Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 2

А. А. Болибрух

Проблемы Гильберта (100 лет спустя)

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 1999

Аннотация

Знаменитые проблемы, сформулированные Давидом Гильбертом на Парижском международном математическом конгрессе 1900-го года, оказали определяющее влияние на развитие математики XX столетия. Одна из целей этой брошюры — показать, что многие известные и достаточно сложные математические проблемы возникают вполне естественным образом, так что даже старшеклассник может понять причины появления этих проблем и их формулировки.

Текст брошюры представляет собой обработку записи лекции, прочитанной автором 23 октября 1999 года на Малом мехмате для школьников 9–11 классов.

Болибрух Андрей Андреевич

Проблемы Гильберта
(100 лет спустя)

Главный редактор серии *В. М. Тихомиров.*

Редакторы *Р. М. Кузнец*, *Е. Н. Осьмова.* Техн. редактор *М. Ю. Панов.*

Лицензия ЛР №071150 от 11/IV 1995 г. Подписано к печати 18/XI 1999 г. Формат бумаги 60×88 $^1/_{16}$. Физич. печ. л. 1,5. Условн. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,38. Тираж 3000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 121002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11.

Проблемы Гильберта: историческое вступление

История Международных математических конгрессов насчитывает уже более ста лет; традиционно они проводятся раз в 4 года. Самый, наверное, знаменитый из них состоялся в августе 1900-го года в Париже. Именно на этом конгрессе, на секции преподавания и методологии математики, выступил 38-летний немецкий математик Давид Гильберт. В своём докладе он сформулировал те проблемы, которые, на его взгляд, являлись наиболее значимыми для математики начинающегося XX столетия.

Ни до, ни после него никто не ставил перед собой такую титаническую задачу. Даже в то время математика уже была достаточно специализированной: было много различных направлений, и одному человеку было очень трудно охватить все её разделы. Но Гильберт отличался широким кругозором: он работал практически во всех существовавших тогда областях математики и во многих из них добился выдающихся результатов. Это и позволило ему сформулировать ставшие знаменитыми 23 математические проблемы.

Эти проблемы делятся по областям математики следующим образом:

Области математики	№№ проблем
Основания математики	1, 2
Алгебра	13, 14, 17
Теория чисел	7–12
Геометрия	3, 4, 18
Топология	16
Алгебраическая геометрия	12–16, 22
Группы Ли	5, 14, 18
Вещественный и комплексный анализ	13, 22
Дифференциальные уравнения	16, 19–21
Математическая физика и теория вероятностей	6
Вариационное исчисление	23

Из таблицы (см. с. 3) видно, что проблемы Гильберта относятся к самым разным областям математики, а некоторые — сразу к нескольким областям. Это вполне естественно: математика едина, и одна и та же проблема может быть сформулирована и исследована в терминах различных математических дисциплин.

Доклад Гильберта на Парижском конгрессе можно найти, в частности, в недавно вышедшем двухтомнике его избранных трудов.* Вступительная часть этого доклада читается почти как литературное произведение. То была пора «романтической математики», и сам Гильберт начинает свой доклад словами, которые замечательно звучат и сейчас: «Кто из нас не хотел бы приоткрыть завесу, за которой скрыто наше будущее, чтобы хоть одним взглядом проникнуть в предстоящие успехи наших знаний и тайны его развития в ближайшие столетия? Каковы будут те особенные цели, которые поставят себе ведущие математические умы ближайшего поколения? Какие новые методы и новые факты будут открыты в новом столетии на широком и богатом поле математической мысли?» Так звучал *математический* доклад Гильберта на *математическом* международном конгрессе.

Когда эти проблемы были сформулированы, выяснилось, что некоторые из них либо решены, либо близки к решению. Однако другие потребовали для своего решения несколько десятков лет и усилий многих выдающихся математиков, а две из них до сих пор не решены. Почему же Гильберт включил в свой доклад именно эти 23 проблемы? Чем он руководствовался, формулируя их?

Сам Гильберт, поясняя свой выбор, приводил слова одного известного французского математика: «Математическую теорию можно считать совершенной только тогда, когда ты сделал её настолько ясной, что берёшься изложить её содержание первому встречному». Конечно, здесь имеется некоторое преувеличение, но процитированная фраза пока-

---

* *Гильберт Д.* Избранные труды. Т. 1, 2. М.: Факториал, 1998. См. также Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969.

зывает, что Гильберт придавал большое значение понятности и доступности математики.

Выбирая проблемы для своего доклада, Гильберт придерживался следующих принципов. Он говорил, что задача должна быть

а) понятной (должно быть ясно, откуда она возникла);

б) достаточно трудной, чтобы вызывать интерес;

в) не настолько трудной, чтобы её невозможно было решить.

Перейдём теперь к более подробному рассказу о некоторых из этих проблем.

Первая проблема Гильберта: континуум-гипотеза

Континуум-гипотеза, первая проблема Гильберта, относится к задачам оснований математики и теории множеств. Она тесно связана с такими простыми и естественными вопросами, как «Сколько?», «Больше или меньше?», и практически любой старшеклассник может понять, в чём состоит эта проблема. Тем не менее, нам потребуются некоторые дополнительные сведения, чтобы её сформулировать.

Эквивалентность множеств

Рассмотрим следующий пример. В школе проходит вечер танцев. Как определить, кого больше на этом вечере: девочек или мальчиков?

Можно, конечно, пересчитать тех и других и сравнить два полученных числа. Но гораздо проще дать ответ, когда оркестр заиграет вальс и все танцующие разобьются на пары. Тогда, если все присутствующие танцуют, значит, каждому нашлась пара, т. е. мальчиков и девочек одинаковое количество. Если же остались только мальчики, значит, мальчиков больше, и наоборот.

Этот способ, иногда более естественный, чем непосредственный пересчёт, называется *принципом разбиения на пары*, или *принципом взаимно однозначного соответствия*.

Рассмотрим теперь совокупность объектов произвольной природы — *множество*. Объекты, входящие в множество, называются его *элементами*. Если элемент x входит в множество X, это обозначают так: $x \in X$. Если множество X_1 содержится в множестве X_2, т. е. все элементы множества X_1 являются также элементами X_2, то говорят, что X_1 — подмножество X_2, и кратко записывают так: $X_1 \subset X_2$.

Множество *конечно*, если в нём конечное число элементов. Множества могут быть как конечными (например, множество учеников в классе), так и бесконечными (например, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots\}$). Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*.

Пусть X и Y — два множества. Говорят, что между этими множествами установлено *взаимно однозначное соответствие*, если все элементы этих двух множеств разбиты на пары вида (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$, причём каждый элемент из X и каждый элемент из Y участвует ровно в одной паре.

Пример, когда все девочки и мальчики на танцевальном вечере разбиваются на пары, и есть пример взаимно однозначного соответствия между множеством девочек и множеством мальчиков.

Множества, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, называются *эквивалентными* или *равномощными*. Два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда в них одинаковое количество элементов. Поэтому естественно считать, что если одно бесконечное множество эквивалентно другому, то в нём «столько же» элементов. Однако, опираясь на такое определение эквивалентности, можно получить весьма неожиданные свойства бесконечных множеств.

Бесконечные множества

Рассмотрим любое конечное множество и любое его собственное (непустое и не совпадающее с ним самим) подмножество. Тогда элементов в подмножестве *меньше*, чем в само́м множестве, т. е. *часть меньше целого*.

Обладают ли бесконечные множества таким свойством? И может ли иметь смысл утверждение, что в одном бесконечном множестве «меньше» элементов, чем в другом, тоже бесконечном? Ведь про два бесконечных множества мы можем пока только сказать, эквивалентны они или нет. А существуют ли вообще неэквивалентные бесконечные множества?

Далее мы последовательно ответим на все эти вопросы. А для начала приведём забавную фантастическую историю из книги Н. Я. Виленкина «Рассказы о множествах».* Действие происходит в далёком будущем, когда жители разных галактик могут встречаться друг с другом. Поэтому для всех путешествующих по космосу построена огромная гостиница, протянувшаяся через несколько галактик.

В этой гостинице *бесконечно много номеров* (комнат), но, как и положено, все комнаты пронумерованы, и для любого натурального числа n есть комната с этим номером.

Однажды в этой гостинице проходил съезд космозоологов, в котором участвовали представители всех галактик. Так как галактик тоже бесконечное множество, все места в гостинице оказались занятыми. Но в это время к директору гостиницы приехал его друг и попросил поселить его в эту гостиницу.

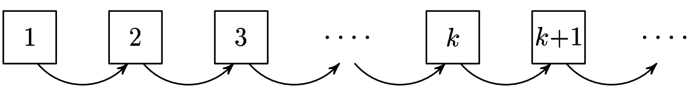
«После некоторых размышлений директор обратился к администратору и сказал:

— Поселите его в №1.

— Куда же я дену жильца этого номера? — удивлённо спросил администратор.

— А его переселите в №2. Жильца же из №2 отправьте в №3, из №3 — в №4 и т. д.»

Вообще, пусть постоялец, живущий в номере k, переедет в номер $k + 1$, как это показано на следующем рисунке:



Тогда у каждого снова будет свой номер, а №1 освободится.

Таким образом, нового гостя удалось поселить — именно потому, что номеров в гостинице бесконечно много.

* *Виленкин Н. Я.* Рассказы о множествах. М.: Наука, 1965.

Первоначально участники съезда занимали все номера гостиницы, следовательно, между множеством космозоологов и множеством $\mathbb{N}$ было установлено взаимно однозначное соответствие: каждому космозоологу дали по номеру, на двери которого написано соответствующее ему натуральное число. Естественно считать, что делегатов было «столько же», сколько имеется натуральных чисел. Но приехал ещё один человек, его тоже поселили, и количество проживающих увеличилось на 1. Но их снова осталось «столько же», сколько и натуральных чисел: ведь все поместились в гостиницу! И если обозначить количество космозоологов через $\aleph_0$*, то мы получим «тождество» $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$. Ни для какого конечного $\aleph_0$ оно, разумеется, не выполнено.

Мы пришли к удивительному выводу: *если к множеству, которое эквивалентно* $\mathbb{N}$, *добавить ещё один элемент, получится множество, которое снова эквивалентно* $\mathbb{N}$. Но ведь совершенно ясно, что делегаты-космозоологи представляют собой *часть* того множества людей, которые разместились в гостинице после приезда нового гостя. Значит, в этом случае часть не «меньше» целого, а «равна» целому!

Итак, из определения эквивалентности (которое не приводит ни к каким «странностям» в случае конечных множеств) следует, что часть бесконечного множества может быть эквивалентна всему множеству.

Возможно, что известный математик Больцано**, который пытался в своих рассуждениях применять принцип взаимно однозначного соответствия, испугался таких непривычных эффектов и поэтому не стал дальше развивать эту теорию. Она показалась ему совершенно абсурдной. Но Георг Кантор*** во второй половине XIX века вновь заинтересовался этим вопросом, стал исследовать его и создал *теорию множеств*, важный раздел оснований математики.

Продолжим наш рассказ про бесконечную гостиницу.

* $\aleph_0$ (читается: «алеф-нуль») — стандартное обозначение для мощности (числа элементов) множества $\mathbb{N}$.

** Бернард Больцано (1781–1848) — чешский математик.

*** Георг Кантор (1845–1918) — немецкий математик.

Новый постоялец «не удивился, когда на другое утро ему предложили переселиться в №1 000 000. Просто в гостиницу прибыли запоздавшие космозоологи из галактики ВСК-3472, и надо было разместить ещё 999 999 жильцов».

Но потом произошла какая-то накладка, и в эту же самую гостиницу приехали на съезд филателисты*. Их тоже было бесконечное множество — по одному представителю от каждой галактики. Как же их всех разместить?

Эта задача оказалась весьма сложной. Но и в этом случае нашёлся выход.

«В первую очередь администратор приказал переселить жильца из №1 в №2.

— А жильца из №2 переселите в №4, из №3 — в №6, вообще, из номера n — в номер $2n$.

Теперь стал ясен его план: таким путём он освободил бесконечное множество нечётных номеров и мог расселять в них филателистов. В результате чётные номера оказались занятыми космозоологами, а нечётные — филателистами... Филателист, стоявший в очереди n-м, занимал номер $2n-1$». И снова всех удалось разместить в гостинице.

Итак, ещё более удивительный эффект: при объединении двух множеств, каждое из которых эквивалентно $\mathbb{N}$, вновь получается множество, эквивалентное $\mathbb{N}$. Т. е. даже при «удвоении» множества мы получаем множество, эквивалентное исходному!

Далее будем рассматривать только числовые множества — подмножества числовой прямой. Множество всех чисел на этой прямой, т. е. множество действительных чисел, обычно обозначают через $\mathbb{R}$.

Счётные и несчётные множества

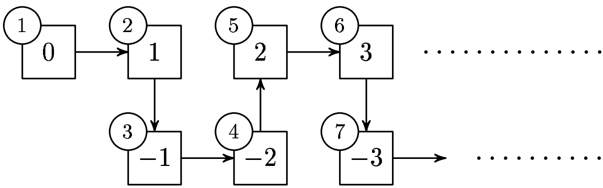
Рассмотрим следующую цепочку: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. ($\mathbb{Z}$ — это множество целых чисел, а $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, т. е. множество чисел вида p/q, где p и q — целые, $q \neq 0$.) Все эти множества бесконечны. Рассмотрим вопрос об их эквивалентности.

---

* Коллекционеры почтовых марок.

Установим взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$: образуем пары вида $(n, 2n)$ и $(-n, 2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, а также пару $(0, 1)$ (на первое место в каждой паре ставится число из $\mathbb{Z}$, а на второе — из $\mathbb{N}$).

Есть и другой способ установить это соответствие, например, выписать все целые числа в таблицу, как показано на рисунке, и, обходя её по стрелочкам, присваивать каждому целому числу некоторый номер. Таким образом, мы *«пересчитаем»* все целые числа: каждому $z \in \mathbb{Z}$ сопоставляется некоторое натуральное число (номер) и для каждого номера есть такое целое число, которому этот номер приписывается. При этом явную формулу выписывать не обязательно.



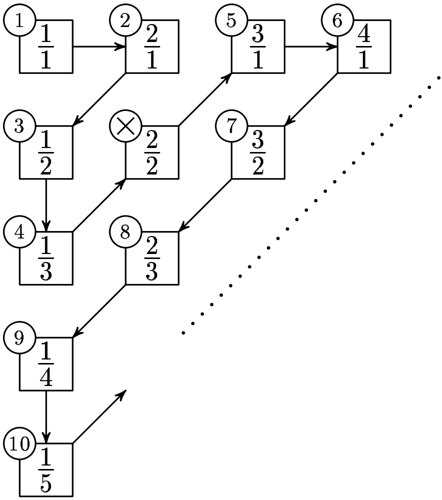
Таким образом, $\mathbb{Z}$ эквивалентно $\mathbb{N}$.

Всякое множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется *счётным*. Такое множество можно «пересчитать»: пронумеровать все его элементы натуральными числами.

На первый взгляд, рациональных чисел на прямой «намного больше» чем целых. Они расположены *всюду плотно*: в любом сколь угодно малом интервале их бесконечно много. Но оказывается, что множество $\mathbb{Q}$ также счётно. Докажем сначала счётность $\mathbb{Q}^+$ (множества всех положительных рациональных чисел).

Выпишем все элементы $\mathbb{Q}^+$ в такую таблицу: в первой строке — все числа со знаменателем 1 (т. е. целые), во второй — со знаменателем 2 и т. д. (см. рисунок на с. 11). Каждое положительное рациональное число обязательно встретится в этой таблице, и не однажды $\left(\text{например, число } 1 = \dfrac{1}{1} = \dfrac{2}{2} = \dfrac{3}{3} = \ldots \text{ встречается в каждой строке этой таблицы}\right)$.

А теперь мы пересчитаем эти числа: идя по стрелочкам, присваиваем каждому числу номер (или пропускаем это число, если оно уже встречалось нам раньше в другой записи). Поскольку мы двигаемся по диагоналям, то мы обойдём всю таблицу (т. е. рано или поздно доберёмся до любого из чисел).



Итак, мы указали способ пронумеровать все числа из $\mathbb{Q}^+$, т. е. доказали, что $\mathbb{Q}^+$ счётно.

Заметим, что этот способ нумерации не сохраняет порядка: из двух рациональных чисел бóльшее может встретиться раньше, а может — и позже.

Как же быть с отрицательными рациональными числами и нулём? Так же как с космозоологами и филателистами в бесконечной гостинице. Пронумеруем $\mathbb{Q}^+$ не всеми натуральными числами, а только чётными (давая им номера не 1, 2, 3, ..., а 2, 4, 6, ...), нулю присвоим номер 1, а всем отрицательным рациональным числам присвоим (по такой же схеме, что и положительным) нечётные номера, начиная с 3.

Теперь все рациональные числа занумерованы натуральными, следовательно, $\mathbb{Q}$ счётно.

Возникает естественный вопрос:

Может быть, все бесконечные множества счётны?

Оказалось, что $\mathbb{R}$ — множество всех точек на числовой прямой — несчётно. Этот результат, полученный Кантором в прошлом веке, произвёл очень сильное впечатление на математиков.

Докажем этот факт так же, как это сделал Кантор: с помощью *диагонального процесса*.

Как мы знаем, каждое действительное число x можно записать в виде десятичной дроби:

$$x = A\,,\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n\,\ldots,$$

где A — целое число, не обязательно положительное, а α_1, α_2, …, α_n, … — цифры (от 0 до 9). Это представление неоднозначно: например,

$$\frac{1}{2} = 0{,}50000\ldots = 0{,}49999\ldots$$

(в одном варианте записи, начиная со второй цифры после запятой, идут одни нули, а в другом — одни девятки). Чтобы запись была однозначной, мы в таких случаях всегда будем выбирать первый вариант. Тогда каждому числу соответствует ровно одна его десятичная запись.

Предположим теперь, что нам удалось пересчитать все действительные числа. Тогда их можно расположить по порядку:

$$\begin{aligned}
x_1 &= A\,,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\ldots\\
x_2 &= B\,,\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\ldots\\
x_3 &= C\,,\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3\,\gamma_4\ldots\\
x_4 &= D\,,\delta_1\,\delta_2\,\delta_3\,\delta_4\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Чтобы прийти к противоречию, построим такое число y, которое *не сосчитано*, т. е. не содержится в этой таблице.

Для любой цифры a определим цифру $\overline{a}$ следующим образом:

$$\overline{a} = \begin{cases} 1, & \text{если } a \neq 1,\\ 2, & \text{если } a = 1.\end{cases}$$

Положим $y = 0,\overline{\alpha_1}\,\overline{\beta_2}\,\overline{\gamma_3}\,\overline{\delta_4}\ \ldots$ (у этого числа k-я цифра после запятой равна 1 или 2, в зависимости от того, какая цифра стоит на k-м месте после запятой в десятичной записи числа x_k).

Например, если

$$\begin{aligned} x_1 &= 2{,}1345\ldots \\ x_2 &= -3{,}4215\ldots \\ x_3 &= 10{,}5146\ldots \\ x_4 &= -13{,}6781\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

то $y = 0{,}\overline{1}\,\overline{2}\,\overline{4}\,\overline{1}\ldots = 0{,}2112\ldots$

Итак, с помощью диагонального процесса мы получили действительное число y, которое не совпадает ни с одним из чисел таблицы, ведь y отличается от каждого x_k по крайней мере k-й цифрой десятичного разложения, а разным записям, как мы знаем, соответствуют различные числа.

Предположив, что можно пересчитать все действительные числа, мы пришли к противоречию, указав число, которое не сосчитано. Следовательно, множество $\mathbb{R}$ несчётно.

Множества $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ не являются эквивалентными, и $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, поэтому всех действительных чисел в некотором смысле «больше» чем натуральных. Говорят, что мощность множества $\mathbb{R}$ (*мощность континуума*) больше чем мощность $\mathbb{N}$.

Континуум-гипотеза

Теперь мы располагаем всеми необходимыми сведениями для того, чтобы сформулировать знаменитую первую проблему Гильберта:

> **Континуум-гипотеза.** *С точностью до эквивалентности, существуют только два типа бесконечных числовых множеств: счётное множество и континуум.*

Иначе говоря, нужно установить, существует ли множество *промежуточной мощности*, т. е. такое множество $\mathcal{T}$, $\mathbb{N} \subset \mathcal{T} \subset \mathbb{R}$, которое не эквивалентно ни $\mathbb{N}$, ни $\mathbb{R}$.

Этой проблемой занимались очень многие математики. Сам Георг Кантор неоднократно заявлял, что доказал эту гипотезу, но всякий раз находил у себя ошибку.

О доказательствах в математике

Математика — точная наука, требующая строгости рассуждений. Но что означает строго доказать какое-либо утверждение? Это означает вывести его из *аксиом* — исходных положений, принимаемых без доказательства.

Конечно, в выборе аксиом, которые закладываются в основу теории, есть некоторый произвол. Но обычно аксиомы возникают естественным путём, из познания действительности. В теории множеств, частью которой являются конструкции, описанные в предыдущих разделах, тоже имеется общепризнанная *система аксиом Цермело—Френкеля*.

Доказать континуум-гипотезу — значит, вывести её из этих аксиом. Опровергнуть её — значит, показать, что если её добавить к этой системе аксиом, то получится *противоречивый* набор утверждений.

Решение проблемы

> — Г-голубчики, — сказал Фёдор Симеонович озадаченно... — Это же проблема Бен Б-бецалеля. К-калиостро же доказал, что она н-не имеет р-решения.
>
> — Мы сами знаем, что она не имеет решения, — сказал Хунта, немедленно ощетиниваясь. — Мы хотим знать, как её решать.
>
> — К-как-то ты странно рассуждаешь, К-кристо... К-как же искать решение, к-когда его нет? Б-бессмыслица какая-то...
>
> — Извини, Теодор, но это ты очень странно рассуждаешь. Бессмыслица — искать решение, если оно и так есть. Речь идёт о том, как поступать с задачей, которая решения не имеет. Это глубоко принципиальный вопрос...
>
> *А. Стругацкий, Б. Стругацкий.*
> Понедельник начинается в субботу

Оказалось, что первая проблема Гильберта имеет совершенно неожиданное решение.

В 1963 году американский математик Паул Коэн доказал, что континуум-гипотезу *нельзя ни доказать, ни опровергнуть*.

Это означает, что если взять стандартную систему аксиом Цермело—Френкеля (ZF) и добавить к ней континуум-гипотезу в качестве ещё одной аксиомы, то получится *непротиворечивая* система утверждений. Но если к ZF добавить *отрицание* континуум-гипотезы (т. е. противоположное утверждение), то вновь получится *непротиворечивая* система утверждений.

Таким образом, ни континуум-гипотезу, ни её отрицание *нельзя* вывести из стандартной системы аксиом.

Этот вывод произвёл очень сильный эффект и даже отразился в литературе (см. эпиграф).

Как же поступать с этой гипотезой? Обычно её просто присоединяют к системе аксиом Цермело—Френкеля. Но каждый раз, когда что-либо доказывают, опираясь на континуум-гипотезу, обязательно указывают, что она была использована при доказательстве.

Седьмая проблема Гильберта

Иррациональные числа

Вернёмся к подмножествам числовой прямой. Рассмотрим снова цепочку

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Мы уже доказали, что действительных чисел «больше» чем рациональных, потому что $\mathbb{Q}$ счётно, а $\mathbb{R}$ — несчётно. Значит, существуют *иррациональные* (не являющиеся рациональными) действительные числа. (На самом деле, иррациональных чисел «намного больше» чем рациональных, и если случайным образом бросить точку на числовую прямую, она почти наверняка попадёт в иррациональное число.)

Заметим, что мы доказали *теорему существования* иррациональных чисел, не предъявив ни одного иррационального числа.

Но совсем нетрудно привести и пример иррационального числа, например, это $\sqrt{2}$. Действительно, пусть это число рационально. Тогда его можно представить в виде несократимой дроби:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

где p и q — целые числа, не имеющие общих делителей (кроме 1). Возведя это равенство в квадрат, получим

$$2q^2 = p^2.$$

Значит, p^2 чётно, $p \cdot p$ делится на 2. Поэтому p делится на 2, а значит, p^2 делится на 4. (Если $p = 2p_1$, то $p^2 = 4p_1^2$.) Тогда

$$2q^2 = 4p_1^2,$$
$$q^2 = 2p_1^2.$$

Это означает, что q^2 делится на 2, поэтому и q делится на 2.

Мы получили, что и p, и q делятся на 2, и дробь $\dfrac{p}{q}$ можно сократить на 2. Но мы же предполагали, что эта дробь несократима! Полученное противоречие означает, что $\sqrt{2}$ не может быть рациональным числом.

Итак, $\sqrt{2}$ — число иррациональное.

Конечно, когда мы доказали иррациональность числа $\sqrt{2}$, мы тем самым ещё раз доказали теорему существования иррациональных чисел. Однако существуют и такие классы чисел, доказать существование которых намного проще, чем построить конкретный пример.

Алгебраические и трансцендентные числа

Число α называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

(т. е. корнем уравнения $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, где a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 — целые числа, $n \geqslant 1$, $a_n \neq 0$).

Множество алгебраических чисел обозначим буквой $\mathbb{A}$.

Легко видеть, что любое рациональное число является алгебраическим. Действительно, $\frac{p}{q}$ — корень уравнения $qx-p = 0$ с целыми коэффициентами $a_1 = q$ и $a_0 = -p$. Итак, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$.

Однако не все алгебраические числа рациональны: например, число $\sqrt{2}$ является корнем уравнения $x^2 - 2 = 0$, следовательно, $\sqrt{2}$ — алгебраическое число.

Долгое время оставался нерешённым важный для математики вопрос:

> *Существуют ли неалгебраические действительные числа?*

Только в 1844 году Лиувилль* впервые привел пример *трансцендентного* (т. е. неалгебраического) числа.

Построение этого числа и доказательство его трансцендентности очень сложны. Доказать *теорему существования* трансцендентных чисел можно значительно проще, используя соображения об эквивалентности и неэквивалентности числовых множеств.

А именно, докажем, что множество алгебраических чисел счётно. Тогда, поскольку множество всех действительных чисел несчётно, мы установим существование неалгебраических чисел.

Построим взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{A}$ и некоторым подмножеством $\mathbb{Q}$. Это будет означать, что $\mathbb{A}$ — конечно либо счётно. Но поскольку $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$, то $\mathbb{A}$ бесконечно, и значит, счётно.

Пусть α — некоторое алгебраическое число. Рассмотрим все многочлены с целыми коэффициентами, корнем которых является α, и выберем среди них многочлен P *минимальной степени* (т. е. α не будет корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами меньшей степени).

Например, для рационального числа такой многочлен имеет степень 1, а для числа $\sqrt{2}$ — степень 2.

Разделим все коэффициенты многочлена P на их наибольший общий делитель. Получим многочлен, коэффициенты

---

* Жозеф Лиувилль (1809–1882) — французский математик.

которого *взаимно просты в совокупности* (их наибольший общий делитель равен 1). Наконец, если старший коэффициент a_n отрицателен, умножим все коэффициенты многочлена на -1.

Полученный многочлен (т. е. многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число α, имеющий минимально возможную степень, взаимно простые коэффициенты и положительный старший коэффициент) называется *минимальным многочленом* числа α.

Можно доказать, что такой многочлен определяется однозначно: каждое алгебраическое число имеет ровно один минимальный многочлен.

Количество действительных корней многочлена не больше чем его степень. Значит, можно пронумеровать (например, по возрастанию) все корни такого многочлена.

Теперь всякое алгебраическое число α полностью определяется своим минимальным многочленом (т. е. набором его коэффициентов) и номером, который отличает α от других корней этого многочлена:

$$\alpha \mapsto (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, k).$$

Итак, каждому алгебраическому числу α мы поставили в соответствие конечный набор целых чисел, причём по этому набору α восстанавливается однозначно (т. е. разным числам соответствуют разные наборы).

Пронумеруем в порядке возрастания все простые числа (нетрудно показать, что их бесконечно много). Получим бесконечную последовательность $\{p_k\}$: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, ... Теперь набору целых чисел $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, k)$ можно поставить в соответствие произведение

$$p_1^{a_0} p_2^{a_1} \ldots p_n^{a_{n-1}} p_{n+1}^{a_n} p_{n+2}^{k}$$

(это число положительное и рациональное, но не всегда натуральное, ведь среди чисел a_0, a_1, ..., a_{n-1}, могут быть отрицательные). Заметим, что это число есть несократимая дробь, поскольку простые множители, входящие в разложения числителя и знаменателя, различны. Заметим также, что две несократимые дроби с положительными числителями и знаменателями равны тогда и только тогда, когда и их числители равны, и их знаменатели равны.

Рассмотрим теперь *сквозное* отображение:

$$\alpha \mapsto (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, k) \mapsto q_\alpha = p_1^{a_0} p_2^{a_1} \ldots p_n^{a_{n-1}} p_{n+1}^{a_n} p_{n+2}^{k}.$$

Поскольку разным алгебраическим числам мы поставили в соответствие разные наборы целых чисел, а разным наборам — разные рациональные числа, то мы, таким образом, установили взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathbb{A}$ и некоторым подмножеством $\mathbb{Q}$. Поэтому множество алгебраических чисел счётно.

Так как множество действительных чисел несчётно, то мы доказали существование неалгебраических чисел.

Однако теорема существования не указывает как определить, является ли данное число алгебраическим. А этот вопрос иногда является весьма важным для математики.

Квадратура круга

В 1882 году немецкий математик Линдеман* доказал, что число π трансцендентно. Из этого сразу следует невозможность решения одной из знаменитых задач древности.

Этих задач было три: об удвоении куба, о трисекции угла и о квадратуре круга. Их пытались решить ещё математики Древней Греции.

Задача о квадратуре круга. *На плоскости имеется круг. При помощи циркуля и линейки построить квадрат, площадь которого равна площади этого круга.*

Пусть круг имеет радиус 1, т. е. задан отрезок длины 1. Площадь этого круга равна π, поэтому построение искомого квадрата сводится к построению отрезка длины $\sqrt{\pi}$.

* Карл Луис Фердинанд Линдеман (1852–1939).

Далее воспользуемся известным геометрическим фактом: если задан отрезок длины 1, то с помощью циркуля и линейки можно построить только такие отрезки, длины которых суть числа очень специального вида. А именно, эти числа могут быть получены из рациональных чисел с помощью операций извлечения квадратного корня, а также сложения и умножения.

Но все такие числа (это нетрудно доказать) являются алгебраическими, т. е. для каждого из них можно построить многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого оно является.

Поскольку число π трансцендентно, то и $\sqrt{\pi}$ трансцендентно. Поэтому построить отрезок длины $\sqrt{\pi}$ при помощи циркуля и линейки невозможно.

Вы видите, как решение задачи теории чисел — о трансцендентности числа — влечёт решение геометрической задачи. Это ещё один яркий пример тесной связи между различными областями математики.

Формулировка проблемы

Седьмая проблема Гильберта формулируется следующим образом:

Пусть a — положительное алгебраическое число, не равное 1, b — иррациональное алгебраическое число. Доказать, что a^b есть число трансцендентное.

В 1934 году советский математик Гельфонд* и чуть позже немецкий математик Шнайдер** доказали справедливость этого утверждения, и таким образом, эта проблема была решена.

* Александр Осипович Гельфонд (1906–1968).

** Теодор Шнайдер (р. 1911).

Одна теорема существования

Когда-то, на заре своего существования, журнал «Квант» предложил своим читателям следующую задачу:

Пусть a и b — иррациональные числа. Может ли число a^b быть рациональным?

Конечно, с использованием седьмой проблемы Гильберта эту задачу решить нетрудно. В самом деле, число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — трансцендентное (поскольку $\sqrt{2}$ — алгебраическое иррациональное число). Но все рациональные числа являются алгебраическими, поэтому $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — иррациональное. С другой стороны,

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2.$$

Итак, мы просто предъявили такие числа: $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$. Однако эта задача может быть решена и без каких-либо ссылок на результат Гельфонда. Среди читателей нашёлся школьник, который не знал, что такое седьмая проблема Гильберта, но прислал поразительно красивое решение. Он рассуждал так: «Рассмотрим число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Если это число рациональное, то задача решена, такие a и b найдены. Если же оно иррациональное, то возьмём $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$, и $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$».

Итак, этот школьник предъявил две пары чисел a и b, таких что одна из этих пар удовлетворяет поставленному условию, но ему неизвестно, какая именно. Но ведь предъявить такую пару и не требовалось! Таким образом, это элегантное решение в некотором смысле представляет собой теорему существования.

Десятая проблема Гильберта: диофантовы уравнения

Эта проблема также связана с теорией чисел. Ещё древнегреческий математик Диофант пытался ответить на следующий вопрос:

> *Дано уравнение с целыми коффициентами. Имеет ли оно целые решения?*

Приведём в качестве примера уравнение $x^2 + y^2 = z^2$, обладающее замечательным свойством: если тройка натуральных чисел (x_0, y_0, z_0) ему удовлетворяет (как, например, тройка $(3, 4, 5)$), то по теореме, обратной к теореме Пифагора, из отрезков длины x_0, y_0 и z_0 можно сложить прямоугольный треугольник и, таким образом, построить прямой угол. Снова геометрическая задача решается методами теории чисел! Нетрудно описать *все* натуральные решения этого уравнения. Они имеют следующий вид:

$$x = (m^2 - n^2)l, \quad y = 2mnl, \quad z = (m^2 + n^2)l,$$

плюс решения, получающиеся перестановкой x и y (m, n и l — произвольные натуральные числа, $n < m$).

Естественным обобщением предыдущего уравнения является известное уравнение $x^n + y^n = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Великая теорема Ферма утверждает, что это уравнение при $n > 2$ не имеет решений в целых числах.

Эта задача, которая, казалось бы, не очень сильно отличается от предыдущей, оказалась чудовищно трудной. На протяжении нескольких веков её пытались решить математики самого высокого класса. Для её решения пришлось построить исключительно сложный математический аппарат. И только несколько лет назад английский математик Эндрю Уайлс окончательно решил эту проблему и доказал Великую теорему Ферма.

Однако уже уравнение $x^n + y^n = 2z^n$, которое, на первый взгляд, сложнее теоремы Ферма, имеет при любом n целочисленные решения вида $x = y = z = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Возникает естественный вопрос:

Нет ли какого-нибудь способа по виду уравнения, по его коэффициентам определять, имеет ли это уравнение решение в целых числах?

Иными словами, хотелось бы иметь общий алгоритм, с помощью которого можно было бы по любому уравнению выяснить, имеет ли оно целочисленное решение.

Это и есть десятая проблема Гильберта.

В 1970 году советский математик Ю. В. Матиясевич доказал, что такого алгоритма, к сожалению, не существует.

Заключение

До сих пор не решены две знаменитые проблемы Гильберта: одна — о нулях дзета-функции Римана (8-я проблема), другая — о предельных циклах (16-я проблема). Видимо, они уже не будут решены в этом столетии.

Мы стоим на пороге нового тысячелетия. Как известно, 2000-й год объявлен ЮНЕСКО годом математики. Но найдётся ли на рубеже веков математик, который сможет, подобно Гильберту, сформулировать такие задачи, которые определят развитие математики будущего столетия?

Оглавление