Р. П. Кузьмина

Гироскоп в кардановом подвесе

Р. П. Кузьмина

Гироскоп в кардановом подвесе

Москва
«Университетская книга»
2012

УДК 531.011
ББК 22.21
К89

Кузьмина Р. П.
К89 Гироскоп в кардановом подвесе / Р. П. Кузьмина. — Москва : Университетская книга, 2012. — 202 с. : табл., ил.
ISBN 978-5-91304-299-6

В книге исследуются уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе. Рассматривается классический случай, когда в осях подвеса нет трения, и случай, когда в осях подвеса есть вязкое трение. В первом случае изучаются все движения гироскопа, в том числе и медленные. Во втором случае уравнения движения гироскопа приводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям с малым параметром, и к ним применяются асимптотические методы исследования.

Книга предназначена тем, кто изучает теоретическую механику, и тем, кто осваивает методы исследования обыкновенных дифференциальных уравнений.

УДК 531.011
ББК 22.21

Научное издание

Раиса Петровна Кузьмина

ГИРОСКОП В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

Издание печатается с авторской редактурой и версткой.

Подп. в печать 14.11.2012. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 11,74. Тираж 100 экз. Заказ №

ISBN 978-5-91304-299-6

Оглавление

Предисловие

В книге исследуются уравнения движения гироскопа в карданом подвесе.

В главе 1 рассматривается движение классического гироскопа в кардановом подвесе: в осях подвеса нет трения, система находится в поле сил тяжести. Изучаются все движения материальной системы, в том числе и медленные.

Гироскоп в кардановом подвесе в главе 2 отличается от рассмотренного в главе 1 тем, что в осях подвеса есть вязкое трение. Рассматриваются движения, при которых гироскоп соответствует своему названию – быстро вращающееся тело. Уравнения движения материальной системы приводятся к системе дифференциальных уравнений с малым параметром. Далее применяются асимптотические методы исследования.

В Дополнении даются материалы, используемые в главах 1, 2. В §27, §28 составляются уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе с помощью методов теоретической механики. В §29 дан метод введения малого параметра в уравнения, описывающие какой-либо процесс. В §30–§32 излагаются методы исследования задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром.

Автор приносит глубокую благодарность проф. И.В.Новожилову, предложившему автору исследовать уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе на 4 курсе университета. Эта курсовая работа во многом определила дальнейшую научную деятельность автора.

Автор благодарит Е.В. Лапчук за рисунок к книге.

Автор благодарит Л.А. Черёмушкину, А.С. Сумбатова за помощь.

Глава 1

Движение классического гироскопа в кардановом подвесе

§1. Уравнения движения и первые интегралы

1.1. Физическая модель гироскопа в кардановом подвесе

Гироскоп – это твёрдое симметричное тело, вращающееся вокруг оси симметрии с угловой скоростью, значительно превышающей скорость вращения самой оси вращения.

Гироскоп в кардановом подвесе – это материальная система, состоящая из трёх твёрдых тел – ротора и двух колец подвеса, – шарнирно соединённых между собой. *Ротор* – это гироскоп, который вращается вокруг своей оси симметрии, установленной в подшипниках, укреплённых во внутреннем кольце карданова подвеса. Внутреннее кольцо подвеса вращается вокруг своей оси, установленной в подшипниках, укреплённых во внешнем кольце карданова подвеса. Внешнее кольцо карданова подвеса вращается вокруг своей оси, укреплённой в неподвижных подшипниках. Все три тела имеют общую неподвижную точку, называемую *точкой подвеса гироскопа*. Оси вращения колец подвеса ортогональны. Оси вращения ротора и внутреннего кольца подвеса тоже ортогональны.

Система находится в поле сил тяжести. Предполагается, что центр масс внешнего кольца находится на его оси вращения (которая неподвижна). Центры масс ротора и внутреннего кольца совпадают с точкой подвеса гироскопа. Гироскоп в кардановом подвесе изображен на стр. 10.

В главе 1 предполагается, что трение в осях вращения тел отсутствует. Исследуются все возможные движения материальной системы, в том числе и медленные. При этом термин «ротор» за симметричным телом сохраняется.

1.2. Математическая модель движения гироскопа в кардановом подвесе

Дифференциальные уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе получены в §27, §28. Они имеют вид

$$\frac{d}{dT}\{[A_2 + (A + A_1)\cos^2\beta + (C + C_1)\sin^2\beta]\dot{\alpha} + C\dot{\gamma}\sin\beta\} = 0, \quad (1.1)$$

$$(A + B_1)\ddot{\beta} + (A + A_1 - C - C_1)\dot{\alpha}^2\cos\beta\sin\beta - C\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\beta = 0,$$

$$\frac{d}{dT}[C(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})] = 0.$$

Здесь α, β, γ – углы поворота внешнего кольца подвеса, внутреннего кольца подвеса и ротора соответственно; A_2 – момент инерции внешнего кольца относительно оси вращения; A_1, B_1, C_1 – главные моменты инерции внутреннего кольца; A – экваториальный момент инерции ротора; C – полярный момент инерции ротора. Точкой обозначено дифференцирование по времени T. Будем предполагать, что выполняются условия

$$A + B_1 \neq 0, \quad A + A_1 + A_2 \neq 0, \quad C \neq 0.$$

Моменты инерции имеют неотрицательные значения. Начальные значения переменных произвольны.

1.3. Первые интегралы

Уравнения движения (1.1) имеют три первых интеграла

$$D(\beta)\dot{\alpha} + C\dot{\gamma}\sin\beta = H_{\text{с}}, \quad (1.2)$$

$$C(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma}) = H,$$

$$\frac{1}{2}D(\beta)\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(A + B_1)\dot{\beta}^2 + C\dot{\alpha}\dot{\gamma}\sin\beta + \frac{1}{2}C\dot{\gamma}^2 = W_{\text{к}},$$

где

$$D(\beta) = (A + A_1 + A_2)\cos^2\beta + (A_2 + C + C_1)\sin^2\beta,$$

$H_\text{с}$ – кинетический момент материальной системы (состоящей из ротора и двух колец подвеса) относительно оси вращения внешнего кольца, H – кинетический момент ротора относительно оси вращения ротора, $W_\text{к}$ – кинетическая энергия материальной системы.

При любом движении гироскопа $H_\text{с}$, H, $W_\text{к}$ постоянны и могут быть вычислены по начальным значениям переменных:

$$H_\text{с} = D(\beta^\circ)\dot{\alpha}^\circ + C\dot{\gamma}^\circ \sin\beta^\circ,$$

$$H = C(\dot{\alpha}^\circ \sin\beta^\circ + \dot{\gamma}^\circ),$$

$$W_\text{к} = \frac{1}{2}D(\beta^\circ)(\dot{\alpha}^\circ)^2 + \frac{1}{2}(A + B_1)(\dot{\beta}^\circ)^2 + C\dot{\alpha}^\circ\dot{\gamma}^\circ \sin\beta^\circ + \frac{1}{2}C(\dot{\gamma}^\circ)^2.$$

α°, β°, γ°, $\dot{\alpha}^\circ$, $\dot{\beta}^\circ$, $\dot{\gamma}^\circ$ – начальные значения переменных α, β, γ, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$.

Будем исследовать, главным образом, движение оси гироскопа, т. е. функции $\alpha(T)$, $\beta(T)$, $\dot{\alpha}(T)$, $\dot{\beta}(T)$.

§2. Нулевая энергия

При $W_\text{к} = 0$ гироскоп находится в покое. Действительно, если $W_\text{к} = 0$, $A_2 = 0$, $C_1 = 0$, $\beta^\circ = \pi/2 + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, то систему (1.2) нетрудно проинтегрировать:

$$\dot{\alpha}(T) + (-1)^k\dot{\gamma}(T) = 0, \qquad \dot{\beta}(T) = 0,$$

$$\alpha(T) + (-1)^k\gamma(T) = \alpha^\circ + (-1)^k\gamma^\circ, \qquad \beta(T) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad T \geq 0.$$

В этом случае ось гироскопа совпадает с осью вращения внешнего кольца. Гироскоп находится в покое, так как его собственное вращение компенсируется вращением внешнего кольца.

Если $W_к = 0$, $A_2 = 0$, $C_1 = 0$, $\beta^\circ \neq \pi/2 \pmod{\pi}$ или если $W_к = 0$, $A_2 + C_1 \neq 0$, то вся материальная система находится в покое:

$$\dot{\alpha}(T) = 0, \qquad \dot{\beta}(T) = 0, \qquad \dot{\gamma}(T) = 0,$$

$$\alpha(T) = \alpha^\circ, \quad \beta(T) = \beta^\circ, \quad \gamma(T) = \gamma^\circ, \quad T \geq 0.$$

Дальше будем предполагать, что $W_к \neq 0$ и, значит, $W_к > 0$.

§3. Угловые скорости

Введем безразмерные параметры

$$\nu = \frac{C_1 - A - A_1}{A + A_1 + A_2}, \qquad \eta = \frac{C}{A + A_1 + A_2}, \tag{3.1}$$

$$p_1 = \frac{H_c}{\sqrt{CW_к}}, \qquad p_2 = \frac{H}{\sqrt{CW_к}}.$$

Нетрудно проверить, что $\nu \geq -1$, $\eta > 0$. Из (1.2), (3.1) следуют формулы

$$p_1 = \sqrt{\frac{C}{W_к}}\,\frac{1}{\eta}\{[1 + (\nu + \eta)\sin^2\beta]\,\dot{\alpha} + \eta\dot{\gamma}\sin\beta\}, \tag{3.2}$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{C}{W_к}}(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma}).$$

Эти равенства справедливы при всех значениях $T \geq 0$. В частности, полагая $T = 0$, получим

$$p_1 = \sqrt{\frac{C}{W_к}}\,\frac{1}{\eta}\left\{\left[1 + (\nu + \eta)\sin^2\beta^\circ\right]\dot{\alpha}^\circ + \eta\dot{\gamma}^\circ\sin\beta^\circ\right\}, \tag{3.3}$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{C}{W_\text{к}}}\left(\dot{\alpha}^\circ \sin\beta^\circ + \dot{\gamma}^\circ\right).$$

Выразим из уравнений (3.2) $\dot{\alpha},\ \dot{\gamma}$, подставим их в третье уравнение (1.2) и найдём из третьего уравнения (1.2) $\dot{\beta}^2$:

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{W_\text{к}}{C}}\,\frac{\eta(p_1 - p_2 \sin\beta)}{1+\nu\sin^2\beta}, \tag{3.4}$$

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{W_\text{к}}{C}}\,\frac{[1+(\nu+\eta)\sin^2\beta]p_2 - \eta p_1 \sin\beta}{1+\nu\sin^2\beta},$$

$$\dot{\beta}^2 = \frac{2W_\text{к}}{A+B_1}\left[1 - \frac{(\nu+\eta)p_2^2}{2\nu} + \frac{\eta\left(p_2^2 + 2\nu p_1 p_2 \sin\beta - \nu p_1^2\right)}{2\nu(1+\nu\sin^2\beta)}\right].$$

Полагая $T = 0$, получаем следующие формулы для начальных значений $\dot{\alpha}^\circ, \dot{\gamma}^\circ$:

$$\dot{\alpha}^\circ = \sqrt{\frac{W_\text{к}}{C}}\,\frac{\eta\left(p_1 - p_2 \sin\beta^\circ\right)}{1+\nu\sin^2\beta^\circ}, \tag{3.5}$$

$$\dot{\gamma}^\circ = \sqrt{\frac{W_\text{к}}{C}}\,\frac{[1+(\nu+\eta)\sin^2\beta^\circ]p_2 - \eta p_1 \sin\beta^\circ}{1+\nu\sin^2\beta^\circ}.$$

Пусть при $p_1 = a_1,\ p_2 = a_2$ система (3.4) имеет решение вида

$$\dot{\alpha} = f_1(T), \quad \beta = f_2(T), \quad \dot{\beta} = f_3(T), \quad \dot{\gamma} = f_4(T).$$

Тогда, как видно из (3.4), при $p_1 = -a_1, \quad p_2 = a_2$ существует решение

$$\dot{\alpha} = -f_1(T), \quad \beta = -f_2(T), \quad \dot{\beta} = -f_3(T), \quad \dot{\gamma} = f_4(T);$$

при $p_1 = a_1,\ p_2 = -a_2$ существует решение

$$\dot{\alpha} = f_1(T), \quad \beta = -f_2(T), \quad \dot{\beta} = -f_3(T), \quad \dot{\gamma} = -f_4(T);$$

при $p_1 = -a_1$, $p_2 = -a_2$ существует решение

$$\dot{\alpha} = -f_1(T), \quad \beta = f_2(T), \quad \dot{\beta} = f_3(T), \quad \dot{\gamma} = -f_4(T).$$

Отсюда следует, что, изучив поведение гироскопа при $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, можно восстановить закон движения при всех остальных значениях p_1, p_2. Поэтому будем предполагать, если это не оговорено, что выполняются неравенства $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$.

§4. Частные случаи движения

4.1. Функции (3.4) могут иметь особенность при $\nu = -1$, $\cos\beta = 0$. Рассмотрим этот случай. Пусть $\nu = -1$ (т. е. $A_2 = 0$, $C_1 = 0$) и при некотором $T = T_1$ $\cos\beta = 0$. Тогда при $T = T_1$

$$\beta(T_1) = \frac{\pi}{2} + (-1)^k \pi, \qquad k = 0, \pm 1, \ldots;$$

$$p_1 = \sqrt{\frac{C}{W_к}}[\dot{\alpha} + (-1)^k \dot{\gamma}], \qquad p_2 = \sqrt{\frac{C}{W_к}}[\dot{\gamma} + (-1)^k \dot{\alpha}];$$

$$p_2 = (-1)^k p_1.$$

Пусть $p_1 \neq 0$, $p_1 > 0$. Тогда $p_1 = p_2 > 0$, $k = 2n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$. Так как p_1, p_2 – постоянные величины, то в любой момент времени выполняется равенство $p_1 = p_2 (= p)$. Отсюда и из (1.2), (3.2) получаем

$$p = \sqrt{\frac{C}{W_к}} \frac{1}{\eta} \{[1 + (\eta - 1)\sin^2\beta]\dot{\alpha} + \eta\dot{\gamma}\sin\beta\},$$

$$p = \sqrt{\frac{C}{W_к}} (\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma}),$$

$$W_к = \frac{1}{2}(A + A_1)(\cos^2\beta + \eta\sin^2\beta)\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(A + B_1)\dot{\beta}^2 +$$

$$+C\dot{\alpha}\dot{\gamma}\sin\beta + \frac{1}{2}C\dot{\gamma}^2.$$

Исследуя эти уравнения, приходим к следующим результатам.

4.1.1. При $\nu = -1$, $p_1 = p_2 > 0$ параметры удовлетворяют неравенству $p_1 = p_2 \le \sqrt{2}$.

4.1.2. При $\nu = -1$, $p_1 = p_2 = \sqrt{2}$ справедливы равенства

$$\dot{\alpha}(T) + \dot{\gamma}(T) = \sqrt{\frac{2W_к}{C}}, \qquad \dot{\beta}(T) = 0, \tag{4.1}$$

$$\beta(T) = \frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\, 2\pi), \qquad T \ge 0.$$

Ось гироскопа совпадает с осью внешнего кольца. Гироскоп вращается с постоянной (относительно неподвижной системы координат) скоростью.

4.1.3. При $\nu = -1$, $0 < p_1 = p_2 (= p) < \sqrt{2}$ справедливы уравнения

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{W_к}{C}} \frac{\eta p}{1+\sin\beta}, \tag{4.2}$$

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{W_к}{C}} \frac{p[1+(1-\eta)\sin\beta]}{1+\sin\beta},$$

$$\dot{\beta}^2 = \frac{2W_к}{A+B_1}\left[1 - \frac{p^2}{2} - \frac{\eta p^2}{2}\cdot\frac{1-\sin\beta}{1+\sin\beta}\right], \quad \beta = \beta(T), \quad T \ge 0.$$

На рис. 5.2 изображены фазовые траектории, которые описываются третьим уравнением (4.2), – две траектории при двух значениях p на интервале $-\pi/2 < \beta < 3\pi/2$. Точка $(\beta, \dot{\beta}) = (\pi/2, 0)$ соответствует значениям $p_1 = p_2 = \sqrt{2}$ (смотрите формулы (4.1)). Все траектории находятся между горизонтальными асимптотами

$$\dot{\beta} = \sqrt{\frac{2W_к}{A+B_1}} \quad \text{и} \quad \dot{\beta} = -\sqrt{\frac{2W_к}{A+B_1}},$$

которые даны пунктирными прямыми так же, как и вертикальные асимптоты $\beta = -\pi/2$ и $\beta = 3\pi/2$. Фазовые траектории периодичны по β с периодом 2π.

Внешнее кольцо вращается с положительной угловой скоростью.

4.2. Пусть $\nu = -1$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$. Тогда из (1.2), (3.2) следуют уравнения

$$\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma} = 0, \quad \dot{\alpha}\cos^2\beta = 0, \quad W_к = \frac{1}{2}(A + B_1)\,\dot{\beta}^2,$$

из которых находим формулы для угловых скоростей:

$$\dot{\alpha}(T) = 0, \quad \dot{\beta}^2(T) = \frac{2W_к}{A+B_1}, \quad \dot{\gamma}(T) = 0, \quad T \geq 0.$$

Внешнее кольцо неподвижно, внутреннее кольцо вращается с постоянной угловой скоростью, гироскоп неподвижен относительно внутреннего кольца.

4.3. Пусть $\nu > -1$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$. Тогда из (3.4) получаем

$$\dot{\alpha}(T) = 0, \quad \dot{\beta}^2(T) = \frac{2W_к}{A+B_1}, \quad \dot{\gamma}(T) = 0, \quad T \geq 0.$$

Движение такое же, как в п. 4.2.

Дальше будем предполагать, что $p_1^2 + p_2^2 \neq 0$.

§5. Фазовые траектории

Из (3.4) следует, что функция $\beta(T)$ определяется из дифференциального уравнения

$$\dot{\beta}^2 = \frac{2W_{\text{к}}}{A+B_1}\left[1 - \frac{(\nu+\eta)p_2^2}{2\nu} + \frac{\eta\left(p_2^2+2\nu p_1 p_2 \sin\beta - \nu p_1^2\right)}{2\nu(1+\nu\sin^2\beta)}\right]. \qquad (5.1)$$

Фазовые траектории, которые описываются этим уравнением, представлены на рис. 5.1, 5.3–5.9. Они периодичны по β с периодом 2π. Все траектории находятся между горизонтальными асимптотами

$$\dot{\beta} = \sqrt{\frac{2W_{\text{к}}}{A+B_1}} \quad \text{и} \quad \dot{\beta} = -\sqrt{\frac{2W_{\text{к}}}{A+B_1}},$$

которые изображены пунктирными прямыми так же, как и вертикальные асимптоты $\beta = \pi/2 \, (\operatorname{mod} \pi)$ на рис. 5.1. Траектории рисунка 5.2 рассмотрены в §4.

На каждом рисунке 5.1–5.9 представлены фазовые траектории одного семейства, которое характеризуется тем, что для всех траекторий отношение $p_1 : p_2$ (или $p_2 : p_1$) равно одному и тому же числу. На рисунках даны номера областей, которым принадлежат параметры p_1, p_2 (нумерацию областей смотрите на рис. 6.1). Справедливы следующие соотношения.

Рис. 5.1. $\nu = -1$, $\quad 0 \le p_1 < p_2$, $\quad m = 1$;

$\nu = -1$, $\quad 0 \le p_2 < p_1$, $\quad m = 2$; $\quad -\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{3\pi}{2}$.

Рис. 5.2. $\nu = -1$, $\quad 0 < p_1 = p_2$, $\quad -\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{3\pi}{2}$.

Рис. 5.3. $-1 < \nu \le 1$, $\quad 0 < p_1 < p_2$, $\quad m = 1$;

$-1 < \nu < 0$, $\quad 0 < p_2 < -\nu p_1$, $\quad m = 2$;

$\nu > 1$, $\quad 0 < \nu p_1 \le p_2$, $\quad m = 1$; $\quad -\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{3\pi}{2}$.

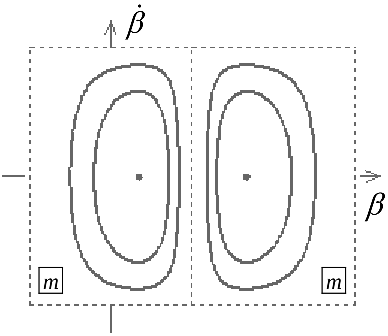


Рис. 5.1

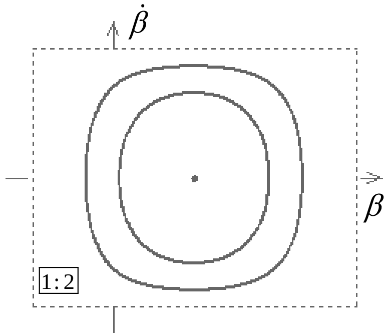


Рис. 5.2

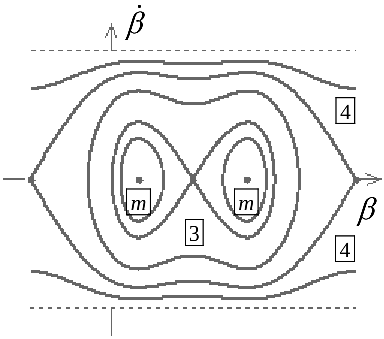


Рис. 5.3

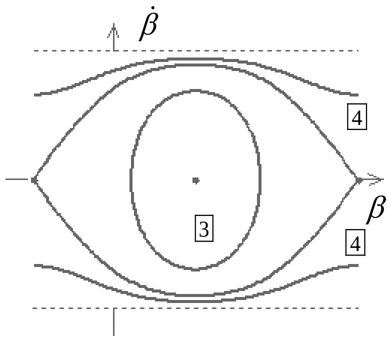


Рис. 5.4

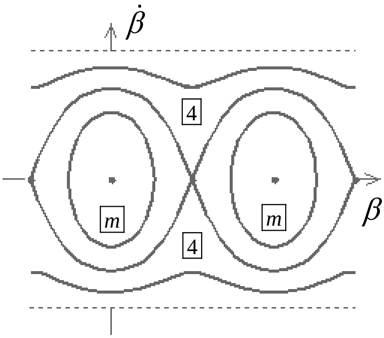


Рис. 5.5

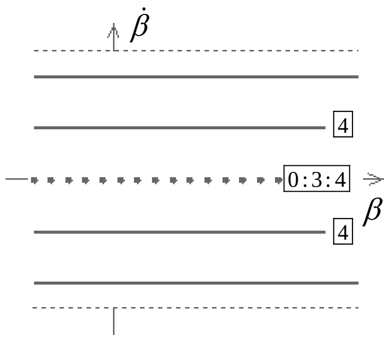


Рис. 5.6

Фазовая плоскость $(m = 1, 2)$

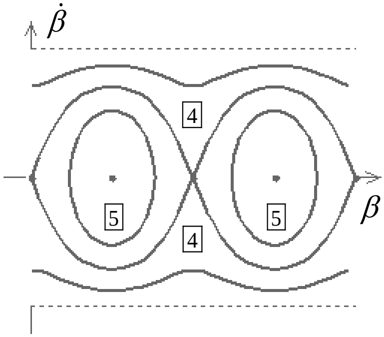


Рис. 5.7

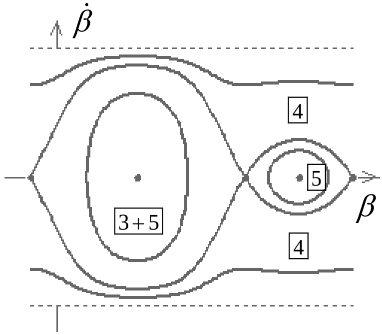


Рис. 5.8

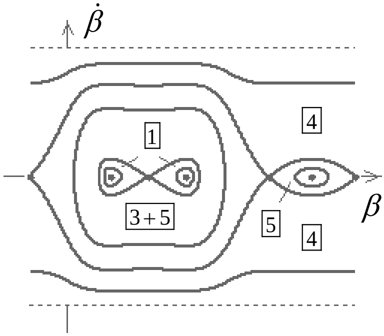


Рис. 5.9

Фазовая плоскость

Рис. 5.4. $-1 < \nu < 0, \quad 0 < -\nu p_1 \leq p_2 \leq p_1;$

$\nu = 0, \quad 0 < p_2 \leq p_1;$

$0 < \nu < 1, \quad 0 < \nu p_1 \leq p_2 \leq p_1;$

$\nu = 1, \quad 0 < p_1 = p_2; \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{3\pi}{2}.$

Рис. 5.5. $\nu > -1, \quad p_1 = 0, \quad p_2 > 0, \quad m = 1;$

$-1 < \nu < 0, \quad p_1 > 0, \quad p_2 = 0, \quad m = 2; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{3\pi}{2}.$

Рис. 5.6. $\nu = 0$, $p_1 > 0$, $p_2 = 0$, $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{3\pi}{2}$.

Рис. 5.7. $\nu > 0$, $p_1 > 0$, $p_2 = 0$, $0 \le \beta \le 2\pi$.

Рис. 5.8. $0 < \nu \le 1$, $0 < p_2 < \nu p_1$;

$\nu > 1$, $0 < p_2 \le p_1$;

$$-\arcsin\left(\frac{p_2}{\nu p_1}\right) \le \beta \le 2\pi - \arcsin\left(\frac{p_2}{\nu p_1}\right).$$

Рис. 5.9. $\nu > 1$, $0 < p_1 < p_2 < \nu p_1$,

$$-\arcsin\left(\frac{p_2}{\nu p_1}\right) \le \beta \le 2\pi - \arcsin\left(\frac{p_2}{\nu p_1}\right).$$

При $\nu = 0$ ось β состоит из точек покоя $\beta(T) = \text{const}$, $\dot{\beta}(T) = 0$, $T \ge 0$ (рис. 5.6). Внутреннее кольцо неподвижно относительно внешнего кольца.

На рисунках 5.1–5.9 представлены все топологические типы фазовых траекторий в рассматриваемой задаче.

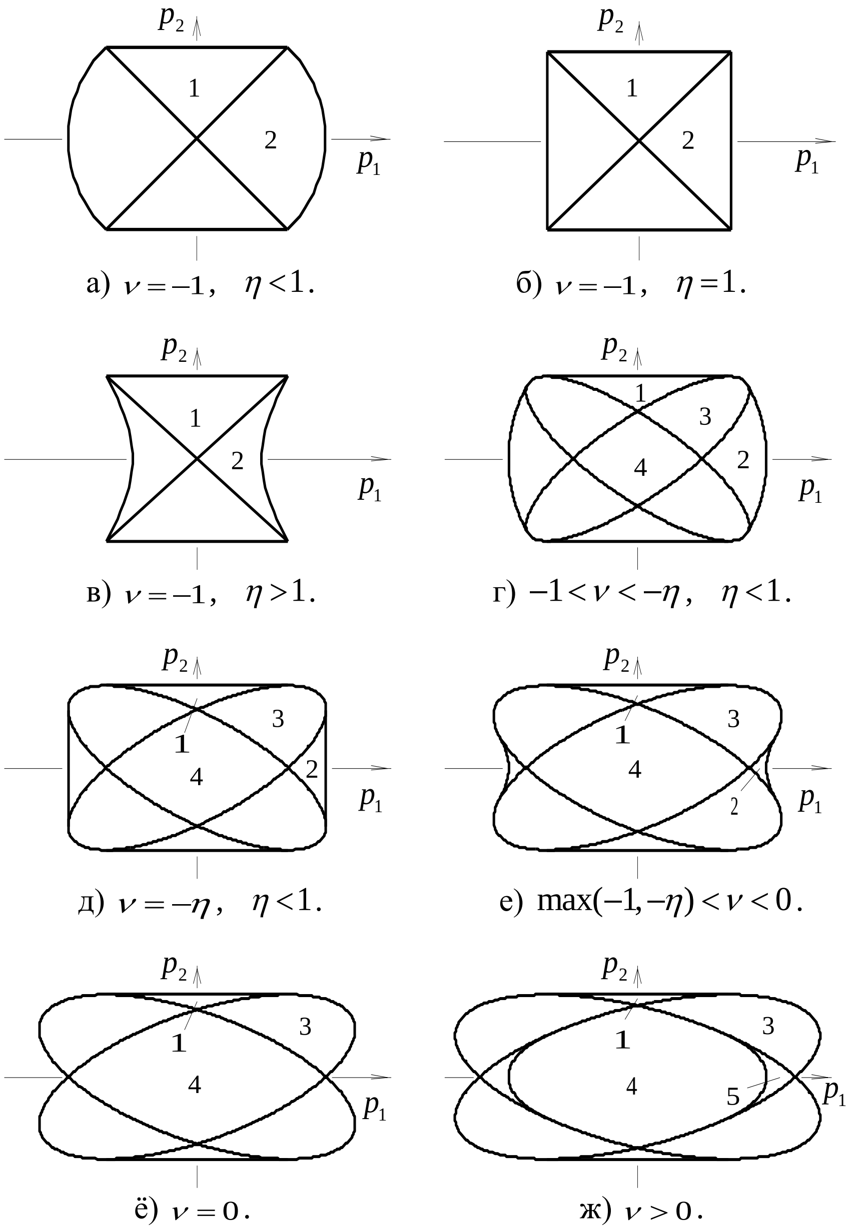
§6. Бифуркационное множество

Нетрудно заметить, что топология фазовых траекторий меняется при переходе через значения p_1, p_2, удовлетворяющие равенствам

$$W(\beta, p_1, p_2) = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \beta}(\beta, p_1, p_2) = 0, \tag{6.1}$$

где $W(\beta, p_1, p_2)$ – правая часть уравнения (5.1), деленная на постоянный множитель $2W_{\text{к}}/(A + B_1)$:

$$W(\beta, p_1, p_2) = 1 - \frac{(\nu+\eta)p_2^2}{2\nu} + \frac{\eta\left(p_2^2 + 2\nu p_1 p_2 \sin\beta - \nu p_1^2\right)}{2\nu(1+\nu\sin^2\beta)}, \tag{6.2}$$



а) $\nu = -1, \quad \eta < 1.$ б) $\nu = -1, \quad \eta = 1.$

в) $\nu = -1, \quad \eta > 1.$ г) $-1 < \nu < -\eta, \quad \eta < 1.$

д) $\nu = -\eta, \quad \eta < 1.$ е) $\max(-1, -\eta) < \nu < 0.$

ё) $\nu = 0.$ ж) $\nu > 0.$

Рис. 6.1. Бифуркационное множество

$$\frac{\partial W}{\partial \beta}(\beta, p_1, p_2) = \frac{\eta(p_1 - p_2\sin\beta)(p_2 + \nu p_1 \sin\beta)\cos\beta}{(1+\nu\sin^2\beta)^2}.$$

Исключив из (6.1) переменную β и добавив уравнения, описывающие множество значений p_1, p_2, при которых функции (3.4) имеют особенность (смотрите §4), получим:

$$\nu = -1, \quad |p_1| < \sqrt{2}, \quad |p_2| = \sqrt{2}; \tag{6.3}$$

$$\nu = -1, \quad \eta p_1^2 + (1-\eta)p_2^2 - 2 = 0, \quad |p_2| < |p_1|;$$

$$\nu = -1, \quad |p_1| = |p_2| \le \sqrt{2};$$

$$\nu > -1, \quad \eta p_1^2 \pm 2\eta p_1 p_2 + (1+\nu+\eta)p_2^2 - 2(1+\nu) = 0;$$

$$\nu > -1, \quad |p_1| \le \sqrt{2}, \quad |p_2| = \sqrt{2};$$

$$\nu > -1, \quad \nu\eta p_1^2 + (\nu+\eta)p_2^2 - 2\nu = 0, \quad |p_2| \le |\nu p_1|, \quad \nu p_1 \ne 0.$$

Определение 6.1. Объединение множеств (6.3) при фиксированных значениях ν, η называется *бифуркационным множеством* (значений p_1, p_2).

Бифуркационное множество разбивает плоскость $p_1 p_2$ на области так, что точкам каждой области соответствует один и тот же топологический тип фазовой траектории. Бифуркационное множество представлено на рис. 6.1. Вне областей, ограниченных бифуркационным множеством, решение задачи о движении гироскопа не существует.

Замечание 6.1. Если $|\dot\gamma^\circ| \to \infty$, то $p_1 \to \operatorname{sign}(\dot\gamma^\circ)\sqrt{2}\,\sin\beta^\circ$, $p_2 \to \operatorname{sign}(\dot\gamma^\circ)\sqrt{2}$. Отсюда следует: если ротор быстро вращается, $p_2 \ge 0$, $\beta^\circ \ne \pi/2 \,(\mathrm{mod}\,\pi)$, то точка (p_1, p_2) на рис. 6.1 находится в области 1 вблизи верхней границы $p_2 = \sqrt{2}$.

§7. Регулярная прецессия

Определение 7.1. *Регулярной прецессией* называется движение гироскопа, при котором

$$\dot{\alpha}(T) = \dot{\alpha}_*, \quad \beta(T) = \beta_*, \quad \dot{\beta}(T) = 0, \quad \dot{\gamma}(T) = \dot{\gamma}_*, \quad T \geq 0,$$

где $\dot{\alpha}_*$, β_*, $\dot{\gamma}_*$ – постоянные величины.

Из уравнений (3.4) следует, что постоянная β_* определяется из уравнений

$$W(\beta_*, p_1, p_2) = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \beta}(\beta_*, p_1, p_2) = 0, \tag{7.1}$$

где $W(\beta, p_1, p_2)$ – функция (6.2). Уравнения (7.1) совпадают с уравнениями (6.1) при $\beta = \beta_*$. Отсюда следует, что регулярная прецессия имеет место при значениях p_1, p_2, принадлежащих множеству Σ, которое получается из бифуркационного множества исключением значений $|p_1| = |p_2| < \sqrt{2}$ при $\nu = -1$ (так как при этих значениях регулярной прецессии нет, смотрите п. 4.1).

При $\nu = -1$, $|p_1| = |p_2| = \sqrt{2}$, как следует из п. 4.1.2, ось гироскопа совпадает с осью внешнего кольца и, значит, неподвижна. Функция $\dot{\alpha}(T)$ отдельно не определяется, а только в совокупности с $\dot{\gamma}(T)$. Такое движение гироскопа назовём «регулярной прецессией» (*регулярной прецессией в кавычках*) и включим его в класс движений, названных регулярной прецессией.

На рис. 7.1 изображено пересечение множества Σ с первой четвертью плоскости $p_1 p_2$. Множество Σ симметрично относительно осей p_1, p_2 и относительно начала координат $p_1 = p_2 = 0$. Пунктирные отрезки на рис. 7.1 носят вспомогательный характер.

§8. Теоремы о регулярной прецессии

Определение 8.1. Регулярная прецессия гироскопа называется *устойчивой*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое значение $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $\dot{\alpha}^{\circ},\ \beta^{\circ},\ \dot{\beta}^{\circ}, \dot{\gamma}^{\circ}$ из множества

$$\left|\dot{\alpha}^{\circ} - \dot{\alpha}_*\right| \le \delta, \quad \left|\beta^{\circ} - \beta_*\right| \le \delta, \quad \left|\dot{\beta}^{\circ}\right| \le \delta, \quad \left|\dot{\gamma}^{\circ} - \dot{\gamma}_*\right| \le \delta$$

выполняются неравенства

$$|\dot{\alpha}(T) - \dot{\alpha}_*| \le \varepsilon, \quad \left|\beta(T) - \beta_*\right| \le \varepsilon, \quad \left|\dot{\beta}(T)\right| \le \varepsilon,$$

$$\left|\dot{\gamma}(T) - \dot{\gamma}_*\right| \le \varepsilon, \qquad T \ge 0.$$

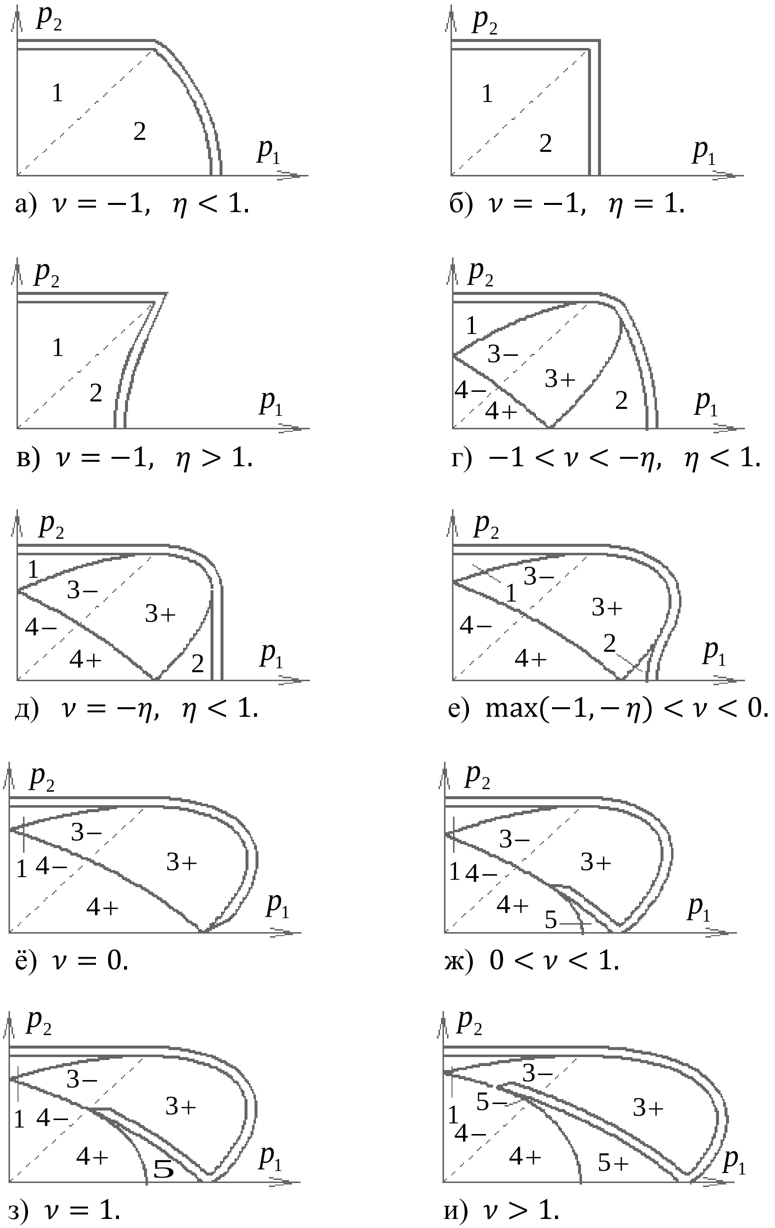
В противном случае регулярная прецессия называется *неустойчивой*.

Из определения следует, что устойчивость регулярной прецессии – это устойчивость по Ляпунову по переменным $\dot{\alpha},\ \beta, \dot{\beta},\ \dot{\gamma}$.

Обозначим $p_{1*},\ \ p_{2*}$ значения $p_1,\ \ p_2$, при которых гироскоп совершает регулярную прецессию. Параметры $p_1,\ p_2$ непрерывны на всем множестве начальных значений $\dot{\alpha}^{\circ},\ \beta^{\circ},\ \dot{\gamma}^{\circ}$ (смотрите (3.3)). Обратно, на всем множестве возможных значений $p_1,\ \ p_2$, кроме подмножества $\left|p_1\right| = \left|p_2\right| \le \sqrt{2}$ при $\nu = -1$, начальные значения $\dot{\alpha}^{\circ},\ \dot{\gamma}^{\circ}$ являются непрерывными функциями $p_1,\ p_2,\ \beta^{\circ}$, а скорости $\dot{\alpha},\ \dot{\beta},\ \dot{\gamma}$ являются непрерывными функциями $p_1,\ p_2,\ \beta$ (смотрите (3.4), (3.5)). Поэтому справедливы следующие теоремы.

Теорема 8.1. *Регулярная прецессия гироскопа устойчива тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon_1 > 0$ *существует такое значение* $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$, *что при всех* $\beta^{\circ},\ \dot{\beta}^{\circ},\ p_1,\ p_2$ *из множества*

$$\left|\beta^{\circ} - \beta_*\right| \le \delta_1, \qquad \left|\dot{\beta}^{\circ}\right| \le \delta_1,$$



а) $\nu = -1, \ \ \eta < 1.$

б) $\nu = -1, \ \ \eta = 1.$

в) $\nu = -1, \ \ \eta > 1.$

г) $-1 < \nu < -\eta, \ \ \eta < 1.$

д) $\nu = -\eta, \ \ \eta < 1.$

е) $\max(-1, -\eta) < \nu < 0.$

ё) $\nu = 0.$

ж) $0 < \nu < 1.$

з) $\nu = 1.$

и) $\nu > 1.$

Рис. 7.1. Параметры регулярной прецессии

$$|p_1 - p_{1*}| \le \delta_1, \qquad |p_2 - p_{2*}| \le \delta_1$$

решение задачи о движении гироскопа или не существует, или существует и удовлетворяет неравенству $|\beta(T) - \beta_*| \le \varepsilon_1$ *при* $T \ge 0$.

Теорема 8.2. *Регулярная прецессия гироскопа неустойчива тогда и только тогда, когда существует такое значение* $\varepsilon_1 > 0$, *что для любого* $\delta_1 > 0$ *найдутся* β°, $\dot\beta^\circ$, p_1, p_2, T_1, *зависящие от* δ_1 *и такие, что*

$$\left|\beta^\circ - \beta_*\right| \le \delta_1, \qquad \left|\dot\beta^\circ\right| \le \delta_1,$$

$$|p_1 - p_{1*}| \le \delta_1, \qquad |p_2 - p_{2*}| \le \delta_1$$

и при $T = T_1$ *выполняется равенство* $|\beta(T_1) - \beta_*| = \varepsilon_1$.

Из теорем 8.1, 8.2 следует, что устойчивость регулярной прецессии определяется устойчивостью точки покоя системы с одной степенью свободы, для которой равенство (5.1) является аналогом интеграла энергии.

«Регулярная прецессия» гироскопа, описываемая равенствами (4.1), устойчива в следующем смысле:

Теорема 8.3. *Для любого* $\varepsilon_1 > 0$ *существует такое значение* $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$, *что для всех начальных значений из множества*

$$\left|\beta^\circ - \beta_*\right| \le \delta_1, \qquad \left|\dot\beta^\circ\right| \le \delta_1,$$

$$|p_1 - p_{1*}| \le \delta_1, \qquad |p_2 - p_{2*}| \le \delta_1$$

решение задачи о движении гироскопа или не существует, или существует и удовлетворяет неравенствам $|\beta(T) - \beta_*| \le \varepsilon_1$, $\left|\dot\beta(T)\right| \le \varepsilon_1$ *при* $T \ge 0$.

Здесь $\beta_* = \pi/2 \pmod{2\pi}$, $p_{1*} = p_{2*} = \sqrt{2}$, $\nu = -1$.

§9. Устойчивые и неустойчивые регулярные прецессии

Обозначим P точку с координатами p_1, p_2; P_* – точку с координатами p_{1*}, p_{2*}; $\boxed{m}$ – область под номером m; $\boxed{m\!:n}$ – границу между областью m и областью n; $\boxed{m\!:n\!:k}$ – точку P_*, принадлежащую границам трех областей m, n, k. Нумерация областей дана на рис. 6.1, 7.1. Знаком $\boxed{0}$ обозначим область, в которой решение задачи о движении гироскопа не существует.

Значения $P_* \in \Sigma$, соответствующие устойчивым регулярным прецессиям, изображены на рис. 7.1 двойной линией. Перечислим их.

$P_* \in \boxed{0\!:1}$: $\quad \nu \geq -1, \;\; 0 \leq p_{1*} < p_{2*} = \sqrt{2}, \;\; \sin\beta_* = p_{1*}/p_{2*}$

(кольца карданова подвеса неподвижны: $\dot{\alpha}(T) = 0$,

$\dot{\beta}(T) = 0, \;\; T \geq 0$).

$P_* \in \boxed{0\!:2}$: $\quad -1 \leq \nu < 0, \qquad \nu\eta p_{1*}^2 + (\nu+\eta)p_{2*}^2 - 2\nu = 0,$

$0 \leq p_{2*} < -\nu p_{1*}, \;\; \sin\beta_* = -p_{2*}/\nu p_{1*}$.

$P_* \in \boxed{0\!:3}$: $\quad \eta p_{1*}^2 - 2\nu p_{1*}p_{2*} + (1+\nu+\eta)p_{2*}^2 - 2(1+\nu) = 0;$

$-1 < \nu < 0, \;\; -\nu p_{1*} < p_{2*} < p_{1*};$

$\nu \geq 0, \qquad 0 < p_{2*} < p_{1*}; \qquad \beta_* = \pi/2 \pmod{2\pi}$.

$P_* \in \boxed{3\!:5}$: $\quad \eta p_{1*}^2 + 2\eta p_{1*}p_{2*} + (1+\nu+\eta)p_{2*}^2 - 2(1+\nu) = 0,$

$\nu > 0, \qquad 0 < p_{2*} < \nu p_{1*}, \qquad \beta_* = -\pi/2 \pmod{2\pi}$.

$P_* \in \boxed{0\!:1\!:2}$: $\quad \nu = -1, \;\; p_{1*} = p_{2*} = \sqrt{2},$

$\beta_* = \pi/2 \pmod{2\pi}$ («регулярная прецессия»).

$P_* \in \boxed{0{:}\,1{:}\,3}$: $\nu > -1, \quad p_{1*} = p_{2*} = \sqrt{2}, \quad \beta_* = \pi/2 \pmod{2\pi}$

(кольца карданова подвеса неподвижны:

$\dot{\alpha}(T) = 0, \ \dot{\beta}(T) = 0, \quad T \geq 0$).

$P_* \in \boxed{0{:}\,2{:}\,3}$: $-1 < \nu < 0, \quad p_{1*} = \sqrt{\frac{2}{\nu^2 + \nu\eta + \eta}}, \quad p_{2*} = -\nu p_{1*}$

$\beta_* = \pi/2 \pmod{2\pi}$.

$P_* \in \boxed{0{:}\,3{:}\,5}$: $\nu > 0, \quad p_{1*} = \sqrt{\frac{2(1+\nu)}{\eta}}, \quad p_{2*} = 0,$

$\beta_* = \pi/2 \pmod{\pi}$.

Перечислим значения $P_* \in \Sigma$, соответствующие неустойчивым регулярным прецессиям.

$P_* \in \boxed{1{:}\,3}$: $\eta p_{1*}^2 - 2\eta p_{1*} p_{2*} + (1 + \nu + \eta) p_{2*}^2 - 2(1 + \nu) = 0,$

$\beta_* = \pi/2 \pmod{2\pi}, \quad \nu > -1, \quad 0 < p_{1*} < p_{2*}.$

$P_* \in \boxed{2{:}\,3}$: $\eta p_{1*}^2 - 2\eta p_{1*} p_{2*} + (1 + \nu + \eta) p_{2*}^2 - 2(1 + \nu) = 0,$

$\beta_* = \pi/2 \pmod{2\pi}, \quad -1 < \nu < 0, \quad 0 < p_{2*} < -\nu p_{1*}.$

$P_* \in \boxed{3{:}\,4}$: $\eta p_{1*}^2 + 2\eta p_{1*} p_{2*} + (1 + \nu + \eta) p_{2*}^2 - 2(1 + \nu) = 0,$

$\beta_* = -\pi/2 \pmod{2\pi};$

$-1 < \nu \leq 0, \quad p_{1*} > 0, \quad p_{2*} > 0;$

$\nu > 0, \quad 0 < \nu p_{1*} < p_{2*}.$

$P_* \in \boxed{4{:}\,5}$: $\nu\eta p_{1*}^2 + (\nu + \eta) p_{2*}^2 - 2\nu = 0,$

$$\beta_* = -\pi/2 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi); \qquad \nu > 0, \quad 0 \le p_{2*} < \nu p_{1*}.$$

$P_* \in \boxed{0:3:4}$: $\nu = 0, \quad p_{1*} = \sqrt{2/\eta}, \quad p_{2*} = 0, \quad \beta_* \in \mathbf{R}.$

$P_* \in \boxed{1:3:4}$: $\nu > -1, \quad p_{1*} = 0, \quad p_{2*} = \sqrt{\frac{2(1+\nu)}{1+\nu+\eta}},$

$$\beta_* = \pi/2 \,(\mathrm{mod}\, \pi).$$

$P_* \in \boxed{2:3:4}$: $-1 < \nu < 0, \quad p_{1*} = \sqrt{\frac{2(1+\nu)}{\eta}}, \quad p_{2*} = 0,$

$$\beta_* = \pi/2 \,(\mathrm{mod}\, \pi).$$

$P_* \in \boxed{3:4:5}$: $\nu > 0, \quad p_{1*} = \sqrt{\frac{2}{\nu^2+\nu\eta+\eta}}, \quad p_{2*} = \nu p_{1*},$

$$\beta_* = -\pi/2 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi).$$

При $\beta_* = \pi/2 \,(\mathrm{mod}\, \pi)$ ось гироскопа совпадает с осью внешнего кольца и, значит, неподвижна.

На рис. 9.1–9.12 показаны фазовые траектории в окрестности точки $(\beta_*, 0)$ при значении P, близком к P_*. Точка $(\beta_*, 0)$ совпадает с центром каждого рисунка. Соответствие между рисунками и точками P_*, P дано в табл. 9.1. В первом столбце таблицы указано, какой границе принадлежит точка P_*. В первой строке таблицы указано, какой области или границе принадлежит точка P.

Рассмотрим вторую строку табл. 9.1 (остальные аналогичны). Вторая строка относится к точке $P_* \in \boxed{0:1}$. Если $P = P_*$, то окрестность точки $(\beta_*, 0)$ представлена на рис. 9.2. Если P принадлежит областям $\boxed{0}$, $\boxed{1}$ или границе $\boxed{0:1}$, то окрестность точки $(\beta_*, 0)$ дана, соответственно, на рис. 9.1, 9.3, 9.2.

Замечание 9.1. На рис. 9.1–9.12 представлены топологические типы фазовых траекторий в окрестности точки $(\beta_*, 0)$. Симметрия относительно оси β есть всегда.

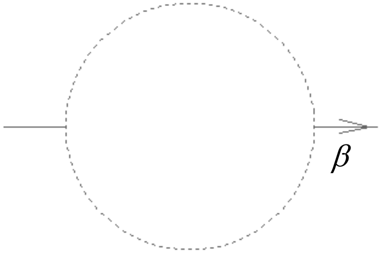


Рис. 9.1

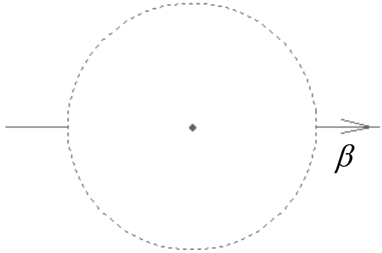


Рис. 9.2

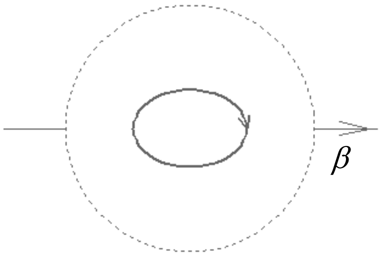


Рис. 9.3

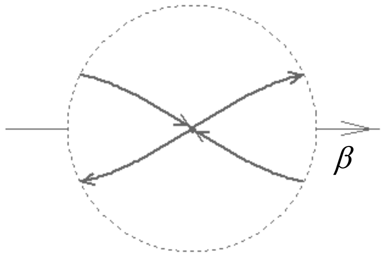


Рис. 9.4

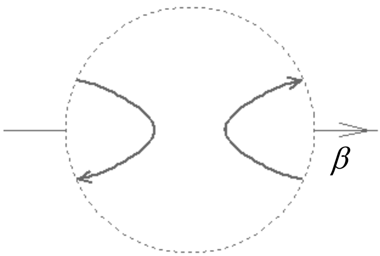


Рис. 9.5

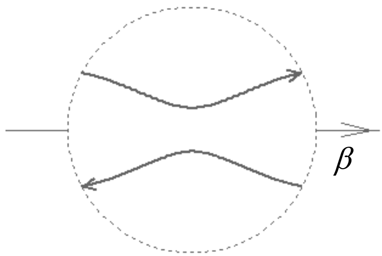


Рис. 9.6

Окрестность точки $(\beta_*, 0)$.

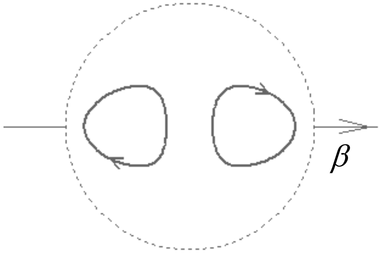


Рис. 9.7

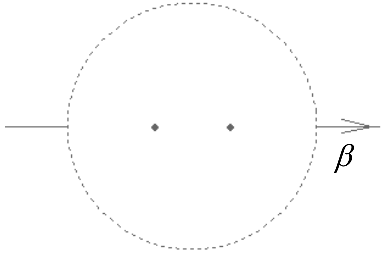


Рис. 9.8

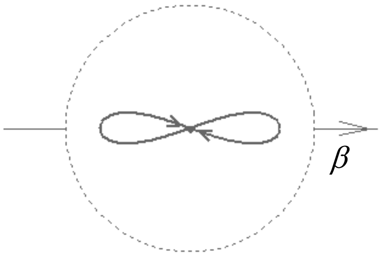


Рис. 9.9

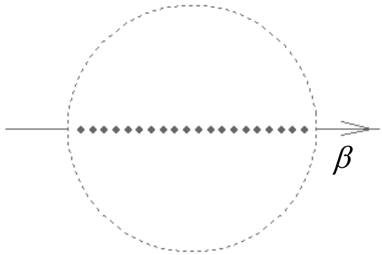


Рис. 9.10

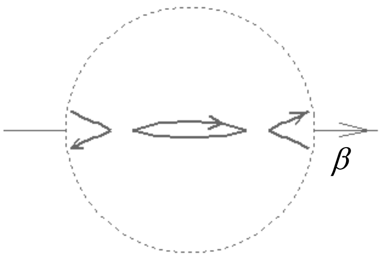


Рис. 9.11

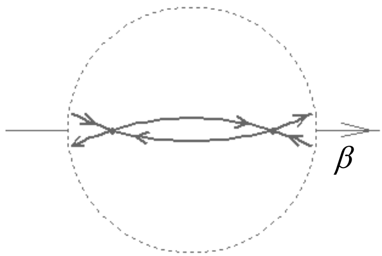


Рис. 9.12

Окрестность точки $(\beta_*, 0)$.

Таблица 9.1. Соответствие между рисунками и точками P_*, P.

$P_*\backslash P$	P_*	0	1	2	3	4	5	0:1	0:2	0:3	1:2
0:1	9.2	9.1	9.3					9.2			
0:2	9.2	9.1		9.3					9.2		
0:3	9.2	9.1			9.3					9.2	
1:3	9.4		9.5		9.6						
2:3	9.4			9.5	9.6						
3:4	9.4				9.5	9.6					
3:5	9.2				9.1		9.3				
4:5	9.4					9.6	9.5				
0:1:2	9.2	9.1	9.7	9.7				9.8	9.8		9.3
0:1:3	9.2	9.1	9.7		9.3			9.8		9.2	
0:2:3	9.2	9.1		9.7	9.3				9.8	9.2	
0:3:4^1	9.10	9.1			9.5	9.6				9.1	
0:3:4^2	9.10	9.1			9.6	9.6				9.2	
0:3:4^3	9.10	9.1			9.6	9.6				9.1	
0:3:5^1	9.2	9.1			9.3		9.3			9.2	
0:3:5^2	9.2	9.1			9.1		9.3			9.1	
1:3:4^1	9.4		9.5		9.5	9.6					
1:3:4^2	9.4		9.5		9.6	9.6					
2:3:4^1	9.4			9.5	9.5	9.6					
2:3:4^2	9.4			9.5	9.6	9.6					
3:4:5	9.4				9.5	9.6	9.11				

Таблица 9.1 (продолжение)

$P_*\backslash P$	1:3	2:3	3:4	3:5	4:5
0:1					
0:2					
0:3					
1:3	9.4				
2:3		9.4			
3:4			9.4		
3:5				9.2	
4:5					9.4
0:1:2					
0:1:3	9.9				
0:2:3		9.9			
$0{:}3{:}4^1$			9.4		
$0{:}3{:}4^2$			9.6		
$0{:}3{:}4^3$			9.6		
$0{:}3{:}5^1$				9.3	
$0{:}3{:}5^2$				9.2	
$1{:}3{:}4^1$	9.5		9.4		
$1{:}3{:}4^2$	9.4		9.6		
$2{:}3{:}4^1$		9.5	9.4		
$2{:}3{:}4^2$		9.4	9.6		
3:4:5			9.4	9.4	9.12

В таблице числа с верхним индексом соответствуют следующим значениям β_*:

$0{:}3{:}4^1 \;\Rightarrow\; \beta_* = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$,

$0{:}3{:}4^2 \;\Rightarrow\; \beta_* = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$,

$0{:}3{:}4^3 \;\Rightarrow\; \beta_* \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$,

$0{:}3{:}5^1 \;\Rightarrow\; \beta_* = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$,

$0{:}3{:}5^2 \;\Rightarrow\; \beta_* = \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}$,

$1{:}3{:}4^1 \;\Rightarrow\; \beta_* = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$,

$1{:}3{:}4^2 \;\Rightarrow\; \beta_* = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$,

$2{:}3{:}4^1 \;\Rightarrow\; \beta_* = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$,

$2{:}3{:}4^2 \;\Rightarrow\; \beta_* = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

Поясним что означает $0{:}3{:}4^1$ (остальные аналогичны).

При $P_* \in \boxed{0{:}3{:}4}$ фазовые траектории являются точками покоя $\beta = \beta_*$, заполняющими ось β.

$0{:}3{:}4^1$ означает, что

$P_* \in \boxed{0{:}3{:}4}$ и $\beta_* = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

§10. Область 1

10.1. Фазовые траектории

Рассмотрим движение оси гироскопа при $P \in \boxed{1}$. Область 1 описывается неравенствами

$$\nu = -1, \quad 0 \le p_1 < p_2 < \sqrt{2}; \tag{10.1}$$

$$\nu > -1, \quad 0 \le p_1 < p_2 < \sqrt{2},$$

$$\eta p_1^2 - 2\eta p_1 p_2 + (1 + \nu + \eta) p_2^2 - 2(1 + \nu) > 0.$$

Рассмотрим отрезок $-\pi/2 \le \beta \le 3\pi/2$. Фазовые траектории представляют собой две замкнутые кривые, симметричные одна другой относительно прямой $\beta = \pi/2$ и не пересекающие прямых $\beta = \pi/2 \, (\mathrm{mod}\, \pi)$. Если $p_1 = 0$, то одна кривая симметрична относительно прямой $\beta = 0$, другая – относительно прямой $\beta = \pi$.

Траектории области 1 есть на рисунках 5.1, 5.3, 5.5, 5.9.

10.2. Нутационные колебания

При $P \in \boxed{1}$ точка $\left(\beta(T), \dot{\beta}(T)\right)$ движется по часовой стрелке на той из двух фазовых кривых, на какую попала в начальный момент времени. Таким образом, ось гироскопа совершает нутационные колебания.

Определение 10.1. *Нутационными колебаниями* называются колебания внутреннего кольца карданова подвеса относительно внешнего кольца.

Так как ось гироскопа принадлежит внутреннему кольцу, то нутационные колебания оси гироскопа – это колебания оси относительно внешнего кольца. Для траектории, лежащей между прямыми $\beta = -\pi/2$ и $\beta = \pi/2$:

$$\beta_1 \le \beta(T) \le \beta_2, \quad T \ge 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \beta_1 < \arcsin\frac{p_1}{p_2} < \beta_2 < \frac{\pi}{2}.$$

Для траектории, лежащей между прямыми $\beta = \pi/2$ и $\beta = 3\pi/2$:

$$\pi - \beta_2 \le \beta(T) \le \pi - \beta_1, \qquad T \ge 0.$$

Здесь

$$\sin\beta_1 = \frac{\eta p_1 p_2 - \sqrt{d}}{(\nu+\eta)p_2^2 - 2\nu}, \qquad \sin\beta_2 = \frac{\eta p_1 p_2 + \sqrt{d}}{(\nu+\eta)p_2^2 - 2\nu}, \qquad (10.2)$$

$$d = (2 - p_2^2)[\nu\eta p_1^2 + (\nu+\eta)p_2^2 - 2\nu].$$

Покажем, что дискриминант d при $P \in \boxed{1}$ положителен. При $\nu = -1$

$$d = (2 - p_2^2)[(2 - p_2^2) + \eta(p_2^2 - p_1^2)] > 0,$$

так как выражения в круглых скобках строго отрицательны. При $\nu > -1$

$$d = (2 - p_2^2)\{[\eta p_1^2 - 2\eta p_1 p_2 + (1+\nu+\eta)p_2^2 - 2(1+\nu)] +$$

$$+(2 - p_2^2) + \eta p_1[(p_2 - p_1) + (\nu p_1 + p_2)]\} > 0,$$

так как выделенные группы слагаемых строго положительны или неотрицательны, как следует из (7.1).

Период нутационных колебаний оси гироскопа равен

$$T_* = 2\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{d\beta}{\dot\beta} = \sqrt{\frac{2(A+B_1)}{W_к}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{d\beta}{\sqrt{W(\beta, p_1, p_2)}} \qquad (10.3)$$

где $W(\beta, p_1, p_2)$ – функция (6.2). Формула справедлива для каждой из двух фазовых кривых.

10.3. Движение внешнего кольца.

Рассмотрим поведение угла α при $P \in \boxed{1}$. Из формулы (3.4) следует, что за одно нутационное колебание функция $\dot{\alpha}(T)$ дважды меняет знак, а угол α отклоняется на величину, равную

$$\Delta\alpha = \int_{T}^{T+T_*} \dot{\alpha}(t)dt = 2\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\dot{\alpha}\,d\beta}{\dot{\beta}} = \qquad (10.4)$$

$$= \eta\sqrt{\frac{2(A+B_1)}{C}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{(p_1 - p_2\sin\beta)d\beta}{(1+\nu\sin^2\beta)\sqrt{W(\beta,p_1,p_2)}},$$

где $W(\beta, p_1, p_2)$ – функция (6.2). Формула для $\Delta\alpha$ справедлива для каждой из двух фазовых кривых.

Теорема 10.1. *При* $\nu = -1$, $P \in \boxed{1}$ *внешнее кольцо карданова подвеса совершает колебания с периодом* T_**, отклонение* $\Delta\alpha = 0$.

Доказательство. Перейдем под интегралом (10.4) к новой независимой переменной φ по формулам

$$W(\beta, p_1, p_2) = \left(1 - \frac{p_2^2}{2}\right)\sin^2\varphi, \qquad (10.5)$$

$$\sin\beta = \frac{\eta p_1 p_2 - \cos\varphi\sqrt{d_1}}{\eta p_2^2 + (2-p_2^2)\cos^2\varphi}, \quad \cos\beta = \sqrt{\frac{\eta}{2-p_2^2}}\,\frac{(2-p_2^2)p_1\cos\varphi + p_2\sqrt{d_1}}{\eta p_2^2 + (2-p_2^2)\cos^2\varphi},$$

$$d_1 = (2 - p_2^2)[-\eta p_1^2 + \eta p_2^2 + (2 - p_2^2)\cos^2\varphi].$$

При изменении угла β от значения $\beta = \beta_1$ до значения $\beta = \beta_2$ угол φ меняется от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$. После замены переменной формула (10.4) принимает вид

$$\Delta\alpha = 2\sqrt{\frac{(A+B_1)(2-p_2^2)}{C}} \int_0^{\pi} \cos\varphi\, F(\varphi)d\varphi = \qquad (10.6)$$

$$= 2\sqrt{\frac{(A+B_1)(2-p_2^2)}{C}} \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\,[F(\varphi) - F(\pi-\varphi)]d\varphi,$$

$$F(\varphi) = \frac{\cos\beta}{p_2 - p_1\sin\beta}.$$

Подставляя выражения (10.5) для $\sin\beta$, $\cos\beta$ в формулу для F, получим $F(\varphi) - F(\pi-\varphi) \equiv 0$. Отсюда и из (10.6) следует, что $\Delta\alpha = 0$ и, значит, внешнее кольцо колеблется с периодом T_*. Теорема доказана.

Теорема 10.2. *При* $\nu > -1$, $p_1 = 0$, $P \in \boxed{1}$ *внешнее кольцо карданова подвеса совершает колебания с периодом* T_*, *отклонение* $\Delta\alpha = 0$.

Доказательство. Из (6.2), (10.2), (10.4) следуют формулы

$$\sin\beta_1 = -\sin\beta_2 = -\sqrt{\frac{2-p_2^2}{(\nu+\eta)p_2^2 - 2\nu}}, \qquad \beta_1 = -\beta_2,$$

$$\Delta\alpha = -\eta p_2\sqrt{\frac{2(A+B_1)}{C}} \int\limits_{\beta_1}^{-\beta_1} \frac{\sin\beta\, d\beta}{(1+\nu\sin^2\beta)\sqrt{W(\beta,p_1,p_2)}},$$

$$W(\beta,p_1,p_2) = 1 - \frac{(\nu+\eta)p_2^2}{2\nu} + \frac{\eta p_2^2}{2\nu(1+\nu\sin^2\beta)}.$$

Так как под знаком интеграла стоит нечетная функция β, то $\Delta\alpha = 0$ и, значит, внешнее кольцо колеблется с периодом T_*. Теорема доказана.

Теорема 10.3. *При* $\nu > -1$, $p_1 > 0$, $P \in \boxed{1}$ *выполняется неравенство* $\Delta\alpha < 0$.

Доказательство. а) Перейдем под интегралом (10.4) к новой независимой переменной φ по формулам

$$W(\beta, p_1, p_2) = W_1(\varphi) \equiv 1 - \frac{p_2^2}{2} - \frac{\eta(p_1-p_2)^2}{2(1+\nu)}\cos^2\varphi\,, \quad (10.7)$$

$$\sin\beta = \frac{(1+\nu)p_1p_2 + (p_1-p_2)\cos\varphi\sqrt{d_2}}{(1+\nu)p_2^2 - \nu(p_1-p_2)^2\cos^2\varphi},$$

$$d_2 = (1+\nu)(p_2^2 + \nu p_1^2) - \nu(p_1 - p_2)^2\cos^2\varphi.$$

При изменении угла β от значения $\beta = \beta_1$ до значения $\beta = \beta_2$ угол φ меняется от $\varphi = \varphi_1$ до $\varphi = \pi - \varphi_1$, где

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{p_2-p_1}\sqrt{\frac{(1+\nu)(2-p_2^2)}{\eta}}, \qquad 0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}. \quad (10.8)$$

После замены переменной формула (10.4) принимает вид

$$\Delta\alpha = \frac{\eta(p_1-p_2)^2}{1+\nu}\sqrt{\frac{2(A+B_1)}{C}}\int\limits_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{W_1(\varphi)}}\,F(\varphi)d\varphi = \quad (10.9)$$

$$= \frac{\eta(p_1-p_2)^2}{1+\nu}\sqrt{\frac{2(A+B_1)}{C}}\int\limits_{\varphi_1}^{\pi/2}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{W_1(\varphi)}}[F(\varphi) - F(\pi-\varphi)]d\varphi,$$

$$F(\varphi) = \frac{1+\nu\sin^2\beta}{(p_2+\nu p_1\sin\beta)\cos\beta}.$$

б) Докажем, что при $\varphi_1 \le \varphi \le \pi - \varphi_1$ выполняются неравенства

$$(1+\nu)p_2^2 - \nu(p_1 - p_2)^2\cos^2\varphi > 0, \quad (10.10)$$

$$d_2 = (1+\nu)(p_2^2 + \nu p_1^2) - \nu(p_1 - p_2)^2\cos^2\varphi > 0.$$

Если $\nu \le 0$, то это очевидно.

Пусть $\nu > 0$. Тогда справедливы соотношения

$$(1+\nu)p_2^2 - \nu\big(p_1 - p_2\big)^2\cos^2\varphi \geq$$

$$\geq (1+\nu)p_2^2 - \nu\big(p_1 - p_2\big)^2\cos^2\varphi_1 =$$

$$= (1+\nu)p_2^2 - \frac{\nu(1+\nu)\big(2-p_2^2\big)}{\eta} >$$

$$> (1+\nu)p_2^2 - \nu\big(p_1 - p_2\big)^2 = p_2^2 + \nu p_1\big(2p_2 - p_1\big) > 0.$$

Здесь использовано неравенство (10.1):

$$(1+\nu)(2-p_2^2) < \nu\big(p_1 - p_2\big)^2.$$

Далее:

$$d_2 = \left[(1+\nu)p_2^2 - \nu\big(p_1 - p_2\big)^2\cos^2\varphi\right] + (1+\nu)\nu p_1^2 > 0.$$

Здесь использовано первое неравенство (10.10). Неравенства (10.10) доказаны.

в) Докажем, что при $\varphi_1 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_1$ выполняются неравенства

$$1 + \nu\sin^2\beta > 0, \quad p_2 + \nu p_1 \sin\beta > 0, \quad \cos\beta > 0. \qquad (10.11)$$

Так как $\nu > -1$, то первое неравенство очевидно. Так как при $\varphi_1 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_1$ угол β принадлежит отрезку $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$ и $-\pi/2 < \beta_1 < \beta_2 < \pi/2$, то третье неравенство выполняется.

Рассмотрим второе неравенство. Пусть $|\nu| \leq 1$. Тогда

$$p_2 + \nu p_1 \sin\beta \geq p_2 - |p_1| = p_2 - p_1 > 0.$$

Пусть $\nu > 1$. Вычислим значение функции W при $\sin\beta = -\frac{p_2}{\nu p_1}$:

$$W\left(\sin\beta = -\frac{p_2}{\nu p_1}\right) = -\frac{1}{2\nu}[\nu\eta p_1^2 + (\nu+\eta)p_2^2 - 2\nu] =$$

$$= -\frac{1}{2\nu}[\eta p_1^2 - 2\eta p_1 p_2 + (1+\nu+\eta)p_2^2 - 2(1+\nu)] +$$

$$+\frac{1}{2\nu}[\eta(1-\nu)p_1^2 - 2\eta p_1 p_2 + (p_2^2 - 2)].$$

Выражение в первых квадратных скобках положительно по определению области 1 (смотрите (10.1)). Во вторых квадратных скобках каждое из трёх слагаемых отрицательно. Отсюда следует, что полученное значение функции W строго отрицательно. Так как при $\beta_1 \le \beta \le \beta_2$ функция $W \ge 0$, то $-p_2/\nu p_1 < \sin\beta_1$ или $-p_2/\nu p_1 > \sin\beta_2$. Так как $-p_2/\nu p_1 < 0$, а $\sin\beta_2 > 0$, то $-p_2/\nu p_1 < \sin\beta_1$. Отсюда получаем, что

$$p_2 + \nu p_1 \sin\beta \ge p_2 + \nu p_1 \sin\beta_1 = \nu p_1(\sin\beta_1 + p_2/\nu p_1) > 0.$$

Неравенства (10.11) доказаны.

г) Вычислим разность $F^2(\varphi) - F^2(\pi-\varphi)$, где $F(\varphi)$ – функция (10.9), $\sin\beta$ – функция (10.7). Получим:

$$F^2(\varphi) - F^2(\pi-\varphi) =$$

$$= \left.\frac{(1+\nu\sin^2\beta)^2}{(p_2+\nu p_1\sin\beta)^2(1-\sin^2\beta)}\right|_{\varphi} - \left.\frac{(1+\nu\sin^2\beta)^2}{(p_2+\nu p_1\sin\beta)^2(1-\sin^2\beta)}\right|_{\pi-\varphi} =$$

$$= \frac{4p_1p_2(1+\nu)^3(\nu p_1^2+p_2^2)^2 d_2^{3/2}\cos\varphi}{[p_2+\nu p_1\sin\beta(\varphi)]^2[p_2+\nu p_1\sin\beta(\pi-\varphi)]^2\cos^2\beta(\varphi)\cdot\cos^2\beta(\pi-\varphi)} \times$$

$$\times \frac{p_1-p_2}{\left[(1+\nu)p_2^2-\nu(p_1-p_2)^2\cos^2\varphi\right]^4}.$$

Отсюда и из неравенств (10.1), (10.10), (10.11) следует, что при $\varphi_1 \le \varphi < \pi/2$

$$F^2(\varphi) - F^2(\pi - \varphi) < 0.$$

д) Так как

$$F^2(\varphi) - F^2(\pi - \varphi) = [F(\varphi) - F(\pi - \varphi)] \cdot [F(\varphi) + F(\pi - \varphi)]$$

и, как следует из (10.9), (10.11), $F(\varphi) > 0$, $F(\pi - \varphi) > 0$, то при $\varphi_1 \le \varphi < \pi/2$

$$F(\varphi) - F(\pi - \varphi) < 0.$$

Отсюда и из формулы (10.9) для $\Delta\alpha$ следует, что $\Delta\alpha < 0$. Теорема доказана.

10.4. Средняя скорость ухода гироскопа

Определение 10.2. *Уходом гироскопа* называется сдвиг внешнего кольца за период одного нутационного колебания.

Определение 10.3. *Средней скоростью ухода гироскопа* называется отношение $\Delta\alpha/T_*$, где $\Delta\alpha$ – отклонение угла α за период одного нутационного колебания, равный T_*.

При $p_2 = \sqrt{2}$ кольца карданова подвеса неподвижны. Найдём среднюю скорость ухода гироскопа при движении вблизи этого положения равновесия. Для получения формулы введём вместо параметров p_1, p_2 параметры

$$k = \frac{p_1}{p_2}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{p_2 - p_1}\sqrt{\frac{(1+\nu)(2-p_2^2)}{\eta}}, \tag{10.12}$$

$$0 \le k < 1, \qquad \varepsilon \ge 0.$$

Из (10.8), (10.12) следует, что при $p_2 = \sqrt{2}$ справедливы равенства $\varepsilon = 0$, $\cos\varphi_1 = 0$, $\varphi_1 = \pi/2$. Поэтому вблизи рассматриваемого положения равновесия $\varepsilon \ll 1$, угол φ в формулах (10.7) близок к значению $\pi/2$. Перейдем под интегралом (10.9) от φ к переменной ψ по формуле

$$\cos\varphi = \varepsilon\sin\psi. \tag{10.13}$$

При изменении угла φ от значения $\varphi = \varphi_1$ до значения $\varphi = \pi - \varphi_1$ угол ψ меняется от $\pi/2$ до $-\pi/2$. Разложим подынтегральную функцию (10.9) в ряд по степеням ε и найдем значение $\Delta\alpha$, используя формулы (10.7), (10.13):

$$W_1(\varphi) = \frac{\varepsilon^2\eta p_2^2(1-k)^2\cos^2\psi}{2(1+\nu)}, \tag{10.14}$$

$$1 + \nu\sin^2\beta = (1+\nu k^2)\left[1 - \frac{2\varepsilon\nu k\,(1-k)\sin\psi}{\sqrt{(1+\nu)(1+\nu k^2)}} + O(\varepsilon^2)\right],$$

$$p_2 + \nu p_1\sin\beta = p_2\left(1+\nu k^2\right)\left[1 - \frac{\varepsilon\nu k(1-k)\sin\psi}{\sqrt{(1+\nu)\left(1+\nu k^2\right)}} + O(\varepsilon^2)\right],$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-k^2}\left[1 + \frac{\varepsilon k\sin\psi}{1+k}\sqrt{\frac{1+\nu k^2}{1+\nu}} + O(\varepsilon^2)\right],$$

$$\Delta\alpha = 2\varepsilon\sqrt{\frac{(A+B_1)\eta(1-k)}{C(1+\nu)(1+k)}}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\psi\times$$

$$\times\left[1 - \frac{\varepsilon k\sin\psi}{1+k}\sqrt{\frac{1+\nu}{1+\nu k^2}} + O(\varepsilon^2)\right]d\psi =$$

$$= -\varepsilon^2\pi k\sqrt{\frac{(A+B_1)\eta(1-k)}{C(1+k)^3(1+\nu k^2)}} + O(\varepsilon^3).$$

Вычислим период нутационных колебаний, используя формулу (10.3) и переходя от β к φ по формулам (10.7) и от φ к ψ по формулам (10.12), (10.13):

$$p_2 = \sqrt{2}[1 + O(\varepsilon^2)],$$

$$p_1 - p_2 \sin\beta = \frac{(p_2-p_1)\cos\varphi\left[\nu p_1(p_1-p_2)\cos\varphi+\sqrt{d_2}\right]}{(1+\nu)p_2^2-\nu(p_1-p_2)^2\cos^2\varphi} =$$

$$= \varepsilon(1-k)\sin\psi\sqrt{\frac{2(1+\nu k^2)}{1+\nu}}[1+O(\varepsilon)],$$

$$T_* = \frac{(p_1-p_2)^2}{1+\nu}\sqrt{\frac{2(A+B_1)}{W_\text{к}}}\int_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1}\frac{\cos\varphi\sin\varphi\left(1+\nu\sin^2\beta\right)^2 d\varphi}{(p_1-p_2\sin\beta)(p_2+\nu p_1\sin\beta)\cos\beta\sqrt{W_1(\varphi)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2(A+B_1)(1+\nu k^2)}{W_\text{к}\eta(1-k^2)}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[1+O(\varepsilon)]d\psi =$$

$$= \sqrt{\frac{2(A+B_1)(1+\nu k^2)}{W_\text{к}\eta(1-k^2)}}[1+O(\varepsilon)].$$

Из полученных для $\Delta\alpha$, T_* формул найдем среднюю скорость ухода гироскопа:

$$\frac{\Delta\alpha}{T_*} = -\frac{\varepsilon^2\eta k(1-k)}{(1+k)(1+\nu k^2)}\sqrt{\frac{W_\text{к}}{2C}} + O(\varepsilon^3). \qquad (10.15)$$

Напишем полученную формулу через первые интегралы, используя формулы (3.1), (10.12):

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\Delta\alpha}{T_*} = -\frac{(A_2+C_1)\left(2CW_\text{к}-H^2\right)H_\text{c}H}{\left(H^2-H_c^2\right)\left[(A+A_1+A_2)H^2+(C_1-A-A_1)H_c^2\right]}\sqrt{\frac{W_\text{к}}{2C}} + O(\varepsilon^3),\\ &\varepsilon = \frac{1}{H-H_\text{c}}\sqrt{\frac{(A_2+C_1)(2CW_\text{к}-H^2)}{C}}.\end{aligned}}$$

10.5. Сравнение с формулой Магнуса

Формула Магнуса имеет вид [13]:

$$\boxed{\bar{\dot{\alpha}} = -\frac{\alpha_A^2 C\omega_0\sin\beta_0(A+C_1)}{2A^0(A+B_1)}.} \qquad (10.16)$$

Здесь $\bar{\dot{\alpha}}$, α_A, ω_0, β_0, A^0 – обозначения, принятые в [13]: $\bar{\dot{\alpha}}$ – средняя скорость ухода гироскопа, α_A – амплитуда колебаний по углу α, $\omega_0 = \dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma}$, β_0 – средний угол поворота внутреннего кольца, $A^0 = (A + A_1 + A_2)\cos^2\beta_0 + (A_2 + C_1)\sin^2\beta_0$.

Напишем формулу (10.16) в обозначениях, принятых в этой работе. Так как при $\varepsilon \ll 1$ значение $\cos\varphi$ близко к нулю, то, как следует из (10.7), (10.13), внутреннее кольцо колеблется около положения $\beta = \beta_{**}$ (с точностью до членов порядка ε), где $\sin\beta_{**} = p_1/p_2$, $-\pi/2 < \beta_{**} < \pi/2$. Поэтому

$$\beta_0 = \beta_{**}, \quad \sin\beta_0 = k, \quad A^0 = (A + A_1 + A_2)(1 + \nu k^2),$$

$$\omega_0 = \frac{H}{C} = p_2\sqrt{\frac{W_к}{C}} = \sqrt{\frac{2W_к}{C}}\,[1 + O(\varepsilon^2)].$$

Из формулы (10.14) для отклонения $\Delta\alpha$ следует, что $\Delta\alpha$ имеет порядок ε^2. Поэтому внешнее кольцо совершает колебания с амплитудой $\alpha_A = \Delta_1\alpha$ (с точностью до членов порядка ε^2),

$$\Delta_1\alpha = \int_{\beta_1}^{\beta_{**}} \frac{\dot{\alpha}\,d\beta}{\dot{\beta}} = \eta\sqrt{\frac{A+B_1}{2C}} \int_{\beta_1}^{\beta_{**}} \frac{(p_1 - p_2\sin\beta)d\beta}{(1+\nu\sin^2\beta)\sqrt{W(\beta,p_1,p_2)}} =$$

$$= \frac{p_2^2\eta(1-k)^2}{1+\nu}\sqrt{\frac{A+B_1}{2C}} \int_{\varphi_1}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi\sin\varphi\left(1+\nu\sin^2\beta\right)d\varphi}{(p_2+\nu p_1\sin\beta)\cos\beta\sqrt{W_1(\varphi)}} =$$

$$= \varepsilon\sqrt{\frac{(A+B_1)\eta(1-k)}{C(1+\nu)(1+k)}} \int_0^{\pi/2} \sin\psi\,[1 + O(\varepsilon)]d\psi =$$

$$= \varepsilon\sqrt{\frac{(A+B_1)\eta(1-k)}{C(1+\nu)(1+k)}}\,[1 + O(\varepsilon)].$$

Подставляя найденные выражения в формулу (10.16), получим

$$\bar{\dot{\alpha}} = -\frac{\varepsilon^2 \eta k\,(1-k)}{(1+k)(1+\nu k^2)}\sqrt{\frac{W_{\text{к}}}{2C}}\;[1 + O(\varepsilon)].$$

Сравнивая эту формулу с формулой (10.16), констатируем совпадение, по крайней мере, с точностью до членов порядка ε^3:

$$\boxed{\frac{\Delta\alpha}{T_*} = \bar{\dot{\alpha}} + O(\varepsilon^3).}$$

Замечание 10.1. Пусть ротор быстро вращается и $\beta^\circ \neq \pi/2$. При $|\dot{\gamma}^\circ| \to \infty$ малый параметр $\varepsilon \sim |\dot{\gamma}^\circ|^{-1}$. Формула средней скорости ухода гироскопа принимает вид:

$$\frac{\Delta\alpha}{T_*} = \frac{(A_2+C_1)\sin\beta^\circ}{2C|\dot{\gamma}^\circ|\cos^2\beta^\circ}\times$$

$$\times\left[\left(\dot{\alpha}^\circ\right)^2 + \frac{(A+B_1)\left(\dot{\beta}^\circ\right)^2}{(A+A_1+A_2)\cos^2\beta^\circ+(A_2+C_1)\sin^2\beta^\circ}\right] + O\left(\left(\dot{\gamma}^\circ\right)^{-2}\right).$$

§11. Область 2

Рассмотрим движение оси гироскопа при $P \in \boxed{2}$. Область 2 описывается неравенствами

$$\nu = -1, \qquad 0 \le p_2 < p_1, \qquad \eta p_1^2 + (1-\eta)p_2^2 - 2 < 0; \quad (11.1)$$

$$-1 < \nu < 0, \quad 0 \le p_2 < -\nu p_1, \quad \eta p_1^2 + (1-\eta)p_2^2 - 2 < 0,$$

$$\eta p_1^2 - 2\eta p_1 p_2 + (1+\nu+\eta)p_2^2 - 2(1+\nu) > 0.$$

Рассмотрим отрезок $-\pi/2 \le \beta \le 3\pi/2$. Фазовые траектории представляют собой две замкнутые кривые, симметричные одна другой относительно прямой $\beta = \pi/2$ и не пересекающие прямых $\beta = \pi/2\,(\mathrm{mod}\,\pi)$. Если $p_2 = 0$, то одна кривая симметрична относительно прямой $\beta = 0$, другая – относительно прямой $\beta = \pi$. Траектории области 2 представлены на рис. 5.1, 5.3, 5.5.

При $P \in \boxed{2}$ точка $\left(\beta(T), \dot{\beta}(T)\right)$ движется по часовой стрелке на той из двух фазовых кривых, на какую попала в начальный момент времени. Таким образом, ось гироскопа совершает нутационные колебания. Для траектории, лежащей между прямыми $\beta = -\pi/2$ и $\beta = \pi/2$:

$$\beta_1 \leq \beta(T) \leq \beta_2, \quad T \geq 0, \quad -\tfrac{\pi}{2} < \beta_1 < \arcsin\left(-\tfrac{p_2}{\nu p_1}\right) < \beta_2 < \tfrac{\pi}{2}.$$

Для траектории, лежащей между прямыми $\beta = \pi/2$ и $\beta = 3\pi/2$:

$$\pi - \beta_2 \leq \beta(T) \leq \pi - \beta_1, \qquad T \geq 0.$$

Здесь β_1, β_2 вычисляются по формулам (10.2). Дискриминант d в формулах (10.2) при $P \in \boxed{2}$ строго положителен, как следует из (11.1) и из следующего представления d:

$$d = (2 - p_2^2)\{\nu[\eta p_1^2 + (1-\eta)p_2^2 - 2] + (1+\nu)\eta p_2^2\} > 0.$$

Период нутационных колебаний оси гироскопа равен

$$T_* = 2\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{d\beta}{\dot{\beta}} = \sqrt{\frac{2(A+B_1)}{W_\text{к}}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{d\beta}{\sqrt{W(\beta, p_1, p_2)}},$$

где $W(\beta, p_1, p_2)$ – функция (6.2). Формула справедлива для каждой из двух фазовых кривых.

Из формулы (3.4) следует, что функция $\dot{\alpha}(T)$ строго положительна, так как

$$p_1 - p_2 \sin\beta \geq p_1 - p_2 > (1+\nu)p_1 \geq 0.$$

Поэтому внешнее кольцо вращается вокруг своей оси с положительной скоростью.

§12. Область 3

12.1. Фазовая траектория

Рассмотрим движение оси гироскопа при $P \in \boxed{3}$. Область 3 описывается неравенствами

$$\nu > -1, \quad p_1 > 0, \quad p_2 > 0, \tag{12.1}$$

$$\eta p_1^2 - 2\eta p_1 p_2 + (1 + \nu + \eta)p_2^2 - 2(1 + \nu) < 0,$$

$$\eta p_1^2 + 2\eta p_1 p_2 + (1 + \nu + \eta)p_2^2 - 2(1 + \nu) > 0.$$

Рассмотрим отрезок $-\pi/2 \leq \beta \leq 3\pi/2$. Фазовая траектория представляет собой замкнутую кривую, симметричную относительно прямой $\beta = \pi/2$ и не пересекающую прямых $\beta = -\pi/2 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$. Траектория области 3 представлена на рис. 5.3, 5.4, 5.8, 5.9.

При $\nu > 0$ такая траектория (замкнутая, симметричная относительно прямой $\beta = \pi/2$ и не пересекающая прямых $\beta = -\pi/2 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ существует не только при $P \in \boxed{3}$, но и при $P \in \boxed{3 + 5}$, где $\boxed{3 + 5}$ – объединение областей 3, 5 с их общей границей. Область $\boxed{3 + 5}$ описывается следующими соотношениями:

$$\nu > 0, \quad \eta p_1^2 - 2\eta p_1 p_2 + (1 + \nu + \eta)p_2^2 - 2(1 + \nu) < 0, \tag{12.2}$$

$$\eta p_1^2 + 2\eta p_1 p_2 + (1 + \nu + \eta)p_2^2 - 2(1 + \nu) > 0 \text{ при } 0 < \nu p_1 \leq p_2,$$

$$\nu\eta p_1^2 + (\nu + \eta)p_2^2 - 2\nu > 0 \text{ при } 0 \leq p_2 < \nu p_1.$$

Кроме рассмотренной фазовой траектории, при $P \in \boxed{5}$ есть вторая замкнутая траектория (смотрите §14), а при $P \in \boxed{3{:}5}$ есть точка покоя (смотрите §15).

12.2. Нутационные колебания

При $P \in \boxed{3}$ и при $P \in \boxed{3+5}$ точка $\left(\beta(T), \dot{\beta}(T)\right)$ движется по часовой стрелке на фазовой кривой. Таким образом, ось гироскопа совершает нутационные колебания:

$$\beta_1 \leq \beta(T) \leq \pi - \beta_1, \qquad T \geq 0;$$

$$-\frac{\pi}{2} < \beta_1 < \frac{\pi}{2} \quad \text{при } -1 < \nu \leq 0 \text{ и при } \nu > 0,\ \ 0 < \nu p_1 \leq p_2;$$

$$-\frac{\pi}{2} < -\arcsin\frac{p_2}{\nu p_1} < \beta_1 < \frac{\pi}{2} \qquad \text{при } \nu > 0,\ \ 0 \leq p_2 < \nu p_1.$$

Здесь β_1 вычисляется по формуле (10.2). Покажем, что дискриминант d в формуле (10.2) положителен при $P \in \boxed{3}$ и при $P \in \boxed{3+5}$. Из (12.2) следует, что при $\nu > 0,\ 0 \leq p_2 < \nu p_1$ выражение в квадратных скобках формулы для d положительно и, кроме того, $2 - p_2^2 > 0$. Поэтому $d > 0$ при $\nu > 0,\ 0 \leq p_2 < \nu p_1$. При $-1 < \nu \leq 0$ и при $\nu > 0,\ 0 < \nu p_1 \leq p_2$ из (12.1), (12.2) следуют неравенства

$$2 - p_2^2 > 0, \qquad p_2 > \sqrt{\frac{(1+\nu)(2-p_2^2)}{\eta}} - p_1.$$

Отсюда получаем:

$$d = (2 - p_2^2)[\eta(\nu p_1^2 + p_2^2) - \nu(2 - p_2^2)] >$$

$$> (2 - p_2^2)\left[\nu\eta p_1^2 + \eta\left(\sqrt{\frac{(1+\nu)(2-p_2^2)}{\eta}} - p_1\right)^2 - \nu(2 - p_2^2)\right] =$$

$$= (2 - p_2^2)\left[p_1\sqrt{(1+\nu)\eta} - \sqrt{2 - p_2^2}\right]^2 \geq 0.$$

Положительность d доказана.

Период нутационных колебаний оси гироскопа равен

$$T_* = 2\int\limits_{\beta_1}^{\pi-\beta_1}\frac{d\beta}{\dot\beta} = 2\sqrt{\frac{2(A+B_1)}{W_к}}\int\limits_{\beta_1}^{\pi/2}\frac{d\beta}{\sqrt{W(\beta,p_1,p_2)}},$$

где $W(\beta,p_1,p_2)$ – функция (6.2).

12.3. Движение внешнего кольца

Из формулы (3.4) следует, что угловая скорость $\dot\alpha$ положительна, если $p_1 > p_2$. Если $p_1 = p_2$, то за одно нутационное колебание скорость $\dot\alpha$ дважды обращается в ноль, а в остальные моменты времени положительна. Поэтому при $p_1 \geq p_2$ внешнее кольцо вращается вокруг своей оси, не совершая попятных движений.

Пусть теперь $p_1 < p_2$, то есть $P \in \boxed{3-}$ или $P \in \boxed{3+5-}$, где $\boxed{3+5-}$ – объединение областей $\boxed{3-}$, $\boxed{5-}$ с их общей границей (смотрите рис. 7.1). Из формулы (3.4) следует, что за одно нутационное колебание функция $\dot\alpha(T)$ четыре раза меняет знак, а угол α отклоняется на величину, равную

$$\Delta\alpha = \int\limits_{T}^{T+T_*}\dot\alpha(t)dt = 2\int\limits_{\beta_1}^{\pi-\beta_1}\frac{\dot\alpha\, d\beta}{\dot\beta} = \qquad (12.3)$$

$$= 2\eta\sqrt{\frac{2(A+B_1)}{C}}\int\limits_{\beta_1}^{\pi/2}\frac{(p_1-p_2\sin\beta)d\beta}{(1+\nu\sin^2\beta)\sqrt{W(\beta,p_1,p_2)}},$$

где $W(\beta,p_1,p_2)$ – функция (6.2). Чтобы исследовать $\Delta\alpha$, введем вместо $p_1,\ p_2$ параметры $a,\ k$:

$$a = \frac{1}{p_2^2} - \frac{1}{2}, \qquad k = \frac{p_1}{p_2}.$$

Как следует из (12.1) и неравенства $p_1 < p_2$, область $\boxed{3-}$ описывается неравенствами

$$\nu > -1, \quad 0 < k < 1, \quad \eta(1-k)^2 - 2a(1+\nu) < 0, \qquad (12.4)$$

$$\eta(1+k)^2 - 2a(1+\nu) > 0.$$

Область $\boxed{3+5-}$ описывается неравенствами, следующими из (12.2) и неравенства $p_1 < p_2$:

$$\nu > 1, \qquad \eta(1-k)^2 - 2a(1+\nu) < 0, \qquad (12.5)$$

$$\eta(1+k)^2 - 2a(1+\nu) > 0 \text{ при } 0 < \nu k \le 1,$$

$$\eta(1+\nu k^2) - 2\nu a > 0 \text{ при } k < 1 < \nu k.$$

Теорема 12.1. *Отклонение $\Delta\alpha$ обращается в ноль при $P \in \rho$, где ρ – кривая со следующими свойствами:*

1) *ρ принадлежит области $\boxed{3-}$ при $-1 < \nu \le 1$ и области $\boxed{3+5-}$ при $\nu > 1$;*

2) *ρ пересекает каждую прямую, проходящую через начало координат $p_1 = p_2 = 0$, причём число точек пересечения конечно;*

3) *ρ имеет граничными точками точки $P \in \boxed{1:3:4}$ и $P \in \boxed{0:1:3}$.*

Доказательство. а) <u>Аналитичность</u> $\Delta\alpha$. Разобьём интеграл (12.3) на два: на интеграл от β_1 до β_{**} и на интеграл от β_{**} до $\pi/2$ (напомним: $\beta_{**} = \arcsin k$). Под первым интегралом перейдём к новой независимой переменной φ, используя формулы

$$W(\beta, p_1, p_2) = p_2^2\, W_2(\varphi) \equiv p_2^2 a \sin^2\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le \pi/2,$$

$$\sin\beta = f_1(\varphi) \equiv \frac{\eta k - \cos\varphi\sqrt{d_3}}{\eta - 2\nu a \cos^2\varphi},$$

$$d_3 = 2a(\eta + \nu\eta k^2 - 2\nu a \cos^2\varphi).$$

При изменении угла β от β_1 до β_{**} угол φ меняется от 0 до $\pi/2$. Под вторым интегралом перейдём к переменной φ, используя формулы

$$W(\beta, p_1, p_2) = p_2^2\, W_3(\varphi) \equiv p_2^2 \left[a - \frac{\eta(1-k)^2}{2(1+\nu)}\cos^2\varphi\right], \qquad 0 \le \varphi \le \pi/2,$$

$$\sin\beta = f_2(\varphi) \equiv \frac{(1+\nu)k + (1-k)\cos\varphi\sqrt{d_4}}{1+\nu-\nu(1-k)^2\cos^2\varphi},$$

$$d_4 = (1+\nu)(1+\nu k^2) - \nu(1-k)^2\cos^2\varphi.$$

При изменении угла β от β_{**} до $\pi/2$ угол φ меняется от $\pi/2$ до 0. Объединим интегралы. Получим

$$\Delta\alpha = 2\eta\sqrt{\frac{2(A+B_1)}{C}}\int\limits_0^{\pi/2}\left[\frac{2\sqrt{a}\left[1+\nu f_1^2(\varphi)\right]\cos\varphi}{\eta\left[1+\nu k f_1(\varphi)\right]\sqrt{1-f_1^2(\varphi)}} - \right. \tag{12.6}$$

$$\left. - \frac{(1-k)^2\left[1+\nu f_2^2(\varphi)\right]\cos\varphi\,\sin\varphi}{(1+\nu)\left[1+\nu k f_2(\varphi)\right]\sqrt{\left[1-f_2^2(\varphi)\right]W_3(\varphi)}}\right]d\varphi.$$

Подынтегральная функция аналитична по φ, a, k в области, описываемой неравенствами $0 \le \varphi \le \pi/2$ и неравенствами (12.4) при $-1 < \nu \le 1$. Подынтегральная функция аналитична по φ, a, k в области, описываемой неравенствами $0 \le \varphi \le \pi/2$ и неравенствами (12.5) при $\nu > 1$. Поэтому $\Delta\alpha$ аналитична по a, k в области $\boxed{3-}$ при $-1 < \nu \le 1$ и в области $\boxed{3+5-}$ при $\nu > 1$.

б) Рассмотрим поведение $\Delta\alpha$ в окрестности границ областей $\boxed{3-}$, $\boxed{3+5-}$.

<u>Верхняя граница</u> описывается уравнением

$$\eta(1-k)^2 - 2a(1+\nu) = 0, \quad 0 < k < 1.$$

При стремлении P к верхней границе отклонение $\Delta\alpha \to -\infty$, так как на верхней границе подынтегральная функция интеграла (12.6) имеет особенность в точке $\varphi = 0$ и так как в окрестности точки

$\varphi = 0$ подынтегральная функция равна $-(K_1/\varphi)[1 + O(\varphi)]$, где K_1 – положительная постоянная.

Нижняя граница описывается уравнениями

$$\eta(1+k)^2 - 2a(1+\nu) = 0 \text{ при } -1 < \nu \le 1, \ \ 0 < k < 1 \text{ и}$$

$$\text{при } \nu > 1, \quad 0 < \nu k \le 1;$$

$$\eta(1+\nu k^2) - 2\nu a = 0 \text{ при } \nu > 1, \quad k < 1 < \nu k.$$

При стремлении P к нижней границе отклонение $\Delta\alpha \to +\infty$, так как на нижней границе подынтегральная функция интеграла (12.6) имеет особенность в точке $\varphi = 0$ и так как в окрестности точки $\varphi = 0$ подынтегральная функция равна

$$\frac{K_2}{\varphi}[1 + O(\varphi)], \text{если } \nu k \ne 1, \quad \text{и} \quad \frac{K_3}{\varphi^2}[1 + O(\varphi)], \text{если } \nu k = 1.$$

Здесь K_2, K_3 – положительные постоянные.

в) Зафиксируем значение k и рассмотрим $\Delta\alpha$ как функцию a. Параметр a принадлежит интервалам

$$\frac{\eta(1-k)^2}{2(1+\nu)} < a < \frac{\eta(1+k)^2}{2(1+\nu)} \quad \text{при } -1 < \nu \le 1, \ 0 < k < 1 \text{ и} \qquad (12.7)$$

$$\text{при } \nu > 1, \quad 0 < \nu k \le 1;$$

$$\frac{\eta(1-k)^2}{2(1+\nu)} < a < \frac{\eta(1+\nu k^2)}{2\nu} \quad \text{при } \nu > 1, \ \ k < 1 < \nu k.$$

$\Delta\alpha$ – аналитическая функция a, принимающая на концах интервалов (12.7) значения противоположных знаков. Поэтому на интервалах (12.7) есть точка или точки, в которых $\Delta\alpha = 0$. В силу аналитичности $\Delta\alpha$, число таких точек на каждом интервале конечно.

На плоскости $p_1 p_2$ неравенства (12.7) описывают области $\boxed{3-}$, $\boxed{3+5-}$. При фиксированном значении k неравенства (12.7) описывают пересечение прямой, проходящей через начало координат $p_1 = p_2 = 0$, с областями $\boxed{3-}$, $\boxed{3+5-}$. Отсюда и из утверждения о нулях $\Delta\alpha$, как функции от α, следует справедливость утверждений 1, 2 теоремы.

Так как в окрестностях верхней и нижней границ областей $\boxed{3-}$, $\boxed{3+5-}$ $\Delta\alpha$ принимает разные знаки и так как эти границы пересекаются в точке $P \in \boxed{1:3:4}$, то $P \in \boxed{1:3:4}$ является граничной точкой кривой ρ.

Так как при $p_1 = p_2$ отклонение $\Delta\alpha > 0$, в окрестности верхней границы областей $\boxed{3-}$, $\boxed{3+5-}$ отклонение $\Delta\alpha < 0$ и прямая $p_1 = p_2$ пересекается с верхней границей в точке $P \in \boxed{0:1:3}$, то $P \in \boxed{0:1:3}$ является граничной точкой кривой ρ.

Утверждение 3 теоремы доказано, и тем самым доказана теорема 12.1.

Замечание 12.1. Теорема 12.1 не утверждает об односвязности кривой ρ.

§13. Область 4

13.1. Движение внутреннего кольца

Область 4 описывается неравенствами

$$\eta p_1^2 + 2\eta p_1 p_2 + (1+\nu+\eta) p_2^2 - 2(1+\nu) < 0$$

$$\text{при} \quad -1 < \nu \le 0, \quad p_1 \ge 0, \quad p_2 \ge 0 \ \text{ и}$$

$$\text{при} \quad \nu > 0, \qquad 0 \le \nu p_1 \le p_2;$$

$$\nu\eta p_1^2 + (\nu+\eta) p_2^2 - 2\nu < 0 \quad \text{при} \quad \nu > 0, \quad 0 \le p_2 < \nu p_1;$$

$$p_1^2 + p_2^2 \ne 0.$$

Рассмотрим отрезок $-\pi/2 \le \beta \le 3\pi/2$. Фазовые траектории являются дугами двух кривых, симметричных одна другой относительно оси β и не пересекающих оси β. Каждая дуга симметрична относительно прямой $\beta = \pi/2$. Траектории области 4 представлены на рис. 5.3–5.9.

При $P \in \boxed{4}$ точка $\big(\beta(T), \dot\beta(T)\big)$ движется по той дуге, на какую попала в начальный момент времени. Движется вправо на верхней дуге и влево на нижней дуге. Таким образом, при $P \in \boxed{4}$ внутреннее кольцо карданова подвеса вращается вокруг своей оси с периодом

$$T_* = \int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{d\beta}{\dot\beta} = \sqrt{\frac{2(A+B_1)}{W_\text{к}}} \int\limits_{0}^{\pi/2} \left[\frac{1}{\sqrt{W(\beta,p_1,p_2)}} + \frac{1}{\sqrt{W(-\beta,p_1,p_2)}}\right] d\beta,$$

где $W(\beta, p_1, p_2)$ – функция (6.2). Формула справедлива для каждой из двух фазовых кривых.

13.2. Движение внешнего кольца

Из формулы (3.4) следует, что угловая скорость $\dot\alpha$ положительна, если $p_1 > p_2$. Если $p_1 = p_2$, то за один оборот внутреннего кольца скорость $\dot\alpha$ один раз обращается в ноль, а в остальные моменты времени положительна. Поэтому при $p_1 \ge p_2$ внешнее кольцо вращается вокруг своей оси, не совершая попятных движений.

Пусть теперь $p_1 < p_2$, то есть $P \in \boxed{4-}$ (смотрите рис. 7.1). Из формулы (3.4) следует, что за один оборот внутреннего кольца функция $\dot\alpha(T)$ дважды меняет знак, а угол α отклоняется на величину, равную

$$\Delta\alpha = \int\limits_{T}^{T+T_*} \dot\alpha(t)dt = \int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\dot\alpha\, d\beta}{\dot\beta} =$$

$$= \eta \sqrt{\frac{2(A+B_1)}{C}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\nu \sin^2 \beta} \left[\frac{p_1 - p_2 \sin \beta}{\sqrt{W(\beta, p_1, p_2)}} + \frac{p_1 + p_2 \sin \beta}{\sqrt{W(-\beta, p_1, p_2)}} \right] d\beta,$$

где $W(\beta, p_1, p_2)$ – функция (6.2). Формула справедлива для каждой из двух фазовых кривых.

Если $p_1 = 0$, то $W(\beta, p_1, p_2) = W(-\beta, p_1, p_2)$ и, значит, $\Delta\alpha = 0$. Пусть теперь $0 < p_1 < p_2$. Выражение в квадратных скобках под интегралом положительно при $p_1 - p_2 \sin \beta \geq 0$, а при $p_1 - p_2 \sin \beta < 0$ имеет такой же знак, как разность квадратов:

$$-\frac{(p_1 - p_2 \sin \beta)^2}{W(\beta, p_1, p_2)} + \frac{(p_1 + p_2 \sin \beta)^2}{W(-\beta, p_1, p_2)} = \frac{(2 - p_2^2) 2 p_1 p_2 \sin \beta}{W(\beta, p_1, p_2) \cdot W(-\beta, p_1, p_2)} > 0 \text{ при } \beta \neq 0.$$

Получили, что $\Delta\alpha > 0$ при $0 < p_1 < p_2$. Отсюда следует, что справедлива

Теорема 13.1. *При* $P \in \boxed{4-}$ *отклонение* $\Delta\alpha$ *обращается в ноль при* $p_1 = 0$ *и* $\Delta\alpha > 0$ *при* $0 < p_1 < p_2$.

§ 14. Область 5

14.1. Движение внутреннего кольца

Область 5 описывается неравенствами

$$\nu > 0, \qquad 0 \leq p_2 < \nu p_1,$$

$$\eta p_1^2 + 2\eta p_1 p_2 + (1 + \nu + \eta) p_2^2 - 2(1 + \nu) < 0,$$

$$\nu \eta p_1^2 + (\nu + \eta) p_2^2 - 2\nu > 0.$$

Рассмотрим отрезок $-\arcsin(p_2/\nu p_1) \leq \beta \leq 2\pi - \arcsin(p_2/\nu p_1)$. Фазовые траектории являются двумя замкнутыми непересекающимися кривыми. Одна кривая симметрична относительно прямой $\beta = \pi/2$ и расположена на отрезке

$$\beta_1 \le \beta(T) \le \pi - \beta_1. \tag{14.1}$$

Эта кривая входит в семейство фазовых траекторий, рассмотренных в §12. Другая фазовая траектория симметрична относительно прямой $\beta = 3\pi/2$ и расположена на отрезке

$$\beta_2 \le \beta(T) \le 3\pi - \beta_2.$$

При $p_2 = 0$ фазовые траектории симметричны одна другой относительно прямой $\beta = \pi$. Значения β_1, β_2 вычисляются по формулам (10.2). В п. 12.2 показано, что в формулах (10.2) дискриминант $d > 0$ при $P \in \boxed{3+5}$ и, значит, при $P \in \boxed{5}$. Справедливы неравенства

$$-\arcsin\frac{p_2}{\nu p_1} < \beta_1 < \frac{\pi}{2} < \pi - \beta_1 < \pi + \arcsin\frac{p_2}{\nu p_1} < \tag{14.2}$$

$$< \beta_2 < \frac{3\pi}{2} < 3\pi - \beta_2 < 2\pi - \arcsin\frac{p_2}{\nu p_1}.$$

Фазовые траектории представлены на рис. 5.7, 5.8, 5.9.

При $P \in \boxed{5}$ точка $\big(\beta(T), \dot\beta(T)\big)$ движется по часовой стрелке на той кривой, на какую попала в начальный момент времени. При движении по второй фазовой траектории ось гироскопа совершает нутационные колебания с периодом

$$T_* = 2\int\limits_{\beta_2}^{3\pi-\beta_2} \frac{d\beta}{\dot\beta} = 2\sqrt{\frac{2(A+B_1)}{W_к}} \int\limits_{\beta_2}^{3\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{W(\beta, p_1, p_2)}},$$

где $W(\beta, p_1, p_2)$ – функция (6.2).

14.2. Движение внешнего кольца

Для фазовой траектории, расположенной на отрезке (14.1), поведение внутреннего и внешнего колец карданова подвеса исследовано в §12. Рассмотрим вторую фазовую траекторию. Для этой траектории справедливы неравенства, следующие из (14.2):

$$p_1 - p_2 \sin\beta \geq p_1 - p_2 \sin\beta_2 > p_1 + \frac{{p_2}^2}{\nu p_1} > 0.$$

Поэтому $\dot{\alpha} > 0$, как следует из (3.4), и внешнее кольцо вращается вокруг своей оси с положительной угловой скоростью.

§15. Границы между областями

Рассмотрим движение оси гироскопа, когда точка P лежит на границе между двумя областями.

$P \in \boxed{0{:}\,1}$. Граница описывается соотношениями

$$\nu \geq -1, \qquad 0 \leq p_1 < \sqrt{2}, \qquad p_2 = \sqrt{2}.$$

Фазовые траектории на отрезке $-\pi/2 \leq \beta \leq 3\pi/2$ представляют собой две точки покоя

$$\left(\arcsin\frac{p_1}{\sqrt{2}}, 0\right), \qquad \left(\pi - \arcsin\frac{p_1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

которые являются особыми точками типа «центр». Точки представлены на рис. 5.1, 5.3, 5.5, 5.9. Ось гироскопа неподвижна. Это состояние покоя, устойчивое по переменным $\dot{\alpha}$, β, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, а по углу α устойчивое при $\nu = -1$ и неустойчивое при $\nu > -1$ (смотрите §9, §10).

$P \in \boxed{0{:}\,2}$. Граница описывается соотношениями

$$-1 \leq \nu < 0, \quad 0 \leq p_2 < -\nu p_1, \quad \nu\eta p_1^2 + (\nu + \eta)p_2^2 - 2\nu = 0.$$

Фазовые траектории на отрезке $-\pi/2 \leq \beta \leq 3\pi/2$ представляют собой две точки покоя

$$\left(-\arcsin\frac{p_2}{\nu p_1}, 0\right), \qquad \left(\pi + \arcsin\frac{p_2}{\nu p_1}, 0\right),$$

которые являются особыми точками типа «центр». Точки представлены на рис. 5.1, 5.3, 5.5. Они соответствуют устойчивой регулярной прецессии гироскопа (смотрите §9).

$P \in \boxed{0:3}$. Граница описывается соотношениями

$$-1 < \nu < 0, \quad -\nu p_1 < p_2 < p_1;$$

$$\nu \geq 0, \quad 0 < p_2 < p_1;$$

$$\eta p_1^2 - 2\eta p_1 p_2 + (1 + \nu + \eta) p_2^2 - 2(1 + \nu) = 0.$$

Фазовая траектория на отрезке $-\pi/2 \leq \beta \leq 3\pi/2$ является точкой покоя $(\pi/2{,}0)$, соответствующей устойчивой регулярной прецессии гироскопа (смотрите §9). Точка $(\pi/2{,}0)$ является особой точкой типа «центр». Точка представлена на рис. 5.4, 5.8.

$P \in \boxed{1:2}$. Граница описывается соотношениями

$$\nu = -1, \quad 0 < p_1 = p_2 < \sqrt{2}.$$

Фазовая траектория на отрезке $-\pi/2 \leq \beta \leq 3\pi/2$ является замкнутой кривой, симметричной относительно прямой $\beta = \pi/2$ (рис. 5.2). Внешнее кольцо вращается с положительной угловой скоростью (смотрите п. 4.1.3).

$P \in \boxed{1:3}$. Граница описывается соотношениями

$$\nu > -1, \quad 0 < p_1 < p_2,$$

$$\eta p_1^2 - 2\eta p_1 p_2 + (1 + \nu + \eta) p_2^2 - 2(1 + \nu) = 0.$$

Фазовая траектория на отрезке $-\pi/2 \leq \beta \leq 3\pi/2$ является сепаратрисой, состоящей из точки покоя $(\pi/2{,}0)$ и двух кривых, симметричных одна другой относительно прямой $\beta = \pi/2$ (рис. 5.3, 5.9). Каждая кривая замыкается на точке $(\pi/2{,}0)$. Точка $(\pi/2{,}0)$ является особой точкой типа седла.

Если $\beta^{\circ} = \pi/2$, $\dot{\beta}^{\circ} = 0$, то гироскоп совершает неустойчивую регулярную прецессию (смотрите §9). При других начальных значениях точка $(\beta, \dot{\beta})$ попадает на одну из двух фазовых кривых и движется на ней по часовой стрелке так, что при $T \to \infty$ $\left(\beta(T), \dot{\beta}(T)\right) \to (\pi/2{,}0)$. Внешнее кольцо карданова подвеса может менять направление вращения не больше двух раз. При $T \to \infty$

$$\dot{\alpha}(T) \to \sqrt{\frac{W_{\text{к}}}{C}\,\frac{\eta(p_1 - p_2)}{1+\nu}}.$$

$P \in \boxed{2:3}$. Граница описывается соотношениями

$$-1 < \nu < 0, \quad 0 < p_2 < -\nu p_1,$$

$$\eta p_1^2 - 2\eta p_1 p_2 + (1 + \nu + \eta) p_2^2 - 2(1 + \nu) = 0.$$

Фазовая траектория на отрезке $-\pi/2 \leq \beta \leq 3\pi/2$ является сепаратрисой, состоящей из точки покоя $(\pi/2{,}0)$ и двух кривых, симметричных одна другой относительно прямой $\beta = \pi/2$ (рис. 5.3). Каждая кривая замыкается на точке $(\pi/2{,}0)$. Точка $(\pi/2{,}0)$ является особой точкой типа седла.

Если $\beta^{\circ} = \pi/2$, $\dot{\beta}^{\circ} = 0$, то гироскоп совершает неустойчивую регулярную прецессию (смотрите §9). При других начальных значениях точка $(\beta, \dot{\beta})$ попадает на одну из двух фазовых кривых и движется на ней по часовой стрелке так, что при $T \to \infty$ $\left(\beta(T), \dot{\beta}(T)\right) \to (\pi/2{,}0)$. Внешнее кольцо карданова подвеса вращается вокруг своей оси в одном направлении. При $T \to \infty$

$$\dot{\alpha}(T) \to \sqrt{\frac{W_{\text{к}}}{C}\,\frac{\eta(p_1 - p_2)}{1+\nu}}.$$

$P \in \boxed{3:4}$. Граница описывается соотношениями

$$-1 < \nu \leq 0, \quad p_1 > 0, \quad p_1 > 0;$$

$$\nu > 0, \quad 0 < \nu p_1 < p_2;$$

$$\eta p_1^2 + 2\eta p_1 p_2 + (1 + \nu + \eta) p_2^2 - 2(1 + \nu) = 0.$$

Фазовая траектория на интервале $-\pi/2 \leq \beta < 3\pi/2$ является сепаратрисой, состоящей из точки покоя $(-\pi/2{,}0)$ и двух кривых, симметричных одна другой относительно оси β и не пересекающих ось β (рис. 5.3, 5.4). Каждая кривая симметрична относительно прямой $\beta = \pi/2$ и упирается в точки $(-\pi/2{,}0)$ и $(3\pi/2{,}0)$. Точка $(-\pi/2{,}0)$ является особой точкой типа седла.

Если $\beta^\circ = -\pi/2$, $\dot{\beta}^\circ = 0$, то гироскоп совершает неустойчивую регулярную прецессию (смотрите §9). При других начальных значениях точка $(\beta, \dot{\beta})$ попадает на одну из двух фазовых кривых и движется по ней так, что при $T \to \infty$ $\left(\beta(T), \dot{\beta}(T)\right) \to (-\pi/2{,}0)$, если $\dot{\beta}^\circ < 0$, и $\left(\beta(T), \dot{\beta}(T)\right) \to (3\pi/2{,}0)$, если $\dot{\beta}^\circ > 0$. Внешнее кольцо карданова подвеса может менять направление вращения не больше двух раз. При $T \to \infty$ $\dot{\alpha}(T) \to \sqrt{\frac{W_\text{к}}{C}\,\frac{\eta(p_1+p_2)}{1+\nu}}$.

$P \in \boxed{3:5}$. Граница описывается соотношениями

$$\nu > 0, \quad 0 < p_2 < \nu p_1,$$

$$\eta p_1^2 + 2\eta p_1 p_2 + (1 + \nu + \eta) p_2^2 - 2(1 + \nu) = 0.$$

Фазовые траектории на интервале

$$-\arcsin\frac{p_2}{\nu p_1} \leq \beta < 2\pi - \arcsin\frac{p_2}{\nu p_1}$$

представляют собой точку покоя $(3\pi/2{,}0)$ и замкнутую кривую, симметричную относительно прямой $\beta = \pi/2$ и расположенную на интервале $-\arcsin(p_2/\nu p_1) < \beta < \pi + \arcsin(p_2/\nu p_1) < 3\pi/2$ (рис. 5.8, 5.9). Точка $(3\pi/2{,}0)$ является особой точкой типа «центр».

Если $\beta^\circ = 3\pi/2$, $\dot{\beta}^\circ = 0$, то гироскоп совершает устойчивую регулярную прецессию (смотрите §9). При других начальных значениях точка $(\beta, \dot{\beta})$ попадает на замкнутую кривую и движется на ней по часовой стрелке. Эта кривая входит в семейство фазовых траекторий, рассмотренных в §12. В §12 исследовано поведение внешнего и внутреннего колец карданова подвеса.

$P \in \boxed{4{:}\,5}$. Граница описывается соотношениями

$$\nu > 0, \quad 0 \le p_2 < \nu p_1, \quad \nu\eta p_1^2 + (\nu + \eta)p_2^2 - 2\nu = 0.$$

Фазовая траектория на интервале $-\arcsin(p_2/\nu p_1) \le \beta < 2\pi - \arcsin(p_2/\nu p_1)$ является сепаратрисой, состоящей из двух точек покоя

$$\left(-\arcsin\frac{p_2}{\nu p_1}, 0\right), \quad \left(\pi + \arcsin\frac{p_2}{\nu p_1}, 0\right) \qquad (15.1)$$

и четырех кривых, не пересекающих оси β (рис. 5.7, 5.8, 5.9). Две кривые симметричны относительно прямой $\beta = \pi/2$, симметричны одна другой относительно оси β и упираются в точки (15.1). Две другие кривые симметричны относительно прямой $\beta = 3\pi/2$, симметричны одна другой относительно оси β и упираются в точки

$$\left(\pi + \arcsin\frac{p_2}{\nu p_1}, 0\right), \quad \left(2\pi - \arcsin\frac{p_2}{\nu p_1}, 0\right).$$

Точки (15.1) являются особыми точками типа седла.

Если $\beta^\circ = -\arcsin(p_2/\nu p_1)$ или $\beta^\circ = \pi + \arcsin(p_2/\nu p_1)$, а $\dot{\beta}^\circ = 0$, то гироскоп совершает неустойчивую регулярную прецессию (смотрите §9). При других начальных значениях точка $(\beta, \dot{\beta})$ попадает на одну из четырёх фазовых кривых и движется по ней так, что при $T \to \infty$

$$\left(\beta(T), \dot\beta(T)\right) \to \left(-\arcsin\frac{p_2}{\nu p_1}, 0\right), \qquad \text{если}$$
$$-\arcsin\frac{p_2}{\nu p_1} < \beta^\circ < \pi + \arcsin\frac{p_2}{\nu p_1}, \qquad \dot\beta^\circ < 0;$$

$$\left(\beta(T), \dot\beta(T)\right) \to \left(2\pi - \arcsin\frac{p_2}{\nu p_1}, 0\right), \quad \text{если}$$
$$\pi + \arcsin\frac{p_2}{\nu p_1} < \beta^\circ < 2\pi - \arcsin\frac{p_2}{\nu p_1}, \quad \dot\beta^\circ > 0;$$

$$\left(\beta(T), \dot\beta(T)\right) \to \left(\pi + \arcsin\frac{p_2}{\nu p_1}, 0\right),$$
$$\text{если} \quad -\arcsin\frac{p_2}{\nu p_1} < \beta^\circ < \pi + \arcsin\frac{p_2}{\nu p_1}, \qquad \dot\beta^\circ > 0 \quad \text{или}$$
$$\text{если} \quad \pi + \arcsin\frac{p_2}{\nu p_1} < \beta^\circ < 2\pi - \arcsin\frac{p_2}{\nu p_1}, \quad \dot\beta^\circ < 0.$$

Внешнее кольцо карданова подвеса не меняет направление вращения, если фазовая траектория лежит на интервале $\pi + \arcsin(p_2/\nu p_1) < \beta < 2\pi - \arcsin(p_2/\nu p_1)$. Если фазовая траектория лежит на интервале $-\arcsin(p_2/\nu p_1) < \beta < \pi + \arcsin(p_2/\nu p_1)$, то внешнее кольцо может менять направление вращения не больше двух раз. При $T \to \infty$

$$\dot\alpha(T) \to \sqrt{\frac{W_\text{к}}{C}\,\frac{\eta\left(\nu p_1^2 + p_2^2\right)}{(1+\nu)\nu p_1}}, \text{ если } \beta(T) \to -\arcsin\frac{p_2}{\nu p_1} \pmod{2\pi};$$

$$\dot\alpha(T) \to \sqrt{\frac{W_\text{к}}{C}\,\frac{\eta\left(\nu p_1^2 - p_2^2\right)}{(1+\nu)\nu p_1}}, \text{ если } \beta(T) \to \pi + \arcsin\frac{p_2}{\nu p_1}.$$

§16. Граничные точки

Рассмотрим движение оси гироскопа, когда точка P лежит на границе трёх областей.

$P \in \boxed{0:1:2}$. Граничная точка описывается равенствами

$$\nu = -1, \quad p_1 = p_2 = \sqrt{2}.$$

Фазовая траектория на отрезке $-\pi/2 \le \beta \le 3\pi/2$ является точкой покоя $(\pi/2{,}0)$, соответствующей «регулярной прецессии» (рис. 5.2, смотрите §7). Ось гироскопа неподвижна. Это положение покоя устойчиво по переменным $\beta,\ \dot{\beta}$. Об устойчивости по другим переменным говорить не приходится, так как функции $\dot{\alpha}(T)$, $\dot{\gamma}(T)$ определяются только в совокупности (смотрите §4). Точка $(\pi/2{,}0)$ является особой точкой типа «центр».

$P \in \boxed{0:1:3}$. Граничная точка описывается соотношениями

$$\nu > -1, \quad p_1 = p_2 = \sqrt{2}.$$

Фазовая траектория на отрезке $-\pi/2 \le \beta \le 3\pi/2$ является точкой $(\pi/2{,}0)$, соответствующей точке покоя оси гироскопа, устойчивой по переменным $\dot{\alpha}$, β, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ и неустойчивой по углу α (смотрите §9, §10, §12). Точка $(\pi/2{,}0)$ является особой точкой типа «центр» (рис. 5.4, 5.8).

$P \in \boxed{0:2:3}$. Граничная точка описывается соотношениями

$$-1 < \nu < 0, \quad p_2 = -\nu p_1, \quad \nu\eta p_1^2 + (\nu + \eta)p_2^2 - 2\nu = 0.$$

Фазовая траектория на отрезке $-\pi/2 \le \beta \le 3\pi/2$ является точкой покоя $(\pi/2{,}0)$, соответствующей устойчивой регулярной прецессии гироскопа (рис. 5.4, смотрите §9). Точка $(\pi/2{,}0)$ является особой точкой типа «центр».

$P \in \boxed{0:3:4}$. Граничная точка описывается равенствами

$$\nu = 0, \quad p_1 = \sqrt{2/\eta}, \quad p_2 = 0.$$

Фазовые траектории являются точками покоя, заполняющими ось β (рис. 5.6). Каждая точка соответствует неустойчивой регулярной прецессии (смотрите §9).

$P \in \boxed{0{:}\,3{:}\,5}$. Граничная точка описывается соотношениями

$$\nu > 0, \quad p_1 = \sqrt{2(1+\nu)/\eta}, \quad p_2 = 0.$$

Фазовые траектории на отрезке $0 \le \beta \le 2\pi$ являются двумя точками покоя $(\pi/2{,}0)$ и $(3\pi/2{,}0)$ (рис. 5.7). Каждая точка является особой точкой типа «центр» и соответствует устойчивой регулярной прецессии гироскопа (смотрите §9).

$P \in \boxed{1{:}\,3{:}\,4}$. Граничная точка описывается соотношениями

$$\nu > -1, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = \sqrt{2(1+\nu)/(1+\nu+\eta)}.$$

Фазовая траектория на интервале $-\pi/2 \le \beta < 3\pi/2$ является сепаратрисой, состоящей из двух точек покоя $(-\pi/2{,}0)$, $(\pi/2{,}0)$ и четырех кривых (рис. 5.5). Две кривые симметричны относительно прямой $\beta = 0$ и упираются в указанные точки покоя. Две другие кривые симметричны относительно прямой $\beta = \pi$ и упираются в точки $(\pi/2{,}0)$, $(3\pi/2{,}0)$. Точки покоя являются особыми точками типа седла.

Если $\beta^\circ = -\pi/2 \pmod{\pi}$ и $\dot\beta^\circ = 0$, то гироскоп совершает неустойчивую регулярную прецессию (смотрите §9). При других начальных значениях точка $(\beta, \dot\beta)$ попадает на одну из четырёх фазовых кривых и движется по ней так, что при $T \to \infty$

$$\big(\beta(T), \dot\beta(T)\big) \to (-\pi/2{,}0), \text{ если } -\pi/2 < \beta^\circ < \pi/2, \quad \dot\beta^\circ < 0;$$

$$\big(\beta(T), \dot\beta(T)\big) \to (3\pi/2{,}0), \text{ если } \pi/2 < \beta^\circ < 3\pi/2, \quad \dot\beta^\circ > 0;$$

$$\big(\beta(T), \dot\beta(T)\big) \to (\pi/2{,}0), \text{ если } -\pi/2 < \beta^\circ < \pi/2, \quad \dot\beta^\circ > 0 \text{ или}$$

$$\text{если } \pi/2 < \beta^\circ < 3\pi/2, \quad \dot\beta^\circ < 0.$$

Внешнее кольцо карданова подвеса может менять направление вращения не больше одного раза. При $T \to \infty$

$$\dot{\alpha}(T) \to -\sqrt{\frac{W_{\text{к}}}{C}}\frac{\eta p_2}{1+\nu}, \quad \text{если} \quad \beta(T) \to \frac{\pi}{2};$$

$$\dot{\alpha}(T) \to \sqrt{\frac{W_{\text{к}}}{C}}\frac{\eta p_2}{1+\nu}, \quad \text{если} \quad \beta(T) \to -\frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\, 2\pi).$$

$P \in \boxed{2:3:4}$. Граничная точка описывается соотношениями

$$-1 < \nu < 0, \quad p_1 = \sqrt{2(1+\nu)/\eta}, \quad p_2 = 0.$$

Фазовая траектория на интервале $-\pi/2 \le \beta < 3\pi/2$ является сепаратрисой, состоящей из двух точек покоя $(-\pi/2{,}0)$, $(\pi/2{,}0)$ и четырех кривых (рис. 5.5). Две кривые симметричны относительно прямой $\beta = 0$ и упираются в указанные точки покоя. Две другие кривые симметричны относительно прямой $\beta = \pi$ и упираются в точки $(\pi/2{,}0)$, $(3\pi/2{,}0)$. Точки покоя являются особыми точками типа седла.

Если $\beta^{\circ} = -\pi/2\ (\mathrm{mod}\,\pi)$ и $\dot{\beta}^{\circ} = 0$, то гироскоп совершает неустойчивую регулярную прецессию (смотрите §9). При других начальных значениях точка $(\beta, \dot{\beta})$ попадает на одну из четырёх фазовых кривых и движется по ней так, что при $T \to \infty$

$$\big(\beta(T), \dot{\beta}(T)\big) \to (-\pi/2{,}0), \quad \text{если} \quad -\pi/2 < \beta^{\circ} < \pi/2, \quad \dot{\beta}^{\circ} < 0;$$

$$\big(\beta(T), \dot{\beta}(T)\big) \to (3\pi/2{,}0), \quad \text{если} \quad \pi/2 < \beta^{\circ} < 3\pi/2, \quad \dot{\beta}^{\circ} > 0;$$

$$\big(\beta(T), \dot{\beta}(T)\big) \to (\pi/2{,}0), \quad \text{если} \quad -\pi/2 < \beta^{\circ} < \pi/2, \quad \dot{\beta}^{\circ} > 0 \quad \text{или}$$

$$\text{если} \quad \pi/2 < \beta^{\circ} < 3\pi/2, \quad \dot{\beta}^{\circ} < 0.$$

Внешнее кольцо карданова подвеса не меняет направление вращения. При $T \to \infty$ $\dot{\alpha}(T) \to \sqrt{\frac{W_{\text{к}}}{C}}\frac{\eta p_1}{1+\nu}$.

$P \in \boxed{3:4:5}$. Граничная точка описывается соотношениями

$$\nu > 0, \quad p_2 = \nu p_1, \quad \nu\eta p_1^2 + (\nu + \eta)p_2^2 - 2\nu = 0.$$

Фазовая траектория на интервале $-\pi/2 \le \beta < 3\pi/2$ является сепаратрисой, состоящей из точки покоя $(-\pi/2{,}0)$ и двух кривых (рис. 5.3, 5.4). Каждая кривая симметрична относительно прямой $\beta = \pi/2$ и упирается в точки $(-\pi/2{,}0)$ и $(3\pi/2{,}0)$. Точка $(-\pi/2{,}0)$ является особой точкой типа седла.

Если $\beta^\circ = -\pi/2, \quad \dot\beta^\circ = 0$, то гироскоп совершает неустойчивую регулярную прецессию (смотрите §9). При других начальных значениях точка $\left(\beta, \dot\beta\right)$ попадает на одну из двух фазовых кривых и движется по ней так, что при при $T \to \infty$

$$\left(\beta(T), \dot\beta(T)\right) \to (-\pi/2{,}0), \quad \text{если} \quad \dot\beta^\circ < 0;$$
$$\left(\beta(T), \dot\beta(T)\right) \to (3\pi/2{,}0), \quad \text{если} \quad \dot\beta^\circ > 0.$$

Внешнее кольцо карданова подвеса не меняет направление вращения, если $0 < \nu \le 1$. При $\nu > 1$ внешнее кольцо может менять направление вращения не больше двух раз. При $T \to \infty$

$$\dot\alpha(T) \to \sqrt{\frac{W_\text{к}}{C}}\,\eta p_1.$$

§17. Выводы главы 1

Исследовано движение гироскопа в кардановом подвесе, у которого в осях подвеса нет трения. Показано, что при почти всех начальных значениях переменных, описывающих движение гироскопа, внутреннее кольцо подвеса совершает периодическое движение: вращается вокруг своей оси или колеблется (и тогда ось гироскопа совершает нутационные колебания).

Внешнее кольцо карданова подвеса вращается вокруг своей оси без попятных движений или при движении меняет направление вращения. В последнем случае при почти всех начальных значениях переменных за один период нутационных колебаний или за один оборот внутреннего кольца угол поворота внешнего кольца отклоняется на величину, отличную от нуля. Исключение составляет случай, когда моменты инерции A_2, C_1 колец карданова подвеса равны нулю. В этом случае при одних начальных значениях внешнее кольцо вращается, не меняя направление вращения, при других – колеблется с периодом, равным периоду нутационных колебаний.

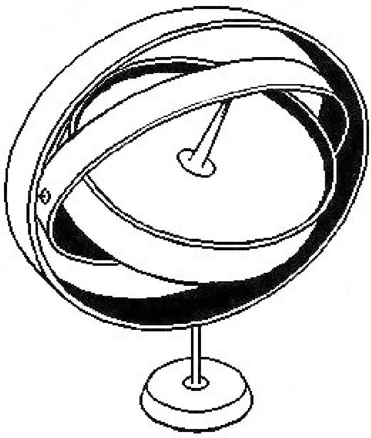
Для начальных значений, близких к значениям, описывающим положение равновесия оси гироскопа, получена формула Магнуса и дана асимптотическая оценка её точности (формула Магнуса – формула средней скорости ухода гироскопа, то есть средней скорости отклонения внешнего кольца).

На рисунках 5.1–5.9 показаны все топологические типы фазовых траекторий на плоскости $\beta\dot{\beta}$, β – угол поворота внутреннего кольца. Топологический тип фазовой траектории меняется при переходе параметров p_1, p_2 траекторий через бифуркационное множество, которое показано на рис. 6.1. Параметры p_1, p_2 – это безразмерные кинетические моменты: кинетический момент всей материальной системы «гироскоп + карданов подвес» относительно оси внешнего кольца и кинетический момент гироскопа относительно оси гироскопа. p_1, p_2 являются первыми интегралами уравнений, описывающих движение гироскопа. На рисунках 5.1–5.9 указано, какой области принадлежат параметры p_1, p_2.

На рис. 7.1 в первой четверти плоскости p_1p_2 показаны значения, при которых гироскоп совершает регулярную прецессию. Двойной линией отмечены параметры устойчивых прецессий. Пунктирные отрезки прямых носят вспомогательный характер. В остальных четвертях плоскости p_1p_2 картина симметрична рис. 7.1.

На рис. 9.1–9.12 показаны топологические типы фазовых траекторий в окрестности точки $(\beta_*, 0)$, соответствующей регулярной прецессии гироскопа.

Глава 1 написана по результатам статьи [9].



Глава 2.

Движение ещё одного гироскопа в кардановом подвесе

§18. Приведение к сингулярно возмущённой задаче Коши

18.1. Математическая модель движения гироскопа в кардановом подвесе

Дифференциальные уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе при наличии вязкого трения в осях подвеса получены в §27, §28 (смотрите также [14]). Они имеют вид

$$[A_2 + (A + A_1)\cos^2\beta + C_1\sin^2\beta]\,\ddot{\alpha} + \tag{18.1}$$

$$+(C_1 - A - A_1)\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\sin 2\beta + H\dot{\beta}\cos\beta + n_1\dot{\alpha} = 0,$$

$$(A + B_1)\ddot{\beta} + (A + A_1 - C_1)\,\dot{\alpha}^2\cos\beta\,\sin\beta - H\,\dot{\alpha}\cos\beta + n_2\dot{\beta} = 0.$$

Здесь приняты те же обозначения, что и в главе 1: α, β – углы поворота внешнего кольца и внутреннего кольца карданова подвеса; A_2 – момент инерции внешнего кольца относительно оси вращения; A_1, B_1, C_1 – главные моменты инерции внутреннего кольца; A – экваториальный момент инерции ротора; H – кинетический момент ротора относительно оси вращения ротора; точкой обозначено дифференцирование по времени T. Кроме того: n_1, n_2 – коэффициенты моментов сил вязкого трения, действующих по осям колец карданова подвеса.

Рассмотрим движение гироскопа при следующих численных значениях (значения, кроме n_1, n_2, взяты из [6]):

$$A + A_1 + A_2 = 12{,}7 \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2; \tag{18.2}$$

$A+B_1=4{,}2$ г · см · с^2; $C_1=A+A_1$;

$H=10^4$ г · см · с; $n_1=n_2=5\cdot10^3$ г · см · с;

$\dot\alpha|_{T=0}\equiv\dot\alpha^\circ=0{,}2$ с$^{-1}$; $\dot\beta\big|_{T=0}\equiv\dot\beta^\circ=0$;

$\beta|_{T=0}\equiv\beta^\circ=30^\circ$.

18.2. Введение малого параметра

Введём малый параметр в задачу (18.1), (18.2), используя метод, изложенный в §29. Для этого перейдём к безразмерным переменным

$$\xi_1=\frac{\alpha-\alpha^\circ}{\alpha_*},\qquad \xi_2=\frac{\beta-\beta^\circ}{\beta_*},\qquad \xi_3=\frac{\dot\alpha}{\dot\alpha_*},\tag{18.3}$$

$$\xi_4=\frac{\dot\beta}{\dot\beta_*},\qquad t=\frac{T}{T_*}.$$

Здесь α_*, β_*, $\dot\alpha_*$, $\dot\beta_*$, T_* – характерные значения углов, угловых скоростей и времени. За ξ_1, ξ_2 приняты обезразмеренные разности углов для того, чтобы начальные значения ξ_1, ξ_2 были равны нулю и можно было использовать теоремы из §30–§32. Запишем задачу Коши (18.1), (18.2) в форме Коши и в новых переменных:

$$\frac{d\xi_1}{dt}=\frac{\dot\alpha_*T_*}{\alpha_*}\,\xi_3,\qquad \frac{d\xi_2}{dt}=\frac{\dot\beta_*T_*}{\beta_*}\,\xi_4,\tag{18.4}$$

$$\frac{d\xi_3}{dt}=-\frac{n_1T_*}{A+A_1+A_2}\,\xi_3-\frac{H\dot\beta_*T_*}{(A+A_1+A_2)\dot\alpha_*}\cos\big(\beta^\circ+\beta_*\xi_2\big)\,\xi_4,$$

$$\frac{d\xi_4}{dt}=\frac{H\dot\alpha_*T_*}{(A+B_1)\dot\beta_*}\cos\big(\beta^\circ+\beta_*\xi_2\big)\,\xi_3-\frac{n_2T_*}{A+B_1}\,\xi_4,$$

$$\xi_i|_{t=0}=0,\quad i=1,2,4;\qquad \xi_3|_{t=0}=\frac{\dot\alpha^\circ}{\dot\alpha_*}\,.$$

Примем за малый параметр μ, коэффициент нормализации b_* и характерные значения следующие выражения:

$$\mu = \sqrt{\frac{(A+A_1+A_2)\dot{\alpha}^\circ}{H}} \approx 0{,}016, \qquad b_* = 1, \tag{18.5}$$

$$\alpha_* = \dot{\alpha}_* T_* \approx 0{,}009, \qquad \beta_* = \mu,$$

$$\dot{\alpha}_* = \dot{\alpha}^\circ, \qquad \dot{\beta}_* = \frac{\beta_*}{T_*} \approx 0{,}348\text{с}^{-1},$$

$$T_* = \sqrt{\frac{A+B_1}{H\dot{\alpha}^\circ}} \approx 0{,}046\text{с}.$$

Подставим (18.5) в (18.4) и нормализуем безразмерные параметры по малому параметру μ с коэффициентом нормализации b_*. Получим:

$$\frac{\dot{\alpha}_* T_*}{\alpha_*} = 1, \qquad \frac{\dot{\beta}_* T_*}{\beta_*} = 1,$$

$$\frac{n_1 T_*}{A+A_1+A_2} = \frac{n_1}{A+A_1+A_2}\sqrt{\frac{A+B_1}{H\dot{\alpha}^\circ}} = a_1\mu^{-1},$$

$$\frac{H\dot{\beta}_* T_*}{(A+A_1+A_2)\,\dot{\alpha}_*} = \sqrt{\frac{H}{(A+A_1+A_2)\,\dot{\alpha}^\circ}} = \mu^{-1},$$

$$\frac{H\dot{\alpha}_* T_*}{(A+B_1)\,\dot{\beta}_*} = \sqrt{\frac{H}{(A+A_1+A_2)\,\dot{\alpha}^\circ}} = \mu^{-1},$$

$$\frac{n_2 T_*}{A+B_1} = \frac{n_2}{\sqrt{(A+B_1)H\dot{\alpha}^\circ}} = a_2\mu^{-1},$$

где

$$a_1 = \frac{n_1}{H}\sqrt{\frac{A+B_1}{A+A_1+A_2}} \approx 0{,}288; \qquad a_2 = \frac{n_2}{H}\sqrt{\frac{A+A_1+A_2}{A+B_1}} \approx 0{,}869.$$

Задача (18.4) принимает вид

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \xi_3, \qquad \frac{d\xi_2}{dt} = \xi_4, \tag{18.6}$$

$$\mu\frac{d\xi_3}{dt} = -a_1\xi_3 - \cos\left(\beta^\circ + \mu\xi_2\right)\, \xi_4,$$

$$\mu\frac{d\xi_4}{dt} = \cos\left(\beta^\circ + \mu\xi_2\right)\, \xi_3 - a_2\xi_4,$$

$$\xi_i|_{t=0} = 0, \quad i = 1, 2, 4; \qquad \xi_3|_{t=0} = 1.$$

Если обозначить $x_1 = (\xi_1, \xi_2)$, $x_2 = (\xi_3, \xi_4)$, то получим стандартную форму сингулярно возмущённой задачи Коши:

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x, t, \mu)\,, \qquad \mu\frac{dx_2}{dt} = F_2(x, t, \mu), \tag{18.7}$$

$$x_1|_{t=0} = 0, \qquad x_2|_{t=0} = \overset{\circ}{x}_2,$$

где

$$x_1 = (x_{11}, x_{12}); \qquad x_2 = (x_{21}, x_{22});$$

$$F_1(x, t, \mu) = x_2; \qquad F_2 = (F_{21},\ F_{22});$$

$$F_{21}(x, t, \mu) = -a_1 x_{21} - \cos\left(\beta^\circ + \mu x_{12}\right) x_{22};$$

$$F_{22}(x, t, \mu) = \cos\left(\beta^\circ + \mu x_{12}\right) x_{21} - a_2 x_{22};$$

$$\overset{\circ}{x}_2 = (1, 0);$$

a_1, a_2, β° – безразмерные параметры, не зависящие от x, t, μ ($\beta^\circ = \pi/6$).

18.3. Прецессионная модель движения гироскопа в кардановом подвесе

Если в уравнениях (18.6) положить $\mu = 0$, то получим вырожденную для (18.6) задачу:

$$\frac{d\bar{\xi}_1}{dt} = \bar{\xi}_3, \qquad \frac{d\bar{\xi}_2}{dt} = \bar{\xi}_4, \tag{18.8}$$

$$0 = -a_1\bar{\xi}_3 - \cos\beta^\circ\,\bar{\xi}_4, \qquad 0 = \cos\beta^\circ\,\bar{\xi}_3 - a_2\bar{\xi}_4,$$

$$\bar{\xi}_1(0) = 0, \qquad \bar{\xi}_2(0) = 0.$$

Вырожденная задача (18.8) соответствует приближённой модели движения гироскопа в кардановом подвесе, называемой *прецессионной.* Решение задачи (18.8) имеет вид: $\bar{\xi}_i = 0, \quad i = \overline{1,4}$. В размерных переменных решение прецессионной модели описывается следующими формулами:

$$\bar{\alpha} = \alpha^\circ, \quad \bar{\beta} = \beta^\circ, \quad \dot{\bar{\alpha}} = 0, \quad \dot{\bar{\beta}} = 0. \tag{18.9}$$

Задача (18.6) удовлетворяет теореме Тихонова 30.1 о предельном переходе при любом значении $\bar{t} > 0, \quad \bar{\mu} > 0$ (смотрите п. 19.2). Поэтому для любого значения $\bar{t} > 0$ найдётся постоянная $\mu_* > 0$, не зависящая от t, μ и такая, что решение задачи (18.6) существует и единственно при $0 \le t \le \bar{t}, \quad 0 < \mu \le \mu_*$;

$$\lim_{\mu \to 0+0} \xi_i(t,\mu) = \bar{\xi}_i(t), \quad 0 \le t \le \bar{t}, \quad i = 1, 2;$$

$$\lim_{\mu \to 0+0} \xi_j(t,\mu) = \bar{\xi}_j(t), \quad 0 < t \le \bar{t}, \quad j = 3, 4.$$

В теореме Тихонова 30.1 предполагается, что малый параметр $\mu \to 0$, а остальные параметры задачи сохраняют постоянные значения. Поэтому для каждого гироскопа, у которого $C_1 = A + A_1$; $H, \alpha^\circ, \beta^\circ$ фиксированы и $\dot{\beta}^\circ = 0$, это означает следующее: 1) пусть

$K > 0$ – произвольное число размерности с$^{1/2}$; тогда решение задачи Коши для уравнений (18.1) существует и единственно на отрезке $0 \le T \le K\left|\dot{\alpha}^{\circ}\right|^{-1/2}$, если значение $\left|\dot{\alpha}^{\circ}\right|$ достаточно мало; 2) для любого $T > 0$

$$\alpha(T) \to \alpha^{\circ}, \quad \beta(T) \to \beta^{\circ}, \quad \dot{\alpha}(T) \to 0, \quad \dot{\beta}(T) \to 0 \quad \text{при } \left|\dot{\alpha}^{\circ}\right| \to 0.$$

В рассматриваемой задаче (18.1), (18.2) значение малого параметра фиксировано: $\mu \approx 0{,}016$. Отклонение точного решения задачи (18.1), (18.2) от решения прецессионной модели можно получить с помощью результатов (18.9), (20.17), (24.6). При $T \ge 0$ имеем:

$$|\alpha - \bar{\alpha}| \le |\alpha - \tilde{\alpha}| + |\tilde{\alpha} - \bar{\alpha}| =$$
$$= |\alpha - \tilde{\alpha}| + \left|\exp(-\Delta T) \cdot \left[\widetilde{D}_3 \cos\left(\tilde{\Omega} T\right) + \widetilde{D}_4 \sin\left(\tilde{\Omega} T\right)\right] - \widetilde{D}_3\right| \le$$
$$\le (2{,}57 + 8{,}92\, e^{-\Delta T}) \cdot 10^{-8} + e^{-\Delta T}\sqrt{\widetilde{D}_3^2 + \widetilde{D}_4^2} + \left|\widetilde{D}_3\right| \le$$
$$\le 26{,}206'' + 33{,}011'' \cdot e^{-\Delta T} \le 59{,}22''.$$

Здесь $\tilde{\alpha}$, Δ, $\tilde{\Omega}$, $\widetilde{D}_3$, $\widetilde{D}_4$ – функции и постоянные из (20.17). Неравенства для других переменных получаются аналогично (смотрите (18.10)).

18.4. Результаты

18.4.1. Движение гироскопа в кардановом подвесе описываются в безразмерных переменных уравнениями (18.6).

18.4.2. Приближённая (прецессионная) модель движения гироскопа описывается уравнениями (18.8). При $T \ge 0$ справедливы следующие оценки для разности между точным решением задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе и решением прецессионной модели:

$$|\alpha - \bar{\alpha}| \le 26{,}206'' + 33{,}011'' \cdot e^{-\Delta T} \le 59{,}22'', \qquad (18.10)$$

$$|\beta - \bar{\beta}| \le 45{,}381'' + 55{,}653'' \cdot e^{-\Delta T} \le 101{,}04'',$$

$$|\dot{\alpha} - \dot{\bar{\alpha}}| \le (5 \cdot 10^{-9} e^{-\Delta_0 T} + 0{,}2125\, e^{-\Delta T}\,)\, \text{с}^{-1} \le 0{,}213\text{с}^{-1},$$

$$\left|\dot{\beta} - \dot{\bar{\beta}}\right| \le (9 \cdot 10^{-9} e^{-\Delta_0 T} + 0{,}3694\, e^{-\Delta T}\,)\, \text{с}^{-1} \le 0{,}370\text{с}^{-1}.$$

Здесь $\bar{\alpha},\ \bar{\beta},\ \dot{\bar{\alpha}},\ \dot{\bar{\beta}}$ – решение (18.9) прецессионной модели движения гироскопа в кардановом подвесе; $\Delta,\ \Delta_0$ – постоянные (20.17), (24.7).

Замечание 18.1. На странице 70 дан рисунок гироскопа в кардановом подвесе.

Замечание 18.2. В §18 и в §19 β° – параметр, не зависящий от t,μ. В §20 β° рассматривается как функция μ, в §22 β° рассматривается как функция ε.

§19. Применение метода пограничных функций

19.1. Построение асимптотического решения

Построим приближённое решение задачи (18.6) методом пограничных функций. В соответствии с п. 30.2 решение строится в виде суммы двух рядов. Положим

$$\xi_i(t,\mu) = y_{1i}(t,\mu) + y_{2i}(\tau,\mu), \quad \tau = t\mu^{-1}, \quad i = \overline{1,4}. \qquad (19.1)$$

Из (18.6), (30.5) следует, что уравнения для y_{ji} имеют следующий вид:

$$\frac{dy_{11}}{dt} = y_{13}, \qquad \frac{dy_{12}}{dt} = y_{14}, \qquad (19.2)$$

$$\mu\, \frac{dy_{13}}{dt} = -a_1 y_{13} - \cos\left(\beta^\circ + \mu y_{12}\right)\, y_{14},$$

$$\mu\frac{dy_{14}}{dt} = \cos\left(\beta^\circ + \mu y_{12}\right)\, y_{13} - a_2 y_{14},$$

$$\frac{dy_{21}}{d\tau} = \mu y_{23}, \qquad \frac{dy_{22}}{d\tau} = \mu y_{24},$$

$$\frac{dy_{23}}{d\tau} = -a_1 y_{23} - \cos\left(\beta^\circ + \mu y_{12} + \mu y_{22}\right)\, (y_{14} + y_{24}) +$$

$$+\cos\left(\beta^\circ + \mu y_{12}\right)\, y_{14},$$

$$\frac{dy_{24}}{d\tau} = \cos\left(\beta^\circ + \mu y_{12} + \mu y_{22}\right)\, (y_{13} + y_{23}) - \cos\left(\beta^\circ + \mu y_{12}\right)\, y_{13} -$$

$$-a_2 y_{24},$$

$$\lim_{\tau \to \infty} y_{2i}(\tau, \mu) = 0, \qquad i = 1, 2;$$

$$y_{1j}(0, \mu) + y_{2j}(0, \mu) = 0, \quad j = 1, 2, 4;$$

$$y_{13}(0, \mu) + y_{23}(0, \mu) = 1.$$

Функции y_{ji} ищем в виде

$$y_{1i} = y_{1i}^{(0)}(t) + \mu y_{1i}^{(1)}(t) + \cdots, \tag{19.3}$$

$$y_{2i} = y_{2i}^{(0)}(\tau) + \mu y_{2i}^{(1)}(\tau) + \cdots.$$

Подставим ряды (19.3) в уравнения (19.2), разложим левые и правые части уравнений в ряды по степеням μ, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ. Получим следующие уравнения для функций $y_{ji}^{(k)}$:

$\boxed{k = 0}$

$$\frac{dy_{11}^{(0)}}{dt} = y_{13}^{(0)}, \qquad \frac{dy_{12}^{(0)}}{dt} = y_{14}^{(0)},$$

$$0 = -a_1 y_{13}^{(0)} - \cos\beta^\circ\ y_{14}^{(0)}, \qquad 0 = \cos\beta^\circ\ y_{13}^{(0)} - a_2 y_{14}^{(0)},$$

$$\frac{dy_{21}^{(0)}}{d\tau} = 0, \qquad \frac{dy_{22}^{(0)}}{d\tau} = 0,$$

$$\frac{dy_{23}^{(0)}}{d\tau} = -a_1 y_{23}^{(0)} - \cos\beta^\circ\ y_{24}^{(0)},$$

$$\frac{d\,y_{24}^{(0)}}{d\tau} = \cos\beta^\circ\ y_{23}^{(0)} - a_2\, y_{24}^{(0)},$$

$$\lim_{\tau\to\infty} y_{2i}^{(0)}(\tau) = 0, \qquad i = 1,2;$$

$$y_{1j}^{(0)}(0) + y_{2j}^{(0)}(0) = 0, \quad j = 1,2,4;$$

$$y_{13}^{(0)}(0) + y_{23}^{(0)}(0) = 1.$$

$\boxed{k = 1}$

$$\frac{dy_{11}^{(1)}}{dt} = y_{13}^{(1)}, \qquad \frac{dy_{12}^{(1)}}{dt} = y_{14}^{(1)},$$

$$\frac{dy_{13}^{(0)}}{dt} = -a_1 y_{13}^{(1)} - \cos\beta^\circ\ y_{14}^{(1)} + \sin\beta^\circ y_{12}^{(0)} y_{14}^{(0)},$$

$$\frac{dy_{14}^{(0)}}{dt} = \cos\beta^\circ\ y_{13}^{(1)} - a_2 y_{14}^{(1)} - \sin\beta^\circ y_{12}^{(0)} y_{13}^{(0)},$$

$$\frac{dy_{21}^{(1)}}{d\tau} = y_{23}^{(0)}, \qquad \frac{dy_{22}^{(1)}}{d\tau} = y_{24}^{(0)},$$

$$\frac{dy_{23}^{(1)}}{d\tau} = -a_1 y_{23}^{(1)} - \cos\beta^\circ\ y_{24}^{(1)} +$$

$$+\sin\beta^\circ \left[y_{12}^{(0)}(0) y_{24}^{(0)} + y_{14}^{(0)}(0) y_{22}^{(0)} + y_{22}^{(0)} y_{24}^{(0)}\right],$$

$$\frac{d\,y_{24}^{(1)}}{d\tau} = \cos\beta^\circ\ y_{23}^{(1)} - a_2\, y_{24}^{(1)} -$$

$$- \sin\beta^\circ \left[y_{12}^{(0)}(0) y_{23}^{(0)} + y_{13}^{(0)}(0) y_{22}^{(0)} + y_{22}^{(0)} y_{23}^{(0)}\right],$$

$$\lim_{\tau \to \infty} y_{2i}^{(1)}(\tau) = 0, \qquad i = 1, 2;$$

$$y_{1j}^{(1)}(0) + y_{2j}^{(1)}(0) = 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Решение уравнений имеет вид

$$y_{1i}^{(0)} = 0, \qquad i = \overline{1,4}; \tag{19.4}$$

$$y_{2i}^{(0)} = 0, \qquad i = 1, 2;$$

$$y_{23}^{(0)} = e^{-\delta\tau}(\cos\omega\tau + b_1 \sin\omega\tau),$$

$$y_{24}^{(0)} = b_2 e^{-\delta\tau} \sin\omega\tau,$$

$$y_{11}^{(1)} = -b_3, \qquad y_{12}^{(1)} = -b_5, \qquad y_{1i}^{(1)} = 0, \qquad i = 3, 4;$$

$$y_{21}^{(1)} = e^{-\delta\tau}(b_3 \cos\omega\tau + b_4 \sin\omega\tau),$$

$$y_{22}^{(1)} = e^{-\delta\tau}(b_5 \cos\omega\tau + b_6 \sin\omega\tau),$$

$$y_{2i}^{(1)} = 0, \qquad i = 3, 4.$$

Здесь

$$\delta = \frac{a_1 + a_2}{2} \approx 0{,}578; \qquad \omega = \sqrt{\cos^2\beta^\circ - \frac{(a_1 - a_2)^2}{4}} \approx 0{,}816; \tag{19.5}$$

$b_1 = \frac{a_2 - a_1}{2\omega} \approx 0{,}357; \qquad b_2 = \frac{\cos\beta^{\circ}}{\omega} \approx 1{,}062;$

$b_3 = -\frac{\delta + \omega b_1}{\delta^2 + \omega^2} \approx -0{,}869; \quad b_4 = \frac{\omega - \delta b_1}{\delta^2 + \omega^2} \approx 0{,}609;$

$b_5 = -\frac{\omega b_2}{\delta^2 + \omega^2} \approx -0{,}866; \quad b_6 = -\frac{\delta b_2}{\delta^2 + \omega^2} \approx -0{,}614.$

Из (19.1), (19.3), (19.4) следует, что нулевое приближение решения задачи (18.6) имеет вид

$$X_0(t,\mu) = (\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03}, \xi_{04}),$$

$$\xi_{01} = 0, \qquad \xi_{02} = 0,$$

$$\xi_{03} = e^{-\delta\tau}(\cos\omega\tau + b_1 \sin\omega\tau),$$

$$\xi_{04} = b_2 e^{-\delta\tau} \sin\omega\tau, \qquad \tau = t\mu^{-1} .$$

Первое приближение решения задачи (18.6) имеет вид

$$X_1(t,\mu) = (\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{14}), \tag{19.6}$$

$$\xi_{11} = \mu e^{-\delta\tau}(b_3 \cos\omega\tau + b_4 \sin\omega\tau) - b_3\mu,$$

$$\xi_{12} = \mu e^{-\delta\tau}(b_5 \cos\omega\tau + b_6 \sin\omega\tau) - b_5\mu,$$

$$\xi_{13} = e^{-\delta\tau}(\cos\omega\tau + b_1 \sin\omega\tau),$$

$$\xi_{14} = b_2 e^{-\delta\tau} \sin\omega\tau, \qquad \tau = t\mu^{-1}.$$

Замечание 19.1. Функция $y_2(\tau,\mu)$ является пограничной функцией (смотрите п. 30.2). Она вносит существенный вклад в асимптотическое разложение решения задачи на интервале времени порядка μ. Функция $y_1(t,\mu)$ является основным членом асимптотики на всём интервале времени за исключением пограничного слоя, примыкающего к точке $t = 0$ и стремящегося к нулю при

$\mu \to 0$. Отсюда следует, что слагаемые $y_{1i}^{(k)}$, $y_{2i}^{(k)}$ отвечают прецессионным и нутационным составляющим переменных, описывающих движение гироскопа в кардановом подвесе. Нутационные составляющие переменных – это быстро затухающие функции времени; ω – безразмерная частота нутационных колебаний.

Замечание 19.2. В [11] приближённое решение задачи (18.6) построено в виде асимптотики Васильевой (в виде суммы трёх рядов). Построенная здесь асимптотика является асимптотикой Васильевой — Иманалиева [3].

19.2. Проверка условий теорем 30.1–30.3

Покажем, что задача (18.6) удовлетворяет условиям, налагаемым на сингулярные уравнения в п. 30.4.

1) Из (18.7) следуют равенства

$$F_1(0,t,0) = 0,\ \ F_2(0,t,0) = 0,\quad \overset{\circ}{x}_1(\mu) = 0.$$

Поэтому условие 30.1 для задачи (18.6) выполняется при $t \geq 0$.

2) Из (18.7) следует, что функции $F_1(x,t,\mu)$, $F_2(x,t,\mu)$ имеют непрерывные производные любого порядка по всем переменным при $x \in \mathbf{R}^4$, $t \geq 0$, $\mu \geq 0$. Производные ограничены по норме при $x \in D_x$, $t \geq 0$, $0 \leq \mu \leq \bar{\mu}$, где $D_x \subset \mathbf{R}^4$ – произвольная ограниченная окрестность точки $x = 0$, $\bar{\mu}$ – произвольное положительное число. Таким образом, условие 30.2 для задачи (18.6) выполняется при $n \geq 0$, $x \in D_x$, $t \geq 0$, $0 \leq \mu \leq \bar{\mu}$, где D_x, $\bar{\mu}$ – указанные выше окрестность и число.

3) Из (18.7) следует, что $\overset{\circ}{x}_1(\mu)$, $\overset{\circ}{x}_2(\mu)$ постоянны: $\overset{\circ}{x}_1(\mu) = 0$, $\overset{\circ}{x}_2(\mu) = (1,0)$. Поэтому условие 30.3 выполняется при $n \geq 0$, $\mu \geq 0$.

4) Из (18.7) следует, что

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x,t,\mu) = \begin{pmatrix} -a_1 & -\cos(\beta^\circ + \mu x_{12}) \\ \cos(\beta^\circ + \mu x_{12}) & -a_2 \end{pmatrix}, \qquad (19.7)$$

$$\Psi(x,t,\mu) = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)^{-1}(x,t,\mu) =$$

$$= \frac{1}{a_1 a_2 + \cos^2(\beta^\circ + \mu x_{12})} \begin{pmatrix} -a_2 & \cos(\beta^\circ + \mu x_{12}) \\ -\cos(\beta^\circ + \mu x_{12}) & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Из равенства следует, что $\Psi(x,t,\mu)$ ограничена по норме при $x \in \mathbf{R}^4$, $t \geq 0$, $\mu \geq 0$. Поэтому условие 30.4 выполняется.

5) Как следует из формул (19.4), условие 30.5 для задачи (18.6) выполняется: $y_1^{(0)}(t) = \left(y_{11}^{(0)}(t), \dots,\ y_{14}^{(0)}(t)\right) = 0,\ t \geq 0.$

6а) Из (19.7) следует, что

$$A_{2*} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(0,0,0) = \begin{pmatrix} -a_1 & -\cos\beta^\circ \\ \cos\beta^\circ & -a_2 \end{pmatrix}. \qquad (19.8)$$

Собственные числа этой матрицы равны

$$\lambda_1 =-\delta + i\omega, \qquad \lambda_2 =-\delta - i\omega,$$

где δ, ω – значения (19.5). Поэтому условие 30.6а выполняется.

6б) Уравнение (30.13) для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{dr_2}{d\tau} = A_{2*} r_2. \qquad (19.9)$$

Это система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Так как собственные числа матрицы A_{2*} лежат в левой полуплоскости, то областью влияния нулевого решения уравнения (19.9) является вся плоскость $\overset{\circ}{r}_2 \in \mathbf{R}^2$. Поэтому условие 30.6б выполняется.

7) Для задачи (18.6)

$$D_x^{(0)} = \left\{x \colon x = \theta\left(0, 0, y_{23}^{(0)}(\tau),\ y_{24}^{(0)}(\tau)\right),\ \tau \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 1\right\},$$

где $y_{23}^{(0)}(\tau),\ y_{24}^{(0)}(\tau)$ – функции (19.4). Из (19.4) следует, что

$$\left|y_{23}^{(0)}(\tau)\right| \leq e^{-\delta\tau}\sqrt{1+b_1^2}, \qquad \left|y_{24}^{(0)}(\tau)\right| \leq b_2 e^{-\delta\tau}$$

при $\tau \geq 0$. Поэтому условие 30.7 выполняется, если за D_x взять, например, множество

$$D_x = \Big\{x \colon |x_1| < \bar{C}_1,\ \ |x_2| < \bar{C}_2,\ \ |x_3| < \bar{C}_3\sqrt{1+b_1^2}, \quad (19.10)$$

$$|x_4| < b_2\bar{C}_4\Big\},$$

где $\bar{C}_i$ – произвольные постоянные, $\bar{C}_1 > 0$, $\bar{C}_2 > 0$, $\bar{C}_3 > 1$, $\bar{C}_4 > 1$.

8) Дифференциальное уравнение в условии 30.8 для задачи (18.6) имеет вид

$$\mu\frac{dr_2}{d\tau} = A_{2*}\,r_2,$$

где A_{2*} – матрица (19.8). Матрица Коши этого уравнения равна

$$U_2(t,s,\mu) = \exp\left[A_{2*}(t-s)\mu^{-1}\right] = e^{-\delta(\tau-\sigma)} \times \qquad (19.11)$$

$$\times\begin{pmatrix}\cos\omega(\tau-\sigma) + b_1\sin\omega(\tau-\sigma) & -b_2\sin\omega(\tau-\sigma)\\ b_2\sin\omega(\tau-\sigma) & \cos\omega(\tau-\sigma) - b_1\sin\omega(\tau-\sigma)\end{pmatrix},$$

$$\tau = t\mu^{-1}, \qquad \sigma = s\mu^{-1}.$$

Поэтому при $0 \leq s \leq t,\ \ \mu > 0$ справедливо неравенство

$$\|U_2(t,s,\mu)\| \leq \left(b_2 + \sqrt{1+b_1^2}\right)\exp[-\delta(t-s)\mu^{-1}].$$

Таким образом, условия 30.1–30.8 для задачи (18.6) выполняются при $n \geq 0,\quad x \in D_x,\quad t \geq 0,\ \ 0 \leq \mu \leq \bar{\mu}$, где D_x – область (19.10), $\bar{\mu}$ – любое положительное число.

19.3. Применение теорем 30.1–30.3

Применение теоремы Тихонова 30.1 к задаче (18.6) рассмотрено в п. 18.3.

Задача (18.6) удовлетворяет условиям теоремы Васильевой 30.2 при любых значениях $n \geq 0,\ \ \bar{t} > 0,\ \ \bar{\mu} > 0$. По теореме 30.2 для любых $n \geq 0,\ \ \bar{t} > 0$ найдутся значения $\mu_* > 0,\ \ C_*$, не зависящие от t, μ и такие, что решение задачи (18.6) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|x(t,\mu) - X_n(t,\mu)\| \leq C_* \mu^{n+1}$$

при $0 \leq t \leq \bar{t},\ \ 0 < \mu \leq \mu_*$.

Задача (18.6) удовлетворяет условиям следствия 30.1 при любых значениях $\bar{t} > 0,\ \ \bar{\mu} > 0$. Поэтому для любого $\bar{t} > 0$ найдётся такое значение $\bar{\mu}_* > 0$, что задача (18.6) является задачей Тихонова на множестве $0 \leq t \leq \bar{t},\ \ 0 < \mu \leq \bar{\mu}_*$.

Вычислим матрицу $U_1(t,s)$ для задачи (18.6). Матрица $\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)^{-1}$ дана в (19.7). Из (18.7) следуют равенства

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x,t,\mu) = \mu \sin(\beta^\circ + \mu x_{12}) \begin{pmatrix} 0 & x_{22} \\ 0 & -x_{21} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(0,t,0) = 0.$$

Отсюда и из (30.15) получаем: $A(0,t,0) = 0$; $U_1(t,s)$ – единичная матрица размерности 2×2. Таким образом, задача (18.6) удовлетворяет условиям теоремы 30.3 при любых значениях $n \geq 0$, $\bar{\mu} > 0$ и $\varkappa_1 = 0$, $C_1 = 1$, $\overset{\circ}{C_1} = 0$. По теореме 30.3 для любых значений $n \geq 0$, $\bar{t} > 0$, χ, $0 \leq \chi < 1/2$, найдутся $\mu_* > 0$, C_*, $\overset{\circ}{C_*} \geq 0$, не зависящие от t, μ и такие, что решение задачи (18.6) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|x(t,\mu) - X_n(t,\mu)\| \leq \mu^{n+1}\left(\overset{\circ}{C_*} t^{2n+1} + C_*\right)$$

при $0 \leq t \leq \bar{t}\mu^{-\chi}$, $0 < \mu \leq \mu_*$.

Задача (18.6) удовлетворяет условиям следствия 30.2 при любом значении $\bar{\mu} > 0$ и $\varkappa_1 = 0$, $C_1 = 1$, $\overset{\circ}{C_1} = 0$. Поэтому для любых $\bar{t} > 0$, χ, $0 \leq \chi < 1/2$, найдётся такое значение $\bar{\mu}_* > 0$, что задача (18.6) является задачей Тихонова на множестве $0 \leq t \leq \bar{t}\mu^{-\chi}$, $0 < \mu \leq \bar{\mu}_*$.

Из написанного видно, что теоремы 30.2, 30.3 не гарантируют существование решения задачи (18.6) при заданном значении μ ($\mu \approx 0{,}016$), так как значение μ_* в теоремах 30.2, 30.3 неизвестно.

19.4. Применение теоремы 30.4

Обозначим u остаточный член первого порядка асимптотического разложения решения:

$$u = x - X_1, \qquad u = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4), \tag{19.12}$$

$$\zeta_i = \xi_i - \xi_{1i}, \qquad i = \overline{1,4}.$$

Здесь ξ_{1i} – функции (19.6). Из (18.6), (19.6), (19.12) получим уравнения для ζ_i:

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = \zeta_3, \qquad \frac{d\zeta_2}{dt} = \zeta_4, \tag{19.13}$$

$$\mu\frac{d\zeta_3}{dt} = -a_1\zeta_3 - \cos\beta^\circ\,\zeta_4 + \Gamma_3(u,t,\mu),$$

$$\mu \frac{d\zeta_4}{dt} = \cos\beta^\circ \zeta_3 - a_2\zeta_4 + \Gamma_4(u,t,\mu),$$

$$\zeta_i|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

Здесь

$$\Gamma_3(u,t,\mu) = \left[\cos\beta^\circ - \cos\left(\beta^\circ + \mu\zeta_2 + g(t,\mu)\right)\right] \times$$

$$\times \left(\zeta_4 + b_2 e^{-\delta\tau} \sin\omega\tau\right),$$

$$\Gamma_4(u,t,\mu) = -\left[\cos\beta^\circ - \cos\left(\beta^\circ + \mu\zeta_2 + g(t,\mu)\right)\right] \times$$

$$\times \left[\zeta_3 + e^{-\delta\tau}(\cos\omega\tau + b_1 \sin\omega\tau)\right],$$

$$g(t,\mu) = -b_5\mu^2 + \mu^2 e^{-\delta\tau}(b_5\cos\omega\tau + b_6\sin\omega\tau), \qquad \tau = t\mu^{-1},$$

δ, ω, b_i – постоянные (19.5). Проверим условия теоремы 30.4.

Условие 30.9 выполняется при $t \geq 0$, $\mu \geq 0$, так как в задаче (19.13) матрицы B_{ij} постоянны:

$$B_{12}(t,\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_{22}(t,\mu) = \begin{pmatrix} -a_1 & -\cos\beta^\circ \\ \cos\beta^\circ & -a_2 \end{pmatrix},$$

B_{11}, B_{21} – нулевые матрицы (смотрите (19.13), (30.16)).

Рассмотрим условие 30.10. Из (19.13), (30.16) следует:

$G_{1i}(u,t,\mu) = 0, \qquad i = 1,2;$

$G_{21}(u,t,\mu) = \Gamma_3(u,t,\mu); \qquad G_{22}(u,t,\mu) = \Gamma_4(u,t,\mu);$

$G_{21}(u,t,\mu) - G_{21}(\bar{u},t,\mu) =$

$$= \left[\cos\beta^\circ - \cos\left(\beta^\circ + \mu\zeta_2 + g(t,\mu)\right)\right] \cdot \left(\zeta_4 + b_2 e^{-\delta\tau}\sin\omega\tau\right) -$$

$$-\left[\cos\beta^\circ - \cos\left(\beta^\circ + \mu\bar{\zeta}_2 + g(t,\mu)\right)\right]\cdot\left(\bar{\zeta}_4 + b_2 e^{-\delta\tau}\sin\omega\tau\right) =$$

$$= [\mu\zeta_2 + g(t,\mu)]\cdot(\zeta_4 - \bar{\zeta}_4)\cdot\int_0^1 \sin\left(\beta^\circ + \mu\theta\zeta_2 + \theta g(t,\mu)\right)d\theta -$$

$$-\left(\bar{\zeta}_4 + b_2 e^{-\delta\tau}\sin\omega\tau\right)\mu\,(\zeta_2 - \bar{\zeta}_2)\times$$

$$\times\int_0^1 \sin\left(\beta^\circ + \mu\zeta_2 - \theta\mu(\zeta_2 - \bar{\zeta}_2) + g(t,\mu)\right)d\theta;$$

$$G_{22}(u,t,\mu) - G_{22}(\bar{u},t,\mu) =$$

$$= -\left[\cos\beta^\circ - \cos\left(\beta^\circ + \mu\zeta_2 + g(t,\mu)\right)\right]\times$$

$$\times\left[\zeta_3 + e^{-\delta\tau}(\cos\omega\tau + b_1\sin\omega\tau)\right] +$$

$$+\left[\cos\beta^\circ - \cos\left(\beta^\circ + \mu\bar{\zeta}_2 + g(t,\mu)\right)\right]\times$$

$$\times\left[\bar{\zeta}_3 + e^{-\delta\tau}(\cos\omega\tau + b_1\sin\omega\tau)\right] =$$

$$= -[\mu\zeta_2 + g(t,\mu)]\cdot(\zeta_3 - \bar{\zeta}_3)\cdot\int_0^1 \sin\left(\beta^\circ + \mu\theta\zeta_2 + \theta g(t,\mu)\right)d\theta +$$

$$+\left[\bar{\zeta}_3 + e^{-\delta\tau}(\cos\omega\tau + b_1\sin\omega\tau)\right]\mu\,(\zeta_2 - \bar{\zeta}_2)\times$$

$$\times\int_0^1 \sin\left(\beta^\circ + \mu\zeta_2 - \theta\mu(\zeta_2 - \bar{\zeta}_2) + g(t,\mu)\right)d\theta;$$

$$|G_{21}(u,t,\mu) - G_{21}(\bar{u},t,\mu)| \le$$

$$\le [\mu\,|\zeta_2| + |g(t,\mu)|]\cdot|\zeta_4 - \bar{\zeta}_4| + \mu\left(|\bar{\zeta}_4| + b_2 e^{-\delta\tau}\right)\cdot|\zeta_2 - \bar{\zeta}_2|;$$

$$|G_{22}(u,t,\mu) - G_{22}(\bar{u},t,\mu)| \le [\mu|\zeta_2| + |g(t,\mu)|] \cdot |\zeta_3 - \bar{\zeta}_3| +$$

$$+\mu\left(|\bar{\zeta}_3| + e^{-\delta\tau}\sqrt{1+b_1^2}\right) \cdot |\zeta_2 - \bar{\zeta}_2|.$$

Из неравенств следует, что для задачи (19.13) можно принять

$$L_1(t,\mu) = b_5\mu^2 + \mu^2 e^{-\delta\tau}\sqrt{b_5^2 + b_6^2} + \mu e^{-\delta\tau}\max\left(b_2, \sqrt{1+b_1^2}\right);$$

$$L_2(t,\mu) = \mu.$$

Тогда условие 30.10 выполняется при любых значениях $\delta_u > 0$, $\bar{\mu} > 0$ и $t \ge 0$.

Из (19.8), (19.13), (30.16) следует, что

$$B_{22}(t,\mu) = A_{2*}; \qquad \det B_{22}(t,\mu) \ne 0$$

при $t \ge 0,\ \mu \ge 0$. Таким образом, условие 30.11 выполняется.

По теореме 30.4 решение задачи (19.13) существует и единственно на таком множестве значений $t,\ \mu$, которое описывается в теореме явными формулами (30.17). Кроме того, теорема 30.4 даёт оценку решения (30.18) в явном виде.

Воспользуемся для задачи (19.13) не формулами, приведёнными в теореме 30.4, а доказательством теоремы 30.4, данным в [8].

19.5. Оценка остаточного члена и интервала времени

Зафиксируем значение $\mu > 0$ и не будем указывать зависимость функций от μ. Задача (19.13) удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. По этой теореме для любого значения $\delta_u > 0$ существует такое значение $\bar{t} = \bar{t}(\delta_u) > 0$, что при $0 \le t \le \bar{t}$ решение задачи (19.13) существует, единственно, непрерывно дифференцируемо по t и удовлетворяет неравенству $\|u(t)\| \leq \delta_u$. Положим

$$\delta_u = \max\left[\,\bar{a}(\bar{\bar{t}})\bar{w}^2 + \bar{b}(\bar{\bar{t}})\bar{w} + \bar{c},\ \bar{w}\right], \tag{19.14}$$

где

$$\bar{w} = \frac{\delta}{2\mu\left(b_2 + \sqrt{1 + b_1^2}\right)}, \qquad \bar{\bar{t}} = \frac{\delta^2 + \omega^2}{\mu^2 |b_5| (a_1 + \cos\beta^\circ)},$$

$\bar{a}(t)$, $\bar{b}(t)$, $\bar{c}$ вычисляются по формулам (19.21); δ, ω, b_1–b_6 вычисляются по формулам (19.5).

Рассмотрим отрезок $0 \leq t \leq \bar{t}$. Выразим из двух последних уравнений (19.13) переменные ζ_3, ζ_4 и подставим их в первые два уравнения (19.13):

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix} = A_{2*}^{-1}\left[\mu\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\zeta_3\\ \zeta_4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\Gamma_3(u,t)\\ \Gamma_4(u,t)\end{pmatrix}\right].$$

Перейдём от задачи Коши (19.13) к эквивалентной системе интегральных уравнений:

$$\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix}(t) = \int\limits_0^t A_{2*}^{-1}\left[\mu\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\zeta_3(s)\\ \zeta_4(s)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\Gamma_3(u(s),s)\\ \Gamma_4(u(s),s)\end{pmatrix}\right]ds =$$

$$= \mu A_{2*}^{-1}\begin{pmatrix}\zeta_3(t)\\ \zeta_4(t)\end{pmatrix} - \int\limits_0^t A_{2*}^{-1}\begin{pmatrix}\Gamma_3(u(s),s)\\ \Gamma_4(u(s),s)\end{pmatrix}ds;$$

$$\begin{pmatrix}\zeta_3\\ \zeta_4\end{pmatrix}(t) = \int\limits_0^t \mu^{-1}\, U_2(t,s)\begin{pmatrix}\Gamma_3(u(s),s)\\ \Gamma_4(u(s),s)\end{pmatrix}ds.$$

Подставим вместо A_{2*}, $U_2(t,s,\mu)$ их выражения (19.8), (19.11). Получим:

$$\zeta_1(t) = (\delta^2+\omega^2)^{-1}\times \tag{19.15}$$

$$\times\Big\{-\mu a_2\zeta_3(t)+\mu\cos\beta^\circ\,\zeta_4(t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 \sin\big(\beta^\circ+\theta\mu\zeta_2(s)+\theta g(s)\big)d\theta\cdot[\mu\zeta_2(s)+g(s)]\times$$

$$\times\big[\cos\beta^\circ\,\zeta_3(s)+a_2\zeta_4(s)+\cos\beta^\circ\,e^{-\delta\sigma}\cos\omega\sigma+$$

$$+\big(b_1\cos\beta^\circ+a_2b_2\big)e^{-\delta\sigma}\sin\omega\sigma\big]ds\Big\},$$

$$\zeta_2(t) = (\delta^2+\omega^2)^{-1}\times$$

$$\times\Big\{-\mu\cos\beta^\circ\,\zeta_3(t)-\mu a_1\zeta_4(t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 \sin\big(\beta^\circ+\theta\mu\zeta_2(s)+\theta g(s)\big)d\theta\cdot[\mu\zeta_2(s)+g(s)]\times$$

$$\times\big[-a_1\zeta_3(s)+\cos\beta^\circ\,\zeta_4(s)-a_1e^{-\delta\sigma}\cos\omega\sigma-$$

$$-\big(a_1b_1-b_2\cos\beta^\circ\big)e^{-\delta\sigma}\sin\omega\sigma\big]ds\Big\},$$

$$\zeta_3(t) = \int_0^\tau\int_0^1 \sin\Big(\beta^\circ+\theta\mu\zeta_2(s)+\theta g(s)\Big)\,d\theta\cdot[\mu\zeta_2(s)+g(s)]\times$$

$$\times\, e^{-\delta(\tau-\sigma)}\times$$

$$\times\{b_2\sin\omega(\tau-\sigma)\ \zeta_3(s)+$$

$$+[\cos\omega(\tau-\sigma)\ +b_1\sin\omega(\tau-\sigma)]\zeta_4(s)+$$

$$+b_2e^{-\delta\sigma}\cos\omega(\tau-\sigma)\sin\omega\sigma+$$

$$+b_2 e^{-\delta\sigma} \sin\omega(\tau-\sigma)\,(\cos\omega\sigma + 2b_1 \sin\omega\sigma)\big\}d\sigma,$$

$$\zeta_4(t) = \int_0^\tau \int_0^1 \sin\Big(\beta^\circ + \theta\mu\zeta_2(s) + \theta g(s)\Big)\,d\theta\;\; [\mu\zeta_2(s) + g(s)] \times$$

$$\times\, e^{-\delta(\tau-\sigma)}\,\{[-\cos\omega(\tau-\sigma) + b_1 \sin\omega(\tau-\sigma)]\,\zeta_3(s) +$$

$$+b_2 \sin\omega(\tau-\sigma)\,\zeta_4(s) -$$

$$-e^{-\delta\sigma} \cos\omega(\tau-\sigma)(\cos\omega\sigma + b_1 \sin\omega\sigma) +$$

$$+e^{-\delta\sigma} \sin\omega(\tau-\sigma) \times$$

$$\times\, [b_1 \cos\omega\sigma + (b_1^2 + b_2^2)\sin\omega\sigma]\}d\sigma,$$

$$\sigma = s\mu^{-1}.$$

Введём функции

$$v_i(t) = \max_{0\le s\le t} |\zeta_i(s)|, \qquad i = \overline{1,4}; \qquad v = (v_1, \dots, v_4\,),$$

$$w(t) = \max_{j=\overline{2,4}} v_j(t),$$

$$f(t) = \max_{|\zeta| \le \mu v_2(t) + \mu^2\left[|b_5| + \sqrt{b_5^2 + b_6^2}\right]} \left|\sin\!\left(\beta^\circ + \zeta\right)\right|.$$

Из (19.15) получим неравенства для v_i:

$$v_1(t) \le f_1(v,t) \equiv \tag{19.16}$$

$$\equiv \frac{\mu}{\delta^2+\omega^2}\left\{a_2 v_3(t) + \cos\beta^\circ\, v_4(t) +\right.$$

$$+f(t)\cdot[v_2(t)+\mu|b_5|]\cdot\Big[\cos\beta^\circ\, t v_3(t)+a_2 t v_4(t)+$$

$$+\frac{\mu}{\delta}\sqrt{\cos^2\beta^\circ+(b_1\cos\beta^\circ+a_2b_2)^2}\Big]+$$

$$+\frac{\mu^2 f(t)\sqrt{b_5^2+b_6^2}}{\delta}\Big[\cos\beta^\circ\, v_3(t)+a_2v_4(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\beta^\circ+(b_1\cos\beta^\circ+a_2b_2)^2}\Big]\Big\},$$

$$v_2(t)\le f_2(v,t)\equiv\frac{\mu}{\delta^2+\omega^2}\times$$

$$\times\Big\{\cos\beta^\circ\, v_3(t)+\ a_1v_4(t)+$$

$$+f(t)\cdot[v_2(t)+\mu|b_5|]\times$$

$$\times\Big[a_1 t v_3(t)+\cos\beta^\circ\, t v_4(t)+\frac{\mu}{\delta}\sqrt{a_1^2+(a_1b_1-b_2\cos\beta^\circ)^2}\Big]+$$

$$+\frac{\mu^2 f(t)\sqrt{b_5^2+b_6^2}}{\delta}\times$$

$$\times\Big[a_1v_3(t)+\cos\beta^\circ\, v_4(t)+\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2+(a_1b_1-b_2\cos\beta^\circ)^2}\Big]\Big\},$$

$$v_3(t)\le f_3(v,t)\equiv\frac{\mu f(t)}{\delta}\times$$

$$\times\{[v_2(t)+\mu|b_5|]\times$$

$$\times\Big[b_2v_3(t)+\sqrt{1+b_1^2}\,v_4(t)+b_1b_2e^{-1}+b_2e^{-1}\sqrt{1+b_1^2}\Big]+$$

$$+\frac{\mu\sqrt{b_5^2+b_6^2}}{4e}\Big[4b_2v_3(t)+4\sqrt{1+b_1^2}\ \ v_4(t)+b_1b_2e+b_2e\sqrt{1+b_1^2}\Big]\Big\},$$

$$v_4(t) \le f_4(v,t) \equiv \frac{\mu f(t)}{\delta} \times$$

$$\times \{[v_2(t) + \mu|b_5|] \times$$

$$\times \left[\sqrt{1+b_1^2}\, v_3(t) + b_2 v_4(t) + \tfrac{1}{2e}(1 + b_1^2 + b_2^2) + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2e}\sqrt{(1 - b_1^2 - b_2^2)^2 + 4b_1^2}\right] +$$

$$+ \frac{\mu\sqrt{b_5^2 + b_6^2}}{8e}\left[8\sqrt{1+b_1^2}\ v_3(t) + 8b_2 v_4(t) + \right.$$

$$\left. + \mathrm{e}(1 + b_1^2 + b_2^2) + e\sqrt{(1 - b_1^2 - b_2^2)^2 + 4b_1^2}\right]\Big\}.$$

Эти неравенства справедливы при $0 \le t \le \bar{t}$. Из них следует:

$$w(t) \le a(t)\, w^2(t) + b(t)\, w(t) + c, \tag{19.17}$$

$$a(t) = \max\left[\frac{\mu t\left(a_1 + \cos\beta^\circ\right)}{\delta^2 + \omega^2}, \frac{\mu\left(b_2 + \sqrt{1+b_1^2}\right)}{\delta}\right];$$

$$b(t) = \max\left\{\frac{\mu}{\delta^2+\omega^2}\left[\left(a_1 + \cos\beta^\circ\right)\left(1 + |b_5|\mu t + \frac{\mu^2}{\delta}\sqrt{b_5^2 + b_6^2}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\mu}{\delta}\sqrt{a_1^2 + (a_1 b_1 - b_2\cos\beta^\circ)^2}\right],$$

$$\frac{\mu}{\delta}\left[\frac{b_2}{e}\left(b_1 + \sqrt{1+b_1^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \mu\left(b_2 + \sqrt{1+b_1^2}\right)\left(|b_5| + \frac{1}{e}\sqrt{b_5^2 + b_6^2}\right)\right],$$

$$\frac{\mu}{\delta}\left[\frac{1+b_1^2+b_2^2}{2e}+\frac{1}{2e}\sqrt{(1-b_1^2-b_2^2)^2+4b_1^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\mu\left(b_2+\sqrt{1+b_1^2}\right)\left(|b_5|+e^{-1}\sqrt{b_5^2+b_6^2}\right)\right]\right\};$$

$$c=\max\left\{\frac{\mu^3}{\delta\,(\delta^2+\omega^2)}\sqrt{a_1^2+(a_1b_1-b_2\cos\beta^\circ)^2}\left(|b_5|+\frac{1}{2}\sqrt{b_5^2+b_6^2}\right),\right.$$

$$\frac{\mu^2b_2}{\delta}\left(b_1+\sqrt{1+b_1^2}\right)\left(\frac{|b_5|}{e}+\frac{1}{4}\sqrt{b_5^2+b_6^2}\right),$$

$$\frac{\mu^2}{2\delta}\left[1+b_1^2+b_2^2+\sqrt{(1-b_1^2-b_2^2)^2+4b_1^2}\right]\times$$

$$\left.\times\left(\frac{|b_5|}{e}+\frac{1}{4}\sqrt{b_5^2+b_6^2}\right)\right\}.$$

Запишем (19.17) в виде

$$a(t)\,w^2(t)-[1-b(t)]\,w(t)+c\geq 0. \qquad (19.18)$$

Левая часть обращается в ноль при $w=w_{1,2}$, где

$$w_{1,2}(t)=\frac{1-b(t)\mp\sqrt{[1-b(t)]^2-4a(t)\,c}}{2a(t)}=\frac{2c}{1-b(t)\pm\sqrt{[1-b(t)]^2-4a(t)\,c}}.$$

Рассмотрим следующее множество:

$$1-b(t)>0, \qquad [1-b(t)]^2-4a(t)\,c>0. \qquad (19.19)$$

Функции $a(t)$, $b(t)$, c непрерывны по t, μ и обращаются в ноль при $\mu=0$. Поэтому при достаточно малых μ множество значений t (19.19) не пусто. На этом множестве множество (19.18) неотрицательных значений w распадается на две непересекающиеся компоненты:

$$0 \le w \le w_1 \quad \text{и} \quad w_2 \le w.$$

Так как функция $w(t)$ непрерывна по t и $w(0) = 0$, то для всех значений t из множества (19.19) справедливы неравенства

$$\left|\zeta_j(t)\right| \le w(t) \le w_1(t) = \frac{2c}{1 - b(t) + \sqrt{[1 - b(t)]^2 - 4a(t)c}}, \tag{19.20}$$

$$|\zeta_1(t)| \le v_1(t) \le \bar{a}(t)\, w_1^2(t) + \bar{b}(t)\, w_1(t) + \bar{c}, \qquad j = \overline{2{,}4}.$$

Последнее неравенство получено из (19.16),

$$\bar{a}(t) = \frac{\mu t\left(a_2 + \cos\beta^\circ\right)}{\delta^2 + \omega^2}, \tag{19.21}$$

$$\bar{b}(t) = \frac{\mu}{\delta^2 + \omega^2}\left[\left(a_2 + \cos\beta^\circ\right) \cdot \left(1 + \mu t|b_5| + \frac{\mu^2}{\delta}\sqrt{b_5^2 + b_6^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu}{\delta}\sqrt{\cos^2\beta^\circ + (b_1\cos\beta^\circ + a_2 b_2)^2}\right],$$

$$\bar{c} = \frac{\mu^3}{\delta(\delta^2 + \omega^2)}\left(|b_5| + \frac{1}{2}\sqrt{b_5^2 + b_6^2}\right)\sqrt{\cos^2\beta^\circ + (b_1\cos\beta^\circ + a_2 b_2)^2}.$$

Предположим, что множество (19.19) содержит такую точку t_1, что $\bar{t} < t_1$ (напомним, что на отрезке $0 \le t \le \bar{t}$ решение задачи (19.13) существует и единственно, смотрите начало п. 19.5). Из предположения следует: 1) множество (19.19) содержит все точки $s,\ 0 \le s \le t_1$, так как $a(t),\ b(t)$ монотонно возрастающие функции t, а c от t не зависит; 2) $\|u(\bar{t})\| = \delta_u$, иначе решение задачи (19.13) можно было бы продолжить.

Рассмотрим отрезок $0 \le t \le \bar{t}$. На этом отрезке $b(t) < 1$. Поэтому первый член, стоящий под знаком max в формуле (19.17) для $b(t)$, меньше 1. Первый член можно представить как сумму положительных слагаемых. Возьмём слагаемое с множителем t. Оно меньше 1:

$$\frac{\mu^2 t|b_5|\left(a_1 + \cos\beta^\circ\right)}{\delta^2 + \omega^2} < 1.$$

Отсюда получаем:

$$t < \frac{\delta^2 + \omega^2}{\mu^2 |b_5|\left(a_1 + \cos\beta^\circ\right)} = \bar{\bar{t}}, \qquad \bar{t} < \bar{\bar{t}}.$$

Далее:

$$w_1(t) = \frac{1 - b(t) - \sqrt{[1 - b(t)]^2 - 4a(t)\,c}}{2a(t)}.$$

Поэтому на отрезке $0 \le t \le \bar{t}$ $w_1(t) < \frac{1}{2a(t)}$. Отсюда и из формулы (19.17) для $a(t)$ получаем неравенства

$$w_1(t) < \frac{1}{2a(t)} \le \frac{\delta}{2\mu\left(b_2 + \sqrt{1 + b_1^2}\right)} = \bar{w}, \qquad w_1(\bar{t}) < \bar{w}.$$

Составим теперь цепочку неравенств:

$$\delta_u = \|u(\bar{t})\| = \max_{i=\overline{1,4}} |\zeta_i(\bar{t})| \le \max[v_1(\bar{t}), w_1(\bar{t})] <$$

$$< \max\left[\bar{a}\left(\bar{\bar{t}}\right)\bar{w}^2 + \bar{b}\left(\bar{\bar{t}}\right)\bar{w} + \bar{c}, \bar{w}\right] = \delta_u.$$

Первое равенство следует из предположения о точке t_1. Второе равенство – определение нормы вектора. Неравенства следуют из (19.14), (19.20).

Таким образом, пришли к противоречию: $\delta_u < \delta_u$, – из которого следует, что предположение о точке t_1 неверно и, значит, всё множество (19.19) принадлежит отрезку $[0, \bar{t}]$. Это означает следующее: для всех значений t, μ из множества (19.19) решение задачи (19.13) существует, единственно и удовлетворяет неравенствам (19.20).

Решая неравенства (19.19) численно для заданного значения $\mu \approx 0{,}016$, получим: решение задачи (19.13) (а значит, и задачи (18.6)) существует и единственно, по крайней мере, на отрезке

$$0 \le t \le 2763{,}003. \qquad (19.22)$$

Рассмотрим момент времени

$$t_* = \frac{15\text{c}}{T_*} \approx 327{,}327.$$

Предположим, что $v_j(t) \le v_j^{(n-1)}$ при $0 \le t \le t_*$, $j = \overline{2,4}$. Тогда при $0 \le t \le t_*$ из (19.16) следуют неравенства

$$|\zeta_i(t)| \le v_i(t) \le v_i^{(n)} = f_i\left(v^{(n-1)}, t_*\right), \quad i = \overline{1,4}, \qquad (19.23)$$

где $v^{(n-1)} = \left(v_1^{(n-1)}, \dots, v_4^{(n-1)}\right)$. Примем

$$v_j^{(0)} = w_1(t_*) \approx 0{,}431 \cdot 10^{-3}, \qquad j = \overline{2,4}.$$

Здесь $w_1(t)$ – функция (19.20). Это возможно, так как $v_j(t) \le w(t) \le w_1(t) \le w_1(t_*)$. Значение $v_1^{(0)}$ не требуется, так как оно не входит в формулы (19.16) для f_i. Вычисляя $v_i^{(n)}$ по формулам (19.23) для $n = 1, 2, \dots$, получим: при $0 \le t \le t_*$ выполняются неравенства

$$|\zeta_1(t)| \le 0{,}249 \cdot 10^{-4}, \qquad |\zeta_2(t)| \le 0{,}159 \cdot 10^{-4}, \qquad (19.24)$$

$$|\zeta_3(t)| \le 0{,}194 \cdot 10^{-3}, \qquad |\zeta_4(t)| \le 0{,}194 \cdot 10^{-3}.$$

Сформулируем полученные результаты в размерных переменных, используя формулы (18.3), (19.6), (19.12) и неравенства (19.22), (19.24).

19.6. Результаты

19.6.1. Решение задачи (18.1), (18.2) существует и единственно, по крайней мере, на интервале

$$0 \le T \le 2{,}110 \text{ мин.} \tag{19.25}$$

19.6.2. Приближённое решение задачи (18.1), (18.2) имеет вид

$$\alpha \approx \alpha_1 \equiv \alpha^{\circ} + \exp(-\Delta T)[D_3 \cos(\Omega T) + D_4 \sin(\Omega T)] - D_3,$$

$$\beta \approx \beta_1 \equiv \beta^{\circ} + \exp(-\Delta T)[D_5 \cos(\Omega T) + D_6 \sin(\Omega T)] - D_5,$$

$$\dot{\alpha} \approx \dot{\alpha}_1 \equiv \exp(-\Delta T)\left[\dot{\alpha}^{\circ} \cos(\Omega T) + D_1 \sin(\Omega T)\right],$$

$$\dot{\beta} \approx \dot{\beta}_1 \equiv D_2 \exp(-\Delta T) \sin(\Omega T),$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{A+A_1+A_2} + \frac{n_2}{A+B_1}\right) \approx 792{,}088\text{с}^{-1},$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{H^2 \cos^2\beta^{\circ}}{(A+A_1+A_2)(A+B_1)} - \frac{1}{4}\left(\frac{n_1}{A+A_1+A_2} - \frac{n_2}{A+B_1}\right)^2} \approx 1116{,}853\text{с}^{-1},$$

$$D_1 = -\frac{\dot{\alpha}^{\circ}}{2\Omega}\left(\frac{n_1}{A+A_1+A_2} - \frac{n_2}{A+B_1}\right) \approx 0{,}071\text{с}^{-1},$$

$$D_2 = \frac{\dot{\alpha}^{\circ} H \cos\beta^{\circ}}{\Omega(A+B_1)} \approx 0{,}369\text{с}^{-1},$$

$$D_3 = -\frac{n_2 \dot{\alpha}^{\circ}(A+A_1+A_2)}{H^2 D} = -1{,}27 \cdot 10^{-4},$$

$$D_4 = \frac{\dot{\alpha}^{\circ}}{\Omega D}\left[\cos^2\beta^{\circ} + \frac{n_1 n_2}{2H^2} - \frac{n_2^2(A+A_1+A_2)}{2H^2(A+B_1)}\right] \approx 0{,}89 \cdot 10^{-4},$$

$$D_5 = \frac{\dot{\alpha}^{\circ} \cos\beta^{\circ}(A+A_1+A_2)}{HD} \approx 2{,}20 \cdot 10^{-4},$$

$$D_6 = -\frac{\dot{\alpha}^\circ \Delta\cos\beta^\circ (A+A_1+A_2)}{H\Omega D} \approx -1{,}56 \cdot 10^{-4},$$

$$D = \cos^2\beta^\circ + \frac{n_1 n_2}{H^2}.$$

19.6.3. На отрезке $0 \le T \le 15\text{c}$ справедливы неравенства

$$|\alpha - \alpha_1| \le 0{,}047'', \qquad |\beta - \beta_1| \le 0{,}053'', \qquad (19.26)$$

$$|\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_1| \le 3{,}87 \cdot 10^{-5}\text{c}^{-1}, \qquad \left|\dot{\beta} - \dot{\beta}_1\right| \le 6{,}73 \cdot 10^{-5}\text{c}^{-1}.$$

§20. Модификация метода пограничных функций

20.1. Построение асимптотического решения

Если строить более точное (чем в §19) асимптотическое решение задачи (18.6) методом пограничных функций, то можно убедиться, что оно содержит *секулярные члены* (порядка $\mu^k,\ k \ge 2$) – слагаемые с множителем t. Секулярные члены можно из асимптотики убрать, если рассмотреть некоторые параметры задачи как функции μ и подобрать эти функции так, чтобы слагаемые с множителем t в решении отсутствовали. Этот приём аналогичен приёму, который использовал А.М.Ляпунов при нахождении периодического решения [12].

Рассмотрим β° как функцию параметра μ следующего вида:

$$\beta^\circ = \beta^{(0)} + \beta^{(1)}\mu + \Delta\beta \cdot \mu^2, \qquad (20.1)$$

где $\beta^{(0)},\ \beta^{(1)}$ – искомые постоянные (не зависящие от t, μ), $\Delta\beta$ – искомая гладкая функция μ. Решение задачи (18.6), (20.1) будем искать в виде (19.1), где

$$y_{1i} = \tilde{y}_{1i}^{(0)}(t) + \mu\, \tilde{y}_{1i}^{(1)}(t) + \cdots, \qquad (20.2)$$

$$y_{2i} = \tilde{y}_{2i}^{(0)}(\tau) + \mu\, \tilde{y}_{2i}^{(1)}(\tau) + \cdots.$$

Подставим ряды (20.2) и выражение (20.1) в уравнения (19.2), разложим левые и правые части уравнений в ряды по степеням μ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ. Получим уравнения для $\tilde{y}_{ji}^{(k)}$:

$\boxed{k = 0}$

$$\frac{d\tilde{y}_{11}^{(0)}}{dt} = \tilde{y}_{13}^{(0)}, \qquad \frac{d\tilde{y}_{12}^{(0)}}{dt} = \tilde{y}_{14}^{(0)},$$

$$0 = -a_1\tilde{y}_{13}^{(0)} - \cos\beta^{(0)}\ \tilde{y}_{14}^{(0)},$$

$$0 = \cos\beta^{(0)}\ \tilde{y}_{13}^{(0)} - a_2\tilde{y}_{14}^{(0)},$$

$$\frac{d\tilde{y}_{21}^{(0)}}{d\tau} = 0, \qquad \frac{d\tilde{y}_{22}^{(0)}}{d\tau} = 0,$$

$$\frac{d\tilde{y}_{23}^{(0)}}{d\tau} = -a_1\tilde{y}_{23}^{(0)} - \cos\beta^{(0)}\ \tilde{y}_{24}^{(0)},$$

$$\frac{d\,\tilde{y}_{24}^{(0)}}{d\tau} = \cos\beta^{(0)}\ \tilde{y}_{23}^{(0)} - a_2\,\tilde{y}_{24}^{(0)},$$

$$\lim_{\tau\to\infty} \tilde{y}_{2i}^{(0)}(\tau) = 0, \qquad i = 1, 2;$$

$$\tilde{y}_{1j}^{(0)}(0) + \tilde{y}_{2j}^{(0)}(0) = 0, \quad j = 1, 2, 4;$$

$$\tilde{y}_{13}^{(0)}(0) + \tilde{y}_{23}^{(0)}(0) = 1.$$

$\boxed{k = 1}$

$$\frac{d\tilde{y}_{11}^{(1)}}{dt} = \tilde{y}_{13}^{(1)}, \qquad \frac{d\tilde{y}_{12}^{(1)}}{dt} = \tilde{y}_{14}^{(1)},$$

$$\frac{d\tilde{y}_{13}^{(0)}}{dt} = -a_1\tilde{y}_{13}^{(1)} - \cos\beta^{(0)}\ \tilde{y}_{14}^{(1)} +$$

$$+\sin\beta^{(0)}\,\tilde{y}_{14}^{(0)}\left(\tilde{y}_{12}^{(0)} + \beta^{(1)}\right),$$

$$\frac{d\tilde{y}_{14}^{(0)}}{dt} = \cos\beta^{(0)}\ \tilde{y}_{13}^{(1)} - a_2\tilde{y}_{14}^{(1)} -$$

$$-\sin\beta^{(0)}\,\tilde{y}_{13}^{(0)}\left(\tilde{y}_{12}^{(0)} + \beta^{(1)}\right),$$

$$\frac{d\tilde{y}_{21}^{(1)}}{d\tau} = \tilde{y}_{23}^{(0)}, \qquad \frac{d\tilde{y}_{22}^{(1)}}{d\tau} = \tilde{y}_{24}^{(0)},$$

$$\frac{d\tilde{y}_{23}^{(1)}}{d\tau} = -a_1\tilde{y}_{23}^{(1)} - \cos\beta^{(0)}\ \tilde{y}_{24}^{(1)} +$$

$$+\sin\beta^{(0)}\left[\tilde{y}_{12}^{(0)}(0)\tilde{y}_{24}^{(0)} + \beta^{(1)}\tilde{y}_{24}^{(0)} + \tilde{y}_{14}^{(0)}(0)\tilde{y}_{22}^{(0)} + \tilde{y}_{22}^{(0)}\tilde{y}_{24}^{(0)}\right],$$

$$\frac{d\ \tilde{y}_{24}^{(1)}}{d\tau} = \cos\beta^{(0)}\ \tilde{y}_{23}^{(1)} - a_2\ \tilde{y}_{24}^{(1)} -$$

$$-\sin\beta^{(0)}\left[\tilde{y}_{12}^{(0)}(0)\tilde{y}_{23}^{(0)} + \beta^{(1)}\tilde{y}_{23}^{(0)} + \tilde{y}_{13}^{(0)}(0)\tilde{y}_{22}^{(0)} + \tilde{y}_{22}^{(0)}\tilde{y}_{23}^{(0)}\right],$$

$$\lim_{\tau\to\infty} \tilde{y}_{2i}^{(1)}(\tau) = 0, \qquad i = 1,2;$$

$$\tilde{y}_{1j}^{(1)}(0) + \tilde{y}_{2j}^{(1)}(0) = 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Решение написанных уравнений имеет вид

$$\tilde{y}_{1i}^{(0)} = 0, \quad i = \overline{1,4}; \tag{20.3}$$

$$\tilde{y}_{2i}^{(0)} = 0, \quad i = 1,2;$$

$$\tilde{y}_{23}^{(0)} = e^{-\delta\tau}\left(\cos\widetilde{\omega}\tau + \tilde{b}_1 \sin\widetilde{\omega}\tau\right),$$

$$\tilde{y}_{24}^{(0)} = \tilde{b}_2 e^{-\delta\tau} \sin\widetilde{\omega}\tau,$$

$$\tilde{y}_{11}^{(1)} = -\tilde{b}_3, \qquad \tilde{y}_{12}^{(1)} = -\tilde{b}_5,$$

$$\tilde{y}_{1i}^{(1)} = 0, \qquad i = 3, 4;$$

$$\tilde{y}_{21}^{(1)} = e^{-\delta\tau}\left(\tilde{b}_3 \cos\widetilde{\omega}\tau + \tilde{b}_4 \sin\widetilde{\omega}\tau\right),$$

$$\tilde{y}_{22}^{(1)} = e^{-\delta\tau}\left(\tilde{b}_5 \cos\widetilde{\omega}\tau + \tilde{b}_6 \sin\widetilde{\omega}\tau\right),$$

$$\tilde{y}_{23}^{(1)} = \beta^{(1)}\tilde{b}_2 \sin\beta^{(0)}\, e^{-\delta\tau}\left[-\tilde{b}_1\tau\cos\widetilde{\omega}\tau + \left(\tau + \tilde{b}_1\widetilde{\omega}^{-1}\right)\sin\widetilde{\omega}\tau\right],$$

$$\tilde{y}_{24}^{(1)} = \beta^{(1)} \sin\beta^{(0)}\, e^{-\delta\tau}\left[-\left(1 + \tilde{b}_1^2\right)\tau\cos\widetilde{\omega}\tau + \tilde{b}_1^2\widetilde{\omega}^{-1}\sin\widetilde{\omega}\tau\right].$$

Здесь

$$\delta = \frac{a_1+a_2}{2}; \qquad \widetilde{\omega} = \sqrt{\cos^2\beta^{(0)} - \frac{(a_1-a_2)^2}{4}}; \tag{20.4}$$

$$\tilde{b}_1 = \frac{a_2-a_1}{2\widetilde{\omega}}; \qquad \tilde{b}_2 = \frac{\cos\beta^{(0)}}{\widetilde{\omega}}; \qquad \tilde{b}_3 = -\frac{\delta+\widetilde{\omega}\tilde{b}_1}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2};$$

$$\tilde{b}_4 = \frac{\widetilde{\omega}-\delta\tilde{b}_1}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}; \qquad \tilde{b}_5 = -\frac{\widetilde{\omega}\tilde{b}_2}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}; \qquad \tilde{b}_6 = -\frac{\delta\tilde{b}_2}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}.$$

Потребуем, чтобы в асимптотике отсутствовали секулярные члены. Тогда, предполагая, что $\beta^{(0)}$ близко к β° и, значит,

$$\sin\beta^{(0)} \neq 0, \tag{20.5}$$

из (20.3) получим $\beta^{(1)} = 0$. Из (19.1), (20.2), (20.3) получим асимптотическое решение задачи (18.6), (20.1) с точностью порядка $O(\mu^2)$:

$$\tilde{X}_1(t,\mu) = \left(\tilde{\bar{\xi}}_1, \tilde{\bar{\xi}}_2, \tilde{\bar{\xi}}_3, \tilde{\bar{\xi}}_4\right), \tag{20.6}$$

$$\tilde{\bar{\xi}}_1 = \mu e^{-\delta\tau}\left(\tilde{b}_3 \cos\widetilde{\omega}\tau + \tilde{b}_4 \sin\widetilde{\omega}\tau\right) - \tilde{b}_3\mu,$$

$$\tilde{\bar{\xi}}_2 = \mu e^{-\delta\tau}\left(\tilde{b}_5 \cos\widetilde{\omega}\tau + \tilde{b}_6 \sin\widetilde{\omega}\tau\right) - \tilde{b}_5\mu,$$

$$\tilde{\bar{\xi}}_3 = e^{-\delta\tau}\left(\cos\widetilde{\omega}\tau + \tilde{b}_1 \sin\widetilde{\omega}\tau\right),$$

$$\tilde{\bar{\xi}}_4 = \tilde{b}_2 e^{-\delta\tau} \sin\widetilde{\omega}\tau, \qquad \tau = t\mu^{-1}.$$

Здесь осталась неопределённой постоянная $\beta^{(0)}$. Её выберем ниже при оценке остаточного члена.

20.2. Оценка остаточного члена и интервала времени

Обозначим $\tilde{u}$ остаточный член модифицированной асимптотики:

$$\tilde{u} = x - \tilde{X}_1, \qquad \tilde{u} = \left(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2, \tilde{\zeta}_3, \tilde{\zeta}_4\right), \tag{20.7}$$

$$\tilde{\zeta}_i = \xi_i - \tilde{\bar{\xi}}_i, \qquad i = \overline{1,4}.$$

Здесь $\tilde{\bar{\xi}}_i$ – функции (20.6). Из (18.6), (20.6) найдём уравнения для $\tilde{\zeta}_i$:

$$\frac{d\tilde{\zeta}_1}{dt} = \tilde{\zeta}_3, \qquad \frac{d\tilde{\zeta}_2}{dt} = \tilde{\zeta}_4, \tag{20.8}$$

$$\mu\frac{d\tilde{\zeta}_3}{dt} = -a_1\tilde{\zeta}_3 - \cos\beta^{(0)}\,\tilde{\zeta}_4 + \tilde{\Gamma}_3(\tilde{u},t),$$

$$\mu\frac{d\tilde{\zeta}_4}{dt} = \cos\beta^{(0)}\,\tilde{\zeta}_3 - a_2\tilde{\zeta}_4 + \tilde{\Gamma}_4(\tilde{u},t),$$

$$\tilde{\zeta}_i\big|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

Здесь

$$\tilde{\Gamma}_3(\tilde{u},t) = \left[\cos\beta^{(0)} - \cos\left(\beta^{(0)} + \mu\tilde{\zeta}_2 + \tilde{g}(t)\right)\right] \times$$

$$\times \left(\tilde{\zeta}_4 + \tilde{b}_2 e^{-\delta\tau} \sin\widetilde{\omega}\tau\right),$$

$$\tilde{\Gamma}_4(\tilde{u},t) = -\left[\cos\beta^{(0)} - \cos\left(\beta^{(0)} + \mu\tilde{\zeta}_2 + \tilde{g}(t)\right)\right] \times$$

$$\times \left[\tilde{\zeta}_3 + e^{-\delta\tau}\left(\cos\widetilde{\omega}\tau + \tilde{b}_1 \sin\widetilde{\omega}\tau\right)\right],$$

$$\tilde{g}(t) = \mu^2\left(\Delta\beta - \tilde{b}_5\right) + \mu^2 e^{-\delta\tau}\left(\tilde{b}_5 \cos\widetilde{\omega}\tau + \tilde{b}_6 \sin\widetilde{\omega}\tau\right), \quad \tau = t\mu^{-1}.$$

Выберем $\Delta\beta$ так, чтобы в $\tilde{g}(t)$ не было членов без экспоненциального множителя. Тогда $\Delta\beta = \tilde{b}_5$. Формула (20.1) примет вид $\beta^\circ = \beta^{(0)} + \tilde{b}_5\mu^2$. Отсюда и из (20.4) получим уравнение для определения $\beta^{(0)}$:

$$\beta^{(0)} = \beta^\circ + \frac{\mu^2 \cos\beta^{(0)}}{a_1 a_2 + \cos^2\beta^{(0)}}\,. \tag{20.9}$$

Соответственно формула для $\tilde{g}(t)$ примет вид

$$\tilde{g}(t) = \mu^2 e^{-\delta\tau}\left(\tilde{b}_5 \cos\widetilde{\omega}\tau + \tilde{b}_6 \sin\widetilde{\omega}\tau\right).$$

Перейдём от задачи Коши (20.8) к интегральным уравнениям (так же, как в п. 19.5 сделан переход от (19.13) к (19.15)). Получим

$$\tilde{\zeta}_1(t) = (\delta^2 + \widetilde{\omega}^2)^{-1} \times$$

$$\times \left\{-\mu a_2\tilde{\zeta}_3(t) + \mu\cos\beta^{(0)}\,\tilde{\zeta}_4(t) + \right.$$

$$+\int_0^t \int_0^1 \sin\left(\beta^{(0)} + \theta\mu\tilde{\zeta}_2(s) + \theta\tilde{g}(s)\right) d\theta \cdot \left[\mu\tilde{\zeta}_2(s) + \tilde{g}(s)\right] \times$$

$$\times\left[\cos\beta^{(0)}\,\tilde{\zeta}_3(s)+a_2\tilde{\zeta}_4(s)+\cos\beta^{(0)}\,e^{-\delta\sigma}\cos\widetilde{\omega}\sigma+\right.$$

$$\left.+\left(\tilde{b}_1\cos\beta^{(0)}+a_2\tilde{b}_2\right)e^{-\delta\sigma}\sin\widetilde{\omega}\sigma\right]ds\Big\},$$

$$\tilde{\zeta}_2(t)=(\delta^2+\widetilde{\omega}^2)^{-1}\times$$

$$\times\Big\{-\mu\cos\beta^{(0)}\,\tilde{\zeta}_3(t)-\mu a_1\tilde{\zeta}_4(t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\sin\left(\beta^{(0)}+\theta\mu\tilde{\zeta}_2(s)+\theta\tilde{g}(s)\right)d\theta\cdot\left[\mu\tilde{\zeta}_2(s)+\tilde{g}(s)\right]\times$$

$$\times\left[-a_1\tilde{\zeta}_3(s)+\cos\beta^{(0)}\,\tilde{\zeta}_4(s)-a_1e^{-\delta\sigma}\cos\widetilde{\omega}\sigma-\right.$$

$$\left.-\left(a_1\tilde{b}_1-\tilde{b}_2\cos\beta^{(0)}\right)e^{-\delta\sigma}\sin\widetilde{\omega}\sigma\right]ds\Big\},$$

$$\tilde{\zeta}_3(t)=\int_0^\tau\int_0^1\sin\left(\beta^{(0)}+\theta\mu\tilde{\zeta}_2(s)+\theta\tilde{g}(s)\right)d\theta\cdot\left[\mu\tilde{\zeta}_2(s)+\tilde{g}(s)\right]\times$$

$$\times e^{-\delta(\tau-\sigma)}\Big\{\tilde{b}_2\sin\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)\;\tilde{\zeta}_3(s)+$$

$$+\left[\cos\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)\;+\tilde{b}_1\sin\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)\right]\tilde{\zeta}_4(s)+$$

$$+\tilde{b}_2e^{-\delta\sigma}\cos\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)\sin\widetilde{\omega}\sigma+$$

$$+\tilde{b}_2e^{-\delta\sigma}\sin\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)\times$$

$$\times\left(\cos\widetilde{\omega}\sigma+2\tilde{b}_1\sin\widetilde{\omega}\sigma\right)\Big\}d\sigma,$$

$$\tilde{\zeta}_4(t)=\int_0^\tau\int_0^1\sin\left(\beta^{(0)}+\theta\mu\tilde{\zeta}_2(s)+\theta\tilde{g}(s)\right)d\theta\cdot\left[\mu\tilde{\zeta}_2(s)+\tilde{g}(s)\right]\times$$

$$\times e^{-\delta(\tau-\sigma)}\Big\{\left[-\cos\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)+\tilde{b}_1\sin\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)\right]\tilde{\zeta}_3(s)+$$

$$+\tilde{b}_2 \sin\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)\,\tilde{\zeta}_4(s) -$$

$$-e^{-\delta\sigma}\cos\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)\big(\cos\widetilde{\omega}\sigma + \tilde{b}_1 \sin\widetilde{\omega}\sigma\big) +$$

$$+e^{-\delta\sigma}\sin\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)\times$$

$$\times\left[\tilde{b}_1\cos\widetilde{\omega}\sigma + \left(\tilde{b}_1^2+\tilde{b}_2^2\right)\sin\widetilde{\omega}\sigma\right]\Big\}\,d\sigma,$$

$$\sigma = s\mu^{-1}.$$

Отсюда следует: если решение задачи (20.8) существует на отрезке $[0,t]$, то справедливы неравенства

$$\left|\tilde{\zeta}_1(t)\right| \le \tfrac{\mu}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}\times \tag{20.10}$$

$$\times\left\{a_2\left|\tilde{\zeta}_3(t)\right| + \cos\beta^{(0)}\left|\tilde{\zeta}_4(t)\right| +\right.$$

$$+\tilde{f}(t)\int_0^t\left(\left|\tilde{\zeta}_2(s)\right| + \mu\sqrt{\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2}\,e^{-\delta\sigma}\right)\times$$

$$\times\left[\cos\beta^{(0)}\left|\tilde{\zeta}_3(s)\right| + a_2\left|\tilde{\zeta}_4(s)\right| +\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{\cos^2\beta^{(0)} + \left(\tilde{b}_1\cos\beta^{(0)} + a_2\tilde{b}_2\right)^2}\,e^{-\delta\sigma}\right]ds\right\},$$

$$\left|\tilde{\zeta}_2(t)\right| \le \tfrac{\mu}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}\times$$

$$\times\left\{\cos\beta^{(0)}\left|\tilde{\zeta}_3(t)\right| + a_1\left|\tilde{\zeta}_4(t)\right| +\right.$$

$$+\tilde{f}(t)\int_0^t\left(\left|\tilde{\zeta}_2(s)\right| + \mu\sqrt{\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2}\,e^{-\delta\sigma}\right)\times$$

$$\times\left[a_1\left|\tilde{\zeta}_3(s)\right| + \cos\beta^{(0)}\left|\tilde{\zeta}_4(s)\right| +\right.$$

$$+\sqrt{a_1^2+\left(a_1\tilde{b}_1-\tilde{b}_2\cos\beta^{(0)}\right)^2}\,e^{-\delta\sigma}\Bigg]ds\Bigg\},$$

$$\left|\tilde{\zeta}_3(t)\right|\le\mu\tilde{f}(t)\times$$

$$\times\int_0^\tau\left(\left|\tilde{\zeta}_2(s)\right|+\mu\sqrt{\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2}\,e^{-\delta\sigma}\right)e^{-\delta(\tau-\sigma)}\times$$

$$\times\left[\tilde{b}_2\cdot\left|\tilde{\zeta}_3(s)\right|+\sqrt{1+\tilde{b}_1^2}\left|\tilde{\zeta}_4(s)\right|+\left(\tilde{b}_1+\sqrt{1+\tilde{b}_1^2}\right)\tilde{b}_2e^{-\delta\sigma}\right]d\sigma,$$

$$\left|\tilde{\zeta}_4(t)\right|\le\mu\tilde{f}(t)\times$$

$$\times\int_0^\tau\left(\left|\tilde{\zeta}_2(s)\right|+\mu\sqrt{\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2}\,e^{-\delta\sigma}\right)e^{-\delta(\tau-\sigma)}\times$$

$$\times\Bigg[\sqrt{1+\tilde{b}_1^2}\left|\tilde{\zeta}_3(s)\right|+\tilde{b}_2\cdot\left|\tilde{\zeta}_4(s)\right|+\frac{1}{2}\left(1+\tilde{b}_1^2+\tilde{b}_2^2\right)e^{-\delta\sigma}+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\tilde{b}_1^2-\tilde{b}_2^2\right)^2+4\tilde{b}_1^2}\,e^{-\delta\sigma}\Bigg]d\sigma.$$

Здесь и далее

$$\tilde{f}(t)=\max_{|\zeta|\le\mu\tilde{v}_2(t)+\mu^2\sqrt{\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2}}\left|\sin\left(\beta^{(0)}+\zeta\right)\right|,$$

$$\tilde{v}_i(t)=\max_{0\le s\le t}\left|\tilde{\zeta}_i(s)\right|,\qquad i=\overline{1,4};\qquad \tilde{v}=(\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_4);$$

$$\widetilde{w}(t)=\max_{j=\overline{2,4}}\tilde{v}_j(t).$$

Из (20.10) получим неравенства для $\tilde{v}_i$:

$$\tilde{v}_1(t) \le \tilde{f}_1(\tilde{v},t) \equiv \frac{\mu}{\delta^2+\tilde{\omega}^2} \times \tag{20.11}$$

$$\times \left\{ a_2 \tilde{v}_3(t) + \cos\beta^{(0)}\, \tilde{v}_4(t) + \right.$$

$$+\tilde{f}(t) \left[t\, \tilde{v}_2(t) + \frac{\mu^2}{\delta}\sqrt{\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2} \right] \cdot \left[\cos\beta^{(0)}\, \tilde{v}_3(t) + a_2\, \tilde{v}_4(t)\right] +$$

$$\left. + \frac{\mu\tilde{f}(t)}{\delta}\sqrt{\cos^2\beta^{(0)} + \left(\tilde{b}_1\cos\beta^{(0)} + a_2\tilde{b}_2\right)^2} \left[\tilde{v}_2(t) + \frac{\mu}{2}\sqrt{\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2} \right] \right\},$$

$$\tilde{v}_2(t) \le \tilde{f}_2(\tilde{v},t) \equiv \frac{\mu}{\delta^2+\tilde{\omega}^2} \times$$

$$\times \left\{ \cos\beta^{(0)}\, \tilde{v}_3(t) + a_1 \tilde{v}_4(t) + \right.$$

$$+\tilde{f}(t) \left[t\, \tilde{v}_2(t) + \frac{\mu^2}{\delta}\sqrt{\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2} \right] \cdot \left[a_1 \tilde{v}_3(t) + \cos\beta^{(0)}\, \tilde{v}_4(t)\right] +$$

$$\left. + \frac{\mu\tilde{f}(t)}{\delta}\sqrt{a_1^2 + \left(a_1\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2\cos\beta^{(0)}\right)^2} \left[\tilde{v}_2(t) + \frac{\mu}{2}\sqrt{\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2} \right] \right\},$$

$$\tilde{v}_3(t) \le \tilde{f}_3(\tilde{v},t) \equiv$$

$$\equiv \frac{\mu\tilde{f}(t)}{\delta}\left[\tilde{v}_2(t) + \frac{\mu}{e}\sqrt{\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2} \right] \cdot \left[\tilde{b}_2 \tilde{v}_3(t) + \sqrt{1+\tilde{b}_1^2}\, \tilde{v}_4(t) \right] +$$

$$+ \frac{\mu\tilde{b}_2\tilde{f}(t)}{\delta}\left(\tilde{b}_1 + \sqrt{1+\tilde{b}_1^2} \right)\left[\frac{\tilde{v}_2(t)}{e} + \frac{\mu}{4}\sqrt{\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2} \right],$$

$$\tilde{v}_4(t) \le \tilde{f}_4(\tilde{v},t) \equiv$$

$$\equiv \frac{\mu\tilde{f}(t)}{\delta}\left[\tilde{v}_2(t) + \frac{\mu}{e}\sqrt{\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2} \right] \cdot \left[\sqrt{1+\tilde{b}_1^2}\, \tilde{v}_3(t) + \tilde{b}_2 \tilde{v}_4(t) \right] +$$

$$+\frac{\mu\tilde{f}(t)}{2\delta}\left[1+\tilde{b}_1^2+\tilde{b}_2^2+\sqrt{\left(1-\tilde{b}_1^2-\tilde{b}_2^2\right)^2+4\tilde{b}_1^2}\,\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\tilde{v}_2(t)}{e}+\frac{\mu}{4}\sqrt{\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2}\,\right].$$

Отсюда следует неравенство для $\widetilde{w}(t)$:

$$\widetilde{w}(t)\le\tilde{a}(t)\,\widetilde{w}^{\,2}(t)+\tilde{b}\,\widetilde{w}(t)+\tilde{c}, \tag{20.12}$$

$$\tilde{a}(t)=\max\left\{\frac{\mu t\left(a_1+\cos\beta^{(0)}\right)}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2},\frac{\mu}{\delta}\left(\tilde{b}_2+\sqrt{1+\tilde{b}_1^2}\,\right)\right\},$$

$$\tilde{b}=\max\left\{\frac{\mu}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}\left[\left(a_1+\cos\beta^{(0)}\right)\left(1+\frac{\mu^2}{\delta}\sqrt{\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\mu}{\delta}\sqrt{a_1^2+\left(a_1\tilde{b}_1-\tilde{b}_2\cos\beta^{(0)}\right)^2}\,\right],$$

$$\frac{\mu}{\delta e}\left[\mu\sqrt{\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2}\left(\tilde{b}_2+\sqrt{1+\tilde{b}_1^2}\,\right)+\tilde{b}_2\left(\tilde{b}_1+\sqrt{1+\tilde{b}_1^2}\,\right)\right],$$

$$\frac{\mu}{\delta e}\left[\mu\sqrt{\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2}\,\left(\tilde{b}_2+\sqrt{1+\tilde{b}_1^2}\,\right)+\frac{1}{2}\left(1+\tilde{b}_1^2+\tilde{b}_2^2\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\tilde{b}_1^2-\tilde{b}_2^2\right)^2+4\tilde{b}_1^2}\,\right]\right\},$$

$$\tilde{c}=\frac{\mu^2}{2\delta}\sqrt{\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2}\;\max\left\{\frac{\mu}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}\sqrt{a_1^2+\left(a_1\tilde{b}_1-\tilde{b}_2\cos\beta^{(0)}\right)^2},\right.$$

$$\frac{\tilde{b}_2}{2}\left(\tilde{b}_1+\sqrt{1+\tilde{b}_1^2}\,\right),$$

$$\frac{1}{4}\left[1+\tilde{b}_1^2+\tilde{b}_2^2+\sqrt{\left(1-\tilde{b}_1^2-\tilde{b}_2^2\right)^2+4\tilde{b}_1^2}\,\right]\Bigg\}.$$

Исследуем неравенство (20.12) так же, как в п. 19.5 исследовано неравенство (19.18). Получим: для всех значений t, μ из множества

$$1-\tilde{b}>0, \qquad \left(1-\tilde{b}\right)^2-4\,\tilde{a}(t)\,\tilde{c}>0 \qquad (20.13)$$

решение задачи (20.8) (а значит, и задачи (18.6)) существует, единственно и удовлетворяет неравенствам

$$\left|\tilde{\zeta}_j(t)\right| \le \tilde{w}(t) \le \tilde{w}_1(t) = \frac{2\tilde{c}}{1-\tilde{b}+\sqrt{[1-\tilde{b}]^2-4\tilde{a}(t)\,\tilde{c}}}, \qquad (20.14)$$

$$|\zeta_1(t)| \le \tilde{v}_1(t) \le \bar{\tilde{a}}(t)\,\tilde{w}_1^2(t)+\bar{\tilde{b}}(t)\,\tilde{w}_1(t)+\bar{\tilde{c}}, \qquad j=\overline{2,4}.$$

Последнее неравенство получено из (20.11),

$$\bar{\tilde{a}}(t)=\frac{\mu t\left(a_2+\cos\beta^{(0)}\right)}{\delta^2+\tilde{\omega}^2},$$

$$\bar{\tilde{b}}=\frac{\mu}{\delta^2+\tilde{\omega}^2}\Bigg[\left(a_2+\cos\beta^{(0)}\right)\left(1+\frac{\mu^2}{\delta}\sqrt{\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2}\right)+$$

$$+\frac{\mu}{\delta}\sqrt{\cos^2\beta^{(0)}+\left(\tilde{b}_1\cos\beta^{(0)}+a_2\tilde{b}_2\right)^2}\,\Bigg],$$

$$\bar{\tilde{c}}=\frac{\mu^3}{2\delta(\delta^2+\tilde{\omega}^2)}\sqrt{\left(\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2\right)\left[\cos^2\beta^{(0)}+\left(\tilde{b}_1\cos\beta^{(0)}+a_2\tilde{b}_2\right)^2\right]}\,.$$

Вычислим постоянные по формулам (20.4), (20.12) и решим уравнение (20.9) и неравенства (20.13) при $\mu\approx 0{,}016$. Получим:

$$\delta\approx 0{,}578; \qquad \tilde{\omega}\approx 0{,}816; \qquad \beta^{(0)}\approx 30{,}013^\circ;$$

$$\tilde{b}_1\approx 0{,}357; \qquad \tilde{b}_2\approx 1{,}062; \qquad \tilde{b}_3\approx -0{,}870;$$

$$\tilde{b}_4 \approx 0{,}609; \qquad \tilde{b}_5 \approx -0{,}866; \qquad \tilde{b}_6 \approx -0{,}614;$$

$$\tilde{b} \approx 0{,}019; \qquad \tilde{c} \approx 1{,}76 \cdot 10^{-4};$$

интервал существования решения задач (20.8) и (18.6), по крайней мере, следующий:

$$0 \le t \le 74577{,}377. \tag{20.15}$$

Отметим, что условие (20.5) для $\beta^{(0)}$ выполняется.

Оценим решение задачи (20.8) на отрезке

$$0 \le t \le t_1 = \frac{15\mathrm{c}}{t_*} \approx 327{,}327.$$

Если при $0 \le t \le t_1$ выполняются неравенства $\left|\tilde{\zeta}_j(t)\right| \le \tilde{v}_j^{(n-1)}$, $j = \overline{2{,}4}$, то при $0 \le t \le t_1$ выполняются и неравенства

$$\left|\tilde{\zeta}_i(t)\right| \le \tilde{v}_i^{(n)} = \tilde{f}_i\left(\tilde{v}^{(n-1)}, t_1\right), \qquad i = \overline{1{,}4},$$

где $\tilde{f}_i$ – функции (20.11), $\tilde{v}^{(n-1)} = \left(\tilde{v}_1^{(n-1)}, \dots, \tilde{v}_4^{(n-1)}\right)$. Положим

$$\tilde{v}_2^{(0)} = \tilde{v}_3^{(0)} = \tilde{v}_4^{(0)} = \tilde{w}_1(t_1) \approx 1{,}80 \cdot 10^{-4}.$$

Это возможно, как следует из (20.14). Вычисляя $\tilde{v}_i^{(n)}$ при $n = 1, 2, \dots$, получим: при $0 \le t \le t_1$ выполняются неравенства

$$\left|\tilde{\zeta}_1\right| \le 5{,}31 \cdot 10^{-6}, \qquad \left|\tilde{\zeta}_2\right| \le 3{,}23 \cdot 10^{-6}, \tag{20.16}$$

$$\left|\tilde{\zeta}_3\right| \le 8{,}79 \cdot 10^{-5}, \qquad \left|\tilde{\zeta}_4(t)\right| \le 8{,}79 \cdot 10^{-5}.$$

Сформулируем полученные результаты в размерных переменных, используя (18.3), (20.6), (20.7), (20.15), (20.16).

20.3 Результаты

20.3.1. Решение задачи (18.1), (18.2) существует и единственно, по крайней мере, на интервале

$$0 \le T \le 56{,}959 \text{ мин.} \tag{20.17}$$

20.3.2. Приближённое решение задачи (18.1), (18.2), построенное модифицированным методом пограничных функций, имеет вид

$$\alpha \approx \tilde{\alpha} \equiv \alpha^{\circ} + \exp(-\Delta T)\left[\widetilde{D}_3 \cos(\tilde{\Omega} T) + \widetilde{D}_4 \sin(\tilde{\Omega} T)\right] - \widetilde{D}_3, \tag{20.18}$$

$$\beta \approx \tilde{\beta} \equiv \beta^{\circ} + \exp(-\Delta T)\left[\widetilde{D}_5 \cos(\tilde{\Omega} T) + \widetilde{D}_6 \sin(\tilde{\Omega} T)\right] - \widetilde{D}_5,$$

$$\dot{\alpha} \approx \dot{\tilde{\alpha}} \equiv \exp(-\Delta T)\left[\dot{\alpha}^{\circ} \cos(\tilde{\Omega} T) + \widetilde{D}_1 \sin(\tilde{\Omega} T)\right],$$

$$\dot{\beta} \approx \dot{\tilde{\beta}} \equiv \widetilde{D}_2 \exp(-\Delta T) \sin(\tilde{\Omega} T),$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{A+A_1+A_2} + \frac{n_2}{A+B_1}\right) \approx 792{,}088\text{с}^{-1},$$

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{\frac{H^2 \cos^2\beta^{(0)}}{(A+A_1+A_2)(A+B_1)} - \frac{1}{4}\left(\frac{n_1}{A+A_1+A_2} - \frac{n_2}{A+B_1}\right)^2} \approx 1116{,}693\text{с}^{-1},$$

$$\widetilde{D}_1 = -\frac{\dot{\alpha}^{\circ}}{2\tilde{\Omega}}\left(\frac{n_1}{A+A_1+A_2} - \frac{n_2}{A+B_1}\right) \approx 0{,}071\text{с}^{-1},$$

$$\widetilde{D}_2 = \frac{\dot{\alpha}^{\circ} H \cos\beta^{(0)}}{\tilde{\Omega}(A+B_1)} \approx 0{,}369\text{с}^{-1},$$

$$\widetilde{D}_3 = -\frac{n_2 \dot{\alpha}^{\circ}(A+A_1+A_2)}{H^2 \widetilde{D}} = -1{,}27 \cdot 10^{-4},$$

$$\widetilde{D}_4 = \frac{\dot{\alpha}^{\circ}}{\tilde{\Omega}\widetilde{D}}\left[\cos^2\beta^{(0)} + \frac{n_1 n_2}{2H^2} - \frac{n_2^2(A+A_1+A_2)}{2H^2(A+B_1)}\right] \approx 0{,}89 \cdot 10^{-4},$$

$$\widetilde{D}_5 = \frac{\dot{\alpha}^{\circ} \cos \beta^{(0)}(A+A_1+A_2)}{H\widetilde{D}} \approx 2{,}20 \cdot 10^{-4},$$

$$\widetilde{D}_6 = -\frac{\dot{\alpha}^{\circ} \Delta \cos \beta^{(0)}(A+A_1+A_2)}{H\widetilde{\Omega}\widetilde{D}} \approx -1{,}56 \cdot 10^{-4},$$

$$\widetilde{D} = \cos^2\beta^{(0)} + \frac{n_1 n_2}{H^2},$$

$\beta^{(0)}$ – корень уравнения

$$\beta^{(0)} = \beta^{\circ} + \frac{\dot{\alpha}^{\circ}(A+A_1+A_2)\cos \beta^{(0)}}{H\widetilde{D}}, \qquad \beta^{(0)} \approx 30{,}013^{\circ}.$$

20.3.3. На отрезке $0 \leq T \leq 15\text{с}$ справедливы неравенства

$$|\alpha - \tilde{\alpha}| \leq 0{,}011'', \qquad |\beta - \tilde{\beta}| \leq 0{,}011'', \tag{20.19}$$
$$|\dot{\alpha} - \dot{\tilde{\alpha}}| \leq 1{,}76 \cdot 10^{-5}\text{с}^{-1}, \qquad |\dot{\beta} - \dot{\tilde{\beta}}| \leq 3{,}06 \cdot 10^{-5}\text{с}^{-1}.$$

Замечание 20.1. Выбор $\beta^{(0)}$ позволил убрать секулярные члены в коэффициенте $\tilde{b}$ (смотрите (20.12)). При этом улучшилась оценка интервала существования решения и оценка точности решения (сравните (19.25), (19.26) с (20.17), (20.19)).

§21. Применение метода двух параметров

21.1. Применение теорем 31.2, 31.3

Проверим выполнение условий 31.3, 31.4 для задачи (18.6).

Правые части уравнений (18.6) не зависят от t, аналитичны по $x = (\xi_1, \dots, \xi_4)$, μ при $x \in \mathbf{C}^4$, $\mu \in \mathbf{C}$ и ограничены по норме в любой ограниченной области, принадлежащей $\mathbf{C}^4 \times \mathbf{C}$. Поэтому условие 31.3 для задачи (18.6) выполняется для любой ограниченной окрестности $\mathbf{C}(D_x)$ точки $x = 0$ в $\mathbf{C}^4$ при $t \geq 0$ и любом конечном значении $\bar{\mu} > 0$.

Так как $\overset{\circ}{x} = (0, 0, 1, 0)$, то условие 31.4 для задачи (18.6) выполняется при любом значении $\bar{\mu} > 0$.

Отсюда и из п. 19.2 следует, что задача (18.6) удовлетворяет условиям теоремы 31.2 при любых значениях $\bar{t} > 0$, $\bar{\mu} > 0$. По теореме 31.2 найдётся постоянная $\mu_* > 0$, не зависящая от t, μ и такая, что на множестве $0 \leq t \leq \bar{t}$, $0 < \mu \leq \mu_*$: 1) решение задачи (18.6) существует и единственно; 2) ряд, построенный методом двух параметров для задачи (18.6), сходится равномерно к решению задачи (18.6).

Из п. 19.2, 19.3 и условий 31.3, 31.4 следует, что задача (18.6) удовлетворяет условиям теоремы 31.3 при любых значениях $\bar{\mu} > 0$ и $\varkappa_1 = 0$, $C_1 = 1$, $\overset{\circ}{C_1} = 0$. По теореме 31.3 для любых значений $\bar{t} > 0$, χ, $0 \leq \chi < 1/2$, найдётся постоянная $\mu_* > 0$, не зависящая от t, μ и такая, что на множестве $0 \leq t \leq \bar{t}\mu^{-\chi}$, $0 < \mu \leq \mu_*$: 1) решение задачи (18.6) существует и единственно; 2) ряд, построенный методом двух параметров для задачи (18.6), сходится равномерно к решению задачи (18.6).

Отсюда видно, что теоремы 31.2, 31.3 не гарантируют существование решения задачи (18.6) при заданном значении μ ($\mu \approx 0{,}016$), так как значение μ_* в теоремах 31.2, 31.3 неизвестно.

21.2. Построение асимптотического решения

Чтобы к задаче (18.6) применить метод двух параметров, изложенный в §31, рассмотрим задачу с двумя малыми параметрами ε и μ:

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \eta_3, \qquad \frac{d\eta_2}{dt} = \eta_4, \tag{21.1}$$

$$\mu\frac{d\eta_3}{dt} = -a_1\eta_3 - \cos\left(\overset{\circ}{\beta} + \varepsilon\eta_2\right)\eta_4,$$

$$\mu\frac{d\eta_4}{dt} = \cos\left(\overset{\circ}{\beta} + \varepsilon\eta_2\right)\eta_3 - a_2\eta_4,$$

$$\eta_i|_{t=0} = 0, \quad i = 1, 2, 4; \qquad \eta_3|_{t=0} = 1.$$

Сравнивая (18.6) и (21.1), получаем:

$$\xi_i = \eta_i|_{\varepsilon=\mu}, \qquad i = \overline{1,4}.$$

Будем искать решение задачи (21.1) в виде

$$\eta_i = \eta_i^{(0)}(t) + \varepsilon\,\eta_i^{(1)}(t) + \cdots, \qquad i = \overline{1,4}. \tag{21.2}$$

При этом предполагаем, что a_1, a_2, β°, μ от ε не зависят. Подставим ряды (21.2) в уравнения (21.1), разложим левые и правые части уравнений в ряды по степеням ε и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим следующие уравнения для функций $\eta_i^{(k)}(t)$ при $k = 0$:

$$\frac{d\eta_1^{(0)}}{dt} = \eta_3^{(0)}, \qquad \frac{d\eta_2^{(0)}}{dt} = \eta_4^{(0)},$$

$$\mu\frac{d\eta_3^{(0)}}{dt} = -a_1\eta_3^{(0)} - \cos\beta^\circ\,\eta_4^{(0)},$$

$$\mu\frac{d\eta_4^{(0)}}{dt} = \cos\beta^\circ\,\eta_3^{(0)} - a_2\eta_4^{(0)},$$

$$\eta_i^{(0)}(0) = 0, \;\; i = 1, 2, 4; \quad \eta_3^{(0)}(0) = 1.$$

Решение уравнений имеет вид

$$\eta_1^{(0)} = \mu e^{-\delta\tau}(b_3\cos\omega\tau + b_4\sin\omega\tau) - b_3\mu, \tag{21.3}$$

$$\eta_2^{(0)} = \mu e^{-\delta\tau}(b_5\cos\omega\tau + b_6\sin\omega\tau) - b_5\mu,$$

$$\eta_3^{(0)} = e^{-\delta\tau}(\cos\omega\tau + b_1\sin\omega\tau),$$

$$\eta_4^{(0)} = b_2 e^{-\delta\tau}\sin\omega\tau, \qquad \tau = t\mu^{-1},$$

где δ, ω, b_i задаются формулами (19.5). Отсюда и из (19.6) следует, что

$$\eta_i^{(0)} = \xi_{1i}, \qquad i = \overline{1,4}.$$

Таким образом, нулевое приближение решения задачи (18.6), полученное методом двух параметров, совпадает с первым приближением решения задачи (18.6), построенным методом пограничных функций:

$$Z_0(t,\mu) = X_1(t,\mu), \qquad\qquad Z_0(t,\mu) = \left(\eta_1^{(0)}, \dots, \eta_4^{(0)}\right),$$

$X_1(t,\mu)$ задано формулами (19.6).

21.3. Применение теорем 31.4, 31.5

Из п. 19.2 следует, что задача (18.6) удовлетворяет условиям теоремы 31.4 при любых значениях $n \geq 0$, $\bar{t} > 0$, $\bar{\mu} > 0$. По теореме 31.4 для любых $n \geq 0$, $\bar{t} > 0$ найдутся постоянные $\mu_* > 0$, C_*, не зависящие от t, μ и такие, что решение задачи (18.6) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|x(t,\mu) - Z_n(t,\mu)\| \leq C_* \mu^{n+1}$$

при $0 \leq t \leq \bar{t}$, $0 < \mu \leq \mu_*$. Здесь и дальше $Z_n(t,\mu)$ – частичная сумма ряда, построенного для задачи (18.6) методом двух параметров.

Из п. 19.2, п. 19.3 следует, что задача (18.6) удовлетворяет условиям теоремы 31.5 при любых значениях $n \geq 0$, $\bar{\mu} > 0$ и $\varkappa_1 = 0$, $C_1 = 1$, $\mathring{C}_1 = 0$. По теореме 31.5 для любых $n \geq 0$, $\bar{t} > 0$, χ, $0 \leq \chi < 1/2$, найдутся $\mu_* > 0$, C_*, $\mathring{C}_* \geq 0$, не зависящие от t, μ и такие, что решение задачи (18.6) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|x(t,\mu) - Z_n(t,\mu)\| \le \mu^{n+1}\left(\overset{\circ}{C}_* t^{2n+1} + C_*\right)$$

при $0 \le t \le \bar{t}\mu^{-\chi}$, $0 < \mu \le \mu_*$.

Отсюда видно, что теоремы 31.4, 31.5 не гарантируют существование решения задачи (18.6) при заданном значении μ ($\mu \approx 0{,}016$), так как значение μ_* в теоремах 31.4, 31.5 неизвестно.

Отметим ещё, что для задачи (18.6) оценки остаточного члена асимптотики в теоремах 31.4, 31.5 и в теоремах 30.2, 30.3 не совпадают, хотя $Z_0(t,\mu) = X_1(t,\mu)$:

$$\|x(t,\mu) - Z_0(t,\mu)\| \le C_*\mu, \qquad \|x(t,\mu) - Z_0(t,\mu)\| \le \mu\left(\overset{\circ}{C}_* t + C_*\right),$$

$$\|x(t,\mu) - X_1(t,\mu)\| \le C_*\mu^2, \quad \|x(t,\mu) - X_1(t,\mu)\| \le \mu^2\left(\overset{\circ}{C}_* t^3 + C_*\right)$$

(смотрите п. 19.3). Постоянные μ_*, C_*, $\overset{\circ}{C}_*$ для метода пограничных функций и метода двух параметров, вообще говоря, различны.

21.4. Применение теоремы 31.6

Вычислим для задачи (18.6) функции F_i' по формулам (31.13):

$$F_1'(u,t,\mu,\varepsilon) = u_3, \qquad F_2'(u,t,\mu,\varepsilon) = u_4,$$

$$F_3'(u,t,\mu,\varepsilon) = -a_1 u_3 - \cos\left(\beta^\circ + \varepsilon u_2 + \varepsilon\eta_2^{(0)}\right)u_4 +$$
$$+\left[\cos\left(\beta^\circ + \varepsilon\eta_2^{(0)}\right) - \cos\left(\beta^\circ + \varepsilon u_2 + \varepsilon\eta_2^{(0)}\right)\right]\eta_4^{(0)},$$

$$F_4'(u,t,\mu,\varepsilon) = \cos\left(\beta^\circ + \varepsilon u_2 + \varepsilon\eta_2^{(0)}\right)u_3 - a_2 u_4 -$$
$$-\left[\cos\left(\beta^\circ + \varepsilon\eta_2^{(0)}\right) - \cos\left(\beta^\circ + \varepsilon u_2 + \varepsilon\eta_2^{(0)}\right)\right]\eta_3^{(0)}.$$

Здесь $\eta_j^{(0)} = \eta_j^{(0)}(t,\mu)$ – функции (21.3), $j = \overline{2,4}$.

Из формул видно, что функции $F_i'(u,t,\mu,\varepsilon)$ аналитичны по u, ε при $u \in \mathbf{C}^4$, $\varepsilon \in \mathbf{C}$. Отсюда и из п. 19.2 следует, что задача (18.6) удовлетворяет условиям теоремы 31.6 при любых значениях $\delta_u > 0$, $\bar{t} > 0$, $\mu_* > 0$. По теореме 31.6 для любого значения $\mu > 0$ найдётся такое значение $t_* = t_*(\mu) > 0$, что на множестве $0 \le t < t_*$: 1) решение задачи (18.6) существует и единственно; 2) ряд, построенный методом двух параметров для задачи (18.6), сходится к решению задачи (18.6). Сходимость равномерная на отрезке $[0,t']$ при любом $t' < t_*$.

Таким образом, теорема 31.6 гарантирует существование и единственность решения задачи (18.6) при фиксированном значении μ: $\mu \approx 0{,}016$. Теорема утверждает также, что решение можно построить в виде сходящегося ряда методом двух параметров. Оценка интервала времени при этом не даётся.

Построить весь сходящийся ряд для задачи (18.6) не представляется возможным. Ограничимся нулевым приближением $Z_0(t,\mu)$.

21.5. Оценка остаточного члена и интервала времени

Так как $Z_0(t,\mu)$ совпадает с первым приближением решения $X_1(t,\mu)$, построенным методом пограничных функций, то оценка остаточного члена $[x - Z_0(t,\mu)]$, оценка интервала времени и оценка значений малого параметра – все оценки совпадают с соответствующими оценками, полученными в п. 19.5. Таким образом, для переменных T, α, β, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ результаты, полученные методом двух параметров, совпадают с результатами п. 19.6.

Замечание 21.1. В данном параграфе β° – параметр, не зависящий от t, μ, ε. В §20 β° рассматривается как функция μ, в §22 β° рассматривается как функция ε.

§22. Модификация метода двух параметров

22.1. Построение асимптотического решения

Если строить более точное (чем в §21) асимптотическое решение задачи (21.1) методом двух параметров, то можно убедиться, что оно содержит секулярные члены (порядка ε^k, $k \geq 1$) – слагаемые, содержащие множителем переменную t. Секулярные члены можно исключить из асимптотики, если рассмотреть β° как функцию ε (аналогично тому, как в §20 β° рассматривалась в виде функции μ). Положим

$$\beta^\circ = \tilde{\beta}^{(0)} + \widetilde{\Delta\beta} \cdot \varepsilon, \tag{22.1}$$

где $\tilde{\beta}^{(0)}$ – искомая постоянная, не зависящая от t, ε; $\widetilde{\Delta\beta}$ – искомая гладкая функция ε, не зависящая от t. Решение задачи (21.1), (22.1) будем искать в виде

$$\eta_i = \tilde{\eta}_i^{(0)}(t) + \varepsilon\, \tilde{\eta}_i^{(1)}(t) + \cdots, \qquad i = \overline{1,4}.$$

Для $\tilde{\eta}_i^{(0)}$ имеем:

$$\frac{d\tilde{\eta}_1^{(0)}}{dt} = \tilde{\eta}_3^{(0)}, \qquad \frac{d\tilde{\eta}_2^{(0)}}{dt} = \tilde{\eta}_4^{(0)},$$

$$\mu \frac{d\tilde{\eta}_3^{(0)}}{dt} = -a_1 \tilde{\eta}_3^{(0)} - \cos\tilde{\beta}^{(0)}\ \tilde{\eta}_4^{(0)},$$

$$\mu \frac{d\tilde{\eta}_4^{(0)}}{dt} = \cos\tilde{\beta}^{(0)}\ \tilde{\eta}_3^{(0)} - a_2 \tilde{\eta}_4^{(0)},$$

$$\tilde{\eta}_i^{(0)}(0) = 0, \quad i = 1, 2, 4; \qquad \tilde{\eta}_3^{(0)}(0) = 1.$$

Решение уравнений является асимптотическим решением задачи (18.6) порядка $\varepsilon^0 = 1$. Решение имеет вид

$$\tilde{Z}_0 = \left(\tilde{\eta}_1^{(0)}, \dots , \tilde{\eta}_4^{(0)}\right); \tag{22.2}$$

$$\tilde{\eta}_1^{(0)} = \mu e^{-\delta\tau}\left(\tilde{b}_3 \cos\widetilde{\omega}\tau + \tilde{b}_4 \sin\widetilde{\omega}\tau\right) - \tilde{b}_3\mu,$$

$$\tilde{\eta}_2^{(0)} = \mu e^{-\delta\tau}\left(\tilde{b}_5 \cos\widetilde{\omega}\tau + \tilde{b}_6 \sin\widetilde{\omega}\tau\right) - \tilde{b}_5\mu,$$

$$\tilde{\eta}_3^{(0)} = e^{-\delta\tau}\left(\cos\widetilde{\omega}\tau + \tilde{b}_1 \sin\widetilde{\omega}\tau\right),$$

$$\tilde{\eta}_4^{(0)} = \tilde{b}_2 e^{-\delta\tau} \sin\widetilde{\omega}\tau, \qquad \tau = t\mu^{-1},$$

где δ, $\widetilde{\omega}$, $\tilde{b}_i$ задаются формулами (20.4), в которых нужно положить $\beta^{(0)} = \widetilde{\beta}^{(0)}$. Из (22.2), (20.6) следуют равенства

$$\tilde{\eta}_i^{(0)} = \tilde{\xi}_i\Big|_{\beta^{(0)}=\widetilde{\beta}^{(0)}}, \quad i = \overline{1,4}; \quad \tilde{Z}_0 = \tilde{X}_1\Big|_{\beta^{(0)}=\widetilde{\beta}^{(0)}},$$

где $\tilde{X}_1$ – асимптотическое решение задачи (18.6), полученное модифицированным методом пограничных функций в §20.

В формулах (22.2) осталась неопределённой постоянная $\widetilde{\beta}^{(0)}$. Эта постоянная определяется при оценке остаточного члена асимптотического разложения решения.

22.2. Оценка остаточного члена и интервала времени

Так как $\tilde{Z}_0$ и $\tilde{X}_1$ совпадают с точностью до искомой постоянной, то исследование остаточного члена $\left(x - \tilde{Z}_0\right)$ аналогично исследованию в п. 20.2. При этом в формуле (22.1) нужно положить $\varepsilon = \mu$. В результате получаем: $\widetilde{\beta}^{(0)} = \beta^{(0)}$, где $\beta^{(0)}$ – решение уравнения (20.9); $\widetilde{\Delta\beta}\Big|_{\varepsilon=\mu} = \mu\tilde{b}_5$; $x - \tilde{Z}_0 = x - \tilde{X}_1 = \tilde{u}$, где $\tilde{u}$ – остаточный член (20.7). Таким образом, результаты, полученные модифицированным методом двух параметров, совпадают с результатами п. 20.3.

§23. Применение второго метода Ляпунова

23.1. Введение функции Ляпунова

Решение задачи (18.6) можно оценить, используя второй метод Ляпунова, изложенный в п. 30.8. Для этого рассмотрим следующую функцию Ляпунова:

$$\Lambda = \frac{\xi_3^2+\xi_4^2}{2}. \tag{23.1}$$

Найдём производную по времени этой функции в силу системы (18.6):

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \xi_3 \frac{d\xi_3}{dt} + \xi_4 \frac{d\xi_4}{dt} = -\mu^{-1}(a_1\xi_3^2 + a_2\xi_4^2). \tag{23.2}$$

23.2. Применение теоремы 30.5

Проверим выполнение условий теоремы 30.5 для задачи (18.6).

1) Из (18.7) следует, что функции $F_i(x,t,\mu)$, $i = 1, 2$, не зависят от t и аналитичны по x на всём пространстве $x \in \mathbf{R}^4$ при любом значении μ. Поэтому условие 1 теоремы 30.5 выполняется при любых значениях $\delta_x > 0$, $\bar{\mu} > 0$.

2а) Из (23.2) следует, что производная функции Ляпунова в силу системы (18.6) существует и неположительна при $x \in \mathbf{R}^4$, $\mu > 0$. Поэтому условие 2а теоремы 30.5 выполняется при любых значениях $\delta_x > 0$, $\bar{\mu} > 0$.

2б) Обозначим $\bar{x} = (\xi_3, \xi_4)$. Тогда при $\|\bar{x}\| = \delta_x$ из (23.1) следуют соотношения

$$\Lambda \geq \frac{1}{2}[\max(|\xi_3|,|\xi_4|)]^2 = \frac{\|\bar{x}\|^2}{2} = \frac{\delta_x^2}{2}.$$

Поэтому условие 2б теоремы 30.5 выполняется при любых значениях $\delta_x > 0$, $\bar{\mu} > 0$, $\rho = \delta_x^2/2$.

Как следует из (18.7), (23.1), множество (30.19) для задачи (18.6) имеет вид

$$0 < \mu \le \bar{\mu}, \qquad \delta_x > 1, \qquad \rho = \frac{\delta_x^2}{2} > \frac{1}{2},$$

то есть,

$$0 < \mu \le \bar{\mu}, \qquad \delta_x > 1.$$

Это множество значений μ не пусто, если $\bar{\mu} > 0$, $\delta_x > 1$. Поэтому задача (18.6) и функция (23.1) удовлетворяют условиям теоремы 30.5 при любых значениях $\delta_x > 1$, $\bar{\mu} > 0$ и $\rho = \delta_x^2/2$.

По теореме 30.5 для любых значений $\mu > 0$, $\delta_x > 1$ решение задачи (18.6) существует, единственно и удовлетворяет неравенствам

$$|\xi_3(t,\mu)| < \delta_x, \qquad |\xi_4(t,\mu)| < \delta_x$$

при $0 \le t \le t_*$, где $t_* = t_*(\mu) > 0$.

23.3. Существование решения на полуоси $t \ge 0$

Из (23.2) следуют неравенства, справедливые на отрезке $[0, t_*]$:

$$\frac{d\Lambda}{dt} \le -\mu^{-1} \min(a_1, a_2) \cdot (\xi_3^2 + \xi_4^2) = -2K_0\Lambda.$$

$$\Lambda \le \Lambda^{\circ} \exp(-2K_0 t), \qquad K_0 = \mu^{-1} \min(a_1, a_2).$$

Здесь Λ° – значение Λ при $t = 0$, $\Lambda^{\circ} = 1/2$. Отсюда и из (18.6), (23.1) получаем неравенства для переменных ξ_i на отрезке $[0, t_*]$:

$$|\xi_{j+2}| \le \sqrt{2\Lambda} \le \exp(-K_0 t), \qquad \xi_j = \int_0^t \xi_{j+2}(s)ds, \qquad (23.3)$$

$$|\xi_j| \le \int_0^t |\xi_{j+2}(s)| ds \le K_0^{-1}[1 - \exp(-K_0 t)], \quad j = 1, 2.$$

Зафиксируем значение $\mu > 0$ и значение δ_x из множества

$$\delta_x > 1, \qquad \delta_x > K_0^{-1} = \frac{\mu}{\min(a_1, a_2)}. \tag{23.4}$$

Задача (18.6) удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. По этой теореме существует такое значение $\bar{t} > 0$, что при $0 \le t \le \bar{t}$ решение задачи (18.6) существует, единственно, непрерывно дифференцируемо по t и удовлетворяет неравенству $\|x\| \le \delta_x$.

Предположим, что $\bar{t} < \infty$. Тогда $\|x(\bar{t})\| = \delta_x$ (иначе решение можно было бы продолжить). Для $t = \bar{t}$ из (23.3), (23.4) следуют соотношения

$$\begin{aligned} \delta_x = \|x(\bar{t})\| = \max_{i=\overline{1,4}} |\xi_i(\bar{t})| \le \\ \le \max\{\exp(-K_0\bar{t}),\ K_0^{-1}[1 - \exp(-K_0\bar{t})]\} < \\ < \max(1, K_0^{-1}) < \delta_x. \end{aligned}$$

Получили противоречие, из которого следует, что решение задачи (18.6) существует и единственно при $t \ge 0$.

Сформулируем полученные результаты для переменных α, β, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, используя формулы (18.3) и неравенства (23.3).

23.4 Результаты

23.4.1. Решение задачи (18.1), (18.2) существует и единственно при $T \ge 0$.

23.4.2. При $T \ge 0$ справедливы неравенства

$$\left|\alpha - \alpha^{\circ}\right| \le \frac{\dot{\alpha}^{\circ}}{K}(1 - e^{-KT}), \tag{23.5}$$

$$\left|\beta-\beta^{\circ}\right| \le \frac{\dot{\alpha}^{\circ}}{K}\sqrt{\frac{A+A_1+A_2}{A+B_1}}\left(1-e^{-KT}\right),$$

$$|\dot{\alpha}| \le \dot{\alpha}^{\circ} e^{-KT}, \qquad \left|\dot{\beta}\right| \le \dot{\alpha}^{\circ}\sqrt{\frac{A+A_1+A_2}{A+B_1}}\, e^{-KT},$$

$$K=\min\left(\frac{n_1}{A+A_1+A_2},\frac{n_2}{A+B_1}\right) \approx 394\text{с}^{-1}.$$

23.4.3. При $0 \le T \le 15\text{с}$ справедливы оценки

$$\left|\alpha-\alpha^{\circ}\right| \le 1{,}747', \qquad \left|\beta-\beta^{\circ}\right| \le 3{,}037', \tag{23.6}$$

$$|\dot{\alpha}| \le 0{,}2\text{с}^{-1}, \qquad \left|\dot{\beta}\right| \le 0{,}348\text{с}^{-1}.$$

Неравенства (23.6) следуют из (23.5) при подстановке численных значений (18.2).

§24. Соединение метода пограничных функций и метода двух параметров со вторым методом Ляпунова

24.1. Оценка остаточного члена на полуоси $t \ge 0$

Из результатов §23 и из формул (20.6), (20.7), (23.3) следует, что решение задачи (18.6) существует на всей полуоси $t \ge 0$ и удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\tilde{u}=x-\tilde{X}_1, \qquad \tilde{u}=\left(\tilde{\zeta}_1,\tilde{\zeta}_2,\tilde{\zeta}_3,\tilde{\zeta}_4\right),$$

$$\left|\tilde{\zeta}_i\right|=\left|\xi_i-\tilde{\xi}_i\right| \le |\xi_i|+\left|\tilde{\xi}_i\right|, \qquad i=\overline{1,4};$$

$$\left|\tilde{\zeta}_1\right| \le K_0^{-1}[1-\exp(-K_0 t)]+$$

$$+\left|\mu e^{-\delta\tau}\left(\tilde{b}_3\cos\tilde{\omega}\tau+\tilde{b}_4\sin\tilde{\omega}\tau\right)-\tilde{b}_3\mu\right| \le$$

$$\le K_0^{-1} + \left|\tilde b_3\right|\mu + \mu e^{-\delta\tau}\sqrt{\tilde b_3^2 + \tilde b_4^2},$$

$$\left|\tilde\zeta_2\right| \le K_0^{-1}[1 - \exp(-K_0 t)] +$$

$$+\left|\mu e^{-\delta\tau}\left(\tilde b_5 \cos\tilde\omega\tau + \tilde b_6 \sin\tilde\omega\tau\right) - \tilde b_5\mu\right| \le$$

$$\le K_0^{-1} + \left|\tilde b_5\right|\mu + \mu e^{-\delta\tau}\sqrt{\tilde b_5^2 + \tilde b_6^2},$$

$$\left|\tilde\zeta_3\right| \le \exp(-K_0 t) + \left|e^{-\delta\tau}\left(\cos\tilde\omega\tau + \tilde b_1 \sin\tilde\omega\tau\right)\right| \le$$

$$\le \exp(-\delta_0\tau) + e^{-\delta\tau}\sqrt{1 + \tilde b_1^2},$$

$$\left|\tilde\zeta_4\right| \le \exp(-K_0 t) + \left|\tilde b_2 e^{-\delta\tau}\sin\tilde\omega\tau\right| \le \exp(-\delta_0\tau) + \tilde b_2 e^{-\delta\tau}.$$

Здесь $\tilde{\xi}_i$ – функции (20.6); за δ_0 принято значение

$$\delta_0 = \min(a_1, a_2, \delta/2); \qquad K_0 = \mu^{-1}\min(a_1, a_2\,). \qquad (24.1)$$

Таким образом, при $t \ge 0$ справедливы неравенства

$$\left|\tilde\zeta_j(t)\right| \le Q_{j0}^{(n-1)} + Q_{j1}^{(n-1)}\exp(-\delta_0\tau) + Q_{j2}^{(n-1)}\exp(-\delta\tau), \quad (24.2)$$

$$\left|\tilde\zeta_k(t)\right| \le Q_{k1}^{(n-1)}\exp(-\delta_0\tau) + Q_{k2}^{(n-1)}\exp(-\delta\tau),$$

$$j = 1, 2; \quad k = 3, 4; \quad \tau = t\mu^{-1},$$

где $n = 1$, $Q_{il}^{(0)}$ – постоянные, не зависящие от t:

$$Q_{10}^{(0)} = K_0^{-1} + \left|\tilde b_3\right|\mu, \quad Q_{11}^{(0)} = 0, \quad Q_{12}^{(0)} = \mu\sqrt{\tilde b_3^2 + \tilde b_4^2}, \quad (24.3)$$

$$Q_{20}^{(0)} = K_0^{-1} + \left|\tilde b_5\right|\mu, \quad Q_{21}^{(0)} = 0, \quad Q_{22}^{(0)} = \mu\sqrt{\tilde b_5^2 + \tilde b_6^2},$$

$$Q_{31}^{(0)} = 1, \qquad Q_{32}^{(0)} = \sqrt{1 + \tilde{b}_1^2},$$

$$Q_{41}^{(0)} = 1, \qquad Q_{42}^{(0)} = \tilde{b}_2.$$

Предположим, что для некоторого значения $n \geq 1$ при $t \geq 0$ справедливы неравенства (24.2). Тогда при $t \geq 0$ справедливы неравенства, которые получаются, если в правые части (20.10) вместо $\left|\tilde{\zeta}_i\right|$ подставить функции, стоящие справа в неравенствах (24.2). После вычисления интегралов, используя соотношения

$$\exp(-a\tau) - \exp(-b\tau) \leq \exp(-a\tau) \qquad \text{при} \quad 0 \leq a < b,$$

$$\tau \exp(-\delta\tau) \leq (\delta - \delta_0)^{-1} \exp(-1 - \delta_0\tau) \ \text{ при } \quad \delta > \delta_0,$$

$$\exp(-2\delta_0\tau) - \exp(-\delta\tau) \leq \frac{\delta - 2\delta_0}{\delta_0}\left(\frac{\delta_0}{\delta - \delta_0}\right)^{(\delta-\delta_0)/(\delta-2\delta_0)} e^{-\delta_0\tau}$$

$$\text{при } \ \delta > 2\delta_0,$$

из (20.10), (24.2) получим неравенства на полуоси $t \geq 0$:

$$\left|\tilde{\zeta}_j(t)\right| \leq Q_{j0}^{(n)} + Q_{j1}^{(n)} \exp(-\delta_0\tau) + Q_{j2}^{(n)} \exp(-\delta\tau), \tag{24.4}$$

$$\left|\tilde{\zeta}_k(t)\right| \leq Q_{k1}^{(n)} \exp(-\delta_0\tau) + Q_{k2}^{(n)} \exp(-\delta\tau),$$

$$j = 1, 2; \quad k = 3, 4; \qquad \tau = t\mu^{-1}.$$

Здесь $Q_{il}^{(n)}$ – постоянные, которые выражаются через $Q_{il}^{(n-1)}$ по формулам

$$Q_{j0}^{(n)} = Q_1(q_{j1}, q_{j2}), \tag{24.5}$$

$$Q_{1l}^{(n)} = \frac{\mu}{\delta^2 + \tilde{\omega}^2}\left[a_2\, Q_{3l}^{(n-1)} + \cos\beta^{(0)} Q_{4l}^{(n-1)}\right],$$

$$Q_{2l}^{(n)} = \frac{\mu}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}\left[\cos\beta^{(0)}\, Q_{3l}^{(n-1)} + a_1 Q_{4l}^{(n-1)}\right],$$

$$Q_{k1}^{(n)} = Q_2(q_{k1}, q_{k2}),$$

$$Q_{k2}^{(n)} = Q_3(q_{k1}, q_{k2}), \quad j = 1, 2; \quad k = 3, 4; \quad l = 1, 2;$$

$$Q_1(q_1, q_2) = Q_{20}^{(n-1)}\left(\frac{q_1}{\delta_0} + \frac{q_2}{\delta}\right) + Q_{21}^{(n-1)}\left(\frac{q_1}{2\delta_0} + \frac{q_2}{\delta_0+\delta}\right) + \\ + \left[Q_{22}^{(n-1)} + \mu\sqrt{\tilde{b}_5^2 + \tilde{b}_6^2}\,\right]\left(\frac{q_1}{\delta_0+\delta} + \frac{q_2}{2\delta}\right),$$

$$Q_2(q_1, q_2) = \frac{1}{\delta-\delta_0}\left(q_1 + \frac{q_2}{e}\right) Q_{20}^{(n-1)} + q q_1 Q_{21}^{(n-1)},$$

$$Q_3(q_1, q_2) = \frac{q_2}{\delta_0} Q_{21}^{(n-1)} + \left[Q_{22}^{(n-1)} + \mu\sqrt{\tilde{b}_5^2 + \tilde{b}_6^2}\,\right]\cdot\left(\frac{q_1}{\delta_0} + \frac{q_2}{\delta}\right),$$

$$q_{11} = \frac{\mu^2 f_*}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}\left[\cos\beta^{(0)}\, Q_{31}^{(n-1)} + a_2 Q_{41}^{(n-1)}\right],$$

$$q_{12} = \frac{\mu^2 f_*}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}\left[\cos\beta^{(0)}\, Q_{32}^{(n-1)} + a_2 Q_{42}^{(n-1)} + \right. \\ \left. + \sqrt{\cos^2\beta^{(0)} + \left(\tilde{b}_1\cos\beta^{(0)} + a_2\tilde{b}_2\right)^2}\,\right],$$

$$q_{21} = \frac{\mu^2 f_*}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}\left[a_1 Q_{31}^{(n-1)} + \cos\beta^{(0)}\, Q_{41}^{(n-1)}\right],$$

$$q_{22} = \frac{\mu^2 f_*}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}\left[a_1 Q_{32}^{(n-1)} + \cos\beta^{(0)}\, Q_{42}^{(n-1)} + \right. \\ \left. + \sqrt{a_1^2 + \left(a_1\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2\cos\beta^{(0)}\right)^2}\,\right],$$

$$q_{31} = \mu f_* \left[\tilde{b}_2 Q_{31}^{(n-1)} + \sqrt{1+\tilde{b}_1^2}\, Q_{41}^{(n-1)}\right],$$

$$q_{32} = \mu f_* \left[\tilde{b}_2 Q_{32}^{(n-1)} + \sqrt{1+\tilde{b}_1^2}\, Q_{42}^{(n-1)} + \tilde{b}_1\tilde{b}_2 + \tilde{b}_2\sqrt{1+\tilde{b}_1^2}\,\right],$$

$$q_{41} = \mu f_* \left[\sqrt{1+\tilde{b}_1^2}\, Q_{31}^{(n-1)} + \tilde{b}_2 Q_{41}^{(n-1)}\right],$$

$$q_{42} = \mu f_* \left[\sqrt{1+\tilde{b}_1^2}\, Q_{32}^{(n-1)} + \tilde{b}_2 Q_{42}^{(n-1)} + \tfrac{1}{2}\left(1+\tilde{b}_1^2+\tilde{b}_2^2\right) + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(1-\tilde{b}_1^2-\tilde{b}_2^2\right)^2 + 4\tilde{b}_1^2}\,\right],$$

$$q = \begin{cases} [(\delta-\delta_0)e]^{-1} \text{ при } \delta = 2\delta_0, \\ \delta_0^{-1}[\delta_0/(\delta-\delta_0)]^{(\delta-\delta_0)/(\delta-2\delta_0)} \text{ при } \delta > 2\delta_0, \end{cases}$$

$$f_* = \max\left|\sin\left(\beta^{(0)}+\zeta\right)\right| \text{ при}$$

$$|\zeta| \le \mu\left[Q_{20}^{(n-1)} + Q_{21}^{(n-1)} + Q_{22}^{(n-1)}\right] + \mu^2\sqrt{\tilde{b}_5^2+\tilde{b}_6^2}.$$

Неравенства (24.4) совпадают с (24.2), если в (24.2) заменить n на $(n+1)$. Так как (24.2) выполняются при $n=1$, то по индукции получаем: при любом $n \ge 0$ на полуоси $t \ge 0$ справедливы неравенства (24.4), где коэффициенты $Q_{il}^{(n)}$ вычисляются по формулам (24.3) при $n=0$ и по рекуррентным формулам (24.5) при $n \ge 1$. Числа δ, $\widetilde{\omega}$, $\tilde{b}_k$, δ_0, K_0 определяются по формулам (20.4), (24.1); $\beta^{(0)}$ – корень уравнения (20.9).

Вычисляя коэффициенты $Q_{il}^{(n)}$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$ и переходя к переменным α, β, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ (с помощью формул (18.3), (20.6), (20.7) и неравенств (24.4)), получим следующие результаты.

24.2 Результаты

24.2.1. При $T \geq 0$ решение задачи (18.1), (18.2) существует, единственно и удовлетворяет неравенствам

$$|\alpha - \tilde{\alpha}| \leq (2{,}57 + 8{,}92\, e^{-\varDelta T}) \cdot 10^{-8}, \tag{24.6}$$

$$|\beta - \tilde{\beta}| \leq (0{,}26 + 1{,}04\, e^{-\varDelta T}) \cdot 10^{-7},$$

$$|\dot{\alpha} - \dot{\tilde{\alpha}}| \leq (5e^{-\varDelta_0 T} + 70337\, e^{-\varDelta T}) \cdot 10^{-9}\ \text{с}^{-1},$$

$$|\dot{\beta} - \dot{\tilde{\beta}}| \leq (9e^{-\varDelta_0 T} + 122309\, e^{-\varDelta T}) \cdot 10^{-9}\ \text{с}^{-1},$$

где $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \dot{\tilde{\alpha}}, \dot{\tilde{\beta}}, \varDelta$ – функции и параметр в (20.18),

$$\varDelta_0 = \min\left(\frac{n_1}{A+A_1+A_2}, \frac{n_2}{A+B_1}, \frac{\varDelta}{2}\right) \approx 393{,}701\text{с}^{-1}. \tag{24.7}$$

Отметим, что в (24.6) использовано неравенство $e^{-\varDelta_0 T} \leq 1$.

24.2.2. При $T \geq 0$ справедливы оценки

$$|\alpha - \tilde{\alpha}| \leq 0{,}024'', \qquad |\beta - \tilde{\beta}| \leq 0{,}027'',$$

$$|\dot{\alpha} - \dot{\tilde{\alpha}}| \leq 7{,}04 \cdot 10^{-5}\ \text{с}^{-1}, \qquad |\dot{\beta} - \dot{\tilde{\beta}}| \leq 1{,}23 \cdot 10^{-4}\ \text{с}^{-1},$$

которые следуют из (24.6).

§25. Движение гироскопа в кардановом подвесе и регулярно возмущённая задача Коши

25.1. Проверка условий теорем 32.1, 32.2

Перейдём от задачи Тихонова (18.6) к регулярно возмущённой задаче Коши. Для этого в уравнениях (18.6) в качестве независимой переменной рассмотрим быстрое время τ. Уравнения примут вид

$$\frac{d\xi_1}{d\tau} = \mu\xi_3, \quad \frac{d\xi_2}{d\tau} = \mu\xi_4, \tag{25.1}$$

$$\frac{d\xi_3}{d\tau} = -a_1\xi_3 - \cos\left(\beta^\circ + \mu\xi_2\right)\xi_4,$$

$$\frac{d\xi_4}{d\tau} = \cos\left(\beta^\circ + \mu\xi_2\right)\xi_3 - a_2\xi_4,$$

$$\xi_i|_{\tau=0} = 0, \quad i = 1, 2, 4; \qquad \xi_3|_{\tau=0} = 1.$$

Получили регулярно возмущённую задачу Коши с малым параметром μ. Решение задачи строится в виде ряда Пуанкаре

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x^{(n)}(\tau)\,\mu^n, \qquad x = (\xi_1, \dots, \xi_4), \qquad \tau = t\mu^{-1}. \tag{25.2}$$

Проверим условия теорем 32.1, 32.2 для задач (18.6), (25.1).

1) Из (25.1), (32.2) следуют формулы:

$$F_1(x,\mu) = x_2; \tag{25.3}$$

$$F_{21}(x,\mu) = -a_1\xi_3 - \cos\left(\beta^\circ + \mu\xi_2\right)\xi_4;$$

$$F_{22}(x,\mu) = \cos\left(\beta^\circ + \mu\xi_2\right)\,\xi_3 - a_2\xi_4;$$

$$x_1 = (\xi_1, \xi_2); \quad x_2 = (\xi_3, \xi_4);$$

$$F_1(0,0) = 0; \qquad F_2(0,0) = 0;$$

$$\overset{\circ}{x}_1(\mu) = (\xi_1, \xi_2)|_{\tau=0} = 0;$$

$$\overset{\circ}{x}_2(\mu) = (\xi_3, \xi_4)|_{\tau=0} = (1,0).$$

Поэтому условие 32.1 выполняется.

2) Из формул (25.3) следует, что $F_1(x,\mu)$, $F_2(x,\mu)$ аналитичны при $x \in \mathbf{C}^4$, $\mu \in \mathbf{C}$. Поэтому условие 32.2 выполняется при любой окрестности $\mathbf{C}(D_x)$ точки $x = 0$ в пространстве $\mathbf{C}^4$ и любом значении $\bar{\mu} > 0$.

3) Из формул (25.3) следует, что $\overset{\circ}{x}_1(\mu)$, $\overset{\circ}{x}_2(\mu)$ не зависят от μ, поэтому условие 32.3 выполняется при любом значении $\bar{\mu} > 0$.

4) Из (19.7), (25.3) следует, что

$$\Psi(x,0) = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)^{-1}(x,0) = \frac{1}{a_1 a_2 + \cos^2 \beta^\circ}\begin{pmatrix} -a_2 & \cos\beta^\circ \\ -\cos\beta^\circ & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому условие 32.4 выполняется при любой окрестности D_x точки $x = 0$ в пространстве $\mathbf{R}^4$.

5а) Собственные числа матрицы

$$A_{2*} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(0,0) = \begin{pmatrix} -a_1 & -\cos\beta^\circ \\ \cos\beta^\circ & -a_2 \end{pmatrix}$$

равны $\lambda_1 =-\delta + i\omega$, $\lambda_2 =-\delta - i\omega$, где δ, ω – значения (19.5). Поэтому условие 32.5а выполняется.

5б) Уравнение (32.5) для задач (18.6), (25.1) имеет вид

$$\frac{dr_2}{d\tau} = A_{2*} r_2. \qquad (25.4)$$

Так как собственные числа матрицы A_{2*} лежат в левой полуплоскости, то областью влияния нулевого решения уравнения (25.4) является вся плоскость $\mathbf{R}^2 \ni \overset{\circ}{r}_2 = r_2|_{\tau=0}$. Поэтому условие 32.5б выполняется.

6) Уравнение (25.4) с начальным условием $\overset{\circ}{r_2} = (1, 0)$ имеет решением функцию

$$y_2^{(0)}(\tau) = \left(e^{-\delta\tau}(\cos\omega\tau + b_1 \sin\omega\tau), b_2 e^{-\delta\tau} \sin\omega\tau\right),$$

где b_1, b_2, δ, ω – значения (19.5). Поэтому множество $D_x^{(0)}$ имеет вид

$$D_x^{(0)} = \{x: x = \left(0, 0, \ \theta e^{-\delta\tau}(\cos\omega\tau + b_1 \sin\omega\tau), \theta b_2 e^{-\delta\tau} \sin\omega\tau\right);$$
$$\tau \geq 0; \quad 0 \leq \theta \leq 1\}.$$

Отсюда следует, что условие 32.6 выполняется, если за D_x взять, например, множество

$$D_x = \left\{x: |x_1| < \bar{C}_1, \ |x_2| < \bar{C}_2, \ |x_3| < \bar{C}_3\sqrt{1 + b_1^2}, \ |x_4| < b_2\bar{C}_4 \right\},$$

где $\bar{C}_i$ – произвольные постоянные, $\bar{C}_1 > 0$, $\bar{C}_2 > 0$, $\bar{C}_3 > 1$, $\bar{C}_4 > 1$.

25.2. Применение теорем 32.1, 32.2

Из п. 25.1 следует, что условия теоремы 32.1 для задачи (18.6) выполняются при любом значении $\bar{\mu} > 0$. По теореме 32.1 для любого значения $\bar{t} > 0$ найдётся постоянная $\mu_* > 0$, не зависящая от t, μ и такая, что на множестве $0 \leq t \leq \bar{t}$, $0 < \mu \leq \mu_*$: 1) решение задачи (18.6) существует и единственно; 2) ряд (25.2) сходится равномерно к решению задачи (18.6).

Из п. 25.1 следует, что условия теоремы 32.2 для задачи (25.1) выполняются при любом значении $\bar{\mu} > 0$. По теореме 32.2 для любого значения $\bar{t} > 0$ найдётся постоянная $\mu_* > 0$, не зависящая от τ, μ и такая, что на множестве $0 \leq \tau \leq \bar{t}\mu^{-1}$, $0 \leq \mu \leq \mu_*$: 1) решение задачи (25.1) существует и единственно; 2) ряд (25.2) сходится равномерно к решению задачи (25.1).

Отсюда видно, что теоремы 32.1, 32.2 не гарантируют существование решения задач (18.6), (25.1) при заданном значении μ ($\mu \approx 0{,}016$), так как значение μ_* в теоремах 32.1, 32.2 неизвестно.

25.3. Асимптотическое решение

Первое приближение решения задачи (25.1), построенное методом малого параметра Пуанкаре из п. 31.1, имеет вид

$$\begin{aligned}
&\xi_1 \approx \xi_{11} = \mu e^{-\delta\tau}(b_3\cos\omega\tau + b_4\sin\omega\tau) - b_3\mu, \\
&\xi_2 \approx \xi_{12} = \mu e^{-\delta\tau}(b_5\cos\omega\tau + b_6\sin\omega\tau) - b_5\mu, \\
&\xi_3 \approx \xi_{13} = e^{-\delta\tau}(\cos\omega\tau + b_1\sin\omega\tau), \\
&\xi_4 \approx \xi_{14} = b_2 e^{-\delta\tau}\sin\omega\tau, \qquad \tau = t\mu^{-1},
\end{aligned} \tag{25.5}$$

где $b_i,\ \delta,\ \omega$ – постоянные (19.5).

Таким образом, первое приближение решения задачи (18.6), построенное методом малого параметра Пуанкаре для задачи (25.1), совпадает с первым приближением (19.6), построенным методом пограничных функций, и с нулевым приближением (21.3), построенным методом двух параметров. Оценка точности асимптотического решения (25.5) получена в п. 19.5.

Можно модифицировать метод малого параметра Пуанкаре так же, как была сделана модификация метода двух параметров в §22. Результаты модификации совпадают с результатами двух других модифицированных методов, приведёнными в §20, §22.

25.4. Результаты

Переход от задачи (18.6) к регулярно возмущённой задаче Коши (25.1) даёт те же результаты, что и методы, рассмотренные ранее, – метод пограничных функций и метод двух параметров.

§26. Выводы главы 2

Рассмотрена задача о движении гироскопа в кардановом подвесе, который отличается от гироскопа в главе 1 наличием вязкого трения в осях подвеса.

В §18 эта задача приведена к задаче Тихонова для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром.

В §19, §20 получено приближённое решение поставленной задачи методом пограничных функций и модифицированным методом пограничных функций. В §21, §22 к поставленной задаче применён метод двух параметров и модифицированный метод двух параметров. Оба метода – метод пограничных функций и метод двух параметров – дали одинаковые результаты. Модификация этих методов улучшила оценку интервала времени, на котором решение задачи существует, и улучшила оценку точности асимптотического решения.

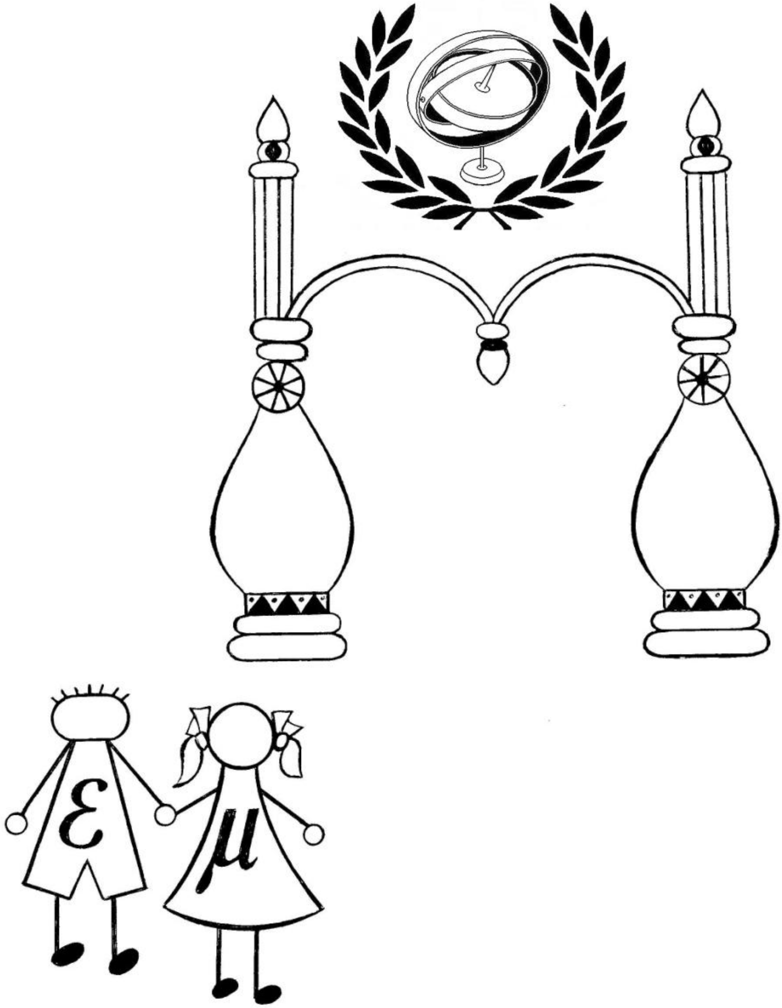
В §23 рассмотрен второй метод Ляпунова. Доказано существование решения задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе на всей полуоси $T \geq 0$.

В §24 второй метод Ляпунова соединён с модифицированными методами пограничных функций и двух параметров. Получена оценка точности асимптотического решения на всей полуоси $T \geq 0$.

В §25 сделан переход от задачи Тихонова к регулярно возмущённой задаче Коши заменой независимой переменной t на быстрое время τ. Для построения решения использован метод малого параметра Пуанкаре. Получились результаты, совпадающие с результатами метода пограничных функций и метода двух параметров.

Наиболее полно результаты главы 2 сформулированы в п. 24.2. Кроме того, рассмотрена приближённая (прецессионная) модель движения гироскопа в кардановом подвесе (в §18).

Глава 2 взята из книги [8].


ε
μ

Дополнение

§27. Построение математической модели движения гироскопа в кардановом подвесе с использованием кинетического момента

27.1. Кинематические соотношения

Гироскоп в кардановом подвесе является системой трёх твёрдых тел: ротора и двух колец карданова подвеса (смотрите рисунки на стр. 10, 70). Свяжем с телами следующие системы координат: с ротором – систему $Oxyz$, с внутренним кольцом – систему $Ox_1y_1z_1$, с внешним кольцом – систему $Ox_2y_2z_2$. O – неподвижная точка всех трёх тел (точка подвеса гироскопа). Системы координат декартовы, прямоугольные.

Ox_2 – неподвижная ось внешнего кольца карданова подвеса; α – угол поворота внешнего кольца относительно неподвижной системы координат (*опоры*); $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{j}_2$, $\boldsymbol{k}_2$ – *орты* координатных осей (единичные векторы). Смотрите рис. 27.1.

Система $Ox_1y_1z_1$ получается из системы $Ox_2y_2z_2$ поворотом вокруг оси Oy_2 на угол β; $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{j}_1$, $\boldsymbol{k}_1$ – орты осей системы $Ox_1y_1z_1$; $\boldsymbol{j}_1 = \boldsymbol{j}_2$. Oy_1 – ось вращения внутреннего кольца относительно внешнего, совпадает с осью Oy_2. Смотрите рис. 27.2.

Система $Oxyz$ получается из системы $Ox_1y_1z_1$ поворотом вокруг оси Oz на угол γ; $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ – орты осей системы $Oxyz$; $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1$. Oz – ось вращения ротора относительно внутреннего кольца, совпадает с осью Oz_1. Смотрите рис. 27.3.

Таким образом, положение гироскопа в кардановом подвесе полностью определяется тремя углами α, β, γ. Приведём некоторые соотношения между ортами, которые следуют из рисунков и которые понадобятся ниже

.

$$\boldsymbol{i}_2 = \cos\beta\,\boldsymbol{i}_1 + \sin\beta\,\boldsymbol{k}_1, \qquad \boldsymbol{i} = \cos\gamma\,\boldsymbol{i}_1 + \sin\gamma\,\boldsymbol{j}_1, \quad (27.1)$$

$$\boldsymbol{j} = -\sin\gamma\, \boldsymbol{i}_1 + \cos\gamma\, \boldsymbol{j}_1, \qquad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1,$$

$$[\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1] = \boldsymbol{k}_1, \qquad [\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{k}_1] = -\boldsymbol{j}_1,$$

$$[\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1] = \boldsymbol{i}_1.$$

Здесь и далее $[\ ,\ ]$ – векторное произведение.

Перейдём к угловым скоростям. Внешнее кольцо вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2 = \dot\alpha\, \boldsymbol{i}_2$ (точкой обозначено дифференцирование по времени T: $\dot\alpha = d\alpha/dT$). Внутреннее кольцо вращается относительно внешнего кольца с угловой скоростью $\dot\beta\, \boldsymbol{j}_1$. Кроме того, оно участвует во вращении с внешним кольцом. Поэтому угловая скорость внутреннего кольца относительно неподвижной системы координат равна $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 + \dot\beta\, \boldsymbol{j}_1$. Ротор вращается относительно внутреннего кольца с угловой скоростью $\dot\gamma\, \boldsymbol{k}$. Кроме того, он вращается вместе с внутренним кольцом. Поэтому угловая скорость ротора относительно неподвижной системы координат равна $\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_1 + \dot\gamma\, \boldsymbol{k}$. Используя равенства (27.1), получим формулы

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \dot\alpha\, \boldsymbol{i}_2, \tag{27.2}$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 + \dot\beta\, \boldsymbol{j}_1 = \dot\alpha\, \boldsymbol{i}_2 + \dot\beta\, \boldsymbol{j}_1 = \dot\alpha \cos\beta\, \boldsymbol{i}_1 + \dot\beta\, \boldsymbol{j}_1 + \dot\alpha \sin\beta\, \boldsymbol{k}_1,$$

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_1 + \dot\gamma\, \boldsymbol{k} = \dot\alpha \cos\beta\, \boldsymbol{i}_1 + \dot\beta\, \boldsymbol{j}_1 + (\dot\alpha \sin\beta + \dot\gamma)\boldsymbol{k}_1 .$$

Единичный вектор $\boldsymbol{i}_2$ неподвижен. Векторы $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{j}_1$, $\boldsymbol{k}_1$ жёстко связаны с внутренним кольцом и вращаются вместе с ним с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$. Поэтому

$$\frac{d\, \boldsymbol{i}_1}{dT} = [\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{i}_1] = \left[\dot\alpha \cos\beta\, \boldsymbol{i}_1 + \dot\beta\, \boldsymbol{j}_1 + \dot\alpha \sin\beta\, \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{i}_1\right] = \tag{27.3}$$

$$= \dot\alpha \cos\beta\, [\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_1] + \dot\beta [\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{i}_1] + \dot\alpha \sin\beta\, [\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{i}_1] =$$

$$= \dot\alpha \sin\beta\, \boldsymbol{j}_1 - \dot\beta \boldsymbol{k}_1,$$

Рис. 27.1

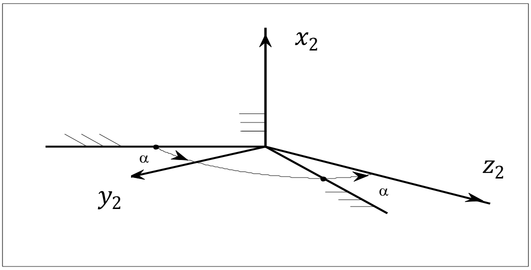


Рис. 27.2

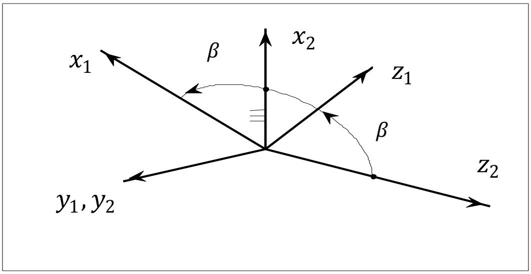
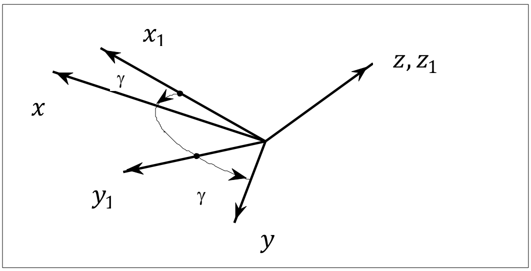


Рис. 27.3



$$\frac{d\,\boldsymbol{j}_1}{dT} = [\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{j}_1] = \left[\dot\alpha \cos\beta\, \boldsymbol{i}_1 + \dot\beta\, \boldsymbol{j}_1 + \dot\alpha \sin\beta\, \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{j}_1\right] =$$

$$= \dot\alpha \cos\beta\, [\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1] + \dot\beta [\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_1] + \dot\alpha \sin\beta\, [\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{j}_1] =$$

$$= -\dot\alpha \sin\beta\, \boldsymbol{i}_1 + \dot\alpha \cos\beta\, \boldsymbol{k}_1,$$

$$\frac{d\,\boldsymbol{k}_1}{dT} = [\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{k}_1] = \left[\dot{\alpha}\cos\beta\,\boldsymbol{i}_1 + \dot{\beta}\,\boldsymbol{j}_1 + \dot{\alpha}\sin\beta\,\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_1\right] =$$

$$= \dot{\alpha}\cos\beta\,[\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{k}_1] + \dot{\beta}[\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1] + \dot{\alpha}\sin\beta\,[\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_1] =$$

$$= -\,\dot{\alpha}\cos\beta\,\boldsymbol{j}_1 + \dot{\beta}\boldsymbol{i}_1.$$

Здесь использованы равенства (27.1) для векторных произведений.

27.2. Моменты инерции

При составлении уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе предполагается, что центр масс внешнего кольца лежит на оси вращения Ox_2, центр масс внутреннего кольца совпадает с неподвижной точкой O, центр масс ротора тоже совпадает с точкой O. Таким образом, движение внешнего кольца есть вращение вокруг неподвижной оси, движение внутреннего кольца и движение ротора являются вращением твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Для описания этих движений нужно знать моменты инерции тел.

Определения 27.1. *Моментами инерции* системы, состоящей из n материальных точек P_i с массами m_i и координатами $P_i(x_i, y_i, z_i)$, называются величины

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right), \qquad I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2 + z_i^2\right), \qquad (27.4)$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right), \qquad I_{xy} = I_{yx} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i\, y_i,$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i\, z_i, \qquad I_{yz} = I_{zy} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i\, z_i.$$

I_x, I_y, I_z называются *осевыми моментами инерции*. Остальные величины – *центробежные моменты инерции*. Если масса материальной системы распределена по некоторой области, то конечные суммы (27.4) переходят известным образом в интегралы по объёму [2].

Известно, что для любого твёрдого тела и любой (геометрической) точки O существует система координат $Oxyz$, в которой центробежные моменты инерции твёрдого тела равны нулю [2]. Оси такой системы координат называются *главными осями инерции тела,* моменты инерции тела относительно главных осей инерции называются *главными моментами инерции тела.*

При составлении уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе предполагается, что координатные оси, введённые в п. 27.1, являются главными осями инерции того тела, с которым оси жёстко связаны. Поэтому центробежные моменты инерции тел равны нулю, а осевые моменты инерции – постоянные величины (не зависящие от T). Приняты обозначения:

$$I_{2x_2} = A_2, \qquad I_{2y_2} = B_2, \qquad I_{2z_2} = C_2,$$

$$I_{1x_1} = A_1, \qquad I_{1y_1} = B_1, \qquad I_{1z_1} = C_1,$$

$$I_x = A, \qquad I_y = A\,, \qquad I_z = C.$$

Первые три величины – осевые моменты инерции внешнего кольца, следующие три величины – осевые моменты инерции внутреннего кольца, последние три величины – осевые моменты инерции ротора. Предполагается, что масса ротора распределена симметрично относительно оси вращения ротора. Поэтому момент инерции ротора относительно любой оси, проходящей через точку O перпендикулярно оси вращения Oz, равен A. A и C носят также названия: *экваториальный момент инерции* ротора и *полярный момент инерции* ротора.

27.3. Кинетические моменты

Определение 27.2. *Количеством движения* материальной точки массы m, движущейся со скоростью $\boldsymbol{V}$, называется вектор $\boldsymbol{Q} = m\boldsymbol{V}$.

Определение 27.3. *Кинетическим моментом материальной точки A относительно* (геометрической) *точки O* называется вектор $\boldsymbol{K} = [\boldsymbol{OA}, \boldsymbol{Q}]$, где $\boldsymbol{Q}$ – количество движения точки A.

Таким образом, кинетический момент – это момент количества движения. Если система состоит из конечного числа материальных точек, то её кинетический момент равен сумме кинетических моментов материальных точек. Если масса материальной системы распределена по некоторой области, то конечная сумма кинетических моментов переходит известным образом в интеграл по объёму [2].

Определение 27.4. *Кинетическим моментом материальной системы относительно оси* называется проекция на эту ось кинетического момента системы относительно какой-либо точки, лежащей на оси.

Известно [2], что если твёрдое тело имеет неподвижную точку O, то кинетический момент этого тела относительно точки O можно вычислить по формуле

$$\begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \qquad (27.5)$$

Здесь $K_x,\ K_y,\ K_z$ – координаты кинетического момента $\boldsymbol{K}$ в системе координат $Oxyz$; $\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z$ – координаты угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$ в той же системе координат; элементы матрицы – моменты инерции тела.

Если координатные оси являются главными осями инерции тела, то из (27.5) следуют формулы

$$\begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \qquad (27.6)$$

$$\boldsymbol{K} = K_x \boldsymbol{i} + K_y \boldsymbol{j} + K_z \boldsymbol{k} = I_x \omega_x \boldsymbol{i} + I_y \omega_y \boldsymbol{j} + I_z \omega_z \boldsymbol{k} =$$

$$= I_x(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{i})\,\boldsymbol{i} + I_y(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{j})\,\boldsymbol{j} + I_z(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}\,.$$

Здесь и далее $(\ ,\ )$ – скалярное произведение векторов; $\boldsymbol{i}\,,\ \boldsymbol{j}\,,\ \boldsymbol{k}$ – орты координатных осей.

Вычислим кинетические моменты ротора и колец карданова подвеса относительно неподвижной точки O. Для внешнего кольца из (27.2), (27.6) следуют равенства

$$\boldsymbol{K}_2 = A_2(\boldsymbol{\omega}_2,\ \boldsymbol{i}_2)\,\boldsymbol{i}_2 + B_2(\boldsymbol{\omega}_2,\ \boldsymbol{j}_2)\,\boldsymbol{j}_2 + C_2(\boldsymbol{\omega}_2,\ \boldsymbol{k}_2)\,\boldsymbol{k}_2 =$$

$$= A_2\dot{\alpha}\,\boldsymbol{i}_2.$$

Для внутреннего кольца из (27.2), (27.6) следуют равенства

$$\boldsymbol{K}_1 = A_1(\boldsymbol{\omega}_1,\ \boldsymbol{i}_1)\,\boldsymbol{i}_1 + B_1(\boldsymbol{\omega}_1,\ \boldsymbol{j}_1)\,\boldsymbol{j}_1 + C_1(\boldsymbol{\omega}_1,\ \boldsymbol{k}_1)\,\boldsymbol{k}_1 =$$

$$= A_1\dot{\alpha}\cos\beta\ \boldsymbol{i}_1 + B_1\dot{\beta}\,\boldsymbol{j}_1 + C_1\dot{\alpha}\sin\beta\ \boldsymbol{k}_1.$$

Кинетический момент ротора равен

$$\boldsymbol{K}_0 = A(\boldsymbol{\omega}_0,\boldsymbol{i})\,\boldsymbol{i} + A(\boldsymbol{\omega}_0,\boldsymbol{j})\,\boldsymbol{j} + C(\boldsymbol{\omega}_0,\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}\,.$$

Подставляя вместо $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{\omega}_0$ их выражения через $\boldsymbol{i}_1,\ \ \boldsymbol{j}_1,\ \boldsymbol{k}_1$ из (27.1), (27.2), получим:

$$\boldsymbol{K}_0 = A\big(\dot{\alpha}\cos\beta\,\boldsymbol{i}_1 + \dot{\beta}\,\boldsymbol{j}_1 + (\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})\boldsymbol{k}_1, \cos\gamma\,\boldsymbol{i}_1 + \sin\gamma\,\boldsymbol{j}_1\big)\,\boldsymbol{i} +$$

$$+A\big(\dot{\alpha}\cos\beta\,\boldsymbol{i}_1 + \dot{\beta}\,\boldsymbol{j}_1 + (\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})\boldsymbol{k}_1, -\sin\gamma\,\boldsymbol{i}_1 + \cos\gamma\ \boldsymbol{j}_1\ \big)\,\boldsymbol{j}$$

$$+C\big(\dot{\alpha}\cos\beta\,\boldsymbol{i}_1 + \dot{\beta}\,\boldsymbol{j}_1 + (\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_1\ \big)\boldsymbol{k} =$$

$$= A\big(\dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma + \dot{\beta}\ \sin\gamma\big)(\cos\gamma\,\boldsymbol{i}_1 + \sin\gamma\,\boldsymbol{j}_1)\ +$$

$$+A\big(-\,\dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\ \cos\gamma\ \big)\ (-\sin\gamma\,\boldsymbol{i}_1 + \cos\gamma\ \boldsymbol{j}_1) +$$

$$+C\,(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})\boldsymbol{k}_1 =$$

$$= A\,\dot{\alpha}\cos\beta\;\; \boldsymbol{i}_1 + A\dot{\beta}\,\boldsymbol{j}_1 + C\,(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})\;\boldsymbol{k}_1.$$

Таким образом, кинетические моменты тел рассматриваемой материальной системы «гироскоп в кардановом подвесе» имеют вид

$$\boldsymbol{K}_2 = A_2\dot{\alpha}\;\boldsymbol{i}_2\;, \tag{27.7}$$

$$\boldsymbol{K}_1 = A_1\dot{\alpha}\cos\beta\;\;\boldsymbol{i}_1 + B_1\dot{\beta}\,\boldsymbol{j}_1 + C_1\dot{\alpha}\sin\beta\;\;\boldsymbol{k}_1\;,$$

$$\boldsymbol{K}_0 = A\,\dot{\alpha}\cos\beta\;\;\boldsymbol{i}_1 + A\dot{\beta}\,\boldsymbol{j}_1 + C\,(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})\;\boldsymbol{k}_1.$$

$\boldsymbol{K}_2$ – кинетический момент внешнего кольца карданова подвеса относительно точки O, $\boldsymbol{K}_1$ – кинетический момент внутреннего кольца карданова подвеса относительно точки O, $\boldsymbol{K}_0$ – кинетический момент ротора относительно точки O.

Продифференцируем векторы (27.7), учитывая, что моменты инерции – постоянные величины, $\boldsymbol{i}_2$ – постоянный вектор, производные $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1$ даны в (27.3).

$$\frac{d\,\boldsymbol{K}_2}{dT} = A_2\ddot{\alpha}\;\boldsymbol{i}_2, \tag{27.8}$$

$$\frac{d\,\boldsymbol{K}_1}{dT} = A_1\big(\ddot{\alpha}\;\cos\beta - \dot{\alpha}\,\dot{\beta}\,\sin\beta\big)\,\boldsymbol{i}_1 + B_1\ddot{\beta}\,\boldsymbol{j}_1 +$$

$$+C_1\big(\ddot{\alpha}\;\sin\beta + \dot{\alpha}\,\dot{\beta}\,\cos\beta\big)\,\boldsymbol{k}_1 + A_1\dot{\alpha}\cos\beta\;\big(\dot{\alpha}\sin\beta\,\boldsymbol{j}_1 - \dot{\beta}\boldsymbol{k}_1\big) +$$

$$+B_1\dot{\beta}(-\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\boldsymbol{i}_1 + \dot{\alpha}\cos\beta\,\boldsymbol{k}_1) +$$

$$+C_1\dot{\alpha}\sin\beta\;\big(-\,\dot{\alpha}\cos\beta\,\boldsymbol{j}_1 + \dot{\beta}\boldsymbol{i}_1\big) =$$

$$= \big[A_1\ddot{\alpha}\;\cos\beta - (A_1 + B_1 - C_1)\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\sin\beta\big]\,\boldsymbol{i}_1 +$$

$$+\big[B_1\ddot{\beta} + (A_1 - C_1)\,\dot{\alpha}^2\cos\beta\,\sin\beta\big]\,\boldsymbol{j}_1 +$$

$$+\left[C_1\ddot{\alpha}\ \sin\beta-(A_1-B_1-C_1)\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\cos\beta\right]\boldsymbol{k}_1,$$

$$\frac{d\,\boldsymbol{K}_0}{dT}=A\big(\ddot{\alpha}\ \cos\beta-\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\sin\beta\big)\,\boldsymbol{i}_1+A\ddot{\beta}\,\boldsymbol{j}_1+$$

$$+C\left(\ddot{\alpha}\ \sin\beta+\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\cos\beta+\ddot{\gamma}\right)\boldsymbol{k}_1+$$

$$+A\,\dot{\alpha}\cos\beta\ \left(\dot{\alpha}\sin\beta\,\boldsymbol{j}_1-\dot{\beta}\boldsymbol{k}_1\right)+$$

$$+A\dot{\beta}(-\dot{\alpha}\sin\beta\,\boldsymbol{i}_1+\dot{\alpha}\cos\beta\,\boldsymbol{k}_1)\ +$$

$$+C\ (\dot{\alpha}\sin\beta+\dot{\gamma})\big(-\dot{\alpha}\cos\beta\,\boldsymbol{j}_1+\dot{\beta}\boldsymbol{i}_1\big)=$$

$$=\left[A\ddot{\alpha}\ \cos\beta-(2A-C)\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta+C\dot{\beta}\dot{\gamma}\right]\boldsymbol{i}_1+$$

$$+\left[A\ddot{\beta}+(A-C)\,\dot{\alpha}^2\cos\beta\,\sin\beta-C\,\dot{\alpha}\,\dot{\gamma}\cos\beta\right]\boldsymbol{j}_1+$$

$$+C\left(\ddot{\alpha}\ \sin\beta+\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta+\ddot{\gamma}\right)\boldsymbol{k}_1.$$

27.4. Теорема об изменении кинетического момента

Определение 27.5. *Моментом силы* $\boldsymbol{F}$ *относительно точки* O называется вектор $\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{OA},\boldsymbol{F}]$, где A – точка приложения силы $\boldsymbol{F}$.

Теорема 27.1 (об изменении кинетического момента [2]). *Производная по времени кинетического момента материальной системы относительно неподвижной точки* O *равна сумме моментов относительно этой точки всех внешних сил, действующих на материальную систему:*

$$\frac{d\,\boldsymbol{K}}{dT}=\boldsymbol{M}.$$

Применим теорему 27.1 трижды: 1) ко всей системе «гироскоп в кардановом подвесе», 2) к материальной системе, состоящей из ротора и внутреннего кольца, 3) к ротору. Получим

$$\frac{d\,(\boldsymbol{K}_2+\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_0)}{dT} = \boldsymbol{M}_{012}, \qquad \frac{d\,(\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_0)}{dT} = \boldsymbol{M}_{01}, \qquad \frac{d\,\boldsymbol{K}_0}{dT} = \boldsymbol{M}_0. \quad (27.9)$$

В рассматриваемой задаче внешними силами являются силы тяжести и реакции связей, наложенных на твёрдые тела (о реакциях связей смотрите в п. 28.3). Так как центр масс внешнего кольца лежит на оси вращения Ox_2, то момент силы тяжести внешнего кольца относительно точки O перпендикулярен оси Ox_2. Так как центры масс ротора и внутреннего кольца совпадают с точкой O, то моменты сил тяжести ротора и внутреннего кольца относительно точки O равны нулю. Таким образом, $\boldsymbol{M}_{012}$ – сумма момента силы тяжести внешнего кольца и моментов сил, действующих на ось вращения внешнего кольца со стороны опоры.

Аналогично, $\boldsymbol{M}_{01}$ – сумма моментов сил, действующих на ось вращения внутреннего кольца со стороны внешнего кольца, $\boldsymbol{M}_0$ – сумма моментов сил, действующих на ось вращения ротора со стороны внутреннего кольца.

В главе 1 предполагается, что трение в осях вращения всех трёх тел отсутствует, поэтому моменты внешних сил ортогональны осям вращения:

$$(\boldsymbol{M}_{012}, \boldsymbol{i}_2) = 0, \qquad (\boldsymbol{M}_{01}, \boldsymbol{j}_1) = 0, \qquad (\boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{k}) = 0. \quad (27.10)$$

Вычислим проекции левых частей уравнений (27.9) на оси вращения, используя формулы (27.1), (27.8):

$$\left(\frac{d\,(\boldsymbol{K}_2+\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_0)}{dT}, \boldsymbol{i}_2\right) = \quad (27.11)$$

$$= \left(\frac{d\,\boldsymbol{K}_2}{dT}, \boldsymbol{i}_2\right) + \left(\frac{d\,\boldsymbol{K}_1}{dT} + \frac{d\,\boldsymbol{K}_0}{dT}, \cos\beta\,\boldsymbol{i}_1 + \sin\beta\,\boldsymbol{k}_1\right) =$$

$$= A_2\ddot{\alpha} + \left[A_1\ddot{\alpha}\,\cos\beta - (A_1 + B_1 - C_1)\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\sin\beta\right]\cos\beta +$$

$$+\left[C_1\ddot{\alpha}\,\sin\beta - (A_1 - B_1 - C_1)\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\cos\beta\right]\sin\beta +$$

$$+\left[A\ddot{\alpha}\,\cos\beta - (2A - C)\dot{\alpha}\dot{\beta}\,\sin\beta + C\dot{\beta}\dot{\gamma}\right]\,\cos\beta +$$

$$+C\left(\ddot{\alpha}\ \sin\beta+\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta+\ddot{\gamma}\right)\sin\beta=$$

$$=\left[A_2+(A+A_1)\cos^2\beta+(C+C_1)\sin^2\beta\right]\ddot{\alpha}-$$

$$-(A+A_1-C-C_1)\,\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\sin 2\beta+C\ddot{\gamma}\sin\beta+C\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\beta=$$

$$=\frac{d}{dT}\{\left[A_2+(A+A_1)\cos^2\beta+(C+C_1)\sin^2\beta\right]\dot{\alpha}+C\dot{\gamma}\sin\beta\},$$

$$\left(\frac{d\,\boldsymbol{K}_1}{dT}+\frac{d\,\boldsymbol{K}_0}{dT},\boldsymbol{j}_1\right)=\left[B_1\ddot{\beta}+(A_1-C_1)\,\dot{\alpha}^2\cos\beta\sin\beta\right]+$$

$$+\left[A\ddot{\beta}+(A-C)\,\dot{\alpha}^2\cos\beta\sin\beta-C\ \dot{\alpha}\,\dot{\gamma}\cos\beta\right]=$$

$$=(A+B_1)\ddot{\beta}+(A+A_1-C-C_1)\,\dot{\alpha}^2\cos\beta\sin\beta-$$

$$-C\ \dot{\alpha}\,\dot{\gamma}\cos\beta,$$

$$\left(\frac{d\,\boldsymbol{K}_0}{dT},\boldsymbol{k}\right)=\left(\frac{d\,\boldsymbol{K}_0}{dT},\boldsymbol{k}_1\right)=C\left(\ddot{\alpha}\ \sin\beta+\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta+\ddot{\gamma}\right)=$$

$$=\frac{d}{dT}\left[C(\dot{\alpha}\sin\beta+\dot{\gamma})\right].$$

Полученные проекции равны нулю, как следует из уравнений (27.9) и равенств (27.10):

$$\frac{d}{dT}\{\left[A_2+(A+A_1)\cos^2\beta+(C+C_1)\sin^2\beta\right]\dot{\alpha}+C\dot{\gamma}\sin\beta\}=0, \quad (27.12)$$

$$(A+B_1)\,\ddot{\beta}+(A+A_1-C-C_1)\,\dot{\alpha}^2\cos\beta\sin\beta-C\ \dot{\alpha}\,\dot{\gamma}\cos\beta=0,$$

$$\frac{d}{dT}\left[C(\dot{\alpha}\sin\beta+\dot{\gamma})\right]=0.$$

Получили уравнения (1.1) – уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе из главы 1.

27.5. Математическая модель движения гироскопа в кардановом подвесе при наличии вязкого трения

В главе 2 предполагается, что в осях карданова подвеса есть вязкое трение, а в оси ротора трение отсутствует. Поэтому в главе 2 равенства, аналогичные (27.10), имеют вид

$$(\boldsymbol{M}_{012}, \boldsymbol{i}_2) = -n_1\dot{\alpha}, \quad (\boldsymbol{M}_{01}, \boldsymbol{j}_1) = -n_2\dot{\beta}, \quad (\boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{k}) = 0. \quad (27.13)$$

Здесь n_1, n_2 – коэффициенты моментов сил вязкого трения, действующих по осям карданова подвеса.

Приравнивая проекции (27.11) проекциям (27.13) на основании равенств (27.9), получим уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе, рассмотренного в главе 2:

$$\frac{d}{dT}\{[A_2 + (A + A_1)\cos^2\beta + (C + C_1)\sin^2\beta]\dot{\alpha} + \quad (27.14)$$

$$+C\dot{\gamma}\sin\beta\} = -n_1\dot{\alpha},$$

$$(A + B_1)\ddot{\beta} + (A + A_1 - C - C_1)\,\dot{\alpha}^2\cos\beta\sin\beta - C\ \dot{\alpha}\,\dot{\gamma}\cos\beta = -n_2\dot{\beta},$$

$$\frac{d}{dT}[C(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})] = 0.$$

В главе 2 введена величина $H = C(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})$. Как видно из формулы (27.7) для $\boldsymbol{K}_0$, H равна проекции кинетического момента ротора $\boldsymbol{K}_0$ на ось вращения. Поэтому H – кинетический момент ротора относительно оси вращения (ротора). H – постоянная величина.

Исключим из уравнений (27.14) угол γ с помощью кинетического момента H:

$$\dot{\gamma} = \frac{H}{C} - \dot{\alpha}\sin\beta.$$

Подставляя это значение $\dot{\gamma}$ в первые два уравнения (27.14), дифференцируя левую часть первого уравнения и перенося все члены уравнений в левую часть, получим уравнения (18.1) – уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе из главы 2:

$$[A_2 + (A + A_1)\cos^2\beta + C_1\sin^2\beta]\,\ddot{\alpha} + \qquad (27.15)$$

$$+(C_1 - A - A_1)\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\sin 2\beta + H\dot{\beta}\cos\beta + n_1\dot{\alpha} = 0,$$

$$(A + B_1)\ddot{\beta} + (A + A_1 - C_1)\,\dot{\alpha}^2\cos\beta\sin\beta - H\;\dot{\alpha}\cos\beta + n_2\dot{\beta} = 0\;.$$

Замечание 27.1. Уравнения (27.12), (27.15) получены проекцией векторных уравнений (27.9) на оси вращения колец карданова подвеса и ротора соответственно. Проекции уравнений (27.9) на оси, ортогональные осям вращения, служат для определения моментов внешних сил $\boldsymbol{M}_{012}$, $\boldsymbol{M}_{01}$, $\boldsymbol{M}_0$.

§28. Построение математической модели движения гироскопа в кардановом подвесе использованием функции Лагранжа

28.1. Функция Лагранжа

Определение 28.1. *Функцией Лагранжа* материальной системы называется функция

$$L = W_{\text{к}} - W_{\text{п}}, \qquad (28.1)$$

где $W_{\text{к}}$ – кинетическая энергия системы, $W_{\text{п}}$ – потенциальная энергия системы.

Определение 28.2. *Кинетической энергией* материальной точки массы m, движущейся со скоростью $\boldsymbol{V}$, называется величина

$$W_{\text{к}} = \frac{1}{2}\,m\,(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}).$$

Если система состоит из конечного числа материальных точек, то кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий материальных точек. Если масса материальной системы распределена по некоторой области, то конечная сумма кинетических энергий переходит известным образом в интеграл по объёму [2].

Определения 28.3. Сила $\boldsymbol{F}$**,** действующая на материальную точку P с координатами $P(x, y, z)$, называется *потенциальной***,** если существует такая функция $W_\text{п} = W_\text{п}(x, y, z)$, что для координат силы справедливы равенства

$$F_x = -\frac{\partial W_\text{п}}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial W_\text{п}}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial W_\text{п}}{\partial z}.$$

Функция $W_\text{п}$ называется *потенциальной энергией* материальной точки P.

Если система состоит из конечного числа материальных точек, то потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий материальных точек. В этом случае $W_\text{п}$ зависит от координат всех точек.

Потенциальными силами, действующими на гироскоп в кардановом подвесе, являются силы тяжести. Известно, что действие сил тяжести на твёрдое тело эквивалентно действию одной силы, приложенной к центру масс тела, направленной в ту же сторону, что и силы тяжести, и равной по модулю mg, где m – масса тела, g – ускорение силы тяжести. Потенциальная энергия твёрдого тела в поле сил тяжести равна $mg\zeta$, где ζ – координата центра масс твёрдого тела в неподвижной системе координат, ось ζ которой направлена в сторону, противоположную силам тяжести.

В рассматриваемой задаче центры масс всех трёх тел (ротора и колец подвеса) неподвижны, поэтому потенциальная энергия гироскопа в кардановом подвесе – постоянная величина (не зависит от T).

Найдём кинетическую энергию гироскопа в кардановом подвесе. Известно, что кинетическую энергию твёрдого тела, имеющего неподвижную точку O, можно вычислить по формуле [2]

$$W_{\text{к}} = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{K}), \tag{28.2}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела, $\boldsymbol{K}$ – кинетический момент тела относительно точки O.

Вычислим кинетические энергии ротора и колец карданова подвеса, используя формулы (27.2), (27.7), (28.2):

$$W_{\text{к}2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{K}_2) = \frac{1}{2}(\dot{\alpha}\,\boldsymbol{i}_2, A_2\dot{\alpha}\,\boldsymbol{i}_2) = \frac{1}{2}A_2\dot{\alpha}^2, \tag{28.3}$$

$$W_{\text{к}1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{K}_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\big(\dot{\alpha}\cos\beta\,\boldsymbol{i}_1 + \dot{\beta}\,\boldsymbol{j}_1 + \dot{\alpha}\sin\beta\,\boldsymbol{k}_1,$$

$$A_1\dot{\alpha}\cos\beta\;\boldsymbol{i}_1 + B_1\dot{\beta}\,\boldsymbol{j}_1 + C_1\dot{\alpha}\sin\beta\;\boldsymbol{k}_1\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\big[A_1(\dot{\alpha}\cos\beta)^2 + B_1\dot{\beta}^2 + C_1(\dot{\alpha}\sin\beta)^2\big],$$

$$W_{\text{к}0} = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{K}_0) =$$

$$= \frac{1}{2}\big(\dot{\alpha}\cos\beta\,\boldsymbol{i}_1 + \dot{\beta}\,\boldsymbol{j}_1 + (\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})\boldsymbol{k}_1,$$

$$A\,\dot{\alpha}\cos\beta\;\boldsymbol{i}_1 + A\dot{\beta}\,\boldsymbol{j}_1 + C\,(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})\,\boldsymbol{k}_1\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\big[A(\dot{\alpha}\cos\beta)^2 + A\dot{\beta}^2 + C(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})^2\big].$$

Здесь $W_{\text{к}2}$, $W_{\text{к}1}$, $W_{\text{к}0}$ – кинетическая энергия внешнего кольца, внутреннего кольца и ротора соответственно.

Кинетическая энергия гироскопа в кардановом подвесе равна сумме кинетических энергий $W_{\text{к}2}, W_{\text{к}1}, W_{\text{к}0}$. Подставляя выражения (28.3) в формулу (28.1), получим функцию Лагранжа для гироскопа в кардановом подвесе:

$$L = \frac{1}{2}[A_2 + (A + A_1)\cos^2\beta + (C + C_1)\sin^2\beta]\dot{\alpha}^2 + \quad (28.4)$$

$$+\frac{1}{2}(A + B_1)\dot{\beta}^2 + C\dot{\alpha}\,\dot{\gamma}\sin\beta + \frac{1}{2}C\dot{\gamma}^2 - W_{\text{п}}.$$

Здесь $W_{\text{п}}$ – потенциальная энергия гироскопа в кардановом подвесе в поле сил тяжести. Так как $W_{\text{п}}$ – постоянная величина, то $L = L(\beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$. От углов α, γ функция L не зависит.

28.2. Уравнения Лагранжа второго рода

Теорема 28.1 [2]. *Если силы, действующие на материальную систему, потенциальны, то справедливы уравнения Лагранжа второго рода*:

$$\frac{d}{dT}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Здесь $L = L(T, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$ – функция Лагранжа материальной системы; q_1 , …, q_n – *обобщённые координаты* материальной системы, то есть независимые параметры, однозначно определяющие положение системы; $\dot{q}_1$, …, $\dot{q}_n$ – *обобщённые скорости* материальной системы, $\dot{q}_i = dq_i/dT$.

Обобщёнными координатами гироскопа в кардановом подвесе являются углы α, β, γ; обобщёнными скоростями – скорости $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$.

Теорему 28.1 нельзя применить к гироскопу в кардановом подвесе, так как, кроме сил тяжести, на ротор и кольца подвеса действуют ещё реакции связей.

28.3. Идеальные связи

Определения 28.4. Говорят, что на материальную систему наложены *связи*, если положение каких-либо точек системы ограничено заданными условиями.

Ограничение на положение точек реализуется силами, действующими на материальную систему. Эти силы называются *реакциями связей*.

Связи называются *идеальными*, если мощность реакций связей при любом возможном перемещении материальной системы равна нулю.

Определения 28.5. *Мощностью* силы $\boldsymbol{F}$, приложенной к точке P, движущейся со скоростью $\boldsymbol{V}$, называется величина $N = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{V})$.

Возможное перемещение материальной системы – это любое движение системы, не нарушающее связей, наложенных на систему.

Говоря о связях, наложенных на твёрдое тело, имеют в виду связи, ограничивающие положение тела как одного целого объекта. Известно [2], что любое положение (свободного) твёрдого тела однозначно определяется шестью независимыми параметрами. Связи между отдельными точками твёрдого тела не рассматриваются, так как любое движение тела описывается уравнениями, не содержащими внутренние силы тела.

На гироскоп в кардановом подвесе наложены следующие связи:

1) Ось Ox_2 неподвижна. Обозначим момент реакций этой связи относительно точки O $\boldsymbol{M}_2'$. Тогда $\boldsymbol{M}_2'$ – момент сил, действующих на внешнее кольцо карданова подвеса со стороны опоры; момент $\boldsymbol{M}_{012}$ (момент внешних сил, действующих на гироскоп в кардановом подвесе), рассмотренный в §27, равен

$$\boldsymbol{M}_{012} = \boldsymbol{M}_2' + \boldsymbol{M}_2'', \tag{28.5}$$

где $\boldsymbol{M}_2''$ – момент силы тяжести внешнего кольца карданова подвеса относительно точки O.

2) Оси Oy_1 и Oy_2 совпадают. Моменты реакций этой связи относительно точки O – это момент $\boldsymbol{M}_{01}$ (сил, действующих на внутреннее кольцо карданова подвеса со стороны внешнего коль-

ца) и момент $(-\boldsymbol{M}_{01})$ (сил, действующих по третьему закону Ньютона на внешнее кольцо со стороны внутреннего кольца).

3) Оси Oz и Oz_1 совпадают. Моменты реакций этой связи относительно точки O – это момент $\boldsymbol{M}_0$ (сил, действующих на ротор со стороны внутреннего кольца) и момент $(-\boldsymbol{M}_0)$ (сил, действующих по третьему закону Ньютона на внутреннеее кольцо карданова подвеса со стороны ротора).

Покажем, что связи, наложенные на гироскоп в кардановом подвесе в главе 1, идеальны. Для этого вычислим мощность реакций связей. Известно, что мощность сил, действующих на твёрдое тело, имеющее неподвижную точку O, можно вычислить по формуле $N = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\omega})$, где $\boldsymbol{M}$ – сумма моментов сил относительно точки O, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела.

Мощность реакций, действующих на внешнее кольцо карданова подвеса со стороны опоры, равна

$$(\boldsymbol{M}_2', \boldsymbol{\omega}_2) = (\boldsymbol{M}_{012} - \boldsymbol{M}_2'', \dot{\alpha}\, \boldsymbol{i}_2) = \dot{\alpha}\, (\boldsymbol{M}_{012}, \boldsymbol{i}_2) - \dot{\alpha}\, (\boldsymbol{M}_2'', \boldsymbol{i}_2) = 0,$$

так как справедливы равенства (27.2), (27.10), (28.5) и момент $\boldsymbol{M}_2''$ перпендикулярен оси Ox_2: $\boldsymbol{M}_2'' \perp \boldsymbol{i}_2$.

Мощность реакций связи колец карданова подвеса равна

$$(\boldsymbol{M}_{01}, \boldsymbol{\omega}_1) + (-\boldsymbol{M}_{01}, \boldsymbol{\omega}_2) = \left(\boldsymbol{M}_{01}, \boldsymbol{\omega}_2 + \dot{\beta}\, \boldsymbol{j}_1\right) - (\boldsymbol{M}_{01}, \boldsymbol{\omega}_2) =$$

$$= \dot{\beta}\, (\boldsymbol{M}_{01}, \boldsymbol{j}_1) = 0,$$

так как справедливы равенства (27.2), (27.10).

Мощность реакций связи ротора с внутренним кольцом карданова подвеса равна

$$(\boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{\omega}_0) + (-\boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{\omega}_1) = (\boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{\omega}_1 + \dot{\gamma}\, \boldsymbol{k}) - (\boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{\omega}_1) = \quad (28.6)$$

$$= \dot{\gamma}\, (\boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{k}) = 0,$$

так как справедливы равенства (27.2), (27.10).

Отметим, что мощности всех реакций связи равны нулю при любых функциях $\alpha(T)$, $\beta(T)$, $\gamma(T)$, то есть при любых возможных перемещениях ротора и колец подвеса. Таким образом, на гироскоп в кардановом подвесе в главе 1 наложены идеальные связи.

28.4. Уравнения Лагранжа второго рода при идеальных связях

Теорема 28.2. *Если на материальную систему наложены идеальные связи и, кроме того, на неё действуют потенциальные силы, то справедливы уравнения Лагранжа второго рода*

$$\frac{d}{dT}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,, \quad i = \overline{1,n}. \tag{28.7}$$

Здесь $L = L(T, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ – функция Лагранжа материальной системы; $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ – обобщённые координаты и обобщённые скорости материальной системы.

Теорему 28.2 можно применить к гироскопу в кардановом подвесе из главы 1, так как связи, наложенные на систему, идеальны, а силы тяжести потенциальны. Вычислим производные функции Лагранжа (28.4):

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \gamma} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -\frac{1}{2}(A + A_1 - C - C_1)\dot{\alpha}^2 \sin 2\beta + C\dot{\alpha}\,\dot{\gamma}\cos\beta,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = [A_2 + (A + A_1)\cos^2\beta + (C + C_1)\sin^2\beta]\dot{\alpha} + C\,\dot{\gamma}\sin\beta,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = (A + B_1)\dot{\beta}\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} = C(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma}).$$

Подставим производные в уравнения (28.7):

$$\frac{d}{dT}\{[A_2 + (A + A_1)\cos^2\beta + (C + C_1)\sin^2\beta]\dot{\alpha} + C\dot{\gamma}\sin\beta\} = 0\,, \tag{28.8}$$

$(A+B_1)\ddot{\beta}+(A+A_1-C-C_1)\,\dot{\alpha}^2\cos\beta\,\sin\beta-C\;\dot{\alpha}\,\dot{\gamma}\cos\beta\,=0\;,$

$\frac{d}{dT}\left[C(\dot{\alpha}\,\sin\beta+\dot{\gamma})\right]=0.$

Получили уравнения (1.1) – уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе из главы 1.

28.5. Уравнения Лагранжа второго рода при наличии диссипативных сил

Покажем, что связи, наложенные на гироскоп в кардановом подвесе в главе 2, не являются идеальными из-за наличия вязкого трения.

Для связи внешнего кольца карданова подвеса с опорой имеем:

$$(\boldsymbol{M}_2^{'},\boldsymbol{\omega}_2)=(\boldsymbol{M}_{012}-\boldsymbol{M}_2^{''},\dot{\alpha}\,\boldsymbol{i}_2)=\dot{\alpha}\,(\boldsymbol{M}_{012},\boldsymbol{i}_2)-\dot{\alpha}\,(\boldsymbol{M}_2^{''},\boldsymbol{i}_2)=$$

$$=\dot{\alpha}\,(\boldsymbol{M}_{012},\boldsymbol{i}_2)=-n_1\dot{\alpha}^2.$$

Это следует из равенств (27.2), (27.13), (28.5) и из перпендикулярности векторов $\boldsymbol{M}_2^{''},\ \boldsymbol{i}_2$.

Для связи колец карданова подвеса

$$(\boldsymbol{M}_{01},\boldsymbol{\omega}_1)+(-\boldsymbol{M}_{01},\boldsymbol{\omega}_2)=\left(\boldsymbol{M}_{01},\boldsymbol{\omega}_2+\dot{\beta}\,\boldsymbol{j}_1\right)-(\boldsymbol{M}_{01},\boldsymbol{\omega}_2)= \quad (28.9)$$

$$=\dot{\beta}\,(\boldsymbol{M}_{01},\boldsymbol{j}_1)=-n_2\dot{\beta}^2.$$

Это следует из равенств (27.2), (27.13).

Так как полученные мощности не равны нулю, то связь с опорой и связь колец карданова подвеса являются неидеальными связями. Связь ротора с внутренним кольцом карданова подвеса идеальна, так как трение в оси ротора отсутствует и справедливы равенства (28.6).

Силы вязкого трения являются *диссипативными силами*, так как из-за них происходит диссипация (рассеивание) энергии гироскопа в кардановом подвесе. Покажем это, используя следующую теорему.

Теорема 28.3 (об изменении кинетической энергии [2]). *Производная по времени кинетической энергии материальной системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил, действующих на систему:*

$$\frac{dW_{\text{к}}}{dT} = N_{\text{внеш}} + N_{\text{внут}}.$$

Внешними силами в рассматриваемой задаче являются силы тяжести и реакции связи внешнего кольца карданова подвеса с опорой. Поэтому

$$N_{\text{внеш}} = (\boldsymbol{M}_{012}, \boldsymbol{\omega}_2) = (\boldsymbol{M}_{012}, \dot{\alpha}\, \boldsymbol{i}_2) = \dot{\alpha}\, (\boldsymbol{M}_{012}, \boldsymbol{i}_2) = -n_1 \dot{\alpha}^2,$$

как следует из (27.2), (27.13).

Известно [2], что мощность внутренних сил твёрдого тела равна нулю при любом движении тела. Поэтому $N_{\text{внут}}$ – это мощность реакций связи внешнего кольца с внутренним и реакций связи внутреннего кольца с ротором:

$$N_{\text{внут}} = (\boldsymbol{M}_{01}, \boldsymbol{\omega}_1) + (-\boldsymbol{M}_{01}, \boldsymbol{\omega}_2) + (\boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{\omega}_0) + (-\boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{\omega}_1) =$$
$$= -n_2 \dot{\beta}^2,$$

как следует из (28.6), (28.9).

По теореме 28.3 для гироскопа в кардановом подвесе справедливо равенство

$$\frac{dW_{\text{к}}}{dT} = -n_1 \dot{\alpha}^2 - n_2 \dot{\beta}^2.$$

Так как потенциальная энергия гироскопа в кардановом подвесе – постоянная величина, то

$$\frac{d(W_{\text{к}} + W_{\text{п}})}{dT} = \frac{dW_{\text{к}}}{dT} = -n_1 \dot{\alpha}^2 - n_2 \dot{\beta}^2.$$

Таким образом, энергия гироскопа в кардановом подвесе рассеивается:

$$\frac{dW_{\text{к}}}{dT} < 0, \qquad \frac{d(W_{\text{к}}+W_{\text{п}})}{dT} < 0,$$

если $\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 \neq 0$.

При наличии диссипативных сил вводится *диссипативная функция* (или *функция рассеивания Релея* [2]), которая в рассматриваемой задаче имеет вид

$$\Phi = \frac{1}{2}n_1\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}n_2\dot{\beta}^2, \tag{28.10}$$

где n_1, n_2 – коэффициенты моментов сил вязкого трения.

Теорема 28.4. *Пусть на материальную систему наложены идеальные связи и, кроме того, на неё действуют потенциальные и диссипативные силы. Тогда справедливы уравнения Лагранжа второго рода*

$$\frac{d}{dT}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{28.11}$$

Здесь $L = L(T, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ – функция Лагранжа материальной системы; $q_1, \dots, q_n$, $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ – обобщённые координаты и обобщённые скорости материальной системы, Φ – диссипативная функция.

Каждую неидеальную связь (связь опоры с внешним кольцом и связь колец карданова подвеса) можно рассматривать как совокупность двух связей. Одна связь идеальна, и сумма моментов её реакций относительно точки O перпендикулярна оси вращения. Реакции другой связи являются диссипативными силами. При таком представлении связей к гироскопу в кардановом подвесе из главы 2 применима теорема 28.4.

Сравнивая уравнения (28.7) и (28.11), видим, что для гироскопа в кардановом подвесе из главы 2 нужно в правые части уравнений (28.8) добавить частные производные функции (28.10):

$$\frac{d}{dT}\{[A_2 + (A + A_1)\cos^2\beta + (C + C_1)\sin^2\beta]\dot{\alpha} + C\dot{\gamma}\sin\beta\} = -n_1\dot{\alpha},$$

$$(A+B_1)\ddot{\beta}+(A+A_1-C-C_1)\,\dot{\alpha}^2\cos\beta\,\sin\beta-C\;\dot{\alpha}\,\dot{\gamma}\cos\beta=-n_2\dot{\beta},$$

$$\frac{d}{dT}[C(\dot{\alpha}\,\sin\beta+\dot{\gamma})]=0.$$

Получили уравнения (27.14). От них в п. 27.5 сделан переход к уравнениям (18.1) – уравнениям, описывающим движение гироскопа в кардановом подвесе из главы 2.

§29. Введение малого параметра

Асимптотические методы решения предполагают, что в задаче есть малый параметр в явном виде. В уравнения, описывающие физический процесс, можно ввести малый параметр не единственным образом [15]. Здесь, по-видимому, существует только одно правило: асимптотическое решение задачи, полученное в результате введения малого параметра, должно оказаться близким к точному решению задачи. В настоящем параграфе предлагается один из возможных способов введения малого параметра.

29.1. Исходные уравнения

Пусть задача описывается уравнениями

$$F_i(X_1,\dots,X_n,A_1,\dots,A_m)=0,\qquad i=\overline{1,N}, \tag{29.1}$$

где $X_1,\dots,X_n$ – размерные переменные (аргументы, искомые функции и числа, например: координаты, скорости, время и т.д.), A_1, …, A_m – размерные параметры (известные размерные числа, например: масса, длина и т.д.).

29.2. Нормализация размерных переменных

Перейдем от переменных X_1, …, X_n к безразмерным переменным x_1, …, x_n по формулам [15]

$$X_j = X_{j*}x_j, \qquad j = \overline{1,n}, \qquad (29.2)$$

где X_{1*}, …, X_{n*} – характерные значения размерных переменных (известные размерные числа).

Выбор характерных значений – наименее формализованная часть предлагаемой процедуры. Вообще говоря, предлагается выбирать X_{1*}, …, X_{n*} так, чтобы безразмерные переменные x_1, …, x_n по модулю не превышали единицы [15].

После подстановки формул (29.2) в (29.1) получаем уравнения, содержащие безразмерные переменные и размерные параметры:

$$F_i^{'}(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m, X_{1*}, \dots, X_{n*}) = 0, \quad i = \overline{1,N}. \quad (29.3)$$

29.3. Переход к безразмерным параметрам

Применим к уравнениям (29.3) π-теорему 29.1.

Теорема 29.1 (π-теорема [5]**).** *Если имеется соотношение между K размерными величинами вида*

$$F(\Pi_1, \dots, \Pi_K) = 0,$$

то можно найти эквивалентное соотношение между k безразмерными величинами

$$f(\pi_1, \dots, \pi_k) = 0,$$

где $k = K - l$, l – наибольшее число параметров из множества $(\Pi_1, \dots, \Pi_K)$ с независимой размерностью.

Уравнения (29.3) содержат размерные параметры A_1, …, A_m X_{1*}, …, X_{n*}. Пусть l из них имеют независимые размерности. Тогда по π-теореме 29.1 уравнения (29.3) можно заменить эквивалентными:

$$F_i^{''}(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_k) = 0, \qquad i = \overline{1,N}. \qquad (29.4)$$

Здесь a_1, …, a_k – безразмерные параметры (числа), которые выражаются через $A_1, \ldots, A_m,\ X_{1*}, \ldots, X_{n*},\ k = m + n - l$.

29.4. Нормализация безразмерных параметров

Определение 29.1. Число $a \neq 0$ называется *нормализованным по числу* $\varepsilon > 0$ *с коэффициентом нормализации* $b_* > 0$, если оно представлено в виде

$$a = a' \varepsilon^n, \tag{29.5}$$

где n – целое число, $b_* \varepsilon < |a'| \leq b_*$.

Для любых значений $a \neq 0, \varepsilon > 0,\ b_* > 0$ представление (29.5) существует и единственно.

Выберем за малый параметр ε число из интервала (0,1). Выберем коэффициент нормализации b_*. Нормализуем параметры a_1, …, a_k в (29.4) по ε:

$$a_1 = a_1' \varepsilon^{n_1}, \quad \ldots, \quad a_k = a_k' \varepsilon^{n_k}.$$

Тогда уравнения (29.4) примут вид

$$F_i''(x_1, \ldots, x_n, a_1' \varepsilon^{n_1}, \ldots, a_k' \varepsilon^{n_k}) = 0, \quad i = \overline{1, N}, \tag{29.6}$$

где a_1', …, a_k' рассматриваются как параметры, не зависящие от x_1, …, x_n, ε. Переобозначим уравнения (29.6):

$$f_i(x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = 0, \qquad i = \overline{1, N}.$$

Получили задачу с малым параметром ε и безразмерными переменными x_1, …, x_n.

Замечание 29.1. §29 взят из книги [10].

Замечание 29.2. Описанная в §29 процедура введения малого параметра использована в §18.

§30. Метод пограничных функций

30.1. Определение задачи Тихонова

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x,t,\mu), \qquad x_1|_{t=0} = \overset{\circ}{x}_1(\mu), \tag{30.1}$$

$$\mu\frac{dx_2}{dt} = F_2(x,t,\mu), \qquad x_2|_{t=0} = \overset{\circ}{x}_2(\mu).$$

Здесь x_i, F_i, $\overset{\circ}{x}_i$ – N_i-мерные векторы; $i = 1{,}2$; $x = (x_1, x_2)$; t – независимая переменная (время); $\mu > 0$ – малый параметр.

Если положить $\mu = 0$, то порядок системы уравнений (30.1) понизится и решение дифференциальных уравнений (30.1) не сможет, вообще говоря, удовлетворить всем начальным условиям (30.1).

Введём обозначения: $D_x = D_1 \times D_2$; $D_i \subset \mathbf{R}^{N_i}$ – окрестность точки $x_i = 0$; D_t – множество в пространстве $\mathbf{R} \ni t$; $\bar{t}$, $\bar{\mu}$ – положительные числа; $\mathbf{R}^N$ – N-мерное векторное пространство действительных чисел; $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$.

Определение 30.1. Задача (30.1) называется *сингулярно возмущенной задачей Коши*, если: 1) функции $F_1(x,t,\mu)$, $F_2(x,t,\mu)$ определены на прямом произведении области D_x и отрезков $0 \le t \le \bar{t}$, $0 \le \mu \le \bar{\mu}$; 2) функции $\overset{\circ}{x}_1(\mu)$, $\overset{\circ}{x}_2(\mu)$ определены на отрезке $0 \le \mu \le \bar{\mu}$ и имеют значения в областях D_1, D_2 соответственно; 3) функции $F_1(x,t,0)$, $F_2(x,t,0)$ не равны тождественно нулю.

Определение 30.2. Задача

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = F_1(\bar{x},t,0), \qquad \bar{x}_1(0) = \overset{\circ}{x}_1(0), \qquad F_2(\bar{x},t,0) = 0 \tag{30.2}$$

называется *вырожденной задачей*.

Определение 30.3. Задача (30.1) называется *задачей Тихонова на множестве* $D_{t\mu} \ni (t,\mu)$, если найдётся такое решение $\bar{x}(t)$ задачи (30.2), что для любых значений $(t_*,\mu_*) \in D_{t\mu}$, $t_* > 0$ решение задачи (30.1) существует при $0 \le t \le t_*$, $0 < \mu \le \mu_*$ и

$$\lim_{\mu \to 0+0} x(t_*,\mu) = \bar{x}(t_*).$$

Решение задачи Тихонова имеет быстро затухающие составляющие, так что через малый промежуток времени решение достигает окрестности кривой

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = F_1(\bar{x},t,0), \quad \bar{x}_1(0) = \mathring{x}_1(0),$$

лежащей на многообразии $F_2(\bar{x},t,0) = 0$. Такие задачи исследовал А.Н.Тихонов [17].

30.2. Построение асимптотического решения методом пограничных функций

Асимптотическое решение задачи (30.1) строится в виде суммы

$$x(t,\mu) = y_1(t,\mu) + y_2(\tau,\mu), \quad \tau = t\mu^{-1}.$$

Переменная τ называется *быстрым временем*, $y_2(\tau,\mu)$ называется *пограничной функцией*. При выполнении условий, сформулированных в п. 30.4, пограничная функция удовлетворяет неравенству

$$\|y_2(\tau,0)\| \le C\exp(-\kappa_0\tau),$$

где C, $\kappa_0 > 0$ – постоянные (смотрите [8]). Из неравенства следует, что функция y_2 при $\mu \to 0$ вносит существенный вклад в асимптотику решения задачи Тихонова на интервале времени порядка μ. Функция $y_1(t,\mu)$ является основным членом асимптотики на всём интервале времени за исключением *пограничного слоя*, примыкающего к точке $t = 0$ и стремящегося к нулю при $\mu \to 0$.

Разложим функции y_1, y_2 в ряды по степеням μ:

$$y_1(t,\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} y_1^{(k)}(t)\,\mu^k, \qquad y_2(\tau,\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} y_2^{(k)}(\tau)\,\mu^k. \quad (30.3)$$

Тогда асимптотическое решение задачи (30.1) примет вид

$$\boxed{x(t,\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_1^{(k)}(t) + y_2^{(k)}(\tau)\right]\mu^k.} \qquad (30.4)$$

Коэффициенты ряда (30.4) будем находить, используя уравнения

$$\frac{dy_{11}}{dt} = F_1(y_1, t, \mu), \qquad \mu\frac{dy_{12}}{dt} = F_2(y_1, t, \mu), \qquad (30.5)$$

$$\frac{dy_{21}}{d\tau} = \mu\,[F_1(y_1 + y_2, \mu\tau, \mu) - F_1(y_1, \mu\tau, \mu)],$$

$$\frac{dy_{22}}{d\tau} = F_2(y_1 + y_2, \mu\tau, \mu) - F_2(y_1, \mu\tau, \mu),$$

$$\lim_{\tau\to\infty} y_{21}(\tau,\mu) = 0, \qquad y_1(0,\mu) + y_2(0,\mu) = x^{\circ}(\mu).$$

Здесь $y_1 = (y_{11}, y_{12}),\ y_2 = (y_{21}, y_{22}),\ x^{\circ} = \left(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2\right)$.

Опишем построение уравнений для коэффициентов ряда (30.4), предполагая, что все операции имеют смысл.

- В уравнения (30.5) подставляем ряды (30.3).
- Разлагаем левые и правые части уравнений в ряды по степеням μ так, чтобы в уравнениях, содержащих производные $dy_{21}/d\tau,\ dy_{22}/d\tau,$ коэффициенты разложения зависели только от переменной τ. Для этого при разложении пользуемся равенством $t = \mu\tau$.
- Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях μ. Получаем уравнения для $y_1^{(k)}(t),\ y_2^{(k)}(\tau)$.

После подстановки рядов (30.3) в уравнения (30.5) получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{dy_{11}^{(k)}(t)}{dt}\,\mu^k = F_1\left(\sum_{q=0}^{\infty} y_1^{(q)}(t)\,\mu^q, t, \mu\right); \tag{30.6}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{dy_{12}^{(k)}(t)}{dt}\mu^{k+1} = F_2\left(\sum_{q=0}^{\infty} y_1^{(q)}(t)\,\mu^q, t, \mu\right);$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{dy_{21}^{(k)}(\tau)}{d\tau}\mu^k = \mu\left\{F_1\left(\sum_{q=0}^{\infty}\left[y_1^{(q)}(\mu\tau) + y_2^{(q)}(\tau)\right]\mu^q, \mu\tau, \mu\right) - \right.$$

$$\left. -F_1\left(\sum_{q=0}^{\infty} y_1^{(q)}(\mu\tau)\,\mu^q, \mu\tau, \mu\right)\right\};$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{dy_{22}^{(k)}(\tau)}{d\tau}\mu^k = F_2\left(\sum_{q=0}^{\infty}\left[y_1^{(q)}(\mu\tau) + y_2^{(q)}(\tau)\right]\,\mu^q, \mu\tau, \mu\right) -$$

$$-F_2\left(\sum_{q=0}^{\infty} y_1^{(q)}(\mu\tau)\,\mu^q, \mu\tau, \mu\right);$$

$$\lim_{\tau\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} y_{21}^{(k)}(\tau)\,\mu^k = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[y_1^{(k)}(0) + y_2^{(k)}(0)\right]\,\mu^k = x^{\circ}(\mu).$$

Здесь $y_1^{(k)} = \left(y_{11}^{(k)}, y_{12}^{(k)}\right)$; $y_2^{(k)} = \left(y_{21}^{(k)},\ y_{22}^{(k)}\right)$. Разложив левые и правые части уравнений (30.6) в ряды по степеням μ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим:

$\boxed{k=0}$

$$\frac{dy_{11}^{(0)}(t)}{dt} = F_1\left(y_1^{(0)}(t), t, 0\right); \tag{30.7}$$

$$0 = F_2\left(y_1^{(0)}(t), t, 0\right); \qquad \frac{dy_{21}^{(0)}(\tau)}{d\tau} = 0;$$

$$\frac{dy_{22}^{(0)}(\tau)}{d\tau} = F_2\left(y_1^{(0)}(0) + y_2^{(0)}(\tau), 0,0\right) - F_2\left(y_1^{(0)}(0), 0,0\right);$$

$$\lim_{\tau \to \infty} y_{21}^{(0)}(\tau) = 0, \qquad\qquad y_1^{(0)}(0) + y_2^{(0)}(0) = x^{\circ}(0).$$

$\boxed{k = 1}$

$$\frac{dy_{11}^{(1)}(t)}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial x}\left(y_1^{(0)}(t), t, 0\right) y_1^{(1)}(t) + \frac{\partial F_1}{\partial \mu}\left(y_1^{(0)}(t), t, 0\right);$$

$$\frac{dy_{12}^{(0)}(t)}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial x}\left(y_1^{(0)}(t), t, 0\right) y_1^{(1)}(t) + \frac{\partial F_2}{\partial \mu}\left(y_1^{(0)}(t), t, 0\right);$$

$$\frac{dy_{21}^{(1)}(\tau)}{d\tau} = \left[F_1\left(y_1^{(0)}(0) + y_2^{(0)}(\tau), 0,0\right) - F_1\left(y_1^{(0)}(0), 0,0\right)\right];$$

$$\frac{dy_{22}^{(1)}(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial F_2}{\partial x}\left(y_1^{(0)}(0) + y_2^{(0)}(\tau), 0,0\right) \times$$

$$\times \left[\frac{dy_1^{(0)}}{dt}(0)\,\tau + y_1^{(1)}(0) + y_2^{(1)}(\tau)\right] +$$

$$+ \frac{\partial F_2}{\partial t}\left(y_1^{(0)}(0) + y_2^{(0)}(\tau), 0,0\right) \tau +$$

$$+ \frac{\partial F_2}{\partial \mu}\left(y_1^{(0)}(0) + y_2^{(0)}(\tau), 0,0\right) -$$

$$- \frac{\partial F_2}{\partial x}\left(y_1^{(0)}(0), 0,0\right) \left[\frac{dy_1^{(0)}}{dt}(0)\,\tau + y_1^{(1)}(0)\right] -$$

$$- \frac{\partial F_2}{\partial t}\left(y_1^{(0)}(0), 0,0\right) \tau - \frac{\partial F_2}{\partial \mu}\left(y_1^{(0)}(0), 0,0\right);$$

$$\lim_{\tau \to \infty} y_{21}^{(1)}(\tau) = 0, \qquad y_1^{(1)}(0) + y_2^{(1)}(0) = \frac{dx^{\circ}}{d\mu}(0).$$

Здесь производными $\partial F_i/\partial x$ обозначены матрицы Якоби.

Определение 30.4. *Матрицей Якоби* F_x (или $\partial F/\partial x$) *называется* матрица, составленная из частных производных компонент вектора F по компонентам вектора x.

Из уравнений (30.7) следует, что

$$y_1^{(0)}(t) = \bar{x}(t),$$

где $\bar{x}(t)$ – решение вырожденной задачи (30.2); при $k \geq 1$ коэффициенты ряда (30.4) находятся из линейных уравнений (алгебраических или дифференциальных, смотрите п. 30.3).

30.3. Порядок вычисления коэффициентов асимптотики

Определение 30.5. *Матрицей Коши* $U(t,s)$ уравнения

$$\frac{d\zeta}{dt} = A(t)\zeta, \tag{30.8}$$

где $A(t)$ – квадратная матрица, называется фундаментальная матрица системы (30.8), равная единичной при $t = s$: $U(s,s) = E$.

Коэффициенты ряда (30.4) определяются последовательно для $k = 0, 1, \ldots$. При фиксированном значении k:

30.3.1. Находится функция $y_{21}^{(k)}(\tau)$ по формулам

$$y_{21}^{(0)} = 0; \qquad y_{21}^{(k)} = \varphi_{k21}(\tau) \equiv -\int_{\tau}^{\infty} f_{k21}(\sigma)d\sigma,\ k \geq 1, \tag{30.9}$$

$$f_{k21}(\tau) = \left[\mu\, F_1\left(\sum_{q=0}^{k-1}\left[y_1^{(q)}(\mu\tau) + y_2^{(q)}(\tau)\right]\mu^q, \mu\tau, \mu\right) - \right.$$

$$-\mu\, F_1\left(\sum_{q=0}^{k-1} y_1^{(q)}(\mu\tau)\,\mu^q, \mu\tau, \mu\right)\Bigg]^{(k)}.$$

Здесь и далее в §30 скобки $[\quad]^{(k)}$ обозначают коэффициент при μ^k в разложении функции, стоящей в квадратных скобках, в ряд по степеням μ.

30.3.2. Находится $y_{12}^{(k)}$ как функция от $y_{11}^{(k)}$ и t. Если $k = 0$, то

$$y_{12}^{(0)} = \tilde{\varphi}_{012}(y_{11}^{(0)}, t) \tag{30.10}$$

является решением уравнения

$$F_2\left(y_1^{(0)}, t, 0\right) = 0, \qquad y_1^{(0)} = \left(y_{11}^{(0)}, y_{12}^{(0)}\right).$$

Если $k \geq 1,$ то $y_{12}^{(k)}$ – решение линейного алгебраического уравнения:

$$y_{12}^{(k)} = \tilde{\varphi}_{k12}\left(y_{11}^{(k)}, t\right) \equiv -\left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)^{-1} \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right]\left(y_1^{(0)}(t), t, 0\right) \cdot y_{11}^{(k)} + \tag{30.11}$$

$$+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)^{-1}\left(y_1^{(0)}(t), t, 0\right) \cdot f_{k12}(t),$$

$$f_{k12}(t) = \left[\sum_{q=0}^{k-1} \frac{dy_{12}^{(q)}(t)}{dt}\mu^{q+1} - F_2\left(\sum_{q=0}^{k-1} y_1^{(q)}(t)\mu^q, t, \mu\right)\right]^{(k)}.$$

30.3.3. Находится функция $y_{11}^{(k)}(t)$. Если $k = 0$, то $y_{11}^{(0)}(t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{dy_{11}^{(0)}}{dt} = F_1\left(\tilde{y}_1^{(0)}, t, 0\right), \qquad y_{11}^{(0)}(0) = \mathring{x}_1(0),$$

где $\tilde{y}_1^{(0)} = \left(y_{11}^{(0)}, \tilde{\varphi}_{012}(y_{11}^{(0)}, t)\right)$, $\tilde{\varphi}_{012}$ – функция (30.10).

Если $k \geq 1$, то $y_{11}^{(k)}(t)$ – решение линейной задачи Коши:

$$y_{11}^{(k)} = \varphi_{k11}(t) \equiv \widetilde{U}_1(t,0) \cdot \left\{\left[\overset{\circ}{x}_1(\mu)\right]^{(k)} - \varphi_{k21}(0)\right\} +$$

$$+\int_0^t \widetilde{U}_1(t,s) \cdot f_{k11}(s)ds.$$

Здесь $\widetilde{U}_1(t,s)$ – матрица Коши уравнения

$$\frac{dr_1}{dt} = \tilde{A}_1(t)\, r_1,$$

$$\tilde{A}_1(t) = \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)^{-1}\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right]\left(y_1^{(0)}(t), t, 0\right),$$

$$f_{k11}(t) = \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)^{-1}\right]\left(y_1^{(0)}(t), t, 0\right) \cdot f_{k12}(t) +$$

$$+\left[F_1\left(\sum_{q=0}^{k-1} y_1^{(q)}(t)\,\mu^q, t, \mu\right)\right]^{(k)},$$

φ_{k21}, f_{k12} – функции (30.9), (30.11).

30.3.4. Находится функция $y_{12}^{(k)}(t)$. Из равенств (30.10), (30.11) получаем:

$$y_{12}^{(k)} = \varphi_{k12}(t) \equiv \tilde{\varphi}_{k12}\left(y_{11}^{(k)}(t), t\right), \qquad k \geq 0. \quad (30.12)$$

30.3.5. Находится функции $y_{22}^{(k)}(\tau)$. Если $k = 0$, то $y_{22}^{(0)}(\tau)$ – решение задачи Коши

$$\frac{dy_{22}^{(0)}}{d\tau} = F_2\left(y_1^{(0)}(0) + \tilde{y}_2^{(0)}, 0,0\right) - F_2\left(y_1^{(0)}(0), 0,0\right),$$

$$y_{22}^{(0)}(0) = \overset{\circ}{x}_2(0) - \varphi_{012}(0).$$

Здесь $\tilde{y}_2^{(0)} = \left(0, y_{22}^{(0)}\right)$, φ_{012} – функция (30.12).

Если $k \geq 1$, то $y_{22}^{(k)}(\tau)$ – решение линейной задачи Коши:

$$y_{22}^{(k)} = \widetilde{U}_2(\tau, 0) \cdot \left\{\left[\overset{\circ}{x}_2(\mu)\right]^{(k)} - \varphi_{k12}(0)\right\} + \int_0^\tau \widetilde{U}_2(\tau, \sigma) \cdot f_{k22}(\sigma) d\sigma.$$

Здесь $\widetilde{U}_2(\tau, \sigma)$ – матрица Коши уравнения

$$\frac{dr_2}{d\tau} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\left(y_1^{(0)}(0) + y_2^{(0)}(\tau), 0, 0\right) \cdot r_2;$$

$$f_{k22}(\tau) =$$

$$= \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\left(y_1^{(0)}(0) + y_2^{(0)}(\tau), 0, 0\right) \cdot \varphi_{k21}(\tau) +$$

$$+ \left[\frac{\partial F_2}{\partial x}\left(y_1^{(0)}(0) + y_2^{(0)}(\tau), 0, 0\right) - \frac{\partial F_2}{\partial x}\left(y_1^{(0)}(0), 0, 0\right)\right] \cdot y_1^{(k)}(0) +$$

$$+ \left[F_2\left(\sum_{q=0}^{k-1}\left[y_1^{(q)}(\mu\tau) + y_2^{(q)}(\tau)\right]\mu^q, \mu\tau, \mu\right) -\right.$$

$$\left. - F_2\left(\sum_{q=0}^{k-1} y_1^{(q)}(\mu\tau)\,\mu^q, \mu\tau, \mu\right)\right]^{(k)};$$

$$y_2^{(0)}(\tau) = \left(0,\ y_{22}^{(0)}(\tau)\right);$$

φ_{k21}, φ_{k12} – функции (30.9), (30.12).

30.4. Условия, налагаемые на сингулярные уравнения

Определение 30.6. *Нормы вектора* x и *матрицы* A определяются равенствами

$$\|x\| = \max_{i=\overline{1,N}} |x_i|, \qquad \|A\| = \max_{i=\overline{1,N_1}} \sum_{j=1}^{N_2} \left|A_{ij}\right|,$$

$$x = (x_1, \dots, x_N), \qquad A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N_2} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N_1 1} & \cdots & A_{N_1 N_2} \end{pmatrix}.$$

Перечислим условия, при выполнении которых ряд (30.4) является асимптотическим решением задачи (30.1). Предварительно заметим следующее.

В ряд (30.4) входят функции $y_1^{(0)}(t)$, $y_2^{(0)}(\tau)$, являющиеся решением уравнений (30.7). Предполагаем, что явный вид $y_1^{(0)}(t)$, $y_2^{(0)}(\tau)$ известен. Введём новую переменную

$$\Delta x = x - \bar{x}(t), \quad \bar{x}(t) = y_1^{(0)}(t).$$

Это позволит привести задачу (30.1) к виду, удобному для формулировки теорем. Для Δx задача имеет вид

$$\frac{d\Delta x_1}{dt} = \Delta F_1(\Delta x, t, \mu), \quad \Delta x_1|_{t=0} = \Delta \overset{\circ}{x}_1(\mu),$$

$$\mu \frac{d\Delta x_2}{dt} = \Delta F_2(\Delta x, t, \mu), \quad \Delta x_2|_{t=0} = \Delta \overset{\circ}{x}_2(\mu),$$

$$\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2).$$

Здесь

$$\Delta F_1(x, t, \mu) = F_1(\bar{x}(t) + x, t, \mu) - F_1(\bar{x}(t), t, 0),$$

$$\Delta F_2(x, t, \mu) = F_2(\bar{x}(t) + x, t, \mu) - \mu \frac{d\bar{x}_2}{dt},$$

$$\Delta \overset{\circ}{x}_1(\mu) = \overset{\circ}{x}_1(\mu) - \overset{\circ}{x}_1(0),$$

$$\Delta \overset{\circ}{x}_2(\mu) = \overset{\circ}{x}_2(\mu) - \bar{x}_2(0).$$

Так как $\bar{x}(t)$ – решение вырожденной задачи (30.2), то

$$\Delta F_1(0,t,0) = 0, \quad \Delta F_2(0,t,0) = 0, \quad \Delta \overset{\circ}{x}_1(0) = 0.$$

Исходя из проделанных вычислений, будем предполагать, что в системе (30.1) уже проведена соответствующая замена, и значит выполняется

Условие 30.1. $F_1(0,t,0) = 0,\ F_2(0,t,0) = 0,\ \overset{\circ}{x}_1(0) = 0,\ t \in D_t.$

Условие 30.2. Функции $F_1(x,t,\mu)$, $F_2(x,t,\mu)$ имеют непрерывные, ограниченные по норме частные производные до $(n+2)$-го порядка включительно по всем переменным при $x \in D_x,\ t \in D_t$, $0 \le \mu \le \bar{\mu}$.

Условие 30.3. Функции $\overset{\circ}{x}_1(\mu)$, $\overset{\circ}{x}_2(\mu)$ имеют непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно при $0 \le \mu \le \bar{\mu}$.

Условие 30.4. Матрица $\Psi(x,t,0)$ ограничена по норме при $x \in D_x,\ t \in D_t$,

$$\Psi(x,t,\mu) = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)^{-1}(x,t,\mu).$$

При выполнении условия 30.1 вырожденная задача имеет нулевое решение:

$$\bar{x}(t) = y_1^{(0)}(t) = 0.$$

Будем рассматривать именно это решение, хотя в общем случае оно не единственно (смотрите [8])

Условие 30.5. $y_1^{(0)}(t) = 0.$

Условие 30.6. а) Собственные числа матрицы

$$A_{2*} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)(0,0,0)$$

лежат в левой полуплоскости, б) точка $\overset{\circ}{x_2}(0)$ принадлежит области влияния D_{2*} нулевого решения уравнения

$$\frac{dr_2}{d\tau} = F_2(\tilde{r}, 0,0), \qquad \tilde{r} = (0, r_2). \tag{30.13}$$

Определение 30.7 *Областью влияния D_{2*} нулевого решения уравнения* (30.13) называется множество таких точек $\overset{\circ}{r_2} \in D_2$, что решение $r_2 = r_2(\tau)$ уравнения (30.13) с начальным условием $r_2(0) = \overset{\circ}{r_2}$ существует при $\tau \geq 0$, $r_2(\tau) \in D_2$, $r_2(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$.

Отметим, что из условия 30.6а следует асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнения (30.13). Поэтому $D_{2*} \neq \emptyset$ [1].

Условие 30.7. Множество

$$D_x^{(0)} = \left\{x: x = \theta y_2^{(0)}(\tau),\ \tau \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 1\right\}$$

принадлежит окрестности D_x.

Условие 30.8. Матрица Коши $U_2(t, s, \mu)$ уравнения

$$\mu \frac{dr_2}{dt} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)(0, t, 0)\, r_2$$

удовлетворяет неравенствам

$$\|U_2(t, s, \mu)\| \leq C_2 \exp[-\kappa_2 (t - s)\mu^{-1}]$$

при $0 \leq s \leq t$, $s \in D_t$, $t \in D_t$, $0 < \mu \leq \bar{\mu}$. Здесь κ_2 – положительное число.

30.5. Теоремы о решении сингулярно возмущённой задачи Коши

Теорема 30.1 (Тихонова о предельном переходе [17]). *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_2, C_2, $\bar{t}$, *что при* $n = 0$, $D_t = \{t\colon\ 0 \le t \le \bar{t}\}$ *выполняются условия* 30.1–30.8. *Тогда*:

1) *найдётся постоянная* $\mu_* > 0$, *не зависящая от* t, μ *и такая, что решение задачи* (30.1) *существует и единственно при* $0 \le t \le \bar{t}$, $0 < \mu \le \mu_*$;

2) $$\lim_{\mu \to 0+0} x_1(t,\mu) = \bar{x}_1(t), \qquad 0 \le t \le \bar{t};$$

$$\lim_{\mu \to 0+0} x_2(t,\mu) = \bar{x}_2(t), \qquad 0 < t \le \bar{t};$$

3) $x_1(t,\mu) \to \bar{x}_1(t)$ *равномерно на множестве* $0 \le t \le \bar{t}$; *для любого* t_1, $0 < t_1 < \bar{t}$, $x_2(t,\mu) \to \bar{x}_2(t)$ *равномерно на множестве* $t_1 \le t \le \bar{t}$.

Сформулируем теоремы о близости решения задачи (30.1) к частичной сумме $X_n(t,\mu)$ ряда (30.4), построенного методом пограничных функций,

$$X_n(t,\mu) = \sum_{k=0}^{n} \left[y_1^{(k)}(t) + y_2^{(k)}(\tau)\right]\mu^k. \tag{30.14}$$

Теорема 30.2 (Васильевой [4]). *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_2, C_2, $\bar{t}$, *что при* $D_t = \{t\colon\ 0 \le t \le \bar{t}\}$ *выполняются условия* 30.1–30.8. *Тогда найдутся* $\mu_* > 0$, C_*, *не зависящие от* t, μ *и такие, что решение задачи* (30.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t,\mu) - X_n(t,\mu)\| \le C_*\mu^{n+1}$$

при $0 \le t \le \bar{t}, \quad 0 < \mu \le \mu_*$.

Теорема 30.3 [8]. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}, \varkappa_2, \; C_1, \; C_2$ *и постоянные* $\varkappa_1 \ge 0, \; \overset{\circ}{C}_1 \ge 0$, *что при* $D_t = \{t\colon \; t \ge 0\}$ *выполняются условия* 30.1–30.8 *и справедливо неравенство*

$$\|U_1(t,s)\| \le \overset{\circ}{C}_1 (t-s)^{\varkappa_1} + C_1, \qquad 0 \le s \le t.$$

Тогда для любых значений $\bar{t} > 0, \;\; \chi, \;\; 0 \le \chi < [2(\varkappa_1 + 1)]^{-1}$, *найдутся* $\mu_* > 0, \; C_*, \; \overset{\circ}{C}_* \ge 0$, *не зависящие* от t, μ *и такие, что решение задачи* (30.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t,\mu) - X_n(t,\mu)\| \le \mu^{n+1}\left[\overset{\circ}{C}_* t^{(\varkappa_1+1)(2n+1)} + C_*\right]$$

при $0 \le t \le \bar{t}\mu^{-\chi}, \;\; 0 < \mu \le \mu_*$.

Здесь $U_1(t,s)$ – матрица Коши уравнения

$$\frac{dr_1}{dt} = A_1(0,t,0)\, r_1, \tag{30.15}$$

$$A_1(x,t,\mu) = \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)^{-1}\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right](x,t,\mu).$$

Из определения 30.3 задачи Тихонова и из теорем 30.1–30.3 получаем

Следствие 30.1. Пусть существуют такие положительные постоянные $\bar{\mu}, \varkappa_2, C_2, \bar{t}$, что при $n = 0, \;\; D_t = \{t\colon \; 0 \le t \le \bar{t}\,\}$ выполняются условия 30.1–30.8. Тогда найдётся такое значение $\bar{\mu}_* > 0$, что задача (30.1) является задачей Тихонова на множестве $0 \le t \le \bar{t}, \; 0 < \mu \le \bar{\mu}_*$.

Следствие 30.2. Пусть существуют такие положительные постоянные $\bar{\mu}, \;\; \varkappa_2, \;\; C_1, \;\; C_2$ и постоянные $\varkappa_1 \ge 0, \; \overset{\circ}{C}_1 \ge 0$, что при

$n = 0$, $D_t = \{t\colon\ t \geq 0\}$ выполняются условия 30.1–30.8 и справедливо неравенство

$$\|U_1(t,s)\| \leq \overset{\circ}{C_1}(t-s)^{\kappa_1} + C_1, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Тогда для любых значений $\bar{t} > 0$, χ, $0 \leq \chi < [2(\kappa_1 + 1)]^{-1}$, найдётся такое $\overline{\mu_*} > 0$, что задача (30.1) является задачей Тихонова на множестве $0 \leq t \leq \bar{t}\mu^{-\chi}$, $0 < \mu \leq \overline{\mu_*}$.

30.6. Об асимптотическом решении

Определения 30.8. Функция $X(t,\mu)$ называется *асимптотическим приближением функции $x(t,\mu)$ на множестве $D_t = D_t(\mu) \ni t$ при* $\mu \to 0$, если найдётся такое значение $\mu_* > 0$, что $x(t,\mu)$, $X(t,\mu)$ существуют при $t \in D_t(\mu)$, $0 < \mu \leq \mu_*$ и

$$\lim_{\mu \to 0+0} \sup_{t \in D_t(\mu)} \|x(t,\mu) - X(t,\mu)\| = 0.$$

Если при этом

$$\lim_{\mu \to 0+0} \frac{\sup_{t \in D_t(\mu)} \|x(t,\mu) - X(t,\mu)\|}{\psi_1(\mu)} = 0,$$

$$\lim_{\mu \to 0+0} \frac{\sup_{t \in D_t(\mu)} \|x(t,\mu) - X(t,\mu)\|}{\psi_2(\mu)} = \text{const},$$

то $X(t,\mu)$ называется *асимптотическим приближением функции $x(t,\mu)$ на множестве $D_t(\mu)$ с точностью порядка* $o(\psi_1(\mu))$, $O(\psi_2(\mu))$. Обозначение:

$$x(t,\mu) = X(t,\mu) + o(\psi_1(\mu)),$$

$$x(t,\mu) = X(t,\mu) + O(\psi_2(\mu)), \quad t \in D_t(\mu), \quad \mu \to 0.$$

Определения 30.9. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(t,\mu)$ называется *асимптотическим рядом (асимптотическим разложением, асимптотикой) функции $x(t,\mu)$ на множестве $D_t(\mu)$ при $\mu \to 0$*, если для любого $n \geq 0$

$$x(t,\mu) = X_n(t,\mu) + o(\psi_n(\mu)), \quad t \in D_t(\mu), \quad \mu \to 0,$$

$$\lim_{\mu \to 0+0} \frac{\psi_{n+1}(\mu)}{\psi_n(\mu)} = 0, \qquad X_n(t,\mu) = \sum_{k=0}^{n} x^{(k)}(t,\mu).$$

Обозначение:

$$x(t,\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(t,\mu), \quad t \in D_t(\mu), \quad \mu \to 0.$$

Определения 30.10. Функция $X_n(t,\mu)$ называется n-м *приближением функции $x(t,\mu)$*.

Разность $u(t,\mu) = x(t,\mu) - X_n(t,\mu)$ называется *остаточным членом n-го порядка асимптотического разложения функции $x(t,\mu)$*.

Интервал $0 \leq t \leq t_*$ $(0 \leq t < t_*)$ называется *асимптотически большим интервалом переменной t при $\mu \to 0$*, если

$$t_* = t_*(\mu) \geq 0, \qquad \lim_{\mu \to 0+0} t_*(\mu) = \infty.$$

Из теорем 30.2, 30.3 следует, что при выполнении условий этих теорем функция (30.15) является асимптотическим приближением решения (*асимптотическим решением*) задачи (30.1) на отрезке (теорема 30.2) и на асимптотически большом интервале времени (теорема 30.3). Справедливы равенства

$$x(t,\mu) = X_n(t,\mu) + o(\mu^n), \quad 0 \le t \le \bar{t}, \quad \mu \to 0$$
(теорема 30.2);

$$x(t,\mu) = X_n(t,\mu) + o(\mu^{n\chi_*}), \quad 0 \le t \le \bar{t}\mu^{-\chi}, \quad \mu \to 0$$
(теорема 30.3),

где $\bar{t}$, χ – произвольные числа из множества

$$\bar{t} > 0, \quad 0 \le \chi < [2(\kappa_1 + 1)]^{-1}, \quad \chi_* = 1 - 2\chi(\kappa_1 + 1).$$

30.7. Оценка остаточного члена, интервала времени, значений малого параметра

Чтобы сформулировать теорему, позволяющую оценивать численно остаточный член асимптотического разложения решения, интервал времени и значения малого параметра, рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{du_1}{dt} = B_{11}(t,\mu)\, u_1 + B_{12}(t,\mu)\, u_2 + G_1(u,t,\mu), \tag{30.16}$$

$$\mu\frac{du_2}{dt} = B_{21}(t,\mu)\, u_1 + B_{22}(t,\mu)\, u_2 + G_2(u,t,\mu),$$

$$u|_{t=0} = 0.$$

Здесь $u = (u_1, u_2)$; u_i, G_i – N_i-мерные векторы; $B_{ij}(t,\mu)$ – матрица размерности $N_i \times N_j$; t – независимая переменная (время); $\mu > 0$ – малый параметр; $i = 1,2$; $j = 1,2$.

От задачи (30.1) к задаче (30.16) можно перейти, вводя замену переменных

$$x = x^{\circ} + u \quad \text{или} \quad x = X_n(t,\mu) - X_n(0,\mu) + x^{\circ} + u$$

и выделяя в правых частях дифференциальных уравнений линейные по u члены.

Введём обозначения:

$$v(t,\mu) = \max_{0 \le s \le t} \|u(s,\mu)\|,$$

$$a(t,\mu) = \max_{0 \le s \le t;\ i=1,2} \int_0^s \sum_{j=1}^{2} \left\|P_{ij}(s,r,\mu)\right\| \cdot L_{2j}(r,\mu)dr,$$

$$b(t,\mu) = \max_{0 \le s \le t;\ i=1,2} \Big\{\mu \cdot \left\|(B_{12}B_{22}^{-1})(s,\mu)\right\| \langle i=1\rangle +$$

$$+\int_0^s \Big[\|P_i(s,r,\mu)\| +$$

$$+\sum_{j=1}^{2} \left\|P_{ij}(s,r,\mu)\right\| \cdot L_{1j}(r,\mu)\Big] dr\Big\},$$

$$c(t,\mu) = \max_{0 \le s \le t;\ i=1,2} \int_0^s \sum_{j=1}^{2} \left\|P_{ij}(s,r,\mu) \cdot G_j(0,r,\mu)\right\| dr,$$

$$P_1(t,s,\mu) = \mu\, V_1(t,s,\mu) \cdot \{(B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21})(s,\mu) \times$$

$$\times (B_{12}B_{22}^{-1})(s,\mu) - \frac{\partial}{\partial s}[(B_{12}B_{22}^{-1})(s,\mu)]\Big\},$$

$$P_2(t,s,\mu) = V_2(t,s,\mu) \cdot (B_{21}B_{12}B_{22}^{-1})(s,\mu) +$$

$$+\mu^{-1} \int_s^t V_2(t,r,\mu) \cdot B_{21}(r,\mu) \cdot P_1(r,s,\mu)\, dr,$$

$$P_{11}(t,s,\mu) = V_1(t,s,\mu),$$

$$P_{12}(t,s,\mu) = -V_1(t,s,\mu) \cdot (B_{12}B_{22}^{-1})(s,\mu),$$

$$P_{21}(t,s,\mu) = \mu^{-1} \int_s^t V_2(t,r,\mu) \cdot B_{21}(r,\mu) \cdot V_1(r,s,\mu)\, dr,$$

$$P_{22}(t,s,\mu) = \mu^{-1}\, V_2(t,s,\mu) +$$

$$+\mu^{-1}\int_s^t V_2(t,r,\mu)\cdot B_{21}(r,\mu)\cdot P_{12}(r,s,\mu)\,dr,$$

$V_1(t,s,\mu)$ – матрица Коши уравнения

$$\frac{dr_1}{dt} = (B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21})(t,\mu)\cdot r_1,$$

$V_2(t,s,\mu)$ – матрица Коши уравнения

$$\mu\frac{dr_2}{dt} = B_{22}(t,\mu)\cdot r_2.$$

Выражение $\langle i = 1\rangle$ при слагаемом означает, что слагаемое добавляется только при $i = 1$.

Перечислим условия, при которых будем рассматривать задачу (30.16).

Условие 30.9. При $0 \le t \le t_*(\mu)$, $0 < \mu \le \bar{\mu}$ функции $B_{ij}(t,\mu)$ непрерывно дифференцируемы по t и непрерывны по μ ($i = 1,2$; $j = 1,2$).

Условие 30.10. При $\|u\| \le \delta_u$, $\|\bar{u}\| \le \delta_u$, $0 \le t \le t_*(\mu)$, $0 < \mu \le \bar{\mu}$ функции $G_1(u,t,\mu)$, $G_2(u,t,\mu)$ непрерывны по u, t и удовлетворяют неравенствам

$$\|G_i(u,t,\mu) - G_i(\bar{u},t,\mu)\| \le$$

$$\le [L_{1i}(t,\mu) + L_{2i}(t,\mu)\cdot(\|u\| + \|\bar{u}\|)]\cdot\|u - \bar{u}\|,$$

где функции $L_{1i}(t,\mu) \ge 0$, $L_{2i}(t,\mu) \ge 0$ непрерывны по t при $0 \le t \le t_*(\mu)$, $0 < \mu \le \bar{\mu}$; $i = 1,2$.

Условие 30.11. При $0 \le t \le t_*(\mu)$, $0 < \mu \le \bar{\mu}$

$$\det B_{22}(t,\mu) \ne 0.$$

Теорема 30.4 [8]. *Пусть существуют такие постоянные* $\delta_u > 0,\ \bar{\mu} > 0$ *и функция* $t_*(\mu) > 0$, *что для задачи* (30.16) *выполняются условия* 30.9–30.11. *Тогда для всех значений* $t,\ \mu$ *из множества*

$$p(t,\mu) \equiv 1 - b(t,\mu) > 0, \tag{30.17}$$

$$q(t,\mu) \equiv p^2(t,\mu) - 4a(t,\mu)\cdot c(t,\mu) > 0,$$

$$2c(t,\mu) < \delta_u\left[p(t,\mu) + \sqrt{q(t,\mu)}\right],$$

$$0 \le t \le t_*(\mu), \qquad 0 < \mu \le \bar{\mu}$$

решение задачи (30.16) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|u(t,\mu)\| \le \frac{2c(t,\mu)}{p(t,\mu)+\sqrt{q(t,\mu)}}\,. \tag{30.18}$$

Если $t_*(\mu) = \infty$, то неравенство $0 \le t \le t_*(\mu)$ нужно заменить на $t \ge 0$.

30.8. Второй метод Ляпунова

Оценку решения задачи Тихонова можно получить, используя второй метод Ляпунова. Введём обозначения: J – целое число, $1 \le J \le N$; $\bar{x}$ – вектор, состоящий из J компонент вектора x; D – множество в пространстве $\mathbf{R}^{N+2} \ni (x,t,\mu)$;

$$D_* = \{(x,t,\mu)\colon \|x\| \le \delta_x,\ t \ge 0,\ 0 < \mu \le \bar{\mu}\}.$$

Определение 30.11. *Производной по времени функции* $\Lambda(x,t,\mu)$ *в силу системы* (30.1) называется функция

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\partial\Lambda(x,t,\mu)}{\partial x_1}\,F_1(x,t,\mu) + \frac{\partial\Lambda(x,t,\mu)}{\partial x_2}\,F_2(x,t,\mu)\,\mu^{-1} + \frac{\partial\Lambda(x,t,\mu)}{\partial t}.$$

В основе второго метода Ляпунова лежит следующее обстоятельство. Пусть при $(x,t,\mu)\in D$ производная по времени функции $\Lambda(x,t,\mu)$ в силу системы (30.1) неположительна. Тогда для решения $x=x(t,\mu)$ задачи (30.1) справедливо неравенство

$$\Lambda(x(\bar{t},\mu),\bar{t},\mu)\le\Lambda\big(x^{\circ}(\mu),0,\mu\big) \tag{30.19}$$

при всех $\bar{t}$, μ, удовлетворяющих условиям: при $0\le t\le\bar{t}$ решение $x(t,\mu)$ существует и $(x(t,\mu),t,\mu)\in D$. Неравенство (30.19) позволяет иногда получить оценку вектора x или отдельных его компонент. Например, справедлива

Теорема 30.5 [8]. *Пусть для некоторых постоянных* $\delta_x>0$, $\bar{\mu}>0$, $\rho>0$ *выполнены следующие условия.*

1. *При* $(x,t,\mu)\in D_*$ *функции* $F_1(x,t,\mu)$, $F_2(x,t,\mu)$ *непрерывны по* t *и имеют непрерывные по* x, t *частные производные по компонентам вектора* x.

2. *Существует такая функция* $\Lambda(x,t,\mu)$, *что*: а) *при* $(x,t,\mu)\in D_*$ *производная* $\Lambda(x,t,\mu)$ *в силу системы* (30.1) *существует и неположительна*; б) $\Lambda(x,t,\mu)\ge\rho$ *при* $(x,t,\mu)\in D_*$, $\|\bar{x}\|=\delta_x$.

Тогда, если множество

$$0<\mu\le\bar{\mu},\quad \|x^{\circ}(\mu)\|<\delta_x,\quad \Lambda\big(x^{\circ}(\mu),0,\mu\big)<\rho \tag{30.20}$$

не пусто, то для любого μ *из этого множества решение задачи* (30.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству* $\|\bar{x}(t,\mu)\|<\delta_x$ *при* $0\le t\le t_*$, $t<\infty$.

Если $J=N$, *то* $t_*=\infty$; *если* $J<N$, *то* $t_*=t_*(\mu)>0$.

Теорема 30.5 аналогична теореме Ляпунова при $J=N$ [12] и теореме Румянцева при $J<N$ [16].

Определение 30.12. Функция $\Lambda(x,t,\mu)$, удовлетворяющая условиям 2а, 2б теоремы 30.5, называется *функцией Ляпунова*.

Из теоремы 30.5 следует, что для всех μ из множества (30.19) и $t,\ 0 \leq t \leq t_*(\mu)$, справедливо неравенство

$$\Lambda(x(t,\mu),t,\mu) \leq \Lambda\big(x^{\circ}(\mu),0,\mu\big). \tag{30.21}$$

Неравенство $d\Lambda/dt \leq 0$ и неравенства (30.20), (30.21) позволяют иногда получить оценку решения задачи Тихонова и оценку значений t и μ.

30.9. Замечания

Замечание 30.1. Определение 30.1 сингулярно возмущённой задачи Коши дано для отрезка $0 \leq t \leq \bar{t}$. Из теоремы 30.3 следует, что при определённых условиях решение сингулярно возмущённой задачи распространяется на асимптотически большой интервал времени.

Замечание 30.2. В п. 30.5 сформулированы теоремы, из которых следует, что при выполнении условий теорем ряд (30.4) является асимптотикой решения задачи (30.1). Это асимптотика Васильевой — Иманалиева [3, 4].

Замечание 30.3. Теорема Тихонова 30.1 о предельном переходе использовалась при доказательстве корректности прецессионной модели движения гироскопических систем [7]. Прецессионная модель движения гироскопа в кардановом подвесе рассмотрена в п. 18.3.

Замечание 30.4. §30 написан по результатам книги [8].

§ 31. Метод двух параметров

31.1. Регулярно возмущённая задача Коши

Прежде чем перейти к методу двух параметров, рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = F(x,t,\varepsilon), \quad x(0,\varepsilon) = x^{\circ}(\varepsilon). \tag{31.1}$$

Здесь x, F, x° – N-мерные векторы; ε – малый параметр, t – независимая переменная (время).

Введём обозначения: $D_x \subset \boldsymbol{R}^N$ – окрестность точки $x = 0$; $\bar{t}$, $\bar{\varepsilon}$ – положительные числа.

Определение 31.1. Задача Коши (31.1) называется *регулярно возмущённой*, если: 1) $F(x,t,\varepsilon)$ – гладкая функция на прямом произведении окрестности D_x и отрезков $0 \le t \le \bar{t}$, $0 \le \varepsilon \le \bar{\varepsilon}$; 2) $x^{\circ}(\varepsilon)$ – гладкая функция на отрезке $0 \le \varepsilon \le \bar{\varepsilon}$.

Решение задачи (31.1) строится *методом малого параметра Пуанкаре,* который заключается в следующем (предполагаем, что все операции имеют смысл):

- решение $x = x(t,\varepsilon)$ представляется в виде ряда по степеням ε:

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(t)\,\varepsilon^k; \tag{31.2}$$

- выражение (31.2) подставляется в (31.1);
- правая и левая часть уравнений (31.1) разлагаются в ряды по степеням ε;
- в полученных равенствах приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях ε.

В результате получаются уравнения для коэффициентов ряда (31.2).

Определение 31.2. Ряд (31.2) называется *рядом Пуанкаре.*

Коэффициент $x^{(0)}(t)$ (*нулевое приближение решения* $x(t,\varepsilon)$ задачи (31.1)) является решением *вырожденной задачи*

$$\frac{dx^{(0)}}{dt} = F\left(x^{(0)},t,0\right), \quad x^{(0)}(0) = x^{\circ}(0). \tag{31.3}$$

Коэффициент $x^{(k)}(t)$ при $k \geq 1$ является решением задачи Коши:

$$\frac{dx^{(k)}}{dt} = A(t)\, x^{(k)} + F^{(k)}(t), \qquad x^{(k)}(0) = \left[x^{\circ}(\varepsilon)\right]^{(k)}. \quad (31.4)$$

Здесь

$$A(t) = F_x\left(x^{(0)}(t), t, 0\right),$$

$$F^{(k)}(t) = \left[F\left(\sum_{i=0}^{k-1} x^{(i)}(t)\, \varepsilon^i, t, \varepsilon\right)\right]^{(k)},$$

F_x – матрица Якоби, скобки $[\quad]^{(k)}$ в §31 обозначают коэффициент при ε^k в разложении функции, стоящей в скобках, в ряд по степеням параметра ε.

Задача (31.4) линейна. Её решение имеет вид

$$x^{(k)} = U(t,0) \cdot \left[x^{\circ}(\varepsilon)\right]^{(k)} + \int_0^t U(t,s) \cdot F^{(k)}(s) ds, \qquad (31.5)$$

где $U(t,s)$ – матрица Коши уравнения

$$\frac{d\zeta}{dt} = A(t)\, \zeta.$$

Из написанных формул следует: для получения решения в явном виде (31.2) необходимо знать нулевое приближение $x^{(0)}(t)$ и матрицу $U(t,s)$. Тогда коэффициенты ряда (31.2) вычисляются последовательно по формулам (31.5) для $k = 1, 2, \ldots$

Сформулируем условия, при которых справедлива теорема Пуанкаре.

Условие 31.1. $F(0,t,0) = 0$ при $0 \leq t \leq \bar{t}$, $x^{\circ}(\varepsilon) = 0$.

Условие 31.1 не ограничивает класс задач (31.1). Действительно, пусть условие 31.1 для задачи (31.1) не выполняется. Тогда перейдём к новой переменной $\tilde{x}$ по формуле

$$\tilde{x} = x - x^{(0)}(t) - \overset{\circ}{x}(\varepsilon) + \overset{\circ}{x}(0),$$

где $x^{(0)}(t)$ – решение вырожденной задачи (31.3). Нетрудно проверить, что задача Коши для новой переменной удовлетворяет условию 31.1.

Условие 31.2. На множестве $\|x\| \le \delta_x$, $0 \le t \le \bar{t}$, $|\varepsilon| \le \bar{\varepsilon}$, $x \in \mathbf{C}^N$, $\varepsilon \in \mathbf{C}$ функция $F(x,t,\varepsilon)$ непрерывна по совокупности аргументов и аналитична по x, ε ($\mathbf{C}^N$ – N-мерное пространство комплексных чисел, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^1$).

Теорема 31.1 (Пуанкаре [1]). *Пусть при* $0 \le t \le \bar{t}$, $\bar{t} > 0$ *выполняются условия* 31.1, 31.2. *Тогда найдётся постоянная* $\varepsilon_* > 0$, *не зависящая от* t, ε *и такая, что на множестве* $0 \le t \le \bar{t}$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_*$: 1) *решение задачи* (31.1) *существует и единственно*; 2) *ряд* (31.2) *сходится равномерно к решению задачи* (31.1).

31.2. Построение асимптотического решения методом двух параметров

Рассмотрим сингулярно возмущённую задачу (30.1). Вместе с ней рассмотрим задачу, содержащую два малых параметра μ и ε:

$$\frac{dz_1}{dt} = F_1(z,t,\varepsilon), \quad z_1|_{t=0} = \overset{\circ}{x}_1(\varepsilon), \tag{31.6}$$

$$\mu\frac{dz_2}{dt} = F_2(z,t,\varepsilon), \quad z_2|_{t=0} = \overset{\circ}{x}_2(\varepsilon),$$

где z_i – N_i-мерный вектор; $z = (z_1, z_2)$; $i = 1, 2$.

Опишем *метод двух параметров*. Пусть хотя бы одна из функций F_i, $\overset{\circ}{x}_i$ зависит явно от малого параметра. Тогда при каждом фиксированном значении μ задача (31.6) является регулярно возмущённой задачей Коши с малым параметром ε и её решение можно построить методом малого параметра Пуанкаре в виде ряда

$$z(t,\mu,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(t,\mu)\,\varepsilon^k. \tag{31.7}$$

Тогда решение задачи (30.1) примет вид

$$\boxed{x(t,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(t,\mu)\,\mu^k.} \tag{31.8}$$

Таким образом, метод двух параметров заключается в следующем (предполагаем, что все операции имеют смысл):

- ряд (31.7) подставляется в уравнения (31.6);
- правая и левая часть уравнений (31.6) разлагаются в ряды по степеням ε;
- в полученных равенствах приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях ε.

После указанных операций получаем уравнения для $z^{(k)}(t,\mu)$. При $k = 0$ уравнения имеют вид

$$\frac{dz_1^{(0)}}{dt} = F_1\left(z^{(0)}, t, 0\right), \quad z_1^{(0)}(0,\mu) = \overset{\circ}{x}_1(0), \tag{31.9}$$

$$\mu\frac{dz_2^{(0)}}{dt} = F_2\left(z^{(0)}, t, 0\right), \quad z_2^{(0)}(0,\mu) = \overset{\circ}{x}_2(0),$$

$$z^{(0)} = \left(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}\right).$$

При $k \geq 1$ уравнения следующие:

$$\frac{dz_1^{(k)}}{dt} = F_{1x}\left(z^{(0)}(t,\mu), t, 0\right) z^{(k)} + \tag{31.10}$$

$$+\left[F_1\left(\sum_{j=0}^{k-1} z^{(j)}(t,\mu)\,\varepsilon^j, t, \varepsilon\right)\right]^{(k)},$$

$$\mu\frac{dz_2^{(k)}}{dt} = F_{2x}\left(z^{(0)}(t,\mu), t, 0\right) z^k + \left[F_2\left(\sum_{j=0}^{k-1} z^{(j)}(t,\mu)\,\varepsilon^j, t, \varepsilon\right)\right]^{(k)},$$

$$z_1^{(k)}(0,\mu) = \left[\mathring{x}_1(\varepsilon)\right]^{(k)}, \quad z_2^{(k)}(0,\mu) = \left[\mathring{x}_2(\varepsilon)\right]^{(k)},$$

$$z^{(k)} = \left(z_1^{(k)}, z_2^{(k)}\right).$$

Из уравнений видно, что $z^{(k)}(t,\mu)$ вычисляются последовательно для $k = 0, 1, \dots$. При $k \geq 1$ коэффициент $z^{(k)}(t,\mu)$ является решением линейной задачи Коши (31.10).

Отметим, что если правые части дифференциальных уравнений и начальные значения задачи (30.1) не зависят от малого параметра, то говорить о применении метода двух параметров не приходится, так как ряд (31.8) состоит из одного (первого) члена, совпадающего с точным решением задачи (30.1).

31.3. Теоремы о точном решении сингулярно возмущённой задачи Коши

Обозначим через $\mathbf{C}(D_x)$ окрестность точки $x = 0$ в N-мерном векторном пространстве $\mathbf{C}^N$ комплексных чисел, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^1$**.** Пересечение $\mathbf{C}(D_x)$ с вещественной плоскостью $\operatorname{Im} x = 0$ совпадает с D_x.

Сформулируем теоремы о сходимости ряда (31.8) к решению задачи (30.1). Для этого наложим на задачу (30.1) дополнительные условия.

Условие 31.3. Функции $F_1(x,t,\mu)$, $F_2(x,t,\mu)$ непрерывны по совокупности аргументов, аналитичны по x, μ и ограничены по норме при $x \in \mathbf{C}(D_x) \subset \mathbf{C}^N$**,** $t \in D_t$, $|\mu| \leq \bar{\mu}$, $\mu \in \mathbf{C}$.

Условие 31.4. Функции $\mathring{x}_1(\mu)$, $\mathring{x}_2(\mu)$ аналитичны при $|\mu| \leq \bar{\mu}$, $\mu \in \mathbf{C}$.

Теорема 31.2 [8]. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_2, C_2, $\bar{t}$, *что при* $D_t = \{t\colon\ 0 \leq t \leq \bar{t}\}$, $n = 0$ *выполняются условия* 30.1–30.8, 31.3, 31.4. *Тогда найдётся постоянная* $\mu_* > 0$, *не зависящая от* t, μ *и такая, что на множестве* $0 \leq t \leq \bar{t}$, $\quad 0 < \mu \leq \mu_*$: 1) *решение задачи* (30.1) *существует и* *единственно*; 2) *ряд* (31.8) *сходится равномерно к решению задачи* (30.1).

Теорема 31.3 [8]. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_2, C_1, C_2 *и постоянные* $\kappa_1 \geq 0$, $\mathring{C}_1 \geq 0$, *что при* $D_t = \{t\colon\ t \geq 0\}$, $n = 0$ *выполняются условия* 30.1–30.8, 31.3, 31.4 *и справедливо неравенство*

$$\|U_1(t,s)\| \leq \mathring{C}_1 (t-s)^{\kappa_1} + C_1, \quad 0 \leq s \leq t. \tag{31.11}$$

Тогда для любых значений $\bar{t} > 0$, χ, $0 \leq \chi < [2(\kappa_1 + 1)]^{-1}$, *найдётся постоянная* $\mu_* > 0$, *не зависящая от* t, μ *и такая, что на множестве* $0 \leq t \leq \bar{t}\mu^{-\chi}$, $0 < \mu \leq \mu_*$: 1) *решение задачи* (30.1) *существует и единственно*; 2) *ряд* (31.8) *сходится равномерно к решению задачи* (30.1).

Здесь $U_1(t,s)$ – матрица Коши уравнения (30.15).

31.4. Теоремы об асимптотическом решении сингулярно возмущённой задачи Коши

Обозначим частичную сумму ряда (31.8)

$$Z_n(t,\mu) = \sum_{k=0}^{n} z^{(k)}(t,\mu)\,\mu^k. \tag{31.12}$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 31.4 [8]. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_2, C_2, $\bar{t}$, *что при* $D_t = \{t\colon\ 0 \leq t \leq \bar{t}\}$ *выполняются условия* 30.1–30.8. *Тогда найдутся* $\mu_* > 0$, C_*, *не зависящие от* t, μ *и такие, что решение задачи* (30.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t,\mu) - Z_n(t,\mu)\| \leq C_* \mu^{n+1} \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq \bar{t}, \ \ 0 < \mu \leq \mu_*.$$

Теорема 31.5 [8]. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_2, C_1, C_2 *и постоянные* $\kappa_1 \geq 0$, $\overset{\circ}{C_1} \geq 0$, *что при* $D_t = \{t\colon\ t \geq 0\}$ *выполняются условия* 30.1–30.8 *и справедливо неравенство* (31.11). *Тогда для любых значений* $\bar{t} > 0$, χ, $0 \leq \chi < [2(\kappa_1 + 1)]^{-1}$, *найдутся* $\mu_* > 0$, C_*, $\overset{\circ}{C_*} \geq 0$, *не зависящие от* t, μ *и такие, что решение задачи* (30.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t,\mu) - Z_n(t,\mu)\| \leq \mu^{n+1}\left[\overset{\circ}{C_*} t^{(\kappa_1+1)(2n+1)} + C_*\right]$$

при $0 \leq t \leq \bar{t}\mu^{-\chi}$, $0 < \mu \leq \mu_*$.

Из доказательства теорем 31.2, 31.3 (смотрите [8]) и из теорем 31.3, 31.4 следует, что при выполнении условий этих теорем функция $Z_n(t,\mu)$, задаваемая формулой (31.12), является асимптотическим решением задачи (30.1) на отрезке (теоремы 31.2, 31.4) и на асимптотически большом интервале времени (теоремы 31.3, 31.5). Справедливы равенства

$$x(t,\mu) = Z_n(t,\mu) + o(\mu^n), \qquad 0 \leq t \leq \bar{t}, \qquad \mu \to 0$$

(теоремы 31.2, 31.4);

$$x(t,\mu) = Z_n(t,\mu) + o(\mu^{n\chi_*}), \qquad 0 \leq t \leq \bar{t}\mu^{-\chi}, \qquad \mu \to 0$$

(теоремы 31.3, 31.5),

где $\bar{t}$, χ – произвольные числа из множества

$$\bar{t} > 0, \quad 0 \leq \chi < [2(\kappa_1 + 1)]^{-1}, \quad \chi_* = 1 - 2\chi(\kappa_1 + 1).$$

31.5. Теорема о точном решении при фиксированном значении μ

При выполнении условий теоремы 31.2 ряд (31.8), построенный методом двух параметров, сходится к решению задачи (30.1) на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ при достаточно малых значениях $\mu > 0$. Однако во многих случаях малый параметр μ имеет фиксированное значение. Поэтому представляет интерес теорема 31.6, гарантирующая сходимость ряда (31.8) к решению задачи (30.1) при заданном значении μ на интервале времени, который, вообще говоря, меньше отрезка $[0, \bar{t}]$.

Теорема 31.6 [8]. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_2, C_2, $\bar{t}$, *что при* $D_t = \{t\colon\ 0 \le t \le \bar{t}\}$, $n = 0$ *выполняются условия* 30.1–30.8, 31.3, 31.4. *Пусть* δ_u, μ_* – *такие значения, что* $\delta_u > 0$, $0 < \mu_* \le \bar{\mu}$ *и на множестве*

$$\|u\| \le \delta_u, \quad 0 \le t \le \bar{t}, \quad 0 < \mu \le \mu_*,$$

$$|\varepsilon| \le \mu_*, \qquad u \in \mathbf{C}^N, \qquad \varepsilon \in \mathbf{C}$$

функции $F_i'(u, t, \mu, \varepsilon)$,

$$F_i'(u, t, \mu, \varepsilon) = F_i\big(u + z^{(0)}(t, \mu) + x^{\circ}(\varepsilon) - x^{\circ}(0), t, \varepsilon\big) - \qquad (31.13)$$

$$-F_i\big(z^{(0)}(t, \mu), t, 0\big)$$

аналитичны по u, ε $(i = 1{,}2)$. *Тогда для любого* μ, $0 < \mu < \mu_*$, *найдётся такое значение* $t_* = t_*(\mu)$, *что* $0 < t_* \le \bar{t}$ *и на множестве* $0 \le t < t_*$: 1) *решение задачи* (30.1) *существует и единственно*; 2) *ряд* (31.8) *сходится к решению задачи* (30.1). *Сходимость равномерная на* отрезке $[0, t']$ *при любом* $t' < t_*$.

Здесь $z^{(0)}(t, \mu)$ – решение задачи (31.9).

31.6. Замечания

Замечание 31.1. Из доказательства теорем 31.4, 31.5 (смотрите [8]) следует, что теоремы 31.4, 31.5 справедливы и в случае, когда в условии 30.2 функции F_1, F_2 имеют производные только до порядка $n_* = \max(2, n + 1)$ включительно.

Замечание 31.2. Численные оценки остаточного члена асимптотического разложения решения задачи (30.1), интервала времени, на котором существует решение задачи, значений малого параметра можно получить с помощью теорем 30.4, 30.5.

Замечание 31.3. Метод двух параметров имеет меньшую область применимости, чем метод пограничных функций (смотрите [8]). В тех случаях, когда метод двух параметров применим, он предпочтительнее, чем метод пограничных функций, так как проще: решение строится в виде суммы одного ряда, а в методе пограничных функций решение строится в виде суммы двух рядов. Асимптотические решения, построенные двумя методами, могут совпадать и могут быть различными (смотрите [8]).

Замечание 31.4. §31 написан по результатам книги [8].

32. Задача Тихонова и регулярно возмущённая задача Коши

Рассмотрим автономную задачу

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x,\mu), \quad x_1|_{t=0} = \mathring{x}_1(\mu), \tag{32.1}$$

$$\mu\frac{dx_2}{dt} = F_2(x,\mu), \quad x_2|_{t=0} = \mathring{x}_2(\mu).$$

Здесь $x_i, F_i, \mathring{x}_i$ – N_i-мерные векторы; $i = 1,2$.

При выполнении соответствующих условий задача (32.1) является задачей Тихонова, и её решение можно построить методом пограничных функций и методом двух параметров. В этом параграфе рассмотрим метод малого параметра Пуанкаре. Для этого перейдём к новой независимой переменной – быстрому времени $\tau = t\mu^{-1}$ и переобозначим малый параметр: $\varepsilon = \mu$. Получим регулярно возмущённую задачу Коши

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \varepsilon\, F_1(x,\varepsilon), \quad x_1|_{\tau=0} = \mathring{x}_1(\varepsilon), \tag{32.2}$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = F_2(x,\varepsilon), \qquad x_2|_{\tau=0} = \overset{\circ}{x}_2(\varepsilon).$$

Решение этой задачи, построенное методом малого параметра Пуанкаре, имеет вид

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(\tau)\,\varepsilon^k, \tag{32.3}$$

$x = (x_1, x_2)$. Если перейти к новой переменной $\Delta x = x - x^{(0)}(\tau) - \overset{\circ}{x}(\varepsilon) + \overset{\circ}{x}(0)$, то при аналитичности функций F_1, F_2, $\overset{\circ}{x}$ будет справедлива теорема Пуанкаре 31.1, из которой следует: ряд Пуанкаре (32.3) сходится к решению задачи (32.2) на конечном отрезке переменной τ при малых значениях $|\varepsilon|$. Отсюда следует, что ряд

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(t\mu^{-1})\,\mu^k \tag{32.4}$$

сходится к решению задачи (32.1) на интервале переменной t порядка μ при малых значениях $\mu > 0$.

Сформулируем условия, при которых сходимость ряда (32.4) к решению задачи (32.1) имеет место на конечном отрезке t, а сходимость ряда (32.3) к решению задачи (32.2) – на интервале τ порядка ε^{-1}.

Условие 32.1. $F_1(0,0) = 0$, $F_2(0,0) = 0$, $\overset{\circ}{x}_1(0) = 0$.

Этому условию можно удовлетворить переходом от x к новой переменной (смотрите п. 30.4).

Условие 32.2. Функции $F_1(x,\mu)$, $F_2(x,\mu)$ аналитичны при $x \in \mathbf{C}(D_x) \subset \mathbf{C}^N$, $|\mu| \le \bar{\mu}$, $\mu \in \mathbf{C}$.

$\mathbf{C}(D_x)$ – окрестность точки $x = 0$ в $\mathbf{C}^N$. Пересечение $\mathbf{C}(D_x)$ с вещественной плоскостью $\operatorname{Im} x = 0$ совпадает с D_x.

Условие 32.3. Функции $\overset{\circ}{x}_1(\mu)$, $\overset{\circ}{x}_2(\mu)$ аналитичны при $|\mu| \le \bar{\mu}$, $\mu \in \mathbf{C}$.

Условие 32.4. Матрица $\Psi(x,0) = (\partial F_2/\partial x_2)^{-1}(x,0)$ ограничена по норме при $x \in D_x$.

Условие 32.5. а) Собственные числа матрицы $A_{2*} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)(0,0)$ лежат в левой полуплоскости.

б) Точка $\overset{\circ}{x}_2(0)$ принадлежит области влияния D_{2*} нулевой точки покоя уравнения

$$\frac{dr_2}{d\tau} = F_2(0, r_2, 0). \tag{32.5}$$

Здесь функция $F_2(x,\mu)$ представлена как $F_2(x_1, x_2, \mu)$. Об области влияния смотрите определение 30.7.

Условие 32.6. Множество

$$D_x^{(0)} = \left\{x \colon x = \theta y_2^{(0)}(\tau),\ \tau \ge 0,\ 0 \le \theta \le 1\right\}$$

принадлежит окрестности D_x.

Здесь $y_2^{(0)}(\tau) = \left(0,\ y_{22}^{(0)}(\tau)\right)$, $y_{22}^{(0)}(\tau)$ – решение уравнения (32.5) с начальным условием $r_2(0) = \overset{\circ}{x}_2(0)$.

Теорема 32.1 [8]. *Пусть существует такая постоянная* $\bar{\mu} > 0$, *что выполняются условия* 32.1–32.6. *Тогда для любого* $\bar{t} > 0$ *найдётся постоянная* $\mu_* > 0$, *не зависящая от* t, μ *и такая, что на множестве* $0 \le t \le \bar{t}$, $0 < \mu \le \mu_*$: 1) *решение задачи* (32.1) *существует и единственно*; 2) *ряд* (32.4) *сходится равномерно к решению задачи* (32.1).

Теорема 32.2 [8]. *Пусть существует такая постоянная* $\bar{\mu} > 0$, *что выполняются условия* 32.1–32.6. *Тогда для любого* $\bar{t} > 0$ *найдётся постоянная* $\varepsilon_* > 0$, *не зависящая от* τ, ε *и такая, что на* *множестве* $0 \le \tau \le \bar{t}\varepsilon^{-1}, \quad 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_*$: 1) *решение задачи* (32.2) *существует и единственно;* 2) *ряд* (32.3) *сходится равномерно к решению задачи* (32.2).

Замечание 32.1. Ряды (32.3), (32.4) могут быть как асимптотическими, так и не асимптотическими (смотрите [8]).

Замечание 32.2. §32 написан по результатам книги [8].

§33. Выводы Дополнения

В §27 составлены уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе при помощи теоремы об изменении кинетического момента материальной системы. В §28 те же уравнения получены методами аналитической динамики как уравнения Лагранжа второго рода. Уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе исследуются в главах 1, 2.

В §29 дан способ введения малого параметра в уравнения, описывающие какой-либо процесс. Способ основан на процедуре нормализации числа по числу. В уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе малый параметр введён в §18.

В §30–§32 даны методы исследования задачи Тихонова (так называется сингулярно возмущенная задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром, удовлетворяющая некоторым условиям). Эти методы использованы в главе 2 при решении уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе.

Литература

1. *Бибиков Ю.Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа. 1991.
2. *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. Т. 1, 2. М.: Наука, 1985.
3. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Федорюк М.В.* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Итоги науки. Математический анализ 1967. М.: 1969. С. 5–73.
4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа. 1990.
5. *Клайн С. Дж.* Подобие и приближенные методы. М.: Мир, 1968.
6. *Климов Д.М., Харламов С.А.* Динамика гироскопа в кардановом подвесе. М.: Наука, 1978.
7. *Кобрин А.И., Мартыненко Ю.Г., Новожилов И.В.* О прецессионных уравнениях гироскопических систем// ПММ. 1976. Т. 40, № 2. С. 231–237.
8. *Кузьмина Р.П.* Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: УРСС, 2003.
9. *Кузьмина Р.П.* Движение гироскопа в кардановом подвесе// Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 4. С. 14–22.
10. *Кузьмина Р.П.* Математические модели небесной механики. М.: УРСС, 2004.

11. *Кузьмина Р.П., Новожилов И.В.* Применение методов теории пограничного слоя в задаче о движении гироскопа в кардановом подвесе// Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 1. С. 31–35.
12. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: Гостехиздат. 1950.
13. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974.
14. *Николаи Е.Л.* Гироскоп в кардановом подвесе. М.: Наука, 1964.
15. *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1995.
16. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных// Вестник Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., хим. 1957. № 4. С. 9–16.
17. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных// Матем. сб. 1952. Т. 31(73), № 3. С. 575–586.

Именной указатель

Предметный указатель

ДОПОЛНЕНИЕ К КНИГЕ

«Р.П. Кузьмина. Гироскоп в кардановом подвесе. М.: Университетская книга, 2012».

К §18

В §18 показано, что для каждого гироскопа, у которого $C_1 = A + A_1$; $H, \alpha^\circ, \beta^\circ$ фиксированы и $\dot{\beta}^\circ = 0$, справедливо следующее: 1) пусть $K > 0$ – произвольное число размерности $c^{1/2}$; тогда решение задачи Коши для уравнений (18.1) существует и единственно на отрезке $0 \le T \le K\left|\dot{\alpha}^\circ\right|^{-1/2}$, если значение $\left|\dot{\alpha}^\circ\right|$ достаточно мало; 2) для любого $T > 0$

$$\alpha(T) \to \alpha^\circ, \quad \beta(T) \to \beta^\circ, \quad \dot{\alpha}(T) \to 0, \quad \dot{\beta}(T) \to 0 \quad \text{при} \quad \left|\dot{\alpha}^\circ\right| \to 0.$$

Отметим, что существование этих пределов следует и из теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных значений, так как дифференциальные уравнения (18.1) имеют частное решение

$$\alpha = \alpha^\circ, \qquad \beta = \beta^\circ, \qquad \dot{\alpha} = 0, \qquad \dot{\beta} = 0.$$

К п. 28.3

Мы предполагаем, что связи, наложенные на материальную систему, не зависят от времени.

§34. Частичная некорректность прецессионной модели

34.1. Доказательство некорректности

Прецессионная модель описывает стационарное состояние гироскопа в кардановом подвесе: $\alpha = \alpha^\circ$, $\beta = \beta^\circ$, $\dot{\alpha} = 0$, $\dot{\beta} = 0$. Если начальные угловые скорости не равны нулю, то прецессионная модель является приближённой моделью движения гироскопа в кардановом подвесе. В §18 доказано, что если все значения (18.2), кроме $\dot{\alpha}^{\circ}$, фиксированы, а значение $|\dot{\alpha}^{\circ}|$ мало, то решение прецессионной модели близко к точному решению задачи (18.1). (18.2).

Исследуем точность прецессионной модели для больших скоростей гироскопа, т.е. для случая, когда $|H| \to \infty$. Для этого зафиксируем все значения (18.2), кроме H. Выберем значение момента времени $T_1 > 0$. Введём следующие определения.

Определения 34.1. Прецессионная модель движения гироскопа *корректна по переменной* α $(\beta,\ \dot{\alpha},\ \dot{\beta})$, если при $|H| \to \infty$ значение $\alpha(T_1) \to \alpha^{\circ}$ $(\beta(T_1) \to \beta^{\circ},\ \dot{\alpha}(T_1) \to 0,\ \dot{\beta}(T_1) \to 0)$.

В противном случае прецессионная модель *некорректна по переменной* α $(\beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$.

Определения 34.2. Прецессионная модель движения гироскопа *корректна*, если она корректна по всем переменным $\alpha,\ \beta,\ \dot{\alpha},\ \dot{\beta}$.

Для исследования корректности прецессионной модели не может быть использована теория задачи Тихонова, так как при $|H| \to \infty$ задача (18.6) не является задачей Тихонова (при $|H| \to \infty$ к нулю стремятся и малый параметр, и коэффициенты a_1, a_2). Заметим, что для фиксированных значений (18.2) теория задачи Тихонова дала хорошие результаты (смотрите п. 24.2).

Для исследования больших значений $|H|$ введём другие характерные значения и другой малый параметр. При этом рассмотрим случай $H > 0$. Для отрицательных значений H исследование аналогично (смотрите замечание 34.1). Чтобы отличить переменные и параметры от соответствующих переменных и параметров в §18, пометим их знаком $\breve{}$.

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{n_1 n_2}}{H}, \qquad \breve{T}_* = \sqrt{\frac{(A+A_1+A_2)(A+B_1)}{n_1 n_2}}, \qquad (34.1)$$

$$\breve{\alpha}_* = \sqrt{\frac{(A+A_1+A_2)(A+B_1)}{n_1 n_2}}\,\dot{\alpha}^{\circ}, \qquad \breve{\beta}_* = \frac{(A+A_1+A_2)}{\sqrt{n_1 n_2}}\,\dot{\alpha}^{\circ},$$

$$\check{\dot{\alpha}}_* = \dot{\alpha}^\circ, \qquad \check{\dot{\beta}}_* = \sqrt{\frac{A+A_1+A_2}{A+B_1}}\ \dot{\alpha}^\circ.$$

Задача (18.4) принимает вид

$$\frac{d\check{\xi}_1}{d\check{t}} = \check{\xi}_3, \qquad \frac{d\check{\xi}_2}{d\check{t}} = \check{\xi}_4, \tag{34.2}$$

$$\varepsilon \frac{d\check{\xi}_3}{d\check{t}} = -\varepsilon\check{a}_1\check{\xi}_3 - \cos\left(\beta^\circ + \check{a}_2\check{\xi}_2\right)\ \check{\xi}_4,$$

$$\varepsilon \frac{d\check{\xi}_4}{d\check{t}} = \cos\left(\beta^\circ + \check{a}_2\check{\xi}_2\right)\ \check{\xi}_3 - \frac{\varepsilon}{\check{a}_1}\check{\xi}_4,$$

$$\check{\xi}_i\Big|_{\check{t}=0} = 0, \quad i = 1, 2, 4; \qquad \check{\xi}_3\Big|_{\check{t}=0} = 1.$$

Здесь

$$\check{a}_1 = \sqrt{\frac{(A+B_1)n_1}{(A+A_1+A_2)n_2}}, \qquad \check{a}_2 = \frac{(A+A_1+A_2)\dot{\alpha}^\circ}{\sqrt{n_1 n_2}}.$$

Введём новые переменные по формулам

$$\check{\xi}_3 = r\cos\varphi, \qquad \check{\xi}_4 = r\sin\varphi. \tag{34.3}$$

Для переменных $\check{\xi}_2, r, \varphi$ задача имеет вид

$$\frac{d\check{\xi}_2}{d\check{t}} = r\sin\varphi, \tag{34.4}$$

$$\frac{dr}{d\check{t}} = -b_1 r + b_2 r\cos 2\varphi,$$

$$\varepsilon\frac{d\varphi}{d\check{t}} = \cos\left(\beta^\circ + \check{a}_2\check{\xi}_2\right) - \varepsilon b_2\sin 2\varphi,$$

$$\check{\xi}_2\Big|_{\check{t}=0} = 0, \quad r|_{\check{t}=0} = 1, \quad \varphi|_{\check{t}=0} = 0.$$

Здесь

$$b_1 = \frac{1+(\check{a}_1)^2}{2\check{a}_1}, \qquad b_2 = \frac{1-(\check{a}_1)^2}{2\check{a}_1}.$$

В п. 34.2 показано, что существует такое значение $\varepsilon_* > 0$, что при $0 \le \check{t} \le \check{t}_1 = T_1/\check{T}_*$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_*$ решение задачи (34.4) существует, единственно и удовлетворяет соотношениям

$$\check{\xi}_2 = \check{\xi}_2(\check{t}, \varepsilon), \qquad r = \exp(-b_1 \check{t}) + \Delta r(\check{t}, \varepsilon), \quad (34.5)$$

$$\varphi = \left(\frac{\cos\beta^\circ}{\varepsilon} - \check{a}_2 \operatorname{tg}\beta^\circ\right)\check{t} + \Delta\varphi(\check{t}, \varepsilon),$$

$$\left|\check{\xi}_2(\check{t}, \varepsilon)\right| \le C\varepsilon, \qquad |\Delta r(\check{t}, \varepsilon)| \le C\varepsilon,$$

$$|\Delta\varphi(\check{t}, \varepsilon)| \le C\varepsilon, \qquad \left|\frac{d\Delta\varphi}{d\check{t}}\right| \le C.$$

Здесь постоянные C не зависят от $\check{t}$, $\check{\varepsilon}$.

Из (34.2), (34.3) следует, что при $0 \le \check{t} \le \check{t}_1$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_*$ функция $\check{\xi}_1$ существует, единственна и удовлетворяет соотношениям

$$\check{\xi}_1 = \int_0^{\check{t}} \check{\xi}_3 d\check{t} = \int_0^{\check{t}} r\cos\varphi\, d\check{t}$$

$$= \frac{\varepsilon}{\cos\beta^\circ} r\sin\varphi$$

$$-\frac{\varepsilon}{\cos\beta^\circ}\int_0^{\check{t}} \left[\frac{dr}{d\check{t}}\sin\varphi + r\cos\varphi\left(-\check{a}_2\operatorname{tg}\beta^\circ + \frac{d\Delta\varphi}{d\check{t}}\right)\right] d\check{t},$$

$$\left|\check{\xi}_1(\check{t}, \varepsilon)\right| \le C\varepsilon\,,$$

где постоянная C не зависит от $\check{t}$, ε.

Переходя к исходным переменным по формулам (18.3), (34.1), получим следующий результат: существует такое значение $H_* > 0$, что при $0 \le T \le T_1$, $H \ge H_*$ решение задачи (18.1), (18.2) существует, единственно и удовлетворяет соотношениям

$$\alpha = \alpha^\circ + \sqrt{\frac{(A+A_1+A_2)(A+B_1)}{n_1 n_2}}\,\dot{\alpha}^\circ \check{\xi}_1, \tag{34.6}$$

$$\beta = \beta^\circ + \frac{(A+A_1+A_2)}{\sqrt{n_1 n_2}}\,\dot{\alpha}^\circ \check{\xi}_2,$$

$$\dot{\alpha} = \check{\dot{\alpha}} + \Delta\dot{\alpha}, \qquad \dot{\beta} = \check{\dot{\beta}} + \Delta\dot{\beta},$$

$$\left|\alpha - \alpha^\circ\right| \le \frac{C_1}{H}, \qquad \left|\beta - \beta^\circ\right| \le \frac{C_2}{H},$$

$$\left|\dot{\alpha} - \check{\dot{\alpha}}\right| \le \frac{C_3}{H}, \qquad \left|\dot{\beta} - \check{\dot{\beta}}\right| \le \frac{C_4}{H}.$$

Здесь

$$\check{\dot{\alpha}} = \dot{\alpha}^\circ \exp(-\Delta T) \cos \check{\Omega}\, T, \tag{34.7}$$

$$\check{\dot{\beta}} = \sqrt{\frac{A+A_1+A_2}{A+B_1}}\ \dot{\alpha}^\circ \exp(-\Delta T) \sin \check{\Omega}\, T,$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{A+A_1+A_2} + \frac{n_2}{A+B_1}\right),$$

$$\check{\Omega} = \frac{H\cos \beta^\circ}{\sqrt{(A+A_1+A_2)(A+B_1)}} - \sqrt{\frac{A+A_1+A_2}{A+B_1}}\ \dot{\alpha}^\circ \mathrm{tg}\, \beta^\circ,$$

C_1– C_4 – постоянные, не зависящие от T, H;

$$[C_1] = [C_2] = \text{г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}, \quad [C_3] = [C_4] = \text{г} \cdot \text{см}.$$

Из (34.6), (34.7) получаем: при $H \to \infty$

$$\alpha(T_1) \to \alpha^\circ, \quad \beta(T_1) \to \beta^\circ;$$

значения $\dot{\alpha}(T_1)$, $\dot{\beta}(T_1)$ не стремятся к нулю при $H \to \infty$, так как функции $\check{\dot{\alpha}}$, $\check{\dot{\beta}}$ не имеют предела.

Результат 34.1. Прецессионная модель движения гироскопа в кардановом подвесе корректна по углам поворота α, β и некорректна по угловым скоростям $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$. При больших значениях $|H|$ угловые скорости $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ близки к функциям, описывающим затухающие колебания. Коэффициент затухания не зависит от H, частота колебаний стремится к ∞ при $|H| \to \infty$.

34.2. Оценка функций $\check{\xi}_2$, Δr, $\Delta\varphi$

Введём новые переменные η, ρ, ψ и функции f_1, f_2 по формулам

$$\eta = \frac{\check{\xi}_2}{\varepsilon}\left(1 + \frac{\varepsilon\check{a}_2 \sin\beta^\circ r\cos\varphi}{\cos^2\beta^\circ}\right) + \frac{r\cos\varphi - 1}{\cos\beta^\circ} \tag{34.8}$$

$$+ \frac{\varepsilon\check{a}_2 \sin\beta^\circ r^2(2+\cos 2\varphi)}{4\cos^3\beta^\circ} + \frac{\varepsilon\check{a}_1 r\sin\varphi}{\cos^2\beta^\circ} - \frac{3\,\varepsilon\check{a}_2\sin\beta^\circ}{4\cos^3\beta^\circ},$$

$$\rho = r\exp(b_1\check{t})\left(1 - \frac{\varepsilon b_2\sin 2\varphi}{2\cos\beta^\circ}\right) - 1,$$

$$\psi = \varphi - \left(\frac{\cos\beta^\circ}{\varepsilon} - \check{a}_2 \operatorname{tg}\beta^\circ\right)\check{t} - \frac{\varepsilon\check{a}_2\sin\beta^\circ r\sin\varphi}{\cos^2\beta^\circ} + \frac{\varepsilon b_2(1-\cos 2\varphi)}{2\cos\beta^\circ},$$

$$f_1 = f_1(\check{t},\varepsilon) \equiv \cos\left(\frac{\cos\beta^\circ}{\varepsilon} - \check{a}_2\operatorname{tg}\beta^\circ\right)\check{t},$$

$$f_2 = f_2(\check{t},\varepsilon) \equiv \sin\left(\frac{\cos\beta^\circ}{\varepsilon} - \check{a}_2\operatorname{tg}\beta^\circ\right)\check{t}.$$

Из формул (34.8) следуют равенства

$$\cos\varphi = f_1\cos f_3 - f_2\sin f_3, \tag{34.9}$$

$$\sin\varphi = f_2\cos f_3 + f_1\sin f_3,$$

$$f_3 = f_3(r,\varphi,\psi,\varepsilon) \equiv \psi + \frac{\varepsilon\check{a}_2\sin\beta^\circ r\sin\varphi}{\cos^2\beta^\circ} + \frac{\varepsilon b_2\cos 2\varphi}{2\cos\beta^\circ}.$$

Рассмотрим первые два уравнения (34.8) и первые два уравнения (34.9) как уравнения относительно $\check{\xi}_2$, r, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$. Первое уравнение (34.8) умножим на ε. По теореме о неявных функциях существуют такие значения $\delta > 0$, $\bar{\varepsilon} > 0$, что при

$$|\eta| \le \delta, \quad |\rho| \le \delta, \quad |\psi| \le \delta, \quad 0 \le \check{t} \le \check{t}_1,$$

$$|\varepsilon| \le \bar{\varepsilon}, \quad |f_1| \le 1, \quad |f_2| \le 1$$

функции $\check{\xi}_2$, r, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ существуют, единственны, являются гладкими функциями переменных η, ρ, ψ, $\check{t}$, ε, f_1, f_2 и разлагаются в сходящиеся ряды по степеням ε. Справедливы формулы

$$\check{\xi}_2 = \varepsilon\eta - \frac{\varepsilon \exp(-b_1\check{t})}{\cos\beta^\circ}(1+\rho)(f_1\cos\psi - f_2\sin\psi) + \frac{\varepsilon}{\cos\beta^\circ} \qquad (34.10)$$

$$+O(\varepsilon^2),$$

$$r = (1+\rho)\exp(-b_1\check{t}) + O(\varepsilon),$$

$$\cos\varphi = f_1\cos\psi - f_2\sin\psi + O(\varepsilon),$$

$$\sin\varphi = f_2\cos\psi + f_1\sin\psi + O(\varepsilon).$$

Новые переменные η, ρ, ψ являются решением следующей задачи Коши:

$$\frac{d\eta}{d\check{t}} = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 + \frac{\varepsilon\breve{a}_2\sin\beta^\circ r\cos\varphi}{\cos^2\beta^\circ}\right)\frac{d\check{\xi}_2}{d\check{t}} \qquad (34.11)$$

$$+\left(\frac{\breve{a}_2\sin\beta^\circ\check{\xi}_2\cos\varphi}{\cos^2\beta^\circ} + \frac{\cos\varphi}{\cos\beta^\circ} + \frac{2\,\varepsilon\breve{a}_2\sin\beta^\circ r(2+\cos2\varphi)}{4\cos^3\beta^\circ} + \frac{\varepsilon\breve{a}_1\sin\varphi}{\cos^2\beta^\circ}\right)\frac{dr}{d\check{t}}$$

$$+\left(-\frac{\breve{a}_2\sin\beta^\circ\,\check{\xi}_2 r\sin\varphi}{\cos^2\beta^\circ} - \frac{r\sin\varphi}{\cos\beta^\circ} - \frac{\varepsilon\breve{a}_2\sin\beta^\circ r^2\sin2\varphi}{2\cos^3\beta^\circ} + \frac{\varepsilon\breve{a}_1 r\cos\varphi}{\cos^2\beta^\circ}\right)\frac{d\varphi}{d\check{t}},$$

$$\frac{d\rho}{d\check{t}} = \exp(b_1\check{t})\left(1 - \frac{\varepsilon\, b_2\sin2\varphi}{2\cos\beta^\circ}\right)\left(\frac{dr}{d\check{t}} + b_1 r\right)$$

$$-\frac{\varepsilon b_2 r \exp(b_1\check{t})\cos 2\varphi}{\cos\beta^\circ}\frac{d\varphi}{d\check{t}},$$

$$\frac{d\psi}{d\check{t}} = -\frac{\cos\beta^\circ}{\varepsilon} + \check{a}_2 \operatorname{tg}\beta^\circ - \frac{\varepsilon\check{a}_2\sin\beta^\circ\sin\varphi}{\cos^2\beta^\circ}\frac{dr}{d\check{t}}$$

$$+\left(1 - \frac{\varepsilon\check{a}_2\sin\beta^\circ r\cos\varphi}{\cos^2\beta^\circ} + \frac{\varepsilon b_2\sin 2\varphi}{\cos\beta^\circ}\right)\frac{d\varphi}{d\check{t}},$$

$$\eta|_{\check{t}=0} = 0, \quad \rho|_{\check{t}=0} = 0, \quad \psi|_{\check{t}=0} = 0.$$

В уравнения (34.11) нужно вставить производные $d\check{\xi}_2/d\check{t}$, $dr/d\check{t}$, $d\varphi/d\check{t}$ из (34.4) и функции $\check{\xi}_2$, r, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ из (34.10). Если обозначить

$$x = (\eta, \rho, \psi),$$

то можно проверить, что задача (34.11) является почти регулярной задачей Коши, удовлетворяющей условиям теоремы 35.1 при $\bar{t} = \check{t}_1$, $D_f = \{f \in \mathbf{R}^2\colon \ |f_1| \le 1, \ |f_2| \le 1\}$, $n = 0$. Независимой переменной в (34.11) является $\check{t}$. Нулевое приближение решения задачи (34.11) равно нулю:

$$\eta^{(0)} = 0, \quad \rho^{(0)} = 0, \quad \psi^{(0)} = 0.$$

По теореме 35.1 найдутся постоянные $\varepsilon_* > 0$, C_*, не зависящие от $\check{t}$, ε и такие, что решение задачи (34.11) существует, единственно и удовлетворяет неравенствам

$$|\eta| \le C_*\check{t}\varepsilon, \quad |\rho| \le C_*\check{t}\varepsilon, \quad |\psi| \le C_*\check{t}\varepsilon$$

при

$$0 \le \check{t} \le \check{t}_1, \qquad 0 < \varepsilon \le \varepsilon_*. \tag{34.12}$$

Отсюда и из (34.10) получаем, что на множестве (34.12) функции $\check{\xi}_2(\check{t},\varepsilon)$, $r(\check{t},\varepsilon)$, $\varphi(\check{t},\varepsilon)$ существуют, единственны и удовлетворяют соотношениям (34.5). Последнее неравенство (34.5) следует из формул

$$\frac{d\Delta\varphi}{d\check{t}} = \frac{d\varphi}{d\check{t}} - \frac{\cos\beta^\circ}{\varepsilon} - \check{\alpha}_2 \operatorname{tg}\beta^\circ = O(1).$$

Замечание 34.1. Если $H \to -\infty$, то в качестве малого параметра нужно взять $(-\sqrt{n_1 n_2}/H)$ и повторить исследование. Результат будет таким же: прецессионная модель движения гироскопа в кардановом подвесе корректна по углам поворота $\alpha,\ \beta$ и некорректна по угловым скоростям $\dot{\alpha},\ \dot{\beta}$.

Замечание 34.2. Отметим, что на отрезке $0 \le T \le T_1$ при $|H| \to \infty$ приближённые решения задачи (18.1), (18.2), полученные методами задачи Тихонова и методом почти регулярной задачи Коши, совпадают с точностью до членов малого порядка. Справедливы формулы

$$\alpha = \check{\alpha} + O\left(\frac{C}{H^2}\right), \qquad \beta = \check{\beta} + O\left(\frac{C}{H^2}\right),$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\check{\alpha}} + O\left(\frac{C}{|H|}\right), \qquad \dot{\beta} = \dot{\check{\beta}} + O\left(\frac{C}{|H|}\right),$$

$$\check{\alpha} = \alpha^\circ + \frac{\dot{\alpha}^\circ\sqrt{(A+A_1+A_2)(A+B_1)}}{H\cos\beta^\circ}\exp(-\Delta T)\sin\check{\Omega}\,T,$$

$$\check{\beta} = \beta^\circ + \frac{\dot{\alpha}^\circ(A+A_1+A_2)}{H\cos\beta^\circ}\left[1 - \exp(-\Delta T)\cos\check{\Omega}\,T\right],$$

$$\tilde{\alpha} = \check{\alpha} + O\left(\frac{C}{H^2}\right), \qquad \tilde{\beta} = \check{\beta} + O\left(\frac{C}{H^2}\right),$$

$$\dot{\tilde{\alpha}} = \dot{\check{\alpha}} + O\left(\frac{C}{|H|}\right), \qquad \dot{\tilde{\beta}} = \dot{\check{\beta}} + O\left(\frac{C}{|H|}\right).$$

Здесь $\check{\alpha}, \check{\beta}, \dot{\check{\alpha}},\ \dot{\check{\beta}}$ – функции, полученные методом решения почти регулярной задачи Коши; $\tilde{\alpha},\ \tilde{\beta},\ \dot{\tilde{\alpha}},\ \dot{\tilde{\beta}}$ – функции (20.18), полученные методами решения задачи Тихонова; Δ, $\breve{\Omega}$ – постоянные (34.7), C – размерные постоянные, не зависящие от T, H.

§35. Почти регулярная задача Коши

35.1. Определение почти регулярной задачи Коши

Рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = F\big(x, t, \varepsilon, f(t, \varepsilon)\big), \quad x|_{t=0} = 0. \tag{35.1}$$

Здесь $x \in \mathbf{R}^N$, $F \in \mathbf{R}^N$ – N-мерные векторы; $f \in \mathbf{R}^M$ – M-мерный вектор, $\varepsilon \in \mathbf{R}$ – малый параметр, $t \in \mathbf{R}$ – независимая переменная (время).

Введём обозначения: $D_x \subset \mathbf{R}^N$ – окрестность точки $x = 0$; $D_f \subset \mathbf{R}^M$ – ограниченная и замкнутая область; $\bar{t}$, $\bar{\varepsilon}$ – положительные числа.

Определение 35.1. Задача (35.1) называется *почти регулярной задачей Коши*, если: 1) $F(x, t, \varepsilon, f)$ – гладкая функция на прямом произведении окрестности D_x, отрезков $0 \le t \le \bar{t}$, $0 \le \varepsilon \le \bar{\varepsilon}$ и области D_f, 2) f – гладкая функция на прямом произведении интервалов $0 \le t \le \bar{t}$, $0 < \varepsilon \le \bar{\varepsilon}$ со значениями в области D_f.

В качестве примера возможной функции f приведём функцию

$$f(t, \varepsilon) = \left(\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right), \cos\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

35.2. Построение решения

Рассмотрим задачу с двумя малыми параметрами:

$$\frac{dz}{dt} = F\big(z, t, \varepsilon, f(t,\mu)\big), \quad z|_{t=0} = 0. \tag{35.2}$$

Задача (35.2) – регулярно возмущённая задача Коши относительно параметра ε. Её решение строится методом малого параметра Пуанкаре, который заключается в следующем:

- решение $z = z(t, \varepsilon, \mu)$ представляется в виде ряда по степеням ε:

$$z(t, \varepsilon, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(t,\mu)\, \varepsilon^k; \tag{35.3}$$

- выражение (35.3) подставляется в (35.2);
- правая и левая часть уравнений (35.2) разлагаются в ряды по степеням ε;
- в полученных равенствах приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях ε.

В результате получаются уравнения для коэффициентов ряда (35.3).

Коэффициент $z^{(0)}(t,\mu)$ (*нулевое приближение решения* $z(t, \varepsilon, \mu)$ задачи (35.2)) является решением *вырожденной задачи*

$$\frac{dz^{(0)}}{dt} = F\left(z^{(0)}, t, 0, f(t,\mu)\right), \quad z^{(0)}\big|_{t=0} = 0.$$

Коэффициент $z^{(k)}(t,\mu)$ при любом $k \geq 0$ является решением задачи Коши

$$\frac{dz^{(k)}}{dt} = \left[F\left(\sum_{i=0}^{k} z^{(i)}(t,\mu)\,\varepsilon^i, t, \varepsilon, f(t,\mu)\right)\right]^{(k)}, \quad z^{(k)}\big|_{t=0} = 0. \tag{35.4}$$

Скобки $[\quad]^{(k)}$ обозначают коэффициент при ε^k в разложении функции F в ряд по степеням параметра ε.

Запишем уравнения (35.4) для $k \geq 1$ в виде

$$\frac{dz^{(k)}}{dt} = A(t,\mu)\, z^{(k)} + F^{(k)}(t,\mu), \qquad z^{(k)}\Big|_{t=0} = 0. \quad (35.5)$$

Здесь

$$A(t,\mu) = F_z\big(z^{(0)}(t,\mu), t, 0, f(t,\mu)\big),$$

$$F^{(k)}(t,\mu) = \left[F\left(\sum_{i=0}^{k-1} z^{(i)}(t,\mu)\, \varepsilon^i, t, \varepsilon, f(t,\mu)\right)\right]^{(k)},$$

F_z – матрица Якоби. Функция $F^{(k)}(t,\mu)$ зависит от $z^{(0)}(t,\mu)$, ..., $z^{(k-1)}(t,\mu)$, $k \geq 1$.

Задача (35.5) линейна. Её решение имеет вид

$$z^{(k)}(t,\mu) = \int_0^t U(t,s,\mu) \cdot F^{(k)}(s,\mu) ds. \qquad (35.6)$$

Здесь $U(t,s,\mu)$ – матрица Коши уравнения в вариациях

$$\frac{d\zeta}{dt} = A(t,\mu)\, \zeta.$$

При $\mu = \varepsilon$ ряд (35.3) принимает вид

$$\boxed{x(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(t,\varepsilon)\, \varepsilon^k.} \qquad (35.7)$$

Из написанных формул следует: для получения решения в явном виде (35.7) необходимо знать нулевое приближение $z^{(0)}(t,\mu)$ и матрицу $U(t,s,\mu)$. Тогда коэффициенты ряда (35.7) вычисляются последовательно по формулам (35.6) для $k = 1, 2, ...$

35.3. О решении почти регулярной задачи Коши

Здесь используются обозначения: δ, $\bar{t}$, $\bar{\varepsilon}$ – положительные постоянные, X_n – частичная сумма ряда (35.7):

$$X_n(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} z^{(k)}(t,\varepsilon)\,\varepsilon^k. \qquad (35.8)$$

Сформулируем условия, при которых будем рассматривать задачу (35.1).

Условие 35.1. $F(0,t,0,f) = 0$ при $0 \le t \le \bar{t},\ f \in D_f$.

Условие 35.2. На множестве $x \in \mathbf{R}^N,\ \|x\| \le \delta,\quad 0 \le t \le \bar{t}$, $0 \le \varepsilon \le \bar{\varepsilon},\quad f \in D_f$ функция $F(x,t,\varepsilon,f)$ имеет непрерывные частные производные до порядка n_* включительно по ε и по компонентам вектора $x,\ n_* = \max(2, n+1)$.

Условие 35.3. На множестве $0 \le t \le \bar{t},\ 0 < \varepsilon \le \bar{\varepsilon}$ функция $f(t,\varepsilon)$ непрерывна по t и $f(t,\varepsilon) \in D_f$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 35.1 [8]. *Пусть при* $0 \le t \le \bar{t}$ *выполняются условия* 35.1–35.3. *Тогда найдутся постоянные* $\varepsilon_* > 0,\ C_*$, *не зависящие от* $t,\ \varepsilon$ *и такие, что решение задачи* (35.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon)\| \le C_* t \varepsilon^{n+1} \quad \text{\textit{при}} \quad 0 \le t \le \bar{t},\ \ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_*.$$

Из теоремы 35.1 следует, что функция $X_n(t,\varepsilon)$, задаваемая формулой (35.8), является асимптотическим решением задачи (35.1) на отрезке:

$$x(t,\varepsilon) = X_n(t,\varepsilon) + o(\varepsilon^n), \qquad 0 \le t \le \bar{t}, \qquad \varepsilon \to 0.$$

35.4. Замечания

Замечание 35.1. При выполнении условия 35.1 $z^{(0)}(t,\mu) = 0$, $X_0(t,\varepsilon) = 0$.

Замечание 35.2. Если функция F в (35.1) не зависит явно от f, то задача (35.1) становится регулярно возмущённой задачей Коши и в теореме 35.1 интервал $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$ заменяется на $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*$.

Замечание 35.3. В §35 дана теория почти регулярной задачи Коши, которая используется в §34 для доказательства некорректности прецессионной модели движения гироскопа в кардановом подвесе.

Замечание 35.4. §35 написан по результатам книги [8].

(Дополнение взято из книги «R.P. Kuzmina. Gyroscope in Gymbals. M.: Университетская книга, 2013».)