НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

С. М. Львовский

Лекции по комплексному анализу

Издание второе, стереотипное

Москва
Издательство МЦНМО
2009

УДК 517.53.57
ББК 22.16
Л89

Львовский С. М.

Л89 Лекции по комплексному анализу. — 2-е изд., стереотип. — М: МЦНМО, 2009. — 136 с.

ISBN 978-5-94057-577-1

Эта брошюра представляет собой расширенный вариант курса лекций, прочитанного автором на втором курсе Независимого московского университета в весеннем семестре 2002 года. Помимо традиционного материала, приведены сведения о компактных римановых поверхностях; обсуждаются такие результаты, как теорема Римана–Роха и (отчасти) теорема Абеля, а в первом нетривиальном случае (для эллиптических кривых) приводятся и доказательства.

Первое издание книги вышло в 2004 году.

ББК 22.16

Сергей Михайлович Львовский

Лекции по комплексному анализу

Подписано в печать 18.11.2009 г. Формат $60 \times 90\ ^1\!/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 8,5. Тираж 1000 экз. Заказ № 191.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Принт Сервис Групп».
Москва, 2-й Лихачевский пер., д. 7.

ISBN 978-5-94057-577-1

Оглавление

Предисловие

Эта брошюра представляет собой расширенный вариант записок лекций, читавшихся студентам Независимого московского университета (НМУ) в весеннем семестре 2002 года.

Теория функций комплексного переменного (комплексный анализ) — очень классический, очень важный и довольно обширный раздел математики; вместить достаточно полный курс комплексного анализа в один семестр затруднительно даже в НМУ, и многие важные вещи будут у нас упомянуты лишь вскользь, а то и вовсе обойдены молчанием. Тем не менее хочется верить, что читатели получат от курса пользу и удовольствие.

При отборе материала я стремился максимально быстро подвести читателя к теории римановых поверхностей; мы формулируем и обсуждаем некоторые основные результаты (включая теорему Римана–Роха), а для простейшего нетривиального случая — именно, для эллиптических кривых — приводим и доказательства.

При подготовке этого издания были добавлены разд. 12, 13 и 14 (во время чтения курса эти темы были затронуты лишь очень вкратце); в добавлениях к другим разделам приведены некоторые сведения о функциях нескольких переменных (в той мере, в какой эту тему можно затронуть в начальном курсе), а также кое-какие доказательства, на которые на лекциях в НМУ не хватило времени.

В конце книги приведены упражнения.

Я благодарен О. В. Шварцману, беседы с которым помогли мне при подготовке курса, В. О. Бугаенко и С. А. Дориченко, помогавшим мне вести практические занятия, и, наконец, всем студентам–участникам этих занятий: без них не было бы ни этого курса, ни этой книжки.

Требования к подготовке читателя

В НМУ курс теории функций комплексного переменного читается в четвертом семестре; соответственно, мы будем при необходимости пользоваться тем, что студенты НМУ изучают в первых трех семестрах. Из этого материала будет использоваться (помимо того, что входит в стандартные университетские курсы) в основном следующее:

Комплексные числа: мы полагаем, что читатель уже отчасти знаком с комплексными числами, в частности, с определением показательной функции по формуле $e^z = \sum_{n=0}^{\infty}(z^n/n!)$, с определениями синуса и косинуса комплексного числа ($\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$, $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$) и с «формулой Эйлера» $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

Математический анализ: понятие о гладком многообразии, дифференциальные формы, теорема Стокса.

Элементарная топология: фундаментальная группа, накрытия, классификация поверхностей, эйлерова характеристика поверхности.

Геометрия: дробно-линейные преобразования, модель Пуанкаре геометрии Лобачевского.

Лекция 1. Голоморфные функции

Теория функций комплексного переменного изучает не произвольные функции комплексного переменного, но функции *голоморфные*. С определения голоморфной функции мы и начнем.

Заметим, что n-мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать как $2n$-мерное вещественное пространство $\mathbb{R}^{2n}$. Имея в виду это отождествление, дадим

Определение 1.1. Пусть $U \subset \mathbb{C}^n$ — открытое подмножество. Функция $f\colon U \to \mathbb{C}$ называется *голоморфной*, если она принадлежит классу C^1 как отображение из $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ в $\mathbb{R}^2$ и если для всякой точки $x \in U$ ее производная $(Df)_x\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ является гомоморфизмом векторных пространств над $\mathbb{C}$ (а не только над $\mathbb{R}$). Аналогично определяется *голоморфное отображение* $f\colon U \to \mathbb{C}^m$.

Замечание 1.2. В дальнейшем мы увидим, что на самом деле всякая голоморфная функция принадлежит классу C^∞ (и даже более того).

В нашем курсе мы сосредоточимся на случае $n = 1$, а с функциями нескольких переменных будем иметь дело лишь постольку-поскольку. Начнем с нескольких замечаний о дифференциальных формах.

Из курса анализа вам известно понятие дифференциальной формы на гладком многообразии. Мы будем рассматривать *комплексные дифференциальные формы*: по определению, комплексная дифференциальная форма степени m на гладком многообразии X — это объект, который в локальных координатах записывается в виде

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_m} f_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots dx_{i_m} \tag{1.1}$$

и преобразуется по известным формулам при смене локальных координат; при этом предполагается, что $f_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ — функции класса C^1 с *комплексными* значениями (это равносильно тому, что их вещественная и мнимая часть имеют класс C^1). Легко проверить (отделяя, например, вещественную и мнимую часть), что для комплексных дифференциальных форм выполнены все свойства обычных дифференциальных форм, включая теорему Стокса, которой мы вскоре воспользуемся. В частности, если $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и если координата в U обозначена через $z = x + iy$, то на U можно рассмотреть комплексные дифференциальные формы $dz = dx + idy$ и $d\overline{z} = dx - idy$.

Иногда мы будем также рассматривать «непрерывные» дифференциальные формы, у которых функции $f_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ в выражении (1.1) предполагаются всего лишь непрерывными, но не обязательно гладкими; легко видеть, что для таких дифференциальных форм также имеют смысл понятия обратного образа при гладком отображении, интеграла (будь то по цепи или по многообразию) и внешнего произведения; дифференцировать такие формы мы не будем (хотя в некотором смысле возможно и это).

Имея в виду все эти соглашения, можно сформулировать следующее простое

Предложение 1.3. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество, и пусть $f\colon U \to \mathbb{C}$ — функция класса C^1. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *Функция f голоморфна.*

(2) *Для всякого $z \in U$ существует предел*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

(этот предел, естественно, обозначается $f'(z)$ и называется производной *функции f в точке z).*

(3) *Если обозначить $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$, то на U выполнены тождества*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(эти равенства называются уравнениями Коши–Римана).

(3′) *На U выполнено тождество $\partial f/\partial x + i\partial f/\partial y = 0$.*

(4) *Имеет место равенство* $df = \varphi\, dz$, *где* $\varphi\colon U \to \mathbb{C}$ — *некоторая функция на* U.

(5) *Дифференциальная форма* $f\, dz$ *замкнута на* U.

Кроме того, если f *голоморфна, то функция* φ *из пункта* (4) *совпадает с* f'.

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2): условие (2), очевидно, равносильно тому, что для всякой $z \in U$ существует такое число $\lambda \in \mathbb{C}$, что $f(z+h) = f(z) + \lambda h + o(|h|)$, а это, в свою очередь, равносильно тому, что производная $(Df)_z\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ представляет собой умножение на комплексное число λ, то есть является $\mathbb{C}$-гомоморфизмом из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$.

(1) $\Leftrightarrow$ (3): условие (3) равносильно тому, что матрица Якоби функции f относительно координат (x, y) является матрицей умножения на некоторое комплексное число, а это и есть условие (1).

(3) $\Leftrightarrow$ (3$'$): это очевидно.

(3$'$) $\Leftrightarrow$ (4): так как $dx = (1/2)(dz + d\overline{z})$, $dy = (1/2i)(dz - d\overline{z})$, имеем

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(dz + d\overline{z}) + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}(dz - d\overline{z}) =$$
$$= \frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Bigr)dz + \frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Bigr)d\overline{z}.$$

Поскольку дифференциальные формы dz и $d\overline{z}$ линейно независимы (над $\mathbb{C}$) в каждой точке U, условие (4) равносильно тому, что $\partial f/\partial x + i\partial f/\partial y = 0$, то есть условию (3$'$).

Дифференциальные операторы («комплексные векторные поля») $(1/2)(\partial f/\partial x - i\partial f/\partial y)$ и $(1/2)(\partial f/\partial x + i\partial f/\partial y)$ обозначаются $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial\overline{z}$ соответственно (эти векторные поля образуют в комплексификации касательного пространства базис, дуальный к базису $\langle dz, d\overline{z}\rangle$ в пространстве комплексных дифференциальных форм); проведенное нами вычисление показывает, что для всякой гладкой функции f выполнено равенство

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\, dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\, d\overline{z}, \tag{1.2}$$

а уравнения Коши–Римана можно записать в форме $\partial f/\partial\overline{z}=0$.

$(3')\Leftrightarrow(5)$: имеем

$$d(f\,dz)=df\wedge dz=\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\,dz+\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\,d\overline{z}\Big)\wedge dz=\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\,d\overline{z}\wedge dz=2i\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\,dx\wedge dy,$$

откуда все очевидно.

Остается доказать равенство $df=f'\,dz$ для голоморфной функции f. Поскольку, очевидно, $f'=\partial f/\partial x$, имеем, ввиду равенства $\partial f/\partial x=-i\partial f/\partial y$,

$$f'dz=\frac{\partial f}{\partial x}dz=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\,dz=\frac{\partial f}{\partial z}\,dz,$$

и все следует из $(3')$ и формулы (1.2). □

Из пункта (4) доказанного предложения немедленно вытекает

Следствие 1.4. *Пусть f — голоморфная функция на открытом множестве $U\subset\mathbb{C}$ и γ — кусочно-гладкая кривая в U, соединяющая точки a и b (более формально: γ — кусочно-гладкая 1-цепь, причем $\partial\gamma=b-a$). Тогда $\int_\gamma f'(z)dz=f(b)-f(a)$.* □

Если f — голоморфная функция, то интеграл $\int_\gamma f(z)dz$ принято называть попросту *интегралом функции f по кривой γ*.

Предложение 1.5. *Пусть $[p;q]\subset\mathbb{R}$ — отрезок и $\gamma\colon[p;q]\to\to U$ — кусочно-гладкая кривая вида $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$, где $U\subset\mathbb{C}$ — открытое множество. Тогда для всякой голоморфной функции $f\colon U\to\mathbb{C}$ имеем*

$$\Big|\int_\gamma f(z)dz\Big|\leqslant\int_{[p,q]}|f(x(t)+iy(t))|\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt\leqslant M\cdot L(\gamma),$$

где $M=\sup_{z\in\gamma}|f(z)|$ и $L(\gamma)$ — длина кривой γ.

Доказательство. Поскольку $\gamma^*dz=(x'(t)+iy'(t))dt$, предложение следует из неравенства

$$\Big|\int_a^b\varphi(x)\,dx\Big|\leqslant\int_a^b|\varphi(x)|\,dx$$

и определения длины кривой. □

Примеры голоморфных функций. Из пункта (2) предложения 1.3 с очевидностью следует, что всякий многочлен является голоморфной функцией на всем $\mathbb{C}$, причем его производная вычисляется по обычной формуле; это же верно и для многочленов от нескольких переменных. Функция $z \mapsto e^z$ также, как легко проверить с помощью пункта (2) предложения 1.3, будет голоморфна, причем верна привычная формула $(e^z)' = e^z$ (можно также подождать до следующей лекции, из результатов которой эти утверждения следуют немедленно); функции синус и косинус также будут голоморфны на всем $\mathbb{C}$, и выполнены привычные формулы для их производных. Без труда проверяется, что сумма, произведение и частное двух голоморфных функций голоморфны (последнее — там, где знаменатель не обращается в нуль) и что формулы для производной суммы, произведения и частного остаются верными и в комплексном случае. Наконец, очевидно, что композиция голоморфных функций голоморфна, причем остается верной формула для производной сложной функции.

Предложение 1.6. *Пусть f — голоморфная функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$. Если в точке $a \in U$ имеем $f'(a) \neq 0$, то существует такая окрестность $U' \ni a$, что f взаимно однозначна на U', множество $f(U')$ открыто в $\mathbb{C}$ и обратная функция $f^{-1}\colon f(U') \to U'$ голоморфна на U'.*

Доказательство. Утверждения о существовании окрестности U', взаимной однозначности f на U' и открытости $f(U')$ следуют из «теоремы об обратной функции» вещественного анализа, поскольку $f\colon U \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ — гладкая (класса C^1) функция, якобиан которой в точке a отличен от нуля. Утверждение о голоморфности f^{-1} следует прямо из определения голоморфности: если $\mathbb{R}$-гомоморфизм комплексных векторных пространств $\mathbb{C}$-линеен и обратим, то обратный к нему гомоморфизм также $\mathbb{C}$-линеен. $\square$

Поскольку отображения $z \mapsto e^z$ и $z \mapsto z^n$ являются накрытиями $\mathbb{C}$ над $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ над $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ соответственно, на всяком *односвязном* открытом множестве $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ определены непрерывные функции, обратные к e^z и z^n $(n \in \mathbb{N})$. Так как производная функции $z \mapsto e^z$ отлична от нуля вообще всюду, а производная функции $z \mapsto z^n$ отлична от нуля всюду на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, из предложения 1.6 следует, что эти функции голоморфны. Функции, обратные к e^z и z^n, обозначаются $\ln z$ и $\sqrt[n]{z}$ соответственно; они определены не однозначно, а с точностью до прибавления константы вида $2\pi i n$, где $n \in \mathbb{Z}$ (в случае логарифма) или с точностью до умножения на константу $e^{2\pi i k/n}$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $0 \leqslant k < n$ (в случае корня); выбрать «арифметическое значение корня», годное для всей комплексной плоскости, или же пригодное на всем $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ значение логарифма невозможно. Когда выбрана какая-то (одна из существующих на данном открытом множестве) обратная функция к экспоненте или степенной функции, говорят еще о выборе «ветви» логарифма или корня соответственно.

Будем называть *областью с гладкой границей* компактное подмножество $D \subset \mathbb{C}$, являющееся подмногообразием с краем в $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$; край этого многообразия (совокупность гладких кривых) будем называть *границей* области D и обозначать ∂D; дополнение к краю (внутренность D) будем обозначать $\operatorname{int} D$. Всюду в дальнейшем мы будем считать, что комплексная плоскость $\mathbb{C}$ (а стало быть, и все ее открытые подмножества) снабжена ориентацией, относительно которой дифференциальная форма $dx \wedge dy$ положительна (равносильное условие: базис $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$, состоящий из чисел 1 и i, взятых в указанном порядке, положительно ориентирован); при рассмотрении областей с гладкой границей мы будем считать, что область снабжена указанной ориентацией, а граница — индуцированной ориентацией (напомним, что в данном случае это означает следующее: касательный вектор к границе положительно ориентирован, если базис, в котором этот вектор идет первым, а вектор, направленный внутрь области, — вторым, положительно ориентирован).

Предложение 1.7 (теорема Коши). *Если $D \subset \mathbb{C}$ — область с гладкой границей и f — функция, голоморфная в окрестности D, то $\int_{\partial D} f\,dz = 0$.*

Если $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция и σ — гладкая 2-цепь в U, то $\int_{\partial\sigma} f\,dz = 0$.

Доказательство. Оба утверждения немедленно следуют из формулы Стокса и пункта (5) предложения 1.3. $\square$

Замечание 1.8. Первое утверждение теоремы Коши поддается разнообразным формальным усилениям. Например, достаточно считать, что f голоморфна на $\operatorname{int} D$ и непрерывна на D; можно также считать, что граница области D не обязательно гладкая, но кусочно-гладкая или даже всего лишь «спрямляемая». Мы не будем вдаваться в подробности, которые можно найти в любом достаточно полном учебнике комплексного анализа; в тех случаях, когда нам это будет нужно, читатель без труда сможет внести соответствующие уточнения самостоятельно.

Замечание 1.9. Для случая функций нескольких переменных доказанные нами результаты видоизменяются следующим образом. Принадлежащая классу C^1 функция $f\colon U \to \mathbb{C}$, где U — открытое подмножество в $\mathbb{C}^n$, голоморфна тогда и только тогда, когда $\partial f/\partial \bar{z}_j = 0$ для $j = 1, \ldots, n$. Поскольку, как легко видеть, для любой гладкой функции f выполнено тождество

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}\, dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\, \bar{d}z_j,$$

равносильное условие состоит в том, что форма $f\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$ замкнута.

Очевидно также, что для голоморфных отображений справедливы теоремы об обратной и неявной функции (в формулировках слова «гладкое отображение» надо, естественно, заменить на «голоморфное отображение»).

Лекция 2. Вокруг формулы Коши

Все предшествующее было более или менее тривиально; теперь мы подошли к первому содержательному результату.

Теорема 2.1 (формула Коши). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область с гладкой границей и f — функция, голоморфная в окрестности D.*

Тогда для всякого $a \in \operatorname{int} D$ выполнено равенство

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-a}. \tag{2.1}$$

Замечание 2.2. Условия на поведение функции на границе области можно ослабить так же, как в теореме Коши (см. замечание 1.8).

Доказательство. Пусть положительное число ε столь мало, что диск $D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leqslant \varepsilon\}$ содержится во внутренности области D. Применяя теорему Коши к области с границей $D \setminus \operatorname{int}(D_\varepsilon)$ и функции $z \mapsto f(z)/(z-a)$, получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)\,dz}{z-a},$$

так что достаточно доказать равенство

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)\,dz}{z-a}. \tag{2.2}$$

Положим $c = f(a)$ и запишем функцию f в виде $f(z) = c + g(z)$, где g голоморфна и $g(a) = 0$. Тогда правая часть (2.2) запишется в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{c\,dz}{z-a} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{g(z)\,dz}{z-a}; \tag{2.3}$$

Покажем, что первое слагаемое в этой формуле равно c, а второе — нулю, из чего теорема, очевидно, будет следовать. Для вычисления первого из интегралов параметризуем границу диска D_ε по формуле $z = a + \varepsilon \cdot e^{2\pi i t}$, где $t \in [0;1]$ (очевидно, при такой параметризации ориентация будет положительна); тогда $dz = 2\pi i \varepsilon e^{2\pi i t}\,dt$, и имеем

$$\int_{\partial D_\varepsilon} \frac{c\,dz}{z-a} = \int_0^1 2\pi i c\,dt = 2\pi i c,$$

так что утверждение относительно первого слагаемого доказано. Второй из интегралов в (2.3) оценивается с помощью предложения 1.5:

$$\left| \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{g(z)\,dz}{z-a} \right| \leqslant \frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon} \cdot 2\pi\varepsilon = 2\pi M(\varepsilon), \tag{2.4}$$

где $M(\varepsilon) = \sup_{|z-a|=\varepsilon} |g(z)|$. По теореме Коши интеграл в левой части (2.4) не зависит от ε; с другой стороны, поскольку $g(a) = 0$, имеем $\lim_{\varepsilon\to 0} M(\varepsilon) = 0$, так что этот интеграл равен нулю, что и завершает доказательство. □

Рассуждение со сдвигом контура интегрирования, примененное в доказательстве формулы Коши, весьма типично для комплексного анализа.

Из формулы Коши вытекает, что голоморфные функции обладают очень хорошими свойствами. Вот первое из них:

Предложение 2.3. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область с гладкой границей и f — функция, голоморфная в окрестности D. Тогда f имеет во внутренности D производные любого порядка; эти производные также голоморфны и задаются формулами*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Формула (2.5) получается из формулы Коши (2.1) формальным n-кратным дифференцированием по a под знаком интеграла; следовательно, все будет доказано, как только мы убедимся, что такое дифференцирование законно, или, что то же самое, что можно дифференцировать по a под знаком интеграла в формуле (2.5) при любом $n \geqslant 0$. Обозначим $\Phi(z,a) = f(z)/(z-a)^{n+1}$; нам достаточно проверить, что «разностное отношение» $(\Phi(z, a+h) - \Phi(z,a))/h$ сходится равномерно по $z \in \partial D$ при $h \to 0$, а это, в свою очередь, немедленно следует из следующей леммы:

Лемма 2.4. *Отношение*

$$\Bigl(\frac{1}{(z-a-h)^{n+1}} - \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\Bigr)\Big/h \tag{2.6}$$

стремится к $(n+1)/(z-a)^{n+2}$ при $h \to 0$ равномерно по $z \in \partial D$.

Доказательство леммы. Приводя к общему знаменателю и раскрывая скобки в числителе, получаем, что (2.6) равно

$$\frac{n+1}{(z-a)(z-a-h)^{n+1}} + \frac{h\psi(z,h)}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)^{n+1}}, \tag{2.7}$$

где $|\psi(z,h)| \leqslant C\max(|h|, \sup_{z\in\partial D}|z-a|)^n$ (константа C зависит только от n). Значит, второе слагаемое в (2.7) равномерно стремится к нулю (так как знаменатель отграничен от нуля при $z\in\partial D$), а первое слагаемое, очевидно, равномерно стремится к $(n+1)/(z-a)^{n+2}$. □

Следствие 2.5. *Если f — голоморфная функция на открытом множестве $U\subset\mathbb{C}$, то ее производная также голоморфна.*

Следствие 2.6 (из доказательства). *Если $D\subset\mathbb{C}$ — область с гладкой границей и $f\colon \partial D\to\mathbb{C}$ — произвольная непрерывная функция, то функция $\varphi\colon \operatorname{int} D\to\mathbb{C}$, заданная формулой*

$$\varphi(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)\,dz}{z-a}$$

(*«интеграл типа Коши»*), *голоморфна в $\operatorname{int} D$, причем ее n-я производная задается формулой*

$$\varphi^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

Доказательство. В рассуждении из доказательства предложения 2.3 ничего, кроме непрерывности f на ∂D, не использовалось. □

Замечание 2.7. При произвольном выборе f граничные значения функции φ отнюдь не обязаны совпадать с f.

Следующее свойство голоморфных функций резко контрастирует (в лучшую сторону) с тем, что имеет место для дифференцируемых функций действительного переменного.

Предложение 2.8. *Пусть $U\subset\mathbb{C}$ — открытое множество, и пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ — ряд из голоморфных на U функций, равномерно сходящийся на всяком компактном подмножестве $K\subset U$. Тогда сумма этого ряда (обозначим ее $f(z)$) — голоморфная функция на U, и имеет место равенство $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$, причем ряд в правой части также равномерно сходится на всяком компактном подмножестве $K\subset U$.*

Доказательство. Так как утверждения о голоморфности функции f и о равенстве $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ имеют локальный характер, достаточно их проверить для z, лежащих во внутренности некоторого замкнутого диска $D \subset U$. Из равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ на D и формулы Коши, примененной ко всем f_n, следует, что

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \sum_n \int_{\partial D} \frac{f_n(z)\,dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\left(\sum_n f_n(z)\right) dz}{z-a} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-a}$$

при $a \in \operatorname{int} D$. Теперь из следствия 2.6 следует, что f голоморфна в $\operatorname{int} D$, и что для всех $a \in \operatorname{int} D$ выполнено равенство

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\left(\sum_n f_n(z)\right) dz}{(z-a)^2} = \frac{1}{2\pi i} \sum_n \int_{\partial D} \frac{f_n(z)\,dz}{(z-a)^2} = \sum_n f_n'(a) \tag{2.8}$$

(мы опять воспользовались равномерной сходимостью на D). Стало быть, единственное, что нам остается доказать, — это что ряд $\sum_n f_n'(z)$ сходится равномерно на любом компактном подмножестве $K \subset U$; так как K содержится в конечном объединении замкнутых дисков произвольно малого радиуса, можно считать, что и само K является замкнутым диском. Вложим K в концентрический замкнутый диск большего радиуса $D \subset U$ и применим формулу (2.8) к диску D; так как при $a \in K$ знаменатели $(z-a)^2$ в формуле (2.8) будут отграничены от нуля, равномерная по a сходимость ряда из (2.8) на K очевидна. □

Из следствия 2.5 уже вытекает, что всякая голоморфная функция принадлежит классу C^∞; оказывается, что на самом деле верно гораздо более сильное утверждение. Чтобы его сформулировать, введем

Определение 2.9. Функция $f\colon U \to \mathbb{C}$, где $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество, называется *аналитической*, если для любой точки $a \in U$ существует такой открытый диск $\Delta \subset U$ с центром в a, что для всех $z \in \Delta$ выполнено равенство

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{2.9}$$

где ряд (2.9) абсолютно сходится на Δ (и не зависит, разумеется, от выбора $z \in \Delta$).

Поскольку, как хорошо известно (и легко проверяется), из абсолютной сходимости степенного ряда (2.9) на Δ вытекает его равномерная сходимость на компактных подмножествах в Δ, предложение 2.8 показывает, что всякая аналитическая функция голоморфна, причем ее производную можно находить с помощью почленного дифференцирования ряда (2.9). Замечательно, что верно и обратное утверждение:

Теорема 2.10. *Всякая голоморфная функция аналитична.*

Доказательство. Пусть функция f голоморфна на $U \subset \mathbb{C}$, и пусть $a \in U$. Рассмотрим замкнутый диск D с центром в a, содержащийся в U, и пусть Δ — концентрический открытый диск меньшего радиуса. В силу формулы Коши имеем, для всех $z \in \Delta$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}. \tag{2.10}$$

Для всех $z \in \Delta$ и $\zeta \in \partial D$ дробь $1/(\zeta - z)$ можно разложить в сумму геометрической прогрессии

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}, \tag{2.11}$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно по z и ζ, и эта равномерность не нарушится после умножения на $f(\zeta)$. Подставляя (2.11) в (2.10), получаем, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

при $z \in \Delta$, где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \tag{2.12}$$

причем сходимость абсолютна. Доказательство закончено. $\square$

Замечание 2.11. Дифференцируя ряд (2.9) почленно n раз (что законно ввиду предложения 2.8) и полагая $z = a$, находим, что

$c_n = f^{(n)}(a)/n!$ (обычная формула для коэффициентов ряда Тейлора); стало быть, формула (2.12) согласуется с предложением 2.3.

Следствие 2.12. *Если $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция и $a \in U$, то коэффициенты c_n в ее разложении* (2.9) *определены однозначно; в частности, они равны нулю тогда и только тогда, когда f тождественно равна нулю на Δ.*

Доказательство. Это немедленно следует из формул для c_n, приведенных в замечании 2.11, или из формулы (2.12) и теоремы Коши. $\square$

Замечание 2.13. Из следствия 2.12 легко вывести «принцип аналитического продолжения»: если открытое множество $U \subset \mathbb{C}$ связно и голоморфные функции $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ совпадают на непустом открытом множестве $U' \subset U$, то они совпадают и на всем U. В такой форме это утверждение верно и для голоморфных функций нескольких переменных; с другой стороны, для функций одного переменного верно более сильное утверждение о единственности, о котором пойдет речь на следующей лекции.

Замечание 2.14. Определение 2.9 имеет смысл и для функций действительного переменного (а также, при надлежащем понимании абсолютной сходимости степенного ряда, для функций на открытом подмножестве любого «полного поля»). Однако над $\mathbb{R}$ теорема 2.10 абсолютно неверна: известный пример с e^{-1/x^2} показывает, что функции класса C^∞ не обязаны быть аналитическими.

В качестве еще одного (отчасти неожиданного) следствия из наших рассмотрений можно получить следующее обращение теоремы Коши:

Предложение 2.15 (теорема Морера). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество и $f\colon U \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция, обладающая тем свойством, что интеграл от $f\,dz$ по границе любого треугольника, содержащегося в U, равен нулю. Тогда функция f голоморфна в U.*

Доказательство. Легко показать (и еще проще поверить), что для всякой гладкой 2-цепи σ в открытом подмножестве $U \subset \mathbb{C}$ интеграл от $f\,dz$ по $\partial\sigma$ можно с любой точностью аппроксимировать суммой интегралов по границам треугольников. Следовательно, из условия вытекает, что $\int_{\partial\sigma} f\,dz = 0$ для всякой гладкой 2-цепи σ в U.

Далее, поскольку проблема локальна, можно, не ограничивая общности, считать, что множество U выпукло (скажем, является открытым диском). Зафиксируем точку $z_0 \in U$ и положим $F(z) = \int_\gamma f(z)\,dz$, где γ — такая гладкая 1-цепь, что $\partial\gamma = z - z_0$; в силу предыдущего замечания и того факта, что выпуклые множества односвязны (и вообще стягиваемы), это определение корректно. Мы покажем, что функция F голоморфна в U и что $F'(z) = f(z)$: ввиду следствия 2.5 предложение будет отсюда следовать.

Пусть, стало быть, $z \in U$, и пусть $f(z) = c$; для достаточно малых по модулю $h \in \mathbb{C}$ имеем

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma'} f(\zeta)\,d\zeta = hf(z) + \int_{\gamma'} (f(\zeta) - c)\,d\zeta,$$

где γ' — отрезок, соединяющий z и $z+h$. По предложению 1.5 имеем

$$\left|\int_{\gamma'} (f(\zeta) - c)\,d\zeta\right| \leqslant |h| \cdot M(h),$$

где $M(h) = \sup_{\zeta\in\gamma'} |f(\zeta) - c|$. Ввиду непрерывности функции f имеем $M(h) \to 0$ при $h \to 0$, так что

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z),$$

что и завершает доказательство. □

Замечание 2.16. Если предположить дополнительно, что функция f гладка (хотя бы класса C^1), то теорема Морера станет тривиальной (условие равносильно тому, что форма $f\,dz$ замкнута, и можно применить пункт (5) предложения 1.3). Смысл ее в том, что она применима к ситуациям, когда гладкость функции a priori не очевидна.

Приложение: случай функций нескольких переменных

Многие из доказанных нами утверждений остаются в силе и для голоморфных функций нескольких переменных; в этом приложении мы сформулируем соответствующие результаты и объясним, как они доказываются.

Начнем с определения.

Определение 2.17. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ — точка из $\mathbb{C}^n$ и $r = (r_1, \dots, r_n)$ — последовательность из n положительных действительных чисел. Тогда *полидиском* с центром a и радиусом r называется множество

$$\Delta(a_1, \dots, a_n; r_1, \dots, r_n) = \\ = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z - a_j| < r_j \quad \text{для всех } j \in [1; n]\}$$

(мы будем также писать просто $\Delta(a; r)$). Замыкание полидиска $\Delta(a; r)$ обозначается $\overline{\Delta}(a; r)$. Наконец, мы будем называть *остовом* полидиска и обозначать через $T(a_1, \dots, a_n; r_1, \dots, r_n)$ (или просто $T(a; r)$) множество

$$T(a; r) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z - a_j| = r_j \quad \text{для всех } j \in [1; n]\}.$$

(Обратите внимание, что множество $T(a; r)$ гомеоморфно n-мерному тору и при $n > 1$ *не является* границей полидиска $\Delta(a; r)$.)

Теперь мы можем сформулировать многомерный аналог формулы Коши:

Теорема 2.18. *Пусть $\Delta(a; r) \subset \mathbb{C}^n$ — полидиск и f — функция, голоморфная в окрестности $\overline{\Delta}(a; r)$. Тогда для всякой точки $(z_1, \dots, z_n) \in \Delta(a; r)$ имеет место равенство*

$$f(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T(a;r)} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)\, d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdot \ldots \cdot (\zeta_n - z_n)}. \qquad (2.13)$$

(Строго говоря, коль скоро в формуле (2.13) участвует интеграл дифференциальной формы по многообразию, необходимо указать ориентацию этого многообразия; это делается так: если $\theta_j = \arg(\zeta_j - a_j)$, то у тора $T(a; r)$ выбирается ориентация, относительно которой форма $d\theta_1 \wedge \dots \wedge d\theta_n$ будет положительна.)

Доказательство. Для упрощения обозначений будем считать, что $a_1 = \ldots = a_n = 0$ (общности это, очевидно, не ограничивает). Правая часть (2.13) равна, очевидно,

$$r_1 \cdot \ldots \cdot r_n \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{f(r_1 e^{2\pi i\theta_1}, \ldots, r_n e^{2\pi i\theta_n})}{(r_1 e^{2\pi i\theta_1} - z_1) \cdot \ldots \cdot (r_n e^{2\pi i\theta_n} - z_n)}\, d\theta_1 \ldots d\theta_n;$$

вычисляя интеграл как повторный и применяя n раз «обычную» формулу Коши (2.1) к (голоморфным, очевидно) функциям вида

$$z \mapsto f(z_1, \ldots, z_{k-1}, z, r_{k+1}e^{2\pi i\theta_{k+1}}, \ldots, r_n e^{2\pi i\theta_n}),$$

получаем, что выражение равно $f(z_1, \ldots, z_n)$, что и требовалось. $\square$

Теперь из формулы Коши можно вывести следствия, аналогичные тем, что мы получили в этой лекции для функций одного переменного; доказательства также совершенно аналогичны (единственное отличие — более громоздкая запись).

Предложение 2.19 (аналог следствия 2.5). *Если f — голоморфная функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^n$, то все ее частные производные также голоморфны.* $\square$

Предложение 2.20 (аналог следствия 2.6). *Если $f\colon T(a;r) \to \mathbb{C}$ — произвольная непрерывная функция, то функция $\varphi\colon \Delta(a;r) \to \mathbb{C}$, заданная формулой*

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T(a;r)} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\, d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdot \ldots \cdot (\zeta_n - z_n)},$$

будет голоморфна в $\Delta(a, r)$.

Предложение 2.21 (аналог предложения 2.8). *Пусть $U \subset \mathbb{C}^n$ — открытое множество, и пусть $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ — ряд из голоморфных на U функций, равномерно сходящийся на всяком компактном подмножестве $K \subset U$. Тогда сумма этого ряда (обозначим ее $f(z)$) — голоморфная функция на U, и для всякого j имеет место равенство*

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z_j} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial f_k(z)}{\partial z_j},$$

причем ряд в правой части также равномерно сходится на всяком компактном подмножестве $K \subset U$. $\square$

Определение 2.22. Функция $f\colon U \to \mathbb{C}$, где $U \subset \mathbb{C}^n$ — открытое множество, называется *аналитической*, если у всякой точки $(a_1, \ldots, a_n) \in U$ существует такая окрестность $V \subset U$, что на множестве V имеет место равенство

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n \geqslant 0} c_{i_1, \ldots, i_n} (z_1 - a_1)^{i_1} \ldots (z_n - a_n)^{i_n},$$

где ряд абсолютно сходится.

Предложение 2.23 (аналог теоремы 2.10). *Функция $f\colon U \to \mathbb{C}$, где $U \subset \mathbb{C}^n$ — открытое множество, голоморфна тогда и только тогда, когда она аналитична.* $\square$

Наконец, как мы уже отмечали, для голоморфных функций нескольких переменных выполняется «принцип аналитического продолжения» (см. замечание 2.13).

Лекция 3. Локальные свойства голоморфных функций

Определение 3.1. *Нулем* голоморфной функции называется точка, в которой эта функция обращается в нуль.

Предложение-определение 3.2. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Предположим, что $f(a) = 0$, где $a \in U$, но при этом f не является тождественным нулем ни в какой окрестности точки a. Пусть k — целое положительное число. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0$, *но* $f^{(k)}(a) \neq 0$.

(1′) *В разложении функции f в степенной ряд $f = \sum c_i (z-a)^i$ имеем $c_0 = \ldots = c_{k-1} = 0$, но $c_k \neq 0$.*

(2) *Существует такая голоморфная на U функция g, что $g(a) \neq 0$ и на U выполнено тождество $f(z) = (z-a)^k g(z)$.*

(3) *В некоторой окрестности $U' \ni a$ определена такая голоморфная функция h, что $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$, и $f(z) = h(z)^k$ всюду на U'.*

Число k, удовлетворяющее этим условиям, всегда существует и называется кратностью *нуля a функции f. Если $f(a) \neq 0$, то говорят, что кратность нуля функции f в точке a равна нулю.*

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (1′): следует из формулы $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ (см. замечание 2.11).

Существование числа k, удовлетворяющего условию (1′): следует из замечания 2.12.

(1′) $\Rightarrow$ (2): степенной ряд для f в окрестности точки a имеет вид

$$f(z) = c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \ldots = \\ = (z-a)^k(c_k + c_{k+1}(z-a) + \ldots),$$

причем ряд в скобках, очевидно, абсолютно сходится в некоторой окрестности $U' \ni a$. Определим функцию g на U' формулой $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{k+n}(z-a)^n$, а на $U \setminus \{a\}$ — формулой $g(z) = f(z)/(z-a)^k$; ясно, что на $U' \setminus \{a\}$ эти определения согласуются и что $g(a) = c_k \neq 0$, так что искомая голоморфная функция построена.

(2) $\Rightarrow$ (3): поскольку $g(a) \neq 0$, существует окрестность $U' \ni a$, в которой функция g не обращается в нуль; уменьшая, если нужно, U', можно считать, что $g(U')$ содержится в односвязном открытом подмножестве в $U'' \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда, как мы видели в лекции 1, на U'' существует голоморфная функция $z \mapsto \sqrt[k]{z}$ («ветвь корня k-й степени»), обратная к возведению в степень k; значит, можно взять композицию этой функции с функцией g (ограниченной на U') и получить определенную на U' голоморфную функцию $z \mapsto \sqrt[k]{g(z)}$. Положим теперь $h(z) = (z-a)\sqrt[k]{g(z)}$ для $z \in U'$. Тождество $(h(z))^k = f(z)$ очевидно, а неравенство $h'(z) \neq 0$ следует из формулы для производной произведения и того факта, что производная функции $z \mapsto \sqrt[k]{g(z)}$ отлична от нуля в точке a, поскольку не равны нулю как производная функции g в точке a, так и производная корня k-й степени в точке $g(a)$.

$(3) \Rightarrow (1')$: ввиду уже доказанной эквивалентности $(1) \Leftrightarrow (1')$ разложение функции h в окрестности точки a имеет вид

$$b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \dots,$$

где $b_1 \neq 0$. Возводя это разложение в степень k (что законно ввиду абсолютной сходимости) и приводя подобные, получим разложение для функции f, начинающееся с $b_1^k(z-a)^k$, с ненулевым коэффициентом при $(z-a)^k$. $\square$

Следствие 3.3. *Пусть $a \in U$ — нуль функции f, голоморфной в $U \subset \mathbb{C}$. Тогда либо f тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки a, либо в некоторой окрестности точки a у функции f нет других нулей, кроме a.* $\square$

Теперь мы можем вывести обещанный на прошлой лекции «усиленный принцип аналитического продолжения»:

Предложение 3.4. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое подмножество и $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфные функции. Если f и g совпадают на множестве, имеющем предельную точку в U, то $f(z) = g(z)$ для всех $z \in U$.*

Доказательство. Голоморфная функция $h = f - g$ имеет, очевидно, неизолированный нуль в U. Чтобы доказать, что h есть тождественный нуль, нам достаточно, ввиду связности U, убедиться в том, что множество неизолированных нулей функции h открыто и замкнуто в U. Замкнутость этого множества очевидна (множество предельных точек *любого* подмножества метрического пространства будет замкнуто), а открытость вытекает из предложения 3.3: если a — неизолированный нуль функции h, то эта функция есть тождественный нуль на некоторой окрестности точки a, и любая точка этой окрестности также будет неизолированным нулем. $\square$

Для функций более чем одного переменного это предложение неверно, как показывают очевидные примеры.

Теперь изучим следующую ситуацию. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $a \in U$ и f — функция, голоморфная на множестве $U \setminus \{a\}$. Спрашивается, как ведет себя $f(z)$ при $z \to a$? (Традиционное название для этого вопроса — «исследование изолированных особенностей голоморфных функций».) Поскольку вопрос локален, можно считать, что U — открытый диск, а точка a — его центр. Нам опять помогут степеннные ряды, но на сей раз они будут включать и отрицательные степени.

Предложение 3.5. *Пусть $r < R$ — неотрицательные числа (мы не исключаем случаев $r = 0$ или $R = +\infty$); положим $U = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$. Если $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, то всюду на U имеет место разложение*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{3.1}$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компактном множестве $K \subset U$, а его коэффициенты вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)(z-a)^{-n-1}\, dz, \tag{3.2}$$

где γ — любая положительно (то есть против часовой стрелки) ориентированная окружность с центром в a, лежащая в U.

Доказательство. Выберем числа r' и R' таким образом, чтобы $r < r' < R' < R$, и обозначим через γ и Γ окружности с центрами в a радиусов r' и R' соответственно (положительно ориентированнные), и пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : r' \leqslant |z| \leqslant R'\} \subset U$. Для всякого $z \in \operatorname{int} D$ имеем, ввиду формулы Коши,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{z - \zeta}}_{I_2} \tag{3.3}$$

(мы сменили знак во втором интеграле, так как индуцированные ориентации внешней и внутренней окружностей противоположны). Первый из двух интегралов в (3.3) мы преобразуем точно так же, как в доказательстве теоремы 2.10, когда мы разлагали функцию, голоморфную в диске, в ряд Тейлора; не повторяя этих выкладок, запишем ответ:

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

где значения коэффициентов c_n задаются формулой (3.2) (ввиду теоремы Коши интегралы по Γ и γ совпадают!) и ряд абсолютно и равномерно сходится на любом компакте, содержащемся в открытом диске с центром a и радиусом R. Преобразования, необходимые для разложения в ряд слагаемого I_2, аналогичны:

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}} = \sum_{n=-1}^{-\infty} (z-a)^n(\zeta-a)^{-n-1},$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, содержащемся в дополнении к замкнутому диску с центром a и радиусом r'. Умножая на $f(\zeta)\,d\zeta$ (что не нарушит равномерности) и почленно интегрируя по γ, получаем, что

$$I_2 = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n,$$

где сходимость абсолютна и равномерна на указанных выше множествах и коэффициенты c_n задаются формулой (3.2). Складывая I_1 и I_2, получаем все, что нужно (равномерная сходимость на компактах в U следует из произвольности выбора r' и R' и независимости интегралов по γ от радиуса окружности γ). □

Определение 3.6. Ряд (3.1) называется *рядом Лорана* функции f; совокупность членов ряда Лорана с отрицательными степенями $z-a$ называется его *главной частью* (а совокупность всех остальных членов называется *правильной частью* ряда Лорана).

Подобно ряду Тейлора, ряд Лорана однозначно определяется по функции:

Предложение 3.7. *Если в условиях предложения* 3.5 *имеет место разложение*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{3.4}$$

где ряд равномерно сходится на компактах в U, то коэффициенты c_n вычислются по формулам (3.2).

Доказательство. Легко видеть, что $\int_\gamma (z-a)^n\,dz$ равен $2\pi i$ при $n=-1$ и нулю при $n\neq -1$. Умножая разложение (3.4) на $(z-a)^{-n-1}$ и почленно интегрируя по γ (что возможно ввиду равномерной сходимости), получаем, в силу предыдущего замечания, что $2\pi i c_n = \int_\gamma f(z)(z-a)^{-n-1}\,dz$, что и требовалось. $\square$

Теперь, вооружившись рядами Лорана, мы можем исследовать поведение голоморфной функции в окрестности изолированной особой точки; оказывается, что оно далеко не произвольно:

Теорема 3.8. *Пусть $a\in\mathbb{C}$, $r>0$ и $\Delta=\{z\in\mathbb{C}:|z-a|<r\}$, и пусть f — функция, голоморфная в $\Delta^*=\Delta\setminus\{a\}$. Тогда имеет место одна и только одна из следующих возможностей:*

(1) *Функция f ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a; в этом случае f продолжается до функции, голоморфной во всем Δ, и ее ряд Лорана не содержит членов с $z-a$ в отрицательных степенях.*

(2) *Функция f не является ограниченной ни в какой проколотой окрестности точки a, но при этом для некоторого $N>0$ выполнено соотношение $|f(z)|=O(|z-a|^{-N})$ при $z\to a$; в этом случае существуют такие целое число $k>0$ и голоморфная во всем Δ функция g, что $f(z)=g(z)/(z-a)^k$ всюду на Δ^* и $g(a)\neq 0$; при этом $\lim_{z\to a}|f(z)|=+\infty$, а ряд Лорана функции f имеет вид $\sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-a)^n$, и $c_{-k}\neq 0$.*

(3) $\lim_{z\to a}|f(z)|$ *не существует (в том числе не равен $+\infty$); в этом случае для всякого $b\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ существует такая последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$, что $\lim_{n\to\infty} z_n=a$ и $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=b$ (если $b=\infty$, то имеется в виду, что $\lim_{n\to\infty}|f(z_n)|=+\infty$); при этом ряд Лорана функции f содержит ненулевые члены с $(z-a)^{-n}$ для сколь угодно больших $n\in\mathbb{N}$.*

Определение 3.9. Если в условиях теоремы 3.8 имеет место случай (1), говорят, что функция f имеет в точке a *устранимую особенность*; если имеет место случай (2), говорят, что f имеет в точке a *полюс порядка* k (или *кратности* k); если имеет место случай (3), говорят, что f имеет в точке a *существенную особенность*.

Доказательство теоремы 3.8. Пусть f ограничена в проколотой окрестности точки a; уменьшив, если нужно, радиус диска Δ, можно считать, что существует такое число $M > 0$, что $|f(z)| \leqslant M$ на всем Δ^*. Пусть n — целое положительное число; вычислим коэффициент c_{-n} ряда Лорана функции f по формуле (3.2), беря в качестве γ окружность с центром a и радиусом $\varepsilon > 0$, и оценим этот коэффициент с помощью предложения 1.5:

$$|c_{-n}| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma f(\zeta)(\zeta - z)^{n-1}\,d\zeta\right| \leqslant \frac{M\varepsilon^{n-1}}{2\pi}\cdot 2\pi\varepsilon = M\varepsilon^n.$$

Устремляя ε к нулю, получаем, что $c_{-n} = 0$; значит, ряд Лорана для функции f имеет вид $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ и тем самым определяет функцию, голоморфную во всем Δ, являющуюся искомым продолжением функции f. Итак, мы доказали, что из ограниченности f в проколотой окрестности точки a вытекает, что выполнена альтернатива (1).

Предположим теперь, что $|f(z)| = O(|z-a|^{-N})$ при $z \to a$, и при этом f не является ограниченной ни в какой проколотой окрестности точки a; покажем, что в этом случае выполнена альтернатива (2). Не ограничивая общности, можно считать, что $N \in \mathbb{N}$. Рассмотрим теперь функцию $\tilde{g}(z) = (z-a)^N f(z)$; по условию она ограничена в проколотой окрестности точки a и, следовательно, в силу того, что мы уже доказали, продолжается до голоморфной функции на всем Δ (мы будем по-прежнему обозначать эту функцию через $\tilde{g}$). Если обозначить через m порядок нуля функции $\tilde{g}$ в точке a и положить $g(z) = \tilde{g}(z)/(z-a)^m$, то функция g голоморфна во всем Δ и $g(a) \neq 0$ (см. предложение 3.2), и очевидно, что $N > m$ (в противном случае функция $f(z) = g(z)/(z-a)^{N-m}$ будет ограничена в окрестности a). Полагая $k = N - m$, получаем, что $f(z) = g(z)/(z-a)^k$; поскольку $g(a) \neq 0$, отсюда следует, что $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$; утверждение про ряд Лорана функции f следует из того, что он получается из разложения функции g делением на $(z-a)^k$.

Пусть, наконец, ни (1), ни (2) не имеет места; тогда ряд Лорана содержит бесконечно много ненулевых членов с отрицательными степенями (иначе выполнялось бы равенство $f(z) = g(z)/(z-a)^k$, где g голоморфна в Δ и $g(a) \neq 0$, и выполнялось бы соотношение $|f(z)| = O(|z-a|^{-N})$), так что для завершения доказательства теоремы остается только установить, что всякое $b \in \mathbb{C}$ можно представить в виде $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$, где $z_n \to a$ (что делать в случае $b = \infty$, продумайте самостоятельно). Рассуждая от противного, предположим, что для некоторого $b \in \mathbb{C}$ это не так; тогда функция $h(z) = 1/(f(z) - b)$ голоморфна и ограничена в некотором проколотом диске Δ'^* меньшего радиуса и, стало быть, продолжается до функции, голоморфной на всем Δ'. Поскольку на Δ'^* имеем $f(z) = b + (1/h(z))$, получаем, что либо f ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a (если $h(a) \neq 0$), либо $|f(z)| = O(|z-a|^{-N})$ (если $h(a) = 0$); в любом случае получается противоречие. $\square$

Отдельные утверждения теоремы 3.8 имеют свои имена. Так, утверждение о том, что голоморфная функция, ограниченная в проколотой окрестности точки, голоморфно продолжается в эту точку, называется теоремой Римана о продолжении (или об устранимой особенности); утверждение о предельных точках значений функции в окрестности существенной особенности называется в различных текстах теоремой Вейерштрасса, теоремой Казорати или теоремой Сохоцкого. Теорему В.–К.–С. можно значительно усилить: оказывается, что в любой проколотой окрестности существенной особенности голоморфная функция бесконечное число раз принимает все значения, кроме, быть может, одного («большая теорема Пикара»); мы докажем эту теорему позже, когда в нашем распоряжении будет необходимая техника.

Приложение: случай функций нескольких переменных

В этом приложении мы скажем несколько слов о том, в какой мере (и в какой форме) основные результаты лекции распространяются на случай функций нескольких переменных. Основные результаты будут скорее негативного свойства: мы объясним, почему наивная аналогия со случаем одной переменной не проходит и чего в случае многих переменных *не бывает*, но о том, каково же на самом деле локальное строение голоморфных функций нескольких переменных, мы скажем только вкратце и без доказательств.

Основную роль у нас будет играть следующее неожиданное на первый взгляд утверждение о продолжении голоморфных функций, не имеющее аналогов в одномерном случае:

Предложение 3.10 (теорема Хартогса). *Рассмотрим замкнутый полидиск $\overline{\Delta}(a;r) \subset \mathbb{C}^n$, где $n > 1$, и пусть $0 < r'_j < r_j$ для всех j. Тогда всякая функция, голоморфная в $\Delta(a;r) \setminus \overline{\Delta}(a;r')$, продолжается до функции, голоморфной в $\Delta(a;r)$.*

Доказательство. Уменьшив немного числа r_i, можно считать, что f голоморфна в окрестности замкнутого полидиска $\overline{\Delta}(a;r)$, что мы и будем далее предполагать.

Чтобы продолжить функцию f на весь полидиск $\Delta(a;r)$, воспользуемся следующим примитивным приемом: положим, руководствуясь многомерной формулой Коши (2.13),

$$g(z_1,\dots,z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T(a;r)} \frac{f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\,d\zeta_1\wedge\dots\wedge d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\cdot\ldots\cdot(\zeta_n-z_n)}. \qquad (3.5)$$

Из предложения 2.20 следует, что функция g голоморфна в $\Delta(a;r)$ (это, собственно говоря, верно и при $n=1$); покажем, что в условиях предложения (т. е. при $n>1$) функция g действительно является продолжением функции f, т. е. что $g(z)=f(z)$, если $z=(z_1,\dots,z_n)\in\Delta(a;r)\setminus\overline{\Delta}(a;r')$.

Чтобы в этом убедиться, выберем такой набор положительных чисел $\rho=(\rho_1,\dots,\rho_n)$, что $\overline{\Delta}(z;\rho)\subset\Delta(a;r)\setminus\overline{\Delta}(a;r')$, и покажем, что

$$\int_{T(a;r)} \frac{f(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\, d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\cdot\ldots\cdot(\zeta_n-z_n)} = \\ = \int_{T(z;\rho)} \frac{f(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\, d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\cdot\ldots\cdot(\zeta_n-z_n)}; \quad (3.6)$$

поскольку в силу многомерной формулы Коши правая часть (3.6) равна $(2\pi i)^n f(z)$, а левая часть (3.6) равна $(2\pi i)^n g(z)$ по определению, отсюда все будет следовать.

Для доказательства же равенства (3.6) заметим, что выражение под интегралом имеет вид $\varphi(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\, d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n$, где φ — голоморфная функция от $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$; следовательно, это замкнутая форма (см. замечание 1.9). Теперь наше равенство будет следовать из теоремы Стокса, как только мы покажем, что циклы, по которым мы интегрируем эту форму в левой и правой частях (3.6), гомологичны в множестве

$$V=\Delta(a;r)\setminus(\Delta(a;r')\cup\{(\zeta_1,\ldots,\zeta_n):\zeta_j\ne z_j \text{ для всех } j\}).$$

Для этого, в свою очередь, нам достаточно показать, что $T(a;r)$ можно продеформировать в $T(z;\rho)$ внутри V. Это делается следующим образом.

Для каждого целого $j\in[1;n]$ обозначим через Δ_j замкнутый диск в $\mathbb{C}$ с центром a_j и радиусом r_j; по условию, $z_j\in\Delta_j$. Теперь для каждого j рассмотрим в диске Δ_j семейство простых замкнутых кривых γ_t^j $(t\in[0;1])$, в котором γ_0^j — граница диска Δ_j, а γ_1^j — окружность с центром z_j и радиусом ρ_j. Очевидно, эти деформации можно провести таким образом, чтобы ни одна из кривых γ_t^j не проходила через z_j.

Теперь проведем деформацию $T(a;r)$ в $T(z;\rho)$ в два этапа.

Сначала продеформируем $T(a;r)$ в

$$T(a_1,\ldots,a_{n-1},z_n;r_1,\ldots,r_{n-1},\rho_n);$$

для этого рассмотрим семейство подмногообразий $T_t\subset\mathbb{C}^n$, где $t\in[0;1]$, определенных следующим образом:

$$T_t=\{(w_1,\ldots,w_{n-1},w_n):|w_j-a_j|=r_j \text{ при } 1\leqslant j\leqslant n,\ w_n\in\gamma_t^n\}.$$

Ясно, что все T_t лежат в V ($T_t \cap \overline{\Delta}(a, r') = \varnothing$ для любого t, поскольку $|w_1 - a_1| = r_1 > r_1'$, если $(w_1, \ldots, w_n) \in T_t$), $T_0 = T(a; r)$, $T_1 = T(a_1, \ldots, a_{n-1}, z_n; r_1, \ldots, r_{n-1}, \rho_n)$.

А теперь продеформируем $T(a_1, \ldots, a_{n-1}, z_n; r_1, \ldots, r_{n-1}, \rho_n)$ в $T(z; \rho)$; эта деформация реализуется таким семейством $\{T_t'\}$ ($t \in [0; 1]$):

$$T_t' = \{(w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n) : w_j \in \gamma_t^j \text{ при } 1 \leqslant j \leqslant n,\ |w_n - z_n| = \rho_n\}.$$

Поскольку $T_0' = T(a_1, \ldots, a_{n-1}, z_n; r_1, \ldots, r_{n-1}, \rho_n)$ и $T_1' = T(z; \rho)$, искомая деформация построена. □

Из приведенного доказательства видно, почему предложение 3.10 верно только при $n > 1$: множество, по которому мы интегрируем (остов полидиска) имеет в $\mathbb{C}^n$ вещественную коразмерность n, и при $n = 1$, когда эта коразмерность равна всего лишь единице, его нельзя нужным нам образом продеформировать, не задев «концентрического» полидиска $\overline{\Delta}(a; r')$.

Из предложения 3.10 немедленно вытекает отсутствие изолированных особенностей у голоморфных функций более чем одной переменной:

Следствие 3.11. *Если $U \subset \mathbb{C}^n$ — открытое множество, $a \in U$ и f — функция, голоморфная на множестве $U \setminus \{a\}$, то при $n > 1$ эта функция продолжается до функции, голоморфной на всем U.* □

Более того, в многомерном случае не бывает не только изолированных особенностей, но и изолированных нулей:

Следствие 3.12. *Голоморфная функция более чем одного переменного не может иметь изолированных нулей.*

Доказательство. Если точка a — изолированный нуль функции f, то функция $1/f$ голоморфна в проколотой окрестности точки a; ввиду следствия 3.12 заключаем, что она голоморфно (и тем самым непрерывно) продолжается в точку a — противоречие. □

Аналогичными рассуждениями можно доказать и такое

Предложение 3.13. *Пусть f — не являющаяся тождественным нулем голоморфная функция в полидиске $\Delta \subset \mathbb{C}^n$, где $n > 1$, и $V(f) = \{z \in \Delta : f(z) = 0\}$. Тогда замыкание множества $V(f)$ имеет непустое пересечение с границей полидиска Δ.* $\square$

В заключение скажем (без доказательств) несколько слов о локальном строении множества нулей голоморфной функции нескольких переменных. Итак, пусть $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, не являющаяся тождественным нулем, где $U \subset \mathbb{C}^n$ — связное открытое множество; положим $V(f) = \{z \in U : f(z) = 0\}$, и пусть $a \in V(f)$. Тогда можно показать, что существуют комплексная гиперплоскость $H \subset \mathbb{C}^n$, содержащая a, и линейная проекция $p\colon \mathbb{C}^n \to H$ (т. е. отображение вида $p\colon z \mapsto Az + b$, где A — $n \times n$-матрица с комплексными коэффициентами, $b \in \mathbb{C}^n$, обладающее тем свойством, что $p(\mathbb{C}^n) = H$ и $p(z) = z$ для всех $z \in H$), обладающие следующим свойством:

Для некоторого открытого подмножества $W \subset H$, $W \ni a$ отображение $p^{-1}(W) \cap V(f) \to W$, индуцированное проекцией, является сюръективным и имеет конечные слои (и, более того, является «собственным»: прообраз всякого компакта в W при этом отображении является компактом)[1].

Неформально говоря, множество нулей голоморфной функции локально представляется в виде разветвленного накрытия (комплексной) гиперплоскости (и имеет тем самым вещественную размерность $2n - 2$).

Читатель, знакомый с элементарной алгебраической геометрией, заметит, что сформулированное выше утверждение аналогично так называемой лемме Нётер о нормализации; на самом деле эта аналогия идет и дальше: локальные свойства множеств нулей голоморфных функций очень похожи на свойства аффинных алгебраических многообразий.

---

[1] Это утверждение является одним из вариантов так называемой «подготовительной теоремы Вейерштрасса».

Лекция 4. Локальный анализ: приложения

Цель этой лекции — вывести различные более или менее конкретные следствия из полученных в прошлый раз общих результатов о локальном поведении голоморфных функций.

Определение 4.1. Функция, голоморфная на всем $\mathbb{C}$, называется *целой функцией*.

Ясно, что целые функции задаются степенными рядами с бесконечным радиусом сходимости.

Предложение 4.2. *Пусть $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — целая функция, обладающая свойством $|f(z)| = O(|z|^N)$ при $|z| \to \infty$ для некоторого $N > 0$. Тогда f — многочлен степени, не превосходящей N.*

Следствие 4.3 (теорема Лиувилля). *Целая функция, ограниченная на всем $\mathbb{C}$, является константой.* □

Доказательство. Положим $g(z) = f(1/z)$; тогда ряд Лорана для g в (проколотой) окрестности нуля — это ряд Тейлора для f, в котором z заменено на $1/z$. Из условия следует, что для функции g в окрестности нуля имеет место случай (2) из теоремы 3.8, так что ее ряд Лорана может содержать ненулевые члены с z^n, где $n < 0$, только при $n \geqslant -N$, а ряд Тейлора функции f, соответственно, содержит только члены степеней $\leqslant N$. □

Следствие 4.4 (из доказательства). *Если целая функция f такова, что функция $g(z) = f(1/z)$ не имеет в нуле существенной особенности, то f — многочлен.* □

Следующее следствие из нашего локального анализа называется «принцип сохранения области».

Предложение 4.5. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество, $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция и $a \in U$. Если функция f не является константой в некоторой связной окрестности точки z, то точка $f(a)$ является внутренней точкой множества $f(U)$.*

Следствие 4.6. *Если функция f голоморфна на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$ и не является константой ни на одной* *его связной компоненте, то отображение* $f\colon U \to \mathbb{C}$ *является открытым* (*т. е. переводит открытые множества в открытые*). $\square$

Доказательство. Если $f'(a) \neq 0$, то все очевидно ввиду теоремы об обратной функции. Пусть $f'(a) = 0$, положим $f(a) = b$, и пусть k — кратность нуля функции $z \mapsto f(z) - b$ в точке a. Виду пункта (3) предложения 3.2 получаем, что в некоторой окрестности $U' \ni a$ функция f представляется в виде $f(z) = b + (h(z))^k$, где функция h голоморфна и $h'(a) \neq 0$. Ввиду сказанного выше точка $h(a)$ является внутренней точкой множества $h(U')$; с другой стороны, тривиально проверяется, что отображение $w \mapsto w^k + a$ открыто (в том числе и в окрестности нуля), так что точка $f(a) = b + (h(a))^k$ является внутренней точкой множества $f(U')$, и тем более — большего множества $f(U)$. $\square$

Замечание 4.7. Для голоморфных функций нескольких комплексных переменных $f\colon U \to \mathbb{C}$, где U открыто в $\mathbb{C}^n$, предложение 4.5 также верно (и без труда выводится из того, что мы доказали для функций одного переменного). С другой стороны, для голоморфных отображений $f\colon U \to \mathbb{C}^n$, где U открыто в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, предложение 4.5 и его следствие *совершенно неверны*: например, отображение $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, заданное формулой $(z, w) \mapsto (z, zw)$ не является открытым в начале координат.

Определение 4.8. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $a \in U$ и $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, не являющаяся константой в окрестности a. Точка a называется *точкой ветвления* функции f, если $f'(a) = 0$. Наименьшее целое положительное k, для которого $f^{(k)}(a) \neq 0$ (или, что то же самое, кратность нуля a у функции $z \mapsto f(z) - f(a)$), называется *индексом ветвления* функции f в точке a. Если f не имеет в U точек ветвления (и не является константой ни на одной из связных компонент U), то отображение $f\colon U \to \mathbb{C}$ называется *неразветвленным* на U (так что, согласно этому определению, отображение неразветвлено в точке a тогда и только тогда, когда его индекс ветвления равен 1).

Замечание 4.9. Введенная выше терминология стандартна в алгебраической геометрии; в классическом комплексном анализе ветвлением называется несколько иное явление.

Предложение 4.10. *Пусть U — открытое множество, и пусть $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная и взаимно однозначная (т. е. не склеивающая различные точки) функция. Тогда обратная функция $f^{-1}\colon f(U) \to U$ голоморфна.*

Доказательство. Открытость множества $f(U)$ следует из предложения 4.5; следовательно, ввиду теоремы об обратной функции, надо только проверить, что f неразветвлена на U. Рассуждая от противного, предположим, что f разветвлена в точке $a \in U$ с индексом $k \geqslant 2$. Как и в доказательстве предложения 4.5, найдем такие окрестность $U' \ni a$ и голоморфную функцию $h\colon U' \to \mathbb{C}$, что $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$ и при $z \in U'$ выполнено тождество $f(z) = f(a) + (h(z))^k$; уменьшив при необходимости U', можно считать, что h взаимно однозначна на U'. Тогда ограничение функции f на U' представляется в виде композиции отображений $z \mapsto h(z)$, $w \mapsto w^k$ и $u \mapsto u + f(a)$. Поскольку первое из этих отображений взаимно однозначно, а второе при $k \geqslant 2$ не является взаимно однозначным ни в какой окрестности точки $h(a) = 0$, получаем, что отображение f не является взаимно однозначным даже на U' — противоречие. $\square$

Доказанное предложение контрастирует с тем, что имеет место для (сколь угодно гладких, пусть даже вещественно-аналитических) функций действительного переменного: отображение $x \mapsto x^3$ гладко и взаимно однозначно, но обратное к нему отображение не является гладким в нуле.

Определение 4.11. Пусть $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ — открытые множества. Отображение $f\colon U_1 \to U_2$ называется *конформным,* если оно биективно, голоморфно, и если обратное отображение $F^{-1}\colon U_2 \to U_1$ также голоморфно (последнее условие, в силу предложения 4.10, следует из двух предыдущих). Открытые подмножества, между которыми существует конформное отображение, называются *конформно изоморфными* (или просто изоморфными).

Пример 4.12. Отображение $z \mapsto i(1-z)/(1+z)$ задает конформный изоморфизм единичного круга $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на верхнюю полуплоскость $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Для всяких $\theta \in \mathbb{R}$ и $a \in \Delta$ отображение $z \mapsto e^{i\theta}(z-a)/(1-\overline{a}z)$ является конформным автоморфизмом круга Δ; для всякой матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$ отображение $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ является автоморфизмом верхней полуплоскости H; вскоре мы увидим, что других автоморфизмов у этих областей и нет.

Из теоремы Лиувилля (следствие 4.3) немедленно следует, что $\mathbb{C}$ и Δ конформно неизоморфны. Впрочем, для односвязных областей такой эффект — скорее исключение, чем правило: «теорема Римана об отображении», которую мы докажем позже в нашем курсе, утверждает, что любые два односвязных открытых подмножества в $\mathbb{C}$, отличных от самого $\mathbb{C}$, будут конформно изоморфны. Среди гомеоморфных друг дружке *неодносвязных* областей уже, как правило, существует много (континуум) конформно неизоморфных.

У принципа сохранения области есть важное следствие, называемое принципом максимума модуля:

Предложение 4.13. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое множество и $f \colon U \to \mathbb{C}$ — непостоянная голоморфная функция. Тогда функция $z \mapsto |f(z)|$ не может иметь локального максимума ни в одной точке множества U.*

Доказательство. Если $a \in U$ — произвольная точка, то предложение 4.5 показывает, что образ любой окрестности точки a при отображении f содержит открытый круг с центром $f(a)$, и в этом круге неизбежно будут содержаться комплексные числа с модулем, бóльшим, чем у числа $f(a)$. $\square$

Точно такое же рассуждение показывает, что ни $\operatorname{Re} f(z)$, ни $\operatorname{Im} f(z)$ не могут иметь локального экстремума в U, а если предположить дополнительно, что f не имеет нулей в U, то $|f(z)|$ не может иметь в U не только локального максимума, но и локального минимума; отсюда немедленно следует, что всякий многочлен f положительной степени с комплексными коэффициентами имеет корень в $\mathbb{C}$: так как, очевидно, $\lim_{|z|\to\infty}|f(z)| = +\infty$, то $|f(z)|$ обязан достигать наименьшего значения в какой-то точке $z \in \mathbb{C}$.

Отметим, наконец, что принцип маскимума модуля верен и для голоморфных функций нескольких переменных, в чем легко убедиться, ограничивая данную голоморфную функцию на всевозможные комплексные прямые.

Из принципа максимума модуля можно вывести интересное следствие:

Предложение 4.14 (лемма Шварца). *Пусть* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *— единичный круг, и пусть* $f\colon \Delta \to \Delta$ *— такое голоморфное отображение, что* $f(0) = 0$. *Тогда* $|f'(0)| \leqslant 1$ *и* $|f(z)| \leqslant |z|$ *для всех* $z \in \Delta \setminus \{0\}$; *более того, если хотя бы в одном из этих неравенств достигается равенство (хотя бы при одном* $z \neq 0$, *если речь идет о втором из неравенств), то функция* f *имеет вид* $f(z) = e^{i\theta}z$ *для некоторого* $\theta \in \mathbb{R}$ *(иными словами, отображение* f *— не что иное, как поворот на угол* θ*).*

Доказательство. Если $f(z) = 0$ для всех z, то доказывать нечего, так что можно считать, что функция f не является константой. Поскольку $f(0) = 0$, функция $g(z) = f(z)/z$ голоморфна в Δ (см. предложение 3.2). Выберем действительное число $r \in (0;1)$ и рассмотрим замкнутый диск $D_r = \{z \in \Delta : |z| \leqslant r\} \subset \Delta$. Предложение 4.13 показывает, что наибольшее значение функции $z \mapsto |g(z)|$ в D_r достигается на границе этого диска, но на ∂D_r выполнено неравенство $|f(z)/z| \leqslant 1/r$, так что $|g(z)| \leqslant 1/r$ и для всех $z \in D_r$; устремляя r к единице, получаем, что $|g(z)| \leqslant 1$ для всех $z \in \Delta$, что доказывает второе неравенство. Устремляя z к нулю в неравенстве $|f(z)/z| \leqslant 1$, получаем, что $|f'(0)| \leqslant 1$.

Предположим теперь, что для некоторого $z \in \Delta \setminus \{0\}$ выполнено равенство $|f(z)| = |z|$, или что $|f'(0)| = 1$; любое из этих условий означает, что $|g(z)| = 1$ для некоторого $z \in \Delta$. Выберем число r так, чтобы выполнялось неравенство $|z| < r < 1$; тогда из уже доказанного следует, что функция $z \mapsto |g(z)|$ достигает наибольшего значения (равного единице) в точке z, лежащей в $\operatorname{int} D_r$; стало быть, функция g — константа в силу предложения 4.13, так что существует такое число $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, что $f(z) = \lambda z$ для всех z. Осталось заметить, что функция такого вида отображает Δ в Δ только при $|\lambda| \leqslant 1$, а также что при $|\lambda| < 1$ равенства $|f'(0)| = 1$ или $|f(z)| = |z|$ невозможны. $\square$

Воспользуемся леммой Шварца для нахождения групп автоморфизмов единичного круга и верхней полуплоскости.

Предложение 4.15. *Группа (конформных) автоморфизмов единичного круга $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ состоит из всевозможных преобразований вида*

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}, \tag{4.1}$$

где $a \in \Delta$ и $\theta \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Сначала убедимся в том, что всякое преобразование вида (4.1) действительно является автоморфизмом круга. В самом деле, если $|z| = 1$, то $z^{-1} = \overline{z}$, откуда

$$\left| e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right| = |e^{i\theta}| \cdot |z| \cdot \left| \frac{1 - a\overline{z}}{1 - \overline{a}z} \right| = 1,$$

так что наши дробно-линейные преобразования переводят единичную окружность в себя; стало быть, это либо автоморфизмы единичного круга, либо отображения внутренности единичного круга на его внешность, но вторая возможность исключена, поскольку эти преобразования переводят точку 0, лежащую внутри единичного круга, в точку $-a$, также лежащую внутри круга.

Далее, легко проверить, что такие автоморфизмы образуют группу. Докажем, что других автоморфизмов нет. Пусть $f \colon \Delta \to \Delta$ — автоморфизм; взяв композицию f с автоморфизмом $z \mapsto (z - f(0))/(1 - \overline{f(0)}z)$, переводящим $f(0)$ в 0, можно добиться того, что наш автоморфизм будет переводить 0 в 0; теперь достаточно доказать, что автоморфизм, сохраняющий точку 0 (меняя обозначения, обозначим его снова через f), имеет вид (4.1); мы покажем, что он даже является поворотом относительно точки 0.

В самом деле, поскольку $f(\Delta) = \Delta$ и $f(0) = 0$, лемма Шварца показывает, что $|f(z)| \leqslant |z|$ для всех $z \in \Delta$; применяя то же рассуждение к обратному отображению $f^{-1}\colon \Delta \to \Delta$, получаем, что $|f^{-1}(f(z))| \leqslant |f(z)|$, то есть $|f(z)| \geqslant |z|$, откуда $|f(z)| = |z|$ для всех z. Теперь та же лемма Шварца показывает, что $f(z) = e^{i\theta}z$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$, что и требовалось. $\square$

Предложение 4.16. *Группа автоморфизмов верхней полуплоскости $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ состоит из преобразований вида*

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \tag{4.2}$$

где $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Ввиду предложения 4.15 автоморфизмы верхней полуплоскости получаются из автоморфизмов вида (4.1) сопряжением с помощью преобразования $z \mapsto i(1-z)/(1+z)$, задающего изоморфизм единичного круга и верхней полуплоскости. Стало быть, всякий автоморфизм верхней полуплоскости является «дробно-линейным преобразованием» $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ (поскольку композиция двух дробно-линейных преобразований дробно-линейна, так же как и обратное к дробно-линейному преобразованию). Оставшуюся часть рассуждения проведите самостоятельно. $\square$

Нетрудно проверить, что единственный неединичный элемент группы $SL_2(\mathbb{R})$, индуцирующий тождественное преобразование, — это матрица $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Следовательно, группа автоморфизмов верхней полуплоскости (а стало быть, и единичного круга) изоморфна $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$, где I — единичная матрица; из предложения 4.15 ясно, что эта группа действует на Δ (соотв. H) транзитивно, а также что стабилизатор любой точки изоморфен $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Стоит также обратить внимание на то обстоятельство, что найденные нами группы автоморфизмов оказались конечномерными; это опять очень непохоже на вещественный анализ: голоморфные функции являются гораздо более «жесткими», чем гладкие функции действительного переменного.

Коль скоро речь зашла о группах автоморфизмах, найдем и группу автоморфизмов комплексной плоскости.

Предложение 4.17. *Группа автоморфизмов комплексной плоскости $\mathbb{C}$ состоит из преобразований вида*

$$z \mapsto az + b, \tag{4.3}$$

где $a, b \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$.

Доказательство. Пусть $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — автоморфизм; тогда f — целая функция. Покажем, что функция $g(z) = f(1/z)$ не может иметь в нуле существенную особенность. В самом деле, пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geqslant 1\}$; так как f — автоморфизм и тем самым гомеоморфизм, множество $f(D) \subset \mathbb{C}$ замкнуто и отлично от всего $\mathbb{C}$. Заметим теперь, что предельные точки последовательностей $\{g(z_n)\}$, где $z_n \to 0$, принадлежат множеству $f(D)$; стало быть, не всякое комплексное число может быть такой предельной точкой, и наше утверждение следует из пункта (3) теоремы 3.8.

Теперь следствие 4.4 показывает, что f — многочлен; поскольку f — изоморфизм, его производная не обращается в нуль. Так как производная многочлена — многочлен и так как всякий многочлен, не имеющий в $\mathbb{C}$ корней, обязан быть константой, получаем, что f' — константа, так что f имеет вид (4.3). □

Лекция 5. Римановы поверхности

Важную роль в действительном анализе играет понятие гладкого многообразия; занимаясь комплексным анализом, естественно рассматривать комплексные многообразия, определение которых получается из определения гладких многообразий, если заменить $\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$ и гладкие отображения на голоморфные. В этом курсе мы будем заниматься только *одномерными* комплексными многообразиями (синоним: римановы поверхности).

Определение 5.1. *Римановой поверхностью* называется хаусдорфово топологическое пространство X со счетной базой, наделенное следующей дополнительной структурой.

(1) X представлено в виде объединения открытых подмножеств U_α, называемых *координатными окрестностями.*

(2) Для каждой координатной окрестности U_α задан гомеоморфизм $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha$, где $V_\alpha \subset \mathbb{C}$ открытое подмножество (эти гомеоморфизмы называются *локальными картами*).

(3) Пусть U_α и U_β — две координатные окрестности с непустым пересечением. Тогда отображение

$$\varphi_{\alpha\beta}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

заданное формулой $x \mapsto \varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(x))$, является конформным изоморфизмом открытых подмножеств в $\mathbb{C}$.

Голоморфные отображения римановых поверхностей определяются совершенно так же, как гладкие отображения гладких многообразий; читателям предлагается самостоятельно расписать в деталях следующее определение.

Определение 5.2. Пусть X и Y — римановы поверхности; отображение $f\colon X \to Y$ называется *голоморфным*, если его запись в любых локальных координатах голоморфна. Римановы поверхности X и Y называются *изоморфными*, если между ними существуют взаимно обратные голоморфные отображения.

Всякую риманову поверхность можно рассматривать как гладкое двумерное многообразие (говорят еще «вещественно двумерное», чтобы было ясно, какая размерность имеется в виду); поскольку якобиан голоморфной функции f одного переменного в точке z равен, как легко проверить, $|f'(z)|^2$, при таком отождествлении получится, что якобианы замен координат положительны, так что всякая риманова поверхность, рассматриваемая как двумерное гладкое многообразие, является ориентированной. В частности, всякая *компактная* риманова поверхность диффеоморфна (как гладкое многообразие) сфере с ручками. Число ручек называется *родом* компактной римановой поверхности.

Разумеется, всякое открытое подмножество в $\mathbb{C}$ является римановой поверхностью. Приведем менее тривиальные примеры.

Пример 5.3 (сфера Римана). *Сферой Римана* (ср. с. 122) называется множество $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, которое следующим образом снабжено структурой римановой поверхности. Представим $\overline{\mathbb{C}}$ в виде объединения двух следующих подмножеств: $U_0 = \mathbb{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $U_1 = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$. Зададим локальные карты $\varphi_0 \colon U_0 \to \mathbb{C}$ и $\varphi_1 \colon U_1 \to \mathbb{C}$ так:

$$\varphi_0(z) = z; \qquad \varphi_1(z) = \begin{cases} 1/z, & \text{если } z \neq \infty; \\ 0, & \text{если } z = \infty. \end{cases}$$

Наконец, введем на $\overline{\mathbb{C}}$ топологию, объявив подмножество $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ открытым, если открыты в $\mathbb{C}$ образы $\varphi_0(V \cap U_0)$ и $\varphi_1(V \cap U_1)$. Легко видеть, что в этой топологии $\overline{\mathbb{C}}$ гомеорморфно сфере; поскольку отображение замены координат φ_{01} имеет вид $z \mapsto 1/z$, выполнены все условия определения 5.1, и $\overline{\mathbb{C}}$ является римановой поверхностью; она называется *сферой Римана.*

Сфера Римана — компактная риманова поверхность рода нуль; обратно, всякая компактная риманова поверхность рода нуль изоморфна сфере Римана, но доказать это не так просто.

Чтобы освоиться со сферой Римана, дадим одно важное определение и докажем два простых предложения.

Определение 5.4. Пусть X — риманова поверхность (открытое подмножество в $\mathbb{C}$ — тоже риманова поверхность!). *Мероморфной функцией* на X называется голоморфная функция на $X \setminus S$, где $S \subset X$ — некоторое подмножество без предельных точек (случай пустого S не исключается), имеющая полюс во всякой точке $x \in S$.

Очевидно, что отношение двух голоморфных функций является мероморфной функцией; всякая голоморфная функция мероморфна (в этом случае $S=\varnothing$); сумма, произведение и частное двух мероморфных функций также мероморфны, так что мероморфные функции на данной римановой поверхности образуют поле.

Предложение 5.5. *Имеется естественное взаимно однозначное соответствие между множеством мероморфных функций на римановой поверхности X и множеством голоморфных отображений из X в $\overline{\mathbb{C}}$.*

Доказательство. Пусть f — мероморфная функция на X и S — множество ее полюсов. Доопределим f на всем X, положив

$f(x) = \infty$ при $x \in S$; получится отображение $\overline{f}\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$. Чтобы проверить, что оно голоморфно, достаточно рассмотреть только точки из S (образы остальных точек попадают в координатное подмножество $U_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, так что с ними вопросов не возникает). Если, однако, $x \in S$, то композиция $\overline{f}$ с локальной картой $\varphi_1\colon U_1 \to \mathbb{C}$ имеет вид $z \mapsto 1/f(z)$, и ясно, что если функция f имеет полюс, то функция $1/f$ продолжается до голоморфной функции в окрестности полюса, так что $\overline{f}$ голоморфна и в точках из S. Построение мероморфной функции по отображению из X в $\overline{\mathbb{C}}$ проведите самостоятельно. □

Замечание 5.6. Отношение двух голоморфных функций *нескольких* переменных продолжаться до голоморфного отображения в $\overline{\mathbb{C}}$ не обязано: контрпример дается уже функцией $f(z, w) = z/w$ на $\mathbb{C}^2$.

Предложение 5.7. *Мероморфные функции на сфере Римана суть не что иное, как рациональные функции от z (мы подразумеваем, что $\mathbb{C}$ стандартным образом вложено в $\overline{\mathbb{C}}$).*

Доказательство. Проверьте самостоятельно, что всякая рациональная функция имеет в бесконечности особенность не хуже полюса и тем самым мероморфна на $\overline{\mathbb{C}}$. Обратно, пусть f — мероморфная функция на $\overline{\mathbb{C}}$. Так как сфера компактна, количество полюсов этой функции конечно. Ограничим функцию f на $\mathbb{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$; получится мероморфная функция с конечным числом полюсов. Так как ее особенность в бесконечности не хуже полюса, имеем $|f(1/z)| = O(1/|z|^N)$ при $z \to 0$, то есть $|f(z)| = O(|z|^N)$ при $|z| \to \infty$. Вычтем из f сумму ее главных частей во всех полюсах, лежащих в $\mathbb{C}$ то, что останется, будет целой функцией с полиномиальным ростом на бесконечности, то есть многочленом (см. предложение 4.2); стало быть, f — рациональная функция. □

Кстати, изучать голоморфные функции на компактных римановых поверхностях бессмысленно:

Предложение 5.8. *Всякая голоморфная функция на компактной связной римановой поверхности является константой.*

Доказательство. Пусть функция f голоморфна на компактной римановой поверхности X, и пусть в точке $x \in X$ функция $x \mapsto |f(x)|$ достигает наибольшего значения. Тогда по принципу максимума модуля (предложение 4.13) f является константой в окрестности точки x, а следовательно, по принципу аналитического продолжения (который, как легко видеть, верен для произвольных римановых поверхностей), и на всей X. $\square$

Пример 5.9 (эллиптические кривые)**.** Пусть $L \subset \mathbb{C}$ — решетка (аддитивная подгруппа, порожденная двумя линейно независимыми над $\mathbb{R}$ комплексными числами). Положим $X = \mathbb{C}/L$ и введем на X фактортопологию. Естественное отображение $p\colon \mathbb{C} \to X$ является накрытием; в качестве координатных окрестностей возьмем столь малые открытые подмножества $U_\alpha \subset X$, что накрытие распадается над ними в прямое произведение, а в качестве локальной карты на U_α возьмем какое-нибудь сечение накрытия над U_α. Отображения замены координат будут просто сдвигами на элементы L, так что они, конечно, голоморфны; стало быть, X является римановой поверхностью (гомеоморфной двумерному тору). Такие римановы поверхности называются *эллиптическими кривыми* (различным решеткам, вообще говоря, соответствуют неизоморфные римановы поверхности!).

Эллиптические кривые имеют род один. Можно показать, что и обратно, всякая риманова поверхность рода 1 изоморфна некоторой эллиптической кривой.

Пример 5.10 (аналитическое продолжение)**.** *Ростком голоморфной функции в точке* $a \in \mathbb{C}$ будем называть класс эквивалентности пар (U, f), где $U \ni a$ — окрестность и $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, относительно следующего отношения эквивалентности: $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$, если существует такая окрестность $V \ni a$, что $V \subset U_1 \cap U_2$ и ограничения функций f_1 и f_2 на V совпадают; множество всех ростков голоморфных функций в точке a обозначается $\mathcal{O}_a$. (Легко видеть, что $\mathcal{O}_a$ находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством степенных рядов вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, имеющих положительный радиус сходимости.) Если f — функция, голоморфная на открытом множестве $U \ni a$, то элемент в $\mathcal{O}_a$, являющийся классом эквивалентности пары (U, f), называется *ростком функции f в точке a* и обозначается f_a. Обозначим через $\mathcal{O}$ множество всевозможных пар (a, ξ), где $a \in \mathbb{C}$ и $\xi \in \mathcal{O}_a$ ($\mathcal{O}$ — «множество всех ростков во всех точках») и введем на $\mathcal{O}$ топологию следующим образом. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и f — голоморфная функция на U. Обозначим через $W(U, f)$ подмножество в $\mathcal{O}$, состояшее из пар (a, f_a) для всех $a \in U$; семейство подмножеств $W(U, f) \subset \mathcal{O}$ для всевозможных пар (U, f), где U открыто в $\mathbb{C}$, а f голоморфна в U, объявим базой открытых множеств на $\mathcal{O}$. Определим также отображение $\pi\colon \mathcal{O} \to \mathbb{C}$, ставящее в соответствие паре $(a, \xi) \in \mathcal{O}$ точку $a \in \mathbb{C}$. Тогда легко проверяются следующие свойства:

1) *Отображение π является локальным гомеоморфизмом*: для всякой точки $\xi \in \mathcal{O}$ существует такая окрестность $W \ni \xi$, что ограничение π на W является гомеоморфизмом W на его образ в $\mathbb{C}$.

2) *Пространство $\mathcal{O}$ хаусдорфово.* (Отделимость двух элементов (a_1, ξ_1) и (a_2, ξ_2), для которых $a_1 \neq a_2$, очевидна, отделимость двух разных ростков в одной и той же точке a следует из того, что две голоморфные функции на связном открытом множестве, совпадающие на непустом открытом подмножестве, обязаны совпадать всюду; если бы мы провели аналогичную конструкцию с гладкими или непрерывными функциями вместо голоморфных, отделимости бы уже не было.)

Объявим теперь множества $W(U, f)$ координатными окрестностями, а ограничения отображения π на эти множества — локальными картами; тогда отображения замены координат будут голоморфны (они будут просто тождественными отображениями), так что $\mathcal{O}$ удовлетворяет всем аксиомам римановой поверхности, за тем исключением, что это топологическое пространство не имеет счетной базы (ростки в нуле функций $f(z) = \lambda z$ при разных λ лежат в разных компонентах связности пространства $\mathcal{O}$); тем не менее нетрудно показать (мы этого делать не будем), что каждая компонента связности пространства $\mathcal{O}$ счетной базой уже обладает и тем самым является самой настоящей римановой поверхностью.

Отображение π, будучи локальным гомеоморфизмом, обладает свойствами, близкими к свойствам накрытий. Приведем два примера.

Пусть $p\colon [0;1] \to \mathbb{C}$ — непрерывная кривая, и пусть существует ее «подъем в $\mathcal{O}$» (т. е. такое непрерывное отображение $\tilde{p}\colon [0;1] \to \mathcal{O}$, что $\pi \circ \tilde{p} = p$). В этом случае говорят, что росток $\tilde{p}(1) \in \mathcal{O}_{p(1)}$ получен из ростка $\tilde{p}(0) \in \mathcal{O}_{p(0)}$ «аналитическим продолжением вдоль пути p». Если такой подъем существует, то при заданном $\tilde{p}(0)$ он единствен (и, в частности, росток $\tilde{p}(1)$ однозначно определен ростком $\tilde{p}(0)$ и путем p).

Другой пример в том же духе. Пусть $\{p_u\}_{u\in[0;1]}$ — непрерывное семейство путей, соединяющих точки a и b в комплексной плоскости, и пусть $\xi \in \mathcal{O}_a$. Если росток ξ допускает аналитическое продолжение вдоль каждого из путей p_u, то его продолжения в точку b (т. е. ростки $\tilde{p}_u(1) \in \mathcal{O}_b$) будут одинаковы для всех u.

Эти утверждения легко доказать, имитируя доказательства теорем о накрывающих путях и о накрывающей гомотопии для накрытий (прямо сослаться на эти теоремы все же нельзя: не только отображение $\pi\colon \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ не является накрытием, но и его ограничение на связную компоненту пространства $\mathcal{O}$ не обязано являться накрытием на свой образ).

По-ученому пространство $\mathcal{O}$ называется «пучок ростков голоморфных функций на $\mathbb{C}$».

Накрытия римановых поверхностей

Предложение 5.11. *Пусть X — риманова поверхность, Y — топологическое пространство (хаусдорфово и со счетной базой) и $p\colon Y \to X$ — накрытие. Тогда на Y имеется, и притом единственная, структура римановой поверхности, относительно которой отображение p голоморфно.*

Доказательство. Покроем X столь мелкими координатными окрестностями U_α, что накрытие p распадается над каждой из U_α в прямое произведение; объявим координатными окрестностями на Y связные компоненты прообразов всевозможных U_α; если $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{C}$ — локальная карта на $U_\alpha \subset X$, то локальной картой на любой связной компоненте $p^{-1}(U_\alpha)$ объявим композицию $\varphi_\alpha \circ p$. Ясно, что отображения замены координат при этом будут в точности теми же, как у локальных карт на X, то есть голоморфными, так что Y становится римановой поверхностью, а отображение p — голоморфным. Поскольку произвола в нашем выборе по существу не было (для любой структуры римановой поверхности на Y, относительно которой отображение p голоморфно, отображения $\varphi_\alpha \circ p$ обязаны быть голоморфными), структура римановой поверхности на Y нашими данными определяется единственным образом. $\square$

Оказывается, что при отображениях накрытий римановых поверхностей всякое непрерывное отображение автоматически является голоморфным. Точнее говоря, имеет место следующее

Предложение 5.12. *Пусть X — риманова поверхность, и пусть $p_1\colon Y_1 \to X$, $p_2\colon Y_2 \to X$ — голоморфные отображения римановых поверхностей, являющиеся накрытиями. Если $f\colon Y_1 \to Y_2$ — такое непрерывное отображение, что $p_2 \circ f = p_1$, то отображение f голоморфно.*

Доказательство. Пусть $y_1 \in Y_1$ — произвольная точка; покажем, что отображение f голоморфно в окрестности y_1. Положим $y_2 = f(y_1)$ и $x = p_1(y_1) = p_2(y_2)$. Пусть U — содержащее точку x открытое подмножество в X, над которым оба накрытия p_1 и p_2 распадаются, и обозначим через U_i' $(i = 1, 2)$ ту связную компоненту $p_1^{-1}(U)$, которая содержит точку y_i. Имеем $f(U_1') = U_2'$, и надо доказать, что ограничение f на U_1' голоморфно; однако же это ограничение совпадает с композицией $s \circ p_1$, где $s\colon U \to Y_2$ — сечение накрытия p_2 над U, образ которого совпадает с U_2'. Поскольку p_1 и s голоморфны, их композиция тоже голоморфна. $\square$

Следствие 5.13. *Если два накрытия над римановой поверхностью изоморфны в топологическом смысле, то они изоморфны и как римановы поверхности.* $\square$

Мы применим это следствие к доказательству уж совсем конкретного результата.

Предложение 5.14. *Пусть* $\Delta^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ *— проколотый диск и* k *— целое положительное число. Тогда всякая (связная) риманова поверхность, являющаяся накрытием степени* k *над* Δ^**, изоморфна* Δ^**, и при этом изоморфизме накрытие переходит в отображение* $p\colon \Delta^* \to \Delta^*$*, задающееся формулой* $z \mapsto z^k$*.*

Доказательство. Поскольку фундаментальная группа Δ^* равна $\mathbb{Z}$, она имеет ровно одну подгруппу индекса k, так что все накрытия степени k над Δ^* топологически изоморфны; ввиду следствия 5.13 они изоморфны и аналитически, так что все они изоморфны накрытию, задаваемому функцией p из условия. □

Лекция 6. Риманова поверхность алгебраической функции

Эта лекция будет посвящена разбору одного-единственного, но очень важного, примера: конструкции «римановой поверхности алгебраической функции».

Пусть $F(z, w)$ — неприводимый многочлен от двух переменных с комплексными коэффициентами. В старину говорили, что уравнение $F(z, w) = 0$ задает w как многозначную алгебраическую функцию от z; в наши дни рассматривают множество $C = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : F(z, w) = 0\}$ и называют его «плоской аффинной алгебраической кривой». Так или иначе, с уравнением $F(z, w) = 0$ можно связать компактную риманову поверхность; расскажем, как это делается.

Представим многочлен F в виде

$$F(z, w) = P_n(z)w^n + P_{n-1}(z)w^{n-1} + \ldots + P_0(z), \qquad (6.1)$$

где P_j — многочлены от z. Обозначим через $p\colon (z, w) \to z$ и $q\colon (z, w) \to w$ проекции кривой C на оси координат. Для «общей» точки $z \in \mathbb{C}$ множество $p^{-1}(z)$ содержит n элементов, так как F является многочленом от w степени n. Выясним, у каких z прообразов меньше, чем n (больше, чем n, их быть не может: так как степень многочлена F по w равна n, это означало бы, что в некоторой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ все многочлены P_i обращаются в нуль, но тогда многочлен F делится на $z - z_0$, в противоречие с неприводимостью).

Во-первых, менее n прообразов будет у тех точек $z \in \mathbb{C}$, в которых $P_n(z) = 0$ (так как для w получится уравнение степени $\leqslant n-1$); во вторых, даже если $P_n(z) \neq 0$, менее n корней в уравнении для w будет для тех точек $z \in \mathbb{C}$, в которых дискриминант F как многочлена от w обращается в нуль.

Лемма 6.1. *Дискриминант многочлена F, рассматриваемого как многочлен от w, не может тождественно равняться нулю.*

Доказательство. Поскольку многочлен F неприводим в кольце $\mathbb{C}[z, w]$, лемма Гаусса показывает, что он неприводим и как элемент кольца $\mathbb{C}(z)[w]$ (кольцо многочленов от переменной w над полем рациональных функций $\mathbb{C}(z)$); стало быть, его наибольший общий делитель со своей производной (по w) равен единице, так что его дискриминант не равен нулю как элемент $\mathbb{C}(z)$ и тем самым не может тождественно равняться нулю как функция от z. $\square$

Итак, дискриминант многочлена F может обращаться в нуль только в конечном числе точек $z \in \mathbb{C}$. Обозначим теперь через Σ множество (конечное) точек $z \in \mathbb{C}$, в которых либо $P_n(z) = 0$, либо обращается в нуль дискриминант; все остальные точки имеют ровно n прообразов при отображении p. Положим $X_0 = p^{-1}(\mathbb{C} \setminus \Sigma)$ и обозначим через $p_0 \colon X_0 \to \mathbb{C} \setminus \Sigma$ и $q_0 \colon X_0 \to \mathbb{C}$ ограничения p и q на X_0.

Предложение 6.2. *Отображение $p_0 \colon X_0 \to \mathbb{C} \setminus \Sigma$ является накрытием степени n; если снабдить X_0 структурой римановой поверхности, индуцированной с $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ с помощью этого накрытия (как в предложении 5.11), то отображения p_0 и q_0 будут голоморфны.*

Доказательство. Покажем, что $(\partial F/\partial w)(z, w) \neq 0$, как только $(z, w) \in X_0$. В самом деле, если бы эта частная производная равнялась нулю, то число w было бы кратным корнем многочлена $F(z, \cdot)$, и дискриминант этого многочлена равнялся нулю, то есть дискриминант многочлена F, рассматриваемого как многочлен от w над $\mathbb{C}(z)$, обращался бы в нуль в точке z, в противоречие с тем, что $z \notin \Sigma$.

Коль скоро $(\partial F/\partial w)(z, w) \neq 0$, можно воспользоваться теоремой о неявной функции и локально выразить w как голоморфную функцию от z (из «обычной» (вещественной) теоремы о неявной функции следует только, что w локально является гладкой функцией от z, но поскольку многочлен F, очевидно, является голоморфной функцией от двух переменных, формула для производной неявной функции показывает, что производная этой функции $\mathbb{C}$-линейна, откуда вытекает и голоморфность; ср. предложение 1.6). Конкретнее, существуют такие окрестности $U_{z,w} \ni z$ и $V_{z,w} \ni w$ и голоморфная функция $\varphi_{z,w}\colon U_{z,w} \to V_{z,w}$, что при $(s, t) \in U_{z,v} \times V_{z,w}$ равенство $F(s, t) = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $t = \varphi_{z,w}(s)$. Положим теперь $U_z = \bigcap_{w \in p_0^{-1}(z)} U_{z,w}$, а для каждого $w \in p_0^{-1}(z)$ положим $U'_{v,w} = \{(z, \varphi_{z,w}(z)) : z \in U_z\}$; теперь очевидно, что p гомеоморфно отображает каждую из окрестностей $U'_{z,w}$ на U_z, причем множества $U'_{z,w}$ попарно не пересекаются (если бы два таких множества пересеклись в точке $(s, t) \in X_0$, то у точки s было бы менее n прообразов, что невозможно, так как $s \notin \Sigma$). Поскольку для каждой $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ имеется ровно n открытых множеств $U'_{z,w}$, по числу прообразов точки z, тот факт, что p_0 — накрытие, доказан.

Голоморфность отображения $p_0\colon X_0 \to \mathbb{C} \setminus \Sigma$ очевидна из конструкции структуры римановой поверхности на накрытии, а голоморфность отображения $q_0\colon X_0 \to \mathbb{C}$ — из того, что в локальных координатах в окрестности (z, w) это отображения выглядит как голоморфная функция $\varphi_{v,w}$. $\square$

Прежде, чем двигаться дальше, докажем следующий технический результат:

Предложение 6.3. *Множество $X_0 \subset \mathbb{C}^2$ связно.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что X_0 является объединением двух непересекающихся открытых подмножеств C_1 и C_2; очевидно, они являются накрытиями над $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ степеней k_1 и k_2 соответственно, причем $k_1 + k_2 = n$.

Для всякой точки $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ пусть $u_1(z), \dots, u_{k_1}(z)$ — ее прообразы (относительно p_0), лежащие в C_1, а $v_1(z), \dots, v_{k_2}(z)$ — ее прообразы, лежащие в C_2 (нумерация произвольна). Положим

$$\begin{aligned} R_1(z,w) &= (w-u_1(z))\dots(w-u_{k_1}(z)) = \\ &= w^{k_1} + L_{k_1-1}(z)w^{k_1-1}(z) + \dots + L_0(z), \\ R_2(z,w) &= (w-v_1(z))\dots(w-v_{k_2}(z)) = \\ &= w^{k_2} + Q_{k_2-1}(z)w^{k_2-1}(z) + \dots + Q_0(z). \end{aligned}$$

Очевидно, функции L_i и Q_j голоморфны на $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ (поскольку локально они выражаются как симметрические функции от голоморфных функций $\varphi_{z,w}$ из доказательства предложения 6.2); если мы докажем, что все Q_i и L_j являются рациональными функциями от z, то противоречие будет получено, поскольку, очевидно, $R_1(z,w)R_2(z,w) = F(z,w)/P_n(z)$, и получилось бы, что многочлен $F(z,w)/P_n(z) \in \mathbb{C}(z)[w]$ приводим над $\mathbb{C}(z)$, что как мы уже отмечали, противоречит неприводимости многочлена F в $\mathbb{C}[z,w]$ ввиду леммы Гаусса.

Доказательству рациональности Q_i и L_j предпошлем простую лемму.

Лемма 6.4. *Всякий корень многочлена $w^n + a_{n-1}w^{n-1} + \dots + a_0$ не превосходит по модулю числа $M = n \cdot \max(|a_{n-1}|, \dots, |a_0|, 1)$.*

Доказательство леммы. Если $|w| > M$, то $|a_{n-j}w^j| < |w^n|/n$ при всяком $j \in [1;n]$, так что $|w^n|$ больше суммы модулей остальных слагаемых и w не может быть корнем. $\square$

Теперь заметим, что $u_i(z)$ и $v_j(z)$ являются корнями многочлена со старшим коэффициентом единица, коэффициенты которого являются рациональными функциями от z с полюсами, содержащимися в множестве Σ; эти рациональные функции имеют не более чем полиномиальный рост при стремлении z к точкам из Σ или к бесконечности; из доказанной леммы следует, что рост $u_j(z)$ и $v_j(z)$ при стремлении z к точкам из Σ или к бесконечности также не более чем полиномиален. Поскольку $Q_i(z)$ и $L_j(z)$ являются симметрическими функциями от $u_{i_k}(z)$ и $v_{j_k}(z)$, они также имеют не более чем полиномиальный рост при стремлении z к точкам из Σ или к бесконечности, и предложение 5.7 показывает, что они являются рациональными функциями, что и требовалось. $\square$

Теперь мы готовы к тому, чтобы построить комактную риманову поверхность, соответствующую кривой C (или w как алгебраической функции от z). Все сведется к тому, что мы добавим к X_0 конечное число точек.

Именно, вложим $\mathbb{C}$ в $\overline{\mathbb{C}}$, положим $S = \Sigma \cup \{\infty\}$, и будем рассматривать X_0 как накрытие над $\overline{\mathbb{C}} \setminus S$. Для всякой точки $x \in S$ рассмотрим открытое множество $U \subset \overline{\mathbb{C}}$, содержащее x, изоморфное диску $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и не содержащее других точек из S. Положим $U^* = U \setminus \{x\}$; очевидно, U^* изоморфно проколотому диску. Очевидно, имеется разложение на компоненты связности $p_0^{-1}(U^*) = \bigcup_{j=1}^{m} V_j^*$, где V_j^* — открытое связное множество, являющееся накрытием над U^* степени e_j, причем множества V_j^* попарно не пересекаются. Предложение 5.14 показывает, что каждое из $V_j^* \subset X_0$ изоморфно проколотому диску, причем ограничение отображения p_0 на V_j^* изоморфно возведению в степень e_j. Для каждого из V_j^* добавим к множеству X_0 по точке ξ_j; проделав эту операцию для каждого из $x \in S$, получим множество X, являющееся объединением X_0 с конечным числом точек. Это и будет наша компактная риманова поверхность; надо только ввести на ней топологию и локальные карты.

Топология на X. На $X_0 \subset X$ топологию оставим прежнюю; остается определить базы окрестностей добавленных точек, а это делается так: если добавленная точка ξ_j соответствует множеству V_j^*, то в качестве базы ее окрестностей выберем набор таких множеств W, что $W \setminus \xi_j$ содержится в V_j^* и открыто в нем. Теперь можно продолжить отображение $p_0 \colon X_0 \to \overline{\mathbb{C}} \setminus S$ до отображения $\overline{p} \colon X \to \overline{\mathbb{C}}$ следующим образом: если добавленная точка ξ_j такая же, как выше, а множество V_j^* является компонентой прообраза проколотой окрестности точки x, то полагаем $\overline{p}(\xi_j) = x$. Легко проверить, что отображение $\overline{p}$ непрерывно, а топологическое пространство X компактно.

Локальные карты на X. К уже имеющимся локальным картам на X_0 добавим следующие: пусть ξ_j — добавленная точка, соответствующая множеству V_j^*; положим $V_j = V_j^* \cup \{\xi_j\}$, рассмотрим изоморфизм $\varphi\colon V_j^* \to \Delta^*$ на проколотый диск и продолжим его до отображения $V_j \to \Delta$ на непроколотый диск, положив $\xi_j \mapsto 0$. Легко видеть, что полученное отображение является гомеоморфизмом; мы объявим V_j координатной окрестностью точки ξ_j, а построенное отображение — локальной картой.

Выполнимость аксиом римановой поверхности очевидна; ясно также, что отображение $\overline{p}\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$ голоморфно (вне добавленных точек это очевидно, а в добавленных нами локальных картах это отображение является возведением в степень).

Осталось заметить, что риманова поверхность X связна, так как ввиду предложения 6.3 связно ее плотное подмножество X_0, и констатировать, что наша конструкция завершена.

Замечание 6.5. Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ задает кривую $C \subset \mathbb{C}^2$; тогда построенную нами компактную риманову поверхность, соответствующую этому уравнению, по-ученому называют «гладкая полная модель кривой C».

Наша конструкция является на самом деле универсальной: как утверждает так называемая «теорема существования Римана», *всякая* компактная риманова поверхность является римановой поверхностью некоторой алгебраической функции. Если мы уже знаем, что существует непостоянное голоморфное отображение данной компактной римановой поверхности X в $\overline{\mathbb{C}}$ (то есть непостоянная мероморфная функция на X), то сравнительно несложно доказать (с помощью рассуждений, подобных использованным в доказательстве предложения 6.3), что X действительно является римановой поверхностью некоторой алгебраической функции, но необходимо еще убедиться, что на X существует хоть одна непостоянная мероморфная функция, и это уже сложнее. Доказывать теорему существования Римана мы не будем (это требует привлечения существенно новых идей), но мы ее проверим для эллиптических кривых (в этом случае требуемые мероморфные функции удается построить «руками»).

Лекция 7. Разветвленные накрытия

В связи с конструкцией римановой поверхности алгебраической функции уместно описать топологическое строение произвольного голоморфного отображения компактных римановых поверхностей.

Предложение 7.1. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непостоянное голоморфное отображение компактных связных римановых поверхностей. Тогда:*

(1) $f(X) = Y$.

(2) *Слои отображения f конечны.*

(3) *Число точек ветвления f на X конечно; если $S \subset Y$ — множество, состоящее из образов всех точек ветвления на X, то индуцированное отображение $X \setminus f^{-1}(S) \to Y \setminus S$ является накрытием.*

(4) *Пусть n — степень накрытия, о котором шла речь в предыдущем пункте, и пусть $y \in Y$ и $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Если обозначить индекс ветвления f в точке x_j через e_j, то имеем $\sum_{j=1}^{k} e_j = n$.*

Доказательство. (1) $f(X)$ замкнуто в Y, так как X компактно, и открыто в Y по принципу сохранения области. Так как Y связно, $f(X) = Y$.

(2) Если множество $f^{-1}(y)$, где $y \in Y$, имеет предельную точку x_0, то по принципу аналитического продолжения f является константой в окрестности точки x_0, а значит, и всюду — противоречие. Стало быть, множество $f^{-1}(y)$ дискретно в X, а значит и конечно ввиду компактности X.

(3) В локальных координатах точка ветвления — это нуль производной. По принципу аналитического продолжения множество нулей производной может иметь предельную точку только в том случае, если производная на непустом открытом подмножестве равна нулю, т. е. отображение f на открытом подмножестве (а значит, и всюду на X) является константой, что противоречит

условию. Значит, множество точек ветвления дискретно в X; так как X компактно, это множество конечно.

Теперь воспользуемся следующим общетопологическим фактом, доказательство которого откладывается до конца лекции:

Предложение 7.2. *Пусть $f\colon M \to N$ — сюръективное непрерывное отображение многообразий*[2]*, удовлетворяющее следующим условиям:*

(i) *для всякой точки $x \in M$ существует такая окрестность $U \ni x$, что ограничение f на U гомеоморфно отображает U на $f(U)$ (иными словами, f является локальным гомеоморфизмом);*

(ii) *Для всякого компактного подмножества $K \subset N$ множество $f^{-1}(K) \subset M$ также компактно (иными словами, отображение f является собственным).*

Тогда f является накрытием с конечными слоями.

Если положить в этом предложении $M = X \setminus f^{-1}(S)$ и $N = Y \setminus S$, то условие (i) будет выполняться ввиду теоремы о неявной функции и того обстоятельства, что $X \setminus f^{-1}(S)$ по построению не содержит точек ветвления отображения f, а условие (ii) немедленно следует из компактности X и Y, так что утверждение (3) доказано.

(4) Ясно, что точки x_j можно окружить непересекающимися окрестностями $U_j \ni x_j$, обладающими тем свойством, что ограничение f на U_j записывается в подходящих локальных координатах как возведение в степень e_j и ограничение f на $U_j \setminus \{x_j\}$ является e_j-листным накрытием на свой образ. Так как для всех y', достаточно близких к y, имеем $f^{-1}(y') \subset \bigcup_j U_j$, равенство $\sum e_j = n$ следует из того, что точки y', достаточно близкие к y и отличные от нее, имеют n прообразов. $\square$

Определение 7.3. Число n, введенное в пункте (3) выше (число прообразов общей точки), называется *степенью* отображения f и обозначается $\deg f$. (Более того, это число и является степенью отображения f в топологическом смысле.)

[2] Или, если угодно, хаусдорфовых локально линейно связных пространств.

Замечание 7.4. Образы в Y точек ветвления отображения f часто также называют точками ветвления; если точка $y \in Y$ является точкой ветвления отображения $f\colon X \to Y$, то говорят еще, что отображение f *разветвлено над* y (особенно принято такое словоупотребление в алгебраической геометрии). В другой терминологии эти образы называются критическими значениями отображения f (а точки ветвления тогда называют критическими точками).

Отображения, структура которых описана в предложении 7.1, часто называют «разветвленными накрытиями»; их не надо путать с «настоящими» накрытиями в топологическом смысле.

Из доказанного нами предложения легко выводится следующий важный результат:

Предложение 7.5 (формула Римана–Гурвица). *Пусть $f\colon X \to Y$ — непостоянное голоморфное отображение компактных римановых поверхностей. Предположим, что $\deg f = n$, род поверхностей X и Y равен $g(X)$ и $g(Y)$ соответственно, и что f разветвлено в m точках (на X) и имеет в них индексы ветвления $e_1, \ldots, e_m$. Тогда*

$$2g(X) - 2 = n(2g(Y) - 2) + \sum_{j=1}^{m}(e_j - 1).$$

Доказательство. Триангулируем поверхность Y таким образом, чтобы образы всех точек ветвления были среди вершин. Обозначим число вершин, ребер и граней этой триангуляции через V, E и F соответственно; тогда эйлерова характеристика поверхности Y будет равна $V - E + F = 2 - 2g(Y)$. Беря прообразы симплексов на X, мы получим триангуляцию поверхности X, в которой число ребер будет равно $E' = nE$, число граней будет равно $F' = nF$ (ввиду нашего выбора триангуляции, отображение f будет накрытием над каждым открытым симплексом положительной размерности, а эти симплексы односвязны). С другой стороны, число вершин будет равно $nV - \sum_{j=1}^{m}(e_j - 1)$: если в прообразе какой-то вершины содержатся точки ветвления с индексами $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}$, то число прообразов у этой вершины будет на $(e_{i_1}-1)+\ldots+(e_{i_r}-1)$ меньше, чем n (формально ввиду предложения 7.1 (4), неформально потому, что в точке ветвления индекса e «сходится e листов»), а при нашем выборе триангуляции каждая точка ветвления содержится в прообразе какой-нибудь вершины.

Теперь подсчитаем эйлерову характеристику поверхности X: она равна

$$2-2g(X)=V'-E'+F'=nV-nE+nF-\sum_{j=1}^{m}(e_j-1)=$$
$$=n(2-2g(Y))-\sum_{j=1}^{m}(e_j-1);$$

остается умножить это равенство на (-1). □

Следствие 7.6. *Если $f\colon X\to Y$ — непостоянное голоморфное отображение компактных римановых поверхностей, то род X больше или равен роду Y.* □

Приложение: доказательство предложения 7.2

Можно опустить это доказательство при первом чтении; в любом случае рекомендуется понять, почему в предложении 7.2 условие (ii) нельзя заменить на условие «все слои отображения f конечны».

Пусть $y\in N$; ввиду условия (i) множество $f^{-1}(y)\subset Y$ дискретно в Y, а ввиду условия (ii) это множество компактно. Следовательно, оно конечно; положим $f^{-1}(y)=\{x_1,\ldots,x_n\}$. Ввиду условия (i), у каждой из точек x_j существует окрестность U_j, которую f гомеоморфно отображает на $f(U_j)$; уменьшая при необходимости окрестности U_j, можно добиться того, что они будут связными и попарно непересекающимися. Положим теперь $U=\bigcap_j f(U_j)\ni y$ и уменьшим при необходимости множество U, заменив его на (линейно) связную окрестность точки y (это уменьшенное множество будет по-прежнему обозначаться через U). Положим $V_j=U_j\cap f^{-1}(U)$; ясно, что каждое из открытых множеств V_j отображается с помощью f гомеоморфно на U.

Если мы теперь покажем, что

$$f^{-1}(U) \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_j, \tag{7.1}$$

то предложение будет доказано.

Чтобы установить это включение, начнем с того, что покажем, что в нашей ситуации верна «лемма о накрывающих путях»:

Лемма 7.7. *Пусть $p \in M$ и $I\colon [0;1] \to N$ — такое непрерывное отображение, что $I(0) = f(p)$. Тогда существует и единственно такое непрерывное отображение $\widetilde{I}\colon [0;1] \to M$, что $\widetilde{I}(0) = p$ и $f \circ \widetilde{I} = I$.*

Доказательство леммы. Обозначим через $A \subset [0;1]$ множество точек $a \in [0;1]$, для которых существует и единственно такое непрерывное отображение $\widetilde{I}\colon [0;a] \to M$, что $\widetilde{I}(0) = z$ и $f(\widetilde{I}(t)) = I(t)$ для всех $t \in [0;a]$. Нам достаточно убедиться, что $A = [0;1]$.

Из самого́ определения ясно, что множество $A \subset [0;1]$ является интервалом вида $[0;c)$ или $[0;c]$. Мы покажем, во-первых, что A замкнуто, и во-вторых, что $c = 1$.

Для доказательства замкнутости A предположим, рассуждая от противного, что $A = [0;c)$ для некоторого $c \leqslant 1$. Тогда существует и единственно непрерывное отображение $\widetilde{I}\colon [0;c) \to M$, для которого $\widetilde{I}(0) = p$ и $f(\widetilde{I}(t)) = I(t)$ для всех $t \in [0;c)$. Положим

$$\widetilde{\Gamma} = \{(t,z) \in [0;1] \times M : \widetilde{I}(t) = z,\ 0 \leqslant t < c\}$$

(график отображения $\widetilde{I}$). Из условия (ii) немедленно следует, что множество

$$L = \{(t,z) \in [0;c] \times M : I(t) = f(z)\}$$

является компактным; с другой стороны, множество $\widetilde{\Gamma}$ содержится в L и компактным не является (так как оно гомеоморфно интервалу $[0;c)$). Значит, в L существуют точки, принадлежащие замыканию множества $\widetilde{\Gamma}$, но не самому́ $\widetilde{\Gamma}$. Легко видеть, что всякая такая точка обязана иметь вид (c,z), причем, поскольку $f(z) = I(c)$ и прообраз точки $I(c)$ при отображении f дискретен, легко проверить, что разность между замыканием $\widetilde{\Gamma}$ и самим $\widetilde{\Gamma}$ может содержать не более одной точки такого вида (а тем самым — ровно одну). Если эта единственная точка имеет вид (c, z), то, очевидно, можно продолжить отображение $\widetilde{I}$ на замкнутый интервал $[0; c]$, положив $\widetilde{I}(c) = z$, причем из предыдущего обсуждения явствует, что это продолжение единственно. Мы привели к противоречию предположение о том, что правая граница интервала A ему не принадлежит. Стало быть, этот интервал замкнут.

Теперь покажем, что $c = 1$. Предположим (рассуждая, опять-таки, от противного), что $c < 1$. Если $a \in A$ и отображение $\widetilde{I}\colon [0; c] \to M$ — такое же, как выше, то рассмотрим окрестность $W \ni \widetilde{I}(c)$, которую отображение f гомеоморфно отображает на $f(W)$ (условие (i)); если $\varepsilon > 0$ столь мало, что $I([c; c + \varepsilon]) \subset f(W)$, то, очевидно, отображение $\widetilde{I}$ можно продолжить на $[0; c + \varepsilon]$, положив $\widetilde{I}(t) = f^{-1}(I(t))$ при $t \in [c; c + \varepsilon]$, где $f^{-1}\colon f(W) \to W$ — обратное к ограничению f на W. Значит, неравенство $c < 1$ невозможно и лемма доказана. $\square$

Для доказательства включения (7.1) рассмотрим теперь произвольную точку $z \in f^{-1}(U)$ и положим $z_1 = f(z) \in U$. Соединим точку z_1 с точкой y с помощью непрерывной кривой $I\colon [0; 1] \to U$, для которой $I(0) = z_1$, $I(1) = y$; ввиду только что доказанной леммы существует такое непрерывное отображение $\widetilde{I}\colon [0; 1] \to M$, что $\widetilde{I}(0) = z$ и $f \circ \widetilde{I} = I$. Так как $f(\widetilde{I}(1)) = y$, имеем $\widetilde{I}(1) = x_j$ для некоторого j. Обозначим через $\varphi\colon U \to V_j$ гомеоморфизм, обратный к ограничению отображения f на V_j. Теперь рассмотрим отображения $J\colon [0; 1] \to N$ и $\widetilde{J}\colon [0; 1] \to M$, действующие по правилам $J(t) = I(1 - t)$ и $\widetilde{J}(t) = \widetilde{I}(1 - t)$ (попросту говоря, это пути I и $\widetilde{I}$, проходимые в обратном направлении); рассмотрим также отображение $J' = \varphi \circ J$. Полагая в лемме 7.7 $I = J$ и $p = x_j$, получаем (из единственности, которая гарантируется этой леммой), что $\widetilde{J} = J'$ и, в частности,

$$z = \widetilde{J}(1) = J'(1) = \varphi(J(1)) = \varphi(z_1) \in V_j.$$

Поскольку точка $z \in f^{-1}(U)$ выбиралась произвольно, включение (7.1) доказано, а с ним и предложение 7.2.

Лекция 8. Эллиптические функции

На этой лекции мы докажем, в числе прочего, что всякая эллиптическая кривая является римановой поверхностью некоторой алгебраической функции.

Пусть $L \subset \mathbb{C}$ — решетка с базисом $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ и $E = \mathbb{C}/L$ — соответствующая эллиптическая кривая. По предложению 5.8 непостоянных голоморфных функций на E нет; будем искать мероморфные функции. Ясно, что мероморфная функция на E — это то же самое, что двоякопериодическая мероморфная функция на $\mathbb{C}$, имеющая числа ω_1 и ω_2 своими периодами; такие двоякопериодические мероморфные функции называются *эллиптическими функциями.*

Предложение-определение 8.1. *Ряд*

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{u \in L \setminus \{0\}} \Bigl(\frac{1}{(z-u)^2} - \frac{1}{u^2}\Bigr) \tag{8.1}$$

сходится абсолютно и равномерно на любом компактном подмножестве в $\mathbb{C} \setminus L$ к мероморфной функции, обозначаемой $\wp(z)$ и называемой $\wp$-функцией Вейерштрасса*. Функция $\wp$ является четной и удовлетворяет тождеству $\wp(z+u) = \wp(z)$ при всех $u \in L$. В каждой точке решетки L функция $\wp$ имеет полюс второго порядка, а других полюсов у нее нет. Главная часть ряда Лорана функции $\wp$ в нуле имеет вид $1/z^2$.*

Доказательство. Пусть $K \subset \mathbb{C} \setminus L$ — компакт и $z \in K$. Тогда имеем $|z-u| \sim |u|$ при $u \in L$, $|u| \to \infty$, причем эта эквивалентность равномерна по $z \in K$. Следовательно, имеем

$$\Bigl|\frac{1}{(z-u)^2} - \frac{1}{u^2}\Bigr| = \frac{|z| \cdot |z-2u|}{|u|^2 \cdot |z-u|^2} = O\Bigl(\frac{1}{|u|^3}\Bigr)$$

(O равномерно по $z \in K$), откуда утверждение о сходимости следует с очевидностью. Стало быть, $\wp$ голоморфна на $\mathbb{C} \setminus L$; тождество $\wp(-z) = \wp(z)$ немедленно следует из возможности переставлять члены в абсолютно сходящемся ряде.

Ввиду равномерной сходимости ряда (8.1) на компактах его можно почленно продифференцировать; если сделать это, получится формула

$$\wp'(z) = -2\sum_{u\in L}\frac{1}{(z-u)^3}, \tag{8.2}$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах в $\mathbb{C}\setminus L$; из абсолютной сходимости ряда (8.2) немедленно следует, что $\wp'(z+u)=\wp'(z)$ при любом $u\in L$; следовательно, для всякого $u\in L$ имеем $\wp(z+u)-\wp(u)=C$, где $C\in\mathbb{C}$ — константа. Ввиду четности $\wp$ имеем теперь

$$\wp(-u/2)=\wp(u/2)=\wp(-u/2+u)=\wp(-u/2)+C,$$

откуда $C=0$, что доказывает тождество $\wp(z+u)=\wp(z)$ при $u\in L$. Утверждения о полюсах функции $\wp$ следуют с очевидностью из всего доказанного выше. □

Следствие 8.2. *Функция $\wp'$ мероморфна на $\mathbb{C}$, нечетна и двоякопериодична с периодами ω_1 и ω_2; она имеет полюсы порядка 3 во всех точках решетки, а других полюсов не имеет; главная часть ряда Лорана функции $\wp'$ в нуле имеет вид $(-2/z^3)$.* □

Эллиптическую кривую $E=\mathbb{C}/L$ можно рассматривать как группу по сложению (факторгруппу аддитивной группы $\mathbb{C}$); очевидно, как группа она изоморфна $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})\times(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$; стало быть, E имеет ровно четыре точки второго порядка: образы точек 0, $\omega_1/2$, $\omega_2/2$ и $(\omega_1+\omega_2)/2$.

Коль скоро функции $\wp$ и $\wp'$ двоякопериодичны с периодами ω_1 и ω_2, их можно рассматривать как мероморфные функции на E, то есть как голоморфные отображения из E в $\overline{\mathbb{C}}$.

Предложение 8.3. *Функция $\wp$, рассматриваемая как голоморфное отображение из E в $\overline{\mathbb{C}}$, имеет степень 2, а функция $\wp'$ — степень 3. Отображение $\wp\colon E\to\overline{\mathbb{C}}$ разветвлено с индексом два в точках второго порядка и неразветвлено в остальных точках. Если $\wp(a_1)=\wp(a_2)$, где $a_1,a_2\in E$, то $a_2=\pm a_1$ (если рассматривать a_1 и a_2 как комплексные числа, это запишется как $a_2\equiv\pm a_1 \pmod L$). Если $a\in C$ — число, соответствующее точке второго порядка, отличной от нуля, то $\wp'(a)=0$. Если $\wp'(z)=0$, то z сравнимо по модулю L с $\omega_1/2$, $\omega_2/2$ или $(\omega_1+\omega_2)/2$.*

Доказательство. Если рассматривать $\wp$ и $\wp'$ как голоморфные отображения из E в $\overline{\mathbb{C}}$, то предложение 8.1 и следствие 8.2 показывают, что $\wp^{-1}(\{\infty\}) = {\wp'}^{-1}(\{\infty\}) = \{0\}$, причем индекс ветвления в нуле равен двум для $\wp$ и трем для $\wp'$; ввиду предложения 7.1 отсюда следуют утверждения про степени. Если $a \in \mathbb{C}$ — число, соответствующее точке второго порядка на E, то $a \equiv -a \pmod{L}$, откуда ввиду четности $\wp$ получаем тождество $\wp(a+z) = \wp(-a-z) = \wp(a-z)$; дифференцируя это равенство по z при $z=0$, получаем $\wp'(a) = -\wp'(a)$, откуда $\wp'(a)=0$. Стало быть, отображение $\wp$ разветвлено во всех точках второго порядка, причем индекс ветвления не может быть больше двух ввиду предложения 7.1, поскольку $\deg\wp = 2$. Далее, из доказанных равенств следует, что все три точки второго порядка, кроме нуля, содержатся в множестве ${\wp'}^{-1}(0)$; поскольку $\deg\wp' = 3$, ничего другого в этом множестве содержаться не может (и отображение $\wp'$ в этих точках неразветвлено), так что у отображения $\wp$ нет других точек ветвления, кроме точек второго порядка, а у функции $\wp'$ нет других нулей на $\mathbb{C}$, кроме сравнимых с $\omega_1/2$, $\omega_2/2$ или $(\omega_1+\omega_2)/2$, причем эти нули просты. Если, наконец, $\wp(a_1) = \wp(a_2)$ и $a_1 \neq a_2$ на E, то обе эти точки лежат в $\wp^{-1}(b)$, где $b = \wp(a_1) = \wp(a_2) \in \overline{\mathbb{C}}$; поскольку имеем также $\wp(-a_1) = b$ ввиду четности $\wp$, то $-a_1 = a_2$ (если $-a_1 = a_1$, то a_1 — точка второго порядка, отображение $\wp$ в ней разветвлено и $a_2 = a_1$). Все доказано. $\square$

Положим $e_1 = \wp(\omega_1/2)$, $e_2 = \wp((\omega_1+\omega_2)/2)$, $e_3 = \wp(\omega_2/2)$. Заметим, что числа e_1, e_2 и e_3 различны: если значения $\wp$ в каких-то двух из этих точек совпадают и равны, скажем, $c \in \mathbb{C}$, то, рассматривая $\wp$ как голоморфное отображение из E в $\overline{\mathbb{C}}$, получаем, что $\wp^{-1}(c)$ содержит две разные точки ветвления, что невозможно, так как $\deg\wp = 2$.

Предложение 8.4. *Функции $\wp$ и $\wp'$ связаны тождеством*

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3). \tag{8.3}$$

Доказательство. И левая, и правая часть (8.3) — мероморфные функции на E, имеющие полюсы порядка 6 в точке 0 и нигде больше и обращающиеся в нуль в остальных точках второго порядка (и левая, и правая часть — с кратностью 2) и нигде больше. Следовательно, их отношение — голоморфная функция на E, то есть константа. Поскольку «старший» (с наиболее отрицательной степенью z) член ряда Лорана в нуле и у левой, и у правой части имеет вид $4/z^6$, эта константа равна единице. □

Предложение 8.5. *Эллиптическая кривая E изоморфна римановой поверхности алгебраической функции, заданной уравнением*

$$w^2 = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3). \tag{8.4}$$

Доказательство. Обозначим через X компактную риманову поверхность, соответствующую алгебраической функции с уравнением (8.4), и пусть $E_0 \subset E$ — подмножество, получаемое удалением из E точек второго порядка, а X_0 — подмножество в $\mathbb{C}^2$, состоящее из точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (8.4), причем $z \notin \{e_1, e_2, e_3\}$. Легко видеть, что X_0 — это то самое множество, которое было обозначено через X_0 в предыдущей лекции, причем X получается добавлением к X_0 четырех точек, лежащих над e_1, e_2, e_3 и ∞. Определим отображение $\varphi_0\colon E_0 \to X_0$ по формуле $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$ (то, что $\varphi_0(E_0) \subset X_0$, следует из соотношения (8.3)). Ясно, что отображение φ_0 голоморфно. Покажем, что оно является биекцией E_0 на X_0. В самом деле, если $\wp(a_1) = \wp(a_2)$, причем $a_1, a_2 \in E_0$, то $a_1 = \pm a_2$ ввиду предложения 8.3; поскольку ввиду нечетности функции $\wp'$ имеем $\wp'(-a_1) = -\wp'(a_1)$, причем $\wp'(a_1) \neq 0$, так как a_1 не является точкой второго порядка (см. то же предложение 8.3), случай $a_1 = -a_2$ исключается; тем самым доказана инъективность отображения φ_0. Если $(z, w) \in X_0$, то, очевидно, $z = \wp(a) = \wp(-a)$ для некоторого $a \in E$ (так как отображение $\wp\colon E \to \overline{\mathbb{C}}$ сюръективно); из формулы (8.3) и нечетности функции $\wp'$ теперь следует, что либо $\wp'(a)$, либо $\wp'(-a)$ равно w, так что φ_0 и сюръективно. Итак, $\varphi_0\colon E_0 \to X_0$ — голоморфная биекция и, стало быть, изоморфизм. Продолжим теперь отображение φ_0 до отображения $\varphi\colon E \to X$ следующим образом: переведем нуль в точку римановой поверхности X, лежащую над ∞, а точку второго порядка $a \neq 0$ — в точку, лежащую над $\wp(a)$. Легко видеть, что отображение $\varphi\colon E \to X$ непрерывно (следовательно, по теореме Римана об устранимой особенности оно голоморфно) и биективно, так что φ — изоморфизм. Все доказано. $\square$

Предложение 8.5 можно обратить:

Предложение 8.6. *Риманова поверхность алгебраической функции, заданной уравнением*

$$w^2 = c(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3), \tag{8.5}$$

где $c \neq 0$, а числа λ_1, λ_2 и λ_3 различны, является эллиптической кривой.

Доказательство. Начнем с важного определения.

Определение 8.7. *Голоморфной* 1*-формой* (классический термин: *дифференциал первого рода*; мы будем говорить просто «голоморфная форма») на римановой поверхности X называется комплексная дифференциальная форма степени 1 на X, которую в локальных координатах можно записать в виде $\omega = f\,dz$, где функция f голоморфно зависит от локальной координаты z.

Сделаем два простых замечания к этому определению. Во-первых, если функция замены координат $z = z(w)$ голоморфна, то имеем $f(z)\,dz = f(z(w))z'(w)\,dw$ (см. предложение 1.3), так что форма, записываемая в одной из систем координат в виде $f\,dz$, где f голоморфна, будет записываться в таком виде и в *любой* системе координат. Во-вторых, всякая голоморфная форма будет обязательно замкнута (предложение 1.3 (5)), так что ее интегралы по двум гомологичным 1-цепям совпадают.

Пусть теперь X — риманова поверхность алгебраической функции, заданной уравнением (8.5). Обозначим правую часть этого уравнения через $P(z)$. Легко видеть, что естественное отображение $p\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$ имеет степень 2 и разветвлено с индексом 2 ровно в четырех точках, лежащих над λ_1, λ_2 и λ_3 и бесконечностью; обозначим эти точки a_1, a_2, a_3 и $\overline{\infty}$. Отсюда немедленно следует, что X гомеоморфна тору (иными словами, род X равен единице). Проще всего убедиться в этом с помощью формулы

Римана–Гурвица: если обозначить род поверхности X через g, то $2g-2=2\cdot(-2)+4\cdot(2-1)=0$.

Теперь построим на X голоморфную форму ω, нигде не обращающуюся в нуль (существование такой формы на компактной римановой поверхности — характеристическое свойство эллиптических кривых: см. задачу 66 на с. 130). Именно, пусть $X_0=X\setminus\{a_1,a_2,a_3,\overline{\infty}\}$ и $X'=X\setminus\overline{\infty}$. На X' определены голоморфные функции z и w; положим $\omega=dz/w$ на X_0; ясно, что эта голоморфная форма не обращается в нуль на X_0; утверждается, что ее можно продолжить на все X. В самом деле, в точке a_j в качестве локальной координаты можно выбрать w (поскольку $w^2=P(z)$ и $P(z)$ можно выбрать в качестве локальной координаты на $\overline{\mathbb{C}}$ в окрестности λ_j); так как из соотношения (8.5) следует, что $2w\,dw=P'(z)\,dz$ на X, имеем $dz/w=2\,dw/P'(z)$, и так как $P'(\lambda_j)\neq 0$ (корень λ_j — не кратный), получаем, что форма dz/w продолжается до голоморфной в окрестности точки a_j. Осталось посмотреть на окрестность точки $\overline{\infty}$; в этой точке можно выбрать такую локальную координату t, что $z=1/t^2$, $w=h(t)/t^3$, где функция h голоморфна и не обращается в нуль в нуле (так как h — одна из ветвей $\sqrt{c(1-t^2\lambda_1)(1-t^2\lambda_2)(1-t^2\lambda_3)}$). Отсюда получаем, что $dz=-2\,dt/t^3$ и $\omega=dz/w=-2\,dt/h(t)$, так что ω продолжается и в $\overline{\infty}$ и не обращается там в нуль.

Поскольку поверхность X гомеоморфна тору, ее первая группа гомологий $H_1(X,\mathbb{Z})$ изоморфна $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$; пусть γ_1, γ_2 — образующие этой группы. Обозначим через $L\subset\mathbb{C}$ подгруппу, состоящую из чисел $\int_\gamma\omega$ для всевозможных $\gamma\in H_1(X,\mathbb{Z})$; эта подгруппа порождена числами $u_1=\int_{\gamma_1}\omega$ и $u_2=\int_{\gamma_2}\omega$.

Лемма 8.8. *Числа u_1 и u_2 линейно независимы над $\mathbb{R}$.*

Доказательство леммы. Предположим противное; тогда группа L содержится в некоторой прямой; умножая ω на ненулевое комплексное число α, можно добиться того, что эта прямая будет совпадать с вещественной осью.

Пусть $\pi\colon\tilde{X}\to X$ — универсальное накрытие; введем на $\tilde{X}$ структуру римановой поверхности, индуцированную с X. Выберем точки $x_0\in X$ и $\tilde{x}_0\in\pi^{-1}(x_0)$ и определим голоморфную функцию $\tilde{\varphi}\colon \tilde{X}\to\mathbb{C}$ по формуле $x\mapsto\int_{\tilde{x}_0}^{x}(\alpha\pi^*\omega)$ (интегрирование ведется по кривой, соединяющей x_0 и x; ввиду односвязности $\tilde{X}$ от выбора кривой интеграл не зависит). В силу нашего выбора числа α мнимая часть интеграла от $\alpha\omega$ по любому циклу на X равна нулю, так что $\operatorname{Im}\tilde{\varphi}(x)=\operatorname{Im}\tilde{\varphi}(x')$ при $\pi(x)=\pi(x')$. Следовательно, функция $x\mapsto\operatorname{Im}\tilde{\varphi}(x)$ пропускается через компактное пространство X и тем самым достигает наибольшего значения на $\tilde{X}$; по принципу максимума отсюда следует, что $\tilde{\varphi}$ — константа, и, следовательно, $\pi^*\omega=0$, что нелепо. $\square$

Итак, мы доказали, что $L\subset\mathbb{C}$ — решетка. Определим теперь голоморфное отображение $\varphi\colon X\to\mathbb{C}/L$ по формуле $x\mapsto$ $\mapsto\int_{x_0}^{x}\omega \bmod L$ (при замене пути интегрирования к интегралу прибавится элемент из L, так что отображение определено корректно). Поскольку ω нигде не обращается в нуль, отображение φ неразветвлено и, следовательно, является накрытием; так как отображение $\varphi_*\colon \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(\mathbb{C}/L,\varphi(x_0))\cong L$ имеет вид $\gamma\mapsto\int_\gamma\omega$, получаем, что по построению группы L отображение φ^* сюръективно. Следовательно, φ — голоморфный гомеоморфизм и тем самым изоморфизм. $\square$

Замечание 8.9. К доказательству предложения 8.6 ведет следующий ход мыслей. Мы хотим представить риманову поверхность X в виде $\mathbb{C}/L$, для чего хотелось бы, чтобы отображение $p\colon X\to\overline{\mathbb{C}}$ было похоже на функцию $\wp$, также дающую разветвленное накрытие над $\overline{\mathbb{C}}$ степени два с ветвлением в четырех точках. Однако же функция $\wp$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (8.3); стало быть, чтобы найти наш аналог $\wp$, надо решить дифференциальное уравнение

$$(z')^2=c(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3), \tag{8.6}$$

что мы и сделали, интегрируя форму

$$dz/\sqrt{c(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)}.$$

Во избежание недоразумений отметим, что решение уравнения (8.6) не обязательно является именно $\wp$-функцией, хотя и тесно с ней связано (подробнее об этом — на следующей лекции).

Лекция 9. Классификация эллиптических кривых

На прошлой лекции мы работали с индивидуальной эллиптической кривой $E = \mathbb{C}/L$. Сейчас мы изучим, как конструкции прошлой лекции зависят от L.

Обозначим множество решеток в $\mathbb{C}$ через $\mathfrak{L}$. Если $L \in \mathfrak{L}$ и $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то через λL обозначим решетку, полученную умножением на λ всех элементов решетки L.

У всякой эллиптической кривой $E = \mathbb{C}/L$ существует семейство автоморфизмов (сдвигов), индуцированных отображениями $z \mapsto z + a$, где $a \in \mathbb{C}$; поскольку любой изоморфизм эллиптических кривых можно скомпоновать со сдвигом, при изучении вопроса о том, изоморфны ли две данные эллиптические кривые, всегда можно считать, что искомый изоморфизм переводит 0 в 0, где $0 \in E$ — образ числа $0 \in \mathbb{C}$, что мы и будем делать в дальнейшем.

Предложение 9.1. *Эллиптические кривые $E = \mathbb{C}/L$ и $E' = \mathbb{C}/L'$ изоморфны тогда и только тогда, когда $L' = \lambda L$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Доказательство. Поскольку часть «тогда» очевидна (изоморфизм $\mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/L'$ задается умножением на λ), предположим, что $\varphi\colon E \to E'$ — изоморфизм (считаем, что $\varphi(0) = 0$). Если поднять отображение φ до отображения универсальных накрытий кривых E и E', получится голоморфное отображение $\tilde{\varphi}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (то есть целая функция), удовлетворяющее условию $\tilde{\varphi}(z + u) - \tilde{\varphi}(z) \in L'$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и $u \in L$, причем, очевидно, можно считать, что $\tilde{\varphi}(0) = 0$. Поскольку L' дискретно в $\mathbb{C}$, имеем $\tilde{\varphi}(z + u) - \tilde{\varphi}(z) = \mathrm{const}$ для всякого $u \in L$, откуда $f'(z + u) = f'(z)$ для всякого $u \in L$; поскольку целая функция f' двоякопериодична, она является константой, так что $f(z) = \lambda z + \mu$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ и $\lambda \neq 0$. Так как $\tilde{\varphi}(0) = 0$, имеем $\mu = 0$; так как $\tilde{\varphi}$ опускается до отображения $\varphi\colon E/L \to E/L'$, можно считать, что $\lambda L \subset L'$, а так как степень отображения φ равна 1, имеем $\lambda L = L'$. $\square$

Доказанное предложение можно переформулировать так: множество классов изоморфизмов эллиптических кривых естественно отождествляется с пространством орбит $\mathfrak{L}/\mathbb{C}^*$, где $\mathbb{C}^*$ действует на решетки умножением.

Пусть $L \in \mathfrak{L}$ и $k \geqslant 2$ — целое число. Тогда ряд $\sum_{u \in L \setminus \{0\}} (1/u^{2k})$ абсолютно сходится (эти ряды называются *рядами Эйзенштейна*). Сумма этого ряда обозначается через G_k (или $G_k(L)$, если нужно подчеркнуть зависимость от решетки L). Очевидно, $G_k(\lambda L) = \lambda^{-2k} G_k(L)$. Если $m \geqslant 3$ нечетно, то ряд $\sum_{u \in L \setminus \{0\}} (1/u^m)$ также абсолютно сходится, но его сумма, очевидно, равна нулю.

Выразим через ряды Эйзенштейна коэффициенты уравнения 8.4.

Предложение 9.2. *Эллиптическая кривая $E = \mathbb{C}/L$ изоморфна римановой поверхности алгебраической функции, заданной уравнением*

$$w^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3, \tag{9.1}$$

где $g_2 = 60G_2$, $g_3 = 140G_3$.

Доказательство. Разложим каждое из слагаемых в выражении для функции $\wp$ (формула (8.1)) в ряд в окрестности нуля:

$$\frac{1}{(z-u)^2} - \frac{1}{u^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m+1)z^m}{u^{m+2}}.$$

Поскольку эти ряды, так же как и ряд для $\wp$, абсолютно сходятся, их можно просуммировать и перегруппировать члены; учитывая, что $\sum_{u \in L \setminus \{0\}} (1/u^m) = 0$ при нечетных m, получаем, что ряд Лорана для $\wp$ в окрестности нуля имеет вид

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) G_{k+1} z^{2k} = \frac{1}{z^2} + 3G_2 z^2 + 5G_3 z^4 + \dots . \tag{9.2}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + 6G_2 z + 20 G_3 z^3 + \dots, \\ (\wp'(z))^2 &= \frac{4}{z^6} - \frac{24G_2}{z^2} - 80G_3 + \dots, \\ \wp(z) - e_i &= \frac{1}{z^2} - e_i + 3G_2 z^2 + 5G_3 z^4 + \dots, \end{aligned} \tag{9.3}$$

$$
\begin{aligned}
4\prod_i(\wp(z)-e_i) = \frac{4}{z^6} - \frac{4(e_1+e_2+e_3)}{z^4} &+ \\
+ \frac{4(e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3)+36G_2}{z^2} &+ \\
+ (-4e_1e_2e_3 - 24G_2(e_1+e_2+e_3)+60G_3) &+ \ldots . \quad (9.4)
\end{aligned}
$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в (9.3) и (9.4), получаем последовательно:

$$
e_1+e_2+e_3=0, \quad 4(e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3)=-60G_2, \quad 4e_1e_2e_3=140G_3.
$$

Теперь все следует из предложения 8.4. □

Замечание 9.3. Сравнивая коэффициенты при более высоких степенях z, мы получим соотношения между рядами Эйзенштейна; можно показать, что любой G_k представляется в виде многочлена от G_2 и G_3.

Уравнение (9.1) называется *уравнением эллиптической кривой в нормальной форме Вейерштрасса.*

И функция $\wp$, и коэффициенты в уравнении (9.1) зависят только от решетки L; далее, однако, нам предстоит иметь дело с числами e_1, e_2 и e_3 по отдельности, которые зависят не только от самой решетки, но и от выбора базиса в ней. Чтобы учесть эту зависимость, нам придется ввести небольшой дополнительный формализм. Именно, заметим, что группа точек второго порядка на кривой $\mathbb{C}/L$ изоморфна $\left(\frac{1}{2}L\right)/L$; дадим в связи с этим следующее (необщепринятое)

Определение 9.4. *Оснащенной решеткой* называется пара из решетки $L\subset\mathbb{C}$ и нумерации на множестве ненулевых элементов в $\left(\frac{1}{2}L\right)/L$. *Оснащенной эллиптической кривой* называется пара из эллиптической кривой и нумерации на множестве ее ненулевых точек второго порядка. *Изоморфизмом оснащенных эллиптических кривых* называется изоморфизм, переводящий 0 в 0 и сохраняющий нумерацию точек второго порядка.

Множество оснащенных решеток будем обозначать $\widetilde{\mathfrak{L}}$. Ввиду предложения 9.1 множество классов изоморфизма оснащенных эллиптических кривых естественно отождествляется с пространством орбит $\widetilde{\mathfrak{L}}/\mathbb{C}^*$. Ясно, что e_1, e_2 и e_3 являются функциями из $\widetilde{\mathfrak{L}}$ в $\mathbb{C}$ и что при $\widetilde{L} \in \widetilde{\mathfrak{L}}$ и $\lambda \in \mathbb{C}^*$ имеем $e_j(\lambda\widetilde{L}) = \lambda^{-2}e_j(\widetilde{L})$.

Определение 9.5. Функция $k^2 \colon \widetilde{\mathfrak{L}} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ определяется по формуле $k^2(\widetilde{L}) = (e_2 - e_3)/(e_1 - e_3)$.

(Вспомните, что числа e_1, e_2 и e_3 всегда различны!)

Из сделанного выше замечания следует, что $k^2(\lambda\widetilde{L}) = k^2(\widetilde{L})$ при $\lambda \in \mathbb{C}^*$ и $\widetilde{L} \in \widetilde{\mathfrak{L}}$. Стало быть, k^2 зависит только от оснащенной эллиптической кривой. На самом деле значение k^2 оснащенную эллиптическую кривую полностью определяет:

Предложение 9.6. *Эллиптические кривые $E = C/L$ и $E' = \mathbb{C}/L'$ изоморфны тогда и только тогда, когда на них можно занумеровать точки второго порядка таким образом, что соответствующие значения k^2 будут совпадать.*

Доказательство. Часть «только тогда» очевидна ввиду сказанного выше. Пусть, стало быть, E и E' — оснащенные эллиптические кривые с совпадающим k^2. Тогда, принимая во внимание предложение 8.5, получаем, что E и E' изоморфны римановым поверхностям алгебраических функций с уравнениями $w^2 = 4(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3)$ и $w^2 = 4(z - p_1')(z - p_2')(z - p_3')$ соответственно, причем существуют такие числа $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, что $p_i' = ap_i + b$. Отображение $z \mapsto az + b$, $w \mapsto \sqrt{a^3} \cdot w$ переводит первое уравнение во второе и индуцирует, очевидно, изоморфизм соответствующих римановых поверхностей, что и требовалось. $\square$

Как мы знаем из предыдущей лекции, эллиптическую кривую можно задать не только как $\mathbb{C}/L$, но и как риманову поверхность алгебраической функции вида $w^2 = P(z)$, где P — кубический многочлен без кратных корней. Выясним, как k^2 выражается через корни этого многочлена. Для этого нужна небольшая подготовка.

Предложение 9.7. *Пусть $E = \mathbb{C}/L$ — эллиптическая кривая и f — мероморфная функция на E, имеющая двойной полюс в точке 0 и не имеющая других полюсов. Тогда имеем $f = \alpha\wp + \beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $\alpha \neq 0$.*

Доказательство. Подберем такое $\alpha \in \mathbb{C}^*$, что коэффициенты при z^{-2} в ряде Лорана в нуле у функций $\alpha\wp$ и f (рассматриваемых как эллиптические функции) совпадают. Тогда функция $g = \alpha\wp - f$ либо голоморфна на E, и тогда она является константой и доказательство закончено, либо имеет на E единственный простой полюс. Этот последний случай, однако, невозможен: если рассмотреть g как голоморфное отображение из E в $\overline{\mathbb{C}}$, то оно будет неразветвленным отображением степени 1 и тем самым изоморфизмом, при том что E и $\overline{\mathbb{C}}$ даже не гомеоморфны. $\square$

Следствие 9.8. *Пусть E и f — такие же, как в предложении 9.7. Тогда голоморфное отображение $f\colon E \to \overline{\mathbb{C}}$ разветвлено в точках второго порядка и только в них.* $\square$

Предложение 9.9. *Пусть X — эллиптическая кривая, заданная как риманова поверхность алгебраической функции с уравнением $w^2 = P(z)$, где P — кубический многочлен без кратных корней, и пусть $\{a_1, a_2, a_3\}$ — множество корней многочлена P. Тогда при подходящей нумерации точек второго порядка на X имеем $k^2 = (a_2 - a_3)/(a_1 - a_3)$.*

Доказательство. Пусть $X_0 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = P(z) \neq 0\}$. Тогда, как мы знаем из лекции 6, $X_0 \subset X$; легко видеть, что функция $f\colon X_0 \to \mathbb{C}$, заданная правилом $(z, w) \mapsto z$, продолжается до мероморфной функции на X, имеющей единственный полюс (кратности 2) в точке, лежащей над ∞. Выберем изоморфизм $X \to \mathbb{C}/L$ так, чтобы эта точка перешла в нуль; тогда предложение 9.7 и следствие 9.8 показывают, что $f = \alpha\wp + \beta$, а точки $x_i = f^{-1}(a_i)$ — точки второго порядка. Теперь все вытекает из очевидного равенства

$$\frac{f(x_2) - f(x_3)}{f(x_1) - f(x_3)} = \frac{\wp(x_2) - \wp(x_3)}{\wp(x_1) - \wp(x_3)}. \quad \square$$

Следствие 9.10. *Пусть X_1 и X_2 — римановы поверхности алгебраических функций, заданных уравнениями $w^2 = P_1(z)$ и $w^2 = P_2(z)$ соответственно, где P_1 и P_2 — кубические многочлены без кратных корней. Тогда X_1 и X_2 изоморфны в том и только том случае, если корни многочленов P_1 и P_2*

можно занумеровать таким образом, что $(a_2 - a_3)/(a_1 - a_3) = $ $= (b_2 - b_3)/(b_1 - b_3)$, *где* $\{a_j\}$ — *корни* P_1 *и* $\{b_j\}$ — *корни* P_2. $\square$

Следствие 9.11. *Отображение* $k^2 \colon \widetilde{\mathfrak{L}} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ *сюръективно.*

Доказательство. Рассмотрите уравнение $w^2 = z(z-1)(z-a)$ для $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. $\square$

Теперь давайте освободим критерий, доставляемый следствием 9.10, от оговорки «с точностью до нумерации». Это уже делается элементарными рассуждениями.

Предложение-определение 9.12. *Число*

$$j(L) = 256\,\frac{((k^2)^2 - k^2 + 1)^3}{(k^2)^2(k^2 - 1)^2} \tag{9.5}$$

называется j-инвариантом *эллиптической кривой* $E = \mathbb{C}/L$. *Это число обладает следующими свойствами:*

(1) $j(L)$ *не зависит от нумерации точек второго порядка.*

(2) *Эллиптические кривые* $E = \mathbb{C}/L$ *и* $E' = \mathbb{C}/L'$ *изоморфны тогда и только тогда, когда* $j(L) = j(L')$.

(3) *Отображение* $j \colon \mathfrak{L} \to \mathbb{C}$ *сюръективно.*

Замечание 9.13. Коэффициент 256 вводится для того, чтобы избавиться от коэффициентов в некоторых других формулах.

Доказательство. При перестановке номеров 1 и 2 происходит замена $k^2 \mapsto 1/k^2$, а при перестановке 2 и 3 будет $k^2 \mapsto 1 - k^2$. Легко видеть, что при таких заменах правая часть (9.5) не меняется, а так как (12) и (23) порождают всю группу S_3, утверждение (1) доказано. Далее, при остальных перестановках происходят, как легко видеть, замены $k^2 \mapsto 1/(1 - k^2)$, $k^2 \mapsto k^2/(k^2 - 1)$ и $k^2 \mapsto (k^2 - 1)/k^2$; следовательно, данной элиптической кривой соответствует не более шести возможных значений k^2, причем легко убедиться, что при $k^2 \notin \left\{\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 2, -1\right\}$ (или, что эквивалентно, при $j \notin \{0, 1728\}$) все эти шесть значений k^2 действительно различны. С другой стороны, ясно, что при данном $j \in \mathbb{C}$ существует не более шести значений k^2, удовлетворяющих условию (9.5), так что при $j \notin \{0, 1728\}$ утверждение (2) уже доказано, а при двух указанных значениях j прямым перебором проверяется, что число решений уравнения (9.5) относительно k^2 также равно числу возможных значений k^2, получаемых при перестановках точек, так что (2) доказано и в этом случае. Остается доказать (3), но это следует из предложения 9.11 и того очевидного факта, что уравнение (9.5) (относительно k^2) при любом $j \in \mathbb{C}$ имеет решение, отличное от нуля или единицы. $\square$

Напоследок опишем пространства $\widetilde{\mathfrak{L}}/\mathbb{C}^*$ и $\mathfrak{L}/\mathbb{C}^*$ более конкретно. Для начала обозначим через H верхнюю полуплоскость, через Γ — группу $SL_2(\mathbb{Z})$, и через $\Gamma(2)$ — подгруппу в Γ, состоящую из матриц, сравнимых по модулю 2 с единичной матрицей. Группа Γ действует на H по правилу $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) : z \mapsto (az+b)/(cz+d)$. Если $g \in \Gamma$ и $z \in H$, то результат этого действия g на z будем обозначать gz.

Предложение 9.14. *Фактормножества $\mathfrak{L}/\mathbb{C}^*$ и $\widetilde{\mathfrak{L}}/\mathbb{C}^*$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с фактормножествами H/Γ и $H/\Gamma(2)$ соответственно.*

Доказательство. Выбирая в решетке L базис $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ таким образом, чтобы $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$, и умножая ее на ω_1^{-1}, получаем, что всякая решетка эквивалентна решетке с базисом $\langle 1, \tau \rangle$, где $\tau \in H$; два базиса $\langle 1, \tau \rangle$ и $\langle 1, \tau' \rangle$ определяют один и тот же элемент в $\mathfrak{L}/\mathbb{C}^*$ тогда и только тогда, когда существуют такие $\lambda \in \mathbb{C}^*$ и $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$, что

$$\begin{pmatrix} \tau' \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix},$$

или, что эквивалентно, $\tau' = g\tau$, чем доказано первое утверждение. Заметим теперь, что выбрать нумерацию ненулевых элементов группы $\left(\frac{1}{2}L\right)/L$ — то же самое, что выбрать базис в $\left(\frac{1}{2}L\right)/L$, рассматриваемом как двумерное векторное пространство над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; преобразование $g \in \Gamma$ сохраняет эту нумерацию тогда и только тогда, когда матрица $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ индуцирует тождественное отображение на этом пространстве, а это как раз и означает, что $g \in \Gamma(2)$, что доказывает второе утверждение. $\square$

В свете доказанного предложения можно рассматривать k^2 и j как функции на H; расписывая определения, немедленно получаем, что эти функции голоморфны.

Следствие 9.15. *Отображение* $k^2\colon H \to \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ *сюръективно, и* $k^2(z_1) = k^2(z_2)$ *тогда и только тогда, когда* $z_1 = gz_2$ *для некоторого* $g \in \Gamma(2)$.

Отображение $j\colon H \to \mathbb{C}$ *сюръективно, и* $j(z_1) = j(z_2)$ *тогда и только тогда, когда* $z_1 = gz_2$ *для некоторого* $g \in \Gamma$.

Об эллиптических кривых можно сказать еще очень многое, но мы на этом остановимся.

Приложение: k^2 как универсальное накрытие

В этом приложении мы докажем следующий факт:

Предложение 9.16. *Отображение* $k^2\colon H \to \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ *является накрытием.*

Следствие 9.17. *Универсальное накрытие комплексной плоскости с двумя выколотыми точками изоморфно верхней полуплоскости и единичному кругу.*

Доказательство следствия. Комплексная плоскость с двумя выколотыми точками изоморфна $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, а верхняя полуплоскость односвязна. □

Основная часть доказательства предложения будет состоять в анализе действия $\Gamma(2)$ на верхней полуплоскости; функция k^2 вступит в игру только под конец.

Начнем с простых замечаний. Ясно, что из всех элементов группы $SL_2(\mathbb{R})$ только I и $-I$, где I обозначает единичную матрицу, индуцируют тождественный автоморфизм верхней полуплоскости. Если теперь отфакторизовать $SL_2(\mathbb{R})$ по подгруппе, состоящей из I и $-I$, то получится группа (обозначаемая $PSL_2(\mathbb{R})$), которая действует на H, как говорят, «эффективно»: всякий неединичный элемент индуцирует нетождественное преобразование. Поскольку $\{I,-I\} \subset \Gamma(2)$, можно и $\Gamma(2)$ отфакторизовать по группе $\{I,-I\}$; получится группа $\Gamma(2)/\{I,-I\}$

(никакого специального обозначения для нее мы вводить не будем), являющаяся дискретной подгруппой в $PSL_2(\mathbb{R})$.

Теперь введем следующее общее определение:

Определение 9.18. Пусть Γ — абстрактная группа, действующая гомеоморфизмами на топологическом пространстве X. Тогда говорят, что это действие *свободно,* если стабилизатор всякой точки $x \in X$ состоит только из единичного элемента; если действие группы Γ на X свободно, то говорят, что это действие *разрывно,* если у всякой точки $x \in X$ существует такая окрестность $V \ni x$, что для всех элементов $\gamma \in \Gamma$, отличных от единичного, имеем $\gamma(V) \cap V = \varnothing$.

(Что такое разрывное действие, не являющееся свободным, мы определять не будем.)

Наша ближайшая цель — показать, что описанное выше действие группы $\Gamma(2)/\{I, -I\}$ на верхней полуплоскости разрывно и свободно; если это будет сделано, мы сможем завершить доказательство с помощью простых и чисто формальных рассуждений.

Сначала установим, что действие свободно; это, очевидно, эквивалентно следующему предложению:

Лемма 9.19. *Если $g \in \Gamma(2)$ — элемент, отличный от $\pm I$, то $gz \neq z$ для всех $z \in H$.*

Доказательство. Пусть $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$; тогда $gz = z$ в том и только том случае, когда z является корнем уравнения

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Если c отлично от нуля, то это квадратное уравнение имеет корень в H тогда и только тогда, когда его дискриминант отрицателен. Поскольку $ad - bc = 1$, этот дискриминант равен $D = (a - d)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4$, а поскольку a и d нечетны, неравенство $D < 0$ возможно только при $d = -a$; записывая условие, что определитель нашей матрицы равен единице, получаем, что $-a^2 - bc = 1$; так как числа b и c четны, отсюда следует, что $a^2 \equiv -1 \pmod 4$, а это невозможно.

Если же $c = 0$, то наше уравнение может иметь мнимые корни только тогда, когда $b = 0$ и $a = d$, т. е. когда $g = \pm I$. $\square$

Для доказательства разрывности нам придется совершить небольшой экскурс в теорию топологических групп. Напомним, что топологическая группа — это группа G, являющаяся топологическим пространствам и обладающая тем свойством, что отображения $G \times G \to G$ и $G \to G$, задающие умножение и взятие обратного элемента, являются непрерывными; в частности, $SL_2(\mathbb{R})$ и $PSL_2(\mathbb{R})$ (с естественной топологией) являются топологическими группами. Когда говорят, что топологическая группа G действует на топологическом пространстве X, то всегда подразумевают, что отображение $G \times X \to X$, задающее действие, является непрерывным.

Определение 9.20. Говорят, что действие топологической группы G на топологическом пространстве X является *собственным*, если отображение $\varphi\colon G \times X \to X \times X$, действующее по формуле $(g, x) \mapsto (gx, x)$, обладает тем свойством, что для всякого компактного подмножества $K \subset X \times X$ множество $\varphi^{-1}(K) \subset G \times X$ также является компактным.

Теперь сформулируем следующее общее утверждение о действиях топологических групп:

Предложение 9.21. *Пусть топологическая группа G действует на локально компактном метризуемом*[3] *пространстве X. Предположим, что это действие собственно. Если теперь $\Gamma \subset G$ — такая замкнутая дискретная подгруппа в G, что естественное действие Γ на X свободно, то это действие группы Γ будет и разрывно.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что действие группы Γ разрывным не является. Тогда существуют точка $x \in X$, последовательность точек $\{x_n \in X\}$ и последовательность $\{\gamma_n\}$, состоящая из неединичных элементов группы Γ, обладающие тем свойством, что $\lim x_n = x$ и $\lim \gamma_n x_n = x$. Так как X локально компактно, можно, не ограничивая общности, считать, что все x_n и $\gamma_n x_n$ лежат в некотором компактном множестве $K \ni x$. Следовательно, для всех n имеем

[3] На самом деле метризуемости можно не требовать.

$(\gamma_n, x_n) \in \varphi^{-1}(K \times K)$, где $\varphi\colon G \times X \to X \times X$ — отображение, о котором идет речь в определении 9.20. Поскольку действие G на X собственно, множество $\varphi^{-1}(K \times K)$ компактно, и тем самым у последовательности $\{(\gamma_n, x_n)\}$ имеется сходящаяся подпоследовательность. Изменив обозначения, будем считать, что сходится сама последовательность $\{(\gamma_n, x_n)\}$. Поскольку подгруппа $\Gamma \subset G$ замкнута и дискретна, из этого следует, что для всех достаточно больших n имеем $\gamma_n = \gamma$, где $\gamma \in \Gamma$ — некоторый фиксированнный неединичный элемент. Стало быть, $\lim \gamma x_n = x$, но так как $\lim x_n = x$, отсюда вытекает, что $\gamma x = x$, а это противоречит тому, что действие группы Γ свободно. $\square$

Вооружившись предложением 9.21, продолжим:

Предложение 9.22. *Действие* $\Gamma(2)/\{\pm I\}$ *на верхней полуплоскости является разрывным.*

Доказательство. Ввиду предложений 9.19 и 9.21 нам достаточно показать, что действие $PSL_2(\mathbb{R})$ на верхней полуплоскости является собственным.

Для начала заметим, что действие $PSL_2(\mathbb{R})$ на верхней полуплоскости изоморфно в очевидном смысле действию группы конформных автоморфизмов диска $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, так что достаточно доказать собственность действия этой последней. Как мы помним, автоморфизмы Δ имеют вид

$$g_{\theta,a}\colon z \mapsto e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

где $\theta \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$. Группу таких дробно-линейных преобразований обозначим через G. Ясно, что достаточно проверить, что компактны все множества вида $\varphi^{-1}(K_1 \times K_2) \subset \subset G \times \Delta$, где $K_1, K_2 \subset \Delta$ — компактные подмножества и $\varphi\colon G \times \Delta \to \Delta \times \Delta$ — отображение из определения 9.20. Поскольку $\varphi^{-1}(K_1 \times K_2)$, очевидно, замкнуто в $G \times \Delta$, нам достаточно показать, что существует такое число $\varepsilon > 0$, что $|a| \leqslant 1 - \varepsilon$, как только $(g_{\theta,a}, w) \in \varphi^{-1}(K_1 \times K_2)$. Предположим противное; тогда существуют такие последовательности $\{a_n\}$, $\{\theta_n\}$, $\{z_n\}$, что $z_n \in K_2$, $g_{\theta_n,a_n}(z_n) \in K_1$, и при этом $\lim a_n = a$, где $|a| = 1$. Поскольку K_2 компактно, мы можем (выбрав подходящую подпоследовательность) считать, что $\lim z_n = z \in K_2$. Теперь заметим, что

$$\lim |g_{\theta_n, a_n}(z_n)| = \lim \left|\frac{z_n - a_n}{1 - \overline{a_n} z}\right| = \left|\frac{z - a}{1 - \bar{a} z}\right| = \left|\frac{z - a}{1 - z/a}\right| = |-a| = 1$$

(так как $|a| = 1$, имеем $\bar{a} = 1/a$). Однако же $g_{\theta_n, a_n}(z_n) \in K_1$ и тем самым числа $|g_{\theta_n, a_n}(z_n)|$ отграничены от единицы — противоречие. □

Теперь мы можем наконец завершить доказательство предложения 9.16. Из того, что $\Gamma(2)/\{\pm I\}$ разрывно и свободно действует на H, с помощью стандартных и хорошо известных рассуждений выводится, что естественное отображение $H \to H/(\Gamma(2)/\{\pm I\})$ является накрытием, а также что на $H/(\Gamma(2)/\{\pm I\})$ (или, что то же самое, $H/\Gamma(2)$) можно ввести структуру римановой поверхности, относительно которой это отображение будет голоморфно (подобно тому, как мы в лекции 5 ввели структуру римановой поверхности на эллиптической кривой). При этом отображение k^2 индуцирует, ввиду следствия 9.15, голоморфное и взаимно однозначное отображение $\widetilde{k^2}\colon H/\Gamma(2) \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$; значит, это отображение неразветвлено и тем самым является изоморфизмом, что и утверждалось.

Лекция 10. Теорема Римана об отображении

Вся эта лекция будет посвящена доказательству следующей теоремы, называемой теоремой Римана об отображении:

Теорема 10.1. *Всякое односвязное открытое множество $U \subset \mathbb{C}$, отличное от самого $\mathbb{C}$, изоморфно диску $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.*

Для удобства введем следующее классическое

Определение 10.2. Голоморфная функция $f\colon W \to \mathbb{C}$ на открытом множестве $W \subset \mathbb{C}$ называется *однолистной*, если отображение f взаимно однозначно.

Ясно, что однолистное отображение неразветвлено и, следовательно, является изоморфизмом на свой образ.

Начнем со следующей редукции.

Лемма 10.3. *В условиях теоремы U изоморфно открытому подмножеству в Δ.*

Первое доказательство. Из того, что $U \neq \mathbb{C}$ и U односвязно, следует, что разность $\mathbb{C} \setminus U$ содержит не менее двух точек, т. е. $U \subset \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, где $a \neq b$. Ввиду следствия 9.17 универсальное накрытие над $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ изоморфно Δ. Если $\pi \colon \Delta \to \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ — универсальное накрытие, то ввиду односвязности U любая из компонент множества $\pi^{-1}(U) \subset \Delta$ изоморфна U. $\square$

Второе доказательство. Так как $U \neq \mathbb{C}$, можно, не ограничивая общности, считать, что $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Отображение $f \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, заданное формулой $z \mapsto z^2$, является двулистным накрытием; так как $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ односвязно, множество $f^{-1}(U)$ состоит из двух (непересекающихся) компонент U_1 и U_2, изоморфных U. Пусть $c \in U_2$; тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ диск с радиусом ε и центром c содержится в U_2 и, следовательно, не пересекается с U_1. Следовательно, функция $g(w) = \varepsilon/(w - c)$ задает изоморфизм U_1 на открытое подмножество в Δ (так как $|g(w)| < 1$ для всех $w \in U_1$), и это подмножество изоморфно U. $\square$

Ввиду доказанной леммы можно считать, что $U \subset \Delta$, что мы и будем далее предполагать. Зафиксируем до конца доказательства некоторую точку $a \in U$.

Сделаем следующее

Допущение. *Во множестве голоморфных однолистных отображений из U в Δ существует отображение f, для которого число $|f'(a)|$ наибольшее.*

Покажем, что отображение $f \colon U \to \Delta$, в существование которого мы поверили, является искомым изоморфизмом.

Предложение 10.4. *Пусть $\varphi \colon \Delta \to \Delta$ — автоморфизм, переводящий $b \in \Delta$ в 0. Тогда $|\varphi'(b)| = 1/(1 - |b|^2)$.*

Доказательство. Ввиду предложения 4.15 имеем

$$\varphi(z) = e^{i\theta}\frac{z-b}{1-\bar{b}z},$$

где $\theta \in \mathbb{R}$. Теперь запишем:

$$\varphi'(z) = e^{i\theta}\frac{1-\bar{b}z+\bar{b}(z-b)}{(1-\bar{b}z)^2} = e^{i\theta}\frac{1-|b|^2}{(1-\bar{b}z)^2}.$$

Остается подставить $z=b$ и взять модуль. $\square$

Лемма 10.5. *Если $f\colon U \to \Delta$ — однолистное отображение, для которого число $|f'(a)|$ наибольшее, то $f(a)=0$.*

Доказательство. Рассуждая от противного, пусть $f(a) = b \neq \neq 0$. Если $\varphi\colon \Delta \to \Delta$ — автоморфизм, переводящий b в 0, то для отображения $g = \varphi \circ f$ имеем, ввиду предложения 10.4,

$$|g'(a)| = |f'(a)|/(1-|b|^2) > |f'(a)|,$$

и получаем противоречие. $\square$

Лемма 10.6. *В прежних обозначениях отображение f является изоморфизмом U на Δ.*

Доказательство. Так как f однолистно, нам надо только доказать, что $f(U)=\Delta$. Рассуждая от противного, предположим, что $b \in \Delta \setminus f(U)$. Пусть автоморфизм $\varphi\colon \Delta \to \Delta$ задан формулой $z \mapsto (z-b)/(1-\bar{b}z)$; тогда $\varphi(b) = 0 = \varphi^{-1}(-b)$. Положим $f_1 = = \varphi \circ f$; так как ввиду леммы 10.5 имеем $f(a)=0$, то $f_1(a) = -b$, а поскольку $b \notin f(U)$, то $0 \notin f_1(U)$. Так как U односвязно, таково же и изоморфное ему множество $f_1(U)$; поскольку это множество к тому же, как мы только что убедились, не содержит нуля, на нем определена однозначная (и, разумеется, однолистная!) ветвь квадратного корня $g\colon f_1(U) \to \mathbb{C}$; очевидно, $g(f_1(U)) \subset \Delta$. Положим $f_2 = g \circ f_1$. Наконец, сделаем так, чтобы a снова переходило в нуль; для этого положим $f_3 = \varphi^{-1} \circ f_2 = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi \circ f$. Функция $f_3\colon U \to \Delta$ однолистна; подсчитаем$|f_3'(a)|$:

$$|f_3'(a)| = |f'(a)| \cdot |\varphi'(0)| \cdot |g'(-b)| \cdot |\varphi'(g(b))|^{-1} =$$

$$= |f'(a)|\frac{1-|b|^2}{2\sqrt{|b|}(1-(\sqrt{|b|})^2)} = |f'(a)|\frac{1+|b|}{2\sqrt{|b|}}$$

(при подсчете $|\varphi'(0)|$ мы воспользовались предложением 10.4, а при подсчете $|g'(-b)|$ — тем, что $(\sqrt{z})' = \pm 1/2\sqrt{z}$). Поскольку $(1+|b|)/2\sqrt{|b|} > 1$, получаем, что $|f_3'(a)| > |f'(a)|$ — противоречие. $\square$

Итак, нам осталось обосновать допущение. Нам понадобится важный факт, называемый принципом аргумента.

Предложение 10.7. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — связная область с (кусочно)-гладкой границей и f — непостоянная функция, голоморфная в окрестности D и не имеющая нулей на ∂D. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \sum_{z \in \operatorname{int} D} \operatorname{ord}_z(f), \tag{10.1}$$

где через $\operatorname{ord}_z(f)$ обозначается кратность f в точке z (кратность нуля, если $f(z)=0$, и нуль, если $f(z)\neq 0$).

Доказательство. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — нули функции f в $\operatorname{int} D$. Поместим каждый z_i в замкнутый диск D_i, содержащийся в $\operatorname{int} D$ и не пересекающийся с остальными D_j. Из теоремы Коши следует, что левая часть (10.1) равна $(1/2\pi i)\sum_{j=1}^{n}\int_{\partial D_j} df/f$. В окрестности z_j функция f записывается в виде $f(z) = (z-a_j)^{m_j} g(z)$, где g голоморфна, $g(a_j) \neq 0$ и $m_j = \operatorname{ord}_{a_j}(f)$. Имеем, очевидно,

$$\frac{df}{f} = \frac{m_j\,dz}{z-a_j} + \frac{g'(z)\,dz}{g(z)}.$$

Интеграл от первого слагаемого по ∂D_j равен, очевидно, $2\pi i m_j$ (см. доказательство предложения 3.7), а от второго — нулю по теореме Коши (так как функция g'/g голоморфна в окрестности D_j). Все доказано. $\square$

Замечание 10.8. Утверждение предложения 10.7 можно различными способами усиливать. Можно, например, предполагать, что f не голоморфна, а всего лишь мероморфна в окрестности D, не имеет на ∂D ни нулей, ни полюсов, и считать, что $\operatorname{ord}_z(f) = -m$, если f имеет в точке z полюс порядка m: формула (10.1) останется верной. Далее, если h — другая функция, голоморфная в окрестности D, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} h(z)\cdot\frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \sum_{z\in\operatorname{int} D}\operatorname{ord}_z(f)\cdot h(z).$$

Доказываются эти обобщения так же, как предложение 10.7.

Для доказательства теоремы Римана нам будет нужен принцип аргумента именно в таком виде, как мы его сформулировали в предложении 10.7, но было бы нехорошо умолчать о его геометрическом смысле. Поэтому, немного отвлекаясь от основной линии изложения, докажем следующее

Предложение 10.9. *Пусть D и f — такие же, как в предложении 10.7, и пусть $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — единичная окружность. Определим отображение $\tilde{f}\colon \partial D \to S^1$ по формуле $\tilde{f}(z) = f(z)/|f(z)|$. Тогда левая часть* (10.1) *равна* $\deg\tilde{f}$ (*точнее говоря, сумме степеней ограничений $\tilde{f}$ на компоненты ∂D*). *Подразумевается, что каждая компонента ∂D снабжена индуцированной ориентацией как граница естественно ориентированной области D и что S^1 ориентирована как граница единичного круга.*

(Выражаясь менее формально, левая часть (10.1) — это число оборотов, которое кривая $f(\partial D)$ делает вокруг нуля.)

Доказательство. Заметим, что

$$f'(z)\,dz/f(z) = df/f = d(\ln|f|) + i\tilde{f}^*(d\varphi),$$

где $d\varphi$ — 1-форма на окружности «дифференциал от угла». Интеграл по ∂D от второго слагаемого равен, очевидно $2\pi i \times$ $\times$ (число оборотов); осталось показать, что интеграл от первого слагаемого равен нулю. Хочется сказать, что он равен нулю по теореме Стокса, так как форма $d(\ln|f|)$ замкнута (и даже точна), но буквально теорему Стокса применить все же нельзя, так как функция $z \mapsto \ln|f(z)|$ не является даже непрерывной в $\operatorname{int} D$. Мы обойдем эту трудность следующим образом. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — нули функции f в D. Как и в доказательстве предложения 10.7, окружим нули z_j функции f непересекающимися кружками D_j; на $D \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ форма $d\ln|f|$ уже является самой настоящей точной формой, так что по теореме Стокса имеем

$$\int_{\partial D} d\ln|f| = \sum_j \int_{\partial D_j} d\ln|f|,$$

причем слагаемые в правой части не зависят от радиусов кругов D_j. Покажем, что каждое из этих слагаемых равно нулю. В самом деле, коль скоро $f(z_j)=0$, имеем $|\ln f(z)|=O(|\ln|z-z_j||)$ при $z \to z_j$; следовательно, если обозначить через ε_j радиус круга D_j, то получим (см. предложение 1.5), что

$$\left|\int_{\partial D_j} d\ln|f|\right| = O(|\varepsilon_j \ln \varepsilon_j|) \quad \text{при } \varepsilon_j \to 0.$$

Поскольку $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$, все доказано. □

Вернемся к прерванному доказательству теоремы Римана. Мы применим принцип аргумента следующим образом.

Предложение 10.10. *Пусть* $\{f_n\}$ *— последовательность функций, голоморфных на связном открытом множестве* $U \subset \mathbb{C}$, *сходящаяся равномерно на компактах в* U *к непостоянной функции* $f\colon U \to \mathbb{C}$. *Тогда если все функции* f_n *однолистны, то и* f *однолистна.*

Доказательство. Предположим противное: $f(z_1) = f(z_2) = a$. Тогда легко видеть, что существует такая область с кусочно-гладкой границей $D \subset U$, что $z_1, z_2 \in \operatorname{int} D$ и функция f не принимает значения a на ∂D (легко построить такую D, граница которой является ломаной, а при желании можно эту границу и сгладить). Положим $g_i(z) = f_i(z) - a$, $g(z) = f(z) - a$. Из условия и предложения 2.8 ясно, что последовательность g_n'/g_n сходится к g'/g равномерно на ∂D; следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{g_n'(z)\,dz}{g_n(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{g'(z)\,dz}{g(z)}.$$

Так как $g(z_1) = g(z_2) = 0$, предложение 10.7 показывает, что правая часть этого равенства не меньше двух; так как все f_j однолистны, то же предложение показывает, что в левой части все члены последовательности не превосходят единицы — противоречие! $\square$

Теперь все готово для того, чтобы обосновать существование максимума $|f'(a)|$. Введем следующие определения.

Определение 10.11. Обозначим через $H(U)$ множество голоморфных функций на U. Подмножество $F \subset H(U)$ будем называть *замкнутым*, если для всякой последовательности функций $f_n \in F$, равномерно сходящейся на компактах в U к функции $f \in H(U)$, имеем $f \in F$.

Подмножество $C \subset H(U)$ называется *компактным*, если у всякой последовательности функций $f_n \in C$ существует подпоследовательность, равномерно сходящаяся на компактах в U к функции $f \in C$.

Отображение $\Phi\colon C \to \mathbb{C}$, где $C \subset H(U)$, называется *непрерывным*, если для всякой последовательности функций $f_n \in C$, равномерно сходящейся на компактах в U к функции $f \in C$, имеем $\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) = \Phi(f)$.

Замечание 10.12. Использование топологической терминологии в определении 10.11 — не произвол: на $H(U)$ действительно можно ввести метризуемую топологию (она называется «топологией компактной сходимости» или «компактно-открытой топологией»), относительно которой последовательность функций f_n сходится тогда и только тогда, когда она равномерно сходится на компактах в U. Эту топологию можно определить, например, как наименее тонкую топологию, в которой открыты все множества вида $\mathcal{F}(K, V)$, где $K \subset U$ — произвольное компактное подмножество, $V \subset \mathbb{C}$ — произвольное открытое подмножество, и $\mathcal{F}(K, V)$ — множество таких функций $f \in H(U)$, что $f(K) \subset V$. В нашем курсе мы не будем углубляться в эту конструкцию, но проведем все необходимые рассуждения ad hoc.

Доказательства следующих двух предложений стандартны.

Предложение 10.13. *Замкнутое подмножество в компактном множестве является компактным.* $\square$

Предложение 10.14. *Пусть $C \subset H(U)$ — компактное подмножество и $\Phi\colon C \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение. Тогда отображение Φ достигает наибольшего значения для некоторой функции $f \in C$.* $\square$

Пусть теперь $U \subset \Delta$ — открытое множество, $a \in U$ и $C \subset H(U)$ — множество таких однолистных голоморфных отображений из U в Δ, что $|f'(a)| \geqslant 1$. Так как $U \subset \Delta$, это множество непусто, а из предложения 10.10 следует, что $C \subset H(U)$ замкнуто; из предложения 2.8 следует, что отображение $\Phi\colon C \to \mathbb{R}$, заданное формулой $\Phi(f) = |f'(a)|$, непрерывно. Стало быть, ввиду предложения 10.14, для того, чтобы обосновать наше допущение, достаточно показать, что множество $C \subset H(U)$ компактно. Ввиду предложения 10.13 это вытекает из следующей теоремы:

Теорема 10.15 (теорема Монтеля). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $M > 0$. Тогда множество*

$$\{f \in H(U) : \sup_{z\in U} |f(z)| \leqslant M\}$$

компактно в $H(U)$.

Доказательство. Мы воспользуемся следующим результатом из оснований анализа.

Предложение 10.16 (теорема Арцела́). *Пусть X — компактное метрическое пространство с метрикой ρ, а $C(X)$ — пространство непрерывных функций на X с* sup*-нормой. Для того чтобы замкнутое подмножество $C \subset C(X)$ было компактно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

(1) *Существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $f \in C$ и $x \in X$ («равномерная ограниченность»).*

(2) *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $\rho(x, x') < \delta$, где $x, x' \in X$, следует неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ для всех $f \in C$ («равностепенная непрерывность»).* $\square$

Доказательство этой теоремы мы опускаем; его можно найти в любом достаточно подробном курсе анализа (из книг, вышедших недавно, можно, например, указать «Математический анализ» В. А. Зорича, том II, гл. XVI, § 4).

Теперь перейдем к доказательству теоремы Монтеля. Легко видеть, что можно выбрать последовательность компактных подмножеств $K_i \subset U$, обладающую тем свойством, что $K_i \subset \operatorname{int} K_{i+1}$ для всех i и $\bigcup_i K_i = U$. Пусть $C_i \subset C(K_i)$ — множество ограничений функций из C на K_i. Покажем, что всякое C_i компактно в $C(K_i)$. Ввиду условия и теоремы Арцела достаточно проверить равностепенную непрерывность. Далее, поскольку K_i можно покрыть конечным числом замкнутых дисков произвольно малого радиуса, содержащихся в U, достаточно установить равностепенную непрерывность на каждом таком диске $D \subset U$. Пусть γ — окружность, концентрическая с D, имеющая бо́льший радиус и содержащаяся в U. Тогда для $z \in D$ имеем, по теореме Коши,

$$\left|f'(z)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^2}\right| \leqslant \frac{MR}{(R-r)^2},$$

где r и R — радиусы D и γ соответственно. Значит, модули производных функций из C равномерно ограничены в D некоторой константой M_1. Если теперь $z_1, z_2 \in D$ и $f \in C$, то $|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant M_1|z_1 - z_2|$, откуда равностепенная непрерывность очевидна.

Пусть теперь $\{f_n\}$ — последовательность функций из C. Ввиду доказанного из нее можно выбрать равномерно сходящуюся на K_1 подпоследовательность $f_{11}, f_{12}, \ldots$; из этой последовательности можно выбрать равномерно сходящуюся на K_2 подпоследовательность $f_{21}, f_{22}, \ldots$ и т. д.: каждая последовательность $\{f_{m+1,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ равномерно сходится на K_{m+1} и является подпоследовательностью в $\{f_{mj}\}_{j\in\mathbb{N}}$. Тогда диагональная последовательность $f_{11}, f_{22}, \ldots$ равномерно сходится на каждом K_m (поскольку начиная с f_{mm} она является подпоследовательностью в $\{f_{mj}\}_{j\in\mathbb{N}}$), а значит и на любом компакте в U. Это завершает доказательство теоремы Монтеля, а с ней — и теоремы Римана. □

Лекция 11. Гиперболическая метрика

Цель этой лекции — выявить инвариантный смысл леммы Шварца. Начнем со следующей вариации на тему теоремы Римана об отображении.

Предложение-определение 11.1. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — односвязное открытое множество, отличное от самого $\mathbb{C}$, и $z \in U$. Тогда определено положительное число*

$$F_U(z) = \frac{1}{\max |f'(0)|},$$

где f пробегает множество таких голоморфных отображений $f\colon \Delta \to U$, что $f(0) = z$ (через $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ обозначен единичный круг).

Число $F_U(z)$ называется плотностью гиперболической метрики *(области U в точке z). Плотность гиперболической метрики обладает следующими свойствами:*

(1) *Если $\varphi\colon U \to U'$ — изоморфизм (здесь и ниже U' — другая односвязная область, отличная от $\mathbb{C}$), то для всякой точки $z \in U_1$ имеем $F_{U'}(\varphi(z)) = F_U(z)/|\varphi'(z)|$.*

(2) *Если $\varphi\colon U \to U'$ — голоморфное отображение, то для всякой точки $z \in U_1$ имеем $F_{U'}(\varphi(z)) \cdot |\varphi'(z)| \leqslant F_U(z)$.*

Доказательство. Пусть $\psi\colon U \to \Delta$ — изоморфизм, переводящий точку $z \in U$ в 0 (какой-то изоморфизм существует по теореме Римана, а затем его можно скомпоновать с автоморфизмом круга Δ, переводящим образ точки z в нуль). Тогда по лемме Шварца $|(\psi \circ f)'(0)| \leqslant 1$, причем равенство достигается (при $f = \psi^{-1}$). Отсюда $|f'(0)| \leqslant 1/|\psi'(z)|$, причем равенство достигается. Стало быть, число $F_U(z)$ определено и равно $|\psi'(z)|$. Из этого последнего равенства немедленно вытекает свойство (1). Поскольку, очевидно,

$$\max_{\substack{g\colon \Delta\to U' \\ g(0)=\varphi(z)}} |g'(0)| \geqslant |\varphi'(z)| \cdot \max_{\substack{f\colon \Delta\to U \\ f(0)=z}} |f'(0)|$$

(среди отображений из Δ в U', переводящих нуль в $\varphi(z)$, заведомо содержатся все отображения вида $\varphi \circ f$, где $f\colon \Delta \to U$ и $f(0) = z$), свойство (2) также доказано. □

Вычислим функцию F_U для единичного круга Δ. Ввиду сказанного выше $F_\Delta(a)$ равно модулю производной отображения $z \mapsto (z-a)/(1-\bar{a}z)$ в точке a; легко видеть, что это число равно $1/(1-|a|^2)$; стало быть, функция $F_\Delta\colon \Delta \to \mathbb{R}$ является гладкой; ввиду утверждения 11.1 (1), то же верно и для функции $F_U\colon U \to \mathbb{R}$ для произвольной области U, изоморфной Δ.

Теперь переформулируем предложение 11.1 в более геометрических терминах. Именно, пусть область $U \subset \mathbb{C}$ — такая же, как выше; для $z \in U$ положим $z = x + iy$.

Определение 11.2. Пусть U — односвязное открытое подмножество в $\mathbb{C}$, отличное от самого $\mathbb{C}$. *Гиперболической метрикой* называется риманова метрика на множестве U, заданная формулой $ds^2 = (F_U(z))^2(dx^2 + dy^2)$.

Вместо $dx^2 + dy^2$ часто пишут просто $|dz|^2$ и, кроме того, из формулы для гиперболической метрики часто извлекают корень, записывая попросту $ds = F_U(z)\,|dz|$; в этих обозначениях длина кривой $\gamma\colon [a;b] \to U$ в гиперболической метрике равна $\int_a^b F_U(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt$.

Предложение 11.3. *Пусть $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ — односвязные открытые множества, отличные от $\mathbb{C}$. Тогда:*

(1) *Если $\varphi\colon U_1 \to U_2$ — изоморфизм, то он является изометрией (в частности, гиперболическая метрика на U инвариантна относительно автоморфизмов области U).*

(2) *Если $\varphi\colon U_1 \to U_2$ — голоморфное отображение и v — касательный вектор к U_1 в точке $z \in U_1$, то длина вектора $(D\varphi)_z(v)$ относительно гиперболической метрики на U_2 не превосходит длины вектора v относительно гиперболической метрики на U_1; если γ — кривая в области U_1, то длина кривой $\varphi(\gamma)$ относительно гиперболической метрики на U_2 не превосходит длины кривой γ относительно гиперболической метрики на U_1 (короче говоря, голоморфные отображения не увеличивают расстояний в гиперболической метрике).*

Доказательство. Утверждения (1) и (2) суть непосредственные переформулировки утверждений с теми же номерами из 11.1 (утверждение про длины кривых получается интегрированием). □

Нетрудно заметить, что гиперболическая метрика на единичном круге (или верхней полуплоскости) задает расстояние в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского. Выпишем гиперболическую метрику для единичного круга и верхней полуплоскости в явном виде (для круга мы это уже делали, для верхней полуплоскости формула получается прямым вычислением с использованием явного вида конформного отображения круга на полуплоскость):

$$\begin{aligned} &\Delta = \{z : |z| < 1\}, && H = \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\} \\ &ds = \frac{|dz|}{1 - |z|^2}, && ds = \frac{|dz|}{2\operatorname{Im}(z)}. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Отметим еще некоторые свойства гиперболической метрики. Во-первых, она «геодезически полна»; по определению это означает, что всякую геодезическую можно неограниченно продолжать. Это свойство непосредственно вытекает из простейших свойств геометрии Лобачевского (по самому определению, геодезические суть прямые в плоскости Лобачевского). Как известно («теорема Хопфа–Ринова»), геодезическая полнота риманова пространства равносильна тому, что оно является полным метрическим пространством относительно римановой метрики (впрочем, метрическая полнота плоскости Лобачевского хорошо известна и независимо от общих теорем).

Во-вторых, поскольку группа автоморфизмов действует на областях, изоморфных кругу, транзитивно, а гиперболическая метрика инвариантна относительно автоморфизмов, кривизна этой метрики постоянна. Прямое вычисление, которое мы опускаем, показывает, что она рана -4.

Замечательным фактом является то, что гиперболическую метрику можно определить не только на односвязных областях, отличных от $\mathbb{C}$, но и на многих других (в некотором смысле — на «почти всех») римановых поверхностях. Для этого определения нам понадобится следующее глубокое обобщение теоремы Римана, которое мы вынуждены оставить без доказательства:

Теорема 11.4 (теорема Кёбе об униформизации). *Всякая односвязная риманова поверхность изоморфна либо $\overline{\mathbb{C}}$, либо $\mathbb{C}$, либо Δ.* $\square$

(А эти три римановы поверхности неизоморфны, но это уже тривиально: $\mathbb{C}$ и Δ неизоморфны ввиду теоремы Лиувилля, а $\overline{\mathbb{C}}$ им обеим даже не гомеоморфна.)

Поскольку универсальная накрывающая любой римановой поверхности односвязна по определению, можно расклассифицировать римановы поверхности по их универсальным накрывающим:

Предложение 11.5. *Пусть X — связная риманова поверхность и $\widetilde{X}$ — ее универсальная накрывающая. Тогда:*

(1) *$\widetilde{X}$ изоморфна $\overline{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда X изоморфна $\overline{\mathbb{C}}$.*

(2) *$\widetilde{X}$ изоморфна $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда X изоморфна $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ или некоторой эллиптической кривой.*

(3) *Во всех остальных случаях $\widetilde{X}$ изоморфна единичному кругу.*

Доказательство. Положим $G = \pi_1(X)$. Тогда, как известно, G действует на $\widetilde{X}$ как группа гомеоморфизмов, причем легко видеть, что в нашем случае эти гомеоморфизмы будут к тому же голоморфными автоморфизмами. При этом действие G на $\widetilde{X}$ является свободным и разрывным (см. определение 9.18). Наконец, X гомеоморфно (и изоморфно) $\widetilde{X}/G$.

Посмотрим теперь, какие группы автоморфизмов могут свободно и разрывно действовать на $\overline{\mathbb{C}}$ или $\mathbb{C}$.

Всякий автоморфизм сферы Римана имеет вид $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$: в самом деле, всякое голоморфное отображение из $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ задается, как мы помним из предложения 5.7, рациональной функцией, а коль скоро это отображение — изоморфизм, то есть имеет степень 1, то и степени числителя и знаменателя не могут быть больше единицы. Стало быть, *любой* автоморфизм сферы Римана имеет неподвижную точку, так что свободно действующая группа автоморфизмов сферы Римана может состоять только из единичного элемента; тем самым доказано утверждение (1).

Всякий автоморфизм $\mathbb{C}$ имеет вид $z \mapsto az + b$ (предложение 4.17); если $a \neq 1$, то такой автоморфизм обязательно имеет неподвижную точку и тем самым лежать в группе G не может; теперь легко видеть, что всякая разрывная группа автоморфизмов вида $z \mapsto z + b$ либо тривиальна, либо состоит из автоморфизмов вида $z \mapsto z + nb$, где b фиксировано и $n \in \mathbb{Z}$, либо состоит из автоморфизмов вида $z \mapsto z + u$, где u пробегает некоторую решетку. Риманова поверхность $\mathbb{C}/G$ при этом будет изоморфна соответственно $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ будет иметь вид $z \mapsto e^{2\pi i z/b}$) или эллиптической кривой.

Стало быть, те немногие случаи, когда универсальная накрывающая изоморфна $\overline{\mathbb{C}}$ или $\mathbb{C}$, перечислены, и предложение доказано. $\square$

Замечание 11.6. Группы автоморфизмов, дискретно и свободно действующие на единичном круге, также подробно изучены.

Определение 11.7. Риманова поверхность, универсальная накрывающая которой изоморфна единичному кругу (или, эквивалентно, любая риманова поверхность, кроме $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и эллиптических кривых) называется *гиперболической.*

Отметим, в частности, что гиперболической будет любая компактная риманова поверхность, род которой больше единицы.

Итак, все римановы поверхности, кроме небольшого списка, гиперболичны. Покажем, что на всех гиперболических римановых поверхностях определена гиперболическая метрика.

Предложение-определение 11.8. *На всякой гиперболической римановой поверхности существует канонически определенная риманова метрика, называемая* гиперболической метрикой *и обладающая следующими свойствами*:

(1) *Всякий изоморфизм гиперболических римановых поверхностей является изометрией.*

(2) *Если $f\colon X_1 \to X_2$ — голоморфное отображение гиперболических римановых поверхностей, $x \in X_1$ и $v \in \mathcal{T}_x X_1$, то*

длина вектора $(Df)_x(v) \in \mathcal{T}_{f(x)}X_2$ *не превосходит длины вектора* v; *отображение* f *не увеличивает расстояния и длины кривых.*

(3) *Гиперболическая метрика геодезически полна и имеет постоянную кривизну, равную* -4.

Доказательство. Представим X в виде Δ/G, где G — дискретная и свободная группа автоморфизмов; поскольку G действует на Δ изометриями, метрика на Δ опускается на Δ/G; полученную метрику будем называть гиперболической метрикой на X. Чтобы доказать утверждение (2) (из которого следует (1)), поднимем f до отображения универсальных накрывающих:

$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \Delta \arrow[d, "\pi_2"] \\ X_1 \arrow[r, "f"] & X_2 \end{tikzcd}$$

Поскольку по построению проекции π_1 и π_2 являются локальными изометриями, утверждение о длинах векторов следует из предложения 11.3 (2) (то есть, в конечном счете, из леммы Шварца), а оставшаяся часть утверждения (2) получается отсюда интегрированием. Наконец, утверждение (3) следует из аналогичного утверждения про гиперболическую метрику на Δ и локальной изометричности проекции $\Delta \to \Delta/G$ (поскольку кривизна и геодезическая полнота определяются локально). □

Мы применим гиперболическую метрику к доказательству следующего красивого утверждения, называемого «большой теоремой Пикара»:

Теорема 11.9. *В окрестности существенно особой точки голоморфная функция принимает все значения, кроме, быть может, одного.*

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Не ограничивая общности, можно считать, что нам дана функция f, голоморфная в проколотом диске $\Delta^* = \{z : 0 < |z| < 1\}$ и не принимающая значений 0 и 1. Предположим, что f имеет в нуле существенную особенность, и выведем отсюда противоречие.

Зафиксируем комплексное число $c \neq 0, 1$. По теореме Сохоцкого существует такая последовательность комплексных чисел $z_n \in \Delta^*$, что $\lim z_n = 0$ и $\lim f(z_n) = c$. Обозначим через γ_n окружность с центром в нуле и радиусом $|z_n|$.

Лемма 11.10. *Длины окружностей γ_n в гиперболической метрике области Δ^* стремятся к нулю при $n \to \infty$.*

Доказательство леммы. Отображение $z \mapsto e^{iz}$ является универсальным накрытием верхней полуплоскости над Δ^*. Окружность радиуса r с центром в нуле является взаимно однозначным (за исключением концов) образом отрезка, соединяющего точки $i\ln(1/r)$ и $2\pi + i\ln(1/r)$; стало быть, длина окружности в гиперболической метрике на Δ^* равна длине этого отрезка в гиперболической метрике на верхней полуплоскости. Из формулы (11.1) сразу видно, что эта последняя длина равна $\pi/\ln(1/r)$, что стремится к нулю при $r \to 0$. $\square$

Рассмотрим теперь f как голоморфное отображение из Δ^* в $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Поскольку $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ является гиперболической римановой поверхностью (например, потому, что функция k^2, как мы отмечали в лекции 9, представляет верхнюю полуплоскость в виде накрытия над $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$), из предложения 11.8 и леммы следует, что длины кривых $f(\gamma_n)$ в гиперболической метрике на $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ стремятся к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, для всякой окрестности $U \ni c$ существует такое $N > 0$, что $f(\gamma_n) \subset U$ при $n > N$. Выберем U такой, чтобы она содержалась в круге радиуса R с центром в нуле (относительно обычной евклидовой метрики). Тогда получаем, что $|f(z)| \leqslant R$ при $n > N$ и $|z| = |z_n|$; применяя принцип максимума модуля к кольцам, заключенным между окружностями радиуса $|z_n|$ и $|z_{n+1}|$, получаем, что $|f(z)| \leqslant R$ для всех z, достаточно близких к нулю. Стало быть, по теореме Римана особенность функции f в нуле устранима — противоречие! $\square$

Из большой теоремы Пикара немедленно вытекает

Следствие 11.11 (малая теорема Пикара). *Всякая целая функция, отличная от константы, принимает все значения, кроме, быть может, одного.*

Доказательство. Если целая функция f является многочленом, это немедленно следует из «основной теоремы алгебры» (см. с. 38); в противном случае функция $z \mapsto f(1/z)$ имеет существенную особенность в нуле, и получаем противоречие с теоремой 11.9. $\square$

На самом деле при доказательстве этого следствия можно обойтись и без большой теоремы Пикара: оно немедленно вытекает из теоремы Лиувилля и следствия 9.17.

Лекция 12. Задача Миттаг-Леффлера

В каждом разделе математики существуют ключевые задачи, решение, исследование и обобщение которых приводит к вскрытию важных закономерностей и открывает новые перспективы. Если говорить об одномерном комплексном анализе, то к числу ключевых, бесспорно, относятся «задача Миттаг-Леффлера» и «задача Вейерштрасса», которым посвящена заключительная часть курса.

Определение 12.1. Пусть $a \in \mathbb{C}$. *Главной частью в точке a* называется любое выражение вида $\sum_{j=1}^{n} c_j/(z-a)^j$ (именно так выглядит главная часть ряда Лорана мероморфной функции, имеющей полюс в точке a).

Задачей Миттаг-Леффлера называется следующий вопрос:

Дано открытое множество $U \subset \mathbb{C}$ и подмножество $S \subset U$, не имеющее в U предельных точек, а в каждой точке $a \in S$ задана главная часть f_a. Найти такую мероморфную в U функцию, что множество ее полюсов содержится в S и при этом в каждой точке $a \in S$ ее главная часть есть f_a.

Ответ на этот вопрос таков:

Теорема 12.2 (Миттаг-Леффлер). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Тогда любая задача Миттаг-Леффлера в U имеет решение.*

Доказательство. Хочется взять в качестве искомой функцию $f = \sum_{a\in S} f_a$, но, разумеется, ниоткуда не следует, что ряд будет сходиться.

Чтобы спасти эту наивную идею, попробуем заменить каждую функцию f_a на $f_a - \varphi_a$, где функции φ_a голоморфны в U; при этом главные части остаются прежними, но появляется надежда, что при удачном выборе φ_a ряд $\sum(f_a - \varphi_a)$ сходиться уже будет.

Конкретно это делается следующим образом. Зафиксируем до конца доказательства какой-нибудь сходящийся ряд с положительными членами $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j$.

Лемма 12.3. *Существует последовательность компактных подмножеств $K_j \subset U$ и голоморфных в U функций φ_j (j пробегает целые положительные числа) со следующими свойствами:*

(i) $K_j \subset \operatorname{int} K_{j+1}$ *для всех j, и при этом* $\bigcup_j K_j = U$;

(ii) *если положить* $f_j = \sum_{a\in S\cap(K_{j+1}\setminus K_j)} f_a$ *при* $j > 1$, *то* $\sup_{z\in K_{j-1}} |f_j(z) - \varphi_j(z)| \leqslant \varepsilon_j$.

(*Формула для f_j имеет смысл, так как всякое множество вида $K_n \cap S$ конечно в силу того, что множество S не имеет предельных точек в U.*)

В предположении, что эта лемма доказана, положим

$$f = \sum_{a\in S\cap K_2} f_a + \sum_{j=2}^{\infty}(f_j - \varphi_j) \qquad (12.1)$$

и покажем, что функция f — искомая. В самом деле, на всяком K_n ряд

$$\sum_{j=n}^{\infty}(f_j - \varphi_j)$$

состоит из функций, голоморфных в некоторой окрестности K_n, и при этом сходится на K_n абсолютно и равномерно ввиду условия (ii). Стало быть, на всяком K_n сумма (12.1) корректно определена и представляет собой функцию, мероморфную в некоторой окрестности K_n и имеющую на K_n полюсы только в точках множества $S \cap K_n$, причем в каждой точке $a \in S \cap K_n$ ее главная часть равна f_a. Поскольку ввиду условия (i) всякий компакт $K \subset U$ содержится в одном из K_j, формула (12.1) определяет искомую мероморфную функцию.

Остается доказать лемму 12.3. Для начала — еще одна лемма.

Лемма 12.4. *Пусть* $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$; *положим*

$$V_{a,b} = \{z \in \mathbb{C} : |z - b| > |a - b|\}.$$

Пусть теперь $f(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j/(z-a)^j$; *тогда для всякого компакта* $K \subset V_{a,b}$ *и всякого* $\varepsilon > 0$ *существует такая мероморфная на* $\mathbb{C}$ *функция* ψ, *не имеющая полюсов вне точки* b, *что* $|f(z) - \psi(z)| < \varepsilon$ *для всех* $z \in K$.

Доказательство леммы 12.4. Если $f(z) = 1/(z-a)$, то достаточно заметить, что геометрическая прогрессия

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a-b)^{j-1}}{(z-b)^j}$$

сходится к $1/(z-a)$ равномерно на компактах в $V_{a,b}$, так что в качестве ψ можно взять подходящую частичную сумму этого ряда. Далее, любая функция вида $z \mapsto \sum_{j=1}^{n} c_j/(z-a)^j$ может быть получена из функции $z \mapsto (z-a)^{-1}$ и констант с помощью операций сложения и умножения, и, с другой стороны, сумма и произведение мероморфных функций, не имеющих полюсов вне точки b, также является мероморфной функцией, не имеющей полюсов вне точки b. Поскольку предел суммы/произведения равномерно сходящихся последовательностей функций равен сумме/произведению пределов, отсюда и из доказанного нами частного случая все следует. □

Теперь докажем и лемму 12.3. Положим

$$K_n = \left\{ z \in U : \inf_{w \in \mathbb{C} \setminus U} |z - w| \geqslant \frac{1}{n} \text{ и } |z| \leqslant n \right\}.$$

Очевидно, что все K_n компактны и что выполнено условие (i). Теперь подберем функции φ_j. Пусть множество $S \cap (K_{j+1} \setminus K_j)$

состоит из m точек. Для всякой $a \in S \cap (K_{j+1} \setminus K_j)$ верно хотя бы одно из двух следующих утверждений: либо $\inf_{w \in \mathbb{C} \setminus U} |a - w| < 1/j$, либо $|a| > j$. В первом случае существует точка $b \in \mathbb{C} \setminus U$, для которой $|a - b| < 1/j$, и с другой стороны для всех $z \in K_{j-1}$ имеем $|z - b| \geqslant 1/(j-1) > 1/j$; применяя лемму 12.4 к функции f_a, точкам a и b и компакту K_{j-1}, найдем функцию ψ_a, голоморфную на $\mathbb{C} \setminus \{b\}$ (и тем более в U), для которой $|f_a(z) - \psi_a(z)| \leqslant \varepsilon_j/m$ при всех $z \in K_{j-1}$. Во втором случае заметим, что функция f_a голоморфна в окрестности замкнутого диска с центром в нуле и радиусом j; разлагая ее в нуле в ряд Тейлора, получим, что существует многочлен ψ_a, для которого $|f_a(z) - \psi_a(z)| \leqslant \varepsilon_j/m$, как только $|z| \leqslant j$, и тем более при всех $z \in K_{j-1}$. Если теперь положить $\varphi_j = \sum_{a \in S \cap (K_{j+1} \setminus K_j)} \psi_a$, то получим, что φ_j голоморфна на U и $\sup_{z \in K_{j-1}} |f_j(z) - \varphi_j(z)| \leqslant \varepsilon_j$. Стало быть, лемма 12.3 доказана, а с ней и теорема 12.2. $\square$

Итак, на открытых подмножествах комплексной плоскости всякая задача Миттаг-Леффлера разрешима. Следующий шаг — выяснить, как обстоит дело с этой задачей на произвольной римановой поверхности.

Во-первых, надо определить, что такое в этом контексте главная часть. Неформально выражаясь, главная часть в точке a римановой поверхности X — это нечто, записываемое в локальных координатах в окрестности точки a в виде $\sum_{j=1}^{n} c_j/(z-a)^j$; лучше, однако, дать аккуратное формальное определение:

Определение 12.5. Пусть X — риманова поверхность и $x \in X$. Обозначим через $\mathcal{O}_x$ множество ростков голоморфных функций в точке $x \in X$, а через $\mathcal{M}_x$ — множество ростков мероморфных функций в точке $x \in X$ (определения ростков — дословно те же, что на с. 45). Будем рассматривать $\mathcal{O}_x$ и $\mathcal{M}_x$ как векторные пространства над $\mathbb{C}$ (на самом деле $\mathcal{O}_x$ — кольцо, а $\mathcal{M}_x$ — даже поле, но нам ничего, кроме структуры векторного пространства, не понадобится). Тогда *главной частью* в точке x называется элемент факторпространства $\mathcal{M}_x/\mathcal{O}_x$. Если f — мероморфная функция на X, то ее *главной частью* в точке $x \in X$ называется класс ее ростка $f_x \in \mathcal{M}_x$ в факторпространстве $\mathcal{M}_x/\mathcal{O}_x$.

Задача Миттаг-Леффлера на римановой поверхности X формулируется точно так же, как на открытом подмножестве комплексной плоскости: дана риманова поверхность X, дискретное подмножество $S \subset X$, и для каждой точки $a \in S$ дана главная часть $f_a \in \mathcal{M}_a/\mathcal{O}_a$; спрашивается, существует ли на X мероморфная функция, имеющая в каждой точке $a \in S$ главную часть f_a и не имеющая полюсов вне S.

Ясно, что если риманова поверхность X несвязна, то задачу Миттаг-Леффлера можно решать отдельно на каждой компоненте, так что всюду в дальнейшем мы будем считать X связной. Оказывается, что вопрос о разрешимости задачи Миттаг-Леффлера решается очень по-разному в зависимости от того, компактна X или нет.

Если X компактной не является[4], то *любая* задача Миттаг-Леффлера на X имеет решение. По этому поводу мы скажем только, что эта теорема является непосредственным обобщением доказанной нами теоремы 12.2, но ее доказательство, для которого нужны принципиально новые идеи, далеко выходит за рамки нашего курса.

Если же X, напротив, компактна, то в задаче Миттаг-Леффлера возникают новые интересные эффекты: оказывается, что в этом случае она разрешима уже не всегда, причем можно указать необходимое и достаточное условие ее разрешимости. Оставшаяся часть этой лекции и вся следующая лекция будут посвящена именно задаче Миттаг-Леффлера на компактных римановых поверхностях.

Для начала заметим, что всякое дискретное подмножество в компактном пространстве конечно, так что в задаче Миттаг-Леффлера на компактной римановой поверхности X всегда задано *конечное* число точек с главными частями в них.

---

[4]Риманова поверхность, ни одна связная компонента которой не является компактной, называется *открытой*.

Начнем со случая сферы Римана (из сформулированной нами в лекции 11 теоремы Кёбе следует, что это — единственная компактная риманова поверхность рода 0). В этом случае ничего интересного еще не происходит:

Предложение 12.6. *Всякая задача Миттаг-Леффлера на* $\overline{\mathbb{C}}$ *имеет решение.*

Доказательство. Очевидно, что главная часть на $\overline{\mathbb{C}}$ в точке $a \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ — не что иное, как главная часть в смысле определения 12.1, то есть некоторая рациональная функция, а главная часть в бесконечности — многочлен от z; сложив все данные рациональные функции (плюс многочлен, если дана еще и главная часть в бесконечности), мы получим рациональную функцию, т. е. мероморфную функцию на $\overline{\mathbb{C}}$; очевидно, что она дает решение задачи Миттаг-Леффлера. $\square$

Пусть теперь род X равен $g > 0$. То, что не любая задача Миттаг-Леффлера на X имеет решение, увидеть легко. Пусть, например, исходные данные этой задачи предписывают искомой мероморфной функции иметь ровно один полюс, притом кратности 1. Тогда ясно, что решения быть не может, поскольку такая мероморфная функция, рассматриваемая как голоморфное отображение из X в $\overline{\mathbb{C}}$, должна иметь в прообразе точки $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ ровно одну точку и при этом быть в этой точке неразветвленной, откуда ввиду предложения 7.1 (4) следует, что это отображение имеет степень 1 и тем самым является изоморфизмом — противоречие (ср. доказательство предложения 9.7). Для того, однако, чтобы получить точное условие разрешимости задачи Миттаг-Леффлера, нам придется ввести важное понятие «вычета мероморфной формы».

В свое время мы определили, что такое голоморфная форма на римановой поверхности (определение 8.7). Теперь нам предстоит встретиться и с мероморфными формами.

Определение 12.7. Пусть X — произвольная риманова поверхность. *Мероморфной формой* на X называется голоморфная 1-форма ω на $X \setminus S$, где $S \subset X$ — некоторое дискретное подмножество, удовлетворяющая следующему условию: у всякой точки $a \in S$ существует такая окрестность $U \ni a$, что ограничение ω на $U \setminus \{a\}$ можно записать в виде $f\omega'$, где f — мероморфная функция на U с полюсом в a и ω' — голоморфная форма на U.

Говоря неформально, мероморфная форма — это объект, который в локальных координатах записывается в виде $f(z)\,dz$, где функция f мероморфна. Ясно также, как определить понятие *полюса* мероморфной формы.

Предложение-определение 12.8. *Пусть ω — мероморфная форма на (произвольной) римановой поверхности X, и пусть $a \in X$. Рассмотрим замкнутый диск $D \subset X$, содержащий a и не содержащий полюсов формы ω, кроме, быть может, самой точки a. Тогда число*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \omega$$

(ориентация ∂D индуцирована естественной ориентацией D) не зависит от выбора D; оно называется вычетом *формы ω в точке a и обозначается $\mathrm{Res}_a\,\omega$. Если в каких-то локальных координатах форма ω записывается в виде $f(z)\,dz$, где $z(a) = 0$, то $\mathrm{Res}_a\,\omega$ совпадает с коэффициентом при z^{-1} в ряде Лорана мероморфной функции f.*

Доказательство. Вне своих полюсов форма ω голоморфна, так что независимость вычета от выбора D немедленно следует из теоремы Стокса и того обстоятельства, что все голоморфные формы на римановых поверхностях замкнуты. Совпадение вычета с коэффициентом при z^{-1} немедленно следует из формулы (3.2) для коэффициентов ряда Лорана. □

Ясно, что $\mathrm{Res}_a\,\omega = 0$, если точка a не является полюсом формы ω.

Замечание 12.9. В определении 12.8 не обязательно, конечно, требовать, чтобы форма ω была именно мероморфной: достаточно, чтобы точка a была ее изолированной особенностью.

В старых текстах часто говорят о вычете функции f (определенной на открытом подмножестве комплексной плоскости), подразумевая под ним коэффициент при минус первой степени в ряде Лорана; в современной терминологии такой вычет — не что иное, как вычет формы $f\,dz$.

Вот пример на вычисление вычетов:

Предложение 12.10. *Пусть f — мероморфная функция на римановой поверхности X. Тогда вычет мероморфной формы df/f в точке a равен k, если f имеет в этой точке нуль порядка k, и $-k$, если f имеет в этой точке полюс порядка k.*

Доказательство. Если, в локальных координатах, $f(z) = z^r g(z)$, где $g(0) \neq 0$, то $df/f = r\,dz/z + g'(z)\,dz/g(z)$; так как второе слагаемое является голоморфной формой в окрестности z, оно не влияет на главную часть ряда Лорана, и имеем $\operatorname{Res}_a(df/f) = r$. □

Основное свойство вычетов содержится в следующем предложении:

Предложение 12.11 (теорема о вычетах). *Пусть ω — мероморфная форма на компактной римановой поверхности X. Тогда сумма вычетов формы ω во всех ее полюсах равна нулю.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — полюсы формы ω. Окружим каждый a_j маленьким диском D_j, не содержащим других полюсов; очевидно, эти диски можно выбрать непересекающимися. На многообразии с краем $X' = X \setminus \bigcup \operatorname{int} D_j$ форма ω голоморфна и тем самым замкнута. Следовательно, по теореме Стокса имеем

$$\sum_j \int_{\partial D_j} \omega = \int_{\partial X'} \omega = \int_{X'} d\omega = 0,$$

что и требовалось. □

Следствие 12.12. *Если мероморфная форма на компактной римановой поверхности имеет ровно один полюс, то кратность этого полюса не меньше двух.*

Вот аналог предложения 12.11 для областей с границей:

Предложение 12.13. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область с кусочно-гладкой границей и f — функция, мероморфная в окрестности D и* *не имеющая полюсов на ∂D. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f(z)\,dz = \sum_{a\in D}\operatorname{Res}_a(f dz).$$

Доказательство этого предложения можно спокойно предоставить читателю. Комбинируя это предложение с предложением 12.10, получаем новое (а по сути — то же самое) доказательство принципа аргумента.

Теперь объясним, как с помощью понятия вычета получить препятствие к построению мероморфной формы с данными главными частями. Пусть X — риманова поверхность, $a\in X$, и пусть $f\in\mathcal{M}_a/\mathcal{O}_a$ — главная часть (т. е. росток мероморфной функции с точностью до прибавления ростка голоморфной функции). Если ω — голоморфная форма на X, то $f\omega$ — росток мероморфной формы (попросту — мероморфная форма, определенная в окрестности a) с точностью до прибавления ростка голоморфной формы (т. е. голоморфной формы, определенной в окрестности a). Поскольку от прибавления голоморфной формы вычет не меняется, корректно определен вычет $\operatorname{Res}_a(f\omega)$. Пусть теперь на *компактной* римановой поверхности X задана задача Миттаг-Леффлера: даны точки $a_1,\dots,a_n\in X$ и в каждой точке a_j задана главная часть $f_j\in\mathcal{M}_{a_j}/\mathcal{O}_{a_j}$. Предположим, что эта задача имеет решение, т. е. что найдется мероморфная функция f, имеющая в точке a_j главную часть f_j и не имеющая полюсов вне $\{a_1,\dots,a_n\}$. Тогда для всякой голоморфной формы ω имеем, ввиду предложения 12.11,

$$\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}_{a_j}(f_j\omega) = \sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}_{a_j}(f\omega) = 0.$$

Стало быть, если на X есть ненулевые голоморфные формы, главные части уже не могут быть какими попало: каждая такая форма задает условие на главные части, необходимое для разрешимости соответствующей задачи Миттаг-Леффлера. Замечательным образом оказывается, что никаких других препятствий к разрешимости этой задачи нет. Это важное утверждение называется «теоремой Римана–Роха».

Теорема 12.14 (теорема Римана–Роха I). *Пусть на компактной римановой поверхности X даны точки $a_1, \dots, a_n$ и главные части $f_1, \dots, f_n$, где $f_j \in \mathcal{M}_{a_j}/\mathcal{O}_{a_j}$. Тогда мероморфная функция, имеющая в каждой точке a_j главную часть f_j и не имеющая полюсов вне $\{a_1, \dots, a_n\}$, существует в том и только в том случае, когда для всякой голоморфной формы ω на X выполнено равенство*

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_j}(f_j \omega) = 0. \tag{12.2}$$

Необходимость условий (12.2) мы только что проверили; доказательство достаточности в общем случае выходит за рамки нашего курса. Тем не менее у нас хватает средств, чтобы доказать теорему 12.14 для эллиптических кривых. Давайте это сделаем.

Предложение 12.15. *Теорема* 12.14 *верна, если X — эллиптическая кривая.*

Доказательство. Пусть $X = \mathbb{C}/L$ — эллиптическая кривая (L — решетка в $\mathbb{C}$). Если $\pi\colon \mathbb{C} \to X$ — естественное отображение и ω — голоморфная форма на X, то $\pi^*\omega$ — голоморфная форма на $\mathbb{C}$, имеющая вид $f\,dz$, где f — целая функция, обладающая тем свойством, что $f(z+u) = f(z)$ для всех $u \in L$; поскольку из этого следует, что функция f ограничена, по теореме Лиувилля она является константой, и $\pi^*\omega = \lambda\,dz$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Тем самым простарнство голоморфных форм на X одномерно и порождается формой, прообраз которой при отображении π есть dz; мы позволим себе и саму эту форму на X обозначать dz.

С учетом предыдущего обсуждения получаем, что нам надо только доказать следующий факт:

Пусть на эллиптической кривой X заданы главные части $f_1, \dots, f_n$ в точках $a_1, \dots, a_n$, и пусть $\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_j}(f_j\,dz) = 0$. Тогда соответствующая задача Миттаг-Леффлера на X имеет решение.

Мы построим функцию, дающую решение этой задачи, из $\wp$-функций и их производных. Очевидно, все будет доказано, как только мы установим следующие два факта:

(1) Для любой точки $a \in X$ и любого целого числа $k \geqslant 2$ существует мероморфная функция на X, имеющая в точке a главную часть $1/(z-a)^k$ и не имеющая полюсов, отличных от a (здесь и ниже в качестве локальных координат на X мы выбираем естественные координаты на $\mathbb{C}$).

(2) Для любых двух различных точек $a, b \in X$ существует мероморфная функция на X, имеющая главную часть $1/(z-a)$ в точке a, главную часть $-1/(z-b)$ в точке b и не имеющая полюсов, отличных от a и b.

(В самом деле, если данные задачи Миттаг-Леффлера удовлетворяют условию на сумму вычетов, то ее решение можно получить, взяв подходящую линейную комбинацию функций вида (1) и (2).)

Чтобы проверить утверждение (1), достаточно заметить, что $(k-2)$-я производная $\wp$-функции имеет в нуле главную часть вида const/z^k (с ненулевой константой) и не имеет полюсов вне нуля; умножая на подходящую константу и заменяя $\wp(z)$ на $\wp(z-a)$, получаем всё, что нужно.

Чтобы проверить утверждение (2), рассмотрим точку $c \in X$, не являющуюся точкой второго порядка, и положим $\lambda = \wp(c) = \wp(-c)$. Тогда функция $f(z) = 1/(\wp(z) - \lambda)$ имеет полюсы первого порядка в точках c и $-c$ и не имеет других полюсов; в силу теоремы о вычетах вычеты формы $f\,dz$ в точках c и $-c$ противоположны друг другу, так что, умножив f на подходящую константу, можно считать, что главные части функции f в точках c и $-c$ имеют вид $1/(z-c)$ и $-1/(z+c)$ соответственно. Тем самым утверждение (2) доказано для случая, когда $a=c$, $b=-c$. В общем случае для данных точек a и b найдем такие элементы $c, t \in X$, что $a = c - t$, $b = -c - t$: достаточно взять в качестве c любое решение уравнения $2c = a - b$, а в качестве t — любое решение уравнения $2t = -(a+b)$; заметим, что $2c \neq 0$, поскольку $a \neq b$, так что c не есть точка второго порядка, и к ней применима предыдущая конструкция; теперь функция $z \mapsto f(z-t)$ обладает, очевидно, всеми требуемыми свойствами. $\square$

Лекция 13. Теорема Римана–Роха

В этой лекции мы выведем из теоремы Римана–Роха (теорема 12.14) один из ключевых фактов теории компактных римановых поверхностей (который также называется теоремой Римана–Роха).

Для начала обсудим такой вопрос: мы знаем, что за препятствия к разрешимости задачи Миттаг-Леффлера отвечают голоморфные формы; сколько же, собственно говоря, голоморфных форм существует на компактной римановой поверхности? Ответ таков:

Предложение 13.1. *Векторное пространство голоморфных дифференциальных форм на компактной римановой поверхности рода g имеет размерность g (над $\mathbb{C}$).*

Доказывать это предложение мы не будем; отметим только, что конечномерность этого векторного пространства вы при желании можете доказать самостоятельно уже сейчас, но для того, чтобы доказать равенство его размерности и рода поверхности, требуется некоторая дополнительная техника, выходящая за рамки нашего элементарного курса.

Теперь введем несколько приличествующих случаю определений.

Определение 13.2. Пусть f — мероморфная функция на римановой поверхности X и $a \in X$. *Порядком* функции f в точке a (обозначение: $\mathrm{ord}_a(f)$) называется число k, если f имеет в точке a нуль порядка k, число $-k$, если f имеет в a полюс порядка k, и число нуль в остальных случаях. Точно так же определяется и обозначается порядок мероморфной формы в данной точке (если в локальных координатах в окрестности a форма записывается в виде $f\,dz$, то ее порядок — это порядок функции f; поскольку при замене координат f умножается на не обращающуюся в нуль голоморфную функцию, от выбора локальных координат это число не зависит).

Определение 13.3. *Дивизором* на компактной римановой поверхности X называется формальное выражение $D = m_1a_1 + \ldots$

$\ldots + m_n a_n$, где $a_j \in X$ и m_j — целые числа (n произвольно). Дивизор D называется *эффективным* (обозначение: $D \geqslant 0$), если все коэффициенты a_j неотрицательны. Если f — мероморфная функция на X, то через (f) обозначается дивизор вида $\sum_{a\in X} \operatorname{ord}_a(f) \cdot a$ (разумеется, лишь конечное число слагаемых в этой сумме отлично от нуля); если ω — мероморфная форма, то через (ω) обозначатеся дивизор $\sum_{a\in X} \operatorname{ord}_a(\omega) \cdot a$. Дивизоры, равные (f) для некоторой мероморфной функции f, называются *главными*[5]. Наконец, *степенью* дивизора $D = \sum m_j a_j$ называется число $\deg D = \sum m_j$.

Чтобы усвоить все эти определения, докажем два факта (важных и сами по себе):

Предложение 13.4. *Степень любого главного дивизора равна нулю.*

Доказательство. Если f — мероморфная функция, то предложение 12.10 гласит, что для всякой точки $a \in X$ имеем $\operatorname{ord}_a(f) = \operatorname{Res}_a(df/f)$. Теперь все следует из предложения 12.11. $\square$

Предложение 13.5. *Если ω_1 и ω_2 — мероморфные формы на данной компактной римановой поверхности X, то* $\deg(\omega_1) = \deg(\omega_2)$.

Доказательство. Пусть в какой-то координатной окрестности $U \subset X$ наши формы записываются в виде $\omega_1 = f_1\,dz$, $\omega_2 = f_2\,dz$, где f_1, f_2 — мероморфные функции на U и z — локальная координата. Положим $f_U = f_1/f_2$. Если теперь в какой-то другой координатной окрестности $V \subset X$, пересекающейся с U, имеем $\omega_1 = g_1\,dw$, $\omega_2 = g_2\,dw$, то на $U \cap V$ имеем $g_1 = f_1 \cdot (dz/dw)$, $g_1 = f_1 \cdot (dz/dw)$, так что $f_1/f_2 = g_1/g_2$. Следовательно, корректно определена мероморфная функция f на X, заданная правилом

> $f = f_1/f_2$, если $\omega_1 = f_1\,dz$, $\omega_2 = f_2\,dz$ (в каких-то локальных координатах).

[5] На самом деле главные дивизоры — наименее интересные, но такая терминология общепринята (она происходит из аналогии главных дивизоров с главными идеалами в кольцах).

Имеем, очевидно, $\omega_1 = f\omega_2$, откуда $(\omega_1) = (f) + (\omega_2)$ (при умножении функций и/или форм порядки складываются), так что $\deg(\omega_1) = \deg(f) + \deg(\omega_2)$, и все следует из предложения 13.4. $\square$

Давайте заодно узнаем, чему именно равна степень дивизора вида (ω).

Предложение 13.6. *Если ω — мероморфная форма на компактной римановой поверхности X рода g, то* $\deg(\omega) = 2g - 2$.

Доказательство. Ввиду предложения 13.5 достаточно посчитать $\deg(\omega)$ для какой-нибудь одной мероморфной формы ω; выберем в качестве таковой форму df, где f — непостоянная мероморфная функция на X — она найдется, например, ввиду теоремы существования Римана (с. 54). Будем рассматривать f как голоморфное отображение из X в $\overline{\mathbb{C}}$; скомпоновав f с подходящим дробно-линейным автоморфизмом сферы Римана, можно добиться того, что среди прообразов точки $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ не будет точек ветвления, что мы и будем далее предполагать. Теперь подсчитаем $\deg(df)$. Обозначим степень отображения f через n, а индексы ветвления — через $e_1, \dots, e_m$. Заметим, что f имеет ровно n простых полюсов — это прообразы точки ∞; в каждом из этих полюсов форма df имеет, очевидно, полюс порядка 2. С другой стороны, нули формы df — это в точности точки ветвления отображения f, причем если индекс ветвления в какой-то точке равен e, то df, очевидно, имеет в этой точке нуль порядка $e - 1$. Итак, df имеет n полюсов порядка 2 и m нулей порядков $e_1 - 1, \dots, e_m - 1$. Суммируя, получаем, что $\deg(df) = \sum_{j=1}^{m}(e_j - 1) - 2n$, а это число равно $2g - 2$ по формуле Римана–Гурвица. $\square$

Определение 13.7. Пусть D — дивизор на (компактной) римановой поверхности X. Тогда через $L(D)$ обозначается векторное пространство, состоящее из таких мероморфных функций f, что $(f) + D \geqslant 0$, а через $I(D)$ — векторное пространство, состоящее из таких мероморфных форм ω, что $(\omega) - D \geqslant 0$ (проверьте самостоятельно, что это действительно векторные пространства!). Размерности пространств $L(D)$ и $I(D)$ обозначаются через $l(D)$ и $i(D)$ соответственно.

Если дивизор $D=\sum_{j=1}^{n} m_j a_j$ эффективен, то $L(D)$ состоит из всех мероморфных функций, не имеющих полюсов вне точек $a_1,\ldots,a_n$, а в этих точках имеющих полюсы не более чем данного порядка (если какие-то точки входят в D со знаком минус, то дополнительно функции предписывается иметь в этих точках нули не менее чем определенного порядка). Пространство $I(D)$ состоит, для эффективных дивизоров D, из голоморфных форм, имеющих нули (не менее чем данного порядка) в точках, входящих в D (если же D содержит какие-то точки со знаком минус, то формам разрешается в этих точках иметь полюсы).

Вот пример на эти понятия:

Предложение 13.8. *Если D_1 и D_2 — такие дивизоры на X, что их разность D_1-D_2 является главным дивизором, то векторные пространства $L(D_1)$ и $L(D_2)$ изоморфны, и пространства $I(D_1)$ и $I(D_2)$ также изоморфны (и тем самым $l(D_1)=$ $=l(D_2)$, $i(D_1)=i(D_2)$).*

(Заметим в скобках, что если разность двух дивизоров является главным дивизором, то эти два дивизора называются «линейно эквивалентными».)

Доказательство. Пусть $D_1=D_2+(f)$. Поскольку для всякой мероморфной функции φ имеем

$$(f\cdot\varphi)+D_2=(\varphi)+(f)+D_2=(\varphi)+D_1,$$

получаем, что неравенства $(\varphi)+D_1\geqslant 0$ и $(f\varphi)+D_2\geqslant 0$ равносильны, так что отображение $\varphi\mapsto f\cdot\varphi$ является изоморфизмом $L(D_1)$ на $L(D_2)$. Рассуждение для $I(D)$ дословно такое же. □

Обозначим через K дивизор вида (ω), где ω — какая-нибудь мероморфная форма (это стандартное обозначение; такие дивизоры называются «каноническими»).

Предложение 13.9. *$i(K-D)=l(D)$, $l(K-D)=i(D)$.*

Доказательство. Если f — мероморфная функция, то

$$(f)+D=(f\omega)-(\omega)+D=(f\omega)-(K-D),$$

так что отображение $f\mapsto f\omega$ задает изоморфизм пространств $L(D)$ и $I(K-D)$; этим доказано первое равенство;

подставляя в первом равенстве $K - D$ вместо D, получаем второе равенство. $\square$

Теперь мы можем, наконец, доказать второй вариант теоремы Римана–Роха.

Теорема 13.10 (теорема Римана–Роха II). *Если D — дивизор на компактной римановой поверхности X рода g, то*

$$l(D) - i(D) = \deg D + 1 - g.$$

Доказательство. Предположим для начала, что дивизор $D = \sum_{j=1}^{n} m_j a_j$ эффективен (т. е. что все a_j положительны). Обозначим через V векторное пространство, состоящее из n-ок $(f_1, \dots f_n)$, где f_j — главная часть в точке a_j с полюсом порядка $\leqslant m_j$. Поскольку главная часть полностью определяется коэффициентами лорановского разложения в какой-то системе координат, имеем $\dim V = m_1 + \ldots + m_n = \deg D$. Рассмотрим теперь отображение $\Phi\colon L(D) \to V$, ставящее в соответствие функции f набор ее главных частей в точках $a_1, \dots, a_n$. Ядро отображения Φ состоит из мероморфных функций, не имеющих полюсов, то есть голоморфных функций, то есть констант, так что это ядро одномерно. Положим $W = \Phi(L(D)) \subset V$. Из сказанного выше ясно, что $l(D) = 1 + \dim W$. Остается найти размерность пространства W. По определению, это пространство состоит из тех исходных данных задачи Миттаг-Леффлера, для которых все полюсы сконцентрированы в точках $a_1, \dots, a_n$, порядок полюса главной части в a_j не превосходит m_j, и при этом такая задача Миттаг-Леффлера имеет решение. Ввиду теоремы 12.14 условие на то, чтобы соответствующая задача Миттаг-Леффлера была разрешима, можно сформулировать следующим образом. Для каждой формы $\omega \in \Omega(X)$, где через $\Omega(X)$ обозначено пространство голоморфных форм на X, определим линейный функционал λ_ω на V, действующий по формуле

$$\lambda_\omega\colon (f_1, \dots, f_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_j}(f_j \omega);$$

пространство W есть пересечение ядер всех функционалов λ_ω.

Стало быть,

$$\dim W = \dim V - \text{размерность пространства функционалов } \lambda_\omega.$$

Размерность же этого последнего пространства, в свою очередь, равна

$$\dim \Omega(X) - \dim \left\{ \begin{matrix} \text{формы } \omega \in \Omega(X), \text{ для которых функци-} \\ \text{онал } \lambda_\omega \text{ нулевой} \end{matrix} \right\}.$$

Однако же λ_ω является нулевым функционалом тогда и только тогда, когда $\omega \in I(D)$; следовательно,

$$\begin{aligned} l(D) = 1 + \dim W = 1 + \dim V - (\dim \Omega(X) - \dim I(D)) = \\ = 1 + \deg D - g + i(D), \end{aligned}$$

что и утверждалось. Итак, мы доказали теорему для *эффективных* дивизоров D.

Теперь распространим доказанное нами утверждение на произвольные дивизоры. Покажем сначала, что для любого дивизора D выполнено неравенство

$$l(D) - i(D) \geqslant \deg D + 1 - g. \tag{13.1}$$

Если D эффективен, то мы уже доказали, что это неравенство выполняется (и даже обращается в равенство). Однако же любой дивизор может быть получен из эффективного путем вычитания конечного числа точек; поэтому наше неравенство будет доказано, как только мы установим, что при вычитании из D одной точки левая часть неравенства (13.1) уменьшается не больше, чем правая. Ясно, что правая часть (13.1) при вычитании из D одной точки уменьшается на 1; поэтому неравенство (13.1) будет доказано, как только мы установим следующую лемму:

Лемма 13.11. *Если D — дивизор на X и $a \in X$ — точка, то*

$$l(D-a) - i(D-a) \geqslant (l(D) - i(D)) - 1.$$

(На самом деле, как немедленно следует из доказываемой нами теоремы, это неравенство всегда обращается в равенство, но доказательство теоремы еще не закончено!)

Доказательство леммы. Ясно, что $L(D-a) \subseteq L(D)$ и $I(D) \subseteq$ $\subseteq I(D-a)$, причем коразмерность $L(D-a)$ в $L(D)$ и коразммерность $I(D)$ в $I(D-a)$ обе не превосходят единицы: условие, выделяющее подпространство $L(D-a)$ в $L(D)$ или $I(D)$ в $I(D-a)$, заключается в обращении в нуль одного коэффициента ряда Лорана, причем может случится, что для всех элементов пространства $L(D)$ (соответственно, $I(D-a)$) этот коэффициент равен нулю, и тогда имеет место равенство $L(D-a)=L(D)$ (соответственно, $I(D)=I(D-a)$). Стало быть, $l(D)\geqslant l(D-a)\geqslant l(D-a)-1$ и $i(D)+1\geqslant i(D-a)\geqslant i(D)$. Тем самым a priori возможны четыре случая:

(1) $l(D-a)=l(D)-1$, $i(D-a)=i(D)$;

(2) $l(D-a)=l(D)$, $i(D-a)=i(D)+1$;

(3) $l(D-a)=l(D)$, $i(D-a)=i(D)$;

(4) $l(D-a)=l(D)-1$, $i(D-a)=i(D)+1$.

Случаи (1)–(3) нас устраивают; покажем, что случай (4) невозможен.

В самом деле, пусть он имеет место; тогда существуют мероморфная функция $f\in L(D)\setminus L(D-a)$ и мероморфная форма $\omega\in I(D-a)\setminus I(D)$. Рассмотрим теперь мероморфную форму $f\omega$; она должна иметь простой полюс в точке a и быть голоморфной вне a, а это противоречит теореме о вычетах (см. следствие 12.12). $\square$

Итак, лемма доказана, а с ней и неравенство (13.1); теперь применим неравенство (13.1) к дивизору $K-D$ вместо D, где K, как и в предложении 13.9, — дивизор вида (ω), где ω — какая-нибудь мероморфная форма. С учетом предложения 13.9, неравенство (13.1), в которое подставлено $K-D$ вместо D, запишется так:

$$\begin{aligned} i(D)-l(D)\geqslant \deg(K-D)+1-g=\\ =\deg K-\deg D+1-g=g-1-\deg D\end{aligned}$$

(мы воспользовались тем, что $\deg K=2g-2$ ввиду предложения 13.6). Умножая обе части получившегося неравенства на (-1), мы получим, что для дивизора D выполнено неравенство (13.1), в котором знак $\geqslant$ заменен на $\leqslant$; значит, это неравенство обращается в равенство, и все доказано. $\square$

Лекция 14. Задача Вейерштрасса

В этой заключительной лекции мы займемся второй из упомянутых выше ключевых задач комплексного анализа.

Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Задачей Вейерштрасса называется следующий вопрос:

Дано подмножество $S \subset U$, не имеющее в U предельных точек, и для каждой точки $a \in S$ задано целое положительное число n_a. Найти функцию, голоморфную на U, имеющую в каждой точке $a \in S$ нуль кратности n_a, а других нулей в U не имеющую.

Как и в случае с задачей Миттаг-Леффлера, оказывается, что решение всегда есть:

Теорема 14.1. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Тогда любая задача Вейерштрасса в U имеет решение.*

Доказательство. Искомая функция будет простроена как произведение голоморфных функций, каждая из которых имеет простой нуль в одной из точек $a \in S$. Как и в доказательстве теоремы Миттаг-Леффлера, главная проблема состоит в том, чтобы обеспечить сходимость этого бесконечного произведения.

Мы воспользуемся конструкцией, которая уже сослужила нам службу при доказательстве теоремы Миттаг-Леффлера. Именно, положим, как и в доказательстве леммы 12.3,

$$K_n = \left\{ z \in U : \inf_{w \in \mathbb{C} \setminus U} |z - w| \geqslant \frac{1}{n} \text{ и } |z| \leqslant n \right\}$$

(n — натуральное число). Расположим элементы множества S в последовательность $\{a_j\}$ таким образом, чтобы в ней сначала шли все точки, лежащие в K_1 (их конечное число, поскольку K_1 компактно, а множество S не имеет предельных точек в U), затем — все точки, лежащие в $K_2 \setminus K_1$ (их число конечно по аналогичной причине), и т. д.; если для какой-то точки $a \in S$ предписываемая кратность нуля n_a больше единицы, повторим эту точку в последовательности n_a раз. Положим еще $K_{-1} = K_0 = \varnothing$.

Лемма 14.2. *Для всякого натурального числа m существует голоморфная на U функция φ_m со следующими свойствами:*

(1) *функция $1-\varphi_m$ имеет простой нуль в точке a_m и не имеет других нулей в U;*

(2) *если $a_m \in K_{j+1} \setminus K_j$, то $|\varphi_m(z)| < 1$ для всех $z \in K_{j-1}$.*

Доказательство леммы 14.2. Если $a_m \in K_{j+1} \setminus K_j$, то либо $\inf_{w\in\mathbb{C}\setminus U} |a_m - w| < 1/j$, либо $|a_m| > j$. В первом случае существует точка $b \in \mathbb{C} \setminus U$, для которой $|a_m - b| < 1/j$, и с другой стороны для всех $z \in K_{j-1}$ имеем $|z-b| \geqslant 1/(j-1) > 1/j$, так что можно положить $\varphi_m(z) = \dfrac{a_m - b}{z - b}$; во втором случае можно просто положить $\varphi_m(z) = \dfrac{z}{a_m}$. □

Если бы мы могли быть уверены, что произведение $\prod(1-\varphi_m)$ сходится равномерно на компактах в U, то теорема была бы уже доказана, но эта сходимость, вообще говоря, ниоткуда не следует. Чтобы обеспечить сходимость, мы домножим каждый из сомножителей $(1-\varphi_m)$ на подходящую голоморфную функцию, не обращающуюся в нуль на U.

Лемма 14.3. *Для каждого натурального числа m можно выбрать голоморфную на U функцию ψ_m таким образом, чтобы для всякого натурального j произведение*

$$\prod_{a_m \notin K_j} (1-\varphi_m)e^{\psi_m} \tag{14.1}$$

равномерно сходилось на K_{j-1} к функции, не имеющей нулей на K_{j-1}.

Доказательство леммы 14.3. Напомним, что ряд

$$-z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots$$

сходится при $|z| < 1$ к (одной из ветвей) функции $\ln(1-z)$; далее под $\ln(1-z)$ мы будем понимать именно сумму этого ряда. Очевидно, что утверждение леммы будет выполнено, если ряд

$$\sum_{a_m \notin K_j} (\ln(1-\varphi_m) + \psi_m), \tag{14.2}$$

составленный из логарифмов сомножителей произведения (14.1), будет равномерно сходиться на K_{j-1} (логарифмы в (14.2) имеют смысл, т. к. $|f_m(z)| < 1$ при $z \in K_{j-1}$ ввиду леммы 14.2). Чтобы обеспечить эту сходимость, зададимся каким-нибудь сходящимся рядом с положительными членами $\sum \varepsilon_m$ и для каждого такого m, что $a_m \notin K_j$, найдем такое число p_m, что

$$\left| \sum_{k=p_m}^{\infty} \frac{f_m(z)^k}{k} \right| \leqslant \varepsilon_m$$

при $z \in K_{j-1}$; это всегда возможно, поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-f_m(z)^k/k)$ равномерно сходится к $\log(1 - f_k)$ на K_{j-1}. Если теперь положить

$$\psi_m = \sum_{k=1}^{p_m-1} \frac{f_m(z)^k}{k},$$

то равномерная сходимость на K_{j-1} ряда (14.2) будет обеспечена. $\square$

Из лемм 14.2 и 14.3 немедленно следует, что бесконечное произведение

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - \varphi_m) e^{\psi_m}$$

сходится на U к голоморфной функции, дающей решение нашей задачи Вейерштрасса. $\square$

Следствие 14.4. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество, и пусть $S, T \subset U$ — непересекающиеся подмножества, не имеющие в U предельных точек. Предположим, что для каждого $a \in S$ задано целое положительное число n_a, а для каждого $b \in T$ задано целое положительное число m_b. Тогда на U существует мероморфная функция, которая в каждой точке $a \in S$ имеет нуль порядка n_a, в каждой точке $b \in T$ имеет полюс порядка m_b, а других нулей или полюсов в U не имеет.*

Доказательство. Пусть f и g — голоморфные функции, дающие решение задачи Вейерштрасса с данными $(S, \{n_a\})$ и

$(T, \{m_b\})$ соответственно; тогда мероморфная функция f/g обладает требуемыми свойствами. $\square$

Еще одно следствие теоремы Вейерштрасса показывает, что всякая мероморфная функция на открытом множестве комплексной плоскости является отношением двух голоморфных функций (прямо из определения мероморфной функции следует только, что это утверждение верно в окрестности каждой точки):

Следствие 14.5. *Пусть f — мероморфная функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$. Тогда на U существуют такие голоморфные функции g и h, что $f = g/h$.*

Доказательство. Пусть $S \subset U$ — множество полюсов функции f, и пусть n_a — порядок полюса $a \in S$. Если теперь обозначить через h голоморфную функцию, дающую решение задачи Вейерштрасса с данными $(S, \{n_a\})$, то функция $g = fh$ голоморфна на U и $f = g/h$. $\square$

Итак, на открытых подмножествах комплексной плоскости всякая задача Вейерштрасса разрешима. Следующий шаг — выяснить, как обстоит дело с этой задачей на произвольной римановой поверхности.

Ясно, что если риманова поверхность X несвязна, то задачу Вейерштрасса можно решать отдельно на каждой компоненте, так что всюду в дальнейшем мы будем считать X связной. Как и в случае с задачей Миттаг-Леффлера, ответ на вопрос о разрешимости задачи Вейерштрасса зависит от того, компактна X или нет.

Если X компактной не является, то *любая* задача Вейерштрасса на X имеет решение. Доказательство этого факта требует примерно той же техники, что и доказательство теоремы Миттаг-Леффлера для открытой римановой поверхности, и тем самым выходит за рамки нашего курса.

Теперь посмотрим, что происходит, когда риманова поверхность X компактна.

Поскольку на компактных римановых поверхностях нет непостоянных голоморфных функций, вопрос об обобщении на этот случай теоремы 14.1 не стоит, но вполне можно пытаться обобщать следствие 14.4: строить на X *мероморфную* функцию с заданными нулями и полюсами. Множества нулей и полюсов мероморфной функции на компактной римановой поверхности с неизбежностью конечны (поскольку эти множества не могут иметь предельных точек); вспоминая определение дивизора (опр. 13.3), получаем такую формулировку задачи Вейерштрасса для компактной римановой поверхности:

Пусть $D = m_1a_1 + \ldots + m_na_n$ — дивизор на компактной римановой поверхности X; существует ли на X такая мероморфная функция f, что $D = (f)$?

Иными словами, надо выяснить, какие дивизоры на компактной римановой поверхности являются главными.

Прежде чем обсуждать эту задачу, сформулируем следующее тривиальное, но полезное утверждение:

Предложение 14.6. *Сумма и разность двух главных дивизоров является главным дивизором.*

Доказательство. Поскольку порядок произведения (соответственно частного) двух функций в данной точке равен сумме (соответственно разности) порядков, имеем равенства $(f) + (g) = (fg)$ и $(f) - (g) = (f/g)$. $\square$

Теперь вернемся к задаче Вейерштрасса. Сразу видно, что на компактной римановой поверхности не любая задача Вейерштрасса имеет решение: предложение 13.4 гласит, что степень главного дивизора обязана быть равна нулю.

Для сферы Римана это необходимое условие является и достаточным:

Предложение 14.7. *Дивизор на $\overline{\mathbb{C}}$ является главным тогда и только тогда, когда его степень равна нулю.*

Доказательство. Часть «только тогда» содержится в предложении 13.4; для доказательства части «тогда» заметим, что любой дивизор степени 0 представляется в виде суммы дивизоров вида $a - b$; поэтому ввиду предложения 14.6 нам достаточно показать, что на $\overline{\mathbb{C}}$ любой дивизор вида $a - b$ является главным, а это очевидно (если a и b конечны, в качестве искомой функции можно взять $(z-a)/(z-b)$; случай, когда a или b равно ∞, предоставляется читателю). $\square$

Самое интересное, как всегда, начинается, когда род римановой поверхности больше нуля. В этом случае равенство нулю степени дивизора уже недостаточно для того, чтобы дивизор был главным: существует много других препятствий. Мы не будем даже формулировать необходимое и достаточное условие для произвольного рода, так как это завело бы нас слишком далеко, но разберем простейший (и показательный) случай эллиптической кривой.

Итак, пусть $E = \mathbb{C}/L$ — эллиптическая кривая, где $L \subset \mathbb{C}$ — решетка. Напомним, что на E можно ввести структуру группы (именно, факторгруппы аддитивной группы поля $\mathbb{C}$ по подгруппе L).

Теорема 14.8. *Пусть $D = p_1a_1 + \ldots + p_na_n$ — дивизор на эллиптической кривой E. Тогда мероморфная функция f, обладающая тем свойством, что $(f) = D$, существует в том и только том случае, когда выполняются следующие два условия:*

(1) $p_1 + \ldots + p_n = 0$ *(иными словами,* $\deg D = 0$*);*

(2) $p_1a_1 + \ldots + p_na_n = 0$, *где сложение понимается в смысле группового закона на эллиптической кривой.*

Доказательство. Начнем с доказательства необходимости. Необходимость условия (1) вытекает из предложения 13.4. Чтобы доказать необходимость условия (2), предположим, что $D = (f)$, где f — мероморфная функция на E, обозначим через $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ какой-нибудь базис решетки L и обозначим через $D \subset \mathbb{C}$ параллелограмм, порожденный этим базисом (иными словами, параллелограмм с вершинами $0, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_2$). Подвергнем его параллельному переносу на подходящий вектор $w \in \mathbb{C}$ таким образом, чтобы ни один из прообразов точек $a_1, \ldots, a_n \in E$ при естественной проекции $p\colon \mathbb{C} \to E$ не лежал на сторонах параллелограмма; полученный параллелограмм будем также обозначать буквой D.

У каждой из точек $a_1, \ldots, a_n$ существует один и только один прообраз при отображении p, лежащий внутри параллелограмма D; обозначим эти прообразы через $z_1, \ldots, z_n$ соответственно. Наконец, компонуя мероморфную функцию f с проекцией p, мы получаем двоякопериодическую мероморфную функцию на $\mathbb{C}$; мы будем обозначать эту последнюю той же буквой f.

Теперь воспользуемся «усиленным принципом аргумента», сформулированным в замечании 10.8. Если положить в нем $h(z) = z$, то получится следующее:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} z\frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = p_1z_1 + \ldots + p_nz_n. \tag{14.3}$$

Преобразуем интеграл в левой части (14.3):

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} z\frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \underbrace{\int_w^{w+\omega_1} z\frac{f'(z)\,dz}{f(z)}}_{I_1} + \underbrace{\int_{w+\omega_1}^{w+\omega_1+\omega_2} z\frac{f'(z)\,dz}{f(z)}}_{I_2} +\\ + \underbrace{\int_{w+\omega_1+\omega_2}^{w+\omega_2} z\frac{f'(z)\,dz}{f(z)}}_{I_3} + \underbrace{\int_{w+\omega_2}^{w} z\frac{f'(z)\,dz}{f(z)}}_{I_4}\end{aligned} \tag{14.4}$$

(через $\int_w^{w+\omega_1}$ обозначен интеграл по отрезку с концами w и $w+\omega_1$, ориентированному от w к $w+\omega_1$, остальные обозначения имеют аналогичный смысл).

Поскольку функция f, и тем самым f'/f, периодична с периодами ω_1 и ω_2, мы имеем равенство

$$\begin{aligned}-I_3 = \int_{w+\omega_2}^{w+\omega_1+\omega_2} z\frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \int_w^{w+\omega_1}(u-\omega_2)\frac{f'(u)\,du}{f(u)} =\\ = I_1 - \omega_2\int_w^{w+\omega_1}\frac{f'(u)\,du}{f(u)}.\end{aligned}$$

Преобразуя аналогичным образом $-I_4$, получаем отсюда:

$$I_1 + I_3 = \omega_2\int_w^{w+\omega_1}\frac{f'(u)\,du}{f(u)}; \tag{14.5}$$

$$I_2 + I_4 = \omega_1\int_w^{w+\omega_2}\frac{f'(u)\,du}{f(u)}. \tag{14.6}$$

Покажем, что интегралы в правых частях (14.5) и (14.6) равны $2\pi i \times$ (целое число). В самом деле, рассмотрим какую-нибудь первообразную функции f'/f, определенную в окрестности точки w, и продолжим ее аналитически вдоль, скажем, отрезка $[w; w+\omega_1]$ (со вторым из интегралов рассуждение такое же); тогда ясно (из формулы Ньютона–Лейбница, если угодно), что интеграл от $f'(u)\,du/f(u)$ по отрезку $[w; w+\omega_1]$ равен разности значений продолженного ростка в точке $w+\omega_1$ и исходного ростка в точке w. Однако же функция f'/f периодична с периодом ω_1, а всякая первообразная функции f'/f является ветвью логарифма функции f. Следовательно, наш интеграл равен разности значений каких-то двух ветвей функции $\ln f$ в точке w, а эта разность с неизбежностью принадлежит $2\pi i\mathbb{Z}$.

Подставляя значения для $I_1 + I_3$ и $I_2 + I_4$ в формулу (14.4), получаем, с учетом (14.3) и предыдущего наблюдения,

$$p_1 z_1 + \ldots + p_n z_n = \frac{1}{2\pi i}(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) = s\omega_1 + t\omega_2,$$

где $s, t \in \mathbb{Z}$, а это равенство как раз и означает, что $p_1 a_1 + \ldots + p_n a_n = 0$ в E. Необходимость условий (1) и (2) тем самым доказана.

Докажем, что эти условия достаточны. Начнем с простейшего случая:

Лемма 14.9. *Пусть a, b, c, d — четыре точки на E (не обязательно различные), удовлетворяющие условию $a + b = c + d$ (в смысле групповой операции на E). Тогда дивизор $a + b - c - d$ является главным.*

Доказательство леммы. До конца доказательства леммы и всей теоремы 14.8 будем обозначать сложение и вычитание точек на эллиптической кривой знаками $\oplus$ и $\ominus$ (дабы не спутать эти операции с формальным сложением и вычитанием точек, применяемым в записи дивизоров).

Будем рассматривать $\wp$-функцию Вейерштрасса, соответствующую решетке L, как мероморфную функцию на E. Как известно (см. предложение 8.3), $\wp(u) = \wp(v)$ тогда и только тогда, когда $u = v$ или $u = \ominus v$. Поскольку $\wp$ имеет в нуле полюс порядка 2, получаем, что для всякой точки $u \in E \setminus \{0\}$ дивизор $u + (\ominus u) - 2 \cdot 0$ является главным (он имеет вид (f), где $f(z) = \wp(z) - \wp(u)$). Следовательно, для всяких точек $u, x \in E$ дивизор $(x \oplus u) + (x \ominus u) - 2 \cdot x$ также является главным, поскольку это дивизор вида (f), где $f(z) = \wp(z - x) - \wp(u)$. Ясно, что для любых двух точек $a, b \in E$ можно подобрать такие $u, x \in E$, что $a = x \oplus u$, $b = x \ominus u$; поскольку при этом $a \oplus b = 2x$, получаем, что дивизор $a + b - 2x$ является главным; если $c \oplus d = a \oplus b$, то и дивизор $c + d - 2x$ является главным; поскольку разность двух главных дивизоров также является главным дивизором, лемма доказана. $\square$

Пусть теперь $D = a_1 + \ldots + a_n - b_1 - \ldots - b_n$, где $a_1 \oplus \ldots \oplus a_n = b_1 \oplus \ldots \oplus b_n$ в смысле групповой операции на эллиптической кривой. Докажем, что дивизор D является главным, индукцией по n. В самом деле, при $n = 1$ из условия следует, что $D = 0$, и такой дивизор является главным по тривиальной причине (в качестве искомой функции f можно взять ненулевую константу), при $n = 2$ дивизор является главным по лемме 14.9; если же $n > 2$, то найдем такую точку $c \in E$, что $a_1 \oplus a_2 = b_1 \oplus c$; тогда дивизор $D' = a_1 + a_2 - b_1 - c$ является главным по лемме 14.9, а дивизор $D - D' = c + a_3 + \ldots + a_n - b_2 - \ldots - b_n$ является главным по предположению индукции, так как в него входят $n - 1 < n$ точек с положительными коэффициентами, и при этом $c \oplus a_3 \oplus \ldots \oplus a_n = b_2 \oplus \ldots \oplus b_n$ по построению. Значит, и дивизор $D = D' + (D - D')$ является главным. Этим завершается доказательство достаточности и всей теоремы. $\square$

Доказанная нами теорема называется теоремой Абеля–Якоби (точнее говоря, это ее частный случай для эллиптических кривых).

Теоремы Абеля–Якоби и Римана–Роха — два ключевых факта классической теории компактных римановых поверхностей; вооружившись ими, можно начать развивать эту теорию (называемую также «теорией алгебраических кривых над $\mathbb{C}$») и получить множество замечательных результатов. Вы сможете узнать об этом из других книг (см. «Литературные указания» в конце), а наша книга на этом заканчивается.

Задачи

Этот набор задач ни в коей мере не претендует на то, чтобы служить задачником по комплексному анализу. Многие из приводимых ниже задач предлагались на практических занятиях в Независимом московском университете.

Элементарные функции

Напомним, что экспонента от комплексного числа определяется по формуле

$$e^z = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j!},$$

а синус и косинус — по формулам

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Логарифмы и корни определить на всем $\mathbb{C}$ невозможно, но на всяком *односвязном* множестве $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ можно определить (не одним способом!) функцию, обратную к $z \mapsto z^n$ или $z \mapsto e^z$; всякую такую функцию называют «логарифмом» или «корнем n-й степени» (точнее говоря, «однозначной ветвью» логарифма или корня).

1. Докажите, что: а) $e^z = e^w$ тогда и только тогда, когда $z - w = 2\pi i n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) решения уравнений $\sin z = 0$ и $\cos z = 0$ над $\mathbb{C}$ — такие же, как над $\mathbb{R}$.

Будем говорить, что $f(a) = \infty$, если $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$; через $f(\infty)$ будем обозначать $\lim_{|z| \to \infty} f(z)$ (если этот предел существует). Через $\overline{\mathbb{C}}$ обозначим «сферу Римана» — множество $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

2. Существует ли предел $\lim_{|z| \to \infty} f(z)$ для следующих функций: а) f — многочлен степени n; б) $f(z) = \sin z$; в) $f(z) = e^z$?

Пусть $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ — невырожденная матрица с комплексными коэффициентами; она определяет *дробно-линейное отображение* из $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$, заданное формулой $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$. Как известно, дробно-линейные отображения переводят прямые и окружности в прямые и окружности.

3. Постройте дробно-линейное отображение, задающее взаимно однозначное отображение единичного круга $\Delta=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ на верхнюю полуплоскость $H=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z)>0\}$.

4. Докажите, что всякое нетождественное дробно-линейное отображение (рассматриваемое как отображение из $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$) имеет либо одну, либо две неподвижные точки.

5. Докажите, что всякое дробно-линейное отображение сопряжено (с помощью дробно-линейного отображения) либо отображению вида $z\mapsto z+a$, где $a\in\mathbb{C}$, либо отображению вида $z\mapsto\lambda z$, где $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(Дробно-линейное отображение, сопряженное отображению $z\mapsto z+a$, называется *параболическим*; если дробно-линейное отображение сопряжено отображению $z\mapsto\lambda z$, где $|\lambda|=1$, оно называется *эллиптическим*; остальные дробно-линейные отображения называются *локсодромическими.*)

6. Докажите, что дробно-линейное отображение переводит верхнюю полуплоскость H в себя тогда и только тогда, когда его можно задать матрицей $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ с вещественными коэффициентами и положительным определителем.

7. Найдите образ полосы $U_{a,b}=\{z:a<\mathrm{Im}(z)<b\}$ при отображении $f(z)=e^z$. При каких a и b отображение f будет взаимно однозначно на $U_{a,b}$?

8. Найдите образ полуплоскости $H_a=\{z:\mathrm{Re}(z)>a\}$ при отображении $f(z)=z^2$. При каких a отображение f будет взаимно однозначно на H_a?

9. Найдите образ множества $U_a=\{z:|z|>a\}$ при отображении $z\mapsto z+(1/z)$. При каких a это отображение будет взаимно однозначно на U_a?

10. Постройте элементарную функцию, взаимно однозначно отображающую угол $\{z:-\pi/6<\arg(z)<\pi/6\}$ на верхнюю полуплоскость (элементарная функция — это то, что получается композицией из рациональных функций, экспонент, корней и логарифмов).

11. Постройте элементарную функцию, взаимно однозначно отображающую полукруг $\{z:\mathrm{Im}(z)>0,|z|<1\}$ на верхнюю полуплоскость.

12. Постройте элементарную функцию, взаимно однозначно отображающую единичный круг с центром в нуле на полосу $\{z : 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$.

13. Пусть P — многочлен степени n с комплексными коэффициентами и Γ — такая окружность с центром в нуле, что все корни P лежат внутри Γ. Сколько оборотов вокруг нуля делает образ этой окружности при отображении $z \mapsto P(z)$?

14. Нарисуйте образ окружности с центром 3 и радиусом 4 при отображении $z \mapsto z^2 + z + 1$.

Функции голоморфные и не очень

Если не оговорено противное, через U будет обозначаться открытое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

15. Пусть $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Выразите ее якобиан в точке $z \in U$ через $f'(z)$.

16. Пусть $f\colon U \to \mathbb{C}$ — гладкое отображение (не предполагаемое голоморфным). Выразите его якобиан через $\partial f/\partial z$ и $\partial f/\partial \overline{z}$.

Будем называть *сжатием* эллипса с полуосями a и b (где $a > b$) число $(a - b)/(a + b)$.

17. Пусть $f\colon U \to \mathbb{C}$ — сохраняющее ориентацию гладкое отображение (не предполагаемое голоморфным) с невырожденной производной. Его производная переводит окружности в эллипсы. Выразите сжатие получающихся эллипсов через $\partial f/\partial z$ и $\partial f/\partial \overline{z}$.

18. В условиях предыдущей задачи выразите через $\partial f/\partial z$ и $\partial f/\partial \overline{z}$ угол, образуемый большой полуосью эллипса с действительной осью.

19. Приведите пример функции, непрерывной на окружности и не продолжающейся до функции, непрерывной в круге и голоморфной в его внутренности. [Указание: таких много.]

20. Гладкая функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ называется *гармонической*, если локально она является вещественной частью голоморфной функции. Докажите, что f гармонична тогда и только тогда, когда она удовлетворяет «уравнению Лапласа»

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

21. Гладкие функции $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ называются *гармонически сопряженными*, если функция $f + ig$ голоморфна (в этом случае, естественно, сами f и g будут гармоническими). Докажите, что для всяких гармонической функции $f\colon U \to \mathbb{R}$ и точки $z \in U$ существует окрестность $U' \ni z$ и функция $g\colon U' \to \mathbb{R}$, гармонически сопряженная к f в U' (иными словами, гармонически сопряженная функция всегда существует локально).

22. Приведите пример открытого множества U и гармонической функции $f\colon U \to \mathbb{C}$, для которой не существует гармонически сопряженной функции на всем U.

23. Пусть $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, не обращающаяся в нуль. Докажите, что функция $z \mapsto \ln|f(z)|$ является гармонической.

24. Пусть функция f гармонична в окрестности замкнутого диска с центром a и радиусом r. Покажите, что

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\,d\theta$$

(«значение гармонической функции в центре круга равно среднему от ее значений на окружности»). [Указание: примените формулу Коши.]

25. Пусть функция f непрерывна в области $D \subset \mathbb{C}$ с гладкой границей и принадлежит классу C^1 в $\operatorname{int} D$; докажите, что для всякого $a \in \operatorname{int} D$ имеет место формула

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)\,dz}{z-a} - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\partial f/\partial\overline{z}}{z-a}\,dx \wedge dy,$$

где x и y — действительная и мнимая часть числа z («формула Коши–Грина»).

26. Пусть открытое множество $U \subset \mathbb{C}$ связно и $a \in U$. Предположим, что последовательность голоморфных в U функций $\{f_n\}$ удовлетворяет следующим условиям: $f_n(a) = 0$ для всех n, и последовательность $\{\operatorname{Re}(f_n)\}$ сходится в U равномерно на компактах. Докажите, что последовательность $\{f_n\}$ сходится в U равномерно на компактах. До какой степени можно ослабить условие $f_n(a) = 0$?

Локальные свойства

Задачи на локальные свойства голоморфных функций чем-то похожи на задачи по планиметрии: их тоже очень много, и среди них тоже много непростых. Не огорчайтесь, если что-то не получится.

27. Пусть f — целая функция, не являющаяся постоянной. Положим $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Докажите, что $\lim_{r\to+\infty} M(r) = +\infty$.

28. Точки $P_1, \ldots, P_n$ лежат вне круга, ограниченного окружностью с центром в точке O. Докажите, что на этой окружности существует точка, для которой произведение расстояний до точек $P_1, \ldots, P_n$ больше, чем $OP_1 \cdot \ldots \cdot OP_n$, а также точка, для которой это произведение меньше, чем $OP_1 \cdot \ldots \cdot OP_n$.

29. Пусть функция f голоморфна в единичном круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$, причем для всех $z \in \Delta$ выполнено тождество

$$(\operatorname{Re} f(z))^2 + 4(\operatorname{Im} f(z))^2 = 1.$$

Докажите, что f — константа.

30. Докажите, что открытые множества $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\}$ и $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, 3\}$ неизоморфны.

31. Пусть f — целая функция, не являющаяся многочленом. Положим $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Докажите, что

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = +\infty.$$

32. Пусть P — многочлен степени n от одной переменной с комплексными коэффициентами. Положим $M(r) = \max_{|z|=r} |P(z)|$. Докажите, что функция $r \mapsto M(r)/r^n$ монотонно убывает на $(0; +\infty)$. [Указание: принцип максимума.]

33. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$, и пусть непостоянная функция $f\colon D \to \mathbb{C}$ непрерывна в D, голоморфна в $\operatorname{int} D$, и $|f(z)| = 1$ для всех $z \in \partial D$. Докажите, что функция f имеет нуль в $\operatorname{int} D$.

34. Докажите, что проколотый диск $\Delta^* = \{z : 0 < |z| < 1\}$ неизоморфен кольцу $A = \{z : a < |z| < b\}$ $(0 < a < b < \infty)$.

35. Пусть функции f, g и h голоморфны и непостоянны на связном открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$. Докажите, что функция

$$z \mapsto |f(z)| + |g(z)| + |h(z)|$$

не может иметь в U локального максимума. [Указание: если сразу не выйдет, попробуйте вернуться к этой задаче после задачи 36.]

36. Пусть функция f непрерывна в диске $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ и голоморфна в его внутренности. Покажите, что

$$|f(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|\, d\theta.$$

[Указание: вспомните «теорему о среднем» (задача 24).]

37. Пусть $U = \{z : r_1 < |z| < r_2\}$ и $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Положим $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Покажите, что функция $r \mapsto M(r)$ может иметь на интервале $(r_1; r_2)$ не более одного локального минимума.

38. Функция f непрерывна на замкнутом круге $D = \{z : |z| \leqslant 1\}$ и голоморфна в его внутренности. Дано, что все значения f на границе круга вещественны. Докажите, что f — константа.

39. Пусть $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ и $\mathcal{M}$ — множество всех голоморфных отображений $f\colon \Delta \to \Delta$, для которых $f(0) = 2/3$ (не обязательно сюръективных). Найдите $\sup_{f \in \mathcal{M}} |f'(0)|$. [Указание: вам поможет лемма Шварца.]

40. Докажите, что не существует функции f, голоморфной в единичном круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ и обладающей следующими свойствами: $|f(z)| < 1$ для всех $z \in \Delta$, $f(0) = 1/2$, $f(1/2) = 7/8$.

41. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$, и пусть непостоянная функция $f\colon D \to \mathbb{C}$ непрерывна в D и голоморфна в $\operatorname{int} D$. Предположим, что f обращается в нуль в точках $a_1, \ldots, a_n \in \operatorname{int} D$ (не обязательно только в них). Докажите, что

$$|f(0)| \leqslant \max_{z \in D} |f(z)| \cdot \prod_{j=1}^{n} |a_j|.$$

42. Пусть функция f голоморфна и ограничена в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$. Докажите, что множество ее нулей в Δ не может состоять из всевозможных чисел вида $n/(n+1)$, где n — целое положительное число. [Указание: см. задачу 41.]

43. (Для знакомых с рядами Фурье.) Пусть $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ и $f\colon \partial\Delta \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Докажите, что f продолжается до функции, непрерывной на Δ и голоморфной в $\operatorname{int}\Delta$, тогда и только тогда, когда $\int_{\partial\Delta} z^n f(z)\,dz = 0$ при всех целых $n \geqslant 0$. [Указание: помимо рядов Фурье, надо будет воспользоваться принципом максимума.]

44. Пусть функции f и g непрерывны на ограниченной области D с кусочно-гладкой границей и голоморфны в ее внутренности. Пердположим, что при всех $z \in \partial D$ выполнено неравенство $|f(z)| > |g(z)|$. Докажите, что функции f и $f+g$ имеют (с учетом кратности) одинаковое количество нулей во внутренности D.

45. $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ — голоморфная и однолистная функция в единичном круге Δ. Найдите площадь области $f(\Delta)$.

46. $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ — голоморфная, однолистная и ограниченная функция в единичном круге. Докажите, что $|a_n| = O(1/\sqrt{n})$.

Несколько задач о функциях нескольких переменных

47. Пусть $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, удовлетворяющая условию $|f(z)| = O(\|z\|^N)$, где $N > 0$, $\|z\| = \max(|z_1|, \ldots, |z_n|)$. Докажите, что f — многочлен.

48. Пусть U — открытое подмножество в $\mathbb{C}^n$, $L \subset \mathbb{C}^n$ — гиперплоскость (комплексная) и f — голоморфная и ограниченная функция в $U \setminus L$. Докажите, что f продолжается до функции, голоморфной на всем U (многомерный аналог теоремы Римана о продолжении).

49. Пусть Δ — полидиск в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ с центром в начале координат, $L = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \Delta : z_1 = z_2 = 0\}$ и f — голоморфная функция в $\Delta \setminus L$. Докажите, что f продолжается до функции, голоморфной на всем Δ.

Римановы поверхности

50. Докажите, что всякое голоморфное отображение из $\overline{\mathbb{C}}$ в эллиптическую кривую является константой. [Это немедленно следует из формулы Римана–Гурвица (см. следствие 7.6), но нельзя ли найти более элементарное решение?]

51. Докажите, что не существует непостоянного голоморфного отображения $f\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$, где X — компактная риманова поверхность, имеющего ровно одно критическое значение.

52. Пусть существует непостоянное голоморфное отображение из компактной римановой поверхности X на сферу Римана $\overline{\mathbb{C}}$ с двумя критическими значениями (алгебраический геометр сказал бы: «разветвленное над двумя точками»); что можно сказать о поверхности X?

(Теорема Г. А. Белого гласит, что отображение $f\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$, разветвленное над тремя точками, существует тогда и только тогда, когда X изоморфна римановой поверхности, соответствующей уравнению $F(z, w) = 0$, где F — многочлен с коэффициентами, являющимися алгебраическими числами.)

53. Найдите род римановой поверхности, соответствующей уравнению $w^2 = P(z)$, где P — многочлен степени n без кратных корней. (Такие римановы поверхности называются *гиперэллиптическими*; эллиптические кривые подходят под наше определение, но гиперэллиптическими их обычно не называют; всякая риманова поверхность рода 2 является гиперэллиптической — см. задачу 65; в роде > 2, напротив, большинство римановых поверхностей гиперэллиптическими не являются.)

54. На римановой поверхности из задачи 53 функция w является мероморфной; найдите ее нули и полюсы (вместе с их кратностями).

55. Постройте на гиперэллиптической римановой поверхности рода g (см. задачу 53) g штук линейно независимых голоморфных форм.

56. Пусть f — мероморфная функция на компактной римановой поверхности X. Докажите, что сумма кратностей ее нулей равна сумме кратностей ее полюсов. [Найдите решение, не использующее вычетов.]

57. Найдите род римановой поверхности, соответствующей уравнению $z^n + w^n = 1$. (На самом деле таков будет род любой римановой поверхности, соответствующей уравнению $F(z,w) = 0$, где F — многочлен «общего положения» степени n; можете попробовать это доказать.)

58. Пусть $P \in \mathbb{C}[z,w]$ — неприводимый многочлен и $X \subset \mathbb{C}^2$ — множество таких точек (z,w), что $P(z,w) = 0$ и хотя бы одна из частных производных многочлена P отлична от нуля в этой точке. Тогда X является (некомпактной) связной римановой поверхностью. Докажите, что всякая ограниченная голоморфная функция на X является константой.

59. Докажите, что на сфере Римана нет ненулевых голоморфных форм.

60. Докажите, что пространство голоморфных форм на компактной римановой поверхности конечномерно.

61. На компактной римановой поверхности X выбрано n точек $a_1, \ldots, a_n$. Докажите, что для любых n чисел $t_1, \ldots, t_n$, удовлетворяющих условию $t_1 + \ldots + t_n = 0$, существует мероморфная форма ω на X, имеющая в каждой точке a_i простой полюс с вычетом t_i и не имеющая других полюсов.

62. Пусть X — компактная риманова поверхность. Докажите, что для всякой точки $a \in X$ и всякого целого числа $n > 1$ существует мероморфная форма на X, имеющая в точке a полюс порядка n и не имеющая других полюсов.

63. Пусть X — компактная риманова поверхность положительного рода и $a \in X$. Докажите, что на X существует голоморфная форма, не обращающаяся в нуль в точке a.

64. Докажите, что всякая компактная риманова поверхность рода 1 является эллиптической кривой. [Указание: пользуясь теоремой Римана–Роха, постройте мероморфные функции, аналогичные по своим свойствам $\wp$ и $\wp'$.]

65. Докажите, что всякая компактная риманова поверхность рода 2 является гиперэллиптической кривой. [Указание: пользуясь теоремой Римана–Роха, постройте мероморфную функцию с двумя простыми полюсами.]

66. Докажите, что компактная риманова поверхность является эллиптической кривой тогда и только тогда, когда на ней существует голоморфная форма без нулей.

67. Пусть X — компактная риманова поверхность рода g и $a_1, \ldots, a_g \in X$ — набор g точек общего положения. Докажите, что $l(a_1 + \ldots + a_g) = 1$.

68. Докажите, что для всякой компактной римановой поверхности X рода g существует такое непостоянное голоморфное отображение $f\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$, что $\deg f \leqslant g + 1$. (На самом деле существует и отображение f, для которого $\deg f \leqslant [(g + 1)/2] + 1$, но доказать это гораздо труднее.)

Эллиптические кривые

69. Постройте конформное отображение прямоугольника на верхнюю полуплоскость. [Указание: воспользуйтесь $\wp$-функцией.]

70. Какие эллиптические кривые имеют нетривиальный автоморфизм, сохраняющий точку 0 («нетривиальный» означает «отличный от $z \mapsto -z$»)?

71. Найдите j-инвариант эллиптической кривой, являющейся фактором $\mathbb{C}$ по квадратной решетке. [Указание: не пытайтесь считать «в лоб».]

72. Найдите j-инвариант эллиптической кривой, являющейся фактором $\mathbb{C}$ по решетке, порожденной 1 и $e^{\pi i/3}$.

73. У каких точек $z \in H$ стабилизатор относительно действия $SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}$ будет нетривиален?

74. Пусть $G \subset SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$ — подгруппа, разрывно и свободно действующая на верхней полуплоскости. Докажите, что G не содержит эллиптических элементов (см. определение на с. 123), отличных от тождественного преобразования.

75. Выразите ряд Эйзенштейна G_4 через G_2 и G_3.

76. Выразите j-инвариант через G_2 и G_3. [При решении этой задачи поможет программа наподобие `maple`.]

77. Докажите, что эллиптическая кривая изоморфна фактору $\mathbb{C}$ по прямоугольной решетке тогда и только тогда, когда она является римановой поверхностью уравнения $w^2 = P(z)$, где P — многочлен третьей степени с тремя различными вещественными корнями.

78. Докажите, что эллиптическая кривая изоморфна фактору $\mathbb{C}$ по «ромбической» решетке (т. е. решетке, порожденной двумя векторами равной длины) тогда и только тогда, когда она является римановой поверхностью уравнения $w^2 = P(z)$, где P — многочлен третьей степени с вещественными коэффициентами и одним вещественным корнем.

79. Квадратная решетка удовлетворяет условиям как задачи 77, так и задачи 78. Нет ли тут противоречия?

80. Пусть $L \subset \mathbb{C}$ — решетка, порожденная числами 1 и τ, где $\operatorname{Im} \tau \neq 0$, и пусть $\wp$ — соответствующая функция Вейерштрасса. Дано, что $\wp(1/2) = 0$. Запишите в явном виде уравнение какой-нибудь алгебраической функции, риманова поверхность которой изоморфна эллиптической кривой $\mathbb{C}/L$.

81. Докажите, что поле мероморфных функций на эллиптической кривой порождается (над $\mathbb{C}$) функциями $\wp$ и $\wp'$.

Гиперболическая метрика

82. Выпишите гиперболическую метрику на проколотом круге $\Delta^* = \{z : 0 < |z| < 1\}$.

83. Выпишите гиперболическую метрику на кольце $A = \{z : a < |z| < b\}$, где $0 < a < b < \infty$.

84. Найдите площадь компактной римановой поверхности рода $g > 1$ относительно гиперболической метрики.

85. Докажите, что всякое голоморфное отображение из негиперболической римановой поверхности в гиперболическую является константой.

86. Докажите, что всякое голоморфное отображение проколотого диска в компактную риманову поверхность X рода, большего 1, продолжается до голоморфного отображения всего диска в X.

87. f и g — целые функции, удовлетворяющие тождеству $(f(z))^2 + (g(z))^3 = 1$. Докажите, что f и g — константы.

88. Конечна или бесконечна площадь в гиперболической метрике открытого множества $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\}$?

Литературные указания

Книг по теории функций комплексного переменного очень много; приводимый ниже краткий список не претендует на полноту, а авторские оценки заведомо субъективны.

И. И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Гостехиздат, 1948. Возможно, лучший учебник по классической теории функций комплексного переменного. Знакомство с этой книгой многое дает для понимания тех аспектов комплексного анализа, которые были обойдены стороной в нашем кратком курсе.

М. А. Евграфов. Аналитические функции. — М.: Наука, 1965. Эта книга также ориентирована на классическую теорию; по объему она меньше книги Привалова, но отнюдь не является ее подмножеством.

Б. В. Шабат. Введение в комплексный анализ. Часть I. Функции одного переменного. — М.: Наука, 1976. Традиционный университетский учебник. Изложение менее старомодно, чем у Привалова или Евграфова, но и охват материала несколько меньше.

А. Картан. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. — М.: ИЛ, 1963. Очень хороший учебник, написанный в современном стиле и дающий читателю правильную перспективу. Несмотря на 40 лет, прошедших с момента выхода русского издания, книга нимало не устарела.

В. В. Прасолов, *О. В. Шварцман.* Азбука римановых поверхностей. — М.: Фазис, 1999. Записки двух курсов лекций, прочитанных в Независимом московском университете. Неформальное введение в предмет, хорошо дополняющее книгу, которую вы держите в руках.

Дж. Спрингер. Введение в теорию римановых поверхностей. — М.: ИЛ, 1960. Из этой книги читатель сможет узнать, как доказываются теорема Римана–Роха и теорема Абеля–Якоби для произвольного рода, теорема существования Римана

и теорема Кёбе. В последней главе, посвященной компактным римановым поверхностям, излагается ряд ключевых результатов об этом предмете, воспринимавшихся как классические уже в середине XX века.

О. Форстер. Римановы поверхности. — М.: Мир, 1980. Изложение более современное, чем у Спрингера. Теорема Римана–Роха доказывается с помощью когомологий пучков, но эта техника излагается в крайне урезанном виде (о чем автор честно предупреждает), а примеров на ее применение приводится, пожалуй, слишком мало. По сравнению с книгой Спрингера больше внимания уделено открытым римановым поверхностям.

И. Кра. Автоморфные формы и клейновы группы. — М.: Мир, 1975. Еще один (также классический) подход к теории римановых поверхностей, согласно которому они рассматриваются и изучаются как факторы плоских областей по разрывным группам автоморфизмов.

Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. Принципы алгебраической геометрии (в двух томах). — М.: Мир, 1982. Во второй главе первого тома, называющейся «Римановы поверхности и алгебраические кривые», содержится масса интересного материала о компактных римановых поверхностях. Изложение на начинающих не рассчитано.

Ж.-П. Серр. Курс арифметики. — М.: Мир, 1972. В не зависящей от предыдущего материала седьмой главе этой замечательной книги читатель найдет продолжение сюжета, начатого у нас в лекции 9.

Предметный указатель