Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 4

В. В. Прасолов

Точки Брокара и изогональное сопряжение

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2000

УДК 514.112
П70
ББК 22.151.0

Аннотация

Изогональное сопряжение относительно треугольника $A_1A_2A_3$ сопоставляет точке X такую точку Y, что прямая YA_i симметрична прямой XA_i относительно биссектрисы угла A_i ($i = 1, 2, 3$). Это преобразование обладает многими интересными свойствами. В частности, оно переводит друг в друга две замечательные точки треугольника — точки Брокара.

Текст брошюры представляет собой обработку записи лекции, прочитанной автором 6 ноября 1999 года на Малом мехмате для школьников 9–11 классов.

ISBN 5–900916–49–9

Прасолов Виктор Васильевич

Точки Брокара
и изогональное сопряжение

(Серия «Библиотека „Математическое просвещение“»)
М.: МЦНМО, 2000. — 24 с.: ил.

Главный редактор серии *В. М. Тихомиров.*

Редакторы *Р. М. Кузнец*, *Е. Н. Осьмова.* Техн. редактор *М. Ю. Панов.*

Лицензия ЛР №071150 от 11/IV 1995 г. Подписано к печати 21/II 2000 г. Формат бумаги 60×88 $^1/_{16}$. Физ. печ. л. 1,5. Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,38. Тираж 1000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 121002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11.

Предисловие

С каждым треугольником связано преобразование плоскости, называемое изогональным сопряжением. Точки, переходящие друг в друга при изогональном сопряжении (изогонально сопряжённые точки), часто обладают интересными свойствами. Например, точка, для которой минимальна сумма квадратов расстояний до вершин треугольника (т. е. точка пересечения медиан треугольника), изогонально сопряжена точке, для которой минимальна сумма квадратов расстояний до сторон; точка, из которой все стороны треугольника видны под углом $120°$, изогонально сопряжена точке, для которой основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника, образуют треугольник с углами по $60°$, т. е. равносторонний; точка пересечения высот изогонально сопряжена центру описанной окружности. Об этих и других свойствах изогонального сопряжения идёт речь в первой части лекции. Вторая часть лекции посвящена паре замечательных точек треугольника — точкам Брокара; эти точки также изогонально сопряжены.

I. Изогональное сопряжение

Определение изогонального сопряжения

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и точку P внутри его. Отразим прямые AP, BP и CP относительно биссектрис углов A, B и C соответственно (рис. 1). Докажем, что три полученные прямые пересекаются в одной точке.

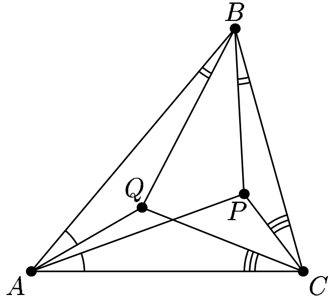

Рис. 1

Воспользуемся вспомогательным построением. Пусть P_1, P_2 и P_3 — точки, симметричные точке P относительно прямых AC, AB и BC соответственно (рис. 2), Q — центр описанной окружности треугольника $P_1P_2P_3$. Покажем, что через точку Q проходят прямые, симметричные прямым AP, BP, CP относительно биссектрис углов A, B, C соответственно.

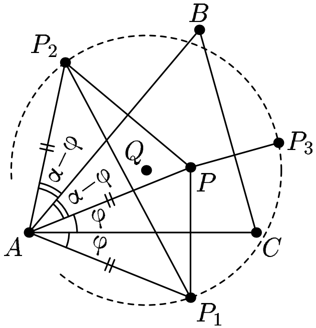

Рис. 2

Будем считать, что треугольник ABC остроугольный. Обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle PAC = \varphi$. Тогда

$$\angle P_1AC = \angle PAC = \varphi,$$
$$\angle P_2AB = \angle PAB = \alpha - \varphi.$$

А поскольку $AP_1 = AP = AP_2$, треугольник P_1AP_2 является равнобедренным, и его угол при вершине A равен 2α. Проведём биссектрису угла P_1AP_2. Она является серединным перпендикуляром к отрезку P_1P_2, а значит, проходит через точку Q. Но

$$\angle QAB = \angle P_2AQ - \angle P_2AB = \alpha - (\alpha - \varphi) = \varphi,$$

т. е. $\angle QAB = \angle PAC$.

Аналогично доказываются равенства

$$\angle QBA = \angle PBC \quad \text{и} \quad \angle QCA = \angle PCB.$$

Следовательно, прямые AQ, BQ и CQ симметричны прямым AP, BP и CP относительно биссектрис углов A, B и C соответственно.

Доказательство для случая, когда треугольник ABC не является остроугольным, аналогично и предоставляется читателю в качестве лёгкого упражнения.

Точку Q называют *изогонально сопряжённой* точке P относительно треугольника ABC. Ясно, что если точка Q изогонально сопряжена точке P, то точка P изогонально сопряжена точке Q. Действительно, если прямая AQ симметрична прямой AP относительно биссектрисы угла A треугольника ABC, то и прямая AP симметрична прямой AQ.

Аналогичным образом можно определить изогонально сопряжённую точку не только для внутренних точек треугольника, но и для остальных точек плоскости, отличных от A, B и C. При этом может оказаться, что прямые, симметричные прямым AP, BP, CP относительно биссектрис треугольника ABC, параллельны. В таком случае мы считаем, что этой точке изогонально сопряжена «бесконечно удалённая» точка.

Отображение, которое переводит каждую точку плоскости (кроме A, B и C) в точку, которая ей изогонально сопряжена, называется *изогональным сопряжением* относительно треугольника ABC.

Простейшие свойства изогонального сопряжения

1°. *Изогональное сопряжение не является взаимно однозначным отображением.*

Рассмотрим, например, точку на прямой BC, отличную от B и C. Прямая, симметричная прямой BC относительно биссектрисы угла B, есть, очевидно, прямая AB, а прямая, симметричная BC относительно биссектрисы угла C, есть прямая AC. Поэтому исходная точка перейдёт в точку A. Значит, вся прямая BC (за исключением точек B и C, для которых отображение не определено) перейдёт в точку A. Поэтому изогональное сопряжение не взаимно однозначно.

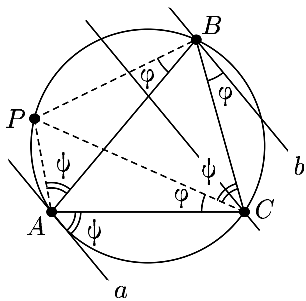

Рис. 3

Впрочем, если рассматривать плоскость без прямых, содержащих стороны треугольника, то изогональное сопряжение является взаимно однозначным отображением.

Приведённое утверждение требует некоторых пояснений для точек, изогонально сопряжённых точкам описанной окружности треугольника ABC (отличным от вершин A, B, C). Дело в том что для каждой такой точки P прямые, симметричные прямым AP, BP и CP относительно биссектрис соответствующих углов треугольника, параллельны (рис. 3).

Докажем, например, что прямые a и b параллельны (см. рис. 3). Сумма внутренних односторонних углов $\angle A + \psi$ и $\angle B + \varphi$, образованных при пересечении прямых a и b секущей AB, равна $\angle A + \psi + \angle B + \varphi = \angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Следовательно, $a \parallel b$.

Это означает, что каждой точке описанной окружности, кроме вершин треугольника, соответствует некоторая несобственная точка, лежащая на несобственной прямой плоскости. Верно и обратное: если данной несобственной точке, определяемой «пучком» параллельных прямых, поставить в соответствие три параллельные прямые «пучка», проходящие через вершины треугольника, то прямые, симметричные им относительно биссектрис соответствующих углов треугольника, определяют точку, изогонально сопряжённую этой несобственной точке.

2°. *Изогональное сопряжение имеет ровно четыре неподвижные точки* (*т. е. существуют ровно четыре точки, которые изогонально сопряжены самим себе*)*: центр вписанной и центры вневписанных окружностей треугольника* ABC (рис. 4).

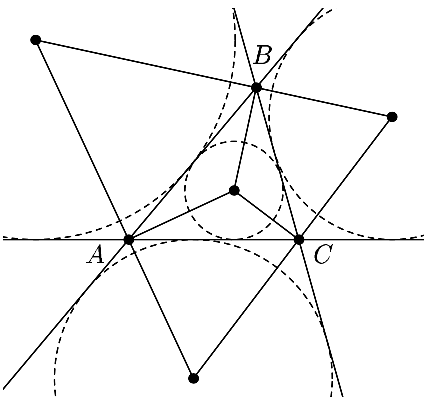

Рис. 4

Центр вписанной окружности — это точка пересечения биссектрис треугольника. Понятно, что эта точка самосопряжена. Центр вневписанной окружности — это точка пересечения двух биссектрис внешних углов треугольника. Поскольку биссектриса внешнего угла перпендикулярна биссектрисе смежного с ним внутреннего угла, то преобразование симметрии относительно биссектрисы этого внутреннего угла оставляет прямую, содержащую биссектрису внешнего угла, на месте. Значит, при изогональном сопряжении точка пересечения двух биссектрис внешних углов также остаётся на месте.

Понятно, что других неподвижных точек изогональное сопряжение не имеет.

3°. *Ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC изогонально сопряжён центру описанной окружности этого треугольника.*

Доказательство проведём для остроугольного треугольника (случай неостроуголного треугольника разбирается аналогично). Пусть O — центр описанной окружности, H — точка, изогонально сопряжённая точке O. Обозначим $\angle ACB = \gamma$ (рис. 5). По теореме о вписанном угле, $\angle AOB = 2\gamma$. Треугольник AOB равнобедренный, поэтому $\angle ABO = 90° - \gamma$ как угол при основании. Пусть точка D на прямой AC такова, что $\angle CBD = \angle ABO$. Тогда, по определению, точка H лежит на прямой BD. Но $\angle BCD = \gamma$, $\angle CBD = 90° - \gamma$, поэтому BD — высота треугольника ABC. Аналогично рассуждая, приходим к выводу, что точка H лежит на всех трёх высотах треугольника ABC.

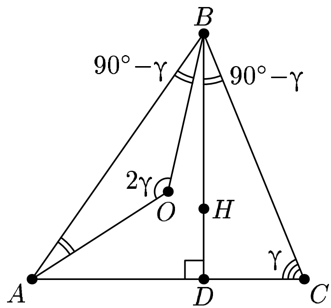

Рис. 5

Трилинейные координаты

Рассмотрим треугольник ABC и точку P внутри его. Пусть x, y, z — расстояния от точки P до прямых BC, CA и AB соответственно (рис. 6). Тогда набор чисел (x, y, z) называется *трилинейными координатами* точки P относительно треугольника ABC.

Установим связь между трилинейными и барицентрическими координатами. Напомним, что барицентрические координаты точки P (относительно треугольника ABC) — это такая тройка чисел $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, что точка P является

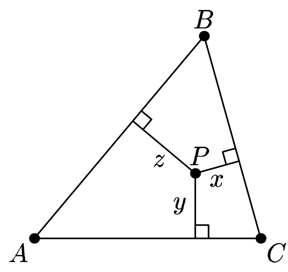

Рис. 6

центром масс системы точек $\{(A,\widetilde{x}),\ (B,\widetilde{y}),\ (C,\widetilde{z})\}$ (точке A «приписана» масса $\widetilde{x}$, точке B — масса $\widetilde{y}$, а точке C — масса $\widetilde{z}$). Как видно из определения, числа $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, $\widetilde{z}$ определены с точностью до пропорциональности (т. е. точки с координатами $(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$ и $(\lambda\widetilde{x},\lambda\widetilde{y},\lambda\widetilde{z})$ при $\lambda\neq 0$ совпадают).

Например, точка с трилинейными координатами (r,r,r) — это точка пересечения биссектрис (r — радиус вписанной окружности треугольника), а точка с барицентрическими координатами $(r,r,r)=(1,1,1)$ — это точка пересечения медиан.

Можно показать, что если положить $\widetilde{x}$ равным площади $\triangle PBC$, $\widetilde{y}$ — площади $\triangle PCA$, а $\widetilde{z}$ — площади $\triangle PAB$, то мы получим барицентрические координаты точки P. Отсюда следует, что трилинейные координаты точки связаны с барицентрическими следующим образом:

$$\widetilde{x}=BC\cdot x,\quad \widetilde{y}=AC\cdot y,\quad \widetilde{z}=AB\cdot z. \tag{1}$$

Разница, казалось бы, невелика. Но оказывается, что барицентрические координаты хорошо приспособлены к аффинным свойствам, а трилинейные — к метрическим. (Свойство называют *аффинным*, если оно сохраняется при ортогональной проекции одной плоскости на другую. Например, свойство быть точкой пересечения медиан треугольника — аффинное. Если же свойство существенно зависит от расстояний и углов, то такое свойство называют *метрическим*. Например, свойство быть точкой пересечения биссектрис треугольника — метрическое.)

Определение трилинейных координат для всех точек плоскости

Пусть P — произвольная точка плоскости. Тогда её первая трилинейная координата x — это *ориентированное расстояние* от точки P до прямой BC (т. е. расстояние, взятое со знаком «+», если точки P и A расположены по одну сторону от прямой BC, и со знаком «−», если по разные стороны). Соответственно, y и z — это ориентированные расстояния до прямых CA и AB (рис. 7).

Итак, каждой точке плоскости мы сопоставили три числа. Но для того, чтобы задать точку на плоскости, вполне достаточно *двух* чисел (например, в декартовой системе координат). Конечно, барицентрические координаты точки — это тоже три числа, но зато они определены с точностью до пропорциональности. Соотношения (1) приводят нас к выводу, что и трилинейные координаты также можно определить с точностью до пропорциональности.

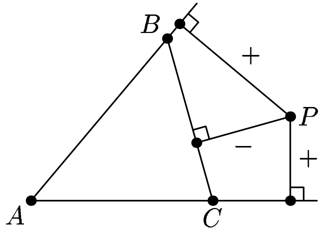

Рис. 7

Докажем теперь, что трилинейные координаты определены с точностью до пропорциональности, без ссылки на свойства барицентрических координат.

Пусть x, y и z — ориентированные расстояния от некоторой точки P до прямых BC, CA и AB соответственно. Покажем, что на плоскости не существует точки P', для которой эти расстояния были бы равны λx, λy и λz соответственно ($\lambda \neq 1$). Тогда можно считать, что тройки (x, y, z) и $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ при $\lambda \neq 0$ (точки с координатами $(0, 0, 0)$ не существует) определяют одну и ту же точку.

Поскольку отношение первой и второй координат (т. е. отношение расстояний до прямых BC и CA) для точек P и P' одно и то же, то из формулы

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin \angle BCP}{\sin \angle PCA}$$

(углы тоже ориентированы, рис. 8) следует, что точка P' лежит на прямой CP (при $\lambda > 0$ — на луче CP, а при $\lambda < 0$ — на дополнении этого луча). Если $y = 0$, $x \neq 0$, то точка P' лежит на прямой AC, которая совпадает в таком случае с прямой CP. Если $x = y = 0$, то $P = C = P'$.

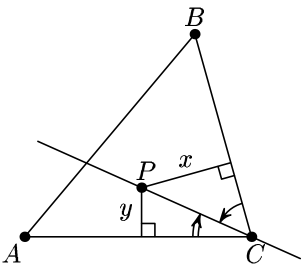

Рис. 8

Аналогично, точка P' лежит и на прямой AP, и на прямой BP, т. е. совпадает с точкой P, откуда $\lambda = 1$.

Итак, трилинейные координаты определены с точностью до пропорциональности, и если нам даны не сами расстояния от точки P до прямых AB, BC и CA, а только отношения этих расстояний, то точка P всё равно восстанавливается однозначно.

Пусть теперь фиксированы первые две координаты точки (точнее их отношение), причём хотя бы одна из этих двух координат отлична от нуля, а третья координата меняется. Как мы уже знаем, точка (a, b, z), $a^2 + b^2 \neq 0$, принадлежит некоторой прямой, т. е. можно рассматривать переменную z как координату вдоль этой прямой. Но это не обычная, а проективная координата. Например, в вершине C треугольника она принимает значение ∞ (бесконечность), а в несобственной точке прямой (т. е. при бесконечном удалении от точки C) — обычное конечное значение.

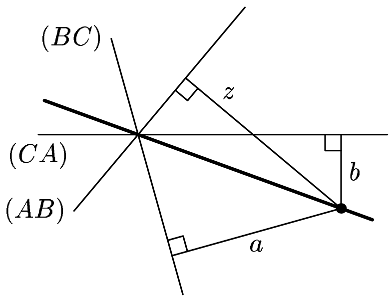

Рис. 9

Проиллюстрируем последнее утверждение: допустим, что точка (a, b, z) расположена настолько далеко от треугольника, что он «кажется точкой» (рис. 9). Поскольку заданы числа a и b, то и z — вполне определённое действительное число.

Изогональное сопряжение в трилинейных координатах

Пусть точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC и отличны от его вершин, (p_1, p_2, p_3) — трилинейные координаты точки P. Точки прямой AP (в том числе и несобственная точка) имеют координаты вида (x, p_2, p_3), где x — любое число (включая ∞). Прямая AQ симметрична AP относительно биссектрисы угла A, поэтому её точки имеют координаты вида (x', p_3, p_2) (рис. 10): x' — переменная, а последние две координаты поменялись местами. Поскольку трилинейные координаты определены с точностью до постоянного множителя, можно также утверждать, что точки прямой AQ имеют координаты $\left(x'', \dfrac{1}{p_2}, \dfrac{1}{p_3}\right)$.

Проводя аналогичные рассуждения для вершин B и C, мы получим, что при изогональном сопряжении точка (p_1, p_2, p_3) переходит в точку $\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_3}\right)$.

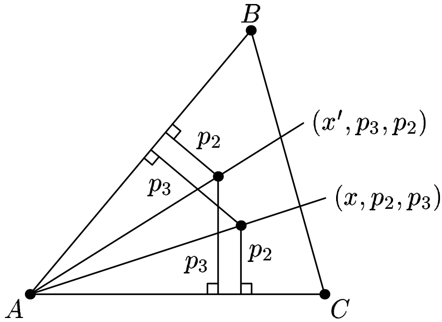

Рис. 10

Трилинейные координаты удобны при решении некоторых задач, связанных с треугольником.

Задача. Точка, для которой минимальна сумма квадратов расстояний до вершин треугольника ABC (т. е. точка пересечения его медиан), изогонально сопряжена точке, для которой минимальна сумма квадратов расстояний до сторон треугольника.

Решение. Прежде всего проверим, что точка, для которой минимальна сумма квадратов расстояний до вершин треугольника ABC, — это точка M пересечения его медиан. Действительно, поскольку $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$, то для любой точки $X \neq M$

$$\begin{aligned}
XA^2 + XB^2 + XC^2 &= \left|\overrightarrow{XA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{XB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{XC}\right|^2 = \\
&= \left|\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MC}\right|^2 = \\
&= \left(\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MB}\right) + \\
&\qquad + \left(\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MC}\right) = \\
&= 3XM^2 + 2\left(\overrightarrow{XM}, \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) + \\
&\qquad + MA^2 + MB^2 + MC^2 = \\
&= 3XM^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 > MA^2 + MB^2 + MC^2,
\end{aligned}$$

где через $(\vec{r}, \vec{s})$ обозначено скалярное произведение векторов $\vec{r}$ и $\vec{s}$.

Из соотношений (1) следует, что точка пересечения медиан имеет трилинейные координаты $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$, где $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ — длины сторон треугольника. Поэтому точка, изогонально сопряжённая точке пересечения медиан, имеет трилинейные координаты (a, b, c).

Рассмотрим произвольную собственную точку с трилинейными координатами (x, y, z). Расстояния от этой точки до сторон треугольника равны kx, ky, kz, где число k определяется соотношением $k(ax + by + cz) = 2S$ (S — площадь треугольника ABC). Таким образом, сумма квадратов расстояний от рассматриваемой точки до сторон треугольника равна

$$4S^2 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2}.$$

Требуется доказать, что эта сумма минимальна в том случае, когда $x = a$, $y = b$, $z = c$, т. е.

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2} \geqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2},$$

причём равенство достигается только при $x = \lambda a$, $y = \lambda b$, $z = \lambda c$, где $\lambda \neq 0$. Это неравенство эквивалентно неравенству Коши—Буняковского

$$(ax + by + cz)^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2),$$

которое доказывается совсем не сложно.

Окружности Аполлония и точки Торричелли

Пусть A и B — произвольные точки. Докажем, что геометрическое место точек X, таких что отношение $\frac{AX}{BX}$ постоянно и равно k ($k > 0$, $k \neq 1$), есть окружность.

Введём декартову систему координат следующим образом: пусть ось Ox совпадает с прямой AB, точка A является началом

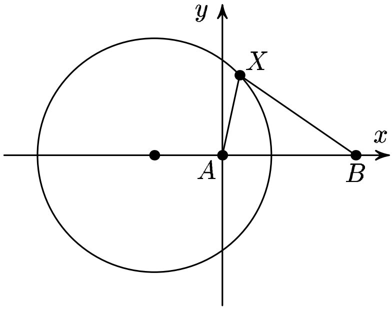

Рис. 11

координат, $B = (1,0)$ (рис. 11). Если точка $X = (x, y)$ такова, что $\dfrac{AX}{BX} = k$, то $AX^2 = k^2 BX^2$ и $x^2+y^2 = k^2\bigl((x-1)^2+y^2\bigr)$. Преобразуем это выражение:

$$x^2 + y^2 = k^2x^2 - 2k^2x + k^2 + k^2y^2,$$

$$(1-k^2)x^2 + 2k^2x + (1-k^2)y^2 = k^2,$$

$$\left(x + \frac{k^2}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{k}{1-k^2}\right)^2.$$

Это уравнение описывает окружность с центром $\left(-\dfrac{k^2}{1-k^2}, 0\right)$ радиуса $\dfrac{k}{|1-k^2|}$. Построенная окружность называется *окружностью Аполлония*.

В случае, когда $k = 1$, окружность Аполлония вырождается в прямую — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

С каждым треугольником можно связать три окружности Аполлония (рис. 12), которые задаются следующими условиями:

$$\frac{AX}{BX} = \frac{AC}{BC}, \quad \frac{BX}{CX} = \frac{BA}{CA}, \quad \frac{CX}{AX} = \frac{CB}{AB}.$$

Если треугольник равносторонний или равнобедренный, то некоторые из окружностей Аполлония могут оказаться прямыми.

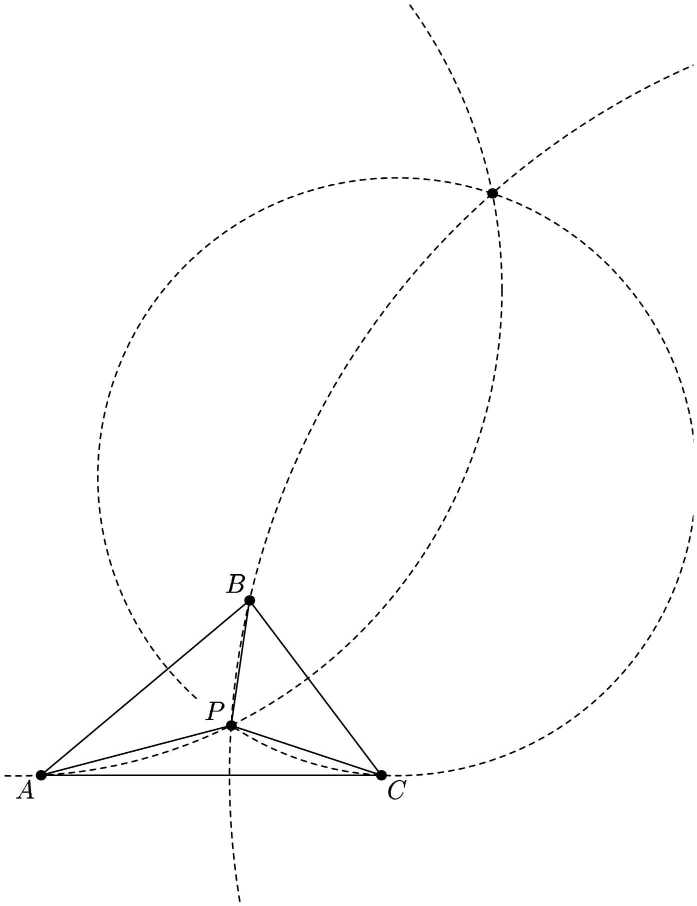

Рис. 12

Утверждение 1. Три окружности Аполлония, связанные с неравносторонним треугольником, пересекаются в двух точках, т. е. существуют две точки, через каждую из которых проходят все три окружности.

Доказательство. Пусть P — точка пересечения двух окружностей Аполлония, проходящих через вершины A и B треугольника. Тогда $\frac{BP}{CP} = \frac{BA}{CA}$ и $\frac{CP}{AP} = \frac{CB}{AB}$, а из этих равенств следует, что

$$\frac{BP}{AP} = \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CP}{AP} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{CB}{AB} = \frac{BC}{AC},$$

т. е. точка P лежит и на третьей окружности Аполлония (проходящей через вершину C). Итак, третья окружность проходит через точки пересечения первых двух окружностей.

В случае равностороннего треугольника все три окружности Аполлония вырождаются в прямые и эти прямые имеют только одну общую точку.

Утверждение 2. Пусть P — одна из точек пересечения окружностей Аполлония, A_P, B_P и C_P — её проекции на прямые BC, CA и AB соответственно (рис. 13). Тогда треугольник $A_PB_PC_P$ равносторонний.

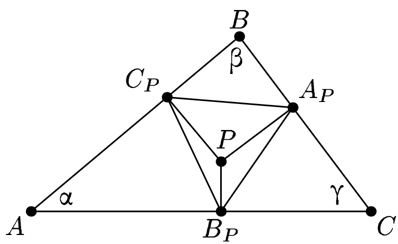

Рис. 13

Доказательство. Поскольку $\angle AB_PP = \angle AC_PP = 90^\circ$, точки A, B_P, P и C_P лежат на одной окружности. Отрезок AP — диаметр этой окружности, и, по теореме синусов,

$$B_PC_P = AP \sin\alpha.$$

Аналогично,

$$C_PA_P = BP \sin\beta, \quad A_PB_P = CP \sin\gamma$$

(как обычно, α, β и γ — углы треугольника ABC). Далее, если R — радиус описанной окружности треугольника ABC, то

$$BC = 2R\sin\alpha, \quad AC = 2R\sin\beta, \quad AB = 2R\sin\gamma.$$

Поэтому

$$\frac{B_PC_P}{C_PA_P} = \frac{AP\sin\alpha}{BP\sin\beta} = \frac{AC\sin\alpha}{BC\sin\beta} = \frac{2R\sin\beta\cdot\sin\alpha}{2R\sin\alpha\cdot\sin\beta} = 1.$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{C_PA_P}{A_PB_P} = 1.$$

Следовательно, треугольник $A_PB_PC_P$ является равносторонним.

Построим на сторонах треугольника ABC вовне три равносторонних треугольника ABC_1, AB_1C и A_1BC (рис. 14). Тогда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, которую называют *точкой Торричелли*. В этой же точке пересекаются описанные окружности построенных правильных треугольников и стороны треугольника ABC видны из неё под углом либо 60°, либо 120° (если только точка Торричелли не совпадает с вершиной треугольника).

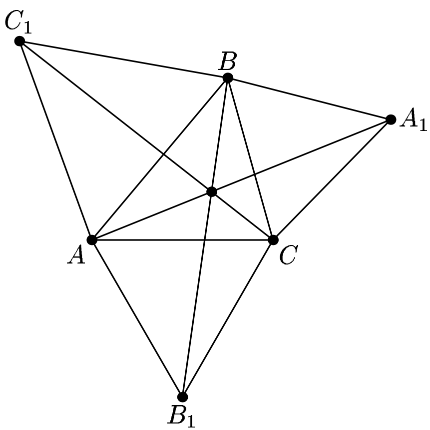

Рис. 14

Для неравносторонних треугольников есть ещё и вторая точка Торричелли, которая получается, если равносторонние треугольники построены вовнутрь.

Можно доказать, что первая точка Торричелли имеет трилинейные координаты

$$\left(\frac{1}{\sin(60^\circ+\alpha)}, \frac{1}{\sin(60^\circ+\beta)}, \frac{1}{\sin(60^\circ+\gamma)}\right),$$

а вторая точка Торричелли — трилинейные координаты

$$\left(\frac{1}{\sin(60^\circ-\alpha)}, \frac{1}{\sin(60^\circ-\beta)}, \frac{1}{\sin(60^\circ-\gamma)}\right).$$

Если один из углов треугольника равен 120°, то первая точка Торричелли попадает в вершину. То же самое происходит со второй точкой Торричелли, если ровно один из углов треугольника равен 60°, а если все углы равны по 60°, то вторая точка Торричелли не определена.

Точки, в которых пересекаются окружности Аполлония, имеют трилинейные координаты

$$\big(\sin(60^\circ+\alpha), \sin(60^\circ+\beta), \sin(60^\circ+\gamma)\big) \quad \text{и}$$
$$\big(\sin(60^\circ-\alpha), \sin(60^\circ-\beta), \sin(60^\circ-\gamma)\big).$$

Поэтому точки Торричелли изогонально сопряжены точкам пересечения окружностей Аполлония. (Исключение составляют треугольники, у которых один из углов равен 60° или 120°.)

Окружность Эйлера и прямая Симсона

Пусть точка P_2 изогонально сопряжена точке P_1 относительно треугольника ABC. Опустим из них перпендикуляры P_1A_1, P_1B_1, P_1C_1; P_2A_2, P_2B_2, P_2C_2 на стороны BC, CA, AB соответственно. Тогда точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности.

Докажем это. Предположим, что точки B_1, B_2, C_1 и C_2 располагаются на сторонах AC и AB в таком порядке, как показано на рис. 15. Докажем, что

$$\angle C_1B_1B_2 + \angle C_1C_2B_2 = 180^\circ.$$

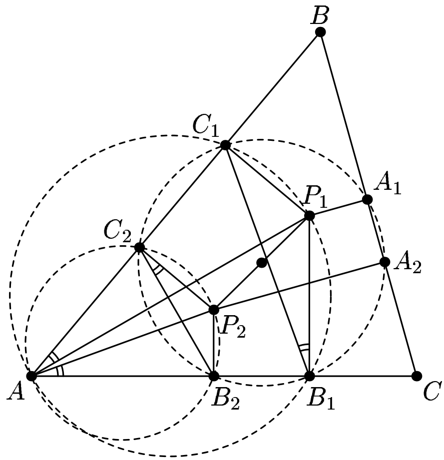

Рис. 15

Это означает, что точки B_1, B_2, C_1 и C_2 лежат на одной окружности, причём центром этой окружности, как мы увидим, является середина отрезка P_1P_2. Действительно, точки A, B_2, P_2, C_2 лежат на одной окружности, и точки A, B_1, P_1, C_1 тоже лежат на одной окружности (рис. 15). Следовательно,

$$\angle P_1B_1C_1 = \angle P_1AC_1 = \angle P_2AB_2 = \angle P_2C_2B_2.$$

А так как $\angle P_1B_1A = \angle P_2C_2B = 90°$,

$$\angle C_1B_1B_2 + \angle C_1C_2B_2 = \\ = \angle P_1B_1A - \angle P_1B_1C_1 + \angle P_2C_2B + \angle P_2C_2B_2 = 180°.$$

Центр этой окружности является серединой отрезка P_1P_2, поскольку он лежит на серединных перпендикулярах к отрезкам B_1B_2 и C_1C_2. Если же точки B_1, B_2, C_1 и C_2 располагаются по-другому, приведённое доказательство надо незначительно изменить.

Нетрудно показать, что точки A_1 и A_2 также лежат на этой окружности.

Доказанное утверждение можно использовать для доказательства некоторых известных теорем планиметрии. Например, когда

P_2 — точка пересечения высот треугольника, а P_1 — центр описанной окружности, получаем, что основания высот треугольника и середины его сторон лежат на одной окружности (она называется *окружностью Эйлера*).

Более интересное утверждение получается в том случае, когда точка P_1 лежит на описанной окружности треугольника и отлична от его вершин. В этом случае прямые, симметричные прямым AP_1, BP_1, CP_1 относительно биссектрис соответствующих углов треугольника, параллельны. Значит, P_2 — несобственная (бесконечно удалённая) точка. Поэтому основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника из произвольной точки описанной окружности, лежат на окружности бесконечного радиуса, т. е. они лежат на одной прямой (эту прямую часто называют *прямой Симсона*).

Эллипс и изогональное сопряжение

Напомним, что эллипсом называется множество точек M, для которых сумма расстояний $MF_1 + MF_2$ до двух заданных точек F_1 и F_2 (фокусов эллипса) постоянна.

Касательная к эллипсу в точке M — прямая, имеющая ровно одну общую точку с эллипсом, содержит биссектрисы внешних углов треугольника F_1MF_2 при вершине M (рис. 16). Доказательство этого факта основывается на двух леммах.

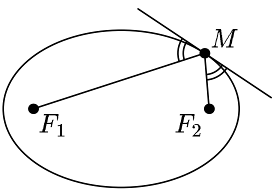

Рис. 16

Лемма 1. Если l — касательная к эллипсу в точке M, то $XF_1+XF_2 > MF_1+MF_2$ для любой точки $X \neq M$ прямой l.

Лемма 2. Если для точки M прямой l сумма расстояний $MF_1 + MF_2$ до двух заданных точек F_1 и F_2, лежащих по одну сторону от прямой l, минимальна, то l содержит биссектрисы внешних углов треугольника F_1MF_2 при вершине M.

Доказательство этих лемм предоставляется читателю в качестве несложного упражнения.

Докажем, что фокусы любого эллипса, вписанного в треугольник, изогонально сопряжены относительно этого треугольника.

Доказательство. Рассмотрим угол A треугольника ABC. Пусть эллипс, вписанный в треугольник, касается сторон AB и AC

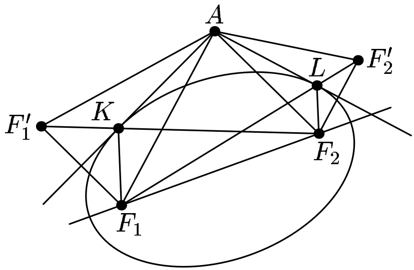

Рис. 17

в точках K и L соответственно, а F_1 и F_2 — фокусы эллипса. Поскольку касательная к эллипсу образует равные углы с отрезками, соединяющими точку касания с фокусами, точка F_1', симметричная F_1 относительно KA, лежит на прямой F_2K (рис. 17). Точно так же, точка F_2', симметричная F_2 относительно LA, лежит на прямой F_1L. При этом $F_1'F_2 = F_1K + F_2K = F_1L + F_2L = F_1F_2'$. Значит, треугольники $F_2'AF_1$ и F_2AF_1' равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle KAF_1 = \dfrac{1}{2}\angle F_1'AF_1 = \dfrac{1}{2}\angle F_2AF_2' = \angle LAF_2$. Это означает, что прямые AF_1 и AF_2 симметричны относительно биссектрисы угла A. Аналогичные рассуждения для углов B и C треугольника показывают, что F_1 и F_2 изогонально сопряжены относительно треугольника ABC.

II. Точки Брокара

Точка P, лежащая внутри треугольника ABC, называется *первой точкой Брокара*, если $\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$ (рис. 18, *а*). Для *второй точки Брокара* должны выполняться равенства $\angle QAB = \angle QCA = \angle QBC$ (рис. 18, *б*).

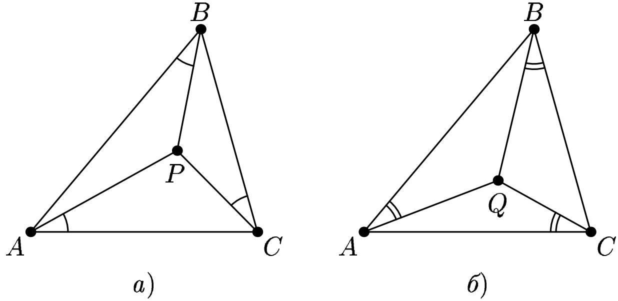

Рис. 18

Докажем, что для любого треугольника существует ровно одна первая точка Брокара (для второй точки Брокара рассуждения аналогичны).

Построим на сторонах треугольника ABC подобные ему треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1, как показано на рис. 19 (α, β и γ — углы треугольника ABC). Поскольку $\angle ACP = \angle ACB - \angle PCB$, равенство $\angle PAC = \angle PCB$ эквивалентно равенству $\angle APC = 180^\circ - \gamma$. Но $\angle AB_1C = \gamma$, поэтому точка Брокара P лежит на описанной окружности треугольника AB_1C.

Аналогичные рассуждения для остальных углов показывают, что P является точкой Брокара тогда и только тогда, когда она принадлежит описанным окружностям всех трёх треугольников A_1BC, AB_1C и ABC_1.

Поскольку описанные окружности треугольников A_1BC и AB_1C пересекаются в двух точках и одна из них — точка C, мы тем самым доказали, что существует *не более одной* первой точки Брокара. Для доказательства *существования* точки Брокара достаточно показать, что эти три окружности действительно имеют общую точку.

Пусть P — точка пересечения описанных окружностей треугольников A_1BC и AB_1C, отличная от точки C. Нетрудно доказать, что точка P лежит внутри треугольника ABC. Имеем:

$$\angle APC = 180^\circ - \gamma, \qquad \angle BPC = 180^\circ - \beta,$$
$$\angle APB = 360^\circ - \angle APC - \angle BPC = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha,$$

следовательно точка P лежит и на описанной окружности треугольника ABC_1, т. е. P — точка Брокара.

Отметим, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P. Действительно, по теореме о вписанном угле,

$$\angle A_1PC = \angle A_1BC = \gamma, \qquad \angle A_1PB = \angle A_1CB = \alpha,$$
$$\angle C_1PB = \angle C_1AB = \beta.$$

Но $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, поэтому отрезок CC_1 проходит через точку P. Аналогично доказывается, что и отрезки AA_1 и BB_1 проходят через эту точку. Тем самым, мы получили более простой способ построения первой точки Брокара.

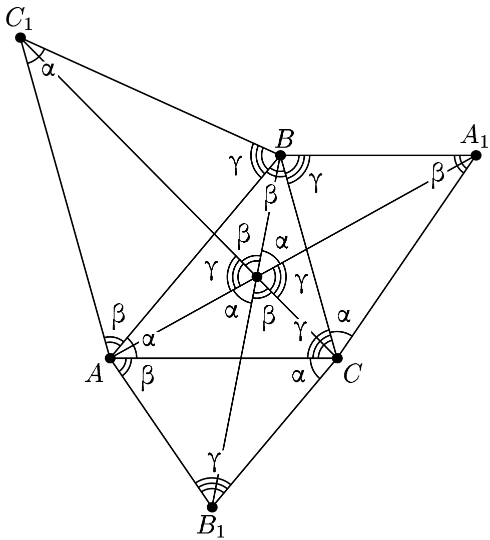

Рис. 19

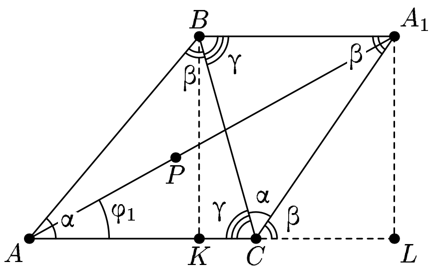

Рис. 20

Угол Брокара

Пусть P и Q — первая и вторая точки Брокара треугольника ABC соответственно,

$$\varphi_1 = \angle PAC = \angle PCB = \angle PBA,$$
$$\varphi_2 = \angle QAB = \angle QCA = \angle QBC.$$

Докажем, что $\varphi_1 = \varphi_2$. Так же, как в предыдущем пункте, построим точку A_1 (рис. 19). Как мы установили, точка P лежит на отрезке AA_1. Поскольку $\angle ABA_1 = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$, то прямые AC и BA_1 параллельны. Пусть точки K и L — основания перпендикуляров, опущенных на прямую AC из точек B и A_1 соответственно (рис. 20). Пусть также точка K лежит на отрезке AC, а не на его продолжении (остальные случаи разбираются аналогично). Тогда из равенства $BK = A_1L$ получаем:

$$\operatorname{ctg}\varphi_1 = \frac{AL}{A_1L} = \frac{AK}{BK} + \frac{CL}{A_1L} + \frac{CK}{BK} = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma.$$

Поскольку, по определению, угол φ_1 меньше любого из углов треугольника ABC, а значит, меньше 90°, то по величине $\operatorname{ctg}\varphi_1$ однозначно определяется угол φ_1. Для угла, связанного со второй точкой Брокара, мы получим точно такое же выражение, поэтому $\varphi_1 = \varphi_2$.

Из равенства этих углов следует, что первая и вторая точки Брокара изогонально сопряжены.

Угол $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$ называют *углом Брокара* треугольника ABC.

Для угла Брокара φ можно также получить следующее неявное выражение:

$$\sin^3\varphi = \sin(\alpha - \varphi)\sin(\beta - \varphi)\sin(\gamma - \varphi).$$

Действительно, по теореме синусов, применённой к треугольникам ABP, BCP и CAP,

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}, \quad \frac{BP}{CP} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\beta - \varphi)}, \quad \frac{CP}{AP} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\gamma - \varphi)}.$$

Перемножив эти равенства, получим требуемое.

Оглавление