Комплексная геометрия

Макарченко Иван Павлович

Июль 2000 — март 2003

Аннотация

Макарченко И.П. Комплексная геометрия. Санкт Петербург 2000–2003.
Представлены принципы построения «комплексной геометрии».

Содержание

Часть I
Комплексные числа

Вместо введения, в кратком виде представлена аксиоматика комплексных чисел, используемая в комплексной геометрии и сильно связанная с ними часть аксиом вещественных чисел.

Обозначение множества комплексных чисел — $\mathbb{C}$
Обозначение множества действительных чисел — $\mathbb{R}$

1 Аксиомы

0 $\mathbb{R}$ является подмножеством $\mathbb{C}$.

1 **Сложение**. Операция $+$ определена для любых элементов x и y принадлежащих $\mathbb{C}$ так, что элемент $x + y$ принадлежит $\mathbb{C}$.

- a Для любых элементов x, y принадлежащих $\mathbb{C}$: $x + y$ так же принадлежит $\mathbb{C}$. В том числе, если x, y принадлежит $\mathbb{R}$, то $x + y$ принадлежит $\mathbb{R}$.
- b Существует элемент 0 принадлежащий $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ такой, что для любого x принадлежащего $\mathbb{C}$: $x + 0 = 0 + x = x$.
- c Для любого элемента x, принадлежащего $\mathbb{C}$, существует элемент $(-x)$, принадлежий $\mathbb{C}$, такой, что: $x + (-x) = (-x) + x = 0$. В том числе, если x принадлежит $\mathbb{R}$, то $(-x)$ так же принадлежит $\mathbb{R}$.
- d Для любых x, y, z, принадлежащих $\mathbb{C}$, верно: $(x+y)+z = x+(y+z)$
- e Для любых x, y, принадлежащих $\mathbb{C}$, верно: $(x + y) = (y + x)$

2 **Умножение**. Операция $\cdot$ определена для любых элементов x и y, принадлежащих $\mathbb{C}$, так, что элемент $x \cdot y$ принадлежит $\mathbb{C}$.

- a Для любых элементов x, y, принадлежащих $\mathbb{C}$: $x \cdot y$ так же принадлежит $\mathbb{C}$. В том числе, если x, y принадлежит $\mathbb{R}$, то $x \cdot y$ так же принадлежит $\mathbb{R}$.

- b Существует элемент 1, принадлежащий $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$, не равный 0, такой, что: для любого элемента x принадлежащего $\mathbb{C}$: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
- c Для любого элемента x, принадлежащего $\mathbb{C}$ и не равного 0, существует элемент $(1/x)$ такой, что $x \cdot (1/x) = 1$. В том числе, если x принадлежит $\mathbb{R}$, то $(1/x)$ так же принадлежит $\mathbb{R}$.
- d Для любых x, y, z, принадлежащих $\mathbb{C}$, верно: $(x \cdot y) \cdot z = z \cdot (y \cdot z)$
- e Для любых x, y, принадлежащих $\mathbb{C}$, верно: $x \cdot y = y \cdot x$

1-2 **Связь умножения и сложения**. Для любых x, y, z, принадлежащих $\mathbb{C}$, верно:
$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$

3 **Аксиомы порядка** Операция $\leq$ определяется для двух элементов, принадлежащих $\mathbb{R}$. Результатом операции сравнения является утверждение «истина» или «ложь». Для элементов x и y, принадлежащих $\mathbb{R}$, результат операции сравнения записывается как $x \leq y$. Записи $x \leq y$ и $y \geq x$ считаются эквивалентными.

- a Для любого элемента x, принадлежащего $\mathbb{R}$:
  $(x \leq x)$ =«истина»
- b Для любых элементов x, y, принадлежащих $\mathbb{R}$:
  если $(x \leq y) \,\&\, (y \leq x)$ =«истина», то $(x = y)$ =«истина».
- c Для любых элементов x, y, z, принадлежащих $\mathbb{R}$:
  если $(x \leq y) \,\&\, (y \leq z)$ =«истина», то $(x \leq z)$ =«истина».
- d Для любых элементов x, y, принадлежащих $\mathbb{R}$:
  всегда $(x \leq y) \, or \, (y \leq x)$ =«истина».

1-3 **Связь сложения и порядка**. Для любых элементов x, y, z, принадлежащих $\mathbb{R}$: Утверждение $(x \leq y)$ имеет то же значение, что и утверждение $((x + z) \leq (y + z))$.

2-3 **Связь умножения и порядка**. Для любых элементов x, y, принадлежащих $\mathbb{R}$: Если $(0 \leq x) \,\&\, (0 \leq y)$ =«истина», то $(0 \leq (x \cdot y))$ =«истина».

4 **Аксиома полноты** (непрерывности). Если $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ есть непустые подмножества $\mathbb{R}$, обладающие тем свойством, что для любого элемента x, принадлежащего $\mathbb{X}$, и для любого элемента y, принадлежащего $\mathbb{Y}$,

утверждение $(x \leq y)$ всегда истино, то существует элемент z, принадлежащий $\mathbb{R}$, такой, что $(x \leq z)\,\&\,(z \leq y)$ истино для любых x, y принадлежащих $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ соответственно.

5 **Аксиомы мнимой единицы**.

a Существует элемент i, принадлежащий $\mathbb{C}$, но не принадлежащий $\mathbb{R}$, такой, что $i \cdot i = (-i) \cdot (-i) = (-1)$

b Элемент i не равен элементу $(-i)$, и множество $\{i, -i\}$ единственно (фигурные скобки означают неупорядоченное множество).

c Для любого элемента x, принадлежащего $\mathbb{C}$, существует пара элементов a и b, принадлежащих $\mathbb{R}$, такая что: $x = a + (i \cdot b)$

2 Некоторые следствия

0 Аксиома (5.b) позволяет фиксировать значение мнимой единицы и считать его единственным. Двойственность мнимой единицы позволяет считать все выводы верными при формальной замене i на $-i$ во всех выражениях. Элемент, полученый такой заменой из элемента x, принадлежащего $\mathbb{C}$, называется комплексно-сопряженным элементом. В частности, элемент $-i$ является комплексно-сопряженным элементу i, а формальная замена i на $-i$ в выражениях сводится к замене всех чисел на комплексно-сопряженные. Множество элементов комплексно-сопряженных всем элементам из $\mathbb{C}$ совпадает с $\mathbb{C}$, и операция комплексного сопряжения является взаимно-однозначной.

1 Если элемент x принадлежит $\mathbb{R}$, $x = a + i \cdot b$, то $a = x$, $b = 0$. Доказывается от противного. Если b не равно нулю, то $i = (x + (-a))/b$, но в силу вещественности всех значений в правой части левая часть должна быть вещественна. Противоречит (V.1). Элемент комплексно-сопряженный вещественному x равен x.

Элемент, $x = a + i \cdot b$, для которого $a = 0$ и $b \neq 0$ называется чисто мнимым.

2 Для любой пары элементов a и b, принадлежащих $\mathbb{R}$, существует элемент $a+i\cdot b$, принадлежащий $\mathbb{C}$, и его комплексносопряженный элемент $a - i \cdot b$.

3 При фиксированном i, если $x = a + i \cdot b$, $y = c + i \cdot d$, то:

$$x + y = (a + c) + i \cdot (b + d)$$
$$x \cdot y = ((a \cdot c) - (b \cdot d)) + i \cdot (b \cdot c + a \cdot d)$$
$$1/y = (c - i \cdot d)/(c \cdot c + d \cdot d)$$
$$x/y = x \cdot (1/y) = (a \cdot c + b \cdot d)/(c \cdot c + d \cdot d) + i \cdot (b \cdot c - a \cdot d)/(c \cdot c + d \cdot d)$$

4 При фиксированном i, разложение числа x на $a + i \cdot b$ единственно. Пусть это не так: $x = a1 + i \cdot b1 = a2 + i \cdot b2$. Тогда: $x + (-x) = 0 = a1 + i \cdot b1 + (-(a2 + i \cdot b2)) = (a1 - a2) + i \cdot (b1 - b2) = 0$ В силу вещественности нуля и следствия 1 имеем $b1 - b2 = 0$ и $a1 - a2 = 0$. (Единственность обратных элементов для $\mathbb{R}$ считается доказаной.)

5 Для любого $x = a + i \cdot b$ можно найти такое $y = c + i \cdot d$ такое, что $y \cdot y = (-y) \cdot (-y) = x$. Легко находится для частных случаев $a = 0$ или $b = 0$. При a и b не равных нулю нахождение c и d сводится к нахождению корней квадратного уравнения в вещественных числах дискриминант которого положителен.

Часть II
Комплексная геометрия

Материал, приведенный ниже, ни в коей мере не претендует на полноту и призван показать, что на комплексном пространстве $\mathbb{C}^4$ возможно построение некой формальной геометрии. Кроме этого здесь пересмотрены многие известные понятия, поэтому приступая к прочтению следует «забыть» на время о стандартных определениях и принять новые (в том случае, естественно, если они действительно переопределяются).

3 Соглашения

Рассматривается комплексное пространство $\mathbb{C}^4$ (в дальнейшем просто пространство или комплексное пространство), как множество элементов, соответствующих прямому произведению четырех различных множеств комплексных чисел $\mathbb{C}$ (в дальнейшем просто чисел). Формальные выводы могут быть легко продолжены в другие пространства типа $\mathbb{C}^n$. Элементы пространства $\mathbb{C}^4$ (которые в дальнейшем называются точками пространства), полностью определяются совокупностью четырех чисел, называемых координатами. Совокупность координат будет обозначаться большими латинскими буквами без цифр или набором отдельных координат, обозначаемых большими латинскими буквами с цифрами, заключенных в круглые скобки:

$$X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$$

Точка с координатами $(0, 0, 0, 0)$ называется началом координат. Точки с одинаковым набором координат (порядок имеет значение!) считаются совпадающими.

Определения для сложения и умножения на константу (все в комплексных числах):

$$X + Y = (X_1, X_2, X_3, X_4) + (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) =$$
$$= ((X_1 + Y_1), (X_2 + Y_2), (X_3 + Y_3), (X_4 + Y_4))$$
$$a \cdot X = a \cdot (X_1, X_2, X_3, X_4) =$$
$$= ((a \cdot X_1), (a \cdot X_2), (a \cdot X_3), (a \cdot X_4))$$

4 Параметрическое задание подмножеств

4.1 Определение

Определение: *параметрически заданным подмножеством* называется множество точек, удовлетворяющих соотношению:

$$x : X = (F_1(a_k), F_2(a_k), F_3(a_k), F_4(a_k)),$$

где F_i — некие числовые комплексные функции; a_k — комплексные параметры.

Параметры a_k лежат в неких комплексных интервалах — области определения функций F_i. Если области определения параметров a_k совпадают со множеством $\mathbb{C}$, такие параметрически заданные подмножества будем называть *полными*.

Количество параметров не ограничено, но в дальнейшем будем рассматривать только множества заданные на конечном количестве параметров.

Вид функций F_i, вообще говоря, не задан, но для последующего анализа будет удобно, если F_i будут гладкими аналитическими комплексными функциями, в частности — полиномами.

4.2 Кривые, поверхности, гиперповерхности

Определение: *комплексной кривой* называется параметрически заданное подмножество с одним параметром.

Определение: *комплексной поверхностью* или *2d-повехностью* называется параметрически заданное подмножество с двумя параметрами.

Определение: *комплексной гиперповерхностью* или *3d-повехностью* называется параметрически заданное подмножество с тремя параметрами.

Аналогично может быть дано определение и для любой *Kd-поверхности* или *K-мерной поверхности*. В частности, кривая является одномерной поверхностью.

Вид функций F_i определяет рассматриваемое подмножество. Если функции F_i являются полиномами, то K-мерные поверхности называют соответственно K-мерными поверхностями N-го порядка, N — максимальная степень полиномов F_i.

Следует отметить, что K-мерные поверхнсти могут быть вырожденными в поверхности меньшей мерности. Например, если используются функции F_i зависящие только от суммы параметров $a + b$, то такая $2d$-поверхность выродится в кривую с одним параметром $c = a + b$.

В последующих четырех секциях фактически определяются полные поверхности первого порядка, одно, двух, трех и четырехмерные.

5 Прямая

5.1 Определение прямой

Определение: *Комплексной прямой* или *комплексной осью* (в дальнейшем просто прямой или осью) называется совокупность точек комплексного пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$X = X_0 + a \cdot R$$

где: X_0 — некая точка, принадлежащая прямой; R — некая точка, не совпадающая с началом координат и не обязательно принадлежащая прямой; a — любое комплексное число.

Очевидно, прямая есть *кривая первого порядка*.

Две прямые называются совпадающими, если любая точка принадлежащая одной прямой принадлежит и другой.

Совокупность координат точки $R = (R_1, R_2, R_3, R_4)$ называется вектором прямой или, в отрыве от конкретной прямой, просто вектором. Любая точка пространства с заданным на ней вектором определяет прямую. Координаты точки R называются так же и координатами вектора. Особый случай — нуль-вектор, не оределяющий какую либо прямую, это вектор со всеми координатами равными нулю.

Следует отметить, что в данном контексте прямой фактически называется комплексная плоскость. Сделано это умышленно, ввиду одного существенного свойства. Два вектора лежащие в одной комплексной плоскости считаются *всегда* параллельными (о самой параллельности будет сказано ниже). Именно поэтому комплексная плоскость названа прямой, чтобы не вводить читателя в заблуждение излишними мешающими ассоциациями.

5.2 Коллинеарность и параллельность

Определение: Коллинеарными векторами называются вектора, определяющие на одной точке одну и ту же прямую. Отсюда очевидно:

1) если R_a коллинеарен R_b, то R_b коллинеарен R_a;
2) если R_a коллинеарен R_b, а R_b коллинеарен R_c, то R_a коллинеарен R_c;
3) множество коллинеарных друг другу векторов на одной точке определяют одну и только одну прямую.

Следствие: Если прямая $x : X = X_0 + a \cdot R_x$ совпадает с прямой $y : Y = Y_0 + b \cdot R_y$, то $R_x = c \cdot R_y$, где c — некое комплексное число не равное нулю.

Доказательство: *Пусть X_0 не совпадает с Y_0. X_0 принадлежит прямой x, то из совпадения прямых следует, что X_0 принадлежит и прямой y. Следовательно $X_0 = Y_0 + d \cdot R_y$. Аналогично $Y_0 = X_0 + e \cdot R_x$. Вычитая эти два равенства получим $d \cdot R_y = -e \cdot R_x$. Из несовпадения X_0 и Y_0 следует, что числа d и e не равны нулю, следовательно $R_y = (-e/d) \cdot R_x$. Обозначив $c = (-e/d)$ и заметив, что c не равно нулю, получаем искомое равенство. Для доказательства при $X_0 = Y_0$ достаточно провести подобные же рассуждения с любой точкой прямой x не совпадающей с X_0, следовательно не совпадающей и с Y_0.*

Из этого доказательства очевидно, что R_x и R_y коллинеарны, так как они на точке X_0, например, определяют одну и ту же прямую.

Осями координат называются прямые проходящие через начало координат, вектора которых имеют только одну ненулевую координату, соответствующую названию оси.

Докажем так же, что если для точки X_0 вектора R_a и R_b коллинеарны, то они коллинераны для любой другой точки Y_0.

Из первого утверждения следует, что $R_a = c \cdot R_b$, где c некое комплексное число. Это значит, что для любой точки Y_0 можно написать уравнение прямой:

$$Y = Y_0 + a \cdot R_a, \textit{ следовательно: } Y = Y_0 + a \cdot c \cdot R_b.$$

Но так как a произвольно, а c не равно нулю, то для любого произвольного b можно найти такое a, что $b = a \cdot c$. Следовательно, вторая часть утверждения определяет прямую на точке Y_0 с вектором R_b, и эта прямая совпадает с прямой определенной на Y_0 вектором R_a, то есть, вектора коллинераны для любой точки Y_0.

По пути только что было **доказано**, что если вектора R_a и R_b связаны соотношением $R_a = c \cdot R_b$, где c некое комплексное число не равное нулю, то R_a и R_b коллинеарны.

Определение: Параллельными прямыми называются такие прямые, вектора которых коллинеарны.

Из этого определения очевиден факт, что через любую точку пространства можно провести только одну прямую, параллельную некой заданной прямой, так как множество коллинеарных друг другу векторов на одной точке определяют одну прямую.

5.3 Через две несовпадающие точки...

Следствие: Через две несовпадающие точки можно провести одну и только одну прямую. Имеем две точки X и Y. Несовпадение точек означает, что из всех координат точек X и Y по крайней мере одна координата отличается, т.е. точка с координатами $Y - X$ не является началом координат. Следовательно на точке X можно построить прямую с вектором $R_{xy} = Y - X$. Очевидно, что Y принадлежит этой прямой.

Докажем, что прямая единственна. *По определению прямой имеем:* $X = Z_0 + a \cdot R_z, Y = Z_0 + b \cdot R_z$. *Отсюда следует:* $X = Y + (a - b) \cdot R_z$ *и* $a - b$ *не равно нулю, так как* X *не совпадает* Y. *Но* $X = Y + R_{xy}$, *отсюда* $(a - b) \cdot R_z = R_{xy}$, *следовательно, вектора* R_z *и* R_{xy} *коллинеарны и определяют одну прямую.*

Вектор $R_{xy} = Y - X$ называется вектором построенным точках X и Y, а точки X и Y такого вектора называются началом и концом вектора, соответственно. В частности, если X совпадает с Y, то вектор построенный на таких точках оказывается нуль-вектором, а его начало и конец совпадают. Заметим, что если точки X, Y, Z не лежат на одной прямой, то вектора $Y - X$ и $Z - X$ неколлинеарны.

6 Плоскость

6.1 Определение плоскости

Определение: Двумерной *комплексной плоскостью* (в дальнейшем плоскостью) называется совокупность точек комплексного пространства, удовлетворяющих уравнению:

$$X = X_0 + a \cdot R_a + b \cdot R_b,$$

где X_0 — некая точка, принадлежащая плоскости; R_a, R_b — пара ненулевых неколлинеарных векторов; a, b — любые комплексные числа.

Плоскость x удовлетворяющая этому уравнению, называется плоскостью построенной на векторах R_a и R_b, проходящей через точку X_0.

Плоскости x и y называются совпадающими, если все точки плоскости x являются точками плоскости y и все точки плоскости y являются точками плоскости x.

6.2 Параллельность для плоскости

Ненулевой вектор R_c называется вектором параллельным плоскости, если существует такая пара чисел d и e, что $R_c = d \cdot R_a + e \cdot R_b$.

Прямая называется прямой параллельной плоскости, если ее вектор параллелен плоскости.

Плоскость x называются параллельной плоскости y, если оба вектора, на которых построена плоскость x параллельны плоскости y.

Докажем, что, если плоскость x параллельна плоскости y, то y параллельна x:

Для векторов R_{xa} и R_{xb} имеем:

$$R_{xa} = d \cdot R_{ya} + e \cdot R_{yb}$$

$$R_{xb} = f \cdot R_{ya} + g \cdot R_{yb}$$

Матрица $\begin{pmatrix} d & e \\ f & g \end{pmatrix}$ *имеет ненулевой определитель. Иначе* R_{xa} *и* R_{xb} *можно было бы выразить через один вектор, что противоречит их неколлинеарности. Следовательно эта матрица имеет обратную, а значит* R_{ya} *и* R_{yb} *можно выразить через* R_{xa}*,* R_{xb}*, т.е. они параллельны плокости* x*. Следовательно и плоскость* y *параллельна плоскости* x*.*

6.3 Через три точки...

Следствие: Через три точки пространства не лежащие на одной прямой можно провести одну и только одну плоскость.

Доказательство: *Имеем точки* X_0, Y_0, Z_0*. Построим плоскость:*

$$X = X_0 + a \cdot (Y_0 - X_0) + b \cdot (Z_0 - X_0),$$

где вектора $Y_0 - X_0$ *и* $Z_0 - X_0$ *неколлинеарны и ненулевые, так как точки не лежат на одной прямой.*

Пусть плоскость $R = R_0 + c \cdot R_a + d \cdot R_b$ *так же проходит через точки* X_0, Y_0, Z_0*. Составим уравнения для* X_0, Y_0, Z_0*:*

$$X_0 = R_0 + c \cdot R_a + d \cdot R_b$$

$$Y_0 = R_0 + e \cdot R_a + f \cdot R_b$$

$$Z_0 = R_0 + g \cdot R_a + h \cdot R_b$$

Из этих уравнений через R_a, R_b *легко выражаются вектора:*

$$(Y_0 - X_0) = (e - c) \cdot R_a + (f - d) \cdot Rb$$

$$(Z_0 - X_0) = (g - c) \cdot R_a + (h - d) \cdot Rb$$

Опять же, определитель для этой системы уравнений не равен нулю ввиду неколлинеарности $Y_0 - X_0$ *и* $Z_0 - X_0$*, следовательно* R_a *и* R_b *выражаемы через* $Y_0 - X_0$ *и* $Z_0 - X_0$*, а так как* $R_0 = X_0 - c \cdot R_a - d \cdot R_b$*, то для любой точки R можно написать уравнение* $R = X_0 + k \cdot (Y_0 - X_0) + l \cdot (Z_0 - Y_0)$*,* *т.е. все точки одной плоскости принадлежат и другой.*

Аналогично **доказывается** утверждение, что через одну точку пространства можно провести одну и только одну плоскость, параллельную заданной плоскости.

Следствие: Если две точки прямой принадлежат плоскости, то все точки прямой принадлежат этой плоскости. **Доказательство**, в связи с аналогичностью, достаточно очевидно, поэтому не приводится.

7 $3d$-пространство

7.1 Определение 3d-пространства

Определение: $3d$ *комплексным пространством* (в дальнейшем $3d$-пространством) называется совокупность точек, удовлетворяющая уравнению:

$$X = X_0 + a \cdot R_a + b \cdot R_b + c \cdot R_c,$$

где: X_0 — некая точка, принадлежащая $3d$-пространству; R_a, R_b, R_c ненулевые вектора такие, что не существует такой плоскости, которой они были бы все параллельны; a, b, c — любые комплексные числа.

7.2 Параллельность $3d$-пространству

Ненулевой вектор R называется параллельным $3d$-пространству, если существуют такие три комплексных числа d, e и f, что:

$$R = d \cdot R_a + e \cdot R_b + f \cdot R_c.$$

Любая прямая, построенная на этом векторе, называется прямой параллельной $3d$-пространству.

Плоскость называется параллельной $3d$-пространству, если оба вектора, на которых она построена параллельны этому $3d$-пространству.

$3d$-пространство X называется параллельным $3d$-пространству Y, если все вектора, на которых построено $3d$-пространство X параллельны $3d$-пространству Y.

7.3 Через четыре точки...

Далее приводятся основные выводы без доказательств, ввиду их достаточной простоты и очевидности в связи с доказанным выше.

На четырех точках пространства не принадлежащих одной плоскости можно построить одно и только одно $3d$-пространство.

Через одну точку пространства можно провести одно и только одно $3d$-пространство, параллельное заданному $3d$-пространству.

Если две несовпадающие точки прямой принадлежат $3d$-пространству, то все точки прямой принадлежат пространству.

Если три точки плоскости не лежащие на одной прямой принадлежат $3d$-пространству, то все точки этой плоскости принадлежат этому $3d$-пространству.

Через две непересекающиеся и непараллельные прямые можно провести одно и только одно 3d-пространство. Доказательство достаточно просто. Надо выбрать на обоих прямых по две несовпадающих точки. Ввиду непараллельности и непересекаемости прямых, через них нельзя провести одну плоскость, следовательно можно провести только одно 3d-пространство.

8 $4d$-пространство

8.1 Определение $4d$-пространства

Аналогичные построения можно делать и дальше, для пространств большей мерности. Для дальнейших рассуждений важно, что через 5 точек не принадлежащих одному $3d$-пространству можно провести одно и только одно

$4d$-*пространство*, **определяемое**, как совокупность точек, удовлетворяющих параметрическому уравнению:

$$X = X_0 + a \cdot R_a + b \cdot R_b + c \cdot R_c + d \cdot R_d$$

где: X_0 — точка принадлежащая $4d$-пространству; R_a, R_b, R_c, R_d — четыре ненулевых вектора, для которых не существует $3d$-пространства, которому они все были бы параллельны одновременно; a, b, c, d — любые комплексные числа.

Вектора R_a, R_b, R_c, R_d называются *базисом* $4d$-пространства. В частности, пространство однозначно определяется началом координат и четверкой векторов $E_x = (1, 0, 0, 0)$, $E_y = (0, 1, 0, 0)$, $E_z = (0, 0, 1, 0)$ и $E_t = (0, 0, 0, 1)$, называемых единичными векторами.

Любая точка пространства X в таком базисе может быть представлена суммой:

$$X = X_1 \cdot E_x + X_2 \cdot E_y + X_3 \cdot E_z + X_4 \cdot E_t$$

где X_1, X_2, X_3, X_4 координаты, т.е. комплексные числа.

Отмечу, что определение комплексного пространства через прямое произведение четырех множеств не является единственным. Можно, например, взять четверку линейно независимых векторов, *объявить* их единичными векторами и на этом базисе построить все остальные вектора, а вместе с ними и точки пространства. В этом случае, комплексные координаты будут играть вторичную роль, а пространство, вообще говоря, не будет прямым произведением четырех множеств комплексных чисел, а будет только изоморфно $\mathbb{C}^4$.

9 Произведение векторов

9.1 Произведение в самом общем виде

Функция $P(R_a, R_b)$ называется произведением векторов, если она удовлетворяет следующим условиям:

1 $P(R_a, R_0) = P(R_0, R_a) = 0$, где R_0 — нуль-вектор

2 $P(R_a, (c \cdot R_b)) = c \cdot P(R_a, R_b) = P((c \cdot R_a), R_b)$, для любого $c \subset \mathbb{C}$

3 $P(R_a, (R_b + R_c)) = P(R_a, R_b) + P(R_a, R_c)$

4 $P((R_a + R_b), R_c) = P(R_a, R_c) + P(R_b, R_c)$

Исходя из этих условий можно рассчитать произведение любых двух векторов, если знать произведения только для базисных векторов R_i пространства. В случае $4d$-пространства можно записать:

$$P(R_x, R_y) =$$

$$= X_1Y_1P(R_1, R_1) + X_2Y_1P(R_2, R_1) + X_3Y_1P(R_3, R_1) + X_4Y_1P(R_4, R_1)+$$
$$+X_1Y_2P(R_1, R_2) + X_2Y_2P(R_2, R_2) + X_3Y_2P(R_3, R_2) + X_4Y_2P(R_4, R_2)+$$
$$+X_1Y_3P(R_1, R_3) + X_2Y_3P(R_2, R_3) + X_3Y_3P(R_3, R_3) + X_4Y_3P(R_4, R_3)+$$
$$+X_1Y_4P(R_1, R_4) + X_2Y_4P(R_2, R_4) + X_3Y_4P(R_3, R_4) + X_4Y_4P(R_4, R_4)$$

Обозначив матрицу $P(R_i, R_k) = P_{ik}$, запишем:

$$P(R_x, R_y) = \sum_{i,k} X_i Y_k P_{ik}$$

P_{ik} — являются элементами некоего множества.

9.2 Числовое произведение векторов

Элементы P_{ik} могут быть элементами множества комплексных чисел $\mathbb{C}$, в этом случае произведение векторов будем называть *числовым*. Матрица числового произведения — P_{ik} — может быть приведения к диагональному виду (в комплексных числах это можно сделать всегда) и, соответственно, построены вектора, в базисе которых числовое произведение будет выглядеть, как:

$$P(R_x, R_y) = \sum_{i} X_i' Y_i' \lambda_i$$

λ_i — собственные числа матрицы P_{ik}.

Если среди λ_i нет нулей (а это так, когда $\det P_{ik} \neq 0$), то, масштабируя базисные вектора на величины $\sqrt{\lambda_i}$, числовое произведение векторов можно привести к виду:

$$P(R_x, R_y) = \sum_i X_i'' Y_i''$$

Базис, в котором матрица числового произведения единична, называется *ортонормированным*.

Определение: числовое произведение векторов с невырожденной матрицей P_{ik} называется *скалярным произведением*.

Отмечу, что это определение скалярного произведения отличается от общепринятого.

В общем случае, когда $P(R_i, R_k)$ различны для разных пар (i,k), произведение векторов называется *прямым произведением*, которое является тензорно-значной функцией от двух векторов.

10 Скалярное произведение

Очевидно, что скалярное произведение может быть задано множеством способов. Для последующей работы с комплексным пространством, выбирается некое *фиксированное* скалярное произведение. И, в соответствии с ним выбирается *ортонормированный базис*, в котором матрица числового произведения единична и *симметрична*, соответственно, симметрично и скалярное произведение.

Скалярное произведение векторов обозначается как:

$$R_a \cdot R_b$$

Симметричное произведение обладает следующими свойствами:

1 $R_a \cdot R_0 = 0$, где $R_0 = (0, 0, 0, 0)$ — нуль-вектор

2 $R_a \cdot (c \cdot R_b) = c \cdot (R_a \cdot R_b)$, для любого $c \subset \mathbb{C}$

3 $R_a \cdot R_b = R_b \cdot R_a$

4 $R_a \cdot (R_b + R_c) = (R_a \cdot R_b) + (R_a \cdot R_c)$

В случае антисимметричной матрицы скалярное произведение будет обладать свойством антисимметрии: $R_a \cdot R_b = -R_b \cdot R_a$. Такое произведение обычно называется *псевдоскалярным*, но в комплексной геометрии разница между скалярным и псевдоскалярным произведением стирается, так же, как стирается разница между евклидовым и псевдоевклидовым пространствами, о которых будет сказано позже.

В общем случае (не ортонормированный базис!) скалярное произведение содержит как симметричную, так и антисимметричную части.

Далее речь пойдет только о симметричном скалярном произведении. Его можно задать как $R_a \cdot R_b = (P(R_a, R_b) + P(R_b, R_a))/2$.

10.1 Перпендикулярность, «Теорема Пифагора»

Вектора R_a и R_b называются перпендикулярными, если их скалярное произведение равно нулю.

Для перпендикулярных векторов R_{ab} и R_{bc}, из определения перпендикулярности, как $R_{ab} \cdot R_{bc} = 0$ Имеем:

$$R_{ac}^2 = (R_{ab} + R_{bc})^2 = R_{ab}^2 + R_{bc}^2 + 2 \cdot R_{ab} \cdot R_{bc} = R_{ab}^2 + R_{bc}^2$$

10.2 Через одну точку... один перпендикуляр

Следствие: Через точку X_0, не лежащую на прямой $y : Y = Y_0 + a \cdot R_y$, для которой $R_y \cdot R_y$ не равно нулю, можно построить один и не более чем один перпендикуляр к этой прямой.

Доказательство: *Пусть точки Z_a и Z_b есть точки пересечения с прямой двумя разными перпендикулярами.*

Тогда:

$$R_y \cdot (Z_a - X_0) = 0$$

$$R_u \cdot (Z_b - X_0) = 0$$

При этом:

$$Z_a = Y_0 + a \cdot R_y \qquad Z_b = Y_0 + b \cdot R_y$$

Подставим:

$$R_y \cdot (Y_0 + a \cdot R_y - X_0) = 0$$

$$R_y \cdot (Y_0 + b \cdot R_y - X_0) = 0$$

$$a \cdot R_y \cdot R_y + R_y \cdot (X_0 - Y_0) = 0$$
$$b \cdot R_y \cdot R_y + R_y \cdot (X_0 - Y_0) = 0$$

Отсюда:

$$a \cdot R_y^2 = b \cdot R_y^2$$

$R_y \cdot R_y$ *не равно 0, это означает, что* $a = b$ *и* $Z_a = Z_b$.

10.3 Какие могут быть иные варианты?

Пусть плоскость определена на векторах R_a,R_b, тогда для вектора R_y имеем: $R_y = c \cdot R_a + d \cdot R_b$, при этом по крайней мере одно из чисел c или c не равно нулю.

Пусть прямые $X = X_0 + a \cdot R_x$ и $X' = X_0 + a \cdot R'_x$ перпендикулярны y.

Для векторов R_x, R'_x имеем:

$$R_x = k \cdot R_a + l \cdot R_b, R'_x = k' \cdot R_a + l' R_b$$

Запишем условие перпендикулярности:

$$x : (l \cdot R_a + l \cdot R_b) \cdot (c \cdot R_a + d \cdot R_b) = 0$$
$$x' : (l' \cdot R_a + k' \cdot R_b) \cdot (c \cdot R_a + d \cdot R_b) = 0$$

Откуда будем иметь:

$$(c \cdot R_a \cdot R_a + d \cdot R_a \cdot R_b) \cdot l + k(c \cdot R_a \cdot R_b + d \cdot R_b \cdot R_b) = 0$$
$$(c \cdot R_a \cdot R_a + d \cdot R_a \cdot R_b) \cdot l' + k'(c \cdot R_a \cdot R_b + d \cdot R_b \cdot R_b) = 0$$

Для доказательства единственности перпендикуляра достаточно доказать, что на плоскости существует пара векторов R_a, R_b, таких, что одно из чисел

$$(c \cdot R_a \cdot R_a + d \cdot R_a \cdot R_b) \text{ или } (c \cdot R_a \cdot R_b + d \cdot R_b \cdot R_b)$$

не равно нулю. В этом случае вектора R_x и R'_x оказываются выразимыми через друг друга, т.е. коллинеарными.

Если же для любой пары неколлинеарных векторов R_a, R_b оба этих числа равны нулю, то условие перпендикулярности будет выполняться для любых чисел l и k, т.е. все прямые проходящие через X_0 будут перпендикулярны прямой y.

Пусть это так. Тогда для R_a, R_b, не коллинеарных друг другу и прямой y, имеем:

$$R_a \cdot R_y = 0 \text{ и } R_b \cdot R_y = 0,$$

то есть

$$c \cdot R_a \cdot R_a + d \cdot (R_a \cdot R_b) = 0$$

и

$$c \cdot (R_a \cdot R_b) + d \cdot R_b \cdot R_b = 0,$$

при этом $c \neq 0$, $d \neq 0$ ввиду неколлинеарности y векторам R_a и R_b.

$$\begin{array}{cccc} R_a \cdot R_a = 0 & \Rightarrow & R_a \cdot R_b = 0 & R_b \cdot R_b = 0 \\ R_a \cdot R_a \neq 0 & \Rightarrow & Ra \cdot Rb \neq 0 & Rb \cdot Rb \neq 0 \end{array}$$

Т.е. либо все вектора перпендикулярны друг другу, либо все вектора перпендикулярны только одному вектору.

Плоскости, в которых существуют два перпендикулярных вектора R_a,R_b такие что $R_a^2 \neq 0$ и $R_b^2 \neq 0$ будем называть *обычными*.

Для такой плоскости условие единственности перпендикуляров выполнено. Плоскости, на которых не выполнено условие единственности прпендикуляров, хотя бы для одного вектора, будем называть *особыми*.

Среди особых плоскостей можно выделить сверхособые, для которых условие единственности перпендикуляра не выполнено для всех векторов. На такой плокости все вектора будут перпендикулярны друг другу. В таких плоскостях выполнено условие $R_a \cdot R_a = 0$ для любого вектора.

11 Расстояние

11.1 Определение расстояния

Расстояние это некая функция двух точек пространства. Без особых сложностей от расстояний между точками пространства можно перейти к длинам векторов, так как на двух точках X, Y однозначно строится вектор, определяемый, как вектор прямой, проходящей через обе точки так, что $Y = X + 1 \cdot R_{xy}$, откуда $R_{xy} = Y - X$. (Порядок точек имеет значение!)

Функцию расстояния от точки X до точки Y будем обозначать как $R(X, Y)$, а длину вектора R_{xy} — как $L(R_{xy})$.

11.2 Что же такое расстояние?

Говорить об этом довольно сложно. Изначально расстояние являлось физическим термином и применение его к математическим объектам не совсем корректно. Поэтому вводится математическое определение расстояния, которое ведет себя подобно физическому, и можно говорить о свойствах расстояния (длин векторов). Свойства расстояния не выводятся, а принимаются, как аксиомы:

Св.0 Расстояние в комплексном пространстве есть числовая функция от двух точек пространства.

Далее будут использоваться только *числовые* функции расстояния, т.е. функции дающие в своем результате комплексное число. Является ли это число строго действительным или нет — не важно. Замечу так же, что ничего не говорится о единственности.

Св.1 Расстояние от любой точки до самой себя равно нулю: $R(X, X) = 0$

Здесь надо особо отметить отсутствие обратного. Если $R(X, Y) = 0$, то это означает либо $Y = X$, либо, что X и Y находятся в особом отношении друг к другу и $R(X', Y') = 0$ для всех точек на прямой XY (доказано ниже).

Из этого свойства следует, что если $R(X, Y)$ не рано нулю, то X и Y не совпадают.

Св.2 Векторность: $R(X, Y) = -R(Y, X)$

Св.3 Для расстояний между тремя точками лежащими на одной прямой имеет место равенство: $R(X, Z) = R(X, Y) + R(Y, Z)$. Это свойство, вообще говоря, следует из четвертого.

В частности, если $R(X,Z)$ не равно $R(X,Y)+R(Y,Z)$, то X,Y,Z не лежат на одной прямой.

Обратное утверждение, $R(X,Z)=R(X,Y)+R(Y,Z) \Rightarrow X,Y,Z$ лежат на одной прямой, вообще говоря, не верно, например, потому, что могут существовать плоскости, в которых расстояние равно нулю между всеми точками.

Св.4 Если для точек X,Y,Z и векторов, определяемых этими точками, имеется соотношение $R_{xy}=a\cdot R_{xz}$, то $R(X,Y)=a\cdot R(X,Z)$.

Из этого свойства можно вывести свойство 3, так как для векторов R_{xy}, R_{yz}, определенных на несовпадающих точках, лежащих на одной прямой имеется соотношение $R_{xy}=c\cdot R_{yz}$. Случай же с совпадающими точками тривиален.

11.3 Определение длины вектора

Определим и длину вектора: $L(R_{xy}):=R(X,Y)$

Рассмотрим уравнение прямой $x:X=X_0+a\cdot R_x$. Число a будем называть собственной координатой точки X на прямой x.

Пусть имеется две различные точки X_0,Y_0. Построим на этих точках прямую: $X=X_0+a\cdot(Y_0-X_0)$.

Для любых точек Z_a,Z_b принадлежащей этой прямой имеем:

$$Z_a=X_0+a\cdot(Y_0-X_0)$$

$$Z_a=X_0+b\cdot(Y_0-X_0)$$

И, следовательно:

$$Z_b-Z_a=(b-a)\cdot(Y_0-X_0)$$

11.4 Реализация расстояния

Можно показать, что значение $R(Z_a,Z_b)=b-a$ для точек Z_b и Z_a удовлетворяет указанным свойствам расстояния:

Действительно:

0 $R(Z_a, Z_b) = b - a$ принадлежит множеству $\mathbb{C}$.

1 $Z_a = Z_b \Rightarrow$ для любой прямой $a = b \Rightarrow R(Z_a, Z_b) = 0$

2 $R(Z_a, Z_b) = b - a = -(a - b) = -R(Z_b, Z_a)$

3 $R(Z_a, Z_c) = c - a = (b - a) + (c - b) = R(Z_a, Z_b) + R(Z_b, Z_c)$

4 $R(Z_a, Z_b) = (b - a) = x \cdot (c - a) = x \cdot R(Z_c - Z_a)$, для Z_a, Z_b, Z_c таких, что вектор $R_{ab} = x \cdot R_{ac}$

Таким образом, для любой прямой можно ввести расстояние между точками на ней, как разность между собственными координатами.

Подобный выбор функции расстояния на прямой не единственен. Действительно, простейшее переопределение прямой с использованием коллинеарного вектора приводит к новой функции расстояния.

Пусть функция $R_a(X, Y)$ определена так как было описано выше.

Очевидно, что функция $c \cdot R_a(X, Y)$, где c любое комплексное число, так же будет удовлетворять всем четырем указанным свойствам расстояния.

Расстояние, естественно, оказывается зависящим от вектора прямой, который выступает в роли единицы длины.

Следствие: Пусть $R_a(X, Y)$ и $R_b(X, Y)$ — две числовые функции расстояния, определенные на прямой x, такие, что $R_a(X, Y)$ и $R_b(X, Y)$ не равны нулю для несовпадающих точек. Тогда $R_a(X, Y) = c \cdot R_b(X, Y)$, где c — некое комплексное число.

Доказательство: *Для прямой x имеем:* $X = X_0 + a \cdot R_x$, *тогда при* $a = 1$ *будем иметь:*

$$R_a(X_0, X_0 + R_x) = L_a(Rx) \neq 0$$

$$R_b(X_0, X_0 + R_x) = L_b(Rx) \neq 0$$

Тогда, для любых точек X_i, X_j *с координатами* a_i, a_j *будем иметь:*

$$R_a(X_i, X_j) = (a_j - a_i) \cdot L_a(R_x)$$

$$R_b(X_i, X_j) = (a_j - a_i) \cdot L_b(R_x) = R_a((X_i, X_j) \cdot L_b(R_x)/L_a(R_x),$$

Подставляя $c = L_b(R_x)/L_a(R_x)$, получаем искомое выражение.

Отсюда же следует, что если $R(X,Y) = 0$ и X не совпадает с Y, то для любых X',Y', лежащих на этой прямой $R(X',Y') = 0$. Но это вовсе не означает, что на этой прямой нельзя определить расстояние не равное нулю.

Для любых несовпадающих точек X, Y найдется такое расстояние, что $R(X,Y) = 1$. Очевидно, так как на двух несовпадающих точках можно построить прямую, в которой R_{xy} будет играть роль единичного вектора.

Числовое расстояние на прямых определяется однозначно с определением векторов прямых. Следовательно, функция расстояния для пространства должна определяться по выбору векторов, на котором оно построено.

Замечание: Следует отметить, что расстояние в общем случае определено не как числовая функция, то есть реально расстояние *не есть число*, а есть лишь некоторая функция, имеющая указанные выше свойства. Дальнейшие доказательства производятся только для расстояний, определенных как числовые функции. Случай нечисловых функций расстояния выпадает из области рассмотрения данного документа.

11.5 Аксиома соизмеримости

Аксиома: В комплексном пространстве существует соизмеримая ортонормированная четверка векторов E_x, E_y, E_z, E_t, для которых определена функция расстояния такая, что:

$$L(E_x) = L(E_y) = L(E_z) = L(E_t) = 1 \quad \text{и}$$

$$E_i \cdot E_j = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \left[\begin{array}{ll} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{array} \right.$$

При этом для любых векторов X и Y будет верно:

$$X \cdot Y = (X_1 \cdot E_x + X_2 \cdot E_y + X_3 \cdot E_z + X_4 \cdot E_t) \cdot (Y_1 \cdot E_x + Y_2 \cdot E_y + Y_3 \cdot E_z + Y_4 \cdot E_t)$$

$$X \cdot Y = X_1 \cdot Y_1 + X_2 \cdot Y_2 + X_3 \cdot Y_3 + X_4 \cdot Y_4$$

В частности, для вектора R с координатами (a, b, c, d) будет верно соотношение для квадрата вектора:

$$R^2 = (a \cdot E_x)^2 + (b \cdot E_y)^2 + (c \cdot E_z)^2 + (d \cdot E_t)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Из свойств расстояния никак не следует соотношение длин неколлинеарных векторов. Формально они могут быть выбраны каким угодно образом. Выбор производится таким образом, чтобы модуль введенного расстояния совпадал со стандарно определенным расстоянием в множестве $\mathbb{R}^4$, являющемся подмножеством $\mathbb{C}^4$.

Определим $L(R)$ так, что: $L(R)^2 = R^2$

Очевидно, что такая функция может быть введена, так как расстояние определено на прямых, где свойства произведения векторов согласуются со свойствами расстояния. Выбор знака функции L зависит от ориентации пространства, и может быть произвольно зафиксирован, как плюс, так и минус, тогда как для модуля этот знак не существенен.

12 Линейное преобразование

12.1 Определение

Определение: Линейным преобразованием пространства x назовем такое отображение пространства x на себя, что точке:

$$X = X_0 + a \cdot R_a + b \cdot R_b + c \cdot R_c + d \cdot R_d$$

соответствует точка:

$$Y = Y_0 + a \cdot R'_a + b \cdot R'_b + c \cdot R'_c + d \cdot R'_d$$

где a, b, c, d — комплексные числа. (Здесь, как пример, используется $4d$-пространство. Подобным же образом может быть определено линейное преобразование для пространства любой мерности.)

Если R'_a, R'_b, R'_c, R'_d не праралленьны одновременно одному $3d$-пространству, то преобразование невырождено и взаимнооднозначно. Такое невырожденное линейное преобразование называют *афинным*.

Пусть R_a, R_b, R_c, R_d — ортонормированная четверка: $R_i \cdot R_j = \delta_{ij}$.
Тогда:

$$(X - X_0)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$(Y - Y_0)^2 = a^2 R_a'^2 + b^2 R_b'^2 + c^2 R_c'^2 + d^2 R_d'^2 + 2ab R_a' R_b' +$$
$$+ ac R_a' R_c' + ad R_a' R_d' + bc R_b' R_c' + bd R_b' R_d' + cd R_c' R_d'$$
$$+ ac R_c' R_a' + ad R_d' R_a' + bc R_c' R_b' + bd R_d' R_b' + cd R_d' R_c'$$

12.2 Поворот, отражение

Поставим условие преобразования: $(Y - Y_0)^2 = (X - X_0)^2$. Для любой точки X, тогда получим условия для преобразований единичных векторов:

$$R_i' \cdot R_j' + R_j' \cdot R_i' = 2\delta_{ij}$$

Рассмотрим частный случай, когда $R_c' = R_c$, $R_d' = R_d$,

$$R_a' = k \cdot R_a + l \cdot R_b, \qquad R_b' = m \cdot R_a + n \cdot R_b$$

Для k,l,m,n имеем условия:

$$k^2 + l^2 = 1; \qquad m^2 + n^2 = 1; \qquad km + ln = 0.$$

Три уравнения для четырех переменных. Решений этой системы будет множество, одно из них описывается уравнениями:

$$k = \cos\varphi \qquad l = \sin\varphi$$
$$m = -\sin\varphi \qquad n = \cos\varphi$$

при любом комплексном φ.

При совпадении X_0 и Y_0 подобное преобразование, наиболее естественно назвать поворотом в плоскости с векторами R_a,R_b, относительно точки X_0.

Частные случаи:

Поворот на $180°$: $k = n = -1, \ l = m = 0$

Поворот на 90°: $k = n = 0,\ l = 1,\ m = -1$

Интересен так же случай поворота при мнимом аргументе $\varphi \to i \cdot \varphi$:

$$k = n = \operatorname{ch}\varphi, \qquad l = m = i \cdot \operatorname{sh}\varphi$$

Основным свойством этих преобразований является сохраняемость величины R_x^2 для любого вектора R_x.

Другое решение системы для k, l, m, n появляется в связи с неоднозначностью квадратного корня.

$$k = \cos\varphi \qquad l = \sin\varphi$$

$$m = \sin\varphi \qquad n = -\cos\varphi$$

Такое преобразование — поворот плюс отражение. Из него можно выделить чистые отражения:

1: $k = 1, n = -1, \quad l = m = 0$ — отражение по координате b

2: $k = -1, n = 1, \quad l = m = 0$ — отражение по координате a

13 Некоторые дополнительные выводы

13.1 Разложение комплекснозначных векторов

Приведены без доказательств.

1 Любой комплекснозначный вектор $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ вещественными поворотами может быть приведен к виду:

$$X = (X_1', X_2', X_3', iX_4')e^{i\varphi} \qquad X_1', X_2', X_3', X_4', \varphi \subset \mathbb{R}$$

2 Любые два комплекснозначных вектора X, Y вещественными поворотами могут быть приведены к виду:

$$X = (X_1', X_2', X_3', iX_4')e^{i\varphi} \qquad Y = (Y_1', Y_2', iY_3', Y_4'e^{i\psi})e^{i\gamma}$$

$$X_1', X_2', X_3', X_4', \varphi, Y_1', Y_2', Y_3', Y_4', \psi, \gamma \subset \mathbb{R}$$

13.2 «Неравенство треугольника»

Расположение трех несовпадающих точек X_a, X_b, X_c будем называть особым, если какой либо из векторов, построенный на двух из этих трех точек перпендикулярен или параллелен особой прямой.

Если для любых трех различных точек X_a, X_b, X_c, не располагающихся особо, имеется равенство $L(R_{ac}) = L(R_{ab}) + L(R_{bc})$, то эти точки лежат на одной прямой.

Ввиду важности этого свойства приведу **доказательство:** *Заметим сразу, что по условию не особого расположения точек:*

$$L(R_{ac}) \neq 0, \qquad L(R_{ab}) \neq 0, \qquad L(R_{bc} \neq 0$$

Построим на плоскости прямую ab, *найдем на ней точку* X_d *такую что* $R_{ad} = R_{ac}$. *Очевидно, что это возможно, достаточно построить точку:*

$$X_d = X_a + \frac{L(R_{ac})}{L(R_{ab})} R_{ab} = \alpha R_{ab}.$$

$$\alpha = \frac{L(R_{ac})}{L(R_{ab})} \qquad L(R_{ac}) = \alpha L(R_{ab})$$

Длины векторов не равны нулю и деление возможно.

$$L(R_{ac})^2 = L(R_{ab})^2 + L(R_{bc})^2 + 2L(R_{ab})L(R_{bc})$$

в то же время:

$$L(R_{ac})^2 = R_{ac} \cdot R_{ac} = R_{ab}^2 + R_{bc}^2 + 2R_{ab}R_{bc} = L(R_{ab})^2 + L(R_{bc})^2 + 2R_{ab}R_{bc}$$

что означает:

$$R_{ab}R_{bc} = L(R_{ab})L(R_{bc})$$

Рассчитаем длину вектора R_{cd}:

$$R_{cd}^2 = (R_{ca} + R_{ad})^2 = R_{ca}^2 + R_{ac}^2 + 2R_{ca}R_{ad}$$

ввиду $R_{ca} = -R_{ac}$:

$$R_{cd}^2 = L(R_{ac})^2 + L(R_{ad})^2 - 2R_{ac}R_{ad}$$

$$R_{ac}R_{ad} = R_{ac}\alpha R_{ab} = \alpha(R_{ab} + R_{bc})R_{ab} =$$
$$= \alpha(R_{ab}^2 + R_{ab}R_{bc}) = \alpha(L(R_{ab})^2 + L(R_{ab})L(R_{bc})) =$$
$$= \alpha L(R_{ab})(L(R_{ab}) + L(R_{bc})) = L(R_{ac})^2$$

Отсюда следует:

$$R_{cd}^2 = L(R_{cd})^2 = 0$$

Что означает либо совпадение точек X_c *и* X_d*, либо особенность прямой* cd*. В то же время:*

$$R_{ad}R_{cd} = R_{ad}R_{ca} + R_{ad}R_{ad} = 0$$

т.е. R_{ad}*, а вместе с ним и* R_{ab} *перпендикулярны* R_{cd}*. Но по условию вектор* R_{ab} *не может быть перпендикулярен особой прямой. Это означает единственный оставшийся выбор:* $X_c = X_d$*.*

Из доказанного выше следует, что если вершины треугольника X_a, X_b, X_c не лежат на одной прямой и не располагаются особо, то для любых комбинаций $\alpha, \beta, \gamma \subset \{a, b, c\}$ с несовпадающими α, β, γ имеется неравенство:

$$R_{\alpha\beta} \neq R_{\alpha\gamma} + R_{\gamma\beta}$$

которое, и следует называть *неравенством треугольника*.

13.3 Евклидовы и псевдоевклидовы сечения

Рассмотрим подмножества точек комплексного пространства, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$X = (a_1 \cdot X_1, a_2 \cdot X_2, a_3 \cdot X_3, a_4 \cdot X_4)$$

$$a_i = e^{i\varphi} \cdot s_i, \quad s \subset \{1, i\} \quad X_1, X_2, X_3, X_4, \varphi \subset \mathbb{R}$$

здесь $e^{i\varphi}$ — общая *фиксированная* комплексная фаза, а s_i — *фиксированное* дополнение или отсутствие дополнения фазы на $\pi/2$ для каждой координаты. X_i — вещественные параметры, с областью определения совпадающей с $\mathbb{R}$.

Такое подмножество будем называть *сечением* комплексного пространства. Очевидно, что сечение есть *неполное параметрически заданное подмножество*, так как область определения параметров X_i не совпадает с $\mathbb{C}$.

Рассчитаем комплексное расстояние в таком подпространстве между любыми двумя точками X и Y:

$$R^2 = e^{2i\varphi} \cdot [s'_1(X_1 - Y_1)^2 + s'_2(X_2 - Y_2)^2 + s'_3(X_3 - Y_3)^2 + s'_4(X_4 - Y_4)^2]$$

$$s'_i \subset \{1, -1\}$$

Совершенно очевидно, что величина $[R^2 \cdot e^{-2i\varphi}]$ совпадает по смыслу с квадратом интервала в неком метрическом пространстве с сигнатурой (s'_1, s'_2, s'_3, s'_4). Легко проверить, что свойства этого интервала, согласно свойствам комплексного пространства, совпадают со свойствами соответствующими евклидовому или псевдоевклидовому четырехмерному пространству. Для этого достаточно вспомнить, что комплексное расстояние не меняет своей сути при домножении на комплексный множитель; домножить R на $e^{-i\varphi}$; и прямо получить свойства псевдоевклидового интервала (или евклидового расстояния) из свойств комплексного расстояния.

Таким образом единое комплексное пространство *содержит в себе* в качестве подмножеств евклидовы и псевдоевклидовы подпространства с метриками «на любой вкус». В частности, положив $s'_1 = s'_2 = s'_3 = 1$ и $s'_4 = -1$, получим псевдоевклидово сечение комплексного пространства, обладающее свойствами *пространства Минковского*.

Здесь же, следует сказать, что понятие сигнатуры для всего комплексного пространства теряет смысл, так как простыми преобразованиями («растяжением» координат на мнимую величину) всякая введенная сигнатура может быть приведена к значению $(+.+, +, +)$

Часть III
Заключение

Изложеный материал является основой для построения «Комплексной геометрии», которая становится насущно необходимой для работы по «Общей Теории Поля».

В заключение хочется добавить, что комплексная геометрия является естественным дополнением евклидовой геометрии, построенной на многомерных пространствах вещественных чисел. В пределе, при ограничении комплексных чисел до вещественных и переопределении расстояния, как модуля от комплексного, комплексная геометрия прямо переходит в евклидову.

С уважением, *Ivan Mak*

PDF подготовлен с помощью LaTeX.