МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Московский государственный институт электроники и математики
(Технический университет)**

В.Р. Матвеевский

НАДЕЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Москва 2002

УДК 681.51 – 192 (075.8)
ББК 32.965 – 6Ф6.5

Рецензенты:

Матвеевский В.Р. Надежность технических систем. Учебное пособие – Московский государственный институт электроники и математики. М., 2002 г. – 113 с.

ISBN 5–230–22198–4

Изложены основные понятия, определения и критерии, используемые в теории надежности. Рассмотрены общие методы расчета надежности технических систем различного назначения как нерезервированных, так и резервированных.

Для студентов IV курса, обучающихся по специальности 2101 – «Управление и информатика в технических системах». Может быть полезно студентам старших курсов других специальностей, интересующихся вопросами надежности технических систем.

ISBN 5–230–22198–4

УДК 681.51 – 192 (075.8)
ББК 32.965 – 6Ф6.5

Введение

Характерной особенностью современного развития техники является широкое внедрение методов и средств автоматики и телемеханики, вызванное переходом на автоматизированное и автоматическое управление различными производственными и технологическими процессами, создание гибких производственных модулей, систем, комплексов и тому подобное. В условиях современной экономики автоматизация является одним из основных направлений технического прогресса. И, конечно, улучшение эффективности и качества проектируемых АСУ, САУ, ГПМ, ГПС и т.д. невозможно без повышения надежности технических средств управления (ТСУ). Таким образом, выше изложенное является первой причиной возрастания фактора надежности в современных условиях развития техники и, в частности, проектировании технических систем (ТС) различного назначения.

Второй причиной, требующей повышения надежности, является возрастание сложности ТС, аппаратуры их обслуживания, жесткости условий их эксплуатации и ответственности задач, которые на них возлагаются.

Недостаточная надежность ТС приводит к увеличению доли эксплуатационных затрат по сравнению с общими затратами на проектирование, производство и применение этих систем. При этом стоимость эксплуатации ТС может во много раз превзойти стоимость их разработки и изготовления. Кроме того, отказы ТС приводят различного рода последствиям: потерям информации, простоям сопряженных с ТС других устройств и систем, к авариям и т.д. Таким образом, третьей причиной повышения роли надежности в современных условиях является экономический фактор.

И, наконец, последнее. В конечном счете, надежность ТС определяется надежностью комплектующих элементов. Поэтому знание основных вопросов надежности элементной базы является в настоящее время необходимым условием успешной работы в области информатики и управления и особенно это относится к будущим специалистам разработчикам аппаратуры автоматики и телемеханики, разработчикам ТС и ТСУ.

Глава I. Количественные характеристики технических систем

1.1.Основные понятия и определения теории надежности

Теория надежности опирается на совокупность различных понятий, определений, терминов и показателей, которые строго регламентируются в государственных стандартах (ГОСТ). Все термины и определения даются применительно к техническим объектам целевого назначения, рассматриваемым в периоды проектирования, производства, эксплуатации и испытании на надежность.

Введем некоторые термины и понятия, используемые в теории надежности.

Система – это технический объект, предназначенный для выполнения определенных функций.

Отдельные части системы (конструктивно обособленные, как правило) называются *элементами*.

Однако необходимо заметить, что один и тот же объект в зависимости от той задачи, которую хочет решить конструктор (исследователь, проектировщик, разработчик), может рассматриваться как система или как элемент. Например, радиостанция обычно рассматривается как система. Однако она может стать элементом более крупного объекта – радиорелейной линии, рассматриваемой, как система. Следовательно, можно дать еще одно более полное определение элемента.

Элемент – это объект, представляющий собой простейшую часть системы, отдельные части которой не представляют самостоятельного интереса в рамках конкретного рассмотрения.

При проектировании – *система (устройство) должна удовлетворять всем техническим требованиям*. Эти требования можно разделить на:

- *основные*, обеспечивающие выполнение заданных функций;
- *вспомогательные*, связанные, с удобством эксплуатации, внешним видом и т.д.

В соответствии с этим все элементы системы делят на основные и вспомогательные. Вспомогательные элементы не связаны непосредственно с выполнением заданных функций системы и не влияют на возникновение отказа.

При построении логической структуры технической системы (ТС), предназначенной для исследования надежности, для упрощения расчетов имеет смысл принимать во внимание только основные элементы.

С точки зрения теории надежности любой технической объект (система, устройство, элемент) можно охарактеризовать его свойствами, техническим состоянием и приспособленностью к восстановлению после потери работоспособности (табл. 1.1). При этом важнейшим комплексным свойством ТС является его надежность.

Введем *основные определения*, используемые для расчета надежности ТС.

Надежностью называется свойство ТС выполнять заданные функции, сохраняя во времени значение устанавливаемых эксплуатационных показателей в заданных пределах, соответствующих заданным режимам и условиям использования, технического обслуживания, хранения и транспортировки.

<u>*Надежность*</u> включает в себя следующие свойства: *безотказность, долговечность, сохраняемость и ремонтопригодность*.

Безотказность – свойство ТС непрерывно сохранять работоспособность в течение некоторого времени или некоторой наработки.

Свойство объекта сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонтов называется *долговечностью*.

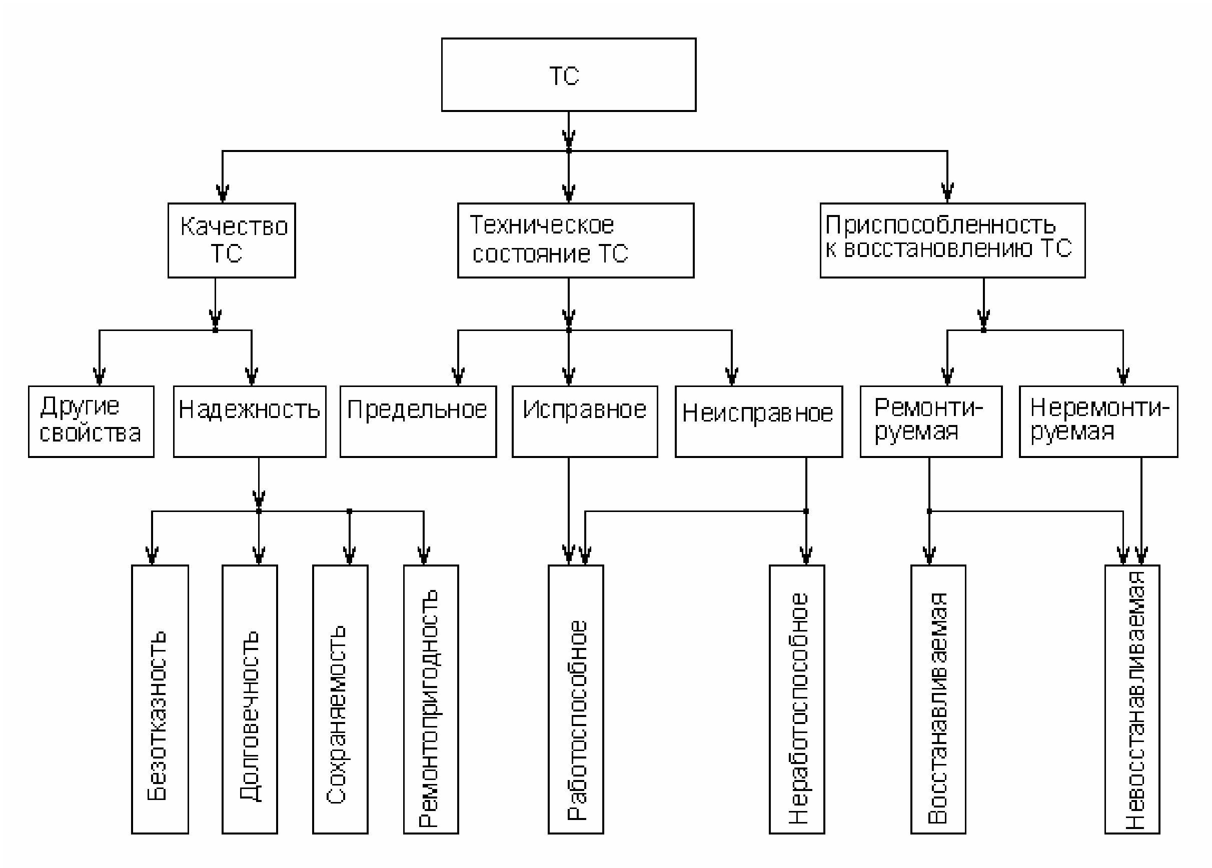


Таблица 1.1. Основные характеристики ТС.

Сохраняемость – это свойство ТС непрерывно сохранять исправное и работоспособное состояние в течение и после хранения и транспортирования. Сохраняемость характеризуется способностью объекта противостоять отрицательному влиянию условий хранения и транспортирования на его безотказность и долговечность. Продолжительное хранение и транспортирование объектов могут снизить их надежность при последующей работе по сравнению с объектами, которые не подвергаются хранению и транспортировке.

Ремонтоспособностью называется свойство объекта, заключающееся в приспособленности к предупреждению и обнаружению причин возникновения отказов, повреждений и устранению их последствий путем проведения ремонта и технического обслуживания. Данное свойство является очень важным, т.к. оно характеризует степень стандартизации и унификации элементов ТС, удобство их размещения с точки зрения доступности для контроля и ремонта, приспособляемость к регулировочным операциям и т.д.

Техническое состояние ТС в данный момент времени характеризуется исправностью или неисправностью, работоспособностью или неработоспособностью, а также предельным состоянием.

Исправным состоянием (исправностью) ТС называется такое ее состояние, при котором она соответствует всем требованиям, установленным нормативно-технической документацией (НТД). Если ТС не соответствует хотя бы одному из этих требований, то она находится в *неисправном состоянии*.

Если ТС находится в состоянии, при котором она способна выполнить заданные функции, сохраняя значения заданных параметров в пределах, установленных нормативно-технической документацией (НТД), то она находится в *работоспособном состоянии*.

Неработоспособным состоянием ТС называется состояние, при котором значение хотя бы одного заданного параметра, характеризующего их лакокрасочное покрытие, способность выполнять заданные функции, не соответствует установленным требованием НТД.

Понятие исправности шире понятия работоспособности. Неисправная ТС может быть работоспособной и неработоспособной – все зависит от того, какому требованию НТД не удовлетворяет данная ТС. Так, например, если погнут кожух или шасси, нарушено их лакокрасочное покрытие, повреждена изоляция проводников, однако параметры аппаратуры находятся в пределах нормы, то ТС считается неисправной, но в то же время работоспособной. Исправная ТС всегда работоспособна.

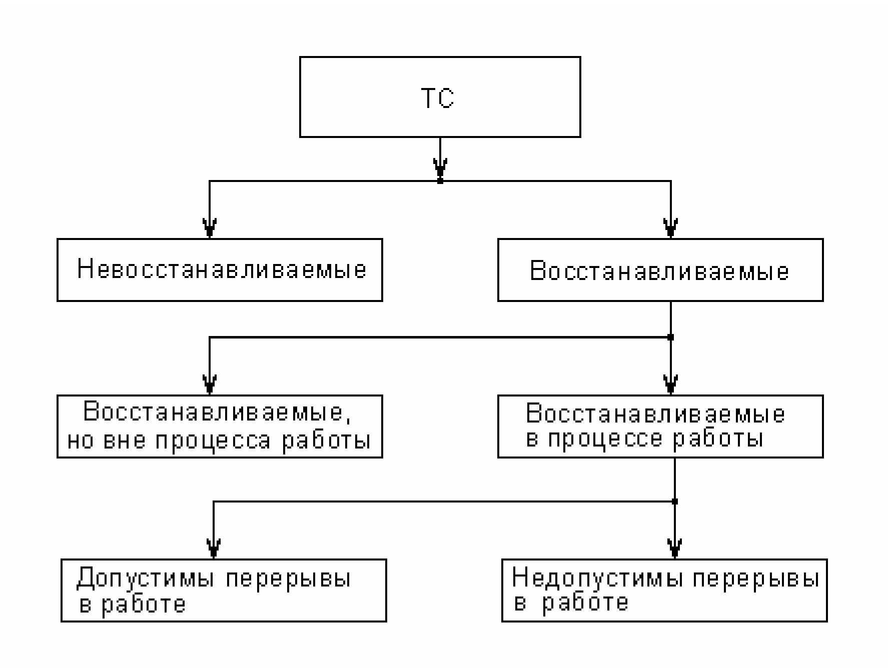


Таблица 1.2. Классификация объектов ТС.

При длительной эксплуатации ТС может достигнуть предельного состояния, при котором ее дальнейшая эксплуатация должна быть прекращена из-за неустранимого нарушения требований безопасности, при уходе заданных параметров за установленные пределы, или неустранимого снижения эффективности эксплуатации ниже допустимой, или необходимости проведения среднего или капитального ремонта. Исходя из возможности дальнейшего использования после отказа и приспособленности к восстановлению, все ТС можно классифицировать следующим образом (табл. 1.2.).

Восстанавливаемой ТС называется такая ТС, работоспособность которой в случае возникновения отказа подлежит восстановлению в рассматриваемой ситуации, если же в рассматриваемой ситуации восстановление работоспособности данной ТС при ее отказе по каким либо причинам признается нецелесообразным или неосуществимым, то система называется *невосстанавливаемой*.

Ремонтируемой ТС называется система, неисправность или работоспособность которой в случае возникновения отказа или повреждения подлежат восстановлению. В противном случае, объект называется неремонтируемым (простейшим примером неремонтируемого объекта служат электролампочки).

Неремонтируемое устройство всегда является и невосстанавливаемым (например, резистор, конденсатор, и т.п.). В то же время, ремонтируемое устройство может быть как восстанавливаемым, так и невосстанавливаемым – все зависит от существующей системы технического обслуживания и ремонта, конкретной ситуации в момент отказа. Например, в условии эксплуатации телевизоров, отказавший кинескоп является изделием не восстанавливаемым; но на ремонтном заводе – уже восстанавливаемым; отказавший силовой трансформатор может оказаться в руках радиолюбителя восстанавливаемым элементом, если отсутствует запасной трансформатор.

Общим понятием является понятие ремонтопригодности. *Ремонтопригодность* – свойство объекта, заключающееся в приспособленности к выполнению его ремонта и техобслуживания.

На практике часто бывают такие ситуации, в которых требуется, чтобы устройство, находясь в режиме ожидания, и, потом, начав работать в произвольный момент времени, проработало бы безотказно в течение требуемого промежутка времени. Состояние работоспособности устройства в произвольно выбранный момент времени называется *готовностью*. Если при этом работоспособность устройства будет сохраняться в течение заданного интервала времени, то тогда обеспечивается так называемая *оперативная готовность устройства*.

1.2. Повреждения и отказы. Классификация

Другими важными понятиями в теории надежности и практике эксплуатации ТС являются повреждения и отказы.

Повреждением называется событие, заключающееся в нарушении исправности ТС или ее составных частей из-за влияния внешних условий, превышающих уровни, установленные НТД.

Отказ – это случайное событие, заключающееся в нарушении работоспособности ТС под влиянием ряда случайных факторов.

Повреждение может быть *существенным* и явиться причиной отказа и *несущественным*, при котором работоспособность ТС сохраняется.

Применительно к отказу и повреждению рассматривают критерий, причину, признаки проявления, характер и последствия.

Работоспособное состояние ТС определяются множеством заданных параметров и допусками на них – допустимыми пределами их изменения.

Критерием отказа являются признаки выхода хотя бы одного заданного параметра за установленный допуск. Критерии отказа должны указываться в НТД на объект.

Причинами отказа могут быть просчеты, допущенные при конструировании, дефекты производства, нарушения правил и норм эксплуатации, повреждения, а также естественные процессы изнашивания и старения.

Признаки отказа или повреждения проявляют непосредственные или косвенные воздействия на органы чувств наблюдателя (оператора) явлений, характерных для неработоспособного состояния объекта, или процессов с ними связанных.

Характер отказа или повреждения определяют конкретные изменения, происшедшие в объекте.

К *последствиям отказа* или повреждения относятся явления и события, возникшие после отказа или повреждения и в непосредственной причинной связи с ним.

Отказы объектов ТС могут быть разных видов и *классифицируются по различным признакам* (табл. 1.3.).

Таблица 1.3. Классификация отказов ТС.

Признаки отказа	Вид отказа	Характеристика отказа
1	2	3
Характер изменения параметра до момента возникновения отказа	Внезапный	Скачкообразное изменение значений одного или нескольких параметров ТС
	Постепенный	Постепенное изменение одного или нескольких параметров за счет медленного, постепенного ухудшения качества ТС. (Например, износ поршневых колец в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания – постепенный отказ)
Связь с отказами других элементов (узлов, устройств)	Независимый (первичный)	Отказ не обусловлен повреждениями или отклонениями других элементов (узлов)
	Зависимый (вторичный)	Отказ обусловлен повреждениями или отказами других элементов (узлов, устройств). (Например, из-за пробоя конденсатора может сгореть другой элемент устройства)
Возможность использования элемента после отказа	Полный	Полная потеря работоспособности, исключающая использование ТС по назначению
	Частичный	Дальнейшее использование системы возможно, но с меньшей эффективностью

Таблица 1.3. (*Продолжение*) Классификация отказов ТС.

1	2	3
Характер проявления отказа	Сбой	Самоустраняющийся отказ, приводящий к кратковременному нарушению работоспособности
	Перемежающийся	Многократно возникающий сбой одного и того же характера (то возникающий, то исчезающий), связанный с обратными случайными изменениями режимов работы и параметров устройства. (Например, снижение чувствительности прибора может произойти из-за случайного резкого уменьшения напряжения питания)
	Устойчивый (окончательный)	Отказ, устраняемый только в результате проведения восстановительных работ, является следствием необратимых процессов в деталях и материалах. (Например, выход из строя устройства из-за обрыва нити накала электронной лампы)
Причина возникновения отказа	Конструкционный	Возникает вследствие нарушения установленных правил и норм конструирования
	Производственный	Возникает из-за нарушения или несовершенства технологического процесса изготовления или ремонта ТС
	Эксплуатационный	Возникает вследствие нарушения установленных правил и условий эксплуатации ТС
Время возникновения отказа	Период приработки	Обусловлен скрытыми производственными дефектами, не выявленными в процессе контроля
	Период норм эксплуатации	Обусловлен несовершенством конструкции, скрытыми производственными дефектами и эксплуатационными нагрузками
	Период старения	Обусловлен процессами старения и износа материалов и элементов ТС
Возможности обнаружения отказа	Очевидные (явные)	
	Скрытые (неявные)	

На основании изложенного следует подчеркнуть, что понятие надежности является фундаментальным понятием, охватывающим все стороны технической эксплуатации элементов, узлов, блоков и систем. При этом надежность является частью более широкого понятия – эффективности.

Эффективность ТС – это свойство системы выполнять заданные функции с требуемым качеством. Причем на эффективность функционирования ТС наряду с надежностью влияют и другие характеристики, такие как точность, быстродействие, помехоустойчивость и т.д.

Таким образом, основной задачей при проектировании ТС различного назначения можно назвать повышение эффективности и качества, а, следовательно, улучшение таких характеристик ТС, как надежность, прочность, быстродействие и т.д.

Одним из методов повышения надежности, широко используемым при проектировании ТС, является *резервирование* – метод повышения надежности за счет введения избыточности. Под *избыточностью* понимают дополнительные средства и возможности сверх минимально необходимых для выполнения ТС заданных функций. Вопросы, связанные с резервированием, будут подробно изложены в шестой главе настоящего пособия.

1.3. Этапы анализа и показатели надежности ТС

Существуют *два основных этапа анализа надежности ТС*.

Первый этап называется *априорным анализом надежности* и обычно проводится на стадии проектирования ТС. Этот анализ – априори предполагает известными количественные характеристики надежности всех используемых элементов системы. Для элементов (особенно новых), у которых еще нет достаточных количественных характеристик надежности, их задают по аналогии с характеристиками применяющихся аналогичных элементов.

Таким образом, априорный анализ базируется на априорных (вероятностных) характеристиках надежности, которые лишь приблизительно отражают действительные процессы в аппаратуре ТС.

Тем не менее, этот анализ позволяет на стадии проектирования выявить слабые с точки зрения надежности места в конструкции, принять необходимые меры к их устранению, а так же отвернуть неудовлетворительные варианты построения ТС. Поэтому априорный анализ (или расчет) надежности имеет существенное значение в практике проектирования ТС и составляет неотъемлемую часть технических проектов.

Второй этап называется *апостериорным анализом надежности*. Его проводят на основании статистической обработки экспериментальных данных о работоспособности и восстанавливаемости ТС, полученных в процессе их отработки, испытаний и эксплуатации. Целью таких испытаний является получение оценок показателей надежности ТС и ее элементов.

Эти оценки получают методами математической статистики по результатам наблюдений (ограниченного объема). При этом чаще всего предполагают, что результаты наблюдений являются случайными величинами, которые подчиняются определенному закону распределения с неизвестными параметрами.

В настоящее время для некоторых видов аппаратуры существует обязательный этап испытаний на надежность, включающий оценки ряда показателей надежности.

В любом случае под анализом надежности ТС будем понимать определение (вычисление) конкретных значений показателей надежности (априорный анализ), либо статистических оценок показателей надежности (апостериорный анализ).

Показателями надежности называются количественные характеристики одного или нескольких свойств, определяющих надежность элемента (системы).

Различают *два основных вида показателей надежности (ПН)*.

Единичный ПН – это количественная характеристика одного из рассмотренных ранее свойств надежности.

Комплексный ПН – это количественная характеристика, определяющая два или более свойств надежности одновременно.

Выбор ПН во многом зависит от назначения ТС и характера ее функционирования. При выборе ПН следует иметь в виду, что эти показатели должны достаточно полно описывать надежностные свойства системы, быть удобными для аналитического расчета и экспериментальной проверки по результатам испытаний, должны иметь разумный физический смысл и, наконец, допускать возможность перехода к показателям качества и эффективности.

Количественная оценка надежности элементов ТС и ТС в целом проводится обычно при помощи единичных ПН безотказности, восстанавливаемости и долговечности, а также комплексных ПН, определяющих свойства безотказности и восстанавливаемости.

1.4. Априорный и апостериорный анализ надежности ТС

1.4.1. Единичные ПН, определяющие свойство безотказности

Как уже отмечалось, отказ элемента (системы) можно считать случайным событием, происходящим под влиянием многих случайных факторов. Соответственно количественные показатели случайных событий строятся на основе вероятностной меры, которая имеет смысл тогда, когда имеется достаточно большая совокупность исследуемых событий. Поэтому на практике количественные характеристики надежности элементов определяют статистическим путем на основе испытания в определенных условиях достаточно большой партии однотипных элементов (систем). Следовательно, теория вероятностей и математическая статистика являются основным аппаратом, который используется при исследовании надежности ТС, а сами характеристики надежности должны выбираться из числа показателей, принятых в теории вероятностей. При этом следует помнить, что полной характеристикой любой случайной величины является ее закон распределения, т.е. соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими этим значениям вероятностями.

В качестве показателей безотказности невосстанавливаемых элементов применяют следующие количественные характеристики: *вероятность отказа*, *вероятность безотказной работы*, *интенсивность отказов*, *средняя наработка до отказа (до первого отказа)*.

Наработка до первого отказа (ξ – *кси*) – это случайная величина, представляющая собой интервал времени от момента включения устройства до первого отказа.

1. Вероятность безотказной работы

Основной количественной характеристикой безотказности принято считать вероятность безотказной работы на заданном интервале времени, т.е. вероятность того, что наработка до первого отказа ξ превышает величину t. Таким образом, вероятность безотказной работы показывает с какой вероятностью можно утверждать, что на интервале времени t отказ не возникнет.

Если принять момент первого включения за начало отсчета, то вероятность безотказной работы запишется в виде функции надежности:

$$p(t) = P\{\xi > t\}, \quad t \geq 0. \tag{1.1}$$

Полагая, что в момент включения устройство работоспособно, т.е. $p(0)=1$, функция $p(t)$ монотонно убывает от 1 до 0 (рис. 1.1.). При этом совершенно очевидно, что $p(\infty)=0$, т.е. любая ТС при $t \to +\infty$ со временем откажет.

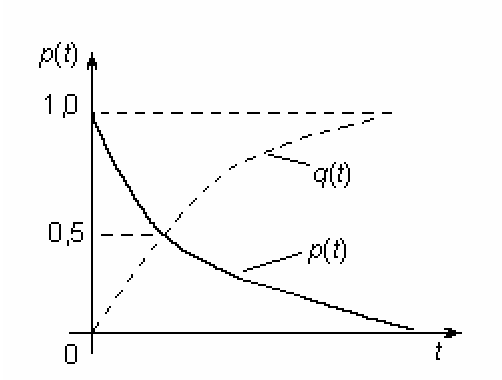


Рис. 1.1. Вероятность безотказной работы и вероятность отказа.

Вероятность $p(t)$ безотказной работы (БР) – это вероятность того, что за время t отказа не произойдет.

<u>2. Вероятность $q(t)$ отказа элемента</u> есть вероятность того, что отказ произойдет через время, не превышающее данной величины t ($\xi \leq t$). Другими словами – это вероятность события противоположного тому, когда $\xi > t$, и может быть записано в виде функции ненадежности:

$$q(t) = P\{\xi \leq t\} = 1 - p(t), \quad t \geq 0. \tag{1.2}$$

<u>3. Плотность распределения наработки до отказа</u>

Функция ненадежности представляет собой интегральную функцию распределения случайной величины ξ.

Если функция $q(t)$ дифференцируема, то безотказность можно характеризовать также плотностью распределения времени безотказной работы или частотой отказа как производной от функции ненадежности:

$$\omega(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{dp(t)}{dt} \tag{1.3}$$

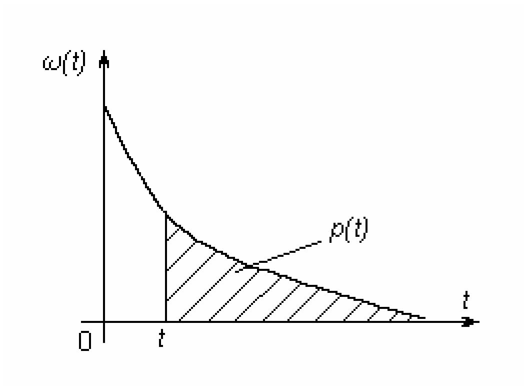


Рис. 1.2. Плотность распределения наработки до отказа.

Из (1.3) следует, что вероятность БР на интервале $(0,t)$ равна интегралу функции плотности распределения от момента времени t до ∞ (заштрихованной площади под кривой):

$$p(t)=\int_t^{\infty}\omega(t)dt$$

или с учетом (1.2) и (1.3):

$$p(t)=1-\int_0^{t}\omega(t)dt. \qquad (1.4)$$

Функции $q(t)$ и $\omega(t)$ обычно тождественно равны нулю при $t<0$. Значение $q(t)>0$ при $t<0$ иногда вводят для описания отказов, возникающих при хранении.

Распределение вероятностей БР от момента включения до момента первого отказа принято называть математической моделью безотказной работы (*безотказностью устройства*).

4. Среднее значение и дисперсия длительности безотказной работы

Функция распределения (интегральная или плотность) полностью характеризует случайный процесс, но для решения многих задач достаточно знать несколько моментов случайной величины.

Как известно, моментом k-того порядка называют интеграл вида:

$$m_k=\int_0^{\infty}t^k\omega(t)dt, \qquad (1.5)$$

если только эта величина конечна.

Следует заметить, что если существует момент k-того порядка, то и существуют все моменты порядка $r<k$.

Момент первого порядка или математическое ожидание наработки элемента (системы) до первого отказа $m_1\{\xi\}$ обозначают символом T_{cp} и называют *средней наработкой на отказ или средним временем безотказной работы*:

$$T_{cp}=\int_0^{\infty}t\omega(t)dt=-\int_0^{\infty}tdp(t). \qquad (1.6)$$

Интегрируя по частям выражения (1.6) с учетом (1.3), получим:

$$T_{cp}=-t\cdot p(t)\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}p(t)dt. \qquad (1.7)$$

При этом считаем, что:

1) $p(0)=1$, т.е. в момент включения устройство исправно;

2) $\lim\limits_{t\to\infty} tp(t) = 0,$ т.к. если $m_k < \infty,$ то $\lim\limits_{t\to\infty} t^k p(t) = 0.$

С учетом изложенного окончательно получаем:

$$T_{cp} = \int\limits_0^\infty p(t)dt. \tag{1.8}$$

Величина T_{cp} – параметр функции $p(t)$, который во многих случаях позволяет восстановить всю функцию.

Иногда среднее время безотказной работы T_{cp} является приемлемой характеристикой для сравнения устройств по показателям безотказности.

Момент второго порядка равен:

$$m_2 = \int\limits_0^\infty t^2\omega(t)dt = -\int\limits_0^\infty t^2 dp(t) = -t^2 \underbrace{p(t)}_{=0}\Big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty p(t)dt^2. \tag{1.9}$$

С учетом того, что $p(t)=1$ при $t=0$, а $\lim\limits_{t\to\infty} t^2 p(t) = 0$, окончательно получаем:

$$m_2 = \int\limits_0^\infty p(t)dt^2 = 2\int\limits_0^\infty tp(t)dt. \tag{1.10}$$

Из выражения (1.10) с учетом (1.8) находим дисперсию σ_T^2 времени безотказной работы:

$$\sigma_T^2 = m_2 - T_{cp}^2 = 2\int\limits_0^\infty tp(t)dt - (\int\limits_0^\infty p(t)dt). \tag{1.11}$$

<u>5. Вероятность безотказной работы на интервале, следующим за интервалом безотказной работы</u>

Пусть имеется два события A и B. Событие A состоит в том, что после включения устройства отказ наступил на интервале, не превосходящим величину $\tau+t$, т.е.:

$A: \quad \xi \le \tau + t.$

Событие B состоит в том, что после включения первый отказ наступил на интервале, превосходящем величину τ, т.е.:

$B: \quad \xi \ge \tau.$

Пересечение событий A и B состоит в том, что отказ появится на интервале t, следующим за интервалом времени τ безотказной работы рис.(1.3).

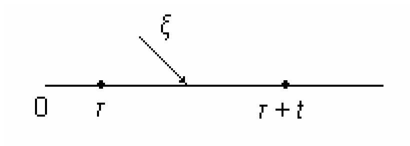


Рис. 1.3.

Это можно записать аналитически следующим образом:

$A \cap B: \ \tau \le \xi \le \tau + t.$

Теперь найдем условную вероятность того, что первый отказ произошел на интервале *t*, который следует за интервалом *τ* и на котором устройство проработало без отказа.

Обозначим эту условную вероятность за $q(t/\tau)$. По правилу умножения вероятностей (см. Замечание) имеем:

$$q(t/\tau)=\frac{P\{A\cap B\}}{P\{B\}}$$

или:

$$q(t/\tau)=\frac{P\{\tau\le\xi\le\tau+t\}}{P\{\xi>\tau\}}, \tag{1.12}$$

при этом:

$$P\{\tau\le\xi\le\tau+t\}=P\{\xi\le\tau+t\}-P\{\xi\le\tau\}=q(\tau+t)-q(\tau)=$$
$$=1-p(\tau+t)-[1-p(\tau)]=p(\tau)-p(\tau+t). \tag{1.13}$$

Отсюда получаем:

$$q(t/\tau)=\frac{[p(\tau)-p(\tau+t)]}{p(\tau)}=\frac{1-p(\tau+t)}{p(\tau)}. \tag{1.14}$$

Вероятность $p(t/\tau)$ безотказной работы на интервале *t*, следующим за интервалом *τ* безотказной работы после включения устройства, равна:

$$p(t/\tau)=1-q(t/\tau)=\frac{p(\tau+t)}{p(\tau)}. \tag{1.15}$$

Таким образом, $p(t/\tau)$ равна отношению вероятностей безотказной работы в конце и в начале рассматриваемого интервала времени.

Замечание:

Правило умножения вероятностей:

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A).$$

Вероятность совместного наступления двух событий равна произведению вероятности первого события на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что первое событие состоялось.

6. Интенсивность отказов (ИО)

Интенсивностью отказов ИО называется функция $\lambda(\tau)$, которая представляет собой предел отношения $q(t/\tau)$ при $t\to 0$.

Аналитически ее можно записать, как:

$$\lambda(\tau)=\lim_{t\to 0}\frac{q(t/\tau)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{[p(\tau)-p(\tau+t)]}{tp(\tau)}=-\frac{p'(\tau)}{p(\tau)}. \tag{1.16}$$

С учетом выражения (1.3) $\left(\omega(t)=-\dfrac{dp(t)}{dt}\right)$, преобразуя (1.16), получим:

$$\lambda(\tau)=\frac{\omega(\tau)}{p(\tau)},\ \ \tau\ge 0. \tag{1.17}$$

Функция $\lambda(\tau)$ для всех $\tau>0$ неотрицательна, а при $\tau=0$ → $\lambda(0)=\omega(0)$, т.к. $p(0)=1$.

При $\tau\to\infty$ и числитель, и знаменатель выражения (1.17) стремятся к нулю, поэтому, используя правило Лопиталя можно получить равенство, справедливое для больших значений τ:

$$\lambda(\tau)\approx-\frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau)}=-\frac{d}{d\tau}\ln\omega(\tau). \qquad (1.18)$$

Теперь нетрудно выразить вероятность безотказной работы $p(t)$ через интенсивность отказов. Для этого представим выражения (1.16) в виде:

$$\lambda(\tau)=-\frac{d}{d\tau}\ln p(\tau). \qquad (1.19)$$

Интегрируя обе части выражения (1.19) от 0 до t, получим с учетом того, что p(0)=1, следующее выражение:

$$\int_0^t\lambda(\tau)d\tau=-\ln p(t). \qquad (1.20)$$

Отсюда:

$$p(t)=\exp\left\{-\int_0^t\lambda(\tau)d(\tau)\right\}. \qquad (1.21)$$

Следовательно, интенсивность отказов и вероятность безотказной работы являются характеристиками безотказности, связанными однозначным соответствием, поэтому можно задавать либо вероятность безотказной работы, либо интенсивность отказов.

Функция $\lambda(\tau)$ не является плотностью распределения случайной величины. Кроме того, эта функция не нормирована, т.к.:

$$\int_0^t\lambda(\tau)d\tau=0.$$

Таблица 1.4. Функциональная связь между ПН безотказности.

Известный ПН	Формулы для определения остальных ПН			
	$q(t)$	$\omega(t)$	$p(t)$	$\lambda(t)$
$q(t)$	——	$\frac{dq(t)}{dt}$	$1-q(t)$	$\frac{1}{1-q(t)}\cdot\frac{dq(t)}{dt}$
$\omega(t)$	$\int_0^t\omega(t)dt$	——	$1-\int_0^t\omega(t)dt$	$\frac{\omega(t)}{1-\int_0^t\omega(t)dt}$
$p(t)$	$1-p(t)$	$-\frac{dp(t)}{dt}$	——	$-\frac{1}{p(t)}\cdot\frac{dp(t)}{dt}$
$\lambda(t)$	$1-\exp\left(-\int_0^t\lambda(t)dt\right)$	$\lambda(t)\cdot\exp\left(-\int_0^t\lambda(t)dt\right)$	$\exp\left(-\int_0^t\lambda(t)dt\right)$	——

При λ=*const*, т.е. для экспоненциального распределения времени безотказной работы имеем:

$$T_{cp} = \int_0^t p(t)dt = \int_0^t e^{-\lambda t}dt = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}. \tag{1.22}$$

В таблице 1.4 приведены основные соотношения, устанавливающие функциональную связь между ПН безотказности.

Пример.

Определить единичные ПН безотказности $p(t)$, $\lambda(t)$ и T_{cp}, если в результате анализа данных об отказах ТС установлено, что частота отказов системы имеет вид:

$$\omega(t) = 2\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}).$$

Решение.

1. Определим вероятность БР на основании формулы (1.4). Имеем:

$$p(t) = 1 - \int_0^t \omega(t)dt = 1 - 2\lambda \cdot \left[\int_0^t e^{-\lambda t}dt - \int_0^t e^{-2\lambda t}dt\right] = 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}.$$

2. Найдем зависимость интенсивности отказов от времени по формуле (1.17):

$$\lambda(t) = \frac{\omega(t)}{p(t)} = \frac{\lambda \cdot (1 - e^{-\lambda t})}{(1 - 0{,}5e^{-\lambda t})}.$$

3. *Определим* среднюю наработку до первого отказа. На основании (1.8) будем иметь:

$$T_{cp} = \int_0^{\infty} p(t)dt = \int_0^{\infty}\left[2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}\right]dt = \frac{3}{2\lambda}.$$

1.4.2. Единичные ПН, определяющие свойство восстанавливаемости

Будем считать, что восстановление является случайным событием. В связи с этим интервал времени от момента отказа до момента восстановления является случайной величиной. Поэтому для характеристики восстановления должна быть использована функция распределения вероятностей этой случайной величины. Обозначим ее через η (эта).

1. Вероятностью восстановления (ВВ) называется вероятность того, что после момента наступления отказа работоспособность устройства будет восстановлена за время, не превышающее заданное время *t*.

Вероятность восстановления можно записать в виде функции следующего вида (рис. 1.4).

$$p_в(t) = P\{\eta \le t\}, \quad t \ge 0 \tag{1.23}$$

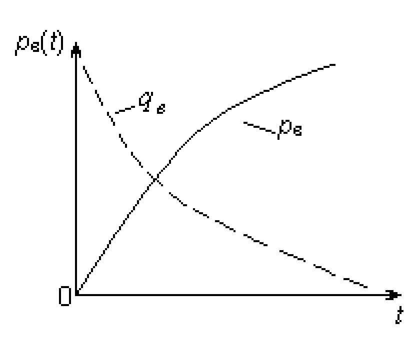


Рис. 1.4. Вероятность восстановления и невосстановления.

Функция $p_в(t)$ представляет собой интегральную функцию распределения случайной величины η. Эта функция монотонно возрастает от 0 (при t=0) до 1 (при $t\to\infty$).

2. Вероятность невосстановления (ВНВ) на заданном интервале времени, т.е. вероятность того, что $\eta>t$, равна:

$$q_в(t) = p\{\eta > t\} = 1 - p_в(t). \tag{1.24}$$

3. Плотность распределения времени восстановления или частота восстановления равна:

$$\omega_в(t) = \frac{dp_в(t)}{dt}, \quad t \geq 0. \tag{1.25}$$

Распределение вероятностей длительности восстановления называют *математической моделью восстанавливаемости устройства*.

Функции распределения $p_в(t)$ и $\omega_в(t)$, характеризующие восстанавливаемость, являются *односторонними*.

4. Среднее значение и дисперсия длительности восстановления

Аналогично рассмотренным ПН безотказности для свойства восстанавливаемости также можно ввести наряду с функциями распределения длительности восстановления численные характеристики или моменты.

$$m_k = \int_0^\infty t^k \omega_в(t)dt = k\int_0^\infty t^{k-1} q_в(t)dt. \tag{1.26}$$

Выражение (1.26) получено методом подстановки формулы $\omega_в(t) = \frac{dp_в(t)}{dt} = -\frac{dq_в(t)}{dt}$ и последующим интегрированием по частям. Докажем, что это так:

$$m_к = \int_0^\infty t^k \omega_в(t)dt = -\int_0^\infty t^k dq_в(t) = -t^k \cdot \underbrace{q_в(t)}_{\to 0}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty q_в(t)dt^k = k\int_0^\infty t^{k-1} q_в(t)dt,$$

что и требовалось доказать.

Момент первого порядка (математическое ожидание) времени восстановления работоспособности обозначим символом $T_в$ и назовем *средним временем восстановления*:

$$T_в = \int_0^\infty q_в(t)dt = \int_0^\infty [1 - p_в(t)]dt. \tag{1.27}$$

Таким образом, среднее время восстановления $T_в$ равно площади под кривой вероятности невосстановления (рис.1.4).

Дисперсия длительности восстановления определяется выражением:

$$\sigma_в = 2\int_0^\infty t[1 - p_в(t)]dt - T_в^2. \tag{1.28}$$

5. Интенсивность восстановления

Используя рассуждения, аналогичные проведенным для интенсивности отказов, определим условную вероятность $p_в(t/\tau)$, т.е. вероятность того, что восстановление произойдет на интервале t, следующем за интервалом времени τ, на котором еще не произошло восстановление работоспособности устройства:

$$p_в(t/\tau) = [p_в(\tau + t) - p_в(\tau)]/[1 - p_в(\tau)]. \tag{1.29}$$

Условная вероятность невосстановления на интервале времени длительностью t, следующем за интервалом τ после отказа равна:

$$q_в(t/\tau) = 1 - p_в(t/\tau) = q_в(\tau + t)/q_в(\tau). \tag{1.30}$$

Рассмотрим предел отношения $p_в(t/\tau)$ при $t\to 0$, т.е. дифференциальную плотность вероятности восстановления в момент τ, при условии, что после отказа устройство не было восстановлено до момента τ.

Обозначим этот предел через функцию $\mu(\tau)$, которая называется *интенсивностью восстановления*:

$$\mu(\tau) = \lim_{t\to 0}\frac{p_в(t/\tau)}{t} = \frac{p_в'(\tau)}{1 - p_в(\tau)} \tag{1.31}$$

или с учетом того, что $p_в'(t) = \dfrac{dp_в(t)}{dt} = \omega_в(t)$ при $t\to 0$, получим:

$$\mu(\tau) = -\frac{\omega_в(\tau)}{1 - p_в(\tau)}, \quad \tau > 0. \tag{1.32}$$

Представим выражение (1.31) в виде:

$$\mu(\tau) = -\frac{d}{d\tau}\ln[1 - p_в(\tau)] \tag{1.33}$$

и решим его с учетом того, что $p_в(0)=0$. Из выражения (1.33) имеем, проинтегрировав его от 0 до t:

$$\int_0^t \mu(\tau)d\tau = -\int_0^t d\ln[1 - p_в(\tau)] = -\ln[1 - p_в(\tau)]\Big|_0^t = -\ln[1 - p_в(t)].$$

Отсюда определяем, что:

$$1 - p_в(t) = \exp\left\{-\int_0^t \mu(\tau)d\tau\right\}. \tag{1.34}$$

Окончательно получаем:

$$p_в(t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t \mu(\tau)d\tau\right\}. \tag{1.35}$$

Следовательно, между вероятностью восстановления и интенсивностью восстановления имеется однозначное соответствие.

Однако необходимо заметить, что вероятностные характеристики безотказности и восстанавливаемости независимы. Одно и то же устройство может обладать высокими показателями безотказности, но быть плохо восстанавливаемым, или наоборот.

В таблице 1.5 приведены основные соотношения, устанавливающие функциональную связь между ПН восстановления.

Таблица 1.5. Функциональная связь между ПН восстановления.

Известный ПН	Формулы для определения остальных ПН			
	$p_в(t)$	$q_в(t)$	$\omega_в(t)$	$\mu(t)$
$p_в(t)$	——	$1-p_в(t)$	$\frac{dp_в(t)}{dt}$	$\frac{1}{1-p_в(t)}\cdot\frac{dp_в(t)}{dt}$
$q_в(t)$	$1-q_в(t)$	——	$-\frac{dq_в(t)}{dt}$	$-\frac{1}{q_в(t)}\cdot\frac{dq_в(t)}{dt}$
$\omega_в(t)$	$\int_0^t \omega_в(t)dt$	$1-\int_0^t \omega_в(t)dt$	——	$\frac{\omega_в(t)}{1-\int_0^t \omega_в(t)dt}$
$\mu(t)$	$1-\exp\left(-\int_0^t \mu(t)dt\right)$	$\exp\left(-\int_0^t \mu(t)dt\right)$	$\mu(t)\cdot\exp\left(-\int_0^t \mu(t)dt\right)$	——

1.4.3. Комплексные ПН

Для ремонтируемых ТС (с восстановлением) представляет интерес изучение последовательности случайных событий, которые представляют собой повторяющиеся отказы, следующие за многократными восстановлениями.

Последовательность отказов называется *потоком отказов*.

Выделим некоторый произвольный интервал времени от момента включения t=0 до некоторого текущего значения времени t. Предположим, что на этом интервале времени $(0,t)$ произошло V_t отказов. Причем V_t – представляет собой дискретную случайную величину.

Обозначим через $F_n(t)$ – вероятность того, что на интервале $(0,t)$ произошло не менее n отказов, т.е.:

$$F_n(t) = P\{V_t \geq n\}. \qquad (1.36)$$

Из (1.36) можно получить формулу для определения *вероятности появления точно n отказов на интервале (0,t)*:

$$P\{V_t = n\} = P\{V_t \geq n\} - P\{V_t \geq n+1\} = F_n(t) - F_{n+1}(t). \qquad (1.37)$$

<u>1. Ведущая функция потока отказов</u>

Важнейшей характеристикой потока отказов является математическое ожидание числа отказов на интервале $(0,t)$. Эта характеристика называется *ведущей функцией потока отказов*. Обозначим ее через $H(t)$.

$$H(t) = m_1\{V_t\}. \qquad (1.38)$$

В связи с тем, что после каждого отказа следует восстановление, то $H(t)$ представляет также и среднее число восстановлений на интервале $(0,t)$.

Среднее число отказов в интервале времени (t_1,t_2) равно:

$$m_1\{V_{t_2} - V_{t_1}\} = m_1\{V_{t_2}\} - m_1\{V_{t_1}\} = H(t_2) - H(t_1). \tag{1.39}$$

По определению среднего значения дискретной случайной величины (математического ожидания) имеем:

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nP\{V_t = n\}. \tag{1.40}$$

Подставив (1.37) в выражение (1.40) и разбив сумму на две, получаем:

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nF_n(t) - \sum_{n=0}^{\infty} nF_{n+1}(t). \tag{1.41}$$

В первой сумме выражения (1.41) член при n=0 равен нулю и его можно опустить. Во второй сумме индекс суммирования заменяем на $m=n+1$. Тогда выражение (1.41) примет вид:

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nF_n(t) - \sum_{m=1}^{\infty} (m-1)F_m(t).$$

Объединяя суммы, получим окончательно для ведущей функции потока отказов:

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \tag{1.42}$$

2. Интенсивность потока отказов

Теперь найдем среднее число отказов на интервале (t_1,t_2), отнесенное к длительности этого интервала $(t_1–t_2)$. Согласно выражению (1.39) оно равно $\frac{[H(t_2) - H(t_1)]}{(t_2 - t_1)}$.

Предел этого отношения называется *интенсивностью потока отказов* и обозначается через $\omega_{ИПО}$:

$$\omega_{ИПО}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{H(t+\Delta t) - H(t)}{\Delta t} = \frac{dH(t)}{dt}. \tag{1.43}$$

Из выражений (1.43) и (1.42) следует, что:

$$\omega_{ИПО}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dF_n(t)}{dt}. \tag{1.44}$$

3. Функция распределения потока отказов

Рассмотрим связь функций $F_n(t)$, т.е. функции распределения числа отказов с показателями безотказности и восстанавливаемости устройства, т.е. плотности распределения наработки на отказ и плотности распределения времени восстановления.

При этом сделаем два предположения:

1. Поток отказов и поток восстановлений каждый в отдельности и совместно представляют собой последовательность независимых событий.
2. На интервале восстановления отказы не возникают.

Через τ_k обозначим случайный интервал времени момента возникновения k-го отказа после первого включения устройства. В этом случае:

$$\varsigma = \tau_k - \tau_{k-1}, \qquad (1.45)$$

где ς [*дзета*] – интервал времени между отказами, который складывается из интервала восстановления η_k и интервала безотказной работы ξ_k.

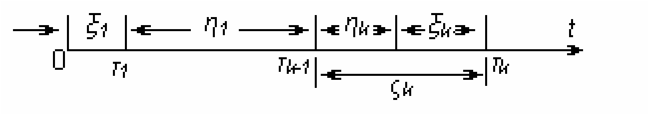


Рис.1.5.

$$\tau_0 = \eta_1 = 0; \qquad \tau_1 = \varsigma_1 = \xi_1.$$

Момент *n*-го отказа, очевидно, равен сумме интервалов между отказами:

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \varsigma_k. \qquad (1.46)$$

Событие, состоящее в том, что на интервале времени (0,*t*) появится минимум *n* отказов, – эквивалентно событию, при котором момент *n*-го отказа предшествует моменту времени *t*.

Следовательно:

$$F_n(t) = P\{V_t \geq n\} = P\{\tau_n < t\}$$

или $$F_n(t) = P\left\{\sum_{k=1}^{n} \varsigma_k < t\right\} \qquad (1.47)$$

Так как случайные величины ς_1 – ς_n независимы, поэтому определение функции $F_n(t)$ сводится к задаче о распределении суммы конечного числа независимых величин. Обычно для решения подобных задач используют метод характеристических функций.

Обозначим через $\omega_{\varsigma_k}(t)$ – плотность распределения случайной величины дзета ς_k. При этом характеристической функцией $\Theta_{\varsigma_k}(iv)$ случайной величины называется преобразование Фурье ее плотности распределения, т.е.:

$$\Theta_{\varsigma_k}(-iv) = \int_0^{\infty} \omega_{\varsigma_k}(t) e^{ivt} dt. \qquad (1.48)$$

Плотность распределения получается из характеристической функции путем обратного преобразования Фурье:

$$\omega_{\varsigma_k}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_{\varsigma_k}(iv) e^{-ivt} dt. \qquad (1.49)$$

Из выражения (1.48) следует, что характеристическая функция случайной величины ς_k есть среднее значение от $e^{iv\varsigma_k}$. Но тогда для суммы независимых случайных величин получаем:

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \varsigma_k,$$

$$\Theta_{\Sigma_n}(iv) = m_1\left\{e^{iv\sum_{k=1}^{n}\varsigma_k}\right\} = \prod_{k=1}^{n} m_1\left\{e^{iv\varsigma_k}\right\},$$

или: $$\Theta_{\Sigma_n}(iv)=\prod_{k=1}^{n}\Theta_{\varsigma_k}(iv), \qquad (1.50)$$

т.е. характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых.

Плотность распределения указанной суммы находится обратным преобразованием Фурье:

$$W_{\Sigma_n}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\Theta_{\varsigma_k}(iv)e^{ivt}dv \qquad (1.51)$$

Так как $\varsigma_k = \eta_k+\xi_k$ и эти слагаемые независимы, то:

$$\Theta_{\varsigma_k}(iv)=\Theta_{\eta_k}(iv)\cdot\Theta_{\xi_k}(iv), \qquad (1.52)$$

где $\Theta_{\eta_k}(iv)$ и $\Theta_{\xi_k}(iv)$ – соответственно, характеристические функции восстановления и безотказной работы.

Вычисляются эти функции с помощью преобразования Фурье от плотности распределения времени восстановления $\omega_{\eta_k}(t)$ и плотности распределения наработки на отказ $\omega_{\xi_k}(t)$:

$$\Theta_{\eta_k}(iv)=\int_0^{\infty}\omega_{\eta_k}(t)e^{ivt}dt, \qquad (1.53)$$

$$\Theta_{\xi_k}(iv)=\int_0^{\infty}\omega_{\xi_k}(t)e^{ivt}dt. \qquad (1.54)$$

Объединяя выражения (1.47), (1.49), (1.51)÷(1.54) получим искомую зависимость функции $F_n(t)$ от характеристик восстанавливаемости и безотказности:

$$F_n(t)=\int_0^{t}W_{\Sigma_n}(t)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\int_0^{\infty}\omega_{\eta_k}(x)e^{ivx}dx\cdot\int_0^{\infty}\omega_{\xi_k}(y)e^{ivy}dy\right]\cdot e^{-ivt}dvdt. \qquad (1.55)$$

В случае однородных потоков отказов и потоков восстановления функции распределения $\omega(t)$ и $\omega_в(t)$ не зависят от номера интервала. Поэтому в выражении (1.55) произведение можно заменить n-ой степенью выражения, заключенного в квадратные скобки, т.е.:

$$F_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\omega_в(x)e^{ivx}dx\cdot\int_0^{\infty}\omega(y)e^{ivy}dy\right]^n\cdot e^{-ivt}dvdt. \qquad (1.56)$$

Если восстановление происходит мгновенно, то $\omega_в(t)=\delta(x)$, и, следовательно:

$$F_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\omega(y)e^{ivy}dy\right]^n\cdot e^{-ivt}dvdt. \qquad (1.57)$$

4. Параметр потока отказов

Обозначим через $\Omega(t)dt$ вероятность того, что на интервале $(t,t+dt)$ произойдет отказ. Теперь предположим, что потоки отказов являются *ординарными*, т.е. вероятность совмещения в один и тот же момент двух и более отказов пренебрежимо мала. Во многих случаях допустимо считать, что вероятность появления на интервале времени $(t,t+dt)$ более одного отказа есть величина более высокого порядка малости, чем dt, если dt достаточно мала.

Обозначим через A_n событие, состоящее в том, что на интервале $(t,t+dt)$ произошел n-ый по счету отказ после первого включения устройства.

В связи с тем, что плотность распределения момента n-го отказа равна

$$\frac{dF_n(t)}{dt},$$

вероятность события A_n можно вычислить по формуле:

$$P\{A_n\} = dF_n(t).$$

Тогда, событие $\Omega(t)dt$, состоящее в том, что на интервале $(t,t+dt)$ появится любой по счету отказ, представляет собой объединение событий A_n для всех целых и положительных n:

$$\Omega(t)dt = P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}. \tag{1.58}$$

Так как два любых события A_k и A_r при $k \neq r$ не совместны, то формулу (1.58) можно преобразовать, используя правило сложения вероятностей:

$$\Omega(t)dt = P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{A_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} dF_n(t). \tag{1.59}$$

Величина $\Omega(t)$ называется *параметром потока отказов*. Она представляет собой дифференциальную вероятность отказа восстанавливаемого устройства и из (1.59) равна:

$$\Omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dF_n(t)}{dt}. \tag{1.60}$$

Вынося знак дифференцирования за знак суммы, с учетом формулы (1.42.), получим:

$$\Omega(t) = \frac{dH(t)}{dt} = \omega_{ИПО}(t). \tag{1.61}$$

Т.е. для ординарных потоков отказов параметр потока отказов $\Omega(t)$ и интенсивность потока отказов $\omega_{ИПО}(t)$ совпадают!

В связи с тем, что число отказов и число восстановлений совпадают, величину $\Omega(t)$ можно назвать также *интенсивностью потока восстановлений*.

Интегрируя обе части выражения (1.61) по t в пределах от 0 до t с учетом, что $H(0)=0$, получим:

$$H(t) = \int_0^t \Omega(t)dt. \tag{1.62}$$

Существует зависимость между параметром потока отказов $\Omega(t)$ и единичными ПН, а именно частотой отказа $\omega(t)$.

Для ординарных потоков отказов с ограниченным последействием $\Omega(t)$ и $\omega(t)$ связаны интегральным уравнением Вольтера второго рода:

$$\Omega(t)=\omega(t)+\int_0^t \Omega(\tau)\omega(t-\tau)d\tau, \qquad (1.63)$$

которое решается обычно численными методами с использованием метода последовательных приближений.

Решая (1.63) по известной $\omega(t)$, можно найти все количественные характеристики надежности как невосстанавливаемых, так и восстанавливаемых ТС.

Другими словами, уравнение (1.63) – это основное уравнение, связывающее ПН невосстанавливаемых и восстанавливаемых ТС при мгновенном восстановлении, т.е. без учета времени, требующегося на восстановление ТС после отказа.

Для определения основных свойств параметра потока отказов $\Omega(t)$ используем преобразование Лапласа. Второй член выражения (1.63) представляет собой свертку двух функций, поэтому:

$$\Omega(p)=\Omega(p)\cdot\omega(p)+\omega(p).$$

Откуда уравнение (1.63) в операторной форме имеет вид:

$$\Omega(p)=\frac{\omega(p)}{1-\omega(p)}, \qquad (1.64)$$

или

$$\omega(p)=\frac{\Omega(p)}{1+\Omega(p)}. \qquad (1.65)$$

Соотношения (1.64) и (1.65) позволяют найти одну характеристику через другую, если существует преобразование Лапласа функций $\omega(p)$ и $\Omega(p)$ и соответственно обратное преобразование выражений (1.64) и (1.65).

Воспользуемся известным соотношением операционного исчисления:

$$\lim_{t\to\infty}\Omega(t)=\lim_{p\to 0}p\Omega(p).$$

Тогда

$$\lim_{p\to 0}p\Omega(p)=\lim_{p\to 0}\frac{p\int_0^\infty \omega(t)e^{-pt}dt}{1-\int_0^\infty \omega(t)e^{-pt}dt}.$$

Раскрывая неопределенность, получим:

$$\lim_{p\to 0}p\Omega(p)=\lim_{p\to 0}\frac{\int_0^\infty \omega(t)dt}{\int_0^\infty t\omega(t)dt}=\frac{1}{T_{cp}}.$$

Следовательно:

$$\lim_{t\to\infty}\Omega(t)=\frac{1}{T_{cp}},$$

т.е. предел, к которому стремится параметр потока отказов $\Omega(t)$ при $t\to\infty$, равен величине, обратной средней наработке на отказ.

При этом $\Omega(t)$ обладает следующими свойствами:

1. для любого момента времени независимо от закона распределения времени безотказной работы (БР) $\Omega(t) > \omega(t)$;
2. независимо от вида функции $\omega(t)$ параметр потока отказов $\Omega(t)$ при $t \to \infty$ стремится к $1/T_{ср}$;
3. если $\lambda(t)$ – возрастающая функция времени, то $\lambda(t) > \Omega(t) > \omega(t)$;
   если $\lambda(t)$ –убывающая функция времени, то $\Omega(t) > \lambda(t) > \omega(t)$;
4. при экспоненциальном законе распределения времени БР, т.е. при $\lambda(t)=\lambda=const$, параметр потока отказов ТС не равен сумме потоков отказов элементов ТС:

$$\Omega_{TC}(t) \neq \sum_{i=1}^{N} \Omega_i(t),$$

при этом $\Omega(t) = (t) = \lambda$.

Пример. Определим параметр потока отказов $\Omega(t)$, если в результате анализа данных об отказах ТС установлено, что частота отказов системы имеет вид:

$$\omega(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}.$$

Решение.

Воспользуемся формулой (1.64), для чего найдем преобразование Лапласа частоты отказов $\omega(t)$:

$$\omega(p) = \int_0^\infty \omega(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty \lambda^2 t e^{-(\lambda+p)t} dt = \frac{\lambda^2}{(\lambda+p)^2}.$$

Подставляя полученное значение в (1.64), находим:

$$\Omega(p) = \frac{\omega(p)}{1-\omega(p)} = \frac{\lambda^2}{p(p+2\lambda)}.$$

Для отыскания $\Omega(t)$ найдем обратное преобразование Лапласа функции $\Omega(p)$. Корнями знаменателя будут:

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -2\lambda.$$

Тогда после преобразований

$$\Omega(t) = \lambda^2 \left[\frac{1}{2\lambda} - \frac{e^{-2\lambda t}}{2\lambda} \right] = \frac{\lambda}{2}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right).$$

5. Функции готовности и простоя

Функцией готовности G(t) (ФГ) называется зависимость вероятности работоспособности системы в произвольный момент времени от текущего времени.

Вероятность того, что в произвольный момент времени t устройство не будет работоспособно, называется *функцией простоя* (ФП):

$$g(t) = 1 - G(t) \qquad (1.66)$$

Функцию готовности $G(t)$ иногда называют *нестационарным коэффициентом готовности*, функцию простоя $g(t)$ – *нестационарным коэффициентом простоя*.

Разделим интервал $(0,t)$ на N непересекающихся интервалов $\Delta\tau$.

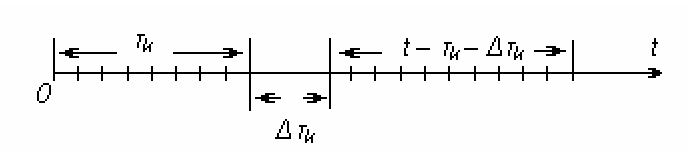


Рис.1.6.

Допустим, что B_k – это событие, которое состоит в том, что ТС была восстановлена на интервале $\Delta\tau$ и что она проработала безотказно в течение интервала $(t-\tau_k-\Delta\tau_k)$. Очевидно, что вероятность этого события равна:

$$\Omega(\tau_k)\cdot\Delta\tau\cdot p\left(t-\tau_k\right).$$

Используя формулу полной вероятности (см. Замечание), находим выражение для функции готовности $G(t)$, т.е. вероятности работоспособности ТС в момент времени t:

$$G(t)=p(t)+\lim_{\max\ \Delta t_k\to 0} P\left\{\bigcup_{k=1}^{N} B_k\right\}$$

Так как событие B_i и B_j при $i\neq j$ несовместны, то:

$$P\left\{\bigcup_{k=1}^{N} B_k\right\}=\sum_{k=1}^{N} p(t-\tau_k)\cdot\Omega(\tau_k)\cdot\Delta\tau_k. \tag{1.67}$$

Переходя к пределу $max\ \Delta\tau_k\to 0$, получим выражение для ФГ:

$$G(t)=p(t)+\int_0^t p(t-\tau)\cdot\Omega(\tau)d\tau. \tag{1.68}$$

Функция готовности является комплексным показателем надежности, так как зависит от характеристики безотказности и от характеристики восстанавливаемости ТС.

Функция простоя равна:

$$g(t)=1-G(t)=1-p(t)-\int_0^t p(t-\tau)\cdot\Omega(\tau)d\tau=$$

$$=g(t)-\int_0^t p(t-\tau)\cdot\Omega(\tau)d\tau. \tag{1.69}$$

ФГ, как правило, имеет следующий вид (рис. 1.7):

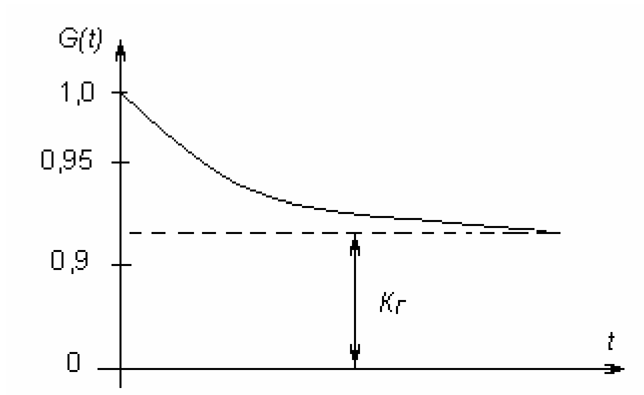


Рис.1.7. Функция готовности.

Замечание.

Формула полной вероятности.

Пусть события A_1, A_2, … A_n образуют полную систему (группу) событий и любые два из них несовместны.

Обозначим за $P_{Ai}(B)$ – условную вероятность события B при условии, что произошло событие A_i. Тогда можно вычислить вероятность события $B \to P(B)$ по следующей формуле:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_i) \cdot P_{A_i}(B) + \ldots + P(A_n) \cdot P_{A_n}(B).$$

6. Коэффициенты готовности и простоя

Коэффициентом готовности ($K_Г$) называется асимптотическое значение функции готовности $G(t)$ при неограниченном возрастании аргумента t (рис. 1.7), т.е.

$$K_Г = \lim_{t\to\infty} G(t). \qquad (1.70)$$

Для ординарного потока отказов $K_Г$ получают из выражения (1.68) для функции готовности путем ее преобразования и подстановки $t\to\infty$:

$$K_Г = 1 - \frac{T_в}{T_{ср} + T_в} = \frac{T_{ср}}{T_{ср} + T_в}. \qquad (1.71)$$

Как видно, $K_Г$ при любых распределениях интервала безотказной работы и интервала восстановления равен отношению средней наработки на отказ к сумме средней наработки на отказ и среднего времени восстановления.

Аналогично вводится определение коэффициента простоя $K_П$.

Коэффициентом простоя $K_П$ называется асимптотическое значение функции простоя при неограниченном возрастании аргумента t. Из определения функций простоя и готовности следует, что:

$$K_П = 1 - K_Г = \frac{T_в}{T_{ср} + T_в} \qquad (1.72)$$

$K_Г$ и $K_П$ определены как асимптотические коэффициенты функций при $t\to\infty$. Однако их можно использовать при любых конечных значениях t, при которых

$$\left| G(t) - K_Г \right| < \varepsilon, \qquad (1.73)$$

где ε – заданная погрешность.

При экспоненциальном распределении времени безотказной работы ТС, когда вероятность безотказной работы системы на интервале времени $t_{ОГ}$ не зависит от момента начала работы, можно определить величину коэффициента оперативной готовности:

$$K_{ОГ} = K_Г \cdot p(t_{ОГ}). \qquad (1.74)$$

Для выяснения физического смысла $K_Г$ запишем формулу для вероятности застать ТС в исправном состоянии для самого простого случая, когда $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ есть величины *const*, т.е. для экспоненциального закона распределения.

Предполагая, что при t=0 ТС находится в работоспособном состоянии (p(0)=1) вероятность застать ТС в этом состоянии определяется из выражения:

$$p_Г(t) = \frac{\mu}{\mu + \lambda} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t},$$

$$p_Г(t) = K_Г + (1 - K_Г)e^{-\frac{t}{K_Г t_в}}, \qquad (1.75)$$

где $\lambda = \dfrac{1}{T_{ср}}$; $\mu = \dfrac{1}{T_в}$; $K_Г = \dfrac{T_{ср}}{T_{ср} + T_в}$.

Т.е. выражение (1.75) устанавливает зависимость между $K_Г$ ТС и вероятностью застать ее в работоспособном состоянии в любой момент времени t.

Из (1.75) видно, что $p_Г(t) \to K_Г$ при $t \to \infty$, и, следовательно, $K_Г$ имеет смысл вероятности застать ТС в работоспособном состоянии при установившемся режиме эксплуатации.

Пример. Определим функцию и коэффициент готовности ТС, если известно, что интенсивность отказов системы λ= 0,02 1/ч=*const*, а среднее время восстановления $t_в$=10 ч.

Решение.

Для данной ТС средняя наработка на отказ определяется по формуле (1.22):

$$T_{ср} = \frac{1}{\lambda} = 50 \text{ ч}.$$

Тогда коэффициент готовности согласно (1.71) будет равен:

$$K_Г = \frac{T_{ср}}{T_{ср} + T_в} = \frac{50}{50 + 10} = 0{,}83.$$

Функцию готовности легко вычислить по формуле (1.75):

$$G(t) = p_Г(t) = K_Г + (1 - K_Г)e^{-\frac{t}{K_Г t_в}} = 0{,}83 + 0{,}17e^{-0{,}12t}.$$

1.4.4. Показатели долговечности и сохраняемости

1. Показатели долговечности

Календарную продолжительность от начала эксплуатации ТС до перехода в предельное состояние, называется *сроком службы ТС*. Если срок службы ТС – случайная величина (обозначим ее $T_{сс}$), то показатель долговечности может определяться как средний срок службы (математическое ожидание $T_с$):

$$t_{сс} = m_1[T_{сс}] \qquad (1.76)$$

или *гамма-процентный срок службы* t_γ, который определяется соотношением:

$$P\{T_{сс} > t_\gamma\} = \gamma/100. \qquad (1.77)$$

Таким образом, t_γ – это календарная продолжительность от начала эксплуатации ТС, в течение которой ТС не достигнет предельного состояния с заданной вероятностью γ (выраженной в процентах).

В качестве показателя долговечности можно использовать также ресурс ТС.

Ресурсом ТС называют наработку системы до предельного состояния, при достижении которого дальнейшая эксплуатация прекращается. При этом долговечность ТС обычно характеризуют наработкой системы, в течение которой он не достигнет предельного состояния с заданной вероятностью γ.

Эту наработку называют *гамма-процентным ресурсом*. Для определения этого ресурса необходимо задать функцию распределения ресурса. Более простым показателем является средний ресурс.

2. Срок сохраняемости ТС

Сроком сохраняемости называется продолжительность хранения системы в определенных условиях, в течение которой сохраняются установочные показатели ее качества.

Иногда сохраняемость характеризуют продолжительностью хранения, в течение которой ТС сохраняет установленные показатели с заданной вероятностью γ.

Эта продолжительность хранения называется *гамма-процентным сроком сохраняемости*. Для ее определения необходимо знать функцию распределения срока сохраняемости. Более простым показателем сохраняемости является *средний срок сохраняемости*.

Вопросы для самоконтроля:

1. Перечислите и проанализируйте основные состояния, в которых может находиться ТС.
2. Дайте определения понятия «надежность» и основных свойств надежности ТС.
3. Перечислите основные виды отказов ТС и проанализируйте причины их возникновения.
4. Дайте вероятностные определения единичных и комплексных ПН.
5. Опишите основные свойства параметра потока отказов $\Omega(t)$.
6. Докажите, что функция готовности является комплексным ПН.
7. В чем отличие коэффициентов готовности и оперативной готовности?
8. В чем основное отличие показателей долговечности и сохраняемости?

Глава II. Математические модели в теории надежности ТС

2.1. Зависимость интенсивности отказов от времени

Для большинства ТС и, в частности, систем управления характерны три вида зависимостей интенсивности отказов (ИО) от времени, которые соответствуют трем «периодам жизни» этих устройств (рис. 2.1).

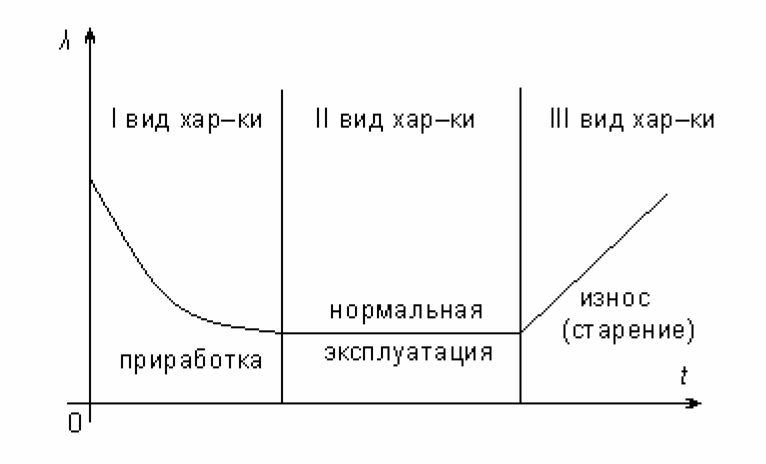


Рис. 2.1. Зависимость интенсивности отказов от времени.

I. Первый вид характеристики. Здесь ИО монотонно уменьшается. Это соответствует периоду приработки, в котором проявляются дефекты технологии и изготовления и которые не свойственны конструкции.
II. Второй вид характеристики. Здесь ИО остается приблизительно постоянной. Это соответствует так называемому периоду нормальной эксплуатации. В этот период, как правило, возникают внезапные отказы, свойственные самой конструкции.
III. Третий вид характеристики. Здесь ИО постоянно возрастает. Это соответствует периоду износа, вызванного процессами старения. В этот период возникают, главным образом постепенные отказы.

Как уже отмечалось, априорный (вероятностный) анализ надежности ТС заключается, в основном, в определении конкретных значений ПН по выведенным в первой главе аналитическим выражениям, связывающим эти ПН друг с другом.

При этом распределение вероятностей безотказной работы ТС от момента включения до момента отказа, которое называется обычно *математической моделью безотказности*, у различных ТС различно. Другими словами, время между соседними отказами для элементов, узлов, блоков, подсистем и систем является непрерывной случайной величиной, которая характеризуется определенным законом распределения, зависящим и от «периодов жизни» ТС (рис. 2.1), и от ее отдельных узлов, блоков и т.д., и от типа самой ТС в целом.

Исходя из изложенного рассмотрим наиболее часто используемые для расчета надежности ТС законы распределения, характеризующие непрерывные случайные величины.

2.2. Распределение Вейбулла

Разобранные три вида зависимостей ИО от времени можно получить, используя для вероятностного описания случайной наработки до отказа двухпараметрическое распределение Вейбулла.

При распределении Вейбулла вероятность безотказной работы (БР) на интервале (0,t) имеет вид (рис. 2.2):

$$p(t) = \exp(-\lambda t^{\delta}), t \geq 0; \lambda > 0; \delta > 0. \quad (2.1)$$

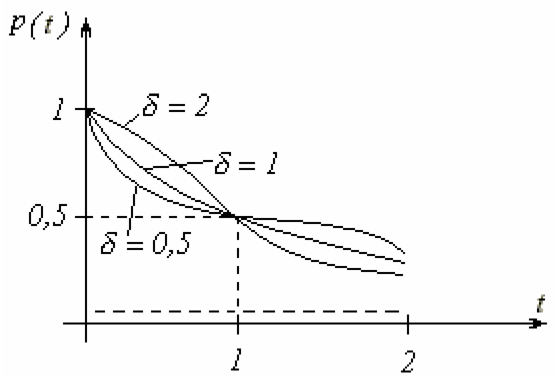


Рис. 2.2. Функция $p(t)$ для распределения Вейбулла.

Из выражения (2.1) с учетом (1.3) следует, что плотность распределения наработки на отказ равна (рис. 2.3):

$$\omega(t) = -p'(t) = \lambda\delta\ t^{\delta-1}\exp(-\lambda t^{\delta}). \quad (2.2)$$

Среднее время БР (наработка на отказ) согласно выражению (1.8):

$$T_{cp} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\ t^{\delta}} dt = \lambda^{-\frac{1}{\delta}} \Gamma(1+\frac{1}{\delta}), \quad (2.3)$$

где $\Gamma(x)$ – полная гамма-функция.

<u>Замечание.</u>

Гамма-функция:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Для больших значений x:

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) = (x-1)(x-2)\Gamma(x-2) = \ldots$$

<u>Пример:</u> $\Gamma(4{,}7)$=3,7·2,7·1,7·$\Gamma(1{,}7)$

$\Gamma(1{,}7)$=0,9086 – по таблицам

Если x<1 и x≠0, –1, –2,…, то

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} = \ldots\ .$$

<u>Пример:</u>

$$\Gamma(0{,}7) = \frac{\Gamma(1{,}7)}{0{,}7} = 1{,}298,$$

$$\Gamma(-3{,}2) = \frac{\Gamma(1{,}8)}{(-3{,}2)\cdot(-2{,}2)\cdot(-1{,}2)\cdot(-0{,}2)\cdot 0{,}8} = 0{,}698.$$

Дисперсия времени БР для распределения Вейбулла с учетом (1.11):

$$\sigma_T^2 = \lambda^{-2/\delta}[\Gamma(1+\frac{2}{\delta}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\delta})]. \qquad (2.4)$$

Теперь определим интенсивность отказов (ИО) для распределения Вейбулла. Подставив в (1.17) выражения (2.1) и (2.2), получим, что:

$$\lambda(t) = \frac{\omega(t)}{p(t)} = \frac{\lambda\delta\ t^{\delta-1}\exp(-\lambda\ t^{\delta})}{\exp(-\lambda\ t^{\delta})} = \lambda\delta\ t^{\delta-1}, \qquad (2.5)$$

$t \geq 0;\quad \lambda > 0;\quad \delta > 0$.

Таким образом, ИО – *λ(t)* при *δ*<1 монотонно убывает, при *δ*=1 – *λ*=*const*, а при *δ*>1 – *λ(t)* монотонно возрастает (рис. 2.3).

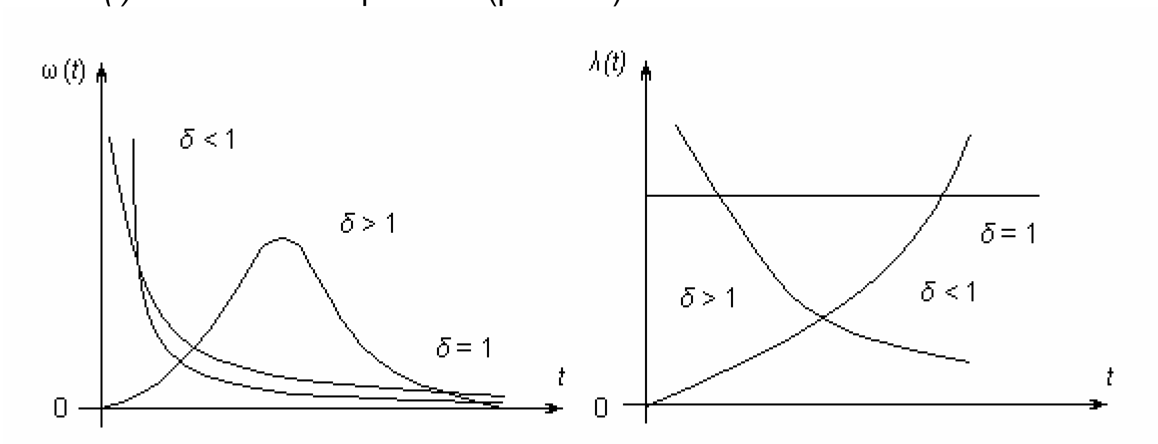


Рис. 2.3. Распределение Вейбулла для ω(*t*) и *λ*(*t*).

<u>Пример.</u> Определим среднюю наработку $T_{ср}$ и интенсивность отказов *λ(t)* для ТС, время БР которой подчиняется закону Вейбулла с параметрами *δ*=1,5; $\lambda=10^{-4}$ 1/ч за время работы *t*=100 ч.

<u>Решение.</u>

Для определения значения $T_{ср}$ воспользуемся выражением (2.3) для распределения Вейбулла:

$$T_{ср} = \lambda^{-\frac{1}{\delta}}\Gamma(1+\frac{1}{\delta}) = (10^{-4})^{-0{,}67}\cdot\Gamma(1{,}67).$$

Найдя по таблицам значение гамма-функции *Г*(1,67)=0,9033 и произведя несложные вычисления, получим:

$T_{ср}$≈418 ч.

Подставляя в формулу (2.5) параметры распределения Вейбулла *δ* и *λ,* определим интенсивность отказов ТС за время t=100 ч:

$$\lambda(100) = \lambda\cdot\delta\cdot(100)^{\delta-1} = 1{,}5\cdot 10^{-3}\ 1/ч.$$

2.3. Экспоненциальное распределение

Экспоненциальное распределение (ЭР) является частным случаем распределения Вейбулла при *δ*=1. При этом:

$$p(t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0; \quad \lambda > 0. \qquad (2.6)$$

Из выражения (2.5) следует, что при δ=1 ИО $\lambda(t) \equiv \lambda$.

Поэтому экспоненциальный закон определяется одним параметром λ, представляющим собой постоянную интенсивность отказов.

Здесь верно и обратное утверждение: если ИО постоянна, то вероятность БР, как функция времени, подчиняется экспоненциальному закону. Следовательно, нормальная эксплуатация устройств характеризуется ЭР интервала БР.

Среднее время БР – $T_{ср}$ при экспоненциальном законе распределения равно величине, обратной ИО – 1/λ, т.е.:

$$T_{ср} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \qquad (2.7)$$

Выражение (2.7) является частным случаем (2.3) при δ=1, т.к. Γ(2)=1.

Заменяя в выражении (2.6) λ на 1/$T_{ср}$, получим:

$$p(t) = e^{-\frac{1}{Tср}}; \quad t \geq 0; \quad T_{ср} > 0.$$

Вероятность БР на интервале времени t=$T_{ср}$ при ЭР равна (рис. 2.4):

$$p(T_{ср}) = e^{-1} \cong 0{,}368.$$

Плотность распределения наработки на отказ для ЭР соответственно равна:

$$\omega(t) = -p'(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \qquad (2.8)$$

Необходимо заметить, что длительность периода нормальной эксплуатации до наступления старения может оказаться меньше среднего времени БР – $T_{ср}$. Поэтому необходимо учитывать, что интервал времени, на котором можно пользоваться экспоненциальной моделью, бывает даже меньше, чем $T_{ср}$.

Вычислим дисперсию времени БР для экспоненциального закона:

$$\sigma_T^2 = 2\int_0^{\infty} te^{-\lambda t} dt - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \underset{\substack{\text{делаем} \\ \text{подстановку} \\ \lambda t = x;\ t = \frac{x}{\lambda}}}{=} \frac{2}{\lambda^2}\int_0^{\infty} xe^{-x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

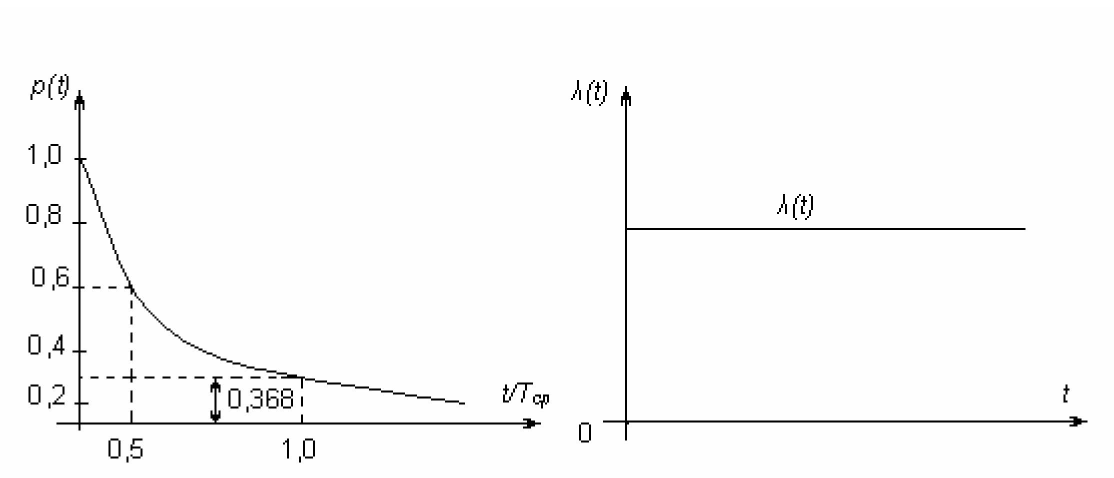


Рис. 2.4. Экспоненциальное распределение вероятности БР.

Замечание:

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1),$$

$$\int_0^\infty x e^{-x} dx = \frac{e^{-x}}{(-1)^2}(-x-1)\Big|_0^\infty = \frac{x+1}{e^x}\Big|_0^\infty = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} \to 0.$$

Таким образом, дисперсия времени БР:

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{\lambda^2} = T_{cp}^2 \qquad (2.9)$$

Найдем условную вероятность того, что для экспоненциальной модели устройство проработает безотказно на интервале времени t, после того как оно безотказно проработало на интервале τ.

В этом случае имеем:

$$p(t/\tau) = \frac{p(t+\tau)}{p(\tau)} = \frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda\tau}} = e^{-\lambda\tau}. \qquad (2.10)$$

Отсюда следует *<u>важный вывод</u>*: для экспоненциального закона распределения вероятности БР распределение времени БР не зависит от того, сколько времени оно проработало до начала отсчета от момента первого включения. Другие распределения этого свойства не имеют (т.к. у других распределений $\lambda \neq const$, а зависит от времени).

Модель ЭР широко используется для априорного анализа надежности. При априорном анализе надежности необходимо провести проверку соответствия экспоненциальной модели результатам испытаний.

<u>Пример.</u> Наработка ТС до отказа описывается экспоненциальным распределением с параметром $\lambda=10^{-4}$ 1/ч. *Определить $p(t)$* и *$\omega(t)$* системы за время работы t=2000 ч, а также среднюю наработку T_{cp}.

<u>Решение.</u>

Согласно (2.6) получаем:

$$p(2000) = e^{-10^{-4}\cdot 2000} = 0{,}819.$$

Согласно (2.8) имеем:

$$\omega(t) = 10^{-4}\cdot e^{-10^{-4}\cdot 2000} = 8{,}19\cdot 10^{-6}\ 1/\text{ч}.$$

На основании (2.7) средняя наработка на отказ:

$$T_{cp} = \frac{1}{\lambda} = 10^4\ \text{ч}.$$

2.4. Распределение Релея

При распределении Релея вероятность безотказной работы на интервале $(0,t)$ равна (рис 2.5.а):

$$p(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right), \tag{2.11}$$

где: σ – параметр распределения Релея, который одновременно является модой этого распределения.

Мода непрерывного распределения есть точка максимума плотности распределения вероятности $\omega(t)$. Мода дискретного распределения есть такое спектральное значение ξ_m, при котором предшествующие и последующие спектральные значения имеют вероятности, меньшие, чем $p(\xi_m)$.

Плотность распределения наработки на отказ равна (рис. 2.5.б):

$$\omega(t) = -p'(t) = \frac{t}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right). \tag{2.12}$$

Интенсивность отказов равна (рис. 2.5.в):

$$\lambda(t) = \frac{\omega(t)}{p(t)} = \frac{t}{\sigma^2}. \tag{2.13}$$

Среднее время БР – $T_{ср}$. (математическое ожидание) для распределения Релея равно:

$$T_{ср} = \int_0^\infty t\omega(t)dt = \int_0^\infty \frac{t^2}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma = 1{,}253\sigma. \tag{2.14}$$

Соответственно дисперсия времени БР:

$$\sigma_T^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2 = 0{,}4292\sigma^2. \tag{2.15}$$

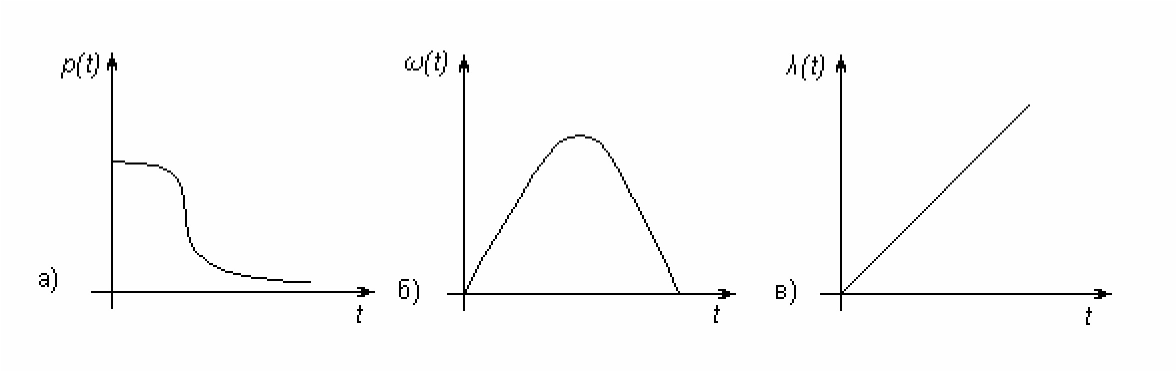


Рис. 2.5. Распределение Релея.

2.5. Гамма-распределение

При Гамма-распределении (ГР) плотность распределения наработки на отказ равна:

$$\omega(t) = \frac{\lambda_0^2}{\Gamma(r)} t^{r-1} \exp(-\lambda_0 t), \tag{2.16}$$

где $\Gamma(r)$ – полная гамма-функция.

В теории надежности ГР обычно используется при целом значении r. Если r=1, то ГР вырождается в экспоненциальное распределение. Если r – целое число >1, то ГР является распределением суммы независимых случайных величин, каждая из которых имеет экспоненциальное распределение с параметром:

$$\lambda_0 = \frac{1}{T_{cp0}}.$$

Гамма-распределение при целом значении r иногда называют *распределением Эрланга*.

Для такого распределения вероятность БР на интервале (0,t) равна (рис. 2.6.а):

$$p(t) = \exp(-\lambda_0 t)\sum_{i=0}^{r_m=1}\frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}. \tag{2.17}$$

Плотность распределения наработки на отказ в этом случае (рис. 2.6.б):

$$\omega(t) = \lambda_0 \frac{(\lambda_0 t)^{r-1}}{(r-1)!}\exp(-\lambda_0 t). \tag{2.18}$$

Интенсивность отказов равна (рис. 2.6.в):

$$\lambda(t) = \frac{\lambda_0 (\lambda_0 t)^{r-1}}{(r-1)!\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}}. \tag{2.19}$$

Среднее время БР и дисперсия времени БР соответственно равны:

$$T_{cp} = \frac{r}{\lambda_0}, \qquad \sigma_T^2 = \frac{r}{\lambda_0^2}.$$

При больших r – ГР сходится к нормальному закону с параметрами:

$$\mu_{t_0} = rT_{cp}, \qquad \sigma_{T_0}^2 = r\sigma_T^2.$$

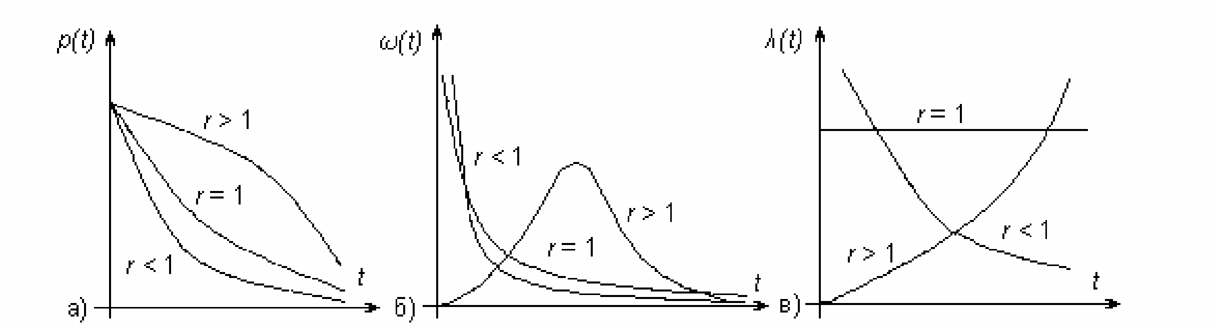


Рис. 2.6. Графики Гамма-распределения:
а) функции надежности; б) плотности распределения наработки на отказ; в) интенсивности отказов.

<u>Примером</u> использования ГР является резервная система, состоящая из r одинаковых элементов. При этом под нагрузкой находится один элемент. Остальные элементы поочередно автоматически включаются в работу после отказа работающего элемента. При экспоненциальном распределении наработки до отказа элементов суммарная наработка будет подчиняться Гамма-распределению.

2.6. Треугольное распределение

Это распределение характеризует ограниченную область значений случайных величин ($t_н$, $t_к$), где $t_н$ и $t_к$ – границы области возможных значений случайных величин.

Рассмотрим для треугольного распределения (*Δ*-распределение):

1. Графики плотности распределения *ω(t)* и интенсивности отказов *λ(t)* (рис. 2.7.а);
2. График функции надежности *p(t)* (рис. 2.7.б);
3.

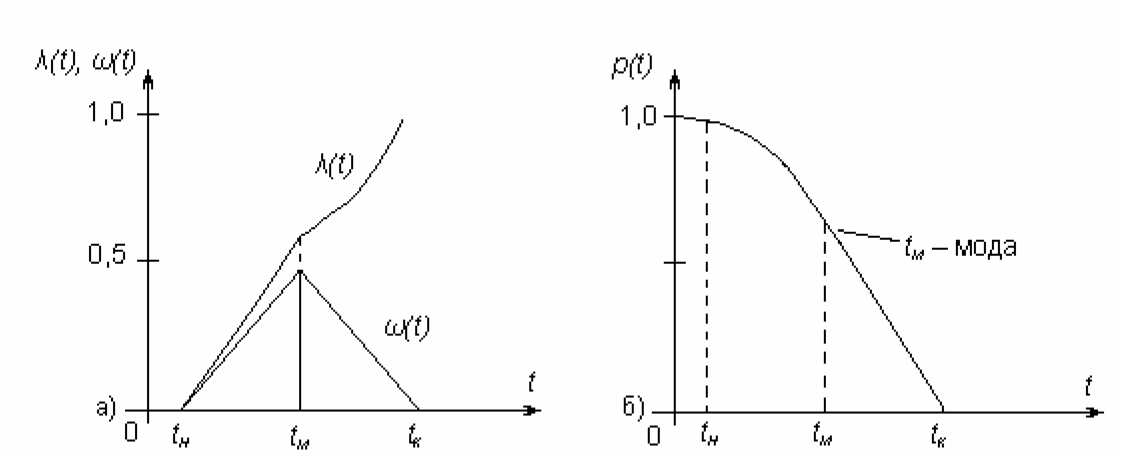


Рис. 2.7. Графики треугольного распределения:
а) плотности распределения *ω(t)* и интенсивности отказов *λ(t);*
б) функции надежности *p(t)*.

Обозначим значение плотности распределения в точке моды через

$\omega(t_м) = h,$ тогда $\frac{1}{2}h(t_к - t_м) = 1.$

В этом случае плотность распределения *ω(t)* можно записать в виде следующих формул:

$$\omega(t) = \begin{cases} \dfrac{2(t - t_н)}{(t_к - t_н)(t_м - t_н)} & \text{при } t_н \le t \le t_м, \\ \dfrac{2(t_к - t)}{(t_к - t_н)(t_к - t_м)} & \text{при } t_м \le t \le t_к. \end{cases} \qquad (2.20)$$

Функция надежности *p(t)* определяется как:

$$p(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{(t - t_н)^2}{(t_к - t_н)(t_м - t_н)} & \text{при } t_н \le t \le t_м, \\ \dfrac{(t_к - t)^2}{(t_к - t_н)(t_к - t_м)} & \text{при } t_м \le t \le t_к. \end{cases} \qquad (2.21)$$

Интенсивность отказов *λ(t)* при этом равна:

$$\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{2(t - t_н)}{(t_к - t_н)(t_м - t_н) - (t - t_н)^2} & \text{при } t_н \le t \le t_м, \\ \dfrac{2}{t_к - t} & \text{при } t_м \le t \le t_к. \end{cases} \qquad (2.22)$$

Во многих случаях при расчете надежности ТС удобно использовать в качестве параметров *Δ*-распределения скорости изменения плотности распределения *γ*:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{h}{t_м - t_н} = \frac{2}{(t_к - t_н)(t_м - t_н)} \quad \text{при} \quad t_н \le t \le t_м \\ \gamma_2 &= \frac{h}{t_к - t_м} = \frac{2}{(t_к - t_н)(t_к - t_м)} \quad \text{при} \quad t_м \le t \le t_к \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

Медиана $t_{ме}$ *Δ*-распределения может быть найдена из уравнения:

$$p(t_{ме}) = \frac{1}{2}.$$

В результате решения этого уравнения получим:

$$t_{ме} = t_к - \frac{1}{2}\sqrt{2(t_к - t_н)(t_к - t_м)}. \tag{2.24}$$

Среднее время наработки на отказ $T_{ср}$:

$$T_{ср} = \int_{t_н}^{t_к} t\omega(t)dt = \frac{1}{3}(t_н + t_м + t_к). \tag{2.25}$$

Перейдем теперь к нормированному *Δ*-распределению. Для этого применим следующую подстановку:

$$J = \frac{t - t_н}{t_к - t_н}.$$

При $t = t_н \Rightarrow J_м = 0$, при $t = t_к \Rightarrow J_к = 0$.

Обозначим:

$$J_м = \frac{t_м - t_н}{t_к - t_н}; \quad J_{ме} = \frac{t_{ме} - t_н}{t_к - t_н}; \quad T_у = \frac{T_{ср} - t_н}{t_к - t_н}.$$

После преобразований с учетом (2.24) и (2.25) получим:

$$J_{ме} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2(1 - J_м)},$$

отсюда $T_у = \frac{1}{3}(1 + J_м).$ (2.26)

Функция надежности в этом случае может быть выражена через вспомогательную функцию $Ф_Δ(J)$ следующим образом:

$$p(t) = 1 - Ф_Δ(J), \tag{2.27}$$

где

$$Ф_Δ(J) = \begin{cases} \dfrac{J^2}{J_м} \quad \text{при} \quad 0 \le J \le J_м, \\ J_м + \dfrac{(J - J_м)(2 - J - J_м)}{1 - J_м} \quad \text{при} \quad J_м \le J \le 1. \end{cases} \tag{2.28}$$

Функция $Ф_Δ(J)$ из выражения (2.28) – нормированная функция, в которой $J = \frac{t - t_н}{t_к - t_н}$.

Значения функции $Ф_Δ(J)$ определяется обычно по таблицам, приведенным в литературе по теории надежности. Для этого, задаваясь *t*, по известным $t_н$, $t_м$, $t_к$ вычисляются J и $J_м$, а по ним определяются значения функции $Ф_Δ(J)$ (рис. 2.8).

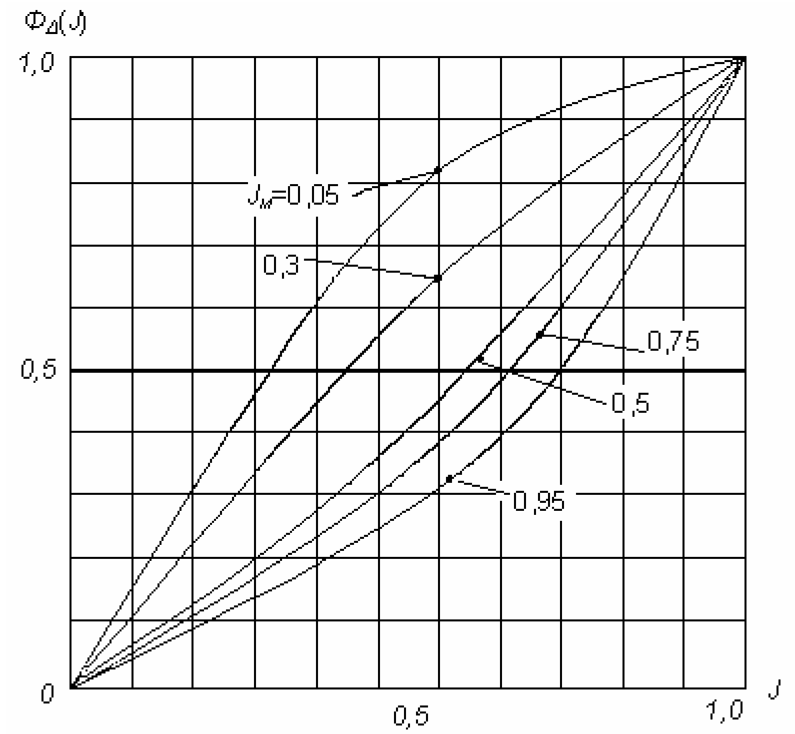


Рис. 2.6. Значение нормированной функции $Δ$-распределения $Ф_Δ(J)$.

2.7. Сумма (суперпозиция) распределений

При априорном анализе надежности ТС для получения теоретического распределения, близкого к экспериментальному, иногда применяют следующий прием.

Плотность распределения наработки до отказа считается равной сумме:

$$\omega(t) = c_1\omega_1(t) + c_2\omega_2(t), \quad (2.29)$$

где:

$\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ – соответственно, теоретические распределения определенного вида,

c_1 и c_2 – коэффициенты веса, учитывающие влияние различных слагаемых, причем $c_1+c_2=1$.

Пример. Рассмотрим суперпозицию двух показательных распределений:

$$\omega(t) = c_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Функция надежности для этого случая имеет вид:

$$p(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Интенсивность отказов на основании (1.8) равна:

$$\lambda(t) = \frac{\omega(t)}{p(t)} = \frac{c_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}}.$$

При малых t значения $e^{-\lambda_1 t}$ и $e^{-\lambda_2 t}$ близки к 1 и $\lambda(t) \approx c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2$ (рис. 2.9).

При $t \to \infty$ члены, содержащие $e^{-\lambda_2 t}$ малы и $\lambda(t) \to \lambda_1$.

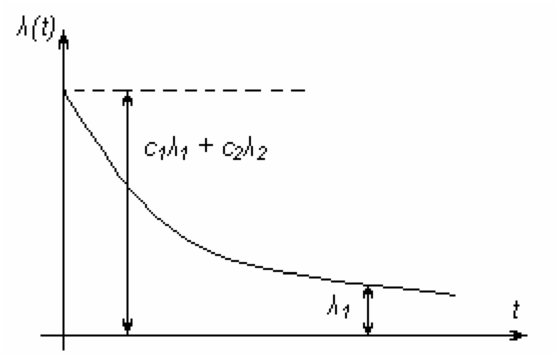


Рис. 2.9. График *λ(t)* для суммы двух показательных распределений при $\lambda_2 > \lambda_1$.

Средняя наработка на отказ:

$$T_{cp} = \frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2}.$$

2.8. Нормальное и усеченное нормальное распределения

Для «стареющих» элементов в качестве распределения интервала БР наряду с распределением Вейбулла при δ>1 используют нормальное распределение.

Плотность распределения наработки до отказа при нормальном распределении имеет вид (рис. 2.10):

$$\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t - T_{cp})^2}{2\sigma_T^2}\right). \quad (2.30)$$

Это распределение зависит от двух параметров: среднего значения T_{cp} и и дисперсии σ_T^2 времени безотказной работы.

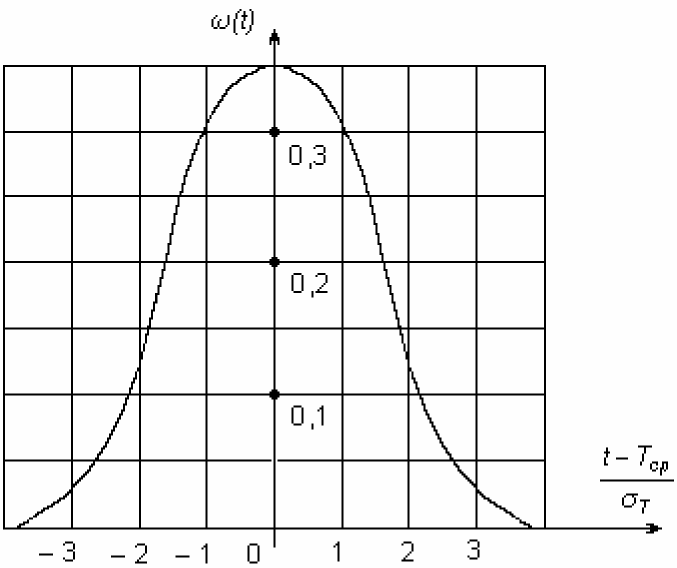


Рис. 2.10. Плотность распределения наработки до отказа для нормального распределения.

Функция надежности в этом случае равна:

$$p(t)=\int_t^{\infty}\omega(\tau)d\tau=\int_t^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_T^2}}e^{-\frac{(\tau-T_{cp})^2}{2\sigma_T^2}}d\tau=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{t-T_{cp}}{\sigma_T}}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau-T_{cp}}{\sigma_T}\right)^2}d\left(\frac{\tau-T_{cp}}{\sigma_T}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{t-T_{cp}}{\sigma_T}}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx. \qquad (2.31)$$

Вероятность отказа на интервале (0,*t*) (функция ненадежности) равна:

$$q(t)=1-p(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{t-T_{cp}}{\sigma_T}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx, \qquad (2.32)$$

т.е. $q(t)=F\left(\frac{t-T_{cp}}{\sigma_T}\right)$, (2.33)

где $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$ (2.34)

Выражение (2.34) – это интеграл Лапласа, таблицы которого приводятся во всех математических справочниках и литературе по теории вероятности.

Недостаток рассмотренной модели очевиден и связан с тем, что функция плотности распределения (2.30) не является односторонней, т.е. она отлична от 0 при t<0.

Этот недостаток несущественен, если T_{cp}>>σ_T, т.к. в этом случае значение функции плотности распределения *ω(t)* при t<0 мало и кривой распределения при отрицательных значениях *t* можно пренебречь.

Однако если условие T_{cp}>>σ_T не выполняется, то использование нормального распределения может привести к заметным погрешностям. Поэтому эту модель несколько модифицируют. Кривую распределения *ω(t)* (рис. 2.10) сдвигают несколько вправо, а оставшуюся левую часть кривой распределения при t<0 отсекают (рис. 2.11).

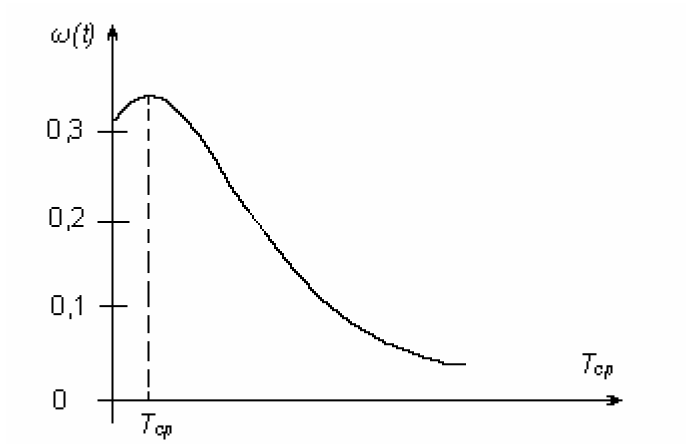


Рис. 2.11. Усеченное нормальное распределение.

Однако при этом мы нарушаем условие нормирования плотности распределения (рис. 2.10):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(t)dt = 1,$$

так как в нашем случае (рис. 2.11), когда *ω(t)*=0 при *t*<0, условие нормирования будет уже другим, а именно:

$$\int_{0}^{\infty} \omega(t)dt = 1.$$

Для сохранения условия нормирования вводим *C* – нормирующий множитель:

$$C \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_T^2}} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_T^2}\left(t - T_{cp}\right)^2\right\}dt = 1. \tag{2.35}$$

Из уравнения (2.35) легко найти значение *C*:

$$C = \left[F\left(\frac{T_{cp}}{\sigma_T}\right)\right]^{-1}. \tag{2.36}$$

<u>Замечание:</u>

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{(a)}^{(b)} f\{\ \ (x)\}d\ \ (x).$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_T^2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t-T_{cp}}{\sigma_T}\right)^2} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{T_{cp}-t}{\sigma_T}\right)^2} \frac{1}{\sigma_T}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{T_{cp}}{\sigma_T}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{T_{cp}-t}{\sigma_T}\right)^2} d\left(\frac{T_{cp}-t}{\sigma_T}\right) =$$

$$= F\left(\frac{T_{cp}}{\sigma_T}\right).$$

Таким образом, приходим к модели усеченного нормального распределения. Для него плотность распределения наработки на отказ:

$$\omega(t) = \frac{1}{F\left(\frac{T_{cp}}{\sigma_T}\right)\cdot\sqrt{2\pi\sigma_T^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-T_{cp}}{\sigma_T}\right)^2\right\} \quad \text{при } t \ge 0. \tag{2.37}$$

Функция надежности будет равна (рис.2.12):

$$p(t) = \int_t^{\infty} \omega(\tau)d\tau = \frac{1}{F\left(\frac{T_{cp}}{\sigma_T}\right)} \cdot \underbrace{\int_t^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_T^2} e - \frac{\left(\tau - T_{cp}\right)^2}{2\sigma_T^2} d\tau}_{\substack{P'_н(t)=1-q_н(t) \\ \text{при норм. распределении}}} =$$

$$= \frac{1}{F\left(\frac{T_{cp}}{\sigma_T}\right)} \cdot \left[1 - q(t)\right] = \frac{1 - F\left(\frac{t-T_{cp}}{\sigma_T}\right)}{F\left(\frac{T_{cp}}{\sigma_T}\right)} \quad \text{при } t \ge 0. \tag{2.38}$$

Из выражений (2.37) и (2.38) находим функцию интенсивности отказов *λ(t)* при усеченном нормальном законе распределения длительности БР. Она имеет вид (рис. 2.12):

$$\lambda(t)=\frac{\omega(t)}{p(t)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_T^2}}\exp\left\{-\frac{\left(t-T_{cp}\right)^2}{2{\sigma_T}^2}\right\}\cdot\left[1-F\left(\frac{t-T_{cp}}{\sigma_T}\right)\right]^{-1}. \qquad (2.39)$$

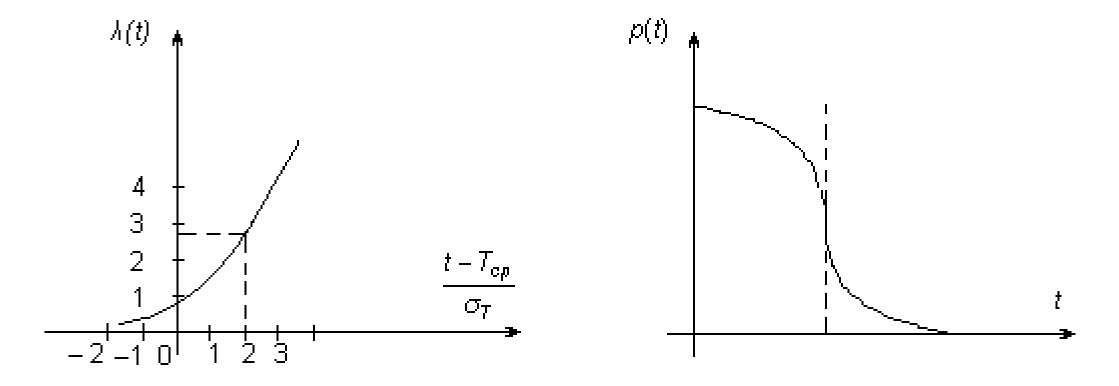


Рис. 2.12. Графики функции надежности и интенсивности отказов при усеченном нормальном законе распределения.

Как видно из графика (рис. 2.12.) при усеченном нормальном распределении *λ(t)* с течением времени резко возрастает. Это и характерно для «стареющих» элементов. Необходимо заметить, что функция *λ(t)* (2.39) справедлива также и для неусеченного нормального закона распределения.

При больших значениях *t* ИО в рассматриваемом случае возрастает по линейному закону:

$$\lambda(t)\sim\left(t-T_{cp}\right)\big/\sigma_T^2. \qquad (2.40)$$

Следует иметь в виду, что параметр T_{cp}. усеченного нормального распределения не равен среднему времени БР при использовании этого распределения в качестве модели безотказности.

В этом случае среднее время БР $(T_{cp})_{yc}$ будет равно:

$$\left(T_{cp}\right)_{yc}=\int_0^\infty p(t)dt=\frac{1}{F\left(\dfrac{T_{cp}}{\sigma_T}\right)}\int_0^\infty\left[1-F\left(\frac{t-T_{cp}}{\sigma_T}\right)\right]dt.$$

Решая это уравнение, получим:

$$\left(T_{cp}\right)_{yc}=T_{cp}+\frac{\sigma_T}{F\left(\dfrac{T_{cp}}{\sigma_T}\right)\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{{T_{cp}}^2}{2\delta_T^2}}. \qquad (2.41)$$

Если при этом $T_{cp}>>\sigma_T$, то $(T_{cp})_{yc}\approx T_{cp}$.

<u>Пример.</u> Наработка ТС до отказа подчинена усеченному нормальному закону с параметрами T_{cp}=8000 ч, σ_T =2000 ч. *Определить* основные ПН безотказной работы ТС за *t*=4000 ч.

<u>Решение.</u>

Согласно (2.38) определяем:

$$P(4000)=\frac{F\left(\frac{4000-8000}{2000}\right)}{F\left(\frac{8000}{2000}\right)}=\frac{F(-2)}{F(4)}=\frac{1-F(-2)}{F(4)}.$$

По таблицам из справочника по математике находим значения функции *F(x)* (интеграл Лапласа):

$F(2)$=0,97725; $F(4)$=1;

$$P(4000)=\frac{1-0{,}97725}{1}=0{,}2275.$$

Частота отказов согласно (2.37) равна:

$$\omega(t)=\frac{1}{F\left(T_{cp}/\sigma_T\right)\cdot\sigma_T\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t-T_{cp}}{\sigma_T}}.$$

Т.к. $F\left(T_{cp}/\sigma_T\right)=F(4)=1,$ то:

$$\omega(t)=\frac{\varphi(x)}{\sigma_T}, \qquad \text{где} \quad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x^2/2}.$$

Значение функции *φ(x)* находим по таблицам из справочника. В нашем случае:

$$x=\frac{t-T_{cp}}{\sigma_T}.$$

Таким образом, получаем:

$$\omega(4000)=\frac{\varphi\left(\frac{4000-8000}{2000}\right)}{\sigma_T}=\frac{\varphi(-2)}{2000}=\frac{\varphi(2)}{2000}=\frac{0.05399}{2000}=2{,}7\cdot10^{-5}\ 1/\text{ч}.$$

Согласно (1.17):

$$\lambda(t)=\frac{\omega(t)}{p(t)}=\frac{2{,}7\cdot10^{-5}}{0{,}02275}=11{,}87\cdot10^{-4}\ 1/\text{ч}.$$

На основании (2.41) средняя наработка на отказ:

$$\left(T_{cp}\right)_{yc}=T_{cp}+\frac{\sigma_T}{F\left(T_{cp}/\sigma_T\right)\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{T_{cp}{}^2}{2\delta_T^2}}=8000+\frac{2000\cdot e^{-8}}{F(4)\cdot\sqrt{2\pi}}=8000{,}26\ \text{ч}.$$

2.9. Экспоненциальное распределение длительности восстановления

Наиболее распространенным распределением длительности восстановления в теории надежности является экспоненциальное распределение.

В этом случае вероятность восстановления $p_в(t)$ имеет вид:

$$p_в(t)=1-e^{\mu t}, \qquad t\ge0,\ \ \mu>0. \tag{2.42}$$

Плотность распределения времени восстановления равна:

$$\omega_в(t)=p'_в(t)=\mu e^{-\mu t}, \qquad t\ge0,\ \ \mu>0. \tag{2.43}$$

Интенсивность восстановления равна:

$$\mu(t) = \frac{\omega_в(t)}{1 - p_в(t)} = \mu. \qquad (2.44)$$

Таким образом, величина μ полностью и однозначно определяет экспоненциальную модель восстановления.

Среднее время восстановления для экспоненциальной модели равно:

$$T_в = \int_0^\infty [1 - p_в(t)]dt = \int_0^\infty e^{-\mu t} dt = \frac{1}{\mu}. \qquad (2.45)$$

Заменяя μ на $1/T_в$ в выражении (2.42), получим:

$$p_в(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T_в}}, \qquad t \geq 0, \; T_в > 0 \qquad (2.46)$$

Дисперсия времени восстановления для экспоненциальной модели будет равна:

$$\sigma_в^2 = 2\int_0^\infty t[1 - p_в(t)]dt - T_в^2 = 2\int_0^\infty te^{-\mu t}dt - \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2} = T_в^2. \qquad (2.47)$$

Общее свойство экспоненциальной модели характерно и для экспоненциальной модели восстановления.

Если устройство не было восстановлено на интервале времени τ, то распределение длительности восстановления, отсчитываемое от момента τ, вновь будет подчиняться экспоненциальному закону.

2.10. Законы распределения дискретных случайных величин

Приведенные в предыдущих параграфах распределения характеризуют непрерывные случайные величины, например, время безотказной работы или время восстановления.

Но, в ряде случаев, при расчете надежности ТС возникает необходимость оценки дискретных случайных величин, например, числа отказов в течение заданного промежутка времени.

Рассмотрим наиболее часто используемые при расчете надежности распределения дискретных случайных величин.

1. <u>Биноминальное распределение</u>

Для этого распределения возможные значения случайной величины 0,1,2…,n.

Вероятность появления m благоприятствующих событий из общего числа n событий равна:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (2.48)$$

Математическое ожидание и дисперсия соответственно равны:

$$\mu[m] = np; \qquad \sigma_T^2[m] = npq, \qquad (2.49)$$

где p – вероятность осуществления события при однократном испытании; q=1–p.

2. <u>Распределение Пуассона</u>

Возможные значения случайной величины для этого распределения 0,1,2…,n. Вероятность появления m событий равна:

$$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}. \qquad (2.50)$$

Математическое ожидание и дисперсия соответственно равны:

$$\mu[m] = \lambda; \qquad \sigma_T^2[m] = \lambda, \qquad (2.51)$$

где λ – параметр распределения.

3. Геометрическое распределение

значения случайной величины 0,1,2…,n.

$$P_m = pq^{m-1}. \qquad (2.52)$$

Математическое ожидание и дисперсия равны:

$$\mu[m] = \frac{1}{p}; \qquad \sigma_T^2[m] = \frac{q}{p^2}, \qquad (2.53)$$

где p – вероятность появления события при однократном испытании; q=1–p.

Вопросы для самоконтроля:

1. Проанализируйте три «периода жизни» ТС.
2. Какие законы распределения и при каких условиях описывают все три понятия «периода жизни» ТС?
3. Покажите (доказательно) какие законы распределения описывают «период старения» ТС.
4. Какие законы распределения и почему можно использовать для описания «периода нормальной эксплуатации» ТС?
5. Перечислите основные распределения дискретных случайных величин, используемых для расчета надежности ТС.
6. Приведите примеры использования различных распределений дискретных случайных величин.

Глава III. Апостериорный анализ (расчет) надежности ТС

3.1 Постановка задачи

Как уже указывалось в первой главе, апостериорный анализ надежности предполагает наличие набранной статистики об отказах и восстановлениях испытываемых технических объектов (систем, устройств, структурных блоков ТС, функциональных узлов и элементов) и определении статистических оценок основных показателей надежности с определенной доверительной вероятностью, достаточной для оценки надежности этих объектов.

В качестве технических объектов, поставленных на испытания по надежности, могут быть использованы:

- элементы, ИМС БИС принципиальных (электрических) схем;
- отдельные функциональные узлы (на уровне функциональных схем);
- отдельные структурные блоки (на уровне структурных схем);
- наконец, в целом готовые устройства, приборы, ТС, т.е. любая техническая аппаратура, изготовленная либо в виде макета, либо опытного образца, либо изготовленная серийно промышленностью.

Все зависит от того, какая цель преследуется при испытаниях на надежность.

Если речь идет о надежности готового разработанного устройства, системы, то испытывается на надежность либо весь объект целиком, либо его отдельные части, о которых у разработчика есть сомнения в их надежности (структурные блоки, функциональные узлы и т.д.). Если речь идет о надежности, серийно изготавливаемой элементной базы, то на испытания ставятся отдельные элементы, ИМС и БИС.

При этом выборка, т.е. количество поставленных на испытания объектов, должна быть в достаточной степени репрезентативной, а испытания считаются законченными, если число отказов достигает величины, достаточной для оценки надежности с определенной доверительной вероятностью.

При апостериорном расчете надежности с использованием методов математической статистики определяются, как уже говорилось, статистические оценки ПН, как невосстанавливаемых, так и восстанавливаемых ТС.

Исходя из изложенного, для проведения апостериорного расчета надежности используются две модели испытаний:

- оценка надежности невосстанавливаемых ЭРН;
- оценка надежности восстанавливаемых ЭРН.

Объекты испытаний будем в дальнейшем называть элементами расчета надежности (ЭРН). В качестве ЭРН может быть: элемент, функциональный узел, структурный блок, устройство, подсистема, система и т.д.

3.2.Оценка надежности невосстанавливаемого ЭРН

Рассмотрим следующую модель испытаний.

Пусть на испытаниях находятся N ЭРН и пусть испытания считаются законченными, если все они отказали. Причем вместо отказавших ЭРН отремонтированные или новые не ставятся.

В этом случае в качестве оценок ПН используются:

$\overline{p(t)}$, $\overline{\omega(t)}$, $\overline{\lambda(t)}$, $\overline{T_{ср}}$

– это *<u>статистические оценки ПН невосстанавливаемых ЭРН</u>*:

1. *Статистическая оценка:*

$$p(t) \to \overline{p(t)} = \frac{N - n(t)}{N}, \qquad (3.1)$$

где N – число ЭРН в начале испытаний;
$n(t)$ – число отказавших ЭРН за время t;

$$\overline{q(t)} = \frac{n(t)}{N}. \qquad (3.2)$$

2. *Статической оценкой частоты отказов* называется отношение числа отказавших ЭРН в единицу времени к первоначальному числу испытываемых при условии, что отказавшие ЭРН не восстанавливаются:

$$\overline{\omega(t)} = \frac{n(\Delta t)}{N \cdot \Delta t}, \qquad (3.3)$$

где $n(\Delta t)$ – число отказавших ЭРН в интервале времени от $\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)$ до $\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)$.

3. *Статической оценкой интенсивности отказов* называется отношение числа отказавших ЭРН в единицу времени к среднему числу исправно работающих в данном интервале времени:

$$\lambda(t) \to \overline{\lambda(t)} = \frac{n(\Delta t)}{N_{ср} \cdot \Delta t}; \qquad (3.4)$$

где $N_{ср} = \frac{N_i + N_{i+1}}{2}$ – среднее число неправильно работающих ЭРН;
N_i – число исправно работающих ЭРН в начале Δt;
N_{i+1} – число исправно работающих ЭРН в конце Δt.

4. *Статической оценкой средней наработки до первого отказа* является отношение:

$$\overline{T_{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N}, \qquad (3.5)$$

где t_i – время БР i-го ЭРН.

Для того чтобы определить $\overline{T_{ср}}$ из (3.5) необходимо знать моменты времени выхода их строя всех ЭРН, а это в ряде случаев неудобно.

Поэтому в том случае, когда имеются данные о количестве отказавших ЭРН в каждом i-том интервале времени статистическую оценку средней наработки лучше определять по следующей формуле:

$$\overline{T_{ср}} \approx \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i t_{ср_i}}{N}, \qquad (3.6)$$

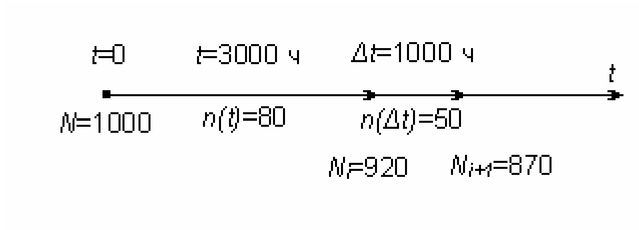
где $t_{ср_i} = \frac{t_{i-1} + t_i}{2}$; $\quad m = \frac{t_k}{\Delta t}$;

t_{i-1} – время начала i-того интервала;
t_i – время конца i-того интервала;
t_k – время, в течение которого отказали все ЭРН;
n_i – число отказавших ЭРН в каждом i-том интервале времени;
$\Delta t = t_i - t_{i-1}$ – интервал времени.

Пример.

На испытание поставлено 1000 ЭРН. За 3000 часов отказало 80 ЭРН, а за интервал времени 3000÷4000 часов отказало еще 50 ЭРН.

Определить статистические оценки основных ПН этой партии ЭРН за 3000 часов и в интервале времени 3000÷4000 часов.



Решение.

Согласно (3.1) и (3.2) определяем:

$$\overline{P(3000)} = \frac{N - n(t)}{N} = \frac{1000 - 80}{1000} = 0{,}92;$$

$$\overline{q(3000)} = \frac{n(t)}{N} = \frac{80}{1000} = 0{,}08;$$

$$\overline{P(3500)} = \frac{N - n(3500)}{N} = \frac{1000 - 105}{1000} = 0{,}895,$$

где

$$n(3500) = N - N_{cp} = N - \frac{N_i + N_{i+1}}{2} = 1000 - \frac{920 + 870}{2} = 1000 - 895 = 105$$

– число отказавших ЭРН за время t=3500 ч (середина интервала).

Согласно (3.3) и (3.4) получаем:

$$\overline{\omega(3000)} = \frac{n(\Delta t)}{N \cdot \Delta t} = \frac{80}{1000 \cdot 3000} \approx 2{,}67 \cdot 10^{-5} \ \text{1/ч};$$

$$\overline{\omega(3500)} = \frac{50}{1000 \cdot 1000} = 5 \cdot 10^{-5} \ \text{1/ч};$$

$$\overline{\lambda(3000)} = \frac{n(\Delta t)}{N_{cp} \cdot \Delta t} = \frac{80}{895 \cdot 3000} \approx 2{,}98 \cdot 10^{-5} \ \text{1/ч};$$

$$\overline{\lambda(3500)} = \frac{50}{895 \cdot 1000} \approx 5{,}59 \cdot 10^{-5} \ \text{1/ч}.$$

3.3. Оценка надежности восстанавливаемого ЭРН

Рассмотрим следующую модель испытаний.

Пусть на испытаниях находятся N ЭРН и пусть отказавшие ЭРН немедленно заменяются исправными (новыми или отремонтированными). Испытания считаются законченными, если число отказов достигает величины, достаточной для оценки надежности с определенной доверительной вероятностью.

Если не учитывать времени, необходимого на восстановление системы, то *количественными характеристиками надежности* являются:

- параметр потока отказов $\Omega(t)$,
- наработка на отказ t_{cp}.

1. *Статистической оценкой параметра потока отказов* называется отношение числа отказавших ЭРН в единицу времени к числу испытываемых ЭРН при условии, что все вышедшие из строя ЭРН заменяются исправленными:

$$\overline{\Omega(t)} = \frac{n(\Delta t)}{N \cdot \Delta t}, \qquad (3.7)$$

где $n(\Delta t)$ – число отказавших образцов в интервале времени от $\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)$ до $\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)$;

N – число испытываемых ЭРН;

Δt – интервал времени.

Выражение (3.7) является статистическим определением $\Omega(t)$.

2. *Статистической оценкой наработки на отказ* называется среднее значение времени между соседними отказами.

Эта характеристика определяется по статистическим данным об отказах по формуле:

$$\overline{t_{cp}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}, \qquad (3.8)$$

где t_i – время исправной работы ЭРН между $(i\text{-}1)$-ым и i-ым отказами,

n – число отказов за некоторое время t.

Из формулы (3.8) видно, что наработка определяется по данным испытания одного ЭРН. Если на испытании находится N ЭРН в течение времени t, то наработка на отказ определяется из формулы:

$$\overline{t_{cp}} = \frac{\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_j} t_{ij}}{\sum_{j=1}^{N} n_j}, \qquad (3.9)$$

где t_{ij} – время исправной работы j-го ЭРН между $(i\text{-}1)$-ым и i-ым отказами;

n_j – число отказов j-го ЭРН за время t.

Рассмотренные оценки ПН $\overline{\Omega(t)}$ и $\overline{t_{cp}}$ характеризуют надежность без учета времени, требующегося на восстановление. Следовательно, они не характеризуют готовности системы к выполнению своих функций в нужное время. Для этой цели вводят такие оценки ПН, как коэффициенты готовности и простоя.

Статистической оценкой коэффициента готовности $\overline{K_Г}$ называют отношение времени исправной работы к сумме времен исправной работы и вынужденных простоев, взятых за один и тот же календарный срок.

Согласно определению:

$$\overline{K_Г} = \frac{t_р}{t_р + t_П}, \qquad (3.10)$$

где $t_р$ – суммарное время исправной работы,
$t_П$ – суммарное время вынужденного простоя,

$$t_р = \sum_{i=1}^{n} t_{рi}; \qquad t_П = \sum_{i=1}^{n} t_{Пi}, \qquad (3.11)$$

где $t_{рi}$ – время исправной работы между *(i-1)*-ым и *i*-ым отказами,
$t_{Пi}$ – время вынужденного простоя после *i*-го отказа,
n – число отказов (ремонтов) ЭРН.

Выражение (3.10) является статистическим определением $K_Г$.

Для перехода к вероятностной трактовке величины $t_р$ и $t_П$ заменяются математическими ожиданиями времени между соседними отказами и временем восстановления, соответственно. Тогда:

$$K_Г = \frac{t_{ср}}{t_{ср} + t_в}, \qquad (3.12)$$

где $t_{ср}$ – среднее время между отказами,
$t_в$ – среднее время восстановления.

Статистической оценкой коэффициента вынужденного простоя $\overline{K_П}$ называют отношение времени вынужденного простоя к сумме времен исправной работы и вынужденных простоев, взятых за один и тот же календарный срок.

$$\overline{K_П} = \frac{t_П}{t_р + t_П} \qquad (3.13)$$

или, переходя к средним величинам, т.е. вероятностной мере:

$$K_П = \frac{t_в}{t_{ср} + t_в}. \qquad (3.14)$$

$K_П$ и $K_Г$ связаны между собой зависимостью (1.72):

$$K_П = 1 - K_Г.$$

При анализе надежности восстанавливаемых ТС коэффициент $K_Г$ обычно вычисляют по формуле (1.71):

$$K_Г = \frac{T_{ср}}{T_{ср} + T_в}.$$

Эта формула верна только в том случае, если поток отказов простейший и тогда:

$$t_{ср} = T_{ср}, \qquad (3.15)$$

где $t_{ср}$ – среднее время между отказами;
$T_{ср}$ – наработка до первого отказа.

<u>Пример.</u>

На испытания поставлены три экземпляра однотипных ТС. За период наблюдения было зафиксировано 6 отказов первой ТС, 11 и 8 отказов соответственно второй и третьей ТС. При этом наработка первой ТС составила 181 час, второй – 329 часов и третьей – 245 часов.

Определить наработку аппаратуры на отказ.

Решение.

Суммарная наработка трех ТС равна:

$$t_{\Sigma} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_j} t_{ij} = 181 + 329 + 245 = 755 \text{ ч.}$$

Суммарное количество отказов ТС равно:

$$n_{\Sigma} = \sum_{j=1}^{N} n_j = 6 + 11 + 8 = 25 \text{ отказов.}$$

Согласно (3.9) находим статистическую оценку средней наработки на отказ трех экземпляров ТС:

$$\overline{t_{cp}} = \frac{\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_j} t_{ij}}{\sum_{j=1}^{N} n_j} = \frac{t_{\Sigma}}{n_{\Sigma}} = \frac{755}{25} = 30{,}2 \text{ ч.}$$

Вопросы для самоконтроля:

1. В чем заключается принципиальное отличие априорного и апостериорного расчета надежности ТС?
2. Что обязательно надо учитывать при расчете статистической оценки вероятности безотказной работы партии ЭРН в интервале времени?
3. Покажите на примере каким образом можно осуществить переход от статистических оценок ПН к вероятностной мере.

Глава IV. Мероприятия по формированию показателей надёжности на различных стадиях проектирования

4.1. Выбор и обоснование показателей надежности

При проектировании ТС необходимо осуществлять *ряд мероприятий по обеспечению надежности*. Основными из них являются следующие:

1. Выбор и обоснование принципов техобслуживания.
2. Выбор основного показателя надежности.
3. Назначение норм надежности.
4. Распределение норм надежности системы по элементам.

1. Выбор и обоснование принципов техобслуживания

Существуют следующие три основных вида технического обслуживания и ремонта:

1. По календарным срокам независимо от наработки объекта.
2. По выработке установленных заранее межремонтных ресурсов.
3. По техническому состоянию.

Техобслуживание и ремонт по календарным срокам приводят к неоправданным материальным затратам, т.к. не учитывают использовался объект или нет.

Техобслуживание и ремонт по выработке ресурса незначительно усложняет конструкцию объекта (за счет измерителя наработки). Организация техобслуживания остается здесь сравнительно простой. Однако экономия средств используется не полностью.

При техобслуживании по техническому состоянию периодически контролируется определяющий параметр. Решение о замене, ремонте и техобслуживании принимается по результатам контроля, когда определяющий параметр характеризует приближение системы к отказу или к границе допуска. При этом значительно сокращаются затраты на обслуживание, на дорогостоящие элементы и повышается надежность.

2. Принципы выбора показателей надежности

При сравнении объектов по надежности оказывается, что показатели надежности (ПН) неравнозначны.

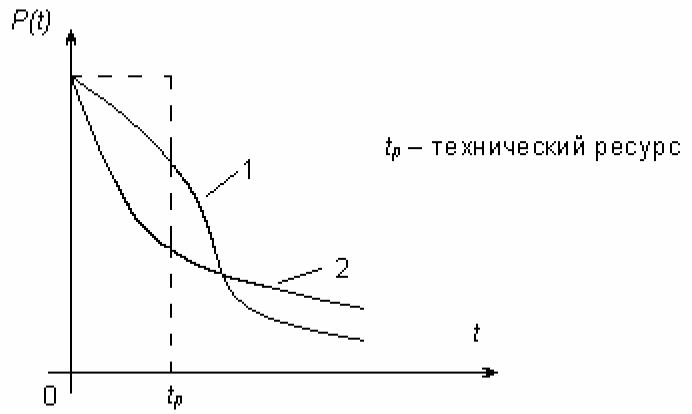


Рис. 4.1. Графики функций надежности.

В качестве примера рассмотрим две модификации объекта, имеющие разные функции надежности 1 и 2 (рис. 4.1).

В течение технического ресурса t_p вероятность безотказной работы равна $P_1(t)>P_2(t)$. Однако значение средней наработки на отказ

$$T_{cp} = \int_0^\infty P(t)dt$$

(равное площади под кривой $P(t)$)) для первой модификации меньше, чем для второй, т.е. $T_{cp1} < T_{cp1}$.

Поэтому, если принять во внимание вероятность безотказной работы (БР) в течение ресурса, то предпочтительнее будет первая модификация. Если же принять во внимание среднюю наработку на отказ, то предпочтительней будет вторая модификация.

Отсюда вытекает необходимость разработки методики выбора нормируемых показателей надежности.

Первая такая методика была описана в 1968 году в работе «Общая методика выбора номенклатуры нормируемых показателей надежности технических устройств для включения в ГОСТ, ТУ, ТЗ и в систему планирования», М.: ВНИИС, 1968. Согласно этой методике основным считается тот показатель надежности, который входит в формулу среднего экономического эффекта от использования изделия.

Аналогично построена методика, опубликованная в 1972 году в работе «Методика выбора показателей для оценки надежности сложных технических систем», М.: Стандарты, 1972.

Эти методики создали основы научного подхода к рассматриваемой проблеме. Недостаток их заключается в том, что здесь показатели выбираются для изолированных изделий и мало учитывают необходимость обеспечения качества функционирования систем более высокого уровня.

Поэтому сейчас часто используют более *общую методику выбора показателей надежности*. Она состоит в следующем:

1. Собирают сведения о системе, в которую входит рассматриваемый объект, и последовательно анализируют факторы, влияющие на выбор показателей надежности.
2. Устанавливают назначение объекта. При этом все *объекты* делятся на три группы:
   а) объекты, предназначенные для работы в системах, эффективность которых может быть оценена экономическими показателями;
   б) объекты, функционирование которых может быть связано с обеспечением безопасности;
   в) объекты, для которых нельзя указать назначение систем, в которых они будут использованы.

Рассмотрим *объекты первого типа*.

Большинство применяемых показателей экономической эффективность являются функциями от математического ожидания ξ и η, где:

ξ – выходной полезный эффект,

η – затраты на техобслуживание и эксплуатацию.

Величины ξ и η зависят от случайных величин: наработки до отказа T, времени (наработки) между отказами $\widetilde{T}$, времени восстановления $T_в$.

Для восстанавливаемых объектов, когда перерывы в работе допустимы, имеем зависимость:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= {}_{в}(\tilde{T}, T_{в}) \\ \eta &= {}_{\eta}(\tilde{T}, T_{в}) \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

Затем получают выражения для математического ожидания величин ξ и η (часто предварительно линеаризовав выражения (4.1) с помощью ряда Тейлора):

$$\left.\begin{aligned} m_{\xi} &= Э = {}_{в}(T_{ср}, T_{ср_{в}}) \\ m_{\eta} &= W = {}_{\eta}(T_{ср}, T_{ср_{в}}) \end{aligned}\right\}, \qquad (4.2)$$

где $Э$ – средний выходной эффект,
W – средние затраты,
$T_{ср}$, $T_{срв}$ – среднее время наработки на отказ и среднее время восстановления.

Таким образом, для восстанавливаемых объектов, у которых допустимы перерывы в работе, основными показателями надежности являются $T_{ср}$ и $T_{срв}$ или комплексный показатель $K_{Г}$, который зависит от этих двух показателей.

Для восстанавливаемых объектов, у которых перерывы в работе не допустимы, имеем релейную зависимость функции φ, т.е. полезный эффект может быть получен лишь при БР в течение заданного времени (t_j, t_{j+1}). Поэтому для таких систем выбирается интервальный показатель надежности – *вероятность БР в течение заданного интервала времени*.

При назначении показателей надежности *систем второго типа* (из условий безопасности) необходимо выделить основные факторы, влияющие на безопасность. Соответствующие математические модели должны учитывать случайные процессы, протекающие в системе поля появления отказов.

Для *третьей группы объектов*, для которых нельзя указать тип системы, целесообразно назначать одну любую полную характеристику надежности:

1) Для неремонтируемых изделий – функция надежности $P(t)$ или плотность распределения наработки до отказа $\omega(t)$, или интенсивности отказов $\lambda(t)$.
2) Для ремонтируемых изделий невосстанавливаемых в процессе применения вычисляются либо вероятность БР $P(t_1,t_2)$ на интервале времени (t_1,t_2), либо параметр потоков отказов $\Omega(t)$.
3) Для ремонтируемых восстанавливаемых в процессе применения изделий ПН вычисляются в календарном времени.

Для изделий, перерывы в работе которых допустимы, в качестве ПН используется функция готовности $G(t)$.

Для изделий, перерывы в работе которых недопустимы, в качестве ПН используется вероятность БР $P(t_1,t_2)$.

На практике, если известен или предполагается определенный тип закона распределения времени БР (наработки до отказа), то целесообразно задавать:

1. *При показательном распределении* один из следующих показателей:
   а) интенсивность отказов λ_i;
   б) среднюю наработку до отказа $T_{ср}$;

в) вероятность БР $P(\Delta t_3)$ на заданном интервале времени Δt_3.

2. *При двухпараметрическом законе распределения* наработки до отказа или между отказами используются два показателя (например, при нормальном распределении):

а) $T_{ср}$;

б) σ_T;

в) г) $P(t_1)$, $P(t_2)$ – значения вероятности БР при двух значениях интервала времени работы $(0,t_1)$ и $(0,t_2)$.

3. Если *тип закона неизвестен*, то рекомендуется задавать значения:
   - $P(t)$ или $\lambda(t)$;
   - или $\Omega(t)$ – параметр потока отказов;
   - или другие показатели надежности не менее чем при трех значениях заданной наработки (времени).

4.2. Назначение норм надежности

После выбора основных показателей надежности необходимо задать определенные значения этих показателей. При этом должны учитываться экономические соображения и возможности производства.

Сначала находятся нормы надежности, соответствующие возможностям производства. Затем они уточняются и выбираются мероприятия по повышению надежности, наиболее выгодные экономически.

При составлении технического задания обосновать количественные нормы (требования) по надежности и другим эксплуатационным свойствам обычно удается лишь после рассмотрения соответствующих характеристик уже существующих аналогов.

Таким образом, необходимо иметь прототип и учитывать тенденции изменения его характеристик.

Значение норм надежности прототипа необходимо корректировать с учетом следующих факторов:

1) Технических характеристик проектируемого объекта;
2) Технического прогресса за время его проектирования и изготовления;
3) Изменений условий эксплуатации;
4) Лимитирующих факторов (стоимость, вес, габариты и т.д.);
5) Значения последствий отказов;
6) Квалификации операторов и некоторых других специфических для каждого изделия факторов.

<u>1. Учет технических характеристик проектируемого объекта</u>

Для учета технических характеристик проектируемого объекта необходимо сравнить показатели вновь проектируемого объекта с аналогичными показателями существующих объектов с известной надежностью. При этом необходимо иметь зависимости ПН объектов данного типа от основных технических характеристик (чувствительности, мощности и т.д.).

Чтобы получить такие зависимости обычно строят графики. В этих графиках по вертикальной оси откладывают значения ПН, по оси абсцисс – значения исследуемой технической характеристики.

Рассмотрим в качестве примера зависимость ПН (обозначим его через *y*) от технической характеристики (обозначим ее значения через *x*) (рис.4.2).

На графике (рис. 4.2) в виде отдельных точек нанесены данные для ТС рассматриваемого типа.

Через точки графика проводят прямые $y=a+bx$.

Параметры этих прямых подбирают по методу наименьших квадратов.

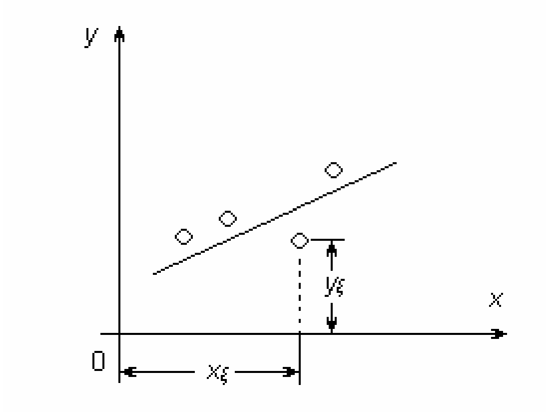


Рис. 4.2.

Согласно этому методу минимизируется следующее выражение:

$$J = \sum_{i=1}^{K} [a + bx_i - y_i]^{-2} = \min. \tag{4.3}$$

Значения *a* и *b* находят из системы уравнений:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \sum_{i=1}^{K} [a + bx_i - y_i] = 0,$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \sum_{i=1}^{K} [a + bx_i - y_i] x_i = 0. \tag{4.4}$$

Если графики строят для нескольких технических характеристик $x_1,\ldots,x_n$, то аналогично могут быть минимизированы суммы квадратов разностей $(a+b_1x_{11}+\ldots+b_nx_{ni}-y_1)$ и вычислены значения $a,b_1,\ldots,b_n$.

Если аппроксимирующие прямые имеют значительный наклон, то они подлежат дальнейшему рассмотрению. Для этого графики этих прямых нормализуют. При этом значения ПН делят на среднее значение ПН всех рассматриваемых объектов. Значения всех других показателей делят на среднее значение каждого показателя.

Пример.

Ищется зависимость ПН *P(t)* от мощности объекта *W*.

Тогда:

$$\left. \begin{aligned} x_{i\,отн} &= \frac{W_i}{W_{ср}} \\ y_{i\,отн} &= \frac{P_i(t)}{P_{ср}(t)} \end{aligned} \right\}, \tag{4.5}$$

где W_i, $W_{ср}$ – соответственно, потребляемая мощность и средняя потребляемость мощности *i*-го объекта;

$P_i(t)$, $P_{cp}(t)$ – соответственно, вероятность БР и средняя вероятность БР *i*-го объекта.

Строят графики в относительных единицах.

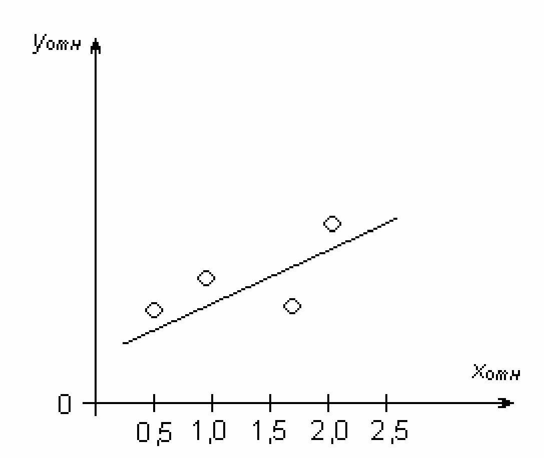


Рис. 4.3.

Используя такие графики, можно приближенно оценить влияние изменения технических характеристик объекта на величину показателя (нормы) надежности.

В результате рассмотрения одного или нескольких (при нескольких технических характеристиках) таких графиков может быть найден *коэффициент* K_T, *который учитывает технические характеристики объекта*. Этот коэффициент равен отношению ПН проектируемого изделия и прототипа.

2. Учет технического прогресса

Между выпуском объектов, данные о которых по надежности известны, и объектом, который должен быть изготовлен, к моменту его выпуска обычно проходит несколько лет. За это время совершенствуется конструкция и технология изготовления как самих объектов, так и элементов, из которых они изготавливаются. В соответствии с этим изменяются и значения ПН. Следовательно, при составлении требований по ПН к проектируемым объектам необходимо экстраполировать изменение показателя их надежности вплоть до момента изготовления новых объектов.

Для этого необходимо знать надежность всех выпускаемых ранее аналогичных объектов. Затем строится график, учитывающий технический прогресс по годам (рис. 4.4). По этому графику вычисляется коэффициент $K_{ТП}$, учитывающий технический прогресс. Он равен отношению ПН проектируемого объекта и прототипа.

При корректировании ПН с учетом совершенствования производства могут возникнуть две крайние ситуации:

1) Проектируемый объект почти по всем признакам сходен с прототипом;
2) Проектируемый объект отличается от прототипа принципом действия, сложностью и т.д.

В первом случае экстраполирование изменения ПН по годам производится для объекта в целом.

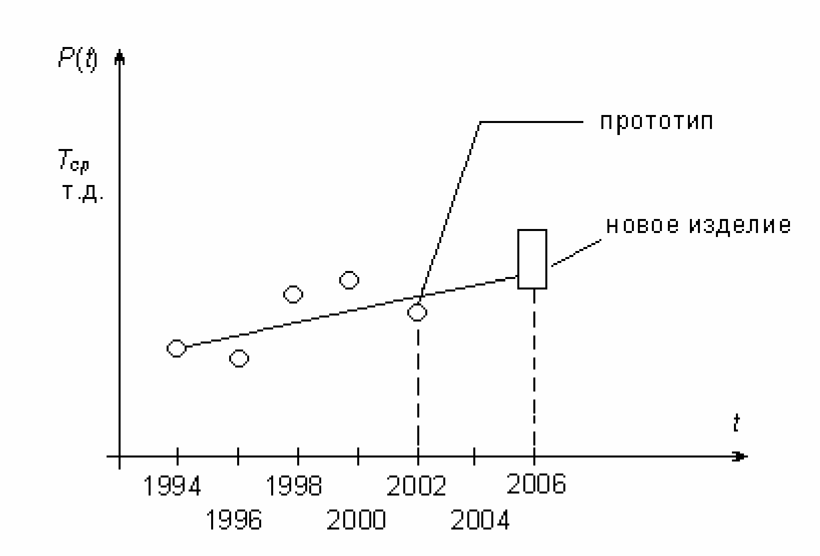


Рис. 4.4. Изменение ПН по годам.

Во втором случае производиться расчет надежности по надежности элементов. От общепринятого расчета надежности этот расчет отличается только экстраполированием интенсивностей отказов по годам выпуска.

3. Учет изменений работы

Проектируемый объект и прототип обычно работают в разных условиях. Поэтому необходимо произвести перерасчет ПН прототипа на условия применения проектируемого объекта.

Для этого находят коэффициент условий применения $K_У$. Он равен отношению значений ПН рассматриваемого объекта и прототипа.

Существуют *четыре метода такого перерасчета*:

1. Метод поправочных коэффициентов.
2. Метод, использующий гипотезу Н.М. Седякина о ресурсе надежности объекта.
3. Метод, использующий расчетные графики.
4. Метод, основанный на учете разброса значений параметров режимов применения объектов.

Эти методы были разработаны для расчета надежности электронных схем, но могут быть использованы для перерасчета ПН и других объектов.

При использовании первого метода сначала находится значение интенсивности отказов или параметра потока отказов в лабораторных условиях. Затем коэффициент окружающей среды – $K_{окр}$. Этот коэффициент показывает во сколько раз интенсивность отказов при данных условиях больше, чем при лабораторных.

Коэффициент применения $K_У$ равен отношению значений коэффициента $K_{окр}$ проектируемого объекта и прототипа.

В методе, использующем гипотезу Седякина, применяется понятие «ресурс (запас) надежности» объекта.

В качестве функции ресурса используют выражение:

$$r(t) = -\ln P(t) = \int_0^t \lambda(\tau)d\tau \quad . \tag{4.6}$$

Гипотеза состоит в том, что вероятность БР объекта в определенных условиях зависит от значения выработанного в прошлом ресурса *r* и не зависит от того, как выработан был этот ресурс. Этот метод в настоящее время используется чрезвычайно редко, и мы его подробно рассматривать не будем.

Метод расчетных графиков является одним из основных методов пересчета ПН прототипа на условия применения проектируемого объекта. Он основан на использовании графической зависимости ПН от параметров режимов работы (температуры, нагрузки и т.д.). В качестве ПН здесь обычно используется интенсивность отказов $\lambda(t)$ и реже параметр потока отказов $\Omega(t)$.

Расчетные графики сейчас составлены в основном для элементов электрических схем. В качестве примера рассмотрим зависимость интенсивности отказов конденсаторов от действующих нагрузок.

Как видно из графика (рис. 4.5), определяющим фактором для конденсаторов являются постоянное (эффективное) напряжение и температура окружающей среды.

Интенсивность отказов углеродистых резисторов в основном определяется их температурой, которая зависит от температуры окружающей среды и мощности, рассеиваемой на резисторе.

Нагрузку на элемент обычно выражают в долях номинальной нагрузки. Эта относительная величина называется коэффициентом нагрузки γ:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{для конденсаторов} & \gamma = \dfrac{U_{раб}}{U_{ном}}, \\ \text{где U – напряжение;} & \\ \text{для резисторов} & \gamma = \dfrac{W_{раб}}{W_{ном}}, \\ \text{где W – мощность.} & \end{array}\right\} \qquad (4.7)$$

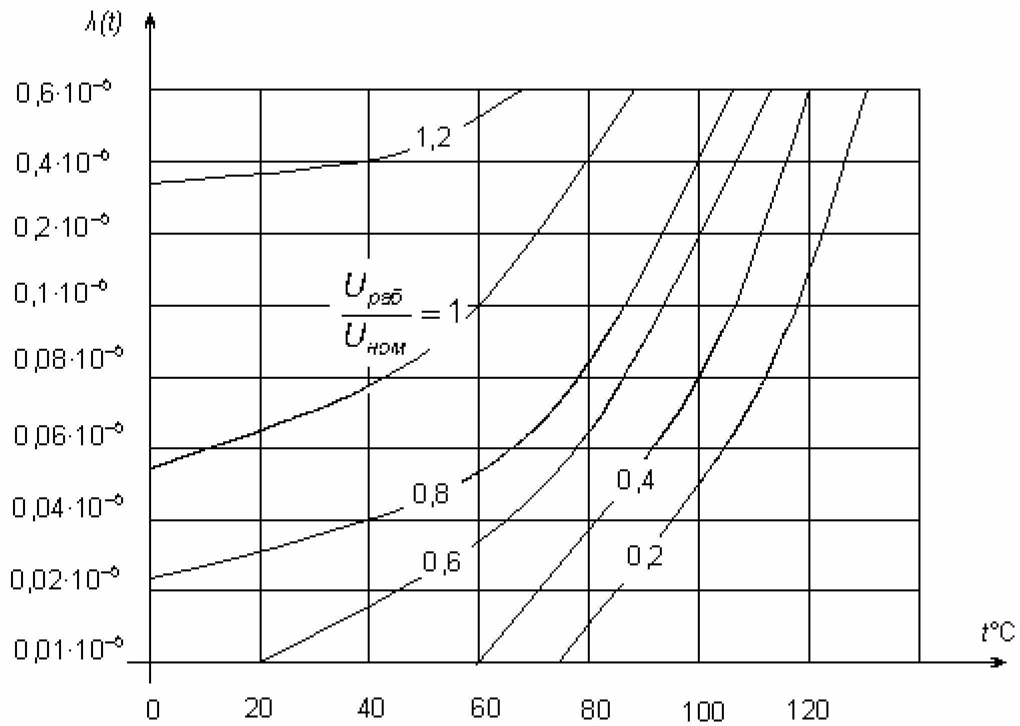


Рис. 4.5.

В некоторых случаях вместо графиков используют экспериментальные формулы и правила. Например, для полупроводниковых приборов значения *λ(t)* удваиваются при повышении окружающей температуры на 10°С.

Когда рассматриваются режимы работы, то обычно рассматривают и вопрос о целесообразности введения резервирования по нагрузке.

Во многих случаях по вертикальной оси в графиках вместо *λ(t)* откладывают относительную величину

$$K_i = \frac{\lambda_i}{\lambda^*}, \qquad (4.8)$$

где λ^* – интенсивность отказов основного элемента расчета.

Иногда имеется несколько видов нагрузки, которые влияют на величину *λ(t)*.

В этом случае применяют один из *двух приемов расчета*:

1) Подбирают экспериментальные зависимости:

$$\lambda(t) = f(\lambda_0, t^0, \gamma_1, \gamma_2 ... \gamma_n), \qquad (4.9)$$

где: λ_0 – интенсивность отказов при номинальных условиях,
t^0 – температура окружающей среды,
$\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, – относительные нагрузки различных видов.

2) Второй прием заключается в следующем:
- выделяют типовые режимы применения,
- нумеруют эти режимы в порядке ужесточения,
- строят зависимости *λ(t)* объекта от номера режима работы.

Первый прием получил бóльшее распространение.

В качестве примера рассмотрим *учет влияния условий работы для электронных ламп*.

Для электронных ламп приходится учитывать два фактора:
- коэффициент нагрузки в цепи накала γ_1;
- коэффициент нагрузки в цепях электродов γ_2.

При этом желательно учитывать взаимное влияние этих цепей.

В общем случае мы можем записать, что

$$\lambda = f(\lambda_0, t^0, \gamma_1, \gamma_2).$$

Для практических расчетов λ можно вычислить по формуле:

$$\lambda = (1 + C_1 + C_2)\lambda_0, \qquad (4.10)$$

где C_1 – зависит от γ_1;
C_2 – зависит от γ_2 и t^0;
коэффициенты:

$$\gamma_1 = U_н / U_{н\,ном},$$

$$\gamma_2 = \frac{W_н + W_0 + W_C}{W_{н\,ном} + W_{с\,ном}};$$

где $W_н$, W_0, W_C – мощности рассеивания в цепи накала, анода и сетки,
$W_{н\,ном}$, $W_{0\,ном}$ – номинальные мощности рассеивания в цепях накала и анода.

Для определения C_1 и C_2 по значениям γ_1, γ_2 и t^0 пользуются графиками (рис.4.6).

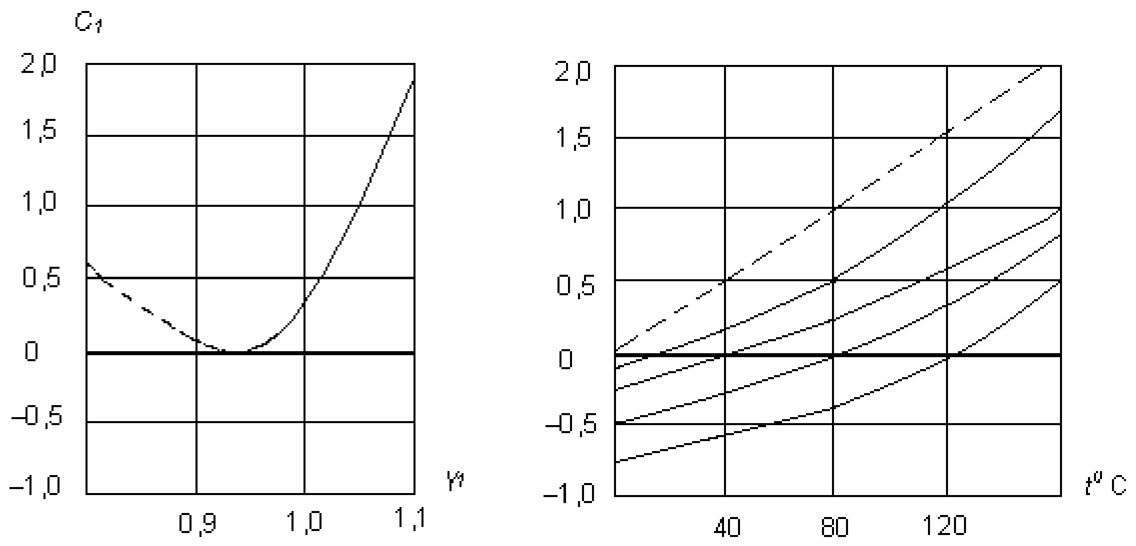


Рис.4.6.

<u>*Второй прием*</u> расчета является более приближенным. *Для электровакуумных приборов,* например, рассматриваются 6 основных режимов работы:

<u>1 режим</u>: все напряжения U и токи J меньше 50% номинальных значений $U_{ном}$, $J_{ном}$, а рассеиваемые мощности W меньше 25% номинальных значений мощностей $W_{ном}$.

<u>2 режим</u>: U и J < 75% $U_{ном}$ и $J_{ном}$; W < 50% $W_{ном}$.

<u>3 режим</u>: U и J < 90% $U_{ном}$ и $J_{ном}$; W < 75% $W_{ном}$.

<u>4 режим</u>: U и J < 90% $U_{ном}$ и $J_{ном}$; W < 90% $W_{ном}$.

<u>5 режим</u>: одно из значений U, J или W находится между 90% и 100% номинального значения.

<u>6 режим</u>: одно из значений U, J или W превышает 100% номинального значения.

С помощью статистики находится зависимость интенсивности отказов от номера режима их работы.

Затем строится график зависимости $\lambda(t)$ от номера режима (рис.4.7).

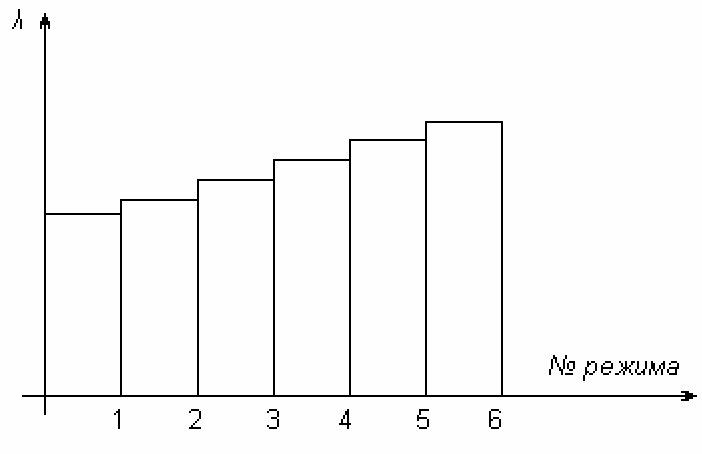


Рис.4.7.

В методе, который учитывает разброс параметров, принимаются во внимание разброс режимов хранения или работы. Возможности применения этого метода при проектировании малы из-за недостаточности информации о будущем изделии.

4. Уточнение норм надежности и выбор мероприятия по ее повышению

Это фактор корректирования норм надежности учитывают в основном для изделий, эффект от эксплуатации которых может быть определен экономически.

Средний суммарный эффект *Э* от эксплуатации объекта зависит от следующих показателей: стоимости, показателей надежности, экономических показателей эксплуатации.

К числу экономических показателей (ЭП) эксплуатации относятся:

1. экономический эффект от выполнения задания;
2. средние потери от отказа;
3. ущерб в единицу времени из-за вынужденного простоя объекта.

Дело в том, что повышение надежности изделия обычно ведет к повышению его себестоимости. В то же время эксплуатация более надежного изделия обходится, как правило, много дешевле, т.к. сокращается ущерб из-за отказов, а также уменьшаются затраты на ремонт и профилактические работы.

В связи с этим возникает проблема назначения таких норм надежности, которые обеспечивали бы максимальный экономический эффект.

Так как затраты на повышение надежности и потери из-за ненадежности объектов происходят в разное время, то необходимо рассматривать приведенный к определенному моменту времени (обычно началу эксплуатации) средний выходной эффект.

Для этого составляют математическую модель функционирования объектов. Для неремонтируемых объектов, когда эффект от работы прямо пропорционален проработанному времени имеем:

$$Э(t) = -(\beta_1 + \beta_2) + \gamma\ t, \tag{4.11}$$

где β_1 – себестоимость объекта;
β_2 – затраты, связанные с отказом;
γ – доход или экономический эффект в единицу времени функционирования;
t – наработка.

Среднее значение эффекта (дохода)

$$\overline{Э} = -(\beta_1 + \beta_2) + \gamma\ T_{ср}, \tag{4.12}$$

где $T_{ср}$ – среднее время наработки на отказ.

Часто вычисления удобно проводить в календарном времени. Для перехода к календарному времени используют коэффициент v, который равен доле времени использования объекта.

При этом
$$T_{ср\,К} = \frac{T_{ср}}{v}. \tag{4.13}$$

Затраты из-за ненадежности и экономический эффект считают распределенными равномерно за время $(0, T_{ср\,К})$.

При этом очевидно, что доход в единицу времени *а* равен:

$$a = \frac{-\beta_2 + \gamma\ T_{cp}}{T_{cp_K}}. \qquad (4.14)$$

Приведенный эффект с учетом известного выражения равен:

$$\left(S_0 = \frac{a}{\aleph}\left[1 - \exp\left(-\aleph t_p\right)\right] \right)$$

$$Э_П = -\beta_1 + \frac{-\beta_2 + \gamma\ T_{cp}}{\aleph T_{cp_K}}\left(1 - \exp \aleph T_{cp_K}\right) =$$

$$= -\beta_1 + \frac{v}{\aleph}\left(\gamma - \frac{\beta_2}{vT_{cp_K}}\right)\left(1 - \exp \aleph T_{cp_K}\right), \qquad (4.15)$$

где $\aleph$ – коэффициент скорости роста вложенных средств, который при $T_Г$ = 8760 ч; $E_Н$ = 0,12;

$$\aleph = 13 \cdot 10^{-6}\ \ 1/ч.$$

Аналогичные выражения получают и для других экономических моделей.

Выбранные значения показателей надежности должны обеспечивать максимум $Э_П$.

При этом при каждом приведенном мероприятии по изменению ПН определяется величина:

$$\Delta Э_{П\,i} = Э_{П\,i} - Э_П^0 \qquad (4.16)$$

где: $Э^0_П$ – средний приведенный эффект для некоторого исходного варианта объекта;

$Э_{Пi}$ – средний приведенный эффект для этого изделия с учетом того, что осуществлено *i*-тое мероприятие по повышению надежности.

Затем осуществляется мероприятие для обеспечения максимального приращения $\Delta Э_{Пi}$. Вариант с осуществлением этого мероприятия принимается за исходный, и процесс повторяется снова. Процесс продолжается до тех пор, пока значение не будет отрицательным. За оптимальное значение ПН принимается значение, которое было достигнуто на предыдущем этапе вычислений.

Недостаток этого метода заключается в том, что для его осуществления нужна значительная информация о проектируемом изделии, а она не всегда имеется.

4.3. Распределение норм надежности по элементам

При расчете надежности ТС на первом же этапе проектирования (этап эскизного проектирования) необходимо найти значение ПН блоков и узлов ТС по заданному в ТЗ значению ПН на всю ТС в целом. При этом выбор того или иного способа распределения норм надежности по блокам, функциональным узлам и элементам во многом зависят от имеющейся у разработчика информации о ТС.

Существует *четыре основных приема распределения норм надежности*:

1. По принципу равнонадежности элементов.
2. С учетом существующего соотношения ПН элементов.
3. С учетом перспектив совершенствования элементов.

4. С учетом стоимости проектирования, производства и эксплуатации элементов.

Рассмотрим все эти способы на примерах.

Пример 1.

Проектируется усилитель из трех равнонадежных последовательных каскадов.

Задана вероятность БР усилителя $P(t)=0,98$ в течение $t_{ус}=2000ч$.

Определить значение $\lambda(t)$ для каждого каскада.

Решение.

Принимаем экспоненциальную модель.

$$P_{ус}(t)=\left[P_{каск.}(t)\right]^3; \qquad \lambda_{ус}=3\lambda_{каск}; \qquad T_{ср\,ус}=\frac{1}{3}T_{ср\,каск};$$

$$P(t)=e^{-\lambda t}=e^{-1/T_{ср}};$$

$$P_{ус}(t)=e^{-\lambda_{ус}t_{ус}}\approx 1-\lambda_{ус}t_{ус}=0{,}98.$$

Отсюда:

$$\lambda_{ус}=\frac{1-0{,}98}{2000}=10^{-5}\ 1/ч.$$

Поэтому для одного каскада

$$\lambda_{кас}\le\frac{10^{-5}}{3}=3{,}3\cdot10^{-6}\ 1/ч.$$

Пример 2.

1. *Проектируется устройство, состоящее из трех блоков A, B, C.*
2. *Задана* вероятность БР объекта $P_{об}(t_1)=0{,}97$ в течение $t_1=100ч$.
3. *Имеется* прототип, состоящий из блоков *A, B, C*, каждый из которых характеризуется интенсивностью отказов соответственно:

$\lambda_{A0}=10^{-4}\ 1/ч$; $\lambda_{B0}=8\cdot10^{-4}\ 1/ч$; $\lambda_{C0}=3\cdot10^{-4}\ 1/ч$;

Определить нормы надежности в виде интенсивности отказов λ для проектируемых блоков $A_1, B_1, C_1 \Rightarrow \lambda_{A1}, \lambda_{B1}, \lambda_{C1}$.

Решение.

1. Учитывая прототип, определяем коэффициент, учитывающий долю отказов проектируемого устройства из-за отказа *j*-го блока:

$$K_j=\frac{\lambda_j}{\lambda_{об}},$$

где $\lambda_{об}$, λ_j – соответственно интенсивность отказов всего устройства и *j*-го блока.

Все коэффициенты K_j находят по соотношению интенсивностей отказов прототипа

$$K_j=\frac{\lambda_{j0}}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ji0}},$$

где n – число элементов.

В нашем случае:

$$K_A=\frac{\lambda_{A0}}{\lambda_{A0}+\lambda_{B0}+\lambda_{C0}}=\frac{10^{-4}}{(1+8+3)\cdot10^{-4}}=\frac{1}{12};$$

$$K_B = \frac{\lambda_{B0}}{\lambda_{A0} + \lambda_{B0} + \lambda_{C0}} = \frac{8 \cdot 10^{-4}}{(1+8+3) \cdot 10^{-4}} = \frac{2}{3};$$

$$K_C = \frac{\lambda_{C0}}{\lambda_{A0} + \lambda_{B0} + \lambda_{C0}} = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{(1+8+3) \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{4}.$$

2. Находим значение $\lambda(t)$ для проектируемого устройства

$$P_{об}(t_1) = 1 - \lambda_{об} t_1 = 0{,}97; \qquad \lambda_{об} = \frac{1-0{,}97}{100} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ 1/ч}.$$

3. Определяем нормы надежности для блоков проектируемого объекта:

$$\lambda_{A1} = K_A \lambda_{об} = \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-4} = 2{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ 1/ч};$$

$$\lambda_{B1} = K_B \lambda_{об} = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ 1/ч};$$

$$\lambda_{C1} = K_C \lambda_{об} = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 10^{-4} = \frac{3}{4} \cdot 10^{-4} = 7{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ 1/ч}.$$

Пример 3.

1. *Проектируемое устройство состоит из двух последовательных блоков A_1 и B_1.*
2. *Задана* вероятность БР проектируемого объекта *$P(t)=0{,}97$* в течение времени *$t_1=100$ч*.
3. Дата выпуска проектируемого устройства *–2007 г*.
4. Изменение интенсивностей отказов по анализам данных за *1992÷2002 годы* для блоков, аналогичных блокам A_1 и B_1, может быть по годам выпуска аппроксимировано выражением:

   $$\lambda = \lambda_{92} \exp[-v(L-1992)],$$

   где: λ_{92} – интенсивность отказа изделия, выпущенного в 1992 году;
   L – год выпуска блока.

Для блока A_0: $\lambda_{A92} = 1{,}4 \cdot 10^{-4}$ 1/ч; $v_A = 0{,}034$ 1/год;

Для блока B_0: $\lambda_{B92} = 28 \cdot 10^{-4}$ 1/ч; $v_B = 0{,}14$ 1/год.

Определить нормы надежности для ПН блоков *A* и *B* в виде интенсивности отказов λ_{A1} и λ_{B1}.

Решение.

1. Экстраполируем значение λ блоков прототипа до 2007 г.:

$$\lambda_{A07} = 1{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot \exp[-0{,}034 \cdot (2007-1992)] = 8{,}4 \cdot 10^{-5} \text{ 1/ч};$$

$$\lambda_{B07} = 28 \cdot 10^{-4} \cdot \exp[-0{,}14 \cdot (2007-1992)] = 34 \cdot 10^{-5} \text{ 1/ч}.$$

2. Аналогично примеру 2 определяем коэффициент K_j и нормы надежности:

$$K_{A1} = \frac{\lambda_{A07}}{\lambda_{A07} + \lambda_{B07}} = \frac{8{,}4 \cdot 10^{-5}}{(8{,}4+34) \cdot 10^{-5}} = 0{,}2;$$

$$K_{B1} = \frac{\lambda_{B07}}{\lambda_{A07} + \lambda_{B07}} = \frac{34 \cdot 10^{-5}}{(8{,}4+34) \cdot 10^{-5}} = 0{,}8;$$

$$\lambda_{об} = \frac{1 - P_{об}(t)}{t_1} = \frac{1-0{,}98}{100} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ 1/ч};$$

$\lambda_{A1} = K_{A1}\lambda_{об} = 0{,}4 \cdot 10^{-4}$ 1/ч;

$\lambda_{B1} = K_{B1}\lambda_{об} = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ 1/ч.

Пример 4.

1. *Система состоит из четырех последовательных элементов 1, 2, 3, 4.*
2. Значение параметров отказов системы $\Omega_C=10^{-5}$ *1/ч*;
3. Время производства и проектирования системы *τ=5 лет*, технический ресурс t_p*=20 лет*.
4. Вложения в единицу времени (*1 ч*) проектирования и производства элементов предполагаются постоянными и для *j*-го элемента равны:

   $$\mu_j = \frac{K_{Гj}}{\Omega_j} + \mu_{0j},$$

   где Ω_j – параметр потока отказов *j*-го элемента;

   μ_{0j} – затраты в единицу времени на проектирование и производство, не зависящие от надежности;

   значения:

   $$K_{Г1} = 1{,}6 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{руб.} \cdot \text{отказ}}{\text{ч}^2};$$

   $$K_{Г2} = K_{Г3} = K_{Г4} = 3 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{руб.} \cdot \text{отказ}}{\text{ч}^2};$$

   $\mu_{01} = \mu_{02} = \mu_{03} = \mu_{04} = 0$ (определяют обычно по опыту проектирования аналогичных элементов).
5. Текущие эксплуатационные затраты в единицу времени постоянны и равны:

   $$v_j = K_{Эj} \cdot \Omega_j + v_{0j},$$

где значения:

$K_{Э1} = 4 \cdot 10^6$ руб./отказ; $K_{Э2} = K_{Э3} = K_{Э4} = 1{,}7 \cdot 10^6$ руб./отказ;

$v_{01} = v_{02} = v_{03} = v_{04} = 0$.

6. Общие затраты на проектирование, производство и эксплуатацию можно определить по формуле:

$$C_{сист} = \sum_{j=1}^{n} C_j,$$

где: C_j – затраты на *j*-ый элемент,

n – число элементов в системе.

Определить значение параметра потока отказов для каждого элемента Ω_j.

Решение.

Для сравнения затрат приводим их к одному моменту времени – началу эксплуатации. Приведенные эксплуатационные затраты вычисляем по формуле:

$$C_{Эj} = \frac{v_j}{\aleph}\left[1 - \exp\left(-\aleph t_p\right)\right] = \beta_{0j} + \beta_j \Omega_j,$$

где:

$$\beta_{0j} = \frac{v_{0j}}{\aleph}\left[1 - \exp\left(-\aleph t_p\right)\right];$$

$$\beta_j = \frac{K_{эj}}{\aleph}\left[1-\exp\left(-\aleph t_p\right)\right] .$$

Производственные затраты вычисляются по аналогичной формуле:

$$C_{nj} = \frac{\mu_j}{\aleph}\left[\exp(\aleph\tau)-1\right] .$$

Поэтому производственные затраты можно вычислить из выражения

$$C_n = \frac{1}{\aleph}\left(\mu_{0j} + \frac{K_{nj}}{\Omega_j}\right)\left[\exp\left(\aleph\tau\right)-1\right] = \alpha_{0j} + \frac{\alpha_j}{\Omega_j}, \tag{4.17}$$

где:

$$\alpha_{0j} = \frac{\mu_{0j}}{\aleph}\left[\exp\left(\aleph\tau\right)-1\right] ;$$

$$C_n = \frac{K_{nj}}{\aleph}\left[\exp\left(\aleph\tau\right)-1\right] .$$

Таким образом, общие затраты на систему можно определить по формуле:

$$C_{сист} = \sum_{j=1}^{n}\left(\beta_{0j} + \alpha_{0j}\right) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\Omega_j} + \sum_{j=1}^{n}\beta_j\Omega_j . \tag{4.18}$$

Теперь постараемся разделить заданное значение параметров отказов между элементами системы.

При последовательном соединении элементов заданные значения параметра потока системы Ω_i и элементов Ω_j связаны соотношением:

$$\sum_{j=1}^{n}\Omega_j - \Omega_i = 0. \tag{4.19}$$

Используя выражение (4.19) можно найти такие значения Ω_j, при которых общие затраты на систему будут минимальными.

Для этого воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Согласно этому методу составляют функцию:

$$\Phi\left(\Omega_1,\ldots\Omega_n\gamma\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\Omega_j} + \sum_{j=1}^{n}\beta_j\Omega_j + \gamma\left(\sum_{j=1}^{n}\Omega_j - \Omega_C\right) ,$$

где γ – неопределенный множитель.

Далее приравниваем к нулю частные производные этой функции по $\Omega_1,\ldots,\Omega_n$ и получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial\Omega_1} = -\dfrac{\alpha_1}{\Omega_1^2} + \beta_1 + \gamma = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\Omega_n} = -\dfrac{\alpha_n}{\Omega_n^2} + \beta_n + \gamma = 0 \end{cases}$$

Из этих уравнений определяем неопределенный множитель:

$$\gamma = \frac{\alpha_1}{\Omega_1^2} - \beta_1 = \frac{\alpha_2}{\Omega_2^2} - \beta_2 = \ldots = \frac{\alpha_n}{\Omega_n^2} - \beta_n .$$

Откуда имеем:

$$\Omega_{j\,опт} = \sqrt{\frac{\alpha_j}{\dfrac{\alpha_1}{\Omega_1^2} - \beta_1 + \beta_j}}. \tag{4.20}$$

Подставив выражение (4.20) в (4.19), получим:

$$\Omega_1 + \sum_{j=2}^{n} \sqrt{\alpha_j \Big/ \left(\frac{\alpha_1}{\Omega_1^2} - \beta_1 + \beta_j \right)} - \Omega_C = 0.$$

Это уравнение легче решить графически, переписав в виде:

$$A(\Omega_1) = B(\Omega_1),$$

где:

$$\left.\begin{aligned} A(\Omega_1) &= \Omega_C - \Omega_1 - \sqrt{\frac{\alpha_2}{\left(\dfrac{\alpha_1}{\Omega_1^2} - \beta_1 + \beta_2\right)}} \\ B(\Omega_1) &= \sum_{j=3}^{n} \sqrt{\frac{\alpha_j}{\left(\dfrac{\alpha_1}{\Omega_1^2} - \beta_1 + \beta_j\right)}} \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

Для графического решения (4.21) вычисляются и заносятся на график значения $A(\Omega_1)$ и $B(\Omega_1)$.

Абсцисса точки пересечения кривых определяет искомое значение $\Omega_{1опт}$.

В дальнейшем, используя формулу (4.20), последовательно определяем все значения $\Omega_{jопт}$.

Для упрощения вычислений можно переписать формулу (4.20) в виде:

$$\left(\frac{\Omega_j}{\Omega_1}\right)_{опт} = \sqrt{\frac{\alpha_j}{\alpha_1}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+h_j}},$$

где $h_j = \dfrac{\beta_j - \beta_1}{\alpha_1} \cdot \Omega_1^2.$

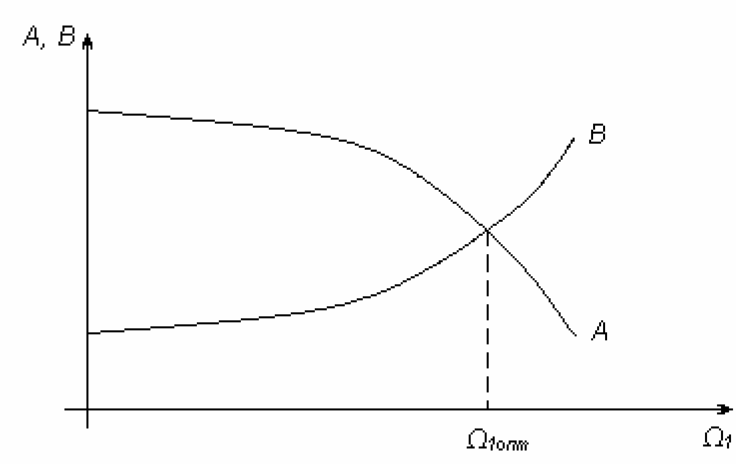


Рис.4.8.

Для облегчения вычислений может быть построена *номограмм*а (рис.4.9).

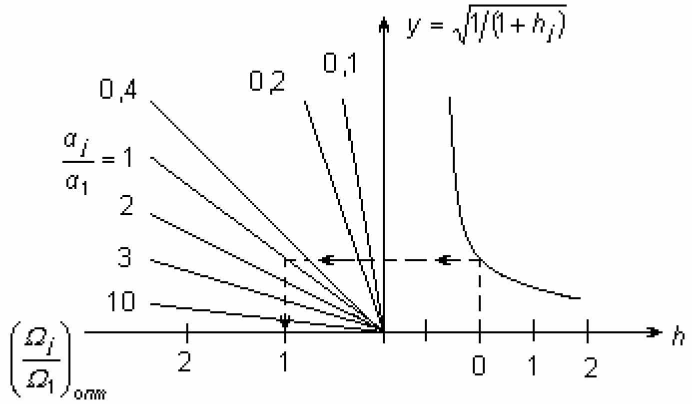


Рис.4.9.

В правом квадранте вычисляем $\sqrt{1/(1+h_j)}$, в левом квадранте осуществляется умножение на $\sqrt{\alpha_j/\alpha_1}$. Ход вычислений показан стрелками (рис. 4.9).

Выражения для $A(\Omega_1)$ и $B(\Omega_1)$ можно записать:

$$A(\Omega_1) = \Omega_C - \Omega_1\left(1 + \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+h_2}}\right),$$

$$B(\Omega_1) = \Omega_1 \sum_{j=3}^{n} \sqrt{\frac{\alpha_j}{\alpha_1}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+h_j}}. \tag{4.22}$$

Поочередно задавая значения Ω_1, можно находить по номограмме значения произведения корней и использовать их согласно формуле (4.22).

Для рассматриваемого примера:

$\aleph = 13 \cdot 10^{-6}$ 1/ч;

$$\alpha_1 = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-4}}{13 \cdot 10^{-6}}\left[\exp\left(13 \cdot 10^{-6} \cdot 8760 \cdot 5\right) - 1\right] = 0{,}955;$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{3 \cdot 10^{-5}}{13 \cdot 10^{-6}} \cdot \left[\exp\left(13 \cdot 10^{-6} \cdot 8760 \cdot 5\right) - 1\right] = 1{,}78;$$

$$\beta_1 = \frac{4 \cdot 10^{6}}{13 \cdot 10^{-6}}\left[1 - \exp\left(-13 \cdot 10^{-6} \cdot 8760 \cdot 20\right)\right] = 2{,}76 \cdot 10^{11}\ \frac{\text{руб.} \cdot \text{ч}}{\text{отказ}};$$

$$\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \frac{1{,}7 \cdot 10^{5}}{13 \cdot 10^{-6}}\left[1 - \exp\left(-13 \cdot 10^{-6} \cdot 8760 \cdot 20\right)\right] = 1{,}17 \cdot 10^{10}\ \frac{\text{руб.} \cdot \text{ч}}{\text{отказ}};$$

$$h_2 = \frac{1{,}17 \cdot 10^{10} - 2{,}76 \cdot 10^{11}}{0{,}955} \cdot \Omega_1^2 = -2{,}77 \cdot 10^{11} \cdot \Omega_1^2.$$

Используя (4.22) строим на одних осях графики $A(\Omega_1)$ и $B(\Omega_1)$.

Пересечение дает $\Omega_{1опт} = 1{,}43 \cdot 10^{-6}$ 1/ч.

С помощью номограмм:

$\Omega_{2опт} = \Omega_{3опт} = \Omega_{4опт} = 2{,}86 \cdot 10^{-6}$ 1/ч.

4.4. Методы, подтверждающие выполнение норм надежности

Существуют несколько методов, которые подтверждают заданные в технических условиях значения показателей (норм) надежности.

Основными из них являются следующие:

1. Контрольные испытания на надежность.
2. Моделирование отказов на специальных стендах.
3. Вероятностное моделирование на ЭВМ.
4. Контрольные расчеты надежности.

Основным методом, поддерживающим нормы надежности, является *метод контрольных испытаний.*

Перед началом испытаний объекты должны пройти приработку (технологический прогон). При этом в ТУ на объект должна иметься программа испытаний на надежность, которая включает в себя:

1) план испытаний;
2) требования к средствам испытаний;
3) способ обработки, экспериментальных данных и оформление результатов испытаний.

В плане должны содержаться правила, которые устанавливают объем выборки, порядок проведения испытаний и критерии их прекращения.

Моделирование и контрольные расчеты применяются в основном тогда, когда объекты не могут подвергаться контрольным испытаниям. Для осуществления моделирования необходимо знать вероятностные характеристики полуслучайных процессов изменения свойств элементов объекта. Они могут быть получены либо при испытаниях отдельных деталей, либо по данным эксплуатации. Подробнее, например, о вероятностном физическом моделировании можно узнать из специальной литературы.

Контрольные расчеты надежности обычно проводятся для уникальных объектов. Для этого в основу расчета берут ПН аналогичных элементов объектов и при необходимости экстраполируют эти показатели.

Вероятностное моделирование на ЭВМ проводится в случае, когда контрольные расчеты получаются слишком громоздкими или за счет допущений сильно искажают действительность.

Существует также еще один метод подтверждения выполнения норм надежности, а именно, *метод ускоренных испытаний на надежность*.

Различают *два вида ускоренных испытаний*: в нормальных и форсированных режимах.

В нормальных режимах составляющая нагрузок соответствует техническим условиям для непрерывных режимов работы.

В форсированных режимах некоторые виды воздействий превышают предельные по ТУ значения. Однако при этом необходимо выявить влияние нагрузок на физические процессы приближения к отказам и четко оговорить допустимые пределы нагрузок. Кроме того, при обосновании форсированных режимов испытаний необходимо составить методику пересчета ПН, полученных при ускоренных испытаниях, на нормальные условия. При этом чаще всего используется коэффициент подобия $K_П$, который равен отношению средней наработки при реальных условиях и средней наработке в форсированном режиме.

Длительность испытаний в форсированном режиме может быть определена из выражения:

$$t_ф = \frac{t_р}{K_П},$$

где $t_р$ – заданный интервал наработки изделий в реальных условиях;
$K_П$ – коэффициент подобия форсированных испытаний.

4.5. Составление логических схем для расчета надежности

Расчет надежности ТС обычно проводится в несколько этапов.

Первый этап состоит в описании работы системы. На этом этапе определяется содержание термина «безотказная работа системы» (БРС) и составляется перечень свойств исправной системы и разделение ее на элементы.

На втором этапе производится разбор и классификация отказов элементов и системы. Оценивается влияние отказа каждого элемента системы на работоспособность системы в целом.

Третий этап является основным этапом, на котором составляется структурная (логическая) модель БР системы.

На этом этапе обычно выделяются подсистемы (блоки), в которых при отказе хотя бы одного элемента отказывает весь блок. Для каждого блока проводиться расчет надежности. Далее каждый блок нумеруется и обозначается буквой. Затем перечисляются комбинации блоков, обеспечивающих БР системы и, наконец, составляется логическая схема для расчета надежности ТС. Часто она называется еще *расчетно-логической схемой*. Эта схема характеризует состояние (работоспособное или неработоспособное) ТС в зависимости от состояния отдельных элементов (блоков).

В расчетно-логических схемах обычно применяют *три способа соединений элементов (блоков)*.

1. Последовательное (основное) соединение соответствует случаю, когда при отказе одного элемента отказывает вся система в целом.

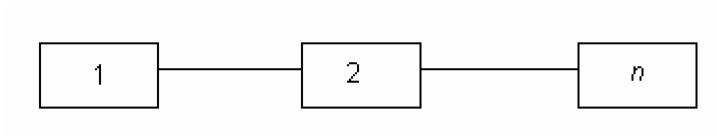


Рис. 4.10. Последовательное (основное) соединение элементов ТС.

Наработка до отказа ТС в этом случае равна наработке до отказа того элемента, у которого она оказалась минимальной:

$$T_{ТС} \cong \min(T_j),\ j = 1,2,\dots,n \quad (4.23)$$

где n – число элементов системы.

Функция надежности системы при таком соединении равна

$$P_{ТС}(t) = \prod_{j=1}^{n} P_j(t), \quad (4.24)$$

где $P_j(t)$ – функция надежности j-того элемента.

В связи с этим интенсивность отказов системы из n элементов:

$$\lambda_{TC} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \quad (\text{при } \lambda_j = const). \tag{4.25}$$

Соответственно средняя наработка системы до отказа:

$$T_{TC\,cp} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} 1/T_{cpj}}, \tag{4.26}$$

где T_{cpj} – средняя наработка до отказа j-го элемента.

В общем случае с учетом (1.21) выражение (4.24) может быть переписано в виде:

$$P_{TC}(t) = \prod_{j=1}^{n} \exp\left\{-\int_0^t \lambda_j(t)dt\right\} = \exp\left\{-\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \lambda_j(t)dt\right\}. \tag{4.27}$$

В частном случае, при экспоненциально распределении вероятности БР элементов ТС (λ=*const*) имеем:

$$P_{TC}(t) = e^{-\lambda_{TC}t} = e^{-t/T_{TCcp}},$$

где λ_{TC} и T_{TCcp} определяются согласно (4.25) и (4.26).

Если все элементы ТС равнонадежны, то:

$$\lambda_{TC} = \sum_{j=1}^{r} n_j \lambda_j, \tag{4.28}$$

где n_j – число элементов j-типа;

r – число типов элементов.

При расчете вероятности БР высоконадежных ТС произведение $\lambda_{TC}\cdot t$<<1, а $P_{TC}(t)$ близко к единице. Разложив $e^{-\lambda_{TC}\cdot t}$ в ряд и ограничившись первыми двумя его членами, можно с высокой степенью точности определить вероятность $P_{TC}(t)$. В этом случае основные ПН для ТС с последовательным соединением элементов можно определять по следующим приближенным формулам:

$$\left.\begin{aligned} P_{TC}(t) &\approx 1-\lambda_{TC}\cdot t \\ \omega(t) &\approx \lambda_{TC}(1-\lambda_{TC}\cdot t) \end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

Выражения (4.29) используют в случае, если $P(t)\geq 0,9$ или иначе, когда $\lambda\cdot t\leq 0,1$.

При значениях вероятности БР ($P(t)$), *близких к единице*, можно использовать еще ряд приближенных формул:

$$P_{TC}(t) = \prod_{j=1}^{n} P_j(t) \approx 1-\sum_{j=1}^{n} q_j(t). \tag{4.30а}$$

При равнонадежных элементах ТС имеем:

$$\left.\begin{aligned} &P_{TC}(t) = P_j^n(t) \cong 1-q_j(t)\cdot n \\ &\text{или} \\ &P_j(t) = \sqrt[n]{P_{TC}(t)} \cong 1-q_{TC}/n \end{aligned}\right\} \tag{4.30б}$$

Пример. Вероятность БР ТС в течение t равна $P_{TC}(t)$=0,95. ТС состоит из n=120 равнонадежных элементов.

Определить вероятность БР элемента ТС.

Решение.

Так как $P_{TC}(t)$ близка к единице, то определяем $P_i(t)$ по формуле (4.30б):

$$P_i(t)=\sqrt[n]{P_{TC}(t)}=1-\frac{q_{TC}(t)}{n}=1-\frac{0{,}05}{120}\approx 0{,}9996.$$

2. Параллельное нагруженное соединение соответствует случаю, когда ТС сохраняет работоспособность, пока работоспособен хотя бы один из n включенных в работу элементов (рис. 4.11).

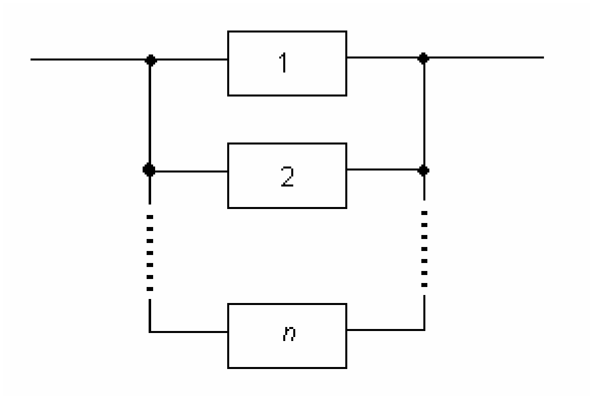


Рис. 4.11. Параллельное нагруженное соединение.

Наработка до отказа такой системы равна максимальному из значений наработки до отказа элементов:

$$T_{TC\,cp}\cong \max(T_j),\ j=1,2,\dots,n\ . \tag{4.31}$$

Функция ненадежности системы при таком соединении элементов:

$$q_{TC}(t)=\prod_{j=1}^{n} q_j(t)\ , \tag{4.32}$$

где $q_j(t)$ – функция ненадежности j-го элемента.

Так как $P_{TC}(t)=1-q_{TC}(t)$, то:

$$P_{TC}(t)=1-\prod_{j=1}^{n}[1-P_j(t)]\ . \tag{4.33}$$

3. Параллельное ненагруженное соединение соответствует случаю, когда при отказе основного элемента ТС включается в работу очередной резервный элемент, сохраняющий ее работоспособность.

Наработка до отказа в такой системе равна сумме наработок до отказа элементов:

$$T_{TCcp}=\sum_{j=1}^{K} T_j,\ j=1,2,\dots,n. \tag{4.34}$$

При параллельном ненагруженном логическом соединении функции надежности при одинаково надежных K элементах равна:

$$P_{TC}(t) = e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{K=1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}, \qquad (4.35)$$

где λ – интенсивность отказов j-го элемента.

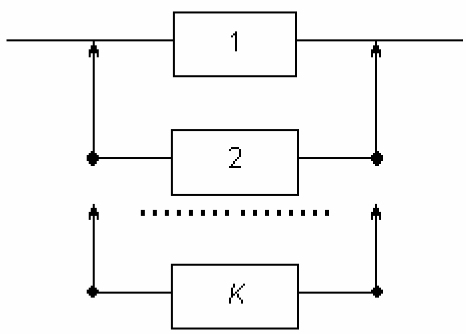


Рис. 4.12. Параллельное ненагруженное соединение.

При составлении логической схемы необходимо проводить анализ последствий, к которым приводит отказ элемента. Особенно это необходимо проводить, если имеется несколько одинаковых элементов.

Например, работают два генератора мощности *P* каждый. Здесь возможны несколько случаев расчета надежности.

1. Обязательно требуется мощность, равная *2P*. В этом случае генераторы на логической схеме соединяются последовательно.

2. При отказе одного генератора отключаются маловажные объекты, и нагрузка на оставшийся генератор будет равняться *P*. Следовательно, здесь генераторы соединяются параллельно.

При расчете надежности в число элементов необходимо включать электрические соединения пайкой, сваркой, сжатием, а также другие виды соединений, например, штепсельное разъемы. На эти электрические соединения приходится от 10 до 50% всех отказов.

4.6. Выбор и уточнение значений показателей надежности

В зависимости от стадии проектирования различают *три этапа выбора значений ПН*.

1. *Прикидочный расчет* надежности структурной схемы ТС. Он производится с целью выбора принципа построения системы.

Здесь определяется число элементов, при отказах которых система выходит из строя. Часто количество таких элементов находят приемом сравнения с аналогичными, ранее разработанными блоками. Затем разыскивают в справочных материалах средние значения ПН элементов, например, средние интенсивности отказов.

2. *Второй этап расчета* надежности проводится при подборе типов элементов и уточнений принципиальной схемы системы. На этом этапе определяются условия работы системы (температура, давление, электрическая нагрузка и т.д.).

Для учета нагрузок целесообразно составлять таблицы такого типа:

Наименование элемента	Режим работы		Интенсивность отказов, 1/ч
	t^0C	Коэф. нагр.	
Резистор	55	0,5	$9{\cdot}10^{-7}$
Конденсатор	55	0,75	$4{\cdot}10^{-7}$

На этом этапе представляет также большой интерес использование *коэффициентного способа расчета надежности*. Он применяется тогда, когда известно достоверное значение интенсивности отказов лишь одного элемента системы.

Предполагается, что при различных режимах работы справедливо соотношение:

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_v} = K_i, \tag{4.36}$$

где: λ_i – интенсивность отказов рассматриваемого элемента,

λ_v – достоверно известная интенсивность отказов одного элемента (основного элемента расчета).

Значения коэффициента K_i обычно находят путем анализа данных по интенсивностям отказов различных элементов. Так как эти расчеты являются приближенными, обычно вычисляют минимальные и максимальные значения K_i.

В качестве примера приведем значения коэффициента K_i для различных элементов, приняв за основной элемент резисторы:

Наименование элементов	$K_{i_{\min}}$	$K_{i_{\max}}$
Электровакуумные приборы	18,3	26,6
Генераторные лампы	70	77
Конденсаторы	0,33	0,61
Резисторы	1	1
Полупроводниковые диоды	11,77	15,4
Потенциометры	7,2	12
Электродвигатели	17	22
Штепсельные разъемы (и т.д.)	10,7	15,3

Приняв во внимание допущение (4.36) и используя выражения (4.24) и (4.25), можно записать:

$$P_{TC}(t) = \exp[-t\lambda_0 \sum_{i=1}^{d} N_i K_i], \tag{4.37}$$

или

$$P_{TC}(t) = \exp[-t\lambda_{TC}],$$

где $$\lambda_{TC} = \lambda_0 \sum_{i=1}^{d} N_i K_i; \tag{4.38}$$

N – число элементов i-того типа;

d – число типов элементов.

Если вместо функции надежности $P_{TC}(t)$, взять среднюю наработку на отказ

$$T_{TCcp} = \frac{1}{\lambda_{TC}},$$

то полученные зависимости можно считать инвариантными в отношении условий эксплуатации системы. Действительно, при изменении условий эксплуатации ТС будет меняться лишь интенсивность отказов до основного элемента расчета, т.е. будет меняться лишь масштаб.

При коэффициентном способе расчета для сравнения вариантов по надежности нет необходимости.

3. *Третий этап* расчета надежности проводится после того, когда созданы макеты. Здесь целесообразно провести дополнительные лабораторные испытания, в ходе которых вводят грубые отказы (обрыв, КЗ и т.д.). При этом оценивают влияние отказа элементов на работоспособность ТС и уточняют логическую схему расчета надежности.

Вопросы для самоконтроля:

1. Покажите на примере, почему необходим выбор основного ПН при расчете надежности ТС.
2. Какие ПН выбираются в качестве основных для ТС различного типа?
3. Перечислите факторы, которые необходимо учитывать при назначении норм надежности, и объясните, каким образом производится этот учет.
4. Покажите на примерах основные способы распределения норм надежности по элементам.
5. Проведите анализ основных аналитических выражений для последовательного, параллельно-нагруженного и параллельно-ненагруженного соединения элементов.

Глава V. Общие методы расчёта надёжности проектируемых ТС различных типов

5.1. Способы и основные этапы определения надежности проектируемых систем

Постановка задачи.

Имеются сведения о надежности элементов объектов и связях между элементами (или схемами объектов). По этим данным необходимо определить значения показателей надежности объекта.

Определение надежности всего объекта или системы преследует следующие цели:

1. Определить, достижима ли заданная надежность на современном уровне развития техники.
2. Помочь распределить значения ПН по элементам, блокам и узлам.
3. Помочь сделать выбор между различными конструктивными решениями.
4. Выяснить целесообразность введения резервирования.

Существуют два пути определения надежности ТС:

1) С составлением математической (логической) модели функционирования;
2) Непосредственно по функциональной схеме системы.

Общепринятым в настоящее время является первый путь. Здесь необходимо определить, какие состояния ТС надо учитывать, признаки этих состояний и т.д., т.е. необходимо описать функционирование реальной ТС формальным языком событий и состояний.

Наибольшее распространение получили логические модели БР системы. При этом полагают, что элементы могут находиться в двух несовместных состояниях: работоспособном и неработоспособном. Функциональные связи между элементами заменяются логическими, характеризующими состояние ТС. Условия работоспособности системы при отказах элементов записываются с помощью логических соотношений.

Вид логической модели определяет возможность получения расчетных формул. Наиболее распространенные формальные преобразования достаточно подробно описаны в литературе. Для описания надежности наибольшее распространение получили следующие методы:

- метод интегральных уравнений;
- метод дифференциальных уравнений;
- метод оценки надежности по графу возможных состояний системы.

5.2. Метод интегральных уравнений

Этот метод можно применять при расчете надежности любых систем при любых распределениях времени БР и времени восстановления.

Определение ПН здесь происходит путем составления и решения интегральных или интегро-дифференциальных уравнений. При составлении интегральных уравнений обычно выделяют один или несколько бесконечно малых интервалов времени. Для этих интервалов времени рассматривают сложные события, которые появляются при совместном действии нескольких факторов.

Эти уравнения сравнительно просто составлять, но трудно решать. Часто решения приходится находить численными методами с помощью ЭВМ. В связи с этим метод интегральных уравнений в настоящее время не получил широкого распространения.

В качестве примера применения этого метода рассмотрим расчет надежности невосстанавливаемой ТС с холодным резервом.

При этом предположим:

- индикатор отказа и переключатель абсолютно надежны;
- резервные элементы не могут отказать до включения их в работу;
- ремонт резервной системы в процессе ее работы невозможен.

Такая резервированная система будет безотказно работать в течение времени (0,t) при двух возможных событиях:

- основной элемент не отказал;
- основной элемент отказал в момент $\tau<t$, а резервный элемент проработал безотказно в течение интервала $(\tau–t)$.

Обозначим вероятность первого события $P_1(t)$. Очевидно, что вероятность появления отказа основного элемента в течение малого интервала времени $(\tau,\tau+d\tau)$ равна:

$$\omega_1(\tau)d\tau = -p'(\tau)d\tau, \tag{5.1}$$

где $\omega_1(\tau)$ – плотность вероятности момента *i*-го отказа.

Вероятность БР системы при условии, что в момент τ произошел отказ основного элемента и включился резервный, равна:

$$p_2(t-\tau). \tag{5.2}$$

Таким образом, вероятность осуществления второго события на интервале $(\tau,\tau+d\tau)$ равна:

$$p_2(t-\tau)\cdot\omega_1(\tau)d\tau. \tag{5.3}$$

Интегрируя выражение (5.3) от 0 до t, получим вероятность осуществления второго события:

$$\int_0^t p_2(t-\tau)\cdot\omega_1(\tau)d\tau. \tag{5.4}$$

Очевидно, что вероятность дублированной системы с холодным резервом равна сумме вероятностей осуществления первого и второго событий:

$$p(t) = p_1(t) + \int_0^t p_2(t-\tau)\cdot\omega_1(\tau)d\tau. \tag{5.5}$$

При показательном распределении наработки до отказа основного и резервного элементов, имеющих интенсивность отказов λ_1 и λ_2 из выражения (5.5) имеем:

$$p(t) = e^{-\lambda_1 t} + \int_0^t e^{-\lambda_2(t-\tau)}\lambda_1 e^{-\lambda_1\tau}d\tau = e^{-\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{-\lambda_2 t}\int_0^t e^{(\lambda_2-\lambda_1)\tau}d\tau =$$

$$= e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{(\lambda_2-\lambda_1)\tau}\Big|_0^t = e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} - \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2-\lambda_1} =$$

$$= e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right). \qquad (5.6)$$

Плотность наработки такой системы до отказа равна:

$$\omega(t) = -p'(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\right) =$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1^2 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_1^2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} =$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right). \qquad (5.7)$$

Если система имеет один основной и (K–1) резервный элемент, то, взяв за основу выражение (5.5) можно получить рекуррентную формулу:

$$p_{KC}(t) = p_{K-1}(t) + \int_0^t p_K(t-\tau)\omega_{K-1}(\tau)d\tau, \qquad (5.8)$$

где индекс (K–1) – означает, что соответствующие характеристики относятся к резервной системе, при отказе которой включается в работу последний K резервный элемент.

5.3. Метод дифференциальных уравнений

Этот метод основан на допущении, что время между отказами и время восстановления подчиняются показательным распределениям.

При этом параметр потока отказов $\Omega=\lambda=1/T_{ср}$, а интенсивность восстановления $\mu=1/T_в$, где $T_{ср}$, $T_в$ – соответственно среднее время до отказа и восстановления.

Этот метод может применяться для расчета надежности, как восстанавливаемых, так и невосстанавливаемых систем.

Для использования этого метода необходимо иметь математическую модель в виде множества состояний системы, в которых она может находиться при отказах и восстановлениях.

Для определения ПН составляют и решают систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний (уравнений Колмогорова). Чтобы при этом предельно уменьшить затраты труда на расчет обычно предполагают, что:

- отказавшие объекты начинают немедленно восстанавливать;
- отсутствуют ограничения на число восстановлений;
- надежность средств контроля идеальна.

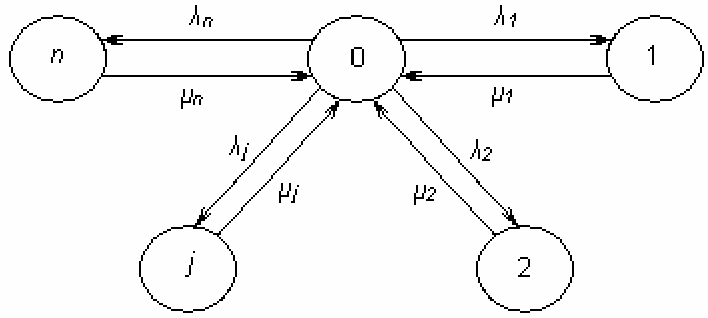


Рис. 5.1. Граф состояний восстанавливаемой системы.

Математическую модель изображают в виде графа состояний. На этом графе кружочками изображают возможные состояния системы при отказах ее элементов. Стрелками изображают возможные направления переходов системы из одного состояния в другое. Около стрелок указывают интенсивность переходов (например, λ и μ).

Изобразим пример такого графа (см. рис. 5.1).

Если рассматривается невосстанавливаемая система, то между состояниями имеется только одна стрелка.

Для определения вероятностей $P_j(t)$ нахождения системы в j-м состоянии в момент времени t составляют по графу состояний систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для этого в левую часть каждого уравнения ставят производную по времени от вероятности нахождения системы в j-ом состоянии в момент времени t. Число членов в правой части равно числу стрелок, соединяющих рассматриваемое состояние с другим. При этом каждый член равен вероятности перехода из одного состояния в другое, а именно произведению интенсивности перехода (например, λ_{ij}) на вероятность того i-го состояния, из которого стрелка выходит. Знак произведения берется положительным, когда стрелка входит в рассматриваемое состояние.

Полученная система дифференциальных уравнений дополняется нормированным условием:

$$\sum_{j=0}^{n} P_j(t) = 1, \tag{5.9}$$

где $P_j(t)$ – вероятность нахождения системы в j-м состоянии,
$n+1$ – число возможных состояний.

Далее все множество состояний разбивается на два подмножества:

1. n_1 – подмножество состояний, в котором система неработоспособна,
2. n_2 – подмножество состояний, в которых система работоспособна.

Тогда функцию готовности системы можно определить как:

$$G(t) = \sum_{j=0}^{n} P_j(t), \tag{5.10}$$

где $P_j(t)$ – вероятность нахождения системы в j-м работоспособном состоянии.

Если необходимо определить коэффициент готовности (или простоя) рассматривают установившийся режим эксплуатации при $t \to \infty$.

В этом случае все производные $P'_j(t)=0$ и система дифференциальных уравнений переходит в систему алгебраических уравнений.

Пример.

Вычислим коэффициент готовности системы, если коэффициент готовности каждого из n элементов системы соответственно равны:

$K_{Г1}, K_{Г2}, \ldots, K_{Гi}, \ldots, K_{Гn}$.

Считаем, что вся система отказывает, если отказал хотя бы один из ее элементов.

Необходимо рассмотреть все состояния системы. Для этого составляется граф состояний (рис. 5.1). Этот граф обозначает следующие состояния системы:

0 – все элементы работоспособны;

1 – первый элемент неработоспособен, остальные работоспособны;

2 – второй элемент неработоспособен, остальные работоспособны

и т.д.

Вероятность появления одновременно двух неработоспособных элементов считаем пренебрежительно малой.

Символами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – обозначены интенсивности отказов,

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ – обозначены интенсивности восстановления.

По графу состояний составляем систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_1 p_0 - \mu_1 p_1(t) \\ &\frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_2 p_0 - \mu_2 p_2(t) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda_n p_0 - \mu_n p_n(t) \end{aligned}\right\} \qquad (5.11)$$

Сюда же добавляют нормировочное условие (5.9)

$$\sum_{j=0}^{n} P_j(t) = 1 .$$

При установившемся режиме эксплуатации уравнения вида (5.11) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 p_0 - \mu_1 p_1(t) = 0 \\ &\lambda_2 p_0 - \mu_2 p_2(t) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\lambda_n p_0 - \mu_n p_n(t) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.12)$$

Решив полученную систему алгебраических уравнений (5.12) с учетом нормировочного условия, получим:

$$K_{ГС} = p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\mu_j}}. \qquad (5.13)$$

Вероятность нахождения системы в j-м состоянии:

$$p_j(t) = \frac{\lambda_j}{\mu_j} \cdot p_0 . \qquad (5.14)$$

Зная формулу $K_Г = \frac{\mu}{(\mu + \lambda)}$, имеем:

$$\mu_j = \lambda_j \cdot \frac{K_{Гj}}{1 - K_{Гj}} . \qquad (5.15)$$

Подставив в (5.13) выражение для μ_j из (5.15), получим:

$$K_{ГС} = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{K_{Гj}}-1\right)}. \qquad (5.16)$$

Пусть $K_{Г1}$ = 0,6; $K_{Г2}$ = 0,7; $K_{Г3}$ = 0,8.

Подставив эти значения в (5.16), получим:

$$K_{ГС} = \frac{1}{1+(1/0{,}6-1)+(1/0{,}7-1)+(1/0{,}8-1)} = 0{,}43.$$

5.4. Метод оценки надежности по графу возможных состояний систем

Этот метод основан на методе дифференциальных уравнений, при котором приходится решать систему линейных алгебраических уравнений. Структура определителей этой системы позволяет сформулировать правило нахождения выражений для ПН непосредственно по графу.

Такое правило для выражений стационарной вероятности нахождения системы в *j*-м состоянии состоит в следующем: проходят кратчайшие пути (без возвращения) из всех крайних состояний в каждое состояние системы по направлению стрелок и перемножают все интенсивности переходов.

Каждая интенсивность перехода учитывается только один раз. Вероятность нахождения в *j*-м состоянии для графов без колец определяется по формуле:

$$p_j(t) = \frac{\Delta_j}{\sum_{i=0}^{K}\Delta_i}, \qquad (5.17)$$

где: Δ_j, Δ_i – произведения интенсивностей переходов из всех кратчайших состояний соответственно в *j*-е и *i*-е при движении по кратчайшему пути в направлении стрелок;

(K+1) – число состояний системы.

Кратчайшими считаются состояния, которые не имеют выходящих стрелок при невосстанавливаемой системе и имеют не более одной выходящей стрелки при восстанавливаемой системе.

Применяя это правило, можно получить формулу для $K_{ГС}$ (коэффициента готовности системы) без составления и решения дифференциальных уравнений.

Пример. ТС состоит из трех узлов. Отказ любого узла – отказ ТС. Известны интенсивности отказов λ_1, λ_2, λ_3 и интенсивности восстановлений μ_1, μ_2, μ_3 узлов ТС. Определить $K_{ГС}$ – коэффициент готовности ТС?

Решение.

Описание системы, а, следовательно, и ее граф аналогичен графу (рис.5.1). Изобразим граф ТС согласно условию задачи (рис. 5.2).

Используя изложенное ранее правило, определяем по графу (рис. 5.2) коэффициент готовности ТС:

$$K_{ГС} = p_c - \frac{\Delta_0}{\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3}, \qquad (5.17а)$$

где:

$$\Delta_0 = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3; \qquad \Delta_1 = \lambda_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3;$$
$$\Delta_2 = \mu_1 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_3; \qquad \Delta_3 = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \lambda_3.$$

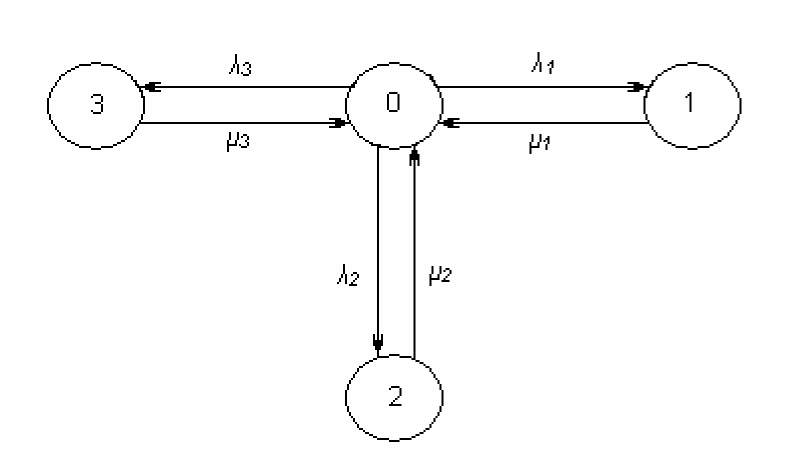


Рис.5.2.

Подставляя λ_i и μ_i в (5.17а) окончательно получим:

$$K_{ГС} = \frac{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 + \lambda_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 + \mu_1 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_3 + \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \lambda_3} =$$
$$= \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{\lambda_3}{\mu_3}}.$$

Для нестационарного состояния находят выражения для преобразования Лапласа вероятности нахождения в рассматриваемом состоянии.

5.5. Расчет потерь производительности систем из-за ненадежности элементов

Обычно в этом случае находят средние потери в единицу времени как математическое ожидание потерь выходного эффекта в единицу времени:

$$\overline{w} = \overline{э}_0 - \sum_{v=0}^{S} \overline{э}_v h_v, \tag{5.18}$$

где $\overline{э}_0$ – средний выходной эффект в единицу времени для полностью работоспособной абсолютно надежной (идеальной) системы;

h_v – вероятность нахождения системы в v-м состоянии (или доля времени нахождения системы в v-м состоянии);

S – число возможных состояний системы.

Иногда удобнее вычислять относительные средние потери из-за ненадежности:

$$\frac{\overline{w}}{\overline{э}_0} = \left(1 - \sum_{v=0}^{S} \varepsilon_v h_v\right) \cdot 100\%, \tag{5.19}$$

где $\varepsilon_v = \frac{\overline{э}_v}{\overline{э}_0}$ – коэффициент снижения эффекта в v-м состоянии.

Основные трудности возникают при определении вероятностей нахождения системы в различных состояниях. Поэтому в результате предварительного анализа необходимо сформулировать некоторое правило (допущения) и придерживаться его в ходе расчета.

Наиболее целесообразными являются следующие из *допущений*:

1. Возможны (n+1) состояний системы. Одно состояние соответствует работоспособности всех элементов. Остальные состояния соответствуют неработоспособности одного из n элементов.

Выходной эффект соответствует только для одного состояния – при работоспособности всех элементов: «схема одного состояния».

2. Схема аналогична предыдущей, только при отказе одного элемента возникает v-е состояние, которому соответствует выходной эффект $\bar{Э}_v$: «схема одного отказа».

3. Возможны лишь такие состояния системы, при которых не более двух ее элементов неработоспособны: «схема двух отказов». Общее число состояний $n+1+C_n^2$.

Доли времени нахождения системы в других, кроме указанных выше, состояниях считаются пренебрежительно малыми.

Расчеты потерь производительности системы из-за ненадежности элементов целесообразно проводить, переходя последовательно от схемы одного состояния к схемам одного, двух и т.д. отказов элементов.

При «схеме одного состояния» коэффициент эффективности для этого состояния ε_v=1, для остальных состояний ε=0. При этом относительные средние потери вычисляются по формуле:

$$\frac{\bar{W}}{\bar{Э}_0} = 1 - h_0,$$

где h_0 – вероятность того, что все элементы работоспособны.

Вероятность h_0 вычисляется по значениям коэффициентов готовности всех j-ых элементов $K_{Гj}$ или по формуле (5.13):

$$K_{ГС} = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\mu_j}}.$$

При схеме «одного отказа» вычисляются вероятности нахождения системы в каждом v-м из (n+1) состояний по формуле:

$$h_v = h = \frac{\lambda_j}{\mu_j} \cdot h_0 = \frac{\lambda_j}{\mu_j} \cdot \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\mu_j}}.$$

При этом:

$$\frac{\bar{W}}{\bar{Э}_0} = 1 - h_0 - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j h_j = 1 - h_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \cdot \frac{\lambda_j}{\mu_j}\right). \tag{5.20}$$

Увеличение относительной производительности системы при расчете по схеме одного отказа может быть грубо оценено по формуле:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j \lambda_j}{\mu_j} \approx n\varepsilon_{ср1} \left(\frac{\lambda_j}{\mu_j}\right)_{ср} = z_1, \tag{5.21}$$

где: ε_{cp1} – ориентировочная оценка среднего коэффициента эффекта для состояния системы, в которой не работает один элемент (остальные (n-1) работают);

$\left(\dfrac{\lambda_j}{\mu_j}\right)_{cp}$ – среднее значение отношения λ_j /μ_i для элементов системы.

Для системы с различными λ_j и μ_i вычисления сильно усложняются.

При расчете по «схеме двух отказов» вычисления сильно усложняются из-за резкого увеличения числа рассматриваемых состояний. Поэтому часто приходится применять ЭВМ. Последовательность вычисления та же: по графу вычисляют средние потери по формуле (5.19).

Чтобы решить вопрос о целесообразности расчета по «схеме двух отказов» перепишем формулу (5.19.) в виде:

$$\frac{\overline{W}}{\bar{Э}_0} = 1 - h_0 - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j h_j - \sum_{v=n+1}^{S} \varepsilon_v h_v, \tag{5.22}$$

где:

$$S = C_n^1 + C_n^2 = n + \frac{1}{2} n \cdot (n-1).$$

В выражении (5.22) первая сумма характеризует производительность системы при одном отказе, а вторая – при двух.

Вопросы для самоконтроля:

1. Для каких законов распределения времени БР используются методы интегральных и дифференциальных уравнений при расчете надежности ТС?
2. Проанализируйте достоинства и недостатки метода дифференциальных уравнений и метода расчета надежности по графу возможных состояний ТС.
3. Покажите (доказательно) почему при использовании метода оценки надежности по графу возможных состояний ТС нет необходимости в составлении и решении системы алгебраических уравнений.
4. Проведите сравнительный анализ достоинств и недостатков всех трех рассмотренных методов расчета надежности.

Глава VI. Методы повышения надежности

6.1. Обеспечение надежности средств автоматики и телемеханики

Рассмотренные в предыдущих разделах курса вопросы позволяют выделить основные направления работ по повышению надежности ТС.

При этом можно выделить *четыре группы мероприятий по повышению надежности ТС* при их проектировании:

- системные;
- структурные (схемные);
- конструктивные;
- эксплуатационные.

К системным методам относятся организационно-экономические мероприятия по стимулированию повышения надежности и ряд технических мероприятий.

Одним из путей стимулирования повышения надежности является включение в стоимость ТС затрат на гарантийные ремонт и обслуживание. При этом разработчик учитывает, что при повышении надежности уменьшаются затраты на гарантийный ремонт и обслуживание, т.е. прибыль становится наибольшей при определенном значении показателя надежности, превышающем максимальна допустимый уровень. В этом случае разработчики и изготовители ТС стремятся узнать этот уровень и достигнуть его. Следовательно, стимулируются точные оценки надежности и ее повышение. Другим путем стимулирования повышения надежности является планирование расходов на весь срок службы проектируемой ТС.

Технические мероприятия по оформлению показателей надежности проектируемых ТС необходимы при любой системе взаимоотношений заказчика и разработчика. *К техническим мероприятиям* относятся учет внешних воздействий на проектируемые технические средства:

а) рабочие (тяжелый ударно-вибрационный режим, температурный режим, агрессивная химическая среда, ядерная реакция);
б) климатические (температура, влажность, примеси в воздухе);
в) биологические (грибок или плесень, насекомые, грызуны).

Структурные (схемные) методы объединяют мероприятия по повышению надежности ТС путем совершенствования принципов их построения.

Эти методы отличаются большим разнообразием и интенсивно развиваются. К ним относятся, например, варианты построения ТС, нечувствительных к появлению отказов, за счет введения избыточных аппаратурных и программных средств. При этом могут использоваться и аппаратные (например, резервированные) и программные (например, сравнение результатов избыточных вычислений) средства. В ряде случаев также могут применяться и аппаратно-программные средства обнаружения отказов элементов и восстановления ТС. Более подробно структурные (схемные) методы повышения надежности будут рассмотрены в дальнейшем.

К конструктивным методам относятся мероприятия по созданию или подбору элементов, узлов или блоков ТС, созданию благоприятных режимов работы, принятию мер по облегчению ремонтов и т.д. При этом обычно оказываются более надежными те элементы, узлы или блоки ТС, которые не имеют перемещающихся деталей, тонких обмоток, накаливаемых нитей и прочее.

Время устранения отказа можно существенно уменьшить путем построения ТС по блочно-узловому способу. При этом все ТС разбиваются на отдельные функционально законченные блоки, которые в электронных системах соединяются между собой кабелями, а в механических – связываются кинематически. Блоки в свою очередь разбиваются на функционально законченные узлы, выполняемые в виде легкосъемных конструкций. При таком построении ТС восстановление состоит в замене выведших из строя блоков или узлов, что значительно ускоряет процесс ввода ТС в строй. Осуществление блочно-узловых конструкций тесно связано с унификацией элементов и систем, которая производится на основе отбора наиболее надежных вариантов. При этом не только повышается надежность ТС, но и снижается их стоимость, и упрощается изготовление. В ряде случаев удается создать очень сложные системы из элементов всего двух-трех типов.

Планирование *эксплуатационных мероприятий* на стадии проектирования ТС состоит в разработке системы эксплуатационного обеспечения. Проектирование ТС при этом должно осуществляться в соответствии с номенклатурой работ по техническому обслуживанию. Например, для планирования периодического регулирования определяющих параметров ТС необходимо предусмотреть возможность контроля и прогнозирования значений этих параметров и т.д.

Как уже указывалось, *структурные (схемные) и конструктивные методы повышения надежности безусловно являются основными для обеспечения соответствующего уровня надежности разрабатываемых ТС*.

Рассматривая эти методы необходимо подчеркнуть следующее.

В первую очередь надежность ТС достигается *за счет использования высоконадежных элементов*. Внедрение полупроводниковых приборов вместо электровакуумных позволило, как известно, повысить надежность технических устройств более чем на порядок, за счет того, что физические процессы в полупроводниковых приборах обеспечивают их функционирование при меньших питающих напряжениях, рассеиваемой мощности и, следовательно, температурах.

Дальнейшим развитием элементной базы явилось создание интегральных микросхем (ИМС). За последние 20–30 лет ИМС развивались бурными темпами и последовательно были созданы интегральные схемы малой, средней и большой (БИС) степени интеграции. В настоящее время создаются сверхбольшие ИМС, содержащие тысячи, десятки тысячи даже сотни тысяч элементов. Так как технология ИМС непрерывно совершенствовалась, то указанное обстоятельство привело к тому, что, несмотря на резкое увеличение числа элементов на одном кристалле, надежность отдельного кристалла оставалась прежней, причем интенсивность отказов схемы, размещенной на кристалле, составляла примерно 10^{-6}–10^{-8} 1/ч.

Дальнейшее развитие элементов автоматики и вычислительной техники будет направлено по пути повышения степени интеграции в ИМС, использования оптических элементов, а также внедрения новых типов печатных плат, в том числе многослойных плат, контактных соединении и т.д.

При проектировании ТС необходимо особое внимание уделять подбору стандартизированных и унифицированных элементов, использование которых значительно повышает надежность, так как эти элементы отработаны наилучшим образом в схемном, конструктивном и технологическом отношении.

Вторым путем повышения надежности является *обеспечение оптимальных режимов работы элементов* и, прежде всего, электрических режимов. Опыт эксплуатации элементов показывает, что оптимальные значения коэффициента нагрузки, при которых интенсивность внезапных отказов наименьшая, находятся в пределах 0,2–0,4. Кроме того, установлено, что при этих же значениях коэффициента нагрузки параметры элементов медленнее отклоняются от номинальных. При этом большое значение имеет выбор коэффициента нагрузки по тепловому, механическому и радиационному режиму. Указанные режимы в большой мере зависят от конструкции устройств, а также от принятых технических решений. Естественно, что это должно учитываться в процессе проектирования.

Одним из наиболее эффективных средств повышения надежности является *резервирование*, то есть введение избыточности. Опыт использования различных методов резервирования в ТС показывает, что *постоянное резервирование* может использоваться по отношению к отдельным элементам или схемам. Для сложных ТС обычно применяется *резервирование замещением*, которое также используется и для отдельных устройств. Часто, например, в САУ и АСУ используются *мажоритарное резервирование* и *самокорректирующие коды*.

Временное резервирование широко применяется в средствах вычислительной техники. Его конкретная реализация, например, осуществляется способом двойного – тройного счета. Например, определенная задача решается дважды, и сравниваются полученные результаты. Совпадение результатов означает, что отказы и сбои отсутствуют и можно переходить к решению следующих задач. В случае несовпадения результатов, что означает отказ или сбой в работе устройства, необходимо решение повторить. Временное резервирование используется также при тестовом контроле, то есть периодическом решении специальных задач с известными ответами. Очевидно, что в этом случае на основании сравнения полученного результата с известным, можно судить о работоспособности устройства. Причем, чем больше времени выделяется на тестовый контроль и чем чаще он проводится, тем с большей достоверностью можно судить о работоспособности контролируемого устройства.

Одним из специальных методов повышения надежности является *использование самонастраивающихся и самоорганизующихся систем*.

Особенно важным является *принцип самоорганизации*. Для его реализации создаются, например, такие САУ и АСУ, которые способны изменять свою структуру в процессе функционирования. Перестройка структуры осуществляется таким образом, чтобы обеспечить с помощью сохранивших работоспособность звеньев системы требуемое качество регулируемого процесса. Это приводит к необходимости учета при проектировании систем влияния параметров отдельных звеньев на соответствующие показатели исследуемой системы.

Как уже указывалось, эффективным методом повышения надежности является *восстановление отказавших ТС*. Здесь основным вопросом является обнаружение факта отказа и поиск отказавших элементов. Такая задача может быть решена с помощью диагностирования ТС, например, при использовании автоматизированных систем контроля, где в качестве основного центрального звена применяется ЭВМ, обеспечивающая проверку большого числа контрольных точек в течение небольшого промежутка времени.

Свои особенности при этом имеет диагностирование устройств вычислительной техники. Здесь широкое применение находят *методы диагностирования*, основанные на использовании различных логических соотношений, информационного и алгоритмического резерва.

В настоящее время в средствах вычислительной техники все шире используется *сигнатурный анализ*, который основан на сжатии информации и представлении ее массивов в виде их специальных образов – *сигнатур*. Анализ сигнатур при обработке различных массивов информации позволяет сделать выводы о работоспособности устройств.

Кроме того, время восстановления существенно сокращается за счет обеспечения доступности всех узлов ТС для осмотра, т.е. определяется ремонтопригодностью разрабатываемых конструкций.

В частности, например, *в устройствах вычислительной техники* приняты *четыре конструктивных уровня*:

- ИМС и радиоэлементы;
- типовые элементы замены (ТЭЗ), представляющие собой печатные (платы с размещенными на них ИМС;
- рамы, в которых размещаются ТЭЗ;
- шкафы, в которых крепятся рамы.

При такой конструкции устройства замена отказавших элементов осуществляется путем замены ТЭЗ, а отказавшие ТЭЗ поступают в ремонт.

Большое значение для обеспечения надежности, как уже неоднократно указывалось, имеет *качество изготовления ТС*, которое определяется технологической дисциплиной, организацией контроля на всех стадиях проектирования, производства, проведения испытаний и качеством комплектующих и материалов. Здесь также имеет большое значение качество эксплуатации, принятая система технического обслуживания, обеспечение комплектами ЗИП и его пополнение, подготовленность обслуживающего персонала и ряд других факторов.

Анализ надежности ТС показывает, что примерно 40–45% всех отказов возникает в аппаратуре из-за ошибок на этапе проектирования, 20% – от ошибок, допущенных при производстве, 30% – от неправильной эксплуатации, 5–10% – от естественного износа и старения.

Таким образом, как видно из изложенного материала, существует достаточно большое количество направлений повышения надежности ТС и их составных частей.

Однако из всех перечисленных выше направлений и путей необходимо подчеркнуть важность, а также определенную специфику методов резервирования, которые рассмотрим более подробно.

6.2. Основные понятия, определения и классификация методов резервированных ТС

Резервированием называют метод повышения надежности ТС за счет введения избыточности. Под *избыточностью* при этом понимают дополнительные средства и возможности сверх минимально необходимых для выполнения ТС заданных функций. Таким образом, задачей введения избыточности является обеспечение нормального функционирования ТС после возникновения отказов в ее элементах.

В соответствии с ГОСТ 13377-75 различает <u>*три основных вида резервирования*</u>:

- структурное,
- информационное,
- временное.

Структурное резервирование (или аппаратное) предусматривает использование избыточных элементов ТС. Суть такого вида резервирования заключается в том, что в минимально необходимый вариант системы, элементы которой называют основными, вводятся дополнительные элементы, узлы, устройства либо даже вместо одной системы предусматривается использование нескольких идентичных систем. При этом избыточные резервные структурные элементы, узлы, устройства и т.д. предназначены для выполнения рабочих функций при отказе соответствующих основных элементов, узлов и устройств.

Информационное резервирование предусматривает использование избыточной информации. Простейшим примером реализации такого вида резервирования является многократная передача одного и того же сообщения по каналу связи. В качестве другого примера можно привести использование специальных кодов, обнаруживавших к исправляющих ошибки (коды с повторением и инверсией, циклический код, код Хемминга и т.д.), которые появляются в результате сбоев и отказов аппаратуры. Здесь следует заметить, что использование информационного резервирования влечет за собой также необходимость введения избыточных элементов.

Временное резервирование предусматривает использование избыточного времени. В случае применения этого вида резервирования предполагается возможность возобновления функционирования ТС после того, как оно было прервано в результате отказа, путем его восстановлена. При этом также предполагается, что на выполнение ТС необходимой работы отводится время, заведомо большее минимально необходимого.

Перечисленные виды резервирования могут быть применены либо к ТС в целом, либо к отдельным их элементам или к группам таких элементов. В первом случае *резервировани*е называется *общим*, во втором – *раздельным*.

Наиболее широкое распространение в настоящее время получило <u>*структурное резервирование*</u>. ТС с использованием этого вида резервирования могут классифицироваться *по различным признакам*, основными из которых являются:

- реакция ТС на появление отказа;
- режим работы резервных элементов;
- вид схемы резервирования;
- способ включения резервных элементов;
- степень избыточности и т.д.

В первую очередь различные резервированные ТС отличаются одни от других реакцией на появление отказов, т.е. своими *«динамическими» свойствами*. С этой точки зрения различают <u>*два метода резервирования*</u>: *активное* и *пассивное*.

В первом случае структура ТС такова, что при появлении отказа она перестраивается и происходит восстановление работоспособности, т.е. происходит как бы «саморемонт» ТС. При этом ТС активно реагирует на появление отказа. Отсюда и название метода резервирования.

При пассивном резервировании ТС отказ одного или даже нескольких элементов не влияет на его работу. Элементы соединены постоянно и перестроения структуры не происходит. ТС как бы пассивно сопротивляется появлению отказов элементов.

Как при активном, так и при пассивном методах резервирования большое значение имеют *режимы работы резерва*. Однако, если в первом случае для расчета важно знать нагрузку на резервные элементы до появления отказа, то во втором случае – после появления отказа.

По этому классификационному признаку *для активного резервирования* различают *нагруженный*, *облегченный* и *ненагруженный резервы*.

Нагруженный резерв – резервный элемент находится в том же режиме, что и основной. При этом принимается, что характеристики надежности резервных элементов в период их пребывания в качестве резервных и в период их использования вместо основных после отказа последних остаются неизменными.

Облегченный резерв – резервный элемент находится в менее нагруженном режиме, чем основной. При этом принимается, что характеристики надежности резервных элементов в период их пребывания в качестве резервных выше, чем в период их использования вместо основных после их отказа.

Ненагруженный резерв – резервный элемент практически не несет нагрузки до начала выполнения им функций основного элемента. При этом принимается, что такой резервный элемент, находясь в резерве, отказывать не должен, т.е. обладает в этот период «идеальной» надежностью. В период же использования резервного элемента вместо основного после отказа последнего надежность резервного элемента становится равной надежности основного.

При отказе хотя бы одного их элементов ТС с пассивным резервированием может изменяться нагрузка, воспринимаемая элементами, оставшимися работоспособными. Именно поэтому, в ТС с пассивным резервированием большое значение имеют условия работы элементов после появления отказа, т.е. стабильность нагрузки на элементы, оставшиеся работоспособными. По этому признаку различает *три вида ТС с пассивным резервированием*:

- *с неизменной нагрузкой* (при отказе одного или нескольких элементов не меняется нагрузка на элементы, оставшиеся работоспособными);
- *с перераспределением нагрузки* (при отказе хотя бы одного элемента изменяется, обычно в сторону увеличения, нагрузка за элементы, оставшиеся работоспособными);
- *с нагрузочным резервированием* (резервированием по нагрузке), в которых при отказе хотя бы одного элемента ТС выходят из строя, но интенсивность отказов элементов уменьшена за счет того, что нагрузка, которую должен был воспринимать один элемент, воспринимается несколькими элементами.

При пассивном резервировании наибольший выигрыш в надежности достигается в ТС с неизменной нагрузкой, наименьший – с резервированием по нагрузке. Здесь следует подчеркнуть, что в ТС с активным резервированием происходит нарушение работы объекта на время с момента отказа основного элемента до момента включения резервного. Таким образом, если такой перерыв в работе ТС принципиально недопустим, то, следовательно, метод пассивного резервирования является единственно возможным. И это один из самых существенных моментов, на который разработчик ТС должен обратить свое внимание при выборе между активным и пассивным методами резервирования.

Оба рассмотренных выше метода реализуются *по различным схемам резервирования*. Принципиального различия между видами схем резерва нет. Однако при этом все же различают резервирование *общее*, *автономное*, *раздельное*, *единичное*, *внутриэлементное*, *скользящее* и *с избирательными схемами*.

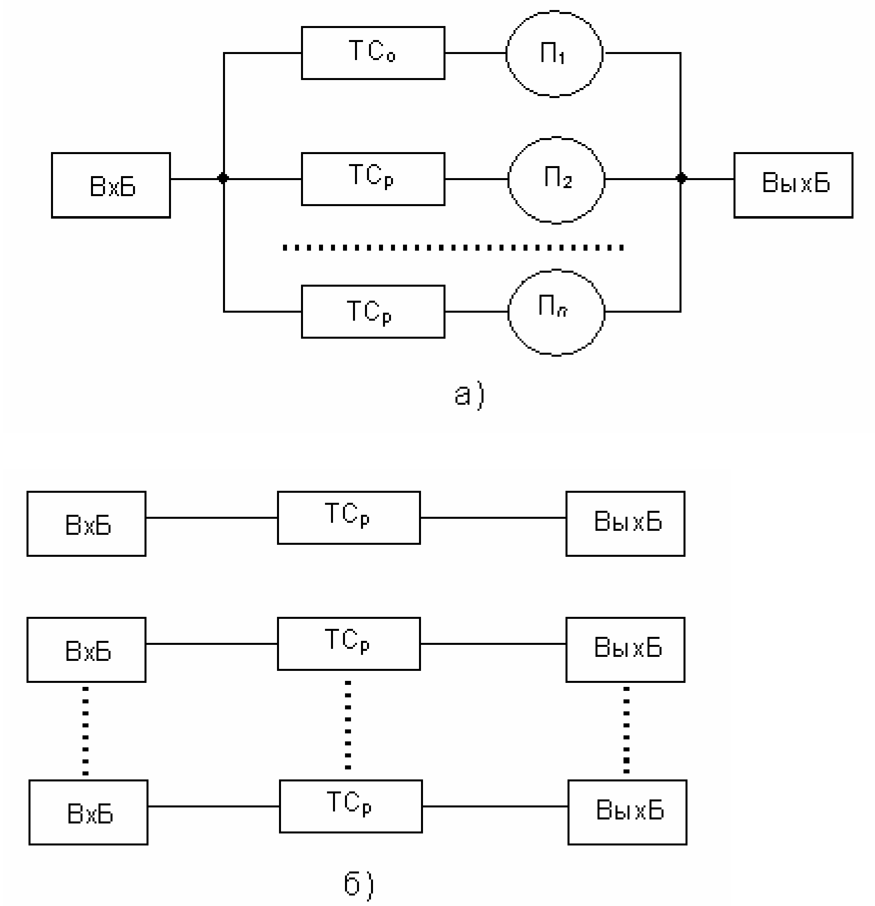


Рис. 6.1. Структуры общего резервирования:
а – схема общего активного резервирования;
б – схема автономного резервирования;
ВхБ – входной блок; TC_o – основные ТС; TC_p – резервные ТС;
$П_i$ – переключатели; ВыхБ – выходной блок.

Общее резервирование состоит в резервировании ТС в целом и, благодаря своей простоте, этот способ наиболее известен (рис. 6.1.а).

Автономное резервирование – один из вариантов общего. Оно состоит в применении нескольких независимых объектов, выполняющих одну и ту же задачу. Каждый из этих объектов имеет свой вход и выход и, обычно, независимые источники питания. Примером объектов с автономным резервированием может служить совокупность устройств телеизмерения, выполняющих одну и ту же задачу, если каждое устройство имеет свои входные датчики, записывающие (выходные) блоки и источники питания. Автономное резервирование обычно применяется при проведении ответственных экспериментов в системах ответственного назначения. При этом автономное резервирование (рис .6.1.б) всегда является пассивным.

Раздельное резервирование состоит в резервировании ТС по отдельным элементам или их группам (участкам). ТС с активным общим резервированием можно считать частным случаем ТС с раздельным резервированием при одном участке резервирования.

Единичное резервирование состоит в замене элементов ТС элементарными резервированными схемами (обычно пассивными). В сложных ТС очень трудно найти рациональную схему раздельного резервирования. Кроме того, схемы резервирования различных ТС каждый раз приходится проектировать заново, что требует иногда довольно значительных материальных затрат и времени. Поэтому единичное резервирование, при котором простейшие схемы резерва типовых элементов могут выполняться в виде готовых блоков (ячеек), часто оказывается удобным из-за простоты построения сложных резервированных ТС. При единичном резервировании не нужно составлять специальных схем, а можно просто ставить на место каждого элемента в функциональной схеме ТС его аналог – типовую резервированную ячейку.

Внутриэлементное резервирование состоит в резервировании внутренних связей элемента. Если при единичном резервировании используются схемы из существующих элементов (ячейки), то применение внутриэлементного резервирования связано с изменением конструкции элемента. Примером использования внутриэлементного резервирования может служить так называемый *релер* - резервированное реле.

Скользящее резервирование применяется в ТС с большим количеством одинаковых элементов. Оно состоит в том, что используется небольшое число резервных элементов, которые могут подключаться взамен любого из отказавших элементов основной ТС.

При *резервировании с избирательной схемой* сравниваются сигналы на выходе нечетного числа параллельно работающих устройств и во внешнюю цепь выдается сигнал, имеющийся на выходе большинства устройств. Избирательные схемы применяются в тех случаях, когда трудно установить, отказали или нет отдельные устройства.

По способу включения резервных элементов все рассмотренные выше схемы резервирования разделяются *на схемы с постоянно включенным резервом (постоянное резервирование)* и *схемы резервирования замещением*.

Постоянное резервирование – это такое резервирование, при котором резервные элементы участвуют в функционировании ТС наравне с основными. При этом основные и резервные элементы могут иметь общий вход и общий выход, в частности, гальваническую связь по входу и выходу, а могут быть и автономными, т.е. не иметь такой связи. При постоянном резервировании в случае отказа основного элемента не требуется специальных переключательных устройств, вводящих в действие резервный элемент, поскольку он вводится в действие одновременно с основным.

Резервирование замещением – это такое резервирование, при котором функции основного элемента передаются резервному только после отказа основного. При использования этого вида резервирования необходимы контролирующие и переключающие устройства для обнаружения факта отказа основного элемента и переключения с основного на резервный.

Еще одним классификационным признаком резервированных ТС является *степень избыточности*, которая *характеризуется кратностью резервирования*.

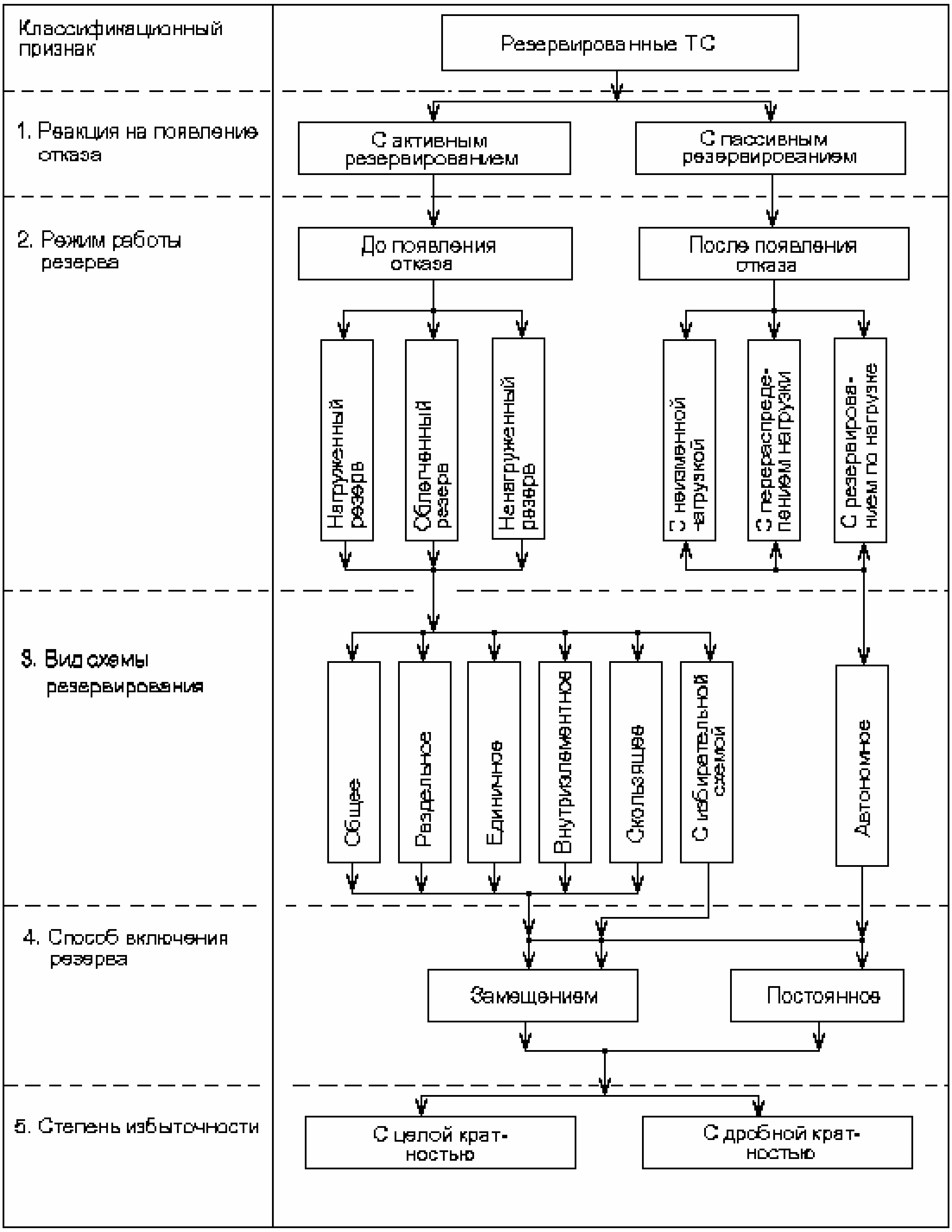


Таблица 6.1. Классификация резервированных ТС.

<u>*Кратность резервирования*</u> – это отношение числа резервных элементов к числу резервируемых или основных элементов ТС. Различают

резервирование с целой и *дробной кратностью*. Резервирование с целой кратностью имеет место, когда один основной элемент резервируется одним и более резервными элементами. Резервирование с дробной кратностью имеет место, когда два и более однотипных элементов резервируются одним и более резервными элементами. Наиболее распространенным вариантом резервирования с дробной кратностью является такой, когда число основных элементов превышает число резервных. Резервирование, кратность которого равна единице, называется *дублированием*.

В заключении следует отметить, что надежность ТС в значительной степени определяется применением резервирования с восстановлением или без него. Резервирование, при котором работоспособность любого основного и резервного элементов ТС в случае возникновения отказов подлежит восстановлению в процессе эксплуатации системы, называется резервированием с восстановлением. В противном случае имеет место резервирование без восстановления.

Общая схема классификации резервированных ТС приведена в таблице 6.1.

6.3. Расчет надежности ТС при структурном резервировании

6.3.1. Общие положения

Как известно, при проектировании ТС разработчик реализует в аппаратуре возможность выполнения проектируемой системой набора функций, предусмотренных техническим заданием (ТЗ). При этом очевидно, что реализация этих функций ограничена значениями основных критериев (точность, производительность, надежность, стоимость и т.д., заложенных в ТЗ). Таким образом, на каждом этапе проектирования ТС необходим расчет значений этих критериев на предмет их соответствия заданным значениям в ТЗ.

В частности, для расчета надежности проектируемых ТС при использовании структурного резервирования обычно составляется *расчетно-логическая схема резервированной системы*. В большинстве случаев элементы ТС в этой схеме имеют параллельно-последовательное соединение. В цепочке последовательно соединенных элементов отказ хотя бы одного из них приводит к выходу из строя всей цепочки. В резервированной группе параллельно соединенных элементов допускается выход из строя определенного числа элементов (в зависимости от кратности резервирования) без нарушения функционирования группы в целом. Примером расчетно-логической схемы могут служить структуры, представленные на рис. 6.1.

Перед тем как переходить к рассмотрению методов расчета показателей надежности (ПН) ТС со структурным резервированием необходимо сделать *ряд замечаний*.

1. Расчет надежности для схем общего резервирования (рис. 6.1.а) можно осуществлять по расчетно-логической схеме одного резервированного элемента путем замены последовательно соединенных элементов (блоков, устройств, узлов) эквивалентными элементами, ПН которых находятся по известным формулам:

$$P(t) = \prod_{i=1}^{K} P_i(t),$$
(6.1)

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i(t),$$
(6.2)

где $P_i(t)$, $\lambda_i(t)$ – соответственно, вероятность безотказной работы и интенсивность отказов i-го элемента;

K – число последовательно соединенных элементов.

2. Для получения ПН ТС в целом при раздельном резервировании достаточно определить показатели надежности резервируемого элемента (блока, устройства, узла). В этом случае ПН всей ТС получают путем применения расчетных формул для основного соединения, в котором в качестве элементов выступают резервированные группы элементов.

3. В дальнейшем изложении многие расчетные формулы будут получены в предположении, что случайное время до отказа элемента распределено по экспоненциальному закону. Следует подчеркнуть, что это предположение многократно подтверждалось экспериментальным путем в аппаратуре автоматики, построенной на элементах электроники и электротехники. В тех же случаях, когда фактическое распределение времени до отказа отличается от экспоненциального закона, его использование дает обычно заниженные оценки, т.е. нижние границы надежности аппаратуры.

4. Надежность резервированных ТС, особенно восстанавливаемых, в большой степени зависит от надежности аппаратуры встроенного контроля. Действительно, аппаратура контроля предназначена для определения факта отказа основной аппаратуры и выдачи команды устройству переключения на переход на резервную аппаратуру. Кроме того, аппаратура контроля служит также для локализации места неисправности. При расчетах надежности резервированиях ТС надежность аппаратуры встроенного контроля может быть приближенно учтена путем включения в расчетно-логическую схему последовательно с резервированной группой элемента, соответствующего аппаратуре встроенного контроля.

6.3.2. Общее резервирование с постоянно включенным резервом и целой кратностью

Расчетно-логическая схема для постоянного включения резерва представлена на рис. 6.2.

На рисунке 6.2. основная цепь состоит из n – элементов $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Каждая из m резервированных цепей включает в себя также n элементов $P_1, P_2, \ldots P_n$. Для простоты рассуждений будем считать, что основная и резервные цепи имеют одинаковую надежность. Кратность такой схемы резервирования равна m, U. Следовательно, данная схема соответствует случаю, когда отказ ТС наступает при отказе всех (m+1) цепей как основной, так и резервных. Будем считать также, что основная и резервная цепи включаются в работу одновременно (нагруженный резерв), но используется лишь одна цепь – основная. При отказе основной цепи ее функции без всякого перерыва начинает выполнять одна из резервных.

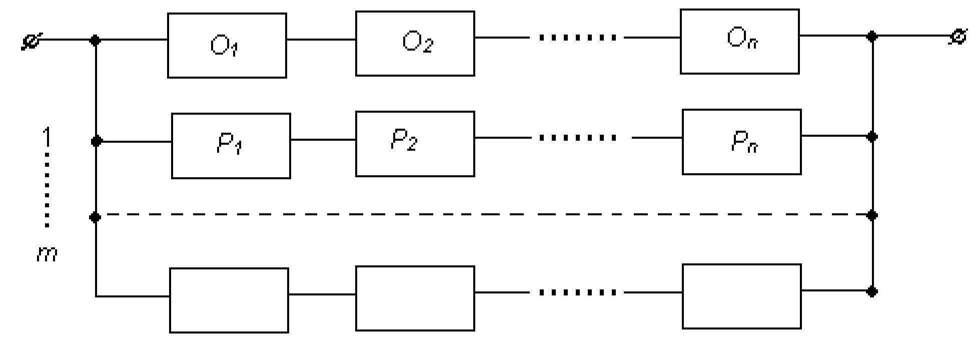


Рис.6.2. Общее резервирование с постоянно включенным резервом.

В этом случае вероятность безотказной работы резервированной ТС будет определяться по следующей формуле:

$$P_{TC}(t) = 1 - \left[1 - \prod_{i=1}^{n} P_i(t)\right]^{m+1}, \qquad (6.3)$$

где $P_i(t)$ – вероятность безотказной работы i-го элемента в течение времени t;

n – число элементов основной или любой резервной цепи;

m – кратность резервирования.

Если время до отказа каждой цепи резервированной ТС распределено по экспоненциальному закону, то в этом случае имеем для вероятности безотказной работы:

$$P_{TC}(t) = 1 - \left[1 - e^{-\lambda_0 t}\right]^{m+1}, \qquad (6.4)$$

Средняя наработка на отказ для экспоненциального распределения будет равна:

$$T_{TC_{cp}} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i+1} = T_{cp_0}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i+1}, \qquad (6.5)$$

где $\lambda_0 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ – интенсивность отказов основной цепи или любой из резервных;

T_{TCcp} – средняя наработка до отказа основной цепи или любой из резервных.

6.3.3. Раздельное резервирование с постоянно включенным резервом и целой кратностью

Расчетно-логическая схема для такого типа резервирования представлена на рис. 6.3.

При раздельном резервировании каждый элемент основной цепи O_i имеет свои резервные элементы P_i и соответственно свою кратность резервирования m_i (рис. 6.3.). В частном случае кратность резервирования может быть и одинаковой для всех основных элементов. Следовательно, при расчете надежности таких резервированных ТС в случае нагруженного резерва можно использовать формулы (6.3.)÷(6.5.) для элементов основной цепи, а затем, используя выражение (6.1.), определять ПН ТС в целом.

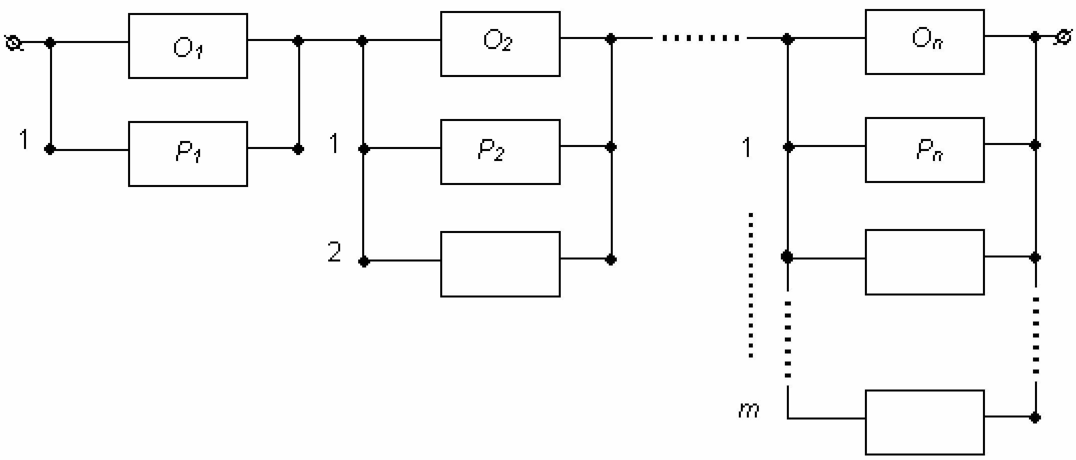


Рис. 6.3 Раздельное резервирование с постоянно включенным резервом.

С учетом изложенного, вероятность безотказной работы ТС с раздельным резервированием будет определяться как:

$$P_{TC}(t) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ 1 - \left[1 - P_i(t) \right]^{m_i+1} \right\}. \quad (6.6)$$

При экспоненциальном распределении будет равна:

$$P_{TC}(t) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ 1 - \left[1 - e^{-\lambda_0 t} \right]^{m_i+1} \right\} \quad (6.7)$$

В частном случае при равной надежности основных и резервных элементов, а также одинаковой кратности резервирования получим:

$$P_{TC}(t) = \left\{ 1 - \left[1 - e^{-\lambda_0 t} \right]^{m_i+1} \right\}^{n}. \quad (6.8)$$

Средняя наработка на отказ при этом будет определяться из следующей формулы:

$$T_{TCcp} = \int_0^{\infty} P_{TC}(t)dt = \frac{(n-1)!}{\lambda(m+1)} \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{v_i(v_i+1)\ldots(v_i+n+1)}, \quad (6.9)$$

где $v_i = \dfrac{i+1}{m+1}$.

6.3.4. Общее и раздельное резервирование замещением и целой кратностью

При резервировании замещением в случае отказа основной цепи (или элемента) вручную или автоматически с помощью специального переключателя в схему ТС включаются резервные цепи (или элементы). Отказ резервированной ТС при этом наступает после отказа последней резервной цепи (или элемента). Если предположить наличие «идеального» («абсолютно надежного») переключателя, то расчет вероятности безотказной работы ТС можно произвести по следующей рекуррентной формуле:

$$P_{m+1}(t) = P_m(t) + \int_0^t P(t-\tau)a_m(\tau)d\tau, \tag{6.10}$$

где $P_{m+1}(t)$, $P_m(t)$ – вероятность безотказной работы резервированной ТС кратности (m+1) и m соответственно;

$P(t–\tau)$ – вероятность безотказной работы основной цепи (или элемента) ТС в течение времени ($t–\tau$);

$a_m(\tau)$ – частота отказов резервированной ТС кратности m в момент времени τ.

Рекуррентная формула (6.10) позволяет получать расчетные соотношения для ТС любой кратности резервирования. При этом для получения формул расчета надежности необходимо выполнить интегрирование в правой части (6.10), подставив вместо $P(t–\tau)$ и $a_m(\tau)$ их значения в соответствии с выбранным законом распределения и состоянием резерва.

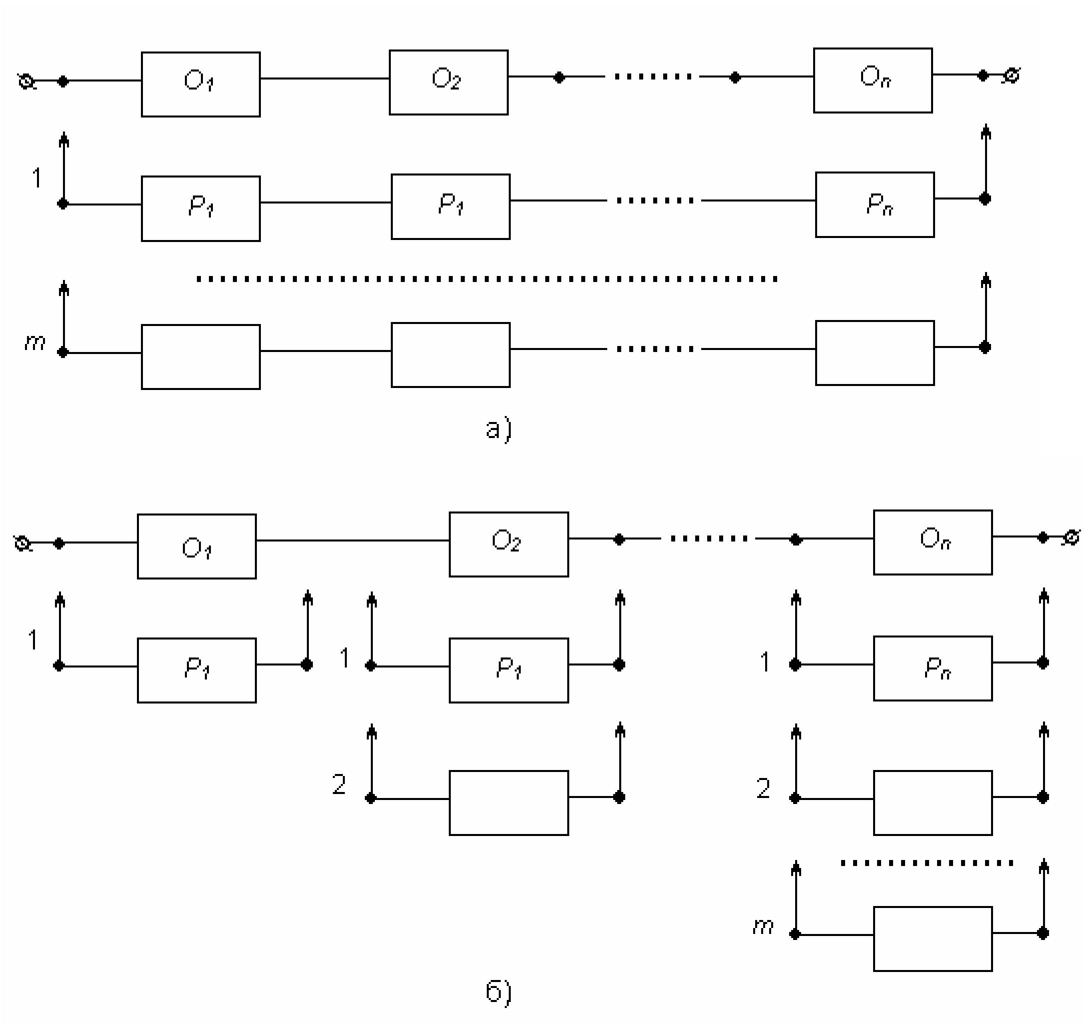


Рис. 6.4. Резервирование замещением: а – общее; б – раздельное.

Расчетно-логические схемы общего и раздельного резервирования замещением представлены на рис. (6.4.а.) и (6.4.б.).

При общем резервировании замещением и нагруженном резерве (рис. 6.4.а.) для подсчета $P_{TC}(t)$ и T_{TCcp} обычно используют выражения (6.3)÷(6.5).

При ненагруженном резерве и экспоненциальном законе распределения времени безотказной работы вероятность $P_{TC}(t)$ и средняя наработка T_{TCcp} определяются из следующих выражений:

$$P_{TC}(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^{m} \frac{(\lambda_0 t)^2}{i!}; \tag{6.11}$$

$$T_{TCcp} = T_{cp_0}(m+1), \tag{6.12}$$

где λ_0, T_{cp0} – интенсивность отказов и средняя наработка до отказа основной цепи ТС.

При облегченном резерве и экспоненциальном распределении соответственно имеем:

$$P_{TC}(t) = e^{-\lambda_0 t} \left[1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{i!} \left(1 - e^{-\lambda_i t}\right)^i \right]; \tag{6.13}$$

$$T_{TCcp} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{1+iK}, \tag{6.14}$$

где $a_i = \prod_{j=0}^{i=1} \left(j + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right); \qquad K = \frac{\lambda_1}{\lambda_0};$

λ_1 – интенсивность отказов резервной цепи до замещения.

В случае раздельного резервирования замещением (рис. 6.4.б.), как уже говорилось, каждый элемент основной цепи $O_1, O_2, \ldots, O_n$ имеет свои резервные элементы P_i и соответственно свою контактность резервирования m_i, которая в частном случае может быть и одинаковой для всех основных элементов. Следовательно, объединяя в отдельную группу каждый элемент основной цепи вместе со своими резервными элементами, мы получаем последовательное соединение отдельных резервированных групп, которые в совокупности и составляют резервированную ТС в целом. Таким образом, расчет надежности каждой резервированной группы элементов можно произвести по известным уже формулам общего резервирования замещением:

- для нагруженного резерва использовать формулы (6.3)÷(6.5);
- для ненагруженного – (6.11)÷(6.12);
- для облегченного – (6.13), (6.14).

Для определения ПН резервированных ТС в целом расчет ведется в дальнейшем по известной формуле для последовательного соединения элементов (6.1). Отсюда вероятность безотказной работы ТС с раздельным резервированием замещением может быть определена из выражения:

$$P_{TC}(t) = \prod_{i=1}^{n} P_{ri}(t), \tag{6.15}$$

где $P_{ri}(t)$ – вероятность безотказной работы групп, резервированных по способу замещения элементов основной цепи ТС *i*-го типа;

$P_{ri}(t)$ вычисляется по формулам (6.3)÷(6.5), (6.11)÷(6.14).

Все приведенные выше расчетные соотношения были получены, как указывалось, для случая «идеального» переключателя. На практике все *переключатели* безусловно *имеют отказы*, при чем самого различного характера. Среди них следует отметить:

1) несрабатывание при отказе основной аппаратуры, в результате чего резервный элемент не будет включен взамен отказавшего основного, что приведет к отказу резервной группы;

2) ложное срабатывание, в результате чего произойдет переключение на резерв при исправной основной аппаратуре, что приведет к уменьшению времени до отказа группы в целом;

3) отказы, которые выводят из строя резервную группу в целом.

Учет всех этих обстоятельств существенно усложняет определение ПН резервной группы и в данном параграфе полностью приводиться не будет. Здесь мы рассмотрим приближенное решение этой задачи, учитывая только отказы переключателя первой и третьей групп из вышеуказанных. Схема для такого случая расчета надежности приведена на рис. 6.5. Элементы переключателя, отказы которых приводят к отказу резервной группы в целом, условно выделяются в отдельный блок ОП (общие элементы переключателя), включаемый последовательно с резервной группой.

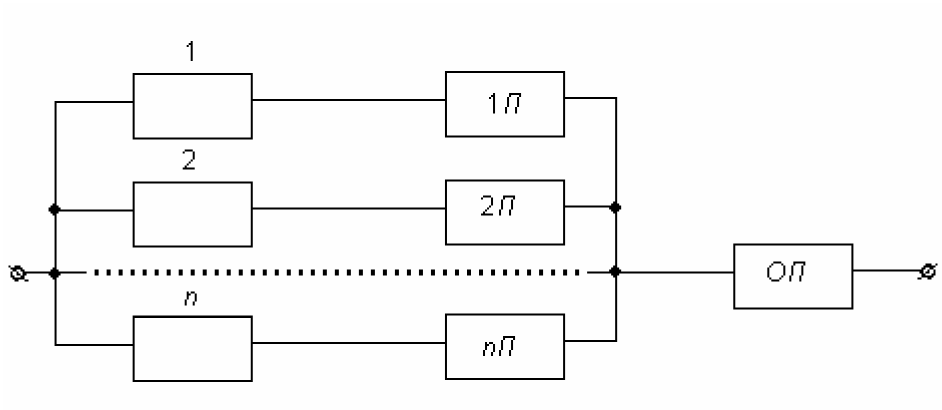


Рис. 6.5. Расчетно-логическая схема резервированной группы с переключением.

Каждая ветвь резервной группы состоит из последовательно соединенных основного либо резервного элемента *1,2,3,…* и элементов переключателя *П*, которые управляет данной ветвью, и отказы которых выводят из строя данную ветвь. Вероятность безотказной работы резервной группы в этом случае в течение времени с учетом ненадежности переключателя и при указанных выше допущениях может быть определена по следующей формуле:

$$P_{РГ}(t) = \left\{1 - \prod_{i=1}^{n}\left[1 - P_i(t)\cdot P_{iП}(t)\right]\right\} P_{ОП}(t), \qquad (6.16)$$

где $P_i(t)$ – вероятность безотказной работы основного либо резервного элемента;

$P_{iП}(t)$ – вероятность безотказной работы совокупности элементов переключателя, которые осуществляют включение *i*-й ветви резервной группы;

$P_{ОП}(t)$ – вероятность безотказной работы совокупности элементов переключателя, отказы которых приводят к отказу резервной группы в целом.

6.3.5. Резервирование с дробной кратностью

Расчетно-логическая схема одного из вариантов общего резервирования с постоянно включенным резервом и дробной кратностью приведена на рис.6.6.

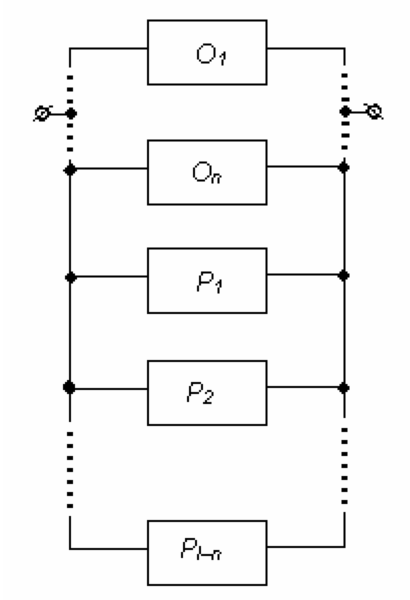


Рис. 6.6. Дробное резервирование.

В рассматриваемой схеме используется n основных и (l–n) резервных элементов (l – общее число основных и резервных элементов).

При этом (l–n)>n и, следовательно, мы имеем дробную кратность резервирования равную m=(l–n)/n.

На основании ранее проведенных для других видов резервирование рассуждений можно получить выражения для вероятности безотказной работы и средней наработки на отказ для рассматриваемого случая общего резервирование ТС с дробной кратностью и постоянно включенным резервом при экспоненциальном распределении:

$$P_{TC}(t) = \sum_{i=0}^{l-n} C_l^i \cdot P^{(l-i)}(t) \sum_{j=0}^{i} (-1)^j C_i^j P_o^j(t); \qquad (6.17)$$

$$T_{TCcp} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=0}^{l-n} \frac{1}{n+i} \;, \qquad (6.18)$$

где $P_0(t)$ – вероятность безотказной работы основного или любого резервного элемента.

Рассмотрим теперь методы расчета надежности ТС при резервировании замещением с дробной кратностью.

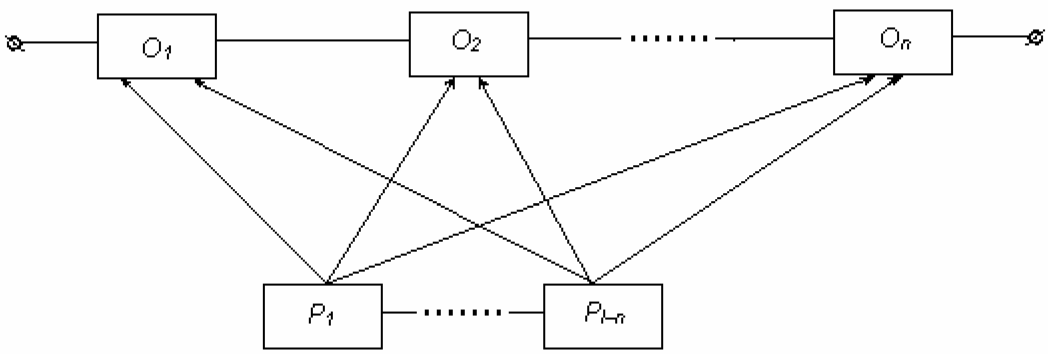
Расчетно-логическая схема для такого типа резервирования при нагруженном резерве приведена на рис. 6.7.

Резервированная ТС состоит из n основных однотипных и (l–n) резервных элементов, находящихся в нагруженном резерве (n>(l–n)). При отказе одного из основных элементов на его место без перерыва в работе включается один из резервных. Причем резервные элементы также могут отказывать. Таких замещений, не нарушающих работу ТС в целом, может быть не более (l–n).

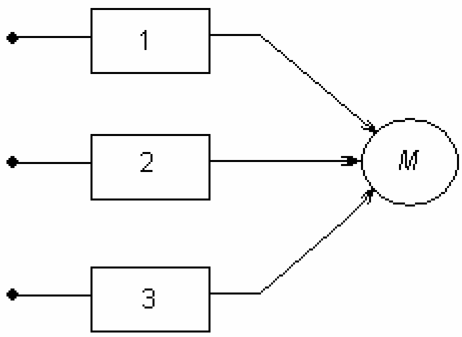
Средняя наработка до отказа такой ТС в предположении абсолютно надежных переключающих устройств и равнонадежных элементов, каждый из которых имеет одинаковую интенсивность отказов λ_0, может быть определена по формуле:

$$T_{TCcp} = \frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{l}\right), \tag{6.19}$$

где l – общее число основных и резервных элементов ТС.



а)



б)

Рис. 6.7. Резервирование замещением:

а – с дробной кратностью; б – мажоритарное.

Вероятность безотказной работы резервированной ТС в течение времени t для данного случая (рис. 6.7.а.) определяется из следующего выражения:

$$P_{TC}(t) = \sum_{i=0}^{l-n} C_l^i \left[1 - P_o(t)\right]^i \cdot \left[P_o(t)\right]^{l-i}. \tag{6.20}$$

Рассмотрим частный случай резервирования с дробной кратностью, а именно мажоритарное резервирование, которое часто используется в устройствах дискретного действия (рис. 6.7.б.).

При мажоритарном резервировании вместо одного элемента (канала) включается три идентичных элемента (канала), выходы которых подаются на мажоритарный орган *М* (элемент приоритета). Если все элементы такой резервированной группы исправны, то на вход *М* поступают три одинаковых сигнала и такой же сигнал поступает во внешнюю цепь с выхода *М*. Если один из трех резервированных элементов отказал, то на вход *М* поступают два одинаковых сигнала (истинных) и один сигнал ложный. На выходе *М* будет сигнал, совпадающий с большинством совпадающих сигналов на его входе, т.е. мажоритарный орган осуществляет операцию определения приоритета или выбора по большинству. Следовательно, условием безотказной работы является безотказная работа любых двух элементов из трех и мажоритарного органа в течение заданного времени *t*.

Применяя выражение (6.20.) для n=2 и (l–n)=1 с учетом вероятности безотказной работы в течение времени мажоритарного органа $P_M(t)$, получим формулу для определения вероятности безотказной работы ТС с мажоритарным резервированием:

$$P_{TC}(t) = P_M(t) \cdot \left[3P_o^2(t)\right] - 2P_o^3(t). \tag{6.21}$$

В случае ненагруженного резерва при резервировании с дробной кратностью (рис. 6.7.а.), (заметим, что такой вид резервирования называют часто скользящим) отказ одного из n основных однотипных элементов приводят к включению на его место одного из (l–n) резервных. При этом по условию элементы, находящиеся в резерве, отказывать не могут до их включения на место отказавшего основного элемента.

Исходя из этого условия и учитывая, что в процессе нормального функционирования ТС в работе находится постоянно n элементов, интенсивность отказов каждого из которых равна λ_0, средняя наработка до отказа и вероятность безотказной работы в целом за время t при экспоненциальном распределении могут определяться из следующих выражений:

$$T_{TCcp} = \frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{l-n+1}{n}\right) = T_{cp_0}\left(\frac{l-n+1}{n}\right); \tag{6.22}$$

$$P_{TC}(t) = e^{-n\lambda t}\sum_{i=0}^{l-n}\frac{(n\lambda_0 t)^i}{i!} = e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{l-n}\frac{\lambda t}{i!}\ , \tag{6.23}$$

где T_{cp0} – средняя наработка на отказ основного или резервного элемента;

$\lambda = n\lambda_0$ – интенсивность отказов основной цепи ТС.

6.4. Расчет надежности ТС с информационной избыточностью

В устройствах цифровой вычислительной техники, системах телемеханики и т.д. в настоящее время широко используются так называемые *самокорректирующиеся коды*, которые позволяют автоматически обнаруживать и исправлять ошибки в одном или нескольких разрядах, появляющиеся в результате отказов элементов или сбоев. При этом отказы или сбои не нарушают нормального функционирования ТС. Понятно, что устройства, защищенные самокорректирующимися кодами, обладают информационной избыточностью.

Анализ надежности таких *устройств с информационной избыточностью* обычно проводится *двумя путями*: *приближенным* и *уточненным*.

При приближенном анализе надежности ТС разделяется на две части: *защищенную кодом от отказов и сбоев* и *незащищенную*. Незащищенная кодом часть – это совокупность элементов, для которых появление хотя бы одного отказа или сбоя приводит к искажению информации на выходе всего устройства в целом. Для защищенной части в зависимости от применяемого кода определяется допустимое число одновременно исправляемых ошибок K (обычно K=1) (рис.6.8.а.).

Пусть суммарная интенсивность отказов и сбоев незащищенной части равна λ_1, а защищенной – λ_2.

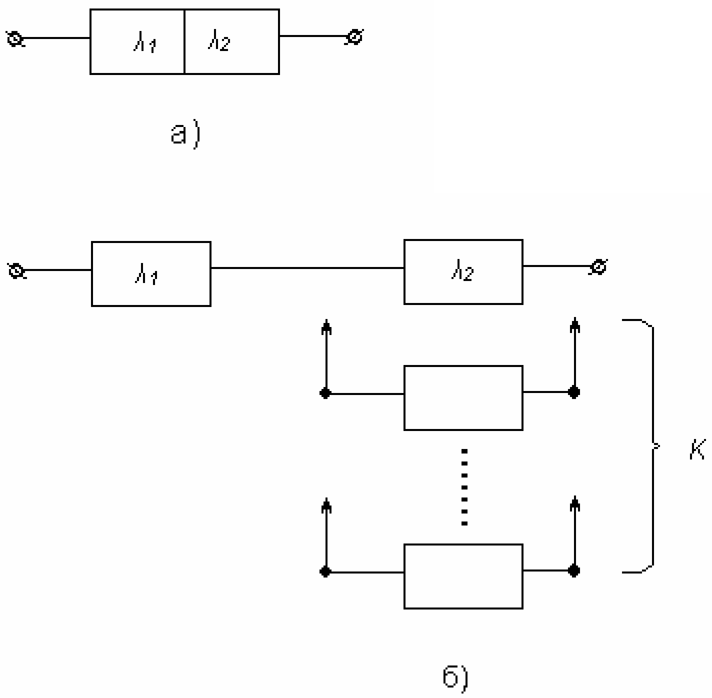


Рис. 6.8. ТС, защищенные самокорректирующимся кодом (приближенный расчет надежности).

Сформулируем теперь *условие безотказной работы ТС* в течение времени t:

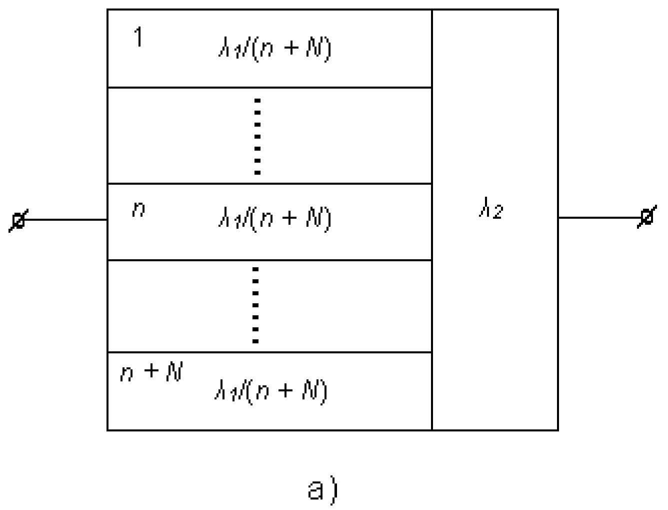
- в незащищенной части устройства за время t не должно произойти ни одного отказа или сбоя;
- в защищенной части за то же время может произойти не более K отказов и сбоев в сумме.

Вероятность выполнения этого условия и дает вероятность безотказной работы ТС с информационной избыточностью за время t:

$$P_{TC}(t) = e^{-\lambda_1 \cdot t} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda_2 \cdot t)^i}{i!} e^{-\lambda_2 \cdot t}. \qquad (6.24)$$

Из условия безотказной работы и рассмотрения выражения (6.24) следует, что ТС, защищенные кодом, по надежности эквивалентны последовательному соединению незащищенной части с K-кратно резервированной (ненагруженный резерв) защищенной частью с идеально надежным переключателем (рис. 6.8.б.).

Уточненный анализ надежности позволяет учесть структуру ТС, защищенную самокорректирующимся кодом. В ряде случаев защищенная часть ТС может быть разбита на (n+N) независимых линеек или разрядов (рис. 6.9.а.). При этом работоспособность защищенной части обеспечивается отсутствием искажения информации в n линейках или, другими словами, допускается одновременный отказ N любых линеек (либо одновременное появление сбоя в N любых линейках).



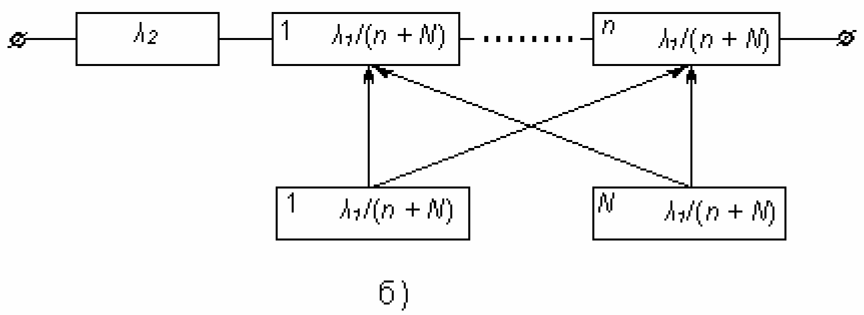


Рис. 6.9. ТС, защищенные самокорректирующимся кодом (уточнена расчет надежности).

Сформулируем условие работоспособности ТС в течение t для этого случая. В незащищенной части устройства за время t не должно произойти ни одного отказа и сбоя. В защищенной части за время t могут отказать (появиться сбои) не более N линеек из (n+N) линеек. Отсюда вероятность безотказной работы ТС за время t будет определяться следующим выражением:

$$P_{TC}(t) = e^{-\lambda_1 \cdot t} \sum_{i=1}^{N} C_{n+N}^{i} \cdot P^{n+N-i}(t)\left[1-P(t)\right]^{-i}, \tag{6.25}$$

где $P(t) = \exp\left(-\dfrac{\lambda_2 t}{n+N}\right)$ – вероятность безотказной и бессбойной работы одной линейки защищенной части ТС за время t.

Из условия безотказной работы и вида выражения (6.25) следует, что ТС защищенные кодом, по надежности эквивалентны последовательному соединению незащищенной части с резервированной группой, составленной из *n* основных и *N* резервных (нагруженный резерв) линеек, т.е. группе со скользящим нагруженным резервом с абсолютно надежным переключателем (рис.6.8.б.).

6.5. Расчет надежности ТС с временным резервированием

Использование временной избыточности наряду с рассмотренными уже структурной и информационной является также эффективным способом повышения надежности ТС.

При наличии временной избыточности на выполнение ТС какой-либо работы отводится время, заведомо большее, чем минимально необходимое. В этом случае возможны *два варианта использования аппаратуры*:

1. когда выполненный объем работы при наступлении отказа обесценивается;
2. когда может происходить накопление работы, т.е. выполненный объем работы при наступлении отказа не обесценивается.

Рассмотрим более подробно *первый вариант*. Пусть отказ аппаратуры обесценивает работу, выполненную ею до момента наступления отказа. В этом случае работа будет все-таки выполнена в полном объеме, если после отказа произойдет восстановление аппаратуры и оставшегося времени будет достаточно чтобы, начав выполнение работы с самого начала, завершить ее в установленное время. При этом, естественно, можно допустить появление нескольких отказов, после каждого из которых аппаратура восстанавливается и каждый раз работа начинается с начала, и так до тех пор, пока работа не будет все-таки выполнена в полном объеме либо не будет исчерпан ресурс времени.

В качестве характеристик надежности аппаратуры с временной избыточностью целесообразно выбрать следующие:

- вероятность $P(t,V)$ выполнения за заданное время *t* работы объемом *V* (при чем объем работы измеряется минимально необходимой продолжительностью ее выполнения при условии отсутствия отказов аппаратуры, а поскольку имеет место временная избыточность, то $V<t$);
- среднее время $T_{t,V}$, затрачиваемое на выполнение работы объемом *V* на заданном промежутке времени *t*.

Для лучшего понимания изложенного рассмотрим определение указанных характеристик на следующем примере. Пусть работа, которая должна быть выполнена на аппаратуре, имеет объем (продолжительность) *V*. При этом интервал *V* укладывается в промежуток *t* целое число раз:

$$n = t/V.$$

Проверка исправности аппаратуры происходит в конце промежутка времени *V*. Если первая проверка установит отсутствие отказа, то работа считается успешно завершенной. В противном случае аппаратура восстанавливается (для простоты будем считать, что мгновенно и с вероятностью $P(0)=1$), включается, и работа начинает выполняться с начала, после чего следует вторая проверка и т.д.

В соответствии с таким режимом работы может быть построен следующий ряд распределения:

t_i	V	$2V$	……	nV
P_i	p	$(1-p)p$	……	$(1-p)^{n-1}p$

где t_i – возможные значения времени выполнения работы (i=1,2,…,n);
P_i – вероятность выполнения работы за время t_i;
$P=P(V)$ – вероятность безотказной работы аппаратуры в течение промежутка времени V.

Поскольку работа может быть выполнена за время V, либо за время $2V$ и т.д., причем события $t_p=t_i$ (t_p – случайное время выполнения работы) являются событиями несовместимыми, то, применяя теорему сложения вероятностей, получим:

$$P(t,V)=p+(1-p)p+\ldots+(1-p)^{n-1}p.$$

Воспользовавшись формулой для суммы геометрической прогрессии, окончательно получим:

$$P(t,V)=1-(1-p)^n. \qquad (6.26)$$

Здесь следует подчеркнуть, что полученный результат совпадает с формулой для нагруженного (n–1)-кратного резерва. Однако в данном случае необходимая надежность обеспечивается не дополнительным включением резервных элементов, а за счет выделения дополнительно времени на выполнение работы одним аппаратом.

Среднее время, затрачиваемое на выполнение работы объемом V на заданном промежутке времени t легко может быть определено, как математическое ожидание случайной величины t_p – случайного времени выполнения работы – и без вывода в окончательном виде равно:

$$T_{t,V}=V\cdot\frac{1-(1-p)^n(1+np)}{p}. \qquad (6.27)$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Перечислите основные виды резервирования. Дайте их определения.
2. Каковы основные виды структурного резервирования?
3. Проанализируйте особенности пассивного и активного резервирования.
4. Чем отличается ненагруженный резерв от постоянного?
5. В чем состоит отличие нагруженного резерва от облегченного, резервирования с целой кратностью от резервирования с дробной кратностью?
6. Проведите на примере расчет надежности ТС со скользящим резервирование.
7. Поясните на примере особенности мажоритарного резервирования, его достоинства и недостатки.
8. Приведите основные отличительные черты приближенного и уточненного расчета надежности ТС с информационной избыточностью.

Список литературы

1. **Глазунов Л.П. и др.** Основы теории надежности автоматических систем управления: Учеб. пособие для вузов. – Л.: Энергоатомиздат, ленингр. отд-ние, 1984. – 208с.: ил.
2. **Дружинин Г.В.** Надежность автоматизированных производственных систем: – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 480с.: ил.
3. **Ястребенецкий М.А., Иванова Г.М.** Надежность автоматизированных систем управления технологическими процессами: Учеб. пособие для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 264с.: ил.
4. **Львович Я.Е., Фролов В.И.** Теоретические основы конструирования, технологии и надежности РЭА: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1986. – 192с., ил.
5. **Матвеевский В.Р.** Проектирование и надежность устройств автоматики и телемеханики: Учеб. пособие. – М.: МИЭМ, 1990. – 96с.: ил.
6. **Матвеевский В.Р.** Надежность технических средств управления : Учеб. пособие. – М.: МГИЭМ,1993. – 92с.
7. **Козлов В.А., Ушаков И.А.** Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики. – М.: Советское радио, 1985. – 462с.
8. **Фомин А.В. и др.** Технология, надежность и автоматизация производства БГИС и микросборок: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1981. – 352с.
9. **Гмурман В.Е.** Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1977. – 179с.
10. **Чистяков В.П.** Курс теории вероятностей: Учеб. пособие для студентов втузов. – М.: Наука, 1978. – 224с.
11. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математики: Для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1974, – 852с.
12. **Агапов Г.И.** Задачник по теории вероятностей.: Учебное пособие для студентов втузов. – М.: Высшая школа, 1986. – 80с.

Оглавление