МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОУ ВПО «НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Е. Мамонтов

ЛЕКЦИИ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

ЧАСТЬ 2

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Утверждено Редакционно-издательским советом НГПУ
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК 2011

УДК 517.91
ББК В161.61
М226

Рецензенты:
доктор физико-математических наук,
профессор Новосибирского государственного
педагогического университета
В.Л. Селиванов;
доктор физико-математических наук,
профессор Новосибирского государственного
педагогического университета
Е.В. Семенко;
доктор физико-математических наук, профессор
Новосибирского государственного университета
В.Н. Старовойтов

Мамонтов, А. Е.
М226 Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям: в 3 ч. Ч.2: Линейные уравнения: учебное пособие / А. Е. Мамонтов. — Новосибирск: Изд. НГПУ, 2011. — 189 с.

В учебном пособии изложены основы теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений: свойства и алгоритмы построения решений задачи Коши, краевых задач (как на конечных, так и на бесконечных интервалах), уравнений с периодическими коэффициентами, задачи Штурма—Лиувилля.

Пособие предназначено для углубленного изучения курса «Дифференциальные уравнения» студентами, обучающимися на математическом факультете Новосибирского государственного педагогического университета.

УДК 517.91
ББК В161.61

Предисловие

Учебное пособие предназначено для студентов математического факультета Новосибирского государственного педагогического университета, изучающих обязательный курс «Дифференциальные уравнения», в том числе для желающих познакомиться с этим курсом в расширенном объеме. Вниманию читателей предлагаются основные понятия и результаты, составляющие фундамент теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений: свойства и алгоритмы построения решений задачи Коши, краевых задач (как на конечных, так и бесконечных интервалах), уравнений с периодическими коэффициентами (все это как для систем первого порядка, так и для уравнений высокого порядка); отдельный параграф посвящен спектральной задаче Штурма—Лиувилля, имеющей, в частности, приложения в уравнениях с частными производными.

Данное пособие является второй частью трехтомного цикла лекций по предмету «Обыкновенные дифференциальные уравнения»; в первой части (томе) «Элементы общей теории» [2] читатель может найти необходимый базис для правильного освоения материала настоящего пособия. Следует отметить, что в настоящем томе имеются некоторые особенности по сравнению с остальными томами цикла, а именно: он состоит из двух неравных частей, имеющих различное предназначение. Это связано с тем, что именно линейная теория играет наибольшую роль при более элементарном изложении курса обыкновенных дифференциальных уравнений.

Первая часть, состоящая из параграфов 1–6, представляет собой собственно вторую часть упомянутого трехтомного цикла. Этот материал (как и весь цикл) рассчитан на достаточно хорошо подготовленного читателя. Такой читатель может опустить чтение оставшейся части (параграфы 7–9) пособия и сразу перейти к следующей, третьей, части (тому) цикла. Сделаем необходимые пояснения по организации этой части пособия (ее стиль, впрочем, общий со всем циклом лекций).

Важную роль играют упражнения, в большом количестве включенные в текст. Читателю настоятельно рекомендуется прорешивать их «по горячим следам», что гарантирует усвоение материала и послужит тестом. Более того, нередко эти упражнения восполняют логическую ткань, т. е. без их решения не все положения будут строго доказаны.

В квадратных скобках посередине текста вынесены замечания, играющие роль комментариев (расширенных или побочных пояснений). Лексически эти фрагменты прерывают основной текст (т. е. для связного чтения их нужно «не замечать»), но все же они нужны в качестве пояснений. Другими словами, эти фрагменты нужно воспринимать так, как будто они вынесены на поля.

В тексте встречаются отдельно рубрицированные «замечания для преподавателя» — они могут быть опущены при чтении обучающимися, но полезны для преподавателя, который будет использовать пособие, например, при чтении лекций — они помогают лучше понять логику курса и указывают направление возможных совершенствований (расширений) курса. Впрочем, освоение этих замечаний обучающимися можно только приветствовать.

Аналогичную роль играют «обоснования для преподавателя» — они в крайне сжатой форме дают доказательство некоторых положений, предлагаемых читателю в качестве упражнений.

Вторая часть настоящего тома, состоящая из параграфов 7–9, рассчитана на менее подготовленного читателя, который, возможно, намерен и вовсе ограничиться линейной теорией (причем в уменьшенном объеме) при своем знакомстве с обыкновенными дифференциальными уравнениями. В этой «элементарной» части независимо и «с нуля» излагается теория линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вместе с необходимыми вспомогательными сведениями. Таким образом, даже обладая достаточно слабыми начальными познаниями, можно «в первом приближении» познакомиться с линейной теорией, изучив только параграфы 7–9 и пропустив остальной текст. С целью наиболее эффективного освоения описанного «элементарного курса» в параграфе 9 приведены задачи, составляющие «практическое сопровождение теории» (большей частью они заимствованы из [24] или составлены по материалам этого задачника). По «продвинутому варианту» курса, изложенному в параграфах 1–6, аналогичного сборника задач не приводится, т. к. предполагается, что необходимый для этого круг задач слишком широк, и уместнее сослаться на специализированные сборники задач, например те, которые приведены в списке литературы. В качестве еще одного варианта доступного изложения теории дифференциальных уравнений (включая обширный круг задач) отметим пособие [18].

Таким образом, два описанных раздела настоящего пособия по большей части независимы друг от друга, хотя между ними имеется и определенная связь, а именно: параграфы 1–6 могут служить сборником доказательств и расширенного изложения для материала параграфов 7–9, и наоборот, параграфы 7–9 могут оказать помощь читателю со средним уровнем подготовки, взявшемуся изучать параграфы 1–6, но нуждающемуся в дополнительных разъяснениях.

Наиболее употребительные (ключевые) термины используются в виде аббревиатур, список которых для удобства приведен в конце. Там же приведен список математических обозначений, встречающихся в тексте, но не относящихся к самым употребительным (и/или не понимаемым однозначно в литературе).

Символ $\square$ означает конец доказательства, формулировки утверждения, замечания и т. п. (там, где это нужно во избежание путаницы).

Нумерация формул независимо ведется в каждом параграфе. При ссылке на часть формулы используются индексы, например $(2)_3$ означает 3-ю часть формулы (2) (частями формулы считаются фрагменты, разделенные типографски пробелом, а с логических позиций — связкой «и»). В формулах, представляющих линейные уравнения (алгебраические и дифференциальные), т. е. такие, в которых имеет смысл говорить о «правой части» (свободном члене), нижний индекс 0 означает соответствующее однородное уравнение, например: символ $(\mathrm{N})_0$ означает однородное уравнение, соответствующее уравнению (N), а $(\mathrm{N})_{k0}$ — однородное уравнение, соответствующее k-му уравнению в (N).

Данное пособие не может совершенно заменить глубокого изучения предмета, которое требует самостоятельных упражнений и чтения дополнительной литературы, например, той, список которой приведен в конце пособия. Однако автор попытался изложить основные положения теории в достаточно сжатой форме, пригодной для лекционного курса. В связи с этим следует отметить, что при чтении лекционного курса по данному пособию (параграфы 1–6) на него уходит около 14 лекций.

Планируется издание еще одной части (тома), продолжающей данное пособие и завершающей тем самым цикл лекций по предмету «Обыкновенные дифференциальные уравнения»: часть 3 (дальнейшая теория нелинейных уравнений, уравнения в частных производных первого порядка).

Автор считает своим приятным долгом выразить здесь благодарность профессору НГУ Геннадию Владимировичу Демиденко, общение с которым (в том числе в качестве слушателя его лекций) оказало на автора значительное влияние при составлении настоящего цикла лекций, а особенно его второй части, представленной в данном пособии.

§ 1. Общие свойства нормальной линейной системы I порядка и одного линейного ОДУ высокого порядка

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(t), \tag{1}$$

где $\dim x = \dim h = n$, $\dim A = n \times n$, $A, h \in C(a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. В Части 1 мы доказали существование и единственность непродолжаемого решения задачи Коши для (1): $x(t_0) = x_0$ при всех $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, причем непродолжаемое решение существует на всем (a, b). Далее будем считать, что рассматриваются только непродолжаемые решения. Вообще говоря, допускаются и комплексные решения, хотя коэффициенты, как правило, рассматривают вещественные.

Оказывается, линейность (1) является весьма сильным свойством, дающим много информации о решениях. В Части 2 мы будем эту информацию собирать. Как мы заметили в § 3 Части 1 (для $n = 1$), удобно различать однородную систему:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{2}$$

и неоднородную (1). Удобно начать изучение с (2).

Предложение. Решения (2) образуют линейное пространство (подпространство в $C^1(a, b)$).

Доказательство. очевидно: если $x_{1,2}$ — решения (2), то $x_3 = C_1x_1 + C_2x_2$ тоже есть решение (2) при любых постоянных $C_{1,2}$ (вообще говоря, комплексных). $\square$

Естественно поставить вопрос о размерности этого пространства (напомним, что все $C^1(a,b)$ бесконечномерно). Для этого нужно ввести (точнее, напомнить, т. к. это общее понятие в линейных пространствах) понятие линейной зависимости для системы функций:

Определение. Функции $x_1,\dots,x_k$ ($\dim x_j = n$) называются *линейно независимыми* на (α,β), если из того, что $\sum_{j=1}^{k} c_j x_j \equiv 0$ на (α,β) с некоторыми (комплексными) постоянными c_j, следует, что все $c_j = 0$. В противном случае эти функции называются *линейно зависимыми* на (α,β). $\square$

$\left[\text{Пока для краткости забудем о комплексных коэффициентах и решениях и будем говорить только о вещественных.}\right]$

Для постоянных векторов $z_j \in \mathbb{R}^n$ это понятие известно из линейной алгебры, при этом (при $k \leqslant n$)

$[\{z_j\}_{j=1}^k$ линейно независимы$] \Longleftrightarrow \operatorname{rang}\begin{bmatrix} z_1 & \dots & z_k \end{bmatrix} = k$;

если же $\{z_j\}$ зависимы, то максимальное число независимых среди них равно этому рангу.

Для функций это построение требует уточнения. Во-первых, линейная зависимость «зависит от интервала»:

Пример. Функции $\begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} |t| \\ t|t| \end{bmatrix}$ линейно зависимы на $(-1,0)$ и на $(0,1)$, но независимы на $(-1,1)$. $\square$

Во-вторых, зависимость на интервале и в каждой его точке (как векторов) не эквивалентны:

Предложение. [Набор функций $\{x_j\}_{j=1}^k$ линейно зависим на (α,β)] $\Longrightarrow$

[$\forall t_* \in (\alpha,\beta)$ векторы $\{x_j(t_*)\}_{j=1}^k$ линейно зависимы] $\Longleftrightarrow$
[$\forall t_* \in (\alpha,\beta)$ $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_k \end{bmatrix}(t_*) < k$] $\Longrightarrow$
[$\exists t_* \in (\alpha,\beta)$: векторы $\{x_j(t_*)\}_{j=1}^k$ линейно зависимы] $\Longleftrightarrow$
[$\exists t_* \in (\alpha,\beta)$: $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_k \end{bmatrix}(t_*) < k$],
причем обе «$\Longrightarrow$» неверны в обратную сторону.

Доказательство. Все переходы очевидны, нужно лишь предъявить контрпримеры к обратным переходам: для первой «$\Longleftarrow$» это Пример выше, а для второй — следующий

Пример. Векторы $\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 \\ t^2 \end{bmatrix}$ линейно зависимы в точках $t_* = 0, 1$, но это неверно при $t_* \neq 0, 1$. $\square$

Следствие. При $k = n$:
[Набор функций $\{x_j\}_{j=1}^n$ линейно зависим на (α,β)] $\Longrightarrow$
[$\det\begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \equiv 0$ на (α,β)] $\Longrightarrow$
[$\det\begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} = 0$ в какой-нибудь точке $t_* \in (\alpha,\beta)$],
обратные заключения неверны. $\square$

Ключевым моментом в исследовании системы (2) является

Утверждение. Если $\{x_j\}_{j=1}^k$ суть решения (2), то для них все «$\Longrightarrow$» в Предложении становятся верными и в обратную сторону (для любого $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$).

Доказательство. Достаточно доказать (4-е)$\Longrightarrow$(1-е). Если в какой-то $t_* \in (\alpha,\beta)$ верно $\displaystyle\sum_{j=1}^k c_j x_j(t_*) = 0$, где $(c_1,\ldots,c_k) \neq 0$, то функция $x = \displaystyle\sum_{j=1}^k c_j x_j$, таким образом, удовлетворяет $x(t_*) = 0$. Но x является решением (2), и в силу единственности решения задачи Коши получаем $x \equiv 0$ на (α, β), что и требовалось (т. к. c_j не зависят от t). $\square$

Следствие. [Система решений $\{x_j\}_{j=1}^n$ системы (2) линейно независима на (a, b)] $\iff$
[$\det \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \neq 0$ всюду на (a, b)] $\iff$
[$\det \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \neq 0$ хотя бы в одной точке $t_* \in (a, b)$].

Определение. $w = \det \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}$ называется *определителем Вронского* (*вронскианом*) системы $\{x_j\}_{j=1}^n$. $\square$

Таким образом, вронскиан либо всюду равен нулю, либо всюду ненулевой, и его обращение в нуль характеризует линейную зависимость системы решений.

Итак, линейная зависимость/независимость любой системы $\{x_j\}_{j=1}^k$ решений (2) определяется ее зависимостью/независимостью (как системы векторов) в любой фиксированной точке t_*. А поскольку векторы $\{x_j(t_*)\}_{j=1}^k$ можно выбрать независимыми при $k \leqslant n$, и при $k = n$ это будет уже базис в $\mathbb{R}^n$, то размерность пространства решений (2) равна n:

Теорема. Решения (2) образуют пространство размерности n.

Доказательство. Предъявим базис нашего пространства — это система решений $\{x_j\}_{j=1}^n$ системы (2) такая, что в некоторой точке $t_* \in (a, b)$ векторы $\{x_j(t_*)\}_{j=1}^n$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$. Тогда этот набор по Утверждению (Следствию) будет линейно независимым на (a, b). Если добавить к этому набору любое решение x, то получившийся набор будет линейно зависимым в точке t_*, а значит и всюду на (a, b) (с теми же коэффициентами). Другими словами, $x = \sum c_j x_j$ на (a, b), где c_j — коэффициенты разложения $x(t_*)$ по базису $\{x_j(t_*)\}_{j=1}^n$. □

Определение. Базис $\{x_j\}_{j=1}^n$ в пространстве решений (2) называется фундаментальной системой решений (ФСР) для (2) на (a, b). □

Построение ФСР, таким образом, сводится к решению задач Коши

$$\frac{dx_j}{dt} = A(t)x_j; \qquad x_j(t_*) = z_j, \tag{3}$$

где $\{z_j\}$ — базис в $\mathbb{R}^n$ (например, $z_j = e_j$), а $t_* \in (a, b)$ произвольно.

Матрица $X = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{bmatrix}$, соответствующая любому набору функций $\{x_j\}_{j=1}^k$, удобна не только для описания их линейной зависимости, но и для описания их свойств как решений (2). В самом деле, легко видеть, что x_j — решения (2), $j = 1, \dots, k$, тогда и только тогда, когда X — решение матричного уравнения

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X. \tag{4}$$

[Мы это уже видели в конце § 5 части 1, когда объединяли (10) и (16) из столбцов.]

Нам достаточно рассмотреть случай $k = n$, когда X квадратная. Как мы видели выше, если $\{x_j\}_{j=1}^n$ — система решений (2), т. е. X есть решение (4), то вронскиан $w = \det X$ либо всюду нулевой, либо всюду ненулевой, и это характеризует независимость системы $\{x_j\}_{j=1}^n$. Если эта система есть ФСР, то X называется фундаментальной матрицей решений (ФМР) системы (2) на (a,b). Таким образом, ФМР — это такая X, что она удовлетворяет (4) и невырождена всюду на (a,b), или, что эквивалентно, хотя бы в одной точке из (a,b), т. е. в качестве эквивалентного определения ФМР можно взять ее как решение задачи Коши

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \qquad X(t_*) = Z, \tag{5}$$

где $\det Z \neq 0$ (например, $Z = E$). Если $\{x_j\}_{j=1}^n$ есть ФСР, а X — соответствующая ФМР, то любое решение (2) имеет вид $y = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j = Xc$, где $c \in \mathbb{R}^n$. В частности, если Y — матрица из решений $\{y_j\}_{j=1}^n$, то все $y_j = Xc_j$, т. е. $Y = XC$, где C — постоянная матрица (со столбцами c_j); ясно, что $\{y_j\}_{j=1}^n$ есть ФСР (т. е. Y есть ФМР) тогда и только тогда, когда $\det C \neq 0$. Таким образом, доказано

Предложение. Если X_0 — ФМР, то все остальные ФМР имеют вид X_0C, где $\det C \neq 0$; все решения $(5)_1$ имеют вид $X = X_0C$ с любой постоянной матрицей C, а все решения (2) имеют вид $x = X_0c$ с любым постоянным вектором c. □

Итак, ФСР, как базис, не единственна, но все ФСР получаются друг из друга невырожденными перекомбинациями (как это ясно из линейной алгебры), то же касается ФМР.

Зная ФМР, легко выразить явно решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x; \qquad x(t_0) = x_0.$$

В самом деле, $x = X_0c$ — общее решение системы. Подставляя в данные Коши, получим $X_0(t_0)c = x_0$, откуда $c = X_0^{-1}(t_0)x_0$, т. е. $x(t) = X_0(t)X_0^{-1}(t_0)x_0$. Аналогично решение задачи Коши (5) с любой Z дается формулой $X(t)=X_0(t)X_0^{-1}(t_0)Z$. Особенно удобен случай, когда ФМР обладает свойством $Y(t_0)=E$ (Y — матрицант), тогда $x(t)=Y(t)x_0$. Y есть решение (5) с $Z=E$, так что по любой X_0 его можно построить по формуле $Y=X_0X_0^{-1}(t_0)$, что впрочем было ясно и из формулы для x.

Как мы видим, свойства системы решений $\{x_j\}_{j=1}^n$ системы (2) более хорошие, чем просто у произвольной системы функций $\{x_j\}_{j=1}^n$. Возникает вопрос: нельзя ли по заданному набору функций $\{x_j\}_{j=1}^n$ построить систему (2) (т. е. матрицу $A=A(t)$) так, чтобы он был ее решением? Для этого составим матрицу X и напишем желаемое соотношение $X'=AX$. Ясно, что найти отсюда A можно, вообще говоря, лишь если $w=\det X\neq 0$ на некотором (α,β), тогда на этом интервале $A=X'X^{-1}$.

Упражнение. Рассмотреть систему функций $\begin{bmatrix}1\\t\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\t^2\end{bmatrix}$, которая приводилась выше как контрпример. Построить для нее соответствующую (2). Возникает ли противоречие со свойствами вронскиана для систем решений (2)? □

Если $w=0$ или система состоит не из n функций, то требуется дополнительное исследование (этот вопрос традиционно рассматривается на практических занятиях, см. например [24]).

Для практических целей недостаточно формулировки «$w(t_*)\neq 0 \Longrightarrow [w\neq 0$ всюду$]$», а нужно количественное выражение этого факта. Для этого служит

Теорема. (Остроградского—Лиувилля). Для любой системы $\{x_j\}_{j=1}^n$ решений (2) на (a,b) верно $\dfrac{dw}{dt} = w\mathrm{tr}A$, т. е. $w(t) = w(t_0)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{tr}A(s)ds\right)$, где $t_0 \in (a,b)$ — произвольное число.

Лемма. Пусть $Y = Y(t)$ — произвольная дифференцируемая матрица. Тогда

$$\frac{d}{dt}\det Y = \det\begin{bmatrix} y'_{11} & \cdots & y'_{1n} \\ y_{21} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} + \cdots + \det\begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y'_{n1} & \cdots & y'_{nn} \end{bmatrix}.$$

Доказательство. (Леммы). $\det Y = \sum\limits_{k=1}^{n} y_{ik}\Delta_{ik}(\{y_{lm}\})$, где i может быть любым, а Δ_{ij} — алгебраическое дополнение к y_{ij}. Поэтому

$$\frac{d}{dt}\det Y = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \det Y}{\partial y_{ij}}\frac{dy_{ij}}{dt} =$$

[Фиксируем i, j и применим формулу для $\det Y$ с данным i. Ясно, что в этой формуле y_{ij} встречается только один раз, а именно при $k = j$, т. к. в Δ_{ik} вообще не участвуют элементы i-й строки.]

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \Delta_{ij}y'_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \det\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ y'_{i1} & \cdots & y'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Доказательство. (Теоремы Остроградского—Лиувилля). $w = \det X$, $X = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} = \{(x_j)_i\}_{i,j=1}^n$, по Лемме

$$\frac{dw}{dt} = \sum_{i=1}^{n} w_i, \text{ где } w_i = \det \begin{bmatrix} & (x_j)_m & \\ (x_1)'_i & \dots & (x_n)'_i \\ & (x_j)_m & \end{bmatrix} =$$

$$\left[x'_j = Ax_j, \text{ т. е. } (x_j)'_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(x_j)_k \qquad\qquad\qquad \right]$$

$$= \det \begin{bmatrix} & (x_j)_m & \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{ik}(x_1)_k & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} A_{ik}(x_n)_k \\ & (x_j)_m & \end{bmatrix} {\scriptstyle (\leftarrow m=i)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \det \begin{bmatrix} & (x_j)_m & \\ (x_1)_k & \dots & (x_n)_k \\ & (x_j)_m & \end{bmatrix} {\scriptstyle (\leftarrow m=i)} =$$

[При $k \neq i$ i-я строка совпадает с какой-то другой, так что соответствующий $\det = 0$]

$= A_{ii} \det X = A_{ii} w$. В итоге $\dfrac{dw}{dt} = (\mathrm{tr} A)w$. □

Из теоремы Остроградского—Лиувилля следует, что вронскиан либо всюду нулевой, либо всюду ненулевой, что мы итак знали, но теперь с количественной оценкой. Тем самым мы полностью изучили необходимые свойства (2). Перейдем к (1).

Если ФМР X системы (2) известна, то решения системы (1) при любом h допускают явное представление. Для его получения можно указать 2 (по сути, эквивалентных) способа, которые мы уже изучили при $n = 1$ в § 3 Части 1.

Способ I: вариация постоянных. Общее решение (2) имеет вид $x = Xc$, теперь решение (1) ищем в виде $x(t) = X(t)c(t)$

(так можно записать любую функцию ввиду невырожденности X). Подстановка в (1) дает $Xc' = h$, что эквивалентно $c(t) = c_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(s)h(s)ds$, т. е.

$$x(t) = X(t)\left(c_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(s)h(s)ds\right) \tag{6}$$

— общее решение (1). В частности, если требуется решить задачу Коши $x(t_0) = x_0$, то из (6) легко находим $c_0 = X^{-1}(t_0)x_0$, так что

$$x(t) = X(t)\left(X^{-1}(t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(s)h(s)ds\right). \tag{7}$$

Способ II: интегрирующий множитель. Попробуем найти такую матрицу Y, чтобы умножение на нее слева превращало левую часть уравнения $x' - Ax = h$ в полную производную: $Yh = Yx' - YAx = (Yx)'$, если $Y' = -YA$. По аналогии с $n = 1$, можно предположить, что годится $Y = X^{-1}$. И в самом деле, имеем:
$0 = (XX^{-1})' = X'X^{-1} + X(X^{-1})' = A + X(X^{-1})'$, т. е. $(X^{-1})' = -X^{-1}A$. Итак, система (1) эквивалентна системе $(X^{-1}x)' = X^{-1}h$, которая тривиально решается и дает те же результаты, что и в способе I. Если решается сразу задача Коши $x(t_0) = x_0$, то удобно действовать не через общее

решение, а сразу брать определенный $\int\limits_{t_0}^{t}$:

$$X^{-1}(t)x(t) - X^{-1}(t_0)x_0 = \int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(s)h(s)ds,$$

что дает (7).

Замечание. Попутно доказано, что $(X^{-1})^*$ есть ФМР системы $Z' = -A^*Z$. В частности, отсюда следует, что X^{-1} непрерывна и даже класса C^1. Также теперь ясно, что левые матричные уравнения вида $Y' = YB$ сводятся к правым уравнениям транспонированием. То же касается векторных уравнений с векторами-строками (ФМР для них будет состоять из строк ФСР и удовлетворять левому матричному уравнению, все это сводится к столбцам и правым уравнениям транспонированием). □

Заметим, что (6) подтверждает общий факт
ОРНУ=ЧРНУ+ОРОУ.

[этот вопрос заслуживает более подробного рассмотрения, по аналогии с геометрией: линейные пространства и многообразия.]

Другими словами, если $x_{1,2}$ — решения (1), то $x = x_2 - x_1$ — решение (2), т. е. $x_2 = x + x_1$, и если x_1 фиксировано (ЧРНУ), то меняя x (ОРОУ), получим все x_2 (ОРНУ). Таким образом, если известна ФМР (2), то решение (1) сводится к поиску ЧРНУ (1). Помимо (6), для этого могут быть и другие приемы (см. ниже), что бывает полезно, если ФМР все же неизвестна, а нужно найти ЧРНУ, или почему-то применение (6) нецелесообразно.

Из теоремы о непрерывной зависимости решений ОДУ от параметров мы знаем, что решение задачи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{8}$$

непрерывно зависит от t_0 и x_0, но вывести из нее непрерывную зависимость от A и h уже́ сложнее, и к тому же естественно воспользоваться спецификой ситуации и вывести явную оценку. Достаточно рассмотреть $t \geqslant t_0$.

Этап I: оценка решения (8) по норме. Задача (8) эквивалентна уравнению $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Big(A(s)x(s) + h(s) \Big) ds$, из которого получаем $|x(t)| \leqslant |x_0| + \int\limits_{t_0}^{t} \Big(|A(s)| \cdot |x(s)| + |h(s)| \Big) ds$. По лемме Гронуолла (см. § 5 Части 1) получаем

$$|x(t)| \leqslant |x_0| \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} |A(s)| ds \right) + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} |h(\xi)| \exp\left(\int\limits_{\xi}^{t} |A(s)| ds \right) d\xi. \tag{9}$$

Этап II: оценка непрерывной зависимости решения от x_0, A и h. Пусть

$$\frac{dx_k}{dt} = A_k(t)x + h_k(t), \qquad x_k(t_0) = x_{0k}, \qquad k = 1, 2.$$

Тогда для $x = x_1 - x_2$ имеем: $x(t_0) = x_{01} - x_{02}$;

$$\frac{dx}{dt} = A_1 x_1 - A_2 x_2 + h_1 - h_2 = \tag{10}$$

$$= A_1 x + [(A_1 - A_2)x_2 + (h_1 - h_2)].$$

Ввиду этапа I получаем

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant |x_{01} - x_{02}| \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} |A_1(s)| ds\right) +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \Big[|A_1(\xi) - A_2(\xi)| \cdot |x_2(\xi)| + |h_1(\xi) - h_2(\xi)| \Big] \times \tag{11}$$

$$\times \exp\left(\int\limits_{\xi}^{t} |A_1(s)| ds\right) d\xi.$$

В свою очередь, для $|x_2(\xi)|$ есть оценка вида (9), так что (11) позволяет оценить $|x_1 - x_2|$ через $|A_1 - A_2|$, $|x_{01} - x_{02}|$ и $|h_1 - h_2|$, например, так: ограничимся любым отрезком $[t_0, t_1] \subset (a, b)$, на нем $|x_2| \leqslant C$, $\left|\int\limits_{t_0}^{t} |A_1(s)| ds\right| \leqslant C$, так что (11) дает

$$\|x_1 - x_2\|_{C[t_0,t_1]} \leqslant C(t_1, A_{1,2}, h_2, x_{02}) \times \tag{12}$$

$$\times \Big(\|A_1 - A_2\|_{C[t_0,t_1]} + \|h_1 - h_2\|_{C[t_0,t_1]} + |x_{01} - x_{02}| \Big),$$

а тогда из (10) получается такая же оценка и для $\|x_1 - x_2\|_{C^1[t_0,t_1]}$. $\square$

Тем самым мы завершили исследование линейных систем (1), насколько это возможно в общем виде (на практике трудность состоит в нахождении ФМР, которую здесь мы «считали известной»). Как говорилось в Части 1, любую систему ОДУ можно свести к системе I порядка. Легко видеть при этом, что если исходная система была линейной, то и итоговая система I порядка будет линейной. Так что для линейных систем любого порядка не требуется отдельной теории, а она совпадает с уже́ изложенной. Однако, принято все же рассматривать отдельно случай 1 линейного ОДУ высшего порядка:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = r(t) \tag{13}$$

ввиду его важности и удобства получающихся следствий из общей теории для их непосредственного применения (особенно это будет видно на частном случае $a_k = \text{const}$, рассматриваемом в § 2). Сразу введем обозначение $P_n(t, \lambda) = \lambda^n + a_{n-1}(t)\lambda^{n-1} + \cdots + a_0(t)$ — так наз. *символ* дифференциального оператора уравнения (13). Тогда (13) можно записать в виде $P_n\left(t, \dfrac{d}{dt}\right) y = r$.

[Отметим, что операторы d/dt и $\times a_i$ не коммутируют.]

Общая процедура сведения к системе I порядка в данном случае примет следующий вид. Обозначим

$x = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})^*$, тогда (13) примет вид (1), где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E_{n-1} \\ -a_0 & \cdots - a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ r \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Ясно, что $A, h \in C(a, b) \iff$ все $a_k, r \in C(a, b)$. Далее будем считать это условие выполненным. По построению, если $y \in C^n(a, b)$ есть решение (13), то
$x = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})^* \in C^1(a, b)$ есть решение (1) в условиях (14). И наоборот, если $x \in C^1(a, b)$ есть решение (1) в условиях (14), то x имеет вид $x = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})^*$ с некоторой $y \in C^n(a, b)$, и y есть решение (13). В указанном смысле (13) эквивалентно (1), (14).

Учитывая постановку задачи Коши для (1), получаем, что задача Коши для (13) должна иметь вид:

$$y(t_0) = y_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \tag{15}$$

и под решением этой задачи следует понимать $y \in C^n(a, b)$. Из полученных нами общих результатов для (1) получаем теорию для (13). А именно: при любых $y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ и $t_0 \in (a, b)$ задача Коши (13), (15) имеет единственное непродолжаемое решение на (a, b).

Все, что было сказано до сих пор (за исключением глобальности) верно и для нелинейных уравнений высокого порядка.

Посмотрим, как общие факты для (1) выглядят в случае (13). Рассмотрим сначала частный случай однородного уравнения $(13)_0$: $r = 0$. Тогда снова решения $(13)_0$ образуют линейное пространство. Это ясно непосредственно из (13). Вопрос о размерности этого пространства легко решить с помощью (1), (14). Очевидно, что решения $y_1, \dots y_n$ уравнения $(13)_0$ линейно независимы на (a, b) тогда и только тогда, когда независимы соответствующие вектор-функции $x_j = (y_j, y'_j, \dots, y_j^{(n-1)})^*$, к которым применяем теорию для системы (2) и получаем, что независимость этих векторов как функций эквивалентна независимости значений в каждой точке и эквивалентна независимости значений в какой-то одной точке. Получаем, что так наз. *матрица Вронского* уравнения $(13)_0$: $\begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$ (где y_k — любые решения $(13)_0$) либо всюду вырождена, либо всюду невырождена, и это полностью характеризует зависимость решений $y_1, \dots y_n$. Более того, для детерминанта w этой матрицы (вронскиана) верна теорема Остроградского—Лиувилля:

$$\frac{dw}{dt} = -wa_{n-1}, \quad \text{т. е.} \quad w(t) = w(t_0) \exp\left(- \int\limits_{t_0}^{t} a_{n-1}(s) ds \right).$$

Поскольку вектору $(y, y', \dots, y^{(n-1)})^*$ можно назначить не более n линейно-независимых значений, то размерность пространства решений $(13)_0$ равна n, и его базис (ФСР) можно построить как решение $(13)_0$ с начальными векторами $(y, y', \dots, y^{(n-1)})^*(t_0)$, образующими базис в $\mathbb{R}^n$, например, $e_1, \dots e_n$. Роль ФМР здесь играет матрица Вронского, построенная на ФСР.

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение (13). Здесь снова действует принцип ОРНУ=ЧРНУ+ОРОУ, т. е. если известна ФСР $(13)_0$, то остается лишь найти одно решение (13). Для этого существуют некоторые приемы. В общей ситуации

$$\left[\begin{array}{l}\text{в частных случаях, например, } a_j = \text{const}, \text{ есть дополни-}\\ \text{тельные методы — см. § 2.}\end{array}\right]$$

они сводятся к одному, который можно изложить «двумя способами».

[при этом, правда, по сути сразу строится ОРНУ.]

Способ I. Общее решение (1), как мы видели выше, имеет вид

$$x(t) = X(t)\left(c + \int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(s)h(s)ds\right), \text{ где } X \text{ — ФМР } (1)_0{=}(2).$$

В нашем случае X есть матрица Вронского для $(13)_0$, причем нас интересует только 1-й элемент $x_1 = y$. Получим

$y(t) = X_1(t)\cdot c+\int\limits_{t_0}^{t}(X(t)X^{-1}(s))_{1n}r(s)ds$. Но $X_1(t)\cdot c = \sum c_iy_i$ есть ОРОУ (что итак было ясно), а искомое

ЧРНУ$=\int\limits_{t_0}^{t}(X(t)X^{-1}(s))_{1n}r(s)ds$. Если $y_0 = \cdots = y_{n-1} = 0$, то $x(t_0) = 0$, т. е. $c = 0$, и это ЧРНУ есть решение (13), (15). Эта формула неудобна тем, что для ее применения надо считать всю матрицу Вронского X, да еще и обратную к ней. Далее будут указаны случаи, в которых эта процедура упрощается.

Способ II: вариация постоянных. Метод вариации постоянных для системы (1) в условиях (14) примет вид: $x = Xc$, $Xc' = h$, где $X = \begin{bmatrix} z \\ \dots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix}$ — матрица Вронского, а $z = (z_1, \dots, z_n)$ — ФСР уравнения $(13)_0$.

Это значит, что решение (13) ищется в виде $y = \sum c_i(t) z_i(t)$, где $z \cdot c' = \dots = z^{(n-2)} \cdot c' = 0$, $z^{(n-1)} \cdot c' = r$, как обычно и пишут.

Замечание для преподавателя. Можно еще так (хотя более громоздко, но непосредственно в терминах уравнения (13)): ищем решение (13) в виде $y = \sum c_i(t) z_i(t) = z(t) \cdot c(t)$, где $\{z_i\}$ — ФСР $(13)_0$ (т. е. z есть вектор-строка). Потребуем, чтобы $z \cdot c' = \dots = z^{(n-2)} \cdot c' = 0$. Тогда $y' = z \cdot c' + z' \cdot c = z' \cdot c, \dots y^{(n-1)} = z^{(n-1)} \cdot c$; $y^{(n)} = z^{(n)} \cdot c + z^{(n-1)} \cdot c'$, поэтому $P_n\left(t, \frac{d}{dt}\right) y = \left[P_n\left(t, \frac{d}{dt}\right) z\right] \cdot c + z^{(n-1)} \cdot c' = z^{(n-1)} \cdot c'$. В итоге

$$\begin{bmatrix} z \\ \dots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot c' = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ r \end{bmatrix} = h.$$

Из системы $Xc' = h$, как и для любой системы (1), находим $c(t) = c_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(s) h(s) ds$, и в итоге $y = z \cdot c_0 + z_*$ =ОРОУ+ЧРНУ. Естественно, найденное ЧРНУ совпадает с найденным в способе I, так что способ II есть лишь перезапись, которая может оказаться удобнее на практике (особенно в виде, взятом в скобки — в покомпонентной записи).

Замечание. Если $r = \sum c_i r_i$, то частное решение (13) можно найти по формуле $y = \sum c_i y_i$, где y_i — частные решения уравнений (13) с правыми частями r_i. $\Box$

Итак, если известно n решений $(13)_0$, то уравнение (13) решается полностью. Оказывается, если известно k решений $(13)_0$, то порядок (13) понижается до $n-k$. Покажем это для $k=1$ (далее по индукции). Пусть известно нетривиальное частное решение ψ уравнения $(13)_0$. Пусть $\psi \neq 0$ на некотором интервале (c, d).

[Такой интервал обязательно найдется, если решение нетривиальное. Более того, во всей области своего определения нетривиальное решение $(13)_0$ может обращаться в нуль лишь в отдельных точках, т. к. если оно зануляется на целом отрезке, то оно там является решением тривиальной задачи Коши и потому нулевое всюду.]

Тогда ищем решения (13) в виде $y = \psi z$, где z — новая неизвестная. Имеем: $y' = \psi z' + \psi' z$; $y'' = \psi z'' + \ldots$; ...
$y^{(n)} = \psi z^{(n)} + \ldots$; т. е.
$r = P_n(t, d/dt)y = \psi(t)z^{(n)} + b_{n-1}(t)z^{(n-1)} + \cdots + b_0(t)z$. Поскольку это уравнение при $r=0$ имеет решение $z \equiv 1$, то $b_0 \equiv 0$. Но тогда на (c,d) можно разделить на ψ и получить ОДУ $z^{(n)} + \widetilde{b}_{n-1}(t)z^{(n-1)} + \cdots + \widetilde{b}_1(t)z' = \tilde{r}$, которое имеет порядок $n-1$ для z'.

Аналогом этой процедуры для систем (2) является следующая. Пусть известно нетривиальное решение φ системы (2). Пусть для определенности $\varphi_1 \neq 0$ на (c, d). Ищем решения (2) в виде $x = \alpha\varphi + z$, где α — скалярная функция, а $z_1 = 0$. Тогда подстановка в (2) дает $\alpha'\varphi + z' = Az$. Первая компонента этого равенства дает $\alpha'\varphi_1 = A_1 \cdot z$, где A_1 — первая строка матрицы A, так что на (c, d) верно $\alpha' = \dfrac{A_1 \cdot z}{\varphi_1}$. Все уравнение примет вид

$$z' - Az = -\alpha'\varphi = -\frac{A_1 \cdot z}{\varphi_1}\varphi = -\frac{1}{\varphi_1}(\varphi \otimes A_1)z,$$

$\left[\begin{array}{l}\text{напомним понятие диады (тензорного произведения):}\\ (a \otimes b)_{ij} = a_i b_j,\ (a \otimes b)c = (b, c)a\end{array}\right]$

т. е.

$$z' = \left[A - \frac{1}{\varphi_1}\varphi \otimes A_1\right] z$$

— это система с числом уравнений и неизвестных $(n - 1)$. Решив ее, затем найдем α из формулы $\alpha' = \dfrac{A_1 \cdot z}{\varphi_1}$, и окончательно $x = \alpha\varphi + z$. ☐

Итак, мы изложили основные факты, касающиеся уравнений (1) и (13). При этом оказалось, что ключевую роль играет изучение ФМР (2) и соответственно ФСР $(13)_0$. При произвольных $A(t)$ и $P_n(t, \lambda)$ это изучение «в явном виде» затруднительно. Поэтому особый интерес представляет случай постоянных матриц A и полиномов $P_n(\lambda)$, когда указанное исследование можно аналитически довести до конца.

§ 2. Линейные ОДУ с постоянными коэффициентами

Начнем с систем I порядка:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + h(t). \tag{1}$$

По-прежнему верны все результаты § 1, так что основной задачей является построение ФМР системы $x' = Ax$, которая есть решение матричной задачи Коши

$$\frac{dX}{dt} = AX; \qquad X(t_0) = X_0 \tag{2}$$

с произвольно выбранными t_0 и невырожденной матрицей X_0. Их выбор не играет роли, и для удобства положим $X_0 = E$ (это даст матрицант X). Тогда, как мы видели в § 1, решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = Ax; \qquad x(t_0) = x_0 \tag{3}$$

дается формулой $x(t) = X(t)x_0$. Чтобы естественным образом придти к аналитическому представлению решений (2) и (3), можно указать по крайней мере 2 пути:

Способ I. Применим для построения решений (3) метод последовательных приближений Пикара. Задача (3) эквивалентна уравнению $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} Ax(s)ds$. Поэтому $x^0 = x_0$,

$$x^1 = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} Ax_0 ds = (E + (t - t_0)A)x_0,$$

$$x^2 = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} (E + (s - t_0)A)x_0 ds =$$

$$= \left(E + (t - t_0)A + \frac{(t - t_0)^2}{2} A^2\right) x_0, \quad \dots$$

$x^k = \sum\limits_{m=0}^{k} \frac{(t - t_0)^m}{m!} A^m x_0$. Мы знаем, что на всем интервале, где определены коэффициенты (здесь это $\mathbb{R}$), последовательные приближения сходятся к решению (равномерно на любом компакте). Значит, ряд $\left[\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^m}{m!} A^m\right] x_0$ сходится и равен решению x задачи (3), а это означает, что решение (2) с $X_0 = E$ имеет вид $X(t) = \exp((t - t_0)A)$, где по определению

$$e^{tA} = \exp(tA) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} A^m. \tag{4}$$

[Можно было методом последовательных приближений Пикара строить сразу решение (2) и получить то же самое.]

Сходимость ряда (4) можно проверить и непосредственно: он мажорируется числовым рядом $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{t^m |A|^m}{m!} = \exp(t|A|)$ (пусть $t > 0$), сходящимся на $\mathbb{R}$ (и равномерно на любом отрезке). Таким образом, формула $x(t) = \exp((t - t_0)A)x_0$

имеет смысл и дает решение (3) на всей $\mathbb{R}$. Равномерная сходимость этого ряда на любом отрезке следует как из общей теоремы существования для линейных систем (см. § 2 в Части 1), так и из нашего рассуждения о матричном ряде $\exp(tA)$.

Способ II. При $n = 1$ задача (2) имеет решение ($A = a$, $E = 1$) $x = \exp((t-t_0)a) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^m}{m!} a^m$. Можно предположить, что такой же ряд, но уже матричный, будет давать решение (2) при $n > 1$. Далее непосредственно проверяется сходимость этого ряда (это мы уже сделали выше) вместе с рядом из производных равномерно на любом отрезке, так что его можно почленно дифференцировать, а тогда (2) легко проверяется: $\frac{d}{dt} e^{(t-t_0)A} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{m(t-t_0)^{m-1}}{m!} A^m = Ae^{(t-t_0)A}$, условие Коши очевидно: $e^{0A} = E$. □

Более того, по индукции проверяется, что все производные e^{tA} существуют: $(\exp(tA))^{(k)} = A^k \exp(tA)$, так что решения (2) и (3) принадлежат $C^{\infty}(\mathbb{R})$, что впрочем следует и из общей теории (см. Часть 1). Чтобы полноценно применить результаты § 1 в нашем случае, нужно изучить свойства e^{tA}, и вообще самой матричной экспоненты $e^A = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$.

Сначала напомним основные свойства функций от матриц вообще. По природе матриц, естественным образом определены $f(A)$ лишь для $f \in \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ состоит из полиномов и вообще аналитических функций (степенных рядов) над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. При этом легко видеть, что $f \in \mathcal{A}$ выдерживают подобие, так что если $A = TJT^{-1}$, где J — жорданова форма, то $f(A) = Tf(J)T^{-1}$, а в свою очередь $f(J)$ есть блочно-диагональная матрица, где каждый блок есть f от клетки из J. Чтобы сформулировать действие $f \in \mathcal{A}$ на жордановы клетки, удобно использовать понятие «алгебраической производной» $\widehat{(\cdot)}$, которое вводится так. По определению, $\widehat{\lambda^n} = n\lambda^{n-1}$, и затем на полиномы и ряды эта операция распространяется по линейности. Сравним свойства этой операции с обычным дифференцированием $(\cdot)'$:

1. $(\cdot)'$ вводится с помощью составления конечной разности и предельного перехода. Таким образом, эта операция определена не только на функциях класса $\mathcal{A}$, но она подразумевает, что аргументом функций являются числа.

2. $\widehat{(\cdot)}$ вводится с помощью специального преобразования степени, но она требует только понятия возведения в степень. Таким образом, эта операция определена только на функциях класса $\mathcal{A}$, но она может применяться, если аргументом функции являются матрицы или, например, абстрактный символ λ (как в теории полиномов).

3. Обе операции совпадают, если применяются к функциям класса $\mathcal{A}$, рассматриваемым на числовом аргументе. Однако даже в этом случае сохраняется идеологическое различие в природе этих операций — $\widehat{(\cdot)}$ по своему смыслу не связана с дифференцированием в смысле математического анализа.

Вычисление степени n от жордановой клетки дает значение $\begin{bmatrix} \lambda^n & \widehat{\lambda^n} & \widehat{\widehat{\lambda^n}}/2! & \dots \\ & \dots & & \\ 0 & \dots & \dots & \lambda^n \end{bmatrix}$, а поэтому любая $f \in \mathcal{A}$ дает

$f(\text{клетка}) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \widehat{f}(\lambda) & \widehat{\widehat{f}}(\lambda)/2! & \dots \\ & \dots & & \\ 0 & \dots & \dots & f(\lambda) \end{bmatrix}$, что дает альтернативный (помимо прямого вычисления полинома или ряда) способ вычисления $f(A)$ для всех $f \in \mathcal{A}$. Полезное следствие состоит в том, что если $f_{1,2} \in \mathcal{A}$, то $f_1(A) = f_2(A)$ тогда и только тогда, когда f_1 и f_2 совпадают на спектре A вплоть до производных (алгебраических!) соответствующего порядка. На этом основан эквивалентный способ вычисления $f(A)$ для $f \in \mathcal{A}$ через так наз. *полином Лагранжа—Сильвестера.* Из теоремы Гамильтона—Кэли следует, что $f(A) = P_{n-1,A}(A)$ с каким-то полиномом $P_{n-1,A}$ степени $n-1$. Для такого равенства необходимо и достаточно совпадения на спектре с нужными производными. Но этих условий как раз n штук, что совпадает с числом коэффициентов полинома, так что такой полином имеется только один. Он и называется полиномом Лагранжа—Сильвестера.

Замечание для преподавателя. На самом деле здесь есть тонкий момент, связанный с тем, что порядок клеток и кратность СЧ — не одно и то же, так что доказательство проведено строго только для случая, когда у каждого СЧ только одна клетка. Иначе надо еще доказывать, что полином $P_{n-1,A}$ в представлении $f(A) = P_{n-1,A}(A)$ из теоремы Гамильтона—Кэли совпадает с f на спектре вплоть до порядка, диктуемого кратностью СЧ (т. е. вообще говоря большего, чем нужно для совпадения значений на клетках), а это уже не очевидно. Если же это доказать, то получается, что действительно полином единствен, и неважно, как его находить. Для полного изложения см. например [3].

Итак, для $f \in \mathcal{A}$ вычисление $f(A)$ может производиться как по определению (как исходный полином или ряд), так и через жорданову форму или полином Лагранжа—Сильвестера, при этом в последних двух способах производные понимаются как алгебраические.

На факте совпадения алгебраических и обычных (конечно-разностных) производных для функций класса $\mathcal{A}$ основан формальный способ распространения понятия $f(A)$ на случай $f \notin \mathcal{A}$: под $f(A)$ понимается (оба способа эквивалентны) $P_{n-1,A}(A)$ или $Tf(J)T^{-1}$, где значение на клетках или уравнения для коэффициентов $P_{n-1,A}$ (где нужно вычислять те же значения на спектре) составляются уже́ с помощью обычной производной, лишь бы сама функция и ее «обычные» производные существовали в точках спектра матрицы. Однако, эта конструкция не имеет особого смысла с позиций природы матриц, и только затемняет смысл понятия функции от матрицы.

Пример. $A_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$, $\lambda_{1,2} = \varepsilon$. Найдем $f(A_\varepsilon)$, где $f(s) = |s|$. По определению, $f(A_0)$ не существует, а при $\varepsilon \neq 0$ получаем $f(A_\varepsilon) = \begin{bmatrix} |\varepsilon| & \operatorname{sgn}\varepsilon \\ 0 & |\varepsilon| \end{bmatrix}$. При $\varepsilon \to 0$ не существует $\lim f(A_\varepsilon)$, что «согласуется» с несуществованием $f(A_0)$, но «разумного» объяснения «особости» случая $\varepsilon = 0$ не находится. Т. е. «$|\cdot|$ матриц» не наследует такого фундаментального свойства «$|\cdot|$ чисел» как непрерывность на всех аргументах. □

Далее нам будут нужны только $f(A)$ с $f \in \mathcal{A}$. Однако, несмотря на естественность алгебраических производных для вычисления $f(A)$, на практике их вычисляют как обычные.

Замечание. Как легко видеть,

$$\begin{bmatrix}\text{например, из представления } f(A) \text{ в жордановой форме,}\\ \text{но и из других представлений тоже}\end{bmatrix}$$

$\lambda_j(f(A)) = f(\lambda_j(A))$, а набор СВ и ПВ один и тот же в том смысле, что сохраняются СВ и инвариантные подпространства (ИП) клеток. А именно, ввиду того, что $T^{-1}\zeta = e_j$, где ζ — СВ или ПВ, получаем:

1. если $A\xi = \lambda\xi$, то $f(J)(T^{-1}\xi) = f(\lambda)T^{-1}\xi$, откуда
   $f(A)\xi = f(\lambda)\xi$,
2. а если $A\eta = \lambda\eta + \xi$, то
   $f(J)(T^{-1}\eta) = f(\lambda)T^{-1}\eta + f'(\lambda)T^{-1}\xi$, т. е.
   $f(A)\eta = f(\lambda)\eta + f'(\lambda)\xi$.

Упражнение. Вывести эти свойства, непосредственно изучая действие степеней A^k на СВ и ПВ (а затем распространяя на полиномы, после чего либо применяя уже́ к рядам, либо пользуясь $f(A) = P_{n-1,A}(A)$). □

В § 2 нам нужно изучать $f(A)$ при $f(s) = e^{ts}$. Исследование свойств этой величины почти неразрывно связано с ее «явным» вычислением. Заметим, что $f'(s) = te^{ts}$, так что если, например, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, то $e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} \text{Вопреки распространенной ошибке: ставят } e^t \text{ в верхнем} \\ \text{углу.} \end{bmatrix}$

В силу вышеизложенного, можно предложить следующие способы вычисления e^{tA}:

Способ I — по определению.

Пример. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Тогда $A^2 = -E$, откуда $A^{2k} = (-1)^k E$, $A^{2k+1} = (-1)^k A$, так что

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k} E}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1} A}{(2k+1)!} =$$

$$= (\cos t)E + (\sin t)A = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Замечание. Ясно, что в этом примере мы использовали только тот факт, что $A^2 = -E$.

Упражнение. Выразить «явно» e^{tA}, если известно, что $A^2 = \gamma E$. Разобрать случаи $\gamma > 0$, $\gamma = 0$ и $\gamma < 0$. $\Box$

Однако в общем случае возможность найти явно сумму ряда бывает редко, и этот способ обычно применяется только для нильпотентных матриц (более общо — для матриц, спектр которых состоит из 1 числа).

Способ II — через жорданову форму. $A = TJT^{-1}$,

$e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}$, $\exp(t \cdot \text{клетка}) = \begin{bmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & t^2 e^{t\lambda}/2 & \dots \\ & \dots & & \\ 0 & \dots & \dots & e^{t\lambda} \end{bmatrix}$.

Способ III — через полином Лагранжа—Сильвестера. $e^{tA} = P_{n-1,A}(t,A)$, где $P_{n-1,A}(t,\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(t,\{\lambda_s(A)\})\lambda^k$ должен совпадать с $e^{t\lambda}$ на спектре A вместе с производными (по λ!) соответствующего порядка. Этот способ неудобен в данном случае, т. к. наличие параметра t загромождает вычисления. Однако сама идея нахождения e^{tA} как полином плодотворна:

Способ IV — через специальный полином с коэффициентами ψ_k. Будем искать e^{tA} в виде разложения по «смещенным» степеням матрицы A:

$$e^{tA} = \psi_1 E + \psi_2(A-\lambda_1 E) + \dots + \psi_n \prod_{k=1}^{n-1}(A-\lambda_k E). \qquad (5)$$

В частности, это удобно тем, что все $(A-\lambda_k E)$ вырождены, и в (5) возможно много нулевых элементов. Выясним, какими должны быть коэффициенты ψ_k в (5). Рассмотрим сначала случай, когда все $\lambda_i = \lambda_i(A)$ различны. Применив к (5) операцию $T^{-1}(\cdot)T$, получим:

$$\mathrm{diag}\{e^{t\lambda_1},\dots,e^{t\lambda_n}\} = \psi_1 E + \psi_2 \mathrm{diag}\{0,\lambda_2-\lambda_1,\dots,\lambda_n-\lambda_1\}+$$

$$+\psi_3 \mathrm{diag}\{0,0,(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1),\dots,(\lambda_n-\lambda_2)(\lambda_n-\lambda_1)\}+\dots+$$

$$+\psi_n \mathrm{diag}\{0,\dots,0,(\lambda_n-\lambda_{n-1})\dots(\lambda_n-\lambda_1)\},$$

т. е.

$$\left.\begin{gathered}\psi_1 = e^{\lambda_1 t},\\[2ex] \psi_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\psi_2 = e^{\lambda_2 t},\\[2ex] \psi_1 + (\lambda_3 - \lambda_1)\psi_2 + (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)\psi_3 = e^{\lambda_3 t},\\ \dots\\ \psi_1 + (\lambda_k - \lambda_1)\psi_2 + (\lambda_k - \lambda_2)(\lambda_k - \lambda_1)\psi_3 +\\[2ex] + \dots + (\lambda_k - \lambda_{k-1})\dots(\lambda_k - \lambda_1)\psi_k = e^{\lambda_k t},\\ \dots\end{gathered}\right\} \tag{6}$$

Видно, что это полубесконечная система, причем $\psi_k = \psi_k(t, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Удобно представить (6) в виде эквивалентной задачи Коши для системы ОДУ I порядка. Из (6) очевидно $\psi_1(0) = 1$, $\psi_k(0) = 0$ при $k \geqslant 2$. Далее: $\dfrac{d\psi_1}{dt} = \lambda_1\psi_1$;

$$0 = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right) e^{\lambda_2 t} = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)\big(\psi_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\psi_2\big) =$$

$$= \left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)\psi_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\left(\frac{d}{dt} - \lambda_2\right)\psi_2,$$

т. е. $\left(\dfrac{d}{dt} - \lambda_2\right)\psi_2 = \psi_1$.

Упражнение. Доказать по индукции, что

$$\left(\lambda_k - \frac{d}{dt}\right)\psi_k + \psi_{k-1} = 0 \qquad \text{при } k \geqslant 1 \tag{7}$$

(считаем $\psi_0 = 0$ по определению).

Обоснование для преподавателя. Пусть это верно для $1, \dots, k-1$. Тогда

$$\left(\lambda_k - \frac{d}{dt}\right)\psi_s = (\lambda_k - \lambda_s)\psi_s - \psi_{s-1}, \qquad \forall s = 1, \dots, k-1. \tag{8}$$

$\left(\lambda_k - \dfrac{d}{dt}\right)(6)_k$ с учетом (8) дает

[подчеркнуты сокращающиеся члены]

$$\underline{(\lambda_k - \lambda_1)\psi_1} + \underline{(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)\psi_2} - \underline{(\lambda_k - \lambda_1)\psi_1} + \dots +$$

$$+(\lambda_k - \lambda_{k-1})\dots(\lambda_k - \lambda_1)\psi_{k-1} + (\lambda_k - \lambda_{k-1})\dots(\lambda_k - \lambda_1)\left(\lambda_k - \frac{d}{dt}\right)\psi_k = 0,$$

а это и есть $(7)_k$. $\square$

Итак, ψ_k суть решение задачи Коши:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \dots\\ \psi_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 1 & \dots & 0\\ & \dots & \\ 0 & 1 & \lambda_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\psi_1\\ \dots\\ \psi_n\end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix}\psi_1\\ \dots\\ \psi_n\end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ \dots\\ 0\end{bmatrix}, \tag{9}$$

причем функции $\psi_k(t, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ непрерывны по совокупности переменных $(t, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ (по теореме о непрерывной зависимости решений ОДУ от параметров); а (9) на самом деле можно писать для любого n (т. е. это бесконечная система функций). Если же оборвать эту систему на $k = 1, \dots, n$, и в качестве аргументов $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ взять $\lambda_k(A)$, то в случае различных $\lambda_k(A)$, как мы доказали, верно представление (5). Однако функции ψ_k определены и для совпадающих λ_j, так что естественно ожидать, что (5) остается верным и для кратных СЧ. И в самом деле, пусть $A = TJT^{-1}$. Построим $A_\varepsilon = TJ_\varepsilon T^{-1}$, где J_ε строится так: в каждой клетке J размера $m > 1$ диагональные элементы λ

заменяются на $\lambda, (\lambda+\varepsilon), \dots (\lambda+(m-1)\varepsilon)$. Матрица J_ε уже не жорданова, но она стремится к J при $\varepsilon \to 0$, так что и $A_\varepsilon \to A$, а значит и $\exp(tA_\varepsilon) \to \exp(tA)$ (ввиду представления через полином Лагранжа—Сильвестера). А поскольку СЧ A_ε все различны и равны $(\lambda_j(A)+k\varepsilon)$, то для A_ε верно (5), что при $\varepsilon \to 0$ даст (5) для A ввиду непрерывности ψ_k по λ_j.

Замечание для преподавателя. Если СЧ кратные, то ψ_k уже нельзя определять как коэффициенты в (5), а надо находить их именно через ОДУ. Например, для $A = E$ представление (5) примет вид $e^tE = e^{tE} = \psi_1 E + \psi_2 0 + \dots + \psi_n 0$, откуда находится только $\psi_1 = e^t$. Однако можно было бы получить выражение для ψ_k при кратных СЧ с помощью предела.

Упражнение. Доказать (5) непосредственно, убедившись, что правая часть X равенства (5) удовлетворяет задаче $X' = AX$, $X(0) = E$, которая характеризует e^{tA}. $\square$

Непрерывность ψ_k по λ_j делает их полезными при численных расчетах (см. об этом ниже), т. е. представление (5) особенно ценно на практике при работе с матрицами большого размера.

Пока мы выясняли способы вычисления e^{tA}, попутно стало многое ясно о структуре решений системы $(1)_0$=$(3)_1$. Так, из способа II вычисления e^{tA} видно, что ФМР системы $(1)_0$ имеет элементы, состоящие из комбинаций функций вида $t^s e^{\lambda t}$, где λ — всевозможные СЧ матрицы A, а
$s = 0, \dots, k-1$, где k — размер самой большой клетки, соот-

ветствующей этому λ. Благодаря этому можно оценить поведение ФМР $(1)_0$ при больших t (что будет делаться дальше неоднократно), и можно, не вычисляя e^{tA}, искать решения $(1)_0$ методами типа неопределенных коэффициентов. К этому близки методы построения ФСР $(1)_0$ специального вида с помощью СВ и ПВ матрицы A (они же суть СВ и ПВ e^{tA} — см. замечание выше) и функций $e^{\lambda t}$ (как это обычно делается при решении конкретных задач на практических занятиях). Продолжим изучение свойств решений $(1)_0$ и вообще (1).

Замечание. Мы считаем матрицу A вещественной, но ее СЧ могут быть и комплексными. При этом e^{tA} также вещественна. Это не противоречит указанному виду ее элементов, т. к. комбинации комплексных экспонент будут браться с комплексными коэффициентами и давать в итоге $\cos$ и $\sin$. Подробнее об этом явлении поговорим ниже. □

Заметим, что если нам не важно, какую именно ФМР искать, что в представлении для произвольной ФМР $X = e^{tA}C = Te^{tJ}T^{-1}C$ можно взять $C = T$, и тогда $X = Te^{tJ}$ дает ФМР, которую на практике считать зачастую легче. Однако, все-таки e^{tA} в общем случае удобнее, т. к. является матрицантом: $e^{tA}|_{t=0} = E$.

Нам потребуется ответ на вспомогательный вопрос: когда $e^Ae^B = e^{A+B}$? Удобно сразу задать более общий вопрос: когда $e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$? Имеем:

$$e^{tA}e^{tB} = \left(E + tA + \frac{t^2A^2}{2} + \dots\right)\left(E + tB + \frac{t^2B^2}{2} + \dots\right) =$$

$$= E + t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \dots;$$

$$e^{t(A+B)} = E + t(A+B) + \frac{t^2}{2}(A^2 + AB + BA + B^2) + \ldots$$

Чтобы равенство имело место, необходимо совпадение коэффициентов при t^2, т. е. $AB = BA$. Верно и обратное, т. к. если A и B коммутируют, то с матричными рядами можно обращаться как с числовыми. Можно действовать и более «честно»:

Упражнение. Доказать факт $AB = BA \Longrightarrow e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$, показав, что $e^{tA}e^{tB}$ есть решение задачи Коши $X' = (A+B)X$, $X(0) = E$.

Указание. Доказать сначала, что A и e^{tB} коммутируют (т. к. e^{tB} есть полином от B), и аналогично B и e^{tA} коммутируют. □

Замечание. Тем самым на исходный вопрос о равенстве $e^A e^B = e^{A+B}$ мы ответили частично: это равенство верно, если A и B коммутируют. Верно и обратное, но это уже нетривиальный факт, и он нам не потребуется. □

В частности, $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$, и в частности $E = e^{tA}e^{-tA}$, т. е. $\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$.

Теперь мы можем применить все результаты § 1 для систем, используя явный вид ФМР при $A = \text{const}$. Так, для любой ФМР $(1)_0$ $X(t) = e^{tA}C$ имеем $X(t)X^{-1}(s) = e^{(t-s)A}$, так что формула для общего решения (1), выведенная в § 1, принимает вид

$$x(t) = e^{tA}c + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}h(s)ds. \tag{10}$$

Замечание. Для $A = \text{const}$ теорема Остроградского—

Лиувилля принимает вид $w(t) = w_0 \exp((t - t_0)\mathrm{tr}A)$, но $w(t) = \det(e^{tA}C) = \det(e^{tA})c$, так что эта теорема в данном случае эквивалентна формуле $\det(e^{tA}) = \exp(t\,\mathrm{tr}A)$.

Упражнение. Доказать формулу $\det(e^{tA}) = \exp(t\,\mathrm{tr}A)$ непосредственно, используя тот факт, что det и tr — инварианты, т. е. не меняются при подобии. □

Итак, ввиду явной формулы (10) оценка решений (1) при больших t (что важно для дальнейших приложений) сводится к оценке $|e^{tA}|$. Достаточно рассмотреть $t \geqslant 0$. Немного об этом мы уже говорили недавно. Грубая оценка (пригодная для небольших t) очевидна:

Предложение. При $t > 0$ верно $e^{-t|A|} \leqslant |e^{tA}| \leqslant e^{t|A|}$.

Доказательство. Вторая оценка тривиальна, мы ее уже упоминали в начале § 2. Далее:

$$1 = |E| = |e^{tA}e^{-tA}| \leqslant |e^{tA}| \cdot |e^{-tA}| \leqslant e^{t|A|}|e^{-tA}|,$$

т. е. $|e^{-tA}| \geqslant e^{-t|A|}$. После замены $A := -A$ получим требуемое. □

Если $t \to +\infty$, то требуются более тонкие методы оценки $|e^{tA}|$. Из структуры $e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}$, как говорилось выше, следует вид ее элементов, так что все они не превосходят $Ct^k \exp(t\varkappa)$, где $\varkappa = \max\limits_j \mathrm{Re}\lambda_j(A)$, а k есть (размер соответствующей клетки)-1. В частности, отсюда ясно, что при всех $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0$ верно $e^{tA} \to 0$ (при $t \to +\infty$) с экспоненциальной скоростью, и т. п. Но часто бывает удобнее точная оценка $|e^{tA}|$, сформулированная в терминах «сразу всей A»:

Утверждение. Пусть все $\mathrm{Re}\lambda_j(A) \leqslant \varkappa \in \mathbb{R}$. Тогда при

$t > 0$

$$|e^{tA}| \leqslant e^{\varkappa t}\mathrm{ex}_{n-1}(2t|A|), \tag{11}$$

где $\mathrm{ex}_k(z) = \sum\limits_{m=0}^{k} \dfrac{z^m}{m!}$ (так, $\mathrm{ex}_\infty = \exp$) — *оценка Гельфанда—Шилова.*

Доказательство. Имеем: $|A - \lambda_j E| \leqslant |A| + |\lambda_j| \leqslant 2|A|$ ввиду Замечания в конце § 1 части 1. Оценим ψ_k. Имеем: $\psi_1 = e^{\lambda_1 t}$, откуда $|\psi_1| \leqslant e^{\varkappa t}$. Для оценки следующих ψ_k представим ψ_k как решение задачи Коши с правой частью ψ_{k-1}. При $k \geqslant 2$ верно $\dfrac{d}{dt}(e^{-\lambda_k t}\psi_k) = e^{-\lambda_k t}\psi_{k-1}$, откуда

$$\psi_k(t) = \int\limits_0^t e^{\lambda_k(t-s)}\psi_{k-1}(s)ds. \tag{12}$$

Поэтому

$$|\psi_2(t)| \leqslant \int\limits_0^t e^{\lambda_2(t-s)}|\psi_1(s)|ds \leqslant \int\limits_0^t e^{\varkappa(t-s)}e^{\varkappa s}ds = te^{\varkappa t},$$

и по индукции ввиду (12) получаем $|\psi_k(t)| \leqslant \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\varkappa t}$.

[Эта оценка точная в том смысле, что может достигаться равенство: если несколько первых $\lambda_j = \varkappa$, то первые ψ_k в точности равны правой части оценки — см. далее.]

В итоге из представления (5) получаем

$$|e^{tA}| \leqslant e^{\varkappa t} + te^{\varkappa t}2|A| + \frac{t^2}{2}e^{\varkappa t}(2|A|)^2 + \ldots \qquad \square$$

Перейдем теперь к линейному ОДУ высокого порядка с постоянными коэффициентами

$$P_n\left(\frac{d}{dt}\right)y = r. \qquad (13)$$

Снова начнем с $r = 0$. Заметим, что операторы d/dt и $\times a_k$ теперь коммутируют, так что для символа дифференциального оператора в (13) (называемого еще *характеристическим полиномом* уравнения (13)), в отличие от общего случая переменных коэффициентов, возможно обращение как с обычным полиномом. Прежде всего, нас интересует разложение на множители: $P_n(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$, и в частности $P_n\left(\frac{d}{dt}\right) = \prod\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt} - \lambda_i\right)$ (аналогично (1), все a_k считаем вещественными, но корни λ_i могут быть и комплексными).

[Здесь нужно хорошо понять смысл такого разложения: абстрактные полиномы от символа, возможность подстановки оператора d/dt вместо этого символа, и «непосредственная» проверка того, что это работает, на примере $n = 2$, при действии на функцию y.]

Отсюда следует простая конструкция ФСР уравнения $(13)_0$:

[в этом случае особенно хорошо видна целесообразность непосредственного решения (13) вместо сведе́ния к (1)]

Этап I. Заметим, что если $P_n = QR$, то из $Q\left(\frac{d}{dt}\right)y = 0$ следует $P_n\left(\frac{d}{dt}\right)y = 0$. Таким образом, $(13)_0$ можно решать «по частям».

Этап II. Имеем: $P_n(\lambda) = \prod\limits_{j=1}^{m}(\lambda - \lambda_j)^{\varkappa_j}$, где $\varkappa_j$ — кратность корня λ_j. Достаточно построить ФСР уравнений

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_j\right)^{\varkappa_j} y = 0 \tag{14}$$

и объединить их, т. к. $\sum\limits_{j=1}^{m} \varkappa_j = n$ — получится как раз n решений $(13)_0$ (правда, надо будет еще проверить их независимость).

Этап III. Строим ФСР для (14) в свою очередь по принципу этапа I: первый элемент ФСР берем как решение уравнения $\left(\frac{d}{dt} - \lambda_j\right) y = 0$, т. е. $y = e^{\lambda_j t}$ — он есть решение (14), а значит и $(13)_0$. Второй элемент берем как решение уравнения $\left(\frac{d}{dt} - \lambda_j\right)\left(\frac{d}{dt} - \lambda_j\right) y = 0$. Обозначив $v = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_j\right) y$, получим, что $\left(\frac{d}{dt} - \lambda_j\right) v = 0$, так что можно взять $v = e^{\lambda_j t}$, а тогда находим $y = te^{\lambda_j t}$, и т. д. В итоге получим набор решений (14) вида

$$e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \quad \ldots, \quad t^{\varkappa_j - 1} e^{\lambda_j t}. \tag{15}$$

Очевидно, что эти функции независимы, а поскольку их $\varkappa_j$ штук, то это ФСР (14).

Этап IV. Объединяем все $\{(15)\}_{j=1}^{m}$ и получаем n решений $(13)_0$. Чтобы показать, что это ФСР, надо проверить лишь линейную независимость этого набора.

Упражнение. Проверить. □

[можно действовать аналогично Лемме из § 5 в связи с краевыми задачами для уравнений высокого порядка]

Замечание. Если $\lambda_j \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, то $e^{\lambda_j t} = e^{\mathrm{Re}\lambda_j t}e^{i\mathrm{Im}\lambda_j t}$, причем ввиду вещественности a_k такие λ_j имеются в паре с $\overline{\lambda}_j$, так что тогда $(15)|_{\lambda_j} \cup (15)|_{\overline{\lambda}_j}$ эквивалентно системе функций

$$\{t^s e^{\mathrm{Re}\lambda_j t}\cos(\mathrm{Im}\lambda_j t),\ t^s e^{\mathrm{Re}\lambda_j t}\sin(\mathrm{Im}\lambda_j t)\}_{s=0}^{\varkappa_j-1}. \qquad (16)$$

[Т. е. уравнение и решения вещественны, но если есть комплексные корни, то ФСР в виде (15) и коэффициенты разложения по ней комплексны. Если же ФСР брать в виде (16), то она и коэффициенты разложения вещественны.]

Итак, (15) или (16) полностью описывает ФСР $(13)_0$, что достаточно для теоретических целей и для решения конкретных уравнений, но для задач с параметрами или при численных расчетах построенная ФСР неудобна ввиду отсутствия ее непрерывной зависимости от корней P:

Пример. $\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)\left(\frac{d}{dt} - (\lambda+\varepsilon)\right)y = 0$. ФСР: $y_1 = e^{\lambda t}$, $y_2 = e^{(\lambda+\varepsilon)t}$. При $\varepsilon \to 0$ $y_2 \to y_1$, и это уже не ФСР, т. е. (ФСР при $\varepsilon \neq 0$)$\not\to$(ФСР при $\varepsilon = 0$). □

В связи с этим полезно применение функций ψ_k. Докажем по индукции, что

$$\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{d}{dt} - \lambda_i\right)\psi_k = 0,$$

$$\psi_k(0) = \cdots = \psi_k^{(k-2)}(0) = 0, \quad \psi_k^{(k-1)}(0) = 1,$$

т. е. в частности это означает, что если фиксировать n, то $\psi_1, \dots \psi_n$ являются решениями уравнения $(13)_0$ (в котором λ_j суть корни P) такими, что их матрица Вронского в нуле имеет вид $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ * & & & 1 \end{bmatrix}$. А поскольку эта матрица невырождена, то $\psi_1, \dots \psi_n$ образуют ФСР $(13)_0$. Итак, при $k = 1$ утверждение верно; при $k \geqslant 2$: $\prod_{i=1}^{k} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_i \right) \psi_k = \prod_{i=1}^{k-1} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_i \right) \psi_{k-1} = 0$ по предположению индукции. Уравнение проверено. Проверяем данные Коши: при $k = 2$ $\psi_2'(0) = (\lambda_2 \psi_2 + \psi_1)(0) = 1$ — верно (т. е. проверили второй столбец матрицы Вронского в нуле), и вообще при $k \geqslant 3$, $s \geqslant 1$ имеем $\psi_k^{(s+1)} = \lambda_k \psi_k^{(s)} + \psi_{k-1}^{(s)}$, что дает индукционный переход к следующей строке (т. к. 1-я строка известна — она есть $(1, 0, \dots, 0)$).

ФСР из функций ψ_k уже непрерывно зависит от λ_j, как было доказано выше.

Пример. В Примере выше $\psi_1(t) = e^{\lambda t}$, $\psi_2(t) = \dfrac{e^{(\lambda+\varepsilon)t} - e^{\lambda t}}{\varepsilon} \to te^{\lambda t} = \psi_2(t, \lambda, \lambda)$ при $\varepsilon \to 0$. $\square$

Замечание. Теперь, рассматривая ψ_n как решение соответствующей задачи Коши для $(13)_0$, легко понять, что $\psi_n(t, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ не зависит от порядка $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. $\square$

Упражнение. Доказать, что если λ_1 имеет кратность $\varkappa_1$, то

$$\psi_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad \dots, \quad \psi_{\varkappa_1}(t) = \frac{t^{\varkappa_1 - 1} e^{\lambda_1 t}}{(\varkappa_1 - 1)!},$$

т. е. этап III построения ФСР $(13)_0$ можно было получить с помощью функций ψ_k (и видна точность оценки Гельфанда—Шилова). □

Теперь нетрудно проследить, во что превратится формула из § 1 для ЧРНУ (13): $y_*(t) = \int\limits_{t_0}^{t} (X(t)X^{-1}(s))_{1n} r(s)ds$ (напомним, то это ЧРНУ удовлетворяет однородным данным Коши в точке t_0). А именно, напомним, что X — матрица Вронского уравнения $(13)_0$, она же ФМР соответствующей однородной системы, и, как мы указывали выше, $X(t)X^{-1}(s) = e^{(t-s)A}$, где A — матрица этой системы. Если $X(0) = E$, т. е. $X(t) = e^{tA}$, то $X(t)X^{-1}(s) = X(t-s)$. Но столбец X^n имеет вид $(y, y', \ldots, y^{(n-1)})^*$, где y есть решение $(13)_0$ с данными Коши в нуле вида $(0, \ldots, 0, 1)^*$, а это $y = \psi_n$. Таким образом, $(X(t)X^{-1}(s))_{1n} = X_{1n}(t-s) = \psi_n(t-s)$, так что ЧРНУ примет вид

$$y_*(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \psi_n(t-s)r(s)ds \tag{17}$$

— еще одно полезное применение функций ψ_k.

[Этот пример показывает, что хотя, как будет в следующем фрагменте, нередко удобно рассматривать (13) непосредственно, но не надо забывать и об эквивалентной системе (1). Так, доказательство (17) напрямую через (13) представляется более громоздким и не проясняет происхождение формулы (17).]

Помимо (17), в которую выливается способ I поиска

ЧРНУ, описанный в § 1, остается в силе эквивалентный способ вариации постоянных, который особенно удобен ввиду явного вида ФСР $(13)_0$. В случае $P_n = P_n(\lambda)$ возникают новые специфические способы поиска ЧРНУ. Например, это касается уравнений со специальными правыми частями вида $r(t) = t^k e^{\gamma t}$, $r(t) = t^k e^{\beta t}\cos(\delta t)$, $r(t) = t^k e^{\beta t}\sin(\delta t)$, где $k \in \mathbb{N}_0$, или их комбинациями. Ввиду того, что $e^{i\delta t} = \cos(\delta t) + i\sin(\delta t)$, достаточно рассмотреть $r(t) = t^k e^{\gamma t}$, где $\gamma \in \mathbb{C}$ $(\gamma = \beta + i\delta)$. Основная идея решения таких уравнений заключается в следующей лемме:

Лемма. Для любого полинома Q_s верно $P_n\left(\dfrac{d}{dt}\right) Q_s(t)e^{\gamma t} = \widetilde{Q}_{s-\text{кр.}\gamma}(t)e^{\gamma t}$, где кр.$\gamma$ есть кратность γ как корня P (если γ не корень, полагаем кр.$\gamma = 0$), а под полиномом отрицательной степени понимается тождественный нуль.

Следствие. Младшие кр.γ слагаемых в Q_s исчезают.

Доказательство. Для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ имеем

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right) Q_s(t)e^{\gamma t} = \Big(Q_s'(t) + \gamma Q_s(t) - \lambda Q_s(t)\Big)e^{\gamma t} =$$

$$= \left[\left(\frac{d}{dt} + (\gamma - \lambda)\right) Q_s(t)\right] e^{\gamma t}. \tag{18}$$

Если $\lambda = \gamma$, то степень полинома снижается,

[если он был нулевой степени $(s = 0)$, т. е. постоянная, то превращается в нуль — полином степени -1, если сразу был нуль (отрицательная степень), то можно считать для единообразия, что степень еще снизилась] а иначе остается прежней. Поэтому после действия всего $P_n\left(\frac{d}{dt}\right) = \prod\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}-\lambda_i\right)$ на выражение $Q_s(t)e^{\gamma t}$ степень полинома-множителя при $e^{\gamma t}$ снизится ровно на столько, сколько раз случится совпадение $\gamma = \lambda_i$. $\square$

С этой ситуацией в частном случае мы уже́ встречались при построении ФСР, т. к. фрагмент ФСР, соответствующий одному λ кратности $\varkappa$, порождает пространство решений вида $(c_1 + c_2 t + \dots + c_\varkappa t^{\varkappa-1})e^{\lambda t}$, которые как раз переходят в 0 под действием $\left(\frac{d}{dt}-\lambda\right)^{\varkappa}$, а значит и всего $P_n\left(\frac{d}{dt}\right)$.

[Таким образом, можно было получить ФСР (15) сразу, предъявив ее и проверив. Другое дело, что этот способ, хотя и быстрый, но не научает ничему.]

Теперь же нам нужно получить не нуль, а правую часть вида $R_m(t)e^{\gamma t}$. А тогда, как ясно из Леммы, следует сделать соответствующий запас в степени полинома, т. е. искать частное решение в виде $Q_{m+\text{кр.}\gamma}(t)e^{\gamma t}$. Для неизвестного полинома $Q_{m+\text{кр.}\gamma}$ получим (как видно из (18)) уравнение

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}+(\gamma-\lambda_i)\right)Q_{m+\text{кр.}\gamma}(t) = R_m(t),$$

причем младшие кр.γ членов из $Q_{m+\text{кр.}\gamma}$ в это уравнение не входят, и остается ровно $m+1$ соотношений на $m+1$ старших коэффициентов $Q_{m+\text{кр.}\gamma}$. В итоге получим ЧРНУ в виде

$$y(t) = (b_{m+\text{кр.}\gamma}t^{m+\text{кр.}\gamma} + \dots + b_{\text{кр.}\gamma}t^{\text{кр.}\gamma})e^{\gamma t} +$$

$$+(c_{\text{кр.}\gamma-1}t^{\text{кр.}\gamma-1} + \dots + c_0)e^{\gamma t},$$

где b_j находятся однозначно, а c_i — любые (что и следовало ожидать, т. к. вторая группа слагаемых дает решение $(13)_0$, так что она не несет никакой информации). Проще всего сразу считать все $c_i = 0$. Таким образом, доказано

Утверждение. Частное решение уравнения (13) с $r(t) = R_m(t)e^{\gamma t}$ можно найти в виде $y_*(t) = t^{\text{кр.}\gamma} Q_m(t)e^{\gamma t}$. □

В некоторых случаях линейные ОДУ с переменными коэффициентами сводятся к случаю постоянных коэффициентов:

Пример. Уравнение вида

$$a_n t^n y^{(n)} + \cdots + a_0 y = r(t) \tag{19}$$

называется *уравнением Эйлера.* Оно рассматривается при $t \neq 0$. Пусть для определенности $t > 0$. Сделаем замену $y(t) = z(\ln t)$. Докажем, что $y^{(k)}(t) = \dfrac{Q_k(d/ds)z(s)|_{s=\ln t}}{t^k}$. При $k = 0$ это верно. Шаг $k \to k+1$ тривиален:

$$\frac{d}{dt}\frac{Q_k(d/ds)z(s)|_{s=\ln t}}{t^k} =$$

$$= \frac{\frac{d}{ds}Q_k(d/ds)z(s)|_{s=\ln t}}{t^{k+1}} - \frac{kQ_k(d/ds)z(s)|_{s=\ln t}}{t^{k+1}}$$

(т. е. $Q_{k+1}(\lambda) = (\lambda - k)Q_k(\lambda)$) — верно. Но тогда после указанной замены (19) принимает вид $R_n\left(\dfrac{d}{ds}\right)z(s)\Bigg|_{s=\ln t} = r(t)$, т. е. $R_n\left(\dfrac{d}{ds}\right)z = r(e^s)$. Таким образом, ФСР уравнения $(19)_0$ состоит из функций вида $(\ln t)^k t^\mu$, где μ — корни R_n, а $k = 0, \ldots \text{кр.}\mu - 1$, так что частные решения $(19)_0$ можно сразу искать в виде $y(t) = t^\mu$, и может оказаться, что мы

найдем все решения (если все μ_j вещественны и различны), тогда что замену делать не придется. Если имеются комплексные корни $\mu = \alpha \pm i\beta$, то
$t^{\mu} = t^{\alpha}\exp(\pm i\beta\ln t) = t^{\alpha}\cos(\beta\ln t) \pm it^{\alpha}\sin(\beta\ln t)$, т. е. в ФСР появляются функции $(\ln t)^k t^{\alpha}\cos(\beta\ln t)$ и
$(\ln t)^k t^{\alpha}\sin(\beta\ln t)$. $\square$

В заключение § 2 отметим, что для линейных ОДУ с постоянными коэффициентами особенно наглядно выглядит связь между системами (1) и уравнениями высокого порядка (13). Как отмечено выше, (13) сводится к (1), причем

Упражнение. $\chi_A = (-1)^n P_n$ (по индукции). $\square$

Также ясно, что для любых (включая нелинейные) ОДУ не только уравнения высшего порядка сводятся к системам I порядка (см. § 1 Части 1), но и наоборот, исключая функции из систем (I порядка или выше), можно получать отдельные уравнения высшего порядка для отдельных компонент. Но для (1) последняя процедура выглядит особенно просто:

Утверждение. Если x — решение $(1)_0$, то $\chi_A(d/dt)x = 0$.

Замечание. Обратное неверно — пример: $A = 0$, тогда $\chi_A(\lambda) = \lambda^n$, но из $x^{(n)} = 0$ не следует $x' = 0$.

Доказательство. *Способ I.* $x' = Ax \Longrightarrow x = e^{tA}c \Longrightarrow$

$$\chi_A\left(\frac{d}{dt}\right)x = \chi_A\left(\frac{d}{dt}\right)e^{tA}c = \chi_A(A)e^{tA}c = 0.$$

Способ II. Обозначим $M_{ik}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение к $(A - \lambda E)_{ik}$ (это полином от λ степени $n-1$). Тогда если $\left(A - E\dfrac{d}{dt}\right) x = 0$, то для всех k имеем

$$0 = \sum_{i,j} M_{ik}\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \left(A - E\frac{d}{dt}\right)_{ij} x_j =$$

$$= \sum_j \delta_{kj} \det\left(A - E\frac{d}{dt}\right) x_j = \chi_A\left(\frac{d}{dt}\right) x_k. \qquad \square$$

Замечание. Как видно из обоих способов, они не распространяются на случай переменных A. $\square$

Итак, если x — решение $(1)_0$, то все его компоненты удовлетворяют $(13)_0$ с $P_n = \chi_A$.

До сих пор мы рассматривали только понятие задачи Коши для ОДУ. В приложениях возникают и другие задачи, в частности, так наз. *краевые*, в которых условия на решение задаются в концах интервала, где оно ищется. Для нелинейных ОДУ такие задачи достаточно сложны, и мы их рассматривать не будем, но для линейных ОДУ это достижимо для нас, и естественно это сделать сейчас.

§ 3. Краевые задачи на отрезке

Рассмотрим сначала систему I порядка:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(t). \tag{1}$$

Краевая задача — это задача на заранее заданном интервале (a, b)

[отсюда в частности видны некоторые трудности в краевых задачах для нелинейных ОДУ] (в данном случае $-\infty < a < b < +\infty$), на концах которого заданы условия на неизвестную функцию (краевые условия). В данном случае это должны быть n условий на $2n$ величин $x(a)$, $x(b)$; мы будем рассматривать только линейные краевые условия:

$$Lx(a) + Rx(b) = \varphi, \tag{2}$$

где L и R — заданные матрицы размера $n \times n$, а φ — заданный вектор из $\mathbb{R}^n$.

[Отметим, что это самый общий вид такого рода условий.]

Определение. Пусть $A, h \in C[a, b]$. Тогда $x \in C^1(a, b) \cap C[a, b]$ называется решением (1), (2), если (1) верно на (a, b), а (2) принимается в смысле непрерывности. ☐

[Отметим особое положение точек, где задаются краевые условия — там само уравнение уже не выполнено, в отличие от задачи Коши. Естественно, мы требуем выполнение уравнения на открытом интервале, где и требуем нужную для этого гладкость, а краевые условия понимаем как пределы, и требуем нужную для этого гладкость (в данном случае — 0 порядка) на отрезке.]

Теорема. Решение (1), (2) существует при всех h и φ тогда и только тогда, когда

$$\det(LX(a) + RX(b)) \neq 0, \tag{3}$$

где X — ФМР $(1)_0$. Если (3) выполнено, то решение единственно и удовлетворяет оценке

$$\|x\|_{C^1(a,b)} \leqslant C(A) \cdot (\|h\|_{C(a,b)} + |\varphi|). \tag{4}$$

Следствие. При выполнении (3) решение (1), (2) непрерывно зависит от h и φ.

Замечание. Из доказательства видно, что в (4) можно даже взять $\|h\|_{L_1(a,b)}$.

Упражнение. Доказать, что (3) не зависит от выбора ФМР.

Доказательство. Как говорилось в § 1, общее решение (1) имеет вид $x(t) = X(t)\left[\psi + \int\limits_a^t X^{-1}(s)h(s)ds\right]$, где $\psi \in \mathbb{R}^n$ произволен. Таким образом, поиск решения задачи (1), (2) эквивалентен поиску такого ψ, чтобы выписанная функция удовлетворяла условию (2), принимающему вид $LX(a)\psi + RX(b)\left[\psi + \int\limits_a^b X^{-1}(s)h(s)ds\right] = \varphi$, т. е. $[LX(a) + RX(b)]\psi = \varphi - RX(b)\int\limits_a^b X^{-1}(s)h(s)ds$. Но тогда критерий (3) очевиден, равно как и единственность решения при его выполнении.

[Если (3) не выполнено, то даже при фиксированном h можно подбирать φ так, что правая часть последней системы не принадлежит образу отображения $[LX(a) + RX(b)]$.]

Как отмечено в § 1, матрица X^{-1} ограничена, так что при выполнении (3) получим $|\psi| \leqslant C(\|h\|_{C(a,b)} + |\varphi|)$, а тогда очевидно $\|x\|_{C(a,b)} \leqslant C(\|h\|_{C(a,b)} + |\varphi|)$, откуда ввиду (1) ясно (4). $\square$

Замечание. Из доказательства видно, что условие (3) есть критерий того, что однородная задача (т. е. при $h = 0$, $\varphi = 0$) имеет только тривиальное (нулевое) решение. Таким образом, на практике можно не проверять (3), а проанализировать однородную задачу. □

Замечание. Как известно из линейной алгебры, в общем случае (когда (3) не выполнено) для существования ψ (а значит, и x) необходимо и достаточно, чтобы для любого $z \in \operatorname{Ker}(LX(a) + RX(b))^*$ выполнялось условие ортогональности

$$0 = \left(\varphi - RX(b) \int\limits_a^b X^{-1}(s)h(s)ds, z\right) =$$

$$= (\varphi, z) - \int\limits_a^b (h(s), (X^{-1})^*(s)X^*(b)R^*z)ds$$

(и решение определяется с точностью до прибавления к ψ элементов ядра $LX(a) + RX(b)$), но это условие сложно для анализа в общем (несамосопряженном) случае, и мы его исследовать не будем. Ниже это будет сделано в частном случае. Но уже сейчас стало ясно, что для (1), (2) остается верным общий принцип для линейных задач:
(общее решение неоднородной задачи)=
(частное решение неоднородной задачи)+
(общее решение однородной задачи). □

Итак, при выполнении условия (3) решение задачи (1), (2) существует, единственно и задается формулой

$$x(t) = X(t) \int\limits_a^t X^{-1}(s)h(s)ds + X(t)[LX(a) + RX(b)]^{-1}\varphi -$$

$$-X(t)[LX(a) + RX(b)]^{-1}RX(b) \int\limits_a^b X^{-1}(s)h(s)ds =$$

$$= X(t)[LX(a) + RX(b)]^{-1}\varphi + X(t)[LX(a) + RX(b)]^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left([LX(a)+RX(b)]\int\limits_a^t X^{-1}(s)h(s)ds - RX(b)\int\limits_a^b X^{-1}(s)h(s)ds\right)=$$

$$= X(t)[LX(a) + RX(b)]^{-1}\varphi + \int\limits_a^b G(t,s)h(s)ds,$$

где

$$G(t,s) = X(t)[LX(a)+RX(b)]^{-1} \left\{\begin{matrix} -RX(b), & t < s, \\ LX(a), & t > s \end{matrix}\right\} X^{-1}(s). \tag{5}$$

Из полученной формулы ясно, что (как и следовало ожидать) $x = x_1 + x_2$, где

$$\frac{dx_1}{dt} = A(t)x_1 + h(t), \qquad Lx_1(a) + Rx_1(b) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = A(t)x_2, \qquad Lx_2(a) + Rx_2(b) = \varphi, \tag{7}$$

причем

$$x_1(t) = \int\limits_a^b G(t,s)h(s)ds, \quad x_2(t) = X(t)[LX(a) + RX(b)]^{-1}\varphi. \tag{8}$$

Замечание. Задачу с $\varphi \neq 0$ всегда можно свести к $\varphi = 0$, найдя любую гладкую z, удовлетворяющую (2), и сделав замену $x = z + y$. Тогда для y получим (6) с новой h. Поэтому особенно важно уметь решать (6). □

[Впрочем, такой способ достаточно неуклюж, т. к. не позволяет удобно отследить структуру решения как линейного оператора от φ. Чтобы эту структуру подчеркнуть, надо пользоваться $(8)_2$.]

А для (6) получена удобная формула $(8)_1$, где G находится из (5). Удобно переформулировать свойства G в «независимом» виде:

[Поскольку формулы вида $(8)_1$ существуют и в более общем случае, а явные представления для таких G уже́ отсутствуют, и нужна формулировка в других терминах.]

Определение. $G \in C([a,b]^2 \setminus \{t = s\})$ называется *матрицей Грина* (МГ) для (1), $(2)_0$, если:

1. $\dfrac{d}{dt}G(t,s) = A(t)G(t,s)$ при $t \neq s$;
2. $G(s+0,s) - G(s-0,s) = E$;
3. $LG(a,s) + RG(b,s) = 0$.

Утверждение. При условии (3) МГ существует, единственна и дается формулой (5).

Доказательство. Из п. 1 имеем

$G(t,s) = X(t)\begin{cases} B(s), & t > s, \\ C(s), & t < s. \end{cases}$ Из п. 2 получаем

$B(s) = C(s) + X^{-1}(s)$, т. е. теперь

$$G(t,s) = X(t)\begin{cases} C(s) + X^{-1}(s), & t > s, \\ C(s), & t < s, \end{cases}$$

и п. 3 принимает вид $LX(a)C(s)+RX(b)(C(s)+X^{-1}(s)) = 0$, так что найдется единственная $C(s) = -[LX(a) + RX(b)]^{-1}RX(b)X^{-1}(s)$, что означает существование единственной МГ. Поскольку $B(s) = C(s) + X^{-1}(s) = [LX(a) + RX(b)]^{-1}LX(a)X^{-1}(s)$, то получаем для нее формулу (5). ☐

Таким образом, решение (6) имеет вид $(8)_1$, где G — МГ из Определения.

Упражнение. Проверить существование МГ и формулу (5) наоборот: проверяя пп. 1–3 для (5). Правда, это не доказывает ее единственность — доказать ее отдельно из пп. 1–3.

Упражнение. Доказать, что $(8)_1$ дает решение (6), непосредственно исходя из пп. 1–3 (т. е. не используя (5)) — этот способ важен ввиду того, что переносится на более общие ОДУ, когда нет (5).

Указание. Использовать лемму:

Лемма.

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(t,s)ds = \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g_t(t,s)ds + g(t,\beta(t))\beta'(t) - g(t,\alpha(t))\alpha'(t).$$

Доказательство. Обозначим $F(\alpha,\beta,\gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} g(\gamma,s)ds$.

Ясно, что $F_\alpha = -g(\gamma, \alpha)$, $F_\beta = g(\gamma, \beta)$, $F_\gamma = \int\limits_\alpha^\beta g_\gamma(\gamma, s)ds$. Но тогда $\dfrac{d}{dt}\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(t, s)ds = \dfrac{d}{dt}F(\alpha(t), \beta(t), t) = F_\alpha\alpha' + F_\beta\beta' + F_\gamma$, и остается применить формулы для производных от F. $\square$

Итак, решение (1), (2) сводится в основном к (6), а для нее имеется формула $(8)_1$, в которой МГ G может находиться как по формуле (5), так и по второму Определению. Последнее является основным, т. к. соответствует общей идеологии представления решений линейных задач с помощью интегральных операторов от входных данных. Так, в данном случае можно показать, что линейность задачи и оценка (4) неизбежно влекут интегральный вид соответствия $h \mapsto x$, т. е. формулу $(8)_1$ с *какой-то* матрицей G, и остается понять, какой должна быть G. Если подставить $(8)_1$ в (1), $(2)_0$ (т. е. в (6)), то как раз получатся пп. 1–3 ее определения. Впрочем, формула (5) полезна тем, что позволяет легко вывести некоторые свойства G, например то, что $\dfrac{d}{ds}G(t, s) = -G(t, s)A(s)$ при $t \neq s$.

Представление решения с помощью МГ удобно тем, что четко выделяет структуру решения как линейного оператора от h. В частности, G уже, естественно, не зависит от h, т. е. ее нужно найти один раз, а затем применять к разным h.

Замечание. Если краевые условия (2) имеют распавшийся вид: $Py(a) = \psi$, $Qy(b) = \chi$, $\dim P = k \times n$, $\dim Q = (n - k) \times n$, то их, конечно, тоже можно записать в виде (2), а именно, надо положить $L = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 0 \\ Q \end{bmatrix}$, $\varphi = \begin{bmatrix} \psi \\ \chi \end{bmatrix}$. Тогда ключевая для разрешимости матрица принимает вид $LX(a) + RX(b) = \begin{bmatrix} PX(a) \\ QX(b) \end{bmatrix}$. $\Box$

Теперь легко вывести соответствующие результаты для краевых задач для линейных ОДУ высокого порядка:

$$P_n\left(t, \frac{d}{dt}\right) y = r, \tag{9}$$

$$L \begin{bmatrix} y \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} \Bigg|_{t=a} + R \begin{bmatrix} y \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} \Bigg|_{t=b} = \varphi. \tag{10}$$

Аналогично задаче Коши, эта задача эквивалентна (1), (2), в которой $A = \begin{bmatrix} 0 & E_{n-1} \\ -a_0 & \dots - a_{n-1} \end{bmatrix}$, $h = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} y \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$.

Для правильной постановки задачи надо требовать $a_k, r \in C[a, b]$, а под решением понимать функцию $y \in C^n(a, b) \cap C^{n-1}[a, b]$.

Замечание. Так же как и для систем, мы требуем выполнение уравнения внутри интервала, и требуем нужную для этого гладкость тоже внутри, а краевые условия понимаем как пределы, и требуем нужную для этого «гладкость на отрезке». Здесь, в отличие от I порядка, возникает проблема, как понимать «гладкость на отрезке», т. е. что такое $C^{n-1}[a,b]$. Как следует из логики постановки краевой задачи, под $C^{n-1}[a,b]$ нужно понимать множество функций, у которых все нужные производные существуют внутри, и имеют пределы в концах, и это не значит, что в концах считаются односторонние производные!!! И краевые условия понимаются как соотношения не для односторонних производных, а для пределов изнутри обычных производных! Далее в краевых задачах для уравнений высокого порядка мы будем это подразумевать. В задаче Коши такой проблемы не было, т. к. там начальная точка лежит внутри интервала, т. е. данные Коши — это просто подстановка точки в нужные производные. Но более общей является идеология краевых задач, которая потом переносится и в теорию уравнений в частных производных.

Замечание для преподавателя. Правда, можно показать, что для функций из $C^{n-1}[a,b]$ все-таки существуют односторонние производные в концах, равные соответствующие пределам изнутри (см. об этом подробнее в курсе «Уравнения математической физики» для любого n, для C^1 это будет доказано ниже), так что можно определять $C^{n-1}[a,b]$ и в «обычном» смысле, но это долгое доказательство, и оно совершенно не нужно для понимания природы решений краевых задач.

Получим, что решение (9), (10) существует при всех r и φ в том и только том случае, когда выполнено (3) (где X — матрица Вронского $(9)_0$), и если это условие выполнено, то решение единственно и удовлетворяет оценке

$$\|y\|_{C^n(a,b)} \leqslant C(P_n) \cdot (\|r\|_{C(a,b)} + |\varphi|).$$

При нарушении (3) существование решения имеет место только при выполнении специальных условий ортогональности на входные данные r и φ, и решение находится с точностью до прибавления общего решения однородной задачи. Условие (3) эквивалентно тому, что однородная задача имеет только тривиальное решение, что удобно, т. к. проверка последнего условия не требует строить матрицу Вронского. Снова (9), (10) можно разбить на $(9)_0$, (10) и (9), $(10)_0$, где вторая задача более важная, т. к. (9), (10) всегда сводится к случаю $\varphi = 0$ отнятием от решения любой функции, удовлетворяющей (10).

$\left[\text{Или можно просто решить } (9)_0,\ (10) \text{ с помощью формулы } (8)_2.\right]$

Для решения (9), $(10)_0$ можно записать представление $y(t) = \int\limits_a^b g_{1n}(t,s)r(s)ds$, где G — МГ соответствующей задачи (6). Сформулируем свойства $g = g_{1n}$ в независимых терминах, чтобы для его нахождения не нужно было рассматривать (6). Имеем его свойства:

1. $P_n\left(t, \dfrac{d}{dt}\right) g(t,s) = 0$ при $t \neq s$;

2. $\begin{bmatrix} g \\ \dots \\ g_t^{(n-1)} \end{bmatrix}(s+0,s) - \begin{bmatrix} g \\ \dots \\ g_t^{(n-1)} \end{bmatrix}(s-0,s) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

3. g удовлетворяет $(10)_0$ по t.

Утверждение. При условии (3) функция g со свойствами 1–3 существует и единственна.

Доказательство. Существование уже показано: $g = g_{1n}$. Если имеется 2 таких функции, то их разность z удовлетворяет пп. 1–3, но уже с однородным условием скачка. Ввиду п. 1 это означает, что при $t = s$ непрерывна также и $z_t^{(n)}$, и z удовлетворяет $(9)_0$ по t на всем (a, b). Но тогда $z(\cdot, s)$ есть решение $(9)_0$, $(10)_0$ (при любом s), а значит может быть только нулем. □

Определение. Функция $g = g(t, s)$ со свойствами 1–3 называется *функцией Грина* (ФГ) задачи (9), (10).

Итак, при условии (3), т. е. если однородная задача имеет только тривиальное решение, задача (9), $(10)_0$ однозначно разрешима, и для ее решений имеет место представление

$$y(t) = \int\limits_a^b g(t, s) r(s) ds.$$

Как говорилось выше для систем, это представление удобно тем, что может применяться к разным r с ФГ, найденной однажды.

Замечание. На практике бывает необходимость рассматривать ОДУ с нетривиальным коэффициентом при старшей производной:

$$a_n(t) y^{(n)} + \cdots + a_0(t) y = \widetilde{r}(t), \tag{11}$$

хотя и ясно, что если $a_n(t) \neq 0$ на некотором интервале, то на нем можно записать (11) в виде (9) с $r = \widetilde{r}/a_n$.

[А в тех точках, где $a_n = 0$, (11) вырождается и его исследование намного усложняется.]

Тогда решение задачи [(11), $(10)_0$]=[(9), $(10)_0$] имеет вид

$$y(t) = \int\limits_a^b g(t,s)r(s)ds = \int\limits_a^b g(t,s)\frac{\widetilde{r}(s)}{a_n(s)}ds = \int\limits_a^b \widetilde{g}(t,s)\widetilde{r}(s)ds,$$

где $\widetilde{g}$ называется ФГ задачи (11), $(10)_0$. Легко видеть, что ее свойства совпадают со свойствами g, только изменится п. 2:

1. $\widetilde{g}$ удовлетворяет (11) по t при $t \neq s$;
2. $\begin{bmatrix} \widetilde{g} \\ \dots \\ \widetilde{g}_t^{(n-1)} \end{bmatrix} (s+0,s) - \begin{bmatrix} \widetilde{g} \\ \dots \\ \widetilde{g}_t^{(n-1)} \end{bmatrix} (s-0,s) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1/a_n(s) \end{bmatrix};$
3. $\widetilde{g}$ удовлетворяет $(10)_0$ по t. □

Перейдем теперь к рассмотрению важного частного случая — задача (9), (10) при $n = 2$, в которой условия (10) задаются раздельно в точках a и b. Поскольку случаи, когда оба краевых условия заданы в одном конце, суть задача Коши, которую мы ужé изучили (она безусловно разрешима, и т. д.), то особый интерес представляет только случай, когда на каждом конце по 1 условию:

$$l_1y(a) + l_2y'(a) = \varphi_1, \qquad r_1y(b) + r_2y'(b) = \varphi_2, \tag{12}$$

где $l_1^2 + l_2^2 \neq 0$, $r_1^2 + r_2^2 \neq 0$. Уравнение (9) принимает вид

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = r(t).$$

Умножим его на некоторую функцию $\gamma(t)$ так, чтобы оно приняло вид

$$(p(t)y')' - q(t)y = \widetilde{r}(t). \tag{13}$$

Поскольку $\gamma y'' + \gamma a_1 y' + \gamma a_0 y = (\gamma y')' - \gamma' y' + \gamma a_1 y' + \gamma a_0 y$, по получаем условия $p = \gamma$, $\gamma' = \gamma a_1$, $q = -\gamma a_0$, $\widetilde{r} = rp$, т. е. $\gamma(t) = \exp\left(\int\limits_a^t a_1(s)ds\right)$, и получается (13) с соответствующими p, q и $\widetilde{r}$. Таким образом, если (как мы сразу и предполагали) $a_k \in C[a,b]$, то (9) при $n = 2$ можно записать в виде (13) с

$$q \in C[a,b], \qquad p \in C^1[a,b], \qquad p > 0 \quad \text{на } [a,b]. \tag{14}$$

Задача (13), (12) есть частный случай (11), (10), для нее можно ввести понятие ФГ и применить все полученные выше результаты.

Вид (13) называется *самосопряженным*. Это название связано со следующим обстоятельством. Пусть y и z — 2 произвольные функции класса $C^2(a,b) \cap C^1[a,b]$ (именно в этом классе ищутся решения нашей задачи). Рассмотрим выражение

$$((py')' - qy, z)_{L_2^{\mathbb{R}}(a,b)} = \int\limits_a^b (p(t)y'(t))' z(t)dt - \int\limits_a^b q(t)y(t)z(t)dt =$$

$$= py'z|_a^b - \int\limits_a^b p(t)y'(t)z'(t)dt - \int\limits_a^b q(t)y(t)z(t)dt =$$

$$= (py'z - pyz')|_a^b + \int\limits_a^b (p(t)z'(t))' y(t)dt - \int\limits_a^b q(t)y(t)z(t)dt =$$

$$= ((pz')' - qz, y)_{L_2^{\mathbb{R}}(a,b)} + p(y'z - yz')|_a^b.$$

[В отличие от классического $L_2(a,b)$, здесь мы пишем $(\cdot,\cdot)_{L_2(a,b)}$ без положенной черты над вторым аргументом и потому употребляем для этого обозначение $(\cdot,\cdot)_{L_2^{\mathbb{R}}(a,b)}$ — это просто неделимое обозначение, оно не соответствует никакому «евклидову пространству $L_2^{\mathbb{R}}(a,b)$»; если же потом все функции окажутся вещественными, то можно будет убрать индекс «$\mathbb{R}$».]

Если теперь предположить, что y и z удовлетворяют $(12)_0$, то векторы $(y,y')^*|_{t=a}$ и $(z,z')^*|_{t=a}$ оба ортогональны ненулевому вектору (l_1,l_2) и потому коллинеарны, так что $(y'z-yz')(a)=0$, и аналогично в точке b. В итоге мы получили, что для таких функций верно соотношение $(Ly,z)_{L_2^{\mathbb{R}}(a,b)} = (y,Lz)_{L_2^{\mathbb{R}}(a,b)}$, где L — дифференциальный оператор в уравнении (13). Это означает, что L самосопряжен «в вещественном смысле» в пространстве

$$L_2^C(a,b) = \left\{\, z \in C^2(a,b) \cap C^1[a,b] \mid z \text{ удовлетворяет } (12)_0 \,\right\},$$

снабженном «скалярным произведением» $(\cdot,\cdot)_{L_2^{\mathbb{R}}(a,b)}$.

[Здесь следует вспомнить что такое сопряженный оператор в $\mathbb{R}^n$ и обобщение на произвольные евклидовы пространства.]

Замечание. Можно сделать замену неизвестной функции y в исходном уравнении вида $y = z\mu$ так, чтобы добиться $p = 1$ (встречается в некоторых учебниках).

Упражнение. Убедиться.

Но этот прием неудобен тем, что делается замена неизвестной функции, что затрудняет дальнейшее истолкование результатов, полученных ниже. □

Итак, рассмотрим задачу (13), (12) и посмотрим, во что превратится для нее общая теория, развитая выше. Если $y_{1,2}$ — ФСР $(13)_0$, а $X = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$ — соответствующая матрица Вронского, то, как доказано выше, задача (13), (12) разрешима при любых $\widetilde{r}$ и $\varphi_{1,2}$ в том и только том случае, когда однородная задача имеет только тривиальное решение, что, в свою очередь, эквивалентно условию $\det \begin{bmatrix} PX(a) \\ QX(b) \end{bmatrix} \neq 0$, где $P = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix}$, т. е.
$PX(a) = \begin{bmatrix} l_1y_1 + l_2y_1' & l_1y_2 + l_2y_2' \end{bmatrix}(a)$, и аналогично $QX(b)$, т. е. наше условие принимает вид

$$\det \begin{bmatrix} (l_1y_1 + l_2y_1')(a) & (l_1y_2 + l_2y_2')(a) \\ (r_1y_1 + r_2y_1')(b) & (r_1y_2 + r_2y_2')(b) \end{bmatrix} \neq 0. \tag{15}$$

Впрочем, практическая польза от вида (15) минимальная — обычно проще непосредственно проанализировать однородную задачу на предмет наличия нетривиальных решений.

Для рассматриваемой задачи ввиду самопряженности L легко довести до конца исследование случая, когда условие однозначной разрешимости нарушается:

Утверждение. При нарушении (15), т. е. если задача $(13)_0$, $(12)_0$ имеет нетривиальные решения, эта задача имеет ровно одно линейно независимое решение y_* (т. е. пространство его решений одномерно), и задача (13), $(12)_0$ разрешима тогда и только тогда, когда

$$\int_a^b y_*\widetilde{r}dt = 0. \tag{16}$$

[Вспомним факт из линейной алгебры: система $Ax = f$ разрешима в том и только том случае, когда $f \perp \mathrm{Ker}A^*$; если $A^* = A$, то условие принимает вид $f \perp \mathrm{Ker}A$.]

Замечание. Условие разрешимости задачи (13), (12) более сложно, и мы его не рассматриваем.

Доказательство. Итак, пусть имеется хотя бы одно нетривиальное решение y_* задачи $(13)_0$, $(12)_0$. Тогда второго линейно независимого решения χ этой задачи быть не может, т. к. иначе они образовали бы ФСР $(13)_0$, и все решения этого уравнения удовлетворяли бы $(12)_0$, что абсурдно.

[Т. е. в общем случае 2 условия уничтожают 2 степени свободы, а здесь 2 условия превратились в 1, так что осталась 1 степень свободы, но все же никак не 2.]

Возьмем любое решение χ уравнения $(13)_0$ такое, что y_* и χ линейно независимы. По указанным причинам χ не может удовлетворять ни одному из условий $(12)_0$. Общее решение (13) имеет вид (см. § 1):

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}(t) = X(t)\left(c + \int_a^t X^{-1}(s)\begin{bmatrix} 0 \\ \widetilde{r}(s)/p(s) \end{bmatrix} ds\right), \tag{17}$$

где $X = \begin{bmatrix} y_* & \chi \\ y'_* & \chi' \end{bmatrix}$. Таким образом, разрешимость задачи (13),

$(12)_0$ эквивалентна существованию такого $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, что (17) удовлетворяет $(12)_0$.

Вычисления облегчаются ввиду того, что по теореме Остроградского—Лиувилля вронскиан $w = \det X$ удовлетворяет $w' = -wp'/p$, т. е. $pw = \mathrm{const}$. Растягивая при необходимости χ, можно добиться $pw = 1$. Поэтому подынтегральная функция в (17) принимает вид

$$X^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \widetilde{r}/p \end{bmatrix} = \frac{1}{w} \begin{bmatrix} \chi' & -\chi \\ -y_*' & y_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \widetilde{r}/p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\chi \\ y_* \end{bmatrix} \widetilde{r}.$$

Напомним обозначения $P = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix}$.

Итак, подставляем (17) в $(12)_0$:

$$0 = P \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} (a) = PX(a)c = \begin{bmatrix} 0 & l_1\chi(a) + l_2\chi'(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

откуда $c_2 = 0$, и второе условие:

$$0 = Q \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} (b) = QX(b) \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int\limits_a^b \begin{bmatrix} -\chi(s) \\ y_*(s) \end{bmatrix} \widetilde{r}(s)ds \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & r_1\chi(b) + r_2\chi'(b) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int\limits_a^b \begin{bmatrix} -\chi(s) \\ y_*(s) \end{bmatrix} \widetilde{r}(s)ds \right) =$$

$$= (r_1\chi(b) + r_2\chi'(b)) \int\limits_a^b y_*(s)\widetilde{r}(s)ds.$$

Это возможно тогда и только тогда, когда выполнено (16), и тогда c_1 можно взять любой (как и следовало ожидать). ☐

Замечание. Если в условиях Утверждения задача (13), $(12)_0$ имеет решение y, то ввиду $y, y_* \in L_2^C(a,b)$ мы можем написать $(\widetilde{r}, y_*)_{L_2^{\mathbb{R}}(a,b)} = (Ly, y_*)_{L_2^{\mathbb{R}}(a,b)} = (y, Ly_*)_{L_2^{\mathbb{R}}(a,b)} = 0$, а это и есть (16) — то есть в одну сторону Утверждение можно было доказать тривиально. □

Если однородная задача $(13)_0$, $(12)_0$ имеет только тривиальное решение (т. е. выполнено (15)), то решение (13), $(12)_0$ можно найти с помощью ФГ: $y(t) = \int\limits_a^b g(t,s)\widetilde{r}(s)ds$. В данном случае построение ФГ достаточно простое: пусть ξ и η — нетривиальные решения $(13)_0$ такие, что ξ удовлетворяет $(12)_{10}$, а η — $(12)_{20}$. Такие функции существуют и единственны с точностью до растяжения. А именно, ξ есть решение задачи Коши для $(13)_0$ с данными $\xi(a) = \alpha$, $\xi'(a) = \beta$, где (α, β) — любой вектор, ортогональный (l_1, l_2), и аналогично η. Ясно, что ξ и η линейно независимы, т. к. зависимость означала бы, что каждая из них является (нетривиальным) решением $(13)_0$, $(12)_0$. Их вронскиан w, как показано выше, удовлетворяет $pw = \mathrm{const}$, так что растяжением одной из функций можно добиться $pw = 1$. Положим $g(t,s) = \begin{cases} \xi(t)\eta(s), & t < s, \\ \eta(t)\xi(s), & t > s. \end{cases}$ Эта функция автоматически удовлетворяет пп. 1,3 определения ФГ, она непрерывна, и

$$g_t(s+0,s) - g_t(s-0,s) = \eta'(s)\xi(s) - \xi'(s)\eta(s) = w(s) = 1/p(s),$$

а это п. 2 определения. Тем самым ФГ в самом деле имеет указанный вид.

Для решения полной задачи (13), (12) теперь остается решить $(13)_0$, (12). Это можно сделать, как было сказано для общего случая, поиском хоть какой-то функции, удовлетворяющей (12), и вычитанием ее из решения. Однако, как говорилось выше, этот способ плохо показывает структуру решения (как линейного оператора от φ) — чтобы такую структуру подчеркнуть, нужно воспользоваться $(8)_2$.

> Другими словами, хотелось бы получить формулу, в которой решение имело бы вид комбинации φ_k с заранее найденными коэффициентами.

Сформулируем эту процедуру более конкретно для данного случая. «Заготовим» специальную ФСР уравнения $(13)_0$ $z_{1,2}$ такую, что z_1 удовлетворяет (12) с $\varphi_1 = 1$ и $\varphi_2 = 0$, а z_2 — наоборот. Если исходная ФСР $y_{1,2}$ не такова, то нужно сделать перекомбинацию: $z_1 = c_1 y_1 + c_2 y_2$, где для $c_{1,2}$ получается система с матрицей (15) и правой частью $(1, 0)^*$, и аналогично z_2.

> В самом деле, если записать (12) в виде $l_0 y = \varphi_1$, $r_0 y = \varphi_2$, где l_0, r_0 — соответствующие краевые операторы, то получаем $1 = l_0 z_1 = C_1 l_0 y_1 + C_2 l_0 y_2$, и аналогично z_2, и в итоге $\begin{bmatrix} l_0 y_1 & l_0 y_2 \\ r_0 y_1 & r_0 y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, а матрица здесь и есть из (15).

Но теперь очевидно, что решение $(13)_0$, (12) имеет вид $y = \varphi_1 z_1 + \varphi_2 z_2$.

Далее мы подробнее остановимся на случае, когда условие безусловной однозначной разрешимости (15) задачи (13),

(12) не выполнено, и уже будем считать условия (12) однородными.

§ 4. Задача Штурма—Лиувилля

Продолжим рассматривать задачу (13), $(12)_0$ из § 3, но добавим в ней дополнительное слагаемое с параметром (а также переобозначим $\widetilde{r} = f$, и придадим другой смысл символу r):

$$(p(t)y')' - q(t)y + \lambda r(t)y = f(t), \tag{1}$$

$$l_1 y(a) + l_2 y'(a) = 0, \qquad r_1 y(b) + r_2 y'(b) = 0. \tag{2}$$

Здесь, как и ранее, $p \in C^1[a,b]$, $f, q \in C[a,b]$, $p > 0$; также считаем $r \in C[a,b]$, $r > 0$; все коэффициенты вещественны, но λ — комплексный параметр, так что решения (1), (2) также могут быть комплексными. Рассмотрение такой задачи необходимо для приложений,

[которые мы вполне осозна́ем только в курсе уравнений в частных производных]

функция r введена для общности, чаще всего $r \equiv 1$, тогда те λ, при которых однородная задача $(1)_0$, (2) (т. е. при $f = 0$) имеет нетривиальные решения y_λ, являются СЗ (СЧ) оператора L на $L_2^C(a,b)$, соответствующие решения y_λ — «собственными векторами» (как говорят, СФ). Говорят еще, что это СЗ и СФ задачи (1), (2). Эти названия сохраняются и в случае $r \not\equiv 1$.

Из результатов § 3 вытекают следующие элементарные свойства СФ и СЗ задачи (1), (2):

1. СЗ однократны, т. е. имеют ровно по одной (с точностью до растяжения) СФ. В самом деле, СФ удовлетворяют $(1)_0$, (2), но в § 3 было доказано, что пространство решений такой задачи (с переобозначением $q := q - \lambda r$) не более чем одномерно.

2. СФ, соответствующие различным СЗ $\lambda \neq \mu$, ортогональны «в вещественном смысле» с весом r: $\int\limits_a^b r(t) y_\lambda(t) y_\mu(t) dt = 0$. В самом деле, поскольку $y_{\lambda,\mu} \in L_2^C(a,b)$, то можно воспользоваться самосопряженностью L и получить:
$$0 = (Ly_\lambda, y_\mu)_{L_2^{\mathbb{R}}(a,b)} - (y_\lambda, Ly_\mu)_{L_2^{\mathbb{R}}(a,b)} =$$
$$= -\lambda (ry_\lambda, y_\mu)_{L_2^{\mathbb{R}}(a,b)} + \mu (ry_\lambda, y_\mu)_{L_2^{\mathbb{R}}(a,b)} =$$
$$= (\mu - \lambda)(ry_\lambda, y_\mu)_{L_2^{\mathbb{R}}(a,b)}.$$

3. СЗ вещественны, а СФ вещественнозначны. В самом деле, если СЗ λ имеет СФ y_λ, то для них верно $(1)_0$, (2). Применив операцию $\overline{(\cdot)}$ к этим соотношениям, получим, что $\overline{y}_\lambda$ есть СФ, соответствующая СЗ $\overline{\lambda}$, что ввиду п. 1 означает $\overline{y}_\lambda = y_{\overline{\lambda}}$ с точностью до растяжения. Если бы $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, т. е. $\overline{\lambda} \neq \lambda$, то ввиду п. 2 получили бы
$$0 = \int\limits_a^b r(t) y_\lambda(t) \overline{y}_\lambda(t) dt = \int\limits_a^b r(t) |y_\lambda(t)|^2 dt,$$
что ввиду $r > 0$ влечет $y_\lambda \equiv 0$, что невозможно. Итак, $\lambda \in \mathbb{R}$, а значит y_λ и $\overline{y}_\lambda = y_{\overline{\lambda}}$ суть СФ одного СЗ, т. е.

$\overline{y}_\lambda = y_\lambda$. Тем самым, далее можно «забыть о $\mathbb{C}$», вместо $L_2^{\mathbb{R}}(a,b)$ писать просто $L_2(a,b)$, и не делать оговорку о «вещественном смысле» ортогональности СФ.

[Отметим аналогию с линейной алгеброй: СЧ $A = A^*$ вещественны, СВ образуют ортогональный базис (а значит, их полное число, т. е. каждое СЧ (если считать его столько раз, какова его кратность) имеет по одному СВ). Здесь мы не докажем, что СФ образуют базис, хотя это тоже верно, но остальное доказали (здесь еще и СЗ однократны). Здесь еще, в отличие от линейной алгебры, бесконечное число этих СЧ, поэтому надо исследовать их структуру, чем мы далее и будем заниматься вместе с изучением свойств СФ.]

Замечание для преподавателя. Свойства «ортогональности» СФ (см. п. 2) и «самосопряженности» L (см. конец § 3) на самом деле не суть настоящие одноименные свойства в L_2 в комплексном смысле, поэтому стандартная техника доказательства вещественности СЗ здесь не работает, и приходится существенно использовать однократность СЗ.

4. Если λ не есть СЗ, то задача (1), (2) имеет единственное решение при любой f (и его можно представить с помощью ФГ, которая зависит от λ), а иначе для разрешимости необходимо и достаточно, чтобы $f \perp y_\lambda$ в $L_2(a,b)$. Если последнее условие выполнено, то все решения задачи имеют вид $y = y_* + Cy_\lambda$, где y_* — частное решение. Таким образом, дальнейшее исследование сводится к анализу свойств СЗ и СФ задачи $(1)_0$, (2), т. е. можно теперь считать $f = 0$.

Замечание для преподавателя. Интересно исследовать зависимость ФГ от λ — как выглядят ее особенности в СЗ, поведение при больших λ, и т. п.

Изучим теперь нетривиальные свойства решений уравнения $(1)_0$ и СЗ и СФ задачи $(1)_0$, (2). В приложениях важную роль играет поведение нулей нетривиальных решений уравнения $(1)_0$. Для его изучения временно абстрагируемся от параметра λ и рассмотрим уравнение $(1)_0$ в виде

$$(p(t)y')' + g(t)y = 0, \tag{3}$$

где $g \in C[a,b]$.

Замечание. Любое нетривиальное решение (3) может иметь только изолированные нули, причем с ненулевой производной в них, т. к. если $y(t_0) = 0$, то ввиду нетривиальности обязательно $y'(t_0) \neq 0$, так что $y \neq 0$ на
$(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \setminus \{t_0\}$. $\square$

Лемма. (Штурма о нулях (сравнении)). Пусть на интервале (a,b) имеется решение φ уравнения $(p(t)y')' + g_1(t)y = 0$, и решение ψ уравнения $(p(t)y')' + g_2(t)y = 0$, где $g_2 \geqslant g_1$, причем φ имеет 2 последовательных нуля $t_{1,2} \in [a,b]$ (т. е. $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$, $\varphi \neq 0$ на (t_1, t_2)). Тогда функция ψ имеет нуль $t_3 \in [t_1, t_2]$, а если $g_2 > g_1$, то нуль t_3 найдется на (t_1, t_2).

Доказательство. Имеем:

$$0 = \psi((p\varphi')' + g_1\varphi) - \varphi((p\psi')' + g_2\psi) =$$

$$= [p(\varphi'\psi - \varphi\psi')]' + (g_1 - g_2)\varphi\psi.$$

Допустим, $\psi \neq 0$ на всем $[t_1, t_2]$ (для определенности $\psi > 0$), и пусть для определенности $\varphi > 0$ на (t_1, t_2). Тогда $\int\limits_{t_1}^{t_2}$ от полученного тождества дает:

$$\begin{gathered} 0 \leqslant p(\varphi'\psi - \varphi\psi') \Big|_{t_1}^{t_2} = p\varphi'\psi \Big|_{t_1}^{t_2} = \\ = p(t_2)\varphi'(t_2)\psi(t_2) - p(t_1)\varphi'(t_1)\psi(t_1), \end{gathered} \tag{4}$$

что невозможно ввиду $\varphi'(t_2) < 0$, $\varphi'(t_1) > 0$. Если же $g_2 > g_1$, и $\psi \neq 0$ на (t_1, t_2) (пусть для определенности $\psi > 0$ на (t_1, t_2), так что $\psi \geqslant 0$ в точках $t_{1,2}$), то неравенство (4) строгое, что опять дает противоречие. ☐

Пример. $p = 1$, $g_2 = A^2 > a^2 = g_1$, A и a — положительные постоянные. Тогда
$\varphi(t) = C_1\cos(at) + C_2\sin(at) = C_3\sin(a(t - t_4))$, и аналогично $\psi(t) = C_4\sin(A(t - t_5))$. Нули ψ чаще.

Следствие. Пусть $g_1 = g_2 = g$, φ и ψ — 2 линейно независимых решения уравнения (3). Тогда нули φ и ψ перемежаются, т. е. они не совпадают, и строго между любыми 2 соседними нулями функции φ имеется (один) нуль ψ, и наоборот.

[Собственно, дальше используется только это Следствие, а не сама лемма Штурма, хотя в приложениях лемма играет важную роль.]

Доказательство. Несовпадение нулей линейно независимых решений очевидно. Пусть $t_{1,2}$ — соседние нули функции φ. По лемме Штурма на $[t_1, t_2]$ найдется нуль ψ, но ввиду несовпадения нулей этот нуль будет на (t_1, t_2). Но лемму Штурма в данном случае можно применить и поменяв φ и ψ

ролями, так что строго между соседними нулями ψ найдется нуль φ. А тогда ясно, что такой нуль будет всегда один, и наоборот. □

Пример. В предыдущем Примере $A = a$, тогда $\varphi(t) = C_3 \sin(a(t-t_4))$, $\psi(t) = C_4 \sin(a(t-t_5))$ (сдвиг фазы). □

Дальнейшее исследование (3) удобно проводить с помощью так наз. *преобразования Прюфера.* Пусть y — нетривиальное решение (3). Введем на плоскости $\{(py', y)\}$ полярные координаты: $py' = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$. Эта замена взаимно однозначная (с точностью до сдвига $\theta := \theta + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) и гладкая на нашем решении: $\rho = \sqrt{p^2 y'^2 + y^2}$, так что ввиду $y \not\equiv 0$ имеем $\rho > 0$ всюду.

[Формула для $\theta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{py'}\right) + \dfrac{\pi}{2}(1 - \operatorname{sgn}(y'))$ может вызвать сомнения в гладкости замены, но гладкость ясна из природы полярной системы координат, лишь бы радиус был ненулевым. Тем более что хорошую формулу для θ и нельзя получить ввиду многозначности.]

Тогда (3) эквивалентно системе

$$(\rho \sin\theta)' = \frac{\rho \cos\theta}{p}, \qquad (\rho\cos\theta)' + g\rho\sin\theta = 0,$$

которая после элементарных преобразований принимает вид

$$\rho' = \left(\frac{1}{p} - g\right)\rho\cos\theta\sin\theta; \qquad \theta' = \frac{1}{p}\cos^2\theta + g\sin^2\theta. \qquad (5)$$

[Эту систему нужно держать перед глазами постоянно!]

Преимущества этой перезаписи уравнения (3) перед исходной формой следующие:

1. уравнение для θ отделяется — можно решить сначала его, а затем уравнение для ρ; оба уравнения — первого порядка (правда, для θ — нелинейное, но нередко интегрируемое в элементарных функциях, как мы увидим ниже);

2. нули y легко записать в виде $\theta(t_*) = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; также легко сформулировать и общие однородные краевые условия для y в терминах θ (см. далее).

Отметим, что, несмотря на нелинейность системы (5), ее решения заведомо существуют глобально (как и следует ожидать, т. к. это перезапись линейного уравнения), т. к. правая часть $(5)_2$ ограничена, а $(5)_1$ линейно по ρ.

Замечание. Любое решение $(5)_2$ принимает каждое значение πn, $n \in \mathbb{Z}$, не более чем по 1 разу, и если в какой-то точке $\theta(t_*) \geqslant \pi n$, то правее этой точки значение πn ужé не может приниматься, и $\theta > \pi n$. В самом деле, если $\theta(t_*) = \pi n$, то $\theta'(t_*) = \dfrac{1}{p(t_*)} > 0$, откуда следуют оба тезиса. Таким образом, прямые $\theta = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, график $\theta(t)$ «проскакивает» не более чем по 1 разу и с положительным наклоном, хотя сама функция $\theta(t)$ не обязана быть монотонно возрастающей. □

Перепишем условия (2) в новых переменных. Имеем: $l_1 y + l_2 y' = l_1 \rho \sin\theta + \dfrac{l_2 \rho \cos\theta}{p}$. Пусть для определенности $l_2 \leqslant 0$, а если $l_2 = 0$, то $l_1 \geqslant 0$. Тогда найдется единственный

α такой, что

$$\alpha \in [0, \pi); \quad \sin \alpha = -\frac{l_2}{\sqrt{l_1^2 p^2(a) + l_2^2}}; \, \cos \alpha = \frac{l_1 p(a)}{\sqrt{l_1^2 p^2(a) + l_2^2}}, \tag{6}$$

так что (ввиду $\rho > 0$) $(2)_1$ эквивалентно равенству $\sin(\theta(a) - \alpha) = 0$, т. е.

$$\theta(a) = \alpha + \pi n_1, \qquad n_1 \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Аналогично, считая для определенности $r_2 \leqslant 0$ (если $r_2 = 0$, то $r_1 \leqslant 0$), мы можем переписать $(2)_2$ в виде

$$\theta(b) = \beta + \pi n_2, \qquad n_2 \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

где β определяется (однозначно) из условий

$$\beta \in (0, \pi]; \quad \sin \beta = -\frac{r_2}{\sqrt{r_1^2 p^2(b) + r_2^2}}; \, \cos \beta = \frac{r_1 p(b)}{\sqrt{r_1^2 p^2(b) + r_2^2}}. \tag{9}$$

Таким образом, для θ получается переопределенная краевая задача $(5)_2$, (7), (8), но если ее решение существует, то ρ однозначно (с точностью до растяжения, соответствующего растяжению СФ) находится из $(5)_1$.

Теперь мы готовы установить еще одно свойство решений уравнения (3):

Лемма 1. Пусть на $[a, b]$ имеются нетривиальные решения φ_k уравнений $(p_k y')' + g_k y = 0$, $k = 1, 2$, где $p_1 \geqslant p_2 > 0$, $g_2 \geqslant g_1$, и пусть θ_k — координата в преобразовании Прюфера этих решений. Тогда из $\theta_2(a) \geqslant \theta_1(a)$ следует:

1. $\theta_2 \geqslant \theta_1$ на $[a, b]$;
2. если $g_2 > g_1$ на (a, b), то $\theta_2 > \theta_1$ на $(a, b]$.

Доказательство. 1) Имеем: $\theta_k' = \dfrac{1}{p_k}\cos^2\theta_k + g_k\sin^2\theta_k$, $k = 1, 2$, откуда

$$(\theta_2 - \theta_1)' = \left(g_1 - \frac{1}{p_1}\right)(\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1) + h,$$

$$\left[\text{Это уравнение нужно держать перед глазами постоянно!}\right]$$

где

$$\left[\text{в } h \text{ надо объединить } \frac{1}{p_1}\sin^2\theta_1 + \frac{1}{p_1}\cos^2\theta_1 = \frac{1}{p_1}.\right]$$

$$h = (g_2 - g_1)\sin^2\theta_2 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1}\sin^2\theta_2 + \frac{1}{p_2}\cos^2\theta_2 =$$

$$= (g_2 - g_1)\sin^2\theta_2 + \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right)\cos^2\theta_2 \geqslant 0.$$

[Эту формулу нужно держать перед глазами постоянно!]

Таким образом, $u = \theta_2 - \theta_1$ удовлетворяет

$$u' - \gamma(t)u \geqslant 0; \qquad u(a) \geqslant 0, \tag{10}$$

где

$$\gamma = \left(g_1 - \frac{1}{p_1}\right)(\sin\theta_2 + \sin\theta_1)\times$$

$$\times\left\{\begin{matrix} \dfrac{\sin\theta_2 - \sin\theta_1}{\theta_2 - \theta_1}, & \theta_2 \neq \theta_1, \\ 1, & \theta_2 = \theta_1 \end{matrix}\right\} \in C[a, b].$$

[В точках, где $u = \theta_2 - \theta_1 = 0$, соответствующий член $\left(g_1 - \dfrac{1}{p_1}\right)(\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1)$ в уравнении для $(\theta_2 - \theta_1)$ равен нулю, и (10) верно с любым значением γ, так что имеем право (для непрерывности γ) доопределить $\gamma = \left(g_1 - \dfrac{1}{p_1}\right) 2\sin\theta_{1,2}$.]

Из (10) легко получаем $u(t) \geqslant u(a)\exp(\Gamma(t)) \geqslant 0$, где $\Gamma(t) = \int\limits_a^t \gamma(s)ds$.

2) Из $(10)_1$ получаем, что при $t_2 \geqslant t_1$ верно $u(t_2) \geqslant u(t_1)\exp(\Gamma(t_2) - \Gamma(t_1))$, так что если $u(t_1) > 0$, то и $u(t_2) > 0$. Следовательно, достаточно показать, что в любой правой окрестности точки a найдутся точки, где $u = \theta_2 - \theta_1 > 0$. Допустим, это не так, т. е. $\theta_2 = \theta_1$ на некотором $[a, c]$, $c > a$. Тогда из уравнения для $(\theta_2 - \theta_1)$ на $[a, c]$ получаем $h = 0$, что ввиду $g_2 > g_1$ и определения h возможно лишь если $\sin\theta_2 \equiv 0$ (т. е. $\theta_2 \equiv \pi m$), $p_1 \equiv p_2$. Но тогда $\theta'_k = \dfrac{1}{p_{1,2}}\cos^2\theta_{1,2} = \dfrac{1}{p_{1,2}} > 0$, что противоречит $\theta_2 = \theta_1 = \text{const}$. □

Теперь вернемся обратно к конкретному виду $(1)_0$. После преобразования Прюфера задача $(1)_0$, (2) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \rho' &= \left(\frac{1}{p} - \lambda r + q\right)\rho\cos\theta\sin\theta; \\ \theta' &= \frac{1}{p}\cos^2\theta + (\lambda r - q)\sin^2\theta \end{aligned}\right\} \quad \text{на } (a, b) \tag{11}$$

с краевыми условиями (7), (8). Поскольку сдвиг $\theta := \theta + \pi m$

не меняет y или лишь меняет его знак (что несущественно), то можно преобразовать (7), (8) к виду

$$\theta(a) = \alpha; \qquad \theta(b) = \beta + \pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Итак, исходная задача о СЗ и СФ $(1)_0$, (2) переформулировалась следующим образом. Следует проанализировать переопределенную краевую задачу $(11)_2$, (12) и выяснить, при каких λ она имеет решение (после чего ρ находится из $(11)_1$ единственным с точностью до растяжения образом). Ответ на этот вопрос будем искать следующим естественным путем. Решим задачу Коши $(11)_2$, $(12)_1$; ее непродолжаемое решение $\theta = \theta(t, \lambda)$ существует и единственно, оно определено при $(t, \lambda) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ и непрерывно по этим переменным.

$$\begin{bmatrix}\text{Отметим, что } \theta(t,\lambda) > 0 \text{ на } (a,b], \text{ поскольку} \\ \theta(a,\lambda) \geqslant 0\pi, \text{ и можно применить Замечание выше.}\end{bmatrix}$$

Остается выяснить, при каких λ верно $(12)_2$, т. е. $\theta(b, \lambda) = \beta + \pi n$ с каким-то целым n. Для этого нужно изучить свойства функции $\theta(b, \cdot)$.

Лемма 2. $\theta(b, \lambda) \to 0$ при $\lambda \to -\infty$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ достаточно малое, чтобы $\alpha < \pi - \varepsilon$, и $\varepsilon < \pi/2$ (тогда $\varepsilon < \pi - \varepsilon$). Обозначим $K = \dfrac{1}{\min\limits_{[a,b]} p} \in (0, +\infty)$ и рассмотрим точки $A = (a, \pi - \varepsilon)$, $B = (b, \varepsilon)$ в плоскости $\{(t, \theta)\}$. Обозначим $H = \left(K + \dfrac{\pi - 2\varepsilon}{b - a}\right) / \sin^2 \varepsilon \in (0, +\infty)$. Тогда $(K - H \sin^2 \varepsilon)$ есть угловой коэффициент прямой AB. Будем брать λ таками, что $\lambda r - q < -H$ на $[a, b]$.

[что возможно за счет $\lambda \ll -1$ ввиду $r > 0$, а именно $\lambda < \min\limits_{[a,b]} \dfrac{q - H}{r}$.]

Обозначим через $\theta = \theta_*(t)$ уравнение прямой AB, т. е.

$$\frac{d\theta_*}{dt} = K - H\sin^2\varepsilon, \qquad \theta_*(a) = \pi - \varepsilon.$$

Отметим, что при условии $\theta(t, \lambda) \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ мы можем написать $\dfrac{d}{dt}\theta(t, \lambda) < K - H\sin^2\varepsilon$. А поскольку $\theta(a, \lambda) = \alpha < \pi - \varepsilon$, то по Лемме из § 4 Части 1 график $\theta(t, \lambda)$ не может пересечь AB.

[Т.к. пересечение состоялось бы в полосе $\theta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, где уравнение для θ_* мажорирует уравнение для θ.]

Также график $\theta(t, \lambda)$ не может при $t > a$ пересечь прямую $\{\theta = 0\}$, как показано выше. Таким образом, график $\theta(t, \lambda)$ должен проходить в области $0 < \theta < \theta_*(t)$, что при $t = b$ дает $\theta(b, \lambda) \in (0, \varepsilon)$. $\square$

Лемма 3. $\theta(b, \lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$.

Доказательство. Зададим $n \in \mathbb{N}$. Выберем $\sigma > 0$ так, что $\sigma^2 < 1/p$ на $[a, b]$ (т. е. $0 < \sigma < \sqrt{K}$, где K из Леммы 2). Обозначим $\tau = \dfrac{(n + \frac{1}{2})\pi}{(b - a)\sigma}$. Будем брать λ такими, что $\lambda r - q > \tau^2$ на $[a, b]$.

[что возможно за счет $\lambda \gg 1$ ввиду $r > 0$, а именно $\lambda > \max\limits_{[a,b]} \dfrac{q + \tau^2}{r}$. Отсюда ясно, что выгоднее брать σ как можно больше, т. е. ближе к $\sqrt{K}$, чтобы τ было поменьше, и λ поменьше.]

Имеем:

$$\frac{d}{dt}\theta(t,\lambda) > \sigma^2\cos^2\theta(t,\lambda) + \tau^2\sin^2\theta(t,\lambda); \quad \theta(a,\lambda) = \alpha \geqslant 0.$$

Рассмотрим минорирующую задачу Коши

$$\frac{d\theta}{dt} = \sigma^2\cos^2\theta + \tau^2\sin^2\theta; \qquad \theta(a) = 0 \tag{13}$$

и обозначим ее решение $\theta = \theta_*(t)$. По упомянутой Лемме из § 4 Части 1 имеем $\theta(t,\lambda) > \theta_*(t)$ на $(a,b]$. Но θ_* можно явно найти, для этого сделаем в (13) замену $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sigma}{\tau}z$, тогда (13) примет вид

$$\frac{\sigma}{\tau}z' = \frac{\theta'}{\cos^2\theta} = \sigma^2 + \sigma^2 z^2; \qquad z(a) = 0,$$

откуда $z = \operatorname{tg}(\sigma\tau(t-a))$. Итак, $\operatorname{tg}\theta_*(t) = \dfrac{\sigma}{\tau}\operatorname{tg}(\sigma\tau(t-a))$.

[По смыслу задачи (13) ясно, что сама функция θ_* не имеет особенностей, несмотря на особенности в этой формуле.]

Для «нахождения отсюда θ_*» введем обозначение

$$t_k = a + \frac{\pi/2 + \pi k}{\sigma\tau} = a + (b-a)\frac{k+1/2}{n+1/2}$$

— это точки, в которых $\operatorname{tg}\theta_*(t) = \infty$, т. е. $\theta_*(t_k) = \dfrac{\pi}{2} + \pi m_k$, $m_k \in \mathbb{Z}$. При $k = 0,\ldots,n$ точки $t_k \in (a,b]$, причем $t_n = b$. Из (13) видно, что $\theta_* \nearrow$, так что в точках t_k функция θ_* переходит в очередной сектор $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k, \dfrac{3\pi}{2} + \pi k\right)$ (именно с тем же k, т. к. при $t = 0$ верно $\theta_*(0) \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, т. е. $m_k = k$). В итоге при $k = n$ получаем $\theta_*(b) = \theta_*(t_n) = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, а значит $\theta(b,\lambda) > \dfrac{\pi}{2} + \pi n$. $\square$

Следствие. (теорема о колебании). $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \Lambda(n)$ $\forall \lambda > \Lambda(n)$ любое решение уравнения $(1)_0$ обращается в нуль на $[a,b]$ не менее n раз.

Доказательство. Достаточно рассмотреть нетривиальные решения, причем не любые, а удовлетворяющие $(2)_1$, т. к. тогда для остальных решений утверждение будет следовать из свойства перемежения нулей. Но тогда удобно рассмотреть преобразование Прюфера этих решений, и вопрос сводится к поиску точек $t \in [a,b]$, в которых $\theta(t,\lambda) = \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. По Лемме 3 найдется $\Lambda(n)$ такое, что $\theta(b,\lambda) > \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ при $\lambda > \Lambda(n)$. Ввиду того, что $\theta(a,\lambda) = \alpha < \pi$, это означает, что на (a,b) функция $\theta(t,\lambda)$ последовательно (и по 1 разу ввиду Замечания выше) принимает все значения πm, $m = 1, \ldots, n$, что и требовалось. □

Теперь мы готовы сформулировать основной результат:

[Помимо тривиальных свойств приведенных в начале § 4]

Теорема. Задача $(1)_0$, (2) имеет счетный набор СЗ $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$, причем $\lambda_n \to +\infty$, а соответствующие СФ y_{λ_n} обращаются в нуль на (a,b) ровно n раз.

Доказательство. Как обосновано выше, задача о СЗ и СФ для $(1)_0$, (2) эквивалентна поиску тех λ, при которых решение $\theta(t,\lambda)$ задачи $(11)_2$, $(12)_1$ удовлетворяет условию $(12)_2$, и тогда соответствующая $y_\lambda(t) = \rho(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda)$, где $\rho(t,\lambda)$ находится (с точностью до растяжения) из $(11)_1$; при этом нули СФ — это точки, в которых $\theta(t,\lambda) = \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Величина $\theta(b,\lambda)$ положительна (как указано выше), непрерывна, по Леммам 2,3 $\theta(b,\lambda) \to 0$ при $\lambda \to -\infty$;

$\theta(b,\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$. Из Леммы 1 следует, что $\theta(b,\lambda)$ строго возрастает по λ. Значит, $\forall n \in \mathbb{N}_0\ \exists! \lambda_n \in \mathbb{R}$ такое, что $\theta(b,\lambda_n) = \beta + \pi n$ (напомним $(9)_1$), причем $\{\lambda_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность. Поскольку $\theta(a,\lambda_n) = \alpha \in [0,\pi)$, а $\theta(b,\lambda_n) = \beta + \pi n \in (\pi n, \pi(n+1)]$, то на $t \in (a,b)$ функция $\theta(t,\lambda)$ принимает все значения $\pi, \ldots, \pi n$, причем однократно ввиду Замечания выше.

Остается проверить $\lambda_n \to +\infty$. Имеем:
$\theta(b,\lambda_{n+1}) - \theta(b,\lambda_n) = \pi$, и если бы $\lambda_n \to \Lambda < +\infty$, то ввиду непрерывности θ по $(t,\lambda) \in [a,b] \times \mathbb{R}$ получили бы
$\theta(b,\Lambda) - \theta(b,\Lambda) = \pi$. $\square$

Следствие. Отрицательных СЗ конечное число (или нет вовсе). $\square$

Замечание для преподавателя. Тем самым мы дали полное описание СЗ и СФ задачи (1), (2), за исключением доказательства полноты СФ в $L_2(a,b)$.

§ 5. Краевые задачи на бесконечных интервалах для линейных ОДУ с постоянными коэффициентами

Снова начнем с систем I порядка:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \tag{1}$$

$t \in (a,b)$. Теперь интервал будем рассматривать бесконечный, т. е. либо $(a,b) = \mathbb{R}$, либо это полупрямая. В обоих случаях важную роль играет поведение ФМР $(1)_0$ на ∞, так что будем рассматривать только $A = \text{const}$, когда это поведение можно конструктивно изучить. Роль краевого условия на бесконечном(ых) конце(ах) будет играть условие ограниченности решения в окрестности этого(их) конца(ов). Начнем со случая $(a, b) = \mathbb{R}$. Таким образом, краевые условия имеют вид:

$$\sup_{\mathbb{R}} |x| < \infty. \tag{2}$$

Будем считать, что $f \in C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ (как будет видно из дальнейшего, это вполне естественно). Под решением (1), (2) понимается $x \in C^1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющая (1) всюду.

$\left[\right.$Здесь полезно вспомнить понятие корректности по Адамару, которое особенно интенсивно будет использоваться в курсе уравнений в частных производных.$\left.\right]$

Теорема.

1. При выполнении условия

$$\text{Re}\lambda_j(A) \neq 0 \tag{3}$$

задача (1), (2) корректна, т. е. для любой f существует единственное решение x, причем

$$\|x\|_{C^1(\mathbb{R})} \leqslant C(A)\|f\|_{C(\mathbb{R})}. \tag{4}$$

2. Если (3) нарушено, то задача (1), (2) некорректна, т. е. решение, в зависимости от выбора f, либо не существует, либо (если существует, то) неединственно.

Доказательство. Пусть $A = TJT^{-1}$, где $J = \text{diag}\{A_+, A_-, A_0\}$ (блоки квадратные, размеров n_+, n_-

и n_0 соответственно, $n_+ + n_- + n_0 = n$), где $\mathrm{Re}\lambda_j(A_+) > 0$, $\mathrm{Re}\lambda_j(A_-) < 0$, $\mathrm{Re}\lambda_j(A_0) = 0$. Вообще говоря, некоторые из блоков могут отсутствовать. Сделаем замену $x = Tz$, тогда (1) примет вид $z' = Jz + g$, где $g = T^{-1}f \in C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$. Как следует из Замечания в конце § 1 Части 1, условие (2) эквивалентно ограниченности z на $\mathbb{R}$. Общее решение системы имеет вид $z(t) = e^{tJ}z_0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)J}g(s)ds$. Будем разбивать все векторы на фрагменты: $\xi = (\xi_+, \xi_-, \xi_0)^*$, где каждый фрагмент имеет соответствующую длину.

[Правда, это обозначение не вполне удачно, т. к. индекс «0» еще означает начальные данные, но путаницы не будет, тем более что далее этой теоремы случай $\mathrm{Re}\lambda = 0$ уже не возникнет.]

Тогда $z_+(t) = e^{tA_+}z_{0+} + \int\limits_0^t e^{(t-s)A_+}g_+(s)ds$, и аналогично z_- и z_0. Теперь надо подобрать z_0 так, чтобы z (т. е. все 3 функции z_+, z_- и z_0) была ограничена на $\mathbb{R}$, и по построению $\exists(!)x \Longleftrightarrow \exists(!)z \Longleftrightarrow \exists(!)z_0$.

Начнем с z_-.

[Весь следующий блок в квадратных скобках логически лишний, но поучительный, и в нем мы научимся делать важные оценки.]

[Ввиду $\mathrm{Re}\lambda_j(A_-) \leqslant -2\delta$, $\delta > 0$, по оценке Гельфанда—Шилова имеем при $t > 0$

$$|e^{tA_-}| \leqslant e^{-2\delta t}\mathrm{ex}_{n-1}(2t|A|) \leqslant C(n, |A|)e^{-\delta t},$$

поэтому $|e^{tA_-}z_{0-}| \leqslant Ce^{-\delta t}|z_{0-}| \leqslant \mathrm{const}$, и (ввиду $t - s > 0$)

$$\left|\int\limits_0^t e^{(t-s)A_-}g_-(s)ds\right| \leqslant C_1\int\limits_0^t e^{-\delta(t-s)}ds \leqslant \mathrm{const},$$

так что $|z_-(t)| \leqslant \mathrm{const}$ при $t > 0$ при любом z_{0-} (никаких условий на z_{0-} не возникает).]

При $t < 0$ условие ограниченности z_- легко дает необходимое условие на z_{0-}. В самом деле,

$e^{-tA_-}z_-(t) = z_{0-} + \int\limits_0^t e^{-sA_-}g_-(s)ds$, но

$|e^{-tA_-}z_-(t)| \leqslant |z_-(t)| \cdot Ce^{-\delta(-t)}$, т. е. если z_- ограничена, то при $t \to -\infty$ получаем $z_{0-} + \int\limits_0^t e^{-sA_-}g_-(s)ds \to 0$. Интеграл $\int\limits_0^{-\infty} e^{-sA_-}g_-(s)ds$ сходится (аналогично блоку выше), так что необходимое условие принимает вид

$z_{0-} = \int\limits_{-\infty}^0 e^{-sA_-}g_-(s)ds$, и остается доказать его достаточность. Итак, имеем единственного «кандидата на решение»

$z_-(t) = e^{tA_-}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-sA_-}g_-(s)ds$, нужно доказать его ограниченность на $\mathbb{R}$. При любом $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$|z_-(t)| \leqslant C\|f\|_{C(\mathbb{R})}\int\limits_{-\infty}^{t}|e^{(t-s)A_-}|ds \leqslant$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Пользуемся оценкой из блока выше ввиду } t-s>0\text{, все}\\ \text{const зависят от } A.\end{array}\right]$$

$$\leqslant C_1\|f\|_{C(\mathbb{R})}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}ds = C_2\|f\|_{C(\mathbb{R})}.$$

Для нахождения z_+ проще всего свести к предыдущему заменой $t = -\xi$, $z_+(t) = h(-t)$. Получим:

$$\frac{dh(\xi)}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}z_+(-\xi) = -z'_+(-\xi) =$$

$$= -A_+z_+(-\xi) - g_+(-\xi) = -A_+h(\xi) - g_+(-\xi),$$

$$h \text{ ограничена.}$$

Поскольку $\mathrm{Re}\lambda_j(-A_+) < 0$, то применяем готовую формулу $h(\xi) = e^{-\xi A_+}\int\limits_{-\infty}^{\xi} e^{sA_+}(-g_+(s))ds$, т. е.

$$z_+(t) = e^{tA_+}\int\limits_{-\infty}^{-t} e^{sA_+}(-g_+(-s))ds \overset{s=-\xi}{=}$$

$$\overset{s=-\xi}{=} e^{tA_+}\int\limits_{+\infty}^{t} e^{-\xi A_+}g_+(\xi)d\xi = -e^{tA_+}\int\limits_{t}^{+\infty} e^{-\xi A_+}g_+(\xi)d\xi,$$

и снова верна оценка $\|z_+\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant C_3\|f\|_{C(\mathbb{R})}$.

Рассмотрим теперь z_0. Покажем, что если $n_0 > 0$, т. е. $A_0 \neq \emptyset$, и z_0 присутствует, то задача некорректна. Будем считать, что A_0 жорданова. Рассмотрим $g_0(t) = e^{tA_0}e_1$, тогда при любом z_{00} получим, что все кандидаты на решения (т. е. все решения системы)

$$z_0(t) = e^{tA_0}\left(z_{00} + \int\limits_0^t e_1 ds\right) = e^{tA_0}(z_{00} + te_1)$$

неограничены, так что соответствующая $f = Tg$ при любых $g_\pm$ есть пример правой части, при которой задача не имеет решения. Если же решение существует, то оно заведомо не единственно, т. к. в этом решении всегда можно заменить $z_{00} := z_{00} + \gamma e_1$, и тогда $z_0(t)$ изменится на ограниченную величину $\gamma e^{tA_0}e_1$ и это даст другое решение. Тем самым п. 2 доказан.

Если же $n_0 = 0$, т. е. (3) выполнено, то, как показано выше, требуемая z существует и единственна, и дается формулой

$$z = \begin{bmatrix} -e^{tA_+}\int\limits_t^{+\infty} e^{-sA_+}g_+(s)ds \\ e^{tA_-}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-sA_-}g_-(s)ds \end{bmatrix}.$$

Исходное решение получается после замены $x = Tz$. Для каждой части z была доказана оценка $\|z_\pm\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant C_4\|f\|_{C(\mathbb{R})}$, откуда следует $\|x\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant C_5\|f\|_{C(\mathbb{R})}$, а тогда из (1) получаем (4). $\square$

Следствие. При выполнении условия (3) решение непрерывно зависит от f. $\square$

Итак, (3) есть критерий корректности (1), (2), и далее будем считать его выполненным. Запишем решение в инвариантном виде (т. е. без использования T, J). Имеем:

$$z_+(t) = \int\limits_t^{+\infty} (-e^{(t-s)A_+})g_+(s)ds = \int\limits_{\mathbb{R}} H_+(t-s)g_+(s)ds,$$

где $H_+(\xi) = -e^{\xi A_+}\theta(-\xi)$ (θ — функция Хевисайда). Аналогично $z_-(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} H_-(t-s)g_-(s)ds$, где $H_-(\xi) = e^{\xi A_-}\theta(\xi)$. В итоге $z(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} H(t-s)g(s)ds$, где $H = \mathrm{diag}\{H_+, H_-\}$, так что

$$x(t) = Tz(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} TH(t-s)T^{-1}f(s)ds = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t-s)f(s)ds,$$

$\left[\text{Здесь следует вспомнить понятие «свертка», так что } x = G * f.\right]$

где $G(\xi) = TH(\xi)T^{-1}$ называется МГ задачи (1), (2). Заметим, что:

1. При $\xi \neq 0$ верно $\dfrac{dG(\xi)}{d\xi} = AG(\xi)$. В самом деле, при $\xi > 0$ имеем

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_-H_- \end{bmatrix} = JH,$$

   и аналогично при $\xi < 0$, поэтому

$$G' = TH'T^{-1} = TJHT^{-1} = TJT^{-1}THT^{-1} = AG.$$

2. При $\xi = 0$: $[G]_0 \equiv G(+0) - G(-0) = E$. В самом деле, $[G]_0 = T[H]_0T^{-1} = E$.

3. G ограничена (т. к. H ограничена).

Но свойства 1–3 не используют специальную систему координат, поэтому они удобны как определение G. Осталось проверить, что они однозначно определяют G, так что могут использоваться как эквивалентное определение G:

Утверждение. При условии (3) МГ как матрица со свойствами 1–3 существует и единственна.

Доказательство. Заметим, что существование уже показано — G построена в явном виде с помощью специальной системы координат. Но для доказательства единственности придется проделать все еще раз. Сделаем замену $G = THT^{-1}$, где $A = TJT^{-1}$, $J = \operatorname{diag}\{A_+, A_-\}$. Тогда свойства G перепишутся в терминах H так: «H есть МГ задачи с матрицей J». Таким образом, достаточно доказать Утверждение для случая $A = J$. Свойства 1,2 эквивалентны представлению
$H(\xi) = \begin{cases} e^{\xi J}(D+E), & \xi > 0, \\ e^{\xi J}D, & \xi < 0, \end{cases}$ где D — любая постоянная матрица. Обозначим $D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$. При $\xi > 0$ имеем:

$$H(\xi) = \begin{bmatrix} e^{\xi A_+} & 0 \\ 0 & e^{\xi A_-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}+E & D_{12} \\ D_{21} & D_{22}+E \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\xi A_+}(D_{11}+E) & e^{\xi A_+}D_{12} \\ e^{\xi A_-}D_{21} & e^{\xi A_-}(D_{22}+E) \end{bmatrix}.$$

Для ограниченности этой матрицы при $\xi > 0$ необходимо и достаточно $D_{11}+E=0$, $D_{12}=0$.

$\left[\text{Аналогично рассуждениям выше — для необходимости надо представить } D_{11}+E = e^{-\xi A_+}H_{11}(\xi)\text{, и т. д., а достаточность очевидна.}\right]$

Аналогично при $\xi < 0$ получим $D_{21} = 0$, $D_{22} = 0$. Итак, $D = \begin{bmatrix} -E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D+E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$, что дает ту же формулу для H, что была получена выше, и по ходу доказали, что другой матрицы H быть не может. □

Замечание. Несмотря на инвариантную форму пп. 1–3 определения МГ и, тем самым, инвариантное представление решения задачи (1), (2), на практике МГ и/или решение ищут с помощью приведения к специальной системе координат, как мы и делали изначально. □

Замечание. Аналогично случаю конечного интервала, можно (в т. ч. для переменных A), исходя из необходимости найти решение (1), (2), которое линейно и непрерывно зависит от f, искать его в виде $x(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} R(t,s)f(s)ds$, где R — так наз. МГ. Тогда получим ее определение, как и для отрезка, в виде:

1. $\dfrac{d}{dt}R(t,s) = A(t)R(t,s)$ при $t \neq s$;
2. $R(s+0,s) - R(s-0,s) = E$;

3. R ограничена по t при любом s.

Если же $A = \mathrm{const}$, то можно доказать, что:

1. $R(t, s) = Q(t - s)$;
2. свойства 1–3 матрицы R превращаются в свойства 1–3 для G, т. е. $Q = G$.

Упражнение. Доказать эти 2 утверждения. □

Таким образом, в случае всей $\mathbb{R}$ понятие МГ, введенное нами вначале, согласуется с общим понятием МГ. □

Перейдем к случаю полупрямой. Сдвигом $t := t + C$ и заменой $t := -t$ всегда можно добиться, чтобы рассматриваемый интервал был $\mathbb{R}^+$. Итак, рассмотрим (1) на $\mathbb{R}^+$, краевое условие на $+\infty$ по-прежнему ставится в виде ограниченности:

$$\sup_{\mathbb{R}^+} |x| < \infty, \tag{5}$$

а в нуле надо поставить k условий на n величин $x(0)$:

$$Bx(0) = \varphi, \tag{6}$$

где $\dim B = k \times n$, $\dim \varphi = k$, $k \leqslant n$. Выясним, какими должны быть k и B, чтобы задача (1), (5), (6) была однозначно разрешима при всех f и φ. Будем сразу предполагать выполнение (3); $f \in C(\{t \geqslant 0\}) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$; под решением понимается $x \in C^1(\{t > 0\}) \cap C(\{t \geqslant 0\}) \cap L_\infty(\{t > 0\})$, удовлетворяющая (1) при $t > 0$ и (6) по непрерывности. Удобно свести задачу к случаю $f = 0$. Для этого рассмотрим 2 задачи:

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \qquad \sup_{\mathbb{R}^+} |y| < \infty, \qquad By(0) = \varphi - Bz(0); \tag{7}$$

$$\frac{dz}{dt} = Az + f, \qquad \sup_{\mathbb{R}^+} |z| < \infty \tag{8}$$

(вторая из них недоопределенная), т. е. сначала найдем (какую-то) z, а затем y. Тогда $x = y + z$ будет решением (1), (5), (6). Ясно, что таких z будет много, так что единственность решения (1), (5), (6) надо будет доказывать отдельно, а пока займемся существованием решения.

Можно найти z, например, так: усилим задачу, потребовав

$$\frac{dz}{dt} = Az + \widetilde{f}, \qquad \sup_{\mathbb{R}} |z| < \infty, \tag{9}$$

где $\widetilde{f} \in C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, $\widetilde{f}|_{\mathbb{R}^+} = f$, например, $\widetilde{f}(s) = f(|s|)$ (далее будем считать именно так). Тогда из (9) следует (8), но решение (9) легко найти явно:

$$z(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t-s) f(|s|) ds =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} G(t-s) f(-s) ds + \int\limits_{0}^{+\infty} G(t-s) f(s) ds =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} (G(t+s) + G(t-s)) f(s) ds,$$

где G — МГ задачи (1), (2).

Теперь остается решить (7) (т. е. (1), (5), (6) с $f = 0$ и другой φ).

[Эту задачу удается проанализировать до конца, т. е. указать критерий корректности. Этого оказывается достаточно, чтобы указать критерий корректности общей (1), (5), (6), несмотря на то, что переход $x \leftrightarrow (y, z)$ неоднозначный.]

Для этого снова используем разложение $A = TJT^{-1}$, где $J = \operatorname{diag}\{A_+, A_-\}$, тогда $T = \begin{bmatrix} T_+ & T_- \end{bmatrix}$, где T_+ состоит из столбцов — СВ и ПВ матрицы A, соответствующих $\operatorname{Re}\lambda > 0$ (они являются базисом в ИП M_+, порожденном этими СВ и ПВ), и аналогично T_-.

Лемма. Для любого решения y системы $(7)_1$ верно: [y удовлетворяет $(7)_2$] $\Longleftrightarrow$ [$y(0) = T_-\psi$, где $\psi \in \mathbb{R}^{n_-}$, т. е. $y(0) \in M_-$] $\Longrightarrow$ $\|y\|_{C(\mathbb{R}^+)} \leqslant C|\psi|$.

Доказательство. Сделаем замену $y = T\eta$. Тогда $\eta' = J\eta$;

$$\eta(t) = \begin{bmatrix} e^{tA_+} & 0 \\ 0 & e^{tA_-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_+ \\ \mu_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{tA_+}\mu_+ \\ e^{tA_-}\mu_- \end{bmatrix};$$

$$y \text{ огр.} \quad \Longleftrightarrow \quad \eta \text{ огр.} \quad \overset{\text{анал. выше}}{\Longleftrightarrow} \quad \mu_+ = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \eta(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_- \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad y(0) = T\eta(0) = T_-\mu_-.$$

Наконец, $\|y\|_{C(\mathbb{R}^+)} \leqslant C\|\eta\|_{C(\mathbb{R}^+)} \leqslant C_1|\mu_-|$. □

Согласно Лемме, задача (7) эквивалентна алгебраической задаче

$$y(t) = e^{tA}y(0); \qquad y(0) = T_-\psi, \qquad BT_-\psi = \varphi - Bz(0),$$

т. е. нахождение y сводится к нахождению ψ из системы $(BT_-)\psi = \varphi - Bz(0)$. Матрица этой системы имеет

$\dim(BT_-) = k \times n_-$, так что условие ее однозначной разрешимости при любых правых частях принимает вид:

1. $k = n_-$;
2. $\det(BT_-) \neq 0$

— так наз. *условия Лопатинского* (УЛ). Если они выполнены, то (однозначно) находим $\psi = (BT_-)^{-1}(\varphi - Bz(0))$, и в итоге

$$y(t) = e^{tA}T_-(BT_-)^{-1}(\varphi - Bz(0)), \tag{10}$$

при этом

$$z(0) = \int\limits_0^{+\infty} (G(s) + G(-s))f(s)ds. \tag{11}$$

По построению, УЛ суть критерий корректности (7), т. е. ее однозначной разрешимости при любых $\varphi - Bz(0)$. Оказывается, эти же условия суть критерий корректности общей задачи (1), (5), (6):

Теорема. Пусть верно (3). Тогда:

1. Если выполнены УЛ, то задача (1), (5), (6) корректна, т. е. при любых f и φ существует единственное решение x; для него имеет место представление $x = y + z$, где

   $z(t) = \int\limits_0^{+\infty} (G(t+s) + G(t-s))f(s)ds$, G — МГ задачи (1), (2), а y находится из (10), (11); и имеет место оценка

   $$\|x\|_{C^1(\mathbb{R}^+)} \leqslant C(|\varphi| + \|f\|_{C(\mathbb{R}^+)}). \tag{12}$$

2. Если УЛ нарушены, то задача (1), (5), (6) некорректна, т. е. ее решение либо не существует, либо (если существует, то) неединственно.

Доказательство. 1) Итак, (7) корректна. Этого достаточно для корректности (1), (5), (6). В самом деле, существование $x = y + z$ при любых f и φ показано выше. Для z как решения (9) имеет место оценка, доказанная в задаче на $\mathbb{R}$: $\|z\|_{C^1(\mathbb{R})} \leqslant C\|\widetilde{f}\|_{C(\mathbb{R})} \leqslant C_1\|f\|_{C(\mathbb{R}^+)}$, и в частности $|z(0)| \leqslant C_1\|f\|_{C(\mathbb{R}^+)}$, а тогда ввиду Леммы

[напомним, что $\psi = (BT_-)^{-1}(\varphi - Bz(0))$]

$\|y\|_{C(\mathbb{R}^+)} \leqslant C_2(|\varphi| + \|f\|_{C(\mathbb{R}^+)})$, и в итоге для построенного решения верно $\|x\|_{C(\mathbb{R}^+)} \leqslant C_3(|\varphi|+\|f\|_{C(\mathbb{R}^+)})$, откуда следует (12) ввиду (1). Если имеется 2 решения, то их разность есть решение задачи $(7)_0$, но тогда в силу вышеизложенного она необходимо имеет вид (10) с $\varphi - Bz(0) := 0$, то есть равна нулю.

2) Нарушение УЛ означает, что система $(BT_-)\psi = \varphi_1$ обладает одним из 3 свойств:

A. имеет решение не при всех φ_1, а если имеет, то только одно,

B. имеет решение не при всех φ_1, а если имеет, то не одно (т. е. однородная система имеет нетривиальные решения),

C. имеет решение при всех φ_1, но не одно (т. е. однородная система имеет нетривиальные решения).

Это ясно чисто логически, но можно и указать, при каких k и BT_- каждый из этих случаев реализуется.

Упражнение. Указать это. $\square$

Итак, (7) некорректна. Оказывается, тогда некорректна общая (1), (5), (6). В самом деле:

В случае А или В положим $f = 0$, тогда задача принимает вид (7) с $z = 0$. Решение существует тогда и только тогда, когда разрешима система $(BT_-)\psi = \varphi$ для вектора ψ. Взяв такое φ, чтобы она не имела решений, получим пример входных данных (f, φ), при которых решений нет.

В случае В или С однородная задача имеет нетривиальное решение в виде $x(t) = e^{tA}T_-\psi$, где ψ — нетривиальное решение $(BT_-)\psi = 0$. Тем самым, если задача и имеет решение, к нему можно прибавить нетривиальное решение однородной задачи и получить другое решение. $\square$

Следствие. При выполнении УЛ решение непрерывно зависит от f и φ. $\square$

Итак, УЛ являются критерием корректности задачи (1), (5), (6). Для проверки 1-го условия достаточно знать спектр A, а для 2-го надо еще и найти M_-, т. е. все СВ и ПВ, соответствующие $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0$.

Замечание. В задаче (1), (5), (6), так же как и на конечном интервале, можно ввести понятие МГ $G(t, s)$, но мы этого делать не будем.

$\left[\text{Т. к. в случае } \varphi \neq 0 \text{ все равно с ней проблемы, а здесь как раз } \varphi \text{ «важнее чем } f\text{», как мы видели.}\right]$

Замечание. Если все $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0$, то УЛ принимает вид $k = n$, $\det B \neq 0$, т. е. они означают, что исходная задача должна быть эквивалентна задаче Коши $x' = Ax + f$, $x(0) = B^{-1}\varphi$, что итак ясно, т. к. в этом случае все решения однородной (а значит, и неоднородной) системы ограничены на $\mathbb{R}^+$, и условие на $+\infty$ не несет никакой информации. Если же все $\mathrm{Re}\lambda_j(A) > 0$, то условия в нуле задавать нельзя ($k = n_- = 0$, условий на $+\infty$ достаточно), т. е. все сводится к решению задачи на $\mathbb{R}$ (т. е. к поиску z), а $y = 0$. □

Перейдем к краевым задачам на $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^+$ для уравнения

$$P_n\left(\frac{d}{dt}\right) y = r(t), \tag{13}$$

где $P_n(\lambda) = \lambda^n + \dots + a_0$. Обозначив $x = \begin{bmatrix} y \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$,

$A = \begin{bmatrix} 0 & E_{n-1} \\ -a_0 & \dots - a_{n-1} \end{bmatrix}$, $f = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$, получим, что соответствующая система (1) эквивалентна уравнению (13) в смысле, указанном в § 1. Напомним, что $\chi_A = (-1)^n P_n$. Таким образом, получаем:

1. на бесконечном(ых) конце(ах) интервала в качестве краевого условия для y следует задавать

   $$\sup_{(a,b)}(|y|, \dots, |y^{(n-1)}|) < \infty, \tag{14}$$

   где $(a, b) = \mathbb{R}$ или $(a, b) = \mathbb{R}^+$ соответственно;

2. в случае полупрямой в нуле следует ставить условие ви-

да

$$B\begin{bmatrix} y \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \varphi, \qquad \dim\varphi = k, \qquad \dim B = k\times n. \quad (15)$$

3. на P_n следует наложить требование

   $$\mathrm{Re}\lambda_j(P_n) \neq 0, \quad (16)$$

   причем на $\mathbb{R}$ (16) есть критерий корректности задачи;

4. на $\mathbb{R}^+$ (подразумевая (16)) критерием корректности задачи являются УЛ: $k = n_-$, $\det(BT_-) \neq 0$, где n_- есть число корней P_n в левой полуплоскости, а T_- — соответствующая часть матрицы перехода для A.

5. под решением краевой задачи следует понимать функцию класса $y \in C^n(a,b) \cap C^{n-1}[a,b]$, удовлетворяющую (13) внутри интервала, а краевым условиям в конечной точке (если она есть) — по непрерывности;

   $$\left[\text{Вспомним смысл обозначения } C^{n-1}[a,b] \text{ и как понимаются краевые условия в нуле.}\right]$$

   если задача корректна, то имеют место оценки $\|y\|_{C^n(\mathbb{R})} \leqslant C\|r\|_{C(\mathbb{R})}$ или $\|y\|_{C^n(\mathbb{R}^+)} \leqslant C(\|r\|_{C(\mathbb{R}^+)} + |\varphi|)$ соответственно;

6. на $\mathbb{R}$ решение представляется в виде $y(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} g_{1n}(t-s)r(s)ds$, где G — МГ соответствующей задачи (1), (2);

7. решение задачи на $\mathbb{R}^+$ можно построить в виде суммы $y = \xi + \eta$, где ξ — решение (13), удовлетворяющее (14) на $\mathbb{R}^+$ (например, можно построить его как решение на всей $\mathbb{R}$ с продолженной r), а η — решение $(13)_0$, удовлетворяющее (14) и поправленным условиям (15).

Однако часть этих утверждений сформулирована в терминах соответствующей системы (1) (пп. 4, 6), или же, возможно, носят на себе отпечаток метода сведения к системе (п. 1) и потому не вполне удобны. Придадим им эквивалентную форму, более близкую к самому уравнению (13):

Утверждение. Если (16) и УЛ выполнены, то условие (14) в краевых задачах обоих типов можно заменить на условие

$$\sup_{\mathbb{R}} |y| < \infty \qquad \text{или} \qquad \sup_{\mathbb{R}^+} |y| < \infty \tag{17}$$

соответственно (т. е. получаются эквивалентные задачи: решение одной из задач является и решением другой).

Доказательство. Если построено решение задачи с условием (14), то (17) тем более верно. Таким образом, достаточно показать, что задачи с условием (17) могут иметь не более 1 решения.

Упражнение. Проверить этот логический переход. □

Если имеются 2 решения $y_{1,2}$, то их разность $y = y_1 - y_2$ удовлетворяет $(13)_0$, (17) и (если это задача на $\mathbb{R}^+$) $(15)_0$. Разложим $P_n = P_+P_-$, где $\mathrm{sgnRe}\lambda_j(P_\pm) = \pm 1$. Тогда $(\text{ФСР}P_n) = (\text{ФСР}P_+) \cup (\text{ФСР}P_-) := \{y_i\} \cup \{z_j\}$, и общее решение $(13)_0$ имеет вид

$$y = \sum_{i=1}^{n_+} c_i y_i + \sum_{j=1}^{n_-} d_j z_j. \tag{18}$$

Отметим, что все y_i и z_j можно взять в виде $t^k e^{\lambda t}$.

Лемма. $[(13)_0,\ (17)_2] \Longleftrightarrow$

$$P_-\left(\frac{d}{dt}\right) y = 0. \tag{19}$$

Доказательство. $[\Longleftarrow]$ Если $P_-\left(\frac{d}{dt}\right) y = 0$, то $(13)_0$ верно, причем

$$\begin{bmatrix}\text{y разлагается по z_j, и ввиду линейной независимости}\\ \text{ФСР}\end{bmatrix}$$

все c_i в (18) равны 0, а тогда верно $(17)_2$.

$[\Longrightarrow]$ Если $(13)_0$ верно, то верно (18). Разделим (18) на самое быстрорастущее y_i и устремим $t \to +\infty$. В левой части получим 0 ввиду $(17)_2$, а в правой получим c_i. Значит, $c_i = 0$, и т. д. Так мы докажем что все $c_i = 0$, но тогда верно (19). $\Box$

Итак, докажем, что $y = 0$.

Задача на $\mathbb{R}$. Поскольку y удовлетворяет $(13)_0$, $(17)_2$, то по Лемме все $c_i = 0$ в (18). Но аналогично из ограниченности на $-\infty$ следует что все $d_j = 0$.

Задача на $\mathbb{R}^+$. Снова все $c_i = 0$ в (18). Но тогда все производные от y также ограничены на $\mathbb{R}^+$, т. е. верно (14), а тогда получаем «старую» задачу, для которой уже известно, что $y = 0$. $\Box$

Тем самым, мы придали п. 1 более удобную форму для применения к задачам для уравнения (13). Займемся теперь п. 6, т. е. сформулируем свойства g_{1n} в терминах P_n. Аналогично тому, как это делалось на отрезке в § 3, обозначим $g = g_{1n}$. Тогда:

1. $\begin{bmatrix} g_{1n} \\ \ldots \\ g_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ \ldots \\ g^{(n-1)} \end{bmatrix}$ удовлетворяет $x' = Ax$ при $\xi \neq 0$, что эквивалентно $P_n\left(\dfrac{d}{d\xi}\right) g(\xi) = 0$ при $\xi \neq 0$;

2. $\begin{bmatrix} g \\ \ldots \\ g^{(n-1)} \end{bmatrix} (s+0, s) - \begin{bmatrix} g \\ \ldots \\ g^{(n-1)} \end{bmatrix} (s-0, s) = \begin{bmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

3. g ограничена.

Назовем функцию, удовлетворяющую этим 3 свойствам, ФГ задачи (13), (14) на $\mathbb{R}$. Ее существование доказано как $g = g_{1n}$.

Упражнение. Доказать единственность g при условии (16). □

Таким образом, в случае всей $\mathbb{R}$ решение имеет вид $y(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(t-s)r(s)ds$.

Замечание. Можно ввести понятие ФГ и для $\mathbb{R}^+$ ($g = g(t,s)$), но мы это не делаем. По-прежнему верно рассуждение о ФГ $g = g(t,s)$ на $\mathbb{R}$ для любых $P_n(t,\lambda)$ (как для систем — см. выше в § 5) и о том, что в случае $P_n(\lambda)$ получается $g = g(t-s)$, т. е. наше определение согласуется с общей теорией. □

Осталось разобраться с п. 4, т. е. придать УЛ форму, не ссылающуюся на матрицу A. Для этого временно ограничимся случаем $r = 0$. Ввиду Леммы задача $(13)_0$, $(17)_2$, (15) эквивалентна задаче (19), (15). Условие (15) можно записать в виде

$$\beta_j\left(\frac{d}{dt}\right)y\,\bigg|_{t=0} = \varphi_j, \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{20}$$

где $\{\text{коэфф-ты } \beta_j\}_{j=1}^{k} = B$. Полиномы β_j суть символы краевых дифференциальных операторов, $\deg \beta_j \leqslant n - 1$. Разделим β_j на P_- нацело:

$$\beta_j = a_j P_- + \gamma_j, \qquad a_j = \beta_j \operatorname{div} P_-,$$

$$\gamma_j = \beta_j \bmod P_-, \qquad \deg \gamma_j \leqslant n_- - 1.$$

Тогда $[(13)_0,\ (17)_2,\ (15)] \Longleftrightarrow [(19),\ (15)] \Longleftrightarrow [(19),\ (20)] \Longleftrightarrow [(19),\ (21)]$, где

$$\gamma_j\left(\frac{d}{dt}\right)y\,\bigg|_{t=0} = \varphi_j, \qquad j = 1, \ldots, k. \tag{21}$$

Надо обосновать последний переход. В самом деле, если y удовлетворяет (19), то при $t > 0$ имеем

$$\beta_j\left(\frac{d}{dt}\right)y = a_j\left(\frac{d}{dt}\right)P_-\left(\frac{d}{dt}\right)y + \gamma_j\left(\frac{d}{dt}\right)y = \gamma_j\left(\frac{d}{dt}\right)y,$$

что при $t \to 0$ даст эквивалентность $(20) \Longleftrightarrow (21)$.

[Еще раз напомним, что краевое условие есть предельное соотношение; данное равенство нельзя было писать сразу в нуле!]

Но условие (21) есть алгебраическая система для вектора

$(y, \ldots, y^{(n_- -1)})^*(0)$:

$$\Gamma \begin{bmatrix} y \\ \ldots \\ y^{(n_- -1)} \end{bmatrix} \Bigg|_{t=0} = \varphi, \tag{22}$$

где Γ состоит из коэффициентов γ_j, $\dim \Gamma = k \times n_-$. Таким образом, задача (19), (21) есть задача Коши, в которой начальные данные нужно найти из (22). Такая задача безусловно и однозначно разрешима тогда и только тогда, когда:

1. $k = n_-$;
2. $\det \Gamma \neq 0$.

Это критерий корректности задачи $(13)_0$, $(17)_2$, (15). Но в то же время критерием корректности этой задачи (и даже общей (13), $(17)_2$, (15)) являются УЛ, сформулированные выше в п. 4. Значит, последние условия суть эквивалентная форма УЛ (ведь все эти условия не зависят от r), и потому они называются так же.

Замечание. Таким образом, при $r = 0$ решение можно сразу искать в виде $y = \sum\limits_{m=1}^{n_-} d_m z_m = (z_1, \ldots, z_{n_-}) \cdot d$, $\dim d = n_-$, тогда (22) перепишется в виде $\Gamma X(0) d = \varphi$, где X — матрица Вронского, составленная из ФСР $(z_1, \ldots, z_{n_-})$ уравнения. Поскольку $\dim(\Gamma X(0)) = k \times n_-$, $\det X(0) \neq 0$, то условия 1,2 можно переписать в виде $k = n_-$, $\det(\Gamma X(0)) \neq 0$, что является критерием однозначного нахождения $d \in \mathbb{R}^{n_-}$. $\square$

Пример. $y^{IV} - 2y'' + y = 0$, $\sup\limits_{\mathbb{R}^+} |y| < \infty$, $(y''' + 2y')(0) = 1$, $(y'' + Ry)(0) = 0$, где $R \in \mathbb{R}$ — параметр. Требуется сформулировать УЛ и решить задачу. Имеем:
$P_4(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2$, $P_-(\lambda) = (\lambda+1)^2$, $k = n_- = 2$ — 1-е УЛ выполнено. Далее: $\beta_1(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda$, $\beta_2(\lambda) = \lambda^2 + R$; отсюда делением столбиком находим
$\gamma_1(\lambda) = (\beta_1 \bmod P_-)(\lambda) = 5\lambda + 2$, $\gamma_2(\lambda) = -2\lambda + (R-1)$. Составляем $\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ R-1 & -2 \end{bmatrix}$, $\det\Gamma = 1 - 5R$. Тем самым, 2-е УЛ дает $R \neq 1/5$. Решаем задачу:

$$y(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ R-1 & -2 \end{bmatrix}}_{\Gamma\ (\text{невыр.})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{X(0)\ (\text{невыр.})} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \underset{\Longrightarrow}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ R+1 & -2 \end{bmatrix}}_{(\text{невыр.})} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix},$$

откуда $\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ R+1 \end{bmatrix} \dfrac{1}{5R-1}$, и окончательно

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{5R-1}(2 + (R+1)t).$$

§ 6. Линейные ОДУ с периодическими коэффициентами

Начнем с систем I порядка:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t). \tag{1}$$

Пусть $A, f \in C(\mathbb{R})$, $A(t+\omega) = A(t)$, $f(t+\omega) = f(t)$. Тогда все непродолжаемые решения (1) определены на $\mathbb{R}$. В приложениях возникает необходимость изучения структуры всех решений (1), и в частности, нахождения ω-периодических решений (ОПР). Последний вопрос тесно связан с краевыми задачами, как мы увидим далее. Также отметим, что, аналогично линейной алгебре и уже́ изученным разделам ОДУ, возникают 2 тесно связанных вопроса:

1. существование нетривиальных (т. е. ненулевых) ОПР $(1)_0$;
2. существование ОПР (1) с произвольными f.

Сразу отметим, что решения (1) и $(1)_0$ в общем случае могут быть как ω-периодическими, так и нет.

Пример. $x' = x$, ω любое, $x(t) = Ce^t$ — только тривиальное ОПР.

Пример. $x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$, ω любое, тогда (как мы находили в качестве примера в § 2) $x(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} c$, т. е. при $\omega \neq 2\pi k$ только тривиальное ОПР, а иначе ФСР содержит 2 нетривиальных ОПР и 1 растущее решение.

Пример. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$, $\omega = 2\pi$. Тогда общее решение системы

$$x(t)=\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \left(C + \int\limits_0^t \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{bmatrix} ds \right)=$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

— нет ОПР. □

Итак, вопрос о ОПР (1) и $(1)_0$ не является очевидным. Начнем изучение с $(1)_0$. Пусть Φ — ФМР $(1)_0$, т. е. $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, $\det\Phi \neq 0$, тогда

$$\frac{d}{dt}\Phi(t+\omega) = \Phi'(t+\omega) = A(t+\omega)\Phi(t+\omega) = A(t)\Phi(t+\omega),$$

т. е. $\Phi(t+\omega)$ — тоже ФМР $(1)_0$, но тогда

$$\Phi(t+\omega) = \Phi(t)B, \qquad \det B \neq 0. \tag{2}$$

Матрица B называется *матрицей монодромии* (ММ) системы $(1)_0$, а ее СЧ — *мультипликаторами* (*характеристическими множителями*) $(1)_0$. Как видно из примеров выше, ММ не всегда единичная (т. е. не обязательно вся ФМР ω-периодична), и вообще, как мы увидим далее, любая невырожденная B является ММ для какой-то системы вида $(1)_0$, так что мультипликаторы могут быть любыми комплексными числами. ММ зависит от выбора ФМР, но разные ММ одной системы подобны. В самом деле, имеем представление $B = \Phi^{-1}(t)\Phi(t+\omega) \overset{\text{например}}{=} \Phi^{-1}(0)\Phi(\omega)$. Если две ФМР $\Phi_{1,2}$ порождают две ММ $B_{1,2}$, то $\Phi_2(t) = \Phi_1(t)C$, $\det C \neq 0$, так что $B_2 = \Phi_2^{-1}(0)\Phi_2(\omega) = C^{-1}\Phi_1^{-1}(0)\Phi_1(\omega)C = C^{-1}B_1C$. Отсюда следует, что мультипликаторы λ_j не зависят от выбора ФМР, т. е. являются характеристикой системы $(1)_0$. Чтобы среди ММ выбрать «канонического представителя», можно построить его на матрицанте: $\Phi_0' = A(t)\Phi_0$, $\Phi_0(0) = E$, $B = \Phi_0(\omega)$. ММ характеризует, как решения $(1)_0$ успевают измениться за период, а мультипликаторы — грубо говоря, «во сколько раз они увеличиваются». Далее мы придадим этим идеям более четкий смысл.

Замечание. Как мы видели в § 2, для любой матрицы R верно $\det e^R = \exp(\mathrm{tr} R) \neq 0$. Оказывается, верно и обратное: для любой невырожденной R_1 найдется такая R, что $e^R = R_1$ (это нетривиальный результат, и мы его примем без доказательства). Обозначают $R = \ln R_1$. Эта функция заведомо неоднозначная (как и скалярный ln в $\mathbb{C}$), т. к. $\exp(R + 2\pi kiE) = \exp(R)$ при всех $k \in \mathbb{Z}$ (можно показать, что это все допустимые неоднозначности). Обозначение $R = \ln R_1$ корректно в том смысле, что такое определение совпадает с результатом вычисления ln как функции от матрицы. ☐

Следствие. Если взять $A = \mathrm{const}$, то $B = \exp(\omega A)$, значит, для любой невырожденной B можно построить (постоянную) матрицу $A = \dfrac{1}{\omega}\ln B$ такую, что соответствующая $(1)_0$ будет иметь ММ, равную B. ☐

Нередко бывает удобной следующая эквивалентная перезапись тождества $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)B$:

Теорема. (Флоке). Любая ФМР Φ системы $(1)_0$ допускает представление

$$\Phi(t) = Q(t)e^{tR}, \tag{3}$$

где $\det Q \neq 0$, $Q(t+\omega) = Q(t)$, а $R = \mathrm{const}$.

Доказательство. Если (3) выполнено, то $B = Q^{-1}(0)Q(\omega)e^{\omega R} = e^{\omega R}$, т. е. необходимо $R = \dfrac{1}{\omega}\ln B$, а значит $Q(t) = \Phi(t)\exp\left(-\dfrac{t}{\omega}\ln B\right)$. Остается проверить, что эта Q в самом деле ω-периодична:

$$Q(t+\omega) = \Phi(t)B\exp\left(-\frac{\omega}{\omega}\ln B\right)\exp\left(-\frac{t}{\omega}\ln B\right) = Q(t). \quad \square$$

По ходу мы доказали, что матрицы Q и R обязаны иметь вид $Q(t) = \Phi(t)\exp\left(-\dfrac{t}{\omega}\ln B\right)$, $R = \dfrac{1}{\omega}\ln B$,

[формулы для Q и R нужно всегда иметь перед глазами!]

так что R находится однозначно с точностью до подобия и операции $R := R + \dfrac{2\pi k i}{\omega}E$,

$$\left[\begin{array}{l}\text{Также и } Q\text{, при заданной ФМР, находится однозначно}\\ \text{с точностью до операции } Q(t) := Q(t)\exp\left(-\dfrac{2\pi k i t}{\omega}\right).\end{array}\right]$$

ее СЧ ρ_j находятся однозначно с точностью до операции $\rho_j := \rho_j + \dfrac{2\pi k i}{\omega}$, они называются *характеристическими по-*

казателями (ХП) системы $(1)_0$. Название ясно из того, что

$\left[\text{Напомним из § 2, что при действии функции на матрицу ее СЧ преобразуются как та же функция, а СВ и ИП клеток остаются теми же.}\right]$

$$\lambda_j = \lambda_j(B) = \lambda_j(e^{\omega R}) = \exp(\omega\lambda_j(R)) = \exp(\omega\rho_j),$$

$$\rho_j = \frac{1}{\omega}\ln\lambda_j,$$

т. е. ρ_j суть показатели экспонент «коэффициентов увеличения решений за период» (более строгий смысл дадим ниже), отсюда также ясно, что $\rho_j := \rho_j + \dfrac{2\pi ki}{\omega}$ не оказывает влияния на представление решений.

Отметим очевидные свойства введенных величин:

1. Если $A = \mathrm{const}$, то $\exp(\omega R) = B = \exp(\omega A)$, т. е. можно считать $R = A$, а ХП — равными СЧ матрицы A, или, вообще говоря, $\rho_j = \lambda_j(A) + \dfrac{2\pi ki}{\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. СВ и ИП клеток у B и R совпадают.
3. $Q, Q^{-1} \in C(\mathbb{R})$, т. к. $\Phi, \Phi^{-1} \in C(\mathbb{R})$ (см. Замечание в § 1), на самом деле даже $Q \in C^1(\mathbb{R})$, как следует из представления для Q, полученного в доказательстве т. Флоке.
4. По теореме Остроградского—Лиувилля

   $\det\Phi(t) = C\exp\left(\int\limits_0^t \mathrm{tr}A(s)ds\right)$, так что

$$\prod_{j=1}^n \lambda_j = \det B = \frac{\det\Phi(\omega)}{\det\Phi(0)} = \exp\left(\int\limits_0^\omega \mathrm{tr}A(s)ds\right),$$

и можно считать $\sum\limits_{j=1}^{n} \rho_j = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^{\omega} \mathrm{tr} A(s) ds.$

5. Выбор различных ФМР позволяет выбирать подобные R (как уже говорилось), и в частности, можно добиться, чтобы R была жордановой матрицей. В самом деле, если для какой-то ФМР Φ записать (3), а затем перейти к $\Phi_1 = \Phi C$, то, как проверялось выше, новая $B_1 = C^{-1}BC$, так что и $R_1 = C^{-1}RC$.

6. Если $\Phi = \Phi_0$ (матрицант), то получим «канонические» матрицы
$$Q(t) = \Phi_0(t) \exp\left(-\frac{t}{\omega} \ln \Phi_0(\omega)\right), \qquad R = \frac{1}{\omega} \ln \Phi_0(\omega)$$
(впрочем, более удобны не они, а случай жордановой R).

$$\left[\begin{array}{l}\text{Именно в случае жордановой } R \text{ ФМР } \Phi(t) = Q(t)e^{tR} \\ \text{имеет канонический вид в том смысле, что ее столбцы} \\ \text{суть набор нормальных и присоединенных решений.}\end{array}\right]$$

7. Свойство (2) или, что то же, (3), допускает обращение, т. е. для всех Φ со свойствами из т. Флоке (с $Q \in C^1$) найдется ω-периодическая $A \in C(\mathbb{R})$ такая, что Φ есть ФМР $(1)_0$.

   Упражнение. Доказать.

Изучим теперь, как введенные понятия помогают описать структуру решений (1) и найти ОПР. Смысл названия «мультипликатор» вполне раскрывается в следующем утверждении:

Утверждение. [λ — мультипликатор $(1)_0$] $\Longleftrightarrow$ [существует нетривиальное решение x_λ системы $(1)_0$ такое, что $x_\lambda(t+\omega) = \lambda x_\lambda(t)$].

Доказательство. Пусть Φ — произвольная ФМР, а B — соответствующая ММ.

[$\Longrightarrow$] Рассмотрим СВ v_λ матрицы B, соответствующий СЧ λ. Положим $x_\lambda(t) = \Phi(t)v_\lambda$. Тогда очевидно, что x_λ есть нетривиальное решение $(1)_0$, причем

$$x_\lambda(t+\omega) = \Phi(t+\omega)v_\lambda = \Phi(t)Bv_\lambda = \Phi(t)\lambda v_\lambda = \lambda x_\lambda(t).$$

[$\Longleftarrow$] Имеем: $x_\lambda(t) = \Phi(t)\xi$ с некоторым $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, и

$$\Phi(t)B\xi = \Phi(t+\omega)\xi = x_\lambda(t+\omega) = \lambda x_\lambda(t) = \lambda\Phi(t)\xi,$$

откуда $B\xi = \lambda\xi$. $\square$

Определение. x_λ называется *нормальным решением*, соответствующим мультипликатору λ. $\square$

Из доказательства Утверждения видно, что нормальные решения имеют вид $x_\lambda(t) = \Phi(t)\xi$, где Φ есть ФМР, ξ — СВ соответствующей ММ, соответствующий мультипликатору λ (т. е. СВ R, соответствующий ХП $\rho = \dfrac{1}{\omega}\ln\lambda$). Ясно, что если выбрать несколько линейно независимых СВ, то получим столько же линейно независимых нормальных решений. Если все клетки ММ одномерные (т. е. СВ образуют полную систему), то нормальные решения образуют ФСР и дают тем самым простое описание всех решений $(1)_0$. В общем случае необходимо, помимо нормальных решений, изучать еще и «присоединенные». Удобно делать это в терминах матрицы R.

[Хотя ИП клеток B и R совпадают, но сами ПВ — нет, так что теперь надо выбирать, с какой матрицей работать. Как будет видно, (3) более наглядно показывает структуру решений.]

Итак, пусть ξ — СВ матрицы R, соответствующий ХП $\rho = \dfrac{1}{\omega}\ln\lambda$, т. е. $R\xi = \rho\xi$, а η и ζ — соседние векторы в цепочке ПВ, т. е. $R\zeta = \rho\zeta + \eta$ (в т. ч. $\eta = \xi$). Тогда, как указывалось в § 2,

[для произвольной функции f верно $f(R)\xi = f(\rho)\xi$, $f(R)\zeta = f(\rho)\zeta + f'(\rho)\eta$]

получаем $e^{tR}\xi = e^{t\rho}\xi$, $e^{tR}\zeta = e^{t\rho}\zeta + te^{t\rho}\eta$. Рассмотрим решения $(1)_0$, порожденные этими векторами: $x(t) = \Phi(t)\xi$ (нормальное решение), $y(t) = \Phi(t)\zeta$ («присоединенное» решение). Имеем эквивалентные представления: $x(t) = Q(t)e^{t\rho}\xi$, $y(t) = Q(t)e^{t\rho}(\zeta + t\eta)$, из которых ужé ясно поведение этих решений. Так, в частности,

$$y(t+\omega) - \lambda y(t) =$$

$$= Q(t)e^{t\rho}\lambda(\zeta + (t+\omega)\eta) - Q(t)e^{t\rho}\lambda(\zeta + t\eta) = \lambda\omega Q(t)e^{t\rho}\eta,$$

и аналогично $x(t+\omega) - \lambda x(t) = 0$, как мы уже знаем.

[Можно то же рассуждение провести, пользуясь специальной формой (3) с жордановой R.]

Особенный интерес представляют ОПР $(1)_0$ — это нормальные решения, соответствующие $\lambda = 1$ (т. е. нулевым ХП). Из Утверждения получаем

Следствие. [Система $(1)_0$ имеет нетривиальные ОПР] $\iff$ [имеются нулевые ХП, т. е. мультипликаторы $\lambda = 1$]. □

Если все клетки R одномерные, то полное описание всех ОПР $(1)_0$ очевидно — это пространство, натянутое на нормальные решения с $\lambda = 1$ (в силу линейной независимости всех нормальных решений).

Упражнение. Проверить. □

Покажем, что и в общем случае это так. Если клетка, соответствующая нулевому ХП, содержит помимо СВ ξ еще и присоединенную к нему цепочку η, ζ, $\ldots$, то соответствующий фрагмент ФСР, как показано выше, имеет вид $x(t) = Q(t)\xi$, $y(t) = Q(t)(\eta + t\xi) = Q(t)\eta + tx(t)$, $z(t) = Q(t)(\zeta + t\eta)$, $\ldots$. Решения y и z — растущие и не могут быть ОПР. Любая их комбинация $\alpha y(t) + \beta z(t) = Q(t)(\alpha\eta + \beta\zeta) + tQ(t)(\alpha\xi + \beta\eta)$ тоже будет растущей, и аналогично для комбинаций следующих элементов цепочки. Таким образом, в общем случае ОПР образуются только как комбинации нормальных решений, соответствующих нулевым ХП:

Утверждение. Все ОПР $(1)_0$ имеют вид $x(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} c_k x_k(t)$, где x_k — нормальные решения, соответствующие мультипликаторам $\lambda = 1$ (нулевым ХП),

$$\begin{bmatrix} \text{т. е. } x_k(t) = \Phi(t)\xi_k = Q(t)\xi_k, \text{ где } B\xi_k = \xi_k, \text{ т. е. } R\xi_k = 0 \\ \text{или } R\xi_k = \dfrac{2\pi k i}{\omega}\xi_k. \end{bmatrix}$$

а m — число жордановых клеток в B (в R), соответствующих этим λ.

Замечание. Если $\lambda = -1$, то соответствующее нормальное решение ω-антипериодично: $x_\lambda(t+\omega) = -x_\lambda(t)$, а значит 2ω-периодично. И вообще, если $\lambda = \exp(i\pi q)$, $q \in \mathbb{Q}$, т. е. $\lambda = \exp\left(\dfrac{m}{k}\pi i\right)$, $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, что соответствует $\rho = \dfrac{m\pi i}{k\omega}$, то x_λ $2k\omega$-периодично, т. к. соответствующий «$2k\omega$-мультипликатор» равен $e^{2k\omega\rho} = \exp(2m\pi i) = 1$. Таким образом, если ищутся периодические решения хоть с каким-то периодом (кратным ω, а на другие в общем случае нет надежды), то достаточно существования λ такого, что $|\lambda| = 1$, $\dfrac{\arg\lambda}{\pi} \in \mathbb{Q}$. А фактически это значит, что все $|\lambda| = 1$ (т. е. $\rho \in i\mathbb{R}$) соответствуют периодическим или «почти перидическим» нормальным решениям. □

[В случае $A = \text{const}$ это означает обязательно существование периодического решения, т. к. тогда фактически можно подобрать «удачное» ω, т. е. в (2) взять нужное.]

Перейдем к изучению (1) с любой f. Нередко бывает полезным следующее эквивалентное представление задачи об ОПР (1):

Утверждение. Следующие 2 утверждения эквивалентны:

A. x есть ОПР (1) на $\mathbb{R}$;

B. x есть ω-периодическое продолжение на $\mathbb{R}$ решения краевой задачи для (1) на $(0, \omega)$ с краевыми условиями

$$x(\omega) = x(0). \tag{4}$$

Доказательство. [A$\Longrightarrow$B] очевидно.

[B$\Longrightarrow$A] По построению, $x \in C(\mathbb{R})$, ω-периодично, $x \in C^1$ вне точек $k\omega$, $k \in \mathbb{Z}$, и удовлетворяет вне этих точек уравнению (1). Остается доказать, что производная существует и (1) выполняется и в этих точках (достаточно проверить в нуле).

Лемма. Если функция $z \in C(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ имеет производную вне нуля, причем существует $\alpha = \lim\limits_{s \to 0} z'(s)$, то существует $z'(0) = \alpha$.

Доказательство. При $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \setminus \{0\}$ имеем: $\dfrac{z(\varepsilon) - z(0)}{\varepsilon} = z'(\theta(\varepsilon)\varepsilon) \to \alpha$ при $\varepsilon \to 0$, что и требовалось. ☐

[так что на самом деле сильно можно было не запугивать с краевыми условиями в краевых задачах — существование предела производных означает и существование односторонних производных в концах (как говорилось выше). Но все же лучше на это не опираться, т. к. это не вполне естественно.]

У нас вне нуля существует $x'(t) = A(t)x(t) + f(t)$, и при $t \to 0$ имеем $x'(t) \to A(0)x(0) + f(0)$, значит, по Лемме существует $x'(0) = A(0)x(0) + f(0)$. Утверждение доказано. ☐

Таким образом, поиск ОПР (1) эквивалентен решению краевой задачи (1), (4) на $(0, \omega)$. Это лишь эквивалентная формулировка, и ее использование не дает каких-то принципиальных преимуществ, но как удобный синоним она годится.

Основной результат об ОПР (1) естественно ожидать по аналогии с линейной алгеброй: неоднородная задача разрешима при любой правой части тогда и только тогда, когда однородная задача имеет только тривиальные решения.

Утверждение.
[Система (1) имеет ОПР при любой f] $\Longleftrightarrow$
[система $(1)_0$ имеет только тривиальные ОПР, т. е. все ее мультипликаторы $\lambda \neq 1$] $\Longrightarrow$
[при любой f ОПР (1) единственно].

Доказательство. *Способ I.* Будем решать эквивалентную задачу (1), (4). Условие (4) приводится к стандартному виду $Lx(0)+Rx(\omega)=0$, где $L=E$, $R=-E$, так что критерий разрешимости задачи при любых f (см. § 3) принимает вид

$$0 \neq \det(L\Phi(0)+R\Phi(\omega)) = \det(\Phi(0)-\Phi(\omega)) = \det(\Phi(0)(E-B)),$$

т. е. $\det(E-B) \neq 0$, что эквивалентно тому, что все $\lambda \neq 1$. Если это условие выполнено, то решение единственно (см. § 3).

Способ II. Выпишем общее решение (1):

$$x(t)=\Phi(t)\left(c+\int\limits_{\omega}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds\right), \qquad c\in\mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Существование (единственность) ОПР эквивалентна существованию (единственности) такого c, чтобы функция (5) была ω-периодична. Условие периодичности принимает вид

$$(E-B)c=\int\limits_{0}^{\omega}\Phi^{-1}(s)f(s)ds. \tag{6}$$

Упражнение. Вывести (6) из $x(t+\omega)=x(t)$ для (5). ☐

В итоге получаем те же результаты. ☐

Замечание. Если имеются $\lambda = 1$, то в силу Утверждения это эквивалентно небезусловной разрешимости, а тогда нет и единственности: соответствующие нормальные решения суть ОПР $(1)_0$, так что ОПР (1) не может быть единственным — оно определяется с точностью до прибавления нетривиальных ОПР $(1)_0$. □

Пример. $A = \mathrm{const}$, тогда $\rho_j = \lambda_j(A) + \dfrac{2\pi ki}{\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. мультипликаторы $\lambda = 1$ соответствуют $\lambda_j(A) = \dfrac{2\pi ki}{\omega}$. Таким образом, если имеются $\lambda_j(A) = \dfrac{2\pi ki}{\omega}$, то все нетривиальные ОПР $(1)_0$ суть комбинации нормальных решений $x_k(t) = e^{tA}\xi_k$, где $A\xi_k = \dfrac{2\pi ki}{\omega}\xi_k$.

[Впрочем, это итак было ясно из структуры решений $(1)_0$ с постоянными A, без всякой теории развитой в § 6.]

Отсутствие таких СЧ есть критерий существования и единственности ОПР (1) при любых f. □

Если все $\lambda \neq 1$, то ОПР (1) можно строить из (5), (6), а можно через МГ задачи (1), (4): $x(t) = \displaystyle\int\limits_0^\omega G(t,s)f(s)ds$, где (см. § 3)

$$G(t,s) = \Phi(t)[\Phi(0) - \Phi(\omega)]^{-1} \left\{ \begin{matrix} \Phi(\omega), & t < s, \\ \Phi(0), & t > s \end{matrix} \right\} \Phi^{-1}(s).$$

Упражнение. Проверить. □

Если имеются $\lambda = 1$, то ОПР (1) (как уже сказано) заведомо неединственно (если существует), а критерий существования проще всего понять из (6):

$$\int\limits_0^\omega (\Phi^{-1}(s)f(s), \xi_k)ds = 0, \qquad \forall \xi_k: \quad B^*\xi_k = \xi_k,$$

т. е. $f \perp z_k$ в $L_2(0, \omega)$, где

$$z_k' = -A^*(t)z_k, \qquad z_k(0) = (\Phi^{-1})^*(0)\xi_k, \qquad B^*\xi_k = \xi_k.$$

[В этом случае удобно использовать матрицант, тогда начальные данные для «тестовых решений» z_k примут вид $z_k(0) = \xi_k$, где $\Phi_0^*(\omega)\xi_k = \xi_k$.]

Пример. $A = \mathrm{const}$, все $\lambda_j(A) = \dfrac{2\pi k i}{\omega}$, все клетки одномерные. Тогда $B = E$, и из (6) очевидно, что ОПР существует тогда и только тогда, когда $\int\limits_0^\omega e^{-sA}f(s)ds = 0$. При этом все решения $(1)_0$ будут ОПР. □

В общем случае (произвольная A, число условий больше 0 и меньше n) удобно работать в специальной системе координат (жорданова R).

Перейдем к рассмотрению уравнения высокого порядка

$$P_n\left(t, \frac{d}{dt}\right) y = r(t), \tag{7}$$

где коэффициенты a_k полинома $P_n(t, \lambda)$ и функция r ω-периодичны. Уравнение (7) эквивалентно системе (1), где $x = \begin{bmatrix} y \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & E_{n-1} \\ -a_0 & \dots - a_{n-1} \end{bmatrix}$, $f = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$. Для $(7)_0$

употребляется та же терминология: ММ, мультипликаторы, ХП, нормальные решения (под ними понимаются соответствующие объекты для $(1)_0$), и остается тот же результат о нетривиальных ОПР $(7)_0$ как комбинациях нормальных решений, соответствующих мультипликаторам $\lambda = 1$. Так же для ОПР (7) можно рассматривать эквивалентную краевую задачу

$$(y, \ldots, y^{(n-1)})(\omega) = (y, \ldots, y^{(n-1)})(0). \tag{8}$$

Соответственно, отсутствие $\lambda = 1$ есть критерий корректности (7), (8), т. е. наличия (а тогда и единственного) ОПР (7) при любых r (в случае $P_n = P_n(\lambda)$ это означает, что все $\lambda_j(P_n) \neq \dfrac{2\pi k i}{\omega}$). Если это условие выполнено, то ОПР (7) можно записать в виде $y(t) = \int\limits_0^\omega g(t,s)r(s)ds$, где g — ФГ задачи (7), (8). Если это условие нарушено, то ОПР (7) либо не существует, либо заведомо неединственно (находится с точностью до прибавления нетривиальных ОПР $(7)_0$), а критерием существования являются специальные условия ортогональности для r.

Итак, исследование системы (1) и уравнения (7) на предмет структуры их решений и поиска ОПР сводится к вычислению мультипликаторов (или ХП) и, вообще говоря, самой ММ. Для систем и уравнений общего вида это сложная задача, и на практике она решается, как правило, численными методами. Даже в случае постоянных коэффициентов сложность может быть связана с необходимостью анализа структуры жордановых клеток матриц большого размера.

Замечание для преподавателя. В отличие от устойчивости, здесь еще проблема в том, что нужны не достаточные оценки типа $\mathrm{Re}\lambda < 0$, а точные сведения.

В качестве иллюстрации рассмотрим важный частный случай уравнения II порядка

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0, \tag{9}$$

которое эквивалентно системе

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}, \tag{10}$$

функции a и b ω-периодичны. Ограничимся вопросом о нетривиальных ОПР однородного уравнения (9) и вообще о структуре всех его решений. Как видно из общей теории, эти вопросы сводятся к вычислению мультипликаторов. Для этого найдем матрицант, т. е. матрицу Вронского $\Phi_0 = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{bmatrix}$, построенную на ФСР $z_{1,2}$ уравнения (9) со специальными данными Коши:

$$z_1(0) = 1, \qquad z_1'(0) = 0, \qquad z_2(0) = 0, \qquad z_2'(0) = 1.$$

Тогда ММ имеет вид $B = \Phi_0(\omega)$, и ее СЧ $\lambda_{1,2}$ являются мультипликаторами (9), а величины $\rho_j = \dfrac{1}{\omega}\ln\lambda_j$ — ХП (9). Как говорилось выше, $\lambda_1\lambda_2 = \exp\left(-\int\limits_0^\omega a(s)ds\right)$, т. е. можно считать $\rho_1 + \rho_2 = -\dfrac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega a(s)ds.$

Можно дальше говорить в терминах нормальных решений, СВ ММ и т. п., но здесь для разнообразия воспользуемся (3) (это эквивалентный путь). Допустим, мы знаем ММ, тогда можно вычислить Q и R в представлении (3), причем сразу считать R жордановой (для этого нужно перейти к другой ФМР Φ при помощи матрицы перехода, которая приводит исходную ММ к жордановой форме). Итак, новая $\Phi(t) = Q(t)e^{tJ}$, где Q — известная нам периодическая матрица, а J — жорданова матрица, по диагонали которой стоят ХП.

Случай 1. $\rho_1 \neq \rho_2$ или $\rho_1 = \rho_2$, но клетки одномерные. Тогда $J = \operatorname{diag}\{\rho_1, \rho_2\}$, и получим $\Phi(t) = \begin{bmatrix} q_{11}(t)e^{t\rho_1} & q_{12}(t)e^{t\rho_2} \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$, т. е. ФСР (9) имеет вид $y_k(t) = \psi_k(t)e^{t\rho_k}$, $k = 1, 2$, где ψ_k ω-периодичны. Получилась ФСР из 2 нормальных решений. Отсюда видно, как возникают нетривиальные ОПР, и вообще периодические решения, и как ведут себя решения в общем случае.

Случай 2. $\rho_1 = \rho_2 = \rho = -\dfrac{1}{2\omega}\displaystyle\int_0^\omega a(s)ds$, $J = \begin{bmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}$. Тогда $\Phi(t) = \begin{bmatrix} q_{11}(t)e^{t\rho} & q_{11}(t)te^{t\rho} + q_{12}(t)e^{t\rho} \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$, т. е. ФСР (9) имеет вид $y_1(t) = \psi_1(t)e^{t\rho}$, $y_2(t) = (t\psi_1(t) + \psi_2(t))e^{t\rho}$, где ψ_k ω-периодичны. Получилась ФСР из 1 нормального решения и 1 «присоединенного». В частности, если $\rho = 0$, то 1 элемент ФСР дает ОПР, а второй растет.

Частный случай. $\int\limits_0^\omega a(s)ds = 0$. Тогда $\lambda_1\lambda_2 = 1$, и, что удобно, этот случай можно идентифицировать сразу из вида (9). Тогда возникают варианты:

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, т. е. $\rho_1 = \rho_2 = 0$ — либо все решения суть ОПР, либо в ФСР одно ОПР, а другое растущее; для различения этих случаев нужно анализировать матрицу монодромии (т. е. могут реализовываться оба Случая 1,2 выше);

2. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, т. е. $\rho_1 = -\rho_2 = i\pi/\omega$ — либо все решения антипериодичны, либо в ФСР одно антипериодическое, а другое растущее; для различения этих случаев нужно анализировать матрицу монодромии (т. е. могут реализовываться оба Случая 1,2 выше);

3. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$, т. е. $|\lambda_k| = 1$, $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$, $\rho_{1,2} = \pm\dfrac{i\varphi}{\omega}$, тогда имеются 2 нормальных решения, и если $\dfrac{\varphi}{\pi} \in \mathbb{Q}$, то все решения периодичны с периодом, кратным ω (это Случай 1 выше);

4. $|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_2| < 1$. Тогда $\mathrm{Re}\rho_j \neq 0$ и противоположного знака, ФСР состоит из 2 нормальных решений — одно растущее, а другое убывающее, нетривиальных ОПР нет (это Случай 1 выше).

Упражнение. Рассмотрим уравнение $y'' + \alpha^2 y = f(t)$, $\alpha = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$. Пусть f 2π-периодична, т. е. $\omega = 2\pi$. Выяснить, исходя из общей теории (не находя по возможности решения явно):

1. При каких α существуют нетривиальные ОПР однородного уравнения, и сколько их?

2. При каких α безусловно существуют ОПР неоднородного уравнения?

3. Если условие из п. 2 не выполнено, то какое условие на f надо наложить, чтобы ОПР существовало? Сколько будет ОПР? Рассмотреть условие разрешимости для $f(t) = A\sin t$.

Рассмотрим теперь $f(t) = A\sin t$. Найти решения явно, выделить ОПР и сравнить результат с ответами на пп. 1–3. ☐

Обоснование для преподавателя. 1. $\lambda(P) = \pm i\alpha$ — ХП. Нужно $\lambda(P) = \dfrac{2\pi ki}{2\pi} = ki$, т. е. $\alpha \in \mathbb{Z}$. При этом если $\alpha \neq 0$, то ХП разные, так что имеется 2 нормальных решения, т. е. все решения суть ОПР, а при $\alpha = 0$ есть одно ОПР в ФСР, а второе — не ОПР, т. к. в матрице $R = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ клетка двумерная.

2. Нужно условие обратное к п. 1, т. е. $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

3. Итак, $\alpha = k \in \mathbb{Z}$. Придется найти ММ. Имеем ФМР $\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos kt & \sin kt \\ -k\sin kt & k\cos kt \end{bmatrix}$, получаем $B = E$, так что попадаем в условия примера выше (см. (6) и далее): нужно $\int\limits_0^{2\pi} \Phi^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ f(s) \end{bmatrix} ds = 0$. Если условие выполнено, то ОПР находится с точностью до ОПР однородного уравнения, и размерность многообразия ОПР равна 1 или 2 — см. п. 1. Для конкретной f получим условие разрешимости в виде

$\frac{A}{k}\int\limits_0^{2\pi}\begin{bmatrix}\cos ks & -\sin ks\\ k\sin ks & k\cos ks\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \sin s\end{bmatrix}ds = 0$, т. е. либо $A = 0$, либо $\alpha \neq 1$.
Явное нахождение решений подтверждает все выводы.

§ 7. Вспомогательные сведения из линейной алгебры и геометрии

Непустое множество L называется линейным (векторным) пространством, если

1. На этом множестве определена операция «сумма», т. е. для любых $x, y \in L$ существует единственный $z = x + y$, причем
   (a) $x + y = y + x$,
   (b) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
   (c) существует элемент 0 такой что $x + 0 = x$ для всех $x \in L$,
   (d) для каждого $x \in L$ существует $-x \in L$ такой что $x + (-x) = 0$;
2. Определена операция умножения на числа (вещественные или комплексные), т. е. для любых $x \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (или соответственно $\alpha \in \mathbb{C}$) существует $\alpha x \in L$, причем
   (a) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
   (b) $1 \cdot x = x$,
   (c) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

(d) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

(отсюда в частности видно что $-x = (-1)x$, так что обозначение $-x$, введенное до умножения на числа, не приводит к недоразумениям).

Наиболее часто встречается пример $L = \mathbb{R}^n$, т. е. множество элементов вида $(x_1, \ldots, x_n)$, где все $x_i \in \mathbb{R}$, со стандартно понимаемыми операциями сложения и умножения на числа. Впрочем, как мы увидим ниже, любое конечномерное L изоморфно указанному случаю. Другой пример (собственно, самый первый и естественный) — это трехмерное пространство, в котором мы живем. Нужно выбрать одну его точку в качестве начальной (точки отсчета, оси проводить не нужно!), а в качестве элементов рассмотреть всевозможные векторы (направленные отрезки) с началом в выбранной точке и с концами во всех точках пространства; операции сложения векторов и умножения их на числа понимаются традиционно.

В обоих приведенных примерах непосредственно можно убедиться в выполнении аксиом линейного пространства. Но, как и в любой математической теории, следует отделять частные (индивидуальные) черты конкретного объекта, не имеющие значения для логических переходов при изучении его свойств, и общие черты, ложащиеся в основу абстракции и потому выносимые в виде аксиом, а затем в виде теорем, составляющих собственно теорию (в данном случае — линейных пространств и их линейных преобразований). Так и в данном случае, из приведенных аксиом вытекает целая теория. Наша задача сейчас — в крайне конспективной форме указать ее основные положения.

Набор элементов $y_1, \ldots, y_k$ называется линейно независимым, если никакой его элемент нельзя выразить в виде линейной комбинации остальных; другими словами, если равенство $C_1 y_1 + \cdots + C_k y_k = 0$ с некоторыми числами $C_1, \ldots, C_k$ возможно только если все эти числа нулевые. Линейно независимый набор называется максимальным, если к нему нельзя добавить никакой элемент так, чтобы набор остался после этого линейно независимым. С другой стороны, вводится понятие базиса, т. е. такого набора $y_1, \ldots, y_n$, что любой элемент $x \in L$ можно однозначно разложить по этому базису, т. е. представить в виде $x = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n$.

Оказывается, понятия базиса и максимального линейно независимого набора эквивалентны. При этом число n элементов в базисе является инвариантом, т. е. не зависит от выбора базиса; это число называется размерностью пространства L. Размерность может оказаться в самом деле числом, тогда пространство называется конечномерным (а именно, n-мерным). Таковы приведенные выше в качестве примеров пространство $\mathbb{R}^n$ или наше «физическое» пространство (в нем $n = 3$); в обоих случаях построение базиса известно. Но существуют также бесконечномерные пространства, т. е. такие, в которых не существует конечного базиса (базиса может вообще не быть). Таковы, например, классические функциональные пространства (т. е. пространства, состоящие из функций).

Подпространством в пространстве L называется любое его подмножество M, которое само образует линейное пространство по тем же операциям; другими словами, это такое подмножество, что применение операций сложения и умножения на числа к его элементам не выводит из него. Очевидно, что размерность M не превосходит размерности L (а если оно собственное, т. е. $M \neq L$, то размерность строго меньше). Наглядный пример — плоскости или прямые в нашем физическом пространстве, проходящие через начальную точку (размерность соответственно равна 2 и 1).

Линейным многообразием называется множество вида $Y = \{\, a + z \mid z \in M \,\}$, где M — подпространство в L, и $a \in L$ — фиксированный элемент. Размерностью Y называют размерность M. Примерами линейных многообразий являются любые прямые и плоскости в нашем физическом пространстве.

Если в n-мерном пространстве L имеется базис $y_1, \dots, y_n$, то любой $x \in L$ можно отождествить с набором коэффициентов $(x_1, \dots, x_n)$, с которыми этот элемент разлагается по данному базису: $x = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. И наоборот, любому набору $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ соответствует элемент $x_1 y_1 + \dots x_n y_n \in L$. При этом указанное соответствие взаимно однозначно и сохраняет структуру (в данном случае — сохраняет операции сложения и умножения на числа, т. е. неважно в каком порядке совершать два шага — 1: отображение L в $\mathbb{R}^n$ и 2: сложение или умножение), такие соответствия называются изоморфизмами.

Наличие изоморфизма означает, что два изоморфных объекта по сути представляют собой одно и то же с позиций теории (в данном случае — теории линейных пространств), и отличаются лишь названиями своих структур. Т. е. в рамках теории изоморфные объекты можно отождествлять. Это, собственно, и делается при рассмотрении физического трехмерного пространства: мы, даже не задумываясь, отождествляем любой вектор (направленный отрезок) с тройкой чисел, являющихся его координатами в некотором заранее выбранном (обычно декартовом) базисе (т. е. обычно помимо начальной точки сразу проводятся и координатные оси), хотя направленные отрезки и тройки чисел — совсем не одно и то же. И для любого n-мерного пространства, как только выбран базис, так же строится его изоморфизм с $\mathbb{R}^n$. Это может навести на мысль, что рассмотрение каких-либо конечномерных пространств помимо $\mathbb{R}^n$ не имеет смысла. В определенной степени это так, но не совсем — не следует забывать, что для указанного отождествления необходима фиксация базиса, что является субъективным шагом и потому в ряде случаев может исказить картину. Необходимо все же помнить об общей геометрической структуре линейного пространства еще до низведения ее до арифметики (в $\mathbb{R}^n$). Особенно это касается бесконечномерного случая.

В линейных пространствах, как и в любых множествах, можно рассматривать отображения (функции) $\Phi : L \to L$. Ввиду линейности L особенный интерес представляют линейные отображения (преобразования) Φ, т. е. такие, которые перестановочны с линейными операциями, придающими L его структуру, другими словами, такие что $\Phi(ax + by) = a\Phi(x) + b\Phi(y)$. Для таких отображений часто не пишут скобки для аргументов: $\Phi(x) = \Phi x$, поскольку это не приводит к недоразумениям. Как и для любых функций, можно говорить о суперпозиции отображений $\Phi \circ \Psi$, действующей по формуле $(\Phi \circ \Psi)(x) = \Phi(\Psi(x))$ (при этом обычно символ $\circ$ опускают для линейных отображений), а также умножать отображения на числа: $(\alpha\Phi)(x) = \alpha(\Phi x)$.

Примерами линейных преобразований векторных пространств являются (числовые) матрицы, а именно, для $L = \mathbb{R}^n$ рассмотрим $\Phi = A = \{a_{ij}\}_{i,j}^n$ со стандартно понимаемыми операциями умножения матриц на числа, умножения и сложения матриц между собой, в частности умножения (действия) их на векторы (здесь и далее векторы понимаются как столбцы). Тогда произведение матриц означает их суперпозицию как отображений. Единичная матрица E соответствует тождественному отображению I, а обратная матрица означает обратную функцию (отображение).

Данная конструкция распространяется на любое конечномерное пространство, если ввести в нем базис и тем самым отождествить его с $\mathbb{R}^n$, тогда мы можем все линейные преобразования отождествить с матрицами по следующей простой схеме: как нетрудно проверить, преобразование Φ в выбранном базисе $e_1, \dots e_n$ представляется матрицей A с компонентами $a_{ij} = (\Phi(e_j))_i$, где z_i означает i-ю координату вектора z в данном базисе; это означает, что если вектор

$a \in L$ представляется в данном базисе столбцом $x \in \mathbb{R}^n$, то вектор $\Phi a \in L$ представляется столбцом $Ax \in \mathbb{R}^n$ (линейные преобразования могут действовать и из одного пространства в другое, вообще говоря с другой размерностью, что приводит к прямоугольным матрицам). Сказанное, с одной стороны, означает, что, изучая матрицы, мы автоматически изучаем линейные преобразования векторных пространств вообще, но с другой стороны, может оказаться, что часть этой работы будет лишней (т. е. всестороннее изучение матриц достаточно, но не необходимо для их исходного смысла), если, например, разные матрицы представляют одно и то же линейное преобразование, но в разных базисах, и потому, естественно, обладают какими-то общими свойствами; кроме того, никогда не следует забывать, что матрица — это не просто таблица, а именно представление линейного преобразования, и только те свойства матриц представляют интерес, которые имеют (геометрическую) трактовку в терминах соответствующего преобразования (как говорят, в инвариантных терминах, инвариантных относительно выбора базиса). Если в пространстве L базис $e_1, \ldots, e_n$ сменился на базис $f_1, \ldots, f_n$, то можно говорить о матрице перехода T, выражающей взаимосвязь этих базисов, а именно $e_i = \sum\limits_{j=1}^{n} T_{ji} f_j$. Непосредственно проверяется, что тогда представление одного и того же вектора $z \in L$ в первом базисе столбцом x и во втором базисе столбцом y связаны соотношением $y = Tx$, а представление одного и того же линейного преобразования Φ в первом базисе матрицей A и во втором базисе матрицей B

связаны соотношением $B = TAT^{-1}$, называемым подобием матриц A и B. Таким образом, подобные матрицы — это представление одного и того же линейного преобразования, но в разных базисах.

Типичной иллюстрацией сказанного является понятие инварианта матрицы. Рассмотрим произвольную скалярную функцию от матриц, т. е. закон вида $f(\{a_{ij}\})$. Если рассматривать матрицы как таблицы, то все такие функции осмысленны, например, функция $f(\{a_{ij}\}) = a_{11}$ ничем не хуже других. Но если вспомнить назначение матриц как записей линейных преобразований, то последняя функция теряет смысл — при смене базиса она меняется, а значит она не имеет никакого геометрического содержания. Ясно, что смысл имеют только те скалярные функции, которые не меняются при подобии (т. е. являются по сути функциями от соответствующих преобразований). Они и называются инвариантами матриц. Оказывается, инварианты образуют «n-мерный в функциональном смысле набор», т. е. существует n «базовых» инвариантов, через которые (как функции от них) выражаются все остальные. Самые известные среди них — детерминант (определитель) $\det$ и след $\mathrm{tr}A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$. Как и следует из конструкции инвариантов, оба они должны иметь ясный геометрический смысл. Так, детерминант выражает соотношение объемов любого тела после и до действия на него преобразования. Проще всего это понять, взяв в качестве этого тела координатный куб $[0,1]^n$. В частности, отсюда видно, что матрица (преобразование) вырождена если и только если она «сплющивает пространство» (снижает его размерность), т. е. переводит некоторые ненулевые векторы в 0. Представление для остальных базовых инвариантов мы приводить не будем, впрочем, все они содержатся в так наз. характеристическом полиноме матрицы: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Поскольку данный полином получен инвариантными средствами, то весь он (т. е. его коэффициенты) является инвариантом, причем все коэффициенты как инварианты независимы и потому собственно и представляют собой упомянутый набор базовых инвариантов (можно сказать, что χ_A есть инвариант с параметром, что позволяет закодировать в нем все инварианты). В частности, коэффициент при λ^{n-1} есть $\mathrm{tr}A$, а свободный член — $\det A$.

Интересный факт представлен теоремой Гамильтона—Кэли, которая утверждает, что для любой матрицы A верно $\chi_A(A) = 0$. В частности, это означает что степень A^n выражается как линейная комбинация младших степеней, и тем более это верно для более старших степеней.

Большое прикладное значение имеет следующий вопрос — для каких x верно $\Phi x = \lambda x$ с некоторым (заранее неизвестным) числом λ? Ясно, что $x = 0$ всегда годится, но этот случай тривиален и интереса не представляет. Такой $x \neq 0$, при котором верно $\Phi x = \lambda x$, называется собственным вектором преобразования Φ, а λ — соответствующим собственным числом. Ясно, что (в конечномерном случае) достаточно говорить о собственных числах и векторах для матриц. Сразу очевидно, что собственный вектор определяется с точностью до растяжения. Поскольку, как уже говорилось выше, уравнение $(A - \lambda E)x = 0$ может иметь решение $x \neq 0$ если и только если $\det(A - \lambda E) = 0$, то собственные числа суть корни характеристического полинома. У любой матрицы, таким образом, всегда n (вообще говоря, комплексных, даже если матрица вещественная) собственных чисел, но вообще говоря кратных. Как было ясно сразу, собственные числа соответствуют геометрическому преобразованию и потому суть инварианты (это ясно и из того, что они суть корни инвариантного полинома).

Для упрощения расчетов естественно желание найти такой базис, в котором заданное линейное отображение примет наиболее простое представление в виде матрицы. Или, что почти то же самое, по заданной матрице найти наиболее простую среди подобных ей, найдя соответствующую матрицу перехода. Ввиду разных возможностей понимания того, что есть простота, эта задача может иметь много решений, но существуют общепринятые «канонические» формы матриц. Одной из них является форма Жордана (жорданова форма). Оказывается, для любой матрицы A найдется такая матрица перехода T, что $A = TJT^{-1}$, где J — так наз. жорданова матрица (жорданова форма матрицы A), которая имеет блочно-диагональный вид с квадратными блоками «нанизанными» на главную диагональ, вне этих блоков стоят нули, а каждом диагональном блоке (называемом жордановой клеткой) по диагонали стоит одно из собственных чисел A, а один ряд над диагональю занят числом 1. При этом, вообще говоря, у некоторых собственных чисел может быть несколько клеток. Так, например, матрица aE — жорданова, у нее все собственные числа равны a, все жордановы клетки имеют размер 1. Матрица $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ — тоже жорданова, у нее собственные числа равны 2, и вся матрица есть одна клетка размера 2.

Выписывая равенство $AT = TJ$ по столбцам: $AT^j = TJ^j$ (где, как и далее, применяются обозначения B^j и B_i для j-го столбца и i-й строки матрицы B соответственно), легко можем увидеть структуру матрицы T: она состоит из столбцов, которые формируются по следующему принципу. Если расположить матрицу T под матрицей J, то под каждой жордановой клеткой окажется корневая цепочка векторов, первым (самым левым) элементом которой является собственный вектор, соответствующий собственному числу, фигурирующему в данной клетке, а затем цепочка так наз. присоединенных векторов, т. е. таких, которые связаны равенствами $(A - \lambda E)d = b$, где b — предыдущий, а d — следующий элемент цепочки (первый элемент — это сам собственный вектор). В совокупности все эти корневые цепочки образуют так наз. жорданов базис, который и вписывается в виде столбцов в матрицу перехода, и который в самом деле является тем базисом, в котором данное преобразование (заданное в исходном базисе матрицей A) принимает вид жордановой матрицы. Эта конструкция позволяет легко решать вопросы, имеющие инвариантную постановку. Например, ввиду инвариантности следа и детерминанта

$\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}J = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, $\det A = \det J = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$. Или, например, возводя жордановы клетки в степени, замечаем, что они становятся нулевыми начиная с определенной степени тогда и только тогда, когда собственное число равно 0. Значит, матрица нильпотентна (т. е. существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $A^k = 0$) если и только если все ее собственные числа нулевые, причем степень нильпотентности k (минимальное такое число) обязательно не больше n (а фактически равно размеру самой большой жордановой клетки).

Подпространство $M \subset L$ называется инвариантным относительно преобразования Φ, если его образ под действием Φ лежит в нем же, т. е. $\Phi x \in M$ для всех $x \in M$. В частности, можно говорить об инвариантных подпространствах (в $\mathbb{R}^n$) для матриц, с соответствующими оговорками о подобии и смене базиса. Очевидно, что линейная оболочка нескольких инвариантных подпространств $M_1, \ldots, M_k$, т. е. множество элементов вида $c_1 z_1 + \cdots + c_k z_k$, где $z_i \in M_i$, есть снова инвариантное подпространство.

Простейший пример инвариантного подпространства — одномерное подпространство, натянутое на собственный вектор z (т. е. его линейная оболочка), состоящее из векторов вида αz. Менее тривиальный пример — линейная оболочка корневой цепочки, начиная с собственного вектора и далее подряд до любого (возможно, и до последнего) присоединенного из этой цепочки. Если взята вся цепочка, то говорят об инвариантном подпространстве, порожденном соответствующей жордановой клеткой.

Особый интерес представляют (матричные) функции от матриц. Аналогично скалярным функциям, представляют интерес не все отображения, сопоставляющие одной таблице другую, а только имеющие геометрический смысл, т. е. те, которые не зависят от базиса. Другими словами, нас интересуют только функции от преобразований линейного пространства. На языке матриц, в виде которых данное преобразование записывается в разных базисах, это означает, что интересующие нас функции f должны выдерживать подобие матриц: $f(TBT^{-1}) = Tf(B)T^{-1}$. Достаточно подробно основные понятия и алгоритмы, связанные с функциями от матриц, описаны в § 2.

Частным случаем линейных пространств являются евклидовы пространства. Это такие линейные пространства, в которых определена операция «скалярное произведение векторов», обозначаемая скобками $(\cdot,\cdot)$, т. е. любой паре элементов x, y евклидова пространства H сопоставляется число (x, y) (вещественное или комплексное, в зависимости от того, какие числа были допустимы в качестве множителей при определении H как линейного пространства), при этом должны быть выполнены следующие аксиомы:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ для всех $x, y \in H$ (черта означает комплексное сопряжение),
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ для всех $x_1, x_2, y \in H$,
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для всех $x, y \in H$ и чисел λ,
4. число (x, x) вещественно и неотрицательно для всех

$x \in H$, причем $(x, x) = 0$ возможно только если $x = 0$.

В евклидовом пространстве можно ввести норму (длину) любого вектора по формуле $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. В случае конечномерного H уместнее обозначать длину вектора x символом $|x|$. Геометрия евклидовых пространств наиболее близка к привычной нам геометрии трехмерного физического пространства, на них переносится терминология, связанная с этим пространством. Так, говорят об ортогональности векторов $x, y \in H$, если $(x, y) = 0$, и вообще, можно говорить об угле между ненулевыми векторами $x, y \in H$, вычисляемом по формуле $\arccos \dfrac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$. В случае, если в качестве H взять физическое трехмерное пространство с обычным пониманием скалярного произведения (выполнение всех аксиом легко проверяется), то этот угол совпадает с «обычным» углом.

Благодаря своей высокоорганизованной структуре евклидовы пространства обладают весьма богатыми свойствами, которые даже слегка наметить в данном тексте не представляется возможным. В качестве лишь одного понятия упомянем так наз. тензорное произведение (диаду). Для любых $x, y \in H$ можно ввести линейное преобразование в H, обозначаемое $x \otimes y$, и называемое тензорным произведением векторов x и y. Данное преобразование действует по формуле $(x \otimes y)z = (z, x)y$ на все $z \in H$. В частности, если в качестве H взять $\mathbb{R}^n$ (другими словами, конечномерное евклидово пространство с ортонормированным базисом, в котором и записывать координаты всех векторов и представления всех линейных преобразований в виде матриц), то тензорное произведение двух векторов есть матрица с компонентами $(x \otimes y)_{ij} = \overline{x_j} y_i$, другими словами $(x \otimes y) = yx^*$, где $(\cdot)^*$ означает транспонирование (в данном случае – превращение столбца в строку, с комплексным сопряжением).

Особый интерес в евклидовых пространствах представляют ортогональные системы, т. е. такие наборы векторов, в которых все элементы взаимно ортогональны. Будем рассматривать только конечные или счетные ортогональные системы: $e_i \in H$, $i = 1, 2, \ldots$, $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$. Если исключить нулевые векторы, не представляющие интереса, то без ограничения общности можно считать, что эта система не просто ортогональна, а ортонормирована, т. е. $\|e_i\| = 1$, т. к. в противном случае ее всегда можно нормировать, положив $e_i := e_i/\|e_i\|$. В конечномерных H изучение ортонормированных систем является тривиальной задачей — ясно, что, взяв любой ненулевой вектор в качестве e_1 и нормировав его, можно дополнить его еще $n - 1$ ортогональными ему и друг другу векторами $e_2, \ldots, e_n$ до ортонормированного (декартова) базиса. В случае бесконечномерного H такое построение не очевидно. Ясно лишь то, что, каков бы ни был набор уже построенных n векторов $e_1, \ldots, e_n$, образующих ортонормированную систему, к ним можно добавить (ввиду бесконечномерности H) еще один линейно независимый вектор, который после несложных преобразований можно сделать также ортогональным всем предыдущим, и тем самым получить ортонормированную систему уже из $n + 1$ вектора. Тем самым, можно построить счетную ортонормированную систему $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, и вопрос состоит в том, не будет ли она, по аналогии с $\mathbb{R}^n$, играть роль базиса. Не вдаваясь в подробности, заметим лишь, что в общем случае ответ отрицательный, но в любом случае, если мы хотим выполнения равенства

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i, \tag{1}$$

то для него необходимо, чтобы коэффициенты x_i в этом разложении (координаты вектора x) удовлетворяли равенству $x_i = (x, e_i)$ — это нетрудно проверить, умножив обе части (1) справа скалярно на e_j. При этом (1) верно если и только если для данного x верно равенство Парсеваля

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2. \tag{2}$$

В общем случае вместо (2) будет выполняться лишь неравенство Бесселя

$$\|x\| \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2. \tag{3}$$

В частности, система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ образует базис (т. е. (1) верно для всех $x \in H$) если и только если для всех $x \in H$ верно (2). Все высказанные тезисы мгновенно следуют из тождества Бесселя (которое легко проверяется непосредственно)

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 + \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2, \tag{4}$$

верного для всех $x \in H$ и чисел y_i, и любого n. В самом деле, из (4) видно, что для минимизации его левой (посредством правой) части необходимо положить $y_i = x_i$; даже после этого дальнейшая минимизация левой части (вплоть до нуля в пределе) требует усилий: сначала заметим, что ввиду неотрицательности левой части неотрицательна и правая (это и есть (3)), и наконец, чтобы левая часть стремилась к 0 при $n \to \infty$ (т. е. было верно (1)), должна стремиться к нулю и правая (а это и есть (2)). Ряды вида (1) называются (абстрактными) рядами Фурье. По сути, мы здесь кратко изложили их теорию, насколько это возможно в общем случае, без уточнения природы H и свойств системы $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. На практике трудность заключается в обосновании равенства Парсеваля, или, что то же, базисности системы, в конкретной ситуации. Наиболее распространенный пример — тригонометрические ряды Фурье в евклидовом пространстве L_2. А именно, в качестве H возьмем совокупность всех (измеримых по Лебегу, вообще говоря комплекснозначных) функций x, заданных на интервале (a, b), и таких, что сходится (существует) интеграл (по Лебегу)

$$\int\limits_a^b |x(t)|^2 dt \tag{5}$$

Можно проверить, что H в самом деле есть линейное пространство, если в нем ввести операции сложения и умножения на числа (вообще говоря, комплексные) обычным образом, другими словами, интеграл (5) сходится и для результата этих операций, если сходился для исходных функций.

Более того, введя скалярное произведение по формуле

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt, \tag{6}$$

можно убедиться, что, во-первых, величина (6) определена (интеграл сходится) для всех $x, y \in H$, а во-вторых, все аксиомы евклидова пространства выполнены. Получившееся евклидово пространство обозначается $L_2(a, b)$. Во избежание логических противоречий, функции в этом пространстве понимаются «почти всюду», т. е. не различаются функции, отличающиеся лишь на множестве (лебеговой) меры нуль, например, в одной или нескольких точках. В этом пространстве можно привести много различных примеров ортонормированных систем (функций). Например, положим для простоты $(a, b) = (0, \pi)$, ограничимся вещественными функциями и рассмотрим функции $y_k(t) = \sin kt$, $k \in \mathbb{N}$. Непосредственно проверяется, что эти функции ортогональны друг другу в смысле (6). Поскольку

$$\|y_k\|^2_{L_2(0,\pi)} = \int_0^\pi \sin^2(kt)dt = \frac{\pi}{2},$$

то данную систему можно превратить в ортонормированную, положив $e_k = y_k/\sqrt{\pi/2}$, т. е.

$$e_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kt. \tag{7}$$

Посмотрим, какие свойства этой системы следуют из приведенной выше общей теории (абстрактных рядов Фурье). Если мы хотим представить произвольную функцию

$x \in L_2(0,\pi)$ в виде разложения по этой системе:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kt, \tag{8}$$

то для этого необходимо, чтобы коэффициенты x_k имели вид

$$x_k = (x, e_k)_{L_2(0,\pi)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\pi} x(t) \sin ktdt. \tag{9}$$

Попутно отметим, что формулы (8), (9) можно записать в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \sin kt, \qquad z_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x(t) \sin ktdt.$$

Пока (исходя из общей теории) представление (9) может быть недостаточным для (8). В любом случае можно утверждать выполнения неравенства Бесселя

$$\|x\|^2_{L_2(0,\pi)} \equiv \int\limits_0^{\pi} |x(t)|^2 dt \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2,$$

а если мы хотим все же выполнения (8), то для этого необходимо и достаточно выполнения равенства Парсеваля

$$\int\limits_0^{\pi} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2. \tag{10}$$

Абстрактная теория далее бессильна, но к счастью существует специальная теория тригонометрических рядов Фурье, которая утверждает, что (10) (а значит и (8)) верно для всех $x \in L_2(0,\pi)$. Правда, равенство (8) ввиду специфики нормы в L_2 (задаваемой как корень квадратный из величины (5)) понимается в весьма слабом смысле, т. е. сходимость ряда вообще говоря не имеет места в отдельно взятых точках. Но существует и усиление теории тригонометрических рядов Фурье для случая функций, обладающих достаточной регулярностью (непрерывностью, гладкостью и т. д.), когда и формула (8) имеет место в гораздо более сильном смысле. Аналогично изучаются ряды Фурье по другим системам (помимо (7), и на других интервалах).

§ 8. Конспективное изложение элементов теории линейных ОДУ

Система линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n, \\ \ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n \end{gathered} \tag{1}$$

для неизвестных функций $x_1, \ldots, x_n$ может быть записана в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{2}$$

где x — вектор-столбец с компонентами $x_1, \ldots, x_n$, а A — матрица с непрерывными коэффициентами a_{ij}. Решения системы (2) образуют линейное пространство размерности n, а значит для нахождения всех его решений достаточно найти базис в этом пространстве, состоящий из n функций (решений (2)) — обозначим их $z^1, \ldots, z^n$, и тогда любое решение (2) запишется в виде их комбинации:

$$x = c_1 z^1 + \ldots + c_n z^n \tag{3}$$

с некоторыми числовыми коэффициентами $c_1, \ldots, c_n$. Как и в любом базисе, сами z^i должны образовывать линейно независимую систему, т. е. если $c_1 z^1 + \ldots + c_n z^n = 0$ с некоторыми числовыми коэффициентами $c_1, \ldots, c_n$, то эти коэффициенты обязаны все обращаться в нуль. Более подробно: если на некотором интервале $t \in (a, b)$ верно
$c_1 z^1(t) + \ldots + c_n z^n(t) \equiv 0$, то все $c_i = 0$. Отсюда видно два факта:

1. необходимо научиться определять линейную зависимость или независимость функций, по крайней мере решений (2),
2. при изучении линейной зависимости важен выбор интервала, на котором она изучается.

В общем случае, если изучаются функции произвольной природы, вопрос 1 не так очевиден, и вопрос 2 действительно представляет определенные сложности. Но к счастью, когда дело касается только решений (2), оба вопроса решаются достаточно просто. Прежде всего уточним терминологию. Базис в пространстве решений (2), т. е. набор вектор-столбцов $z^1, \ldots, z^n$, называется фундаментальной системой решений (ФСР) системы (2). Если составить из этих столбцов матрицу $Z = Z(t)$ (т. е. ее j-й столбец есть z^j), то формула (3) запишется в виде

$$x = Zc, \tag{4}$$

где $c \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор (с постоянными компонентами c_i). Матрица Z называется фундаментальной матрицей решений (ФМР) системы (2). Поставленный выше вопрос о линейной независимости заданного набора решений $z^1, \dots, z^n$ системы (2) теперь можно переформулировать так. Составим из этих решений (как из столбцов) матрицу Z. Будет ли эта матрица именно ФМР? Оказывается, этот вопрос эквивалентен вопросу о невырожденности этой матрицы во всех точках интервала (a, b), причем если она невырождена хотя бы в одной точке, то невырождена всюду, куда только распространяется действие самой системы (2) и ее решений. Поэтому для того, чтобы обеспечить линейную независимость заданного набора решений $z^1, \dots, z^n$, достаточно проверить их линейную независимость в какой-то одной точке. Другими словами, если составить определитель Вронского (вронскиан) $w = \det Z$, то для обеспечения $w \neq 0$ всюду достаточно проверить, что $w \neq 0$ в какой-то одной точке.

Типичная ситуация по поиску решений (2) такова. Ставится так наз. задача Коши, состоящая в поиске решений (2), удовлетворяющих дополнительному условию – начальному условию (данным Коши)

$$x(t_0) = x_0, \tag{5}$$

где $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ заданы. Эту же задачу Коши, но с начальными данными, выбираемыми нами, удобно использовать для построения ФСР. Для этого выберем в $\mathbb{R}^n$ базис из векторов $a^1, \ldots, a^n$ (проще всего положить $a^i = e_i$ — декартовы орты, но это необязательно), и найдем z^i как решения задач Коши

$$\frac{dz^i}{dt} = A(t)z^i, \qquad z^i(t_0) = a^i. \tag{6}$$

Оказывается, любая задача Коши вида (2), (5) (в том числе (6)) имеет единственное решение (здесь мы не уточняем смысл единственности и другие детали, подробности см. в § 1 и в Части 1), так что все z^i в самом деле существуют. Они и образуют ФСР, т. к. их вронскиан ненулевой в точке t_0, а значит и всюду. Теперь нетрудно получить представление решения задачи (2), (5). Для этого разложим x_0 по базису $a^1, \ldots, a^n$: $x_0 = b_1a^1 + \ldots + b_na^n$, и тогда $x = b_1z^1 + \ldots + b_nz^n$. В самом деле, функция $y = x - b_1z^1 - \ldots - b_nz^n$ обращается в нуль в точке t_0 и является решением (2). Но этими же свойствами обладает нулевая функция. Ввиду единственности решения задачи Коши $y = 0$, что и требовалось. Если нужно найти все решения (2), то, найдя Z по указанному алгоритму (для этого придется временно выбрать начальную точку t_0, ее выбор не имеет значения), можем воспользоваться формулой (4), или, другими словами, можно решить задачу (5), но считать в ней вектор x_0 произвольным.

Если ФМР однородной системы (2) известна, то решения неоднородной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \tag{7}$$

(где f — произвольная непрерывная вектор-функция) легко построить, например, методом вариации постоянных, состоящим в том, что решение (7) ищется в виде $x(t) = Z(t)c(t)$, где c — теперь уже произвольная вектор-функция. Оказывается, для этой функции получится система $Z(t)c'(t) = f(t)$, из которой ввиду невырожденности Z легко найти c и в итоге получить общий вид решений (7):

$$x(t) = Z(t) \int\limits_{t_0}^{t} Z^{-1}(s)f(s)ds + Z(t)a, \tag{8}$$

где $t_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ могут быть любыми. Отметим, что общее решение (8) неоднородного уравнения (7) имеет вид суммы частного решения этого уравнения (первое слагаемое) и общего решения однородного уравнения (2) (второе слагаемое, ср. (4)). Таким образом, все решения (7) образуют линейное многообразие размерности n.

Из вышеизложенного видно, что «практическое нахождение» решений как однородной, так и неоднородной систем (2), (7) состоит в «явном» решении задач (2), (5), т. е. в нахождении ФМР. В общем случае это задача трудная, но в некоторых случаях (особенно для постоянных матриц A, изучаемых ниже) это задача, поддающаяся систематическому решению.

Отдельный интерес представляет случай одного линейного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1(t)y'(t)+a_0(t)y(t) = f(t), \tag{9}$$

где a_i и f — заданные непрерывные функции, а y — искомое решение. Как и в случае систем, целесообразно сначала рассмотреть однородное уравнение:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{10}$$

Оказывается, решения этого уравнения также образуют линейное пространство размерности n, поэтому общее решение этого уравнения также имеет вид комбинации базисных решений: $y = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n$, эти базисные решения $y_1, \ldots, y_n$ также называются ФСР, и снова ключевым является вопрос о линейной независимости заданного набора решений $y_1, \ldots, y_n$ уравнения (10). Для ответа на этот вопрос нужно составить так наз. матрицу Вронского

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \tag{11}$$

и подсчитать ее определитель (определитель Вронского, вронскиан) $w = \det Y$. Как и для систем (2), вронскиан не равен нулю всюду если и только если он ненулевой хотя бы в одной точке, и это есть критерий линейной независимости того набора решений, на котором он построен. Следовательно, для построения ФСР достаточно выбрать какую-то начальную точку t_0 и базис в $\mathbb{R}^n$: $a^1, \ldots, a^n$, и в качестве y_i взять решение (10), удовлетворяющее начальным данным

$$y_i(t_0) = a_1^i, \quad y_i'(t_0) = a_2^i, \quad \ldots, \quad y_i^{(n-1)}(t_0) = a_n^i \tag{12}$$

(особенно просто эта задача Коши выглядит если положить $a^i = e_i$ — декартовы орты). После этого можно выписывать общее решение (10) и решать любую задачу для (10), например, любую задачу Коши — необходимо лишь подставить общий вид решения в данные Коши и найти неизвестные постоянные c_i.

Для решения неоднородного уравнения (9) снова можно применить метод вариации постоянных, который в данном случае принимает следующий вид: решение (9) ищется в виде $y(t) = c_1(t)y_1(t) + \ldots + c_n(t)y_n(t)$, где $y_1, \ldots, y_n$ — ФСР однородного уравнения, а $c_1, \ldots, c_n$ — теперь произвольные функции. Подставляя этот вид в (9), после определенных преобразований (подробности см. в § 1) получим систему для определения c_i:

$$\begin{bmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1' \\ \ldots \\ c_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ f \end{bmatrix},$$

из которой эти коэффициенты легко найти и тем самым построить общее решение уравнения (9). Все решения этого уравнения образуют линейное многообразие размерности n, другими словами, общее решение (9) представляется в виде суммы частного решения (9) и общего решения (10).

Как и в случае систем, мы видим, что основное препятствие на пути построения общего решения как однородного, так и неоднородного уравнений (9), (10) — это нахождение ФСР для (10). Общего метода решения этой проблемы не существует, но в некоторых частных случаях (особенно для постоянных коэффициентов a_i, что будет изучено ниже) соответствующие алгоритмы полностью разработаны.

Для доказательства многих вышеизложенных положений и для многих других целей полезно знать о возможности сводить системы первого порядка вида (7) к одному уравнению высокого порядка вида (9), и наоборот. Первая из упомянутых процедур в общем случае достаточно громоздка (мы ее рассмотрим подробнее ниже, но только для постоянных коэффициентов), хотя ее идея несложна и состоит в последовательном исключении неизвестных функций. Вторую процедуру, как более востребованную на практике, мы сейчас поясним. А именно, если y — решение уравнения (9), то вектор $x = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$ является решением системы вида (7) со специально подобранными матрицей и вектором правой части, а именно:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ y' \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ f \end{bmatrix}.$$

Здесь все уравнения, кроме последнего, суть тождества, а последнее собственно и выражает собой (9).

Перейдем к теперь к частному случаю постоянных коэффициентов в уравнении (9) или системе (1) и покажем, как в этом случае удается в явном виде построить ФСР и следовательно довести все представления решений (как однородных, так и неоднородных) уравнений до «явных формул». Если матрица $A = \mathrm{const}$ в системе (2), то ее ФМР, как можно доказать (подробности см. в § 2), может быть построена в виде матричной экспоненты

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = E + tA + \frac{1}{2} t^2 A^2 + \frac{1}{6} t^3 A^3 + \ldots . \tag{13}$$

Для вычисления суммы этого ряда для конкретных матриц A существует множество способов (многие из них описаны в § 2), здесь мы опишем только процесс вычисления с помощью жордановой формы. Итак, пусть $A = TJT^{-1}$ — жорданово разложение. Тогда, как легко видеть, $A^k = TJ^kT^{-1}$, а значит и $e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}$. В свою очередь, непосредственно суммируя ряд (13) для жордановых матриц, убеждаемся, что матричная экспонента от них считается «по клеткам», т. е. сама является блочно-диагональной матрицей, каждый блок которой есть матричная экспонента от блока исходной матрицы:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{e^{t(\cdot)}} \quad \begin{bmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \dfrac{t^2}{2!}e^{t\lambda} & \ldots & \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \ldots & \dfrac{t^{k-2}}{(k-2)!}e^{t\lambda} \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & \ldots & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & e^{t\lambda} \end{bmatrix},$$

где k — размер рассматриваемой клетки. Если матрица A нильпотентна, то ряд (13) обрывается, и может оказаться проще подсчитать его непосредственно. Особенно это может быть удобно если степень нильпотентности A мала.

Формула (4) для общего решения системы (2) принимает вид

$$x(t) = e^{tA}c, \tag{14}$$

а решение задачи Коши (2), (5) представляется в виде

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0. \tag{15}$$

Здесь мы воспользовались свойствами матричной экспоненты

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}, \qquad (e^{tA})^{-1} = e^{-tA}.$$

Отметим, что $e^{A+B} = e^A e^B$, если $AB = BA$. Наконец, формула (8) для общего решения системы (7) принимает вид

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}f(s)ds + e^{tA}a. \tag{16}$$

В частности, решение задачи Коши (7), (5) представляется в виде

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}f(s)ds + e^{(t-t_0)A}x_0. \tag{17}$$

Для решения уравнений (9), (10) в случае $a_i = \mathrm{const}$ можно было вы воспользоваться описанной выше процедурой их сведения к системам вида (2), (7), но проще непосредственно построить ФСР по следующему алгоритму. Составим так наз. характеристический полином уравнения (10):

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \tag{18}$$

и найдем его корни:

$$\lambda_1 \quad (\text{кратность} = \beta_1), \quad \ldots, \quad \lambda_k \quad (\text{кратность} = \beta_k). \quad (19)$$

Здесь k — число различных корней, и естественно $\beta_1 + \ldots + \beta_k = n$. Вообще говоря, $\lambda_k \in \mathbb{C}$, но поскольку все $a_i \in \mathbb{R}$, то $\lambda_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ разбиваются на пары сопряженных чисел, т. е. наряду с $\lambda_k = \alpha + i\beta$ обязательно присутствует $\lambda_{k+1} = \alpha - i\beta$. Тогда ФСР уравнения (10) может быть представлена в виде

$$\begin{array}{llll} y_{11}(t) = e^{\lambda_1 t}, & y_{12}(t) = te^{\lambda_1 t}, & \ldots & , y_{1,\beta_1}(t) = t^{\beta_1 - 1} e^{\lambda_1 t}, \\ y_{21}(t) = e^{\lambda_2 t}, & y_{22}(t) = te^{\lambda_2 t}, & \ldots & , y_{2,\beta_2}(t) = t^{\beta_2 - 1} e^{\lambda_2 t}, \\ & & \ldots & \\ y_{k1}(t) = e^{\lambda_k t}, & y_{k2}(t) = te^{\lambda_k t}, & \ldots & , y_{k,\beta_k}(t) = t^{\beta_k - 1} e^{\lambda_k t}. \end{array} \quad (20)$$

Двойные индексы в нумерации ФСР введены для наглядности. ФСР (20) может оказаться иногда неудобной из-за наличия комплексных корней (хотя комплексные экспоненты зачастую все же удобнее синусов и косинусов). В этом случае полезно использовать другую ФСР, в которой все комплексные решения вида $t^m e^{(\alpha+i\beta)t}$, $t^m e^{(\alpha-i\beta)t}$ заменены на решения вида $t^m e^{\alpha t} \cos \beta t$, $t^m e^{\alpha t} \sin \beta t$. Для решения неоднородного уравнения (9) в случае $a_i = \text{const}$ по-прежнему применяется описанный выше метод вариации постоянных. Однако в случае правых частей f специального вида можно действовать более простым путем. А именно, рассмотрим частный случай $f(t) = R_m(t)e^{\gamma t}$, где R_m — произвольный полином степени m. Здесь коэффициент γ может быть и комплексным. Это означает, что если $f(t) = R_m(t)e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ или

$f(t) = R_m(t)e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, то следует представить эту функцию в виде $f = \mathrm{Re}F$ или $f = \mathrm{Im}F$ соответственно, где $F(t) = R_m(t)e^{\gamma t}$, $\gamma = \alpha + i\beta$, найти частное решение (9) с правой частью F, и его вещественная или мнимая часть соответственно будет частным решением (9) уже с исходной f. Таким образом, достаточно рассмотреть случай $f(t) = R_m(t)e^{\gamma t}$. Оказывается, тогда частное решение (9) можно найти в виде

$$y_{\text{част}}(t) = t^{\text{кр.}\gamma} Q_m(t)e^{\gamma t}, \tag{21}$$

где Q_m — некоторый полином степени m, а кр.γ — кратность γ как корня P (см. (18)) с той оговоркой, что если γ не является корнем этого полинома, то кратность считается нулевой. Поскольку коэффициенты Q_m заранее неизвестны, то (21) по существу предлагает искать решение методом неопределенных коэффициентов. Подставляя (21) в (10), мы получим для неизвестных коэффициентов необходимые уравнения. Найдя частное решение уравнения (9), мы можем записать и общее решение, поскольку общее решение (9) (как говорилось выше) есть сумма частного решения неоднородного уравнения (9) и общего решения однородного уравнения (10), которое представляется в виде $y(t) = c_1y_1(t) + \ldots + c_ny_n(t)$, где $y_1, \ldots, y_n$ — ФСР однородного уравнения, найденная нами выше.

В случае постоянных коэффициентов связь между системой (7) и уравнением (9) остается прежней, но теперь переход от системы к одному уравнению становится особенно простым, по крайней мере для однородной системы. А именно, если вектор x есть решение (2), то каждая его компонента $y = x_i$ есть решение (10), где в качестве a_i нужно взять такие числа, то соответствующий полином (18) совпадает с характеристическим полиномом матрицы A. Указанный факт позволяет в случае необходимости найти отдельную компоненту решения системы, не решая всю систему.

В качестве заключения параграфа рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля, играющую важную роль при решении некоторых задач для уравнений в частных производных. В достаточно общем виде эта задача рассмотрена в § 4, а здесь мы ограничимся ее весьма частным случаем, но зато разберем его более детально в плане «явных формул для решений». А именно, рассмотрим уравнение с вещественным параметром λ:

$$y'' = \lambda y, \tag{22}$$

в котором неизвестными являются как функция y, заданная на отрезке $[0, l]$ (где $l > 0$ — заданное число), так и число λ. К уравнению (22) добавим один из следующих вариантов краевых условий:

$$y(0) = 0, \qquad y(l) = 0; \tag{23}$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(l) = 0; \tag{24}$$

$$y'(0) = 0, \qquad y(l) = 0; \tag{25}$$

$$y'(0) = 0, \qquad y'(l) = 0. \tag{26}$$

Таким образом, рассматриваются 4 задачи: {(22),(23)}, {(22),(24)}, {(22),(25)} и {(22),(26)}. Все эти задачи называются краевыми — в отличие от задачи Коши, в них решение ищется на заранее заданном интервале, а дополнительные условия к уравнению пишутся не в одной точке, а на концах этого интервала. Подробно теория таких задач изучается в § 3–5, но нам достаточно здесь отметить, что, в отличие от задачи Коши, решение краевой задачи не всегда существует или является единственным. Однако в общем случае (грубо говоря, в большинстве случаев) оно все же будет существовать и единственное, так что кроме функции $y = 0$, которая, очевидно, является решением всех 4 задач, других решений ожидать не приходится. Нас же будет интересовать как раз тот случай, когда все же условие единственности нарушается, и помимо нулевого решения, эти задачи имеют и другие, нетривиальные, решения. По аналогии с линейной алгеброй, такие нетривиальные решения называются собственными функциями соответствующей задачи, а те λ, при которых такие решения нашлись — собственными значениями этой задачи. Сама же задача о поиске собственных функций и собственных значений для краевых задач, связанных с уравнениями вида (22) (и более общих) называется задачей Штурма—Лиувилля. Ввиду простоты уравнения (22) и условий (23)–(26) задача Штурма—Лиувилля для них допускает явное и достаточно простое решение, которые мы сейчас и изложим.

Начнем с задачи (22), (23). При нахождении общего решения уравнения (22) следует решить характеристическое уравнение $\mu^2 = \lambda$, из которого видно, что случай $\lambda = 0$ играет особую роль, т. к. тогда корень кратный. Отдельно разбирая этот случай, находим общее решение (22): $y(x) = C_1x + C_2$, которое удовлетворяет условиям (23) только при $C_i = 0$. Таким образом, $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи, и это значение можно более не рассматривать. При $\lambda \neq 0$ получаем 2 корня характеристического уравнения: $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$, так что общее решение (22) принимает вид $y = C_1 \exp(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \exp(-\sqrt{\lambda}x)$. Подставляя это решение в (23), получаем для $C_{1,2}$ систему уравнений

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \exp(\sqrt{\lambda}l) & \exp(-\sqrt{\lambda}l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{27}$$

из которой мы хотим найти ненулевое решение $(C_1, C_2) \neq 0$. Это возможно если и только если матрица системы (27) вырождена, что приводит к уравнению

$$\exp(2\sqrt{\lambda}l) = 1. \tag{28}$$

Решая это уравнение (и не забывая что $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{C}$), получаем $2\sqrt{\lambda}l = 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. $\sqrt{\lambda} = \pi ki/l$. Подставляя это соотношение в представление для y и учитывая первое уравнение в (27), получим $y = 2iC_1 \sin\dfrac{\pi kx}{l}$, при этом окончательно выразим $\lambda = -\dfrac{\pi^2k^2}{l^2}$. Теперь заметим, что $k = 0$ не годится, т. к. рассматривается случай $\lambda \neq 0$; кроме того, значения $k < 0$ дают те же функции y и потому могут быть отброшены. В итоге остаются только $k \in \mathbb{N}$. Соответствующие λ и y следует во избежание путаницы снабдить индексом k. И наконец, поскольку постоянная C_1 произвольна, а собственная функция может быть выражена с точностью до растяжения, то можно положить для простоты $2iC_1 = 1$. В итоге получаем решение задачи Штурма—Лиувилля (22), (23):

$$\lambda_k = -\frac{\pi^2 k^2}{l^2}, \quad y_k(x) = \sin\frac{\pi k x}{l}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{29}$$

представляющее собой счетный набор собственных значений и функций. Мы наблюдаем отличие от задачи о собственных числах и векторах матриц, в которой получается конечный набор решений. С другой стороны, задача (22), (23) (по сравнению с общим случаем, возникающим в линейной алгебре) примечательна тем, что все собственные числа однократны, т. е. каждому соответствует ровно один (с точностью до растяжения, разумеется) «собственный вектор». Кроме того, эти «собственные векторы» образуют базис, по которому можно разложить любой «вектор» (т. е. функцию) — подробнее об этом говорится ниже. В задаче о собственных числах и векторах матриц эти свойства, вообще говоря, не выполняются, хотя почти полная аналогия имеется со случаем самосопряженных матриц (подробнее об этом см. в § 3,4).

Задача (22), (24) решается аналогично. Для определения констант вместо (27) получится система

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \exp(\sqrt{\lambda} l) & -\exp(-\sqrt{\lambda} l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{30}$$

откуда получим $2\sqrt{\lambda} l = i\pi + 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$, и действуя далее аналогично, получим ответ

$$\lambda_k = -\frac{\pi^2}{l^2}\left(k + \frac{1}{2}\right)^2, \quad y_k(x) = \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}, \qquad k \in \mathbb{N}_0, \tag{31}$$

где $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

В задаче (22), (25) для определения констант вместо (27) получится система

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \exp(\sqrt{\lambda}l) & \exp(-\sqrt{\lambda}l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{32}$$

из которой снова $2\sqrt{\lambda}l = i\pi + 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$, но теперь ввиду другого вида первого уравнения системы вместо sin получится cos, и в итоге решение задачи имеет вид

$$\lambda_k = -\frac{\pi^2}{l^2}\left(k + \frac{1}{2}\right)^2, \quad y_k(x) = \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}, \qquad k \in \mathbb{N}_0. \tag{33}$$

Наконец, при решении задачи (22), (26) рассуждения и вычисления близки к задаче (22), (23), но, во-первых, так же как в (22), (25) вместо sin получится cos, и во-вторых, при $\lambda = 0$ имеется нетривиальное решение $u = \mathrm{const}$ (можно считать $u = 1$), так что $\lambda = 0$ тоже является собственным значением этой задачи, В итоге решение имеет вид

$$\lambda_0 = 0, \quad u_0 = 1; \quad \lambda_k = -\frac{\pi^2 k^2}{l^2}, \quad y_k(x) = \cos\frac{\pi k x}{l}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{34}$$

Каждый из наборов функций (29), (31), (33) и (34), получающихся при решении 4 рассмотренных задач Штурма—Лиувилля, образует ортогональную систему функций (в евклидовом пространстве $L_2(0, l)$) в смысле, указанном в § 7 (это несложно проверить непосредственным расчетом). Более того, все эти системы — полные, т. е. по ним можно разложить любую функцию u (как известно из теории тригонометрических рядов Фурье; точный смысл разложения и требования на u мы здесь не приводим, частично это пояснено в § 7). Оба этих факта верны и для всех задач Штурма—Лиувилля определенного класса (по поводу ортогональности см. § 3,4). Остается лишь отметить вид формул для разложения произвольной функции u по всем 4 системам функций. Аналогично тому, как это делалось в § 7 для системы (29) (при $l = \pi$), искомые разложения имеют вид:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi k x}{l}, \tag{35}$$

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}, \tag{36}$$

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}, \tag{37}$$

$$u(x) = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos \frac{\pi k x}{l}, \tag{38}$$

где для коэффициентов этих разложений верны представления

$$a_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l u(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx, \tag{39}$$

$$b_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l u(x) \sin \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l} dx, \tag{40}$$

$$c_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l u(x) \cos \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l} dx, \tag{41}$$

$$d_0 = \frac{1}{l}\int\limits_0^l u(x)dx, \quad d_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l u(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{42}$$

§ 9. Задачи

В данном параграфе мы разберем решение типичных задач по материалу § 8 и приведем несколько задач каждого типа для самостоятельного решения.

Примеры решения типичных задач

Пример 1. Найти ФСР, ФМР и общее решение системы

$$x_1' = 2x_1 + x_2, \quad x_2' = x_1 + 3x_2 - x_3, \quad x_3' = x_1 + 2x_2 + x_3. \tag{1}$$

Решить задачу Коши

$$x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 0, \quad x_3(1) = 2. \tag{2}$$

Решение. Запишем систему (1) в векторном виде $x' = Ax$, где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные числа матрицы A:

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 = (2 - \lambda)^3,$$

т. е. все три собственные числа равны 2, или, другими словами, имеется одно собственное число кратности 3. Найдем собственные векторы, соответствующие этому собственному числу, обозначив их через z:

$$0 = (A - 2E)z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},$$

откуда $z_2 = 0$, $z_1 = z_3$. Таким образом, найден собственный вектор $z = (1, 0, 1)^*$, а остальные получаются его растяжением. Другими словами, собственный вектор только один, значит, жорданова клетка одна размера 3, имеется только одна корневая цепочка векторов, которую и «возглавляет» этот единственный собственный вектор. Найдем всю цепочку. Первый присоединенный вектор y ищется из системы $(A - 2E)y = z$, т. е.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

откуда $y_2 = 1$, $y_1 - y_3 = -1$. Присоединенный вектор находится неоднозначно, поэтому мы можем выбрать удобное нам решение, например $y_1 = 0$, $y_3 = 1$. В итоге $y = (0, 1, 1)^*$. Наконец, второй присоединенный вектор x находится из системы $(A - 2E)x = y$, т. е.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

откуда $x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 1$. Возьмем $x = (1, 0, 0)^*$. В итоге мы можем выписать матрицу перехода T к жордановой форме, обратную к ней, и саму жорданову форму J матрицы A:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Благодаря построенному жорданову разложению $A = TJT^{-1}$ можно легко найти $e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1}$:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \tag{3}$$

$$= \frac{e^{2t}}{2} \begin{bmatrix} t^2+2 & t^2+2t & -t^2 \\ 2t & 2t+2 & -2t \\ t^2+2t & t^2+4t & 2-2t-t^2 \end{bmatrix}.$$

Это и есть искомая ФМР. ФСР есть набор столбцов этой матрицы, т. е.

$$z^1 = \frac{e^{2t}}{2} \begin{bmatrix} t^2+2 \\ 2t \\ t^2+2t \end{bmatrix}, \; z^2 = \frac{e^{2t}}{2} \begin{bmatrix} t^2+2t \\ 2t+2 \\ t^2+4t \end{bmatrix}, \; z^3 = \frac{e^{2t}}{2} \begin{bmatrix} -t^2 \\ -2t \\ 2-2t-t^2 \end{bmatrix}.$$

Общее решение системы (1) имеет вид

$$x(t) = e^{tA} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_1 z^1 + c_2 z^2 + c_3 z^3 =$$

$$= \frac{e^{2t}}{2} \begin{bmatrix} 2c_1 + 2c_2 t + (c_1 + c_2 - c_3)t^2 \\ 2c_2 + 2(c_1 + c_2 - c_3)t \\ 2c_3 + 2(c_1 + 2c_2 - c_3)t + (c_1 - c_3)t^2 \end{bmatrix},$$

где c_i — произвольные постоянные. Наконец, для нахождения решения задачи Коши (1), (2) запишем данные (2) в векторном виде $x(1) = a$, где $a = (1, 0, 2)^*$, и подставляя общее решение (1) $x = e^{tA}c$ в условие (2), получаем $e^A c = a$, откуда $c = e^{-A}a$, и в итоге искомое решение имеет вид $x(t) = e^{(t-1)A}a$, т. е.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{e^{2t-2}}{2} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} (t-1)^2 + 2 & \text{неважно} & -(t-1)^2 \\ 2(t-1) & \text{неважно} & -2(t-1) \\ (t-1)^2 + 2(t-1) & \text{неважно} & 2 - 2(t-1) - (t-1)^2 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{e^{2t-2}}{2} \begin{bmatrix} 1 + 2t - t^2 \\ 2 - 2t \\ 5 - t^2 \end{bmatrix}.$$

Отметим простое правило, позволяющее проверить ответ (3) и все порожденные им формулы на верность «в первом приближении»: все фигурирующие в ответе функции представляют собой линейные комбинации произведений экспонент на полиномы, причем коэффициенты при t в показателях экспонент совпадают с собственными числами матрицы A (в данной задаче это только 2), а степени полиномов не выше (и кое-где достигают) порядка жордановых клеток, соответствующих тому собственному числу, которое вошло в виде показателя в экспоненту, множителем при которой является данный полином (и точно не выше кратности этого собственного числа). Если в какой-либо задаче такого типа эти черты не наблюдаются в ответе, значит он заведомо неверен, и решение следует тщательно проверить. Кроме того, не составляет труда непосредственно убедиться в выполнении начальных условий в полученном решении задачи Коши.

Пример 2. Найти e^{tA} для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Составляя характеристический полином матрицы A, обнаруживаем, что он имеет вид $(\lambda - 1)^3$. Значит, имеется собственное число $\lambda = 1$ кратности 3. Ищем собственные векторы z:

$$0 = (A - E)z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},$$

откуда $z_2 = 0$, а остальные компоненты произвольны. Поскольку 2 компоненты могут быть любыми, то искомые собственные векторы образуют двумерное пространство. В этом пространстве базис можно выбрать произвольно (т. е. выбрать произвольно 2 линейно независимых собственных вектора, соблюдая лишь требование $z_2 = 0$). Поскольку матрица трехмерна, а собственных векторов нашлось только 2 независимых, то среди всех собственных векторов имеется ровно один (с точностью до растяжения), у которого имеется присоединенный, который образует вместе с ним двумерную корневую цепочку (а второй, независимый от него, образует одномерную цепочку). Запишем систему для предполагаемого присоединенного вектора y, в правой части которой стоит собственный вектор в общем виде:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix}.$$

Отсюда видно, что тот собственный вектор, к которому имеется присоединенный, должен обладать свойством $a = b$. Положим, например, $a = b = 1$. Тогда у присоединенного вектора $y_2 = 1$, а остальные компоненты произвольны. В итоге, обозначая $y = z^3$, z^2 — собственный вектор, к которому присоединен z^3, и z^1 — второй собственный вектор, независимый от первого, и выбирая все компоненты (на которые нет ограничений) с целью максимальной простоты, получаем жорданов базис

$$z^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad z^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad z^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь, повторимся, первый вектор есть собственный, образующий одномерную цепочку, второй — собственный, возглавляющий двумерную цепочку, а третий — присоединенный к нему, замыкающий эту цепочку. Соответственно, матрица перехода, обратная к ней, жорданова форма, матричная экспонента от нее и искомая матричная экспонента от исходной матрицы имеют вид:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}, \quad e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & te^t & e^t \end{bmatrix}.$$

Замечание. В Примере 2 $A = B + E$, где B — нильпотентная матрица, а именно $B^2 = 0$. Поэтому $e^{tB} = E + tB$. Соответственно $e^{tA} = e^t(E + tB)$, что позволяет получить тот же ответ практически мгновенно.

Пример 3. Найти e^{tA} для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -8 \\ 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Составляя характеристический полином матрицы A, обнаруживаем, что он имеет вид $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5$. Анализ коэффициентов полинома показывает, что имеется корень $\lambda = 1$. Деля полином на $\lambda - 1$, получаем полином $\lambda^2 - 2\lambda + 5$, корни которого $1 \pm 2i$. Итак, $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$, $\lambda_3 = 1$. Поскольку все собственные числа различны, то все жордановы клетки одномерны, и имеется 3 собственных вектора. Ищем первый из них:

$$0 = (A - (1 + 2i)E)z = \begin{bmatrix} 2 - 2i & -4 & -8 \\ 2 & -2 - 2i & -4 \\ 0 & 0 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},$$

откуда $z_3 = 0$, $z_1 = (1+i)z_2$. Например, можно взять $z_2 = 1$, $z_1 = 1+i$. Тем самым, первый собственный вектор имеет вид $z^1 = (1+i, 1, 0)^*$. Второй собственный вектор автоматически будет комплексно-сопряженным к первому:
$z^2 = (1-i, 1, 0)^*$. Наконец, аналогично находим третий вектор: $z^3 = (0, 2, -1)^*$. В итоге, матрица перехода, обратная к ней, жорданова форма, матричная экспонента от нее и искомая матричная экспонента от исходной матрицы имеют вид:

$$T = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -i & 1+i & 2+2i \\ i & 1-i & 2-2i \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 & 0 \\ 0 & 1-2i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{(1+2i)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1-2i)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix},$$

$$e^{tA} = e^t \begin{bmatrix} \cos 2t + \sin 2t & -2\sin 2t & -4\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t - \sin 2t & 2(\cos 2t - \sin 2t - 1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример 4. Найти найти общее решение системы
$x' = Ax + f$ и решение задачи Коши $x(-1) = b$, где

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} et \\ 0 \\ 2e \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Составляя характеристический полином матрицы A, обнаруживаем, что он имеет вид $\lambda^3 - 3\lambda - 2$. Анализ коэффициентов полинома показывает, что имеется корень $\lambda = -1$. Деля полином на $\lambda + 1$, получаем полином

$\lambda^2 - \lambda - 2$, корни которого -1, 2. Итак, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$. Составляя, как обычно, систему для собственных векторов, соответствующих числу -1, получаем только одно линейно-независимое решение $z^1 = (1, 0, 0)^*$. Следовательно, жорданова клетка и корневая цепочка для $\lambda = -1$ — двумерные. Находим, как обычно, присоединенный вектор $z^2 = (2, 0, -1)^*$. Наконец, второй собственный вектор имеет вид $z^3 = (0, 1, 0)^*$. В итоге матрица перехода, обратная к ней, жорданова форма, матричная экспонента от нее и искомая матричная экспонента от исходной матрицы имеют вид:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}, \quad e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & -te^{-t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Общее решение системы имеет вид

$$x(t) = e^{tA}\left(c + \int\limits_0^t e^{-sA} f(s) ds\right) = e^{tA}\left(a + \int\limits_{-1}^t e^{-sA} f(s) ds\right),$$

где $c \in \mathbb{R}^3$ произволен, а связанный с ним постоянный вектор a введен как его заменитель, чтобы нижний предел в интеграле был удобен при подстановке начальных данных. А именно, при решении задачи Коши получаем

$b = x(-1) = e^{-A}a$, откуда $a = e^{A}b$, и в итоге

$$x(t) = e^{(t+1)A}b + \int\limits_{-1}^{t} e^{(t-s)A} f(s)ds =$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-1-t} + e(t-3) + 2e^{-t}(t+3) \\ e^{2+2t} \\ 2(e - e^{-t}) \end{bmatrix}.$$

Пример 5. Найти общее решение уравнений:

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \tag{4}$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}\left(\frac{1}{x} + \ln x\right) \tag{5}$$

и ФСР уравнения (4). Решить задачу Коши для уравнения (5) с начальными данными

$$y(2) = 0, \qquad y'(2) = e^{4}. \tag{6}$$

Решение. Составим характеристический полином уравнения (4): $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Его корни равны 1 и 2, значит, ФСР (4) состоит из функций $y_1(x) = e^{x}$, $y_2(x) = e^{2x}$, и поэтому общее решение уравнения (4) имеет вид $y(x) = C_1e^{x} + C_2e^{2x}$. Решение (5) теперь ищем в виде $y(x) = C_1(x)e^{x} + C_2(x)e^{2x}$, и для величин C_i получим систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} e^{x} & e^{2x} \\ e^{x} & 2e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2x}\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right) \end{bmatrix},$$

откуда

$$\begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{x}\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right) \\ \left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right) \end{bmatrix}.$$

Вычисляем

$$C_2 = \int \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) dx = \ln x + x \ln x - x + b,$$

$$C_1 = -\int \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) e^x dx = -e^x \ln x + a,$$

где a и b — произвольные постоянные. В итоге общее решение (5) принимает вид $y(x) = ae^x + be^{2x} + e^{2x}x(\ln x - 1)$. Для решения задачи Коши (5), (6) подставим найденное общее решение (5) в данные (6), предварительно подсчитав $y'(x) = ae^x + 2be^{2x} + e^{2x}(2x \ln x - 2x + \ln x)$, получим:

$$0 = y(2) = ae^2 + be^4 + e^4 2(\ln 2 - 1),$$

$$e^4 = y'(2) = ae^2 + b2e^4 + e^4(4 \ln 2 - 4 + \ln 2),$$

т. е.

$$\begin{bmatrix} e^2 & e^4 \\ e^2 & 2e^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = e^4(1 - \ln 2) \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

откуда

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = e^4(1 - \ln 2) \cdot e^{-4} \begin{bmatrix} 2e^2 & -e^2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = (1 - \ln 2) \begin{bmatrix} -e^2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

т. е. $y(x) = (1 - \ln 2)(3e^{2x} - e^{x+2}) + e^{2x}x(\ln x - 1)$.

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$y^{IV} - 7y''' + 18y'' - 20y' + 8y = 12(5x^2 + 10x - 1)e^{2x} + (8x - 20). \tag{7}$$

Решение. Составим характеристический полином однородного уравнения: $\lambda^4 - 7\lambda^3 + 18\lambda^2 - 20\lambda + 8$. Видно, что $\lambda = 1$ является его корнем, разделив полином на $\lambda - 1$, получим полином $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3$. Итак, найдены

все корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ (т. е. корень $\lambda = 2$ кратности 3), $\lambda_4 = 1$. Следовательно, ФСР однородного аналога уравнения (7) состоит из функций $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$, $y_3(x) = x^2e^{2x}$, $y_4(x) = e^x$, а его общее решение имеет вид $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3x^2e^{2x} + C_4e^x$. Осталось найти частное решение неоднородного уравнения (7). Представим правую часть (7) в виде суммы двух функций:
$f_1(x) = 12(5x^2 + 10x - 1)e^{2x}$ и $f_2(x) = 8x - 20$. Обе эти функции имеют вид $Q(x)e^{\gamma x}$, где Q — полином. В первой функции $\gamma = 2$ является корнем кратности 3 характеристического полинома, а во второй $\gamma = 0$ — корнем кратности 0 (т. е. не корнем). Следовательно, частные решения уравнений, получающихся подстановкой f_1 или f_2 в правую часть (7), следует искать в виде $z_1(x) = x^3P_2(x)e^{2x}$ и $z_2(x) = x^0R_1(x)e^{0x}$ соответственно, где P_2 и R_1 — полиномы степени 2 и 1 соответственно, после чего искомое частное решение можно взять в виде $y = z_1 + z_2$. Запишем это более явно:

$$z_1(x) = x^3(ax^2 + bx + c)e^{2x}, \qquad z_2(x) = (dx + g), \tag{8}$$

где a, b, c, d, g — неизвестные коэффициенты. Подставляя эти функции в левую часть (7) и приравнивая к требуемым функциям f_i, получим:

$$12(5x^2 + 10x - 1)e^{2x} = z_1^{IV} - 7z_1''' + 18z_1'' - 20z_1' + 8z_1 =$$

$$= e^{2x}(60ax^2 + (120a + 24b)x + (24b + 6c)),$$

$8x - 20 = z_2^{IV} - 7z_2''' + 18z_2'' - 20z_2' + 8z_2 = 8dx + (8g - 20d)$, откуда $a = 1$, $b = 0$, $c = -2$, $d = 1$, $g = 0$. Итак,
$z_1(x) = x^3(x^2 - 2)e^{2x}$, $z_2(x) = x$, т. е. частное решение (7)

найдено в виде $y(x) = (x^5 - 2x^3)e^{2x} + x$, и окончательно общее решение (7) принимает вид

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3x^2e^{2x} + C_4e^x + (x^5 - 2x^3)e^{2x} + x.$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 4y'' + 5y' = 0. \tag{9}$$

Решение. Составим характеристический полином уравнения (9): $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda$. Сразу виден корень $\lambda = 0$, а после деления на λ получаем полином $\lambda^2 - 4\lambda + 5$, корни которого равны $2 \pm i$. Следовательно, ФСР уравнения (9) состоит из функций $y_1(x) = e^{(2+i)x}$, $y_1(x) = e^{(2-i)x}$ и $y_3(x) = e^{0x} = 1$, а общее решение (9) представляется в виде
$y = C_1e^{(2+i)x} + C_2e^{(2-i)x} + C_3 \cdot 1$, где C_k — произвольные постоянные. Этот же ответ можно записать, используя только «вещественные функции»: $y = D_1e^{2x}\cos x + D_2e^{2x}\sin x + D_3$, где D_k — произвольные постоянные.

Пример 8. Найти общее решение уравнения

$$y^{IV} + 2y'' + y = 24(\cos x - x\sin x). \tag{10}$$

Решение. Изучим характеристический полином однородного уравнения:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda + i)^2(\lambda - i)^2.$$

Таким образом, имеются два корня i и $-i$, оба кратности 2. Значит, ФСР однородного уравнения состоит из функций $y_1(x) = e^{ix}$, $y_2(x) = xe^{ix}$, $y_3(x) = e^{-ix}$, $y_4(x) = xe^{-ix}$, а общее решение однородного уравнения имеет вид

$y(x) = C_1e^{ix} + C_2xe^{ix} + C_3e^{-ix} + C_4xe^{-ix}$, где C_k — произвольные постоянные. Этот же ответ можно записать так: $y(x) = D_1 \cos x + D_2x \cos x + D_3 \sin x + D_4x \sin x$, где D_k — произвольные постоянные. Правая часть (10) есть сумма двух функций: $f_1(x) = 24 \cos x = \mathrm{Re}(24e^{ix})$ и $f_2(x) = -24x \sin x = \mathrm{Im}(-24xe^{ix})$. Значит, частное решение (10) можно построить в виде $y = \mathrm{Re} z_1 + \mathrm{Im} z_2$, где z_1 — частное решение с правой частью $24e^{ix}$, а z_2 — частное решение с правой частью $-24xe^{ix}$. Обе эти функции, играющие роль правых частей, имеют вид $Q(x)e^{\gamma x}$, где Q — полином, причем $\gamma = i$ есть корень кратности 2 характеристического полинома. Значит, частные решения следует искать в виде $z_1(x) = x^2P_0(x)e^{ix}$, $z_2(x) = x^2R_1(x)e^{ix}$, где P_0 и R_1 — некоторые полиномы степени 0 и 1 соответственно. Другими словами,

$$z_1(x) = ax^2e^{ix}, \qquad z_2(x) = x^2(bx + c)e^{ix},$$

где a, b, c — неизвестные коэффициенты. Подставляя эти функции в левую часть (10) и приравнивая к требуемым функциям, получим:

$$24e^{ix} = z_1^{IV} + 2z_1'' + z_1 = -8ae^{ix},$$

$$-24xe^{ix} = z_2^{IV} + 2z_2'' + z_2 = e^{ix}(-24bx + (24bi - 8c)),$$

откуда $a = -3$, $b = 1$, $c = 3i$. В итоге частное решение (10) принимает вид

$$y = \mathrm{Re}(-3x^2e^{ix}) + \mathrm{Im}(x^2(x + 3i)e^{ix}) = x^3 \sin x,$$

а искомое общее решение дается формулой

$$y(x) = D_1 \cos x + D_2x \cos x + D_3 \sin x + D_4x \sin x + x^3 \sin x.$$

Задачи

Задача 1. Найти общее решение систем:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{11}$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \tag{12}$$

решить задачи Коши (11), (13) и (12), (13) с данными

$$x(\alpha) = b, \tag{13}$$

где $x = x(t)$ — неизвестная вектор-функция (размерность ее совпадает с размером матрицы A), а матрица A, вектор правой части f, начальный момент α и начальный вектор b имеют вид:

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} 4e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha = 0$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

б) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} 2e^{3t} \\ 5e^{-t} \end{bmatrix}$, $\alpha = 1$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

в) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha = -1$, $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

г) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha = 0$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

д) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$, $\alpha = 0$, $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Указание. Одно из собственных чисел матрицы A равно 2.

е) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha = 1$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Указание. Одно из собственных чисел матрицы A равно 2.

ж) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} t \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha = 0$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

з) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{bmatrix}$, $\alpha = 0$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

и) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $f(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$, $\alpha = -2$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Задача 2. Найти общее решение уравнений, а если даны начальные данные, то и соответствующих задач Коши:

а) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2e$.

б) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

в) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

г) $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

д) $y''' - y' = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.

е) $y^{IV} + y'' = 2\cos x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$.

ж) $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.

з) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$.

и) $y'' + y = x \sin x$.

к) $y^{IV} - 2y''' - 10y'' + 16y' + 40y =$
$= 52e^{-2x} - 20e^{3x}\cos x + 48\cos 2x - 48e^{3x}\sin x + 96\sin 2x$.

Указание. Корнем характеристического полинома кратности 2 является $\lambda = -2$.

Список литературы

Обязательная литература

1. *Бибиков Ю.Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Высшая школа, 1991.
2. *Мамонтов А.Е.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие. — Новосибирск: НГПУ, 2010. — Ч. 1: Элементы общей теории.
3. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1982.
4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
5. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. — М.: ИЛ, 1962.

Дополнительная литература

6. *Годунов С.К.* Квадратичные функции Ляпунова. — Новосибирск: НГУ, 1982.
7. *Годунов С.К.* Матричная экспонента, матрица Грина и условие Лопатинского. — Новосибирск: НГУ, 1983.
8. *Годунов С.К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: учеб. пособие. — Новосибирск: НГУ, 1994. — Т. 1: Краевые задачи.

9. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во МГУ, 2002.
10. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1959.
11. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Москва, Ижевск: РХД, 2000.
12. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967.
13. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1976.
14. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969.
15. *Блохин А.М.* Равномерная ограниченность матричной экспоненты: метод. указания к курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения». — Новосибирск: НГУ, 1986.
16. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
17. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — М., Л.: Гостехиздат, 1949.
18. *Семенко Е.В.* Дифференциальные уравнения, курс лекций и практических занятий: учеб. пособие. — Новосибирск: НГПУ, 2007.

19. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.

20. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964.

21. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: УРСС, 2002.

22. *Эрроусмат Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986.

Задачники

23. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / под ред. С.К. Годунова. — Новосибирск: НГУ, 1986.

24. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва, Ижевск: РХД, 2000.

Список аббревиатур и обозначений

ИП	инвариантное подпространство
МГ	матрица Грина
ММ	матрица монодромии
ОДУ	обыкновенное дифференциальное уравнение
ОПР	ω-периодическое решение (строго говоря, аббревиатура некорректна, т. к. ω здесь означает величину периода, но в рамках § 6, где эта аббревиатура используется, другие периоды почти не встречаются, и недоразумений не возникает)
ОРНУ	общее решение неоднородного уравнения
ОРОУ	общее решение однородного уравнения
ПВ	присоединенный вектор
СВ	собственный вектор
СЗ	собственное значение
СФ	собственная функция
СЧ	собственное число
УЛ	условия Лопатинского
ФГ	функция Грина
ФМР	фундаментальная матрица решений
ФСР	фундаментальная система решений
ХП	характеристический показатель
ЧРНУ	частное решение неоднородного уравнения

$:=$, $=:$	равенство по определению (обозначению) — двоеточие со стороны определяемого символа

$\lvert\cdot\rvert$	норма конечномерного объекта (вектора из $\mathbb{R}^n$, матрицы и т. п.) — такое обозначение полезно в частности для избежания путаницы при нормировке «двухступенчатых» объектов (например, матричных функций)
$\lVert\cdot\rVert$	норма бесконечномерного объекта (функции и т. п.)
$(\cdot)^*$	транспонирование матрицы (вообще говоря, прямоугольной, включая векторы)
$\subset$, $\supset$	вложения множеств (включая совпадение)
$\nearrow$, $\searrow$	возрастание или убывание величины (строгое или нестрогое в зависимости от контекста)
dim	размерность (вектора или матрицы)
$L_\infty(G)$	пространство ограниченных измеримых (по Лебегу) на G функций с нормой $\lVert u\rVert_{L_\infty(G)} = \operatorname*{ess\,sup}_G \lvert u\rvert$
$\mathbb{R}^+$	$[0, +\infty)$ или $(0, +\infty)$ в зависимости от контекста

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Мамонтов Александр Евгеньевич

ЛЕКЦИИ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

В ТРЕХ ЧАСТЯХ

ЧАСТЬ 2

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

В авторской редакции

Компьютерная верстка — *А.Е. Мамонтов*

Подписано в печать 04.05.2011. Формат бумаги 60 × 84/16.
Печать RISO. Уч.-изд. л. 11,81. Усл. печ. л. 10,99.
Тираж 100 экз.
Заказ № 54.

Педуниверситет, 630126, Новосибирск, ул. Вилюйская, 28