МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФГБОУ ВПО «НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Е. Мамонтов

ЛЕКЦИИ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

В трёх частях

Часть 3
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

Утверждено Редакционно-издательским советом НГПУ
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК 2012

УДК 517.91
ББК В161.61
М226

Р е ц е н з е н т ы:
доктор физико-математических наук, профессор
Новосибирского государственного университета
Г. В. Демиденко;
доктор физико-математических наук,
профессор Новосибирского государственного
педагогического университета
Е. В. Семенко;
доктор физико-математических наук, профессор
Новосибирского государственного университета
В. Н. Старовойтов

Мамонтов, А. Е.
М226 Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям: в 3 ч.: учебное пособие / А. Е. Мамонтов. — Новосибирск: Изд. НГПУ, 2012 — Ч.3: Дополнительные вопросы общей теории. — 117 с.

В учебном пособии изложены основные разделы общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений, оставшиеся незатронутыми в первых двух частях: автономные уравнения, устойчивость решений, первые интегралы, квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка.

Пособие предназначено для углубленного изучения курса «Дифференциальные уравнения» студентами, обучающимися на математическом факультете Новосибирского государственного педагогического университета.

УДК 517.91
ББК В161.61

Предисловие

Учебное пособие предназначено для студентов математического факультета Новосибирского государственного педагогического университета, изучающих обязательный курс «Дифференциальные уравнения», в том числе для желающих познакомиться с этим курсом в расширенном объеме. Данное пособие является третьей, завершающей, частью трехтомного цикла лекций по предмету «Обыкновенные дифференциальные уравнения»; в первых двух частях (томах) «Элементы общей теории» [2] и «Линейные уравнения» [3] читатель может найти необходимый базис для правильного освоения материала настоящего пособия.

Вниманию читателей предлагаются основные разделы общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений, оставшиеся незатронутыми в первых двух частях: автономные уравнения и фазовое пространство, устойчивость по Ляпунову, первые интегралы, квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка.

Сделаем необходимые пояснения по организации пособия (его стиль, впрочем, общий со всем циклом лекций).

Важную роль играют упражнения, в большом количестве включенные в текст. Читателю настоятельно рекомендуется прорешивать их «по горячим следам», что гарантирует усвоение материала и послужит тестом. Более того, нередко эти упражнения восполняют логическую ткань, т. е. без их решения не все положения будут строго доказаны.

В квадратных скобках посередине текста вынесены замечания, играющие роль комментариев (расширенных или побочных пояснений). Лексически эти фрагменты прерывают основной текст (т. е. для связного чтения их нужно «не замечать»), но все же они нужны в качестве пояснений. Другими словами, эти фрагменты нужно воспринимать так, как будто они вынесены на поля.

В тексте встречаются отдельно рубрицированные «замечания для преподавателя» — они могут быть опущены при чтении обучающимися, но полезны для преподавателя, который будет использовать пособие, например, при чтении лекций — они помогают лучше понять логику курса и указывают направление возможных совершенствований (расширений) курса. Впрочем, освоение этих замечаний обучающимися можно только приветствовать.

Аналогичную роль играют «обоснования для преподавателя» — они в крайне сжатой форме дают доказательство некоторых положений, предлагаемых читателю в качестве упражнений.

Наиболее употребительные (ключевые) термины используются в виде аббревиатур, список которых для удобства приведен в конце. Там же приведен список математических обозначений, встречающихся в тексте, но не относящихся к самым употребительным (и/или не понимаемым однозначно в литературе). Некоторые аббревиатуры и обозначения не комментируются в тексте даже при первом своем появлении (хотя и приведены в списке), поскольку читатель уже́ знаком с ними по предыдущим томам.

Символ □ означает конец доказательства, формулировки утверждения, замечания и т. п. (там, где это нужно во избежание путаницы).

Нумерация формул независимо ведется в каждом параграфе. При ссылке на часть формулы используются индексы, например $(2)_3$ означает 3-ю часть формулы (2) (частями формулы считаются фрагменты, разделенные типографски пробелом, а с логических позиций — связкой «и»). В формулах, представляющих линейные уравнения (алгебраические и дифференциальные), т. е. такие, в которых имеет смысл говорить о «правой части» (свободном члене), нижний индекс 0 означает соответствующее однородное уравнение, например: символ $(\mathrm{N})_0$ означает однородное уравнение, соответствующее уравнению (N), а $(\mathrm{N})_{k0}$ — однородное уравнение, соответствующее k-му уравнению в (N).

Данное пособие не может совершенно заменить глубокого изучения предмета, которое требует самостоятельных упражнений и чтения дополнительной литературы, например, той, список которой приведен в конце пособия. Однако автор попытался изложить основные положения теории в достаточно сжатой форме, пригодной для лекционного курса. В связи с этим следует отметить, что при чтении лекционного курса по данному пособию на него уходит около 10 лекций.

Планируется издание аналогичного трехтомного цикла лекций по курсу «Уравнения математической физики», являющемуся естественным продолжением представленного курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

§ 1. Автономные ОДУ

Начнем с систем I порядка:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{1}$$

Будем рассматривать только НР этой системы[1]. Напомним, что ИК (1) (соответствующей НР φ) называется график решения, т. е. кривая $\{\, (t, \varphi(t)) \mid t \in (t_-(\varphi), t_+(\varphi)) \,\}$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \{(t, x)\}$. Также вводятся понятия:

Определение. *Фазовое пространство* (ФП, или еще говорят: пространство состояний) системы (1) — это пространство $\mathbb{R}^n = \{x\}$; *траектория* (1) (соответствующая НР φ, или еще говорят: фазовая кривая, орбита) — это кривая в ФП вида $\{\, x = \varphi(t) \mid t \in (t_-(\varphi), t_+(\varphi)) \,\}$. $\square$

Ясно, что траектории — это проекции ИК на ФП, при этом t играет роль параметра вдоль траектории. Траектории проходят в области ФП вида $\Omega = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in \mathbb{R} :\ (t, x) \in B \,\}$ (проекция B на ФП), где $f \in C(B)$. Будем считать, что f удовлетворяет условиям ТК—П в B. Тогда через каждую точку $(t_0, x_0) \in B$ проходит ровно одна ИК (1). После проецирования на ФП это свойство может нарушиться, т. е. через любую точку $x_0 \in \Omega$, очевидно, проходит хотя бы одна траектория (достаточно подобрать подходящее t_0), но она может быть неединственной (т. к. движение точки по траекториям, проходящим через точку t_0, может зависеть от выбора момента t_0, в который они попадают в эту точку).

[1] И вообще, во всем пособии под понятием «решение» подразумевается НР, если противное не оговорено особо.

Пример. $x' = \begin{bmatrix} 2t \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \mathbb{R}^3$, $\Omega = \mathbb{R}^2$. Задача Коши $x(t_0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ имеет решение $x(t) = \begin{bmatrix} \alpha + t^2 - t_0^2 \\ \beta + t - t_0 \end{bmatrix}$. Через точку $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ФП проходит много траекторий.

Упражнение. Убедиться. □

Скорость движения точки по траектории равна $f(t, x)$, т. е. в точке $\alpha \in \Omega$ она равна $f(t, \alpha)$ и зависит от t, что влечет возможность разного движения в зависимости от значения t, при котором эта траектория попадает в точку α.

[Т. е. проекции ИК на ФП перепутываются.]

Однако из этих рассуждений ясно, что возникшая путаница исчезает (более строгую формулировку и обоснование см. далее), если f не зависит от t:

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{2}$$

Такие системы называются *автономными*. Далее будем считать, что f удовлетворяет условиям ТК—П в $\mathbb{R} \times \Omega$, где Ω — область в ФП $\mathbb{R}^n$ (например, достаточно $f \in C^1(\Omega)$).

Замечание. Если $f \in C^1(\Omega)$, то, как отмечалось в § 2 части 1, автоматически все решения (2) обладают свойством $x \in C^2$. □

Сразу дадим важное

Определение. Точки $a \in \Omega$, где $f(a) = 0$, называются особыми точками (ОТ), положениями равновесия или точками покоя системы (2). □

Ясно, что ОТ являются (стационарными, вырожденными) траекториями (2), т. к. им соответствуют постоянные решения $x \equiv a$, и наоборот, все такие решения могут быть только в ОТ.

$\Big[$Здесь полезно подробнее рассмотреть физический смысл ФП, траекторий, автономных систем, ОТ, в т. ч. в историческом плане.$\Big]$

Исследуем свойства автономных систем строго.

Свойство 1. Если $x = \varphi(t)$ — решение (2), то $x = \varphi(t+C)$ — тоже, при любой $C \in \mathbb{R}$. (очевидно)

Свойство 2. Если φ и ψ — решения (2), и $\varphi(t_1) = \psi(t_2)$, то $\varphi(t) \equiv \psi(t + t_2 - t_1)$.

Доказательство. Функция $\chi(t) = \psi(t + t_2 - t_1)$ удовлетворяет (2) по Свойству 1, а поскольку $\chi(t_1) = \psi(t_2) = \varphi(t_1)$, то в силу единственности решений задачи Коши получаем $\varphi = \chi$. $\square$

Замечание. Свойство 2 можно еще переписать в следующем виде: рассмотрим любое решение (2) как решение некоторой задачи Коши, причем ввиду Свойства 1 неважен выбор начального момента, и считаем его равным 0: $x(0) = \xi$, соответствующее решение обозначим $x = \varphi(t, \xi)$. Тем самым, все решения (2) имеют вид $\varphi(t, \xi)$ со всевозможными $\xi \in \Omega$. Пусть (после сдвига) $t_2 = 0$, а $t_1 = \tau$ — любое число. Рассмотрим любое $\varphi = \varphi(t, \xi)$ и другое решение ψ такое, что $\varphi(t_1) = \psi(t_2)$, т. е. $\psi(0) = \varphi(\tau, \xi)$, что означает $\psi(t) = \varphi(t, \varphi(\tau, \xi))$. Свойство 2 принимает вид

$\varphi(t+\tau,\xi) = \varphi(t,\varphi(\tau,\xi))$. □

$\left[\right.$*Групповое свойство* решений автономных систем — можно подробнее рассмотреть смысл этого свойства (значение в точке $(t+\tau)$ можно получить в 2 этапа или в 1 этап) и смысл названия (см. теорию групп).$\left.\right]$

Итак, через любую точку Ω проходит ровно 1 траектория, т. к. все решения соответствующих задач Коши отличаются лишь сдвигом по t, являющемуся параметром вдоль траекторий, что не влияет на их геометрию. Другими словами, любые 2 траектории либо не пересекаются, либо совпадают. Таким образом, в самом деле ФП достаточно для описания решений (2), и если картина траекторий известна, то остается лишь пометить на них направление движения и проследить поведение точки на траектории вблизи концов интервала существования НР. Итоговая картина называется фазовым портретом (ФПт) (2), его построение удобнее построения ИК по двум причинам:

1. размерность пространства снижается на 1, что делает картину нагляднее,
2. в приложениях ФПт несет смысловую нагрузку.

Установим общие свойства ФПт любой системы (2). Одно мы уже установили — это то, что вся Ω заполнена траекториями, которые не пересекаются.

$\left[\right.$Однако это не исключает того, что несколько траекторий могут составить одну гладкую кривую — см. об этом ниже. Так что указанная выше разметка ФПт необходима.$\left.\right]$

Следующий вопрос: может ли траектория пересекать саму себя? Прежде чем на него ответить, изучим следующие понятия и факты:

Определение. Кривая в $\mathbb{R}^n$ — *гладкая*, если она записывается в виде $\{\, x = \varphi(t) \mid t \in (a, b) \,\}$, где $\varphi \in C^1(a, b)$, $\varphi' \neq 0$ на (a, b). $\square$

Свойство 3. Любая траектория (2) есть либо ОТ, либо гладкая кривая.

Доказательство. Пусть траектория $x = \varphi(t)$ не есть ОТ. Тогда $\varphi' \neq 0$ всюду, т. к. иначе при некотором t_0 имели бы $f(\varphi(t_0)) = \varphi'(t_0) = 0$, т. е. эта траектория пересекала бы ОТ $x = \varphi(t_0)$. Остается заметить, что $\varphi \in C^1(t_-(\varphi), t_+(\varphi))$. $\square$

Определение. Гладкая кривая $\{x = \varphi(t)\}$ *имеет самопересечения*, если $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ при некоторых $t_1 \neq t_2$. $\square$

Определение. *Цикл* — это траектория, соответствующая периодическому решению (2) (т. е. это замкнутая траектория вида $\{x = \varphi(t)\}$, где φ — решение (2), $\varphi(t+T) = \varphi(t)$). $\square$

Таким образом, любая ОТ тоже есть цикл, только вырожденный, его период $T > 0$ можно взять любым. Далее будем рассматривать только *невырожденные* циклы (и называть их просто циклами), т. е. это циклы, не являющиеся ОТ; по свойству 3 это гладкие кривые.

Свойство 4. Траектории системы (2) могут быть 3 видов:

a) ОТ,

b) гладкая кривая без самопересечений,

c) цикл, имеющий минимальный период $T > 0$.

Доказательство. Ясно, что случаи a) и b) возможны. Осталось доказать, что кроме них может быть только c). Пусть не a). Тогда по свойству 3 это гладкая кривая $x = \varphi(t)$, $\varphi \in C^1$, $\varphi' \neq 0$. Значит, осталось доказать, что если не b), то c). Итак, пусть найдутся $t_1 \neq t_2$ (пусть $t_2 > t_1$) такие, что $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. Рассмотрим множество $A = \{\, t > t_1 \mid \varphi(t) = \varphi(t_1) \,\}$ — оно не пусто, т. к. содержит t_2, и ограничено снизу, так что существует $t_* = \inf A \geqslant t_1$. Если бы $t_* = t_1$, то существовали бы $t_k \searrow t_1$ такие, что $\varphi(t_k) = \varphi(t_1)$, и тогда $\varphi'(t_1) = \lim \dfrac{\varphi(t_k) - \varphi(t_1)}{t_k - t_1} = 0$, что противоречит гладкости кривой. Значит, $t_* > t_1$, т. е.
$\varphi(t_*) = \varphi(t_1) =: z$ и $\varphi(t) \neq z$ на (t_1, t_*). По свойству 2 получаем $\varphi(t) = \varphi(t + t_* - t_1)$, т. е. $T = t_* - t_1 > 0$ есть период φ. Поскольку $\varphi(t) \neq z$ на (t_1, t_*), то найденный период минимальный. $\square$

Важен также следующий момент:

Свойство 5. Если траектория неограниченно приближается к некоторой точке $a \in \Omega$ при стремлении t к границе интервала существования соответствующего НР, то a есть ОТ, и приближение происходит при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$.

Доказательство. Пусть для определенности $\varphi(t) \to a$ при $t \nearrow t_+(\varphi)$. Если $t_+(\varphi) < +\infty$, то ИК не покидает компакт $[t_+(\varphi) - \varepsilon, t_+(\varphi)] \times B[a, \varepsilon]$, что невозможно. Значит, $t_+(\varphi) = +\infty$, тогда $\varphi(k+1) - \varphi(k) = \varphi'(\theta_k)$, где $\theta_k \in [k, k+1]$, так что $f(a) = \lim f(\varphi(\theta_k)) = \lim \varphi'(\theta_k) =$
$= \lim(\varphi(k+1) - \varphi(k)) = a - a = 0.$ $\square$

Ситуация, описанная в Свойстве 5, в самом деле реализуется, как мы увидим ниже, и она как раз может порождать упомянутые выше картины, когда несколько траекторий составляют единую гладкую кривую (конечно, тогда порождающей (параметризующей) ее функцией будет не решение (2)).

Таким образом, снижение размерности пространства на 1 имеет и свои недостатки — мы лишаемся некоторых важных свойств, например, аналог ТПК неверен для ФП: траектории не обязаны покидать компакты в Ω.

Рассмотрим простейший случай $n = 1$, $f \in C^1(\alpha, \beta)$, $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$. Здесь ФП есть $\mathbb{R}$, $\Omega = (\alpha, \beta)$. Ужé ввиду $f \in C(\alpha, \beta)$ можно утверждать, что множество $\{\, x \in (\alpha, \beta) \mid f(x) > 0 \,\}$ открыто и потому состоит из не более чем счетного набора интервалов, аналогично для $f < 0$. Эти интервалы перемежаются точками или отрезками, на которых $f = 0$. Таким образом, область (α, β) в ФП состоит из ОТ и лежащих между ними или скраю интервалов $\operatorname{sgn} f = \pm 1$. Каждый такой интервал есть 1 траектория, неограниченно приближающаяся к границам интервала при $t \to t_\pm$, причем если интервал зажат между ОТ, то $(t_-, t_+) = \mathbb{R}$, а иначе (если он лежит скраю) о соответствующих $t_\pm$ ничего нельзя сказать заранее. В самом деле, через любую фиксированную точку любого такого интервала проходит траектория, точка по ней движется монотонно, попасть в ОТ за конечное время она не может ввиду единственности, значит она не покидает интервал, и тогда имеет предельные точки с обеих сторон. Если предельная точка принадлежит (α, β), то по свойству 5 она есть ОТ, и соответствующие $t_\pm = \pm\infty$, так что эти предельные точки в любом случае суть концы интервала (траектория занимает весь интервал). Если же, например, $\varphi(t) \to \beta$ при $t \to t_+$, то t_+ может быть любым (см. об этом в § 4 части 1). Например, если $\beta = +\infty$, то, как мы доказывали,

$$t_+ = +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} = +\infty,$$

что дает критерий наличия вертикальной асимптоты у ИК. В итоге получаем исчерпывающий ФПт. В случае $n = 1$ более наглядной будет все же картина ИК.

Если отказаться от условия $f \in C^1$, а требовать лишь $f \in C$, то ИК из областей $f > 0$ и $f < 0$ могут за конечное время попасть на постоянное решение $x = a$, критерием возможности чего является (см. § 2 части 1) сходимость интеграла $\displaystyle\int_a \frac{ds}{f(s)}$, но в самих этих областях единственность сохраняется в силу явного вида решений уравнений с разделяющимися переменными.

Упражнение. Доказать. $\square$

При $f \in C$ сохраняется важное свойство:

Утверждение. Все решения уравнения $x' = f(x)$ с непрерывными f при $n = 1$ монотонны (нестрого).

Доказательство. Достаточно рассмотреть НР φ. Надо доказать, что либо $\varphi' \geqslant 0$, либо $\varphi' \leqslant 0$ на всем $(t_-(\varphi), t_+(\varphi))$. Допустим, это не так, т. е. множества $\{\varphi' > 0\}$ и $\{\varphi' < 0\}$ оба непусты, так что существуют $t_{1,2}$ такие, что

$\varphi'(t_1) > 0$, $\varphi'(t_2) < 0$. Пусть для определенности $t_1 < t_2$ (иначе $\varphi := -\varphi$).

Случай 1. $\varphi(t_1) = x_1 < x_2 = \varphi(t_2)$. Обозначим через x_3 левый конец интервала знакопостоянства f, содержащего x_2. ИК должна пересечь прямую $x = x_3$ при некотором $t_3 \in (t_1, t_2)$, но она не может попасть из (t_3, x_3) в (t_2, x_2).

Упражнение. Убедиться.

Случай 2. $x_1 > x_2$. Обозначим через x_3 левый конец интервала знакопостоянства f, содержащего x_1, а t_3 — какое-нибудь значение, при котором ИК пересекает прямую $x = x_3$. Тогда ИК не может попасть из (t_1, x_1) в (t_3, x_3).

Упражнение. Убедиться.

Случай 3. $x_1 = x_2$ сразу дает противоречие с равенствами $\varphi'(t_k) = f(\varphi(t_k)) = f(x_k)$. $\square$

Далее будем снова считать выполненным условие единственности (например, $f \in C^1(\Omega)$). В случае $n > 1$ ситуация усложняется, и построение ФПт становится нетривиальной задачей. Сразу надо уточнить, в каком смысле мы будем понимать это построение (т. е. «с какой погрешностью»).

[Здесь необходимо вспомнить понятие топологии, и полезно провести аналогию с алгеброй и понятием изоморфизма в ней.]

Начальная топологическая информация о ФПт любой системы (2) у нас ужé есть — это заполнение Ω траекториями, их непересечение, утверждения о 3 типах траекторий (Свойство 4) и частичная информация о структуре незамкнутых траекторий (Свойство 5). Структура незамкнутых траекторий — сложный момент, и построение ФПт может затрудняться именно их анализом. Того, что мы знаем пока, очень мало. Например, имеется понятие предельных циклов,

[предельный цикл — это такой цикл, в окрестности которого нет других циклов, или, что то же самое, вся окрестность которого заполнена траекториями, неограниченно приближающимися к нему при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$]

они в самом деле реализуются, что означает, что незамкнутые траектории могут не только не иметь предельных точек (концов), как было и для ИК, но и даже (как уже говорилось) не стремиться к границе Ω (т. е. здесь картина еще сложнее чем для ИК, где по крайней мере имеется ТПК, гарантирующая выход ИК к границе области).

Мы, естественно, оставляем за рамками пособия множество интересных (и важных для приложений) вопросов ввиду их специального характера (в случае интереса к ним читатель может обратиться к дополнительной литературе, например, той, что приведена в списке литературы), т. е. ответвления от «ствола» базового курса,

[Так, в теории автономных систем к таким вопросам относится, например, проблема аттракторов. Аттрактор — это предельное множество всех траекторий, т. е., грубо говоря, множество точек, к которым стремятся траектории при $t \to \pm\infty$. В общем случае природа аттракторов может быть достаточно сложной, например, они могут иметь дробную размерность (так наз. странные аттракторы).]

[Лишь в частном случае (область на плоскости при определенных ограничениях) удается доказать (в рамках теории Пуанкаре—Бендиксона) отсутствие странных аттракторов, так что все траектории стремятся либо к ОТ, либо к циклам, либо к объединению ОТ и соединяющих их траекторий (сепаратрис).]

и попытаемся лишь наметить самые общие черты (помимо ужé выявленных) ФПт произвольных систем вида (2).

При этом получение дальнейшей информации о ФПт при $n \geqslant 3$ является весьма сложной задачей, и мы ей заниматься не будем, а ограничимся более доступным случаем $n = 2$.

[тогда размерность траекторий лишь на 1 меньше размерности ФП, что ужé исключает некоторые патологии, наблюдаемые при бóльших размерностях.]

В этом случае стандартная логика построения ФПт системы (2) такая:

1. *Вне окрестностей ОТ* работает ряд методов интегрирования системы (2):

   (a) численные методы;

   (b) приемы «явного» интегрирования (2), в т. ч. можно записать ее в виде одного неавтономного уравнения $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$ (или наоборот) — см. еще об этом в § 4.

   (c) построение поля скоростей и по нему — приближенное построение траекторий (что эквивалентно методу изоклин для соответствующего неавтономного уравнения).

2. *В окрестности ОТ* требуются специальные подходы, т. к. методы из п. 1 работают не так хорошо, да и ОТ в чем-то облегчают анализ, если к ним подойти «индивидуально». Так, стандартные рассуждения таковы: если a есть ОТ, то в ее окрестности

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}(x-a)+\varphi(x), \tag{3}$$

где $\varphi(x) = o(|x-a|)$ или даже лучше, если f более гладкая, чем просто C^1, так что можно предположить, что ФПт линеаризованной системы:

$$\frac{dz}{dt} = Az \tag{4}$$

($A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}$, $z = x - a$) в окрестности нуля будет «похож» на ФПт (3) в окрестности точки a. Или, формулируя отвлеченно, мы пытаемся использовать 2 принципа:

(a) [глобальный ФПт (2)]=[глобальный ФПт (2) вне ОТ]+ [локальный ФПт (2) в окрестности ОТ];

(b) [локальный ФПт (2) в окрестности ОТ]$\approx$ [локальный ФПт (4) в окрестности нуля].

Первый принцип означает необходимость «связывания воедино» окрестностей всех ОТ — это отдельная проблема, а второй принцип требует обоснования и точной формулировки.

3. В свою очередь, для системы (4) можно исчерпывающим образом построить даже сразу глобальный ФПт (в силу

линейности (4) глобальный ФПт этой системы эквивалентен локальному — т. е. мы как бы рассматриваем локальный ФПт (3) в окрестности ОТ «под микроскопом»).

Таким образом, нам следует реализовать п. 3 и дать комментарии по принципу линеаризации (т. е. п. 2b); по пп. 1, 2a нет единой теории, этот вопрос традиционно частично рассматривается на практических занятиях (по пп. 1b,c и 2a — см. например [25]) и в § 4 (по п. 1b).

Начнем с п. 3. Рассмотрим систему (4), $\dim z = 2$, $\dim A = 2 \times 2$. Если $\det A \neq 0$, то ОТ только $z = 0$, иначе имеются еще ОТ, но в любом случае рассмотрим картину траекторий именно как ФПт ОТ $z = 0$ — впрочем, это не так важно, т. к. при линеаризации случай $\det A = 0$ все равно «не сработает». Ввиду явного вида решений (4) задача построения ФПт становится элементарной и по существу алгебраической.

[так что даже не очень хорошо тратить на это время и силы в курсе ДУ, но такова традиция]

В самом деле, все решения (4) имеют вид $z = Te^{tJ}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$, где $A = TJT^{-1}$, J — жорданова форма A, T — матрица перехода (ее столбцы суть два СВ или СВ и ПВ матрицы A), α и β — постоянные, они вещественны, если $\lambda_j(A) \in \mathbb{R}$, в противном случае их нужно брать комплексными (т. к. матрица $z = Te^{tJ}$ комплексная), но так, чтобы решение было вещественным. Впрочем, в последнем случае удобнее пользоваться не выписанным представлением, а непосредственно формулой $z = e^{tA}\zeta$. При вещественных СЧ вектор $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ имеет смысл координат вектора $z(0)$ в базисе из столбцов T.

Замечание. Решения (4) вида $z(t) = \gamma(t)\xi$, где $\xi = \mathrm{const} \in \mathbb{R}^2$, а $\gamma \neq \mathrm{const}$ (γ конечно вещественнозначная), называются *собственными прямыми.* Название ясно, т. к. эти прямые описываются соотношением $\gamma'\xi = \gamma A\xi$, что эквивалентно тому, что ξ есть СВ, а $\gamma(t) = Ce^{\lambda t}$, где λ — соответствующее СЧ, которое должно быть вещественным и ненулевым. Ясно, что каждая собственная прямая состоит из 3 траекторий, направление движения на них определяется знаком λ. $\square$

Как мы сейчас увидим, топология ФПт определяется $\mathrm{sgnRe}\lambda_j(A)$ и совпадением/несовпадением СЧ между собой. Следовательно, возникающие случаи распадаются на 2 группы:

I. *невырожденные случаи*: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\mathrm{Re}\lambda_j \neq 0$ — тогда малое изменение A оставляет тот же случай, так что ФПт топологически не меняется;

II. *вырожденные случаи* — наоборот.

Начнем исследовать все варианты по порядку:

I. Невырожденные случаи.

Случай 1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathrm{sgn}\lambda_1 = \mathrm{sgn}\lambda_2$. Тогда

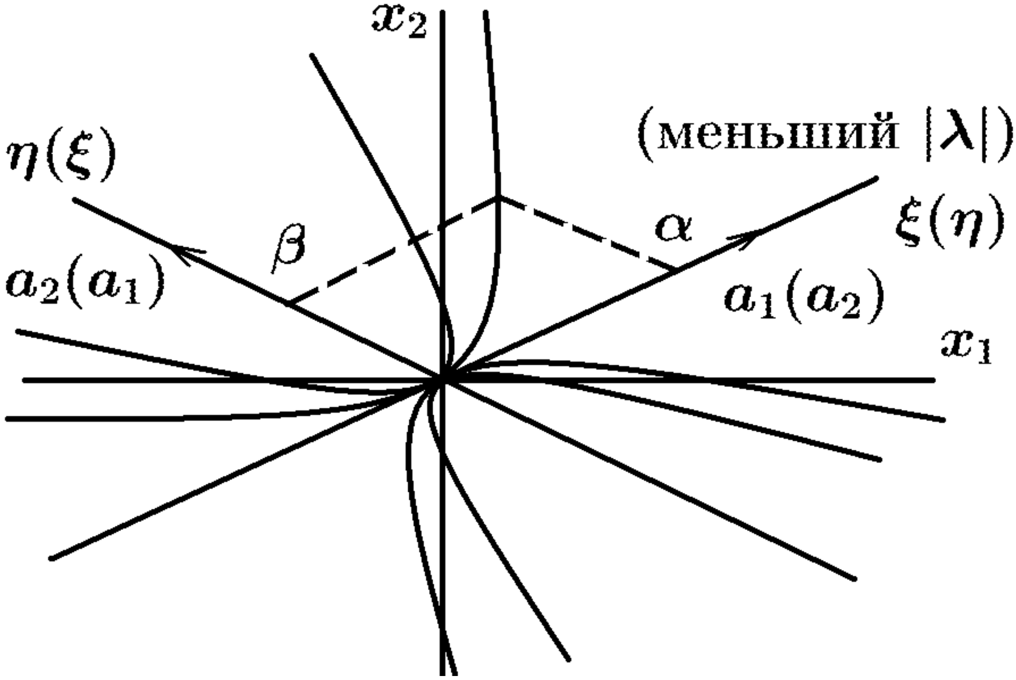
$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$, где a_k — СВ. В итоге

$$z(t) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha e^{t\lambda_1} \\ \beta e^{t\lambda_2} \end{bmatrix} = \alpha e^{t\lambda_1} a_1 + \beta e^{t\lambda_2} a_2.$$

Если для определенности считать, что $|a_k| = 1$, то векторы $a_{1,2}$ образуют косоугольную нормированную СК, так что полученную формулу легко трактовать как параметрическое задание траекторий в этой СК: вектор $z(t)$ имеет координаты

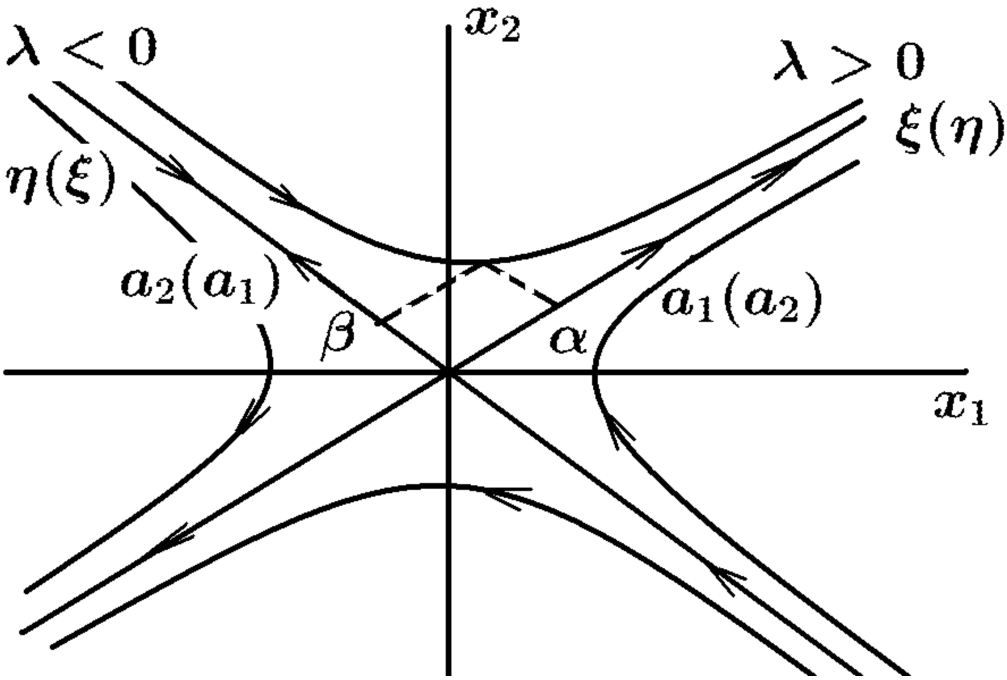
$$(\xi, \eta) = (\alpha e^{t\lambda_1}, \beta e^{t\lambda_2}), \tag{5}$$

что дает все траектории при всевозможных начальных координатах (α, β). Удобно записать (5) в явном виде, исключив t: $|\eta| = C|\xi|^{\lambda_2/\lambda_1}$. Поскольку $\lambda_2/\lambda_1 > 0$, то это половинки парабол (квадрант зависит от (α, β)) или (при α или β нулевых) координатные полуоси (т. е. половинки собственных прямых в исходной СК), или ($\alpha = \beta = 0$) сама ОТ. Ясно, что при $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ параболы касаются оси ξ, а иначе — оси η, т. е. в любом случае касание происходит с осью, порождаемой СВ, соответствующим СЧ с меньшим модулем.



В этом случае ОТ называется «*узел*» (т. е. это название такой топологии ФПт, или, кратко, «самой ОТ»), причем если $\lambda_k > 0$, то направление движения по всем нетривиальным траекториям — от ОТ (тогда «*неустойчивый узел*»), а иначе — к ОТ (тогда «*устойчивый узел*»). Параметр $t \in \mathbb{R}$, при $t \to \pm\infty$ точка на нетривиальных траекториях стремится к ОТ или уходит на ∞. Каждая парабола и обе собственные прямые состоят из 3 траекторий! (см. рассуждения выше на эту тему).

Случай 2. То же, но $\mathrm{sgn}\lambda_1 = -\mathrm{sgn}\lambda_2$. Тогда делаем те же построения, но теперь из формулы $|\eta| = C|\xi|^{\lambda_2/\lambda_1}$ видно, что это ветви гипербол (и опять же координатные полуоси и ОТ). Направление движения на гиперболах можно увидеть из параметрической записи (мнемоническое правило, которое, впрочем, можно и строго обосновать в силу ТоНЗ — «движение на гиперболах согласуется с движением на собственных прямых»). ОТ называется «*седло*». Аналогичные комментарии о «концах» траекторий и о составе собственных прямых.



Случай 3. $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} \neq 0$, т. е. $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$, где $\mu, \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. В этом случае, как уже говорилось, запишем $z(t) = e^{tA}\zeta$, $\zeta = z(0)$, и исследуем e^{tA} — так удобнее, т. к. она всегда вещественна (и результат легко истолковать), и к тому же в данном случае допускает удобное инвариантное представление:

Лемма. Если $\lambda_j(A) = \mu \pm i\nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\nu \neq 0$, то $e^{tA} = e^{t\mu}((\cos\nu t)E + (\sin\nu t)G)$, где $G = \dfrac{1}{\nu}(A - \mu E)$.

Доказательство. тривиально: $A = TJT^{-1}$, где $J = \mathrm{diag}\{\mu + i\nu, \mu - i\nu\}$, так что $e^{tJ} = e^{t\mu}\mathrm{diag}\{e^{i\nu t}, e^{-i\nu t}\} = e^{t\mu}((\cos\nu t)E + (\sin\nu t)F)$, где $F = \mathrm{diag}\{i, -i\} = \frac{1}{\nu}(J - \mu E)$, так что получаем требуемое представление с $G = TFT^{-1} = \frac{1}{\nu}(A - \mu E)$. $\square$

Замечание. Можно было доказать то же самое в «инвариантной» форме: СЧ матрицы A удовлетворяют уравнению $(\lambda-\mu)^2=\gamma\equiv\mu^2-\det A$, где $\mu=(\mathrm{tr}A)/2$, значит, $(A-\mu E)^2=\gamma E$, так что можно подсчитать $\exp(t(A-\mu E))$ через ряд (см. Упражнение в § 2 части 2 на эту тему), и в итоге получить то же самое (для комплексных СЧ получится $\gamma=-\nu^2$), причем это можно проделать сразу для всех СЧ, а не только комплексных.

Упражнение. Проделать это. □

Заметим, что $\lambda_j(G)=\pm i\notin\mathbb{R}$, так что при любых $\zeta\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ векторы ζ и $G\zeta$ образуют базис. В итоге общее нетривиальное решение принимает вид
$z(t)=e^{t\mu}((\cos\nu t)\zeta+(\sin\nu t)(G\zeta))$, это означает, что в базисе $(\zeta,G\zeta)$ траектория начинается из точки $(1,0)$ и далее имеет координаты $(e^{t\mu}\cos\nu t,e^{t\mu}\sin\nu t)$ — это логарифмическая спираль. Если $\mu<0$, то при возрастании t все спирали стягиваются к ОТ (ОТ тогда называется «*устойчивый фокус*»), а иначе — уходят от ОТ («*неустойчивый фокус*»). Направление вращения всех спиралей одинаковое (оно определяется знаком ν и ориентацией базиса $(\zeta,G\zeta)$, которая не зависит от выбора ζ), на практике проще всего определять его, рассмотрев скорость в одной тестовой точке. Можно и заметить общий факт: $\mathrm{sgn}\varphi'=\mathrm{sgn}a_{21}$, где φ — полярный угол, т. к. ориентация базиса определяется знаком величины $\det\begin{bmatrix}e_1 & Ge_1\end{bmatrix}=a_{21}/\nu$. Собственные прямые отсутствуют.

Замечание для преподавателя. Можно записать исходную систему в полярной СК, это помогает лучше осознать некоторые факты (включая последний). Итак, пусть $z = r\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix}$, тогда (4) примет вид $\begin{bmatrix}r'\cos\varphi - r\sin\varphi\,\varphi'\\ r'\sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi'\end{bmatrix} = rA\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix}$, что для нетривиальных решений эквивалентно $\left(A - \dfrac{r'}{r}E\right)\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix} = \varphi'\begin{bmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{bmatrix}$, откуда окончательно

$$\frac{d\ln r}{dt} = \left(A\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix}\right); \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \left(A\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{bmatrix}\right).$$

Замечание для преподавателя. Можно было действовать все-таки через представление $z = Te^{tJ}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ — тогда, хотя и больше возни с комплексными векторами и их истолкованием, но зато получается формулировка результата совсем схожая с вещественными случаями, т. е. решения, записанные в фиксированном базисе. Итак, пусть СВ A имеют вид $\dfrac{a-ib}{2}$, $\dfrac{a+ib}{2}$, где a и b вещественны и линейно независимы. Заметим, что [комбинация $\alpha\dfrac{a-ib}{2} + \beta\dfrac{a+ib}{2}$ дает вещественный вектор] $\Longleftrightarrow$ $[\alpha = \overline{\beta}]$, так что формула общего решения (4) примет вид

$$z = \begin{bmatrix}\dfrac{a-ib}{2} & \dfrac{a+ib}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{t\lambda} & 0\\ 0 & e^{t\overline{\lambda}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma + i\delta\\ \gamma - i\delta\end{bmatrix}$$

с произвольными $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. При этом вектор с «координатами» $(\gamma + i\delta, \gamma - i\delta)$ в «базисе» $\left(\dfrac{a-ib}{2}, \dfrac{a+ib}{2}\right)$:

$$(\gamma + i\delta)\frac{a-ib}{2} + (\gamma - i\delta)\frac{a+ib}{2} = \gamma a + \delta b$$

имеет координаты (γ, δ) в базисе (a, b), т. е. это и есть координаты начального вектора $z(0)$ в этом базисе. Обозначим $\gamma + i\delta = \rho e^{i\psi}$, т. е. $\gamma = \rho\cos\psi$, $\delta = \rho\sin\psi$ — полярное представление начального положения. Тогда «координаты» $z(t)$ в «базисе» $\left(\dfrac{a-ib}{2}, \dfrac{a+ib}{2}\right)$ равны

$$\begin{bmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\overline{\lambda}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho e^{i\psi} \\ \rho e^{-i\psi} \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \exp(t\lambda + i\psi) \\ \exp(\overline{t\lambda + i\psi}) \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \xi + i\eta \\ \xi - i\eta \end{bmatrix},$$

значит, в базисе (a, b) координаты $z(t)$ будут (ξ, η), или, в полярном представлении $\xi = r\cos\varphi$, $\eta = r\sin\varphi$ получим:

$$re^{i\varphi} = \xi + i\eta = \rho e^{t\lambda + i\psi} = \rho e^{t\mu + it\nu + i\psi},$$

что означает $r = \rho e^{t\mu}$, $\varphi = t\nu + \psi$. $\square$

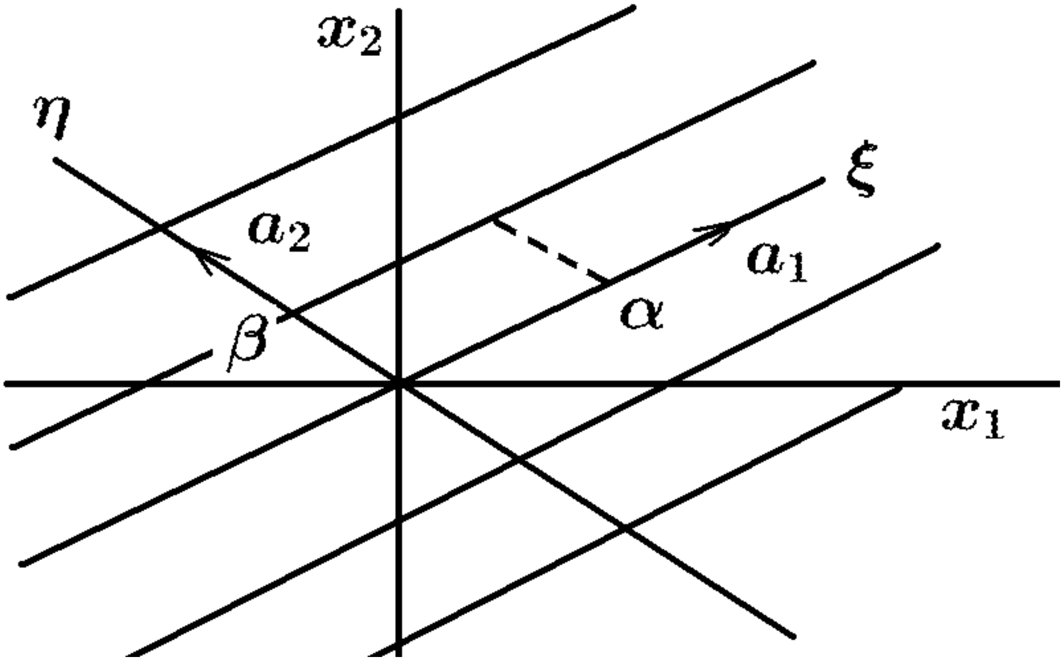
II. Вырожденные случаи.

Случай 4. Как в случае 3, но $\mu = 0$, т. е. $\lambda_{1,2} \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда получим нетривиальные решения в виде $z(t) = (\cos\nu t)\zeta + (\sin\nu t)(G\zeta)$, $G = A/\nu$ — это циклы. ОТ называется «*центр*». Справедливы те же соображения о направлении вращения.

[И тот же способ через СВ.]

[Итак, остались не рассмотренными только случаи вещественных кратных и/или нулевых СЧ.]

Случай 5. $\lambda_1 \neq \lambda_2 = 0$. Тогда как и в Случае 1, получим $z(t) = \alpha e^{t\lambda_1} a_1 + \beta a_2$. Траектории — это полупрямые, параллельные СВ a_1 (т. е. собственной прямой), упирающиеся в ОТ, лежащие на прямой, натянутой на a_2.



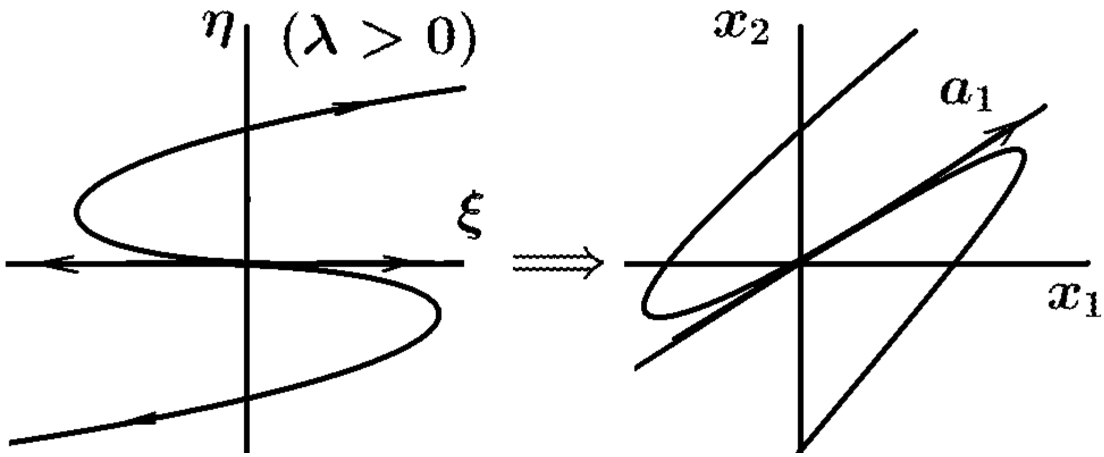
Направление движения определяется знаком λ_1. ОТ не имеет названия.

$\left[\text{Остались не рассмотренными только случаи вещественных совпадающих СЧ.}\right]$

Случай 6. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, имеется только один СВ a_1, и имеется ПВ a_2 (он определяется с точностью до $a_2 := a_2 + ka_1$). Тогда

$$z(t) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = (\alpha + \beta t)e^{t\lambda} a_1 + \beta e^{t\lambda} a_2,$$

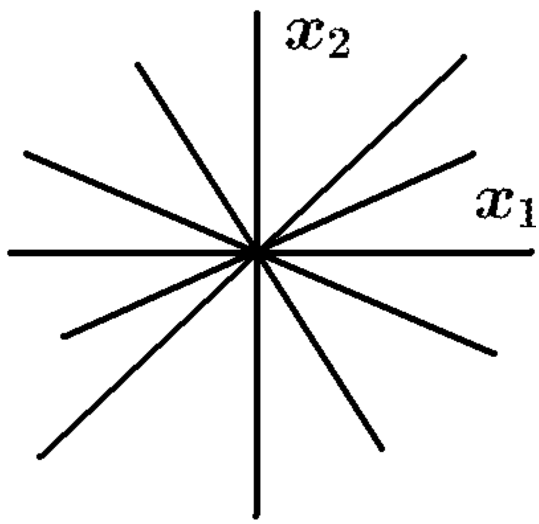
т. е. координаты (ξ, η) в СК (a_1, a_2) имеют вид $((\alpha+\beta t)e^{t\lambda}, \beta e^{t\lambda})$. При $\alpha = \beta = 0$ это ОТ, при $\alpha \neq 0, \beta = 0$ это полуось 0ξ: $(\alpha e^{t\lambda}, 0)$ (т. е. половина собственной прямой), а при $\beta \neq 0$ это кривая с уравнением $\xi = \eta \left(\dfrac{1}{\lambda} \ln \dfrac{\eta}{\beta} + \dfrac{\alpha}{\beta} \right)$. Направление движения определяется по собственной прямой, т. е. знаку λ, а ориентацию (в отличие от других случаев) удобнее всего узнать, восстанавливая картину в СК (ξ, η).



Замечание. Можно воспользоваться инвариантным представлением $e^{tA} = e^{t\lambda}((1-\lambda t)E + tA)$, вытекающим из $(A-\lambda E)^2 = 0$ (см. упражнение выше), так что $z(t) = e^{t\lambda}[(1-\lambda t)z(0) + t(Az(0))]$. $\square$

Этот случай — предельный для Случая 1, поэтому ОТ называется «*вырожденный* (*критический*) *узел*» (соответственно *устойчивый* или *неустойчивый*).

Случай 7.
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, имеется два СВ. Но это значит что $J = \lambda E$, т. е. $A = \lambda E$, и $z(t) = e^{\lambda t} z_0$ — все прямые, проходящие через ОТ, являются собственными прямыми: «*дикритический узел*» (соответственно *устойчивый* или *неустойчивый*).

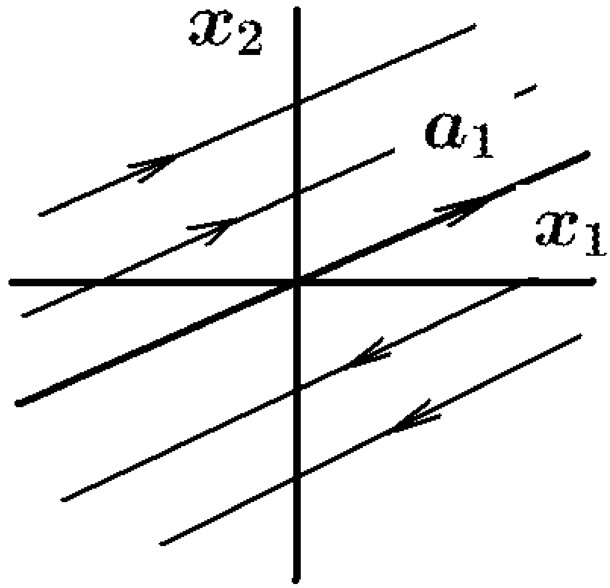


Случай 8. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, имеется два СВ. Но это значит что $A = 0$, и $x(t) = \text{const}$ — вся плоскость состоит из ОТ.

Случай 9. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, имеется только один СВ a_1, и имеется ПВ a_2. Тогда, как и в Случае 6, получим

$z(t) = (\alpha + \beta t)a_1 + \beta a_2$.

Траектории суть прямые, параллельные СВ, а прямая, натянутая на него, вся состоит из ОТ. Направление движения разное с двух сторон от особой прямой, на практике проще всего находить его с помощью тестовой точки (т. к. тогда не нужно искать ПВ).



Итак, мы полностью ответили на вопрос 3, построив глобальный ФПт для (4). Сделаем теперь несколько замечаний по принципу линеаризации (см. п. 2b). Пусть a есть ОТ системы (2), $A = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}$, и пусть добавок φ в представлении (3) удовлетворяет условию

$$\frac{\varphi(x)}{|x-a|^{1+\varepsilon}} \to 0 \qquad \text{при} \quad x \to a. \tag{6}$$

Общий принцип, как и следует ожидать, состоит в том, что ОТ $x = a$ «наследует» тип (т. е. топологию) от (4) в невырожденных случаях, в остальных случаях — лишь частично или никак. Точная формулировка этого тезиса требует аккуратности и может быть дана разными способами. Один из них изложен в [4] § 30 (правда, там вместо (6) требуется квадратичное убывание φ):

1. По определению назовем ОТ $x = a$ системы (2) устойчи-

вым/неустойчивым узлом, седлом, устойчивым/неустойчивым фокусом, если ОТ $z = 0$ линеаризованной системы (4) (т. е. с $A = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}$) имеет этот тип.

2. Данное название оправдывает себя в том смысле, что ФПт (2) в окрестности таких ОТ совпадает с ФПт (4) в окрестности нуля топологически и даже с сохранением углов в ОТ, а именно:

   (a) Если ОТ — седло, то имеются 2 различные гладкие кривые, проходящие через ОТ и касающиеся собственных прямых системы (4), каждая из этих кривых состоит из 3 особых траекторий (2): ОТ и двух так наз. «усов» («сепаратрис») (соответственно 2 из них (лежащие на прямой, касающейся собственной прямой с отрицательным СЧ) «устойчивые», т. е. входящие в ОТ, и 2 — «неустойчивые», т. е. выходящие из нее), а остальные траектории «огибают» их аналогично гиперболам в (4) (точная формулировка последнего тезиса заняла бы много места).

[Этот случай существенно тяжелее остальных двух и по формулировке, и по доказательству.]

   (b) Если ОТ — узел, то имеется 1 гладкая кривая, касающаяся собственной прямой, соответствующей большему $|\lambda|$, проходящая через ОТ и состоящая из 3 траекторий — ОТ и 2 усов, которые входят в ОТ (устойчивы) или выходят из нее (неустойчивы) в зависимости от знака СЧ, а остальные траектории также входят или выходят из ОТ, и касаются второй собственной прямой.

Замечание. Выделение второй пары усов не имеет смысла, т. к. все (кроме первых усов) траектории — кривые и касаются второй собственной прямой, так что любая из них может считаться другим усом.

(c) Если ОТ — фокус, то все траектории к окрестности ОТ наматываются на нее как спирали при $t \to \pm\infty$, вращаясь в том же направлении, что и у (4).

Можно также ввести понятие центра для (2) (в этом случае вся окрестность ОТ заполнена циклами) и доказать, что центр (4) переходит в центр или фокус для (2).

Различение центра и фокуса и другие вопросы, касающиеся вырожденных случаев, требуют более глубокого анализа, существенно опирающегося на нелинейность системы (2). Частично в этом могут помочь методы, которые мы изучим в § 3. Здесь могут помочь и некоторые простые наблюдения, использующие специфику конкретного случая, например:

Утверждение. Если $x = 0$ — ОТ системы (2), а ОТ $z = 0$ соответствующей (4) — центр, причем f имеет симметрию вида $f(x_1, -x_2) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ -f_2(x) \end{bmatrix}$, то нулевая ОТ (2) — тоже центр.

Доказательство. Если $x = \varphi(t)$ — решение (2), то $x = \psi(t)$ — тоже, где $(\psi_1, \psi_2) = (\varphi_1, -\varphi_2)$. Значит, все траектории симметричны относительно оси $0x_1$, т. е. фокуса быть не может. □

Для систем порядка выше первого все рассуждения § 1 могут быть повторены. Так, одно уравнение высокого порядка $y^{(n)} = g(t, y, \ldots, y^{(n-1)})$ сводится к системе вида (1) с $x = (y, \ldots, y^{(n-1)})^*$, $f(x) = (x_2, \ldots, x_n, g(t, x))$, так что естественно определить понятие ФП $\{x\} = \{(y, \ldots, y^{(n-1)})\}$ и траекторий в нем как кривых, заметаемых вектором $(y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$ при изменении t; после чего заметить, что в случае автономного уравнения

$$y^{(n)} = g(y, \ldots, y^{(n-1)}) \tag{7}$$

сохраняются все свойства траекторий, доказанные выше для систем. На этот раз ФПт подразумевает изучение поведения y в неразрывной связи со всеми $y', \ldots, y^{(n-1)}$. В целом дальнейшая теория для (7) соответствует общей теории, но имеются некоторые специфические моменты, например:

1. ОТ уравнения (7) обязана иметь вид $(a, 0, \ldots, 0)$, $a \in \mathbb{R}$.

2. При $n = 2$ при построении ФПт линейного уравнения с постоянными коэффициентами $y'' + ay' + by = 0$ возникает матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}$, которая не может иметь вид $A = \lambda E$, так что Случаи 7,8 в классификации выше не реализуются. СВ, соответствующий СЧ λ, имеет вид $(1, \lambda)^*$. В случае узла это означает, что параболы касаются той собственной прямой, которая лежит ближе к оси $0y$.

§ 2. Устойчивость по Ляпунову: базовые сведения

Рассмотрим задачу Коши для системы I порядка:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x); \qquad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Пусть выполняются условия ТК—П в некоторой $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$, так что эта задача имеет единственное НР $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ при всех $(t_0, x_0) \in B$. Зафиксируем t_0 и обозначим $x_0 = \xi$. По ТоНЗ функция $\varphi(t, \xi)$ определена и непрерывна на открытом множестве в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \{(t, \xi)\}$. Этот факт, как мы видели в части 1, допускает более наглядную формулировку: если из интервала $(t_-(\varphi(\cdot, \xi_0)), t_+(\varphi(\cdot, \xi_0)))$ выделить отрезок, например, вида $[t_0, t_1]$, то найдется $\delta_0 > 0$ такое, что при всех $\xi \in B(\xi_0, \delta_0)$ все НР $\varphi(t, \xi)$ также будут определены на этом отрезке (т. е. он будет содержаться в интервалах их существования), причем

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in (0, \delta_0): \qquad \xi \in B(\xi_0, \delta) \quad \Longrightarrow \\ |\varphi(t, \xi) - \varphi(t, \xi_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \in [t_0, t_1].\end{gathered} \tag{2}$$

В приложениях важную роль играет следующий вопрос: можно ли распространить свойство (2) на интервал $[t_0, +\infty)$ (если, конечно, $t_+(\varphi(\cdot, \xi_0)) = +\infty$), т. е. имеет ли место непрерывная зависимость решения $\varphi(t, \xi)$ от ξ в окрестности ξ_0 равномерно по $t \in [t_0, +\infty)$ (она называется *устойчивостью* решения $\varphi(t, \xi_0)$ при $t \to +\infty$)?

Пример 1. $x' = x^2$, $x(0) = 0$. Решение $x = 0$. Устойчиво ли оно? При $\xi \neq 0$ задача $x' = x^2$, $x(0) = \xi$ имеет решение, вообще говоря не определенное на всей $\mathbb{R}^+$ даже при малых ξ, так что вопрос даже не имеет смысла.

Пример 2. $x' = x$, $x(0) = 0$. Решение $x = 0$. Устойчиво ли оно? При $\xi \neq 0$ задача $x' = x$, $x(0) = \xi$ имеет решение $x(t) = \xi e^t$ — оно определено на всей $\mathbb{R}^+$, но (2) на $\mathbb{R}^+$ не выполняется, т. е. исходное решение неустойчиво.

Пример 3. $x' = -x$, $x(0) = 0$. Решение $x = 0$. Устойчиво ли оно? При $\xi \neq 0$ задача $x' = -x$, $x(0) = \xi$ имеет решение $x(t) = \xi e^{-t}$ — оно определено на всей $\mathbb{R}^+$, и (2) на $\mathbb{R}^+$ выполняется, т. е. исходное решение устойчиво. □

Таким образом, свойство непрерывной зависимости от начальных данных на бесконечном интервале имеет место не всегда, и даже решения, начинающиеся в окрестности исходного, могут на этом интервале не существовать, т. е. вопрос об устойчивости требует отдельного исследования.

[Здесь полезно остановиться на приложениях, механическом смысле, например, рассмотреть физический маятник.]

Фактически понятие устойчивости мы уже́ ввели, но для определенности дадим его еще раз в виде отдельного определения. При этом достаточно рассмотреть только $t \to +\infty$, т. к. $t \to -\infty$ тогда исследуется заменой $t := -t$, причем, как видно из Примеров 2,3, устойчивость в каждом направлении имеет место независимо. Первым, кто определил понятие устойчивости в рассматриваемом виде, был А.М.Ляпунов, поэтому это понятие носит его имя.

Определение. Пусть при некотором ξ_0 задача Коши (1) с $x_0 = \xi_0$ имеет решение $\varphi(\cdot, \xi_0)$, определенное на $[t_0, +\infty)$.

Оно называется *устойчивым по Ляпунову* (на $+\infty$), если:

1. найдется $\delta_0 > 0$ такое, что для всех $\xi \in B(\xi_0, \delta_0)$ НР $\varphi(\cdot, \xi)$ также определено на $[t_0, +\infty)$;

2. свойство (2) выполнено при $t_1 = +\infty$.

Для приложений важно следующее понятие:

Определение. Решение $\varphi(\cdot, \xi_0)$ называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову* (на $+\infty$), если:

1. оно устойчиво;

2. найдется $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ такое, что для всех $\xi \in B(\xi_0, \delta_1)$ верно $|\varphi(t, \xi) - \varphi(t, \xi_0)| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Далее мы для краткости не будем прибавлять слов «на $+\infty$» для этих понятий, подразумевая это. Если решение не является устойчивым по Ляпунову, то оно называется *неустойчивым по Ляпунову*.

Замечание. Если рассматривается некоторое решение ψ системы $(1)_1$, определенное на $[\alpha, +\infty)$, то его можно рассмотреть как решение задачи Коши (1) с данными $x_0 = \psi(t_0)$ с любым $t_0 \geqslant \alpha$. Тогда устойчивость, асимптотическая устойчивость или неустойчивость не зависят от выбора t_0 ввиду свойства (2).

Упражнение. Убедиться. $\square$

Таким образом, можно говорить об устойчивости (асимптотической устойчивости) решений системы $(1)_1$, не уточняя интервал и не конкретизируя данные Коши. $\square$

Замечание. Пункт 1 в определении асимптотической устойчивости существен — имеются примеры систем, имеющих 0 решение, для которых все решения, начинающиеся в окрестности нуля, стремятся к нулю на $+\infty$ (т. е. выполнен п. 2), но 0 решение неустойчиво, т. к. эти решения имеют максимум, величина которого не уменьшается при уменьшении начальных данных, а он лишь сдвигается вправо. В то же время имеются классы ОДУ, для которых этот п. 1 все же лишний — таковы автономные ОДУ при $n = 1$ (**Упражнение.** доказать хотя бы для 0 решения), и линейные ОДУ при любом n (см. далее). $\square$

Понятие непрерывной зависимости от начальных данных, и, в частности, устойчивость удобно формулировать в терминах *возмущений*. Рассмотрим решение $\varphi(\cdot, \xi_0)$ задачи (1) с $x_0 = \xi_0$. Назовем *возмущением начальных данных* вектор $\eta = \xi - \xi_0$, а *возмущением решения* — функцию $z(t) = \varphi(t,\xi) - \varphi(t,\xi_0)$, соответственно ξ и ξ_0 — *возмущенные* и *невозмущенные* (исходные) *начальные данные*, а $\varphi(t,\xi)$ и $\varphi(t,\xi_0)$ — *возмущенное* и *невозмущенное* (исходное) *решения*. Тогда устойчивость означает, что при малых возмущениях начальных данных возмущение решения определено до $+\infty$ и мало́ равномерно по окрестности $+\infty$, а асимптотическая устойчивость — что оно еще и стремится к нулю. Для возмущения решения можно выписать задачу Коши:

$$\frac{dz}{dt} = f(t, \varphi(t,\xi_0) + z) - f(t, \varphi(t,\xi_0)); \qquad z(t_0) = \eta, \qquad (3)$$

в которой правая часть уравнения, вообще говоря, зависит от исходного решения.

Замечание. Формулировка в терминах возмущений эквивалентна сведе́нию вопроса об устойчивости любого решения системы $(1)_1$ к устойчивости нулевого решения (вообще говоря, другой системы). В самом деле, если требуется исследовать устойчивость решения $\varphi(\cdot, \xi_0)$, то сделаем замену $z = x - \varphi(\cdot, \xi_0)$. Тогда (1) примет вид

$$\frac{dz}{dt} = f(t, \varphi(t, \xi_0) + z) - f(t, \varphi(t, \xi_0)); \quad z(t_0) = x_0 - \xi_0, \quad (4)$$

так что устойчивость решения $\varphi(t, \xi_0)$ системы $(1)_1$ эквивалентна устойчивости 0 решения $(4)_1$, но это то же самое, что исследовать (3). Однако система $(4)_1$ может оказаться сложнее исходной, так что этот прием не всегда целесообразен. □

Для линейных систем

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(t) \quad (5)$$

(где $A, h \in C[\alpha, +\infty)$) вопрос об устойчивости является тривиальным, если известно поведение на $+\infty$ ФМР X однородной системы $(5)_0$. В самом деле, все решения (5) существуют до $+\infty$, а задача (3) для возмущений принимает вид

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z; \qquad z(t_0) = \eta, \quad (6)$$

т. е. она не зависит ни от h, ни от выбора исследуемого решения (т. е. от выбора ξ_0). Однородная система $(5)_0$ играет роль системы для возмущений решений неоднородной системы (5). Таким образом, устойчивость, асимптотическая устойчивость или неустойчивость всех решений (5) со всеми h *имеет место одновременно*, так что можно просто говорить об *устойчивых, асимптотически устойчивых* или *неустой-*

чивых системах $(5)_0$, и это зависит от свойств ее ФМР.

$\Big[$Устойчивость для (5), таким образом, есть непрерывность в нуле отображения

$$\eta \mapsto z \qquad \text{в смысле } \|z\|_{C[t_0,+\infty)}. \tag{7}$$

Но ввиду линейности этого отображения его непрерывность эквивалентна ограниченности. Далее этот тезис раскрывается «в явном виде».$\Big]$

Осталось понять, какие свойства ФМР на это влияют:

Утверждение. Следующие утверждения эквивалентны:

A. Все решения (5) со всеми h устойчивы.

B. Решения (6) обладают свойством: $\forall\varepsilon\ \exists\delta$: $|\eta| < \delta \Longrightarrow |z(t)| < \varepsilon$ при $t \in [t_0, +\infty)$ (непрерывность (7) в нуле).

C. Решения (6) обладают свойством: существует единая для всех решений постоянная C такая, что $|z(t)| \leqslant C|\eta|$ при $t \in [t_0, +\infty)$ (ограниченность (7)).

D. $|X(t)| \leqslant C$ при $t \in [t_0, +\infty)$.

E. Все решения $(6)_1$ ограничены на $+\infty$.

Замечание. A$\Longleftrightarrow$B мы уже доказали, но докажем заново для наглядности.

Доказательство. [A$\Longrightarrow$E] Если не E, т. е. существует неограниченное решение z_* системы $(6)_1$=$(5)_0$, то $\exists\varepsilon_0 = 1$ $\forall\delta > 0\ \exists\eta = \dfrac{z_*(t_0)}{2|z_*(t_0)|}\delta$: $|\eta| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$, но соответствующее $z(t) = \dfrac{z_*(t)}{2|z_*(t_0)|}\delta$ не обладает свойством $|z(t)| < \varepsilon_0 = 1$, а это и есть не А (неустойчивость 0 решения (5) с $h = 0$).

[Неограниченные решения $(5)_0$=$(6)_1$ играют роль растущих возмущений для (5). И вообще, для линейных ОДУ неустойчивость эквивалентна неограниченному росту возмущений.]

[Это был единственный не совсем тривиальный переход. Остальные совершенно очевидны:]

[E$\Longrightarrow$D] Столбцы X суть решения $(6)_1$.

[D$\Longrightarrow$C] Решение (6) имеет вид $z(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\eta$.

[C$\Longrightarrow$B] $\delta = \varepsilon/C$.

[B$\Longrightarrow$A] Доказано выше: (6) есть задача для возмущений для (5). $\square$

Упражнение. Доказать B$\Longrightarrow$C напрямую, не используя представление через X, а только с помощью линейности отображения (7) (эта логика, т. е. C$\Longleftrightarrow$B, верна для любого линейного, в т. ч. бесконечномерного, оператора). $\square$

Итак, для линейных систем устойчивость всех решений (или какого-то одного — см. рассуждения перед Утверждением) с любой правой частью эквивалентна ограниченности решений однородной системы, т. е. ее ФМР.

[Аналогично для неустойчивости — нетрудно написать как именно.]

Вопрос об асимптотической устойчивости также легко решается: ввиду представления $z(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\eta$ стремление z к нулю при любых η эквивалентно $X(t) \to 0$ на $+\infty$, что ввиду непрерывности X влечет ее ограниченность. Таким образом, асимптотическая устойчивость всех решений (или какого-то одного) с любой правой частью эквивалентна стремлению к нулю всех решений однородной системы, т. е. ее ФМР, и, как анонсировалось выше, п. 1 в определении асимптотической устойчивости оказывается лишним.

В случае, когда о матрице A, а значит, о структуре ФМР имеется дополнительная информация, указанные признаки устойчивости допускают дальнейшее уточнение:

Теорема. Пусть $A(t) = A = \mathrm{const}$. Тогда:

1. Если все $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0$, то все решения (5) асимптотически устойчивы.

2. Если все $\mathrm{Re}\lambda_j(A) \leqslant 0$, причем при $\mathrm{Re}\lambda_j(A) = 0$ все соответствующие жордановы клетки одномерны, то все решения (5) устойчивы (но не асимптотически устойчивы, если $\mathrm{Re}\lambda_j(A) = 0$ присутствуют).

3. Если хотя бы одно $\mathrm{Re}\lambda_j(A) > 0$, то все решения (5) неустойчивы.

4. Если все $\mathrm{Re}\lambda_j(A) \leqslant 0$, но имеется хотя бы одно $\mathrm{Re}\lambda_j(A) = 0$ с неодномерной жордановой клеткой, то все решения (5) неустойчивы.

Доказательство. Нужно исследовать величину $|e^{tA}|$ и понять, когда она ограничена на $\mathbb{R}^+$, и когда стремится к нулю. Эти вопросы эквивалентны таким же вопросам для e^{tJ}. Но e^{tJ} состоит из элементов вида $t^k e^{\lambda t}$, где $\lambda = \lambda_j(A)$, а $k = 0, \ldots, (\text{кр.клетки}) - 1$. Поскольку $|e^{\lambda t}| = \exp(t\mathrm{Re}\lambda)$, то получаем:

1. В этом случае $|e^{tA}| \leqslant C \exp(-\varkappa t)$, где все $\mathrm{Re}\lambda_j(A) \leqslant -2\varkappa$ (что можно было понять и из оценки Гельфанда—Шилова). Имеет место *экспоненциальная устойчивость* (т. е. экспоненциальное затухание возмущений, экспоненциальная стабилизация).

2. В этом случае в e^{tJ} все элементы ограничены, и имеются вообще говоря элементы вида $e^{t\lambda}$, где $|e^{\lambda t}| = 1$, т. е. $|e^{tA}| \leqslant C$, и если такие СЧ имеются, то e^{tJ} не убывает, так что асимптотической устойчивости нет. Другими словами, в качестве неубывающих возмущений можно указать $e^{tA}\xi = e^{\lambda t}\xi$, где ξ есть СВ, соответствующий $\lambda \in i\mathbb{R}$.

3. В этом случае в e^{tJ} имеются растущие элементы $e^{t\lambda}$ с $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Другими словами, имеется растущее возмущение $e^{tA}\xi = e^{\lambda t}\xi$, где ξ есть СВ. Имеет место *экспоненциальная неустойчивость* (т. е. экспоненциальный рост некоторых возмущений).

4. В этом случае в e^{tJ} имеются растущие элементы $t^k e^{t\lambda}$ с $\mathrm{Re}\lambda = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Другими словами, имеется растущее возмущение $e^{tA}\eta = e^{\lambda t}\eta + te^{\lambda t}\xi$, где η есть ПВ для СВ ξ (т. е. $A\eta = \lambda\eta + \xi$ — см. об этом в § 2 части 2). Имеет место *степенна́я неустойчивость* (т. е. степенной рост некоторых возмущений и не более чем степенной рост всех возмущений). $\square$

Теорема. Пусть $A(t+\omega) = A(t)$, λ_j — мультипликаторы системы $(5)_0$,

$$\begin{bmatrix}\text{т. е. } \lambda_j = \lambda_j(B),\ B \text{ — ММ, т. е. } \Phi(t+\omega) = \Phi(t)B, \text{ где } \Phi \\ \text{— ФМР } (5)_0\end{bmatrix}$$

а $\rho_j = \dfrac{1}{\omega}\ln\lambda_j$ — ее ХП.

$$\begin{bmatrix}\text{т. е. } \rho_j = \lambda_j(R), \text{ где } \Phi(t) = Q(t)e^{tR},\ Q(t+\omega) = Q(t), \\ \det Q \neq 0,\ Q \text{ и } Q^{-1} \text{ непрерывны.}\end{bmatrix}$$

Тогда для устойчивости решений системы (5) верны все утверждения предыдущей теоремы, в которых $\lambda_j(A)$ заменяются на ρ_j, или, в терминах λ_j:

1. Если все $|\lambda_j| < 1$, то все решения (5) асимптотически устойчивы.

2. Если все $|\lambda_j| \leqslant 1$, причем при $|\lambda_j| = 1$ все соответствующие жордановы клетки B (и R) одномерны, то все решения (5) устойчивы (но не асимптотически устойчивы, если $|\lambda_j| = 1$ присутствуют).

3. Если хотя бы одно $|\lambda_j| > 1$, то все решения (5) неустойчивы.

4. Если все $|\lambda_j| \leqslant 1$, но имеется хотя бы одно $|\lambda_j| = 1$ с неодномерной жордановой клеткой, то все решения (5) неустойчивы.

Доказательство. *Способ I.* Ввиду того, что Q и Q^{-1} непрерывны и периодичны, они ограничены, так что ограниченность или стремление к нулю матрицы $\Phi(t) = Q(t)e^{tR}$ эквивалентно таким же свойствам матрицы e^{tR}, а этот вопрос решен в предыдущей теореме, это дает нужные утверждения в терминах ХП и клеток для R. При этом сохраняются те же замечания о скорости роста или убывания возмущений. Ввиду того, что $B = e^{\omega R}$, ИП клеток B и R совпадают, и СЧ связаны равенством $\lambda_j = e^{\omega \rho_j}$, получаем, что переформулировка в терминах λ_j и клеток B очевидна.

Способ II. Имеем $\Phi(t) = \Phi\left(t - \left[\frac{t}{\omega}\right]\omega\right) B^{\left[\frac{t}{\omega}\right]}$. Поскольку $t - \left[\frac{t}{\omega}\right]\omega \in [0, \omega]$, а на этом отрезке Φ и Φ^{-1} непрерывны и ограничены, то ограниченность или стремление к нулю матрицы $\Phi(t)$ эквивалентно таким же свойствам матрицы B^k при $k \to +\infty$. Остается выразить эти свойства в терминах B, т. е. ее СЧ и клеток.

Упражнение. Сделать это. $\square$

Замечание. Способы I и II по существу суть одно и то же, т. к. теорема Флоке есть лишь перезапись факта $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)B$. $\square$

Теорема. Пусть $A(t) \to A_0 = \text{const}$ при $t \to \infty$. Тогда:

1. если решения системы $z' = A_0 z$ устойчивы, то устойчивость решений (5) можно гарантировать при условии достаточно быстрой сходимости $A(t) \to A_0$, а именно $\int^{+\infty} |A(s) - A_0| ds < \infty$;

2. если решения системы $z' = A_0 z$ асимптотически устойчивы, то решения (5) также асимптотически устойчивы, причем стабилизация происходит с экспоненциальной скоростью.

Доказательство. Пусть для определенности 0 входит в интервал существования решения. Нужно оценить ФМР X системы (5). Имеем: $X' = A(t)X = A_0X + (A(t) - A_0)X$, так что

$$X(t) = e^{tA_0}X(0) + \int\limits_0^t e^{(t-s)A_0}(A(s) - A_0)X(s)ds. \qquad (8)$$

1) По условию, $|e^{tA_0}| \leqslant M = \text{const}$, тогда из (8) получаем $|X(t)| \leqslant M|X(0)| + M\int\limits_0^t |A(s) - A_0| \cdot |X(s)|ds$, т. е. для величин $\psi(t) = |X(t)|$, $\gamma = M|X(0)|$,
$\alpha(t) = M|A(t) - A_0| \geqslant 0$ получается неравенство
$\psi(t) \leqslant \gamma + \int\limits_0^t \alpha(s)\psi(s)ds$. По лемме Гронуолла (см. § 5 части 1) получаем $\psi(\xi) \leqslant \gamma \exp\left(\int\limits_0^\xi \alpha(s)ds\right)$, т. е.

$$|X(t)| \leqslant M|X(0)| \exp\left(M\int\limits_0^t |A(s) - A_0|ds\right) \leqslant$$

$$\leqslant M|X(0)| \exp\left(M\int\limits_0^{+\infty} |A(s) - A_0|ds\right) = \text{const}.$$

2) По условию, найдется $\varkappa > 0$ такое, что
$\mathrm{Re}\lambda_j(A_0) \leqslant -2\varkappa$. Тогда по оценке Гельфанда—Шилова име-

ем $|e^{tA_0}| \leqslant e^{-2\varkappa t}\mathrm{ex}_{n-1}(2t|A_0|) \leqslant Me^{-\varkappa t}$. Тогда (8) дает

$$|X(t)| \leqslant Me^{-\varkappa t}|X(0)| + \int\limits_0^t Me^{\varkappa s-\varkappa t}|A(s)-A_0|\cdot|X(s)|ds.$$

Умножая на $e^{\varkappa t}$, получим для величины $|X(t)|e^{\varkappa t}$ такое же неравенство, как и в п. 1, так что получим $|X(t)|e^{\varkappa t} \leqslant M|X(0)|\exp\left(M\int\limits_0^t |A(s)-A_0|ds\right)$. По условию, найдется $T>0$ такое, что при $t \geqslant T$ верно $|A(t)-A_0| \leqslant \dfrac{\varkappa}{2M}$, так что $\int\limits_0^t |A(s)-A_0|ds \leqslant C+\dfrac{\varkappa}{2M}(t-T) = C_1+\dfrac{\varkappa t}{2M}$, и в итоге $|X(t)|e^{\varkappa t} \leqslant M|X(0)|C_2\exp(\varkappa t/2)$, т. е. $|X(t)| \leqslant C_3e^{-\varkappa t/2}$. □

Замечания. В п. 1 Теоремы скорость сходимости $A(t)\to A_0$ существенна, так же как и то, что в качестве тестовой (в обоих пп. 1,2) берется система с предельными, а не «замороженными» коэффициентами — см. об этом соответствующие контрпримеры (в конце § 2). В п. 2 мы использовали даже не то, что $|A(t)-A_0|\to 0$, а то, что $|A(t)-A_0| \leqslant \varepsilon$ с достаточно малым ε. □

[грубо говоря, так, чтобы не «испортить спектр $A(t)$»: он должен лежать в левой полуплоскости и быть отделенным от мнимой оси.]

[Но точная формулировка все же не такова: нам нужна фиксированная матрица A_0 с хорошим спектром, около которой должна осциллировать $A(t)$, и амплитуда колебаний должна быть мала, так что подбор такой A_0 может быть затруднителен, если $A(t)$ не стабилизируется. С другой стороны, даже если $A(t) \to A_0$, эта мысль может пригодиться: можно брать не A_0, а замороженную $A(T)$ при $T \gg 1$ (что, в общем-то, итак ясно из непрерывности спектра, т. к. $A(T) = \mathrm{const}$).]

Замечание для преподавателя. Может возникнуть предположение, что если $\mathrm{Re}\lambda_j(A(t)) \leqslant -\varkappa = \mathrm{const} < 0$, то система (5) асимптотически устойчива. Однако этот вопрос не так очевиден — требуется дополнительное исследование (см. об этом еще [5]). Можно пробовать работать со следующим тождеством для ненулевых решений:

$$\frac{d}{dt}\ln|x| = \frac{x \cdot x'}{|x|^2} = \left(A\frac{x}{|x|}, \frac{x}{|x|}\right) \quad \left[= \frac{1}{2}\left((A + A^*)\frac{x}{|x|}, \frac{x}{|x|}\right)\right].$$

Ясно, что если мы попытаемся добиться отрицательной определенности этой формы, то для этого необходимо и достаточно, чтобы все $\lambda_j(A + A^*) \leqslant -2\varkappa_0 < 0$, и в этом случае $|x(t)| \leqslant Ce^{-\varkappa_0 t}$, т. е. имеет место асимптотическая устойчивость. Однако как сформулировать признаки в терминах самой A, неясно. И к тому же этот признак заведомо никогда не работает для уравнений высокого порядка, т. к. там соответствующая $A + A^*$ есть симметричная ненулевая матрица, у которой по диагонали все нули, кроме может быть одного элемента, а у таких матриц второй инвариант отрицателен (а это сумма попарных произведений СЧ), а значит СЧ не могут быть одного знака. Но для систем, например, с симметричной матрицей получается хороший признак. Кстати, в [5] есть признак Лаппо—Данилевского, который как раз коррелирует с симметричными A.

Все полученные до сих пор результаты в § 2 легко переформулируются для уравнений высокого порядка $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$. А именно:

1. В понятии устойчивости (асимптотической устойчивости) следует рассматривать поведение всего вектора $(y, \dots, y^{(n-1)})$.

2. Для линейного уравнения

$$P_n\left(t, \frac{d}{dt}\right) y = r(t) \tag{9}$$

   верна цепочка эквивалентностей:
   [устойчивость (асимптотическая устойчивость) всех решений при любых r] $\Longleftrightarrow$
   [устойчивость (асимптотическая устойчивость) какого-то одного решения] $\Longleftrightarrow$
   [ограниченность (стремление к нулю) решений $(9)_0$ и их производных до порядка $(n-1)$] $\Longleftrightarrow$
   [ограниченность (стремление к нулю) матрицы Вронского для $(9)_0$].

   Замечание. Если $P_n = P_n(\lambda)$, то можно требовать ограниченность (стремление к нулю) только y (без производных) — см. § 5 части 2.

3. Для $P_n = P_n(\lambda)$ критерий устойчивости (асимптотической устойчивости) формулируется в виде условий на корни P_n, и, при необходимости, на жордановы клетки соответствующей матрицы A.

4. Для периодических коэффициентов (9) критерии фор-

мулируются в виде условий на мультипликаторы (ХП) и, при необходимости, на жордановы клетки ММ или матрицы R.

5. Для коэффициентов P_n, стабилизирующихся достаточно быстро, или в случае асимптотической устойчивости предельного уравнения, достаточно рассмотреть предельное уравнение.

Неудобство п. 3 в том, что если $\mathrm{Re}\lambda_j(P_n) \leqslant 0$, но есть мнимые корни, то недостаточно изучить корни, а нужно еще анализировать соответствующую матрицу. Поэтому обычно ограничиваются доказательством неустойчивости или асимптотической устойчивости, причем для последнего имеются удобные алгебраические критерии в терминах коэффициентов P_n (этот вопрос традиционно отрабатывается на практических занятиях, см. например, [25]). Аналогичное замечание для п. 5.

Пример. $y'' + a(t)y' + b(t)y = r(t)$, $(a, b)(t + \omega) = (a, b)(t)$, $\int\limits_0^\omega a(t)dt = 0$ — такой случай мы рассматривали в части 2. ММ $B = \Phi_0(\omega)$, где $\Phi_0(0) = E$, т. е. Φ_0 — это матрица Вронского, составленная из ФСР такой, что
$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}(0) = E$. Поскольку мультипликаторы удовлетворяют уравнению $\lambda^2 - (\mathrm{tr}B)\lambda + \det B = 0$, а $\det B = \lambda_1\lambda_2 = 1$ (как показано в части 2, так что асимптотической устойчивости заведомо нет), то ключевую роль играет
$\mathrm{tr}B = \mathrm{tr}\Phi_0(\omega) =: \gamma \in \mathbb{R}$. Итак, $\lambda^2 - \gamma\lambda + 1 = 0$,

$\lambda_{1,2} = \dfrac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4}}{2}$. Возникают 3 случая:

Случай 1. $|\mathrm{tr}\Phi_0(\omega)| > 2$. Тогда очевидно, что $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ и различны, так что одно из них ввиду $\lambda_1\lambda_2 = 1$ окажется вне единичного круга, значит неустойчивость (имеются 2 нормальных решения, одно растет, а другое убывает, нет ОПР однородного уравнения), хотя «теоретически» для любой ω-периодической r существует единственное ОПР y.

Случай 2. $|\mathrm{tr}\Phi_0(\omega)| < 2$. Тогда $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$, так что ввиду $\lambda_1\lambda_2 = 1$ получим, что оба лежат на единичной окружности, а значит устойчивость (имеются 2 нормальных решения, оба возможно периодичны, но не ОПР).

Случай 3. $|\mathrm{tr}\Phi_0(\omega)| = 2$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda = 1$ или $\lambda = -1$. В ФСР имеется одно ОПР (или ω-антипериодическое решение), а второе либо такое же, либо растущее (степенным образом) — от него зависит: устойчивость или степенная неустойчивость. Здесь помимо $\mathrm{tr}\Phi_0(\omega)$ надо знать еще и $\mathrm{rang}(\Phi_0(\omega) - \lambda E)$. $\square$

[Таким образом, если, например, в случае 2 задать любую ω-периодическую r, то найдется единственное ОПР уравнения. Оно будет устойчивым, т. е. при малых возмущениях в любой точке возмущенное решение будет мало отличаться от ОПР, но и не стремиться к нему. Возмущенное решение уже не ОПР, т. к. ОПР единственно, но возмущение, возможно, периодично со своим периодом (кратным ω, если $\arg\lambda_j$ соизмерим с π).]

Приведем теперь обещанные контрпримеры к теореме о стабилизирующихся коэффициентах.

Пример. $y'' - \dfrac{2y'}{t} + y = 0$. При $t \to \infty$ «предельное» уравнение имеет вид $z'' + z = 0$, которое устойчиво. Но скорость сходимости слишком мала: $(-2/t) \notin L_1$, и ФСР исходного уравнения $(\sin t - t\cos t)$, $(\cos t + t\sin t)$ состоит из растущих решений.

Пример. $y'' + \dfrac{ay'}{t} + \dfrac{by}{t^2} = 0$ — это уравнение Эйлера (см. конец § 2 части 2), оно имеет решения вида $y = t^\mu$, где $\mu^2 + (a-1)\mu + b = 0$, т. е. $\mu = \dfrac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2}$ (если корень кратный, то второе решение есть $t^\mu \ln t$). Если $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то ФСР лучше записать в виде $t^{\mathrm{Re}\mu}\cos((\mathrm{Im}\mu)\ln t)$, $t^{\mathrm{Re}\mu}\sin((\mathrm{Im}\mu)\ln t)$. При любом фиксированном T уравнение с «замороженными» коэффициентами $y'' + \dfrac{ay'}{T} + \dfrac{by}{T^2} = 0$ будет устойчивым, если $\lambda = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2T}$ удовлетворяют соответствующим условиям. Нам достаточно $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} < 0$, что эквивалентно $a > 0$, $b > 0$. Добьемся наличия $\mathrm{Re}\mu > 0$, что эквивалентно (ввиду $b > 0$) условию $a - 1 < 0$. Тем самым, при $a \in (0,1)$, $b > 0$ исходное уравнение неустойчиво, а «замороженное» — асимптотически устойчиво.

[Дело в том, что λ не отделены от мнимой оси равномерно по T — предельные $\lambda = 0$, что согласуется с предельным уравнением $y'' = 0$, которое, очевидно, неустойчиво.]

Несмотря на кажущуюся окончательность решения вопроса об устойчивости решений линейных ОДУ с постоянными или периодическими коэффициентами, в реальности применение полученных критериев может оказаться затруднительным ввиду сложностей с анализом СЧ матриц большого размера (или вовсе невозможным ввиду приближенного их задания при численных расчетах).

[т. е. это не метод, а тавтология]

Необходимы и другие подходы, более гибкие и ориентированные на реальные применения. Кроме того, пока никаких методов мы не предложили для нелинейных уравнений. Оказывается, обе проблемы решаются одновременно с помощью функций Ляпунова (ФЛ), которые нам уже встречались в § 4 части 1. Они вводятся, как правило, для автономных систем, которыми мы теперь и ограничимся.

[Устойчивость решений неавтономных систем — слишком сложный вопрос, и мы его оставляем. Впрочем, в [1] и [5] рассмотрен второй метод Ляпунова сразу для неавтономных систем.]

Для уравнений высокого порядка перенос результатов очевиден, и мы к этому больше возвращаться не будем.

§ 3. Устойчивость точек покоя автономных систем

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1}$$

с обычными предположениями о f (удовлетворяет условиям ТК—П в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, точнее в $\mathbb{R} \times \Omega$). Если $x = \varphi(t)$ —

решение (1), определенное вплоть до $+\infty$, то для исследования его устойчивости нужно изучить поведение возмущений, описываемых задачей Коши

$$\frac{dz}{dt} = f(\varphi(t)+z) - f(\varphi(t)); \qquad z(0) = \eta.$$

Эта система уже неавтономная, что затрудняет исследование. Поэтому ограничимся случаем, когда наше решение есть точка покоя: $\varphi(t) \equiv a$, $f(a) = 0$. Тогда

$$\frac{dz}{dt} = f(a+z) =: f_1(z), \tag{2}$$

т. е. проблема сводится к устойчивости 0 точки покоя автономной системы (2). Таким образом, сразу можно предполагать, что исследуется 0 решение (1). Итак, пусть $f(0) = 0$, f удовлетворяет условиям ТК—П в окрестности нуля. Нам потребуется следующее понятие:

Определение. Пусть $V \in C^1(B(0,R))$. *Производной* V *в силу* (1) называется величина $DV \equiv f \cdot \nabla V$. □

Смысл названия ясен: если φ — решение (1), проходящее через точку x, то
$\frac{d}{dt}V(\varphi(t))|_{\varphi(t)=x} = DV(\varphi(t))|_{\varphi(t)=x} = DV(x)$. Напомним, что $V \in C^1(B(0,R))$ называется ФЛ для (1), если V положительно определена, т. е. $\mathrm{sgn} V(x) = \mathrm{sgn}|x|$, и $DV \leqslant 0$ в $B(0,R)$. Мы доказали в § 4 части 1, что существование ФЛ обеспечивает продолжимость до $+\infty$ всех решений (1), начинающихся в окрестности нуля, т. е. тогда выполнен п. 1 определения устойчивости. Оказывается, что тогда выполнен и п. 2.

Теорема. (Ляпунова об устойчивости). Если существует ФЛ для (1), то 0 решение устойчиво.

Доказательство. Зададим $\varepsilon \in (0, R)$. Обозначим $\alpha = \min\limits_{S(0,\varepsilon)} V > 0$. Найдется $\delta \in (0, \varepsilon)$ такое, что $V < \alpha$ в $B(0, \delta)$. Пусть $\xi \in B(0, \delta)$. Докажем, что НР $\varphi(\cdot, \xi)$ задачи $\varphi(0, \xi) = \xi$ для уравнения (1) удовлетворяет $|\varphi(t, \xi)| < \varepsilon$ при всех $t > 0$ (это и есть устойчивость). Допустим, что это не так. Ввиду $|\varphi(0, \xi)| = |\xi| < \delta < \varepsilon$ это значит, что найдется первая точка $t_1 > 0$, где $\varphi(t_1, \xi) \in S(0, \varepsilon)$, так что левее t_1 верно $|\varphi(t, \xi)| < \varepsilon < R$. Но тогда на $(0, t_1)$ имеем $\dfrac{d}{dt}V(\varphi(t, \xi)) = DV(\varphi(t, \xi)) \leqslant 0$, так что $V(\varphi(t_1, \xi)) \leqslant V(\varphi(0, \xi)) = V(\xi) < \alpha$ — противоречие. $\square$

Замечание. При условии $z \in B(0, R)$ верно $[z \to 0] \iff [V(z) \to 0]$. В самом деле, «$\Longrightarrow$» очевидно, а если $z \not\to 0$, т. е. существуют $z_k \in B(0, R) \setminus B(0, \delta)$, то можно считать $z_k \to z_* \in B(0, R) \setminus B(0, \delta)$, но тогда $V(z_*) > 0$, т. е. $V(z) \not\to 0$. $\square$

Следствие. [z отделено от нуля] $\iff$ [$V(z)$ отделено от нуля]. $\square$

Ввиду сделанного замечания тривиальной становится

Теорема. (Ляпунова об асимптотической устойчивости). Если существует ФЛ для (1), которая обладает свойством $DV < 0$ вне нуля, то 0 решение асимптотически устойчиво.

Доказательство. Ввиду первой теоремы остается показать, что при $\xi \in B(0, \varepsilon)$ верно $\varphi(t, \xi) \to 0$ при $t \to +\infty$, что ввиду Замечания эквивалентно $V(\varphi(t, \xi)) \to 0$. Допустим, это не так, т. е. для некоторого ξ (в любом малом шаре найдется такое ξ) верно $V(\varphi(t,\xi)) \not\to 0$, тогда $V(\varphi(t,\xi)) \searrow V_0 > 0$,

$\left[\begin{array}{l}\text{т. к. ввиду устойчивости при всех } t \text{ имеем} \\ \varphi(t,\xi) \in B(0,R), \text{ а значит } \dfrac{d}{dt}V(\varphi(t,\xi)) \leqslant 0\end{array}\right]$

что ввиду Следствия из Замечания влечет $\varphi(t,\xi) \in B(0,R) \setminus B(0,\delta)$, а значит $\dfrac{d}{dt}V(\varphi(t,\xi)) = DV(\varphi(t,\xi)) \leqslant \max\limits_{B[0,R]\setminus B(0,\delta)} DV = -\gamma < 0$, что невозможно, т. к. $V(\varphi(t,\xi))$ ограничена снизу при $t \to +\infty$. $\square$

[Т. е. здесь мы несколько раз «крутим» одну и ту же оценку — ср. доказательство т. Четаева ниже.]

Для доказательства неустойчивости, если она имеет место, достаточно указать для любого шара $B(0,\delta)$ хотя бы одну траекторию, начинающуюся в нем и выходящую из фиксированного шара $B(0,\varepsilon_0)$. Таким образом, достаточно выделить хотя бы некоторую часть окрестности нуля, где траектории «уходят от нуля». Точная формулировка такова:

Определение. Пусть U — окрестность нуля (т. е. область, содержащая 0), область $\Pi \subset U$, $0 \in \partial\Pi$. Функция $V \in C^1(\Pi) \cap C(\overline{\Pi})$ называется *функцией Четаева* для (1), если $V > 0$ и $DV > 0$ в Π; и $V = 0$ на $\partial\Pi \cap U$.

Теорема. (Четаева). Если (1) имеет функцию Четаева, то 0 решение неустойчиво.

Доказательство. Фиксируем произвольно меньшую окрестность нуля U_1, т. е. $\overline{U}_1 \subset U$. Возьмем любое $\xi \in \Pi \cap U_1$. Решение $\varphi(t,\xi)$ лежит в $\Pi \cap U_1$ при малых t.

Пока $\varphi(t,\xi) \in \Pi \cap U_1$, мы можем сформулировать следующую цепочку утверждений: $\dfrac{d}{dt} V(\varphi(t,\xi)) = DV(\varphi(t,\xi)) > 0$, так что $V(\varphi(t,\xi)) > V(\xi) = \mathrm{const} > 0$, а значит $\varphi(t,\xi) \in F = \left\{\, x \in \overline{\Pi \cup U_1} \mid V(x) \geqslant V(\xi) \,\right\}$ — это компакт, и очевидно $F \subset \Pi$,

[т. к. для всех $x \in F$ верно $x \in \overline{U}_1 \subset U$, а тогда невозможно $x \in \partial\Pi$, а значит $x \in \Pi$]

поэтому

[теперь то же неравенство применяем по второму заходу]

$\dfrac{d}{dt} V(\varphi(t,\xi)) \geqslant \min\limits_F DV = \gamma = \mathrm{const} > 0$, что окончательно дает $V(\varphi(t,\xi)) \geqslant V(\xi) + \gamma t$, но $V(\varphi(t,\xi)) \leqslant \max\limits_F V$. Значит,

$$t \leqslant t_*(\xi) = \frac{\max\limits_F V - V(\xi)}{\min\limits_F DV} \geqslant 0, \tag{3}$$

$$F = \left\{\, x \in \overline{\Pi \cup U_1} \mid V(x) \geqslant V(\xi) \,\right\}.$$

Итак, мы показали включение «$(\varphi(t,\xi) \in \Pi \cap U_1) \implies (t \leqslant t_*(\xi))$». По ТПК точка ИК $(t, \varphi(t,\xi))$ покидает компакт $[0, t_*(\xi)] \times \overline{\Pi \cup U_1}$. Отсюда легко заключить, что $\varphi(t,\xi)$ покидает $\Pi \cap U_1$ за время, не большее $t_*(\xi)$ — найдется первый момент $t_1 \leqslant t_*(\xi)$, когда $\varphi(t_1,\xi) \in \partial\Pi$ или $\varphi(t_1,\xi) \in \partial U_1$.

Упражнение. Убедиться — нужно аккуратно обосновать существование решения до необходимого момента времени. □

Но поскольку

$$V(\varphi(t_1,\xi)) = \lim_{t \to t_1} V(\varphi(t,\xi)) \geqslant V(\xi) + \gamma t_1 > 0,$$

то именно $\varphi(t_1, \xi) \notin U_1$. Итак, при любых $\xi \in \Pi$, сколь угодно близких к нулю, соответствующая траектория покидает U_1 (и даже есть оценка времени, конечно же зависящая от ξ), что и требовалось. $\square$

Следствие. (Теорема Ляпунова о неустойчивости). Если существует функция $V \in C^1(B(0, R))$ такая, что $\operatorname{sgn} V(x) = \operatorname{sgn}|x|$, и $DV > 0$ в $B(0, R) \setminus \{0\}$, то 0 решение системы (1) неустойчиво.

Доказательство. Положим $U = B(0, R)$, $\Pi = B(0, R) \setminus \{0\}$, тогда V есть функция Четаева. $\square$

Теорема Ляпунова о неустойчивости описывает случай, когда 0 точка покоя *вполне неустойчива*, т. е. все траектории покидают некоторую фиксированную окрестность нуля. Ясно, что в общем случае неустойчивость может не быть вполне неустойчивостью, тогда и нужна теорема Четаева (с нетривиальной Π). Может возникнуть ситуация, когда часть траекторий «уходит от нуля», а часть — наоборот (стремится к нулю или не удаляется от него). Пример: ОТ типа «седло». В связи с этим возникает следующее понятие.

Определение. Точка 0 *условно устойчива* (*условно асимптотически устойчива*) *относительно многообразия* $S \ni 0$, если $\forall \varepsilon\ \exists \delta$: для всех $\xi \in B(0, \delta) \cap S$ верно $|\varphi(t, \xi)| < \varepsilon$

при $t \to +\infty$ (еще и стремится к нулю). $\square$

[В случае устойчивости интервал существования автоматически доходит до $+\infty$ ввиду априорной оценки — впрочем, это можно было заметить и в общем определении устойчивости, так что п. 1 в исходном определении «лишний», и мы его добавили только для лучшего восприятия.]

[В этом смысле логически (но не методически) лишним было и доказывать (в § 4 части 1) глобальное существование решений при наличии ФЛ.]

Ясно, что условная устойчивость (асимптотическая устойчивость) относительно S означает, что $S \subset S_1$, где S_1 — устойчивое (асимптотически устойчивое) инвариантное многообразие.

[Инвариантность многообразия понимается относительно отображения $x(t_0) \mapsto x(t)$ по закону (1), т. е. инвариантное многообразие — это такое многообразие, что все траектории, начинающиеся на нем, не покидают его. Также естественным образом трактуются понятия: устойчивое и асимптотически устойчивое инвариантное многообразие, т. е. соответствующие свойства из определений устойчивости и асимптотической устойчивости соответственно должны выполняться для траекторий, лежащих на многообразии; другими словами, точка 0 устойчива или асимптотически устойчива относительно рассматриваемого многообразия.]

Очевидно, именно S_1, «натянутое» на S (т. е. «инвариантная оболочка», минимальное инвариантное многообразие, содержащее S), является естественным инструментом для анализа условной устойчивости относительно S.

Пример. $f(x) = Ax$. Система $x' = Ax$ имеет решения $\varphi(t, \xi) = e^{tA}\xi$. Как ясно из предшествующего замечания, нужно выделить инвариантные многообразия (относительно e^{tA}, что значит инвариантные многообразия относительно A — они будут линейными). Если ξ принадлежит ИП, порожденному клеткой J, или натянутому на несколько СВ, то $\varphi(t, \xi)$ останется в этом ИП, а именно, если α и β — СВ и ПВ, то $e^{tA}\alpha = e^{t\lambda}\alpha$, $e^{tA}\beta = e^{t\lambda}\beta + te^{t\lambda}\alpha$, и т. д. Поэтому легко сформулировать исчерпывающим образом все случаи условных устойчивости и асимптотической устойчивости. Для этого обозначим:

1. $a_1, \dots a_k$ — СВ и ПВ, соответствующие $\mathrm{Re}\lambda(A) < 0$;
2. $b_1, \dots b_m$ — СВ, соответствующие $\mathrm{Re}\lambda(A) = 0$;
3. $c_1, \dots c_r$ — ПВ, соответствующие $\mathrm{Re}\lambda(A) = 0$;
4. $d_1, \dots d_l$ — СВ и ПВ, соответствующие $\mathrm{Re}\lambda(A) > 0$;

$k + m + r + l = n$ (где $\dim A = n \times n$), m — число клеток, соответствующих $\mathrm{Re}\lambda(A) = 0$. Группы 1, 2, 2+3 и 4 порождают свои ИП (часть из них, возможно, пусты), все вместе они образуют базис в $\mathbb{R}^n$. Если теперь S — любое линейное многообразие, содержащее 0 (т. е. подпространство), то оно натянуто на часть указанных векторов. Тогда:

1. если S натянуто только на $\{a_i\}$, то 0 решение условно асимптотически устойчиво относительно S (экспоненциально);

2. если S натянуто только на $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$, то 0 решение условно устойчиво относительно S;

3. если S натянуто только на $\{a_i\}$, $\{b_j\}$ и $\{c_q\}$, и хотя бы один c_q присутствует, то 0 решение условно неустойчиво относительно S степенным образом;

4. если S содержит хотя бы один d_q, то 0 решение экспоненциально условно неустойчиво относительно S. $\square$

Доказанные теоремы являются лишь основой, т. к. не дают никакого алгоритма построения ФЛ или функции Четаева. Укажем некоторые случаи, когда такое построение может быть проведено в достаточно «явном» виде, и тем самым возможен полный ответ на вопрос об устойчивости 0 решения системы (1).

Остановимся сначала на случаях, когда имеет место устойчивость. Оказывается, тогда всегда можно построить ФЛ, т. е. существование ФЛ есть критерий устойчивости. Доказывать этот *последний* факт мы в общем случае не будем, а сделаем это только для линейных систем с постоянными коэффициентами (но само построение ФЛ распространим и на «родственные» нелинейные случаи), указав алгоритм построения V и тем самым дав обещанную альтернативу спектральным критериям. В общем случае утверждение о существовании ФЛ не несет особой пользы, т. к. не дает алгоритма построения ФЛ. Но оказывается, что для систем $x' = Ax$ можно доказать эквивалентность трех утверждений:

A. 0 решение асимптотически устойчиво;

B. все $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0$;

C. существует ФЛ из теоремы об асимптотической устойчивости;

что мы сейчас и сделаем, а также дадим дополнения о случае устойчивости без асимптотической устойчивости. Мы ужé доказали A$\Longleftrightarrow$B в § 2, а также C$\Longrightarrow$A выше в § 3. Сейчас мы займемся B$\Longleftrightarrow$C, причем покажем, что ФЛ может быть построена в специальном — квадратичном — виде: $V(x) = (Hx, x)$, где H — постоянная матрица (можно считать $H^* = H$). Ценность этого факта в том, что (дается ответ на оба вопроса, поставленных в конце § 2, т. е.):

1. построение матрицы H в приложениях проще, чем вычисление $\lambda_j(A)$, и дает «явную оценку устойчивости»;
2. построенная квадратичная форма (Hx, x) играет важную роль в распространении результатов на нелинейный случай.

Для того, чтобы $V(x) = (Hx, x)$ была ФЛ для системы $x' = Ax$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1. $H^* = H > 0$, т. к. именно в этом случае $\mathrm{sgn}(Hx, x) = \mathrm{sgn}|x|$;
2. $HA + A^*H = -C$, где $C^* = C \geqslant 0$ или $C^* = C > 0$ (для устойчивости и асимптотической устойчивости соответственно), т. к.
$$\frac{d}{dt}(H\varphi, \varphi) = (HA\varphi, \varphi) + (H\varphi, A\varphi) = ((HA + A^*H)\varphi, \varphi)$$

должна быть знакоопределенной формой.

Таким образом, нам следует решить *матричное уравнение Ляпунова*

$$HA + A^*H = -C \tag{4}$$

в классе $H^* = H > 0$ с какой-нибудь знакоопределенной $C^* = C$. Если такие H и C найдутся, то

$$h_*|x|^2 \leqslant (Hx, x) \leqslant h^*|x|^2, \qquad c_*|x|^2 \leqslant (Cx, x) \leqslant c^*|x|^2,$$

где $h_* = \lambda_{\min}(H) > 0$, $h^* = \lambda_{\max}(H) < +\infty$, и аналогично c_*, c^*. Сформулируем связь между (4) и устойчивостью для $x' = Ax$ в виде 3 лемм:

[Логически Лемма 1 лишняя, т. к. ее первая часть следует из теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, а вторая часть — из теоремы Ляпунова об устойчивости и к тому же все равно уточняется в Лемме 2, но все же докажем для наглядности.]

Лемма 1. Если для некоторой $C^* = C > 0$ существует решение H уравнения (4), то все $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0$, а если $C \geqslant 0$, то $\mathrm{Re}\lambda_j(A) \leqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим любое СЧ λ матрицы A и соответствующий СВ v. Тогда

$$-(Cv, v) = ((HA + A^*H)v, v) = (H\lambda v, v) + (Hv, \lambda v) =$$

$$= (\overline{\lambda} + \lambda)(Hv, v) = 2(\mathrm{Re}\lambda)(Hv, v).$$

Если $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$, то получаем

$$0 = (Cv, v) + 2(\mathrm{Re}\lambda)(Hv, v) \geqslant (c_* + 2(\mathrm{Re}\lambda)h_*)|v|^2,$$

т. е.

$$c_* + 2(\mathrm{Re}\lambda)h_* \leqslant 0. \tag{5}$$

Если $C > 0$, то $c_* > 0$, и (5) невозможно, т. е. таких $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$ не существует. Если же $C \geqslant 0$, то $c_* \geqslant 0$, и из (5) получаем $\mathrm{Re}\lambda \leqslant 0$, т. е. $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$ могут быть только на мнимой оси. □

Следствие. Если существует решение (4) с $C > 0$ (например, $C = E$), то 0 решение системы $x' = Ax$ асимптотически устойчиво. □

[Т. е. еще раз доказали С$\Longrightarrow$А в схеме выше (в классе квадратичных ФЛ).]

Пока из Леммы 1 ничего не следует при $C \geqslant 0$, т. к. ничего не известно о клетках, но этот случай тоже простой:

[Логически Лемма 2 лишняя, т. к. она следует из теоремы Ляпунова об устойчивости, но для наглядности докажем.]

Лемма 2. Если для некоторой $C \geqslant 0$ существует решение (4), то 0 решение системы $x' = Ax$ устойчиво.

Доказательство. Как доказано выше, для любого решения φ верно $\dfrac{d}{dt}(H\varphi, \varphi) = -(C\varphi, \varphi) \leqslant 0$, т. е.

$$h_*|\varphi(t)|^2 \leqslant (H\varphi(t), \varphi(t)) \leqslant (H\varphi(0), \varphi(0)) \leqslant h^*|\varphi(0)|^2,$$

откуда $|\varphi(t)| \leqslant \sqrt{h^*/h_*}|\varphi(0)|$. Здесь видно, для чего, в частности, все же нужна Лемма 2 — получается явная оценка устойчивости в терминах H. □

[Теперь докажем В$\Longrightarrow$С в схеме выше (в классе квадратичных ФЛ).]

Если H — решение (4), и все $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0$ (пусть $\mathrm{Re}\lambda_j(A) \leqslant -2\varkappa < 0$), то по Гельфанду—Шилову $|e^{tA}| \leqslant C_1 e^{-\varkappa t}$, и для любого решения x системы $x' = Ax$, т. е. $x(t) = e^{tA}\xi$, имеем $-\dfrac{d}{dt}(Hx, x) = (Cx, x)$, откуда

$$(H\xi, \xi) = \int\limits_0^{+\infty} (Ce^{tA}\xi, e^{tA}\xi)dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} (e^{tA^*}Ce^{tA}\xi, \xi)dt = \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{tA^*}Ce^{tA}dt\, \xi, \xi \right)$$

(интегралы сходятся ввиду оценки на $|e^{tA}|$). Поскольку здесь ξ любое, то необходимо получаем, что H обязана иметь вид

$$H = \int\limits_0^{+\infty} e^{tA^*}Ce^{tA}dt. \qquad (6)$$

Теперь мы можем доказать утверждение, обратное к Лемме 1 и Следствию из нее в части асимптотической устойчивости.

Лемма 3. Если все $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0$ (т. е. 0 решение $x' = Ax$ асимптотически устойчиво), то для любой $C^* = C > 0$ существует единственное решение $H^* = H > 0$ уравнения (4), и оно дается формулой (6).

Доказательство. Надо проверить, что H из (6) удовлетворяет всем условиям. $H^* = H$ очевидно. Далее, для любого $v \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$(Hv, v) = \int\limits_0^{+\infty} (Ce^{tA}v, e^{tA}v)dt \geqslant c_* \int\limits_0^{+\infty} |e^{tA}v|^2 dt \geqslant$$

$$\left[\text{заметим, что } |v| = |e^{-tA}e^{tA}v| \leqslant |e^{-tA}|\cdot|e^{tA}v| \leqslant e^{t|A|}|e^{tA}v|\right]$$

$$\geqslant c_* \int\limits_0^{+\infty} e^{-2t|A|}|v|^2 dt = \frac{c_*}{2|A|}|v|^2.$$

Наконец,

$$HA + A^*H = \int\limits_0^{+\infty} (e^{tA^*}Ce^{tA}A + A^*e^{tA^*}Ce^{tA})dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} (e^{tA^*}C(e^{tA})' + (e^{tA^*})'Ce^{tA})dt = e^{tA^*}Ce^{tA}\ \Big|_0^{+\infty} = -C.$$

Единственность мы ужé фактически доказали, т. к. формула (6) была получена по необходимости, но можно в качестве альтернативного способа сказать, что поскольку линейная алгебраическая система (4) для компонент H оказалась разрешимой при любой правой части, то она обязана быть однозначно разрешимой. □

[Здесь полезно вспомнить предшествующую логику §§ 2,3 для лучшего восприятия «финишной прямой».]

Тем самым, в классе квадратичных ФЛ для систем $x' = Ax$ мы полностью обосновали эквивалентность A$\Longleftrightarrow$B$\Longleftrightarrow$C (см. выше), причем оказалось достаточно рассматривать $C = E$, и доказали достаточность (4) (при $C \geqslant 0$) для устойчивости (т. е. для соответствующих утверждений имеет место схема C$'\Longrightarrow$A$'\Longleftrightarrow$B$'$, что, впрочем, и так было ясно ввиду теоремы Ляпунова об устойчивости).

Вернемся теперь к исследованию устойчивости 0 точки покоя произвольной системы вида (1) и укажем случаи, когда построение ФЛ или функции Четаева возможно в явном виде, причем они связаны с соответствующей линеаризованной системой. Аналогично классификации типов ОТ, здесь работает принцип линеаризации (об исследовании устойчивости по первому (линейному) приближению):

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x=0} x + \psi(x), \tag{7}$$

где $\dfrac{|\psi(x)|}{|x|} \to 0$ при $x \to 0$, если только $f \in C^1$ в окрестности нуля (даже достаточно дифференцируемости в нуле). Рассмотрим линеаризованную систему:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x=0}. \tag{8}$$

Теорема. (Ляпунова об устойчивости по первому (линейному) приближению). Если 0 решение системы (8) асимптотически устойчиво, то это же верно и для (7).

Доказательство. По условию, все $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0$, а значит найдется решение $H = H^* > 0$ уравнения (4) с $C = E$, так что $V(x) = (Hx, x)$ есть ФЛ для (8). Покажем, что она есть ФЛ и для (7). Остается проверить лишь последнее свойство ФЛ. Имеем:

$$DV(x) = (Ax + \psi(x)) \cdot \nabla V \overset{\text{обозн.}}{=}$$

$$\overset{\text{обозн.}}{=} D_A V(x) + D_\psi V(x) \overset{\text{знаем}}{=} -|x|^2 + D_\psi V(x).$$

Но (здесь y — решение системы $y' = \psi(y)$)

$$D_\psi V(y) = \frac{d}{dt}(Hy(t), y(t)) =$$

$$= (H\psi(y(t)), y(t)) + (Hy(t), \psi(y(t))) = 2\mathrm{Re}(Hy, \psi(y)).$$

В итоге

$\left[\text{Легко проверить, что } |H| = \max\{|h_*|, |h^*|\}, \text{ где } |\cdot| \text{ векторов — евклидов.}\right]$

$$DV(x) = -|x|^2 + 2\mathrm{Re}(Hx, \psi(x)) \leqslant -|x|^2 + 2|H|\cdot|x|\cdot|\psi(x)| < 0,$$

если $x \neq 0$ и $|\psi(x)| < \dfrac{|x|}{2|H|}$, что имеет место в области вида $B(0, \delta) \setminus \{0\}$, где δ достаточно мало. По теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости получаем требуемое. $\square$

Замечание. Как видно из доказательства, нам потребовалось даже не $\dfrac{|\psi(x)|}{|x|} \to 0$, а лишь $|\psi(x)| \leqslant \varepsilon|x|$, где ε достаточно мало (чтобы «не испортить спектр A» — как в теореме о стабилизирующихся $A(t)$). $\square$

Замечание для преподавателя. И вообще, обе теоремы сливаются в более глобальное целое, если рассматривать функции Ляпунова от (t, x) и доказать последнюю теорему для них, т. е. для $\psi = \psi(t, x)$. Тогда та теорема будет следовать из этой, нужно будет положить $\psi(t, x) = (A(t) - A_0)x$.

Естественно ожидать, что другой невырожденный случай — когда имеются $\mathrm{Re}\lambda_j(A) > 0$ — также допускает исследование по первому приближению.

Теорема. (Ляпунова о неустойчивости по первому (линейному) приближению). Если 0 решение системы (8) экспоненциально неустойчиво, то это же верно и для (7).

Доказательство. Пусть $A = TJT^{-1}$, $J = \mathrm{diag}\{A_+, A_-\}$, $\mathrm{Re}\lambda_j(A_+) > 0$, $\mathrm{Re}\lambda_j(A_-) \leqslant 0$, возможно $A_- = \emptyset$, но в любом случае $A_+ \neq \emptyset$. Сделаем замену СК: $x = Tz$, тогда

$z' = Jz + \psi_1(z)$, где $\psi_1(z) = T^{-1}\psi(Tz)$ удовлетворяет тому же условию малости. Найдем $\delta > 0$ так, что $\mathrm{Re}\lambda_j(A_+) \geqslant 2\delta > 0$ и обозначим $A_1 = \delta E - A_+$, $A_2 = A_- - \delta E$. Тогда $\mathrm{Re}\lambda_j(A_{1,2}) \leqslant -\delta$. Решим уравнения Ляпунова $H_k A_k + A_k^* H_k = -E$, $k = 1, 2$, и обозначим $H = \mathrm{diag}\{H_1, -H_2\}$. Квадратичная форма $V(z) = (Hz, z)$, вообще говоря, не знакоопределена, и ей соответствует непустой конус K,

[напомним, что конусом называется множество, инвариантное относительно умножения на положительные скаляры]

в котором она положительна (возможно, $K = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$). Покажем, что V есть функция Четаева для (7) с $U = B(0, \varepsilon)$, $\Pi = K \cap B(0, \varepsilon)$ при достаточно малом ε. Неочевидно только свойство $DV > 0$ в Π.

Имеем:

$$HJ + J^*H = \mathrm{diag}\{H_1A_+ + A_+^*H_1, -H_2A_- - A_-^*H_2\} =$$

$$= \mathrm{diag}\{2\delta H_1 - H_1A_1 - A_1^*H_1, -2\delta H_2 - H_2A_2 - A_2^*H_2\} = 2\delta H + E,$$

поэтому

$$DV(z) = ((E + 2\delta H)z, z) + 2\mathrm{Re}(Hz, \psi_1(z)) \geqslant$$

$$\geqslant |z|^2 + 2\delta V(z) - 2|H| \cdot |z| \cdot |\psi_1(z)| \geqslant 2\delta V(z)$$

в шаре $B(0, \varepsilon)$, так что $DV \geqslant 2\delta V > 0$ в Π. По теореме Четаева получаем требуемое. $\square$

Замечание. Интересно в данном случае воспроизвести (продублировать) рассуждения из доказательства теоремы

Четаева, т. к. они упрощаются и конкретизируются.

$\left[\text{тем более что исторически т. Четаева все-таки появилась позже как обобщение теории Ляпунова, а не как одна из основ для нее}\right]$

Возьмем, например, $z(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \in B(0, \varepsilon)$, $\dim\alpha = \dim A_+$, тогда $V(z(0)) = (H_1\alpha, \alpha) > 0$. Пока $z(t) \in B(0, \varepsilon)$, верно следующее: $DV(z) \geqslant 2\delta V(z) \Longrightarrow V(z(t)) \geqslant V(z(0))e^{2\delta t} \Longrightarrow$ $(H_1\alpha, \alpha)e^{2\delta t} \leqslant (Hz(t), z(t)) \leqslant h^*|z|^2 \leqslant h^*\varepsilon^2 \Longrightarrow$ $t \leqslant \dfrac{1}{2\delta}(\ln h^* + 2\ln\varepsilon - \ln(H_1\alpha, \alpha))$. Таким образом, за конечное время траектория, начинающаяся в точке $z(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$, т. е. $x(0) = T\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \in$(ИП, соответствующее $\mathrm{Re}\lambda > 0$), выходит из $B(0, \varepsilon)$; время выхода — порядка $\ln\dfrac{1}{|x(0)|}$. $\square$

$\left[\text{В отличие от доказательства теоремы Четаева, здесь мы для определенности берем не любое } x(0) \in \Pi\text{, хотя это несущественно, достаточно } V(z(0)) > 0\text{, т. е. } x(0) \in K.\right]$

Замечание. В этой теореме, опять же, нужно было лишь $|\psi(x)| \leqslant \varepsilon|x|$ с достаточно малым ε.

Замечание. Можно доказать, что механизмы условной устойчивости также распространяются с линейного случая на нелинейный, а именно: в условиях последней теоремы, если часть $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0$ (k штук), то 0 решение условно асимптотически устойчиво относительно некоторого (криволинейного) k-мерного инвариантного многообразия, касающегося

ИП матрицы A, порожденного этими λ_j. $\square$

Теоремы об устойчивости по первому приближению ничего не говорят о случае, когда все $\mathrm{Re}\lambda_j(A) \leqslant 0$, но имеются $\mathrm{Re}\lambda_j(A) = 0$ (т. е. для линеаризованной системы нет асимптотической устойчивости, но есть устойчивость или степенная неустойчивость). Оказывается, в этом случае может быть любая ситуация:

Пример. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix}$. Здесь $\lambda_{1,2} = \pm i$ — линеаризованная система устойчива, но не асимптотически устойчива. Рассмотрим $V(x) = |x|^2$. Тогда

$$DV(x) = 2x_1(\gamma x_1^3 + x_2) + 2x_2(\gamma x_2^3 - x_1) = 2\gamma(x_1^4 + x_2^4).$$

Случай 1. $\gamma > 0 \Longrightarrow$ неустойчивость по теореме Ляпунова о неустойчивости;

Случай 2. $\gamma < 0 \Longrightarrow$ асимптотическая устойчивость по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости;

Случай 3. $\gamma = 0 \Longrightarrow$ устойчивость по теореме Ляпунова об устойчивости (это и сразу было ясно, т. к. тогда система линейная). $\square$

Упражнение. Показать, что в случае 2 устойчивость степенная: $x_1^2 + x_2^2 \leqslant \dfrac{1}{C + (-\gamma)t}$. $\square$

Если система (1) нелинейная, и первое приближение ничего не дает (т. е. нет экспоненциальных устойчивости или неустойчивости), то надо использовать другие методы, например, строить ФЛ или функцию Четаева, вообще говоря, неквадратичные. Здесь нет единого метода, все зависит от специфики системы (этот вопрос традиционно отрабатывается на практических занятиях, см. например [25]). В теореме Четаева возникает та дополнительная сложность, что приходится сразу строить пару (V, Π), но эта теорема в случае наличия условной устойчивости незаменима.

Пример. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} x_2^3 + x_1^5 \\ x_1^3 + x_2^5 \end{bmatrix}$. Видно, что в I четверти поле скоростей уводит от нуля, так что надо доказывать неустойчивость, и в качестве Π пробовать брать
$\{x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Самая простая V, положительная в Π и зануляющаяся на границе внутри шара, есть $V = x_1 x_2$. Проверка показывает, что она в самом деле годится. □

Замечание. Методы исследования устойчивости могут помочь при исследовании ФПт автономных систем. Так, если в плоском случае линеаризованная система имеет центр (т. е. $\mathrm{Re}\lambda_j(A) = 0$), то отличить центр от фокуса для исходной системы можно, исследовав 0 решение на асимптотическую устойчивость. Если оно асимптотически устойчиво, то это фокус. □

§ 4. Первые интегралы ОДУ; квазилинейные УЧП I порядка

Рассмотрим систему I порядка
$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$
где f удовлетворяет условиям ТК—П в области $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$; более того, потребуем именно чтобы $\dfrac{\partial f}{\partial x} \in C(B)$.

Определение. Функция $u \in C^1(\Omega)$, где Ω — подобласть в B, называется первым интегралом (ПИ) системы (1) в Ω, если для любого решения $x = \varphi(t)$ системы (1) верно $u(t, \varphi(t)) = \text{const}$ при $t \in (\alpha, \beta)$, где $(t, \varphi(t)) \in \Omega$ при $t \in (\alpha, \beta)$. $\square$

[Важно, что интервал (α, β) связный!]

Замечание для преподавателя. Нередко тут еще добавляют требование $u \not\equiv \text{const}$, но это некорректно и неестественно, т. к. тогда все критерии для ПИ ниже требуют скрупулезных оговорок, чего при этом не делают и в итоге сами себе противоречат. Лучше отдельно ввести понятие «нетривиальный ПИ», что и делается далее.

Для ПИ имеется критерий:

Утверждение. Пусть $u \in C^1(\Omega)$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:

1) u есть ПИ (1) в Ω.

2) u удовлетворяет в Ω УЧП

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(t, x) \cdot \nabla_x u = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Для любого решения $x = \varphi(t)$ системы (1) имеем:

$$\frac{d}{dt} u(t, \varphi(t)) = u_t(t, \varphi(t)) + \nabla_x u(t, \varphi(t)) \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} =$$

$$= (u_t + f \cdot \nabla_x u)(t, \varphi(t)).$$

Если верно (2), то из $(t, \varphi(t)) \in \Omega$ при $t \in (\alpha, \beta)$ следует $\dfrac{d}{dt} u(t, \varphi(t)) = 0$ при $t \in (\alpha, \beta)$, что дает $u(t, \varphi(t)) = \text{const}$.

Наоборот, если u есть ПИ, то, выбрав произвольно $(t_0, \xi) \in \Omega$ и взяв в качестве φ решение задачи Коши $\varphi(t_0) = \xi$, получим

$$0 = \frac{d}{dt} u(t, \varphi(t)) \Big|_{t=t_0} = (u_t + f \cdot \nabla_x u)(t_0, \xi). \qquad \square$$

[Т. е. из 2) следует 1) очевидно, а для обратного перехода следует заметить, что обращение левой части (2) в нуль на любой ИК влечет обращение в нуль всюду, т. к. ИК заполняют всю область.]

Этот критерий далее будет использован для решения (2), т. е. поиск ПИ нужен, в частности, для этого. Другое применение ПИ — это получение информации о решениях (1).

[В связи с этим полезно вспомнить происхождение термина «ПИ» (в связи с устаревшим термином «интегрировать ДУ»), также полезно вспомнить об n степенях свободы для (1).]

Для этого пригодны, естественно, только нетривиальные ПИ, т. е. такие, что $u \not\equiv \mathrm{const}$ в Ω. Интуитивно ясно, что наличие таких ПИ позволяет «исключить часть неизвестных» и понизить число уравнений в (1). Строго эта идея будет обоснована ниже.

Замечание. Если $u_1, \ldots, u_k$ — ПИ (1) в Ω, то для любой $F \in C^1$(обл. значений $\{u_j\}$ в Ω) величина $v = F(u_1, \ldots, u_k)$ — тоже ПИ (1) в Ω. Это очевидно, т. к. $v \in C^1(\Omega)$ и постоянна на решениях в Ω. $\square$

Однако ясно, что получение новых ПИ по формуле $v = F(u_1, \ldots, u_k)$ не дает новую информацию о решениях (1), даже если v — нетривиальный ПИ (что, в частности, подразумевает $F \not\equiv \mathrm{const}$, хотя этого недостаточно). Чтобы четко сформулировать, какие ПИ «новые», а какие нет, требуется ввести следующие понятия:

Определение. ПИ $u_1, \ldots, u_k$ (функционально) *независимы в точке* $(t_0, x_0) \in \Omega$, если их матрица Якоби $\dfrac{\partial u}{\partial(t,x)}$ имеет полный ранг (т. е. k) в точке (t_0, x_0). $\square$

[Не путать с линейной независимостью, которая есть более слабое свойство! Так, в частности, линейная размерность множества функций в $\mathbb{R}^n$ равна $\aleph_0$, а «функциональная размерность» равна n.]

Из определения ясно, что независимость в точке эквивалентна независимости в некоторой ее окрестности. Из анализа известно, что независимость в указанном смысле эквивалентна тому, что никакая из u_j не может быть выражена как функция от остальных в окрестности (t_0, x_0). Очевидно, что если ПИ $u_1, \ldots, u_k$ независимы, то они все нетривиальны (хотя обратное неверно — контрпример как раз в Замечании выше).

Нам хотелось бы построить как можно больше независимых ПИ (1), чтобы получить максимальную информацию о решениях. Возникает естественный вопрос о числе независимых ПИ (т. е. «функциональной размерности» множества ПИ). На него отвечает

Теорема. Пусть $(t_0, x_0) \in B$. Тогда:

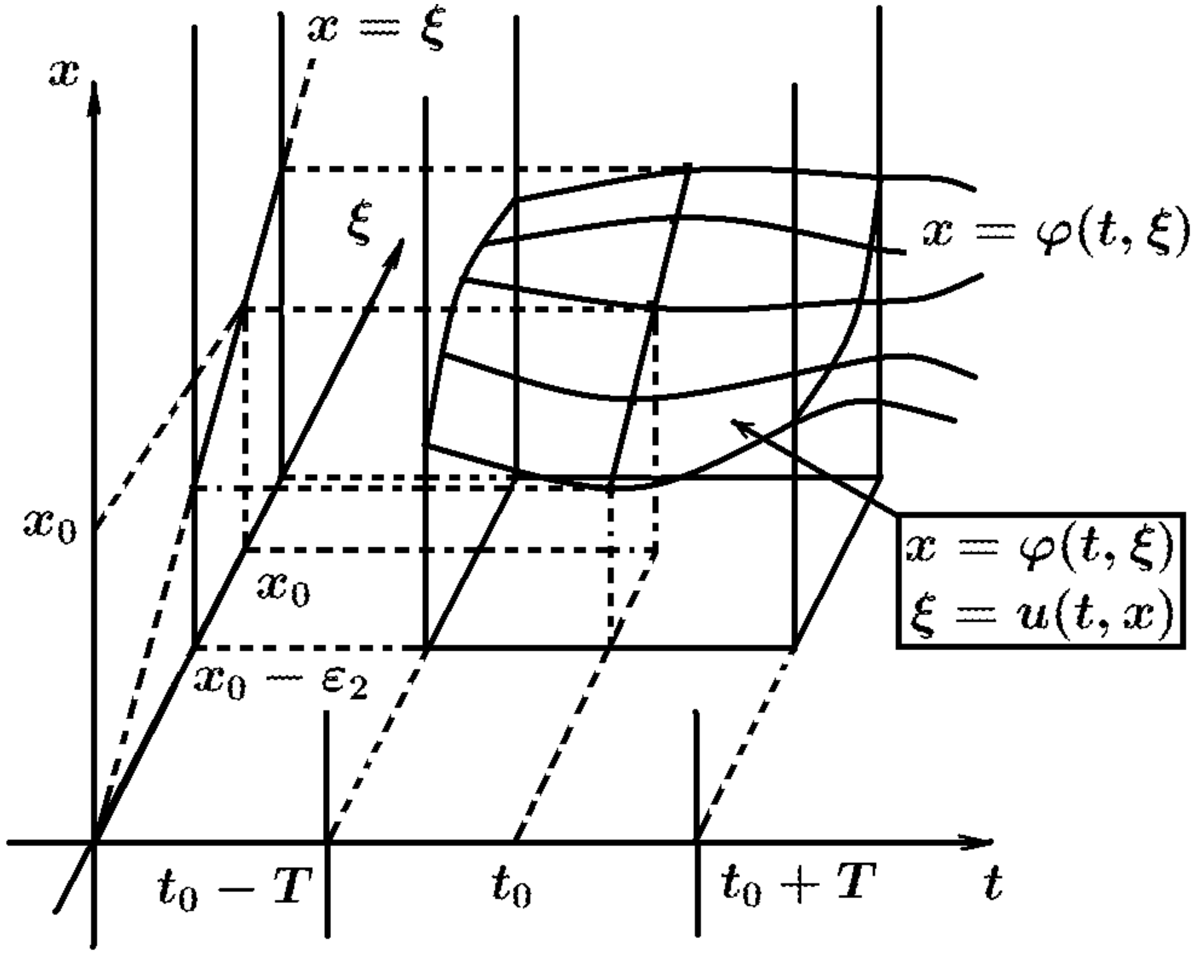
а) Существует окрестность Ω точки (t_0, x_0) и независимые в ней ПИ системы (1): $u_1, \ldots, u_n$.

b) Если $u = (u_1, \ldots, u_n)$ — любые независимые ПИ в некоторой окрестности Ω точки (t_0, x_0), и имеется еще один ПИ v в Ω, то тогда найдется
$F \in C^1$(окрестность точки $u(t_0, x_0)$) такая, что
$v = F(u_1, \ldots, u_n)$ в некоторой $\Omega_1 \subset \Omega$.

[Таким образом (с точностью до оговорок о локальности), «функциональная размерность» множества ПИ лишь на 1 меньше, чем «функциональная размерность» множества всех функций от (t, x).]

Доказательство. a) Рассмотрим задачу Коши $x(t_0) = \xi$ для (1), где $\xi \in B(x_0, \varepsilon_1)$ берутся такими, чтобы $(t_0, \xi) \in B$. Ее НР $x = \varphi(t, \xi)$ существуют и единственны, причем по Следствию из ТоНЗ можно считать, что все они определены на одном отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$, когда $\xi \in B(x_0, \varepsilon_2)$. Дальнейшая идея очевидна: если выразить $\xi = \xi(t, x)$, то эти величины будут постоянны на решениях, а значит будут ПИ.

[В этом и состоит «практический метод» поиска ПИ: выразить начальные данные (или произвольные постоянные, фигурирующие в формуле для общего решения) через само решение.]



Реализуем эту идею строго. Напишем систему $\varphi(t,\xi(t,x)) - x = 0$ для искомой величины. Проверим условия теоремы о неявной функции. Функция $F(\xi,(t,x)) := \varphi(t,\xi) - x$ определена в области $D = B(x_0,\varepsilon_2) \times ((t_0 - T, t_0 + T) \times \mathbb{R}^n)$, причем по ТоНЗ $F \in C(D)$. По ТоДЗ и Следствию из нее имеем: $\varphi \in C^1\bigg((t_0 - T, t_0 + T) \times B(x_0,\varepsilon_2)\bigg)$, причем $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}$ удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(t,\varphi(t,\xi))\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big|_{t=t_0} = E,$$

[см. (16) в § 5 части 1, можно и заново вывести, зная $\varphi \in C^1$]

так что по теореме Остроградского—Лиувилля

$$\det \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(t,\xi) = \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{tr}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(s,\varphi(s,\xi))ds \right) \neq 0$$

при всех $(t,\xi) \in (t_0 - T, t_0 + T) \times B(x_0, \varepsilon_2)$.

Гладкость F по x очевидна, а по t следует из ТоНЗ. Таким образом, $F \in C^1(D)$, $\det \dfrac{\partial F}{\partial \xi} \neq 0$ в D, и $F(x_0,(t_0,x_0)) = 0$. По теореме о неявной функции найдется окрестность Ω точки (t_0, x_0), где определена $u \in C^1(\Omega)$ такая, что $\varphi(t, u(t,x)) = x$ в Ω, $u(t_0,x_0) = x_0$. Проверим, что $u = (u_1,\ldots,u_n)$ — это искомые функции.

1. u есть «векторный ПИ», т. к. на любом решении $x = \varphi(t,\xi)$ системы (1) при тех (t,ξ), когда $(t,\varphi(t,\xi)) \in \Omega$, имеем: в тождестве $\varphi(t,u(t,x)) = x$, $\forall (t,x) \in \Omega$, можно положить $x = \varphi(t,\xi)$ и получить $\varphi(t,u(t,\varphi(t,\xi))) = \varphi(t,\xi)$, что ввиду взаимной однозначности отображения $\xi \leftrightarrow \varphi(t,\xi)$ при любом t (ввиду единственности решения задачи Коши) дает $u(t,\varphi(t,\xi)) = \xi$.

   [Это рассуждение предельно формально все доказывает, но принципе оно даже лишнее, т. к. по построению ясно, что $u(t,\varphi(t,\xi)) = \xi$ — так мы и строили u.]

2. $u_1,\ldots,u_n$ независимы, т. к., продифференцировав по x тождество (в Ω) $\varphi(t,u(t,x)) = x$, получим

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}(t,u(t,x))\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x)=E$, откуда $\det\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\neq 0$ в Ω, т. е. $\operatorname{rang}\left(\dfrac{\partial u}{\partial(t,x)}\right)=n$ в Ω.

b) По условию, все $u_1,\ldots,u_n$ и v удовлетворяют (2) в Ω, т. е. $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+f\cdot\nabla_x\right)\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=0$, что означает $\left(\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(t,x)}\right)\cdot\begin{bmatrix}1\\ f\end{bmatrix}=0$, значит, $\left(\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(t,x)}\right)$ вырождена, т. е. $u_1,\ldots,u_n,v$ зависимы во всей Ω. Но $u_1,\ldots,u_n$ независимы в Ω (в матрице $\left(\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(t,x)}\right)$ имеется ненулевой минор порядка n среди первых n столбцов), поэтому требуемое выражение $v=F(u)$ можно построить (это известно из анализа). $\square$

Пример. $x'=Ax$, $x=e^{tA}\xi$, $\xi=e^{-tA}x$ — ПИ. $\square$

Перейдем к случаю, когда система (1) автономная:

$$\frac{dx}{dt}=f(x), \tag{3}$$

где $f\in C^1(D)$, $D\subset\mathbb{R}^n$ — область (т. е. $B=\mathbb{R}\times D$).

[Тогда решения $x\in C^2$, хотя это по всей видимости не потребуется.]

Сразу оговоримся, что если системы (1) и (3) рассматриваются с позиций поиска всех их решений, ПИ, и т. п. (чем мы и занимаемся в § 4), то *автономность есть* не более чем *свойство формы записи произвольной системы.* А именно:

1. Если имеется система (1), то, обозначив $x_0=t$, $\widetilde{x}=(x_0,x)$, получим эквивалентную автономную систе-

му

$$\frac{d\widetilde{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 \\ f(\widetilde{x}) \end{bmatrix} =: \widetilde{f}(\widetilde{x}), \tag{4}$$

но с числом уравнений на 1 больше.

2. И наоборот, если имеется система (3), и $a \in D$ *не есть ОТ* (3), то, для определенности считая $f_n \neq 0$ в окрестности a, можно написать эквивалентную систему

$$\frac{dx_k}{dx_n} = \frac{f_k(x)}{f_n(x)}, \qquad k = 1, \ldots, n-1, \tag{5}$$

в которой число уравнений на 1 меньше, но она уже неавтономна.

Таким образом, если не считать ОТ, то для любой системы имеются автономные и неавтономные формы записи, отличающиеся на 1 в числе уравнений, причем при сведении (1) к (4) ОТ не возникают.

Замечание. Имеется и 3-я эквивалентная форма записи (3) — симметричная:

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(x)},$$

которая, правда, имеет ясный смысл уже только при условии, что все $f_k \neq 0$, а иначе требуется строгое истолкование (его можно дать, если хотя бы одна $f_k \neq 0$, т. е. опять же вне ОТ). □

Замечание. Все сказанное не означает, что изучение автономных систем как особого класса (как мы делали в § 1) не имеет смысла: дело в том, что изложенные приемы не работают, если мы ищем решение задачи Коши и т. п. □

Для автономных систем, естественно, верны все вышеизложенные факты, но теперь естественно особое внимание уделить ПИ, зависящим только от x. Из общих фактов, доказанных для (1), мы можем заключить:

1. $[u = u(t, x)$ есть ПИ (3) в $\Omega \subset B = \mathbb{R} \times D] \Longleftrightarrow$
   $[u_t + f(x) \cdot \nabla_x u = 0$ в $\Omega]$. В частности,
   $[u = u(x)$ есть ПИ (3) в $\Omega_1 \subset D$ (т. е. $\Omega = \mathbb{R} \times \Omega_1)] \Longleftrightarrow$
   $[u$ удовлетворяет в Ω_1 УЧП (6):]
   $$f(x) \cdot \nabla_x u = 0. \tag{6}$$
2. Понятие независимости для ПИ (3) вида $(u_1, \ldots, u_k)(x)$ в Ω_1 примет вид $\left[\operatorname{rang}\left(\dfrac{\partial u}{\partial(t, x)}\right) = \right] \operatorname{rang}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = k$ в Ω_1.
3. Если $(u_1, \ldots, u_k)(x)$ — ПИ (3) в Ω_1, то
   $v(x) = F(u_1, \ldots, u_k)$ — тоже (при $F \in C^1$).
4. Если $a \in D$ *не есть ОТ* (3), то в некоторой ее окрестности можно построить ровно $(n-1)$ ПИ вида $(u_1, \ldots, u_{n-1})(x)$, а остальные ПИ вида $v = v(x)$ будут функциями от них (в некоторой еще меньшей окрестности). В самом деле, пусть для определенности $f_n \neq 0$ в окрестности a, тогда запишем (3) в виде (5) и применим общую теорему для неавтономных систем.

Другими словами, из n ПИ $(u_1, \ldots, u_n)(t, x)$ в случае автономной системы можно «сформировать» $(n-1)$ ПИ, не зависящих от t (т. е., опять же, число этих ПИ на 1 меньше, чем число независимых функций от x вообще). В случае неавтономных систем это, вообще говоря, не так:

Пример. $x' = \begin{bmatrix} 2t \\ 1 \end{bmatrix}$, $x(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} + C$, ПИ: $u = \begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} - x$, т. е. все ПИ имеют вид $v = F(t^2 - x_1, t - x_2)$. Однако нельзя добиться $v = v(x)$, чтобы получился нетривиальный ПИ, т. к. уравнение для ПИ имеет вид

$$0 = v_t + f \cdot \nabla_x v \overset{v=v(x)}{=} f \cdot \nabla v = 2tv_{x_1}(x) + v_{x_2}(x),$$

что ввиду независимости t и x дает $\nabla v = 0$. $\square$

Нам теперь будет достаточно рассмотреть автономные системы (3) и ПИ $u(x)$ для них; как мы поняли, это отличается от общей ситуации лишь обозначениями, но последняя ситуация удобнее ввиду отсутствия выделенной переменной t. Итак, как сказано выше, ПИ имеют два основных применения. Первое — это получение информации о решениях (3) или (1). Прокомментируем на примере автономных систем (3) (что эквивалентно общей ситуации), как знание нескольких ПИ позволяет уменьшить число уравнений в системе. Этот интуитивно очевидный факт формально можно выразить так:

Утверждение. Пусть $a \in D$, в ее окрестности Ω_1 имеются k независимых ПИ $u_1, \dots, u_k$ системы (3). Тогда в некоторой $\Omega_2 \subset \Omega_1$ существует невырожденная замена переменных $z = \psi(x)$ (т. е. неизвестных функций с точки зрения (3)), после которой (3) перейдет в систему из $n - k$ уравнений для $z_{k+1}, \dots, z_n$, а $z_1, \dots, z_k$ будут постоянными (т. е. решения, «проходящие в Ω_2» (т. е. пока $x \in \Omega_2$, $z \in \psi(\Omega_2)$), удовлетворяют этой системе).

Доказательство. По условию $\operatorname{rang}\dfrac{\partial u}{\partial x} = k$ в Ω_1. Пусть для определенности $\det\dfrac{\partial(u_1,\ldots,u_k)}{\partial(x_1,\ldots,x_k)} \neq 0$ в некоторой $\Omega_3 \subset \Omega_1$. Сделаем замену

$$z_1 = u_1(x), \quad \ldots, \quad z_k = u_k(x),$$

$$z_{k+1} = x_{k+1}, \quad \ldots, \quad z_n = x_n.$$

Тогда $\det\dfrac{\partial z}{\partial x} = \det\dfrac{\partial u}{\partial(x_1,\ldots,x_k)} \neq 0$ в Ω_3, и эта замена взаимно однозначна в некоторой $\Omega_2 \subset \Omega_3$. Для новых функций имеем уравнения: $\dfrac{dz_i}{dt} = [f(x)\cdot\nabla_x u_i(x) =]0$ при $i = 1,\ldots,k$, и (ввиду того, что (как мы знали и еще раз только что проверили) на решении $u_i = c_i$)

$$\frac{dz_j}{dt} = f_j(x) = \widetilde{f}_j(z) =$$

$$= \widetilde{f}_j(c_1,\ldots,c_k,z_{k+1},\ldots,z_n) = \widehat{f}_j(z_{k+1},\ldots,z_n)$$

при $j = k+1,\ldots,n$. $\square$

Второе применение ПИ — решение УЧП вида (6) (соответственно (2)). Далее мы будем заниматься этим вопросом, и вообще рассмотрим УЧП (6), (2) как таковые, даже без связи с ПИ ОДУ.

[Но в любом случае тесная связь с ОДУ остается, поэтому этот вопрос и изучается в курсе ОДУ.]

Удобнее остановиться на симметричном виде (6), с которым связана автономная система (3). В силу вышеизложенного поиск ПИ для (3) эквивалентен решению УЧП (6). Но поскольку УЧП — более сложный объект, чем ОДУ, то данная эквивалентность в основном (за исключением немногих теоретических рассмотрений, как у нас было выше) используется «в сложную сторону»: уравнение (6) решается с помощью построения ПИ для системы (3), которая называется *характеристической системой* для (6). Как мы доказали, все *решения* (6) (понимаемые как *функции класса* C^1 в некоторой области) суть ПИ (3), а значит имеют вид

$$u(x) = F(u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)), \tag{7}$$

где $u_1, \ldots, u_{n-1}$ — система независимых ПИ (3), а $F \in C^1$ — произвольная функция. Как мы видели выше:

1. трудности с нахождением системы $u_1, \ldots, u_{n-1}$ возникают только в ОТ (3), но эти точки и так надо исключить, т. к. это *точки вырождения* (6);

2. представление (7) может быть построено (вообще говоря, лишь локально) в окрестности Ω_1 любой точки из D, где
$$\sum f_i^2 \neq 0 \tag{8}$$
(т. е. вне точек вырождения).

Замечание. Теперь ясно, почему в § 1 мы подробно рассматривали ФПт в окрестности ОТ — именно там возникают трудности в «явных методах» решения (3), основанных, например, на поиске ПИ. □

Далее будем рассматривать уравнение (6) вне точек его вырождения, т. е. (выбросив такие точки при необходимости из области), предполагать, что $f \in C^1(D)$, D — область в $\mathbb{R}^n$,

(8) выполнено всюду в D. Мы построили локально общее решение (6) в виде (7),

$$\begin{bmatrix}\text{т. е. } D \text{ покрывается системой окрестностей, в каждой} \\ \text{из которых имеет место (7)}\end{bmatrix}$$

откуда видно, что решение УЧП (6) (в отличие от ОДУ) имеет уже́ *функциональный произвол*. Чтобы выделить одно решение, нужно задавать его значения уже не в отдельных точках, а на многообразиях (а именно, размерности $n-1$, т. е. гиперповерхностях). Простейшая задача для (6) — *задача Коши*.

Определение. Пусть $S \subset D$ — гладкое многообразие размерности $n-1$, т. е.

$$S = \left\{\, x = \psi(\tau) \mid \tau \in T \subset \mathbb{R}^{n-1} \text{ — область} \,\right\};$$

$$\psi \in C^1(T), \qquad \operatorname{rang}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right) = n-1 \text{ в } T.$$

[Ср. определение гладкой кривой в § 1.]

Задачей Коши для (6) с данными на (начальном) многообразии S называется задача, состоящая из (6) (решение ищется в окрестности S, или, в идеале, во всей D) и начальных данных (данных Коши)

$$u|_S = u_0, \tag{9}$$

т. е. $u(\psi(\tau)) = u_0(\tau)$, $\tau \in T$. $\square$

Решением задачи Коши (6), (9) называется любая функция класса $C^1(\Omega_1)$ (где Ω_1 — окрестность S), удовлетворяющая (6) и (9) в обычном смысле.

Для решения задачи (6), (9) можно указать 2 основных приема. Первый (метод ПИ) — воспользоваться представлением (7) для общего решения, т. е. использовать ПИ характеристической системы (3). Подстановка (7) в (9) дает соотношение

$$F(u_1(\psi(\tau)), \ldots, u_{n-1}(\psi(\tau))) = u_0(\tau), \qquad \tau \in T,$$

которое является функциональным уравнением для нахождения функции F. Ввиду того, что $\dim\tau = n-1$, естественно ожидать, что этого соотношения будет как раз достаточно для однозначного (локального) нахождения F, если будут выполнены определенные условия типа невырожденности, и тем самым для всех u_0 будет существовать единственное

[локальное, т. е. в окрестности любой $x_0 \in S$ — локальность связана с теоремой о неявной функции и с необходимостью построения базовых ПИ в (7)]

решение задачи (6), (9). Далее мы дадим четкую формулировку этого тезиса, а сейчас нам удобнее воспользоваться вторым (не через ПИ — метод характеристик) приемом для решения (6), (9), причем это можно сделать сразу для более общего уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x)u = r(x), \tag{10}$$

где $b, r \in C^1(D)$ — это уже общий вид линейного УЧП I порядка (естественно, сохраняются те же требования к понятию решения уравнения (10) и задачи (10), (9)). Система (3) называется характеристической и для (10) (т. к. этот факт определяется только старшей частью УЧП, которая у (10) и (6) одинакова), а траектории (3) называются *характеристиками* уравнения (10).

Идея метода характеристик состоит в следующем. Оказывается, уравнение (10) является ОДУ вдоль характеристик, т. к. $f \cdot \nabla u$ есть производная от u по направлению f, т. е. вдоль характеристики ($f(x)$ — касательный вектор к характеристике, проходящей через точку x).

Точнее, если $x = \varphi(t, \xi)$ — решение (3) (отдельная характеристика), то

$$\left(\frac{d}{dt} + b(\varphi(t,\xi))\right) u(\varphi(t,\xi)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\varphi(t,\xi)) \cdot f_i(\varphi(t,\xi)) + b(\varphi(t,\xi))u(\varphi(t,\xi)) =$$

$$= (f \cdot \nabla u + bu)|_{\varphi(t,\xi)},$$

а значит [u удовлетворяет (10) в D] $\Longleftrightarrow$ [$\left(\frac{d}{dt} + b(\varphi(t,\xi))\right) u(\varphi(t,\xi)) = r(\varphi(t,\xi))$ для всех решений $\varphi(t,\xi)$ системы (3)]. Для доказательства справа налево нужно только заметить, что вся D заполнена траекториями (3), т. е. характеристиками $\varphi(t,\xi)$. Условимся о подходящем выборе параметра t вдоль характеристик, а именно, что $t = 0$ соответствует $\varphi(t,\xi) \in S$, т. е. $\xi \in S$, а значит $\xi = \psi(\tau)$, $\tau \in T$. Это ограничивает нас только теми характеристиками, которые пересекают S (но не ограничивает общности среди них ввиду свойств автономных систем), что естественно, если мы хотим построить решение задачи Коши

(10), (9). Тогда к построенному ОДУ вдоль характеристики добавляются данные Коши: [u удовлетворяет (9)] $\Longleftrightarrow$ $[u(\varphi(t,\xi))|_{t=0} = u(\psi(\tau)) = u_0(\tau)]$. Таким образом, фиксируя любое $\tau \in T$, мы можем построить характеристику $x = \varphi(t, \psi(\tau))$, вдоль которой величина $v(t,\tau) = u(\varphi(t,\psi(\tau)))$ удовлетворяет

$$\frac{dv}{dt} + b(\varphi(t,\psi(\tau)))v = r(\varphi(t,\psi(\tau))); \quad v|_{t=0} = u_0(\tau). \tag{11}$$

[Эту формулу нужно иметь перед глазами до конца доказательства Теоремы ниже.]

Решая эту задачу Коши, найдем

$$u(\varphi(t,\psi(\tau))) = v(t,\tau), \tag{12}$$

что задает искомое решение в СК (t,τ). Остается перейти в исходную СК и получить $u = u(x)$. В этом и состоит метод характеристик: УЧП сводится к ОДУ в 2 этапа (в квазилинейном случае 2 этапа сливаются в 1, можно и здесь так сделать):

1. нахождение специальной СК из характеристик (с помощью ОДУ);

2. нахождение решения в этой СК (опять же с помощью ОДУ).

Изложенная идея нуждается в обосновании.

[т. к. неясно:

1. как выглядит кусок D, покрываемый характеристиками, начинающимися на S;
2. можно ли вернуться в исходную СК, т. е. является ли соответствие $x \leftrightarrow (t, \tau)$ взаимно однозначным — это особенно неочевидно, т. к. возможны характеристики–циклы (см. Пример ниже) — отсюда лишь локальный характер следующей Теоремы.]

Сформулируем соответствующую теорему:

Теорема. Пусть $u_0 \in C^1(T)$ (т. е. $u_0 \in C^1(S)$), а в некоторой $x_0 = \psi(\tau_0) \in S$ вектор f не касается начального многообразия S.

[Тогда ввиду $f \in C$, $S \in C^1$ некасание будет и в окрестности x_0 — это ясно и геометрически, и аналитически.]

Тогда в некоторой окрестности Ω_1 точки x_0 существует единственное решение задачи (10), (9).

Доказательство. Сначала нужно доказать, что в каждую точку из некоторой Ω_1 приходит (единственная и только 1 раз) характеристика, начинающаяся на S, т. е. $\forall x \in \Omega_1$ $\exists!(t, \tau) \in \mathbb{R} \times T$: $\varphi(t, \psi(\tau)) = x$ (единственность τ — это итак ясно ввиду непересечения траекторий, а единственность t — это и есть исключение цикла, т. е. «прихода с 2 сторон»). Уравнение $F((t, \tau), x) := \varphi(t, \psi(\tau)) - x = 0$ имеет решение $t = 0$, $\tau = \tau_0$, $x = x_0$; функция $F \in C^1(\text{окр.}(0, \tau_0, x_0))$ (из

ТоДЗ аналогично теореме о ПИ); и наконец,

$$\det \frac{\partial F((t,\tau),x)}{\partial(t,\tau)}\Big|_{t=0,\tau=\tau_0} =$$

$$= \det \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,\psi(\tau)) \;\; \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(t,\psi(\tau))\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right]\Big|_{t=0,\tau=\tau_0} =$$

$$= \det \left[f(x_0) \;\; \frac{\partial \psi}{\partial \tau}(\tau_0)\right] \neq 0$$

(по условию некасания), а значит и в окрестности точки $(0,\tau_0,x_0)$. По теореме о неявной функции в некоторой окрестности Ω_1 точки x_0 можно однозначно выразить $(t,\tau) = (t,\tau)(x)$ (причем гладким образом), что и требовалось — построена характеристическая СК.

Теперь вступают в силу уже́ проведенные перед теоремой рассуждения — в Ω_1 задача (10), (9) эквивалентна (11), (12) (т. е. (11) есть перезапись (10), (9) в СК (t,τ), и замена осуществляется формулой (12)), НР (11) существует и единственно, причем по ТоДЗ $v \in C^1(\{\ (t,\tau) \mid \varphi(t,\psi(\tau)) \in \Omega_1\ \})$, т. е. в некоторой окрестности точки $(0,\tau_0)$ (заведомо не большей, чем область, определяемая интервалами существования НР $\varphi(t,\psi(\tau))$); а поскольку замена $x = \varphi(t,\psi(\tau))$ однозначно обратима и класса C^1 (в обе стороны) в $\{x \in \Omega_1\} = \{(t,\tau) \in \text{окр.}(0,\tau_0)\}$, то решение $u = u(x)$ однозначно восстанавливается из формулы (12), при этом $u \in C^1(\Omega_1)$. $\square$

Замечание. Если f (т. е. характеристики) не касаются S нигде, то, построив решения в окрестностях всех точек $x_0 \in S$, образуем единое решение в некоторой окрестности всей S, т. е. в открытом множестве $B \supset S$ (т. е. B и есть искомая Ω_1). В самом деле, рассмотрим сначала случай компактного S.

$\left[\text{Точнее, } \overline{S} \text{ компактно, а нижеследующая конструкция} \atop \text{применяется к компактам из } S\text{, приближающим все } S.\right]$

Тогда в окрестности $B(x_0, \varepsilon(x_0))$ каждой точки $x_0 \in S$ существует решение (10), (9). Из покрытия S этими шарами можно выделить конечное подпокрытие, а в пересечениях шаров решения обязаны совпасть в силу единственности. Объединяя этот конечный набор решений, получим требуемое решение. Если теперь S неограничено, то его можно разбить на счетное число компактных кусков, и объединить соответствующие решения в окрестностях этих кусков. Однако «толщина» области B может быть малой (см. замечание ниже о локальности решения), и стремиться к нулю на бесконечности, если S не компактно. $\square$

Возникает естественный вопрос о «НР» (9), (10), т. е. дальнейшем (максимальном) расширении B. Но здесь возникают проблемы. Во-первых, ясно, что нельзя утверждать единственность решения (10), (9) в произвольных областях:

Пример. $u_y = 0$ в $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$, $u = 0$ на $S = \{x \in (0, 1),\ y = 0\}$. Эта задача имеет решения вида $u = a(x)$, где $a \in C^1$ — произвольная функция, обращающаяся в нуль на $(0, 1)$. $\square$

Таким образом, единственность можно пытаться доказывать лишь в области B_1, состоящей из характеристик (теперь по всей их длине, т. е. все НР), начинающихся на S (ясно, что $B \subset B_1$).

Замечание для преподавателя. На самом деле неясно, всегда ли B_1 открыто (связность очевидна) — это есть образ открытого (по ТоНЗ) множества $D(\varphi(\cdot, \psi(\cdot)))$ под действием непрерывного (по ТоНЗ) отображения $\varphi(\cdot, \psi(\cdot))$ — но отсюда не следует открытость.

В этой области решение будет заведомо единственным (т. е. это максимальная область единственности). В самом деле, достаточно доказать, что однородная задача имеет только нулевое решение. Если $x \in B_1$, то вдоль характеристики, проходящей через x, получим однородную задачу Коши для нашего решения, откуда $u(x) = 0$. И во-вторых, существование решения во всей B_1 может не иметь места (т. е. НР характеристической системы приходится искусственно обрубать)! См. ниже Пример об этом, а также дальнейшие замечания о локальности решения. Окончательно вопрос о глобальном существовании и единственности будет решен ниже сразу для более общих (квазилинейных) уравнений.

Замечание для преподавателя. Условие «$f \neq 0$ в D» на самом деле не нужно в методе характеристик в линейном случае, т. к. условие некасания означает, что S не содержит нулей f, а далее даже вся B_1 их не содержит, т. к. ввиду единственности даже непродолжаемые характеристики не попадут в ОТ, т. е. точки вырождения (10) «автоматически обходятся».

Замечание. Если $b = r = 0$, т. е. (10) есть (6), то решение задачи (10), (9) можно построить с помощью ПИ при тех же условиях, что и в Теореме, т. к. условие разрешимости соответствующего уравнения для F будет таким же. Метод ПИ работает и для (10), но для этого нужно его модифицировать. Все это будет сделано ниже сразу в более общем виде. □

Замечание. Условие «f не касается S» означает, что (10) на S не определяет касательную производную к S, а иначе (10) может войти в противоречие с (9) (так что безусловной и корректной разрешимости быть заведомо не может).

Пример. $u_x + a u_y = 0$, $a = \text{const}$, $u|_{y=0} = \varphi(x)$.

Через ПИ: $\dfrac{dx}{dt} = 1$, $\dfrac{dy}{dt} = a$; ПИ: $u_1(x, y) = y - ax$, так что общее решение уравнения есть $u = F(y - ax)$. Если $a \neq 0$ (некасание), то $\varphi(x) = F(-ax)$, $F(\xi) = \varphi(-\xi/a)$, $u = \varphi(x - y/a)$. Если $a = 0$ (совпадение S с характеристикой), то $\varphi(x) = F(0)$ — либо не существует решение, либо оно неединственно. В этом методе остается неясной природа последнего явления.

Через характеристики: $x = t + \xi$, $y = at + \eta$. При $t = 0$: $(\xi, \eta) \in S = \{x = \tau,\ y = 0\}$, т. е. $\xi = \tau$, $\eta = 0$, так что $x = t + \tau$, $y = at$. В СК (t, τ) имеем:
$\dfrac{d}{dt} u(t + \tau, at) = (u_x + a u_y)(t + \tau, at) = 0$ (еще раз вывели (11) в данном случае), $u(t + \tau, at)|_{t=0} = u(\tau, 0) = \varphi(\tau)$, так что $u(t + \tau, at) = \varphi(\tau)$. Если $a \neq 0$, то можно вернуться в исходную СК: $t = y/a$, $\tau = x - y/a$, так что $u(x, y) = \varphi(x - y/a)$. Если $a = 0$, то СК вырождена, и вернуться с исходную СК нельзя. В этом методе можно до конца объяснить последний случай: $u(t + \tau, 0) = \varphi(\tau)$, т. е. если $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, то любое решение уравнения решает задачу, лишь бы $u|_{y=0} = \varphi_0$, а если $\varphi \neq \text{const}$, то решений нет. Дело в том, что уравнение означает $u = \text{const}$ вдоль характеристики, что коррелирует

с данными Коши — если они также постоянные, то не несут почти никакой информации, и решений много, а иначе возникает противоречие, и решений нет. $\square$

В общем случае касания, когда начальное многообразие не содержит характеристику на каком-то участке, а лишь касается ее, можно будет вернуться в исходную СК, но получится негладкая функция (а значит, она не может быть решением в нашем определении).

Пример. $u_x - \varepsilon u_y = 0$, $\varepsilon \geqslant 0$, $u = \varphi(x)$ при $y = x|x|$. Здесь при всех ε характеристики пересекают S по 1 разу, но при $\varepsilon = 0$ имеется касание в нуле одной характеристики. Решение будет существовать и единственно при $\varepsilon \neq 0$, а при $\varepsilon = 0$ найденная функция будет негладкой в нуле:

Упражнение. 1) Найти решение при $\varepsilon \neq 0$, доказать, что для любой $\varphi \in C^1$ $\exists! u \in C^1$.
2) Рассмотреть $\varepsilon \to 0$, выяснить, сохраняется ли $u \in C^1$. $\square$

Как анонсировано выше, поясним существенность локальности существования решения в Теореме и Замечании после нее.

Пример. $yu_x - xu_y = 0$, $u|_{x=1} = \varphi(y)$. Здесь характеристика $x^2 + y^2 = 1$ касается S в точке $(1,0)$, а $\{x^2 + y^2 = R^2 > 1\}$ пересекают S по 2 раза. Из-за этого, если мы хотим построить решение в окрестности точки $(1,0)$ или глобально, возникает необходимое (и достаточное) условие четности φ (и, в частности, $\varphi'(0) = 0$, как и следует ожидать из вышеописанной корреляции уравнения и данных Коши). $\square$

Пример. $yu_x - xu_y = 1$, $u|_{y=0,\, 1<x<2} = 0$. В окрестности S

решение можно легко построить. Область B_1, состоящая из характеристик, начинающихся на S, есть $1 < x^2 + y^2 < 4$. В ней решение построить нельзя, т. к. на каждом обороте получится противоречие (характеристики $x = \xi \cos t$, $y = -\xi \sin t$, $\xi \in (1, 2)$, решение $u = t$) — здесь возникла вышеупомянутая ситуация с характеристиками–циклами. $\square$

Замечание. Таким образом, локальность решения определяется не только интервалом существования НР уравнений для характеристик (само решение вдоль них существует глобально, т. к. уравнение для u линейное), но и возможностью перехода в исходную СК. В последнем Примере как раз соответствие $(x, y) \leftrightarrow (t, \xi)$ не взаимно однозначное, и приходится искусственно обрубать характеристики–циклы. $\square$

Рассмотренные результаты почти буквально переносятся на квазилинейное УЧП

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = r(x, u) \tag{13}$$

[ДУ называется квазилинейным, если оно линейно относительно старших производных искомого решения. В данном случае старшие производные — первые.]

Предполагаем, что $f, r \in C^1(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — область; $\sum f_i^2 \neq 0$ в G.

Замечание для преподавателя. В отличие от линейного случая, здесь условие «$f \neq 0$ всюду» требуется не только в методе ПИ (см. (18) и далее), но и в методе характеристик. В самом деле, характеристики, т. е. траектории (14), (15), не могут придти в точки, где $f = 0$, $r = 0$, но могут придти в точки, где $f = 0$, $r \neq 0$, т. е. такие точки могут оказаться на «максимальной» гиперповерхности Γ_* (см. о ней далее). Естественно, эти точки не могут войти в график «НР», т. к. в них уравнение (13) не может выполняться. Но, таким образом, наличие таких точек добавляет еще 1 причину «обреза Γ_*» помимо указанных ниже (нахлест характеристик — негладкость Γ_* поперек характеристик) — это негладкость Γ_* вдоль характеристик.

Пример. $2uu_x + 0u_y = 1$, $u|_{x=1} = 1$. Характеристики $x = t^2 + 2t + 1$, $y = \tau$, $u = t + 1$; $\Gamma_* = \{x = u^2\}$; «НР» $u = \sqrt{x}$ — дальнейшее продолжение невозможно не из-за нахлеста характеристик (его нет), т. е. градиентной катастрофы поперек характеристик, а из-за градиентной катастрофы вдоль характеристик, которые при $t \to 1$ приходят на многообразие вырождения уравнения $\{u = 0\}$, где $\dfrac{dx}{dt} = 0$, $\dfrac{du}{dt} \neq 0$, так что «$\nabla u = \infty$» именно вдоль характеристик (и из УЧП видно, что при $u = 0$ будет $|\nabla u| = \infty$, но не видно, что это именно вдоль характеристик). Если же здесь выделить G без точек вырождения (т. е. $f \neq 0$ в G), то это будет $G = \{u > 0\}$, и «НР» существует вплоть до ∂G. $\square$

Таким образом, для линейных и полулинейных УЧП, даже при наличии точек вырождения (не на начальном многообразии), градиентная катастрофа обоих видов невозможна, и вся «максимальная» гиперповерхность Γ_* входит в график «НР», если не считать эффектов неоднозначности (линейные характеристики–циклы), требующих провести необходимые разрезы на Γ_* (см. Пример ниже). А для квазилинейных УЧП возможны еще градиентные катастрофы как вдоль характеристик (что исключается выбрасыванием точек вырождения уравнения, тогда вдоль характеристик всегда $\dfrac{du}{dx_i} = \dfrac{r}{f_i} < \infty$), так и поперек них (пересечение линейных характеристик), так что требуется искусственно обрезать Γ_*, выбрасывая точки вырождения УЧП и области нахлеста характеристик.

Под решением (13) понимается функция $u \in C^1(\Omega)$ в какой-то области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (Ω содержится в проекции G на $\{x\} = \{u = 0\}$) такая, что при всех $x \in \Omega$ верно:
$(x, u(x)) \in G$, и выполнено (13). Для этого уравнения на

первый взгляд уже́ утеряна связь с ПИ каких-либо ОДУ, но позже мы покажем, что эта связь есть, а пока будем следовать идеологии характеристик. Таким образом, сразу будем решать задачу Коши, а построение общего решения (13) обсудим позже в связи с ПИ. Задача Коши для (13) ставится так же — см. (9), что естественно, т. к. (13) можно рассматривать как (10), но с коэффициентами, зависящими от самого решения. Естественно, для всех $\tau \in T$ должно быть $(\psi(\tau), u_0(\tau)) \in G$.

Если мы по аналогии с (10) напишем характеристическую систему для (13), то она примет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x,u), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

и решить ее, не зная $u = u(x)$, невозможно. С другой стороны, если какое-то решение (13) $u = u(x)$ известно, то (14) можно рассматривать как (3); если $x = \varphi(t)$ — решение (14) (т. е. его траектория есть характеристика (13), рассматриваемого как (10)), то вдоль нее, как мы показали выше, имеем

$$\frac{du}{dt} = r(x,u). \tag{15}$$

Решить (14) и (15) по отдельности (или по очереди, как это было в линейном случае) нельзя, значит, нужно решать их одновременно как систему порядка $n+1$, и в этом и будет заключаться метод решения (13). Сформулируем эту идею четко:

Определение. *Характеристики* уравнения (13) — это траектории *характеристической системы* (14), (15) в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x,u)\}$.

Замечание. В случае линейного уравнения (10) (или даже полулинейного (почти линейного) уравнения, т. е. такого, что f_i в (13) не зависят от u, но r берется произвольной — другими словами, в (10) допускаются нелинейные младшие члены) характеристическая система распадается: сначала решается (14), и ее траектории мы ранее называли характеристиками, а затем (15). Характеристики в прежнем смысле суть проекции нынешних на гиперплоскость $\{u = 0\}$, а их высота над этой гиперплоскостью есть величина u. В случае же общего уравнения (13) проекции нельзя найти отдельно от высоты, так что приходится сразу строить кривые в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, из которых будет состоять график решения $u = u(x)$. $\square$

Определение. Гиперповерхность $\Gamma \in C^1$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, u)\}$, $\Gamma \subset G$, называется *интегральной гиперповерхностью* (ИГ) для уравнения (13), если она есть график некоторого его решения, т. е. имеет вид $\{\, u = U(x) \mid x \in \Omega \,\}$, где U — решение (13) в Ω. $\square$

Таким образом, задача Коши (13), (9) состоит в построении ИГ уравнения (13), проходящей через $(n-1)$-мерное многообразие

$$S_1 = \left\{\, x = \psi(\tau),\; u = u_0(\tau) \mid \tau \in T \subset \mathbb{R}^{n-1} \,\right\} \subset G$$

(т. е. $\Gamma \supset S_1$) в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, u)\}$, где

$(\psi, u_0) \in C^1(T)$.

[Вообще говоря, решение (13), (9) в Теореме ниже удается построить лишь локально (в окрестности любой точки из S), т. е. найденная ИГ будет содержать лишь часть S_1. Тогда «ИГ содержит часть S_1» не есть синоним (9), т. к. надо проверять именно
$[x = \psi(\tau) \Longrightarrow u = u_0(\tau)]$, чтобы ИГ не оказалась над другой частью S_1. Но затем мы построим ИГ, содержащую всю S_1.]

Отметим, что $\operatorname{rang}\dfrac{\partial(\psi, u_0)}{\partial\tau} = n - 1$, поскольку
$\operatorname{rang}\dfrac{\partial\psi}{\partial\tau} = n - 1$, т. е. S_1 — гладкое многообразие.

Определение. Кривая γ *проходит сквозь многообразие* $\Gamma = \{u = U(x)\}$, если она либо лежит целиком на Γ, либо это верно для ее части, и затем γ выходит из Γ через край. Другими словами, хотя бы часть γ лежит на Γ, и при выходе γ из Γ проекция γ выходит из Ω (это не исключает дальнейшего возврата проекции γ в Ω без возврата γ в Γ). $\Box$

Лемма. Если Γ — ИГ (13) (т. е. график решения U уравнения (13)), то для любой точки $(x_0, U(x_0)) \in \Gamma$ непродолжаемая характеристика γ_*, проходящая через эту точку (она единственна), проходит сквозь Γ.

Замечание. Другими словами, любая ИГ состоит из отрезков характеристик.

Доказательство. Пусть $(x_0, U(x_0)) \in \Gamma$. Рассмотрим НР φ задачи Коши

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi, U(\varphi)); \qquad \varphi|_{t=0} = x_0. \tag{16}$$

Кривая $\gamma = \{(\varphi(t), U(\varphi(t)))\} \subset \Gamma$ (естественно, $\varphi(t) \in \Omega$ на всем интервале определения НР φ). В то же время

$$\frac{d}{dt}U(\varphi(t)) = \nabla U(\varphi(t)) \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = \nabla U(\varphi(t)) \cdot f(\varphi(t), U(\varphi(t))) =$$

$$= \Big(f(x, U(x)) \cdot \nabla U(x)\Big)\Big|_{x=\varphi(t)} \overset{\varphi(t)\in\Omega}{=} r(x, U(x))\,\big|_{x=\varphi(t)} =$$

$$= r(\varphi(t), U(\varphi(t))),$$

т. е. $(x, u) = (\varphi, U(\varphi))$ удовлетворяет задаче для (14), (15) с начальными данными $(\varphi(0), U(\varphi(0))) = (x_0, U(x_0))$; но НР этой задачи имеет траекторию, которая есть характеристика γ_*, проходящая через точку $(x_0, U(x_0))$. Таким образом, γ_* и γ суть траектории решений одной и той же задачи Коши для (14), (15), и отличаются, вообще говоря, лишь своей длиной — γ_* соответствует НР этой задачи, а γ, вообще говоря, продолжаемому, и потому есть отрезок γ_* (γ соответствует НР одной задачи и продолжаемому решению другой).

Итак, $\gamma \subset \gamma_*$. Функция $f(x, U(x))$ определена и гладкая при $x \in \Omega$, поэтому ТПК в применении к НР φ задачи (16) означает, что $(t, \varphi(t))$ покидает любой компакт в $\mathbb{R} \times \Omega$ при $t \to t_\pm(\varphi)$. Например, при возрастании t получим следующее. Первый вариант: φ существует вплоть до $t_+(\varphi) = +\infty$, но тогда γ и γ_* совпадают до соответствующего конца, т. е. эта «половина» γ_* целиком лежит на Γ. Второй вариант: φ существует вплоть до $t_+(\varphi) = b < +\infty$, но тогда $\varphi(t)$ покидает любой компакт в Ω при $t \to b$, так что кусок γ_* идущий сразу после γ (т. е. решение (14), (15) при $t \in (b, b+\varepsilon)$) должен лежать не над Ω, а при $t < b$ кусок γ_* должен совпадать с γ и потому лежать на Г. $\square$

Теперь мы готовы сформулировать основной результат о задаче (13), (9):

Теорема. Пусть $(x_0, u_0) \in S_1$, т. е. $(x_0, u_0) = (\psi(\tau_0), u_0(\tau_0))$; вектор $f(x_0, u_0)$ не касается S — проекции начального многообразия S_1 на гиперплоскость $\{u = 0\}$. Тогда в некоторой окрестности Ω_1 точки x_0 существует единственное решение задачи (13), (9).

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши для (14), (15) с данными $x|_{t=0} = \psi(\tau)$, $u|_{t=0} = u_0(\tau)$, где $\tau \in B(\tau_0, \varepsilon)$, ее НР обозначим $x = \varphi(t, \psi(\tau))$, $u = v(t, u_0(\tau))$. Это задает гиперповерхность $\Gamma_* \subset G$; возможно, не вся она годится в качестве ИГ: может быть, например, негладкость или многозначность.

[Таким образом, локальность решения определяется двумя факторами: локальностью решения нелинейной системы (14), (15), и патологиями на гиперповерхности Γ_*, состоящей из характеристик.]

[Тем самым, в отличие от ОДУ, для которых имеется ТПК, для УЧП возникает принципиально новый феномен локальности (даже для линейных УЧП!): график решения даже с максимально возможной областью определения не доходит до границы области определения уравнения.]

[Для УЧП I порядка, даже линейных, это может вызываться, например, тем, что характеристики как траектории автономной системы не покидают некоторого компакта. Для квазилинейных УЧП I порядка добавляется эффект «нахлеста» характеристик, т. е. пересечения их проекций на гиперплоскость $\{u = 0\}$ («неоднозначность», «негладкость» «решения»). См. об этом ниже.]

[Для УЧП высшего порядка или для систем картина еще сложнее.]

Да и то, что хотя бы часть Γ_* является ИГ, следует обосновать. По следствию из ТоНЗ при $\tau \in B(\tau_0, \varepsilon_1)$ существует единственное решение φ, v на некотором $t \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$. Дальнейшая идея в том, что v — это решение, записанное в специальной СК, порожденной φ, и надо записать его в исходной СК, т. е. обратить уравнение $x = \varphi(t, \psi(\tau))$ относительно (t, τ).

[Проекции траекторий этих решений на гиперплоскость $\{u = 0\}$ заполняют некоторую окрестность Ω_2 точки x_0 — впрочем, это обосновывать не нужно ввиду дальнейших строгих рассуждений.]

Снова (как и в теореме для (10), (9)) считаем

$$\det \frac{\partial \varphi}{\partial (t, \tau)} \bigg|_{t=0, \tau=\tau_0} = \det \left[f(x_0, u_0) \;\; \frac{\partial \psi}{\partial \tau}(\tau_0) \right] \neq 0$$

по условию, и проверяем $\varphi \in C^1((-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times B(\tau_0, \varepsilon_1))$, $x_0 = \varphi(0, \psi(\tau_0))$, так что в некоторой (вообще говоря, меньшей чем Ω_2) окрестности Ω_1 можно гладким образом обратить связь $x = \varphi(t, \psi(\tau))$ и получить $(t, \tau) = (t, \tau)(x) \in C^1$

(это соответствует отсутствию упомянутого нахлеста характеристик, т. е. пересечения их проекций на гиперплоскость $\{u=0\}$). Ввиду $v \in C^1((-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times B(\tau_0, \varepsilon_1))$ функция $u = v(t, u_0(\tau)) = U(x) \in C^1(\Omega_1)$ задает некоторую гладкую гиперповерхность $\Gamma \subset \Gamma_*$, которая уже имеет вид $\{u = U(x)\}$ и может претендовать на то, чтобы быть ИГ для (13). Проверим, что она действительно есть ИГ, т. е. U есть решение (13).

[Тем самым мы покажем утверждение, обратное к Лемме: если гладкая гиперповерхность состоит из отрезков характеристик и однозначно проектируется на гиперплоскость $\{u=0\}$, т. е. имеет вид $u = U(x)$ (т. е. соответствующая СК обратима), то она есть ИГ.]

В самом деле, для любой $(x_1, u_1) \in \Gamma$ (т. е. $x_1 \in \Omega_1$, $u_1 = U(x_1)$) имеем: найдутся $(t_1, \tau_1) \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times B(\tau_0, \varepsilon_1)$ такие, что $(x_1, u_1) = (\varphi(t_1, \psi(\tau_1)), v(t_1, u_0(\tau_1)))$, и характеристика, проходящая через эту точку, по построению проходит сквозь $\Gamma = \{u = U(x) = v(t, u_0(\tau))\}$. Поэтому вдоль указанной характеристики (в окрестности указанной точки на характеристике, а значит на Γ) имеем

$$r(x_1, u_1) = r(\varphi(t, \psi(\tau_1)), v(t, u_0(\tau_1)))|_{t=t_1} \overset{(15)}{=}$$

$$\overset{(15)}{=} \frac{d}{dt} v(t, u_0(\tau_1)) \Big|_{t=t_1} = \frac{d}{dt} U(x) \Big|_{x=\varphi(t,\psi(\tau_1)), t=t_1} =$$

$$= \nabla U(\varphi(t_1, \psi(\tau_1))) \cdot \frac{d}{dt} \varphi(t, \psi(\tau_1)) \Big|_{t=t_1} \overset{(14)}{=}$$

$$\overset{(14)}{=} \nabla U(\varphi(t_1, \psi(\tau_1))) \cdot f(\varphi(t, \psi(\tau_1)), v(t_1, u_0(\tau_1))) =$$

$$= f(x_1, u_1) \cdot \nabla U(x_1),$$

а поскольку $u_1 = U(x_1)$, то это и означает, что U удовлетворяет (13) в точке x_1.

Данные Коши (9) для U выполнены, т. к.

[по построению Γ содержит кусок S_1, но это, как говорилось выше, еще не доказательство, т. к. Γ содержит не все S_1; так что проверяем строго:]

при $\tau \in B(\tau_0, \varepsilon_1)$ имеем
$U(x)|_{x=\psi(\tau)} = U(\varphi(t, \psi(\tau)))|_{t=0} = v(0, u_0(\tau)) = u_0(\tau)$.

Осталось доказать единственность. Назовем решение U, построенное выше с помощью характеристик в некоторой окрестности, определяемое поведением специальной СК, *специальным решением.* Докажем, что в Ω_1 не может быть другого решения (13), (9), кроме найденного специального U. Пусть U_2 — другое решение, определенное в Ω_1, а Γ_2 — соответствующая ИГ. Тогда Γ_2 и Γ содержат один и тот же кусок $S_2 \subset S_1$, а именно, тот, который проецируется в Ω_1. Рассмотрим любую $x_1 \in \Omega_1$ и проведем через $(x_1, U(x_1))$ характеристику γ (она проходит по Лемме и по построению сквозь Γ и полностью лежит на Γ_*). По построению (ввиду обратимости СК $x = \varphi(t, \psi(\tau))$, порожденной *специальным* решением U), γ пересекает S_2, т. е. проходит через какую-то его точку $(\psi(\tau_1), u_0(\tau_1))$, лежащую в окрестности точки (x_0, u_0). Проведем через эту точку характеристику γ_1. Поскольку $(\psi(\tau_1), u_0(\tau_1)) \in \Gamma, \Gamma_2$, то по Лемме γ_1 проходит сквозь обе ИГ. Ввиду единственности характеристик получаем $\gamma_1 = \gamma$. Значит, γ проходит и сквозь Γ_2. В частности, когда проекция γ, находясь в Ω_1, придет в точку x_1, сама γ придет в $(x_1, U_2(x_1))$ и в $(x_1, U(x_1))$, т. е. $U(x_1) = U_2(x_1)$, что и требовалось. $\square$

[Таким образом, единственность есть результат Леммы и обратного к ней утверждения, доказанного выше в доказательстве существования в этой Теореме.]

Сделаем замечания о глобальном существовании и единственности. Аналогично линейному случаю, из локальных специальных решений, построенных в Теореме, можно составить специальное решение, определенное на всей S, т. е. такое, что соответствующая ИГ содержит все S_1. Но теперь, используя идеологию, развитую для квазилинейного уравнения, можно более четко сформулировать «максимальную» область существования и область единственности, в т. ч. и для линейного уравнения. Как явствует из замечаний и примеров выше о линейных уравнениях, нет смысла строить решение вне области Ω_*, на которую проецируется «максимальная» гиперповерхность Γ_* из характеристик начинающихся на S_1, т. к. вне нее решение заведомо неединственно. В области Ω_* решение может быть только одно. В самом деле, пусть $x \in \Omega_*$. Тогда можно выбрать точку $(x, u) \in \Gamma_*$ — она не единственна, если Γ_* «идет с нахлестом» в точке x, но обязательно существует. Проведем через (x, u) характеристику (13), она проходит через S_1 по определению Γ_*. Далее рассуждаем как в Теореме и получаем, что для любого решения U, определенного в Ω_*, верно $U(x) = u$. Значит, все решения, определенные в Ω_*, совпадают. Заодно мы доказали, что любая ИГ для задачи (13), (9)

[с разумной областью определения, т. е. не более максимальной области единственности]

обязана быть частью Γ_*, а также видно, что если $(x, u) \in \Gamma_*$ можно выбрать не одну, то получается противоречие (обязаны приниматься несколько значений), т. е. решение в точке x не может существовать. Таким образом, в качестве области определения «НР» (13), (9) можно взять любую часть $\Omega_0 \subset \Omega_*$, в которой Γ_* задает однозначную функцию, но такую, что если $\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega_*$, $\Omega_1 \setminus \Omega_0 \neq \emptyset$, то на Ω_1 гиперповерхность Γ_* проецируется уже́ неоднозначно.

[В этом тезисе очевидно, что такое решение уже́ нельзя продолжить, но не так очевидно, что этот кусок Γ_* вообще есть решение. Для этого надо повторить выкладку из Теоремы (проверка выполнения уравнения вдоль характеристики) и убедиться, что замена $x \leftrightarrow (t, \tau)$, задаваемая уравнением $x = \varphi(t, \psi(\tau))$, не только взаимно однозначна (это по построению), но и взаимно гладкая во всей Ω_0. Но в самом деле, φ гладкая везде, где определена, ввиду ToДЗ и $f, r \in C^1(G)$, и обратима гладко везде, где обратима (т. е. в Ω_0), лишь бы $\det \dfrac{\partial \varphi}{\partial(t, \tau)} \neq 0$. Последнее соотношение надо доказывать отдельно, но не будем сюда углубляться.]

Тогда искомым «НР» будет соответствующий кусок Γ_*; другие решения (13), (9), определенные в Ω_0, обязаны совпасть с построенным, т. к. они тоже суть фрагменты Γ_*. Однако выбор Ω_0 может быть неоднозначным, как показывает следующий уже́ рассмотренный выше

Пример. $yu_x - xu_y = 1$, $u|_{y=0,\,1<x<2} = 0$. «Линейные характеристики» имеют вид $x = R\cos t$, $y = -R\sin t$, а решение вдоль них $u = t$. Тем самым,
$\Gamma_* = \{\, x = R\cos t,\ y = -R\sin t,\ u = t \mid t \in \mathbb{R},\ R \in (1,2)\,\}$, $\Omega_* = \{1 < x^2 + y^2 < 4\}$. В качестве Ω_0 можно взять кольцо Ω_* с произвольным разрезом, не проходящим через S (здесь $\Omega_* = B_1$ в обозначениях для линейных УЧП). Здесь (ввиду линейности) неоднозначность вызвана лишь линейными характеристиками–циклами, т. е. нахлестом квазилинейных характеристик на самих себя. В квазилинейном случае возможен нахлест разных характеристик. □

На приведенном Примере видно, что не всякое «НР» есть продолжение локального решения из Теоремы. Итак, «НР» находится неоднозначно, но этот эффект можно устранить, если допускать многозначность и негладкость решения, т. е. «объявить в качестве ИГ всю Γ_*», и тогда НР существует, единственно и определено в Ω_*.

Замечание для преподавателя. Можно доказывать единственность следующим способом, более топорным, но зато более «общим» по отношению к уравнению. Пусть также имеется 2 решения $u_{1,2}$ задачи (13), (9), определенные в некоторой области B, две ИГ $\Gamma_{1,2}$, и сразу будем считать, что они содержат все S_1. Выпишем для $u = u_1 - u_2$ уравнение:

$$f(x, u_1(x)) \cdot \nabla u =$$
$$= (r(x, u_1(x)) - r(x, u_2(x))) + (f(x, u_2(x)) - f(x, u_1(x))) \cdot \nabla u_2 =$$
$$= \frac{\partial r}{\partial u}\Big(x, u_2 + \theta_0(u_1 - u_2)\Big)u - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial u}\Big(x, u_2 + \theta_j(u_1 - u_2)\Big)\frac{\partial u_2}{\partial x_j}u,$$

где $\theta_k \in [0,1]$ — некоторые непрерывные функции от x (они определяются значениями $u_{1,2}(x)$). Если рассматривать это как уравнение для u, то оно имеет вид (10) с $r = 0$, при этом $u = 0$ на S. Таким образом, вдоль его характеристик

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u_1(x)), \qquad x|_{t=0} = \psi(\tau) \tag{17$_1$}$$

имеем $\dfrac{du}{dt} = \alpha u$, $u|_{t=0} = 0$, где α есть непрерывная функция (от t). Значит, $u = 0$ на характеристике. Тем самым, $u_1 = u_2$ в области $B_1 \subset B$, состоящей из характеристик вида $(17)_1$. Поменяв ролями u_1 и u_2, получим то же для области $B_2 \subset B$ из характеристик вида $(17)_2$, соответствующих u_2. Чтобы довести рассуждение до конца, придется продублировать рассуждения выше. А именно: докажем, что $B_1 = B_2 =: B_*$. В самом деле, если $x_0 \in B_1$, то характеристика γ_1 уравнения (13), проходящая через точку $(x_0, u_1(x_0))$, проходит сквозь Γ_1. Ее проекция есть решение $(17)_1$ и потому (по определению B_1) проходит через S, т. е. через некоторую его точку y, т. е. γ проходит через S_1, а именно, через точку $(y, u_1(y)) = (y, u_2(y))$. Характеристика (13), начинающаяся в этой точке, совпадает с γ_1 и проходит сквозь обе ИГ, но поскольку $x_0 \in B_1 \subset B$ лежит в области определения u_2, то γ_1 проходит через $(x_0, u_2(x_0))$, но на всем ее протяжении $u_1 = u_2$, и (14) совпадает с $(17)_1$ и $(17)_2$, т. е. характеристика $(17)_2$ проходит через x_0, а это и значит $x_0 \in B_2$. И наоборот, аналогично $B_2 \subset B_1$. Теперь легко видеть, что $B_* = \Omega_* \cap B$, а обе Γ_k суть кусок Γ_*, проекция которого есть B. Конечно, на самом деле, предположив существование решений на B, мы неизбежно подразумевали, что $B \subset \Omega_0$ для некоторой Ω, т. е. Γ_* однозначно проецируется на B.

В заключение отметим, что ПИ могут применяться и для решения уравнения (13) (в том числе (10)), и задачи Коши для него. Напомним, что $G = \{(x, u)\}$ есть область определения и гладкости коэффициентов уравнения (13) (и где $f \neq 0$).

Лемма. Пусть функция $v = v(x, u)$ является решением линейного однородного уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x,u)\frac{\partial v}{\partial x_i} + r(x,u)\frac{\partial v}{\partial u} = 0, \tag{18}$$

в области G, а функциональное уравнение $v(x,u) = 0$ имеет решение $u = U(x)$ в некоторой области $\Omega = \{x\}$, причем $U \in C^1(\Omega)$, $\dfrac{\partial v}{\partial u}(x, U(x)) \neq 0$ при $x \in \Omega$. Тогда U есть решение (13) в Ω.

Доказательство. Имеем по построению: $v \in C^1(G)$, а при $x \in \Omega$ верно $(x, U(x)) \in G$, поэтому

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i} v(x, U(x)) = \frac{\partial v}{\partial x_i}(x, U(x)) + \frac{\partial v}{\partial u}(x, U(x))\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}.$$

Применение операции $\dfrac{1}{v_u(x, U(x))}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(x, U(x))\times$ к полученному равенству с учетом (18) дает требуемое. □

И наоборот, пусть U есть решение (13) в Ω, так что $(x, U(x)) \in G$ при $x \in \Omega$. Выберем в Ω произвольное гладкое многообразие Σ размерности $n-1$ и построим n-мерное многообразие $\Sigma_1 = \{\, (x,u) \in G \mid x \in \Sigma \,\}$. Рассмотрим задачу Коши для (18) с данными $v|_{\Sigma_1} = u - U(x)$. Проверим, что ее решение можно построить при подходящем выборе Σ. Гладкость Σ_1 и данных Коши очевидна, так что остается обеспечить некасание (f, r) и Σ_1. Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ — базис касательных векторов к Σ. Тогда базис касательных векторов к Σ_1 состоит из векторов $(\tau_k, 0)$ и вектора $(0, \ldots, 0, 1)$. Условие некасания вектора (f, r) многообразию Σ_1 означает невырожденность матрицы $\begin{bmatrix} \{\tau_k\} & 0 \\ f & r \\ 0\ldots0 & 1 \end{bmatrix}$, что эквивалентно некасанию вектора $f(x,u)$ многообразию Σ при всех $(x,u)\in\Sigma_1$. Чтобы это обеспечить, выберем сначала Σ так, чтобы $f(x,U(x))$ нигде не касался Σ (т. е. $f(x,u)$ не касался Σ при всех $(x,u)\in\Sigma_2=\{x\in\Sigma,\ u=U(x)\}$). Это можно сделать, т. к. $f(x,U(x))$ есть заданное поле направлений в Ω, при этом, возможно, придется взять Σ достаточно малым.

[Простейший прием: выберем любую $x_0\in\Omega$, найдем $f(x_0,U(x_0))$ и возьмем в качестве Σ гиперплоскость с нормалью $f(x_0,U(x_0))$. Тогда угол между $f(x,U(x))$ и Σ прямой в точке x_0, а значит ненулевой в некоторой ее окрестности.]

Но тогда, сужая при необходимости Σ_1 до некоторой окрестности многообразия Σ_2, можно добиться некасания $f(x,u)$ многообразию Σ при всех $(x,u)\in\Sigma_1$. Теперь можно построить требуемое решение $v\in C^1$(окрестность Σ_1). При этом $v_u|_{\Sigma_1}=1\neq0$, так что ввиду непрерывности $v_u\neq0$ в некоторой (возможно, меньшей) окрестности Σ_1. Поскольку ИГ $\{u=U(x)\}$ уравнения (13) состоит из отрезков характеристик (13), которые суть «линейные характеристики» для (18), а вдоль них $v=\text{const}$, то из $v=0$ на Σ_2 (и больше нигде на Σ_1) следует $v=0$ на указанной ИГ (и только на ней). Таким образом, по заданному решению U уравнения (13) мы построили решение (18), удовлетворяющее условиям Леммы (правда, локально), так что решением соответствующего функционального уравнения $v(x,u)=0$ является как раз U.

Следовательно, решение (13) (локально) эквивалентно решению (18) с последующим решением уравнения $v(x,u)=0$.

[условия $U \in C^1(\Omega)$, $\dfrac{\partial v}{\partial u}(x,U(x)) \neq 0$ в Лемме при этом не ограничивают общности, т. к. являются соответственно непременным атрибутом искомого решения и условием разрешимости функционального уравнения.]

Но общее решение (18) имеет вид
$v(x,u) = F(v_1(x,u), \dots v_n(x,u))$, где v_k — система независимых ПИ характеристической системы (14), (15), а $F \in C^1$ — произвольная функция. В итоге общее решение (13) находится из неявной формулы $F(v_1(x,u), \dots v_n(x,u)) = 0$ (локальной — в окрестности любой точки из G). Она может также применяться для (вообще говоря, локального) решения задачи Коши в тех же условиях, что и в теореме существования с помощью характеристик (это уже упоминалось выше для линейного однородного УЧП), но это мы строго обосновывать не будем в общем случае. А для линейного однородного УЧП это сделать особенно просто:

Упражнение. Доказать, что в условиях теоремы существования (для (10), (9)) в случае (6) из формулы (7), подставленной в (9), однозначно локально находится F, а значит и само решение задачи (6), (9).

Обоснование для преподавателя. Имеем
$F(u_1(\psi(\tau)), \dots, u_{n-1}(\psi(\tau))) = u_0(\tau)$. Надо найти $F(s_1, \dots, s_{n-1})$. Для этого обратим равенство $s = u(\psi(\tau))$ относительно τ. Надо показать,

что на S всюду $0 \neq \det\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) = \det\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right)$. Но иначе найдутся $a \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ и точка $x_0 \in S$, в которой $0 = a\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = (\nabla_x v)\frac{\partial \psi}{\partial \tau}$, где $v = a \cdot u$ — тоже ПИ (3), т. е. решение (6) (очевидно, нетривиальный ввиду независимости u_k). Таким образом, $(\nabla_x v)(x_0)$ ортогонален и $f(x_0)$, и всем касательным векторам $\frac{\partial \psi_k}{\partial \tau}$ к S, но тогда $f(x_0)$ касается S.

$\Big[$Некоторые дополнения о квазилинейных (в т. ч. системах) и нелинейных УЧП I порядка, элементы общей теории УЧП (произвольного порядка) и углубленное изучение некоторых классов УЧП (на примере нескольких уравнений математической физики) будут предложены в следующем курсе — «Уравнения математической физики».$\Big]$

Список литературы

Обязательная литература,
на которой в основном построен курс

1. *Бибиков Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Высшая школа, 1991.
2. *Мамонтов А. Е.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие. — Новосибирск: Изд. НГПУ, 2010. — Ч. 1: Элементы общей теории.
3. *Мамонтов А. Е.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие. — Новосибирск: Изд. НГПУ, 2011. — Ч. 2: Линейные уравнения.
4. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1982.

Обязательная литература,
содержащая небольшие фрагменты курса

5. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
6. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. — М.: ИЛ, 1962.

Дополнительная литература

7. *Годунов С. К.* Квадратичные функции Ляпунова. — Новосибирск: НГУ, 1982.

8. *Годунов С. К.* Матричная экспонента, матрица Грина и условие Лопатинского. — Новосибирск: НГУ, 1983.

9. *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: учеб. пособие. — Новосибирск: НГУ, 1994. — Т. 1: Краевые задачи.

10. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во МГУ, 2002.

11. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1959.

Дополнительная литература для углубленного изучения

12. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.; Ижевск: РХД, 2000.

13. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967.

14. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1976.

15. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969.

16. *Блохин А. М.* Равномерная ограниченность матричной экспоненты: метод. указания к курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения». — Новосибирск: НГУ, 1986.

17. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967.

18. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.; Л.: Гостехиздат, 1949.

19. *Семенко Е. В.* Дифференциальные уравнения, курс лекций и практических занятий: учеб. пособие. — Новосибирск: Изд. НГПУ, 2007.

20. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.

21. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964.

22. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: УРСС, 2002.

23. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986.

Задачники

24. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / под ред. С. К. Годунова. — Новосибирск: НГУ, 1986.

25. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.; Ижевск: РХД, 2000.

Список аббревиатур и обозначений

ДУ	—	дифференциальное уравнение
ИГ	—	интегральная гиперповерхность
ИК	—	интегральная кривая
ИП	—	инвариантное подпространство
ММ	—	матрица монодромии
НР	—	непродолжаемое решение
ОДУ	—	обыкновенное дифференциальное уравнение
ОПР	—	ω-периодическое решение (строго говоря, аббревиатура некорректна, т. к. ω здесь означает величину периода, но в рамках § 2, где эта аббревиатура используется, других периодов не встречаются, и недоразумений не возникает)
ОТ	—	особая точка
ПВ	—	присоединенный вектор
ПИ	—	первый интеграл
СВ	—	собственный вектор
СК	—	система координат
СЧ	—	собственное число
ТК—П	—	теорема Коши—Пикара
ТоДЗ	—	теорема о дифференциальной зависимости (решений ОДУ от параметров)
ToНЗ	—	теорема о непрерывной зависимости (решений ОДУ от параметров)
ТПК	—	теорема о покидании компакта
УЧП	—	уравнение в частных производных
ФЛ	—	функция Ляпунова

ФМР	—	фундаментальная матрица решений
ФП	—	фазовое пространство
ФПт	—	фазовый портрет
ХП	—	характеристический показатель

$:=$, $=:$	—	равенство по определению (обозначению) — двоеточие со стороны определяемого символа; или замена переменной с сохранением ее старого обозначения
$\lvert\cdot\rvert$	—	норма конечномерного объекта (вектора из $\mathbb{R}^n$, матрицы и т. п.) — такое обозначение полезно в частности для избежания путаницы при нормировке «двухступенчатых» объектов (например, матричных функций)
$\lVert\cdot\rVert$	—	норма бесконечномерного объекта (функции и т. п.)
$(\cdot)^*$	—	транспонирование матрицы (вообще говоря, прямоугольной, включая векторы)
$\subset$, $\supset$	—	вложения множеств (включая совпадение)
$\nearrow$, $\searrow$	—	возрастание или убывание величины (строгое или нестрогое в зависимости от контекста)
∂A	—	граница множества A
$\overline{A}$	—	замыкание множества A

$[a]$	—	целая часть вещественного числа a (если не просто скобки, в зависимости от контекста)
$B(x,R)$	—	открытый шар с центром в точке x и радиусом R
$B[x,R]$	—	замкнутый шар с центром в точке x и радиусом R (обозначение не вполне удачное, но прижившееся, и, к сожалению, удобное ввиду краткости)
$\dim$	—	размерность (вектора или матрицы)
$\mathrm{ex}_k(z)$	=	$\sum\limits_{m=0}^{k} \dfrac{z^m}{m!}$
$L_1(G)$	—	пространство интегрируемых (по Лебегу) на G функций с нормой $\lVert u\rVert_{L_1(G)} = \int\limits_G \lvert u\rvert dG$
$\mathbb{R}^+$	—	$[0,+\infty)$ или $(0,+\infty)$ в зависимости от контекста
$S(x,R)$	—	сфера с центром в точке x и радиусом R
$(t_-(\varphi), t_+(\varphi))$	—	интервал существования решения (обычно НР) φ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Мамонтов Александр Евгеньевич

ЛЕКЦИИ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

В трёх частях

Часть 3

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

Учебное пособие

В авторской редакции

Компьютерная верстка — *А.Е. Мамонтов*

Подписано в печать 30.03.2012. Формат бумаги 60 × 84/16.
Печать RISO. Уч.-изд. л. 7,31. Усл. печ. л. 6,80.
Тираж 100 экз.
Заказ № 14.

Педуниверситет, 630126, Новосибирск, ул. Вилюйская, 28