СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ И КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ*

Г.А. Леонов

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: leonov@math.spbu.ru

УДК 517.9

Обсуждаются понятия аттрактора и B-аттрактора.

Чувствительность траекторий по отношению к начальным данным на странных аттракторах сравнивается с классическими определениями неустойчивости по Ляпунову, по Пуанкаре и по Жуковскому.

В оценки размерностных характеристик аттракторов введены функции Ляпунова. С их помощью получены формулы ляпуновской размерности аттракторов Хенона и Лоренца.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальными проблемами теории странных аттракторов динамических систем являются изучение эффектов чувствительности по отношению к начальным данным и оценивание размерностных характеристик инвариантных множеств [1–27]. В настоящем обзоре эти проблемы рассматриваются с точки зрения классической теории устойчивости движения.

Чувствительность траекторий по отношению к начальным данным на странных аттракторах сравнивается с классическими определениями неустойчивости по Ляпунову, по Пуанкаре и по Жуковскому. Для исследования устойчивости по Жуковскому приводится линейная система первого приближения.

В оценки размерностных характеристик аттракторов введены функции Ляпунова. В этом направлении получены формулы ляпуновской размерности аттракторов Хенона и Лоренца.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 01-01-00317), Совета государственной поддержки ведущих научных школ (грант 00-15-96028), а также программ "Университеты России" и ФЦП "Интеграция"

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ АТТРАКТОРОВ

Аттрактор динамической системы — это притягивающее, замкнутое, инвариантное множество в ее фазовом пространстве. Мы будем рассматривать динамические системы, порожденные дифференциальными

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad t \in \mathbf{R}^1, \; x \in \mathbf{R}^n \tag{1.1}$$

и разностными уравнениями

$$x(t+1) = f(x(t)), \quad t \in \mathbf{Z}, \quad x \in \mathbf{R}^n . \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{R}^n$ — евклидово пространство, $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел, $f(x)$ — вектор-функция: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

Определение 1.1. *Будем говорить, что уравнение (1.1) или (1.2) порождает динамическую систему, если по любому начальному состоянию* $x_0 \in \mathbf{R}^n$ *однозначно определена траектория* $x(t, x_0)$ *при* $t \in [0, +\infty)$.

Здесь $x(0, x_0) = x_0$.

Хорошо известно, что в рассматриваемом случае для решений системы (1.1) справедливо следующее полугрупповое свойство:

$$x(t+s, x_0) = x(t, x(s, x_0)) \tag{1.3}$$

при всех $t \geq 0$, $s \geq 0$.

Имеется много теорем существования и единственности на $[0, +\infty)$ для уравнения (1.1) [28–31], которые можно применять для определения соответствующей динамической системы с фазовым пространством $\mathbf{R}^n$. Уравнения с частными производными, порождающие динамические системы с различными бесконечномерными фазовыми пространствами приведены в [22–27]. Классические результаты теории динамических систем с метрическим фазовым пространством изложены в [32].

Для разностного уравнения (1.2) очевидно, что всегда по начальному условию x_0 однозначно определяется траектория, определенная при всех $t = 0, 1, 2, \ldots$ и обладающая свойством (1.3). Таким образом, уравнение (1.2) всегда порождает динамическую систему с фазовым пространством $\mathbf{R}^n$.

Динамическую систему, порожденную уравнением (1.1), будем называть непрерывной, а уравнением (1.2) – дискретной динамической системой.

Введем определения аттракторов, следуя в основном работе [25].

Определение 1.2. *Будем говорить, что* K *инвариантно, если* $\forall t \geq 0$, $x(t, K) = K$.

Здесь

$$x(t, K) = \{ x(t, x_0) \,|\, x_0 \in K \}.$$

Определение 1.3. *Будем говорить, что инвариантное множество* K *является локально притягивающим, если для некоторой* ε*-окрестности этого множества* $K(\varepsilon)$ *выполнено соотношение*

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(K, x(t, x_0)) = 0, \quad \forall x_0 \in K(\varepsilon).$$

Здесь $\rho(K, x)$ – расстояние от точки x до множества K, которое определяется по формуле

$$\rho(K, x) = \inf_{z \in K} |z - x|.$$

Напомним, что $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbf{R}^n$, $K(\varepsilon)$ – множество точек x, для которых $\rho(K, x) < \varepsilon$.

Определение 1.4. *Будем говорить, что инвариантное множество* K *является глобально притягивающим, если*

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(K, x(t, x_0)) = 0, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}^n.$$

Определение 1.5. *Будем говорить, что инвариантное множество* K *является равномерно локально притягивающим, если для некоторой его* ε*-окрестности* $K(\varepsilon)$ *и для любых числа* $\delta > 0$ *и ограниченного множества* B *существует число* $t(\delta, B) > 0$ *такое, что*

$$x(t, B \cap K(\varepsilon)) \subset K(\delta), \quad \forall t \geq t(\delta, B).$$

Здесь

$$x(t, B \bigcap K(\varepsilon)) = \{x(t, x_0) \big| x_0 \in (B \bigcap K(\varepsilon))\}.$$

Определение 1.6. *Будем говорить, что инвариантное множество* K *является равномерно глобально притягивающим, если для любых числа* $\delta > 0$ *и ограниченного множества* $B \in \mathbf{R}^n$ *существует число* $t(\delta, B)$ *такое, что*

$$x(t, B) \subset K(\delta), \quad \forall t \geq t\,(\delta, B).$$

Определение 1.7. *Будем говорить, что инвариантное множество* K *устойчиво по Ляпунову, если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует число* $\delta > 0$ *такое, что*

$$x(t, K(\delta)) \subset K(\varepsilon), \quad \forall t \geq 0.$$

Заметим, что если K состоит из единственной траектории, то последнее определение совпадает с классическим определением устойчивости решения по Ляпунову. Если такое K является также локально притягивающим, то мы имеем асимптотическую устойчивость в смысле Ляпунова.

Определение 1.8. *Будем говорить, что* K *– аттрактор, если* K *является инвариантным, замкнутым, локально притягивающим множеством.*

Будем говорить, что K *– глобальный аттрактор, если* K *является инвариантным, замкнутым, глобально притягивающим множеством.*

Будем говорить, что K *–* B*-аттрактор, если* K *является инвариантным, замкнутым, равномерно локально притягивающим множеством.*

Будем говорить, что K *– глобальный* B*-аттрактор, если* K *является инвариантным, замкнутым, равномерно глобально притягивающим множеством.*

Тривиальным примером аттрактора является все фазовое пространство $\mathbf{R}^n$, если в нем определены траектории при всех значениях $t \geq 0$. Этот пример показывает, что целесообразно ввести понятие минимального аттрактора – наименьшего инвариантного множества, обладающего свойством притягивания.

Приведем простейшие примеры аттракторов.

Пример 1.1. Рассмотрим уравнение движения маятника

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= z\,, \\ \dot{z} &= -\alpha z - \beta \sin\theta\,, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где α и β – положительные числа. Хорошо известно асимптотическое поведение траекторий уравнения (1.4) (*рис. 1*).

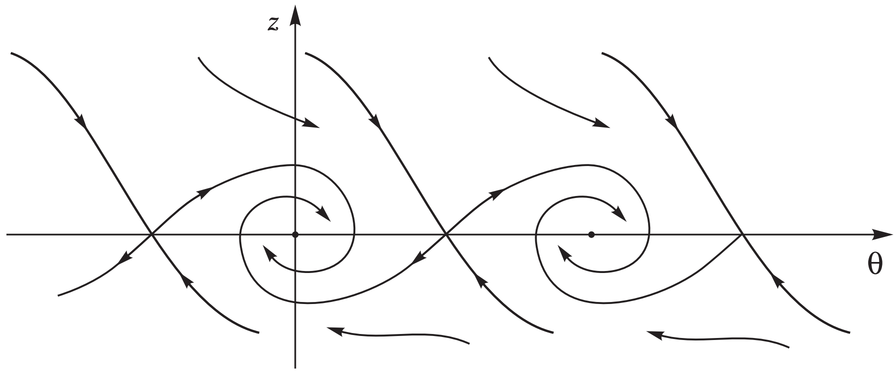

Рис. 1

Любое решение уравнения (1.4) стремится при $t \to +\infty$ к некоторому состоянию равновесия. Поэтому минимальный глобальный аттрактор системы (1.4) – это ее стационарное множество.

Рассмотрим теперь шар B малого радиуса с центром на сепаратрисе седла (*рис. 2*). Образ $x(t, B)$ этого шарика при $t \to +\infty$ стремится к множеству, состоящему из седловой особой точки и двух сепаратрис, выходящих из этой точки и стремящихся при $t \to +\infty$ к асимптотически устойчивым состояниям равновесия (*рис. 2*).

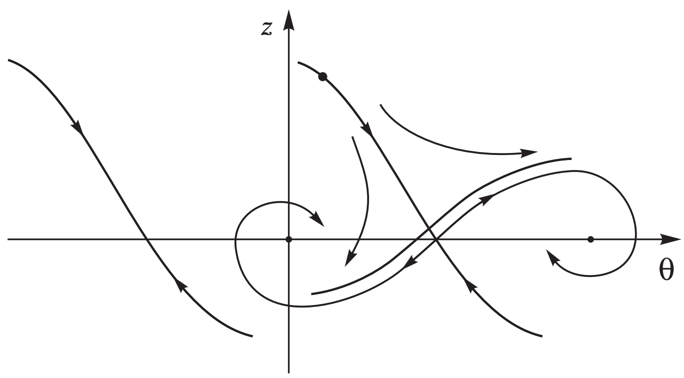

Рис. 2

Таким образом, глобальный минимальный B-аттрактор – это объединение стационарного множества и сепаратрис, выходящих из седловых особых точек (*рис. 3*).

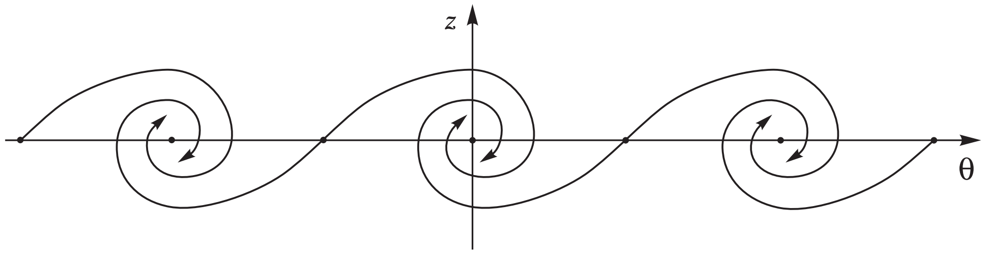

Рис. 3

И в более общих ситуациях B-аттрактор содержит неустойчивые многообразия седловых (гиперболических) особых точек. Этот факт часто используется для оценок снизу топологической размерности аттракторов [22, 23].

Пример 1.2. Рассмотрим уравнения Ван-дер-Поля

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z\,, \\ \dot{z} &= -\mu\,(y^2-1)\,z - y\,, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где μ – положительное число. Хорошо известно [29], что эти уравнения имеют неустойчивое состояние равновесия и предельный цикл, к которому притягиваются при $t \to +\infty$ все траектории за исключением состояния равновесия (*рис. 4*).

Здесь глобальным минимальным аттрактором является множество, состоящее из стационарной точки и предельного цикла. Глобальным минимальным B-аттрактором является множество, ограниченное предельным циклом (*рис. 5*).

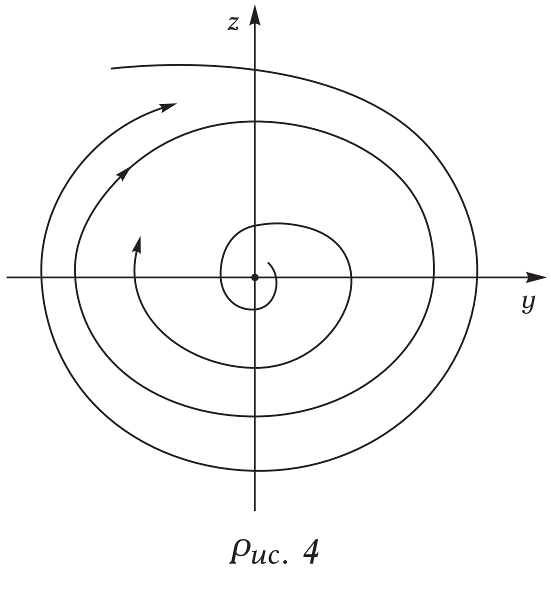

Рис. 4

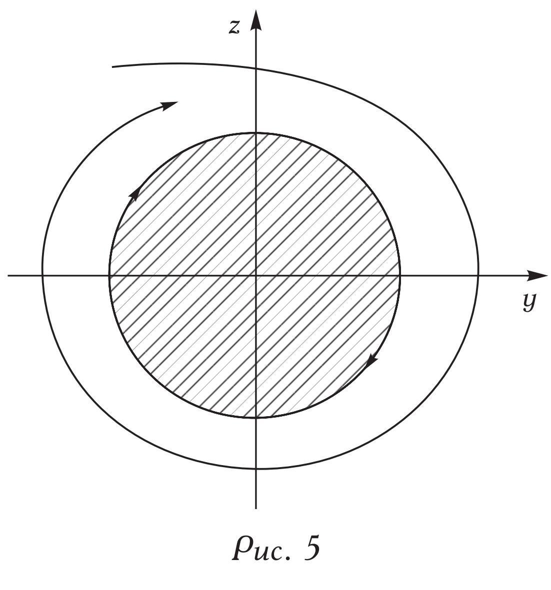

Рис. 5

Пример 1.3. Рассмотрим разностное уравнение (1.2) с $n=1$ и кусочно-линейной функцией $f(x)$

$$\begin{aligned} &f(x)=3x && \text{при } x\in[0,1/2],\\ &f(x)=3(1-x) && \text{при } x\in[1/2,1], \qquad (1.6)\\ &f(x)=0 && \text{при } x\notin[0,1]. \end{aligned}$$

Каждый из двух отрезков $[0,\ 1/3]$ и $[2/3,\ 1]$ отображается на отрезок $[0,\ 1]$, а интервал $(1/3,\ 2/3)$ выбрасывается отображением f за отрезок $[0,\ 1]$. Следовательно,

$$f(f(1/3,\ 2/3))=0\,.$$

Ясно, что при отображении $f(f(\cdot))$ каждый из отрезков $[0,\ 1/9]$, $[2/9,\ 3/9]$, $[6/9,\ 7/9]$, $[8/9,\ 1]$ отображается на отрезок $[0,\ 1]$, а решение $x(2)$ с начальными данными $x(0)$ из интервалов $(1/9,\ 2/9)$, $(1/3,\ 2/3)$, $(7/9,\ 8/9)$ выскакивает из множества $(0,\ 1]$ и, следовательно, для них $x(3)=0$.

Легко видеть, что на N-м шаге при отображении

$$\underbrace{f(f(\ldots f(\cdot)\ldots))}_{N}$$

на $(0,\ 1]$ останутся те решения $x(N)$, начальные данные которых находятся на множествах

$$\left(0,\ \frac{1}{3^N}\right],\ \left[\frac{2}{3^N},\ \frac{3}{3^N}\right],\ \left[\frac{6}{3^N},\ \frac{7}{3^N}\right],\ldots,\left[\frac{3^N-1}{3^N},\ 1\right].$$

Этот процесс выбрасывания середин оставшихся отрезков обычно сопровождают следующим рисунком (*рис. 6*).

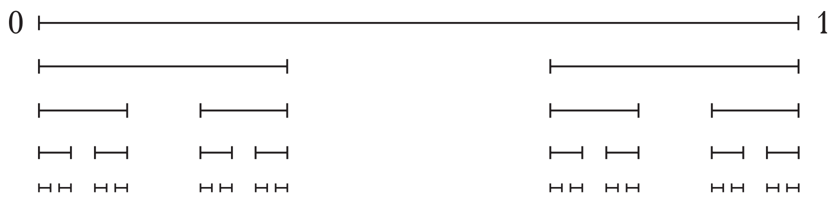

Рис. 6

Ту часть отрезка [0, 1], которая остается после бесконечного числа процедур с выбрасыванием середин оставшихся отрезков, называют канторовским множеством. Обозначим это множество через K.

Ясно, что это множество инвариантно: $f(K) = K$. Отсюда и из того факта, что для $x(0) \in R^1 \setminus K$ выполнено соотношение

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0 ,$$

следует глобальная притягиваемость множества K.

Множество $R^1 \setminus K$ является объединением открытых множеств. Поэтому $R^1 \setminus K$ – открытое множество. Отсюда следует, что K – замкнуто.

Таким образом, K – глобальный аттрактор рассматриваемой системы (1.2), (1.6).

Заметим, что по любому натуральному N можно указать точку $x_0 \in [0,1]$, для которой $x(N, x_0) = 1/2$. Но тогда $x(N+1, x_0) = 3/2$. Последнее означает, что K не является равномерно глобально притягивающим множеством. Таким образом, K – не глобальный B-аттрактор.

Рассмотренные выше примеры показывают существенное отличие определений аттрактора и B-аттрактора. Пример 1.3 показывает, что очень просто задаваемые динамические системы могут иметь аттракторы весьма сложной структуры.

Отметим, что естественными обобщениями понятия аттрактора являются более слабые требования притягивания: на множествах положительной лебеговой меры, почти всюду и т.д. [33–37].

2. СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ И КЛАССИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Одной из основных характеристик странности аттрактора является чувствительность его траекторий по отношению к начальным данным [1–21].

Здесь мы обсудим связь такой "чувствительности" с классическими понятиями неустойчивости. Сначала напомним основные определения устойчивости.

Определение 2.1 [38, 39, 29]. *Траектория $x(t, x_0)$ динамической системы называется устойчивой по Ляпунову, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех y_0, удовлетворяющих неравенству $|x_0 - y_0| \le \delta(\varepsilon)$, выполнено соотношение*

$$|x(t, x_0) - x(t, y_0)| \le \varepsilon , \quad \forall t \ge 0 .$$

Если, кроме того, для некоторого числа δ_0 *и всех* y_0, *удовлетворяющих неравенству* $|x_0 - y_0| \le \delta_0$, *выполнено соотношение*

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t, x_0) - x(t, y_0)| = 0 ,$$

то говорят, что траектория $x(t, x_0)$ *асимптотически устойчива по Ляпунову.*

Введем следующее обозначение:

$$L^+(x_0) = \{x(t, x_0) | t \in [0, +\infty)\} .$$

Определение 2.2 [38, 39, 29]. *Траектория* $x(t, x_0)$ *динамической системы называется устойчивой по Пуанкаре (или орбитально устойчивой), если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует число* $\delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что при всех* y_0, *удовлетворяющих неравенству* $|x_0 - y_0| \le \delta(\varepsilon)$, *выполнено соотношение*

$$\rho(L^+(x_0), x(t, y_0)) \le \varepsilon , \quad \forall t \ge 0 .$$

Если, кроме того, для некоторого числа δ_0 *и всех* y_0, *удовлетворяющих неравенству* $|x_0 - y_0| \le \delta_0$, *выполнено соотношение*

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(L^+(x_0), x(t, y_0)) = 0 ,$$

то говорят, что траектория $x(t, x_0)$ *асимптотически устойчива по Пуанкаре (или асимптотически орбитально устойчива).*

Заметим, что в приведенных выше определениях для непрерывных динамических систем $t \in \mathbf{R}^1$, а для дискретных динамических систем $t \in \mathbf{Z}$.

Введем теперь определение устойчивости по Жуковскому для непрерывных динамических систем. Для этого потребуется рассмотрение следующего множества гомеоморфизмов:

$$Hom = \{\tau(\cdot) | \tau : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \tau(0) = 0\} .$$

Функции $\tau(t)$ из множества Hom будут играть роль перепараметризации времени для траекторий системы (1.1).

Определение 2.3 [40–43]. *Траектория системы (1.1) называется устойчивой по Жуковскому, если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует число* $\delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любого вектора* y_0, *удовлетворяющего неравенству* $|x_0 - y_0| \le \delta(\varepsilon)$, *найдется функция* $\tau(\cdot) \in Hom$, *при которой выполнено неравенство*

$$\left|x(t, x_0) - x(\tau(t), y_0)\right| \le \varepsilon, \quad \forall t \ge 0.$$

Если, кроме того, для некоторого числа $\delta_0 > 0$ *и любого* y_0 *из шара* $\{y \,\big|\, |x_0 - y_0| \le \delta_0\}$ *найдется функция* $\tau(\cdot) \in Hom$, *при которой выполнено соотношение*

$$\lim_{t \to +\infty} \left|x(t, x_0) - x(\tau(t), y_0)\right| = 0,$$

то будем говорить, что траектория $x(t, x_0)$ *асимптотически устойчива по Жуковскому.*

Другими словами, устойчивость по Жуковскому – это устойчивость по Ляпунову при подходящей перепараметризации каждой из возмущенных траекторий.

Напомним, что по определению неустойчивость по Ляпунову (по Пуанкаре, по Жуковскому) – это отрицание соответствующего вида устойчивости.

Для непрерывных динамических систем из устойчивости по Ляпунову следует устойчивость по Жуковскому, а из устойчивости по Жуковскому следует устойчивость по Пуанкаре.

Для дискретных динамических систем из устойчивости по Ляпунову следует устойчивость по Пуанкаре.

Для состояний равновесия все введенные выше определения эквивалентны.

Покажем, что для периодических траекторий дискретных систем эквивалентны определения устойчивости по Ляпунову и по Пуанкаре, а для периодических траекторий непрерывных систем эквивалентны определения устойчивости по Пуанкаре и по Жуковскому.

Пусть периодическая траектория дискретной системы устойчива по Пуанкаре. Выберем ε-окрестность $U(\varepsilon, L^+(x_0))$ периодической траектории $L^+(x_0)$ так, чтобы

$$U(\varepsilon, u) \bigcap U(\varepsilon, z) = \varnothing \tag{2.1}$$

для любых точек $u \in L^+(x_0)$, $z \in L^+(x_0)$, $u \ne z$. Здесь $\varnothing$ – пустое множество.

Рассмотрим y_0 из δ-окрестности точки x_0 и соединим x_0 и y_0 отрезком

$$x_0 + \gamma(y_0 - x_0), \quad \gamma \in [0, 1].$$

Из непрерывности $f(x)$, устойчивости по Пуанкаре и соотношения (2.1) следует, что

$$x(t, x_0 + \gamma(y_0 - x_0)) \in U_\varepsilon(\varepsilon, x(t, x_0)), \quad \forall t \geq 0, \ \forall \gamma \in [0, 1]. \qquad (2.2)$$

Включение (2.2) при $\gamma = 1$ означает устойчивость по Ляпунову траектории $x(t, x_0)$. Отсюда следут эквивалентность определений устойчивости по Пуанкаре и по Ляпунову периодических траекторий дискретных систем.

Аналогично доказывается эквивалентность асимптотической устойчивости по Пуанкаре и по Ляпунову периодических траекторий дискретных систем.

Рассмотрим непрерывную динамическую систему.

Пусть периодическая траектория непрерывной системы устойчива по Пуанкаре. Выберем ε-окрестность $U(\varepsilon, L^+(x_0))$ периодической траектории $L^+(x_0)$ так, чтобы

$$\begin{gathered} U(\varepsilon, L^+(x_0), t_1) \bigcap U(\varepsilon, L^+(x_0), t_2) = \varnothing, \\ \forall t_1 \neq t_2, \quad t_1 \in [0, T), \quad t_2 \in [0, T), \end{gathered} \qquad (2.3)$$

где

$$U(\varepsilon, L^+(x_0), t) = \{y \,|\, |y - x(t, x_0)| \leq \varepsilon, \quad (y - x(t, x_0))^* f(x(t, x_0)) = 0\}.$$

По ε выберем δ так, чтобы из неравенства $|x_0 - y_0| \leq \delta$ следовало соотношение

$$x(t, y_0) \in U(\varepsilon, L^+(x_0)), \quad \forall t \geq 0.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $y_0 \in U(\varepsilon, L^+(x_0), 0)$. Тогда из соотношения (2.3) следует, что можно определить перепараметризацию $\tau(t)$ траектории $x(t, y_0)$ следующим образом

$$x(\tau(t), y_0) \in U(\varepsilon, L^+(x_0), t).$$

Ясно, что $\tau(\cdot) \in Hom$ и выполнено неравенство

$$\left|x(\tau(t), y_0) - x(t, x_0)\right| \leq \varepsilon, \quad t \geq t_0 .$$

Последнее означает устойчивость по Жуковскому.

Аналогично доказывается эквивалентность асимптотической устойчивости по Жуковскому и по Пуанкаре. В этом случае хорошо известна [39] специальная перепараметризация $\tau(t) = t + c$, называемая асимптотической фазой.

Хорошо известны примеры периодических траекторий непрерывных систем, которые неустойчивы по Ляпунову, но устойчивы по Жуковскому [39].

Перейдем теперь к сравнению приведенных выше определений и эффекта чувствительности траекторий по отношению к начальным данным на странных аттракторах.

В компьютерных экспериментах часто оказывается, что траектории, находящиеся на неустойчивом многообразии седловой особой точки, всюду плотно заполняют B-аттрактор (или его часть, состоящую из ограниченных траекторий). Это наблюдается на B-аттракторе системы Лоренца [1]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ (*рис. 7, 8*).

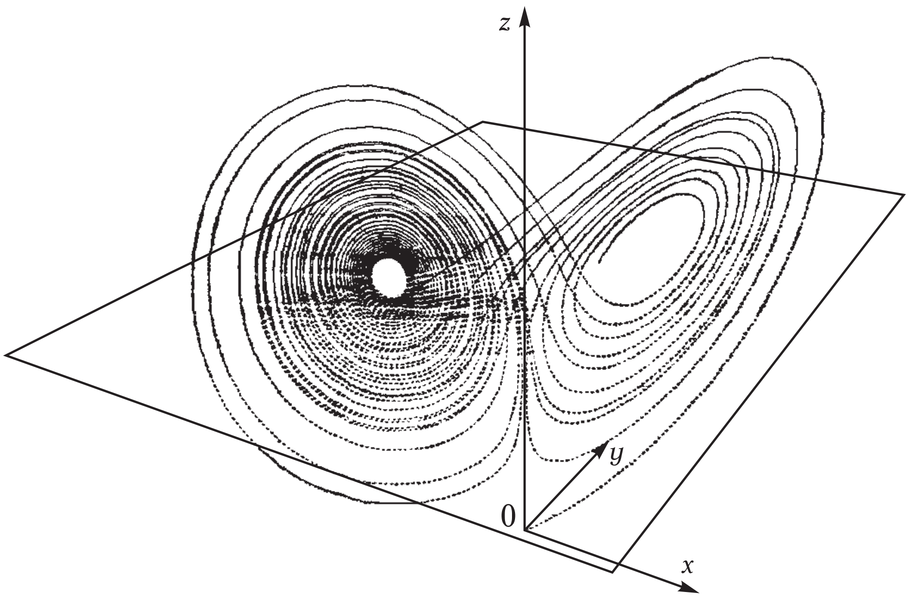

Рис. 7. Неустойчивое многообразие седла системы Лоренца. Первые пятьдесят оборотов

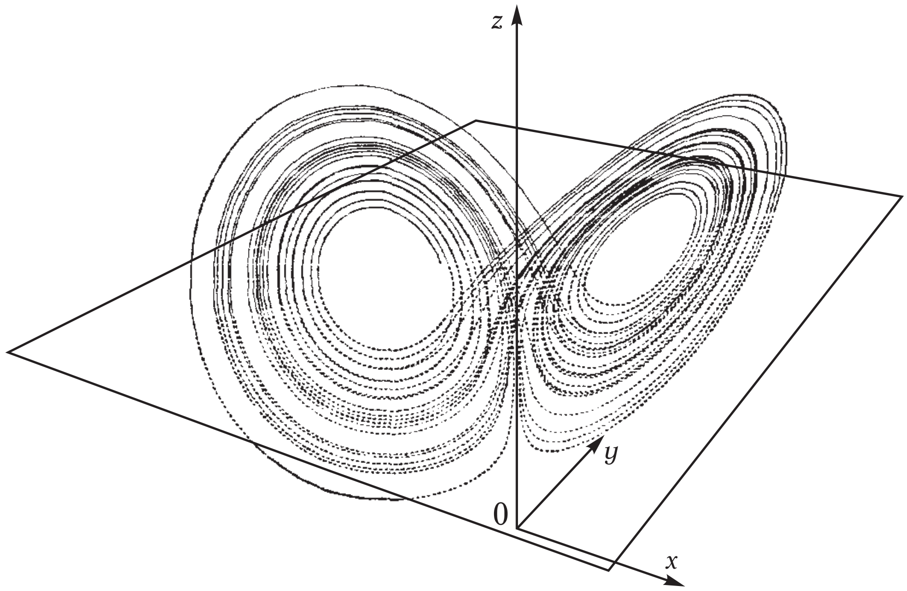

Рис. 8. Неустойчивое многообразие седла системы Лоренца. Следующие пятьдесят оборотов

Аналогичная ситуация имеет место для системы Хенона [44]

$$\begin{aligned} x(t+1) &= a + by(t) - x(t)^2 \, , \\ y(t+1) &= x(t) \, , \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $a = 1{,}4$, $b = 0{,}3$ (*рис. 9*).

Таким образом, для этих систем

$$\rho(L^+(x_0), x(t, y_0)) \equiv 0 \, , \quad \forall x_0 \in M, \; y_0 \in K \, . \tag{2.6}$$

Здесь M – неустойчивое многообразие седла, K – упомянутый выше B-аттрактор (или его часть, состоящая из ограниченных траекторий).

Из соотношения (2.6) следует, что на аттракторе K траектории $x(t, x_0)$ асимптотически устойчивы по Пуанкаре. Последнее означает, что неустойчивость по Пуанкаре не может характеризовать чувствительность по отношению к начальным данным на странных аттракторах.

Хорошо известно [39], что для периодических траекторий непрерывных динамических систем возможна устойчивость по Пуанкаре и неустойчивость по Ляпунову. Таким образом, неустойчивость по Ляпунову также не может характеризовать "отталкивание" друг от друга непрерывных траекторий на странных аттракторах.

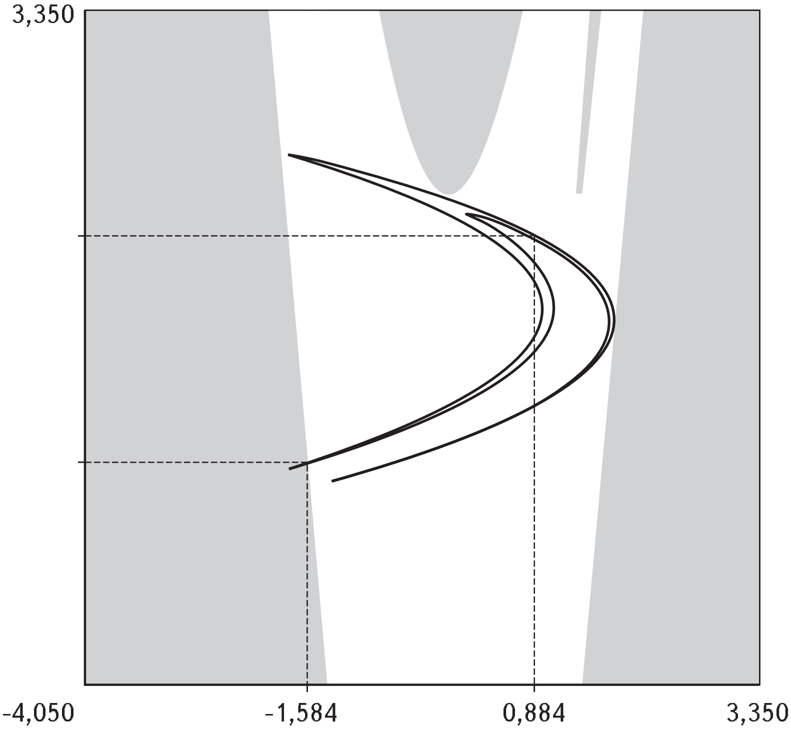

Рис. 9. Неустойчивое многообразие седла системы Хенона. Затемненная часть квадрата – начальные данные, при которых траектории стремятся к бесконечности

Из сказанного выше можно сделать вывод о том, что среди классических понятий неустойчивости наиболее адекватны для изучения странных аттракторов неустойчивость по Жуковскому (в непрерывном случае) и неустойчивость по Ляпунову (в дискретном случае).

Отметим, что при исследовании устойчивости по Жуковскому естественным образом возникает линеаризация, отличная от классической линейной системы первого приближения. Здесь основную роль играет следующее утверждение.

Лемма 2.1 [42]. *Пусть для ограниченного решения* $x(t, x_0)$, $t \geq 0$, *системы (1.1) выполнено неравенство* $\left|f(x(t, x_0))\right| > \varepsilon$ $(\forall t \geq 0)$, *где* ε *– некоторое положительное число. Тогда для любого числа* $T > 0$ *существует число* $\delta(T) > 0$ *такое, что для любого вектора* y_0 *из множества*

$$\{y \big| \left|x_0 - y\right| \leq \delta(T), (y - x_0)^* f(x_0) = 0\}$$

существует дифференцируемая функция $\tau(\cdot) \in Hom$, *для которой выполнены соотношения*

$$(x(t, x_0) - x(\tau(t), y_0))^* f(x(t, x_0)) = 0\,, \quad \forall t \in [0, T]\,,$$

$$\frac{\tau(t)}{dt} = 1 + \frac{f(x(t, x_0))^*}{\left|f(x(t, x_0))\right|^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t, x_0)) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t, x_0)) \right)^* \right) \times$$

$$\times (x(t, x_0) - x(\tau(t), y_0) + O(\left|x(t, x_0) - x(\tau(t), y_0)\right|^2)\,.$$

Здесь и ниже через $(\cdot)^*$ обозначена операция транспонирования (в вещественном случае) или эрмитова сопряжения,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t, x_0))$$

есть матрица Якоби вектор-функции f в точке $x(t, x_0)$, символ $O(v)$ означает, что для достаточно малых v выполнено неравенство $\left|O(v)\right| \le Cv$ с некоторой константой C.

Из этой леммы сразу следует, что для введенной в лемме перепараметризации $\tau(t)$ линейная система первого приближения вдоль траектории $x(t, x_0)$ имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t, x_0)) - g(x(t, x_0)) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t, x_0)) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t, x_0)) \right)^* \right) \right] z\,,$$

$$f(x(t, x_0))^* z = 0\,, \quad g(x(t, x_0)) = \frac{f(x(t, x_0)) f(x(t, x_0))^*}{\left|f(x(t, x_0))\right|^2}\,.$$

Элементы теории устойчивости по первому приближению в смысле Жуковского развивались в [41–43, 45].

Недавно был доказан следующий замечательный результат [46]: ω – предельное множество асимптотически устойчивой по Жуковскому траектории состоит из периодической траектории.

Таким образом, предельные множества асимптотически устойчивых по Жуковскому траекторий устроены достаточно просто. С другой стороны, как было показано выше, неустойчивость по Жуковскому может быть одной из характеристик странных аттракторов.

3. ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА В ОЦЕНКАХ РАЗМЕРНОСТИ АТТРАКТОРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Числовыми характеристиками для гармонических колебаний являются амплитуда, период, частота, для периодических колебаний – их период. В результате многочисленных исследований стало ясно, что и более сложные колебания обладают числовыми характеристиками. Это – размерности аттракторов, соответствующих ансамблям таких колебаний.

Развитая в первой половине двадцатого века теория топологической размерности [47, 48] мало пригодна для того, чтобы дать шкалу размерностных характеристик аттракторов. Дело в том, что топологическая размерность может принимать лишь целочисленные значения, и составленная таким образом шкала размерностных характеристик оказывается слишком бедной.

Для исследования аттракторов более адекватной оказалась хаусдорфова размерность множеств. Эта размерностная характеристика может принимать любые неотрицательные значения и на таких привычных объектах в евклидовом пространстве, как гладкая кривая, поверхность, счетное множество точек, совпадает с топологической размерностью.

Перейдем теперь к определению хаусдорфовой размерности множеств.

Рассмотрим компактное метрическое пространство X с метрикой ρ, подмножество $E \subset X$ и числа $d \geq 0$, $\varepsilon > 0$.

Покроем E шарами с радиусами $r_j < \varepsilon$ и обозначим

$$\mu_H(E, d, \varepsilon) = \inf \sum_j r_j^d,$$

где инфимум берется по всем таким ε-покрытиям E.

Очевидно, что $\mu_H(E, d, \varepsilon)$ не убывает при уменьшении ε. Поэтому существует предел (возможно бесконечный)

$$\mu_H(E, d) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_H(E, d, \varepsilon).$$

Определение 3.1. *Функция* $\mu_H(\cdot, d)$ *называется* d*-мерой Хаусдорфа.*

При фиксированном d функция $\mu_H(E, d)$ обладает всеми свойствами внешней меры на X.

При фиксированном множестве E функция $\mu_H(E, \cdot)$ обладает следующим свойством. Существует такое $d_{kp} \in [0, \infty]$, что

$$\mu_H(E, d) = \infty, \quad \forall d < d_{kp},$$
$$\mu_H(E, d) = 0, \quad \forall d > d_{kp}.$$

Если $X \subset \mathbf{R}^n$, то $d_{kp} \leq n$. Здесь $\mathbf{R}^n$ – евклидово n-мерное пространство.

Положим

$$\dim_H E = d_{kp} = \inf\{d \,|\, \mu_H(E,d) = 0\}.$$

Определение 3.2. *Величина* $\dim_H E$ *называется размерностью Хаусдорфа множества* E.

Пример 3.1. Рассмотрим канторово множество из примера 1.3:

$$E = \bigcap_{j=0}^{\infty} E_j,$$

где $E_0 = [0, 1]$ и E_j состоит из 2^j отрезков длины 3^{-j}, получаемых из отрезков, входящих в E_{j-1}, удалением из них середин открытых интервалов длины 3^{-j} (*рис. 6*).

В классической теории топологической размерности хорошо известно, что $\dim_T E = 0$.

Непосредственно из определения хаусдорфовой размерности легко получить, что $\mu_H(E, d) = 1$ при $d = \log 2 / \log 3 = 0{,}6309\ldots$ и, следовательно,

$$\dim_H E = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Топологическая размерность является инвариантом по отношению к гомеоморфизмам. Хаусдорфова размерность является инвариантом по отношению к диффеоморфизмам, и нецелая хаусдорфова размерность не является инвариантом по отношению к гомеоморфизмам [48].

При исследовании аттракторов динамических систем в фазовом пространстве часто используются гладкие замены координат. Поэтому в таких рассмотрениях достаточно инвариантности по отношению к диффеоморфизмам.

Хорошо известно, что $\dim_T E \le \dim_H E$. Канторовское множество E дает пример, когда это неравенство является строгим.

Приведем теперь два эквивалентных определения фрактальной размерности.

Обозначим через $N_\varepsilon(E)$ минимальное число шаров радиуса ε, необходимое для покрытия множества $E \subset X$.

Введем в рассмотрение числа $d \geq 0$, $\varepsilon > 0$ и положим

$$\mu_F(E, d, \varepsilon) = N_\varepsilon(E)\varepsilon^d,$$
$$\mu_F(E, d) = \overline{\lim_{\varepsilon \to \infty}} \mu_F(E, d, \varepsilon).$$

Определение 3.3. *Фрактальной размерностью множества* E *называется величина*

$$\dim_F E = \inf\{d | \mu_F(E, d) = 0\}.$$

Заметим, что это определение проведено по схеме, аналогичной определению хаусдорфовой размерности. Здесь только покрытие проводится шарами одного и того же радиуса ε.

Определение 3.4. *Фрактальной размерностью множества* E *называется величина*

$$\dim_F E = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{\log N_\varepsilon(E)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

Легко видеть, что

$$\dim_H E \leq \dim_F E.$$

Пример 3.2. Для $X = [0, 1]$ и $E = \{0, 1, 2^{-1}, 3^{-1}, \ldots\}$

$$\dim_H E = 0, \quad \dim_F E = \frac{1}{2}.$$

Обобщения схем введения хаусдорфовой и фрактальной меры, а также размерности и определения различных метрических размерностных характеристик даны в [49]. Оказалось [50–55], что верхней оценкой хаусдорфовой и фрактальной размерности инвариантных множеств является ляпуновская размерность. Дадим здесь определение ляпуновской размерности.

Рассмотрим непрерывно дифференцируемое отображение F открытого множества $U \subset \mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$. Обозначим через $T_x F$ матрицу Якоби отображения F в точке x. Из непрерывной дифференцируемости F следует соотношение

$$F(x+h) - F(x) = (T_x F)h + o(h).$$

В дальнейшем будем предполагать, что множество $K \subset U$ инвариантно относительно преобразования F: $F(K) = K$.

Введем в рассмотрение сингулярные числа $(n \times n)$-матрицы A

$$\alpha_1(A) \geq \ldots \geq \alpha_n(A).$$

Напомним, что сингулярным числом матрицы A называется квадратный корень из собственного значения матрицы $A^* A$.

В дальнейшем часто будет использовано следующее обозначение:

$$\omega_d(A) = \alpha_1(A) \ldots \alpha_j(A) \alpha_{j+1}(A)^s,$$

где $d = j + s$, $s \in [0,1]$, j – целое число из промежутка $[1, n]$.

Определение 3.5. *Локальной ляпуновской размерностью отображения* F *в точке* $x \in K$ *назовем число*

$$\dim_L(F, x) = j + s,$$

где j – *наибольшее целое число из отрезка* $[1, n]$, *для которого*

$$\alpha_1(T_x F) \ldots \alpha_j(T_x F) \geq 1,$$

и число $s \in [0, 1]$, *для которого*

$$\alpha_1(T_x F) \ldots \alpha_j(T_x F) \alpha_{j+1}(T_x F)^s = 1.$$

В случае $\alpha_1(T_xF) < 1$ по определению имеем $\dim_L(F,x) = 0$, а при

$$\alpha_1(T_xF)\ldots\alpha_n(T_xF) \geq 1$$

по определению $\dim_L(F,x) = n$.

Определение 3.6. *Ляпуновской размерностью отображения F множества K назовем число*

$$\dim_L(F,K) = \sup_K \dim_L(F,\, x)\,.$$

Определение 3.7. *Локальной ляпуновской размерностью последовательности отображений F^i в точке $x \in K$ назовем число*

$$\dim_L x = \overline{\lim_{i \to +\infty}} \dim_L(F^i,\, x)\,.$$

Определение 3.8. *Ляпуновской размерностью последовательности отображений F^i множества K назовем число*

$$\dim_L K = \sup_K \dim_L x\,.$$

Для отображений F_t, зависящих от параметра $t \in \mathbf{R}^1$, можно ввести следующие аналоги определений 3.7 и 3.8.

Определение 3.9. *Локальной ляпуновской размерностью отображения F_t в точке $x \in K$ назовем число*

$$\dim_L x = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \dim_L(F_t, x)\,.$$

Определение 3.10. *Ляпуновской размерностью отображения F_t множества K назовем число*

$$\dim_L K = \sup_K \dim_L x\,.$$

Еще раз отметим, что важным свойством ляпуновской размерности является неравенство [53–55] $\dim_F K \le \dim_L K$.

Таким образом,

$$\dim_T K \le \dim_H K \le \dim_F K \le \dim_L K .$$

Отметим также, что ляпуновская размерность может служить характеристикой внутренней неустойчивости динамической системы, определенной на инвариантном множестве K и порожденной семейством отображений F^i или F_t.

Ляпуновская размерность не является размерностной характеристикой в классическом смысле, однако позволяет, во-первых, эффективно оценивать сверху топологическую, хаусдорфову и фрактальную размерности, во-вторых, является характеристикой неустойчивости динамических систем и, в-третьих, хорошо "приспособлена" для исследований методами классической теории устойчивости движения.

Продемонстрируем это, введя в оценки ляпуновской размерности функции Ляпунова. Впервые идея введения функций Ляпунова в оценки размерностных характеристик была высказана в работе [56] и в дальнейшем развивалась в [56–63, 51, 52]. Здесь мы в основном следуем этим идеям.

Введем в рассмотрение $(n \times n)$-матрицы $Q(x)$, зависящие от $x \in \mathbf{R}^n$. Будем предполагать, что

$$\det Q(x) \ne 0 , \quad \forall x \in U,$$

и существуют числа c_1 и c_2, для которых

$$\sup_K \omega_d(Q(x)) \le c_1 ,$$
$$\sup_K \omega_d(Q^{-1}(x)) \le c_2 .$$

Теорема 3.1. *Пусть $F(K) = K$ и для некоторой матрицы $Q(x)$ справедливо неравенство*

$$\sup_K \omega_d(Q(F(x))T_x F Q^{-1}(x)) < 1 . \tag{3.1}$$

Тогда для достаточно больших натуральных i справедлива оценка

$$\dim_L (F^i, K) \le d\,. \tag{3.2}$$

Доказательство. Для матрицы $T_x F^i$ имеем соотношение

$$T_x F^i = (T_{F^{i-1}(x)} F)(T_{F^{i-2}(x)} F)\dots(T_x F)\,.$$

Это соотношение можно записать также следующим образом:

$$T_x F^i = Q(F^i(x))^{-1}(Q(F^i(x))T_{F^{i-1}(x)} F Q(F^{i-1}(x))^{-1}) \times$$

$$\times (Q(F^{i-1}(x))T_{F^{i-2}(x)} F Q(F^{i-2}(x))^{-1}) \times \dots$$

$$\dots \times (Q(F(x))T_x F Q(x)^{-1})Q(x)\,.$$

Отсюда и из хорошо известного свойства [51, 52]

$$\omega_d(AB) \le \omega_d(A)\omega_d(B)$$

получим оценку

$$\omega_d(T_x F^i) \le c_1 c_2 \left[\sup_K \omega_d(Q(F(x))T_x F Q(x)^{-1}\right]^i$$

для всех $x \in K$. Из этой оценки, условия (3.1) теоремы и определения ляпуновской размерности получим оценку (3.2).

Легко видеть, что условие (3.1) инвариантно относительно линейной неособой замены $y = Sx$, где S – постоянная $(n \times n)$-матрица. Ясно, что в новом базисе условие (3.1) будет также выполнено с новой матрицей $Q_1(y)$

$$Q_1(y) = Q(F(S^{-1}y))S\,.$$

В дальнейшем будем рассматривать важный частный случай

$$Q(x) = p(x)S,$$

где S – постоянная невырожденная $(n \times n)$-матрица, $p(x)$ – непрерывная функция: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$, для которой

$$p_1 \leq p(x) \leq p_2, \quad \forall x \in K.$$

Здесь p_1 и p_2 – положительные числа. В этом случае неравенство (3.1) примет вид

$$\sup_K \omega_d\left(\frac{p(F(x))}{p(x)} ST_x FS^{-1}\right) < 1. \tag{3.3}$$

Как будет показано в дальнейшем, множители вида $p(F(x))/p(x)$ в условии (3.3) играют роль функций ляпуновского типа. Особенно наглядно это проявляется при переходе к динамическим системам, порождаемым дифференциальными уравнениями.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in \mathbf{R}^1, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{3.4}$$

где $f(t, x)$ – непрерывно дифференцируемая T-периодическая вектор-функция: $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $f(t + T, x) = f(t, x)$.

Будем предполагать, что решения $x(t, x_0)$ системы (3.4) с начальными данными $x(0, x_0) = x_0$ определены на промежутке $[0, T]$, и обозначим через G_T оператор сдвига по решениям системы (3.4)

$$G_T q = x(T, q).$$

Предположим, что ограниченное множество $K \subset \mathbf{R}^n$ инвариантно относительно оператора G_T

$$G_T K = K.$$

Обозначим через $J(t, x)$ матрицу Якоби вектор-функции $f(t, x)$

$$J(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$$

и рассмотрим невырожденную $(n \times n)$-матрицу S.

Обозначим через $\lambda_1(t, x, S) \geq \ldots \geq \lambda_n(t, x, S)$ собственные значения матрицы

$$\frac{1}{2}[SJ(t, x)S^{-1} + (SJ(t, x)S^{-1})^*].$$

Теорема 3.2. *Предположим, что для целого числа* $j \in [1, n]$ *и числа* $s \in [0, 1]$ *существуют непрерывно дифференцируемая на* $\mathbf{R}^n$ *функция* $v(x)$ *и невырожденная* $(n \times n)$*-матрица* S *такие, что выполнено неравенство*

$$\sup_K \int_0^T [\lambda_1(t, x(t, q), S) + \ldots + \lambda_j(t, x(t, q), S) +$$
$$+ s\lambda_{j+1}(t, x(t, q), S) + \dot{v}(x(t, q))]dt < 0. \tag{3.5}$$

Тогда для достаточно больших i *выполнено неравенство*

$$\dim_L(G_T^i, K) \leq j + s. \tag{3.6}$$

Доказательство. Введем обозначение для матрицы Якоби

$$H(t, q) = \frac{\partial x(t, q)}{\partial q}.$$

Подставляя $x(t, q)$ в (3.4) и дифференцируя обе части равенства (3.4) по q, получим равенство

$$\frac{dH(t, q)}{dt} = J(t, x(t, q))H(t, q).$$

Перепишем это равенство в следующей форме:

$$\frac{d}{dt}[SH(t,q)S^{-1}] = [SJ(t,x(t,q))S^{-1}][SH(t,q)S^{-1}].$$

Для сингулярных значений $\sigma_1(t) \geq \ldots \geq \sigma_n(t)$ матрицы $SH(t,q)S^{-1}$ имеем неравенство [51, 52]

$$\sigma_1 \ldots \sigma_k \leq \exp\left(\int_0^t (\lambda_1 + \ldots + \lambda_k) d\tau\right),$$

для любого $k = 1, \ldots, n.$ Отсюда и из равенства

$$\sigma_1 \ldots \sigma_j \sigma_{j+1}^s = (\sigma_1 \ldots \sigma_j)^{1-s} (\sigma_1 \ldots \sigma_{j+1})^s$$

получим оценку

$$\sigma_1 \ldots \sigma_j \sigma_{j+1}^s \leq \exp\left(\int_0^t (\lambda_1 + \ldots + \lambda_j + s\lambda_{j+1}) d\tau\right). \qquad (3.7)$$

Положим

$$p(x) = (\exp v(x))^{1/(j+s)}$$

и умножим обе части неравенства (3.7) на выражение

$$\left(\frac{p(x(t,q))}{p(q)}\right)^{j+s} = \exp\,[v(x(t,q) - v(q)] = \exp\left(\int_0^t \dot{v}(x(\tau,q)) d\tau\right).$$

В результате получим неравенство

$$\left(\frac{p(x(t,q))}{p(q)}\right)^{j+s} \sigma_1 \ldots \sigma_j \sigma_{j+1}^s \leq$$

$$\leq \exp\left(\int_0^t (\lambda_1 + \ldots + \lambda_j + s\lambda_{j+1} + \dot{v}(x(\tau,q)) d\tau\right).$$

Отсюда следует оценка

$$\alpha_1(t,q)\ldots\alpha_j(t,q)\alpha_{j+1}(t,q)^s \le \exp\left(\int_0^t (\lambda_1(\tau, x(\tau,q),S)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\lambda_j(\tau, x(\tau,q),S)+s\lambda_{j+1}(\tau, x(\tau,q),S)+\dot{v}(x(\tau,q)))d\tau\right), \tag{3.8}$$

где $\alpha_k(t,q)$ – сингулярные числа матрицы

$$\frac{p(x(t,q))}{p(q)}SH(t,q)S^{-1}.$$

Из оценки (3.8) и условия (3.5) теоремы 3.2 следует существование положительного числа ε такого, что для всех $q\in K$ выполнено неравенство

$$\alpha_1(T,q)\ldots\alpha_j(T,q)\alpha_{j+1}(T,q)^s \le \exp(-\varepsilon).$$

Таким образом, здесь выполнено условие (3.3) с $F=G_T$,

$$T_qF=T_qG_T=H(T,q)$$

и, следовательно, выполнена оценка (3.6). Теорема 3.2 доказана.

В дальнейшем будут полезны следующие простые утверждения.

Лемма 3.1. *Предположим, что вещественная матрица A может быть приведена к диагональному виду*

$$SAS^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

где S – вещественная неособая матрица.

Тогда существуют положительные числа c_1 *и* c_2 *такие, что*

$$c_1\left|\lambda_1\ldots\lambda_j\lambda_{j+1}^s\right|^i \le \omega_d(A^i) \le c_2\left|\lambda_1\ldots\lambda_j\lambda_{j+1}^s\right|^i.$$

Для доказательства леммы 3.1 достаточно заметить, что сингулярными значениями матрицы

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

являются числа $\left|\lambda_j\right|$ и для сингулярных чисел $\alpha_1 \ge\ldots\ge \alpha_n$ справедливы неравенства

$$\alpha_n(C)\alpha_j(B) \le \alpha_j(CB) \le \alpha_1(C)\alpha_j(B).$$

Лемма 3.2. *Пусть* $F(x)=x$ *и матрица Якоби* T_xF *отображения* F *имеет простые вещественные собственные значения* $\lambda_1 \ge\ldots\ge \lambda_n$.

Тогда локальная ляпуновская размерность последовательности отображений F^i *в точке* x *равна* $j+s$, *где числа* j *и* s *определяются из равенства*

$$\left|\lambda_1\ldots\lambda_j\lambda_{j+1}^s\right| = 1.$$

Лемма 3.2 является непосредственным следствием леммы 3.1. Аналогичный результат имеет место и для отображения F_t.

Лемма 3.3. *Пусть* $T_xF_t = e^{At}$ *и матрица* A *удовлетворяет условию леммы 3.2.*

Тогда локальная ляпуновская размерность отображения F_t *в точке* x *равна* $j+s$, *где числа* j *и* s *определяются из равенства*

$$\lambda_1+\ldots+\lambda_j + s\lambda_{j+1} = 0.$$

Лемма 3.3 также является следствием леммы 3.1.

Применим теперь теоремы 3.1 и 3.2 к системам Хенона и Лоренца, конструируя функции Ляпунова $p(x)$ (для системы Хенона) и $v(x)$ (для системы Лоренца).

Рассмотрим отображение Хенона F: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$

$$\begin{aligned} &x \to a + by - x^2, \\ &y \to x, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $a > 0$, $b \in (0, 1)$ – параметры отображения.

Будем здесь рассматривать ограниченное инвариантное множество K отображения (3.9): $FK = K$, содержащее стационарные точки этого отображения

$$x_+ = \frac{1}{2}[b - 1 + \sqrt{(b-1)^2 + 4a}],$$
$$x_- = \frac{1}{2}[b - 1 - \sqrt{(b-1)^2 + 4a}].$$

Такое множество K изображено на *рис. 9*.

Теорема 3.3. *Для отображения F справедливо равенство*

$$\dim_L K = 1 + \frac{1}{1 - \ln b \,/\, \ln \alpha_1(x_-)},$$

где

$$\alpha_1(x_-) = \sqrt{x_-^2 + b} - x_-\,.$$

Доказательство. Введем обозначение $\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Матрица Якоби $T_\xi F$ отображения F имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2x & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем матрицу S следующего вида:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$ST_{\xi}FS^{-1} = \begin{pmatrix} -2x & \sqrt{b} \\ \sqrt{b} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Покажем, что сингулярными значениями матрицы (3.10) являются величины

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) &= \sqrt{x^2 + b} + |x|, \\ \alpha_2(x) &= \sqrt{x^2 + b} - |x| = \frac{b}{\alpha_1(x)}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Очевидно, что

$$\alpha_1(x)^2 = 2x^2 + b + 2|x|\sqrt{x^2 + b},$$

$$\alpha_2(x)^2 = 2x^2 + b - 2|x|\sqrt{x^2 + b}.$$

Из этих равенств ясно, что $\alpha_k(x)^2$ являются нулями полинома

$$\lambda^2 - (4x^2 + 2b)\lambda + b^2,$$

который является характеристическим полиномом матрицы

$$\begin{pmatrix} -2x & \sqrt{b} \\ \sqrt{b} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2x & \sqrt{b} \\ \sqrt{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, доказаны формулы (3.11).

Из теоремы 3.1 следует, что если существуют число $s \in [0, 1)$ и непрерывно дифференцируемая положительная на K функция $p(\xi)$ такие, что выполнено неравенство

$$\sup_{\xi \in K} \alpha_1(x)\alpha_2(x)^s \frac{p(F(\xi))}{p(\xi)} < 1, \qquad (3.12)$$

то

$$\dim_L K \le 1 + s.$$

Положим

$$p(\xi) = e^{\gamma(1-s)(x+by)},$$

где γ – положительный варьируемый параметр.

Легко видеть, что выполнено соотношение

$$\frac{p(F(\xi))}{p(\xi)} = e^{\gamma(1-s)(a+(b-1)x-x^2)}.$$

Отсюда следует, что после логарифмирования условие (3.12) принимает вид

$$\sup_K [\ln \alpha_1(x) + s \ln \alpha_2(x) + \gamma(1-s)(a+(b-1)x-x^2)] =$$

$$= \sup_K [(1-s)\ln \alpha_1(x) + s \ln b + \gamma(1-s)(a+(b-1)x-x^2)] < 0.$$

Это неравенство будет выполнено, если

$$s \ln b + (1-s)\varphi(x) < 0, \quad \forall x \in (-\infty, +\infty),$$

где

$$\varphi(x) = \ln[\sqrt{x^2+b} + |x|] + \gamma(a+(b-1)x-x^2).$$

Из неравенств $\gamma > 0$, $b - 1 < 0$ следует оценка

$$\varphi(-|x|) \geq \varphi(|x|).$$

Поэтому достаточно рассмотреть экстремальные точки функции $\varphi(x)$ при $x \in (-\infty, 0]$. Ясно, что на этом множестве

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + b}} + \gamma[(b-1) - 2x], \quad \varphi''(x) < 0.$$

Выбрав

$$\gamma = \frac{1}{(b - 1 - 2x_-)\sqrt{x_-^2 + b}},$$

получим, что $\varphi'(x_-) = 0$ и, следовательно, при таком выборе γ выполнено неравенство

$$\varphi(x) \leq \ln(\sqrt{x_-^2 + b} + |x_-|) = \ln \alpha_1(x_-).$$

Таким образом, неравенство (3.12) выполнено для всех s, удовлетворяющих условию

$$s > \frac{\ln \alpha_1(x_-)}{\ln \alpha_1(x_-) - \ln b}. \tag{3.13}$$

Следовательно, выполнена оценка

$$\dim_L K \leq 1 + s$$

для всех s, удовлетворяющих неравенству (3.13). Переходя к пределу, получим неравенство

$$\dim_L K \leq 1 + \frac{1}{1 - \ln b / \ln \alpha_1(x_-)}. \tag{3.14}$$

Заметим, что точка $x = x_-$, $y = x_-$ является неподвижной для отображения F. При этом

$$\alpha_1(x_-)\alpha_2(x_-)^s = 1, \qquad (3.15)$$

где

$$s = \frac{1}{1 - \ln b / \ln \alpha_1(x_-)}.$$

Легко видеть, что величины $\alpha_1(x_-)$ и $\alpha_2(x_-)$ являются собственными значениями матрицы Якоби $T_\xi F$ отображения F в неподвижной точке $y = x = x_-$:

$$T_\xi F = \begin{pmatrix} -2x_- & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из равенства (3.15) по лемме 3.2 следует, что локальная ляпуновская размерность последовательности отображений F^i в этой стационарной точке равна

$$1 + \frac{1}{1 - \ln b / \ln \alpha_1(x_-)}. \qquad (3.16)$$

Отсюда и из неравенства (3.14) следует утверждение теоремы 3.3.

Заметим, что при $a = 1{,}4$, $b = 0{,}3$ из теоремы 3.3 имеем равенство

$$\dim_L K = 1{,}49532\ldots$$

Рассмотрим систему Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \qquad (3.17)$$

где r, b, σ — положительные числа.

Предположим, что выполнены неравенства $r > 1$,

$$\sigma + 1 \geq b \geq 2. \tag{3.18}$$

Рассмотрим оператор сдвига по траекториям системы (3.17) G_T, где T – произвольное положительное число. Пусть K – инвариантное множество относительно этого оператора G_T. Будем предполагать, что множество K содержит стационарную точку $x = y = z = 0$. Такое множество изображено на *рис.* 7 и 8.

Дадим здесь формулу для ляпуновской размерности $\dim_L K$ множества K относительно последовательности отображений $(G_T)^i$.

Теорема 3.4. *Пусть выполнены неравенства (3.18) и*

$$r\sigma^2(4-b) + 2\sigma(b-1)(2\sigma - 3b) > b(b-1)^2. \tag{3.19}$$

Тогда

$$\dim_L K = 3 - \frac{2(\sigma + b + 1)}{\sigma + 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}. \tag{3.20}$$

Доказательство. Матрица Якоби правой части системы (3.17) имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}.$$

Введем матрицу следующего вида:

$$S = \begin{pmatrix} -a^{-1} & 0 & 0 \\ -\sigma^{-1}(b-1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $a = \dfrac{\sigma}{\sqrt{r\sigma + (b-1)(\sigma - b)}}$. В этом случае

$$SJS^{-1} = \begin{pmatrix} b-\sigma-1 & \sigma/a & 0 \\ \dfrac{\sigma}{a} - az & -b & -x \\ ay + \dfrac{a(b-1)}{\sigma}x & x & -b \end{pmatrix}.$$

Поэтому характеристический полином матрицы

$$\frac{1}{2}((SJS^{-1})^* + (SJS^{-1})) = \begin{pmatrix} b-\sigma-1 & \dfrac{\sigma}{a} - \dfrac{az}{2} & \dfrac{1}{2}\left(ay + \dfrac{a(b-1)}{\sigma}x\right) \\ \dfrac{\sigma}{a} - \dfrac{az}{2} & -b & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(ay + \dfrac{a(b-1)}{\sigma}x\right) & 0 & -b \end{pmatrix}$$

имеет вид

$$(\lambda + b)\left\{\left[\lambda^2 + (\sigma+1)\lambda + b(\sigma+1-b) - \left(\frac{\sigma}{a} - \frac{az}{2}\right)^2\right] - \left[\frac{a(b-1)}{2\sigma}x + \frac{ay}{2}\right]^2\right\}.$$

Отсюда следует, что собственными значениями матрицы

$$\frac{1}{2}[(SJS^{-1})^* + SJS^{-1}]$$

являются величины

$$\lambda_2 = -b,$$

$$\lambda_{1,3} = -\frac{\sigma+1}{2} \pm \frac{1}{2}\left[(\sigma+1-2b)^2 + \left(\frac{2\sigma}{a} - az\right)^2 + \left(\frac{a(b-1)}{\sigma}x + ay\right)^2\right]^{1/2}.$$

Из соотношений (3.18) легко видеть, что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$.

Введем в рассмотрение функцию ляпуновского типа

$$v(x, y, z) = \frac{1}{2} a\theta^2 (1 - s)\left(\gamma_1 x^2 + \gamma_2\left(y^2 + z^2 - \frac{(b-1)^2}{\sigma^2} x^2\right) + \gamma_3 z\right),$$

где $s \in (0, 1)$,

$$\theta^2 = \left(2\sqrt{(\sigma + 1 - 2b)^2 + \left(\frac{2\sigma}{a}\right)^2}\right)^{-1},$$

$$\gamma_3 = -\frac{4\sigma}{ab}, \quad \gamma_2 = \frac{a}{2},$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2\sigma}\left[2\gamma_2 \frac{r\sigma - (b-1)^2}{\sigma} + \gamma_3 + 2\frac{a(b-1)}{\sigma}\right].$$

Рассмотрим выражение

$$2[\lambda_1 + \lambda_2 + s\lambda_3 + \dot{v}] =$$

$$= -(\sigma + 1 + 2b) - s(\sigma + 1) + (1 - s)\varphi(x, y, z),$$

где

$$\varphi(x, y, z) = \left((\sigma + 1 - 2b)^2 + \left(\frac{2\sigma}{a} - az\right)^2 + \left(\frac{a(b-1)}{\sigma} x + ay\right)^2\right)^{1/2} +$$

$$+\theta^2\left\{\left(-2a\gamma_1\sigma + 2\gamma_2 \frac{a(b-1)^2}{\sigma}\right)x^2 - 2a\gamma_2 y^2 -\right.$$

$$\left.-2a\gamma_2 bz^2 + a\left(2\sigma\gamma_1 + 2\gamma_2 \frac{r\sigma - (b-1)^2}{\sigma} + \gamma_3\right)xy - \gamma_3 abz\right\}.$$

Используя очевидное неравенство

$$\sqrt{u} \le \frac{1}{4\theta^2} + \theta^2 u\,,$$

получим оценку

$$\varphi\,(x,\,y,\,z) \le \frac{1}{4\theta^2} + \theta^2 \left\{ (\sigma + 1 - 2b)^2 + \left(\frac{2\sigma}{a}\right)^2 + \right.$$

$$+ \left[-2a\gamma_1\sigma + 2\gamma_2\,\frac{a(b-1)^2}{\sigma} + \frac{a^2\,(b-1)^2}{\sigma^2} \right] x^2 +$$

$$+ [a^2 - 2a\gamma_2]y^2 + [a^2 - 2\gamma_2 ab]z^2 + \left[a\left(2\sigma\gamma_1 + 2\gamma_2\,\frac{r\sigma - (b-1)^2}{\sigma} + \gamma_3 \right) + \right.$$

$$\left. \left. + 2a^2\,\frac{b-1}{\sigma} \right] xy - [\gamma_3 ab + 4\sigma]z \right\}.$$

Заметим, что параметры γ_1, γ_2 и γ_3 выбраны так, чтобы выполнялось соотношение

$$\varphi\,(x,\,y,\,z) \le \frac{1}{4\theta^2} + \theta^2 \left\{ (\sigma + 1 - 2b)^2 + \left(\frac{2\sigma}{a}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left[-2a\gamma_1\sigma + 2\gamma_2\,\frac{a(b-1)^2}{\sigma} + \frac{a^2\,(b-1)^2}{\sigma^2} \right] x^2 \right\}.$$

Легко доказать, что из условия (3.19) при определенных выше параметрах γ_1, γ_2, γ_3 следует неравенство

$$-2a\gamma_1\sigma + 2\gamma_2\,\frac{a(b-1)^2}{\sigma} + \frac{a^2\,(b-1)^2}{\sigma^2} \le 0\,.$$

Таким образом, при всех x, y, z

$$\varphi\ (x,\ y,\ z) \le \sqrt{4r\sigma + (\sigma - 1)^2}\,.$$

Отсюда следует, что для любого числа

$$s < s_0 \ = \frac{\sqrt{4r\sigma + (\sigma - 1)^2}\ - 2b - \sigma - 1}{\sqrt{4r\sigma + (\sigma - 1)^2}\ + \sigma + 1}$$

существует число $\varepsilon > 0$ такое, что при всех x, y, z выполнена оценка

$$\lambda_1(x,\ y,\ z) + \lambda_2(x,\ y,\ z) + s\lambda_3(x,\ y,\ z) + \dot{v}(x,\ y,\ z) < -\varepsilon\,.$$

Устремив s к s_0 справа и используя теорему 3.2, получим оценку

$$\dim_L\ K \le 3 - \frac{2(\sigma + b + 1)}{\sigma + 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2\ + 4r\sigma}}\,. \tag{3.21}$$

Используя лемму 3.3, легко видеть, что локальная ляпуновская размерность стационарной точки $x = y = z = 0$ системы (3.17) равна

$$3 - \frac{2(\sigma + b + 1)}{\sigma + 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2\ + 4r\sigma}}\,. \tag{3.22}$$

Из соотношений (3.21) и (3.22) следует формула (3.20).

Использование аналогичного подхода с построением функций Ляпунова позволили получить формулы ляпуновской размерности для аттракторов диссипативного отображения Чирикова [44].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Чувствительности траекторий по отношению к начальным данным наиболее адекватны неустойчивость по Жуковскому (в непрерывном случае) и неустойчивость по Ляпунову (для дискретных динамических систем).

В оценки размерностных характеристик аттракторов введены функции Ляпунова. С их помощью получены формулы ляпуновской размерности B-аттракторов Хенона и Лоренца. При этом оказалось, что максимум локальной ляпуновской размерности достигается в гиперболическом состоянии равновесия. По-видимому, это свойство экстремальности имеет место для очень широкого класса B-аттракторов.

Литература

1. Странные аттракторы. В сб: Математика. Новое в зарубежной науке, № 22. Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова. М., Мир, 1981, 253 с.
2. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.*
   Стохастические и хаотические колебания. М., Наука, 1987, 423 с.
3. *Schuster H.G.*
   Deterministic Chaos. Weinheim, Physik-Verlag, 1984, 240 p.
   Шустер Г.
   Детерминированный хаос. М., Мир, 1988, 239 с.
4. *Palis J., Takens F.*
   Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations. Gambridge University Press, 1993, 233 p.
5. *Анищенко В.С.*
   Сложные колебания в простых системах. М., Наука, 1990, 311 с.
6. *Sparrow C.*
   The Lorenz equations: bifurcations, chaos and strange attractors. In: Applied Mathematical Sciences. Berlin, Springer-Verlag, 1982, v. 41, 269 p.
7. *Berge P., Pomeau Y., Vidal Ch.*
   Order within Chaos (Towards Deterministic Approach to Turbulence). N.-Y., John Wiley and Sons, 1984, 418 p.
8. *Guckenheimer J.M., Holmes Ph.*
   Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Berlin, Springer-Verlag, 1983, 453 p.
9. *Заславский Г.М.*
   Стохастичность динамических систем. М., Мир, 1984, 271 с.
10. *Lichtenberg A.J., Liberman M.A.*
    Regular and Stochastic Motion. Berlin, Springer-Verlag, 1983, 499 p.
    Лихтенберг А., Либерман М.
    Регулярная и стохастическая динамика. М., Мир, 1984, 528 с.
11. *Berge P., Pomeau Y., Vidal Ch.*
    L'ordre Dans le Chaos: Vers une Approche Deterministe de la Turbulence. Paris, Herman, 1988, 353 s.
12. *Сонечкин Д.М.*
    Стохастичность в моделях общей циркуляции атмосферы. Л., Гидрометеоиздат, 1984, 280 с.

13. *Haken H.*
Advanced Synergetic. Berlin, Springer-Verlag, 1983, 356 p.
Хакен Г.
Синэнергетика. Иерархии неустойчивости в самоорганизующихся системах и устройствах. М., Мир, 1985, 419 с.
14. *Рабинович М.И.*
Стохастические автоколебания и турбулентность. УФН, 1978, т. 125, вып. 1, с. 123–168.
15. *Монин А.С.*
О природе турбулентности. УФН, 1978, т. 125, вып. 1, с. 97–122.
16. *Reitman V.*
Reguläre und chaotische Dynamik. Stuttgart, Teubner, 1996, 252 s.
17. *Arrowsmith D.K., Place C.M.*
An Introduction to Dynamical Systems. Cambridge University Press, Cambridge, 1999, 589 p.
18. *Devaney R.*
An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Menlo Park, Benjamin Commings, 1986, 320 p.
19. Hydrodinamic Instabilities and the Transition to Turbulence. Eds. H.L. Swinney, J.P. Gollub. Springer-Verlag, Berlin, 1981, 292 p.
Гидродинамические неустойчивости и переход к турболентности. Под ред. Х. Суинни, Дж. Голлаб. М., Мир, 1984, 344 с.
20. *Wiggins S.*
Global Bifurcations and Chaos. Analytical Methods. N.-Y., Springer-Verlag, 1988, 494 p.
21. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.*
Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М., Наука, 1989, 277 с.
22. *Бабин А.В., Вишик М.И.*
Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценка их размерности. УМН, 1983, т. 38, вып. 4, с. 133–187.
23. *Бабин А.В., Вишик М.И.*
Аттракторы эволюционных уравнений. М., Наука, 1989, 293 с.
24. *Temam R.*
Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. N.-Y., Springer-Verlag, 1988, 500 p.
25. *Ладыженская О.А.*
О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье-Стокса и других уравнений с частными производными. УМН, 1987, т. 42, вып. 6, с. 25–60.
26. *Ильяшенко Ю.С.*
Слабо сжимающие системы и аттракторы галеркинских приближений уравнений Навье-Стокса на двумерном торе. УМН, 1982, т. 37, вып. 1, с. 31–63.
27. *Чуешев И.Д.*
Глобальные аттракторы в нелинейных задачах математической физики. УМН, 1993, т. 48, вып. 3, с. 135–162.
28. *Hartman P.*
Ordinary Differential Equation. N.-Y., London, Sydney, John Wiley, 1964, 731 p.
Хартман Ф.
Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Мир, 1970, 720 с.
29. *Cesari L.*
Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations. Berlin, Springer-Verlag, 1959, 271 p.

Чезари Л.
Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Мир, 1964, 477 с.

30. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.*
Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М., Наука, 1978, 400 с.
31. *Филиппов А.Ф.*
Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., Наука, 1985, 224 с.
32. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.*
Качественная теория дифференциальных уравнений. М.,Л., Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1947, 448 с.
33. *Milnor J.*
On the concept of attractor. Commun. Math. Phys., 1985, v. 99, p. 177–195.
34. *Ashwin P., Buescu J., Stewart I.*
From attractor to chaotic saddle: a tale of transverse instability. Nonlinearity, 1996, № 9, p. 703–737.
35. *Ashwin P., Terry J.*
On riddling and weak attractors. Physica D, 2000, v. 142, p. 87–100.
36. *Maistrenko Yu., Popovych O., Hasler M.*
On strong and weak chaoctic partial synchronization. Int. J. Bifurcation and Chaoc, 2000, v. 10, № 1, p. 179–203.
37. *Maistrenko Yu., Maistrenko V., Popovich A., Mosekilde E.*
Transverse instability and riddled basins in a system of two coupled logistic maps. Phys. Rev. E, 1998, v. 57, № 3, p. 2713–2724.
38. *Ляпунов А.М.*
Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892, 250 с.
39. *Демидович Б.П.*
Лекции по математической теории устойчивости. М., Наука, 1967, 472 с.
40. *Жуковский Н.Е.*
О прочности движения. Собрание сочинений, т. 1. М., Гостехиздат, 1948, с. 67–160.
41. *Леонов Г.А., Пономаренко Д.В.*
Критерии орбитальной устойчивости траекторий динамических систем. Изв. вузов. Математика, 1993, № 4, с. 88–94.
42. *Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V.B.*
Local instability and localization of attractors. From stochasitc generator to Chua's systems. Acta Appl. Math., 1995, v. 40, p. 179–243.
43. *Леонов Г.А.*
Об устойчивости по первому приближению. ПММ, 1998, т. 69, вып. 4, с. 548–555.
44. *Леонов Г.А., Полтинникова М.С.*
О ляпуновской размерности аттрактора диссипативного отображения Чирикова. Тр. СПб. мат. об-ва, 2002, т. 10, с. 186–198.
45. *Дунаева О.В.*
Признаки асимптотической прочности и непрочности движения динамической системы. Доклады РАН, 1997, т. 315, № 4, с. 476–478.
46. *Yang X.*
Lyapunov asymptotical stability and Zhukovskij asymptotical stability. Chaos, Solutions and Fractals, 2000, № 11, p. 1995–1999.
47. *Kuratowski K.*
Topology. Academic press, N.-Y., 1966, 581 p.
Куратовский К.
Топология. М., Мир, 1966, 594 с.
48. *Hurewicz W., Wallman H.*
Dimension Theory. Princeton University Press, 1941, 230 p.

Гуревич В., Волмэн Г.
Теория размерности. М., Изд-во иностр. лит., 1946, 232 с.

49. *Песин Я.Б.*
Характеристики размерностного типа для инвариантных множеств динамических систем. УМН, 1988, т. 43, вып. 4, с. 95–128.

50. *Douady A., Oesterle J.*
Dimension de Hausdorff des attracteurs. C.R. Acad. Sci., Paris, 1980, ser. A. 290(24), p. 1135–1138.

51. *Leonov G.A., Burkin I.M., Shepeljavyj A.I.*
Frequency Methods in Oscillaton Theory. Dordrecht, Kluwer, 1996, 400 p.

52. *Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V.B.*
Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis. Theory and Applications. Singapore, World Scientific, 1996, 498 p.

53. *Boichenko V.A. et al.*
Hausdorff and fractal dimension estimates for invariant sets of non-injective maps. J. Anal. and its Appl., 1998, v. 17, № 1, p. 207–223.

54. *Hunt B.R.*
Maximum local Lyapunov dimension bounds the box dimension of chaotic attractors. Nonlinearity, 1996, v. 9, № 4, p. 845–853.

55. *Ильяшенко Ю.С., Вейгу Ли.*
Нелокальные бифуркации. М., МЦНМО-Ро, 1999, 415 с.

56. *Леонов Г.А.*
Об оценках хаусдорфовой размерности аттракторов. Вестн. Ленингр. ун-та, 1991, сер. 1, вып. 3, с. 41–44.

57. *Леонов Г.А.*
Об одном способе исследования глобальной устойчивости нелинейных систем. Вестн. Ленингр. ун-та, 1991, сер. 1, вып. 4, с. 11–14.

58. *Leonov G.A., Boichenko V.A.*
Lyapunov's direct method in the estimation of the Hausdorff dimension of attractors. Acta Appl. Math., 1992, v. 26, p. 1–60.

59. *Леонов Г.А.*
Построение специальной внешней меры Каратеодори для оценки хаусдорфовой размерности аттракторов. Вестн. СПб. ун-та, 1995, сер. 1, вып. 4, с. 24–30.

60. *Леонов Г.А.*
Верхние оценки хаусдорфовой размерности аттракторов. Вестн. СПб. ун-та, 1998, сер. 1, вып. 1, с. 19–22.

61. *Бойченко В.А., Леонов Г.А.*
Об оценках размерности аттракторов отображения Хенона. Вестн. СПб. ун-та, 2000, сер. 1, вып. 3, с. 8–13.

62. *Leonov G.A., Ljashko S.A.*
Surprising property of Lyapunov dimension for invariant sets of dynamical systems. Preprint Technische Universitat. Dresden, 2000, 6 p.

63. *Леонов Г.А.*
Формулы ляпуновской размерности аттракторов Хенона и Лоренца. Алгебра и анализ, 2001, т. 13, вып. 3, с. 155–170.

Статья поступила в редакцию 24 апреля 2002 года