ \ (w\in z\ \Leftrightarrow\ \Leftrightarrow\ w\in y\ \vee\ w=y)).$$

8. *Аксиома выбора.* Ещё одна очень сложная, но и очень очевидная аксиома — о ней позже.

РАВНОМОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВ

Рассмотрим два множества A и B.

Отображение f из A в B (обозначается $f\colon A\to B$) — это правило, которое каждому элементу множества A ставит в соответствие элемент множества B, причём ровно один. (При этом не запрещается двум элементам множества A ставить в соответствие один и тот же элемент множества B, рис. 1, *а*.)

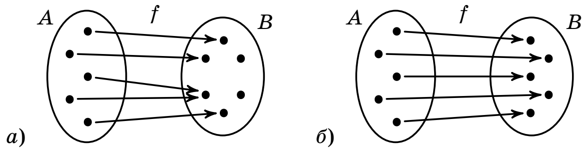


Рис. 1

Отображение f называется *взаимно однозначным*, если каждый элемент множества B поставлен в соответствие ровно одному элементу множества A (рис. 1, *б*).

Множества A и B называются *равномощными*, если существует взаимно однозначное отображение $f\colon A\to B$. Понимать это можно так: множества равномощны, если в них одинаковое количество элементов.

Например, множества $\{0, 1, 2\}$ и {лошадь, корова, телевизор} равномощны, а множества $\{0, 1, 2\}$ и {лошадь, корова} неравномощны[7]. А равномощны ли множества $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$? Неравномощны: в множестве $\varnothing$ нет ни одного элемента, а в множестве $\{\varnothing\}$ есть один элемент — пустое множество (множество $\{\varnothing\}$ — это коробка, в которой лежит пустое множество, а пустое множество — это коробка, в которой ничего не лежит).

[7] Телевизор был по делу...

Таблица 1

A	$P(A)$
$\varnothing$	$\{\varnothing\}$
$\{1\}$	$\{\varnothing, \{1\}\}$
$\{1, 2\}$	$\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

Таблица 2

		j							
		1	2	3	4	5	6	7	8
i	1	+	+	+	–	–	–	+	–
	2	+	+	–	+	–	+	–	–
	3	+	–	+	+	+	–	–	–

Множества $\mathbb{N}$ (множество всех натуральных чисел) и $\mathbb{N}\setminus\{1\}$ (множество всех натуральных чисел без единицы) равномощны: легко видеть, что отображение $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}\setminus\{1\}$, $f\colon n\mapsto n+1$, является взаимно однозначным. Множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ (множество всех целых чисел) также равномощны (достаточно рассмотреть отображение, которое переводит чётные натуральные числа в целые неотрицательные, а нечётные — в отрицательные).

Обозначим через $P(A)$ множество всех подмножеств множества A. Примеры $P(A)$ для некоторых множеств A приведены в табл. 1. (Естественно, подмножествами множества A являются и пустое множество, и само множество A.)

Подмножества множества $A=\{1, 2, 3\}$ не будем выписывать в строчку (так недолго запутаться), а перечислим при помощи таблицы: если элемент i входит в подмножество с номером j, то на пересечении i-й строки и j-го столбца ставится плюс, если не входит — минус (табл. 2). Например, первый столбец, в котором стоит три плюса, соответствует подмножеству $\{1, 2, 3\}$.

Если составить такую же таблицу для множества из n элементов, каждое подмножество будет определяться столбцом из n символов (по числу элементов), и каждый символ можно выбрать двумя способами — либо «+», либо «–». Поэтому всего получится 2^n различных столбцов. Итак, если в множестве A содержится n элементов, то в множестве $P(A)$ содержится 2^n элементов — существенно больше, чем в множестве A.

Но если подмножества конечного множества мы можем просто сосчитать, то как же быть с бесконечными? Например, подмножеств множества натуральных чисел бесконечно много, и самих натуральных чисел бесконечно много. Оказывается, что в множестве $P(\mathbb{N})$ «бесконечно больше» элементов, чем в множестве $\mathbb{N}$.

[8] Вообще, всё, что можно доказать, можно доказать от противного. Поэтому на всякий случай будем доказывать от противного.

Теорема. Каково бы ни было множество A, множество его подмножеств $P(A)$ неравномощно самому множеству A.

Это один из важнейших фактов теории множеств.

Доказательство. Доказывать будем методом от противного[8]. Предположим, что A равномощно $P(A)$, т. е. существует взаимно однозначное отображение

$$f\colon A\to P(A),$$

которое каждому элементу a множества A ставит в соответствие $f(a)$ — подмножество множества A.

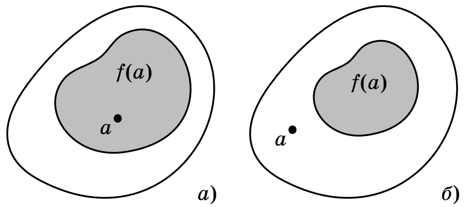


Рис. 2

Вспоминая рефлексивные прилагательные, которые сами обладают тем свойством, которое определяют, мы назовём элемент a хорошим, если $a\in f(a)$ (рис. 2, *а*), и плохим, если $a\notin f(a)$ (рис. 2, *б*). Пусть $\Pi\subset A$ — множество всех плохих элементов (возможно, пустое). Поскольку отображение f взаимно однозначно, существует элемент $x\in A$, такой что $f(x)=\Pi$. Вопрос: элемент x — хороший или плохой? Предположим, элемент x — хороший. Но тогда $x\in f(x)$, а $f(x)=\Pi$ — множество плохих элементов, и значит, элемент x — плохой. Противоречие. Если же элемент x — плохой, то $x \notin f(x) = \Pi$, а раз x не принадлежит множеству плохих элементов, то x — хороший. Снова противоречие. Получается, что элемент x, с одной стороны, должен принадлежать Π, а с другой стороны, не должен.

Но сейчас, в отличие от парадокса с прилагательным «нерефлексивный», у нас есть лазейка. Мы получили противоречие, предположив, что A равномощно $P(A)$. Значит, наше предположение неверно, т. е. A и $P(A)$ неравномощны. Теорема доказана.

ПАРАДОКСЫ, СВЯЗАННЫЕ С БЕСКОНЕЧНОСТЬЮ

С бесконечными множествами мы уже встречались и даже установили один удивительный факт: множества $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ и $\mathbb{N}$ равномощны. Мы знаем, что если к конечному множеству добавить элемент, то полученное множество неравномощно тому, которое было*). Это очень важное различие между конечными и бесконечными множествами, и даже определение бесконечного множества в некоторых учебниках даётся так: множество называется бесконечным, если оно равномощно себе плюс ещё один элемент.

А теперь — ещё одна история.

Дед Мороз и конфеты

На Новый год к детишкам пришёл Дед Мороз с мешком конфет. Конфет в мешке бесконечно много, и они занумерованы натуральными числами[9]. На каждой конфете написан её номер, и для каждого натурального числа есть ровно одна конфета с этим номером. За одну минуту до полночи Дед Мороз взял конфету № 1 и подарил детям. Через полминуты он дал детям конфеты № 2 и № 3 [10], но при этом конфету №1 забрал[11]. Ещё через четверть минуты он дал детям конфеты № 4, № 5, № 6 и № 7, но забрал конфеты № 2 и № 3. И так далее: щедрый Дед Мороз каждый раз даёт вдвое больше конфет, чем на предыдущем шаге, и за $\frac{1}{2^n}$ мин. до полночи даёт конфеты с номерами

$$2^n, \ 2^n+1, \ \dots, \ 2^{n+1}-1,$$

а забирает конфеты с номерами

$$2^{n-1}, \ 2^{n-1}+1, \ \dots, \ 2^n-1,$$

которые сам же дал на предыдущем шаге. При этом количество конфет у детей стремительно возрастает[12].

Сколько конфет будет у детей в полночь?

Давайте разбираться последовательно. У кого будет в полночь первая конфета? У Деда Мороза. А вторая конфета? У Деда Мороза: он забрал её себе за четверть минуты до полночи[13]. У кого будет m-я конфета? Если $2^{n-1} \leqslant m \leqslant 2^n - 1$, то за $\frac{1}{2^n}$ мин. до полночи хитрый Дед Мороз её забрал. Итак, каждая конкретная конфета в полночь окажется у Деда Мороза. Что же получается? После каждого шага у детей становится в два раза больше конфет, а в полночь происходит катастрофа?

На самом деле парадокса тут никакого нет[14]. Всё дело в том, что бесконечные множества устроены существенно сложнее конечных, и интуиция тут не всегда срабатывает правильно.

Математики довольно долго боялись абстрактного понятия «множество». Понятно почему: возникали парадокс брадобрея, парадокс с нерефлексивным прилагательным и другие очень странные множества, например, бесконечные, свойства которых иногда очень непохожи на свойства конечных множеств*). Кроме этого, рассматривая бесконечные множества, математики столкнулись с *аксиомой выбора*, которую мы уже упоминали.

АКСИОМА ВЫБОРА

Пусть имеется непустое множество. Всегда ли мы можем взять из него какой-нибудь элемент? Конечно: раз множество непусто, в нём есть хотя бы один элемент, вот этот элемент и возьмём.

А если есть n непустых непересекающихся множеств, и нужно из каждого взять по элементу? Нет проблем: возьмём сначала в первом множестве какой-нибудь элемент, потом во втором множестве какой-нибудь элемент и т. д. Таким образом мы построим новое множество, которое пересекает ровно по одному элементу каждое из исходных множеств.

А если множеств бесконечно много? Просто так взять по одному элементу из бесконечного числа множеств о п а с н о — может получиться как с Дедом Морозом.

[9] Наверное, Дед Мороз был математический...

[10] Видимо, понял, что дал мало.

[11] Неужели дети её за полминуты ещё не съели?

[12] Так что дети чувствуют себя совершенно счастливыми.

[13] М-да... Начинают закрадываться подозрения.

[14] Всё нормально, кроме того, что обидно. Но не каждое верное утверждение должно быть приятно.

*) Несмотря на очевидность этого утверждения, доказывается оно довольно сложно. Кроме того, перед доказательством нужно ещё понять, что такое «конечное множество».

*) Даже Евклид опасался бесконечных множеств и свою знаменитую теорему о том, что простых чисел бесконечно много, формулировал так: простых чисел больше любого наперёд заданного количества, т. е. какое бы число мы ни взяли, простых чисел всё равно больше чем это число.

Мы уже договорились множества представлять себе коробками, в которых лежат элементы. А сейчас мы будем рассматривать обувные коробки, в каждой из которых два ботинка и шнурки к ним. Допустим, мы хотим по одному ботинку из каждой пары поставить на витрину в магазине[15]. Как взять из каждой коробки по одному ботинку? Мы уже умеем это делать, если коробок конечное число. А если их бесконечно много? В самом деле, пусть на каждой коробке стоит номер, и для каждого натурального числа n есть коробка с номером n, в которой лежат два ботинка и шнурки (рис. 3). Как же нам выбрать из каждой пары по одному ботинку, т. е. как задать множество ботинок, которые попадут на витрину? Например, можно взять множество

Рис. 3

$$\{\text{все правые ботинки}\}.$$

Заметим, что мы не возились с каждой коробкой, определяя, какой из неё взять ботинок, и вообще никаких действий не производили, а просто рассмотрели некоторое множество. И это множество пересекает каждую коробку ровно по одному ботинку.

А как из каждой коробки выбрать по шнурку[16]? Если бы на одном из шнурков в каждой коробке был завязан узелок, мы просто рассмотрели бы множество шнурков с узелком. Проблема в том, что шнурки неразличимы, и какой из них брать (или на каком из них вязать узелок), непонятно. Просто взять и вытащить любой шнурок мы не можем: коробок бесконечно много. Во тут-то и нужна аксиома выбора.

Подробнее об аксиоме выбора см. книги [4, 5].

[15] Если поставить два ботинка, то украдут.

[16] Ботинки советские, поэтому шнурки отдельно.

НЕИЗМЕРИМОЕ ПО ЛЕБЕГУ МНОЖЕСТВО

Рассмотрим пример применения аксиомы выбора. С её помощью мы построим множество на окружности S^1, неизмеримое по Лебегу.

Мера $\mu(A)$ — «длина множества A» — это функция, удовлетворяющая следующим свойствам.

1. $\mu(S^1)=1$.

2. (Счётно-аддитивность.) Для счётного числа попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ мера объединения этих множеств равна сумме мер самих множеств:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i).$$

3. (Неотрицательность.) $\mu(A)\geqslant 0$.

Кроме того, потребуем от меры Лебега ещё одно свойство, которое, вообще говоря, не требуется от произвольной меры. Это свойство называется инвариантностью.

4. Если множество подвинуть (в случае окружности — повернуть), мера не должна измениться:

$$\mu(A)=\mu(\varphi(A)),$$

где φ — поворот.

Например, если A — это половина дуги окружности, то $\mu(A)=\frac{1}{2}$. Действительно, если $B=S^1\setminus A$ — дополнение к A, то

$$\mu(A)+\mu(B)=\mu(A\cup B)=\mu(S^1)=1 \quad \text{и} \quad \mu(B)=\mu(\varphi_\pi(A))=\mu(A),$$

поэтому $2\mu(A)=1$ и $\mu(A)=\frac{1}{2}$.

А любое ли множество A на окружности измеримо по Лебегу, т. е. для любого ли множества A можно вычислить его меру $\mu(A)$? Оказывается, что не для любого.

Первый пример неизмеримого по Лебегу множества привёл Витали.

Каждая точка на окружности задаётся углом от 0 до 2π — и далее мы будем обозначать точки окружности числами от 0 до 2π. Назовём две точки a и b эквивалентными, если

$$a-b=q\cdot 2\pi, \quad q\in\mathbb{Q}$$

(будем в таком случае писать $a\sim b$). Таким образом, окружность разбивается на так называемые *классы эквивалентности* — множества A_x, в которые вместе с точкой x входят и все точки, эквивалентные x. Могут ли два таких множества A_x и A_y пересекаться? Если u — общий элемент этих множеств, то $u\sim x$ для любого элемента $x\in A_x$ и $u\sim y$ для любого элемента $y\in A_y$. Но если

$$u-x=q_1\cdot 2\pi, \quad q_1\in\mathbb{Q},$$
$$u-y=q_2\cdot 2\pi, \quad q_2\in\mathbb{Q},$$

то $x-y=(q_2-q_1)\cdot 2\pi$, т. е. $x\sim y$, поскольку $q_2-q_1\in\mathbb{Q}$. Следовательно, $A_x=A_y$.

Таким образом, как и равенство (=), наше отношение эквивалентности ($\sim$) обладает транзитивностью: если $a\sim b$, $b\sim c$, то и $a\sim c$. Отношение эквивалентности, очевидно, обладает также симметричностью и рефлексивностью: если $a\sim b$, то и $b\sim a$; $a\sim a$ для любого a.

Используя аксиому выбора, выберем из всех классов эквивалентности по одному представителю и образуем из них множество V. Чему может быть равна мера полученного множества V? Мера $\mu(V)$ не может быть равна 0, поскольку

$$\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \varphi_{2\pi q}(V)=S^1$$

(множества $\varphi_{2\pi q}(V)$ попарно не пересекаются), а $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} \mu(\varphi_{2\pi q}(V))=$ $=\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} 0\neq 1$. По аналогичным причинам мера $\mu(V)$ не может быть больше 0, поскольку тогда получается, что

$$\mu(S^1)=\sum_{q\in\mathbb{Q}} \mu(\varphi_{2\pi q}(V))=+\infty.$$

Поэтому считается, что мера $\mu(V)$ неопределена, т. е. V является неизмеримым по Лебегу множеством.

Как видите, с рассмотрением аксиомы выбора появляются новые проблемы — этакие «математические монстры» — неизмеримые по Лебегу множества. Однако совсем запретить аксиому выбора тоже нельзя. При помощи именно аксиомы выбора в математическом анализе доказывается эквивалентность двух определений предела функции.

ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

Рассмотрим множество M, про некоторые пары a, b элементов которого известно, что $a\leqslant b$ (т. е. на множестве M задано *отношение порядка*). Отношение порядка можно также интерпретировать как подмножество квадрата множества $M^2=M\times M$: в таблице, строки и столбцы которой соответствуют элементам множества M, некоторые клетки заштрихованы — если заштрихована клетка на пересечении столбца a и строки b, то $a\leqslant b$.

Отношение порядка — это, конечно, не любое подмножество $M\times M$, оно должно удовлетворять следующим свойствам:

1) $a\leqslant a$ для любого $a\in M$;
2) если $a\leqslant b$ и $b\leqslant c$, то $a\leqslant c$;
3) если $a\leqslant b$ и $b\leqslant a$, то $a=b$.

Отношением порядка являются, например, обычное сравнение чисел на прямой ($\leqslant$), вложенность множеств ($\subseteq$), отношение «делит» ($a\,|\,b$ — a делит b).

Иногда от отношения порядка хочется выполнения ещё некоторых дополнительных свойств, например, если нет несравнимых элементов, т. е. про любые два элемента a и b можно утверждать, что

либо $a\leqslant b$, либо $b\leqslant a$, то упорядочение множества называется *линейным упорядочением*: все элементы множества можно выстроить по возрастанию.

Забегая немного вперёд, скажем, что упорядочение элементов множества необходимо, в частности, для того, чтобы можно было рассматривать объекты по индукции: хочется иметь возможность сначала рассмотреть первый элемент, доказать для него некоторое утверждение, а затем, используя то, что это утверждение верно для первых n элементов, вывести его и для $(n+1)$-го. Для натуральных чисел доказательство принципа математической индукции опирается на тот факт, что любое непустое подмножество натуральных чисел имеет наименьший элемент.

От произвольного отношения порядка и произвольного множества хочется выполнения аналогичного свойства: в любом подмножестве рассматриваемого множества есть наименьший элемент относительно рассматриваемого отношения порядка*). Если множество линейно упорядочено, и, кроме того, в любом его подмножестве можно выделить наименьший элемент, то оно называется *вполне упорядоченным*.

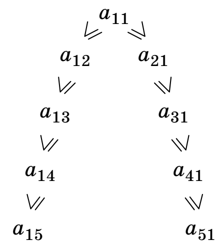


Рис. 4

Рассмотрим несколько примеров вполне упорядоченных множеств.

0°. Пустое множество $\varnothing$.

1°. Множество $\{\varnothing\}$.

2°. Множество $\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$.

Заметим, что эти множества упорядочены относительно отношения принадлежности ($\in$). Нетрудно догадаться, как для такого отношения порядка выглядит вполне упорядоченное множество из трёх элементов:

3°. $\{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}\}$.

. . . .

n°. $\{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\},\ \ldots,\ (n-2)^\circ,\ (n-1)^\circ\}$ — n-е множество получается объединением предыдущих $n-1$ множеств.

Определение. Построенные таким образом множества называются натуральными числами.

Все эти множества составляют множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Подумайте, почему для существования этого множества необходима аксиома бесконечности (см. с. 7).

---

*) Элемент множества M называется *наименьшим*, если он меньше любого другого элемента M. Можно также определить *минимальный* элемент M: это такой элемент, меньше которого в множестве M нет. Важно, что в случае, когда M не является линейно упорядоченным, понятия наименьшего и минимального элементов различны. В частности, наименьших элементов всегда не более одного, а для минимальных это не так. На рис. 4 каждый из элементов a_{15} и a_{51} минимальный.

ТРАНСФИНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Пусть есть некоторое вполне упорядоченное множество M и есть некоторая последовательность утверждений A_α, занумерованных элементами $\alpha \in M$. При этом выполняются следующие свойства:

1) утверждение $A_{\min M}$ верно;

2) для любого $\alpha \in M$ если все A_β для $\beta < \alpha$*) верны, то и A_α верно.

В таком случае все утверждения A_α верны.

Это и есть принцип трансфинитной индукции. Это, конечно, никакая не аксиома, а очень простая теорема.

Доказательство. Предположим, что среди A_α есть неверное утверждение. Рассмотрим множество E всех неверных утверждений. Оно непусто, поскольку хотя бы одно утверждение неверно. Возьмём в нём наименьший элемент (это можно сделать, поскольку $E \subset M$, а множество M вполне упорядочено). Получаем противоречие со свойством 2).

Рассмотрим задачу на применение трансфинитной индукции.

Задача. Разбить пространство $\mathbb{R}^3$ на непересекающиеся окружности (ненулевого радиуса).

Для решения этой задачи переформулируем аксиому выбора: любое непустое множество можно вполне упорядочить, т. е. для любого непустого множества можно придумать такое отношение порядка, относительно которого оно будет вполне упорядоченным. Докажем эквивалентность двух формулировок.

В одну сторону почти очевидно. Старая формулировка аксиомы выбора эквивалентна такой: для любого множества существует функция, сопоставляющая любому его непустому подмножеству некоторый элемент этого подмножества. Если же множество вполне упорядоченно, каждому его подмножеству можно сопоставить наименьший элемент — это и есть функция выбора.

В другую сторону доказательство гораздо сложнее, не будем здесь на нём останавливаться.

Теперь будем разбивать $\mathbb{R}^3$ на окружности. Введём на $\mathbb{R}^3$ отношение вполне упорядоченности, причём потребуем, чтобы это отношение было *минимальным*, т. е. никакой *левый луч* с концом в α (множество $\{\beta\colon \beta \leqslant \alpha\}$) не был равномощен $\mathbb{R}^3$ (или не имел бы мощность континуум). Такое отношение порядка всегда найдётся. Действительно, рассмотрим множество всех левых лучей мощности континуум. Упорядочим их в соответствии с порядком между концами этих левых лучей. Возьмём наименьший луч мощности континуум и поставим его в соответствие всему $\mathbb{R}^3$, т. е. просто заменим $\mathbb{R}^3$ на этот луч. Тогда все меньшие лучи будут иметь мощность меньше континуума, и мы получим минимальное отношение вполне упорядоченности. Пусть α_0 — наименьшая точка в $\mathbb{R}^3$ (в смысле построенной нами минимальной

*) По определению, $a < b$, если $a \leqslant b$ и $a \neq b$.

вполне упорядоченности). Проведём через неё произвольную окружность — первую в требуемом множестве окружностей. Далее, пусть через все точки β, которые меньше некоторого фиксированного α, мы уже провели непересекающиеся окружности. Для α возможны два случая.

1. Точка α уже лежит на одной из проведённых до этого окружностей. Тогда доказывать нечего.

2. Точка α не лежит ни на одной из уже проведённых окружностей. Тогда поступим следующим образом. Рассмотрим все плоскости, проходящие через α. Их континуум. Но окружностей, построенных до этого, меньше, чем континуум! Это следует из минимальности выбранного нами отношения порядка. Значит, найдётся плоскость π, проходящая через α и не содержащая ни одной из проведённых окружностей. Каждая такая окружность пересекает π не более чем в двух точках, поэтому общее «количество» таких точек (обозначим их объединение через T) меньше континуума. Проведём в плоскости π семейство окружностей, попарно касающихся

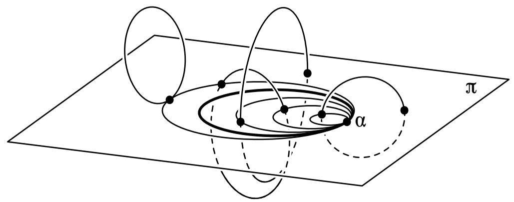
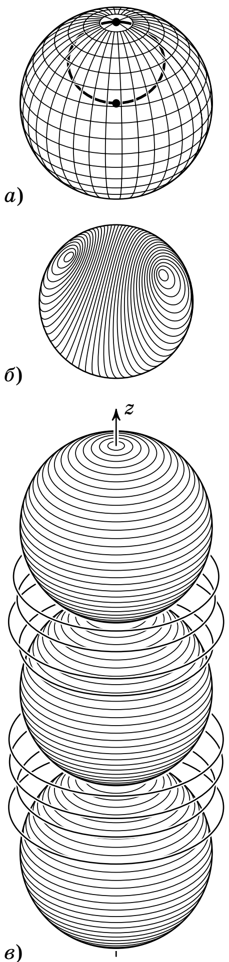


Рис. 5

друг друга в точке α (рис. 5). Каждая из точек объединения T лежит не более чем на одной окружности из проведённого семейства, следовательно, найдётся окружность, проходящая через α и не пересекающая ни одну из уже проведённых, что и требовалось. А теперь, воспользовавшись трансфинитной индукцией, получаем множество непересекающихся окружностей, покрывающих каждую точку в $\mathbb{R}^3$.

Отвлечёмся на некоторое время от теории множеств. Дело в том, что у только что описанного факта есть красивое геометрическое доказательство.

Рассмотрим шар, например, земной. Проведём окружность, проходящую через центр Земли и через Северный полюс, при этом полностью содержащуюся в шаре (рис. 6, *а*). Рассмотрим в этом шаре концентрические с ним сферы. Все они, кроме самой большой, имеют с окружностью две общие точки, а каждый, наверное, умеет разбивать сферу без двух точек на окружности (если эти точки — Северный и Южный полюса, то разбиение совсем простое, а дальше можно просто растягивать и сжимать сферу, рис. 6, *б*). С большой сферой без полюсов поступим также. Что в итоге получилось? Мы разбили шар без Южного полюса (Северный покрыт первой окружностью) на непересекающиеся окружности. А теперь поставим их друг на друга вдоль оси Oz (в трёхмерной системе координат). Остальные точки пространства покроем параллельными плоскости xOy окружностями (т. е. лежащими в параллельных плоскостях) с центром на оси Oz (рис. 6, *в*).



а)

б)

в)

Рис. 6

Доказательства различных утверждений с помощью трансфинитной индукции заключаются в том, что нужно все объекты аккуратно перенумеровать элементами некоторого множества, а затем работать с ними по-отдельности. Вот некоторые задачи, которые можно решить с помощью трансфинитной индукции.

1. Построить функцию из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, график которой на плоскости пересекает любой отрезок*).

2. Доказать, что квадрат любого бесконечного множества равномощен самому множеству.

ПАРАДОКС БАНАХА—ТАРСКОГО

Парадокс был придуман в 1920-х годах двумя замечательными математиками Банахом и Тарским, которые для этого даже не встречались. Они обнаружили, что обычную сферу можно «разрезать» на несколько частей, из которых потом можно сложить две точно такие же сферы. Формально, конечно, речь идёт о некотором отображении из множества точек одной сферы в объединение множеств точек двух сфер того же радиуса. Сразу оговорим, какие отображения имеются в виду.

Назовём отображение $f\colon X \to Y$ *допустимым*, если существует разбиение X на непересекающиеся множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$, такие что ограничение f на каждое A_i есть изометрия (или движение) и для каждых $i \neq j$ множества $f(A_i)$ и $f(A_j)$ не пересекаются. В этом случае будем также говорить, что X и Y *эквивалентны*, или $X \sim Y$ (убедитесь в том, что это действительно отношение эквивалентности). Парадокс Банаха—Тарского заключается в том, что существует допустимое отображение из сферы в объединение двух сфер того же радиуса. Некоторое время этот парадокс считали опровержением аксиомы выбора, используемой при его доказательстве, поскольку в него никто не верил. Потом осознали, что ничего страшного здесь нет. Кроме аксиомы выбора в доказательстве используются построение множества Витали, неизмеримого относительно произвольной «хорошей» меры, сдвиг натурального ряда (если к каждому натуральному числу прибавить 1, то получится тот же самый натуральный ряд и ещё одна точка[17]) и ещё некоторые ниже сформулированные утверждения. Доказав их, мы перейдём к переклейке сферы на две, а потом и к переклейке шара.

[17] Ноль или один, в зависимости от идеологических убеждений граждан, то ли они считают, что ноль — натуральное число, то ли нет.

*) Двумя чертами слева выделены тексты упражнений для самостоятельного решения.

Две важные теоремы

Итак, первое вспомогательное утверждение.

Теорема 1. Если $A \subset B \subset C$ и $A \sim C$, то $A \sim B$.

Примечательно, что формулировка этой теоремы почти в точности совпадает с формулировкой ещё одного известного утверждения, называемого теоремой Кантора—Бернштейна:

если $A \subset B \subset C$ и $|A| = |C|$, то $|A| = |B|$.

Эта теорема является одной из основных в теории множеств. У неё есть другая формулировка, тоже достаточно известная: если $|A| \leqslant |B|$ и $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$ (мы пишем $|X| \leqslant |Y|$, или $X \leqslant Y$, если X равномощно некоторому подмножеству Y, это отношение называется «меньше либо равно по мощности»; таким образом, теорема Кантора—Бернштейна — это всего лишь утверждение, необходимое для доказательства корректности введённого отношения на множествах).

3. Докажите равносильность двух формулировок.

Доказывать теорему 1 и теорему Кантора—Бернштейна мы тоже будем одновременно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Есть $f\colon C \to A$. Обозначим C за C_0, B за B_0, A за C_1. Если f применить к B, то получим B_1 — подмножество A или C_1. Применяя так дальше f к получаемым множествам, приходим к следующей цепочке:

$$C_0 \supset B_0 \supset C_1 \supset B_1 \supset C_2 \supset B_2 \supset \ldots \supset Z,$$

где Z — пересечение всех C_i или пересечение всех B_i. Заметим, что B и C (т. е. B_0 и C_0) можно разложить в объединение таких интересных множеств:

$$C = (C_0 \setminus B_0) \cup (B_0 \setminus C_1) \cup (C_1 \setminus B_1) \cup \ldots \cup Z \qquad (1)$$

$$B = (B_0 \setminus C_1) \cup (C_1 \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus C_2) \cup \ldots \cup Z \qquad (2)$$

Поскольку $C_0 \sim C_1$ и $B_0 \sim B_1$, то $C_0 \setminus B_0 \sim C_1 \setminus B_1$, поскольку $B_0 \sim B_1$ и $C_1 \sim C_2$, то $B_0 \setminus C_1 \sim B_1 \setminus C_2$, и т. д. Значит, в каждой из цепочек (1) и (2) все чётные куски эквивалентны друг другу и все нечётные куски эквивалентны друг другу. В доказательстве теоремы Кантора—Бернштейна здесь можно было бы остановиться: мы уже получили два множества, состоящие каждый из счётного числа множеств одного вида $(C_0 \setminus B_0)$, из счётного числа множеств другого вида $(B_0 \setminus C_1)$ и множества Z. Но для доказательства теоремы 1 нам нужно отображение, соответствующее разбиению множеств B и C на конечное число частей. Предъявим такое отображение. Пусть отображение $h\colon C \to B$ на всех нечётных множествах из разбиения (1) совпадает с f, а на всех чётных и на Z тождественное, т. е.

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in \bigcup_i (C_i \setminus B_i), \\ x, & \text{если } x \in Z \cup \bigcup_i (B_i \setminus C_{i+1}). \end{cases}$$

Имеется в виду, что все чётные множества в объединении образуют первое множество, а все нечётные — второе. Итого всего два множества.

Теперь разрежем сферу на две. Как уже обещалось, будем использовать сдвиг натурального ряда. Сначала покажем, почему сферу в некотором смысле можно считать счётным множеством, а потом объясним, что из этого получается.

Свободные группы

Рассмотрим два поворота φ и ψ в пространстве, причём с разными осями, проходящими через центр сферы, да ещё и такие, что один поворот не переводит ось другого в себя. Нужны такие ограничения для того, чтобы всевозможные композиции φ и ψ, а также φ^{-1} и ψ^{-1} образовывали свободную группу. Объясним, что это значит.

Некоторые, возможно, знают, что группа — это некоторое множество с формально введённой операцией (называемой иногда сложением, иногда умножением, иногда ещё как-нибудь), удовлетворяющей нескольким аксиомам. Так вот, это всё абстрактные сказки. На самом деле группа — это некоторое множество движений, замкнутое относительно операции композиции, содержащее тождественное и обратное к каждому движение. Для нас будет важен объект под названием *свободная группа с двумя образующими*. Рассмотрим алфавит из букв φ, ψ, φ^{-1} и ψ^{-1}. Будем писать конечные слова, состоящие из таких букв. При этом договоримся сокращать буквосочетания $\varphi\varphi^{-1}$, $\varphi^{-1}\varphi$, $\psi\psi^{-1}$ и $\psi^{-1}\psi$. Операцию между этими словами ввести просто: будем приписывать одно слово к другому. Свободной группа называется потому, что она не ограничена никакими соотношениями, т. е. никакое нетривиальное слово не приравнено к пустому. Именно для того, чтобы группа $G = \langle \varphi, \psi \rangle$ (группа, порождённая поворотами φ и ψ) была свободной, нужны различные условия на φ и ψ (кроме перечисленных выше есть ещё условия, например, φ и ψ не могут быть поворотами на угол $q \cdot 2\pi$, где q — рациональное число; подробно на всех условиях останавливаться не будем).

Вернёмся к нашим поворотам. Как только мы зафиксировали повороты φ и ψ, у нас тут же появилось *действие* свободной группы на сфере. Что это значит? Каждому элементу группы G соответствует некоторое отображение f_g сферы на себя. Нужно просто взять в качестве f_g соответствующую композицию поворотов φ и ψ. Поскольку группа G — свободная, никакое f_g при g — непустом слове — не является тождественным.

Рассмотрим некоторую точку x на сфере. На этой сфере действует свободная группа с двумя образующими. Различные элементы этой группы действуют на сфере, сдвигая x. Всевозможные образы x при этих сдвигах образуют *орбиту точки x относительно группы G*. Схематично она изображена на рис. 7. Несмотря на то, что группа G — свободная, на некоторые точки она всё равно действует «плохо», а именно, такие, которые какой-то композицией φ, ψ, φ^{-1} и ψ^{-1} переводятся на ось поворотов φ или ψ. У этих «плохих» точек орбита вырождена, некоторые ветви у неё отсутствуют по сравнению с орбитой «хорошей» точки, у которой из каждой точки выходит по четыре ветви. Заметим, что плохих точек достаточно мало — это точки, содержащиеся в орбитах точек пересечения осей поворотов φ и ψ со сферой. Все остальные точки разбиваются на орбиты «хороших» точек, являющихся копиями группы G.

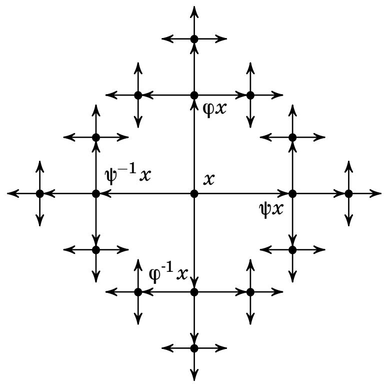


Рис. 7

Поняв, как устроена свободная группа и орбиты «хороших» точек под действием этой группы, усложним её, пытаясь тем самым сразу добиться не очень большого количества частей при разбиении сферы. В качестве образующих поворотов возьмём φ и ψ, удовлетворяющие соотношениям $\varphi^2 = 1$, $\psi^3 = 1$ (т. е. φ — поворот на 180°, ψ — поворот на 120°). Нарисуем орбиту точки x на сфере.

Как видно из схемы орбиты точки x (рис. 8), наша новая группа совсем не такая свободная, как была. В ней появились циклы. Как мы помним, это усложнение позволит уменьшить количество частей, на которые мы разбиваем сферу.

Разобьём её на три равные части A, B и C, так что $A \sim B \cup C$ и $A \sim B \sim C$. Более того, будут выполняться равенства

$$\begin{cases} \varphi(A) = B \cup C, \\ \psi(A) = B, \\ \psi^2(A) = C. \end{cases} \tag{3}$$

Будем разбивать множества по индукции. Пусть x — некоторая «хорошая» точка, начало своей орбиты. Отправим её в множество A.

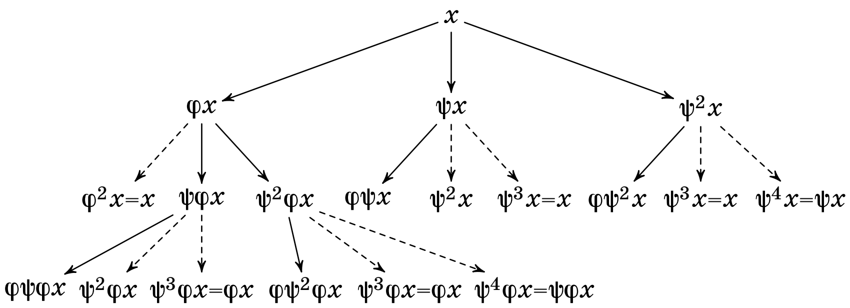


Рис. 8

Точки φx и ψx отправим в B, а точку $\psi^2 x$ — в C. Далее будем разбивать на множества по индукции с помощью табл. 3.

Таблица 3

	$\alpha \in A$	$\alpha \in B$	$\alpha \in C$
α начинается на ψ	$\varphi\alpha \in B$	$\varphi\alpha \in A$	$\varphi\alpha \in A$
α начинается на φ	$\psi\alpha \in B$	$\psi\alpha \in C$	$\psi\alpha \in A$
	$\psi^2\alpha \in C$	$\psi^2\alpha \in A$	$\psi^2\alpha \in B$

Объясним, как пользоваться этой таблицей. Пусть α принадлежит орбите точки x. Тогда точку α можно формально представить в виде gx, где g — некоторое слово из букв φ, ψ и ψ^2. Предположим,

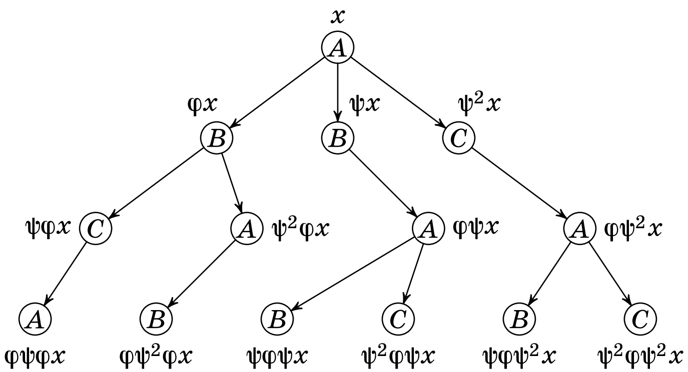


Рис. 9

что α начинается на букву ψ. Тогда среди следующих образов осмысленно рассматривать только $\varphi\alpha$, так как остальные получались на предыдущих шагах и уже были отправлены в какие-то множества.

Из таблицы видно, куда отправить $\varphi\alpha$ в зависимости от того, где находится сама точка α. Если $\alpha \in A$, то $\varphi\alpha \in B$, если $\alpha \in B$, то $\varphi\alpha \in A$, если $\alpha \in C$, то $\varphi\alpha \in A$. На рис. 9 можно увидеть, в какие множества попадают первые несколько элементов орбиты точки x.

Предлагаем убедиться самостоятельно, что, во-первых, разложение орбиты точки x на A, B и C в соответствии с представленной таблицей действительно существует, а во-вторых, оно удовлетворяет соотношениям (3).

Итак, мы разбили сферу (обозначим множество её точек за S) на четыре множества A, B, C и Q_1 (где Q_1 — множество «плохих» точек, т. е. точек, лежащих в орбитах точек пересечения осей поворотов φ и ψ со сферой), причём $A \sim B \cup C$ и $A \sim B \sim C$. Заметим, что Q_1 — счётное множество. Значит, существует поворот (не равный φ и ψ), переводящий Q_1 в такое множество Q_2, что $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$, т. е. $Q_2 \subset A \cup B \cup C$ (действительно, всего поворотов, переводящих i-ю точку в себя, счётное количество, значит, всего поворотов, переводящих хоть какую-нибудь точку из Q_1 в себя, тоже счётное количество, значит, среди континуума поворотов сферы найдётся нужный поворот). Поскольку $B \cup C \sim A \sim C$, можно считать, что $Q_2 \subset C$. Сфера разбивается в объединение $S = A \cup B \cup C \cup Q_1$, которое можно записать так:

$$S = (A \cup Q_1) \cup (B \cup Q_2) \cup (C \setminus Q_2).$$

Далее,

$$A \cup Q_1 \sim B \cup C \cup Q_1 \sim A \cup C \cup Q_1 \sim B \cup C \cup A \cup Q_1 \sim S,$$

аналогично $B \cup Q_2 \sim A \cup Q_1 \sim S$. Таким образом, из сферы S мы получили две сферы S плюс образ множества $C \setminus Q_2$. Поэтому по теореме 1 мы можем из одной сферы получить две.

Попробуем теперь из одного шара (обозначим множество его точек за D) получить два таких же с помощью допустимых преобразований. Шар D естественным образом разбивается на центр (обозначим его за O) и на объединение сфер с центром в O. Введём на самой большой сфере конструкцию из четырёх множеств, которой мы только что пользовались при переклейке сферы. При помощи гомотетии с центром в O продолжим эти множества на все сферы. Ясно, что поскольку мы умеем переклеивать сферу на две, то мы сможем переклеивать шар без центра на два шара без центров, а значит, и на три шара без центров. Значит, шар с центром можно переклеить на три шара, один из которых будет с центром. Возьмём точку из третьего шара и переведём её в центр второго шара. Значит, из шара мы умеем получать два полноценных шара и ещё какие-то точки. Поэтому по теореме 1 мы можем получить из шара два таких же.

Таким образом, мы убедились в возможности разрезать шар на конечное число частей и получить из них два шара того же размера. Немного изменив наши рассуждения, можно доказать, что на самом деле из шара можно получить два шара, но совершенно произвольного размера. Таким образом, в завершение темы мы приходим к одной очень интересной теореме.

Теорема. Если два множества A и B в пространстве ограничены и имеют внутренние точки, то $A \sim B$.

Доказательство. Множество A ограничено, т. е. содержится в некотором шаре C_1. Кроме того, A имеет хотя бы одну внутреннюю точку, т. е. содержит в себе некоторый шар D_1. Аналогично определим шары C_2 и D_2, так что $C_2 \supset B \supset D_2$. Согласно сказанному выше, отождествим C_1 и D_1. Тогда $C_1 \supset A \supset D_1 \sim C_1$, следовательно, по теореме 1 получаем, что $A \sim C_1$. Аналогично $B \sim C_2$, но $C_1 \sim C_2$, поэтому $A \sim B$.

ОРДИНАЛЫ И КАРДИНАЛЫ

Теорема о приложении. Из двух различных вполне упорядоченных множеств одно есть левый луч другого.

Такая формулировка нуждается в уточнении. Когда в математических рассуждениях рассматривают некоторые объекты, сразу оговаривают, какие их них считать равными, эквивалентными. Например, когда изучают группы, их рассматривают с точностью до изоморфизма[18]. Так и здесь, мы рассматриваем вполне упорядоченные множества с точностью до *изоморфизма*, т. е. с точностью до отображения, сохраняющего порядок ($a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$). Поэтому теорема означает следующее. Если есть два вполне упорядоченных множества A и B, и мы одно из них «прикладываем» к другому, то либо они совпадут, либо одно из них будет левым лучом другого.

[18] Нам не важно, когда в группе два элемента, это 0 и 1 или слон и жираф. Если таблица умножения слона на жирафа такая же, как нуля на единицу, ну и ладно.

Доказательство очевидно по трансфинитной индукции. Введём трансфинитную индукцию по первому множеству. Отправим наименьший элемент A в наименьший элемент B. Далее, пусть все α из A, меньшие некоторого α_0, уже отправлены в элементы B. Если в B ещё остались элементы без прообразов, выберем среди них наименьший и отправим в него α_0, если в B элементы без прообразов кончились, то B — левый луч A. Иначе ждём, пока закончится A.

Определение. Назовём *ординалом* вполне упорядоченное множество. (Опять же, на самом деле мы называем ординалом не множество, а класс эквивалентности вполне упорядоченных множеств по отношению «изоморфно».) Между ординалами можно ввести отношение порядка с помощью теоремы о приложении, т. е. $A < B$, если A — левый луч B (однако все ординалы множества не образуют, иначе существовало бы множество всех множеств).

Давайте посмотрим на счётные ординалы.

Первый ординал — это $\varnothing$. Потом идёт 1[19]. Следующий ординал — это 2, потом 3, и т. д. Дальше идёт ординал «натуральные числа», который обозначают ω. Если после всех натуральных чисел поставить самое большое число (получим сходящуюся последовательность), то будет $\omega+1$, и т. д., до $\omega+\omega$ (или 2ω), т. е. до двух сходящихся последовательностей одна за другой. Дальше 3ω, 4ω и т. д., до $\omega \cdot \omega$. Этот ординал можно представить себе так: возьмём последовательность $a_n = \dfrac{1}{n}$, и к каждому элементу приставим по сходящейся последовательности (рис. 10). После всех счётных ординалов следует первый несчётный

[19] На самом деле это, конечно, $\{\varnothing\}$, но поскольку все уже в школе привыкли писать 1, то...

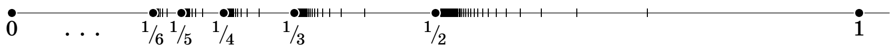


Рис. 10

ординал ω_1, который можно получить, например, так. Вполне упорядочим отрезок. Возьмём минимальный несчётный левый луч. Его и назовём ω_1. Так можно продолжать долго. В итоге у нас получится цепочка

$$\varnothing,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \ldots,\ \omega+\omega,\ 3\omega,\ \ldots,\ \omega\cdot\omega,\ \omega^3,\ \ldots,\ \omega_1,\ \ldots$$

Что же такое кардиналы? Некоторые ординалы обладают особым свойством, а именно, они неравномощны никакому своему левому лучу. Такие ординалы называются *начальными*, или *кардиналами*. (Кардиналы на самом деле ещё можно определить так: это классы эквивалентности множеств по отношению «равномощно».) Ни ординалы, ни кардиналы не образуют множества, но эти «немножества» в некотором смысле одинаковы (можно применить несколько формализованную теорему о приложении для класса ординалов и класса кардиналов).

Континуум-гипотеза

Понятно, что кардиналы можно складывать (что получится?), умножать (придумайте, как) и т. д., но для них также определено и понятие степени: через 2^α обозначим мощность множества всех подмножеств α. Ясно, скажем, что $2^\omega > \omega$, но совсем не ясно, равны ли 2^ω и ω_1. Некоторые вещи можно утверждать наверняка. Например, выполняется следующая

Теорема. $2^\omega = \mathfrak{c} = [0, 1]$ нельзя представить в виде объединения счётного числа множеств мощности меньше континуума*).

*) $\mathfrak{c}$ — общепринятое обозначение для мощности отрезка $[0, 1]$.

По-другому это можно сказать так: если континуум разбит в объединение счётного числа множеств, то хотя бы одно из них имеет мощность континуум. Если бы мы знали, что множество мощности меньше континуума счётно, то всё очевидно: счётное объединение счётных множеств счётно. Но мы этого не знаем. Однако всё равно попробуйте доказать эту теорему.

Аналогично можно доказать более общее утверждение:

$$2^\alpha > \bigcup_{\beta<\alpha} \gamma_\beta, \quad \text{где } \gamma_\beta < 2^\alpha,$$

т. е. множество всех подмножеств α не представляется в виде объединения «α штук» множеств мощности меньше 2^α. Как выясняется, верна следующая

Теорема. Теорема, изложенная выше, и отношение порядка, введённое нами между кардиналами, — это единственные ограничения на всю цепочку кардиналов (т. е. с учётом этих двух условий «может быть всё что угодно»).

Это значит следующее. Многие годы математики пытались доказать или опровергнуть естественное утверждение, называемое континуум-гипотезой:

$$2^\alpha = \alpha^+,$$

где α^+ — следующая после α мощность.

В 1930-е годы Гёдель доказал, что континуум-гипотеза непротиворечива со стандартной аксиоматикой, в 1960-е годы Коэн понял, что отрицание континуум-гипотезы также непротиворечиво с этой аксиоматикой, в 1980-е была как раз доказана теорема о том, что «может быть всё что угодно».

Как вообще можно доказать, что некоторое утверждение непротиворечиво с какой-то аксиоматикой, например, с аксиоматикой Цермело—Френкеля? Нужно его добавить к этой аксиоматике и построить модель для получившейся системы утверждений. Одна из моделей строится довольно просто: нужно аккуратно выкинуть из цепочки кардиналов все промежуточные между α^+ и 2^α для каждого α, тогда континуум-гипотеза будет выполняться. Вторая модель несколько сложнее.

Самый большой кардинал

Иногда специалисты по теории множеств начинают играть в игру: кто назовёт множество побольше, кто придумает самый большой кардинал. И такие игры приводят к вполне содержательным определениям и теоремам.

Назовём кардинал α *сильно недостижимым*, если для любого кардинала β, меньшего α, множество всех подмножеств β строго меньше α. Назовём кардинал α *измеримым по Уламу*, если существует

счётно-аддитивная мера μ на множестве всех подмножеств α, принимающая на каждом множестве значение либо 0, либо 1, причём $\mu(\varnothing)=0$, $\mu(\alpha)=1$. Также нужно потребовать, чтобы μ не являлась так называемой δ-мерой, т. е. не имела вид

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in A, \\ 0, & \text{если } a \notin A, \end{cases}$$

где a — некоторое фиксированное число.

Такие довольно странные определения по-разному формализуют представление об очень больших, огромных кардиналах. Сразу возникают интересные свойства таких множеств.

4. Если α — измеримый по Уламу кардинал, то α сильно недостижим.

Возникает естественный вопрос о существовании таких кардиналов (важно, что он не влияет на сформулированное выше упражнение; если даже ни тот, ни другой кардиналы не существуют, никто не запрещает доказывать связывающие их утверждения). Сформулируем объясняющую всё задачу.

5. Доказать, что если существует сильно недостижимый кардинал, то теория множеств со стандартной системой аксиом Цермело—Френкеля непротиворечива.

Как известно, доказывать непротиворечивость теории множеств сложно. Даже существует теорема, говорящая о том, что это сделать довольно проблематично. Отсюда видно, что только что сформулированное утверждение очень сильное по своей сути. Попробуем дать идею его доказательства.

Действительно, если существует сильно недостижимый кардинал, то совокупность всех меньших его кардиналов замкнута относительно теоретико-множественных операций (объединение, пересечение и т. д.), т. е. образует внутреннюю модель теории множеств. Оперируя кардиналами из этой совокупности, мы никогда не выйдем за пределы нашего сильно недостижимого кардинала. Значит, средствами самой теории множеств мы построили модель этой теории множеств, т. е. доказали её непротиворечивость.

МНОЖЕСТВА НА ПРЯМОЙ

Многим, должно быть, известны множества на прямой, имеющие меру ноль. Однако существуют ещё «меньшие» множества, про которые говорят, что они имеют строгую меру ноль.

Определение. Говорят, что множество M имеет *строгую меру ноль*, если для любой последовательности положительных чисел (a_n) существует последовательность интервалов (I_n), покрывающая M, такая что длина интервала I_k равна a_k.

Понятно, что любое счётное множество имеет строгую меру ноль. Действительно, пронумеруем это множество натуральными числами и точку с номером k покроем интервалом длины a_k. Интересно было бы построить хотя бы одно несчётное множество строгой меры ноль. Попробуем это сделать, заодно покажем, как применяется континуум-гипотеза в содержательных задачах.

Как всегда, когда у нас не получается что-то построить, нужно пытаться строить нечто большее.

Определение. Будем говорить, что множество A *сосредоточено на рациональных числах*, если для любого открытого множества U, содержащего $\mathbb{Q}$, множество $A\setminus U$ не более чем счётно.

Очевидно, что любое сосредоточенное на $\mathbb{Q}$ множество имеет строгую меру ноль. Действительно, составим множество U, покрывающее $\mathbb{Q}$, из интервалов I_{2n} с длинами a_{2n}. Оставшееся счётное множество покроем интервалами I_{2n-1} с длинами a_{2n-1}.

Теперь ещё больше усложним множество, чтобы легче было строить.

Определение. *Множеством Бернштейна* называется множество, пересекающееся с каждым замкнутым нигде не плотным множеством по счётному числу точек.

Очевидно, что M — множество Бернштейна — сосредоточено на $\mathbb{Q}$. Действительно, пусть U — открытое множество, покрывающее $\mathbb{Q}$. Тогда $\overline{U}=\mathbb{R}\setminus U$ замкнуто, так как его дополнение открыто, и нигде не плотно, так как в любом интервале найдётся рациональная точка, в свою очередь содержащаяся вместе с каким-то интервалом в U. Значит, $\overline{U}\cap M$ (или $M\setminus U$) счётно.

Множество Бернштейна довольно «крутое». Его уже несложно построить.

Сколько всего замкнутых множеств? Континуум. Действительно, открытое множество можно представить в виде объединения интервалов с рациональными концами (см. приложение 1), а замкнутое — это дополнение к открытому. А теперь пересчитаем все замкнутые нигде не плотные множества. Пусть $\{F_\alpha\colon \alpha<2^\omega\}$ — минимальный пересчёт всех замкнутых нигде не плотных. Это значит, что индексами α из некоторого множества мощности не больше континуума мы занумеровали замкнутые нигде не плотные множества F_α.

Возьмём какое-нибудь счётное A_1, не пересекающееся с F_1. Потом возьмём счётное A_2, не пересекающееся с $F_1\cup F_2$. Далее, действуя по индукции, построим A_β, которое не пересекается с $\bigcup\limits_{i\leqslant\beta} F_i$. Докажем, что построение можно осуществить и что полученное множество $A=\bigcup\limits_{i\in 2^\omega} A_i$ есть множество Бернштейна мощности континуум. Действительно, поскольку пересчёт $\{F_\alpha\}$ минимален, любой левый луч из множеств F_α с концом в F_β меньше континуума, а значит, в предположении континуум-гипотезы не более чем счётен. Как утверждает теорема Бэра (см. приложение 2), отрезок нельзя покрыть объединением счётного числа замкнутых нигде не плотных множеств, поэтому действительно найдётся счётное A_β, не пересекающееся с $\bigcup\limits_{i\leqslant\beta} F_i$ (просто разобьём прямую на счётное число отрезков и из каждого возьмём по непокрытой благодаря теореме Бэра точке). Множество A имеет мощность континуум, так как все A_i непусты, а их суммирование идёт по $i\in 2^\omega$. Кроме того, A может пересекаться с произвольным множеством F_β только по множествам A_α, где $\alpha<\beta$, т. е. по счётному (опять же, из-за минимальности пересчёта и в предположении континуум-гипотезы) объединению счётных множеств. Значит, A действительно является множеством Бернштейна.

Игры Банаха—Мазура и аксиома детерминированности

Когда двум математикам Банаху и Мазуру стало скучно[20], они стали играть в такую игру. Они определили для себя некоторое множество A на отрезке $[0, 1]$. После этого Банах взял какой-то отрезок, Мазур внутри этого отрезка ещё отрезок, потом Банах взял ещё отрезок и т. д. При этом они сразу договорились, что длина отрезков будет стремиться к нулю и в пересечении поэтому будет получаться точка. Так вот, если эта точка содержится в A, то выиграл первый игрок, а если не содержится, то выиграл второй[21].

[20] У них, наверное, не было теннисных ракеток и шахмат.

[21] Можете на досуге поиграть. Только играть нужно с шахматными часами и ходы делать быстро.

Легко понять, что если A счётно, то у второго есть выигрышная стратегия. Он может за первый свой ход избавиться от первой точки, взяв отрезок, не содержащий её, за второй ход — от второй, и т. д. Если A нигде не плотно, то второй может выиграть вообще за один ход. Первым же ходом нужно просто взять отрезок, не пересекающийся с A (таких существует огромное количество, просто по определению). Если A — счётное объединение нигде не плотных (такие множества Бэр называл *множествами первой категории*), то второй также может выиграть: на первом шаге он избавляется от первого нигде не плотного, на втором — от второго, и т. д.

Банах с Мазуром задумались, для любого ли A у одного из игроков есть выигрышная стратегия. Это вполне естественное утверждение: либо для любого хода первого есть такой ход второго, что для любого хода первого есть такой ход второго, что... и т. д., либо существует ход первого, такой что для любого хода второго существует ход первого, такой что для любого хода второго существует ход первого... и т. д.

Множество A называется *детерминированным*, если для него у одного из игроков есть выигрышная стратегия. Утверждение о том, что все $A\subset[0, 1]$ детерминированны, называется *аксиомой детерминированности*.

С ней проблема даже не в том, что её не умеют доказывать. В отличие от аксиомы выбора ещё даже неизвестно, действительно ли она непротиворечива с аксиоматикой Цермело—Френкеля. Зато известно, что из аксиомы выбора мгновенно следует отрицание аксиомы детерминированности, но из аксиомы детерминированности следует аксиома выбора для счётного числа множеств (благодаря чему у нас сохраняется весь математический анализ).

Если принять аксиому детерминированности, можно получить много интересных и удивительных фактов:

1) все множества из $[0, 1]$ измеримы по Лебегу;
2) любая ограниченная функция интегрируема по Лебегу;
3) нет свободных максимальных идеалов;
4) базис есть только в счётномерных линейных пространствах.

Общая идея аксиомы детерминированности в том, что объект существует, только если его можно построить «руками», взять и объяснить, как его строить. А если не получается объяснить, то объект не существует вовсе.

Подробнее об аксиоме выбора и аксиоме детерминированности см. книгу [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Окстоби. Мера и категория: Пер. с англ. — М.: Мир, 1974.

[2] В. Г. Кановей. Аксиома выбора и аксиома детерминированности. — М.: Физматгиз, 1984.

[3] Н. Я. Виленкин. Рассказы о множествах. — М.: Наука, 1969.

[4] Справочная книга по математической логике. Часть II. Теория множеств: Пер. с англ. — М.: Наука, 1982.

[5] T. J. Jech. The axiom of choice. — (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Vol. 75). — Amsterdam—London: North-Holland Publishing Co.; New York: American Elsevier Publishing Co., Inc., 1973.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА

Множество M на прямой называется *открытым*, если каждая его точка сожержится в этом множестве вместе с некоторым интервалом. *Замкнутым* называется множество, содержащее все свои предельные точки (т. е. такие, что любой интервал, содержащий эту точку, пересекается со множеством ещё хотя бы по одной точке). Например, отрезок является замкнутым множеством, но не является открытым, а интервал, наоборот, является открытым множеством,

но не является замкнутым. Бывают множества, которые не являются ни открытыми, ни замкнутыми (например, полуинтервал). Существуют два множества, которые одновременно и замкнутые, и открытые — это пустое и всё $\mathbb{R}$ (докажите, что других нет). Легко видеть, что если M открыто, то $\overline{M}$ (или $\mathbb{R}\setminus M$ — дополнение к множеству M до $\mathbb{R}$) замкнуто. Действительно, если $\overline{M}$ не замкнуто, то оно не содержит какую-то свою предельную точку m. Но тогда $m\in M$, причём каждый интервал, содержащий m, пересекается с множеством $\overline{M}$, т. е. имеет точку, не лежащую в M, а это противоречит тому, что M — открытое. Аналогично, тоже прямо из определения, доказывается, что если M замкнуто, то $\overline{M}$ открыто (проверьте!).

Теперь докажем следующую важную теорему.

Теорема. Любое открытое множество M можно представить в виде объединения интервалов с рациональными концами (т. е. с концами в рациональных точках).

Доказательство. Рассмотрим объединение U всех интервалов с рациональными концами, являющихся подмножествами нашего множества. Докажем, что это объединение совпадает со всем множеством. Действительно, если m — какая-то точка из M, то существует интервал $(m_1, m_2)\subset M$, содержащий m (это следует из того, что M — открытое). На любом интервале можно найти рациональную точку. Пусть на (m_1, m) — это m_3, на (m, m_2) — это m_4. Тогда точка m покрыта объединением U, а именно, интервалом (m_3, m_4). Таким образом, мы доказали, что каждая точка m из M покрыта объединением U. Кроме того, как очевидно следует из построения U, никакая точка, не содержащаяся в M, не покрыта U. Значит, U и M совпадают.

Важным следствием из этой теоремы является тот факт, что любое открытое множество есть счётное объединение интервалов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. НИГДЕ НЕ ПЛОТНЫЕ МНОЖЕСТВА И МНОЖЕСТВА МЕРЫ НОЛЬ. КАНТОРОВО МНОЖЕСТВО

Множество A называется *нигде не плотным*, если для любых различных точек a и b найдётся отрезок $[c, d]\subset[a, b]$, не пересекающийся с A. Например, множество точек последовательности $a_n=\frac{1}{n}$ является нигде не плотным, а множество рациональных чисел — нет.

Теорема Бэра. Отрезок нельзя представить в виде счётного объединения нигде не плотных множеств.

Доказательство. Предположим, что существует последовательность A_k нигде не плотных множеств, таких что $\bigcup\limits_i A_i=[a, b]$.

Построим следующую последовательность отрезков. Пусть I_1 — какой-нибудь отрезок, вложенный в $[a, b]$ и не пересекающийся с A_1. По определению нигде не плотного множества на отрезке I_1 найдётся отрезок, не пересекающийся с множеством A_2. Назовём его I_2. Далее, на отрезке I_2 возьмём аналогичным образом отрезок I_3, не пересекающийся с A_3, и т. д. У последовательности I_k вложенных отрезков есть общая точка (это одно из основных свойств действительных чисел). Эта точка по построению не лежит ни в одном из множеств A_k, значит, эти множества не покрывают весь отрезок $[a, b]$.

Назовём множество M *имеющим меру ноль*, если для любого положительного ε найдётся последовательность I_k интервалов с суммарной длиной меньше ε, покрывающая M*). Очевидно, что любое счётное множество имеет меру ноль. Однако бывают и несчётные множества, имеющие меру ноль. Построим одно такое, очень известное, называемое канторовым.

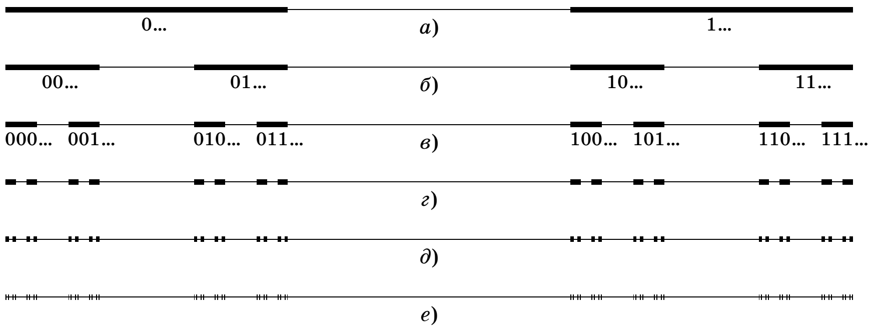


Рис. 11

Возьмём отрезок $[0, 1]$. Поделим его на три равные части. Средний отрезок выкинем (рис. 11, *а*). Останется два отрезка суммарной длины $\frac{2}{3}$. С каждым из них проделаем точно такую же операцию (рис. 11, *б*). Останется четыре отрезка суммарной длины $\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$. Продолжая так далее (рис. 11, *в*—*е*) до бесконечности, получаем множество, которое имеет меру меньше любой наперёд заданной положительной, т. е. меру ноль. Можно установить взаимно однозначное соответствие между точками этого множества и бесконечными последовательностями нулей и единиц. Если при первом «выкидывании» наша точка попала в правый отрезок, поставим в начале последовательности 1, если в левый — 0 (рис. 11, *а*). Далее, после первого

*) Это определение л е б е г о в о й меры ноль. Если счётное число интервалов заменить на конечное, то получится определение ж о р д а н о в о й меры ноль.

«выкидывания», получаем маленькую копию большого отрезка, с которой поступаем точно так же: если наша точка после выкидывания попала в правый отрезок, поставим 1, если в левый — 0, и т. д. (проверьте взаимную однозначность), рис. 11, *б*, *в*. Поскольку множество последовательностей нулей и единиц имеет мощность континуум, канторово множество также имеет мощность континуум. Кроме того, несложно доказать, что оно нигде не плотно. Однако неверно, что оно имеет строгую меру ноль (см. стр. 27). Идея доказательства этого факта в следующем: возьмём последовательность a_n, очень быстро стремящуюся к нулю. Для этого подойдёт, например, последовательность $a_n=\frac{1}{2^{2^n}}$. После чего докажем, что этой последовательностью нельзя покрыть канторово множество (проделайте это!).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3.
ЗАДАЧИ *)

Операции над множествами

Множества A и B называются *равными*, если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, и наоборот. Обозначение: $A=B$.

Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A принадлежит множеству B. Обозначение: $A\subset B$.

1. Для каждых двух из следующих множеств указать, является ли одно из них подмножеством другого:

$\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{\{1\}, 2, 3\}$, $\{\{1, 2\}, 3\}$, $\{3, 2, 1\}$, $\{\{2, 1\}\}$.

2. Докажите, что множество A тогда и только тогда является подмножеством множества B, когда каждый элемент, не принадлежащий B, не принадлежит A.

3. Докажите, что для произвольных множеств A, B и C
а) $A\subset A$; б) если $A\subset B$ и $B\subset C$, то $A\subset C$;
в) $A=B$, если и только если $A\subset B$ и $B\subset A$.

Множество называется *пустым*, если оно не содержит ни одного элемента. Обозначение: $\varnothing$.

4. Сколько элементов у каждого из следующих множеств:

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{\{1\}, 2, 3\}$, $\{\{1, 2\}, 3\}$, $\{\varnothing\}$, $\{\{2, 1\}\}$?

5. Сколько подмножеств у множества из трёх элементов?

*) Набор задач этого раздела взят из листков, предлагавшихся учащимся выпуска 2002 года школы № 57 г. Москвы в 8-м, 10-м и 11-м классах.

6. Может ли у множества быть ровно а) 0; б*) 7; в) 16 подмножеств?

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из таких x, что $x \in A$ или $x \in B$. Обозначение: $A \cup B$.

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из таких x, что $x \in A$ и $x \in B$. Обозначение: $A \cap B$.

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из таких x, что $x \in A$ и $x \notin B$. Обозначение: $A \setminus B$.

7. Даны множества $A=\{1, 3, 7, 137\}$, $B=\{3, 7, 23\}$, $C=\{0, 1, 3, 23\}$, $D=\{0, 7, 23, 1998\}$. Найдите множества:

а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $(A \cap B) \cup D$;
г) $C \cap (D \cap B)$; д) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$; е) $(A \cup (B \cap C)) \cap D$;
ж) $(C \cap A) \cup ((A \cup (C \cap D)) \cap B)$; з) $(A \cup B) \setminus (C \cap D)$;
и) $A \setminus (B \setminus (C \setminus D))$; к) $((A \setminus (B \cup D)) \setminus C) \cup B$.

8. Пусть A — множество чётных чисел, а B — множество чисел, делящихся на 3. Найдите $A \cap B$.

9. Докажите, что для любых множеств A, B, C

а) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
б) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
в) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
г) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

10. Верно ли, что для любых множеств A, B, C

а) $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup \varnothing = A$; б) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;
в) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$; г) $(A \setminus B) \cup B = A$;
д) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; е) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
ж) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$?

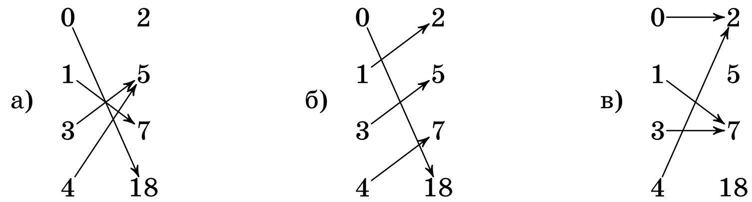
Отображения множеств

Если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие ровно один элемент $f(x)$ множества Y, то говорят, что задано *отображение* f из множества X в множество Y. При этом, если $f(x)=y$, то элемент y называется *образом* элемента x при отображении f, а элемент x называется *прообразом* элемента y при отображении f. Обозначение: $f\colon X \to Y$.

11. Нарисуйте всевозможные отображения из множества $\{7, 8, 9\}$ в множество $\{0, 1\}$.

Пусть $f\colon X \to Y$, $y \in Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. *Полным прообразом элемента* y при отображении f называется множество $\{x \in X \mid f(x)=y\}$. Обозначение: $f^{-1}(y)$. *Образом множества* $A \subset X$ при отображении f называется множество $\{f(x) \mid x \in A\}$. Обозначение: $f(A)$. *Прообразом множества* $B \subset Y$ называется множество $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$. Обозначение: $f^{-1}(B)$.

12. Для отображения $f\colon \{0, 1, 3, 4\} \to \{2, 5, 7, 18\}$, заданного картинкой, найдите $f(\{0, 3\})$, $f(\{1, 3, 4\})$, $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(\{2, 5\})$, $f^{-1}(\{5, 18\})$.



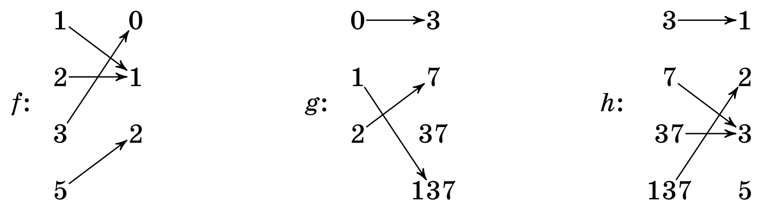
13. Пусть $f\colon X \to Y$, $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$. Всегда ли верно, что

а) $f(X)=Y$; б) $f^{-1}(Y)=X$;
в) $f(A_1 \cup A_2)=f(A_1) \cup f(A_2)$; г) $f(A_1 \cap A_2)=f(A_1) \cap f(A_2)$;
д) $f^{-1}(B_1 \cup B_2)=f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$; е) $f^{-1}(B_1 \cap B_2)=f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
ж) если $f(A_1) \subset f(A_2)$, то $A_1 \subset A_2$; з) если $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$, то $B_1 \subset B_2$?

Композицией отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ называется отображение, сопоставляющее элементу x множества X элемент $g(f(x))$ множества Z. Обозначение: $g \circ f$.

14. Докажите, что для произвольных отображений $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ и $h\colon Z \to W$ выполняется следующее: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

15. Пусть $f\colon \{1, 2, 3, 5\} \to \{0, 1, 2\}$, $g\colon \{0, 1, 2\} \to \{3, 7, 37, 137\}$, $h\colon \{3, 7, 37, 137\} \to \{1, 2, 3, 5\}$ — отображения, показанные на рисунке:



Нарисуйте картинки для следующих отображений:

а) $g \circ f$; б) $h \circ g$; в) $f \circ h \circ g$; г) $g \circ h \circ f$.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *биективным*, если для каждого $y \in Y$ найдется ровно один $x \in X$ такой, что $f(x)=y$.

16. Пусть $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$. Верно ли, что если f и g биективны, то и $g \circ f$ биективно?

17. Пусть $f\colon \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, $g\colon \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, — отображения, изображённые на рисунке:

Нарисуйте картинки для следующих отображений:

а) $g\circ f\circ g$; б) $f\circ g\circ f$; в) $f\circ g\circ f\circ g\circ f\circ g$.

18. Про каждые два из следующих множеств выясните, существует ли биекция из первого во второе (надлежит считать, что ноль — натуральное число):

а) множество натуральных чисел;

б) множество чётных натуральных чисел;

в) множество натуральных чисел без числа 3.

Мощность множеств

Отображение $g\colon Y\to X$ называется *обратным* к отображению $f\colon X\to Y$, если $g(f(x))=x$ и $f(g(y))=y$ для любых $x\in X$ и $y\in Y$.

19. Каким должно быть отображение, чтобы у него

а) не было обратного; б) было ровно одно обратное;

в) было более одного обратного.

Два множества X и Y называются *равномощными*, если существует биекция $f\colon X\to Y$. Обозначение: $|X|=|Y|$.

20. Докажите, что

а) $|A|=|A|$; б) $|A|=|B|$ тогда и только тогда, когда $|B|=|A|$;

в) если $|A|=|B|$ и $|B|=|C|$, то $|A|=|C|$.

21. Докажите, что следующие множества равномощны:

а) любые два отрезка; б) интервал и полуокружность без концов;

в) интервал и прямая; г) квадрат и круг;

д) действительные числа и неотрицательные действительные числа;

е) интервал и отрезок; ж*) отрезок и квадрат.

Множество называется *счётным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел.

22. Докажите, что счётны

а) конечное объединение счётных множеств;

б) счётное объединение счётных множеств;

в) произвольное пересечение счётных множеств, не являющееся конечным множеством.

23. Докажите, что следующие множества счётны:

а) множество рациональных чисел;

б) множество конечных последовательностей нулей и единиц;

в) множество непересекающихся кругов на плоскости;

г*) множество непересекающихся букв Т на плоскости.

24. Докажите, что следующие множества несчётны:

а) множество всех подмножеств натуральных чисел;

б) множество бесконечных последовательностей нулей и единиц;

в) множество всех биекций из множества натуральных чисел в себя;

г) все перечисленные множества равномощны.

25*. Множество действительных чисел равномощно множествам из предыдущей задачи.

26. Докажите, что:

а) в любом бесконечном множестве найдётся счётное подмножество;

б) множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно равномощно некоторому своему собственному (отличному от самого себя) подмножеству;

в) при объединении бесконечного множества с множеством, которое конечно или счётно, получается множество, равномощное исходному.

Метрические пространства и непрерывные отображения

Метрическим пространством называется множетсво X с заданной *метрикой* $\rho\colon X\times X\to\mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $\forall\, x,\, y\in X\;\; \rho(x, y)\geqslant 0$, причём $\rho(x, y)=0$, если и только если $x=y$ (неотрицательность);

2) $\forall\, x,\, y\in X\;\; \rho(x, y)=\rho(y, x)$ (симметричность);

3) $\forall\, x,\, y,\, z\in X\;\; \rho(x, y)+\rho(y, z)\geqslant\rho(x, z)$ (неравенство треугольника).

27. Докажите, что следующие пары (X, ρ) являются метрическими пространствами:

а) $X=\mathbb{R}$, $\rho(x, y)=|x-y|$;

б) $X=\mathbb{R}^2$, $\rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$;

в) $X=C[a, b]$ — множество непрерывных на $[a, b]$ функций,

$$\rho(f, g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|;$$

г) $X=S^1$ — окружность с центром O, $\rho(x, y)$ — величина центрального угла xOy;

д) X — множестов движений плоскости,

$$\rho(f, g)=\max_{x\in D}\rho_2(f(x), g(x)),$$

где D — круг единичного радиуса с центром в начале координат.

Открытым (соответственно, *замкнутым*) *шаром радиуса* r в пространстве X с центром в точке x называется множество $U_r(x)=\{y\in x\colon \rho(x, y)<r\}$ (соответственно, $B_r(x)=\{y\in X\colon \rho(x, y)\leqslant r\}$).

Внутренней точкой множества $U\subset X$ называется такая точка, которая содержится в U вместе с некоторым шаром ненулевого радиуса.

Множество, все точки которого внутренние, называется *открытым*. Открытое множество, содержащее данную точку, называется *окрестностью* этой точки.

Предельной точкой множества $F \subset X$ называется такая точка, в любой окрестности которой содержится бесконечно много точек множества F.

Множество, которое содержит все свои предельные точки, называется *замкнутым* (сравните это определение с тем, которое было дано в приложении 1).

28. Докажите, что

а) множество открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто;

б) конечное объединение и счётное пересечение замкнутых множеств замкнуто;

в) счётное объединение и конечное пересечение открытых множеств открыто.

29. Докажите, что

а) множество предельных точек любого множества является замкнутым множеством;

б) объединение множества A и множества его предельных точек (*замыкание* A) является замкнутым множеством.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *непрерывным*, если прообраз каждого открытого множества открыт.

30. Докажите, что это определение согласуется с определением непрерывности функций на прямой.

31. Докажите, что

а) расстояние до множества $\rho_F(x) = \inf\limits_{y \in F} \rho(x, y)$ является непрерывной функцией;

б) множество нулей функции пункта а) совпадает с замыканием F.

32. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное взаимно однозначное отображение. Верно ли, что обратное к нему непрерывно?

Непрерывное взаимно однозначное отображение $f\colon X \to Y$, обратное к которому также непрерывно, называется *гомеоморфизмом*. Пространства X, Y, для которых такое отображение существует, называются *гомеоморфными*.

33. Для каждой пары из следующих множеств установите, гомеоморфны ли они:

а) прямая; б) отрезок; в) окружность;
г) буква Т; д) буква Ы; е) круг;
ж) плоскость; з) граница квадрата;
и) плоскость без начала координат.

34. Для каких пар X, Y пространств из предыдущей задачи существует непрерывное отображение $f\colon X \to Y$, которое *не склеивает* точки (т. е. $f(x) \neq f(y)$ при $x \neq y$ — такие отображения называют *вложениями*)?

35*. Придумайте непрерывное отображение плоскости на тор, которое было бы *локальным гомеоморфизмом* (т. е. у каждой точки x плоскости и $f(x)$ тора существуют такие окрестности U и V, что f гомеоморфно отображает U на V).

Полнота. Теорема Бэра

Пусть X — метрическое пространство. Последовательность x_n его элементов называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n \;\; \forall k, m > n \;\; \rho(x_k, x_m) < \varepsilon.$$

36. Докажите, что сходящаяся последовательность фундаментальна. Верно ли обратное утверждение?

Метрическое пространство называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность в нём сходится.

37. Верно ли, что пространство, гомеоморфное полному, полно?

38. Докажите, что замкнутое подпространство полного пространства само полно; полное подпространство произвольного пространства замкнуто в нём.

39. Докажите, что в полном метрическом пространстве последовательность вложенных замкнутых шаров с радиусами, стремящимися к нулю, имеет общий элемент.

40. Можно ли в предыдущей задаче убрать условие полноты пространства или стремления к нулю радиусов шаров?

Отображение f метрического пространства X в себя называется *сжимающим*, если

$$\exists c \;\; (0 \leqslant c < 1)\colon \;\; \forall x, y \in X \;\; \rho(f(x), f(y)) < c\rho(x, y).$$

41. Докажите, что сжимающее отображение непрерывно.

42. а) Докажите, что сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет ровно одну неподвижную точку.

б) На карту России масштаба 1 : 5 000 000 положили карту России масштаба 1 : 20 000 000. Докажите, что найдётся точка, изображения которой на обеих картах совпадут.

43*. Существует ли неполное метрическое пространство, в котором верно утверждение задачи 42, а?

Подмножество метрического пространства называется *всюду плотным*, если его замыкание совпадает со всем пространством; *нигде не плотным* — если его замыкание не имеет непустых открытых подмножеств (сравните это определение с тем, которое было дано в приложениии 2).

44. а) Пусть a, b, α, $\beta \in \mathbb{R}$ и $a < \alpha < \beta < b$. Докажите, что множество непрерывных функций на $[a, b]$, монотонных на $[\alpha, \beta]$, нигде не плотно в пространстве всех непрерывных функций на $[a, b]$ с равномерной метрикой.

б) Пусть a, b, c, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и $a < b$, $c > 0$, $\varepsilon > 0$. Тогда множество непрерывных функций на $[a, b]$, таких что

$$\exists\, x \in [a, b]\colon\ \forall\, y\ \ (0 < |x-y| < \varepsilon)\ \Rightarrow\ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leqslant c,$$

нигде не плотно в пространстве всех непрерывных функций на $[a, b]$ с равномерной метрикой.

45. (Обобщённая теорема Бэра.) Докажите, что полное метрическое пространство нельзя представить в виде объединения счётного числа нигде не плотных множеств.

46. Докажите, что множество непрерывных, не монотонных ни на каком непустом интервале и нигде не дифференцируемых функций, определённых на отрезке $[0, 1]$, всюду плотно в пространстве всех непрерывных функций на $[0, 1]$ с равномерной метрикой.

47*. Пусть f — дифференцируемая функция на отрезке $[0, 1]$. Докажите, что её производная непрерывна на всюду плотном множестве точек.