ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОУ ВПО «НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Е. Мамонтов

ЛЕКЦИИ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

ЧАСТЬ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

Утверждено Редакционно-издательским советом НГПУ
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК 2010

УДК 517.91
ББК В161.61
М226

Печатается по решению
Редакционно-издательского
совета НГПУ

Р е ц е н з е н т ы :
доктор физико-математических наук,
профессор Новосибирского государственного
педагогического университета
В.Л. Селиванов;
доктор физико-математических наук,
профессор Новосибирского государственного
педагогического университета
Е.В. Семенко;
доктор физико-математических наук, профессор
Новосибирского государственного университета
В.Н. Старовойтов

Мамонтов, А. Е.

М226 Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учебное пособие / А. Е. Мамонтов: в 3 ч. — Новосибирск: Изд. НГПУ, 2010. — ч. 1: Элементы общей теории. — 97 с.

В учебном пособии изложены положения, составляющие основу теории обыкновенных дифференциальных уравнений: понятие решений, их существование, единственность, зависимость от параметров. Также (в § 3) определенное внимание уделяется «явному» решению некоторых классов уравнений. Пособие предназначено для углубленного изучения курса «Дифференциальные уравнения» студентами, обучающимися на математическом факультете Новосибирского государственного педагогического университета.

УДК 517.91
ББК В161.61

Предисловие

Учебное пособие предназначено для студентов математического факультета Новосибирского государственного педагогического университета, желающих изучить обязательный курс «Дифференциальные уравнения» в расширенном объеме. Вниманию читателей предлагаются основные понятия и результаты, составляющие фундамент теории обыкновенных дифференциальных уравнений: понятия о решениях, теоремы об их существовании, единственности, зависимости от параметров. Описанный материал излагается в виде логически неразрывного текста в §§ 1, 2, 4, 5. Также (в § 3, стоящем несколько особняком и временно прерывающем главную нить курса) кратко рассмотрены наиболее востребованные приемы «явного» нахождения решений некоторых классов уравнений. При первом чтении § 3 можно пропустить без существенного ущерба для логической структуры курса.

Важную роль играют упражнения, в большом количестве включенные в текст. Читателю настоятельно рекомендуется прорешивать их «по горячим следам», что гарантирует усвоение материала и послужит тестом. Более того, нередко эти упражнения восполняют логическую ткань, т. е. без их решения не все положения будут строго доказаны.

В квадратных скобках посередине текста вынесены замечания, носящие роль комментариев (расширенных или побочных пояснений). Лексически эти фрагменты прерывают основной текст (т. е. для связного чтения их нужно «не замечать»), но все же они нужны в качестве пояснений. Другими словами, эти фрагменты нужно воспринимать так, как будто они вынесены на поля.

В тексте встречаются отдельно рубрицированные «замечания для преподавателя» — они могут быть опущены при чтении обучающимися, но полезны для преподавателя, который будет использовать пособие, например, при чтении лекций — они помогают лучше понять логику курса и указывают направление возможных совершенствований (расширений) курса. Впрочем, освоение этих замечаний обучающимися можно только приветствовать.

Аналогичную роль играют «обоснования для преподавателя» — они в крайне сжатой форме дают доказательство некоторых положений, предлагаемых читателю в качестве упражнений.

Наиболее употребительные (ключевые) термины используются в виде аббревиатур, список которых для удобства приведен в конце. Там же приведен список математических обозначений, встречающихся в тексте, но не относящихся к самым употребительным (и/или не понимаемым однозначно в литературе).

Символ $\square$ означает конец доказательства, формулировки утверждения, замечания и т. п. (там где это нужно во избежание путаницы).

Нумерация формул независимо ведется в каждом параграфе. При ссылке на часть формулы используются индексы, например $(2)_3$ означает 3-ю часть формулы (2) (частями формулы считаются фрагменты, разделенные типографски пробелом, а с логических позиций — связкой «и»).

Данное пособие не может совершенно заменить глубокого изучения предмета, которое требует самостоятельных упражнений и чтения дополнительной литературы, например, той, список которой приведен в конце пособия. Однако автор попытался изложить основные положения теории в достаточно сжатой форме, пригодной для лекционного курса. В связи с этим следует отметить, что при чтении лекционного курса по данному пособию на него уходит около 10 лекций.

Планируется издание еще 2 частей (томов), продолжающих данное пособие и завершающих тем самым цикл лекций по предмету «обыкновенные дифференциальные уравнения»: часть 2 (линейные уравнения), часть 3 (дальнейшая теория нелинейных уравнений, уравнения в частных производных первого порядка).

§ 1. Введение

Дифференциальное уравнение (ДУ) — это соотношение вида

$$F\left(y, u(y), \frac{\partial u_1}{\partial y_1}, \frac{\partial u_1}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial y_k}, \text{высшие производные}\right) = 0, \tag{1}$$

где $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ — независимые переменные, а $u = u(y)$ — неизвестные функции[1], $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Таким образом, в (1) имеется n неизвестных, так что требуется n уравнений, т. е. $F = (F_1, \ldots, F_n)$, так что (1) есть, вообще говоря, система из n уравнений. Если неизвестная функция одна ($n = 1$), то уравнение (1) — скалярное (одно уравнение). Итак, функция(и) F задана(ы), а u ищется. Если $k = 1$, то (1) называется ОДУ, а иначе — УЧП. Второй случай является предметом особого курса УМФ, изложенного в одноименной серии учебных пособий. В настоящей серии пособий (состоящей из 3 частей-томов) мы будем изучать только ОДУ, за исключением последнего параграфа последней части (тома), в котором начнем изучать некоторые частные случаи УЧП.

Пример. $\dfrac{\partial u}{\partial y_1} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0$ — это УЧП.

---

[1]Неизвестные величины u могут быть вещественными или комплексными, что несущественно, т. к. этот момент относится лишь к форме записи уравнений: всякую комплексную запись можно превратить в вещественную, отделив вещественную и мнимую части (но при этом, конечно, удвоив число уравнений и неизвестных), и наоборот, в некоторых случаях удобно переходить к комплексной записи.

Пример. $\dfrac{du}{dy}\cdot\dfrac{d^2v}{dy^2}=uv$; $\dfrac{dv}{dy}u^3=2$. Это система из 2 ОДУ для 2 неизвестных функций от независимого переменного y.

Если $k=1$ (ОДУ), то употребляется «прямой» значок d/dy.

Пример. $\dfrac{du}{dy}=\displaystyle\int\limits_0^{u(y)}\exp(\sin z)dz$ — это ОДУ, т. к. оно имеет вид $\dfrac{du}{dy}=f(u)$, где $f(s)=\displaystyle\int\limits_0^{s}\exp(\sin z)dz$.

Пример. $\dfrac{du}{dy}=u(u(y))$ при $n=1$ — это не ДУ, а функционально-дифференциальное уравнение.

Пример.

$$\frac{du}{dy}=\int\limits_0^{y}u(z)dz \tag{2}$$

— это не ДУ, а интегро-дифференциальное уравнение, такие уравнения мы изучать не будем. Впрочем, конкретно уравнение (2) легко сводится к ОДУ:

Упражнение. Свести (2) к ОДУ. □

Но вообще интегральные уравнения — более сложный объект (он частично изучается в курсе функционального анализа), хотя, как мы увидим ниже, именно с их помощью получаются некоторые результаты для ОДУ.

ДУ возникают как из внутриматематических потребностей (например, в дифференциальной геометрии), так и в приложениях (исторически впервые, и сейчас в основном — в физике). Простейшее ДУ — это «основная задача дифференциального исчисления» о восстановлении функции по ее производной: $\dfrac{du}{dy} = h(y)$. Как известно из анализа, ее решение имеет вид $u(y) = \alpha + \int\limits_{y_0}^{y} h(s)ds$. Более общие ДУ для своего решения требуют специальных методов. Впрочем, как мы увидим далее, практически все методы решения ОДУ «в явном виде» по сути сводятся к указанному тривиальному случаю.

В приложениях чаще всего ОДУ возникают при описании процессов, развивающихся во времени, так что роль независимого переменного играет обычно время t.

[таким образом, смысл ОДУ в таких приложениях состоит в описании изменения параметров системы с течением времени]

Поэтому удобно при построении общей теории ОДУ обозначать независимую переменную через t (и называть ее временем со всеми вытекающими терминологическими последствиями), а неизвестную(ые) функцию(ии) — через $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом, общий вид ОДУ (системы ОДУ) следующий:

$$F\left(t, x(t); \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{\alpha_1}x_1}{dt^{\alpha_1}}; \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{d^{\alpha_2}x_2}{dt^{\alpha_2}}; \ldots, \frac{d^{\alpha_n}x_n}{dt^{\alpha_n}}\right) = 0, \tag{3}$$

где $F = (F_1, \ldots, F_n)$ — т. е. это система из n ОДУ для n функций x, а если $n = 1$, то одно ОДУ для 1 функции x. При этом $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, а x вообще говоря комплекснозначная (это для удобства, т. к. тогда некоторые системы более компактно записываются).

Говорят, что система (3) имеет *порядок* α_m по функции x_m. Производные $\dfrac{d^{\alpha_m} x_m}{dt^{\alpha_m}}$ называется старшими, а остальные (включая сами $x_m = \dfrac{d^0 x_m}{dt^0}$) — младшими. Если все $\alpha_m = \alpha$, то просто говорят, что порядок системы равен α.

$\left[\text{Правда, нередко порядком системы называют число } \sum \alpha_m, \text{ что тоже естественно, как станет ясно далее.}\right]$

Вопрос о необходимости изучения ОДУ и их применений мы будем считать достаточно обоснованным другими дисциплинами (дифференциальная геометрия, математический анализ, теоретическая механика, и т. д.), и он частично покрывается в ходе практических занятий при решении задач (например, из задачника [22]). В настоящем курсе мы будем заниматься исключительно математическим изучением систем вида (3), что подразумевает ответ на следующие вопросы:

1. что значит «решить» уравнение (систему) (3);

2. как это делать;

3. какие свойства имеют эти решения, как их исследовать.

Вопрос 1 не так очевиден, как кажется — см. далее. Сразу заметим, что любую систему (3) можно свести к системе первого порядка, обозначая младшие производные как новые неизвестные функции. Проще всего эту процедуру пояснить на примере:

Пример.

$$x''' + y' = 1, \qquad y''x = 2 \tag{4}$$

(здесь и далее штрих обозначает производную по независимой переменной t) — это система 3-го порядка по x и 2-го по y. Обозначим: $a = x'$, $b = x''$, $z = y'$. Получим систему первого порядка:

$$x' = a, \quad y' = z, \quad a' = b, \quad b' + z = 1, \quad z'x = 2 \qquad (5)$$

из 5 уравнений для 5 неизвестных. Легко понять, что (4) и (5) эквивалентны в том смысле, что решение одной из них (после соответствующего переобозначения) является решением другой. При этом следует лишь оговаривать вопрос о гладкости решений — это мы будем делать далее, когда столкнемся с ОДУ высшего порядка (т. е. не 1-го). □

Но теперь ясно, что достаточно изучать лишь ОДУ первого порядка, а другие могут потребоваться лишь для удобства обозначений (такая ситуация у нас будет иногда возникать). А сейчас ограничимся ОДУ первого порядка:

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \qquad (6)$$

$\dim x = \dim F = n$.

Изучение уравнения (системы) (6) неудобно в силу того, что оно не разрешено относительно производных dx/dt. Как известно из анализа (из теоремы о неявной функции), при определенных условиях на F уравнение (6) можно разрешить относительно dx/dt и записать его в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad (7)$$

где $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ задана, а $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ — искомая. Говорят, что (7) есть ОДУ, разрешенное относительно производных

(ОДУ *нормального вида*). При переходе от (6) к (7), естественно, могут возникать сложности:

Пример. Уравнение $\exp(x') = 0$ не может быть записано в виде (7), и вообще не имеет решений, т. е. exp не имеет нулей даже в комплексной плоскости.

Пример. Уравнение $x'^2 + x^2 = 1$ при разрешении записывается в виде двух нормальных ОДУ $x' = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Следует решить каждое из них и затем истолковать результат. □

Замечание. При сведении (3) к (6) может возникнуть сложность, если (3) имеет 0 порядок по какой-то функции или части функций (т. е. это функционально-дифференциальное уравнение). Но тогда эти функции надо исключить по теореме о неявной функции.

Пример. $x' = y$, $xy = 1 \iff x' = 1/x$. Нужно найти x из получившегося ОДУ, а затем y из функционального уравнения. □

Но в любом случае, проблема перехода от (6) к (7) относится скорее к области математического анализа, чем к ДУ, и мы ей заниматься не будем. Впрочем, при решении ОДУ вида (6) могут возникать интересные с точки зрения ОДУ моменты, так что этот вопрос уместно изучать при решении задач (как это сделано например в [22]) и он слегка будет затронут в § 3. Но в остальной части курса мы будем иметь дело только с нормальными системами и уравнениями. Итак, рассмотрим ОДУ (систему ОДУ) (7). Запишем ее 1 раз в покомпонентном виде:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \quad \dots \quad \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n). \quad (7)$$

Понятие «решить (7)» (и вообще, любое ДУ) долгое время понималось как поиск «явной формулы» для решения (т. е. в виде элементарных функций, их первообразных, или специальных функций, и т. п.), без акцента на гладкости решения и интервале его определения. Однако современное состояние теории ОДУ и других разделов математики (и вообще естественных наук) показывает, что такой подход неудовлетворителен — хотя бы потому, что доля ОДУ, поддающихся такому «явному интегрированию», крайне мала (даже для простейшего ОДУ $x' = f(t)$ известно, что решение в элементарных функциях бывает редко, хотя здесь и есть «явная формула»).

Пример. Уравнение $x' = t^2 + x^2$, несмотря на свою крайнюю простоту, не имеет решений в элементарных функциях (и здесь даже «нет формулы»). $\square$

И хотя знать те классы ОДУ, для которых возможно «явное» построение решения, полезно (аналогично тому, как полезно уметь «считать интегралы», когда это возможно, хотя это возможно крайне редко),

[В связи с этим характерно звучат термины: «проинтегрировать ОДУ», «интеграл ОДУ» (устаревшие аналоги современных понятий «решить ОДУ», «решение ОДУ»), которые отражают прежние понятия о решении. Как понимать современные термины, мы сейчас изложим.]

и этот вопрос будет рассмотрен в § 3 (а также традиционно большое внимание ему уделяется при решении задач на практических занятиях), но не следует ожидать от этого подхода какой-либо универсальности. Как правило, под процессом решения (7) мы будем понимать совсем другие шаги.

Следует уточнить, какая функция $x = x(t)$ может называться решением (7).

Прежде всего отметим, что четкая формулировка понятия решения невозможна без указания множества, на котором оно определено,

[Хотя бы потому, что решение — это функция, а любая функция (согласно школьному определению) — это закон, сопоставляющий любому элементу некоторого *множества* (называемого областью определения этой функции) некоторый элемент другого множества (значений функции). Таким образом, говорить о функции без указания области ее определения — это абсурд по определению. Аналитические функции (более широко — элементарные) служат здесь «исключением» (вводящим в заблуждение) по указанным ниже причинам (и некоторым другим), но в случае ДУ такие вольности недопустимы.]

и вообще без указания множеств определения всех функций, участвующих в (7). Как будет ясно из дальнейшего, целесообразно жестко увязывать понятие решения с множеством его определения, и считать решения разными, если множества их определения различны, даже если на пересечении этих множеств решения совпадают.

[Чаще всего в конкретных ситуациях это означает, что если построены решения в виде элементарных функций, так что 2 решения имеют «одинаковую формулу», то надо еще уточнять, совпадают ли множества, на которых эти формулы написаны. Путаница, долгое время царившая в этом вопросе, была простительна, пока рассматривались решения в виде элементарных функций, т. к. аналитические функции однозначно продолжаются на более широкие интервалы.]

Пример. $x_1(t) = e^t$ на $(0{,}2)$ и $x_2(t) = e^t$ на $(1{,}3)$ — 2 разных решения уравнения $x' = x$. $\square$

При этом естественно в качестве множества определения любого решения брать открытый интервал (может быть, и бесконечный), т. к. это множество должно быть:

1. открытым, чтобы в любой точке имело смысл говорить о производной (двусторонней);

2. связным, чтобы решение не распалось на несвязные куски (в этом случае удобнее говорить о нескольких решениях) — см. предыдущий Пример.

Таким образом, решение (7) — это пара $(\varphi, (a, b))$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, φ определена на (a, b).

Замечание для преподавателя. В некоторых учебниках допускается включение концов отрезка в область определения решения, но это нецелесообразно ввиду того, что только усложняет изложение, а реального обобщения не дает (см. § 4).

Чтобы легче было понять дальнейшие рассуждения, полезно использовать геометрическую трактовку (7). В пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \{(t,x)\}$ в каждой точке (t,x), где определена f, можно рассмотреть вектор $f(t,x)$. Если построить в этом пространстве график решения (7) (он называется *интегральной кривой* системы (7)), то он состоит из точек вида $(t, x(t))$. При изменении $t \in (a,b)$ эта точка движется вдоль ИК. Касательная к ИК в точке $(t, x(t))$ имеет вид $(1, x'(t)) = (1, f(t, x(t)))$. Таким образом, ИК — это те и только те кривые в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, которые в каждой своей точке (t,x) имеют касательную, параллельную вектору $(1, f(t,x))$. На этой идее построен так наз. метод изоклин для приближенного построения ИК, который используется при изображении графиков решений конкретных ОДУ (см. например [22]). Например, при $n = 1$ наше построение означает следующее: в каждой точке ИК ее наклон α к оси t обладает свойством $\operatorname{tg}\alpha = f(t,x)$. Естественно предположить, что, взяв любую точку из множества определения f, мы можем провести через нее ИК. Эта идея будет строго обоснована далее. Пока нам не хватает строгой формулировки гладкости решений — это будет сделано ниже.

Теперь следует уточнить множество B, на котором определена f. Это множество естественно брать:

1. открытым (чтобы ИК можно было строить в окрестности любой точки из B),

2. связным (иначе можно рассматривать отдельно все связные куски — все равно ИК (как график непрерывной

функции) не может перескочить из одного куска в другой, так что на общности поиска решений это не скажется).

Таким образом, естественно считать, что B есть *область*.

Мы будем рассматривать только классические решения (7), т. е. такие, что сама x и ее x' непрерывны на (a, b). Тогда естественно потребовать, чтобы $f \in C(B)$. Далее это требование будет подразумеваться нами всегда. Итак, окончательно получаем

Определение. Пусть $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — область, $f \in C(B)$. Пара $(\varphi, (a, b))$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, φ определена на (a, b), называется решением (7), если $\varphi \in C(a, b)$, при каждом $t \in (a, b)$ точка $(t, \varphi(t)) \in B$ и существует $\varphi'(t)$, причем $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ (тогда автоматически $\varphi \in C^1(a, b)$). $\square$

Геометрически ясно, что (7) будет иметь много решений (что легко понять графически), т. к. если проводить ИК, начинающиеся из точек вида (t_0, x_0), где t_0 фиксировано, то будем получать разные ИК. Кроме того, изменение интервала определения решения будет давать другое решение, согласно нашему определению.

Пример. $x' = 0$. Решение: $x = \alpha = \text{const} \in \mathbb{R}^n$. Однако если выбрать какое-то t_0 и фиксировать значение x_0 решения в точке t_0: $x(t_0) = x_0$, то значение α определяется однозначно: $\alpha = x_0$, т. е. решение единственно с точностью до выбора интервала $(a, b) \ni t_0$. $\square$

Наличие «безликого» множества решений неудобно для работы с ними[2] — удобнее «занумеровать» их следующим образом: добавить к (7) дополнительные условия так, чтобы выделить единственное (в определенном смысле) решение, а затем уже, перебирая эти условия, работать с каждым решением отдельно (геометрически решение может быть одно (ИК), а кусков много — с этим неудобством разберемся позже).

Определение. *Задача* для (7) — это (7) с дополнительными условиями. □

Простейшую задачу мы по существу уже изобрели — это *задача Коши*: (7) с условиями вида (*данными Коши, начальными данными*):

$$x(t_0) = x_0. \tag{8}$$

С точки зрения приложений эта задача естественна: например, если (7) описывает изменение каких-то параметров x со временем t, то (8) означает, что в некоторый (начальный) момент времени значение параметров известно. Бывает необходимость изучать и другие задачи, об этом мы поговорим позже, а пока остановимся на задаче Коши. Естественно, эта задача имеет смысл при $(t_0, x_0) \in B$. Соответственно, решением задачи (7), (8) называется решение (7) (в смысле определения, данного выше) такое, что $t_0 \in (a, b)$, и выполнено (8).

Наша ближайшая задача — доказать существование решения задачи Коши (7), (8), а при определенных дополнитель-

[2]Пример — квадратное уравнение, лучше писать $x_1 = \dots$, $x_2 = \dots$, чем $x = -b/2 \pm \dots$

ных предположениях на f — и его единственность в определенном смысле.

Замечание. Нам надо уточнить понятие нормы вектора и матрицы (хотя матрицы нам понадобятся только в Части 2). В связи с тем, что в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, выбор конкретной нормы не имеет значения, если нас интересуют только оценки, а не точные величины. Например, для векторов можно применять $|x|_p = (\sum |x_i|^p)^{1/p}$, $p \in [1, +\infty)$, $|x|_\infty = \max |x_i|$. Чаще всего используют евклидову норму $|\cdot|_2$, но ее можно оценить, оценивая и любую другую. Матрицы тоже можно рассматривать как векторы, так что все сказанное касается и их, но чаще матрицы рассматривают как операторы над векторами. Например, если говорить о квадратных матрицах, то это операторы в $\mathbb{R}^n$, и тогда особенно важна *операторная норма* матрицы: $|A| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{|Ax|}{|x|}$. Соответственно, любая норма векторов порождает соответствующую ей норму матриц (*согласованную с ней*).

Пример. $|x|_2$ порождает $|A|_\sigma := \max \sigma_i(A)$, где $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}$ — сингулярные числа матрицы A.

Упражнение. Доказать. (Указание: A^*A симметрична, неотрицательно определена, а значит все ее СЧ неотрицательны, а СВ образуют ортогональный базис.) $\square$

Тогда уже не любая норма матриц (как векторов) согласована с какой-то нормой векторов. Ввиду эквивалентности всех норм матриц опять же неважно, какую норму оценивать (даже если она не операторная), но операторные нормы удобны наличием специфических свойств, таких как: $|Ax| \leqslant |A| \cdot |x|$, $|AB| \leqslant |A| \cdot |B|$. Поэтому далее будем считать, что рассматриваются нормы матриц, согласованные с нормами векторов. Укажем еще одно свойство (операторных) норм матриц: $|A| = |ABB^{-1}| \leqslant |AB| \cdot |B^{-1}|$, т. е. $|AB| \geqslant |A|/|B^{-1}|$. В итоге $|A|/|B^{-1}| \leqslant |AB| \leqslant |A| \cdot |B|$, и аналогично $|A|/|B^{-1}| \leqslant |BA| \leqslant |A| \cdot |B|$. Таким образом, если B и B^{-1} ограничены и отделены от 0, то оценка для A эквивалентна оценке для BA, или AB, или BAB^{-1}, и т. д. Аналогично $|z|/|B^{-1}| \leqslant |Bz| \leqslant |B| \cdot |z|$, т. е. оценка для z эквивалентна оценке для Bz. $\square$

Замечание. Если λ и y — СЧ и СВ матрицы A, то $|\lambda| \cdot |y| = |\lambda y| = |Ay| \leqslant |A| \cdot |y|$, откуда следует, что $|\lambda| \leqslant |A|$.

§ 2. Локальные теоремы существования и единственности

Оказывается, сформулированных выше естественных ограничений на f и требований на понятие решения уже достаточно, чтобы гарантировать разрешимость задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Чтобы сформулировать соответствующую теорему, сделаем вспомогательное построение. Выберем любую точку $(t_0, x_0) \in B$ и построим цилиндр
$C = \{|t - t_0| \leqslant T,\ |x - x_0| \leqslant R\}$ так, чтобы он помещался в B (для этого, вообще говоря, следует выбирать достаточно

малые T и R). Обозначим $F = \max\limits_C |f|$, $T_0 = \min\{T, R/F\}$, $I_P = [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$ — *отрезок Пеано* (*Пикара*). Рассмотрим конус $K = \{|x - x_0| \leqslant F|t - t_0|\}$ и его усеченную часть $K_1 = K \cap \{t \in I_P\}$. Ясно, что как раз $K_1 \subset C$.

Теорема. (Пеано). Пусть выполнены требования на f в задаче (1), указанные в определении решения, т. е.: $f \in C(B)$, где B — область в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда при всех $(t_0, x_0) \in B$ на $\operatorname{Int}(I_P)$ существует решение задачи (1).

Доказательство. Зададим произвольно $\alpha \in (0, T_0]$ и построим так наз. *ломаную Эйлера* с шагом α, а именно: это ломаная в $\mathbb{R}^{n+1}$, у которой каждое звено имеет проекцию на ось t длиной α, первое звено вправо начинается в точке (t_0, x_0) и таково, что на нем $dx/dt = f(t_0, x_0)$; правый конец этого звена (t_1, x_1) служит левым концом для второго, на котором $dx/dt = f(t_1, x_1)$, и т. д., и аналогично влево. Получившаяся ломаная определяет кусочно-линейную функцию $x = \varphi_\alpha(t)$. Пока $t \in I_P$, ломаная остается в K_1 (а тем более в C, а значит, и в B), так что построение корректно — для этого собственно и делалось вспомогательное построение перед теоремой.

[В самом деле, всюду кроме точек излома существует φ'_α, и тогда $\varphi_\alpha(s) - \varphi_\alpha(t) = \int\limits_t^s \varphi'_\alpha(z)dz$, где в точках излома взяты произвольные значения производной.]

$$\left[\begin{array}{l}\text{При этом (двигаясь по ломаной по индукции)}\\ |\varphi'_\alpha| \leqslant F\text{, так что } |\varphi_\alpha(s)-\varphi_\alpha(t)| \leqslant \left|\int\limits_t^s F dz\right| = F|s-t|.\\ \text{В частности, } |\varphi_\alpha(t)-x_0| \leqslant F|t-t_0|.\end{array}\right]$$

Тем самым, на I_P функции φ_α:

1. ограничены: $|\varphi_\alpha(t)-x_0| \leqslant R$;
2. равностепенно непрерывны, т. к. липшицевы:
   $|\varphi_\alpha(s)-\varphi_\alpha(t)| \leqslant F|s-t|$, т. е. $\delta = \varepsilon/F$.

[Здесь читателю нужно при необходимости освежить свои знания о таких понятиях и результатах как: равностепенная непрерывность, равномерная сходимость, теорема Арцела—Асколи и т. д.]

По теореме Арцела—Асколи найдется последовательность $\alpha_k \to 0$ такая, что $\varphi_{\alpha_k} \rightrightarrows \varphi$ на I_P, где $\varphi \in C(I_P)$. По построению, $\varphi(t_0) = x_0$, так что остается проверить, что

$$\forall\varepsilon \quad \exists\delta : \quad t, s \in \operatorname{Int}(I_P), \quad |t-s| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow$$
$$\left|\frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{s-t} - f(t,\varphi(t))\right| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Мы это докажем для $s > t$.

Упражнение. Аналогично рассмотреть $s < t$.

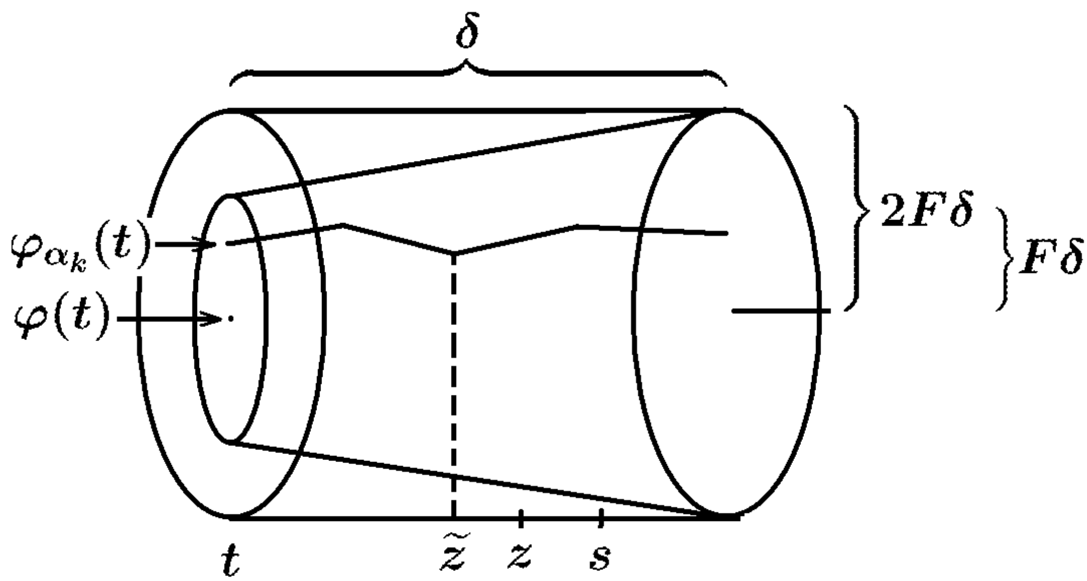
Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ так, что для всех $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in C$ верно

$$|t_1-t_2| \leqslant \delta, |x_1-x_2| \leqslant 2F\delta \Longrightarrow |f(t_1,x_1)-f(t_2,x_2)| \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Это можно сделать ввиду равномерной непрерывности f на компакте C. Найдем $m \in \mathbb{N}$ так, что

$$\forall k \geqslant m \qquad |\varphi_{\alpha_k}(t) - \varphi(t)| \leqslant F\delta \quad \text{на } I_P. \tag{4}$$

Фиксируем $t \in \operatorname{Int}(I_P)$ и возьмем любое $s \in \operatorname{Int}(I_P)$ такое, что $t < s \leqslant t + \delta$. Тогда для всех $z \in [t, s]$ имеем $|\varphi_{\alpha_k}(z) - \varphi_{\alpha_k}(t)| \leqslant F\delta$, поэтому ввиду (4)
$|\varphi_{\alpha_k}(z) - \varphi(t)| \leqslant 2F\delta$.



Заметим, что $\varphi'_{\alpha_k}(z) = \varphi'_{\alpha_k}(\widetilde{z}) = f(\widetilde{z}, \varphi_{\alpha_k}(\widetilde{z}))$, где $\widetilde{z}$ — абсцисса левого конца отрезка ломаной, содержащего точку $(z, \varphi_{\alpha_k}(z))$. Но точка $(\widetilde{z}, \varphi_{\alpha_k}(\widetilde{z}))$ попадает в цилиндр с параметрами $(\delta, 2F\delta)$, построенный на точке $(t, \varphi(t))$ (на самом деле даже в усеченный конус — см. рис., но это сейчас неважно), так что ввиду (3) получаем $|\varphi'_{\alpha_k}(z) - f(t, \varphi(t))| \leqslant \varepsilon$. Для ломаной имеем, как говорилось выше, формулу

$\varphi_{\alpha_k}(s) - \varphi_{\alpha_k}(t) = \int\limits_t^s \varphi'_\alpha(z)dz$. В итоге

$$\left|\frac{\varphi_{\alpha_k}(s) - \varphi_{\alpha_k}(t)}{s-t} - f(t, \varphi(t))\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{s-t}\int\limits_t^s (\varphi'_{\alpha_k}(z) - f(t,\varphi(t)))dz\right| \leqslant \varepsilon.$$

При $k \to \infty$ это даст (2). $\square$

Замечание. Пусть $f \in C^1(B)$. Тогда решение, определенное на (a, b), будет класса $C^2(a, b)$. В самом деле, на (a, b) имеем: существует $\dfrac{d}{dt}f(t, x(t)) = f_t(t, x(t)) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x(t))x'(t)$ (здесь $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ — матрица Якоби) — непрерывная функция. Значит, существует и $\dfrac{d^2x}{dt^2} \in C(a, b)$. Можно и дальше повышать гладкость решения, если f гладкая. Если f аналитична, то можно доказать существование и единственность аналитического решения (это так наз. теорема Коши), хотя из предыдущих рассуждений это никак не следует!

[Здесь необходимо вспомнить, что такое аналитическая функция. Не путать с функцией, представимой степенным рядом (это лишь представление аналитической функции на, вообще говоря, части области ее определения)!]

Замечание. При заданных (t_0, x_0) можно, варьируя T и R, пытаться максимизировать T_0. Однако это, как правило, не столь важно, т. к. для исследования максимального интервала существования решения имеются специальные методы (см. § 4). □

В теореме Пеано ничего не говорится о единственности решения. При нашем понимании решения оно всегда не единственно, т. к. если какое-то решение имеется, то его сужения на более узкие интервалы будут другими решениями. Этот момент мы подробнее рассмотрим позже (в § 4), а пока под единственностью будем понимать совпадение любых двух решений на пересечении интервалов их определения. Даже в этом смысле теорема Пеано ничего о единственности не говорит, что не случайно, т. к. в ее условиях единственность гарантировать нельзя.

Пример. $n = 1$, $f(x) = 2\sqrt{|x|}$. Задача Коши

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{|x|}, \qquad x(0) = 0$$

имеет тривиальное решение: $x_1 \equiv 0$, и кроме того
$x_2(t) = t|t|$. Из этих двух решений можно скомпилировать целое 2-параметрическое семейство решений:

$$x_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} -(t-\alpha)^2, & t \leqslant \alpha, \\ 0, & \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \\ (t-\beta)^2, & t \geqslant \beta, \end{cases}$$

где $-\infty \leqslant \alpha \leqslant 0 \leqslant \beta \leqslant +\infty$ (бесконечные значения означают отсутствие соответствующей ветви). Если считать за область определения всех этих решений всю $\mathbb{R}$, то их все равно бесконечно много. □

[Отметим, что если применять в этой задаче доказательство теоремы Пеано через ломаные Эйлера, то получится только нулевое решение. С другой стороны, если в процессе построения ломаных Эйлера допускать на каждом шаге небольшую погрешность, то даже после стремления параметра погрешности к нулю останутся все решения. Таким образом, теорема Пеано и ломаные Эйлера естественны как метод построения решений и тесно связаны с численными методами.]

Наблюдаемая в примере неприятность обусловлена тем, что функция f негладкая по x. Оказывается, если наложить дополнительные требования на регулярность f по x, то единственность можно обеспечить, причем этот шаг является в определенном смысле необходимым (см. ниже).

Напомним некоторые понятия из анализа. Функция (скалярная или векторная) g называется гельдеровой с показателем $\alpha \in (0,1]$ на множестве Ω, если в Ω верно $|g(x)-g(y)| \leqslant C|x-y|^{\alpha}$. Если $\alpha = 1$, то это условие называется условием Липшица. При $\alpha > 1$ такое возможно только для постоянных функций. Функция φ, заданная на отрезке $[0,\gamma]$ (где выбор $\gamma > 0$ несуществен) называется *модулем непрерывности*, если

$$\mathrm{sgn}\varphi(s) = \mathrm{sgn}s, \qquad \varphi(s) \to 0 \text{ при } s \to 0;$$

$$\varphi(s) \geqslant \beta s, \quad \beta > 0.$$

Говорят, что g удовлетворяет в Ω обобщенному условию

Гельдера с модулем φ, если

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \varphi(|x - y|). \tag{5}$$

В этом случае φ называется модулем непрерывности g в Ω. Можно показать, что любой модуль непрерывности есть модуль непрерывности какой-то непрерывной функции.

Нам важен обратный факт, а именно: любая непрерывная функция на компакте имеет свой модуль непрерывности, т. е. удовлетворяет (5) с некоторой φ. Докажем это. Напомним, что если Ω — компакт, а $g \in C(\Omega)$, то обязательно g равномерно непрерывна в Ω, т. е.
$\forall\varepsilon\ \exists\delta = \psi(\varepsilon)$: $|x - y| \leqslant \delta \Longrightarrow |g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon$. Оказывается, это эквивалентно условию (5) с некоторой φ. В самом деле, если ψ существует, то достаточно построить модуль непрерывности φ такой, что $\varepsilon \leqslant \varphi(\psi(\varepsilon))$, и тогда при $|x - y| = \delta = \psi(\varepsilon)$ получим

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon \leqslant \varphi(\psi(\varepsilon)) = \varphi(\delta) = \varphi(|x - y|).$$

Поскольку ε (и δ) произвольны, то x и y могут быть любыми. И наоборот, если (5) верно, то достаточно найти ψ такую, что $\varphi(\psi(\varepsilon)) \leqslant \varepsilon$, и тогда при $|x - y| \leqslant \delta = \psi(\varepsilon)$ получим

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \varphi(|x - y|) \leqslant \varphi(\delta) = \varphi(\psi(\varepsilon)) \leqslant \varepsilon.$$

Осталось обосновать логические переходы:

$$\begin{array}{lll} \forall\psi & \exists\varphi: & \varepsilon \leqslant \varphi(\psi(\varepsilon)); \\ \forall\varphi & \exists\psi: & \varphi(\psi(\varepsilon)) \leqslant \varepsilon. \end{array}$$

Для монотонных φ и ψ достаточно брать обратные функции, а в общем случае необходимо использовать так наз. обобщенные обратные функции. Их существование требует отдельного доказательства, которое мы приводить не будем, а скажем лишь идею (полезно сопроводить чтение рисунками): для любой F определим $F_*(x) = \min_{y \geqslant x} F(y)$, $F^*(x) = \max_{y \leqslant x} F(y)$ — это монотонные функции, и они имеют обратные. Ввиду $F_* \leqslant F \leqslant F^*$ легко проверить, что $x \leqslant F_*^{-1}(F(x))$, $x \leqslant F(F_*^{-1}(x))$, $(F^*)^{-1}(F(x)) \leqslant x$, $F((F^*)^{-1}(x)) \leqslant x$.

Лучший модуль непрерывности — линейный (условие Липшица). Это «почти дифференцируемые» функции. Для придания строгого смысла последнему утверждению требуются определенные усилия, и мы ограничимся лишь двумя замечаниями:

1. строго говоря, не всякая липшицева функция дифференцируема, как показывает пример $g(x) = |x|$ на $\mathbb{R}$;
2. но из дифференцируемости следует липшицевость, как показывает следующее

Утверждение. Всякая функция g, имеющая все $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x_j}\right| \leqslant M$ на выпуклом множестве Ω, удовлетворяет на нем условию Липшица.

[Пока для краткости рассмотрим скалярные функции g.]

Доказательство. Для всех $x, y \in \Omega$ имеем

$$g(x) - g(y) = g(y + \theta(x - y)) \Big|_{\theta=0}^{\theta=1} = \int\limits_0^1 \frac{d}{d\theta} g(y + \theta(x - y)) d\theta =$$

$$= \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(y + \theta(x-y)) \cdot (x_j - y_j) d\theta =$$

$$= \sum_{j=1}^n \left[\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_j}(y + \theta(x-y)) d\theta \right] \cdot (x_j - y_j),$$

поэтому $|g(x) - g(y)| \leqslant M \sum\limits_{j=1}^n |x_j - y_j| \leqslant Mn|x-y|$. $\square$

Ясно, что это утверждение верно и для вектор-функций.

Замечание. Если $f = f(t,x)$ (вообще говоря, вектор-функция), то можно ввести понятие «f липшицева по x», т. е. $|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant C|x-y|$, и так же доказать, что если D выпукло по x при всех t, то для липшицевости f по x в D достаточно наличия производных f по x, ограниченных в D. $\square$

В Утверждении мы получали оценку $|g(x) - g(y)|$ через $|x-y|$. При $n = 1$ она обычно делается с помощью формулы конечных приращений: $g(x) - g(y) = g'(z)(x-y)$ (если g есть вектор-функция, то z своя для каждой компоненты). При $n > 1$ удобно использовать следующий аналог этой формулы:

Лемма. (Адамара). Пусть $f \in C(D)$ (вообще говоря, вектор-функция), где $D \cap \{t = t_*\}$ выпукла при любом t_*, а также существуют $\dfrac{\partial f}{\partial x} \in C(D)$. Тогда
$f(t,x) - f(t,y) = A(t,x,y) \cdot (x-y)$, где A — непрерывная прямоугольная матрица.

Доказательство. При любом фиксированном t_* применим выкладку из доказательства Утверждения для $\Omega = D \cap \{t = t_*\}$, $g = f_k$. Получим нужное представление с $A(t,x,y) = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, y + \theta(x-y))d\theta$, и остается заметить, что A в самом деле непрерывна. $\Box$

Замечание. $A(t,x,x) = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)d\theta = \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$. $\Box$

Вернемся к вопросу единственности решения задачи (1). Поставим вопрос так: каким должен быть модуль непрерывности f по x, чтобы решение (1) было единственным в том смысле, что 2 решения, определенные на одном интервале, совпадают? Ответ дается следующей теоремой:

Теорема. (Осгуда). Пусть в условиях теоремы Пеано модуль непрерывности f по x в B, т. е. функция φ в неравенстве

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant \varphi(|x-y|), \qquad \forall (t,x),(t,y) \in B, \tag{6}$$

удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^\gamma \frac{d\eta}{\varphi(\eta)} = +\infty \tag{7}$$

(можно считать $\varphi \in C[0,\gamma]$). Тогда задача (1) не может иметь двух различных решений, определенных на одном интервале вида $(t_0 - a, t_0 + b)$.

[Сравнить с примером неединственности, приведенным выше.]

Лемма. Если $z \in C^1(\alpha,\beta)$, то на всем (α,β):

1. в точках, где $z \neq 0$, существует $|z|'$, причем $||z|'| \leqslant |z'|$;

2. в точках, где $z = 0$, существуют односторонние производные $|z|'_{\pm}$, причем $||z|'_{\pm}| = |z'|$ (в частности, если $z' = 0$, то существует $|z|' = 0$).

Пример. $n = 1$, $z(t) = t$. В точке $t = 0$ производная от $|z|$ не существует, но имеются односторонние производные.

Доказательство. (Леммы). В тех точках, где $z \neq 0$, имеем: существует $|z|' = \dfrac{z \cdot z'}{|z|}$, и $||z|'| \leqslant |z'|$. В тех точках t, где $z(t) = 0$, имеем:

$$\left|\frac{|z(t+\varepsilon)| - |z(t)|}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{|z(t+\varepsilon)|}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{z(t+\varepsilon)}{\varepsilon}\right| =$$

$$= \left|\frac{z(t+\varepsilon) - z(t)}{\varepsilon}\right| \to |z'(t)| \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Случай 1: $z'(t) = 0$. Тогда получаем существование $|z|'(t) = 0$.

Случай 2: $z'(t) \neq 0$. Тогда при $\varepsilon \to +0$ или $\varepsilon \to -0$ очевидно существование ненулевого предела $\dfrac{|z(t+\varepsilon)| - |z(t)|}{\varepsilon}$, модуль которого равен $|z'(t)|$. $\square$

Доказательство. (т. Осгуда). Обозначим $F(\xi) = \displaystyle\int\limits_{\xi}^{\gamma} \frac{d\eta}{\varphi(\eta)}$.

По условию, $F \in C^1(0, \gamma)$, $F > 0$, $F \searrow$, $F(+0) = +\infty$. Пусть $z_{1,2}$ — два решения (1), определенные на $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Обозначим $z = z_1 - z_2$. Имеем:

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z_1) - f(t, z_2); \qquad z(t_0) = 0.$$

Допустим, найдется t_1 (для определенности $t_1 > t_0$) такое, что $z(t_1) \neq 0$. Множество $A = \{\, t < t_1 \mid z(t) = 0 \,\}$ не пусто ($t_0 \in A$) и ограничено сверху. Значит, оно имеет верхнюю грань $\beta < t_1$. По построению, $z \neq 0$ на (β, t_1), а ввиду непрерывности z имеем $z(\beta) = 0$.

По Лемме $|z| \in C^1(\beta, t_1)$, причем на этом интервале верно $|z|' \leqslant |z'| \leqslant \varphi(|z|)$, так что

$$-\frac{d}{dt}F(|z|) = \frac{1}{\varphi(|z|)}\frac{d|z|}{dt} \leqslant 1.$$

Интегрирование по (t, t_1) (где $t \in (\beta, t_1)$) дает $F(|z(t)|) - F(|z(t_1)|) \leqslant t_1 - t$. При $t \searrow \beta + 0$ получим противоречие. □

Следствие 1. Если в условиях теоремы Пеано f липшицева по x в B, то задача (1) имеет единственное решение в смысле, описанном в теореме Осгуда, т. к. в этом случае $\varphi(\eta) = C\eta$ удовлетворяет (7).

Следствие 2. Если в условиях теоремы Пеано $\dfrac{\partial f}{\partial x} \in C(B)$, то решение (1), определенное на $\mathrm{Int}(I_P)$, единственно.

Лемма. Любое решение (1), определенное на I_P, обязано удовлетворять оценке $|x'| = |f(t, x)| \leqslant F$, а его график — лежать в K_1, а тем более в C.

Доказательство. Допустим, найдется $t_1 \in I_P$ такая, что $(t, x(t)) \notin C$. Для определенности пусть $t_1 > t_0$. Тогда найдется $t_2 \in (t_0, t_1]$ такая, что $|x(t) - x_0| = R$. Аналогично рассуждениям в доказательстве теоремы Осгуда, можно считать, что t_2 — самая левая такая точка, а на $[t_0, t_2)$ уже верно

$|x(t)-x_0| < R$. Тогда на $[t_0, t_2]$ имеем $(t, x(t)) \in C$, так что $|f(t, x(t))| \leqslant F$, и потому $(t, x(t)) \in K_1$, что противоречит $|x(t_2)-x_0| = R$. Значит, $(t, x(t)) \in C$ на всем I_P, а тогда (повторяя выкладки) $(t, x(t)) \in K_1$. $\square$

Доказательство. (Следствия 2). C — компактное множество, поэтому $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant M$ в C, и в силу выпуклости C получаем, что f липшицева по x в C, где лежат графики всех решений ввиду Леммы. По Следствию 1 получаем требуемое. $\square$

Замечание. Условие (7) означает, что условие Липшица для f нельзя существенно ослабить. Например, условие Гельдера с $\alpha < 1$ уже не годится. Годятся лишь модули непрерывности близкие к линейным — такие как $\varphi(s) = s \ln \dfrac{1}{s}$, $\varphi(s) = s \ln \dfrac{1}{s} \ln \ln \dfrac{1}{s}$ и т. д., причем нельзя указать «самую плохую» φ:

[**Упражнение.** (достаточно сложное). Доказать, что если φ удовлетворяет (7), то найдется φ_1, удовлетворяющая (7) такая, что $\varphi_1/\varphi \to \infty$ в нуле. $\square$]

В общем случае не обязательно требовать именно что-то от модуля непрерывности f по x для единственности — возможны разного рода специальные случаи, например:

Утверждение. Если в условиях теоремы Пеано верно

$$\forall (t, x), (t, y) \in B \qquad (x-y) \cdot (f(t, x) - f(t, y)) \leqslant 0, \qquad (8)$$

то любые 2 решения (1), определенные на $[t_0, t_0 + a)$, совпадают.

Доказательство. Рассмотрим 2 решения $z_{1,2}$. Имеем:

$$\frac{d}{dt}|z_1 - z_2|^2 = 2(z_1 - z_2) \cdot (f(t, z_1) - f(t, z_2)) \leqslant 0,$$

откуда при $t \geqslant t_0$ получаем $|z_1 - z_2|^2 \leqslant |z_1 - z_2|^2|_{t=t_0} = 0$. $\square$

Следствие. При $n = 1$, если f не возрастает по x при всех t, решение (1) «единственно вправо». $\square$

Но обычно единственности добиваются именно требованием вида (7) — чаще всего при помощи липшицевости или даже дифференцируемости f по x. Для некоторых классов уравнений условие (7) превращается в необходимое (т. е. теорема Осгуда неулучшаема в классе всех ОДУ):

Пример. $n = 1$, $x' = f(x)$, $\mathrm{sgn} f(s) = \mathrm{sgn} s$, $f \in C(\mathbb{R})$. Задача Коши $x(0) = 0$ имеет тривиальное решение $x \equiv 0$. Когда можно гарантировать, что нет других решений, определенных на $(-\delta, \delta)$? Имеем:

1. Если $\displaystyle\int\limits_0^{\pm 1} \frac{d\eta}{f(\eta)} = +\infty$, то других решений нет — это доказывается аналогично теореме Осгуда.

   Упражнение. Доказать.

2. Если $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{d\eta}{f(\eta)} < +\infty$, то функция $x = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ F^{-1}(t), & t \geqslant 0, \end{cases}$

   где $F(\xi) = \displaystyle\int\limits_0^{\xi} \frac{d\eta}{f(\eta)}$ (определена на $\mathbb{R}^+$), дает нетривиальное решение задачи.

   Упражнение. Проверить.

Замечание. Позже (в § 3) мы научимся решать такие задачи.

Замечание. Условие (7) можно обобщать — см. [8]. В этом примере (например, при $s > 0$)
$|f(s) - f(0)| = f(s) - f(0) = f(s) = f(s - 0)$, т. е. f является модулем непрерывности самой себя в нуле, так что условие Осгуда (7) является критерием единственности. □

Строго говоря, теорем Пеано и Осгуда уже достаточно для ответа на вопрос о *локальных* (*в малом*) существовании и единственности решений задачи Коши (1).

[локальных — значит лишь в окрестности точки t_0. Хотелось бы добиться *глобальных* существования и единственности (*в целом*), т. е. на максимально возможном интервале. Этим мы будем заниматься в § 4.]

Сразу можно отметить, что единственность в целом следует из единственности в малом: если имеются 2 решения задачи Коши, графики которых лежат в области, где выполняются условия любой локальной теоремы единственности (например, Осгуда или ее следствий), то эти решения совпадают на интервале, на котором оба определены, как бы велик он ни был. В самом деле, иначе (аналогично рассуждениям выше) найдется самая крайняя точка, где решения еще совпадают, за которой они начинают не совпадать, что противоречит локальной единственности.

Итак, имеющегося казалось бы достаточно, но в связи с полезностью конструктивного подхода сделаем некоторые дополнения.

Утверждение. Пусть $t_0 \in (a, b)$. Тогда следующие 2 утверждения эквивалентны:

1. $x \in C^1(a, b)$ является решением (1);

2. $x \in C(a, b)$ является решением интегрального уравнения
$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{9}$$

Доказательство. [1. $\Longrightarrow$ 2.] Достаточно взять $\int\limits_{t_0}^{t}(1)_1$ с учетом $(1)_2$.

[2. $\Longrightarrow$ 1.] Из (9) видно, что $x \in C^1(a, b)$, а тогда дифференцирование (9) дает $(1)_1$, а $(1)_2$ очевидно. $\square$

[В отличие от (1), для (9) естественно строить решение на замкнутом отрезке.]

Пикар предложил для решения (1)=(9) следующий метод последовательных приближений. Обозначим $x^0(t) \equiv x_0$, а далее по индукции
$$x^k(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x^{k-1}(s))ds, \qquad k \geqslant 1. \tag{10}$$

Теорема. (Коши—Пикара). Пусть в условиях теоремы Пеано функция f липшицева по x в любом выпуклом по x компакте K из области B, т. е.
$$|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant L(K)|x - y|, \qquad \forall (t, x), (t, y) \in K. \tag{11}$$
Тогда для любого $(t_0, x_0) \in B$ задача Коши (1) (она же (9)) имеет единственное решение на $\mathrm{Int}(I_P)$, причем $x^k \rightrightarrows x$ на I_P, где x^k определены в (10).

Замечание. Ясно, что теорема сохраняет силу, если условие (11) заменить на $\dfrac{\partial f}{\partial x} \in C(B)$, т. к. из этого условия следует (11).

Замечание для преподавателя. На самом деле нужны не все выпуклые по x компакты, а только цилиндры, но формулировка сделана именно так, т. к. в § 5 потребуются более общие компакты, и к тому же именно при такой формулировке наиболее естественно смотрится Замечание.

Доказательство. Выберем произвольно $(t_0, x_0) \in B$ и сделаем то же вспомогательное построение, что и перед теоремой Пеано. Докажем по индукции, что все x^k определены и непрерывны на I_P, причем их графики лежат в K_1, а тем более в C. Для x^0 это очевидно. Если это верно для x^{k-1}, то из (10) ясно, что x^k определена и непрерывна на I_P, причем

$$|x^k(t) - x_0| \leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} F ds \right| \leqslant F|t - t_0|,$$

а это и есть принадлежность K_1.

Теперь докажем по индукции оценку на I_P:

$$|x^{k+1}(t) - x^k(t)| \leqslant (L(C))^k F \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \qquad k \geqslant 0 \tag{12}$$

(C есть выпуклый по x компакт в B, и для него определена $L(C)$). При $k = 0$ это есть ужé доказанная оценка $(t, x^1(t)) \in K_1$. Если (12) верно для $k := k - 1$, то из (10) имеем

$$|x^{k+1}(t) - x^k(t)| = \left| \int\limits_{t_0}^{t} (f(s, x^k(s)) - f(s, x^{k-1}(s)))ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{t_0}^{t} L(C) \cdot (L(C))^{k-1} F \frac{|s - t_0|^k}{k!} ds \right| \leqslant (L(C))^k F \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!},$$

что и требовалось. Тем самым, ряд

$$x^0 + (x^1 - x^0) + \dots + (x^{k+1} - x^k) + \dots$$

мажорируется на I_P сходящимся числовым рядом

$$|x^0| + \sum_{k=0}^{\infty} (L(C))^k F \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} =$$

$$= |x_0| + \frac{F}{L(C)} \Big(\exp(L(C)|t - t_0|) - 1 \Big)$$

и потому (это называется теоремой Вейерштрасса) равномерно на I_P сходится к некоторой функции $x \in C(I_P)$. Но это и означает $x^k \rightrightarrows x$ на I_P. Тогда в (10) на I_P переходим к пределу и получаем (9) на I_P, а значит (1) на $\mathrm{Int}(I_P)$.

Единственность сразу получается по Следствию 1 из теоремы Осгуда, но полезно доказать ее и другим способом, использующим именно уравнение (9). Пусть имеются 2 решения $x^{1,2}$ задачи (1) (т. е. (9)) на $\mathrm{Int}(I_P)$. Как указывалось выше, тогда обязательно их графики лежат в K_1, а тем более в C. Пусть $t \in I_1 = (t_0 - \gamma, t_0 + \gamma)$, где γ — некоторое положительное число. Тогда

$$|x^1(t) - x^2(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} (f(s, x^1(s)) - f(s, x^2(s)))ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant L(C)|t - t_0|\delta,$$

где $\delta = \max\limits_{I_1} |x^1 - x^2|$. Отсюда $\delta \leqslant L(C)\gamma\delta$. Положим $\gamma = 1/(2L(C))$. Тогда $\delta = 0$. Тем самым, $x^1 = x^2$ на I_1. Далее аналогично показываем $x^1 = x^2$ на $I_2 = (t_0, t_0 + 2\gamma)$ и на $I_3 = (t_0 - 2\gamma, t_0)$ как решения задач Коши

$$x' = f(t, x), \qquad x(t_0 \pm \gamma) = x^{1,2}(t_0 \pm \gamma).$$

Аналогично влево, и так за конечное число шагов покроем весь I_P. Теорема Коши—Пикара доказана.

Замечание для преподавателя. Есть еще доказательство единственности с помощью леммы Гронуолла, оно даже более естественно, т. к. проходит сразу глобально, но пока лемма Гронуолла не очень удобна, т. к. до линейных ОДУ ее трудно адекватно воспринять.

Замечание. Последнее доказательство единственности поучительно тем, что еще раз показывает в другом свете, как локальная единственность приводит к глобальной (что неверно для существования).

Упражнение. Доказать единственность сразу на всем I_P, рассуждая от противного как в доказательстве теоремы Осгуда. $\square$

Важный частный случай (1) — линейные ОДУ, т. е. такие, в которых величина $f(t, x)$ линейна по x:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(t); \qquad x(t_0) = x_0. \tag{13}$$

В этом случае для попадания в условия общей теории следует требовать

$$A, h \in C(a, b), \quad \text{где} \quad t_0 \in (a, b), \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty. \tag{14}$$

Таким образом, в данном случае в качестве B выступает полоса, а условие липшицевости (и даже дифференцируемости) по x выполнено автоматически: при всех $t \in (a, b)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |A(t)(x - y)| \leqslant |A(t)| \cdot |(x - y)|.$$

Если временно выделить компакт $[c, d] \subset (a, b)$, то на нем получим $|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant L|(x - y)|$, где $L = \max\limits_{[c,d]} |A|$. Из теорем Пеано и Осгуда или Коши—Пикара следует однозначная разрешимость задачи (13) на некотором интервале (Пеано—Пикара), содержащем t_0. Более того, решение на этом интервале есть предел последовательных приближений Пикара.

Упражнение. Найти этот интервал.

Но оказывается, в данном случае все эти результаты можно доказать сразу глобально, т. е. на всем (a, b):

Теорема. Пусть верно (14). Тогда задача (13) имеет единственное решение на (a, b), причем последовательные приближения Пикара сходятся к нему равномерно на любом компакте $[c, d] \subset (a, b)$.

Доказательство. Снова, как и в ТК—П, строим решение интегрального уравнения (9) с помощью последовательных приближений по формуле (10). Но теперь нам не нужно проверять условие попадания графика в конус и цилиндр, т. к.

f определена при всех x, пока $t \in (a, b)$. Нужно лишь проверить, что все x^k определены и непрерывны на (a, b), что очевидно по индукции.

Вместо (12) теперь покажем аналогичную оценку вида

$$|x^{k+1}(t) - x^k(t)| \leqslant L^k N \frac{|t - t_0|^k}{k!} \qquad \text{на } [c, d], \tag{15}$$

где N — некоторое число, зависящее от выбора $[c, d]$. Первый шаг индукции для этой оценки другой (т. к. не связан с K_1): при $k = 0$ $|x^1(t) - x_0| \leqslant N$ ввиду непрерывности x^1, а следующие шаги аналогичны (12).

[Можно это и не расписывать, т. к. очевидно, но можно и выписать:

$$|x^{k+1}(t) - x^k(t)| \leqslant L^{k-1} N \left| \int\limits_{t_0}^{t} L \frac{|s - t_0|^{k-1}}{(k-1)!} ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \text{правая часть (15).}$$]

Снова замечаем $x^k \rightrightarrows x$ на $[c, d]$, и x есть решение соответствующего (10) на $[c, d]$. Но тем самым мы построили решение на всем (a, b), т. к. выбор компакта $[c, d]$ произволен. Единственность следует из теорем Осгуда или Коши—Пикара (и рассуждений выше о глобальной единственности). $\square$

Замечание. Как говорилось выше, ТК—П формально лишняя ввиду наличия теорем Пеано и Осгуда, но она полезна по 3 причинам — она:

1. позволяет связать задачу Коши для ОДУ с интегральным уравнением;

2. предлагает конструктивный метод последовательных приближений;

3. позволяет легко доказать глобальное существование для линейных ОДУ.

[хотя последнее можно вывести и из рассуждений § 4.]

Далее мы чаще всего будем ссылаться именно на нее.

Пример. $x' = x$, $x(0) = 1$. Последовательные приближения дают: $x^0 = 1$, $x^1 = 1+t$, $x^2 = 1+t+t^2/2$, $\ldots$, $x^k = \sum\limits_{r=0}^{k} \dfrac{t^r}{r!}$. Значит, $x(t) = e^t$ — решение исходной задачи на всей $\mathbb{R}$. $\square$

Чаще всего не будет получаться ряд, но определенная конструктивность остается. Также можно оценить погрешность $x - x^k$ (см. [8]).

Замечание. Из теорем Пеано, Осгуда и Коши—Пикара легко получить соответствующие теоремы для ОДУ высшего порядка.

Упражнение. Сформулировать понятия задачи Коши, решения системы и задачи Коши, все теоремы для ОДУ высших порядков, используя сведение к системам первого порядка, изложенное в § 1. $\square$

Несколько нарушая логику курса, но с целью лучшего усвоения и обоснования методов решения задач на практических занятиях, временно прервем изложение общей теории и займемся технической проблемой «явного решения ОДУ».

§ 3. Некоторые приемы интегрирования ОДУ первого порядка при $n = 1$

Итак, рассмотрим скалярное уравнение $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$. Простейшим частным случаем, который научились интегрировать, является так наз. УРП, т. е. уравнение, в котором $f(t,x) = a(t)b(x)$. Формальный прием интегрирования УРП состоит в том, чтобы «разделить» переменные t и x (отсюда название): $\dfrac{dx}{b(x)} = a(t)dt$, а затем взять интеграл: $\int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{d\xi}{b(\xi)} = \int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds$, что дает решение такое, что $x(t_0) = x_0$.

Если обозначить $B(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{d\xi}{b(\xi)}$, $A(t) = \int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds$, то получим $x = B^{-1}(A(t))$. Такое формальное рассуждение содержит несколько моментов, требующих обоснования.

1. Деление на $b(x)$. Мы считаем, что f непрерывна, так что $a \in C(\alpha, \beta)$, $b \in C(\gamma, \delta)$, т. е. в качестве B выступает прямоугольник $(\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$ (вообще говоря, бесконечный). Множества $\{b(x) > 0\}$ и $\{b(x) < 0\}$ открытые и потому являются конечными или счетными наборами интервалов. Между этими интервалами имеются точки или отрезки, где $b = 0$. Если $b(x_0) = 0$, то задача Коши
$$x' = a(t)b(x), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$
имеет решение $x \equiv x_0$. Возможно, это решение не единственно, тогда в его области определения есть интерва-

лы, где $b(x(t)) \neq 0$, но на них тогда можно делить на $b(x(t))$. Заметим попутно, что на этих интервалах функция B монотонна и потому можно брать B^{-1}. Если же $b(x_0) \neq 0$, то в окрестности t_0 заведомо $b(x(t)) \neq 0$, и процедура законна. Таким образом, описанная процедура должна, вообще говоря, применяться при разбиении области определения решения на части.

2. Интегрирование левой и правой частей по разным переменным.

   Способ I. Пусть мы хотим найти решение задачи Коши (1) $x = \varphi(t)$. Имеем: $\dfrac{d\varphi(t)}{dt} = a(t)b(\varphi(t))$, откуда $\dfrac{\varphi'(s)}{b(\varphi(s))} = a(s)$. Операция $\int\limits_{t_0}^{t} ds$ дает

$$\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(s)ds}{b(\varphi(s))} \overset{\varphi(s)=\eta}{=} \int\limits_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} \frac{d\eta}{b(\eta)} = \int\limits_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{d\eta}{b(\eta)}$$

   — получили ту же формулу строго.

   Способ II. Уравнение

$$\frac{dx}{b(x)} = a(t)dt \qquad (2)$$

   — это так наз. *симметричная запись* исходного ОДУ, т. е. такая, в которой не уточняется, какая переменная является независимой, а какая — зависимой. Такая форма имеет смысл как раз в рассматриваемом нами случае одного уравнения первого порядка ввиду теоремы об инвариантности формы первого дифференциала.

[Здесь уместно разобраться подробнее с понятием дифференциала, проиллюстрировав его на примере плоскости $\{(t, x)\}$, кривых на ней, возникающих связях, степенях свободы, параметре на кривой.]

Таким образом, уравнение (2) связывает дифференциалы t и x вдоль искомой ИК. Тогда интегрирование уравнения (2) способом, показанным в начале, совершенно законно — оно означает, если угодно, интегрирование по любой переменной, выбранной в качестве независимой. В способе I мы это показали, выбрав в качестве независимой переменной t. Сейчас покажем это, выбрав в качестве независимой переменной параметр s вдоль ИК (т. к. это более наглядно показывает равноправность t и x). Пусть значение $s = s_0$ соответствует точке (t_0, x_0). Тогда имеем: $\dfrac{x'(s)ds}{b(x(s))} = a(t(s))t'(s)ds$, что после $\int\limits_{s_0}^{s}$ дает $\displaystyle\int\limits_{s_0}^{s} \frac{x'(\xi)d\xi}{b(x(\xi))} = \int\limits_{s_0}^{s} a(t(\xi))t'(\xi)d\xi$, и после замены переменных $\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x(s)} \frac{d\eta}{b(\eta)} = \int\limits_{t_0}^{t(s)} a(\zeta)d\zeta$, что и требовалось. □

[Здесь следует сделать акцент на универсальности симметричной записи, пример: окружность не записывается ни как $x(t)$, ни как $t(x)$, но как $x(s)$, $t(s)$.]

К УРП сводятся некоторые другие ОДУ первого порядка, что видно при решении задач (например, по задачнику [22]).

Еще один важный случай — линейное ОДУ:

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t). \tag{3}$$

Способ I. Вариация постоянной.

[это частный случай более общего подхода, который будет рассмотрен в Части 2. Смысл в том, что поиск решения в специальном виде понижает порядок уравнения.]

Решим сначала так наз. *однородное* уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x. \tag{3_0}$$

В силу единственности либо $x \equiv 0$, либо всюду $x \neq 0$. В последнем случае (пусть для определенности $x > 0$) получаем УРП: $\dfrac{dx}{x} = a(t)dt \iff \ln x = \displaystyle\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds + C \iff$

$$x(t) = C_1 \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds\right). \tag{4}$$

Можно еще так: $\dfrac{d}{dt}\ln x = \dfrac{x'}{x} = a(t)$, и т. д. Легко видеть, что (4) дает все решения $(3)_0$ (в том числе нулевое и отрицательные).

В формуле (4) присутствует произвольная постоянная C_1. Метод вариации постоянной состоит в том, что решение (3) ищется в виде $x(t) = C_1(t)\exp\left(\displaystyle\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$. Подставим в (3):

$$C_1'(t) = b(t)\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds\right) \Longleftrightarrow$$

$$C_1(t) = C_0 + \int\limits_{t_0}^{t} b(\xi)\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{\xi} a(s)ds\right)d\xi, \text{ и окончательно}$$

$$x(t) = C_0\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds\right) + \int\limits_{t_0}^{t} b(\xi)\exp\left(\int\limits_{\xi}^{t} a(s)ds\right)d\xi. \quad (5)$$

Видна (как и для алгебраических линейных систем) структура ОРНУ=ЧРНУ+ОРОУ (об этом подробнее в Части 2). Если мы хотим решить задачу Коши $x(t_0) = x_0$, то надо найти C_0 из данных Коши — легко получим $C_0 = x_0$.

Способ II. Найдем ИМ, т. е. такую функцию v, на которую надо умножить (3) (записанное так, что все неизвестные собраны в левой части: $x' - a(t)x = b(t)$), чтобы в левой части получилась производная от некоторой удобной комбинации. Имеем: $vx' - vax = (vx)'$, если $v' = -av$, т. е. (такое уравнение мы уже решали выше) $v(t) = \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$. Таким образом, (3) эквивалентно уравнению

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds\right)\right) = b(t)\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds\right), \quad (6)$$

которое уже легко решается и дает (5). Если решается задача Коши, то в (6) удобно сразу брать определенный интеграл $\int\limits_{t_0}^{t}$. $\square$

К линейным ОДУ (3) сводятся некоторые другие, как это видно при решении задач (например, по задачнику [22]). Подробнее важный случай линейных ОДУ (сразу для любых n) будет рассмотрен в Части 2.

Обе рассмотренных ситуации являются частным случаем так наз. УПД. Рассмотрим ОДУ первого порядка (при $n = 1$) в симметричной форме:

$$A(t,x)dt + B(t,x)dx = 0. \tag{7}$$

Как уже говорилось, (7) задает ИК в плоскости (t,x) без уточнения того, какая переменная считается независимой. Если умножить (7) на произвольную функцию $M(t,x)$, то получится эквивалентная форма записи того же уравнения:

$$M(t,x)A(t,x)dt + M(t,x)B(t,x)dx = 0. \tag{8}$$

Таким образом, одно и то же ОДУ имеет много симметричных записей. Среди них особую роль играют так наз. записи *в полных дифференциалах*,

[название УПД неудачное, т. к. это свойство не уравнения, а формы его записи]

т. е. такие, что левая часть (7) равна $dF(t,x)$ с некоторой F. Ясно, что (7) есть УПД тогда и только тогда, когда $A = F_t$, $B = F_x$ с некоторой F. Как известно из анализа, для последнего необходимо и достаточно

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t}. \tag{9}$$

[Мы не обосновываем строго технические моменты, например, гладкость всех функций. Дело в том, что § 3 играет второстепенную роль — он вообще не нужен для других частей курса, и не хотелось бы тратить чрезмерные усилия на его развернутое изложение.]

Таким образом, если (9) выполнено, то найдется такая F (она единственна с точностью до аддитивной постоянной), что (7) перепишется в виде $dF(t,x) = 0$ (вдоль ИК), т. е. $F(t,x) = \mathrm{const}$ вдоль ИК, т. е. ИК суть линии уровня функции F. Получаем, что интегрирование УПД — тривиальная задача, т. к. поиск F по A и B, удовлетворяющим (9) не представляет труда. Если же (9) не выполнено, то следует найти так наз. ИМ $M(t,x)$ такой, что (8) есть УПД, для чего необходимо и достаточно выполнения аналога (9), принимающего вид:

$$A\frac{\partial M}{\partial x} - B\frac{\partial M}{\partial t} + \left(\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial t}\right) M = 0. \tag{10}$$

Как следует из теории УЧП первого порядка (которую мы рассмотрим в Части 3), уравнение (10) всегда имеет решение, так что ИМ существует. Таким образом, любое уравнение вида (7) имеет запись в виде УПД и потому допускает «явное» интегрирование. Но эти рассуждения не дают конструктивного метода в общем случае, т. к. для решения (10) вообще говоря требуется найти решение (7), которое мы и ищем. Тем не менее, имеется ряд приемов поиска ИМ, которые традиционно рассматриваются на практических занятиях (см. например [22]).

Заметим, что рассмотренные выше приемы решения УРП и линейных ОДУ являются частным случаем идеологии ИМ. В самом деле, УРП $dx/dt = a(t)b(x)$, записанное в симметричной форме $dx = a(t)b(x)dt$, решается умножением на ИМ $1/b(x)$, т. к. после этого превращается в УПД $dx/b(x) = a(t)dt$, т. е. $dB(x) = dA(t)$. Линейное уравнение $dx/dt = a(t)x + b(t)$, записанное в симметричной форме $dx = a(t)xdt + b(t)dt$, решается умножением на ИМ $\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$: $d\left(x\exp\Big(-\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds\Big)\right) = \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds\right)dt$. И вообще, практически все приемы решения ОДУ «в явном виде» (за исключением большого блока, связанного с линейными системами) состоят в том, что с помощью специальных методов понижения порядка и замен переменных они сводятся к ОДУ первого порядка, которые затем сводятся к УПД, а они решаются применением основной теоремы дифференциального исчисления: $dF = 0 \Longleftrightarrow F = \mathrm{const}$. Вопрос о понижении порядка традиционно включается в курс практических занятий (см. например [22]).

Скажем несколько слов об ОДУ первого порядка, не разрешенных относительно производной:

$$F(t, x, x') = 0. \tag{11}$$

Как говорилось в § 1, можно пытаться разрешить (11) относительно x' и получить нормальную форму, но это не всегда целесообразно. Нередко удобнее решать (11) непосредственно.

Рассмотрим пространство $\{(t, x, p)\}$, где $p = x'$ временно рассматривается как независимая переменная. Тогда (11) задает в этом пространстве поверхность $\{F(t, x, p) = 0\}$, которую можно записать параметрически:

[Полезно вспомнить, что это значит, например с помощью сферы в $\mathbb{R}^3$.]

$$t = f(u, v), \qquad x = g(u, v), \qquad p = h(u, v). \tag{12}$$

Искомые решения будут соответствовать кривым на этой поверхности: $t = s$, $x = x(s)$, $p = x'(s)$ — одна степень свободы теряется потому, что на решениях существует связь $dx = pdt$. Запишем эту связь в терминах параметров на поверхности (12): $g_u du + g_v dv = h(f_u du + f_v dv)$, т. е.

$$(g_u - hf_u)du + (g_v - hf_v)dv = 0. \tag{13}$$

Таким образом, искомые решения соответствуют кривым на поверхности (12), в которых параметры связаны уравнением (13). Последнее есть ОДУ в симметричной форме, которое можно решить.

Случай I. Если в какой-то области $(g_u - hf_u) \neq 0$, то (12) можно записать в виде $\dfrac{du}{dv} = -\dfrac{g_v - hf_v}{g_u - hf_u}$, найти $u = \alpha(v)$, и тогда $t = f(\alpha(v), v)$, $x = g(\alpha(v), v)$ дает параметрическую запись искомых кривых в плоскости $\{(t, x)\}$ (т. е. мы проецируем на эту плоскость, т. к. p нам не нужно).

Случай II. Аналогично, если $(g_v - hf_v) \neq 0$.

Случай III. В каких-то точках одновременно $g_u - hf_u = g_v - hf_v = 0$. Здесь требуется отдельный анализ, соответствует ли это множество каким-то решениям (они тогда называются *особыми*).

Пример. Уравнение Клеро $x = tx' + x'^2$. Имеем: $x = tp + p^2$. Параметризуем эту поверхность: $t = u$, $p = v$, $x = uv + v^2$. Уравнение (13) примет вид $(u + 2v)dv = 0$.

Случай I. Не реализуется.

Случай II. $u + 2v \neq 0$, тогда $dv = 0$, т. е. $v = C = \text{const}$. Значит, $t = u$, $x = Cu + C^2$ — параметрическая запись ИК. Легко записать ее в явном виде $x = Ct + C^2$.

Случай III. $u + 2v = 0$, т. е. $v = -u/2$. Значит, $t = u$, $x = -u^2/4$ — параметрическая запись «кандидата в ИК». Чтобы проверить, в самом ли деле это ИК, запишем ее в явном виде $x = -t^2/4$. Оказалось, что это (особое) решение.

Упражнение. Доказать, что особое решение касается всех остальных. □

Это общий факт — график любого особого решения есть огибающая семейства всех остальных решений. На этом основано другое определение особого решения именно как огибающей (см. [22]).

Упражнение. Доказать, что для более общего уравнения Клеро $x = tx' - \varphi(x')$ с выпуклой функцией φ особое решение имеет вид $x = \overline{\varphi}(t)$, где $\overline{\varphi}$ — преобразование Лежандра от φ, т. е. $\overline{\varphi}\,' = (\varphi')^{-1}$, или $\overline{\varphi}(t) = \max\limits_{v}(tv - \varphi(v))$. Аналогично для уравнения $x = tx' + \varphi(x')$.

Замечание. Подробнее и аккуратнее содержание § 3 изложено в учебнике [1].

Замечание для преподавателя. При чтении курса лекций может быть полезно расширить § 3, придав ему более строгую форму.

Теперь вернемся к основной канве курса, продолжив начатое в §§ 1,2 изложение.

§ 4. Глобальная разрешимость задачи Коши

В § 2 мы доказали локальное существование решения задачи Коши
$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$
т. е. лишь на некотором интервале, содержащем точку t_0. При некоторых дополнительных предположениях на f мы доказали и единственность решения, понимая ее как совпадение двух решений, определенных на одном интервале. В случае, если f линейна по x, получается глобальное существование, т. е. на всем интервале, где определены и непрерывны коэффициенты уравнения (системы). Однако, как показывает попытка применения к линейной системе общей теории, интервал Пеано—Пикара вообще говоря меньше того, на котором можно построить решение. Возникают естественные вопросы:

1. как определить тот максимальный интервал, на котором можно утверждать существование решения (1)?

2. всегда ли этот интервал совпадает с максимальным, на котором еще имеет смысл правая часть $(1)_1$?

3. как аккуратно сформулировать понятие единственности решения без оговорок об интервале его определения?

О том, что ответ на вопрос 2 вообще говоря отрицательный (а точнее, требует большой аккуратности), говорит следующий

Пример. $x' = x^2$, $x(0) = x_0$. Если $x_0 = 0$, то $x \equiv 0$ — других решений нет по теореме Осгуда. Если $x_0 \neq 0$, то решаем как УРП: $\dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{x} = -1 \iff \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x_0} - t \iff x = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t}$ (здесь полезно сделать рисунок). Интервал существования решения не может быть больше чем $(-\infty, 1/x_0)$ или $(1/x_0, +\infty)$ соответственно при $x_0 > 0$ и $x_0 < 0$ (вторая ветвь гиперболы не имеет отношения к решению! — это типичная ошибка студентов). На первый взгляд, ничего в исходной задаче «не предвещало такого исхода». В § 4 мы найдем объяснение этому феномену. □

[На примере уравнения $x' = t^2 + x^2$ проявляется типичная ошибка студентов об интервале существования решения. Здесь тот факт, что «уравнение везде определено», вовсе не влечет продолжимость решения на всю прямую. Это ясно даже с чисто житейской точки зрения, например в связи с юридическим законами и процессами, развивающимися под ними: если даже в законе *явно* не предписано прекращение существования какой-либо фирмы в 2015 году, то это вовсе не значит что эта фирма не разорится к этому году по внутренним причинам (хотя и действующим в рамках закона).]

Для того, чтобы ответить на вопросы 1–3 (и даже чтобы четко их сформулировать), необходимо понятие *непродолжаемого решения.* Будем (как мы договаривались выше) рассматривать решения уравнения $(1)_1$ как пары $(\varphi, (t_l(\varphi), t_r(\varphi)))$.

Определение. Решение $(\varphi, (t_l(\varphi), t_r(\varphi)))$ есть *продолжение* решения $(\psi, (t_l(\psi), t_r(\psi)))$, если $(t_l(\varphi), t_r(\varphi)) \supset (t_l(\psi), t_r(\psi))$, и $\varphi|_{(t_l(\psi), t_r(\psi))} = \psi$.

Определение. Решение $(\varphi, (t_l(\varphi), t_r(\varphi)))$ — *непродолжаемое*, если оно не имеет нетривиальных (т. е. отличных от него) продолжений. $\square$ (см. Пример выше).

Ясно, что особую ценность представляют именно НР, и в их терминах надо доказывать существование и единственность. Возникает естественный вопрос — всегда ли можно построить НР, базируясь на каком-то локальном решении, или на задаче Коши? Оказывается, да. Чтобы это понять, введем понятия:

Определение. Набор решений $\{(\varphi, (t_l(\varphi), t_r(\varphi)))\}$ *непротиворечивый*, если любые 2 решения из этого набора совпадают на пересечении интервалов своего определения.

Определение. Непротиворечивый набор решений называется *максимальным*, если к нему нельзя добавить еще одно решение так, чтобы новый набор был непротиворечивым и содержал новые точки в объединении областей определений решений. $\square$

Ясно, что построение МНН эквивалентно построению НР, а именно:

1. Если имеется НР, то любой МНН, его содержащий, может быть лишь набором его сужений.

   Упражнение. Проверить.

2. Если имеется МНН, то НР $(\varphi, (t_-, t_+))$ строится так: $(t_-, t_+) = \bigcup\limits_{\text{МНН}} (t_l(\varphi), t_r(\varphi))$; в любой точке $t \in (t_-, t_+)$ положим $\varphi(t) = \psi(t)$, где ψ — любой элемент МНН, определенный в этой точке. Очевидно, что такая функция будет однозначно определена на всем (t_-, t_+) (однозначность следует из непротиворечивости набора), и она в каждой точке совпадает со всеми элементами МНН, определенными в этой точке. Для любого $t \in (t_-, t_+)$ найдется какая-то ψ, определенная в ней, а значит, и в ее окрестности, а т. к. в этой окрестности ψ есть решение $(1)_1$, то φ — тоже. Таким образом, φ есть решение $(1)_1$ на всем (t_-, t_+). Оно непродолжаемо, т. к. в противном случае нетривиальное продолжение можно было бы добавить к МНН вопреки его максимальности.

Построение МНН задачи (1) в общем случае (в условиях теоремы Пеано), когда нет локальной единственности, возможно (см. [1], [17]), но достаточно громоздко — оно основано на пошаговом применении теоремы Пеано с оценкой снизу длины интервала-продолжения. Таким образом, НР всегда существует. Мы обоснуем это только в случае, когда имеется локальная единственность, тогда построение МНН (а значит и НР) тривиально. Например, для определенности будем действовать в рамках ТК—П.

Теорема. Пусть выполняются условия ТК—П в области

$B \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда для любой $(t_0, x_0) \in B$ задача (1) имеет единственное НР.

Доказательство. Рассмотрим множество всех решений задачи (1) (оно не пусто по ТК—П). Оно образует МНН — непротиворечивый в силу локальной единственности, а максимальный ввиду того, что это множество вообще *всех* решений задачи Коши. Значит, НР существует. Оно единственно в силу локальной единственности. $\square$

Если требуется построить НР, основываясь на имеющемся локальном решении $(1)_1$ (а не задачи Коши), то эта проблема в случае наличия локальной единственности сводится к задаче Коши: нужно выбрать любую точку на имеющейся ИК и рассмотреть соответствующую задачу Коши. НР этой задачи будет продолжением исходного решения в силу единственности. Если же единственности нет, то продолжение заданного решения осуществляется по процедуре, указанной выше.

Замечание. НР не может быть доопределено в концах интервала своего существования (независимо от условия единственности) так чтобы оно было решением и в концевых точках. Для обоснования надо уточнить, что понимать под решением ОДУ в концах отрезка:

1. **Подход 1.** Пусть под решением $(1)_1$ на отрезке понимается функция, удовлетворяющая уравнению в концах в смысле односторонней производной. Тогда возможность указанного доопределения какого-то решения φ, например, на правом конце интервала его существования

$(t_-, t_+]$ означает, что ИК имеет концевую точку внутри B, а $\varphi \in C^1(t_-, t_+]$. Но тогда решив задачу Коши $x(t_+) = \varphi(t_+)$ для $(1)_1$ и найдя ее решение ψ, получим, что функция $\chi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \leqslant t_+, \\ \psi(t), & t \geqslant t_+ \end{cases}$ есть продолжение φ за правый конец t_+ (в точке t_+ обе односторонние производные существуют и равны $f(t_+, \varphi(t_+))$, значит, имеется обычная производная), т. е. φ не было НР.

2. **Подход 2.** Если же под решением $(1)_1$ на отрезке понимается функция, лишь непрерывная на концах, но такая, что концы ИК лежат в B (пусть даже не требуется выполнение уравнения в концах) — получится все равно то же рассуждение, только в терминах соответствующего интегрального уравнения (см. подробно [1]).

Таким образом, сразу ограничиваясь лишь открытыми интервалами как множествами определения решений, мы не нарушали общности (а только избегали ненужной возни с односторонними производными и т. п.). □

В итоге мы ответили на вопрос 3, поставленный в начале § 4: при выполнении условия единственности (например, Осгуда или Коши—Пикара) имеет место единственность НР решения задачи Коши. Если же условие единственности нарушено, то может иметься много НР задачи Коши, каждое со своим интервалом существования. Любое решение (1) (или просто $(1)_1$) может быть продолжено до НР.

Чтобы ответить на вопросы 1,2, необходимо рассмотреть не переменную t отдельно, а поведение ИК в пространстве

$\mathbb{R}^{n+1}$. На вопрос о том, как ведет себя ИК «вблизи концов», отвечает

[Отметим, что интервал существования имеет концы, а ИК может их не иметь (конец ИК в B всегда не существует — см. Замечание выше, но может не существовать конец и на ∂B — см. ниже).]

Теорема. (о покидании компакта).

[мы ее формулируем в условиях локальной единственности, но это не обязательно — см. [1], там ТПК сформулирована как критерий НР.]

В условиях ТК—П график любого НР φ уравнения $(1)_1$ покидает любой компакт $K \subset B$, т. е. $\forall K \subset B$
$\exists [t_1, t_2] \subset (t_-, t_+)$: $(t, \varphi(t)) \notin K$ при $t \notin [t_1, t_2]$.

Пример. $K_\varepsilon = \{\, (t, x) \in B \mid \rho((t, x), \partial B) \geqslant \varepsilon \,\}$.

Замечание. Таким образом, ИК НР вблизи $t_\pm$ приближается к ∂B: $\rho((t, \varphi(t)), \partial B) \to 0$ при $t \to t_\pm$ — процесс продолжения решения не может оборваться строго внутри B.

[Отметим что $\rho(K, \partial B) = \rho(K, \mathbb{R}^{n+1} \setminus B)$ существует и положительно, здесь в качестве упражнения полезно доказать положительность расстояния между непересекающимися замкнутыми множествами, одно из которых — компакт.]

Доказательство. Фиксируем $K \subset B$. Возьмем любое $\rho_0 \in (0, \rho(K, \partial B))$. Если $B = \mathbb{R}^{n+1}$, то по определению считаем $\rho(K, \partial B) = +\infty$. Множество
$K_1 = \{\, (t, x) \mid \rho((t, x), K) \leqslant \rho_0/2 \,\}$ также есть компакт в B,

поэтому существует $F = \max_{K_1} |f|$. Выберем числа T и R достаточно малыми так, что любой цилиндр вида $C = \{|t - t_*| \leqslant T,\ |x - x_*| \leqslant R\} \subset K_1$ при $(t_*, x_*) \in K$. Например, достаточно взять $T^2 + R^2 \leqslant \rho_0^2/4$. Тогда задача Коши вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x); \qquad x(t_*) = x_* \tag{2}$$

имеет по ТК—П решение на интервале не у́же чем $(t_* - T_0, t_* + T_0)$, где $T_0 = \min(T, R/F)$ при всех $(t_*, x_*) \in K$.

Теперь в качестве искомого отрезка можно взять $[t_1, t_2] = [t_- - T_0, t_+ + T_0]$. В самом деле, надо показать, что если $(t_*, \varphi(t_*)) \in K$, то $t_- + T_0 \leqslant t_* \leqslant t_+ - T_0$. Покажем, например, второе неравенство. Решение ψ задачи Коши (2) с $x_* = \varphi(t_*)$ существует вправо как минимум до точки $t_* + T_0$, но φ является НР этой же задачи, которое ввиду единственности есть продолжение ψ, поэтому $t_* + T_0 \leqslant t_+$. $\square$

Таким образом, график НР всегда «доходит до ∂B», так что интервал существования НР зависит от геометрии ИК. Например:

Утверждение. Пусть $B = (a, b) \times \mathbb{R}^n$ (интервал конечный или бесконечный), f удовлетворяет условиям ТК—П в B, φ есть НР задачи (1) с $t_0 \in (a, b)$. Тогда либо $t_+ = b$, либо $|\varphi(t)| \to +\infty$ при $t \to t_+$ (и аналогично для t_-).

Доказательство. Итак, пусть $t_+ < b$, тогда $t_+ < +\infty$. Рассмотрим компакт $K = [t_0, t_+] \times B[0, R] \subset B$. При любом $R < +\infty$ по ТПК найдется $\gamma(R) < t_+$ такое, что при $t \in (\gamma(R), t_+)$ точка $(t, \varphi(t)) \notin K$. Но поскольку $t \leqslant t_+$, то это возможно только за счет $|\varphi(t)| > R$. Но это и означает

$|\varphi(t)| \to +\infty$ при $t \to t_+$. $\square$

В этом частном случае мы видим, что если f определена «при всех x», то интервал существования НР может быть меньше максимально возможного (a, b) только за счет стремления НР к ∞ при приближении к концам интервала (t_-, t_+) (в общем случае — к границе B).

Упражнение. Обобщить последнее Утверждение на случай, когда $B = (a, b) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная область. $\square$

Замечание. Надо понимать, что $|\varphi(t)| \to +\infty$ не означает какое-либо $\varphi_k(t) \to \infty$. $\square$

Тем самым мы ответили на вопрос 2 (ср. Пример в начале § 4): ИК доходит до ∂B, но ее проекция на ось t может не доходить до концов проекции B на ось t. Остается вопрос 1 — есть ли какие-то признаки, по которым, не решая ОДУ, можно судить о возможности продолжения решения на «максимально широкий интервал»? Мы знаем, что для линейных ОДУ это продолжение всегда возможно, а в Примере в начале § 4 это невозможно.

Рассмотрим сначала для иллюстрации частный случай УРП при $n = 1$:

$$\frac{dx}{dt} = a(t)b(x). \tag{3}$$

Замечание. Если $h \in C(\alpha, \beta)$, $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, то сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{\gamma}^{\beta} h(s)ds$ (несобственного ввиду $\beta = +\infty$ или ввиду особенности h в точке β) не зависит от выбора $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Поэтому далее будем просто писать $\int^{\beta} h(s)ds$, когда речь идет о сходимости или расходимости этого интеграла. $\square$

$\left[\text{это можно было сделать уже в теореме Осгуда и в связанных с ней утверждениях.}\right]$

Утверждение. Пусть $a \in C(\alpha, \beta)$, $b \in C(\gamma, +\infty)$, обе функции положительны на своих интервалах. Пусть задача Коши

$$\frac{dx}{dt} = a(t)b(x), \qquad x(t_0) = x_0$$

(где $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $x_0 > \gamma$) имеет НР $x = x(t)$ на интервале $(t_-, t_+) \subset (\alpha, \beta)$. Тогда:

1. если $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{d\eta}{b(\eta)} = +\infty$, то $t_+ = \beta$;
2. если $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{d\eta}{b(\eta)} < +\infty$, то либо $t_+ < \beta$, либо $\displaystyle\int^{\beta} a(s)ds < +\infty$.

Следствие. Если $a = 1$, $\beta = +\infty$, то $t_+ = +\infty \iff \displaystyle\int^{+\infty} \frac{d\eta}{b(\eta)} = +\infty$.

Доказательство. (Утверждения). Заметим, что x монотонно возрастает.

Упражнение. Доказать. $\square$

Поэтому существует $x(t_+) = \lim\limits_{t \to t_+ - 0} x(t) \leqslant +\infty$. Имеем при $t \in (t_-, t_+)$: $\displaystyle\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\eta}{b(\eta)} = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$. При $t \to t_+$ получим

$$\int\limits_{x_0}^{x(t_+)} \frac{d\eta}{b(\eta)} = \int\limits_{t_0}^{t_+} a(s)ds.$$

Случай 1. $t_+ < \beta$, $x(t_+) < +\infty$ — невозможно по ТПК, т. к. x есть НР.

Случай 2. $t_+ < \beta$, $x(t_+) = +\infty$. Тогда
$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{d\eta}{b(\eta)} = \int\limits_{t_0}^{t_+} a(s)ds < +\infty.$$

Случай 3. $t_+ = \beta$, $x(\beta) = +\infty$. Тогда $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{d\eta}{b(\eta)} = \int\limits_{t_0}^{\beta} a(s)ds$ — оба интеграла либо конечны, либо бесконечны.

Случай 4. $t_+ = \beta$, $x(\beta) < +\infty$. Тогда
$$\int\limits_{t_0}^{\beta} a(s)ds = \int\limits_{x_0}^{x(\beta)} \frac{d\eta}{b(\eta)} < +\infty.$$

Упражнение. Доделать доказательство.

Обоснование для преподавателя. В итоге получаем, что $\int^{+\infty} \frac{d\eta}{b(\eta)} = +\infty$ возможно только в случаях 3 или 4, т. е. при $t_+ = \beta$, а $\int^{+\infty} \frac{d\eta}{b(\eta)} < +\infty$ возможно во всех случаях, но тогда в случае 2: $t_+ < \beta$, в случае 3: $\int\limits_{t_0}^{\beta} a(s)ds < +\infty$, а в случае 4 (если он вообще реализуется) то же самое. $\square$

Таким образом, для простейших ОДУ при $n = 1$ вида $x' = f(x)$ продолжимость решений до ∞ определяется сходимостью интегралов $\int\limits^{\pm\infty} \dfrac{d\eta}{f(\eta)}$.

$\Big[$Более подробно о структуре решений таких (так наз. *автономных*) уравнений см. Часть 3.$\Big]$

Пример. Для $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \leqslant 1$ (в частности, линейный случай $\alpha = 1$), и $f(x) = x \ln x$ можно гарантировать продолжимость (положительных) решений до $+\infty$. Для $f(x) = x^\alpha$ и $f(x) = x \ln^\alpha x$ при $\alpha > 1$ решения «разрушаются за конечное время». □

В общем случае ситуация определяется многими факторами и не так проста, но остается важность «скорости роста f по x». При $n > 1$ формулировать критерии продолжимости затруднительно, но достаточные условия существуют. Как правило, они обосновываются с помощью так наз. *априорных оценок* решений.

Определение. Пусть $h \in C(\alpha, \beta)$, $h > 0$. Говорят, что для решений некоторого ОДУ имеет место АО $|x(t)| \leqslant h(t)$ на (α, β), если любое решение этого ОДУ удовлетворяет этой оценке на той части интервала (α, β), где оно определено (т. е. не предполагается, что решения обязательно определены на всем интервале (α, β)). □

Но оказывается, что наличие АО гарантирует, что решения будут все-таки определены на всем (α, β) (а значит удовлетворять оценке на всем интервале), так что априорная оценка превращается в апостериорную:

Теорема. Пусть задача Коши (1) удовлетворяет условиям ТК—П, а для ее решений имеет место АО на интервале (α, β)

с некоторой $h \in C(\alpha, \beta)$, причем криволинейный цилиндр $\{|x| \leqslant h(t), t \in (\alpha, \beta)\} \subset B$. Тогда НР (1) определено на всем (α, β) (а значит, удовлетворяет АО).

Доказательство. Докажем, что $t_+ \geqslant \beta$ ($t_- \leqslant \alpha$ аналогично). Допустим, $t_+ < \beta$. Рассмотрим компакт
$K = \{|x| \leqslant h(t), t \in [t_0, t_+]\} \subset B$. По ТПК при $t \to t_+$ точка графика $(t, x(t))$ покидает K, что невозможно ввиду АО. $\square$

Таким образом, для доказательства продолжимости решения на некоторый интервал достаточно формально оценить решение на всем требуемом интервале.

[Аналогия: измеримость функции по Лебегу и формальная оценка интеграла влекут реальное существование интеграла.]

Приведем некоторые примеры ситуаций, как эта логика работает. Начнем с иллюстрации приведенного выше тезиса о «росте f по x достаточно медленном».

Утверждение. Пусть $B = (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$, f удовлетворяет условиям ТК—П в B, $|f(t,x)| \leqslant a(t)b(|x|)$, где a и b удовлетворяют условиям предыдущего Утверждения с $\gamma = 0$, причем $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{d\eta}{b(\eta)} = +\infty$. Тогда НР задачи (1) существует на (α, β) при всех $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Лемма. Если ξ и η непрерывны, $\xi(t_0) \geqslant \eta(t_0)$; при $t \geqslant t_0$ $\dfrac{d\xi}{dt} = g(t, \xi)$ и $\dfrac{d\eta}{dt} < g(t, \eta)$, то при $t > t_0$ верно $\eta(t) < \xi(t)$.

Доказательство. Заметим, что $\xi > \eta$ в окрестности $(t_0, t_0 + \varepsilon)$: если $\xi(t_0) > \eta(t_0)$, то это сразу очевидно, а иначе (если $\xi(t_0) = \eta(t_0) = \xi_0$) имеем $\xi'(t_0) = g(t_0, \xi_0) > \eta'(t_0)$, что снова дает требуемое.

Допустим теперь, что найдется $t_1 > t_0$ такая, что $\eta(t_1) \geqslant \xi(t_1)$. Очевидными рассуждениями можно найти $t_2 \in (t_0, t_1]$ такую, что $\eta(t_2) = \xi(t_2)$, и $\eta < \xi$ на (t_0, t_2). Но тогда в точке t_2 имеем $\eta = \xi$, $\eta' > \xi'$ — противоречие. □

[g любая, и самом деле нужно лишь $\xi, \eta \in C$, $\exists \xi', \eta'$, и везде где $\xi = \eta$, там $\xi' > \eta'$. Но чтобы не забивать голову, рассмотрим так, как в Лемме. Здесь строгое неравенство, но зато нелинейное ОДУ, а еще есть так наз. лемма Гронуолла — см. далее — там нестрогое неравенство для линейного ОДУ.]

Замечание для преподавателя. Неравенства такого рода как в Лемме называются неравенствами типа Чаплыгина (НЧ). Легко видеть, что в Лемме не нужно было условие единственности, так что такое «строгое НЧ» верно и в рамках теоремы Пеано. «Нестрогое НЧ» заведомо неверно без единственности, т. к. равенство — частный случай нестрогого неравенства. Наконец, «нестрогое НЧ» в рамках условия единственности верно, но удается доказать его лишь локально — с помощью ИМ.

Доказательство. (Утверждения). Докажем, что $t_+ = \beta$ ($t_- = \alpha$ аналогично). Допустим, $t_+ < \beta$, тогда по Утверждению выше $|x(t)| \to +\infty$ при $t \to t_+$, так что можно считать $x \neq 0$ на $[t_+ - \varepsilon, t_+)$. Но тогда на этом интервале $|x|' \leqslant |x'| = |f(t,x)| \leqslant a(t)b(|x|) < 2a(t)b(|x|)$. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dh}{dt} = 2a(t)b(h), \qquad h(t_+ - \varepsilon) = |x|(t_+ - \varepsilon).$$

По Утверждению выше h существует и непрерывна на $[t_+ - \varepsilon, \beta)$, а значит ограничена на $[t_+ - \varepsilon, t_+]$. Если мы докажем АО $|x| \leqslant h$ на $[t_+ - \varepsilon, t_+)$, то по Теореме получим противоречие, и Утверждение будет доказано. А эта АО следует из Леммы. $\square$

Пример ситуации, когда наличие АО, несмотря на произвольный рост f по x, дает глобальное существование, дается в следующем утверждении:

Утверждение. Пусть функция f в задаче (1) удовлетворяет условиям ТК—П в $B = \mathbb{R}^{n+1}$, причем
$x \cdot f(t,x) \leqslant a(t)|x|^2$ при $|x| > R$, где $a \in C(\mathbb{R})$. Тогда НР (1) существует вплоть до $+\infty$.

[Здесь и в аналогичных утверждениях выше и ниже достаточно рассматривать $+\infty$, т. к. замена $t := -t$ сводит любую ситуацию к этой.]

Пример. $x' = t^3 - x^3$ $(n = 1)$.

Доказательство. При $|x| \leqslant R$ имеем
$x \cdot f(t,x) \leqslant R \max\limits_{|x| \leqslant R} |f(t,x)| = b(t)$, где $b \in C(\mathbb{R})$. Таким образом, для всех (t,x) имеем $x \cdot f(t,x) \leqslant a(t)|x|^2 + b(t)$. Для любого решения (1) можно написать

$$\frac{d}{dt}|x|^2 = 2x \cdot x' = 2x \cdot f(t,x) \leqslant$$
$$\leqslant 2a(t)|x|^2 + 2b(t) < 2a(t)|x|^2 + 2b(t) + 1.$$

По Лемме это означает АО $|x(t)|^2 < h(t)$ при $t > t_0$, где h — НР задачи

$$\frac{dh}{dt} = 2a(t)h + 2b(t) + 1, \qquad h(t_0) = |x(t_0)|^2.$$

А поскольку $h \in C(t_0, +\infty)$, то по Теореме получаем требуемое. $\square$

Наконец, рассмотрим достаточно общий пример, показывающий, что при наличии двух условий:

A. локальная теорема существования на интервале, длина которого оценивается снизу положительной величиной, зависящей от нормы начальных данных;

B. АО решения, зависящая от нормы начальных данных

получается глобальная теорема существования.

Рассмотрим систему

$$x' = f(x), \tag{4}$$

где $f(0) = 0$, $f \in C^1(B[0, R])$ (шар для удобства замкнутый). Задача Коши $x(0) = 0$ имеет единственное НР $x = 0$ на $\mathbb{R}$. Укажем достаточное условие на f, при котором существование НР на $\mathbb{R}^+$ можно гарантировать при всех достаточно малых $x_0 = x(0)$. Для этого предположим, что (4) имеет так наз. *функцию Ляпунова*, т. е. такую функцию V, что:

1. $V \in C^1(B(0, R))$;
2. $\mathrm{sgn} V(x) = \mathrm{sgn}|x|$;
3. $f \cdot \nabla V \leqslant 0$ в $B(0, R)$.

Проверим выполнение условий A и B:

A. Рассмотрим задачу Коши

$$x' = f(x), \qquad x(t_1) = x_1, \tag{5}$$

где $|x_1| < R/2$. Построим цилиндр
$C = \{|t - t_1| \leqslant T,\ |x - x_1| \leqslant R/2\} \subset B$, где
$B = \mathbb{R} \times B(0, R)$ — область определения функции f, где она ограничена и класса C^1, так что существует

$F = \max\limits_{B[0,R]} |f|$. По ТК—П найдется решение (5), определенное на интервале $(t_1 - T_0, t_1 + T_0)$, где $T_0 = \min(T, R/(2F))$. Выбором достаточно большого T можно добиться $T_0 = R/(2F)$. Важно, что T_0 не зависит от выбора (t_1, x_1), лишь бы $|x_1| < R/2$.

B. Пока решение (5) определено и остается в шаре $B(0, R)$, мы можем провести следующее рассуждение. Имеем: $\dfrac{d}{dt}V(x(t)) = f(x(t)) \cdot \nabla V(x(t)) \leqslant 0$, т. е. $V(x(t)) \leqslant V(x_1)$ при $t \geqslant t_1$. Обозначим $m(r) = \min\limits_{r \leqslant |y| \leqslant R} V(y)$, $M(r) = \max\limits_{|y| \leqslant r} V(y)$. Ясно, что m и M не убывают, непрерывны в нуле, $m(0) = M(0) = 0$, а вне нуля они положительны. Поэтому найдется $R_* > 0$ такое, что $M(R_*) < m(R/2)$. Если $|x_1| \leqslant R_*$, то тогда $V(x(t)) \leqslant V(x_1) \leqslant M(R_*) < m(R/2)$, откуда $|x(t)| < R/2$. Заметим, что $R_* < R/2$.

Теперь мы можем сформулировать теорему, которая из пп. A,B выводит глобальное существование решений (4):

Теорема. Если (4) имеет функцию Ляпунова в $B(0, R)$, то при всех $x_0 \in B(0, R_*)$ (где R_* определена выше) НР задачи Коши $x(t_0) = x_0$ для системы (4) (с любым t_0) определено до $+\infty$.

Доказательство. В силу п. A решение можно построить на $[t_0, t_1]$, где $t_1 = t_0 + T_0/2$. Это решение лежит в $B(0, R)$ и к нему примени́м п. B, так что $|x(t_1)| < R/2$. Снова применяем п. A и получаем решение на $[t_1, t_2]$, где $t_2 = t_1 + T_0/2$, т. е. теперь решение построено на $[t_0, t_2]$. К этому решению применяем п. В и получаем $|x(t_2)| < R/2$, и т. д. За счетное число шагов получим решение на $[t_0, +\infty)$. $\square$

Пример. $(x_1, x_2)' = (x_2^3, -x_1^3)$; $V(x) = x_1^4 + x_2^4$.

Упражнение. Вычислить R и R_*, доказать что любое НР существует до $+\infty$.

[хотя из предшествующих теорем этот факт не очевиден.]

§ 5. Зависимость решений ОДУ от параметров

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu); \qquad x|_{t=t_0(\mu)} = x_0(\mu), \tag{1}$$

где $\mu \in \mathbb{R}^k$. Если при каких-то μ, $t_0(\mu)$, $x_0(\mu)$ эта задача Коши имеет НР, то оно есть $x(t, \mu)$. Возникает вопрос: как изучить зависимость x от μ? Этот вопрос важен в силу различных приложений (и возникнет особенно в Части 3), одно из которых (хотя возможно и не самое важное) — приближенное решение ОДУ.

Пример. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = x + \frac{1}{100}(t + x^2), \qquad x(0) = 1. \tag{2}$$

Ее НР существует и единственно, как это следует из ТК—П, но выразить его в элементарных функциях невозможно. Как тогда исследовать его свойства? Один из способов таков: заметим, что (2) «близка» к задаче $y' = y$,

$y(0) = 1$, решение которой легко находится: $y(t) = e^t$. Можно предположить, что $x(t) \approx y(t) = e^t$. Четко эта идея оформляется так: рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = x + \mu(t + x^2), \qquad x(0) = 1. \tag{3}$$

При $\mu = 1/100$ это (2), а при $\mu = 0$ это задача для y. Если мы докажем, что $x = x(t, \mu)$ непрерывна по μ (в определенном смысле), то получим, что $x(t, \mu) \to y(t)$ при $\mu \to 0$, а это и означает $x(t, 1/100) \approx y(t) = e^t$. $\square$

[Правда, остается неясным, насколько близко x к y, но доказательство непрерывности x по μ является первым необходимым шагом, без которого невозможно продвижение дальше.]

Аналогично является полезным и исследование зависимости от параметров в начальных данных. Как мы увидим позже, эта зависимость легко сводится к зависимости от параметра в правой части уравнения, так что пока ограничимся задачей вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu); \qquad x(t_0) = x_0. \tag{4}$$

Пусть $f \in C(D)$, где D — область в $\mathbb{R}^{n+k+1}$; f липшицева по x в любом выпуклом по x компакте из D (например, достаточно $\dfrac{\partial f}{\partial x} \in C(D)$). Фиксируем (t_0, x_0). Обозначим $M = \left\{ \mu \in \mathbb{R}^k \mid (t_0, x_0, \mu) \in D \right\}$ — это множество допустимых μ (при которых задача (4) имеет смысл). Отметим, что M открыто. Будем считать, что (t_0, x_0) подобраны так, что $M \neq \emptyset$. По ТК—П для всех $\mu \in M$ существует единственное НР задачи (4) — функция $x = \varphi(t, \mu)$, определенная на интервале $t \in (t_-(\mu), t_+(\mu))$.

Строго говоря, поскольку φ зависит от многих переменных, надо записывать (4) так:

$$\frac{\partial \varphi(t,\mu)}{\partial t} = f(t, \varphi(t,\mu), \mu); \qquad \varphi(t_0, \mu) = x_0, \tag{5}$$

где $(5)_1$ выполнено на множестве
$G = \{\, (t,\mu) \mid \mu \in M,\ t \in (t_-(\mu), t_+(\mu)) \,\}$. Впрочем, отличие значков d/dt и $\partial/\partial t$ чисто психологическое (их употребление зависит от такого же психологического понятия «фиксировать μ»). Таким образом, множество G является естественным максимальным множеством определения функции φ, и вопрос о непрерывности φ следует исследовать именно на G.

Нам потребуется вспомогательный результат:

Лемма. (Гронуолла). Пусть функция $\psi \in C[t_0, T]$, $\psi \geqslant 0$, удовлетворяет для всех $t \in [t_0, T]$ оценке

$$\psi(t) \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \Big(A(s)\psi(s) + B(s) \Big) ds + \gamma, \text{ где } A, B \in C[t_0, T],\ A \geqslant 0.$$

Тогда при всех $\xi \in [t_0, T]$ верно

$$\psi(\xi) \leqslant \int\limits_{t_0}^{\xi} B(t) \exp\left(\int\limits_{t}^{\xi} A(s)ds \right) dt + \gamma \exp\left(\int\limits_{t_0}^{\xi} A(s)ds \right).$$

Замечание для преподавателя. При чтении лекции можно и не запоминать эту формулу заранее, а оставить место, а после вывода вписать. Но потом держать эту формулу на виду, т. к. нужно будет в ТоНЗ.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$h(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Big(A(s)\psi(s) + B(s)\Big) ds + \gamma$. Имеем на $[t_0, T]$: $\psi \leqslant h$, $h' = A\psi + B \leqslant Ah + B$, откуда

$$\frac{d}{dt}\left[h(t)\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} A(s)ds\right)\right] \leqslant B(t)\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} A(s)ds\right),$$

что после $\int\limits_{t_0}^{\xi} dt$ дает с учетом $h(t_0) = \gamma$:

$$h(\xi)\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{\xi} A(s)ds\right) - \gamma \leqslant \int\limits_{t_0}^{\xi} B(t)\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} A(s)ds\right) dt,$$

откуда получаем требуемое. $\square$

[Смысл этой леммы: дифференциальные уравнение и неравенство, связь между ними, интегральные уравнение и неравенство, связь между ними всеми, дифференциальная и интегральная леммы Гронуолла и связь между ними.]

Замечание. Можно доказать эту лемму и при более общих предположениях о ψ, A и B, но это нам пока не нужно, а будет сделано в курсе УМФ (так, легко видеть, что мы не использовали непрерывность A и B, и т. п.).

Теперь мы готовы четко сформулировать результат:

Теорема. (ТоНЗ) При сделанных предположениях о f и в обозначениях введенных выше можно утверждать, что G открыто, а $\varphi \in C(G)$.

Замечание. Ясно, что множество M вообще говоря не связно, так что и G может быть не связным.

Замечание для преподавателя. Однако если бы мы включили (t_0, x_0) в число параметров, то связность была бы — так сделано в [1].

Доказательство. Пусть $(t_*, \mu_*) \in G$. Надо доказать, что:

1. $\exists \delta_0 > 0$: $\forall (t, \mu) \in B((t_*, \mu_*), \delta_0) \Longrightarrow (t, \mu) \in G$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0, \delta_0)$: $\forall (t, \mu) \in B((t_*, \mu_*), \delta) \Longrightarrow$ $|\varphi(t, \mu) - \varphi(t_*, \mu_*)| < \varepsilon$.

Пусть для определенности $t_* \geqslant t_0$. Имеем: $\mu_* \in M$, так что $\varphi(t, \mu_*)$ определена на $(t_-(\mu_*), t_+(\mu_*)) \ni t_*, t_0$, а значит на некотором отрезке $[t_0, t_1]$ таком, что $t_* \in [t_0, t_1)$, $t_1 > t_0$. При изменении $t \in [t_0, t_1]$ точка $(t, \varphi(t, \mu_*), \mu_*)$ пробегает компактную кривую $\Gamma \subset D$ (параллельную гиперплоскости $\{\mu = 0\}$). Значит, множество вида

$$\Pi = \{\, (t, x, \mu) \mid t \in [t_0, t_1],\ |x - \varphi(t, \mu_*)| \leqslant a,\ |\mu - \mu_*| \leqslant b \,\}$$

[Определение Π нужно держать перед глазами постоянно!]

тоже есть компакт в D при достаточно малых a и b (выпуклый по x), так что на Π функция f липшицева по x:

$$|f(t, x, \mu) - f(t, y, \mu)| \leqslant K|x - y|, \forall (t, x, \mu), (t, y, \mu) \in \Pi, \quad (6)$$

[Эту оценку нужно держать перед глазами постоянно!]

и равномерно непрерывна по всем переменным, а тем более по μ:

$$|f(t, x, \mu_1) - f(t, x, \mu_2)| \leqslant \beta(|\mu_1 - \mu_2|), \forall (t, x, \mu_1), (t, x, \mu_2) \in \Pi. \quad (7)$$

[Эту оценку нужно держать перед глазами постоянно!]

Рассмотрим произвольное μ_1 такое, что $|\mu_1 - \mu_*| \leqslant b$ и соответствующее решение $\varphi(t, \mu_1)$. Множество $\Pi \cap \{\mu = \mu_1\}$ есть компакт в $D \cap \{\mu = \mu_1\}$, причем при $t = t_0$ точка

$$(t, \varphi(t, \mu_1), \mu_1) = (t_0, x_0, \mu_1) = (t_0, \varphi(t_0, \mu_*), \mu_1) \in \Pi \cap \{\mu = \mu_1\},$$

а по ТПК при $t \to t_+(\mu_1)$ точка $(t, \varphi(t, \mu_1), \mu_1)$ покидает $\Pi \cap \{\mu = \mu_1\}$. Пусть $t_2 > t_0$ $(\exists t_2 < t_+(\mu_1))$ — самое первое значение, при котором упомянутая точка выходит на $\partial\Pi$. По построению, $t_2 \in (t_0, t_1]$. Нашей задачей будет показать, что $t_2 = t_1$ при дополнительных ограничениях на μ. Пусть теперь $t_3 \in [t_0, t_2]$. Имеем (при всех таких t_3 все величины используемые далее определены по построению):

$$\varphi(t_3, \mu_1) - \varphi(t_3, \mu_*) = \int\limits_{t_0}^{t_3} \Big[f(t, \varphi(t, \mu_1), \mu_1) - f(t, \varphi(t, \mu_*), \mu_*) \Big] dt,$$

[Попробуем доказать, что эта величина по модулю меньше a.]

где подынтегральная функция оценивается так:

$$|f(t, \varphi(t, \mu_1), \mu_1) - f(t, \varphi(t, \mu_*), \mu_*)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(t, \varphi(t, \mu_1), \mu_1) - f(t, \varphi(t, \mu_*), \mu_1)| +$$

$$+ |f(t, \varphi(t, \mu_*), \mu_1) - f(t, \varphi(t, \mu_*), \mu_*)| \leqslant$$

[применяем (6), (7), что возможно ввиду $(t,\varphi(t,\mu_1),\mu_1),(t,\varphi(t,\mu_*),\mu_1),(t,\varphi(t,\mu_*),\mu_*) \in \Pi$, т. к. $t \in [t_0,t_3] \subset [t_0,t_2] \subset [t_0,t_1]$, $|\mu_1-\mu_*| \leqslant b$, а $(t,\varphi(t,\mu_1),\mu_1) \in \Pi$ ввиду $t \in [t_0,t_2]$.

Замечание для преподавателя. Надо именно $\pm f(t,\varphi(t,\mu_*),\mu_1)$, а не $\pm f(t,\varphi(t,\mu_1),\mu_*)$, т. к. на разность $|\varphi(t,\mu_1)-\varphi(t,\mu_*)|$ как раз нет оценки пока, так что $(t,\varphi(t,\mu_1),\mu_*) \in \Pi$ неясно, а вот для $|\mu_1-\mu_*|$ есть, и $(t,\varphi(t,\mu_*),\mu_1) \in \Pi$ известно.]

$$\leqslant K|\varphi(t,\mu_1)-\varphi(t,\mu_*)| + \beta(|\mu_1-\mu_*|),$$

так что в итоге

$$|\varphi(t_3,\mu_1)-\varphi(t_3,\mu_*)| \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_3} \Big[K|\varphi(t,\mu_1)-\varphi(t,\mu_*)|+\beta(|\mu_1-\mu_*|)\Big]dt.$$

Таким образом, функция $\psi(t_3) = |\varphi(t_3,\mu_1)-\varphi(t_3,\mu_*)| \geqslant 0$ (это непрерывная функция) удовлетворяет условиям леммы Гронуолла с $A(s) \equiv K > 0$, $B(s) \equiv \beta(|\mu_1-\mu_*|)$, $T = t_2$, $\gamma = 0$, так что по этой лемме получаем

$$|\varphi(t_3,\mu_1)-\varphi(t_3,\mu_*)| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{t_3} \beta(|\mu_1-\mu_*|)\exp(K(t_3-t))dt =$$

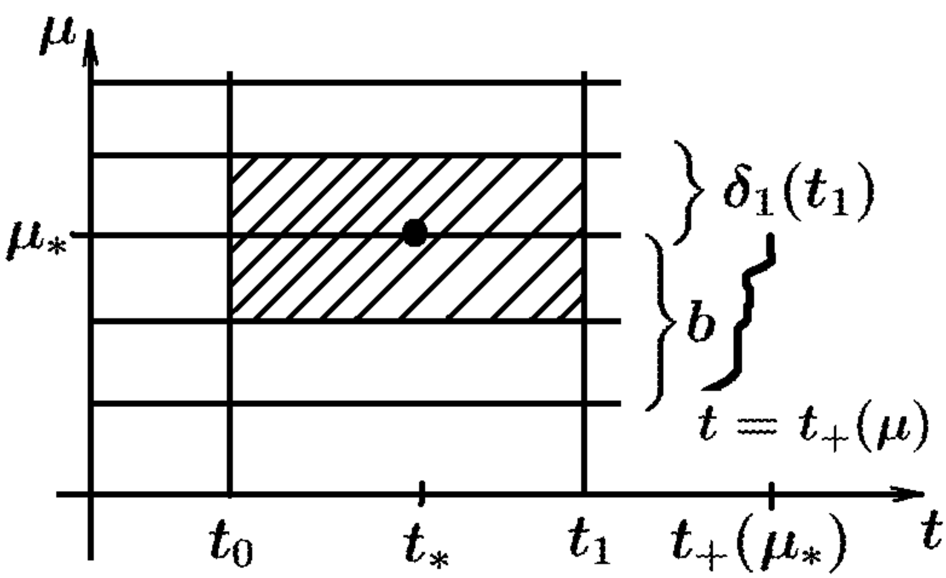
$$= \frac{\exp(K(t_3-t_0))-1}{K}\beta(|\mu_1-\mu_*|) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\exp(K(t_1-t_0))-1}{K}\beta(|\mu_1-\mu_*|) < a,$$

[Эту оценку нужно держать перед глазами постоянно!]

если брать $|\mu_1 - \mu_*| < \delta_1(t_1)$. Будем считать, что $\delta_1(t_1) < b$. Все наши рассуждения верны при всех $t_3 \in [t_0, t_2]$. Таким образом, при таком выборе μ_1, когда $t_3 = t_2$, все же $|\varphi(t_2, \mu_1) - \varphi(t_2, \mu_*)| < a$, а также $|\mu_1 - \mu_*| < b$. Значит, $(t_2, \varphi(t_2, \mu_1), \mu_1) \in \partial\Pi$ возможно только за счет того, что $t_2 = t_1$. Но это в частности означает, что $\varphi(t, \mu_1)$ определено на всем отрезке $[t_0, t_1]$, т. е. $t_1 < t_+(\mu_1)$, и все точки вида $(t, \mu_1) \in G$, если $t \in [t_0, t_1]$, $|\mu_1 - \mu_*| < \delta_1(t_1)$.

[Т. е. хотя t_+ зависит от μ, но отрезок $[t_0, t_1]$ остается левее $t_+(\mu)$ при μ, достаточно близких к μ_*. На рисунке $k = 1$.]



Аналогично при $t_* \leqslant t_0$ показывается существование чисел $t_4 < t_0$ и $\delta_2(t_4)$. Если $t_* > t_0$, то точка $(t_*, \mu_*) \in [t_0, t_1] \times B(\mu_*, \delta_1) \subset G$, аналогично при $t_* < t_0$, а если $t_* = t_0$, то применимы оба случая, так что $(t_0, \mu_*) \in [t_4, t_1] \times B(\mu_*, \delta_3) \subset G$, где $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$. Важно, что при фиксированном (t_*, μ_*) можно найти $t_1(t_*, \mu_*)$ так,

что $t_1 - t_* > 0$ (или соответственно t_4), и
$\delta_1(t_1) = \widetilde{\delta}_1(t_*, \mu_*) > 0$ (или соответственно δ_2), так что выбор $\delta_0 = \delta_0(t_*, \mu_*)$ ясен (т. к. в полученную цилиндрическую окрестность можно вписать шар).

[на самом деле доказано более тонкое свойство: если НР определено на некотором отрезке, то на нем определены все НР с достаточно близкими параметрами (т. е. все мало возмущенные НР). Впрочем, и наоборот, это свойство следует из открытости G, как будет показано ниже, так что это эквивалентные формулировки.]

Тем самым мы доказали п. 1.

Если мы находимся в указанном цилиндре в пространстве $\{(t, \mu)\}$: $|\mu_1 - \mu_*| < \delta_1(t_1)$, $t_3 \in [t_0, t_2] \overset{\text{в силу предыдущего}}{=} [t_0, t_1]$, то верна оценка

$$|\varphi(t_3, \mu_1) - \varphi(t_3, \mu_*)| \leqslant \frac{\exp(K(t_1 - t_0)) - 1}{K} \beta(|\mu_1 - \mu_*|) < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $|\mu_1 - \mu_*| < \delta_4(\varepsilon, t_*, \mu_*)$. В то же время
$|\varphi(t_3, \mu_*) - \varphi(t_*, \mu_*)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $|t_3 - t_*| < \delta_5(\varepsilon, t_*, \mu_*)$ ввиду непрерывности φ по t. В итоге при $(t_3, \mu_1) \in B((t_*, \mu_*), \delta)$ имеем $|\varphi(t_3, \mu_1) - \varphi(t_*, \mu_*)| < \varepsilon$, где $\delta = \min(\delta_4, \delta_5)$. Это и есть п. 2. $\square$

Чаще всего доказанная теорема применяется в виде следующего следствия (которое на самом деле и доказывалось в самой теореме, но полезно вывести его как следствие из формулировки теоремы):

[Доказанная ТоНЗ — это так наз. интегральная форма, а нижеследующее Следствие — классическая форма ТоНЗ]

Следствие. Пусть в условиях ТоНЗ $\mu_* \in M$, а $\varphi(t, \mu_*)$ определено при $t \in [a, b]$. Тогда:

1. найдется такое $\delta_0 > 0$, что при всех $\mu \in B(\mu_*, \delta_0)$ все $\varphi(t, \mu)$ также определены при $t \in [a, b]$;

2. $\varphi(t, \mu) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(t, \mu_*)$ при $\mu \to \mu_*$, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in (0, \delta_0)$:
$$|\mu - \mu_*| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_*)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b].$$

Доказательство. Поскольку компакт $[a, b] \times \{\mu_*\} \subset G$ по условию, то его компактная «окрестность» $[a, b] \times B[\mu_*, \delta_0] \subset G$ при достаточно малых $\delta_0 > 0$. Но это и есть п. 1. Функция φ равномерно непрерывна на этом компакте, откуда следует п. 2. $\square$

Рассмотрим теперь общий случай (1). Так же введем множество $M = \{\, \mu \mid \text{определена точка } (t_0(\mu), x_0(\mu), \mu) \in D \,\}$, и для всех $\mu \in M$ построим НР $\psi(t, \mu)$ задачи (1) на интервале $(t_-(\mu), t_+(\mu))$, получим множество G. Обозначим $\varphi(t, \mu) = \psi(t + t_0(\mu), \mu) - x_0(\mu)$ — эта функция определена при $\mu \in M$, $t \in (t_-(\mu) - t_0(\mu), t_+(\mu) - t_0(\mu))$, причем $\varphi(0, \mu) = 0$; и
$$\frac{\partial \varphi(t, \mu)}{\partial t} = \psi_t(t + t_0(\mu), \mu) = f(t + t_0(\mu), \psi(t + t_0(\mu), \mu), \mu) =$$
$$= f(t + t_0(\mu), \varphi(t, \mu) + x_0(\mu), \mu),$$
т. е. φ является НР задачи Коши
$$\frac{dx}{dt} = f(t + t_0(\mu), x + x_0(\mu), \mu), \qquad x(0) = 0. \tag{8}$$
Таким образом, чтобы применить к этой задаче ТоНЗ, достаточно потребовать непрерывности $t_0(\mu)$ и $x_0(\mu)$. Точную

формулировку дадим в случае, когда f не содержит параметров, а t_0 и x_0 сами являются «чистыми параметрами», и нас интересует $\psi(t, t_0, x_0)$:

Теорема. Пусть f удовлетворяет условиям ТК—П (здесь $M = B$),

$$\widetilde{G} = \{\, (t, t_0, x_0)) \mid (t_0, x_0) \in B;\ t \in (t_-(t_0, x_0), t_+(t_0, x_0)) \,\}$$

— множество определения НР $\psi(t, t_0, x_0)$ задачи $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$. Тогда $\widetilde{G}$ открыто, а $\psi \in C(\widetilde{G})$.

[В этом случае $\widetilde{G}$ связно, т. к. это «надстройка переменной толщины по t» над связной областью $B = \{(t_0, x_0)\}$. Кстати, отсюда уже́ очевидна открытость $\widetilde{G}$, т. к. B открыта, и надстройка делается открытыми интервалами.]

Доказательство. Заменой $\varphi(t, t_0, x_0) = \psi(t + t_0, t_0, x_0) - x_0$ сводим задачу к задаче $\dfrac{dx}{dt} = f(t + t_0, x + x_0)$, $x(0) = 0$, и применяем ТоНЗ к её НР φ. Получим что множество

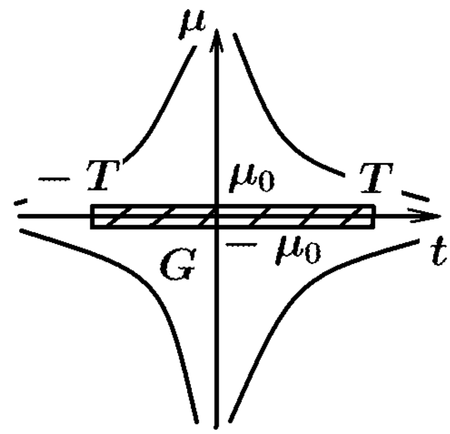
$$G = \{(t_0, x_0) \in B,\ t \in (t_-(t_0, x_0) - t_0, t_+(t_0, x_0) - t_0)\}$$

открыто, а $\varphi \in C(G)$. Переход $G \to \widetilde{G}$ не нарушает открытости, т. к. является сдвигом, также сохраняется и непрерывность. $\square$

Аналогично можно сформулировать общий результат о системе (1) и следствие из него (как это сделано для ТоНЗ в доказанном варианте).

Упражнение. Сделать это. $\square$

Вернемся теперь в нашему примеру (3). В нем очевидно $D = \mathbb{R}^3$, $M = \mathbb{R}$, $(t_-(0), t_+(0)) = \mathbb{R}$, причем можно показать, что при $\mu \neq 0$ интервал $(t_-(\mu), t_+(\mu))$ конечен (это следует из рассуждений § 4) и стягивается к нулю при $\mu \to \pm\infty$. Однако из Следствия из ТоНЗ следует, что при $\mu \to 0$ этот интервал стремится к $\mathbb{R}$ (т. е. G имеет вид как на рис.), и на каждом прямоугольнике вида $[-T, T] \times [-\mu_0, \mu_0]$, попадающем в G, решение x равномерно непрерывно, так что при любом $T > 0$



$$x(t,\mu) \overset{t\in[-T,T]}{\rightrightarrows} x(t,0) = e^t \qquad \text{при } \mu \to 0. \tag{9}$$

Тем самым мы строго обосновали рассуждения в начале § 5. Однако остается неясной численная оценка близости в (9). Для этого естественно строить следующие приближения ((9) есть нулевое приближение). Предположим, что x имеет производную по μ. Тогда имеем:
$x(t,\mu) = x(t,0) + \dfrac{\partial x}{\partial \mu}(t,0)\mu + \ldots$. Надо найти $\left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$. Для этого проделаем следующие рассуждения. Имеем при $(t,\mu) \in G$:

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t,\mu) = x(t,\mu) + \mu(t + x^2(t,\mu)), \qquad x(0,\mu) = 1.$$

Применим $\partial/\partial\mu$ к обоим равенствам. Получим:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\mu\partial t}(t,\mu) = \frac{\partial x}{\partial \mu}(t,\mu) + t + x^2(t,\mu) + 2\mu x(t,\mu)\frac{\partial x}{\partial \mu}(t,\mu),$$

$$\frac{\partial x}{\partial \mu}(0,\mu) = 0.$$

При $\mu = 0$ получим (для $t \in (t_-(0), t_+(0)) = \mathbb{R}$):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\mu\partial t}(t,0) = \frac{\partial x}{\partial\mu}(t,0) + t + x^2(t,0), \qquad \frac{\partial x}{\partial\mu}(0,0) = 0.$$

Обозначим искомую величину $v(t) = \dfrac{\partial x}{\partial\mu}(t,0)$. Тогда:

$$\frac{dv}{dt} = v + t + e^{2t}, \qquad v(0) = 0.$$

Получилась задача Коши для *линейного* уравнения, в которой участвует уже́ найденная функция $x(t,0) = e^t$. Эту задачу легко решить и получить $v(t) = e^{2t} - t - 1$. Таким образом, $x(t,\mu) = e^t + (e^{2t} - t - 1)\mu + o(\mu)$ в предположении о достаточной гладкости x по μ. В частности, для (2) это означает $x(t) \approx e^t + \dfrac{1}{100}(e^{2t} - t - 1)$. Опять же, следует уточнить смысл «$\approx$», но в любом случае следует начать с обоснования использованных нами фактов:

1. $x(t,\mu)$ дифференцируема по μ на G;
2. $\dfrac{\partial^2 x}{\partial\mu\partial t} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial t\partial\mu}$ на G.

Требуется соответствующая теорема. Сначала повторим рассуждения Примера в общем случае. Начнем опять со случая (4). Заметим, что если ответ на вопросы 1,2 уже́ известен, то можно дифференцировать (4) по μ_j, $j = 1, \ldots, k$, и получить на G для соответствующего НР $x = \varphi(t,\mu)$ соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial\mu_j} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(t,x,\mu)\cdot\frac{\partial x}{\partial\mu_j} + \frac{\partial f}{\partial\mu_j}(t,x,\mu); \qquad \frac{\partial x}{\partial\mu_j}\bigg|_{t=t_0} = 0,$$

т. е. каждый вектор $v_j = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu_j}$ удовлетворяет линейной задаче

Коши

$$\frac{dv_j}{dt} = Av_j + h_j, \qquad v_j(t_0) = 0, \tag{$(10)_j$}$$

$$\text{где } A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(t, \varphi(t,\mu), \mu),\ h_j = \frac{\partial f}{\partial \mu_j}(t, \varphi(t,\mu), \mu).$$

Можно объединить все векторные задачи $(10)_j$ в матричную задачу для прямоугольной матрицы Якоби $V = \{v_j\} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right)$ $(\mathrm{dim}V = n \times k)$:

$$\frac{dV}{dt} = AV + H, \qquad V(t_0) = 0, \tag{10}$$

где $H = \{h_j\} = \left(\frac{\partial f}{\partial \mu}\right)(t, \varphi(t,\mu), \mu)$ $(\mathrm{dim}H = n \times k)$. Система $(10)_1$ (соответственно $(10)_{j1}$) называется *системой уравнений в вариациях* по параметрам μ (соответственно по параметру μ_j) для системы $(4)_1$. Таким образом, если ответы на вопросы 1,2 положительные, то из этого следует (10) на $(t_-(\mu), t_+(\mu))$. Более того, если рассматривать (10) как таковую, то из непрерывности матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ на D следует глобальная разрешимость задачи (10) (т. е. на всем интервале, пока определены коэффициенты — на $(t_-(\mu), t_+(\mu))$). Т. е. решение задачи, которой должны удовлетворять производные по параметру, существует на всем требуемом множестве.

[Если бы отсюда следовало существование этих производных, т. е. ответ на вопрос 1, то ответ на вопрос 2 также бы легко следовал, т. к. непрерывность обеих смешанных производных легко вытекала бы из (10) и (4) (см. об этом конец доказательства ТоДЗ), а значит и их совпадение.]

Однако это не может служить доказательством для ответа на вопросы 1,2, т. к. такое рассуждение содержало бы порочный круг. Таким образом, единственный способ доказать пп. 1,2 и вывести (10) — это использовать определение производной $\dfrac{\partial x}{\partial \mu_j}$, как это и делается в следующей теореме:

Теорема. (ТоДЗ). Пусть выполнены условия ТоНЗ, причем именно в следующем варианте: $\dfrac{\partial f}{\partial x} \in C(D)$, кроме того существуют $\dfrac{\partial f}{\partial \mu} \in C(D)$.

[Здесь смысл в том, что сколько производных мы хотим от φ по μ, столько нужно производных от f по x и μ, как ясно уже́ из формального вывода уравнений в вариациях. А в случае просто непрерывности мы требовали почти дифференцируемость f по x в силу других причин — для обеспечения единственности (иначе бессмысленно говорить о непрерывной зависимости).]

Тогда:

1. существуют $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \mu} \in C(G)$;

2. существуют $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\mu\partial t}, \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial\mu} \in C(G)$ (а значит они равны);

3. $V = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu}$ удовлетворяет (10).

Доказательство. Выберем любое $(t_*, \mu_*) \in G$. Докажем, что в некоторой окрестности этой точки существует непрерывная $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu_j}$ (при произвольно выбранном j). Сделаем те же построения, что и доказательстве ТоНЗ, только сразу будем отступать в обе стороны от t_*: выделим отрезок $[\widetilde{t}_1, t_1] \subset (t_-(\mu_*), t_+(\mu_*))$ такой, что $t_0, t_* \in (\widetilde{t}_1, t_1)$, тогда при $t \in [\widetilde{t}_1, t_1]$ точка $(t, \varphi(t, \mu_*), \mu_*)$ пробегает компактную кривую $\Gamma \subset D$, и множество

$$\Pi = \left\{ \, (t, x, \mu) \mid t \in [\widetilde{t}_1, t_1], \; |x - \varphi(t, \mu_*)| \leqslant a, \; |\mu - \mu_*| \leqslant b \, \right\}$$

есть компакт в D при малых a и b.

[И в нем верны (6), (7), хотя это можно и не говорить.]

Теперь мы можем сразу применить результат ТоНЗ (мы его формулировали в виде Следствия, и в доказательстве ТоНЗ по существу это доказано): найдется $\rho = \rho(t_*, \mu_*)$ такое, что при всех μ удовлетворяющих $|\mu - \mu_*| < 2\rho \overset{\text{считаем}}{<} b$ решение $\varphi(t, \mu)$ также определено на $[\widetilde{t}_1, t_1]$, и $|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu_*)| < a$ на этом отрезке, т. е. соответствующая ИК $\{(t, \varphi(t, \mu), \mu)\}$ пролегает в Π, а точнее, даже в открытой «полосе»

$$\Delta = \left\{ \, (t, x, \mu) \mid t \in (\widetilde{t}_1, t_1), \; |x - \varphi(t, \mu_*)| < a, \; |\mu - \mu_*| < 2\rho \, \right\}$$

$(\Delta \subset \Pi)$, доходя до торцов Δ и Π по t. Очевидно, при фиксированном $t = \xi \in (\widetilde{t}_1, t_1)$ сечение
$\Delta \cap \{t = \xi\} = B(\varphi(\xi, \mu_*), a) \times B(\mu_*, 2\rho)$ выпукло.

Пусть $\mu_1 \in B(\mu_*, \rho)$, $\tau \in (-\rho, \rho)$. Обозначим $\mu_2 = \mu_1 + \tau e_j$ (e_j — единичный орт по оси $0\mu_j$). Ясно, что $\mu_2 \in B(\mu_*, 2\rho)$, так что $\varphi(t, \mu_1)$ и $\varphi(t, \mu_2)$ удовлетворяют описанному выше свойству «попадания в Δ». Образуем конечную разность (при $\tau \neq 0$) $\psi(t, \mu_1, \tau) = \dfrac{\varphi(t, \mu_2) - \varphi(t, \mu_1)}{\tau}$ и изучим ее свойства. Имеем на $(\widetilde{t}_1, t_1)$:

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mu_1, \tau) = \varphi_t(t, \mu_2) - \varphi_t(t, \mu_1) =$$

$$= f(t, \varphi(t, \mu_2), \mu_2) - f(t, \varphi(t, \mu_1), \mu_1) =$$

[применим лемму Адамара, пользуясь непрерывностью $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial \mu}$ в $\overline{\Delta} \subset D$ и выпуклостью Δ по (x, μ); матрица $A \in C(\overline{\Delta})$, $\dim A = (n+k) \times n$.]

$$= A(t, (\varphi(t, \mu_2), \mu_2), (\varphi(t, \mu_1), \mu_1)) \cdot \begin{bmatrix} \varphi(t, \mu_2) - \varphi(t, \mu_1) \\ \mu_2 - \mu_1 \end{bmatrix},$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mu_1, \tau) = A(t, (\varphi(t, \mu_2), \mu_2), (\varphi(t, \mu_1), \mu_1)) \cdot \begin{bmatrix} \psi(t, \mu_1, \tau) \\ e_j \end{bmatrix}.$$

При этом

$$\psi(t_0, \mu_1, \tau) = 0. \tag{11}$$

Обозначим $A = \begin{bmatrix} A_1 & B \end{bmatrix}$, где $\dim A_1 = n \times n$, $\dim B = n \times k$; b_j — j-й столбец B. Тогда уравнение для ψ принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mu_1, \tau) = A_1(t, (\varphi(t, \mu_2), \mu_2), (\varphi(t, \mu_1), \mu_1)) \cdot \psi(t, \mu_1, \tau) +$$

$$+ b_j(t, (\varphi(t, \mu_2), \mu_2), (\varphi(t, \mu_1), \mu_1)). \tag{12}$$

Таким образом, функция $\psi(t,\mu_1,\tau)$ при $\tau\in(-\rho,\rho)\setminus\{0\}$, $\mu_1\in B(\mu_*,\rho)$ является на $(\widetilde{t}_1,t_1)$ решением задачи Коши

$$\frac{du}{dt}=A_1(t,(\varphi(t,\mu_2),\mu_2),(\varphi(t,\mu_1),\mu_1))\cdot u+$$

$$+b_j(t,(\varphi(t,\mu_2),\mu_2),(\varphi(t,\mu_1),\mu_1)); \tag{13}$$

$$u(t_0)=0.$$

Коэффициенты этой задачи определены и непрерывны при $(t,\mu_1,\tau)\in(\widetilde{t}_1,t_1)\times B(\mu_*,\rho)\times(-\rho,\rho)$, т. е. включая и пересечение с гиперплоскостью $\{\tau=0\}$! Заметим,что при $\tau=0$ ввиду замечания после леммы Адамара коэффициенты задачи (13) принимают вид

$$A(t,(\varphi(t,\mu_1),\mu_1),(\varphi(t,\mu_1),\mu_1))=$$
$$=\left[\frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t,\mu_1),\mu_1)\;\;\frac{\partial f}{\partial \mu}(t,\varphi(t,\mu_1),\mu_1)\right],$$

т. е. $A_1(\dots)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t,\mu_1),\mu_1)$, $b_j(\dots)=\dfrac{\partial f}{\partial \mu_j}(t,\varphi(t,\mu_1),\mu_1)$. Следовательно, решение (13) $u=u(t,\mu_1,\tau)$ существует и единственно на $(\widetilde{t}_1,t_1)$ при всех $(\mu_1,\tau)\in B(\mu_*,\rho)\times(-\rho,\rho)$, а при $\tau\neq0$ верно $\psi(t,\mu_1,\tau)=u(t,\mu_1,\tau)$. Но тогда при всех $(t,\mu_1)\in(\widetilde{t}_1,t_1)\times B(\mu_*,\rho)$ существует

$$\lim_{\tau\to0}\psi(t,\mu_1,\tau)=\lim_{\tau\to0}u(t,\mu_1,\tau)\overset{\text{ТоНЗ}}{=}u(t,\mu_1,0)=:v(t,\mu_1).$$

По определению производной это значит, что на множестве $(\widetilde{t}_1,t_1)\times B(\mu_*,\rho)$ существует $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu_j}(t,\mu_1)=v(t,\mu_1)$ и удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, \mu_1), \mu_1)v + \frac{\partial f}{\partial \mu_j}(t, \varphi(t, \mu_1), \mu_1); \quad v(0) = 0, \tag{14}$$

причем эта функция по ТоНЗ непрерывна по (t, μ_1) на указанном множестве. Тем самым мы сразу доказали пп. 1,3, т. к. (14) есть $(10)_j$, а $(\widetilde{t}_1, t_1) \times B(\mu_*, \rho)$ есть некая окрестность точки (t_*, μ_*). Осталось доказать п. 2. Имеем: $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \mu_j}(t, \mu_1) = \dfrac{\partial}{\partial t}v(t, \mu_1)$ существует и непрерывна в нашей окрестности ввиду $(14)_1$. С другой стороны, в этой окрестности имеем тождество $\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(t, \mu_1) = f(t, \varphi(t, \mu_1), \mu_1)$, правая часть которого имеет непрерывные производные по μ_1, значит левая часть — тоже. □

Аналогично ТоНЗ, можно сделать соответствующую замену и получить ТоДЗ по начальным данным — для этого, как видно из (8), нужно $t_0, x_0 \in C^1$ по μ. Если t_0 и x_0 сами являются параметрами, то это условие автоматически выполнено.

Упражнение. Получить задачу Коши для уравнений в вариациях (для $\dfrac{\partial x}{\partial \mu}$) для общего случая (1). □

Для дальнейшего нам важен частный случай

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x); \qquad x|_{t=t_0} = \xi \tag{15}$$

— требуется найти $V = \dfrac{\partial x}{\partial \xi}$. После замены $x = y + \xi$ получим задачу

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y + \xi); \qquad y|_{t=t_0} = 0,$$

дифференцируя которую по ξ_j (по доказанному варианту ТоДЗ), выведем

$$\frac{dv_j}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi_j} + e_j\right) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} f(t, y(t,\xi) + \xi) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(t, y(t,\xi) + \xi) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_j} + e_j\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t,\xi)) \cdot v_j;$$

$$0 = \frac{\partial y}{\partial \xi_j}\bigg|_{t=t_0} = \frac{\partial x}{\partial \xi_j}\bigg|_{t=t_0} - e_j.$$

Итак,

$$\frac{dv_j}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t,\xi)) \cdot v_j; \qquad v_j|_{t=t_0} = e_j, \tag{16$_j$}$$

или, после объединения всех столбцов,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t,\xi))V; \qquad V|_{t=t_0} = E \tag{16}$$

— система уравнений в вариациях по начальным данным. Заметим, что (16) можно было сразу получить из (15) без замены $x \leftrightarrow y$, и в принципе мы эту процедуру можем обосновать на основе наших результатов. Далее мы будем использовать (16) для исследования якобиана $\det\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)$.

Тем самым, ТоДЗ обосновывает наши рассуждения о примере (3) в соответствующей ему области G — в самом деле, существует $\frac{\partial x}{\partial \mu}\bigg|_{\mu=0}$, непрерывна на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет соответствующей задаче Коши, которую мы решили, причем $\frac{\partial x}{\partial \mu} \in C(G)$, так что по формуле Тейлора $x(t,\mu) = e^t + (e^{2t} - t - 1)\mu + o(\mu)$, где $o(\mu)$ понимается как равномерная на любом отрезке $[-T, T]$.

Возникает естественный вопрос о дальнейшем дифференцировании решений (1) по μ. Как обычно, начнем с (4) (а в общем случае и не будем).

Теорема. Пусть в условиях ТоДЗ дополнительно всевозможные производные f по (x, μ) до порядка N существуют и непрерывны в D. Тогда все производные $\varphi(t, \mu)$ по μ до порядка N существуют и непрерывны в G, причем существуют и непрерывны в G также и их производные по t в произвольном порядке.

Доказательство. При $N = 1$ мы доказали это в ТоДЗ.

Упражнение. Доказать при $N > 1$ по индукции. $\square$

Следствие. Указанные в Теореме производные удовлетворяют (на G) задачам Коши, получаемым из (4) формальным дифференцированием по μ соответствующего порядка. Они называются уравнениями в вариациях высшего порядка. $\square$

Замечание. Если f аналитична по (t, x, μ), то можно доказать аналитичность φ по (t, μ). $\square$

Тем самым, можно строить не только 1-е (как в ТоДЗ), но и последующие приближения для нахождения решений, или даже сразу разложение в ряд.

Упражнение. Проделать это для примера (3). $\square$

Теперь назрела необходимость уделить отдельное внимание важному классу ОДУ — линейным. Их изучение стимулируется следующими факторами:

1. ввиду их относительной простоты гораздо больше информации можно извлечь о решениях (вплоть до на-

хождения «в явном виде»), поэтому нередко нелинейные системы заменяют на линейные, в каком-то смысле близкие к исходным (линеаризуют);

[Поскольку все реальные процессы (т. е. их достаточно адекватные модели) нелинейны, то линейные модели, в частности, ОДУ, могут возникнуть только как результат упрощения. Но на это упрощение идут ввиду крайнего удобства линейных функций по сравнению с нелинейными для «явного» оперирования с ними.]

2. многие качественные вопросы общей теории ОДУ решаются с помощью линейных ОДУ (ввиду искусственной линеаризации или естественным образом — например, см. (15) $\Longrightarrow$ (16) или (4) $\Longrightarrow$ (10)), и как побочный пример (не столь важно, но отметим): имеются классы нелинейных ОДУ, сводящихся к линейным (как при $n = 1$ было отмечено в § 3) — например, матричное уравнение Риккати.

Список литературы

Обязательная литература

1. *Бибиков Ю.Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Высшая школа, 1991.
2. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1982.
3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
4. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. — М.: ИЛ, 1962.

Дополнительная литература

5. *Годунов С.К.* Квадратичные функции Ляпунова. — Новосибирск: НГУ, 1982.
6. *Годунов С.К.* Матричная экспонента, матрица Грина и условие Лопатинского. — Новосибирск: НГУ, 1983.
7. *Годунов С.К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: учеб. пособие. — Новосибирск: НГУ, 1994. — Т. 1: Краевые задачи.
8. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во МГУ, 2002.
9. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1959.

10. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Москва, Ижевск: РХД, 2000.

11. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967.

12. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1976.

13. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969.

14. *Блохин А.М.* Равномерная ограниченность матричной экспоненты: метод. указания к курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения». — Новосибирск: НГУ, 1986.

15. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967.

16. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — М., Л.: Гостехиздат, 1949.

17. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.

18. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964.

19. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: УРСС, 2002.

20. *Эрроусмат Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986.

Задачники

21. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / под ред. С.К. Годунова. — Новосибирск: НГУ, 1986.

22. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва, Ижевск: РХД, 2000.

Список аббревиатур и обозначений

АО	априорная оценка
ДУ	дифференциальное уравнение
ИК	интегральная кривая
ИМ	интегрирующий множитель
МНН	максимальный непротиворечивый набор (решений)
НР	непродолжаемое решение
НЧ	неравенство Чаплыгина
ОДУ	обыкновенное дифференциальное уравнение
ОРНУ	общее решение неоднородного уравнения
ОРОУ	общее решение однородного уравнения
СВ	собственный вектор
СЧ	собственное число
ТК—П	теорема Коши—Пикара
ТоДЗ	теорема о дифференциальной зависимости (решений ОДУ от параметров)
ТоНЗ	теорема о непрерывной зависимости (решений ОДУ от параметров)
ТПК	теорема о покидании компакта
УМФ	уравнения математической физики
УПД	уравнение в полных дифференциалах
УРП	уравнение с разделяющимися переменными
УЧП	уравнение в частных производных
ЧРНУ	частное решение неоднородного уравнения

$:=$, $=:$	равенство по определению (обозначению) — двоеточие со стороны определяемого символа
$\subset$, $\supset$	вложения множеств (включая совпадение)
$\nearrow$, $\searrow$	возрастание или убывание величины (строгое или нестрогое в зависимости от контекста)
$B(x, R)$	открытый шар с центром в точке x и радиуса R
$B[x, R]$	замкнутый шар с центром в точке x и радиуса R (обозначение не вполне удачное, но прижившееся и к сожалению удобное ввиду краткости)
$\dim$	размерность (вектора или матрицы)
$\mathrm{Int}(G)$	внутренность множества G
$\rho(A, B)$	расстояние от точки (или множества) A до точки (или множества) B

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Мамонтов Александр Евгеньевич

ЛЕКЦИИ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

ЧАСТЬ 1.

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

Учебное пособие

В авторской редакции

Компьютерная верстка — *А.Е. Мамонтов*

Подписано в печать 10.11.2010. Формат бумаги $60 \times 84/16$.
Печать RISO. Уч.-изд. л. 6,06. Усл. печ. л. 5,64.
Тираж 100 экз.
Заказ №68.

Педуниверситет, Новосибирск, 126, ул. Вилюйская, 28