

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	6
Лекция 1. Динамические системы и хаос.	
Историческое введение	7
1.1. Механика	8
1.2. Статистическая физика	9
1.3. Теория колебаний, радиофизика и электроника	11
1.4. Гидродинамика	13
1.5. Дискретные отображения	15
1.6. Математика	17
1.7. Прикладной хаос	18
Лекция 2. Хаос в простых моделях динамических систем	21
2.1. Одномерные отображения	25
2.2. Двумерные отображения, сохраняющие площадь	32
2.3. Странные хаотические аттракторы	37
Лекция 3. Система Лоренца	43
3.1. Задача о конвекции в подогреваемом снизу слое	44
3.2. Конвекция в замкнутой петле и водяное колесо	49
3.3. Уравнения динамики одномодового лазера	52
3.4. Диссипативный осциллятор с инерционной нелинейностью	54
Лекция 4. Динамика системы Лоренца	56
4.1. Результаты численного решения уравнений Лоренца	56
4.2. Аналитическое исследование уравнений Лоренца	59
4.3. Бифуркации в модели Лоренца	63
Лекция 5. Хаос в реалистичных моделях физических систем: дифференциальные уравнения и рекуррентные отображения	67
5.1. Модели с дискретным временем	68
5.2. Искусственно сконструированные дифференциальные уравнения	76
5.3. Нелинейные осцилляторы под периодическим внешним воздействием	79
5.4. Автономные системы — электронные генераторы	84
Лекция 6. Сечение Пуанкаре, подкова Смейла, теорема Шильникова	93
6.1. Сечение Пуанкаре и отображение последования	94
6.2. Подкова Смейла	97
6.3. Теорема Шильникова о петле сепаратрисы седлофокуса	102
Лекция 7. Гомоклиническая структура	107
7.1. Устойчивое и неустойчивое многообразия неподвижной точки и их пересечение	107

7.2. Связь гомоклинической структуры и подковы Смейла	109
7.3. Критерий Мельникова	111
Лекция 8. Функция распределения, инвариантная мера, эргодичность и перемешивание	117
8.1. Функция распределения и инвариантная мера	119
8.2. Эргодичность и перемешивание	123
8.3. Одномерные отображения: инвариантные распределения и уравнение Фробениуса–Перрона	128
8.4. Системы с непрерывным временем, уравнение для функции распределения и портреты странных аттракторов	131
Лекция 9. Устойчивость и неустойчивость. Ляпуновские показатели	135
9.1. Устойчивость по Лагранжу	136
9.2. Устойчивость по Пуассону и возвраты Пуанкаре	136
9.3. Устойчивость по Ляпунову	138
Лекция 10. Ляпуновские показатели для отображений. Методы численной оценки ляпуновских показателей	148
10.1. Обобщение ляпуновских показателей на рекуррентные отображения	148
10.2. Примеры аналитического расчета ляпуновских показателей	150
10.3. Алгоритм вычисления старшего ляпуновского показателя	153
10.4. Ортогонализация Грама–Шмидта и вычисление спектра ляпуновских показателей	155
10.5. Примеры численного расчета ляпуновских показателей	157
10.6. Зависимость ляпуновского показателя от параметров	160
10.7. Двухпараметрический анализ и карты ляпуновских показателей	161
Лекция 11. Геометрия странных аттракторов и фрактальная размерность	164
11.1. Фракталы	166
11.2. Фрактальная размерность — емкость	170
11.3. Размерность Хаусдорфа и ее связь с емкостью	171
11.4. Фрактальная размерность двумасштабного канторова множества и странного аттрактора в обобщенном отображении пекаря	173
Лекция 12. Обобщенные размерности и мультифрактальный формализм	176
12.1. Информационная размерность	176
12.2. Корреляционная размерность и алгоритм Грассбергера–Прокачиа	178
12.3. Спектр обобщенных размерностей Реньи	181
12.4. Усовершенствованное определение и спектр размерностей аттрактора обобщенного отображения пекаря	182
12.5. Скейлинг-спектр	185
12.6. Ляпуновская размерность и формула Каплана–Йорке	188

Лекция 13. Обработка реализаций: реконструкция аттрактора по наблюдаемой, проблема вложения, вычисление характеристик хаотической динамики	191
13.1. Реконструкция фазового пространства методом запаздывания (delay-time reconstruction)	192
13.2. Оценка корреляционной размерности по наблюдаемой	193
13.3. О технических проблемах, возникающих при вычислении размерности. Оценка Экмана–Рюэля	195
13.4. Теорема о вложении	198
13.5. Вычисление ляпуновских показателей по реализации	200
13.6. Идея реконструкции уравнений динамической системы по наблюдаемой реализации	201
Лекция 14. Сценарии перехода к хаосу. Общая дискуссия	205
Лекция 15. Сценарий Фейгенбаума: ренормгруппа, универсальность, скейлинг	218
15.1. Переход к хаосу в логистическом отображении	218
15.2. Уравнение РГ	222
15.3. Линеаризованное уравнение РГ	225
15.4. Скейлинг	229
Лекция 16. Критический аттрактор Фейгенбаума	233
16.1. Критический аттрактор, как фрактал	233
16.2. О последовательности посещения точек на критическом аттракторе	237
16.3. Символическая динамика в критической точке	238
16.4. Сигма-функция	240
16.5. Спектр Фурье	241
16.6. О переходе к хаосу через удвоения периода в реальных системах и моделях в виде дифференциальных уравнений	244
Лекция 17. Перемежаемость	249
17.1. Перемежаемость типа I: примеры	249
17.2. Перемежаемость типа I: теория	255
17.3. Ренормгрупповой подход к анализу перемежаемости	259
Лекция 18. Квазипериодическая динамика и переход к хаосу в отображении окружности	262
18.1. Отображение окружности	262
18.2. Динамика отображения окружности	263
18.3. Цепные дроби	268
18.4. Уравнение РГ: общий случай	269
18.5. РГ анализ критической точки, отвечающей золотому среднему	271
Лекция 19. Критическая динамика и свойства скейлинга в случае числа вращения, заданного золотым средним	275
19.1. Критический аттрактор GM	276
19.2. Скейлинг на критической линии	280
19.3. Скейлинг языков Арнольда на плоскости параметров	282
Список литературы	286

ПРЕДИСЛОВИЕ

К настоящему времени в отечественной литературе имеется целый ряд монографий по нелинейной динамике и хаосу, однако, несомненно, ощущается потребность в учебном пособии, разъясняющем фундаментальные концепции этой науки на физическом уровне.

Предлагаемая книга представляет собой учебник для студентов-физиков. Он основан на лекционных курсах «Динамический хаос» и «От порядка к хаосу», читавшихся мной студентам 4-го года обучения на факультете нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Этому предшествовали курсы «Линейные колебания и волны», «Нелинейные колебания», «Нелинейные волны», «Катастрофы и бифуркации». Все же я старался, по возможности, изложить материал так, чтобы данную книгу можно было изучать независимо.

Работа над книгой проводилась в рамках проекта по изданию серии учебных пособий «Современная теория колебаний и волн» в соответствии с Федеральной целевой программой «Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки», грант № 100-02. При написании книги использовались материалы исследований, в том числе алгоритмы и программы, разработанные в Саратовском отделении ИРЭ РАН в течение ряда лет в ходе выполнения проектов, поддержанных грантами РФФИ 93-02-16619, 95-02-05818, 96-15-96921, 97-02-16414, 00-02-17509, а также проекта, поддержанного грантом Минобразования РФ 97-0-8.3-88.

Пользуясь случаем, хочу выразить глубокую благодарность члену-корреспонденту РАН Д. И. Трубецкову, к научной школе которого я принадлежу. Я хотел бы также поблагодарить коллег, общение с которыми на разных этапах способствовало формированию моих представлений о нелинейной динамике и хаосе: В. С. Анищенко, В. С. Афраймовича, Б. П. Безручко, Ю. А. Данилова, В. Л. Дербова, А. С. Дмитриева, А. П. Кузнецова, Ю. Л. Майстренко, Л. И. Мельникова, А. С. Пиковского, М. И. Рабиновича, а также зарубежных коллег Юргена Курца, Эрика Мосекильде, Предрага Цвиановича, Ульрику Фойдель, Леона Чуа.

Лекция 1

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ХАОС. ИСТОРИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Что общего между прыгающим по земле мячиком, лазером, планетной системой, бурлящим потоком воды в ручье, биологической популяцией? Общее в том, что все эти объекты могут рассматриваться (по крайней мере, в известном приближении) как *динамические системы*. Абстрагируясь от конкретной физической природы объекта, о нем говорят как о динамической системе, если можно указать такой набор величин, называемых *динамическими переменными* и характеризующих *состояние* системы, что их значения в любой последующий момент времени получаются из исходного набора по определенному правилу. Это правило задает, как говорят, *оператор эволюции* системы.

Например, для прыгающего мячика оператор эволюции определяется законами движения в поле тяжести и удара мячика о поверхность. Мгновенное состояние задается двумя величинами — расстоянием от земли и скоростью. Геометрически оно изображается как точка на фазовой плоскости, где эти две величины отложены, соответственно, по оси абсцисс и ординат. Изменение состояния во времени или, для краткости, динамика системы, отвечает движению изображающей точки по определенной кривой — фазовой траектории. Если состояние системы задается набором N величин, динамику можно представить как движение точки по траектории в N -мерном фазовом пространстве.

Выделяют два класса динамических систем — консервативные (к ним относятся, например, механические колебательные системы в отсутствие трения) и диссипативные. Для диссипативных систем характерно то, что режим динамики, возникающий в системе, предоставленной себе в течение длительного времени, становится не зависящим от начального состояния (по крайней мере, при вариации начальных условий в некоторых конечных пределах). Множество точек в фазовом пространстве диссипативной системы, посещаемых в установившемся режиме, называется *аттрактором*. Простые примеры аттракторов — устойчивое состояние равновесия и предельный цикл, отвечающий режиму периодических автоколебаний (замкнутая фазовая траектория, к которой приближаются все соседние траектории).

Замечательным достижением теории динамических систем стало открытие хаотической динамики. Возникновение хаоса кажется на первый взгляд несовместимым с определением динамической системы, подразумевающим возможность однозначного предсказания конечного состояния по исходному. На самом деле противоречия нет. В хаотическом режиме сколь угодно малая неточность в задании начального состояния системы быстро нарастает во времени, так что предсказуемость становится недостижимой на достаточно больших интервалах времени. Такого рода режимы характеризуются нерегулярным, хаотическим изменением динамических переменных во времени. В фазовом пространстве диссипативных систем им отвечают *странные аттракторы* — сложно устроенные множества, демонстрирующие все более тонкую структуру на разных уровнях ее разрешения (фракталы).

В этой вводной лекции мы обсудим, по необходимости кратко, многоплановую картину истории развития и становления представлений о сложной динамике нелинейных систем. Этот обзор не может претендовать на полноту, его цель в том, чтобы показать, каким широким фронтом наука подошла к концепции динамического хаоса.

1.1. Механика

Первая линия развития, которая вела к представлениям о динамическом хаосе, связана с механикой, в частности и в особенности, с небесной механикой. Основоположниками классической механики принято считать Исаака Ньютона (1643–1727; основной труд «Математические начала натуральной философии», 1687), Жозефа Луи Лагранжа (1736–1813; основной труд «Аналитическая механика», 1788), Пьера Симона Лапласа (1749–1827; основной труд «Трактат о небесной механике»), Уильяма Гамильтона (1805–1865). Результатом их деятельности стало формирование представления о том, что мы сейчас называем гамильтоновой или консервативной динамической системой.

Проблема трех тел в небесной механике — первая задача, анализируя которую исследователи столкнулись с возникновением сложной динамики и хаоса. Впервые эту возможность глубоко осознал великий французский математик Анри Пуанкаре (1854–1912). В частности, он описал так называемую гомоклиническую ситуацию, ставшую предметом догматического анализа специалистов по нелинейной динамике 50–60 лет спустя: «Поражаешься сложности этой фигуры, которую я даже не пытаюсь изобразить. Ничто не является более подходящим, чтобы дать нам представление о сложности задачи трех тел, в которых нет однозначного интеграла и ряды [теории возмущений] расходятся».

Была развита теория возмущений и понято, какую роль играют в ней резонансные взаимодействия — именно они отвечают за расходимость рядов, упомянутых в высказывании Пуанкаре. Было осознано, что среди гамильтоновых систем можно выделить класс интегрируемых и класс неинтегрируемых систем. В случае числа степеней свободы больше единицы системы второго класса являются гораздо более типичными, чем первого. Именно они и могут демонстрировать сложную динамику и хаос.

С развитием компьютеров возможности изучения и наглядного представления сложной динамики революционным образом расширились. Одним из первых примеров компьютерного исследования сложной динамики стала работа французских астрофизиков (M. Hénon and C. Heiles, 1964), рассмотревших модель движения звезды через галактический диск.

Значительный прогресс в понимании соотношения между квазипериодической динамикой и хаосом связан с теорией, которую создали в 50–60-х годах советские математики А. Н. Колмогоров (1903–1987) и В. И. Арнольд и американский математик Ю. Мозер (теория КАМ). Основная теорема утверждает, что при включении достаточно слабого взаимодействия между движениями нелинейных систем с иррациональным соотношением частот квазипериодический характер динамики в большинстве случаев сохраняется.

Основываясь на анализе условий возникновения гомоклинической структуры, В. К. Мельников установил в 1963 г. критерий возникновения сложной динамики в системах близких к интегрируемым.

В качественном отношении большое значение имело развитие представлений о перекрытии (взаимодействии) резонансов в случае достаточно сильной нелинейности, приведшее к формулировке критерия стохастизации Б. В. Чирикова и Г. М. Заславского (обзор 1971).

1.2. Статистическая физика

Вторая линия развития связана со статистической физикой и формированием так называемой эргодической теории. Как теперь известно, вполне состоятельное описание в статистической физике достигается только в рамках квантовой теории. Однако много интересного и важного было сделано в предположении, что на фундаментальном уровне законы движения микрочастиц, из которых построены физические системы, подчиняется классической гамильтоновой механике.

Основоположники статистической физики Джозайя Уиллард Гиббс (1839–1903) и Людвиг Больцман (1844–1906) рассматривали фазовое пространство гамильтоновых систем, образованных совокупностью большого числа микрочастиц (атомов или моле-

кул). В силу закона сохранения энергии, предоставленная себе система должна оставаться все время на некоторой гиперповерхности в этом пространстве, задаваемой условием постоянства энергии. Больцман ввел эргодическую гипотезу — предположение о том, что имеется по существу только одна фазовая траектория, проходящая через все точки энергетической поверхности. В 1913 г. было доказано, что такое, в принципе, невозможно. Исправленная версия эргодической гипотезы принадлежит Паулю Эренфесту (1883–1933) и состоит в том, что фазовая траектория с течением времени должна проходить сколь угодно близко от любой точки на энергетической поверхности.

В обоснование эргодической теоремы внесли вклад Энрико Ферми (1901–1954), Джордж Биркгоф (1884–1944), Джон фон Нейман (1903–1957). Результатом явилось формирование отдельной математической дисциплины — эргодической теории или метрической теории динамических систем.

Новые возможности для проработки вопроса о релаксации сложных механических систем к термодинамическому равновесию стали открываться с развитием компьютеров, и одним из первых это осознал Э. Ферми. В начале 50-х годов Ферми, Паста и Улам предприняли попытку пронаблюдать в вычислительном эксперименте процесс установления термодинамического равновесия в цепочке связанных нелинейных осцилляторов. Результат оказался неожиданным: вместо релаксации к равновесию наблюдался явно квазипериодический процесс. Эта работа показала, что проблема сложнее, чем она виделась раньше. Результаты Ферми, Паста и Улама дали толчок исследованиям, приведшим впоследствии к представлению о распределенных системах, относящихся к классу вполне интегрируемых, эффективным методам решения соответствующих уравнений, а также к понятию солитона.

Оказалось, что свойство эргодичности само по себе не является ни необходимым, ни достаточным для желаемого обоснования статистической физики. По-настоящему существенным является наличие другого свойства — неустойчивости фазовых траекторий системы по отношению к малым возмущениям начальных условий и связанное с этим более сильное, чем эргодичность, свойство перемешивания. Одним из первых эту идею разработал советский физик Н. С. Крылов (1917–1947), сотрудник академика В. А. Фока (1898–1974). Книга Крылова была опубликована посмертно, в 1950 г., благодаря усилиям Фока, который осознавал принципиальное значение развитых его учеником идей.

Количественная характеристика неустойчивости траекторий известна как ляпуновский характеристический показатель — величина, введенная русским математиком А. М. Ляпуновым (1857–1918; докторская диссертация «Общая задача об устойчивости движения», 1892). В 1968 г. советский математик В. И. Оселедец опу-

бликовал важнейший результат — так называемую мультипликативную эргодическую теорему, которая позволяет говорить о ляпуновских показателях, определенных не для одной индивидуальной фазовой траектории, а для множества траекторий. Эта теорема лежит в основе современного понимания и применения в нелинейной динамике концепции ляпуновских показателей.

Были введены и другие характеристики, позволяющие различать простую и сложную динамику, — динамическая энтропия, известная как энтропия Колмогорова–Синая (Колмогоров, 1959) и топологическая энтропия (Adler et al., 1965).

Замечательным недавним достижением стало доказательство Я.Г.Синаем наличия неустойчивости и перемешивания в задачах о движении частицы с упругими отражениями в сосуде с вогнутыми во внутрь стенками («бильярд Синая») и в задачах уже по-настоящему близких к интересующим статистическую физику (двумерная модель газа из частиц в виде жестких дисков).

1.3. Теория колебаний, радиофизика и электроника

До сих пор, подчиняясь логике истории предмета, мы вели речь о гамильтоновых системах. Однако основным содержанием нашего курса будут диссипативные динамические системы. На уровне окружающих нас макроскопических явлений, именно с ними чаще всего приходится встречаться. Необходимость изучения диссипативных динамических систем становилась все более и более насущной по мере развития таких дисциплин, как радиофизика и гидродинамика.

Итак, третья линия связана с радиотехникой, электроникой, теорией автоматического регулирования. Здесь стоит начать с работ голландского физика и инженера Б.Ван-дер-Поля (1889–1959). С его именем связан генератор или осциллятор Ван-дер-Поля — классическая модель нелинейной системы, демонстрирующей периодические автоколебания. Около 1927 г. Ван-дер-Поль и Ван-дер-Марк исследовали динамику такого генератора под периодическим внешним воздействием. Интересно, что режим работы устройства контролировался по звуку в наушниках. Исследователи отметили явление синхронизации при определенных рациональных соотношениях частоты воздействия и собственной частоты и шумоподобные колебания при переходах между областями захвата. Возможно, это первое документально зарегистрированное экспериментальное наблюдение хаоса.

Работа Ван-дер-Поля и Ван-дер-Марка повлияла на работу Картрайт и Литтлвуда (Cartwright, Littlewood, 1945). В этой работе, посвященной математическому исследованию уравнения автогенератора под периодическим внешним воздействием, была обнаружена необычайная сложность динамики, в частности, наличие

у системы (при достаточно большой амплитуде внешней силы) бесконечного числа неустойчивых периодических орбит. Эта работа впоследствии оказала влияние на математиков, создававших основы математической теории сложной динамики и хаоса.

В России в 20-е годы в Московском университете сформировалась сильная научная школа Л. И. Мандельштама (1879–1944). Интересы этой школы охватывали, в частности, радиофизику, оптику, колебательные процессы в системах различной природы. Мандельштам первым пришел к пониманию возможности такой дисциплины, как теория нелинейных колебаний, — до этого полагали, что нелинейные явления должны изучаться для каждой конкретной системы отдельно. В конце 20-х годов ученик Мандельштама А. А. Андронов (1901–1952) установил, что адекватным математическим образом периодических автоколебаний являются предельные циклы, введенные Пуанкаре в его качественной теории дифференциальных уравнений. Мандельштам сразу понял важность этого достижения и настоял на немедленной публикации результата. Андронов привлек также для анализа автоколебательных систем созданный А. М. Ляпуновым аппарат теории устойчивости. Одно из важных достижений — исследование момента возникновения автоколебаний при изменении параметров, ситуации, которую теперь называют бифуркацией Андронова–Хопфа. С 1931 г. Андронов работает в Нижнем Новгороде (Горьком), где вокруг него формируется крупная научная школа в области теории колебаний. В 1937 г. выходит классическая книга А. А. Андропова, А. А. Витта и С. Э. Хайкина «Теория колебаний». Один из соавторов книги — Витт оказался жертвой репрессий и погиб в лагерях, в издании книги 1937 г. его имя было исключено и восстановлено только в последующих изданиях.

Одним из важных достижений развивающейся теории нелинейных колебаний стало формирование Андроновым и Понтрягиным представления о грубых или структурно-устойчивых системах. Представим себе пространство, точки которого изображают динамические системы. Система грубая, если около соответствующей ей точки пространства систем можно указать такую окрестность, что в ней будут располагаться только системы с топологически эквивалентным устройством фазового пространства. В пространстве параметров грубые системы занимают целые области. Эти области разграничены поверхностями, где располагаются негрубые системы коразмерности один. На этих поверхностях могут располагаться линии коразмерности два и т. д.

Исследовательская программа нелинейной теории колебаний по Андронову и Понтрягину и состоит в выделении и изучении грубых ситуаций, а затем негрубых в порядке возрастающей коразмерности. Что касается негрубых ситуаций, то они составляют предмет теории бифуркаций — глубокой и хорошо развитой ма-

тематической дисциплины, одного из краеугольных камней нелинейной динамики.

С 1970 г. с интервалом в 2 года в Горьком организуются школы-семинары по нелинейным колебаниям и волнам, в которых участвуют ведущие советские ученые. Этих школ состоялось 9, и они во многом определили распространение в нашей стране идей нелинейной динамики и динамического хаоса. Еще одна школа, восстанавливающая прерванную традицию, уже международная, состоялась в 1995 г. В формировании, распространении и популяризации в России представлений о хаотической динамике большую роль сыграли А. В. Гапонов-Грехов, Ю. И. Неймарк, М. И. Рабинович, Л. П. Шильников. В 1979 г. Кияшко, Пиковский и Рабинович предложили, по-видимому, первый простой радиотехнический автогенератор, в котором целенаправленно был реализован режим хаотических автоколебаний.

1.4. Гидродинамика

Четвертая линия развития связана с гидродинамикой и проблемой турбулентности.

В 1883 г. была опубликована работа английского физика Осборна Рейнольдса (1842–1912) «Экспериментальное исследование обстоятельств, которые определяют, будет ли движение воды прямолинейным или волнистым, и о законе сопротивления в параллельных каналах». В зависимости от безразмерного параметра, известного теперь как число Рейнольдса¹⁾, движение воды в трубке было ламинарным или турбулентным. Хотя основные уравнения, описывающие динамику вязкой жидкости — уравнения Навье–Стокса, уже были известны, причины возникновения турбулентности оставались загадкой. С тех пор вопрос о природе турбулентности стоял перед наукой, приобретая со временем все большую остроту. Около 1920 г. английский физик Л. Ричардсон развил качественные представления о том, что в турбулентном течении имеется перенос энергии от крупных ко все более и более мелким завихрениям, пока энергия не диссипирует из-за вязкости в малых масштабах. В 1941 г. была предложена теория турбулентности Колмогорова–Обухова. Анализ основывался на предположении, что при больших числах Рейнольдса турбулентное состояние можно считать локально однородным и изотропным в статистическом смысле, и о том, что имеет место каскадная передача энергии от крупных пространственных масштабов к мелким в так называемом «инерционном интервале» — области масштабов, где вязкость незначительна. Замечательно простая и глубокая тео-

¹⁾ Число Рейнольдса выражается соотношением $Re = \nu d/v$, где d — характерный геометрический размер исследуемой системы, v — характерная скорость течения, ν — коэффициент кинематической вязкости.

рия приводила ко вполне определенному теоретическому предсказанию — распределение энергии по спектру должно быть пропорционально $k^{-5/3}$, где k — волновое число («закон пяти третей»). К настоящему времени получены экспериментальные данные, хорошо согласующиеся с этим законом, но осознана также необходимость внесения уточнений в теорию.

Другое направление в попытках понять природу турбулентности состояло в поисках ответа на вопрос — как возникает турбулентность, если постепенно увеличивать число Рейнольдса, начав от малых значений, когда течение заведомо ламинарное. В 1944 г. была опубликована статья советского физика Л. Д. Ландау (1908–1968) «К проблеме турбулентности». В этой замечательной для своего времени статье Ландау предположил, что турбулентность возникает в результате большого числа (каскада) последовательных бифуркаций, каждая из которых состоит в появлении колебаний с новой частотой. Вновь возникающие частоты в типичном случае находятся в иррациональном соотношении с ранее возникшими частотами. Аналогичные представления развивал несколько позже немецкий математик Э. Хопф (1902–1983; работа «Математический пример, демонстрирующий особенности турбулентности» опубликована в 1948). Поэтому данную картину возникновения турбулентности называют сценарием Ландау–Хопфа. Подчеркнем, что этим работам предшествовало формирование представлений об автоколебаниях, предельных циклах и бифуркациях в радиофизике и теории колебаний.

В 1963 г. американский метеоролог Э. Лоренц опубликовал статью «Детерминированное непериодическое течение», в которой обсуждались результаты численного интегрирования с помощью компьютера системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующей динамику жидкости при конвекции в подогреваемом снизу слое. Будучи хорошо образованным математически, Лоренц подверг полученные результаты тщательному и глубокому обсуждению, акцентировав внимание на взаимосвязи между наблюдаемой сложной динамикой и присущей системе неустойчивостью фазовых траекторий. Позднее это свойство хаотической динамики пропагандировалось им под названием «эффект бабочки» (butterfly effect): в приложении к метеорологии взмах крыльев бабочки может через достаточное время повлечь существенное изменение погоды где-то совсем в другом месте. Примерно в то же самое время А. Н. Ораевский с соавторами также получили непериодические решения для аналогичных уравнений в теории одномодового лазера. Как работа Лоренца, опубликованная в метеорологическом журнале, так и работа Ораевского не были своевременно замечены и оценены.

В 1971 г., основываясь на достигнутом к этому времени продвижении в математических исследованиях, Д. Рюэль и Ф. Такенс

выступили с работой «О природе турбулентности». Подвергнув критике теорию Ландау, они аргументировали, что уже после включения в игру относительно небольшого числа частот (трех или четырех в зависимости от некоторых математических деталей) динамика может стать турбулентной и, в частности, демонстрировать характерный для случайного процесса сплошной спектр. Это связывалось с появлением в фазовом пространстве «странного аттрактора» — ключевой термин, введение которого определило историческое значение работы Рюэля и Такенса. Подчеркивалось наличие неустойчивости фазовых траекторий на странном аттракторе и его нетривиальная геометрическая структура — он представлял собой то, что стали называть фрактальным множеством или просто фракталом. С точки зрения интерпретации результатов, работа Рюэля и Такенса также оказалась уязвимой для критики. Многие вопросы, которые возникают в связи с предложенной ими картиной перехода к турбулентности, до сих пор остаются открытыми.

Надо сказать, что аргументация и в работе Ландау, и в работе Рюэля и Такенса носила столь общий характер, что имела равное отношение как к возникновению турбулентности, так и к возникновению сложной динамики в диссипативных системах другой физической природы. Дальнейшее понимание возможных типов перехода произошло благодаря еще одной линии развития.

1.5. Дискретные отображения

Попытки математического описания биологических проблем динамики популяций восходят к Томасу Мальтусу (1766–1834), автору нашумевшей концепции о том, что численность людей возрастает в геометрической прогрессии, а средства поддержания жизни лишь в арифметической. Поэтому численность населения должна регулироваться войнами, эпидемиями и пр. Марксисты, как известно, заклеили эту теорию как человеконенавистническую. Не входя в полемику, заметим, что в отсутствие факторов, сдерживающих рост населения, изменение численности популяции из года в год «по Мальтусу» можно описать как $x_{n+1} = Rx_n$, где R — параметр, определяющий условия жизни популяции. Ввести сдерживающий фактор можно, если добавить в уравнение нелинейный, например, квадратичный член: $x_{n+1} = R(x_n - x_n^2)$. Полученное соотношение называют логистическим отображением и оно действительно неплохо описывает, по крайней мере, с качественной стороны, динамику некоторых биологических популяций.

Интересный результат, проливающий свет на возможность сложной динамики в логистическом отображении, был получен в конце 40-х годов в работе американских математиков Станислава Улама (1909–1984) и Джона фон Неймана. Они показали, что для случая $R = 4$ это отображение путем замены переменных сводится

к форме, допускающей тривиальный анализ, причем оказывается, что выбором начальной точки x можно реализовать любую наперед заданную последовательность знаков величины $x - x_{\max}$. В 1975 г. американские математики Ли и Йорке опубликовали работу «Период три означает хаос». Речь шла о том, что если при частном значении параметра логистическое или другое одномерное отображение вида $x_{n+1} = f(x_n)$ имеет цикл периода три, то оно имеет бесконечное множество циклов всех прочих периодов. Эта работа привлекла большое внимание, и стоит отметить, что именно в ней в контексте нелинейной динамики впервые появился термин «хаос», ставший впоследствии общепринятым обозначением всей области деятельности, о которой мы ведем речь. Только через несколько лет на Западе стало широко известно, что еще в 1964 г. советский математик А.Н. Шарковский опубликовал гораздо более содержательную теорему, устанавливающую самые общие закономерности сосуществования циклов различного периода в одномерных непрерывных отображениях.

К середине 70-х годов было уже хорошо известно, что при увеличении параметра в логистическом отображении имеет место последовательность бифуркаций удвоения периода. Соответствующие компьютерные результаты очень наглядно были представлены, например, в работе Роберта Мэя (May, 1976). В это время, занимаясь исследованием удвоений периода с помощью карманного калькулятора, американский физик Митчел Фейгенбаум, работавший в Лос-Аламосской национальной лаборатории, обнаружил, что точки бифуркаций удвоения периода накапливались к определенному пределу — порогу возникновения хаоса по закону геометрической прогрессии с показателем 4,669... Этот показатель оказался универсальным, т. е. возникал и в других отображениях, и, как затем выяснилось, в нелинейных диссипативных системах самого разного вида. Используя аппарат, аналогичный развитому ранее в теории фазовых переходов, — метод ренормализационной группы, Фейгенбаум построил замечательную теорию, объясняющую универсальность удвоений периода (Feigenbaum 1978, 1979). Теория эта выглядела слишком формально, с точки зрения физиков, и слишком нестрога, с точки зрения математиков, так что Фейгенбауму далеко не сразу удалось опубликовать статью с изложением своих результатов. Эта задержка отчасти компенсировалась тем, что Фейгенбаум активно рассказывал о своей работе на конференциях и семинарах. В дальнейшем переход к хаосу через удвоения периода, демонстрирующий обнаруженные свойства универсальности, наблюдался в огромном количестве нелинейных систем различной физической природы и в их моделях. Одна из первых очень аккуратных работ — эксперимент по конвекции в жидком гелии (Maurer, Libchaber, 1979). Работа Фейгенбаума стимулировала также изучение и ренормгрупповое описание

других сценариев возникновения хаоса — через перемежаемость (Pomeau, Manneville, 1980) и через разрушение квазипериодического движения в диссипативных системах (Shenker, 1982; Feigenbaum et al., 1982; Rand et al., 1982; Ostlund et al., 1983).

1.6. Математика

Следует отметить ту неопенимую роль, которую сыграли для науки о динамическом хаосе казалось бы абстрактные исследования, диктовавшиеся внутренней логикой развития самой математики. Это, в первую очередь, теория множеств и теория размерности. Разработанные великим немецким математиком Георгом Кантором (1845–1918) представления о бесконечных множествах, их сравнении посредством установления взаимно-однозначного соответствия, определение счетного множества и континуума, знаменитый пример множества Кантора служат рабочими инструментами исследователей в области нелинейной динамики. Эти концепции будут неоднократно встречаться в нашем курсе. Другие примеры «математических монстров» (снежинка Коха, ковер Серпиньского и др.), придуманных математиками для объяснения тонких моментов теории множеств, используются для иллюстрации свойств объектов, с которыми приходится иметь дело при изучении сложной динамики (странные аттракторы). Нетривиальное обобщение понятия размерности, применимое к таким множествам, было разработано немецким математиком Феликсом Хаусдорфом (1868–1942) и также стало рабочим инструментом в нелинейной динамике.

Множества с нецелой размерностью Хаусдорфа называют фракталами. Этот термин был введен сравнительно недавно Бенуа Мандельбротом. Именно он обратил внимание на то, что странные объекты, «математические монстры», могут во многих ситуациях служить вполне реалистичными моделями различных образований в природе. Такого рода примеров известно теперь очень много (облака, горные массивы, кластеры из частиц во взвешях, магнитные домены, вихри в турбулентной жидкости и так далее). Будучи далекой от принятых в математике стандартов стиля и строгости изложения, книга Мандельброта представляла собой скорее произведение научно-популярного жанра. Тем не менее, она вызвала массовый интерес научного сообщества и стимулировала бурное развитие новой дисциплины — фрактальной геометрии, соприкасающейся по многим пунктам с нелинейной динамикой.

Нетривиальным синтезом теории размерности, теории меры, концепций статистической физики, стал так называемый мультифрактальный или термодинамический формализм, обеспечивающий разностороннее описание свойств странных множеств, встре-

чающихся при изучении сложной динамики нелинейных систем (Вул и др., обзор 1984; Halsey et al., 1986).

Выше мы упоминали об исследовательской программе теории колебаний по Андронову и Понтрягину. Эта программа реализована в изящной и законченной форме для систем с двумерным фазовым пространством. Однако начиная с размерности три, возникают глубокие проблемы, из-за которых выполнение этой программы становится принципиально невозможным. Оказывается, что в пространстве систем могут существовать области, где структурно неустойчивые системы образуют всюду плотное множество. Само осознание этого обстоятельства было важным событием в теории динамических систем и оно связано с именем американского математика Стефана Смейла. В нашем курсе будет рассмотрено отображение подковы Смейла — простой пример искусственной системы с нетривиальной динамикой.

Интересно, что на Смейла оказала влияние упоминавшаяся выше работа Картрайт и Литтлвуда о неавтономном генераторе Ван-дер-Поля. Работы Смейла, в свою очередь, стимулировали создание советским математиком Д.В.Аносовым так называемой гиперболической теории, имеющей в основе систему аксиом, выполнение которых обеспечивает хаотическую динамику.

1.7. Прикладной хаос

Очень часто дискутируется вопрос: для чего нужен хаос?

Прежде всего, нельзя недооценивать колоссального мировоззренческого значения этой концепции. Окружающий нас мир полон нелинейных явлений и процессов, правильное представление о которых немыслимо без понимания возможности хаоса, а также связанных с этим принципиальных ограничений на предсказуемость поведения сложных систем. Например, становится вполне очевидной несостоятельность учения об однозначной определенности исторического процесса.

Сказанное не мешает обсуждать возможность использования хаоса в системах различной природы для каких-либо конкретных практических целей или же учета тех последствий, к которым может привести возникновение сложной динамики.

Приведем простой пример — задачу о динамике судна или нефтяной платформы при наличии волнения (Thompson, Stewart, 1986). В известном приближении, это нелинейная динамическая система с внешним периодическим воздействием. Нормальное, рабочее расположение судна отвечает одному аттрактору системы, перевернутое — другому. Можно задать вопрос, как расположен и как устроен бассейн притяжения второго аттрактора. Как он зависит от интенсивности волнения? Ясно, что попадание в бассейн притяжения второго аттрактора ведет к катастрофе! Подчеркнем,

что только нелинейный анализ обеспечивает всестороннее понимание ситуации, выработку условий и рекомендаций по избежанию катастрофы.

Благодаря динамической природе хаотических режимов и их чувствительности по отношению к малым возмущениям они допускают эффективное управление посредством внешнего контролируемого воздействия. Целью такого воздействия может быть реализация в системе периодического режима вместо хаоса или попадание в заданную область фазового пространства. Эта идея, выдвинутая первоначально группой американских исследователей из университета штата Мериленд (Ott, Grebogi, Yorke, 1990), представляется очень перспективной и плодотворной в прикладном плане. К настоящему времени по этому предмету имеется обширная литература, проведено множество международных научных конференций.

Успешные примеры управления хаосом реализованы в механических системах, электронных устройствах, лазерах. В качестве примера можно привести работу (Boltt, Meiss, 1995), где рассматривается применение методики управления хаосом для того, чтобы направить космический аппарат на Луну. Оказывается, что с помощью малых контролируемых воздействий задачу удастся решить с очень существенной экономией топлива, правда, ценой увеличения продолжительности полета.

Другое направление применения идей и методов нелинейной динамики связано с проблемой обработки сигналов. Представим себе, что исследуется удаленный и недоступный объект, так что наши возможности ограничиваются анализом поступающего от него сигнала. За последние годы были предложены методики, позволяющие выяснить, произведен ли сигнал динамической системой, а также получить информацию о свойствах и характеристиках этой системы. Таким образом, аппарат нелинейной динамики превращается в инструмент исследования, позволяющий сделать заключение или предположение о структуре объекта, сконструировать его динамическую модель и т. д. Разработку методов и алгоритмов анализа сигналов можно считать важным направлением нелинейной динамики, непосредственно связанным с возможными приложениями.

Очень высоко оцениваются перспективы использования анализа и обработки сигналов, конструирования моделей, а также методик управления хаосом применительно к проблемам медицины и биологии.

В радиотехнике и электронике известен целый ряд приложений, где необходимы генераторы шумоподобных колебаний, в роли которых могут выступать различные устройства, функционирующие в режиме динамического хаоса. Примерами могут служить генераторы с запаздывающей связью на лампе бегущей волны (Ки-

слов, Залогин, Мясин, 1979) и на лампе обратной волны (Гинзбург, Кузнецов, 1981; Безручко, Кузнецов, Трубецков, 1979; Безручко и др., 1983).

Одно из возможных приложений хаоса состоит в использовании генерируемых динамическими системами хаотических сигналов в целях коммуникации. Благодаря хаотической природе сигналов открываются новые возможности кодирования информации, которая становится труднодоступной для перехвата. Предложен целый ряд схем, обеспечивающих связь на хаотических сигналах, проведены демонстрационные эксперименты (см. обзор Hasler, 1998).

Результаты, полученные в нелинейной динамике, открывают новые нетривиальные возможности для сжатия и хранения, а также обработки информации. Интересным примером такого рода может служить предложенная в Институте радиотехники и электроники РАН схема кодирования и обработки информации с использованием одномерных отображений (Andreev, Dmitriev et al., 1992). Эффективные методы сжатия информации разработаны на основании идей фрактальной геометрии (см. обзор Дьюдни, 1990). Прорабатывается вопрос о реализации вычислительных процессов в системах, отличных от традиционной компьютерной архитектуры и опирающихся на феномены нелинейной динамики (Sinha, Ditto, 1998).

Лекция 2

ХАОС В ПРОСТЫХ МОДЕЛЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Одно из фундаментальных понятий, с которыми предстоит иметь дело в нашем курсе, — это понятие *динамической системы*.

О динамической системе говорят в том случае, если можно указать такой набор величин, называемых *динамическими переменными* и характеризующих *состояние* системы, что их значения в любой последующий момент времени получаются из исходного набора по определенному правилу. Это правило задает *оператор эволюции* системы. Если состояние системы задается набором N величин, то изменение состояния во времени, или динамику системы, можно представить как движение точки по траектории в N -мерном фазовом пространстве, которую называют *фазовой траекторией*.

Когда-то в понятие динамической системы вкладывали чисто механическое содержание, имея в виду набор тел, связанных силовыми взаимодействиями и подчиняющихся системе дифференциальных уравнений, вытекающих из законов Ньютона. По мере развития науки понятие динамической системы становилось шире, охватывая объекты разной природы. Современное понятие динамической системы это результат длительной эволюции научных представлений и синтеза достижений многих дисциплин. Оно подразумевает возможность задания оператора эволюции любым способом, не обязательно дифференциальным уравнением. В частности, в последнее время и в теоретических исследованиях, и в работах прикладного характера очень часто рассматривают системы с дискретным временем, которые описываются рекуррентными отображениями. В этом случае под фазовой траекторией следует понимать некоторую дискретную последовательность точек в фазовом пространстве¹⁾.

¹⁾ Довольно часто в литературе, особенно математической, динамические системы с непрерывным временем называют *потоками*, а с дискретным временем — *каскадами*. С точки зрения физика, эти термины представляются не очень удачными, поскольку они «заняты», несут иную смысловую нагрузку. В данной книге мы предпочитаем избегать этой терминологии, но читателю все же следует быть о ней осведомленным.

Выделяют два класса динамических систем — консервативные и диссипативные.

В физике свойство консервативности понимается как сохранение энергии. В частности, механические колебательные системы в отсутствие трения относятся к консервативным системам. В присутствии трения механическая энергия не сохраняется, а постепенно рассеивается (диссипирует) и переходит в тепло, т. е. в энергию микроскопического движения молекул, составляющих систему и ее окружение. Строго говоря, в этом случае временная эволюция должна определяться не только состоянием самой системы, но и окружением. Все же и в этой ситуации описание в рамках концепции динамических систем, заданных, например, дифференциальными уравнениями, очень часто оказывается разумным и достаточно точным. Это будет уже диссипативная динамическая система.

Мы хотели бы, однако, ассоциировать консервативность и диссипативность с исходными понятиями теории динамических систем, а не апеллировать к частному классу объектов конкретной природы.

Пусть мы имеем некоторую динамическую систему, т.е. задано фазовое пространство и указан оператор эволюции. Вместо одной системы рассмотрим *ансамбль*, состоящий из большого количества ее идентичных копий, причем все представители ансамбля могут отличаться друг от друга только лишь начальными условиями. В фазовом пространстве ансамбль представляется облаком изображающих точек. С течением времени каждая изображающая точка перемещается в фазовом пространстве, как предписано динамическими уравнениями системы, так что форма облака и его размеры будут меняться.

Может случиться, что объем облака в процессе временной эволюции будет оставаться постоянным (рис. 2.1a). Это характерно для консервативных систем, к которым относятся, в частности, рассматриваемые в классической механике *гамильтоновы системы*.

Для гамильтоновой системы размерность фазового пространства N четная; состояние задается набором динамических переменных q_i, p_i ($i = 1, \dots, N/2$), называемых обобщенными координатами и импульсами. Количество пар координат и импульсов, т.е. величину, вдвое меньшую размерности фазового пространства, называют *числом степеней свободы*. Для систем с непрерывным временем динамика задается уравнениями Гамильтона

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= -\frac{\partial H(p_1, p_2, \dots, p_{N/2}, q_1, q_2, \dots, q_{N/2})}{\partial q_i}, \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H(p_1, p_2, \dots, p_{N/2}, q_1, q_2, \dots, q_{N/2})}{\partial p_i},\end{aligned}$$

где $H(p_1, p_2, \dots, p_{N/2}, q_1, q_2, \dots, q_{N/2})$ — определенная для каждой данной системы функция N переменных, именуемая *гамильтонианом*. Гамильтонова система с дискретным временем (отображение) в самом общем случае может быть выражена неявно через одну функцию N переменных $F(q_1, q_2, \dots, q_{N/2}, q'_1, q'_2, \dots, q'_{N/2})$, называемую *производящей функцией*:

$$p_i = -\frac{\partial F(q_1, q_2, \dots, q_{N/2}, q'_1, q'_2, \dots, q'_{N/2})}{\partial q_i},$$

$$p'_i = \frac{\partial F(q_1, q_2, \dots, q_{N/2}, q'_1, q'_2, \dots, q'_{N/2})}{\partial q'_i}.$$

Здесь величины, отмеченные штрихами, относятся к следующему моменту дискретного времени.

Что касается диссипативных систем, то для них характерно, что с течением времени облако изображающих точек «сжеживается» и концентрируется в итоге на одном или нескольких *аттракторах* — подмножествах фазового пространства, обладающих обычно нулевым фазовым объемом (рис. 2.1б). С точки зрения

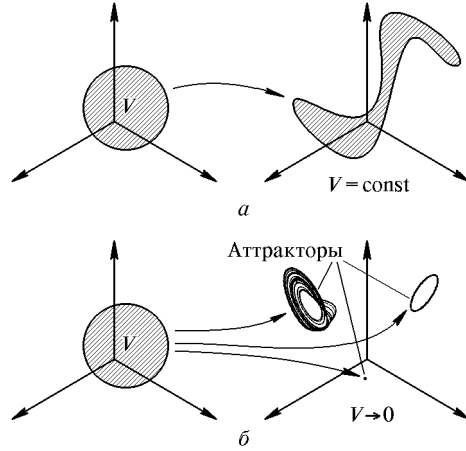


Рис. 2.1. К определению консервативных (а) и диссипативных (б) динамических систем

динамики во времени, это означает, что режим, возникающий в системе, предоставленной самой себе в течение длительного времени, становится не зависящим от начального состояния (по крайней мере, при вариации начальных условий в некоторых конечных пределах).

Простые примеры аттракторов — устойчивое состояние равновесия и устойчивый предельный цикл — замкнутая фазовая

траектория, к которой стремятся с течением времени все близкие траектории. Предельный цикл отвечает, как известно, режиму периодических автоколебаний.

При наличии в фазовом пространстве двух или более аттракторов говорят, что имеет место, соответственно, *бистабильность* или *мультистабильность*. Множество точек фазового пространства, из которых траектории приходят в конце концов к какому-то одному аттрактору, называется *бассейном* этого аттрактора.

Одним из важных понятий теории динамических систем является понятие *инвариантного множества*. Множество точек фазового пространства называют инвариантным в том случае, если фазовая траектория, стартующая из любой его точки, целиком принадлежит этому множеству. Любой аттрактор есть инвариантное множество, но не наоборот. Неустойчивые неподвижные точки, неустойчивые замкнутые орбиты — это тоже инвариантные множества. В нашем курсе мы встретимся и с другими, более сложными примерами инвариантных множеств. В отличие от аттракторов, которые имеют место только в диссипативных системах, инвариантные множества встречаются и в диссипативных, и в консервативных динамических системах.

Следует четко осознавать, что понятие динамической системы есть теоретическая абстракция, так же как многие другие привычные и полезные научные абстракции (материальная точка, абсолютно твердое тело, несжимаемая жидкость, идеальный газ). Реальные объекты могут рассматриваться как динамические системы только в определенном приближении, в той мере, в какой при описании динамики можно игнорировать тонкие детали внутренней структуры системы и ее взаимодействие с окружающим миром.

Успехи классической механики в XVII–XIX вв. были столь впечатляющими, что стало казаться возможным представлять себе всю Вселенную как одну гигантскую динамическую систему. Эту позицию четко сформулировал Лаплас: «Состояние системы природы в настоящем есть, очевидно, следствие того, каким оно было в предыдущий момент, и если мы представим себе разум, который в данное мгновение постиг все связи между объектами Вселенной, то он сможет установить соответствующие положения, движения и общие воздействия этих объектов в любое время в прошлом или в будущем» (1776 год). Эта доктрина, получившая название лапласовского детерминизма, выразила в концентрированном виде идеал научного познания, каким он виделся в те времена. Понадобился длительный путь развития науки и научного мировоззрения (теория поля, термодинамика и статистическая физика, квантовая механика), чтобы убедиться в несостоятельности такого представления о мире.

Как мы теперь знаем, идеал лапласовского детерминизма принципиально недостижим даже в том случае, если ограничиться рамками абстракции динамических систем. Феномен, ярко демонстрирующий это обстоятельство, был открыт и стал общеизвестным в последние несколько десятилетий. Это *динамический хаос*, основной предмет нашего интереса в данном курсе лекций. Хаотические режимы характеризуются нерегулярным, похожим на случайный процесс, изменением динамических переменных во времени. В диссипативных системах хаос ассоциируется с наличием в фазовом пространстве *странных аттракторов* — сложно устроенных фрактальных множеств, притягивающих к себе все траектории из некоторой прилегающей области (бассейна аттрактора) [2].

Возможность хаотического поведения кажется на первый взгляд несовместимой с самим определением динамической системы, основанном на утверждении о возможности однозначного предсказания конечного состояния по исходному. Цель настоящей лекции в том, чтобы со всей ясностью показать, что упомянутое противоречие только кажущееся, и продемонстрировать присутствие хаоса в динамических системах. Если пытаться подойти к проблеме, взяв за отправную точку какую-либо реальную физическую систему, то вопрос представляется совсем непростым (вспомните высказывание Лапласа!). Однако есть другой путь — обратиться к моделям, представляющим собой искусственно сконструированные «игрушечные» примеры, которые (1) заведомо представляют собой динамические системы в смысле общего определения, (2) допускают детальный теоретический анализ и (3) демонстрируют хаос. Это и будет сделано.

Для сравнения можно вспомнить пример из истории математики. Понадобились столетия усилий, гений Лобачевского, Больяи и Гаусса, чтобы впервые установить независимость постулата о параллельных от остальных аксиом Евклида. Однако позднее, после того как в конце XIX в. были предложены определенные математические конструкции — модели неевклидовой геометрии, этот факт стал очевидным, доказательство доступно даже школьнику и публиковалось в журнале «Квант».

2.1. Одномерные отображения

Начнем с обсуждения модельных систем, состояние которых характеризуется одной-единственной переменной x , т. е. фазовое пространство одномерно, а оператор эволюции задается рекуррентным отображением вида $x_{n+1} = f(x_n)$, где n — дискретное время. Это очень специфический класс динамических систем, но их анализ оказывается полезным и важным, проливая свет на многие феномены, встречающиеся в более сложных ситуациях.

Отображение «зуб пилы». Рассмотрим систему, оператор эволюции которой задан следующим правилом определения нового

состояния по предыдущему:

$$x_{n+1} = \{2x_n\}, \quad (2.1)$$

где фигурные скобки обозначают дробную часть числа. В другой общепотребительной форме это соотношение записывают как

$$x_{n+1} = 2x_n \pmod{1}. \quad (2.2)$$

Является ли предложенная модель динамической системой в смысле общего определения? Несомненно! Используя (2.1) или (2.2), мы можем, в принципе, определить состояние в любой последующий момент, если точно знаем исходное состояние x_0 . Это динамическая система, заданная одномерным рекуррентным отображением. На рис. 2.2 показан график отображения и построена ите-

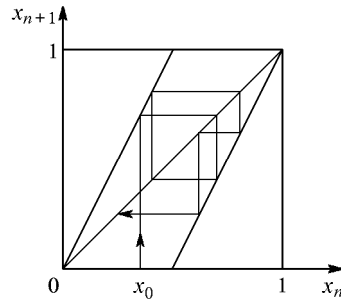


Рис. 2.2. Отображение «зуб пилы». Итерационная диаграмма, иллюстрирующая динамику на нескольких первых шагах дискретного времени при старте из начального состояния x_0

рационная диаграмма, иллюстрирующая несколько первых шагов динамики, начиная с некоторого начального состояния.

Пусть в качестве начального состояния выбрано некоторое число x_0 , принадлежащее интервалу от 0 до 1. Запишем это число в двоичной системе счисления:

$$x_0 = 0,01011010001010011001010 \dots$$

Теперь один шаг эволюции во времени согласно уравнению (2.1) или (2.2) состоит в том, что последовательность нулей и единиц сдвигается влево на одну позицию, и цифра, оказавшаяся по левую сторону от запятой, отбрасывается. Имеем:

$$x_1 = 0,1011010001010011001010 \dots$$

$$x_2 = 0,011010001010011001010 \dots$$

$$x_3 = 0,11010001010011001010 \dots$$

и т. д. Ясно, что присутствие цифры 0 или 1 на первой позиции после запятой показывает, в какой половине единичного интервала — левой или правой пребывает динамическая переменная x_n в данный момент.

Что же следует из такого представления динамики?

Предположим сначала, что двоичная дробь периодическая, это будет так, если x_0 рациональное число. Ясно, что состояние системы будет периодически повторять исходное через число временных шагов, равное периоду двоичного кода x_0 . Такой характер движения будет соответствовать любому рациональному числу, а эти числа, как известно, образуют на единичном интервале бесконечное счетное множество. Следовательно, система обладает бесконечным счетным множеством периодических орбит (циклов).

Непериодические двоичные дроби, отвечающие иррациональным числам x_0 , образуют множество с мощностью континуума. Соответственно, можно сказать, что наша система имеет континуум непериодических траекторий.

Мы вправе задать начальное условие числом, имеющим *произвольную последовательность нулей и единиц* в своей двоичной записи. Возьмем случайную последовательность, которую можно получить подбрасыванием монеты, записывая результаты испытаний по правилу орел — 0, решка — 1: 010010... Тогда при задании начального состояния $x_0 = 0,010010...$ динамическая система (2.1) в процессе своей эволюции *будет посещать левую и правую половину единичного интервала, следуя нашей случайной последовательности*. Вот он — хаос! Хаос в системе, описываемой *детерминированным уравнением* (2.1).

Преобразование двоичной последовательности, состоящее в сдвиге всех ее символов на одну позицию, называют *сдвигом Бернулли*. (По ассоциации с известной в теории вероятности схемой Бернулли, которая заключается в последовательности независимых испытаний, когда каждое испытание имеет два возможных исхода с вероятностями p и $1 - p$.)

Предположим теперь, что мы взяли очень близкое, но другое начальное значение x_0 . Очень близкое — это значит, что достаточно большое количество цифр двоичной записи до некоторой позиции, например 25-й, совпадает, а дальнейшие цифры («хвост») какие-то совсем иные. Тогда после 25 временных шагов, т. е. сдвигов Бернулли, начало хвоста как раз придвинется к разделительной запятой. Дальнейшая динамика и последовательность посещений левой и правой половины единичного интервала будет определяться структурой хвоста и, следовательно, будет совершенно другой, нежели это имело место для исходного начального условия. Таким образом, имея возможность контролировать точность задания начального условия до 25-го двоичного знака, мы можем правильно предсказывать попадание x_n в левую или правую половину единичного интервала лишь на протяжении первых 25 временных шагов.

Если динамическая система, подобная по своим свойствам рассматриваемой модели, привлекается для описания какой-либо физически реалистичной ситуации, то попытка предсказания состо-

яния на N шагов вперед сталкивается при увеличении N с необходимостью столь точного задания начальных условий, что это становится в конце концов принципиально невозможным.

Известный популяризатор науки Мартин Гарднер в своей книге приводит такую притчу. Инопланетянин, желая ознакомить своих соплеменников с Британской энциклопедией, записывает ее содержание с помощью двоичного кода и сопоставляет этому коду число между нулем и единицей. Далее, на стержне из особого материала наносится риска, отмечающая найденное число. Инопланетянин берет с собой этот стержень с тем, чтобы дома измерить точно координату риски, получить записанное число в двоичном коде и восстановить тем самым содержание энциклопедии. Нелепость ситуации с физической точки зрения совершенно очевидна, и ее не спасают никакие допущения о всемогуществе инопланетной технологии: при попытке реализовать указанный способ записи информации пришлось бы иметь дело с масштабами длины на много порядков меньшими, чем размеры атомов.

Логистическое отображение. Обратимся к следующему примеру — логистическому отображению

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad (2.3)$$

где x_n — динамическая переменная, а λ — параметр, от величины которого зависит характер динамики. Это тоже искусственно сконструированная модель динамической системы, но она имеет достаточно реалистичную интерпретацию в биологии для описания

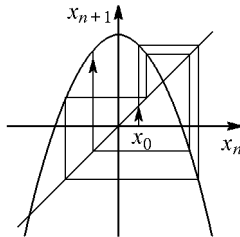


Рис. 2.3. Логистическое отображение при значении параметра $\lambda = 2$. Итерационная диаграмма, иллюстрирующая динамику на нескольких первых шагах дискретного времени при старте из начального состояния x_0

динамики численности некоторых биологических популяций. На рис. 2.3 показан график отображения (2.3).

В первой лекции логистическое отображение было представлено в виде $y_{n+1} = R(y_n - y_n^2)$. На самом деле обе формы записи эквивалентны и сводятся друг к другу заменой переменной и параметра:

$$x = \frac{y - 1/2}{R/4 - 1/2}, \quad \lambda = R \left(\frac{R}{4} - \frac{1}{2} \right).$$

Рассмотрим хаос в логистическом отображении, следуя замечательно простой идее, развитой в конце 40-х годов Уламом и фон Нейманом. Их подход применим при частном значении параметра

в уравнении (2.3), а именно, при $\lambda = 2$. В отображении, которое принимает вид

$$x_{n+1} = 1 - 2x_n^2, \quad (2.4)$$

выполним замену переменной

$$x_n = -\cos 2\pi y_n. \quad (2.5)$$

После подстановки выражения указанного вида для x_{n+1} и x_n в правую и левую часть уравнения получаем

$$\cos 2\pi y_{n+1} = 1 - 2\cos^2 2\pi y_n.$$

Теперь вспомним знакомую из тригонометрии формулу $2\cos^2 \varphi - 1 = \cos 2\varphi$ и запишем

$$-\cos 2\pi y_{n+1} = -\cos 4\pi y_n.$$

Это соотношение будет справедливо для всех n , если потребовать, чтобы переменная y_n удовлетворяла рекуррентному уравнению

$$y_{n+1} = 2y_n \pmod{1}. \quad (2.6)$$

Последовательность $x_n = -\cos 2\pi y_n$ будет подчиняться исходному уравнению (2.4)! В соотношении (2.6) мы узнаём исследованное в предыдущем разделе отображение «зуб пилы», для которого было установлено присутствие хаоса. Следовательно, хаос имеет место и в логистическом отображении. Зададим y_0 двоичной дробью в виде случайной последовательности нулей и единиц. Тогда динамика y_n будет хаотической; в терминах двоичного кода она представляется сдвигом Бернулли. Соответственно, хаотической будет и динамика x_n при старте из начальной точки $x_0 = -\cos 2\pi y_0$. Интересно, что это хаотическое решение рекуррентного уравнения (2.4) можно записать в явном виде с помощью формулы

$$x_n = -\cos(2^{n+1}\pi \arccos(x_0)).$$

Рассмотрим другой подход к обоснованию хаотической динамики логистического отображения при $\lambda = 2$. Зададимся вопросом: можно ли итерировать отображение (2.4) назад во времени? Выражая с помощью (2.4) x_n через x_{n+1} , получим

$$x_n = \pm \sqrt{\frac{1 - x_{n+1}}{2}}, \quad (2.7)$$

т. е. заданному x_{n+1} может предшествовать одно из двух значений x_n , отвечающих разному выбору знака перед квадратным корнем. Обеспечить однозначность при итерациях в обратном времени можно только указав на каждом шаге, какой знак квадратного корня выбрать. Зададим произвольную бесконечную последовательность из двух символов R и L , например,

$$RLLRLLLRLLRLRLL\ldots$$

и будем на каждом очередном шаге выбирать знак «+», если очередной символ R , и «−», если очередной символ L . Соответственно этому, получаемое значение x_n будет располагаться на правом (*Right*) или на левом (*Left*) склоне параболы. Заметим, что какой бы ни была RL -последовательность, начав итерации, мы никогда не встретимся с появлением под корнем отрицательного числа. Действительно, из формулы (2.7) видно, что неравенство $|x_{n+1}| < 1$ влечет $|x_n| < 1$. Поэтому ничто не мешает взять в качестве RL -кода последовательность, полученную посредством случайных испытаний. Возьмем теперь точку x , в которую мы попали в результате многократных итераций в обратном времени, за начальное условие для уравнения (2.4). Система будет эволюционировать хаотически, посещая левый и правый склоны параболы в точном соответствии с символами R и L нашей случайной последовательности, читаемой в обратном порядке.

Подчеркнем, что все сказанное справедливо благодаря специальному выбору значения параметра $\lambda = 2$. Если провести аналогичные рассуждения для $\lambda < 2$, то окажется, что, стартовав от некоторого определенного x , при итерациях в обратном времени можно использовать *не все* возможные RL -последовательности, а лишь некоторое их подмножество. Причем это подмножество становится все более и более тощим с уменьшением λ . В заключение отметим, что два рассмотренных подхода — по Уламу–фон Нейману и на основе итераций в обратном времени — отвечают *разным* правилам кодирования траекторий логистического отображения последовательностями двух символов.

Отображение «тент». Следующий пример — отображение «тент» (рис. 2.4а), которое получило название за форму своего графика,

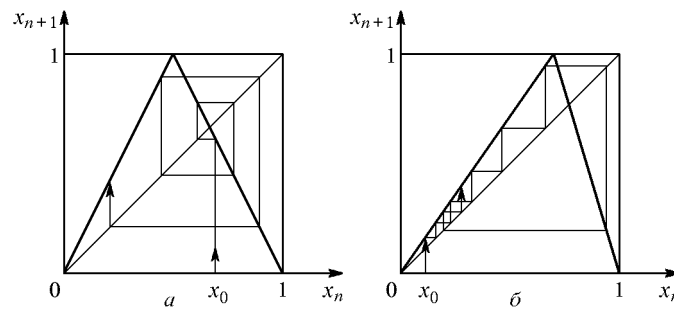


Рис. 2.4. Отображение «тент» в его симметричной (а) и косой (б) версиях, значения параметра α , соответственно, 0,5 и 0,7. Итерационная диаграмма иллюстрирует динамику на нескольких первых шагах при старте из начального состояния x_0

напоминающего палатку — тент. На рис. 2.4б показана модификация этого отображения, «косой тент». Его можно определить

формулой

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n}{\alpha}, & 0 < x_n < \alpha, \\ \frac{1-x_n}{1-\alpha}, & \alpha < x_n \leq 1, \end{cases} \quad (2.8)$$

где α — положительный параметр, меньший 1. Частный случай симметричного тента получается при $\alpha = 1/2$.

Как и для логистического отображения, можно легко построить траекторию, посещающую левую (L) и правую (R) ветвь графика в любой произвольной наперед заданной последовательности. Для этого итерируем отображение в обратном времени, выбирая точку-прообраз каждый раз на той ветви, которая предписана заданным RL -кодом. Теперь примем полученную после большого числа итераций точку за исходную. Тогда при итерациях отображения (2.8) в прямом времени левая и правая ветви будут посещаться в предписанном порядке.

«Период три означает хаос» и теорема Шарковского. Как мы упоминали во вводной лекции (лекция 1), в 1975 г. американские математики Ли и Йорке опубликовали ставшую широко известной работу «Period three implies chaos». Оказывается, что если у одномерного отображения $x_{n+1} = f(x_n)$ есть цикл периода три, то оно имеет континуум непериодических траекторий. Единственное требование к функции $f(x)$ состоит в том, что она должна быть непрерывной.

Пусть a, b, c — три элемента цикла: $b = f(a)$, $c = f(b)$, $a = f(c)$, и a — минимальный из них. (Заметим, что никакие два элемента не могут совпадать, так как в этом случае цикл выродился бы в неподвижную точку.) Возможны два случая: $b < c$ и $b > c$, из которых обсудим только первый (второй анализируется аналогично). Рассмотрим специальный пример — кусочно-линейное отображение, показанное на рис. 2.5. Правило, определяющее его динамику в обратном времени, можно сформулировать так:

(а) если $a \leq x' \leq b$, то положить

$$x = b + \frac{(x' - c)(c - b)}{a - c};$$

(б) если $b < x' \leq c$, то выбрать один из двух вариантов,

$$(61) \quad x = b + \frac{(x' - c)(c - b)}{a - c}$$

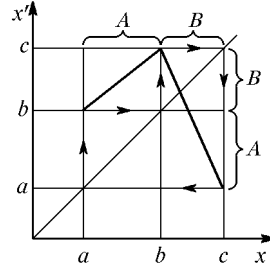


Рис. 2.5. Кусочно-линейное отображение, имеющее цикл периода три и допускающее континуум хаотических траекторий

или

$$(62) \quad x = a + \frac{(x' - b)(b - a)}{c - b}. \quad (2.9)$$

Будем строить траекторию в обратном времени по этим правилам. Заметим, что если на некотором шаге возникла ситуация (а), то на следующем шаге обязательно реализуется ситуация (б). Каждый раз, встретившись с ситуацией (б), будем делать выбор с помощью случайных испытаний, скажем, бросанием монеты: орел — (б1), решка — (б2). Получится хаотическая траектория. Ясно, что ее можно наблюдать и при динамике в прямом времени при задании некоторого вполне определенного начального условия.

А теперь заметим, что на самом деле конкретный вид отображения (2.9) непринципиален, важно лишь то, что точки интервала $A = [a, b]$ имеют прообразы в интервале $B = [b, c]$, а точки интервала B имеют прообразы и в A , и в B . Этого достаточно, чтобы у отображения существовало подмножество траекторий, кодируемых по тем же правилам, как траектории отображения (2.9).

Наряду с континуумом хаотических траекторий непрерывное одномерное отображение, у которого есть цикл периода три, имеет также циклы всевозможных периодов. Это частный случай *теоремы Шарковского* (Шарковский, 1964), содержание которой состоит в следующем:

Если непрерывное отображение одномерного интервала в себя имеет цикл периода t , то оно имеет также и циклы со всевозможными периодами t' , предшествующими числу t в перечне всех целых чисел, выписанных в так называемом порядке Шарковского:

$$\begin{aligned} 1 &\triangleleft 2 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2^3 \triangleleft 2^4 \triangleleft \dots \triangleleft 2^3 \cdot 9 \triangleleft 2^3 \cdot 7 \triangleleft 2^3 \cdot 5 \triangleleft 2^3 \cdot 3 \triangleleft \dots \\ &\dots \triangleleft 2^2 \cdot 9 \triangleleft 2^2 \cdot 7 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft \dots \\ &\dots \triangleleft 2 \cdot 9 \triangleleft 2 \cdot 7 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft \dots \triangleleft 9 \triangleleft 7 \triangleleft 5 \triangleleft 3. \end{aligned}$$

2.2. Двумерные отображения, сохраняющие площадь

Отображение пекаря. Давайте попытаемся построить отображение, отправляясь от рассмотрения динамики типа сдвига Бернулли на множестве последовательностей бесконечных в обе стороны. Запишем такую последовательность в виде

$$(\dots s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}, s_0; s_1, s_2, s_3, \dots), \quad (2.10)$$

где каждое s_i есть либо 0, либо 1. Обратите внимание на особый разделительный символ — точку с запятой, который встречается в одном-единственном месте; его присутствие позволяет соотносить положение символов с некоторым «началом отсчета». Введем две

динамические переменные — действительные числа x и y , принадлежащие единичному интервалу, определив их через символы s_i следующим образом:

$$x = \frac{s_0}{2} + \frac{s_{-1}}{4} + \frac{s_{-2}}{8} + \dots, \quad y = \frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{4} + \frac{s_3}{8} + \dots \quad (2.11)$$

Пусть трансформация последовательности (2.10) за один временной шаг состоит в том, что все символы сдвигаются на одну позицию вправо, так что результатом окажется

$$(\dots s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, s_2, s_3, \dots). \quad (2.12)$$

Тогда новые значения x и y будут

$$x' = \frac{s_{-1}}{2} + \frac{s_{-2}}{4} + \frac{s_{-3}}{8} + \dots, \quad y' = \frac{s_0}{2} + \frac{s_1}{4} + \frac{s_2}{8} + \dots \quad (2.13)$$

Их можно выразить через старые значения x и y следующим образом:

$$x' = \{2x\}, \quad y' = \frac{y + [2x]}{2}, \quad (2.14)$$

где фигурные скобки обозначают дробную часть числа, а квадратные — целую часть. Другая форма записи тех же соотношений:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = \frac{y}{2} \end{cases} \quad \text{для } x \leq \frac{1}{2}, \quad \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = \frac{1+y}{2} \end{cases} \quad \text{для } x > \frac{1}{2}. \quad (2.15)$$

По самому своему построению наша система может демонстрировать хаотическую динамику: чтобы получить хаос нужно взять в качестве последовательности (2.10) случайный набор символов. Система имеет также бесконечное множество периодических орбит (циклов) — им отвечают периодические последовательности.

В отличие от примеров, приведенных в предыдущем разделе, мы пришли к *двумерному отображению*, описывающему динамику в терминах переменных x и y . Мгновенное состояние нашей системы определяется заданием этих двух величин, причем обе они необходимы для того, чтобы иметь возможность находить последующие состояния по известному начальному.

Можно ли представить себе действие двумерного отображения в наглядной геометрической форме? Такое представление существует, и именно оно послужило основанием назвать данную модель *отображением пекаря*. (В литературе на английском языке оно обозначается как Baker's map. Не надо думать, что это отображение имени некоего ученого по фамилии Бейкер!)

Рассмотрим единичный квадрат на плоскости (x, y) . Разрезаем его пополам, как кусок теста, накладываем одну половинку

на другую и раскатываем так, чтобы восстановить исходную форму (рис. 2.6). Для наглядности «тесто», оказавшееся слева при первом разрезе, изображено темным, а справа — светлым. На рисунке показано, как выглядит распределение темного и светлого теста на нескольких последовательных шагах. При большом числе итераций это распределение принимает вид набора тонких и длинных чередующихся темных и светлых полосок. При многократном повторении процедуры в конце концов получаем кусок теста, который выглядит однородным. Взяв для пробы небольшой кусочек, мы обнаружим в нем присутствующие в равных долях

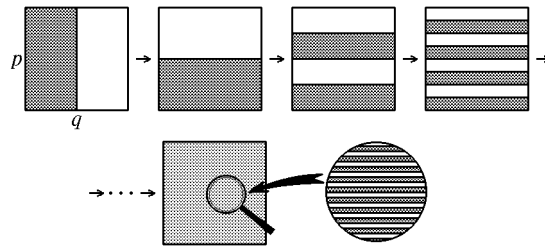


Рис. 2.6. Геометрическая иллюстрация действия отображения пекаря (2.15). В верхней части рисунка показаны три шага последовательных итераций отображения, а внизу — состояние, возникшее после некоторого достаточно большого числа итераций

темную и светлую составляющие. Описанное свойство отображения пекаря называется именно так, как мы его и назвали бы на «бытовом» языке, — *перемешивание*.

Отображение пекаря является консервативной системой или, используя терминологию, специфическую для двумерных отображений, это *отображение, сохраняющее площадь*. Если взять некоторую область на плоскости (x, y) и подвергнуть каждую ее точку действию отображения пекаря, то она перейдет в некоторую другую по форме область, но площадь новой области останется той же самой. Формальное правило для проверки этого свойства состоит в том, что должен равняться единице определитель, построенный из производных, — якобиан. Для отображения пекаря имеем:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1. \quad (2.16)$$

В более широком контексте вместо «площадь» говорят «мера». В случае двумерного фазового пространства мера — это площадь, в случае одномерного — длина, в случае трехмерного — объем.

Мы уже интерпретировали представленную на рис. 2.6 динамику как перемешивание слоев двух сортов теста или, если угодно, двух жидкостей — темной и светлой. Сохранение меры отвечает тому, что эти жидкости являются несжимаемыми.

Отображение «кот Арнольда». Рассмотрим двумерное отображение

$$\begin{cases} p' = p + x \pmod{1}, \\ x' = p + 2x \pmod{1}, \end{cases} \quad (2.17)$$

которое называют *отображением кота Арнольда* (Arnold's cat map). Причиной для такого названия послужило то, что пред-

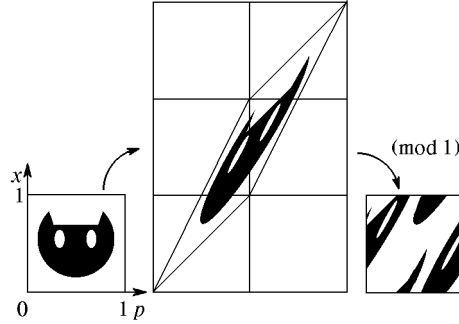


Рис. 2.7. Геометрическая иллюстрация действия классического отображения «кот Арнольда»

ложивший это отображение В.И. Арнольд использовал для иллюстрации его действия изображение кота (рис. 2.7). Геометрически первый шаг процедуры состоит в линейном преобразовании координат $\begin{pmatrix} p' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix}$, а второй — в переносе элементов картинки, удалившихся за рамки единичного квадрата, обратно в него. Последнее отвечает, конечно, операции взятия модуля, благодаря присутствию которой фазовое пространство можно считать периодическим по обоим динамическим переменным p и x и интерпретировать как поверхность тора. Впрочем, для наглядного графического представления динамики удобнее использовать просто единичный квадрат, как на рис. 2.7.

Как и отображение пекаря, отображение кота Арнольда относится к классу консервативных динамических систем. Математически это выражается в том, что детерминант матрицы $\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, задающей отображение, равен 1, и оно, следовательно, сохраняет меру (площадь) любой области, например, изображения кота.

Можно рассмотреть более широкий класс линейных отображений на торе, определяемых всевозможными матрицами 2×2 с целочисленными элементами и единичным определителем:

$$\begin{pmatrix} p' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} \pmod{1}, \quad (2.18)$$

$$ad - bc = 1. \quad (2.19)$$

В зависимости от собственных чисел матрицы, которые находятся из решения квадратного уравнения

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0, \quad (2.20)$$

отображения вида (2.18) относятся к одному из трех типов:

- гиперболический, если одно из собственных чисел больше, а второе меньше 1;
- параболический, если $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$;
- эллиптический, если λ_1 и λ_2 комплексно-сопряженные.

Отображение кота Арнольда принадлежит к гиперболическому типу, поскольку его собственные числа $\lambda_1 = (3 + \sqrt{5})/2$ и $\lambda_2 = (3 - \sqrt{5})/2$. При итерациях этого отображения закрашенная область (изображение кота) вытягивается вдоль направления первого (неустойчивого) собственного вектора на каждом шаге в λ_1 раз и сжимается вдоль второго (устойчивого) собственного направления, соответственно, в λ_2 раз. После достаточно большого числа итераций изображение кота превращается в чрезвычайно узкую полосу, вытянутую вдоль неустойчивого собственного напри-

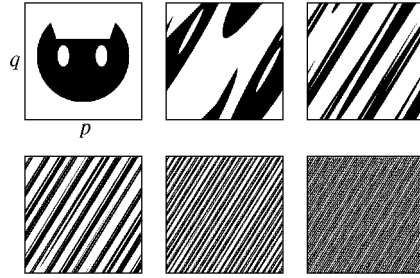


Рис. 2.8. Динамика отображения «кот Арнольда» в течение пяти шагов итераций. Обратите внимание на быстро развивающийся процесс перемешивания

вления, т. е. близкую к длинному отрезку линии, заданной уравнением $p = [(\sqrt{5} - 1)/2]x \pmod{1}$. Из-за того что угловой коэффициент иррационален, эта линия покрывает поверхность тора всюду плотно. Поэтому картина выглядит как набор большого

числа узких чередующихся черных и белых полосок, в которые превратились, соответственно, множество точек, принадлежащих изображению кота, и дополнение этого множества: черная и белая «жидкости» оказываются хорошо перемешанными (рис. 2.8). Это свойство перемешивания аналогично тому, которое отмечалось для отображения пекаря. Оно строго доказывается в своей точной математической формулировке для гиперболических отображений на торе и служит основанием для заключения о хаотической динамике этих систем. В частности, из перемешивания следует свойство эргодичности, которое состоит в том, что вычисление статистических средних по ансамблю эквивалентно усреднению по времени вдоль типичной индивидуальной траектории.

2.3. Странные хаотические аттракторы

В этом разделе будут приведены примеры, которые иллюстрируют принципиальную возможность хаоса как стационарного режима динамики диссипативных систем. (Имеется в виду стационарность в статистическом смысле, когда постоянны лишь усредненные за достаточно большой интервал времени статистические характеристики динамики.) Это двумерные и трехмерные модельные отображения, в фазовом пространстве которых имеется притягивающее множество сложной структуры, называемое *странным хаотическим аттрактором* (иногда один из двух эпитетов опускают).

Обобщенное отображение пекаря. Вернемся к рассмотренному в предыдущем разделе отображению пекаря и предпримем некоторую его модификацию. Пусть первоначальный разрез «куска теста» — единичного квадрата производится в отношении α к β , при этом $\alpha + \beta = 1$. Далее оба куска растягиваются по горизонтали до

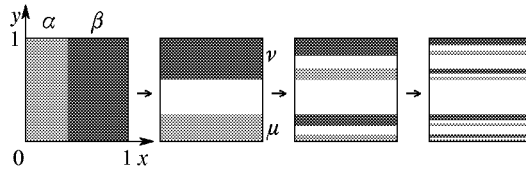


Рис. 2.9. Геометрическая иллюстрация действия обобщенного отображения пекаря (2.21); показаны три последовательные итерации. Можно видеть, как шаг за шагом формируется канторовоподобная структура аттрактора

единичной длины, сжимаются по вертикали, так что их высоты будут соответственно μ и ν , $\mu + \nu < 1$, и располагаются в пределах единичного квадрата у верхнего и нижнего его края (рис. 2.9). В аналитической форме предлагаемое отображение записывается

следующим образом:

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{\alpha} & \text{для } x \leq \alpha, \\ y' = \mu y & \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{x - \alpha}{\beta} & \text{для } x > \alpha. \end{cases} \quad (2.21)$$

Заметим, что суммарная площадь прямоугольников, образовавшихся после применения преобразования, уменьшилась на фактор $(\mu + \nu) < 1$, т. е. оно уже не относится к классу сохраняющих площадь. Это *диссипативная* система с двумерным фазовым пространством. На рис. 2.9 показано, что происходит при нескольких последовательных итерациях обобщенного отображения пекаря. Образуется характерная система горизонтальных полос, суммарная ширина которых убывает с ростом числа итераций как $(\mu + \nu)^n$. Объект, возникающий в пределе бесконечно большого числа итераций, в сечении представляет собой так называемое двухмасштабное канторово множество. Процедура его построения состоит в том, что берется единичный отрезок, делится в отношении $\mu : 1 - \mu - \nu : \nu$, и средняя часть исключается. То же самое проделывается с двумя оставшимися отрезками, затем с каждым из отрезков, возникших на предыдущем шаге, и т. д. Заметим, что классическое множество Кантора отвечает частному случаю данного построения, а именно, выбору $\mu = \nu = 1/3$.

Аттрактор имеет нулевую меру, поскольку суммарная площадь полос на n -м шаге дается выражением $(\mu + \nu)^n$ и стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, так как $\mu + \nu < 1$. Все точки исходного единичного квадрата приближаются к аттрактору. В то же время аттрактор обладает тем свойством, что соседние по горизонтали точки удаляются друг от друга при последовательных итерациях, т. е. имеет место неустойчивость. Отметим сочетание устойчивости в смысле наличия притяжения к аттрактору и неустойчивости в смысле разбегания точек на аттракторе. Поперечная структура в виде канторова или кантороподобного множества очень характерна для странных аттракторов. Обобщенное отображение пекаря является очень простым для анализа и будет использоваться в последующих лекциях в качестве одного из основных примеров. Некоторую неудовлетворенность, однако, может вызвать тот момент, что это отображение не является непрерывным.

Аттрактор Плыкина. Рассмотрим пример двумерного отображения, обладающего свойством непрерывности и имеющего хаотический аттрактор (Плыкин, 1980). Этот пример позволяет уяснить важную концепцию гиперболичности — свойства, наличие которого позволяет строго математически обосновать присутствие хаоса.

Рассмотрим область R на плоскости (x, y) , показанную на рис. 2.10а. Она состоит из квадрата и трех полудисков с полукруглыми вырезами. Область покрыта штриховкой, показывающей

заданное на ней поле направлений. Определим двумерное отображение так, чтобы результатом его действия на точки области R была фигура, показанная на рис. 2.10б. Заметьте, что поле направлений, возникающее после применения отображения, совпадает с исходным.

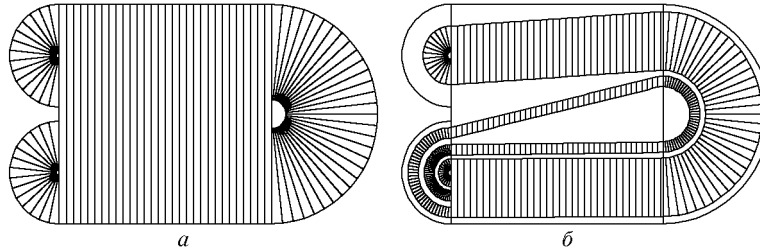


Рис. 2.10. Исходная область с определенным на ней полем направлений (а) и результат ее преобразования за один шаг отображения Плыкина (б)

На рис. 2.11 показано, что получается при многократном действии описанного отображения. Точки, заполнявшие в начальный момент область R , сконцентрировались на аттракторе, который представляет собой некоторое сложно и тонко устроенное множество.

Динамика отображения Плыкина проявляется в свете следующего наблюдения. Рассмотрим точки какого-либо одного отрезка из числа образующих штриховку на рис. 2.10а. Нетрудно видеть, что все эти точки будут демонстрировать одну и ту же динамику в том смысле, что будут одновременно посещать каждую из подобластей (квадрат и три полудиска), из которых построена область R . Если мы отождествим точки, принадлежащие каждому

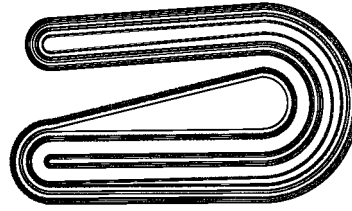


Рис. 2.11. Аттрактор Плыкина

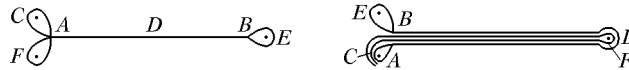


Рис. 2.12. Резиновая нить, представляющая топологию фазового пространства для одномерного аналога отображения Плыкина (слева), и ее преобразование за один шаг отображения (справа)

определенному отрезку, то вместо динамики в двумерном фазовом пространстве можем рассматривать одномерную динамику. Фазовым пространством для этой одномерной динамики служит «резиновая нить», имеющая две петли на одном конце и одну петлю на другом (рис. 2.12). Представим себе, что эта нить натянута

на три гвоздика. Один шаг итераций будет состоять в том, что мы определенным образом растягиваем нить и вновь натягиваем ее на те же гвоздики. Попробуйте изготовить модель из резиновой нити и, используя рис. 2.12, воспроизвести один или (если удастся) больше шагов преобразования.

Аттрактор Смейла–Вильямса. Пример хаотического аттрактора, получивший наименование *соленоид Смейла–Вильямса*, реализуется в трехмерном отображении, которое строится следующим образом. Рассмотрим трехмерную область в форме тора (рис. 2.13). Представляя его для наглядности как резиновый бублик, растянем

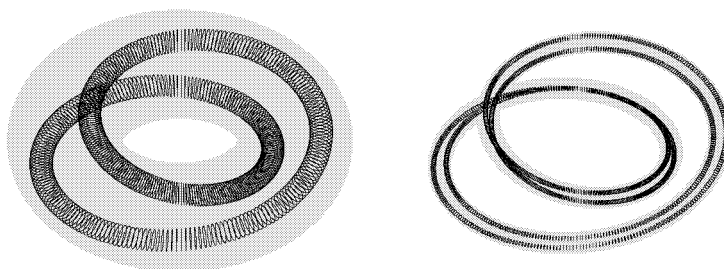


Рис. 2.13. Первые два шага построения аттрактора Смейла–Вильямса

его в длину, сложим вдвое и вложим в исходный тор. Чтобы он там поместился, приходится предположить, что в ходе процедуры общий объем «бублика» уменьшается — площадь поперечного сечения должна уменьшиться более чем в два раза.

На рис. 2.14 показано, как выглядит поперечное сечение исходного тора после однократного и двукратного применения отображения. Это похоже на процедуру построения множества Кантора: на каждом шаге в сечении имеется некоторое число дисков. Очередной шаг построения состоит в том, что внутри каждого

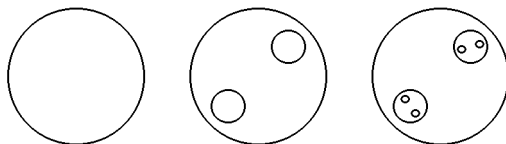


Рис. 2.14. Вид сечения аттрактора Смейла–Вильямса на первых шагах его построения

диска выделяются две меньшие области в форме дисков, которые оставляются для следующего шага, а все остальное множество исключается. То, что останется в итоге, и есть сечение аттрактора Смейла–Вильямса.

Имея в виду описанную геометрическую конструкцию, можно предложить аналитическую форму отображения. Ее удобно представить в цилиндрических координатах (r, φ, ζ) , которые связаны с обычными декартовыми координатами (x, y, z) как

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = \zeta. \quad (2.22)$$

Тогда подходящей формой отображения будет

$$r' = 1 + \alpha(r - 1) + \varepsilon \cos \varphi, \quad \varphi' = 2\varphi, \quad z' = \alpha z + \varepsilon \sin \varphi, \quad (2.23)$$

где $\alpha = 0,2$, $\varepsilon = 0,3$. Поверхность исходного тора в параметрической форме задается уравнениями

$$r = 1 + \frac{1}{2} \cos u, \quad \varphi = v, \quad z = \frac{1}{2} \sin u, \quad 0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq v < 2\pi. \quad (2.24)$$

На рис. 2.15 показан портрет аттрактора, построенный путем многократных итераций отображения (2.23).

Приведенные примеры аттракторов Плыкина и Смейла–Вильямса сконструированы так, чтобы они обладали свойством, называемым *гиперболичностью*.

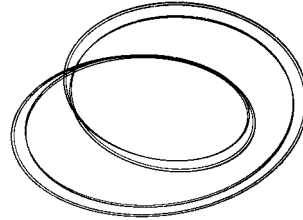


Рис. 2.15. Аттрактор Смейла–Вильямса, построенный путем итераций отображения (2.23)

Когда говорят, что аттрактор какой-либо динамической системы гиперболический, то имеют в виду, что все принадлежащие ему траектории гиперболические (седловые), т.е. их окрестность устроена так, как показано на рис. 2.16. Возьмем любую траекторию на аттракторе и рассмотрим всевозможные близкие к ней возмущенные траектории. В линейном приближении среди них выделяется класс траекторий (I), которые приближаются к исходной, причем в среднем по экспоненте, и класс траекторий (II), приближающихся к исходной в обратном времени, тоже в среднем по экспоненте. Поскольку речь идет о рассмотрении динамики около исходной траектории в линейном приближении, то любой из множества инфинитезимально возмущенных траекторий сопоставляется элемент линейного векторного пространства (математики называют его *касательным пространством*), причем все множество исчерпывается всевозможными суперпозициями векторов, ассоциирующихся с упомянутыми выше возмущениями класса I и II. Подчеркнем еще раз, что так должна быть устроена окрестность у *всех* принадлежащих аттрактору траекторий.

Доказано, что системы, обладающие свойством гиперболичности, структурно устойчивы, иными словами, это свойство грубое. Если некоторая система имеет гиперболический аттрактор, то это

будет справедливо и для систем, полученных произвольным достаточно малым непрерывным возмущением исходной системы. Исходя из предположения о гиперболичности аттрактора, можно строго доказать присутствие всех других свойств, являющихся существенными атрибутами хаоса. Будучи принятым за аксиома-

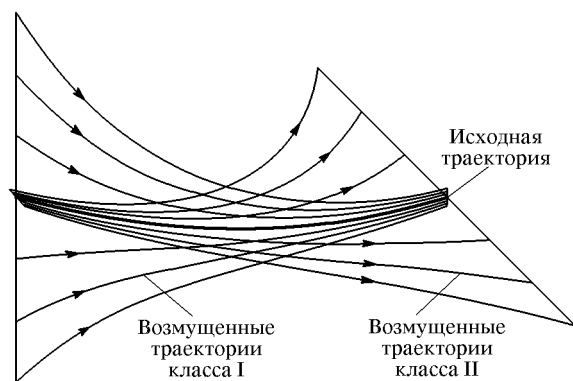


Рис. 2.16. К пояснению устройства окрестности гиперболической (седловой) траектории

тически данное, свойство гиперболичности служит основой для построения теории так называемых U -систем Аносова. К сожалению, известные реалистичные примеры странных аттракторов (см. следующие лекции) гиперболическими в этом строгом смысле не являются.

Лекция 3

СИСТЕМА ЛОРЕНЦА

В предыдущей лекции были рассмотрены примеры динамических систем с хаотическим поведением, сконструированные искусственно. Теперь естественно спросить, может ли возникать хаос в физических системах или их реалистичных моделях, например, при описании привычными большинству физиков дифференциальными уравнениями. В качестве первого примера, ставшего классическим, обратимся к знаменитой *модели Лоренца*.

В 1963 г. американский исследователь Эдвард Лоренц, занимавшийся проблемами прогноза погоды, опубликовал в журнале «Journal of Atmospheric Sciences» статью «Детерминированное неперiodическое течение». Эта работа была посвящена исследованию модельной нелинейной системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая получалась как результат определенных приближений при анализе задачи о конвекции в подогреваемом снизу слое жидкости. При численном решении задачи на компьютере обнаруживалось установление в системе хаотического режима, который характеризовался сложным, неперiodическим изменением динамических переменных во времени. Тем не менее, этот режим можно рассматривать в определенном смысле как стационарный, поскольку его статистические характеристики, усредненные за достаточно большой интервал времени, остаются постоянными. Интересно, что система уравнений Лоренца оказывается применимой не только к задаче о конвекции в слое (где она служит довольно грубым, но очень точным приближением), но и к другим системам. К ним относятся односторонняя модель лазера, конвекция в трубке, модель водяного колеса, диссипативный осциллятор с инерционным возбуждением. Указанное обстоятельство служит замечательной иллюстрацией одного из принципов Л. И. Мандельштама, а именно, теоретико-колебательной общности систем различной физической природы и колебательной взаимопомощи различных дисциплин при описании нелинейных явлений.

Чтобы продемонстрировать различные по стилю подходы к получению уравнений динамики реальных систем, в этой лекции будет сначала проведен подробный вывод уравнений Лоренца для задачи о конвекции в слое, а затем на качественном уровне (по-

звolyающем, впрочем, правильно установить вид уравнений) будут рассмотрены задачи о конвекции в замкнутой трубке и об одномодовом лазере. В заключение лекции будет показано, как уравнения Лоренца приводятся к форме, отвечающей нелинейному осциллятору с инерционным возбуждением.

3.1. Задача о конвекции в подогреваемом снизу слое

Рассмотрим слой жидкости глубины h , находящийся в поле тяжести. Пусть на верхней границе поддерживается постоянная температура T_0 , а на нижней границе $T_0 + \Delta T$ (рис. 3.1). Из-за того что нагретая жидкость легче холодной, при достаточно большой разности температур возникает конвекционное течение

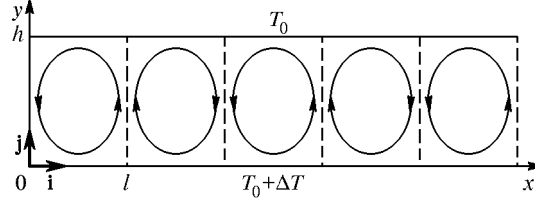


Рис. 3.1. Конфигурация течения, возникающего при конвекции в подогреваемом снизу слое жидкости

жидкости, описание которого и составляет предмет исследования. В исходной постановке задачи мы имеем дело с *распределенной системой* — ее состояние характеризуется эволюционирующими во времени полями распределения скорости $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, плотности $\rho(x, y, z, t)$ и температуры $T(x, y, z, t)$ ¹. Изменение этих полей во времени описывается системой уравнений с частными производными

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(T \mathbf{v}) &= \kappa \nabla^2 T, \\ \rho &= \rho_0 (1 - \gamma(T - T_0)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\nabla = \mathbf{i} \partial / \partial x + \mathbf{j} \partial / \partial y + \mathbf{k} \partial / \partial z$ — векторный оператор Гамильтона ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты прямоугольной системы координат), член $\mathbf{g}$ обу-

¹) Мгновенное распределение поля скорости и температуры можно интерпретировать как точку в бесконечномерном пространстве, так что распределенная система выступает как динамическая система с бесконечномерным фазовым пространством.

словлен присутствием силы тяжести, $p(x, y, z)$ — поле давлений, ν — коэффициент кинематической вязкости, κ — коэффициент температуропроводности, γ — коэффициент теплового расширения.

Мы хотим теперь получить приближенное описание, в рамках которого можно было бы работать с конечномерной динамической системой. Какие можно сделать разумные предположения? Во-первых, ограничимся двумерной задачей. Будем считать систему протяженной вдоль оси z , перпендикулярной к плоскости рисунка. Пусть все переменные величины не зависят от z , и z -компонента скорости отсутствует. Во-вторых, используем так называемое *приближение Буссинеска*. Оно состоит в том, что жидкость предполагается слабо сжимаемой и зависимость плотности от температуры учитывается в уравнениях только в одном месте, в правой части уравнения для скорости. Положим

$$\begin{aligned} p &= p_0 - \rho_0 g [1 - \gamma(T - T_0)]y + \tilde{p}(x, y, t), \\ T &= T_0 + \Delta T - \frac{\Delta T}{h}y + \theta(x, y, t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\tilde{p}(x, y, t)$ — отклонение поля давлений от гидростатического давления $p_0 - \rho_0 g y$, а $\theta(x, y, t)$ — отклонение температуры от линейного профиля, и используем в правой части первого уравнения (3.1) следующее представление:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{-\rho_0 g \mathbf{j} + \nabla \tilde{p}}{\rho_0 (1 - \gamma(T - T_0))} \approx -g \mathbf{j} - \gamma g (T - T_0) \mathbf{j} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p}. \quad (3.3)$$

Учитывая, что $\mathbf{g} = -g \mathbf{j}$, переписываем уравнения в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= \gamma g \mathbf{j} \theta - \frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \\ \nabla \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla(\theta \mathbf{v}) - \frac{\Delta T}{h} \nabla(y \mathbf{v}) = \kappa \nabla^2 \theta.$$

Полезно заметить, что $\nabla(y \mathbf{v}) = \mathbf{v} \mathbf{j}$, поскольку в силу второго уравнения (3.4) $\nabla \mathbf{v} = 0$. На верхний и нижний края слоя наложим граничные условия, выражающие постоянство температуры и отсутствие потока жидкости через границу:

$$\theta|_{y=0} = 0, \quad \theta|_{y=h} = 0, \quad \mathbf{v} \mathbf{j}|_{y=0} = 0, \quad \mathbf{v} \mathbf{j}|_{y=h} = 0. \quad (3.5)$$

Распишем векторные уравнения в координатах, обозначая x - и y -компоненты скорости через u и v , а частные производные по-

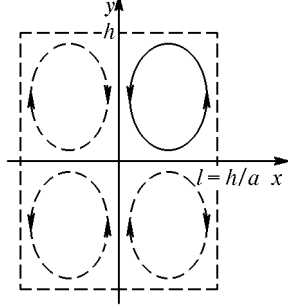
средством нижних индексов:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y &= -\rho_0^{-1}\tilde{p}_x + \nu(u_{xx} + u_{yy}), \\ v_t + uv_x + vv_y &= \gamma g\theta - \rho_0^{-1}\tilde{p}_y + \nu(v_{xx} + v_{yy}), \\ u_x + v_y &= 0, \\ \theta_t + (\theta u)_x + (\theta v)_y - h^{-1}\Delta T v &= \kappa(\theta_{xx} + \theta_{yy}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Исключим поле давлений, для чего продифференцируем первое уравнение по y , а второе по x и вычтем одно из другого. В результате система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} (u_y - v_x)_t &= -uu_{xy} - vu_{yy} + uv_{xy} + vv_{xy} - \gamma g\theta_x + \\ &\quad + \nu(u_{xxy} + u_{yyx} - v_{xyx} - v_{xx}), \\ \theta_t &= -(\theta u)_x - (\theta v)_y + h^{-1}\Delta T v + \kappa(\theta_{xx} + \theta_{yy}), \\ u_x + v_y &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы представить искомые поля в виде разложения в ряды по некоторой полной системе базисных функций; после этого предметом рассмотрения станет зависимость от времени коэффициентов разложения. Такой подход известен как *метод Галеркина*. Будем строить разложение по базису тригонометрических функций вида



$$\begin{aligned} \sin m\alpha x \sin n\beta y, \quad \sin m\alpha x \cos n\beta y, \\ \cos m\alpha x \sin n\beta y, \quad \cos m\alpha x \cos n\beta y, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $\beta = \pi/h$, $\alpha = \pi/l = \pi a/h$, m и n — целые.

Рис. 3.2. К выбору структуры разложения решения в ряд по базисным функциям

На этом этапе желательно четко представлять себе конфигурацию течения, что позволит конкретизировать структуру разложения. Примем как известный из эксперимента факт наличие режима конвекции в виде валов (рис. 3.1). Взяв одну ячейку, расположенную в области $0 \leq x < l$, $0 \leq y < h$, можно считать течение периодически продолженным, как на рис. 3.2. В таком течении температура должна быть четной функцией x и нечетной функцией y , т. е. мы должны положить

$$\theta(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(t) \cos m\alpha x \sin n\beta y. \quad (3.9)$$

Чтобы записать соотношение для компонент скорости, полезно заметить, что из условия нулевой дивергенции $u_x + v_y = 0$ следует, что u и v должны выражаться через производные от одной и той же функции $\psi(x, y, t)$, называемой *функцией тока*: $u = -\partial\psi/\partial y$, $v = \partial\psi/\partial x$. Как видно из рис. 3.2, компонента u должна быть нечетной по x и четной по y , а компонента v — наоборот, четной по x и нечетной по y . Эти условия будут выполнены, если функцию тока представить в виде

$$\psi(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(t) \sin m\alpha x \sin n\beta y. \quad (3.10)$$

Тогда для компонент скорости имеем

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(t) n\beta \sin m\alpha x \cos n\beta y, \\ v(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(t) m\alpha \cos m\alpha x \sin n\beta y. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Далее, можно подставить выражения (3.9) и (3.11) в уравнения (3.7) и, используя соотношения ортогональности для базисных функций, получить систему уравнений (бесконечную!) для коэффициентов U_{mn} и V_{mn} . Работать с бесконечной системой трудно, если вообще возможно, поэтому ряды нужно каким-то разумным способом обрезать. Модель Лоренца получается, если считать существенными и отличными от нуля члены U_{11} , V_{11} , V_{02} , их удобно обозначить, соответственно, через X , Y и Z . Итак, мы полагаем

$$\begin{aligned} u &= -X\beta \sin \alpha x \cos \beta y, & v &= X\alpha \cos \alpha x \sin \beta y, \\ \theta &= Y \cos \alpha x \sin \beta y - Z \sin 2\beta y. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Подставим эти выражения в первое уравнение (3.7). В полученном соотношении все возникающие комбинации синусов и косинусов нужно привести с помощью тригонометрических формул к суммам членов вида (3.8), а затем отбросить члены, отличные по структуре от единственной присутствующей в левой части комбинации вида $\sin \alpha x \sin \beta y$. Приравнявая коэффициенты в левой и правой части, получаем

$$\dot{X} = \frac{\alpha\gamma g}{\alpha^2 + \beta^2} Y - \nu(\alpha^2 + \beta^2) X. \quad (3.13)$$

Со вторым уравнением поступаем аналогично. Разница, однако, в том, что в левой части теперь присутствуют две пространственные

моды — комбинации вида $\cos \alpha x \sin \beta y$ и $\sin 2\beta y$. Приравнивая коэффициенты перед членами такого вида в левой и правой частях, получаем два уравнения

$$\dot{Y} = \frac{\alpha \Delta T}{h} X - \kappa(\alpha^2 + \beta^2) Y - \beta \alpha X Z, \quad (3.14)$$

$$\dot{Z} = -4\kappa\beta^2 Z + \frac{1}{2}\alpha\beta XY. \quad (3.15)$$

Итак, мы нашли систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений для динамических переменных X, Y, Z . Чтобы с ней было удобно работать, полезно привести уравнения к безразмерному виду посредством некоторой замены переменных и параметров. Подставим в (3.13)–(3.15) $X = Ax, Y = By, Z = Cz, t = D\tau$, где A, B, C, D — некоторые постоянные коэффициенты. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\alpha\gamma g}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{BD}{A} y - D\nu(\alpha^2 + \beta^2)x, \\ \dot{y} &= \frac{\alpha\Delta T}{h} \frac{AD}{B} x - D\kappa(\alpha^2 + \beta^2)y - \frac{ACD}{B} \beta\alpha xz, \\ \dot{z} &= -4\kappa\beta^2 Dz + \frac{ABD}{2C} \alpha\beta xy, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где точка означает теперь производную по τ . Попробуем подобрать коэффициенты так, чтобы вид уравнений максимально упростился. Положим

$$\begin{aligned} D &= \kappa^{-1}(\alpha^2 + \beta^2)^{-1}, \quad \frac{\alpha\gamma g}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{BD}{A} = \frac{\nu}{\kappa}, \\ \frac{ACD}{B} \beta\alpha &= 1, \quad \frac{ABD}{2C} \alpha\beta = 1, \end{aligned} \quad (3.17)$$

откуда можно найти

$$A = \frac{\sqrt{2}\kappa(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha\beta}, \quad B = \frac{\sqrt{2}\kappa\nu(\alpha^2 + \beta^2)^3}{\alpha^2\beta\gamma g}, \quad C = \frac{\kappa\nu(\alpha^2 + \beta^2)^3}{\alpha^2\beta\gamma g}. \quad (3.18)$$

Кроме того, введем безразмерные параметры

$$\sigma = \frac{\nu}{\kappa}, \quad b = \frac{4\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{4}{1 + a^2}, \quad r = \frac{\alpha^2\gamma g\Delta T}{\kappa\nu h(\alpha^2 + \beta^2)^3}. \quad (3.19)$$

Тогда уравнения (3.16) принимают вид

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy. \quad (3.20)$$

Это и есть *модель Лоренца*. Она представляет собой динамическую систему с трехмерным фазовым пространством. Мгновенное состояние определяется набором трех переменных (x, y, z) , а оператор эволюции определен конкретным видом уравнений (3.20). (Согласно теореме существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений, если задано начальное состояние (x, y, z) , то однозначно определено и состояние в любой последующий момент.)

Физический смысл переменных, фигурирующих в уравнениях Лоренца, можно проинтерпретировать на основании соотношений (3.9) и (3.11). Переменная x характеризует скорость вращения конвекционных валов, величины y и z отвечают за распределение температуры, соответственно, по горизонтали и по вертикали. Параметр b определяется геометрией конвекционной ячейки, а именно, отношением ее вертикального и горизонтального размеров a . Параметр σ есть отношение коэффициента кинематической вязкости и коэффициента температуропроводности ν/κ . Его называют *числом Прандтля*. Комбинацию $R = g\gamma h^3 \Delta T / \nu \kappa$ называют *числом Рэлея*. В свое время Рэлей показал, что условию возникновения конвекционного течения в виде валов отвечает определенное критическое значение этого числа, а именно, $R_c = \pi^4 a^{-2} (1 + a^2)^3$. Из формулы (3.19) видно, что параметр r представляет собой отношение R/R_c .

3.2. Конвекция в замкнутой петле и водяное колесо

Рассмотрим другую систему, для которой также получаются уравнения Лоренца, но их вывод оказывается намного проще и, возможно, убедительнее (Rubinfeld, Siegman, 1977). Пусть имеем замкнутую в кольцо трубку, заполненную жидкостью (рис. 3.3). Трубка подогревается снизу и охлаждается сверху, и при доста-

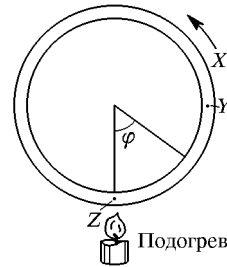


Рис. 3.3. Задача о конвекции в замкнутой кольцевой трубке. X характеризует скорость течения, Y и Z — отклонение температуры от среднего значения в указанных точках

точно большой интенсивности подогрева возможно возникновение конвекционного течения. Введем угловую координату φ , отсчитываемую от направленного вниз радиуса против часовой стрелки. Зависимость температуры от угла $T = T(\varphi)$ имеет период 2π и

ее можно представить в виде ряда Фурье. Ограничиваясь учетом только первой гармоники, положим

$$T(\varphi) = T_0(1 + Y \sin \varphi + Z \cos \varphi). \quad (3.21)$$

Легко видеть, что Z характеризует отклонение температуры от среднего значения в нижней точке трубки, а Y — в крайней правой точке при $\varphi = \pi/2$. Через X обозначим скорость течения жидкости. Поскольку жидкость почти несжимаема, эту скорость можно считать одной и той же в любом сечении трубки, т. е. не зависящей от φ .

Сконструируем уравнения, описывающие изменение во времени динамических переменных X, Y, Z , из простых качественных соображений.

Изменение скорости течения вызывается архимедовой силой, которая пропорциональна Y , и течение тормозится силой вязкого трения, которая пропорциональна X . Поэтому первое уравнение будет иметь вид

$$\dot{X} = cY - \beta X, \quad (3.22)$$

где c и β — некоторые постоянные.

Как будут выглядеть уравнения для Y и Z ? Предположим сначала, что имеет место течение с постоянной скоростью, $\dot{\varphi} = X$. Тогда можно записать

$$T = f(\varphi - Xt) = T_0(1 + Y \sin(\varphi - Xt) + X \cos(\varphi - Xt)). \quad (3.23)$$

Вводя обозначение $\varphi' = \varphi - Xt$, имеем

$$\dot{T} = T_0(Y\dot{\varphi}' \cos \varphi' - Z\dot{\varphi}' \sin \varphi') = T_0(-XY \cos \varphi' + ZX \sin \varphi'). \quad (3.24)$$

Отсюда видно, что перенос температуры потоком жидкости учитывается членом вида XZ в уравнении для Y и членом $(-XY)$ в уравнении для Z . В оба уравнения следует добавить члены, учитывающие релаксацию, которые будут иметь вид, соответственно, $(-DY)$ и $(-DZ)$, где D — константа, а также учесть подогрев добавлением постоянного члена A в уравнение для Z . Таким образом,

$$\dot{Y} = XZ - DY, \quad \dot{Z} = A - XY - DZ. \quad (3.25)$$

Производя в (3.22) и (3.25) замену переменных

$$X = Dx, \quad Y = \frac{\beta Dy}{c}, \quad Z = -\frac{\beta Dz}{c}, \quad t = Dt, \quad (3.26)$$

приходим к уравнениям Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy, \quad (3.27)$$

где

$$\sigma = \frac{\beta}{D}, \quad r = \frac{cA}{\beta D^2}, \quad b = 1. \quad (3.28)$$

Параметр b оказался равным 1 потому, что рассматривалась трубка в виде круглого кольца. Если взять эллиптическую форму, можно получить уравнения с параметром b , отличным от 1.

Другую простую реализацию системы Лоренца доставляет устройство, показанное на рис. 3.4, — водяное колесо (Gleick, 1987). Представьте себе колесо, установленное на горизонтальной оси, и

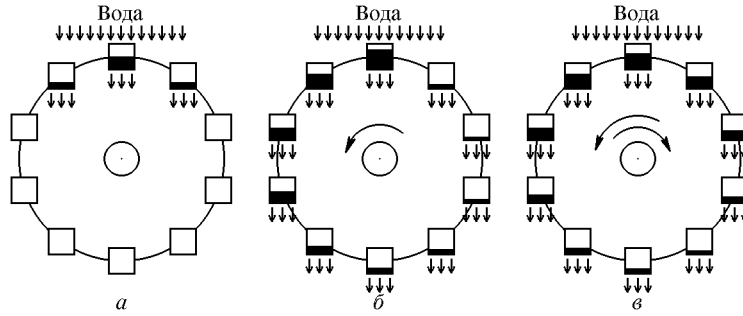


Рис. 3.4. Водяное колесо — механическая модель системы Лоренца. При малом потоке воды сверху колесо остается в покое (а), при большем вращается с постоянной скоростью (б), при очень большом — вращается хаотически, меняя время от времени направление вращения на противоположное (в)

по его ободу подвешены корзины. Сверху льется вода, попадая в корзины, задерживается в них, но вытекает, поскольку корзины дырявые. Качественно понятно, что данная система очень похожа на рассмотренную выше задачу о конвекции в трубке (просто перевернутую «вверх ногами») и должна описываться аналогичными уравнениями — системой Лоренца. Преимущество модели водяного колеса в ее наглядности (такую систему могли бы построить первобытные люди для каких-либо хозяйственных или ритуальных целей!). Наше воображение, привыкшее иметь дело с механическими системами, позволяет представить, как будет происходить движение колеса в зависимости от интенсивности потока воды. При малой интенсивности колесо будет неподвижным. Если поток увеличить, колесо начнет вращаться с постоянной скоростью. При еще большей величине потока движение станет хаотическим и, более того, направление вращения будет время от времени изменяться. Будет завершен очередной оборот колеса или колесо

замрет, не дойдя до неустойчивого равновесия, и пойдет в другую сторону — зависит от наполнения всех корзин в данный момент и от того, хватит ли запаса скорости, чтобы проскочить равновесие. Характер режима становится нетривиальным и прояснить его природу возможно уже только при помощи анализа уравнений.

3.3. Уравнения динамики одномодового лазера

Еще одна, совершенно иная физическая система, которая описывается уравнениями Лоренца, — это модель одномодового лазера (Ораевский, 1981, 1996).

Предположим, что имеется резонатор (рис. 3.5), в котором может возбуждаться одна мода — колебания электромагнитного поля на определенной частоте ω_0 и с фиксированной пространственной

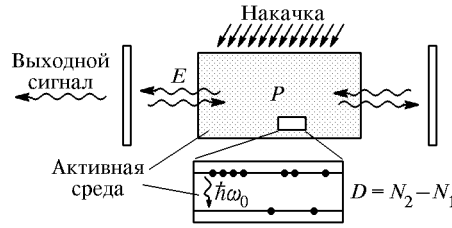


Рис. 3.5. Схема одномодового лазера: E — электрическое поле резонатора, P — поляризация активной среды, D — инверсия населенностей уровней

структурой. Амплитуда колебаний может медленно изменяться во времени благодаря присутствию потерь и взаимодействию поля с активной средой, заполняющей резонатор. Активная среда состоит из атомов с двумя энергетическими уровнями, причем разность энергий между уровнями $\Delta E = \hbar\omega_0$, где $\hbar$ — постоянная Планка. Иными словами, частота перехода считается точно совпадающей с собственной частотой моды резонатора, расстройка отсутствует. Далее, предполагается, что присутствует механизм накачки, благодаря которому атомы переходят с нижнего уровня на верхний и в среде создается, как говорят, инверсная заселенность. Как будут выглядеть уравнения, описывающие динамику такой модели?

Выясним сначала, с какими динамическими переменными нам предстоит работать. Электрическое поле в резонаторе представим в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} (E(t) \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \exp(i\omega_0 t)), \quad (3.29)$$

где $E(t)$ — медленно меняющаяся амплитуда, $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ характеризует распределение в пространстве поля рабочей моды резонатора. Далее, естественно предположить, что вектор поляризации активной

среды — дипольный момент единицы объема характеризуется таким же пространственным распределением, как и электрическое поле, и может быть представлен в виде

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} (P(t) \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \exp(i\omega_0 t)). \quad (3.30)$$

Наконец, введем величину, характеризующую мгновенную разность населенностей уровней, — инверсию

$$D(t) = N_2 - N_1, \quad (3.31)$$

где N_1 и N_2 — число атомов, пребывающих в данный момент, соответственно, на нижнем и верхнем энергетическом уровне. Итак, мы должны сконструировать уравнения, описывающие динамику во времени величин E , P и D .

Выпишем сначала уравнение возбуждения резонатора. В левой части будет стоять производная от амплитуды поля $\dot{E}$, а в правой — член, пропорциональный поляризации P , отвечающий за возбуждение поля атомами среды, и член, описывающий потери энергии колебаний моды:

$$\dot{E} = -\alpha E + \beta P, \quad (3.32)$$

где α — параметр потерь, β — некоторая постоянная.

Второе уравнение, имеющее в левой части производную $\dot{P}$, описывает изменение поляризации активной среды. В правой части будет присутствовать релаксационный член ($-\gamma P$) и еще один член, происхождение которого можно пояснить следующим образом. Дипольный момент, который приобретает каждый атом активной среды в присутствии электрического поля, пропорционален величине поля и зависит от того, на каком энергетическом уровне находится атом. Поэтому средний вклад в поляризацию будет пропорционален произведению амплитуды поля и разности населенностей. Таким образом, второе уравнение имеет вид

$$\dot{P} = -\gamma P + cED, \quad (3.33)$$

где γ и c — постоянные.

Наконец, третье уравнение описывает изменение инверсии населенностей и имеет вид

$$\dot{D} = \Gamma(D_0 - D) - kEP, \quad (3.34)$$

где Γ — параметр релаксации населенностей, а D_0 характеризует интенсивность накачки. Член вида EP соответствует мощности, которую тратит поле на поляризацию среды (эта мощность может быть положительной или отрицательной). Если энергия передается полю, инверсия уменьшается.

Заменой переменных и параметров

$$x = \frac{\sqrt{kc}}{\gamma} E, \quad y = \frac{\beta\sqrt{kc}}{\alpha\gamma} P, \quad w = \frac{\beta c}{\alpha\gamma} D, \quad (3.35)$$

$$b = \frac{\Gamma}{\gamma}, \quad \sigma = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad r = \frac{\beta c D_0}{\alpha\gamma} \quad (3.36)$$

уравнения (3.32)–(3.34) приводятся к виду

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = -y + xw, \quad \dot{w} = -bw + br - xy. \quad (3.37)$$

Эти соотношения превращаются в уравнения Лоренца, если положить $w = r - z$. Таким образом, в лазерной интерпретации переменная x отвечает амплитуде поля, y — поляризации, а z — инверсии населенностей. Место параметра геометрии b и числа Прандтля σ занимают отношения коэффициентов релаксации инверсии и поля к коэффициенту релаксации поляризации. Интенсивность накачки играет ту роль, какую в гидродинамической системе играло число Рэлея.

3.4. Диссипативный осциллятор с инерционной нелинейностью

Выполнив в уравнениях Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy$$

замену переменных и определенные преобразования, можно представить эту систему как нелинейный диссипативный осциллятор с инерционным возбуждением (Неймарк, Ланда, 1987). Введем вместо z новую переменную u :

$$z = \frac{u + x^2}{2\sigma}. \quad (3.38)$$

Подстановка этого выражение в третье уравнение системы Лоренца и умножение его на 2σ дает

$$\dot{u} + 2x\dot{x} = -bu - bx^2 + 2\sigma yx. \quad (3.39)$$

Подставляя выражение для $\dot{x}$, соответствующее первому уравнению Лоренца, находим

$$\dot{u} = -bu + (2\sigma - b)x^2. \quad (3.40)$$

Далее, подставим во второе уравнение Лоренца выражение для z (3.38) и выражение для y , вытекающее из первого уравнения, $y = \dot{x}/\sigma + x$. В результате получаем

$$\ddot{x} + (\sigma + 1)\dot{x} - \sigma(r - 1)x + \frac{x^3}{2} + \frac{xu}{2} = 0. \quad (3.41)$$

Система уравнений (3.40) и (3.41) эквивалентна системе Лоренца, но теперь ее можно интерпретировать следующим образом.

Предположим сначала, что $u = \text{const}$. Тогда (3.41) есть уравнение нелинейного осциллятора $\ddot{x} + \gamma\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$, где $\gamma = (\sigma + 1)$ — параметр диссипации, а потенциальная функция зависит от параметров r , σ и u и имеет вид

$$U(x) = \frac{(u/2 - \sigma(r - 1))x^2}{2} + \frac{x^4}{8}. \quad (3.42)$$

В области параметров, отвечающей сложной динамике, $\sigma(r - 1) > 0$, так что при малых u коэффициент при квадратичном члене отрицателен, и потенциал имеет два симметрично расположенных минимума. При больших u коэффициент при квадратичном члене становится положительным, и минимум один (рис. 3.6). Однако

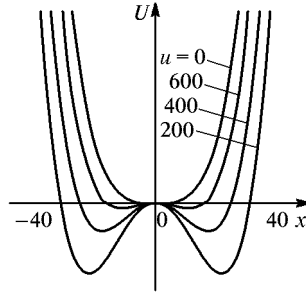


Рис. 3.6. Потенциальная функция нелинейного осциллятора, к которому в предположении $u = \text{const}$ сводится система Лоренца при $\sigma = 10$ и $b = 8/3$

в нашей системе u не является параметром в обычном смысле слова, а переменной, подчиняющейся уравнению (3.40). Она отслеживает изменение во времени величины x^2 , но не мгновенно, а с инерцией и сглаживанием, которые количественно определяются параметром b . Динамику системы можно представить, очевидно, как колебания в одной из потенциальных ям с перебросом время от времени в другую яму благодаря изменению величины u и, соответственно, формы потенциала.

Такое представление системы Лоренца ставит ее в контекст традиционных моделей теории колебаний и позволяет привлечь опыт и интуицию, накопленные при работе с этими моделями.

Лекция 4

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА

Как было показано в предыдущей лекции, система трех нелинейных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy \quad (4.1)$$

описывает динамику нескольких физических систем — конвекцию в слое, конвекцию в кольцевой трубке, одномодовый лазер. Ее называют *моделью Лоренца* по имени исследователя, обнаружившего в численных расчетах возможность хаотического поведения, а также глубоко и проницательно интерпретировавшего наблюдаемый режим непериодических колебаний (Lorenz, 1963). Данная лекция специально посвящена обсуждению динамики модели Лоренца.

4.1. Результаты численного решения уравнений Лоренца

Если взять выбранные Лоренцем в исходной работе значения параметров $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$ и провести численное решение уравнений (4.1) на компьютере, то обнаруживается, что в системе устанавливается хаотический автоколебательный режим. На рис. 4.1 приводятся зависимости динамических переменных x , y , z от времени. Показанную на верхней диаграмме зависимость $x(t)$ можно интерпретировать наглядно, имея в виду модель водяного колеса. Именно, участки процесса, отвечающие осцилляциям в области $x > 0$, отвечают вращению колеса в одну сторону, а участки $x < 0$ — в другую. Видно, что направление вращения время от времени меняется на противоположное, причем число оборотов (осцилляций) в определенном направлении от раза к разу меняется хаотически.

На рис. 4.2 показан фазовый портрет системы Лоренца. Как можно видеть, фазовая траектория вырисовывает в пространстве состояний (x, y, z) некий объект сложной структуры, который похож на моток ниток, причем не перепутанных, а аккуратно уложенных одна вдоль другой. Это образование называют *странным аттрактором* или, в контексте данной конкретной системы, *аттрактором Лоренца*.

Как можно проверить, при указанных «классических» значениях параметров σ , b , r один и тот же установившийся режим (по

крайней мере, в смысле усредненных статистических характеристик и в смысле стационарности внешнего вида аттрактора) возникает в системе Лоренца независимо от выбора начальных условий.

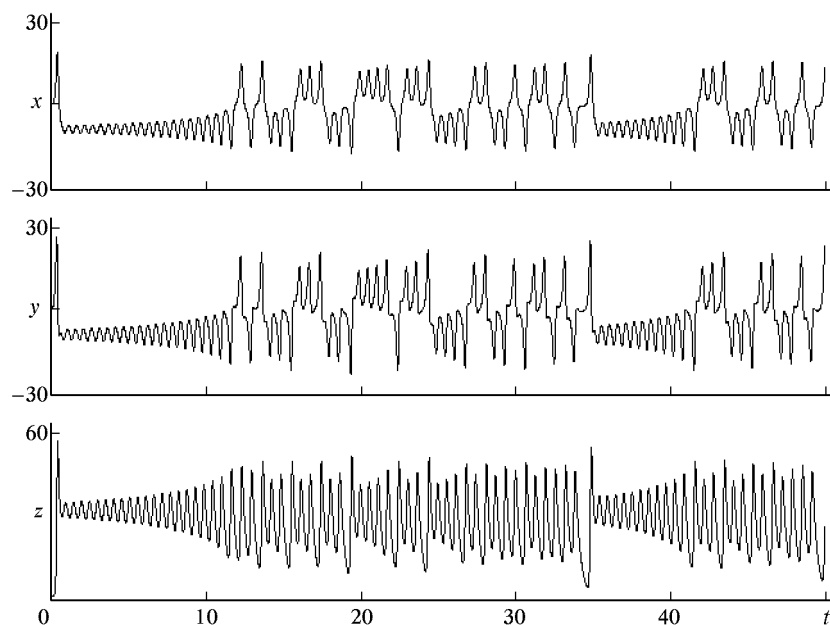


Рис. 4.1. Зависимости динамических переменных x , y , z от времени, полученные численным интегрированием уравнений Лоренца при $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$

В своей работе Лоренц вскрывает динамическую природу наблюдаемого хаотического поведения при помощи замечательно простого и эффектного приема. Рассмотрим зависимость переменной z от времени и занумеруем ее максимумы в порядке следования во времени. Далее, обработаем результаты численного решения уравнений, построив график зависимости величины очередного максимума от предыдущего, $z_{k+1} = f(z_k)$ (рис. 4.3a). Совсем не очевидно, что эта процедура приведет к какому-то разумному результату, но это так! Оказывается, что точки хорошо ложатся на определенную кривую с острой вершиной. Но тогда мы можем заменить

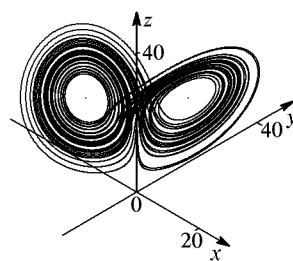


Рис. 4.2. Фазовый портрет аттрактора Лоренца для «классического» набора параметров: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$

исследование динамики исходных уравнений Лоренца гораздо более простой задачей — анализом динамики одномерного отображения $z_{k+1} = f(z_k)$!

Это отображение очень похоже на отображение «тент», которое, как объяснялось в лекции 2 демонстрирует хаотическую динамику и для которого множество возможных траекторий допускает кодирование всевозможными последовательностями двух символов.

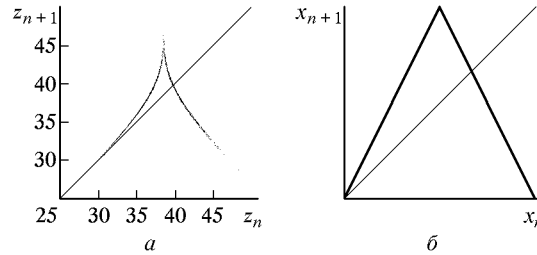


Рис. 4.3. Отображение, полученное численно для системы Лоренца (а), и показанное для сравнения отображение «тент» (б)

Можно показать, что такими же свойствами обладает и отображение $z_{k+1} = f(z_k)$. Это веский довод в пользу динамической природы хаоса, наблюдаемого в модели Лоренца. Оговоримся, однако, что отсюда еще довольно далеко до строгого математического доказательства, поскольку связь между исходной системой и одномерным отображением более тонка, чем это может показаться на первый взгляд¹⁾.

¹⁾ К диаграмме рис. 4.3 можно прийти из следующих рассуждений. Условие появления экстремума переменной $z(t)$ отвечает равенству нулю ее производной, которая, согласно третьему уравнению (4.1), равна $xy - bz$. Уравнение $xy - bz = 0$ определяет в фазовом пространстве некоторую поверхность H (гиперболический параболоид). Выделим на этой поверхности область H^- такую, что выполняется дополнительное условие наличия именно максимума: $\ddot{z} < 0$. Поток фазовых траекторий системы Лоренца задает на этой части поверхности отображение Пуанкаре. Выпустив траекторию из произвольной точки A области H^- , дождемся ее следующего пересечения с H^- — это и будет образ точки A . Говоря формально, отображение Пуанкаре двумерное и к одномерному отнюдь не сводится. Однако модель Лоренца характеризуется очень высокой степенью сжатия элемента фазового объема за время между последовательными пересечениями. Согласно формуле (4.4) (см. ниже), $\Delta V / \Delta V_0 \cong \exp[-(\sigma + b + 1)T_{\text{хар}}]$. Отсюда при $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $T_{\text{хар}} \cong 0,7$ получаем оценку $\Delta V / \Delta V_0 \cong 10^{-4}$. Поэтому отображение действительно хорошо *аппроксимируется* одномерным, что визуально и наблюдается на рис. 4.3. Более тщательный анализ показывает, однако, что точки на графике в действительности не ложатся на определенную кривую, а имеют некоторый разброс, связанный с присущей аттрактору Лоренца фрактальной поперечной структурой.

4.2. Аналитическое исследование уравнений Лоренца

Чтобы достигнуть по возможности полного понимания особенностей системы Лоренца, обратимся к рассмотрению тех аспектов динамики, которые можно выявить посредством аналитического исследования.

Симметрия. Прежде всего отметим симметрию уравнений Лоренца — их вид не изменится, если одновременно сменить знак x и y . Это значит, что любое образование в фазовом пространстве либо обладает той же симметрией, т. е. превращается само в себя при замене переменных $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, либо имеет такое же образование в качестве симметричного партнера. Из рис. 4.2 можно усмотреть, что аттрактор Лоренца обладает указанной симметрией.

Ограниченность области, где может располагаться аттрактор. В фазовом пространстве системы Лоренца можно указать такую ограниченную замкнутую область, в которую фазовые траектории могут только входить и никогда ее не покидают. Для упрощения выкладок нам будет удобно здесь использовать форму уравнений (3.37). Умножим первое уравнение на x/σ , второе на y , третье на w и сложим:

$$+ \begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = -y + xw \\ \dot{w} = -bw + br - xy \end{cases} \begin{vmatrix} \times x/\sigma \\ \times y \\ \times w. \end{vmatrix}$$

Результат перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{x^2/\sigma + y^2 + w^2}{2} \right) &= xy - x^2 - y^2 + xyw - bw^2 - \\ - xyw + brw &= - \left(x - \frac{1}{2}y \right)^2 - \frac{3}{4}y^2 - b \left(w - \frac{1}{2}r \right)^2 + \frac{1}{4}br^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Рассмотрим в трехмерном пространстве (x, y, w) область E , заданную неравенством $-(x - (1/2)y)^2 - (3/4)y^2 - b(w - (1/2)r)^2 + (1/4)br^2 \geq 0$. Она ограничена поверхностью эллипсоида с центром, смещенным относительно начала координат. Вне этой области правая часть уравнения (4.2) отрицательна. Кроме того, определим семейство эллипсоидов уравнением $x^2/\sigma + y^2 + w^2 = \text{const}$, где присутствует комбинация, фигурирующая под знаком производной в левой части уравнения (4.2). Выберем значение константы таким большим, чтобы получился эллипсоид S , целиком заключающий в себя область E . Тогда на поверхности S имеем всюду $\frac{d}{dt}(x^2/\sigma + y^2 + w^2) < 0$, т. е. величина $(x^2/\sigma + y^2 + w^2)$

убывает с течением времени. Это значит, что все траектории, пересекающие поверхность S , ведут только внутрь ограниченной ею области. Следовательно, каким бы ни был аттрактор уравнений Лоренца, он обязан располагаться внутри S .

Диссипативность системы Лоренца. Рассмотрим векторное поле в трехмерном фазовом пространстве, зависимость трех компонент которого от координат x, y, z дается правыми частями трех уравнений Лоренца:

$$\mathbf{L}(x, y, z) = \{\sigma(y - x), rx - y - xz, -bz + xy\}. \quad (4.3)$$

В силу уравнений (4.1) оно имеет смысл поля скоростей в фазовом пространстве: мгновенная скорость движения изображающей точки в момент, когда она имеет координаты (x, y, z) , дается вектором $\mathbf{L}$. Вычислим дивергенцию этого поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{L} = \nabla \mathbf{L} = \frac{\partial L_x}{\partial x} + \frac{\partial L_y}{\partial y} + \frac{\partial L_z}{\partial z} = -\sigma - 1 - b. \quad (4.4)$$

Если параметры σ и b положительны, как это всегда предполагается, то дивергенция постоянна и отрицательна.

Смысл этого результата состоит в следующем. Рассмотрим ансамбль одинаковых систем, каждая из которых описывается уравнениями Лоренца, и пусть они отличаются только начальными условиями. Представим себе, что в начальный момент облако точек, изображающих состояния систем ансамбля в фазовом пространстве, занимает некоторый объем ΔV . Тогда в процессе эволюции систем ансамбля во времени объем облака будет уменьшаться по закону $\Delta V = \Delta V_0 \exp(Dt)$, где $D = -\sigma - b - 1$. С течением времени все они должны сконцентрироваться на некотором множестве нулевого объема — аттракторе. В соответствии с рассуждениями предыдущего пункта, аттрактор обязан располагаться в ограниченной области фазового пространства. (Точности ради заметим, что проведенные рассуждения не исключают возможности существования в упомянутой ограниченной области нескольких аттракторов.)

Неподвижные точки. Найдем неподвижные точки системы уравнений Лоренца. Это состояния, не меняющиеся во времени, т. е. производные динамических переменных по времени надо приравнять нулю. Следовательно, правые части уравнений тоже должны обращаться в нуль. Это дает три алгебраических уравнения для трех неизвестных:

$$\sigma(y - x) = 0, \quad rx - y - xz = 0, \quad -bz + xy = 0. \quad (4.5)$$

Из первого уравнения имеем $y = x$, тогда второе переписывается в виде $x(r - 1 - z) = 0$ и видно, что есть две возможности $x = 0$

и $z = r - 1$. Из третьего уравнения получаем для первого случая $z = 0$, а для второго $x = \pm\sqrt{bz} = \pm\sqrt{r-1}$, так что это решение существует лишь при $r \geq 1$. Таким образом, при $r < 1$ имеется одно состояние равновесия, расположенное в начале координат, а при $r \geq 1$ — три состояния равновесия:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad (4.6)$$

$$x = \sqrt{r-1}, \quad y = \sqrt{r-1}, \quad z = r-1, \quad (4.7)$$

$$x = -\sqrt{r-1}, \quad y = -\sqrt{r-1}, \quad z = r-1, \quad (4.8)$$

которые в дальнейшем будем обозначать, соответственно, O , O_1 и O_2 .

С точки зрения физической интерпретации, в задаче о конвекции первая неподвижная точка отвечает состоянию равновесия и отсутствию конвекционных потоков. Водяное колесо неподвижно, лазер не генерирует. Второе и третье решения соответствуют наличию конвекционного потока — вращению жидкости, соответственно, против или по часовой стрелке. Водяное колесо вращается в одну или другую сторону с постоянной скоростью. Лазер генерирует сигнал постоянной, не зависящей от времени интенсивности. Заметим, что вторая и третья неподвижные точки уравнений Лоренца могут служить примером пары симметричных партнеров — они переходят друг в друга при одновременном изменении знаков x и y .

Анализ неподвижных точек на устойчивость. Рассмотрим теперь вопрос о том, при каких значениях параметров найденные неподвижные точки являются устойчивыми или неустойчивыми. Пусть (x_0, y_0, z_0) — интересующая неподвижная точка. Будем искать решение уравнений Лоренца (4.1) в виде

$$x(t) = x_0 + \tilde{x}(t), \quad y(t) = y_0 + \tilde{y}(t), \quad z(t) = z_0 + \tilde{z}(t), \quad (4.9)$$

где добавки, отмеченные тильдой, считаются малыми. Пренебрегая квадратами и произведениями малых добавок, из уравнений Лоренца получаем:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \sigma(\tilde{y} - \tilde{x}), \\ \dot{\tilde{y}} &= r\tilde{x} - \tilde{y} - x_0\tilde{z} - \tilde{x}z_0, \\ \dot{\tilde{z}} &= -b\tilde{z} + x_0\tilde{y} + \tilde{x}y_0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где члены нулевого порядка исчезают благодаря условию, что (x_0, y_0, z_0) есть неподвижная точка. Как обычно в линейном анализе на устойчивость, предполагаем, что зависимость возмущения от времени экспоненциальная, $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \sim \exp(\lambda t)$. Тогда уравнения

принимают вид задачи на собственные числа матрицы 3×3 :

$$\begin{aligned} \lambda \tilde{x} &= \sigma(\tilde{y} - \tilde{x}) \\ \lambda \tilde{y} &= r\tilde{x} - \tilde{y} - x_0\tilde{z} - \tilde{x}z_0, \quad \text{или} \quad \lambda \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z_0 & -1 & -x_0 \\ y_0 & x_0 & -b \end{pmatrix} \cdot \\ \lambda \tilde{z} &= -b\tilde{z} + x_0\tilde{y} + \tilde{x}y_0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Условием существования нетривиального решения является равенство нулю детерминанта

$$\begin{vmatrix} \lambda + \sigma & -\sigma & 0 \\ -r + z_0 & \lambda + 1 & x_0 \\ -y_0 & -x_0 & \lambda + b \end{vmatrix} = 0 \quad (4.12)$$

или

$$(\lambda + \sigma)[(\lambda + 1)(\lambda + b) + x_0^2] + \sigma[(\lambda + b)(z_0 - r) + x_0y_0] = 0. \quad (4.13)$$

Для неподвижной точки O , расположенной в начале координат, имеем

$$(\lambda + \sigma)(\lambda + 1)(\lambda + b) - \sigma r(\lambda + b) = 0$$

или

$$(\lambda + b)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0, \quad (4.14)$$

откуда находим три корня:

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}(\sigma + 1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma + 1)^2 + \sigma(r - 1)}. \quad (4.15)$$

Первое собственное число всегда отрицательно. Второе и третье, оба являются отрицательными лишь при $r < 1$; если же $r > 1$, одно из них становится положительным. Следовательно, точка O устойчива при $r < 1$ и неустойчива при $r > 1$. С точки зрения классификации неподвижных точек, при $r < 1$ это устойчивый узел, а при $r > 1$ — седло-узел. Как указывалось при обсуждении смысла параметров в уравнении Лоренца, r есть отношение числа Рэля к его критическому значению. Мы показали, что стационарное состояние, отвечающее отсутствию конвекционных токов, становится неустойчивым при превышении критического значения $r = 1$. Тем самым мы воспроизвели результат Рэля!

Обратимся теперь к точкам O_1 и O_2 , которые существуют, как было показано, при $r > 1$. Подставляя в (4.13)

$$x_0 = y_0 = \pm\sqrt{b(r - 1)}, \quad z_0 = r - 1, \quad (4.16)$$

после алгебраических преобразований получаем кубическое уравнение относительно λ :

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0. \quad (4.17)$$

Исследование уравнения (4.17) показывает, что при r лишь немного превышающих 1, все три собственных числа λ отрицательны. Следовательно, неподвижные точки O_1 и O_2 являются *устойчивыми узлами*. При увеличении r с некоторого момента они становятся *устойчивыми фокусами* — одно собственное число действительное и отрицательное, а два других комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью. При дальнейшем увеличении r действительная часть меняет знак, и это момент потери устойчивости состояниями O_1 и O_2 (в силу симметрии это происходит одновременно).

Найдем порог потери устойчивости для исследуемой неподвижной точки, которому отвечает обращение действительной части корня в ноль. Подставим в формулу (4.17) $\lambda = i\omega$:

$$-i\omega^3 - (\sigma + b + 1)\omega^2 + ib(\sigma + r)\omega + 2\sigma b(r - 1) = 0, \quad (4.18)$$

и отделим действительные и мнимые части:

$$\begin{aligned} -(\sigma + b + 1)\omega^2 + 2\sigma b(r - 1) &= 0, \\ [-\omega^2 + b(\sigma + r)]\omega &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Из первого уравнения имеем $\omega^2 = 2\sigma b(r - 1)/(\sigma + b + 1)$. Подстановка этого выражения во второе уравнение дает $(-2\sigma b(r - 1)/(\sigma + b + 1) + b(\sigma + r)) = 0$. Выражая отсюда r , находим порог устойчивости:

$$r_{cr} = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}. \quad (4.20)$$

4.3. Бифуркации в модели Лоренца

Обсудим, как изменяется динамика системы Лоренца, если поддерживать постоянными параметры $\sigma = 10$ и $b = 8/3$ и увеличивать, начиная от нуля, параметр r . С точки зрения физической интерпретации, это соответствует увеличению степени подогрева, или числа Рэлея, в задачах конвекции, интенсивности падающего сверху потока в модели водяного колеса, интенсивности накачки в лазере.

Как мы видели, при $r < 1$ система Лоренца имеет устойчивую неподвижную точку в начале координат, точку O . Это единственный аттрактор системы.

При $r > 1$ состояние равновесия O становится неустойчивым — одно из трех собственных чисел оказывается положительным, тогда как два других остаются отрицательными. Если ввести малое возмущение, то изображающая точка будет уходить от состояния равновесия вдоль некоторой специальной траектории, которую называют *неустойчивой сепаратрисой* или *неустойчивым многообразием*. Это неустойчивое многообразие *одномерное*

(некоторая кривая линия), поскольку только *одно* собственное число ответственно за неустойчивость. Из свойства симметрии ясно, что имеется две ветви неустойчивой сепаратрисы, Γ_1 и Γ_2 , идущие от состояния равновесия O в разные стороны (рис. 4.4а).

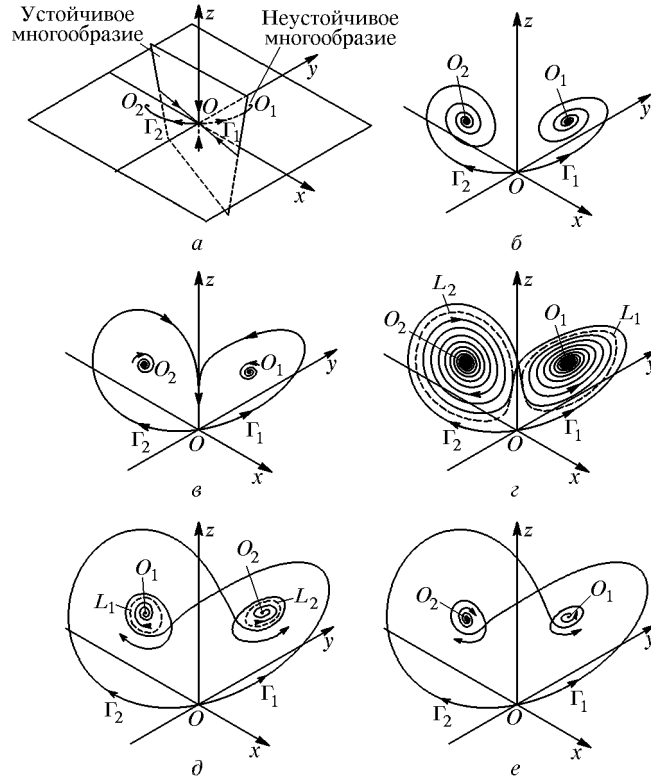


Рис. 4.4. Бифуркации в системе Лоренца при фиксированных $\sigma = 10$ и $b = 8/3$, имеющие место при увеличении параметра r . Обозначения: O — неподвижная точка в начале координат, Γ_1 и Γ_2 — две ветви ее неустойчивого многообразия (сепаратрисы), O_1 и O_2 — неподвижные точки, L_1 и L_2 — неустойчивые замкнутые орбиты. Рисунок (б) отвечает наличию петли сепаратрисы

Точка O имеет также *устойчивое многообразие*. Оно *двумерное*, поскольку *два* собственных числа отрицательны и отвечают затуханию возмущений. Устойчивое многообразие представляет собой некоторую кривую поверхность, при старте с которой траектории идут в состояние равновесия O .

При переходе r через 1 точка O перестает быть аттрактором, и аттракторами становятся вновь возникшие неподвижные точки O_1 и O_2 (см. (4.7), (4.8)). Согласно соотношению (4.20), они остаются устойчивыми до довольно больших значений r . В за-

дачах конвекции эти два аттрактора соответствуют состояниям с равномерным вращением жидкости, соответственно против или по часовой стрелке. Заметим, что скорость возрастает с увеличением параметра r : $x = \pm\sqrt{b(r-1)}$.

Присутствие двух аттракторов означает наличие *бистабильности* — в зависимости от начальных условий система приходит в конце концов в один из двух возможных устойчивых режимов. (В более общем случае, когда аттракторов более одного, говорят о *мультистабильности*. Это одно из характерных и распространенных свойств нелинейных динамических систем.)

На рис. 4.4б показано, как выглядят сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 в той области значений r , где неподвижные точки O_1 и O_2 являются устойчивыми фокусами. Фазовые траектории приближаются к неподвижной точке по спирали, что соответствует затухающим осцилляциям. Чем больше параметр r , тем больше начальный размах этих осцилляций. При некотором значении $r = 13,927$ оказывается, что сепаратриса, совершив один оборот, возвращается в точку O вдоль оси z (рис. 4.4в). Об этой ситуации говорят как о *петле сепаратрисы*. Это момент *нелокальной бифуркации*, когда имеет место перестройка структуры потока фазовых траекторий, которая не сводится к локальным изменениям в окрестности какой-то одной точки фазового пространства.

Переход параметра r через указанное значение никак не отражается на свойствах стационарных режимов, отвечающих аттракторам O_1 и O_2 , за тем исключением, что после него сепаратриса Γ_1 ведет в точку O_2 , а сепаратриса Γ_2 — в точку O_1 . (Это значит, что при установлении режима конвекции, начиная от ситуации вращения с малой скоростью, направление движения жидкости в итоге меняется на противоположное.) Однако в глобальной структуре фазового пространства происходят существенные изменения. Во-первых, из каждой петли сепаратрисы рождается замкнутая траектория — неустойчивый предельный цикл (штриховые кривые L_1 и L_2 на рис. 4.4в). Во-вторых, появляется инвариантное множество Ω_1 — сложно устроенное множество траекторий, допускающих кодирование всевозможными бесконечными в обе стороны последовательностями двух символов. Это множество Ω_1 , однако, не является притягивающим, образуя, как иногда говорят, «странный репеллер». Следующая существенная нелокальная бифуркация происходит при $r \approx 24,06$. Если до этого момента сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 вели в неподвижные точки O_2 и O_1 , то после бифуркации они асимптотически приближаются к неустойчивым орбитам (рис. 4.4д). С этого момента на месте множества Ω_1 возникает уже притягивающее множество сложной структуры. Это и есть странный аттрактор Лоренца, отвечающий хаотическому режиму колебаний. Отметим, однако, что состояния O_1 и O_2 все еще остаются устойчивыми, до достижения значения $r = 24,74$

(см. (4.20)). Таким образом, в интервале r от 24,06 до 24,74 в системе сосуществуют три аттрактора — две неподвижные точки O_1 и O_2 и аттрактор Лоренца. Наконец, начиная с $r = 24,74$, неподвижные точки теряют устойчивость и аттрактор Лоренца остается единственным притягивающим множеством (рис. 4.4e).

Изложенная картина, которая опирается на результаты Шильникова (1980) и Каплана и Йорке (1979), не исчерпывает всего многообразия феноменов, возможных в модели Лоренца. Оказывается, что при очень больших r система демонстрирует простой регулярный режим автоколебаний, которому в фазовом пространстве соответствует предельный цикл. При уменьшении параметра r можно наблюдать переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. В определенных областях по параметру r реализуется переход от периодических к хаотическим режимам через перемежаемость. Поэтому система Лоренца еще неоднократно будет привлекаться в нашем курсе лекций в качестве иллюстрации различных аспектов нелинейной динамики.

Чего в системе Лоренца быть не может, так это квазипериодических автоколебаний. Таким колебаниям должен был бы соответствовать аттрактор в виде тора. Предположим, что такой аттрактор существует. Фазовые траектории не могут пересекать поверхность тора, они могут только приближаться к нему. Рассмотрим ансамбль систем, изображающие точки которых заполняют внутренность тора. Любой элемент объема должен уменьшаться в силу того, что в системе Лоренца дивергенция векторного поля постоянна и отрицательна. С другой стороны, объем внутренности тора должен оставаться постоянным. Эти два вывода несовместимы — мы пришли к противоречию, и, следовательно, предположение о наличии аттрактора в виде тора не может быть верным.

Лекция 5

ХАОС В РЕАЛИСТИЧНЫХ МОДЕЛЯХ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И РЕКУРРЕНТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Помимо искусственных моделей, сконструированных для иллюстрации тех или иных свойств сложной динамики, в нашем курсе обсуждалась пока только одна физически мотивированная система — модель Лоренца. В этой лекции будут рассмотрены дальнейшие примеры реалистичных моделей физических систем.

Начиная с Ньютона, традиционный для физики способ описания динамических систем состоит в использовании дифференциальных уравнений. Однако во многих случаях оказывается столь же естественным и удобным работать с отображениями — разностными уравнениями, определяющими динамику в дискретном времени. В нашем изложении будут присутствовать и тот, и другой подходы. За отдельными исключениями, определяющим моментом при выборе материала в этой лекции будет наличие физической мотивации для введения в рассмотрение той или иной системы.

В уравнениях динамических систем обычно присутствуют параметры — величины, которые считаются постоянными во времени, но от задания которых может зависеть характер реализующегося в системе режима. Представьте себе, что система заключена в ящик, на котором имеется несколько ручек настройки. Устанавливая ручки в различные положения, наблюдаем на выходе системы разную по характеру зависимость динамической переменной от времени — периодическую, квазипериодическую, хаотическую. Когда управляющих параметров два, очень ценное наглядное представление о поведении системы дает *карта динамических режимов* — диаграмма на плоскости, где по осям координат отложены два параметра, а области различных режимов динамики показаны определенным цветом (штриховкой, серыми тонами) либо обозначены границы этих областей.

Простейший по своей идее способ построения карты динамических режимов на компьютере подразумевает, что в каждой точке плоскости параметров, соответствующей элементу графического изображения (пикселю), решается численно дифференциальное уравнение или итерируется отображение, задающее динамическую

систему, и производится анализ характера режима, возникающего после завершения переходного процесса. Для диагностики режимов может привлекаться вычисление старшего ляпуновского показателя (см. лекции 10, 11): положительная величина ляпуновского показателя свидетельствует о присутствии хаоса.

Из-за того что нелинейным системам часто присуща мультистабильность, карту динамических режимов, вообще говоря, надо представлять не как один лист, а как совокупность листов, перекрывающихся в тех областях параметров, где система имеет более одного аттрактора. На практике при построении карты динамических режимов начальные условия в каждой очередной точке пространства параметров либо задаются фиксированными, либо наследуют состояние, реализовавшееся в предыдущей точке. При этом в областях мультистабильности карта оказывается неполной, ибо на ней не представлены те режимы, для которых начальные условия не попали в бассейн притяжения аттрактора. Чтобы изучить все листы карты, требуется, вообще говоря, кропотливая работа, с испытанием различных начальных условий в каждой точке пространства параметров. Заметим, что при использовании процедуры наследования вид карты может зависеть от направления сканирования плоскости параметров.

Несмотря на эти оговорки и осложнения, карта динамических режимов, даже неполная, оказывается чрезвычайно полезным рабочим инструментом и в теоретических, и в экспериментальных исследованиях. Для большинства систем, обсуждаемых в этой лекции, будут приведены соответствующие карты.

5.1. Модели с дискретным временем

Отображение Эно. Рассмотрим следующую простую физическую систему (рис. 5.1). Пусть вдоль оси x может двигаться частица массы m , причем ее движению препятствует сила трения,

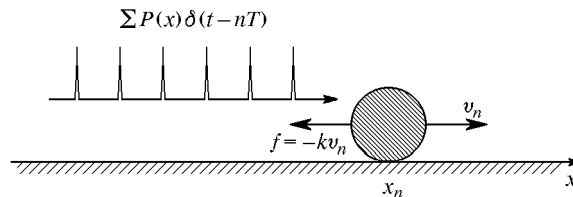


Рис. 5.1. Механическая система, динамика которой описывается отображением Эно

пропорциональная скорости, $f = -kv$. Пусть далее на частицу действуют с периодом T импульсные толчки, интенсивность которых зависит от координаты частицы в момент толчка, т. е. передаваемый импульс дается функцией $P(x)$.

Если перед n -м толчком координата частицы была x_n , а скорость v_n , то сразу после толчка скорость составит $v_n + P(x_n)/m$ и далее будет уменьшаться по экспоненциальному закону, $v(t) = [v_n + P(x_n)/m] \exp(-kt/m)$. К моменту следующего толчка будем иметь

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \left(v_n + \frac{P(x_n)}{m} \right) \exp\left(-\frac{kT}{m}\right), \\ x_{n+1} &= x_n + \int_0^T v(t) dt = \\ &= x_n + (mv_n + P(x_n)) \left(1 - \exp\left(-\frac{kT}{m}\right) \right) k^{-1}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Введем вместо v новую переменную

$$y = x - mk^{-1} \left(\exp\left(\frac{kT}{m}\right) - 1 \right) v.$$

Тогда из (5.1) получаем

$$x_{n+1} = f(x_n) - by_n, \quad y_{n+1} = x_n, \quad (5.2)$$

где

$$b = \exp\left(-\frac{kT}{m}\right) \quad \text{и} \quad f(x) = x(1+b) + P(x)(1-b)k^{-1}. \quad (5.3)$$

Предположим, что пространственное распределение воздействующей на частицу импульсной силы таково, что $f(x) = 1 - ax^2$. Тогда отображение (5.2) записывается в виде

$$x_{n+1} = 1 - ax^2 - by_n, \quad y_{n+1} = x_n. \quad (5.4)$$

Его называют *отображением Эно* (Нénon map). Мишель Эно, французский астрофизик, предложил это отображение в 1976 г. как абстрактный пример динамической системы, обладающей странным аттрактором. Сейчас очевидно, что отображение Эно может служить для описания динамики ряда простых физических систем, одну из которых мы рассмотрели. К другим относятся диссипативный осциллятор и ротатор под импульсным периодическим воздействием (Heagy, 1992). Отметим, что, с физической точки зрения, реалистичными являются положительные значения параметра b .

Вычислим якобиан отображения Эно:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2a & -b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = b. \quad (5.5)$$

Если мы рассмотрим облако изображающих точек, занимающее площадь S , то на каждом последующем шаге итераций эта площадь будет умножаться на фактор $|b|$, так что при $|b| < 1$ отображение Эно представляет собой диссипативную систему. Заметим, что при $b \rightarrow 0$ оно сводится к логистическому отображению (2.3), а при $b \rightarrow 1$ — это отображение, сохраняющее площадь, т. е. консервативная система.

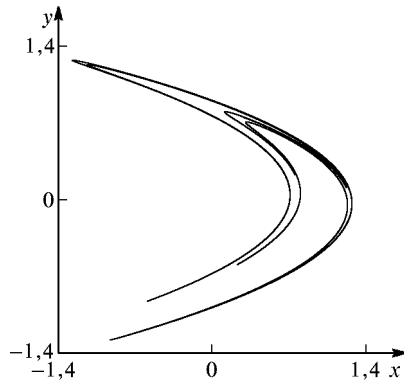


Рис. 5.2. Странный аттрактор отображения Эно (5.4) при $a = 1,4$, $b = -0,3$

На рис. 5.2 показано, как выглядит странный аттрактор при значениях параметров $a = 1,4$, $b = -0,3$, выбранных в исходной работе Эно.

На рис. 5.3 приведена карта динамических режимов отображения Эно на плоскости параметров (a, b) . Нижняя часть диаграммы отвечает установлению стационарного состояния равновесия. С ростом параметра a реализуются режимы периодических

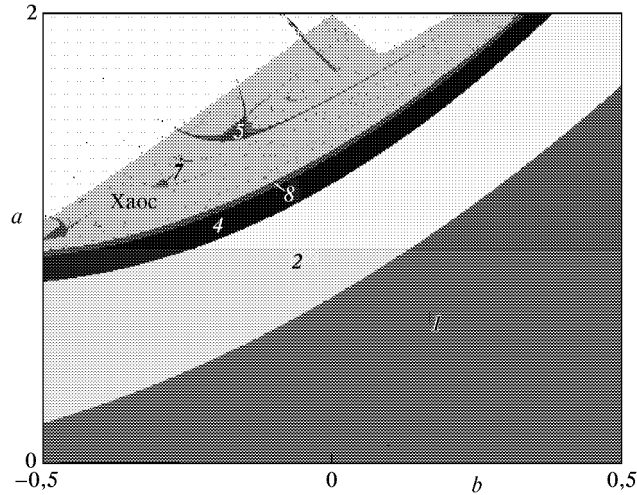


Рис. 5.3. Карта динамических режимов на плоскости параметров отображения Эно (5.4). Белая область в верхней части диаграммы отвечает расходимости итераций отображения

колебаний, сначала периода 2, затем 4, 8, — наблюдается последовательность *бифуркаций удвоения периода*. Бифуркационные

линии на плоскости параметров представляются границами соответствующих областей. Они накапливаются к пределу — критической линии, являющейся границей хаоса.

Отображение Икеды — модель возбуждаемого лазером кольцевого резонатора с нелинейной средой. В 1980 г. японские исследователи Икеда, Даидо и Акимото предложили механизм возникновения сложной динамики в нелинейной оптической системе — кольцевом резонаторе, содержащем среду с фазовой нелинейностью (Ikeda, Daido, Akimoto, 1980). Резонатор возбуждается лучом лазера через полупрозрачное зеркало (рис. 5.4). Нетривиальные

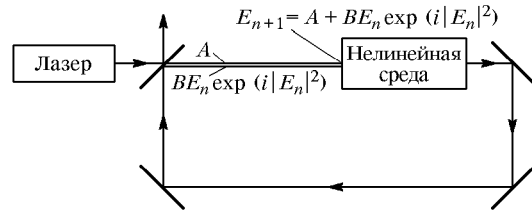


Рис. 5.4. Кольцевой резонатор, возбуждаемый внешним источником когерентного излучения, — физическая система, для описания которой предложено отображение Икеды (5.6)

колебательные режимы могут реализоваться благодаря интерференции монохроматического сигнала на входе и модулированного по фазе сигнала, прошедшего через нелинейную среду.

Если пренебречь временем релаксации отклика среды на изменение интенсивности света, то значения комплексной амплитуды поля E на входе в нелинейную среду при n -м и $(n + 1)$ -м проходе по кольцевому резонатору связаны следующим соотношением:

$$E_{n+1} = A + BE_n \exp(i|E_n|^2 + i\varphi). \quad (5.6)$$

Здесь A — параметр интенсивности света от лазера, B — параметр диссипации поля в резонаторе. Величина, фигурирующая в показателе экспоненты, соответствует набегу фазы при обходе резонатора: параметр φ характеризует отстройку частоты излучения лазера от собственной моды резонатора, а добавка $|E|^2$ обусловлена нелинейным сдвигом фазы из-за зависимости показателя преломления от амплитуды поля.

Вычисление якобиана отображения Икеды приводит к результату $J = B^2$, так что при $B < 1$ эта система диссипативная. На рис. 5.5 показаны портреты хаотических аттракторов, реализующихся в отображении Икеды при различных значениях параметра A .

На рис. 5.6 представлена карта динамических режимов отображения Икеды на плоскости параметров (A, B) . Если увеличивать

параметр интенсивности излучения A при фиксированном уровне параметра потерь в резонаторе B , то переход к хаосу происходит, как правило, через каскад бифуркаций удвоения периода. Од-

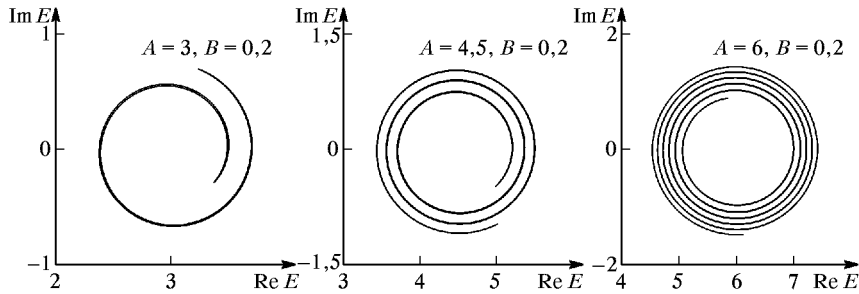


Рис. 5.5. Странный хаотический аттрактор в отображении Икеды (5.6) при $B = 0,2$, $\varphi = 0$, нескольких различных значениях параметра интенсивности падающего излучения

нако глобальная структура границы хаоса, как видно из рисунка, устроена сложным и нетривиальным образом. В частности, имеются узкие полосы регулярной динамики, простирающиеся далеко в область, занятую хаосом.

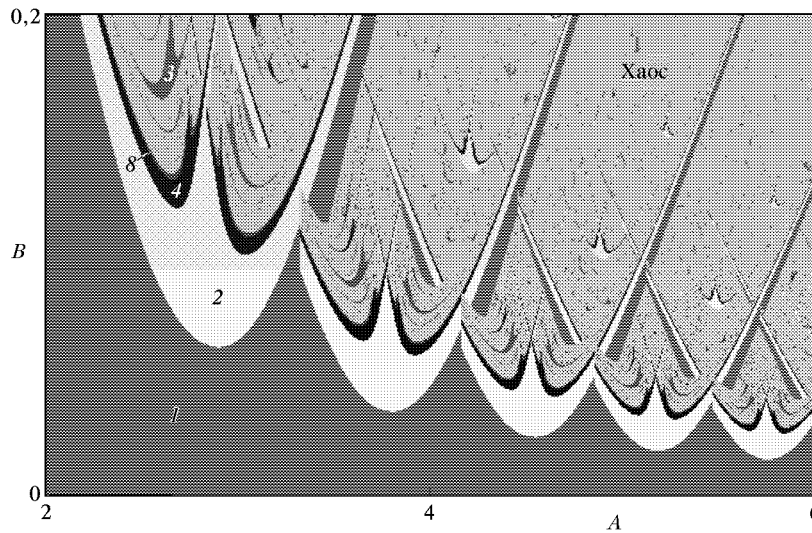


Рис. 5.6. Карта динамических режимов на плоскости параметров отображения Икеды (5.6) при $\varphi = 0$

Основным «строительным блоком» картины служит характерная конфигурация областей, показанная отдельно на рис. 5.7.

Французский исследователь Кристиан Мира назвал ее *crossroad area* — область «перекрестка». В этой области располагается точка сборки, к которой подходят, образуя характерное острие, две линии складок. Складка здесь представляет собой геометри-

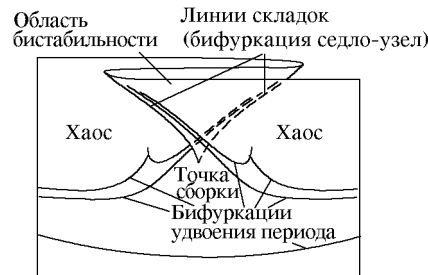


Рис. 5.7. Схематическое изображение части плоскости параметров нелинейной системы, отвечающей области *crossroad* — «перекресток»

ческое место точек бифуркации, отвечающих слиянию устойчивой и неустойчивой неподвижной точки или устойчивой и неустойчивой периодической орбиты одинакового периода. Эту бифуркацию называют *седло-узловой* или *касательной бифуркацией* (второй термин предпочтителен, когда говорят об одномерных отображениях, а первый — о системах с большей размерностью фазового пространства). Линии складок можно рассматривать как края соответствующих листов карты. При обходе вокруг точки сборки система совершает перескок с одного листа на другой, когда мы пересекаем определенную линию складки. В зависимости от направления обхода, скачок происходит на разных линиях, так что имеет место гистерезис (рис. 5.8). Между линиями складок находится область бистабильности, где при одних и тех же параметрах

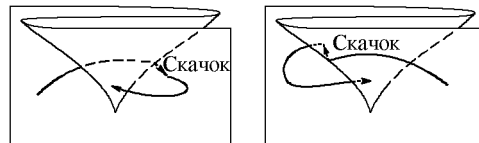


Рис. 5.8. Иллюстрация гистерезиса, наблюдаемого в окрестности точки сборки

в системе в зависимости от начальных условий может реализоваться один из двух аттракторов. С каждым из них ассоциируется определенный лист карты динамических режимов, на котором имеется своя конфигурация областей, отвечающих метаморфозам этого аттрактора. В частности, на каждом листе представлены линии бифуркаций удвоения периода, области хаоса, а также вторичные сборки и вторичные «перекрестки», организованные около этих сборок.

Отображение Заславского. Рассмотрим какую-либо систему, в которой могут реализоваться периодические автоколебания, т. е. в фазовом пространстве имеет место предельный цикл. Пусть на эту систему действуют периодические импульсные толчки (рис. 5.9). Когда очередной толчок выводит систему из установившегося ре-

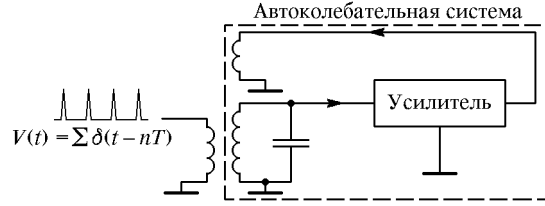


Рис. 5.9. К выводу диссипативного отображения Заславского

жима, амплитуда колебаний постепенно возвращается к предельному циклу. Если частота колебаний зависит от амплитуды, то этот процесс релаксации сопровождается накоплением добавки к фазе. Реалистичные уравнения, описывающие динамику системы в промежутке времени между толчками, записываются в виде

$$\dot{r} = -\gamma r, \quad \dot{\varphi} = \omega + \nu r, \quad (5.7)$$

где r — отклонение амплитуды от предельного цикла, γ — коэффициент затухания возмущения амплитуды, характеризующий скорость релаксации к предельному циклу, φ — фаза, ω — частота колебаний на предельном цикле, поправка к которой учитывается в первом порядке по r .

Пусть перед очередным n -м толчком отклонение по амплитуде от предельного цикла было r_n , а фаза равнялась φ_n . В результате толчка возникнет добавка к амплитуде, которая обязана быть периодической функцией фазы в момент толчка, φ_n . Простейшее предположение состоит в том, что это просто синус, так что сразу после толчка имеем

$$r_n(+0) = r_n + A \sin \varphi_n, \quad (5.8)$$

где A — параметр, характеризующий интенсивность толчков. Интегрируя уравнения (5.7) с начальными условиями $r_n(+0)$, φ_n на интервале времени T (период следования толчков), имеем

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= (r_n + A \sin \varphi_n) \exp(-\gamma T), \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \omega T + \nu \int_0^T (r_n + A \sin \varphi_n) \exp(-\gamma t) dt = \\ &= \varphi_n + \omega T + \nu(r_n A \sin \varphi_n) \frac{1 - \exp(-\gamma T)}{\gamma}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\exp(\gamma T) - 1}{\gamma} \nu r, \quad \Delta = \omega T, \\ k &= A \frac{1 - \exp(-\gamma T)}{\gamma}, \quad d = \exp(-\gamma T),\end{aligned}\tag{5.10}$$

приходим к двумерному отображению, описывающему изменение пары переменных (φ_n, ρ_n) за период между двумя последовательными толчками:

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n + \Delta + k \sin \varphi_n + d \rho_n, \\ \rho_{n+1} &= d \rho_n + k \sin \varphi_n.\end{aligned}\tag{5.11}$$

При записи первого уравнения мы учли, что переменная φ представляет собой фазу, и ее значения, отличные на $2\pi m$, следует считать эквивалентными.

Якобиан отображения (5.11) равен d . Как видно из (5.10), в контексте рассматриваемой задачи этот параметр меньше единицы, т. е. отображение диссипативное. Его называют *диссипативным отображением Заславского*. Консервативное отображение Заславского получается при подстановке $d = 1$.

На рис. 5.10 приведено несколько примеров портретов аттракторов отображения Заславского, отвечающих периодическим, квазипериодическим и хаотическим режимам.

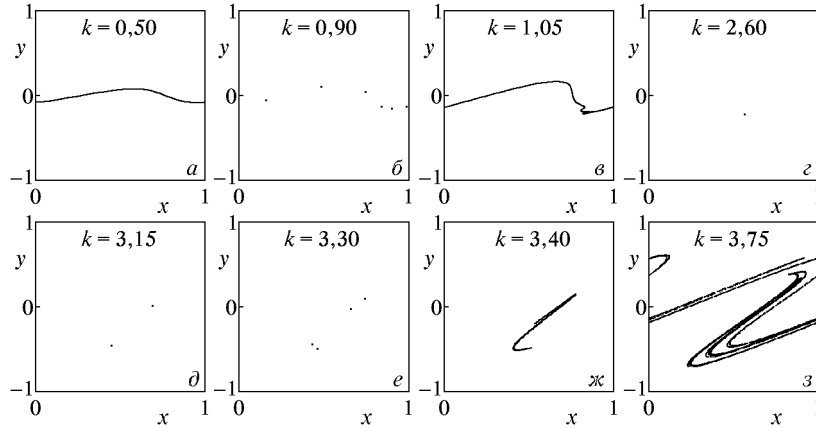


Рис. 5.10. Портреты аттракторов диссипативного отображения Заславского при $d = 0,3$ и $\Delta/2\pi = 0,22$ на плоскости параметров $(x = \varphi/2\pi, y = \rho/2\pi)$: а, б — квазипериодические; в, г, д, е — периодические; ж, з — хаотические

На рис. 5.11 показана карта динамических режимов отображения Заславского на плоскости параметров (Δ, k) . Периодическое поведение реализуется в областях, имеющих вид характерных языков (*языки Арнольда*). Периодические режимы внутри

языков Арнольда интерпретируются как *синхронизация* автоколебательной системы периодическим воздействием. Наличие большого числа языков говорит о том, что синхронизация может реализоваться на различных гармониках и субгармониках внешней

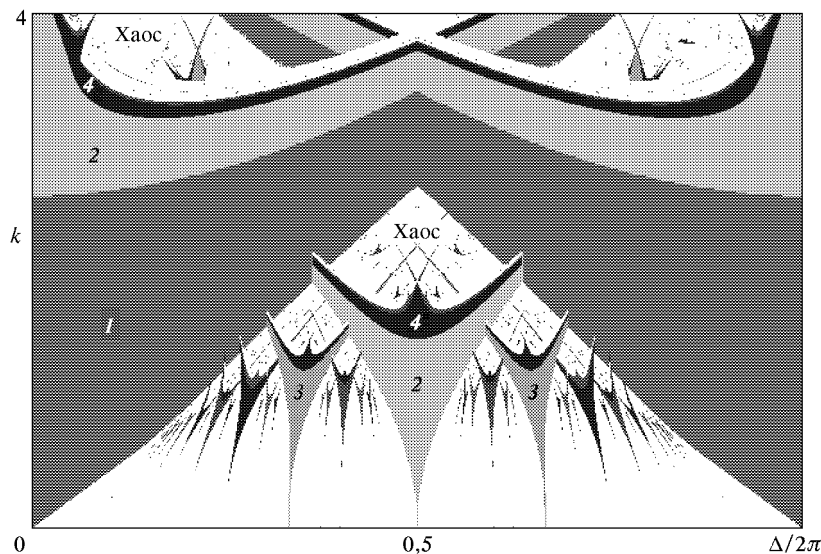


Рис. 5.11. Карта динамических режимов на плоскости параметров отображения Заславского (5.11) при $d = 0,3$. Цифрами указаны значения периода внутри некоторых языков Арнольда. Белым цветом обозначены квазипериодические (в нижней части рисунка) и хаотические (в верхней части) режимы

силы. На самом деле на рисунке видны только самые широкие языки, полное же число языков бесконечно — из каждой рациональной точки r на оси $k = 0$ исходит острием свой язык. Пока параметр k невелик, между языками остается все же место для квазипериодических режимов. В области больших значений параметра k внутри языков Арнольда можно видеть сложную картину, включающую «перекрестки», точки сборки, линии складок и удвоений периода, подобную той, которую мы обсуждали для отображения Икеды. При движении внутри языка Арнольда в общем направлении увеличения k можно наблюдать возникновение хаоса через каскад удвоений периода.

5.2. Искусственно сконструированные дифференциальные уравнения

Система Ресслера. Отто Ресслер, немецкий исследователь, непрактикующий медик, интересовался динамическими системами в приложении к химии и биологии. Задавшись целью сконструировать

ровать по возможности простую модель с хаотическим поведением, он предложил в 1976 г. автономную систему дифференциальных уравнений (Rössler, 1976), которая служит с тех пор одним из классических объектов нелинейной динамики. Система имеет вид

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = b + (x - r)z, \quad (5.12)$$

где x, y, z — динамические переменные, a, b, r — параметры.

На рис. 5.12 показан странный аттрактор системы Ресслера при $a = b = 0,2, r = 5,7$. Его называют *ленточным аттрактором Ресслера* (Rössler band) и он устроен существенно

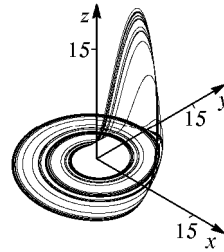


Рис. 5.12. Аттрактор Ресслера при $a = 0,2$,

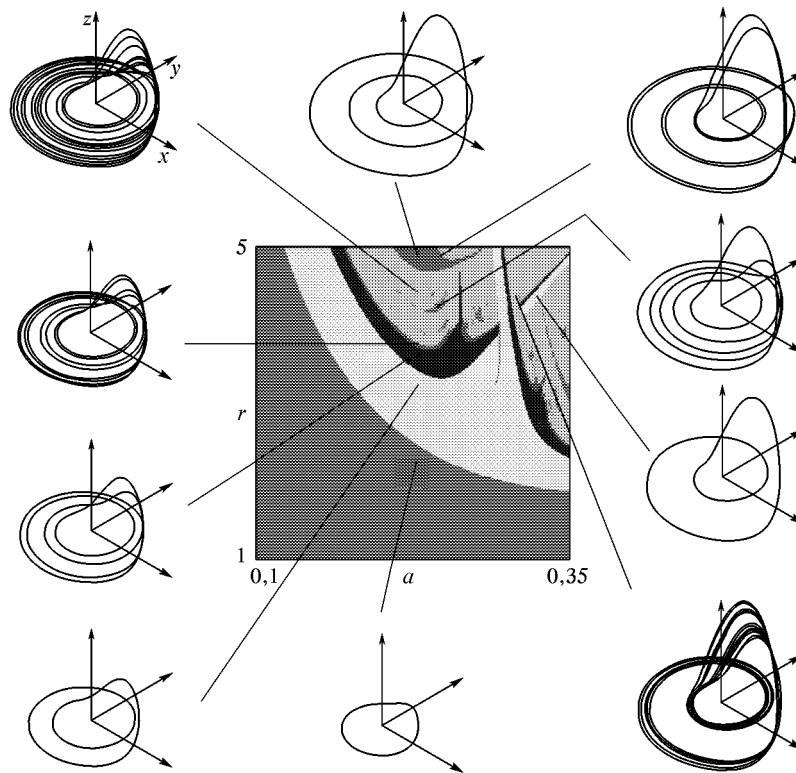


Рис. 5.13. Карта динамических режимов системы Ресслера на плоскости параметров a, r при $b = 0,2$ с показанными по периферии рисунка фазовыми портретами аттракторов в различных областях

На рис. 5.13 в центре приведена карта динамических режимов на плоскости параметров (a, r) при фиксированном $b = 0,2$. По периферии рисунка показаны фазовые портреты аттрактора, отвечающие некоторым характерным точкам пространства параметров. Замечательно, что для этой автономной системы дифференциальных уравнений основные элементы на карте динамических режимов те же самые, какие были отмечены для отображений. Это области периодичности, разграниченные линиями бифуркаций удвоения периода, «перекрестки» с характерным расположением линий складок и точек сборки, сложная структура границы хаоса с присутствием узких областей регулярной динамики, простирающихся вдоль линий складок далеко в область хаоса.

Системы Спротта. После Ресслера идея конструирования простых эталонных систем с хаотической динамикой была основа-

Модель	Уравнения	Показатели Ляпунова
A	$\dot{x} = y, \dot{y} = -x + yz, \dot{z} = 1 - y^2$	0,014, 0, -0,014
B	$\dot{x} = yz, \dot{y} = x - y, \dot{z} = 1 - xy$	0,210, 0, -1,210
C	$\dot{x} = yz, \dot{y} = x - y, \dot{z} = 1 - x^2$	0,163, 0, -1,163
D	$\dot{x} = -y, \dot{y} = x + z, \dot{z} = xz + 3y^2$	0,103, 0, -1,320
E	$\dot{x} = yz, \dot{y} = x^2 - y, \dot{z} = 1 - 4x$	0,078, 0, -1,078
F	$\dot{x} = y + z, \dot{y} = -x + y/2, \dot{z} = x^2 - z$	0,117, 0, -0,617
G	$\dot{x} = 2x/5 + z, \dot{y} = xz - y, \dot{z} = -x + y$	0,034, 0, -0,634
H	$\dot{x} = -y + z^2, \dot{y} = x + y/2, \dot{z} = x - z$	0,117, 0, -0,617
I	$\dot{x} = -y/5, \dot{y} = x + z, \dot{z} = x + y^2 - z$	0,012, 0, -1,012
J	$\dot{x} = 2z, \dot{y} = -2y + z, \dot{z} = -x + y + y^2$	0,076, 0, -2,076
K	$\dot{x} = xy - z, \dot{y} = x - y, \dot{z} = x + 0,3z$	0,038, 0, -0,890
L	$\dot{x} = y + 3,9z, \dot{y} = 0,9x^2 - y, \dot{z} = 1 - x$	0,061, 0, -1,061
M	$\dot{x} = -z, \dot{y} = -x^2 - y, \dot{z} = 1,7(1 + x) + y^2$	0,044, 0, -1,044
N	$\dot{x} = -2y, \dot{y} = x + z^2, \dot{z} = 1 + y - 2x$	0,076, 0, -2,076
O	$\dot{x} = y, \dot{y} = x - z, \dot{z} = x + xz + 2,7y$	0,049, 0, -0,319
P	$\dot{x} = 2,7y + z, \dot{y} = -x + y^2, \dot{z} = x + y$	0,087, 0, -0,481
Q	$\dot{x} = -z, \dot{y} = x - y, \dot{z} = 3,1 + y^2 + 0,5z$	0,109, 0, -0,609
R	$\dot{x} = 0,9 - y, \dot{y} = 0,4 + z, \dot{z} = xy - z$	0,062, 0, -1,062
S	$\dot{x} = -x - 4y, \dot{y} = x + z^2, \dot{z} = 1 + x$	0,188, 0, -1,188

тельно проработана Джулиеном Спроттом, американским исследователем из университета штата Висконсин. С помощью компьютера он произвел прямой перебор большого числа систем трех

дифференциальных уравнений первого порядка, правые части которых представлялись полиномами второй степени (Sprott, 1994). Найденные Спроттом системы с хаотической динамикой представлены в таблице на с. 78, где приведены также значения показателей Ляпунова для этих систем. Одна из моделей А обладает свойством сохранения фазового объема и демонстрирует хаотическую динамику, характерную для консервативных систем. Остальные модели диссипативные, и хаос ассоциируется с наличием странного аттрактора. Для систем В и С аттрактор подобен по виду аттрактору Лоренца, для остальных систем (D–S) — аттрактору Ресслера. Заведомо эквивалентные системы, получаемые перестановками переменных x, y, z , в таблицу не включены. Спротт отмечает, что некоторые из найденных систем могут все же оказаться эквивалентными, т. е. сводиться одна к другой нетривиальной заменой переменных. Пока неизвестно, однако, как установить наличие такой эквивалентности в общем случае, и вопрос остается открытым.

5.3. Нелинейные осцилляторы под периодическим внешним воздействием

Нелинейный диссипативный осциллятор — это динамическая система, мгновенное состояние которой задается двумя величинами, обобщенной координатой x и скоростью $\dot{x}$. Конкретные физические реализации встречаются в механике (маятник, шарик на пружине, частица в потенциальной яме), акустике (колебания пузырьков в жидкости), электронике (колебательный контур или резонатор, содержащий нелинейные элементы). При наличии внешнего периодического воздействия в уравнениях появляются члены, содержащие явную зависимость от времени, и нелинейный осциллятор превращается в неавтономную систему, которая может демонстрировать сложную динамику и переход к хаосу. Фазовое пространство такой системы трехмерно, поскольку задание переменной x и скорости $\dot{x}$ однозначно определяет последующее движение лишь в том случае, если указано, к какому моменту времени или к какой фазе воздействия они относятся.

Если предположить, что нелинейная зависимость возвращающей силы для осциллятора имеет вид $f(x)$, а сила трения пропорциональна $\dot{x}$, то приходим к уравнению

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + f(x) = a \sin \omega t, \quad (5.13)$$

где γ — параметр диссипации, a и ω задают частоту и амплитуду воздействия.

Другой вариант — параметрическое возбуждение, когда мы имеем периодическую зависимость коэффициента в уравнении от

времени:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + (1 + a \sin \omega t) f(x) = 0. \quad (5.14)$$

Примерами могут служить маятник с периодически меняющейся длиной нити и нелинейный LCR -контур, в котором периодическим образом изменяют во времени емкость или индуктивность.

Как при силовом, так и при параметрическом возбуждении нелинейного диссипативного осциллятора, на плоскости параметров обычно представлены области различных по характеру периодических и хаотических режимов, бифуркации удвоения периода, складки, сборки и «перекрестки».

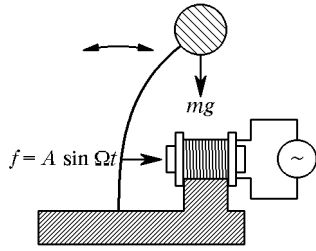


Рис. 5.14. Механическая система, описываемая уравнением Дуффинга с внешним периодическим воздействием

Рассмотрим подробнее систему типа (5.13) с кубической нелинейной функцией $f(x) = x^3$. Ее называют *осциллятором Дуффинга* или *осциллятором Уеды* (Ueda, 1980). Примером может служить механическое устройство, показанное на рис. 5.14. Шарик закреплен на установленной вертикально упругой пластинке, причем коэффициент упругости подобран так, что при малых углах

отклонения возвращающая сила упругости в точности компенсирует отклоняющий момент силы тяжести. Осциллятор Уеды может быть реализован также в виде электрической схемы — колебательного контура с нелинейной индуктивностью. Заменой $\tau = \gamma t$, $X = \gamma x$ уравнение (5.13) сводится в этом случае к следующему виду:

$$\ddot{x} + \dot{x} + x^3 = A \sin \Omega \tau. \quad (5.15)$$

Здесь присутствует только два параметра, $A = a\gamma^{-3}$, $\Omega = \omega/\gamma$, характеризующие, соответственно, амплитуду и частоту воздействия. При малой амплитуде A частота колебаний совпадает с частотой внешнего воздействия, а при увеличении этого параметра можно наблюдать более сложное динамическое поведение, включая переход к хаосу.

Поскольку функция $f(x)$ нечетная, система (5.16) обладает симметрией и инвариантна относительно одновременной замены $x \rightarrow -x$, $\tau \rightarrow \tau + \pi/\Omega$. Поэтому всегда реализуется одна из двух возможностей:

(1) аттрактор обладает симметрией относительно указанной замены;

(2) аттрактор не обладает симметрией, но имеет симметричного партнера, т. е. в зависимости от начальных условий в системе будут возникать два разных установившихся режима, переходящие один в другой при преобразовании симметрии.

На рис. 5.15 показана карта динамических режимов осциллятора Уэды на плоскости параметров (A, Ω) . По периферии рисунка приводятся фазовые портреты аттрактора в проекции на плоскость переменных $(x, \dot{x})$, дающие представление об эволюции

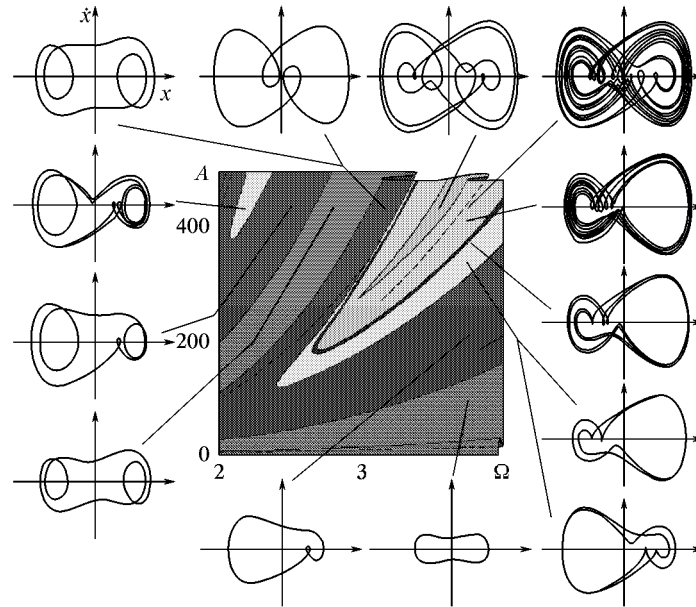


Рис. 5.15. Карта динамических режимов на плоскости параметров (A, Ω) для осциллятора Уэды (5.16). По периферии рисунка показан вид фазового портрета аттрактора в проекции на плоскость $(x, \dot{x})$. Два фазовых портрета в правом нижнем углу рисунка отвечают двум взаимно симметричным аттракторам, сосуществующим в одной и той же точке плоскости параметров

аттрактора в зависимости от параметров. При малых амплитудах единственным аттрактором является замкнутая кривая — симметричный цикл, причем период колебаний равен периоду внешнего воздействия. При увеличении амплитуды можно наблюдать бифуркацию потери симметрии. Она состоит в том, что симметричный цикл становится неустойчивым и возникает два цикла-аттрактора. Далее, на базе каждого из асимметричных циклов наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся переходом к хаосу. Пока амплитуда не очень велика, сосуществуют два асимметричных хаотических аттрактора. При большой амплитуде воздействия они сливаются в один симметричный хаотический аттрактор.

Начиная с работы Линсея, популярным примером системы с хаотическим поведением является электронная реализация нели-

нейного осциллятора под внешним периодическим воздействием (Linsay, 1981; Астахов и др., 1988). Это колебательный контур, LRC -цепь, в которую включен полупроводниковый диод (рис. 5.16).

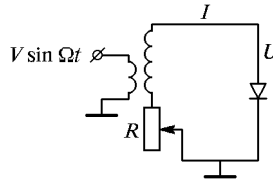


Рис. 5.16. Схема электронного нелинейного осциллятора

Если бы мы захотели описать динамику нелинейного контура с помощью дифференциального уравнения, то оно оказалось бы сложнее, чем (5.13), поскольку полупроводниковый диод сочетает свойства нелинейной емкости и нелинейной проводимости. Здесь, однако, мы хотим подчеркнуть только экспериментальный аспект. На рис. 5.17 приводится полученная в эксперименте (Б. П. Безручко и Е. П. Селезнев) карта динамических режимов на плоскости параметров «частота Ω –амплитуда V » внешнего периодического воздействия.

На ней можно видеть линии бифуркаций удвоения периода, накапливающиеся к границе хаоса. Цифрами отмечены

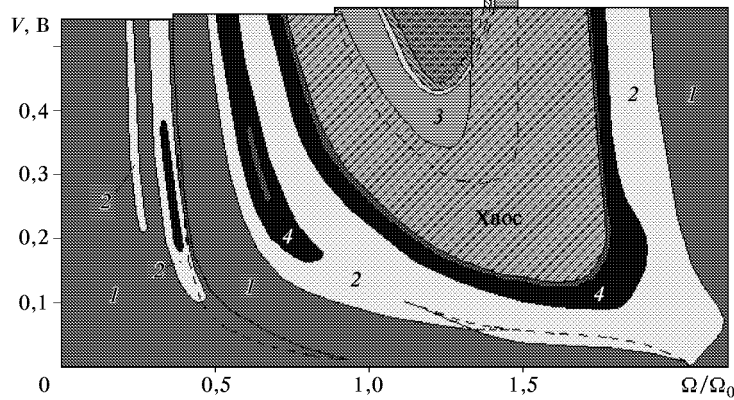


Рис. 5.17. Полученная в эксперименте карта динамических режимов на плоскости частота–амплитуда воздействия для электронного нелинейного осциллятора

периоды наблюдаемых колебаний в единицах периода внешнего воздействия.

На рис. 5.18 показано, как эволюционирует вид фазовых портретов аттрактора на плоскости «напряжение U –ток I », а также спектры колебаний в процессе перехода к хаосу через удвоения периода.

Стоит отметить большое преимущество радиотехнических и электронных устройств как объектов экспериментального исследования сложной динамики. В сравнении с механическими, гидродинамическими и другими системами они просты в реализации,

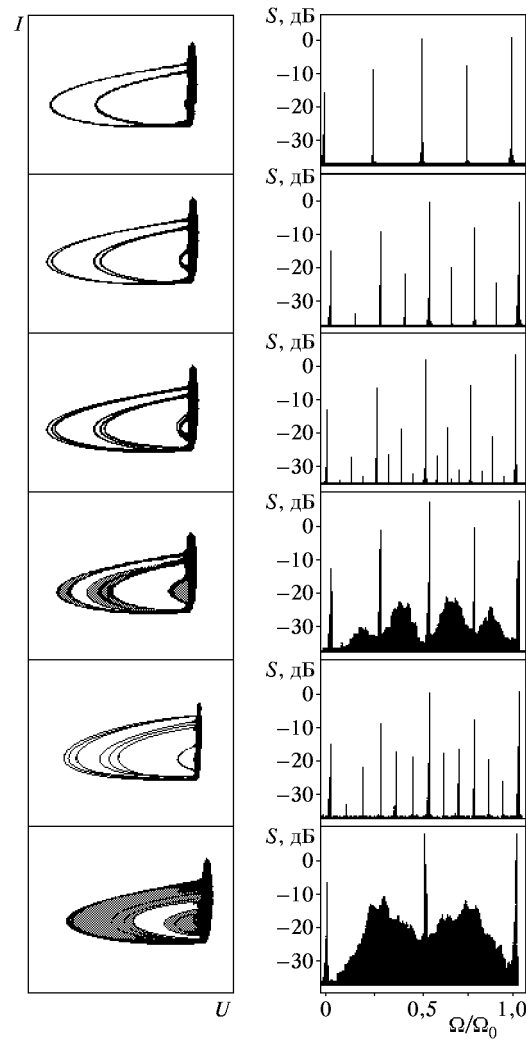


Рис. 5.18. Полученные в эксперименте фазовые портреты электронного осциллятора с периодическим внешним воздействием (слева) и спектры колебаний в контуре (справа)

допускают простое и удобное управление параметрами, использование распространенной стандартной аппаратуры для наблюдения и обработки генерируемых сигналов.

5.4. Автономные системы — электронные генераторы

Генератор Кияшко–Пиковского–Рабиновича. По-видимому, исторически первым примером простой электронной схемы, в которой целенаправленно был реализован режим хаотических автоколебаний, был генератор, предложенный сотрудниками Института прикладной физики Академии наук в Нижнем Новгороде С. В. Кияшко, А. С. Пиковским и М. И. Рабиновичем (Пиковский, Рабинович, 1978; Кияшко, Пиковский, Рабинович, 1979).

Это несложная модификация традиционной электронной системы, использующейся для генерации автоколебаний, в которой в колебательный контур включен дополнительный нелинейный элемент — туннельный диод (рис. 5.19а). Туннельный диод представляет собой двухполюсник, для которого зависимость тока от напряжения — вольт-амперная характеристика имеет *N*-образный вид и содержит падающий участок (рис. 5.19б). Пока ток I и напряжение V малы, туннельный диод не оказывает существенного влияния на колебания в контуре. При этом задействован участок (I) на характеристике туннельного диода, а из-за присутствия электронной лампы и цепи обратной связи амплитуда нарастает

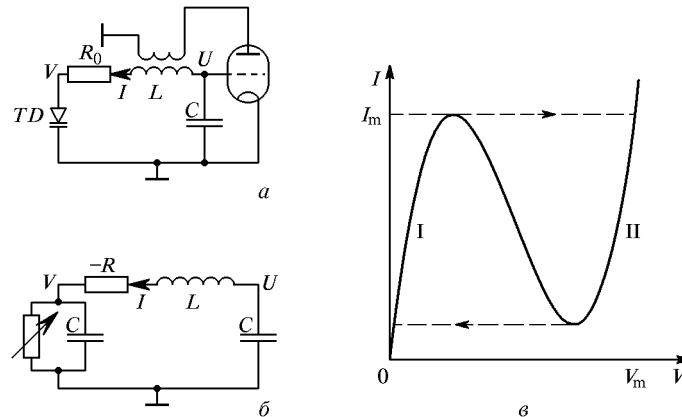


Рис. 5.19. Радиотехнический автогенератор хаотических колебаний Кияшко–Пиковского–Рабиновича (а), его эквивалентная схема (б) и вольт-амперная характеристика туннельного диода (в)

во времени. Когда ток I достигает значения I_m , происходит почти мгновенное переключение туннельного диода на участок (II); быстрая переключения связана с малостью собственной емкости диода c . Далее колебания быстро затухают, ток через туннельный диод уменьшается и в некоторый момент происходит его обратное переключение на участок (I). В результате двух переключений туннельный диод в значительной мере поглощает поступившую в

LCR -контур энергию, и колебания снова начинают нарастать с малой амплитуды. При определенных условиях наблюдаемая последовательность цугов нарастающих колебаний оказывается хаотической. Принципиальная возможность возникновения хаоса обусловлена тем, что в области малых амплитуд динамика является неустойчивой по отношению к возмущению начальных условий.

На рис. 5.19б приведена эквивалентная схема генератора Кияшко–Пиковского–Рабиновича, на основании которой можно выписать уравнения динамики. Из приведенного описания механизма функционирования системы следует, что нелинейность характеристики электронной лампы не имеет принципиального значения.

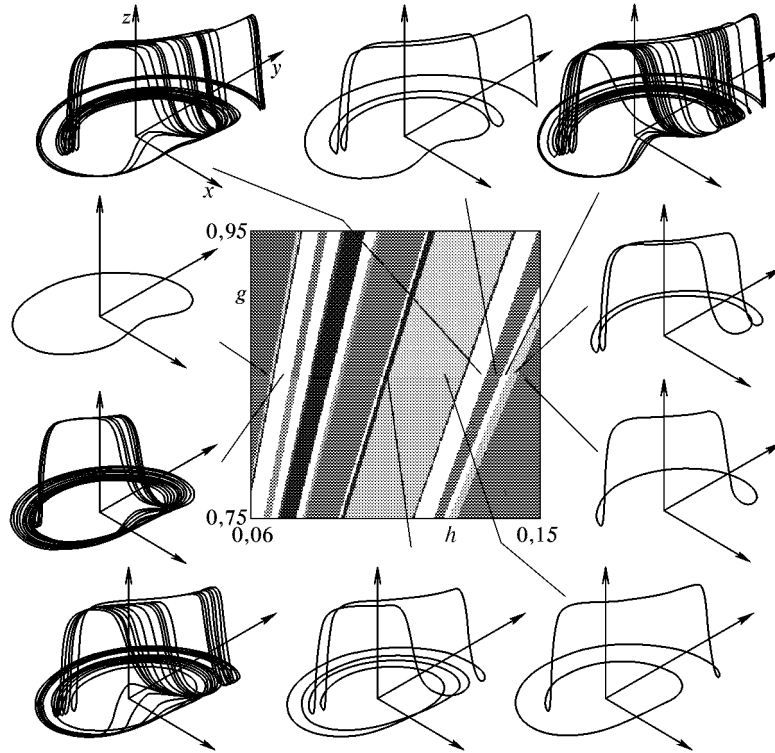


Рис. 5.20. Карта динамических режимов и фазовые портреты аттракторов для автогенератора Кияшко–Пиковского–Рабиновича на плоскости параметров (h, g) при $\varepsilon = 0,2$ и нелинейной характеристике туннельного диода (5.19). Области хаоса показаны белым

Присутствие электронной лампы учитывается включением в эквивалентную схему отрицательного сопротивления $(-R)$, благодаря чему малые колебания в контуре оказываются нарастающими.

Туннельный диод представляется в виде параллельно соединенных малой емкости c и нелинейного резистора с характеристикой $I = I_m f(V/V_m)$. Записывая уравнения Кирхгофа, имеем:

$$L \frac{dI}{dt} = U - V + RI, \quad C \frac{dU}{dt} = -I, \quad c \frac{dV}{dt} + I_m f \left(\frac{V}{V_m} \right) = I. \quad (5.16)$$

Введем следующие безразмерные переменные:

$$x = \frac{I}{I_m}, \quad y = UI_m \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad y = \frac{V}{V_m}, \quad \tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad (5.17)$$

тогда уравнения принимают вид

$$\dot{x} = 2hx + y - gz, \quad \dot{y} = -x, \quad \varepsilon \dot{z} = x - f(z), \quad (5.18)$$

$$\text{где } 2h = R\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad g = \frac{V_m}{I_m}\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \varepsilon = \frac{gc}{C} \ll 1^1).$$

На рис. 5.20 показана карта динамических режимов и портреты аттракторов, которые реализуются в системе (5.18) при $\varepsilon = 0,2$ для нелинейной характеристики, заданной кубической параболой

$$f(z) = 8,592z - 22z^2 + 14,408z^3. \quad (5.19)$$

Генератор с инерционной нелинейностью Анищенко–Астахова.

Другую модификацию традиционной электронной автоколебательной системы представляет собой генератор с инерционной нелинейностью, предложенный и исследованный в Саратовском университете в группе В. С. Анищенко (Анищенко, Астахов и др., 1983). В схему, содержащую LRC -контур, усилитель и цепь обратной связи, добавляешь дополнительный инерционный блок, на вход которого поступает через квадратичный детектор тот же сигнал x .

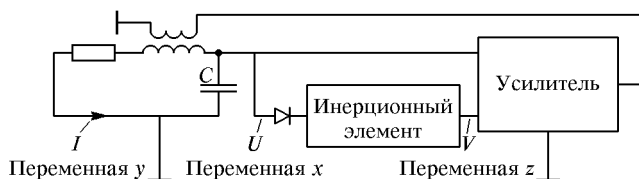


Рис. 5.21. Схема генератора с инерционной нелинейностью Анищенко–Астахова

что и на вход основного усилителя (рис. 5.21). С выхода инерционного элемента сигнал z подается на дополнительный вход

¹⁾ То обстоятельство, что третье уравнение содержит малый параметр при производной, можно использовать для аналитического исследования динамики, что и было сделано в работе Кияшко, Пиковского и Рабиновича.

основного усилителя и управляет величиной его коэффициента передачи. В простейшем случае, когда собственной нелинейностью усилителя можно пренебречь, динамика описывается системой уравнений

$$\dot{x} = mx + y - xz, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + 1(x)x^2, \quad (5.20)$$

где $1(x)$ обозначает ступенчатую функцию Хэвисайда, $1(x) = 0$ при $x \leq 0$ и 1 при $x > 0$. Параметр g считается положительным и характеризует время релаксации инерционного элемента, параметр m определяет коэффициент передачи усилителя.

Система (5.20) имеет неподвижную точку в начале координат, которая является устойчивой при $-2 < m < 0$ и теряет устойчивость при $m > 0$. Момент $m = 0$ отвечает бифуркации Андронова–Хопфа — рождению предельного цикла. При дальнейшем изменении параметров этот цикл в свою очередь может претерпевать различные бифуркации. На рис. 5.22 показана карта динамических

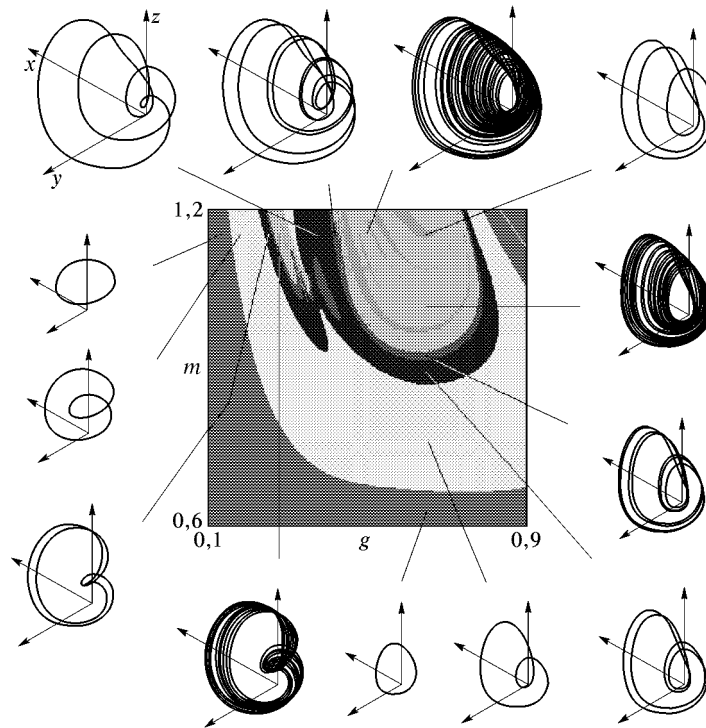


Рис. 5.22. Карта динамических режимов для системы уравнений (5.20), описывающей генератор с инерционной нелинейностью Анищенко–Астахова, и фазовые портреты аттрактора в некоторых характерных точках

режимов системы, полученная на компьютере. По периферии приведены фазовые портреты аттракторов, отвечающих нескольким представительным точкам пространства параметров. В частности, фиксируя g и увеличивая m , можно наблюдать последовательность удвоений периода с переходом к хаосу (портреты в правой нижней части рисунка). В области хаоса имеются окна периодических режимов характерной формы. На карте можно также усмотреть структуру типа «перекрестка», которая содержит точку сборки и линии складок.

Генератор с инерционной нелинейностью был реализован и детально изучен в эксперименте. Было убедительно продемонстрировано, что экспериментальная система адекватно описывается моделью (5.20). Подробности можно найти в оригинальных работах и монографиях В.С. Анищенко с сотрудниками.

Кольцевой генератор Дмитриева–Кислова. В конце 60-х–начале 70-х годов в Институте радиотехники и электроники АН СССР под руководством В.Я. Кислова проводились исследования, направленные на создание эффективных генераторов шума. Предложенная схема состояла из двух ламп бегущей волны (ЛБВ). Одна ЛБВ, более мощная, функционировала как усилитель, вторая использовалась как нелинейный элемент, обеспечивающий запаздывающую обратную связь путем подачи преобразованного сигнала с выхода усилителя на его вход (Кислов, Залогин, Мясин, 1979). Хотя в то время представления о хаосе еще не получили развития и не пользовались широкой известностью, исследователи целенаправленно получили хаотические автоколебания и правильно интерпретировали их как динамический режим в системе с запаздывающей обратной связью. Позднее, задавшись целью реализовать простейшую модель-аналог, А.С. Дмитриев и В.Я. Кислов предложили систему в виде замкнутой в кольцо цепочки из нелинейного усилителя, RLC -фильтра и инерционного элемента (рис. 5.23). В пред-

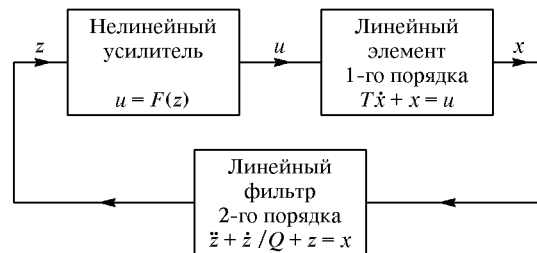


Рис. 5.23. Схема кольцевого генератора Дмитриева–Кислова

положении, что нелинейная характеристика усилителя имеет вид $F(z) = Mz \exp(-z^2)$, можно получить следующую систему урав-

нений:

$$T\dot{x} + x = Mz \exp(-z^2), \quad \dot{y} = x - z, \quad \dot{z} = y - \frac{z}{Q}. \quad (5.21)$$

Здесь x характеризует сигнал на выходе инерционного элемента, а z — на входе усилителя. Параметры T и Q определяют, соответственно, время релаксации инерционного элемента и добротность RLC -фильтра, а параметр M задает коэффициент усиления. Величину Q будем считать фиксированной и равной 10.

Вследствие того, что характеристика усилителя выбрана симметричной, система остается инвариантной относительно замены $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$. Поэтому аттрактор может либо удовлетворять условию симметрии и переходить в себя при указанной замене, либо, будучи несимметричным, иметь симметрично расположенного партнера.

При переходе параметра M через бифуркационное значение $M_0 = 1$ в системе происходит бифуркация — потеря устойчивости тривиального состояния равновесия в начале координат. В результате рождается пара симметрично расположенных устойчивых состояний равновесия $x = Qy = z = \pm \sqrt{\ln M}$, которые с ростом M

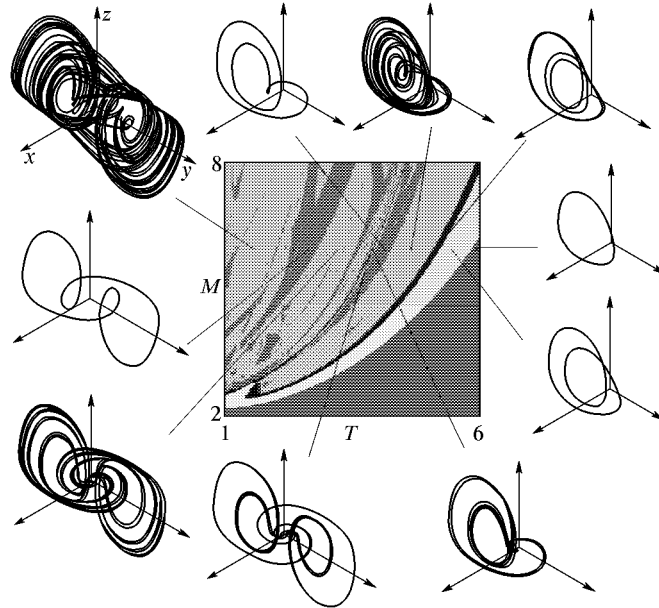


Рис. 5.24. Карта динамических режимов системы Дмитриева–Кислова (5.21) на плоскости параметров (T, M) при $Q = 10$ и фазовые портреты аттракторов в нескольких точках

удаляются от начала координат. При

$$M_1 = \exp \left(\frac{(T+Q)(1+TQ)}{2TQ^2} \right)$$

оба эти положения равновесия теряют устойчивость и становятся неустойчивыми фокусами. В окрестности каждого равновесия рождается предельный цикл. Эти два цикла являются друг для друга симметричными партнерами, так что можно следить за одним из них. При дальнейшем увеличении параметра M происходит каскад бифуркаций удвоения периода и переход к хаосу, причем аттрактор похож на аттрактор Ресслера. Затем, при достаточно больших M , происходит объединение аттрактора с симметричным партнером и образование единого симметричного аттрактора. О характерных режимах и бифуркациях в системе можно судить по карте динамических режимов и фазовым портретам, представленным на рис. 5.24.

Кроме системы (5.21) Дмитриев и Кислов рассмотрели целый ряд различных вариантов кольцевых генераторов, в том числе и с высокой размерностью фазового пространства. Для подробного ознакомления с результатами соответствующих теоретических и экспериментальных исследований можно рекомендовать монографию этих авторов (Дмитриев, Кислов, 1989).

Схема Чуа. В 1983 г. американский физик и специалист по электронике профессор Леон Чуа (университет Беркли, штат Калифорния) посетил лабораторию японского профессора Т. Мадзумото. Исследователи пытались реализовать электронный аналог системы Лоренца. Установка выглядела весьма внушительно, но, к сожалению, не работала из-за определенных недостатков имевшихся электронных компонент. Задавшись целью реализовать все же простую электронную систему, демонстрирующую режим, подобный хаосу Лоренца, профессор Чуа предложил схему, показанную на рис. 5.25, которая содержала единственный нелинейный элемент с кусочно-линейной характеристикой (Chua, Komuro, Matsumoto, 1986). В дальнейшем эта система была подвергнута

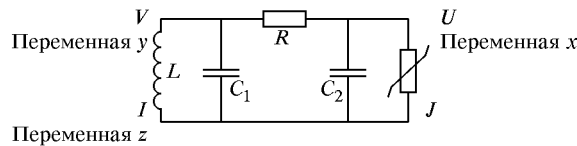


Рис. 5.25. Схема Чуа, содержащая индуктивность L , две емкости C_1 и C_2 , резистор R и элемент с кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой $J(U)$. Безразмерные переменные, фигурирующие в уравнениях, x , y , z , пропорциональны, соответственно, напряжению на нелинейном элементе, напряжению на индуктивности и току через индуктивность

всестороннему теоретическому и экспериментальному исследованию и является на сегодняшний день одной из наиболее хорошо исследованных моделей нелинейной динамики.

Записывая уравнения Кирхгофа для схемы Чуа и переходя к безразмерным переменным, можно получить следующую систему уравнений:

$$\dot{x} = \alpha(y - h(x)), \quad \dot{y} = x + y - z, \quad \dot{z} = -\beta y, \quad (5.22)$$

где α и β — параметры, а функция $h(x)$ определяется характеристикой нелинейного элемента и традиционно задается в виде

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{7}, & x \leq -1, \\ -\frac{x}{7}, & -1 < x < 1, \\ \frac{2x-3}{7}, & x \geq 1. \end{cases} \quad (5.23)$$

В зависимости от параметров, схема Чуа может демонстрировать различные регулярные и хаотические режимы. Следует иметь в виду, что из-за кусочно-линейной характеристики бифуркация рождения предельного цикла оказывается нетипичной (потеря устойчивости неподвижной точки сразу приводит к возникновению автоколебаний конечной амплитуды). В остальном бифуркации и переход к хаосу оказываются такими же, как во многих других нелинейных системах. В то же время из-за того, что в трех областях фазового пространства $x < -1$, $-1 < x < 1$ и $x > 1$ уравнения линейны, динамика допускает далеко идущий теоретический анализ.

Благодаря симметрии, присущей выбранной нелинейной характеристике, странный аттрактор системы Чуа может быть симметричным, подобно аттрактору Лоренца (рис. 5.26а). В опреде-

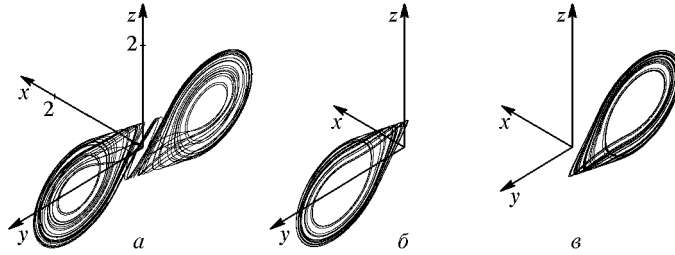


Рис. 5.26. Симметричный аттрактор в системе Чуа при $\alpha = 6,8$, $\beta = 10$ (а), аттрактор типа Ресслера при $\alpha = 6,6$, $\beta = 10$ (б) и его симметричный партнер (в)

ленной области параметров наблюдается ленточный аттрактор, подобный аттрактору Ресслера (рис. 5.26б), но он имеет, как можно проверить, симметричного партнера (рис. 5.26в).

На рис. 5.27 показана карта динамических режимов в области параметров, где реализуется аттрактор типа Ресслера (Kuznetsov et al., 1993, 1996). Для того чтобы на карте были хорошо видны

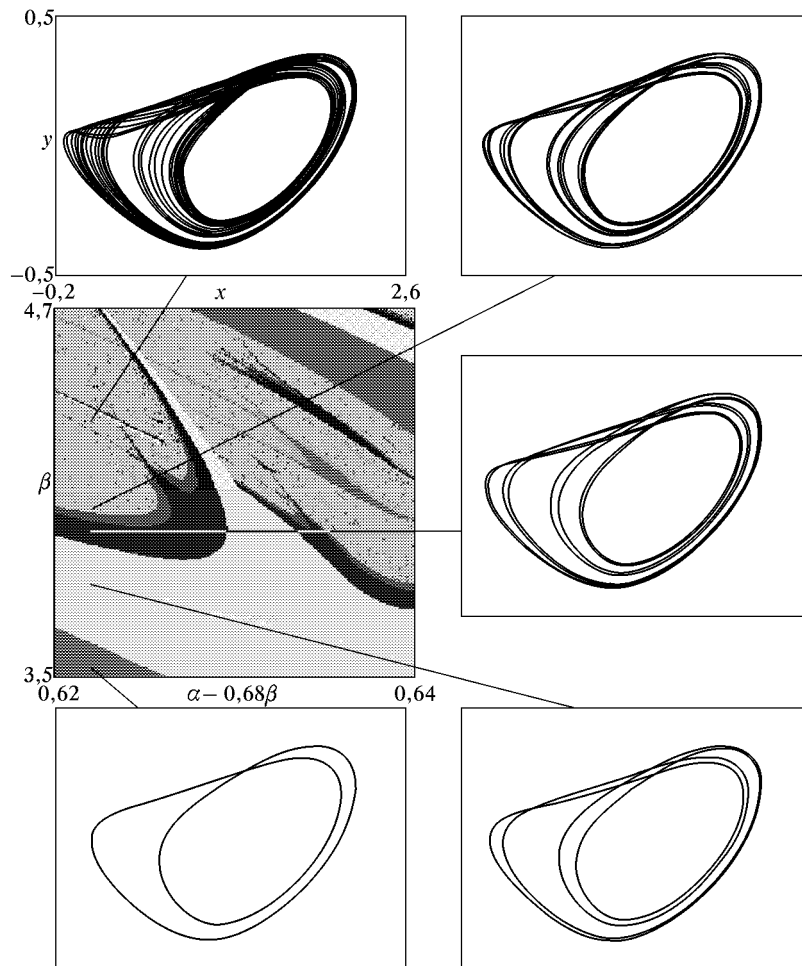


Рис. 5.27. Карты динамических режимов системы Чуа в области параметров, где реализуется аттрактор типа Ресслера, и фазовые портреты в характерных режимах

характерные структурные элементы, использованы «косые» координаты (α', β) , где $\alpha' = \alpha - 0,68\beta$. Отметим наличие областей существования периодических режимов различного периода, хаоса, «перекрестков» с характерной структурой, включающей точку сборки и линии складок.

Л е к ц и я 6

СЕЧЕНИЕ ПУАНКАРЕ, ПОДКОВА СМЕЙЛА, ТЕОРЕМА ШИЛЬНИКОВА

Из лекции 2 мы знаем несколько примеров модельных динамических систем, демонстрирующих хаос. Это системы, задаваемые определенными простыми одно-, двух- или трехмерными отображениями. С другой стороны, многие реалистичные системы различной природы, описываемые дифференциальными уравнениями, обнаруживают хаотическое поведение при численном моделировании динамики на компьютере или в эксперименте.

Можно ли утверждать, что наблюдаемые в численных расчетах и в эксперименте сложные непериодические колебательные режимы это динамический хаос, феномен той же природы, как и в модельных системах? Это серьезный и трудный вопрос, поскольку реалистичные системы, как правило, не допускают столь простого и далеко идущего теоретического анализа, как элементарные примеры из лекции 2. В эксперименте интерпретацию наблюдаемого режима осложняет неизбежное присутствие внешних и внутренних шумов и флуктуаций — в этом проявляется то обстоятельство, что любой реальный объект может быть представлен как динамическая система только в известном приближении. При численном решении уравнений всегда возникает вопрос, не является ли наблюдаемый «хаос» результатом некорректного учета ошибок округления или конечного порядка аппроксимации дифференциальных уравнений разностными.

Итак, очевидна необходимость перебросить мостик от простых, но абстрактных модельных конструкций к реалистичным системам на уровне убедительного теоретического анализа. В этой и следующей лекциях будут намечены определенные подходы к этой проблеме. Нельзя сказать, что в итоге вопрос прояснится до конца, но мы убедимся в реалистичности таких аспектов сложной динамики, как наличие бесконечного счетного множества периодических орбит и присутствие континуума траекторий, кодируемых бесконечными последовательностями символов. Первым шагом в наведении обещанного «мостика» будет предложенная в свое время Пуанкаре и очень популярная в современной нелинейной динамике процедура, которая позволяет перейти от дифференциальных уравнений к описанию динамики посредством отображений.

6.1. Сечение Пуанкаре и отображение последования

Рассмотрим систему с непрерывным временем, динамика которой описывается некоторыми дифференциальными уравнениями. Пусть для определенности это автономная система с трехмерным фазовым пространством. Расположим в фазовом пространстве двумерную площадку S и зададим на ней некоторую систему координат (X, Y) . Выбор секущей поверхности в высокой степени произволен, но она должна размещаться так, чтобы интересующие нас фазовые траектории многократно ее пересекали и касание было бы исключено. Возьмем какую-нибудь точку (X, Y) на секущей поверхности, выпустим из нее фазовую траекторию и проследим за этой траекторией, пока не произойдет следующее ее пересечение с нашей площадкой S в некоторой точке (X', Y') с проходом в том же направлении. Если изменить точку старта, получится другая точка-образ. Следовательно, возникает некоторое отображение секущей поверхности в себя:

$$X' = F_1(X, Y), \quad Y' = F_2(X, Y). \quad (6.1)$$

Это и есть *отображение последования*, или *отображение Пуанкаре*.

Теперь можно отвлечься от исходных дифференциальных уравнений и сосредоточиться на анализе динамики, порождаемой отображением Пуанкаре. Эта подмена объекта исследования не сопровождается какими-либо аппроксимациями, анализ остается точным. Цена, которую приходится при этом заплатить, — это потеря информации о характере динамики в промежутки времени между последовательными пересечениями секущей поверхности, в частности, о продолжительности интервалов времени между этими пересечениями и о топологических свойствах фазовых траекторий. Тем не менее, сохраняется возможность анализировать многие принципиальные вопросы, например, устанавливается ли в системе регулярный или хаотический режим.

Найти отображение Пуанкаре для конкретных нелинейных систем в явном виде удастся очень редко, в тех исключительных случаях, когда дифференциальные уравнения допускают аналитическое решение. Можно, однако, построить отображение Пуанкаре, как численный алгоритм.

Предположим, что динамическая система описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = f_3(x, y, z), \quad (6.2)$$

и секущая поверхность задана уравнением

$$S(x, y, z) = 0. \quad (6.3)$$

Пусть, далее, мы имеем реализованную в виде компьютерной программы процедуру решения системы уравнений (6.2), например, методом Рунге–Кутты. Зададим в качестве начального условия некоторую точку на секущей поверхности и будем строить решение шаг за шагом разностным методом, отслеживая знак функции $S(x, y, z)$. Момент пересечения траекторией секущей поверхности — это момент смены знака S . Мы можем без труда зафиксировать, между какими по номеру шагами разностного метода это случится. Предположим, что это произошло между n -м и $(n+1)$ -м шагами, так что $S_n = S(x(n\Delta t), y(n\Delta t), z(n\Delta t))$ и $S_{n+1} = S(x((n+1)\Delta t), y((n+1)\Delta t), z((n+1)\Delta t))$ имеют противоположный знак. Остановимся и спросим, как теперь уточнить момент пересечения. То, что нам на самом деле требуется, это даже не точный ответ (мы ведь все равно аппроксимировали дифференциальные уравнения разностной схемой), но такой результат, который был бы согласован по точности с используемой аппроксимацией. Изящный способ решения этой проблемы был указан Мишелем Эно (Нénon, 1982) и состоит в следующем. Дополним систему уравнений (6.3) еще одним соотношением, а именно,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial S}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

или

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} f_1(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial y} f_2(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial z} f_3(x, y, z). \quad (6.4)$$

А теперь перепишем уравнения, приняв за независимую переменную S . Вводя для удобства обозначение

$$H(x, y, z) = \frac{\partial S}{\partial x} f_1(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial y} f_2(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial z} f_3(x, y, z). \quad (6.5)$$

имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dS} &= \frac{f_1(x, y, z)}{H(x, y, z)}, & \frac{dy}{dS} &= \frac{f_2(x, y, z)}{H(x, y, z)}, \\ \frac{dz}{dS} &= \frac{f_3(x, y, z)}{H(x, y, z)}, & \frac{dt}{dS} &= \frac{1}{H(x, y, z)}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Возьмем значения x, y, z, t и S , полученные на $(n+1)$ -м шаге, и сделаем один шаг по S , величина которого $(-S_{n+1})$ (она может быть как положительной, так и отрицательной). После этого S обратится в нуль, а полученные в результате x, y, z и t дадут как раз то, что требуется — значения динамических переменных и времени в момент пересечения траекторией поверхности S .

Алгоритм построения отображения Пуанкаре по методу Эно удобно программировать сразу как численное решение уравнений (6.6). При этом функция $H(x, y, z)$ полагается равной 1 до тех пор, пока выполняются «стандартные» шаги по времени, и переопределяется в соответствии с (6.5), когда возникает необходимость произвести «нестандартный» шаг по S . Поскольку в обоих случаях используется один и тот же разностный метод, достигается желаемое согласование по точности. Хотя объем вычислений несколько увеличивается из-за того, что количество уравнений стало больше на единицу, это компенсируется очевидными достоинствами метода.

Отдельного обсуждения требует важный для нелинейной динамики класс систем, задаваемых неавтономными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами. С физической точки зрения, это системы с периодическим внешним воздействием, все равно, силовым или параметрическим. Для таких систем процедура построения сечения Пуанкаре оказывается совсем простой.

Пусть в отсутствие периодического воздействия система имела двумерное фазовое пространство (x, y) и описывалась уравнениями вида $\dot{x} = f_1(x, y)$, $\dot{y} = f_2(x, y)$. Наличие внешнего периодического воздействия в общем случае выражается в том, что функции f_1 и f_2 надо считать периодически зависящими от времени, т. е. $f_1(x, y, t) = f_1(x, y, t + T)$ и $f_2(x, y, t) = f_2(x, y, t + T)$, и записать

$$\dot{x} = f_1(x, y, t), \quad \dot{y} = f_2(x, y, t). \quad (6.7)$$

Введем новую переменную z , удовлетворяющую уравнению $\dot{z} = 1$. Ясно, что автономная система с трехмерным фазовым пространством

$$\dot{x} = f_1(x, y, z), \quad \dot{y} = f_2(x, y, z), \quad \dot{z} = 1 \quad (6.8)$$

эквивалентна (6.7). Для построения отображения Пуанкаре, в качестве секущей поверхности удобно взять плоскость $z = \text{const}$ (рис. 6.1б). В качестве координат на секущей плоскости можно

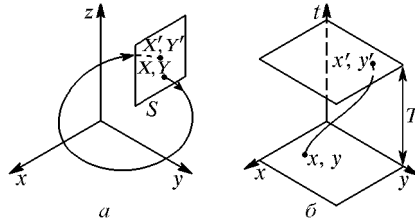


Рис. 6.1. Построение отображения последования Пуанкаре: а) для автономной системы с трехмерным фазовым пространством; б) для системы с периодическим внешним воздействием

использовать естественные динамические переменные x и y . Поскольку по z фазовое пространство имеет периодическую структуру, мы можем не различать точки, отстоящие друг от друга на целое число периодов T . Иными словами, когда изображающая точка пересекает верхнюю плоскость на рис. 6.1б, она мгновенно перескакивает на нижнюю, сохраняя те же значения координат x и y . О вспомогательной переменной z можно забыть, ибо она не отличается от времени t , и говорить о фазовом пространстве (x, y, t) .

Отображение Пуанкаре $x' = F_1(x, y)$, $y' = F_2(x, y)$ имеет простой смысл — оно описывает изменение динамических переменных за один период внешнего воздействия. О нем иногда говорят как о *стробоскопическом отображении*. Представьте себе, что динамика системы большую часть времени протекает в темноте и недоступна для наблюдения. Однако один раз за период внешнего воздействия на короткий миг вспыхивает яркий свет, так что мы можем отслеживать дискретную последовательность состояний, отвечающую моментам вспышек. В отличие от случая автономных систем, численное построение стробоскопического отображения Пуанкаре не вызывает никаких проблем — нужно просто всегда выбирать шаг интегрирования так, чтобы период воздействия содержал целое число шагов.

Все проведенное рассмотрение очевидным образом обобщается для фазового пространства большей размерности, только вместо секущей двумерной площадки надо говорить о сечении N -мерного фазового пространства гиперповерхностью размерности $N - 1$. То обстоятельство, что при использовании отображения Пуанкаре размерность векторов состояния, с которыми приходится работать, уменьшается на единицу, иногда очень полезно. Отображение Пуанкаре вообще оказалось очень продуктивной теоретической конструкцией. Проводя рассуждения в терминах отображения Пуанкаре, можно получать заключения очень общего характера, применимые и к системам, описываемым дифференциальными уравнениями, как автономными, так и неавтономными, и к рекуррентным отображениям — динамическим системам с дискретным временем. Замечательно, что процедура построения отображения Пуанкаре перестала быть уделом теоретиков и часто применяется как один из инструментов при экспериментальном исследовании динамики нелинейных систем.

6.2. Подкова Смейла

Из предыдущего раздела ясно, что рассмотрение двумерных отображений может пролить свет на особенности динамики широкого класса систем, включая системы, описываемые дифференциальными уравнениями с трехмерным фазовым пространством.

В этом случае отображение, о котором идет речь, представляет собой отображение Пуанкаре. Критерием возможности реализации в двумерном отображении сложной динамики и хаоса является присутствие ситуации, известной как *подкова Смейла*.

В том же стиле построения искусственных конструкций, какой мы практиковали в лекции 2, введем в рассмотрение следующее двумерное отображение. Рассмотрим область в форме стадиона, состоящую из трех частей — квадрата S и пристыкованных по бокам двух половинок круга, D_1 и D_2 . Пусть действие отображения состоит в том, что мы эту область растягиваем по горизонтали более, чем вдвое, и еще сильнее сжимаем по вертикали, так что она становится длинной и узкой. Далее, деформируем ее так, что она принимает форму подковы, и накладываем на исходную область, как показано на рис. 6.2. Это и есть отображение подковы Смейла.

Все точки, принадлежащие областям D_1 и D_2 , отображаются внутрь области D_1 и в конце концов притягиваются к устойчивой неподвижной точке, расположенной в этой области. Нетривиаль-

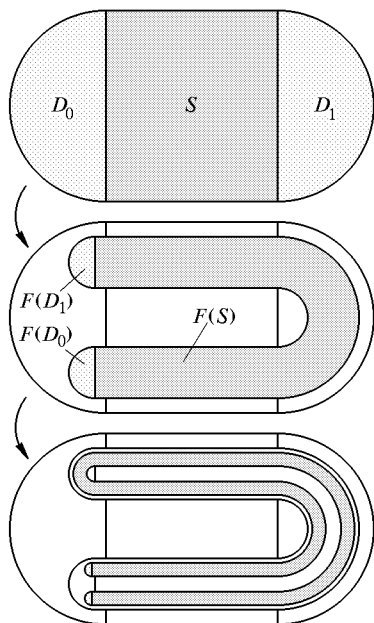


Рис. 6.2. Отображение «подкова Смейла». Преобразование исходной области в форме стадиона за две итерации

ной является динамика точек, принадлежащих области S , она и будет основным предметом нашего интереса. Ясно, что после первой же итерации отображения часть точек, принадлежавших обла-

сти S , покинет ее (они попадут в D_1 или в D_2 и далее притянутся к неподвижной точке; за ними мы следить не будем).

Где располагались в начальный момент точки, которые после первой итерации отображения оказались внутри S ? В пределах двух узких вертикальных полос V_0 и V_1 , которые при горизонтальном растяжении как раз сравниваются по ширине с областью S .

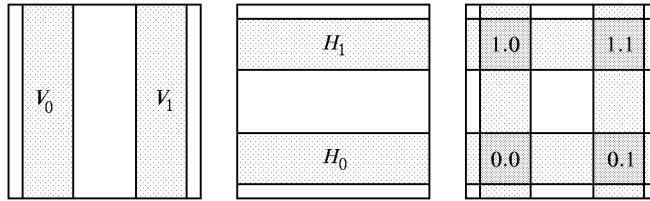


Рис. 6.3. Слева — множество точек, которые останутся в области S на следующем шаге; в середине — множество точек, которые принадлежали области S на предыдущем шаге; справа — пересечение этих множеств определяет множество точек, выживших на протяжении двух шагов итераций

А как расположатся точки, которые на предыдущем временном шаге принадлежали области S и остались в ней? В пределах двух узких горизонтальных полос H_0 и H_1 , отвечающих двум половинкам подковы. На пересечении этих полос находится множество точек, которые пребывают в S на протяжении двух итераций.

Рассмотрим теперь отображение подковы за два шага итераций (см. нижнюю картинку на рис. 6.2). Как можно сообразить, имеется четыре вертикальных полосы, две из которых расположены в полосе V_0 (их обозначим V_{00} и V_{01}) и две в полосе V_1 (их обозначим V_{10} и V_{11}). Точки, принадлежащие этим полосам, останутся в области S в течение двух итераций. Далее, имеется четыре гори-

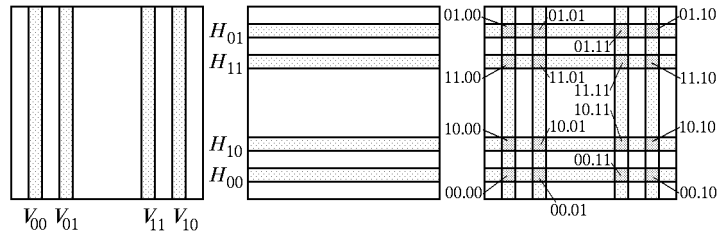


Рис. 6.4. Слева — множество точек, которые останутся в области S на следующих двух шагах; в середине — множество точек, которые принадлежали области S на предыдущих двух шагах; справа — пересечение этих множеств отвечает множеству точек, выживших на протяжении четырех шагов итераций

зонтальные полосы, две из которых расположены в полосе H_0 (это H_{00} и H_{10}) и две в полосе H_1 (это H_{01} и H_{11}). Это области, в которые попадают точки, не покидающие за две итерации область S .

Шестнадцать квадратиков, образованных пересечением всех этих полосок, есть геометрическое место точек, остающихся в области S в течение четырех итераций. Описанное построение можно продолжать и дальше. При увеличении на единицу числа итераций, внутри каждой вертикальной полосы выделяется две более узких, которые оставляются для дальнейшего рассмотрения. То же самое происходит с горизонтальными полосами. Каждая система полос в пределе бесконечного числа шагов построения порождает канторово множество. Пересечение двух таких множеств — «горизонтального» и «вертикального» образует «канторову решетку» — множество Ω , элементы которого суть точки, остающиеся в области S всегда, на протяжении сколь угодно большого числа итераций отображения подковы. Это инвариантное множество нашей динамической системы — отображения подковы Смейла.

Из проведенного рассмотрения ясно, что множество Ω не притягивающее (репеллер) и что оно обладает сложной и тонкой структурой. Исчерпывающее описание этой структуры в рамках символической динамики достигается введением соответствующей нумерации горизонтальных и вертикальных полос, фигурировавших в построении.

На рис. 6.5 показано, как кодируются элементы множества Ω — «канторовой решетки». Изображенная структура отвечает третьему шагу построения множества: точки, принадлежащие $2^6 = 64$ квадратикам, не покидают область S на протяжении шести

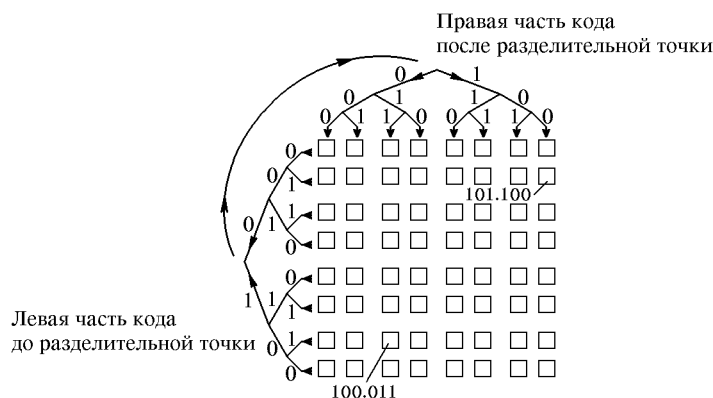


Рис. 6.5. Правило кодировки элементов множества Ω для третьего шага построения «канторовой решетки». Для двух элементов коды указаны явно. Дальнейшие пояснения см. в тексте

итераций. Каждому квадратику приписывается бинарный код, содержащий три цифры до и три цифры после разделительной точки. Левая половина кода отвечает последовательности нулей и единиц, которая возникает, если двигаться, как показано стрелками, по ве-

твам изображенного слева от области S бинарного дерева, начиная от ветви, расположенной напротив интересующего нас элемента. Правая половина кода получается при движении по ветвям бинарного дерева, изображенного сверху от области S в направлении, указанном стрелками. Обратите внимание на способ нумерации ветвей деревьев, — начиная со второго уровня посредством повторяющегося паттерна «0110».

Можно рассматривать и такие элементы, коды которых содержат разное число цифр до и после разделительной точки (рис. 6.6). Введенная кодировка элементов символами построена так, что од-

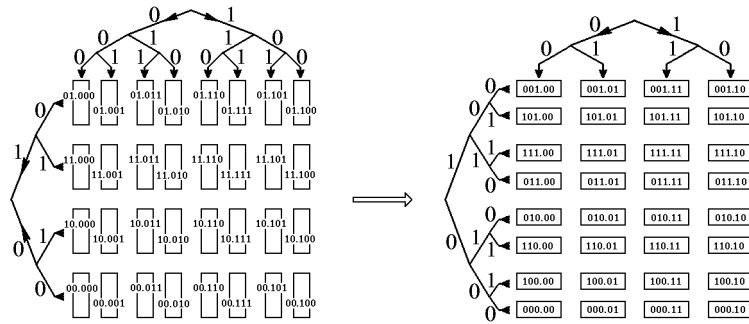


Рис. 6.6. Диаграмма, иллюстрирующая один шаг отображения подковы на языке символической динамики

ному шагу итераций отображения подковы отвечает сдвиг разделительной точки на одну позицию вправо.

Если говорить об инвариантном множестве Ω , то его элементы кодируются бесконечными в обе стороны от разделительной точки двоичными последовательностями. Периодическим последовательностям отвечают циклы отображения подковы. Ясно, что они образуют бесконечное счетное множество. Множество всевозможных непериодических последовательностей имеет мощность континуума.

Тот факт, что на множестве Ω построена символическая динамика типа сдвига Бернулли, говорит о присутствии хаоса. Действительно, задав элемент этого множества посредством случайной последовательности, полученной, скажем, подбрасыванием монеты, мы обнаружим, что при итерациях отображения подковы будет воспроизведена исходная случайная последовательность.

Следует подчеркнуть, что все выводы о сложной динамике отображения подковы опираются по существу только на топологические соображения. Конфигурация областей не обязательно должна выглядеть точно так же, как на рис. 6.2, лишь бы сохранялось топологическое соответствие. Например, на рис. 6.7 демонстрируется возможность реализации подковы Смейла в отображении Эно и в отображении Икеды.

Присутствие подковы позволяет сделать вывод о сложной природе динамики рассматриваемой системы или класса систем, поскольку оно влечет существование хаотических траекторий и бес-

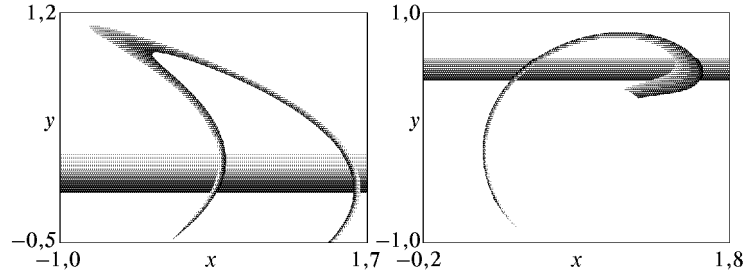


Рис. 6.7. Ситуация подковы при двукратной итерации в отображении Эно $x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - by_n$, $y_{n+1} = x_n$, $a = 1,4$, $b = -0,7$ (а) и в отображении Икеды $z_{n+1} = A + Bz_n \exp(i|z_n|^2)$, $z = x + iy$, $A = 1,4$, $B = 0,7$ (б). Показана исходная прямоугольная область и результат ее преобразования при выполнении отображения

конечного множества периодических орбит. Это всегда существенный результат, хотя, к сожалению, не исчерпывающий проблему: хаотическое множество, о существовании которого делается заключение, не притягивающее, так что хаос, как установившийся режим динамики, может и не наблюдаться. Обратимся к обсуждению одной конкретной ситуации, когда наличие подковы Смейла удастся обосновать аналитически.

6.3. Теорема Шильникова о петле сепаратрисы седлофокуса

Рассмотрим автономную систему с трехмерным фазовым пространством, заданную дифференциальными уравнениями, и предположим, что она имеет неподвижную точку — седлофокус, в которую для удобства поместим начало координат (рис. 6.8). Раз речь идет о седлофокусе, матрица линеаризации имеет одно действительное собственное число λ и два комплексно-сопряженных, которые мы обозначим $\rho \pm i\omega$. Систему координат можно выбрать так, чтобы уравнения приняли следующей вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \rho x - \omega y + P(x, y, z), \\ \dot{y} &= \rho y + \omega x + Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= \lambda z + R(x, y, z),\end{aligned}\tag{6.9}$$

где P , Q , R — некоторые функции, разложение которых в ряд Тейлора по степеням x , y , z содержит члены, начиная со второй степени.

Пусть $\lambda > 0$ и $\rho < 0$. Положительное действительное собственное число λ ответственно за неустойчивость, и с ним ассоциируется выходящая из неподвижной точки вдоль оси z фазовая траектория — сепаратриса. Предположим, что функции P, Q, R подобраны таким образом, что сепаратриса, побывав в далеких от неподвижной точки областях фазового пространства, возвращается обратно в неподвижную точку. Когда она вернется к неподвижной точке, динамику можно описывать в линейном приближении, причем вклад вносят затухающие решения, затухающие осцилляции x и y , связанные с двумя комплексно-сопряженными собственными числами. Траектория подходит к седлофокусу, описывая в фазовом пространстве скручивающуюся спираль. Такую особую траекторию называют *петлей сепаратрисы седлофокуса*. Шильников показал, что если $\lambda/|\rho| > 1$ (скорость ухода от неподвижной точки по неустойчивому направлению превалирует над скоростью приближения по устойчивым направлениям), то наличие петли седлофокуса влечет существование подковы, а следовательно, сложной динамики и хаоса (Шильников, 1965, 1970; Arneodo et al., 1982).

Чтобы это увидеть, обратимся к следующему построению (рис. 6.9). Окружим неподвижную точку цилиндром высоты $2h$ и радиуса r с образующей параллельной оси z . Размеры цилиндра считаем малыми, так что внутри него для анализа потока траекторий можно пользоваться линейным приближением. Точку, в которой уходящая сепаратриса протыкает верхнее основание цилиндра, обозначим p , а точку, в которой она при возвращении пересекает боковую поверхность цилиндра, q . Выделим на боковой поверхности цилиндра узкую по вертикали прямоугольную область D . Положение точки в этой области будем характеризовать двумя переменными ξ и θ , $0 < \xi \leq \varepsilon$, $|\theta| \leq \theta_{\max}$, где $\xi = z$, а θ есть угол, отсчитываемый от точки q .

Движение по траектории, выпущенной из точки (z, θ) , внутри цилиндра будет определяться следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= r \exp(\rho t) \cos(\omega t + \theta), \\ y &= r \exp(\rho t) \sin(\omega t + \theta), \\ z &= \xi \exp(\lambda t). \end{aligned} \quad (6.10)$$

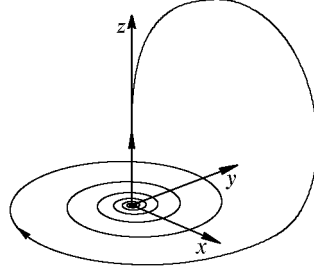


Рис. 6.8. Петля сепаратрисы седлофокуса — особая фазовая траектория, наличие которой предполагается условиями теоремы Шильникова

Полагая $z = h$, находим, что момент выхода траектории из цилиндра $t = \lambda^{-1} \log(h/\xi)$. Координаты точки в момент выхода получаем тогда из первых двух уравнений:

$$\begin{aligned} x &= r \left(\frac{\xi}{h} \right)^{-\rho/\lambda} \cos \left[\theta - \lambda^{-1} \log \left(\frac{\xi}{h} \right) \right], \\ y &= r \left(\frac{\xi}{h} \right)^{-\rho/\lambda} \sin \left[\theta - \lambda^{-1} \log \left(\frac{\xi}{h} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Будем варьировать ξ и θ в пределах области D . Тогда полученные в соответствии с формулой (6.11) точки x, y на верхней поверхности цилиндра расположатся в области D_1 , имеющей форму скручивающейся к точке p спирали (рис. 6.9). Заметим, что эта

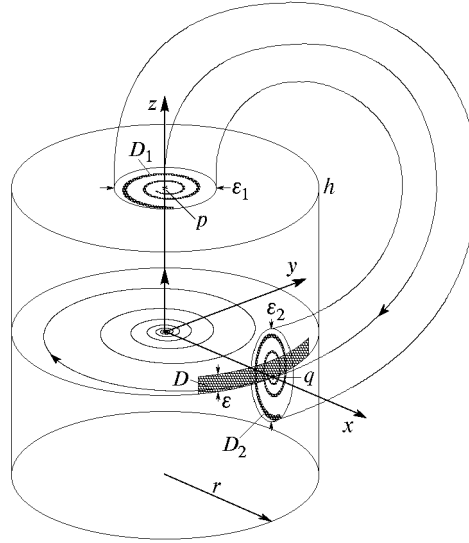


Рис. 6.9. Построение, иллюстрирующее доказательство теоремы Шильникова о петле сепаратрисы седлофокуса (см. текст)

область располагается внутри круга диаметром $\varepsilon_1 = 2r(\varepsilon/h)^{|\rho|/\lambda}$. Далее, потоком траекторий вдоль петли сепаратрисы область D_1 отобразится в некоторую область D_2 на боковой поверхности цилиндра. При этом ее центральная точка p переходит в точку q , так что новая область некоторым образом накладывается на исходную область D . Отображение D_1 в D_2 естественно аппроксимировать линейными уравнениями $\xi' = Ax + By$, $\theta' = Cx + Dy$. Последо-

вательное выполнение преобразований приводит к результату:

$$\begin{aligned}\xi' &= r \left(\frac{\xi}{h} \right)^{-\rho/\lambda} \left\{ A \cos \left[\theta - \lambda^{-1} \log \left(\frac{\xi}{h} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + B \sin \left[\theta - \lambda^{-1} \log \left(\frac{\xi}{h} \right) \right] \right\}, \\ \theta' &= r \left(\frac{\xi}{h} \right)^{-\rho/\lambda} \left\{ C \cos \left[\theta - \lambda^{-1} \log \left(\frac{\xi}{h} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + D \sin \left[\theta - \lambda^{-1} \log \left(\frac{\xi}{h} \right) \right] \right\},\end{aligned}\quad (6.12)$$

о котором иногда говорят как об *отображении Шильникова*.

Для дальнейшего, однако, существенно только лишь предположение о том, что отображение D_1 в D_2 не особое. Диаметр области D_2 может измениться по сравнению с D_1 на некоторый фактор k и составит $\varepsilon_2 = 2kr(\varepsilon/h)^{|\rho|/\lambda}$.

Спросим теперь, можем ли мы, уменьшая ε , добиться такой ситуации, чтобы величина ε_2 была существенно больше ε . Если да, то, как видно из рис. 6.10, будет присутствовать подкова.

Положим $\varepsilon_2 = N\varepsilon$, $N \gg 1$, тогда должно быть $\varepsilon N h^{|\rho|/\lambda} / 2kr = (\varepsilon/h)^{|\rho|/\lambda}$. Если показатель степени $|\rho|/\lambda$ больше единицы, то

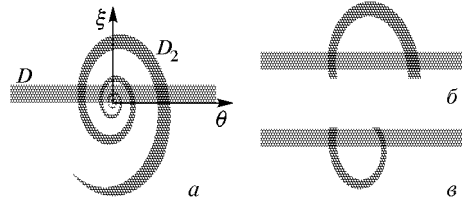


Рис. 6.10. Отображение Шильникова (а) и пояснение наличия двух из бесконечного счетного множества подков (б, в)

график функции $(\varepsilon/h)^{|\rho|/\lambda}$ с уменьшением ε быстро приближается к оси абсцисс, так что в этой области нет пересечения с прямой $\varepsilon_2 = N\varepsilon$ помимо начала координат (рис. 6.11). Напротив, при $|\rho|/\lambda < 1$ график при малых ε круто поднимается вверх и заведомо пересекает прямую $\varepsilon_2 = N\varepsilon$. Следовательно, выбором достаточно малого ε можно обеспечить такое взаимное расположение областей D_2 и D , как показано на рис. 6.10, так что становится очевидным присутствие подковы. Более того, при дальнейшем уменьшении ε оказывается, что появляются все новые и новые подковы (см. рис. 6.10б, в). Переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$, мы обнаруживаем присутствие бесконечного счетного множества подков. Если ввести

возмущение исходной системы уравнений, заставляющее сепаратрису при возвращении «промахнуться» мимо неподвижной точки, и если это возмущение не слишком велико, то часть подков (конечное их число) сохранится и при наличии возмущения.

Альтернативная версия теоремы Шильникова получается, если считать, что в уравнениях (6.9) $\lambda < 0$, $\rho > 0$, и существует петля сепаратрисы, которая уходит от неподвижной точки, раскручиваясь по спирали касательной к плоскости (x, y) , а затем возвращается вдоль устойчивого направления — координатной оси z .

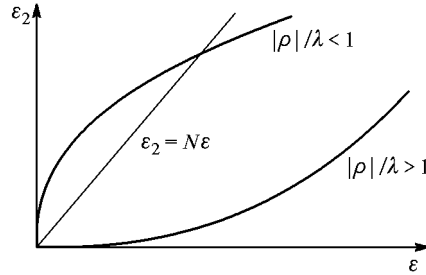


Рис. 6.11. К пояснению выбора параметра ε и его влияния на соотношение размеров областей D и D_2

В этом случае, выполняя в уравнениях обращение времени, т. е. подстановку $t \rightarrow -t$, сводим задачу к предыдущей. В результате такой замены изменяются знаки при членах, содержащих параметры ρ и λ . Поэтому условием присутствия подковы и сложной динамики служит неравенство $|\lambda|/\rho > 1$.

Лекция 7

ГОМОКЛИНИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА

Познакомимся теперь с еще одним замечательным объектом нелинейной динамики — *гомоклинической структурой*, которая может существовать в фазовом пространстве как диссипативных, так и консервативных систем. Гомоклиническая структура тесно связана с подковой Смейла, фактически из наличия одной можно сделать вывод о присутствии другой. К представлению о гомоклинической структуре пришел в свое время еще Анри Пуанкаре, хотя наглядное геометрическое изображение появилось значительно позднее (см., например, книгу Ю.И. Неймарка «Метод точечных отображений в теории колебаний»).

7.1. Устойчивое и неустойчивое многообразие неподвижной точки и их пересечение

Пусть мы имеем динамическую систему, заданную некоторым отображением, и пусть у этого отображения есть неподвижная точка гиперболического типа. Множество точек, стартуя из которых траектория в пределе приближается к неподвижной точке, есть инвариантное множество рассматриваемой динамической системы, которое называется *устойчивым многообразием* неподвижной точки. Другое ассоциирующееся с ней инвариантное множество — это *неустойчивое многообразие*. Если мы будем запускать траектории из окрестности неподвижной точки и устремим размер этой окрестности к нулю, а время наблюдения к бесконечности, то посещаемое траекториями множество точек в фазовом пространстве и будет неустойчивым многообразием. Альтернативное определение таково: это множество точек, при старте из которых динамика в обратном времени приводит в пределе в неподвижную точку.

Если рассматриваемое отображение двумерное, то гиперболическая неподвижная точка обязана быть седлом, что соответствует наличию у матрицы линеаризованного отображения двух вещественных собственных чисел, одно из которых по модулю больше, а другое меньше единицы. Устойчивое и неустойчивое многообразия представляют собой некоторые кривые, и их называют также устойчивой и неустойчивой сепаратрисами. Старшее собственное число отвечает собственному вектору, направленному в точке седла

A по касательной к неустойчивой сепаратрисе, а второе — вектору, касательному к устойчивой сепаратрисе.

Может оказаться, что устойчивая и неустойчивая сепаратрисы пересекаются в некоторой точке Γ_0 , отличной от исходного седла A (рис. 7.1). Такая точка называется *гомоклинической точкой*. Как мы сейчас увидим, ее наличие сразу делает картину динамики сложной и нетривиальной.

Поскольку точка Γ_0 принадлежит устойчивому многообразию, то стартующая из нее траектория с течением времени приближается к седлу A . Точка-образ Γ_1 , полученная из Γ_0 действием нашего отображения, относится к той же приближающейся к седлу

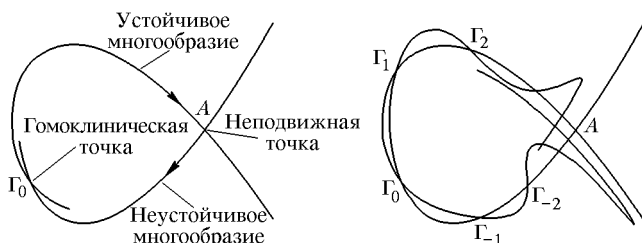


Рис. 7.1. Наличие пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий седловой неподвижной точки двумерного отображения (слева) влечет существование в фазовом пространстве гомоклинической структуры (справа)

траектории и, по определению, принадлежит устойчивому многообразию. При рассмотрении динамики в обратном времени точка Γ_1 за один шаг переходит в Γ_0 , а при последующих шагах приближается к седлу, ибо Γ_0 есть точка неустойчивого многообразия. Следовательно, ему же принадлежит и точка Γ_1 . Последняя, таким образом, обязана быть точкой пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий, т. е. гомоклинической точкой, как и Γ_0 . Продолжая рассуждать аналогично, нетрудно заключить, что устойчивая и неустойчивая сепаратрисы обязаны иметь бесконечно много точек пересечения! Более того, они не исчерпываются точками одной гомоклинической траектории, проходящей через точку Γ_0 . Изогнутые и петляющие кривые устойчивой и неустойчивой сепаратрис порождают сложно устроенную структуру, подобную сети, грубое представление о которой дает рис. 7.1.

Доказано, что в области существования гомоклинической структуры присутствует множество траекторий, допускающих кодирование бесконечными двусторонними последовательностями двух символов. Следовательно, имеется бесконечное счетное множество периодических орбит и континуум непериодических траекторий. Это можно обосновать, установив связь гомоклинической структуры с рассмотренной в предыдущем разделе подковой Смейла.

7.2. Связь гомоклинической структуры и подковы Смейла

Рассмотрим схематически показанную на рис. 7.2 конфигурацию устойчивого и неустойчивого многообразий седла A , пересекающихся в гомоклинической точке Γ . Выделим небольшую область

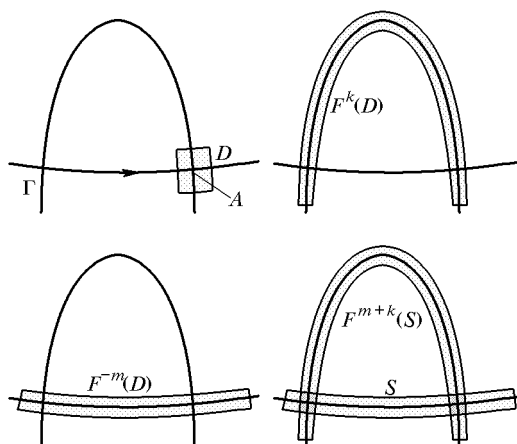


Рис. 7.2. К пояснению отображения подковы, связанного с наличием гомоклинической структуры

D в форме четырехугольника, включающего точку седла, со сторонами, направленными вдоль устойчивого и неустойчивого многообразия. Что будет происходить с точками этой области при итерациях отображения? Ясно, что будет иметь место сжатие вдоль устойчивого многообразия и растяжение вдоль неустойчивого, причем точка седла остается на месте. После некоторого числа итераций k область $F^k(D)$ будет выглядеть как длинная узкая полоса, вытянутая вдоль неустойчивого многообразия. Если количество итераций достаточно велико, то область $F^k(D)$ обязательно будет включать гомоклиническую точку Γ . Спросим теперь, как выглядит область, которая за некоторое число итераций m превратится в область D . Она вытянута вдоль устойчивого многообразия и сжата вдоль неустойчивого, образуя полосу, обозначенную как $F^{-m}(D)$. В отображении, описывающем эволюцию за $m+k$ итераций, имеет место ситуация подковы Смейла. Это хорошо видно на рисунке — образом полосы $S = F^{-m}(D)$ служит полоса $F^k(D) = F^{m+k}(S)$, изогнутая в виде подковы и расположенная топологически точно так, как это предполагалось в предыдущей лекции.

Можно обосновать и обратное утверждение: если присутствует ситуация подковы Смейла, то имеется и гомоклиническая структура. Вернемся к определению отображения подковы. Заметим

что в области S имеется седловая неподвижная точка, неустойчивый собственный вектор направлен по горизонтали, а устойчивый — по вертикали. На рис. 7.3 показано, как выглядят устойчи-

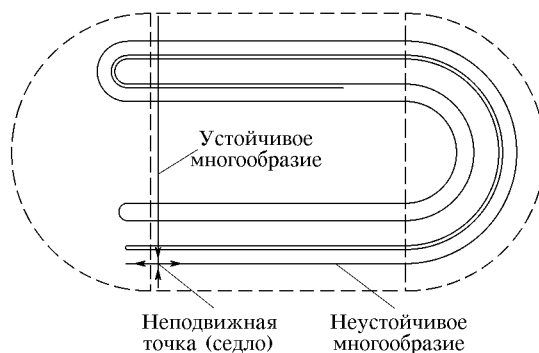


Рис. 7.3. Устойчивое и неустойчивое многообразия седловой неподвижной точки отображения подковы Смейла

чивое и неустойчивое многообразия этой неподвижной точки. Неустойчивое многообразие представляет собой сложную петляющую кривую, имеющую бесконечно много точек пересечения с устойчивым многообразием.

В сечении Пуанкаре некоторой динамической системы или на фазовой плоскости двумерного отображения при наличии двух седловых неподвижных точек может встретиться ситуация, когда устойчивое многообразие одной точки пересекается с неустойчивым многообразием другой. Такая точка пересечения многообразий называется *гетероклинической*. Простые рассуждения, подобные проведенным выше при рассмотрении



Рис. 7.4. Гетероклиническая структура, образованная наличием пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий двух разных седловых точек

гомоклинической структуры, показывают, что присутствие одной гетероклинической точки влечет наличие бесконечного множества таких точек. При этом в фазовом пространстве имеет место сложное образование, «сеть» из пересекающихся многообразий обеих точек. Оно называется

гетероклинической структурой (рис. 7.4). Присутствие гетероклинической, как и гомоклинической структуры позволяет сделать заключение о наличии в системе хаотической динамики в смысле существования континуума траекторий со случайным поведением.

7.3. Критерий Мельникова

Рассмотрим задачу, для которой известен простой и изящный критерий присутствия гомоклинической структуры — критерий Мельникова (Мельников, 1963). Пусть имеем нелинейный осциллятор, находящийся под воздействием внешней периодической силы, скажем, такого вида:

$$\ddot{x} + x - x^2 = -\gamma \dot{x} + b \cos \Omega t. \quad (7.1)$$

В отсутствие диссипации и внешнего воздействия ($\gamma = 0$, $b = 0$) портрет на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$ выглядит, как показано на рис. 7.5а: имеется неподвижная точка типа центр при $x = 0$ и седло при $x = 1$. Вдоль неустойчивого направления из точки седла выходит сепаратриса, образует петлю и возвращается в седло по

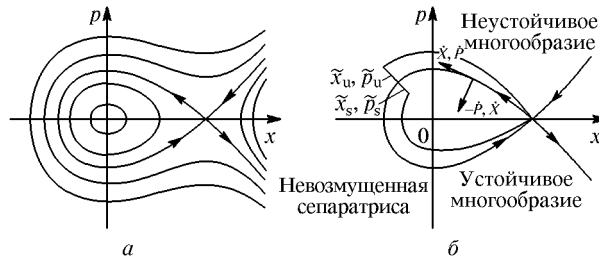


Рис. 7.5. Фазовый портрет невозмущенной системы — осциллятора с квадратичной нелинейностью (а) и чертеж, поясняющий схему анализа, лежащего в основе критерия Мельникова (б)

устойчивому направлению. При наличии периодического воздействия мы можем использовать процедуру построения сечения Пуанкаре и рассмотреть стробоскопическое отображение плоскости $(x, \dot{x})$ на себя за период внешнего воздействия. Если амплитуда нулевая, то изображенная на рис. 7.5а картина выглядит точно так же, но имеет другой смысл, поскольку индивидуальные траектории теперь представлены дискретными наборами точек, прыгающих вдоль фазовых кривых. При включении внешнего воздействия и диссипации форма сепаратрис изменяется, они более не переходят плавно друг в друга, как это было в невозмущенной системе. При определенных условиях они могут претерпеть пересечение, что ведет к образованию гомоклинической структуры. Эти условия в приближении малой диссипации и малой амплитуды воздействия и устанавливает критерий Мельникова.

Рассмотрим задачу в несколько более общей постановке. Пусть динамика невозмущенной системы описывается уравнениями Гамильтона

$$\dot{x} = H_p, \quad \dot{p} = -H_x, \quad (7.2)$$

где $H_p = \partial H / \partial p$, $H_x = \partial H / \partial x$. На функцию Гамильтона $H(p, x)$ накладывается требование, чтобы система имела состояние равновесия типа седла, причем неустойчивая сепаратриса, совершив петлю, возвращалась бы в то же седло. Внешнее периодическое воздействие, диссипацию, прочие поправки будем рассматривать как малое возмущение и запишем уравнения в виде

$$\dot{x} = H_p + \varepsilon f(x, p, t), \quad \dot{p} = -H_x + \varepsilon g(x, p, t), \quad (7.3)$$

где ε — малый параметр, а f и g являются периодическими функциями времени t . Подчеркнем, что возмущение (f, g) , вообще говоря, может выводить систему из класса гамильтоновых.

Пусть $x = X(t)$, $p = P(t)$ есть решение невозмущенных уравнений (7.2), отвечающее движению по сепаратрисе из седла в седло. Будем искать решение возмущенной задачи в виде

$$x(t) = X(t) + \varepsilon \tilde{x}(t), \quad p(t) = P(t) + \varepsilon \tilde{p}(t). \quad (7.4)$$

Подстановка в (7.3) в первом порядке по ε дает

$$\dot{\tilde{x}} = f(X, P, t), \quad \dot{\tilde{p}} = g(X, P, t), \quad (7.5)$$

На невозмущенной сепаратрисе вектор скорости движения изображающей точки на фазовой плоскости есть $(\dot{X}, \dot{P})$, это вектор, касательный к сепаратрисе. Ортогональным к нему будет вектор $(-\dot{P}, \dot{X})$. Скалярное произведение этого вектора на вектор возмущения $(\tilde{x}, \tilde{p})$ можно рассматривать как меру смещения изображающей точки по нормали от невозмущенной сепаратрисы («Mel'nikov's distance» — «расстояние по Мельникову»). Обозначая его символом D , имеем

$$D = -\dot{P}\tilde{x} + \dot{X}\tilde{p} = H_X(X, P)\tilde{x} + H_P(X, P)\tilde{p}. \quad (7.6)$$

Вычислим производную по времени:

$$\dot{D} = H_{XX}\dot{X}\tilde{x} + H_{XP}\dot{P}\tilde{x} + H_X\dot{\tilde{x}} + H_{PX}\dot{X}\tilde{p} + H_{PP}\dot{P}\tilde{p} + H_P\dot{\tilde{p}}. \quad (7.7)$$

Подставляя сюда выражения для производных в соответствии с (7.2) и (7.5), обнаруживаем, что большинство членов сокращается, и получаем:

$$\dot{D} = H_X(X, P)f(X, P, T) + H_P(X, P)g(X, P, t). \quad (7.8)$$

Мы можем рассмотреть два решения уравнений (7.5), отвечающих устойчивому и неустойчивому многообразиям возмущенной системы, которые будем обозначать, соответственно, $(\tilde{x}_s, \tilde{p}_s)$

и $(\tilde{x}_u, \tilde{p}_u)$. Расстояния по Мельникову от невозмущенной сепаратрисы для этих двух решений, D_s и D_u , будут подчиняться одному и тому же уравнению (7.8), но разным условиям на бесконечности. Устойчивое многообразие при $t \rightarrow \infty$ и неустойчивое при $t \rightarrow -\infty$ должны стремиться к одной и той же неподвижной точке, так что $\tilde{x}_u(-\infty) = \tilde{x}_s(\infty)$, $\tilde{p}_u(-\infty) = \tilde{p}_s(\infty)$ и, соответственно, $D_u(-\infty) = D_s(\infty)$. Интегрируя (7.8), для произвольно взятого момента времени $t = \tau$ можно записать:

$$\begin{aligned} D_u(\tau) &= D_u(-\infty) + \\ &+ \int_{-\infty}^{\tau} (H_X(X, P)f(X, P, t) + H_P(X, P)g(X, P, t)) dt, \\ D_s(\tau) &= D_s(-\infty) - \\ &- \int_{\tau}^{\infty} (H_X(X, P)f(X, P, t) + H_P(X, P)g(X, P, t)) dt, \end{aligned} \quad (7.9)$$

Вычитая друг из друга эти два равенства, получаем расстояние по Мельникову между устойчивой и неустойчивой возмущенными сепаратрисами:

$$\begin{aligned} \Delta &= D_u(\tau) - D_s(\tau) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (H_X(X, P)f(X, P, t) + H_P(X, P)g(X, P, t)) dt. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Напомним, что $X(t)$, $P(t)$ есть решение невозмущенных уравнений (7.2), отвечающее движению по петле сепаратрисы из седла в седло. Сдвигом начала отсчета времени на произвольную константу θ можно получить однопараметрическое семейство таких решений. При подстановке этих решений вида $X(t + \theta)$, $P(t + \theta)$ в формулу (7.10) получаем функцию $\Delta(\theta)$. Если функция $\Delta(\theta)$ знакопеременная, то это свидетельствует о наличии трансверсального пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий неподвижной точки в возмущенной системе и служит признаком присутствия гомоклинической структуры, а также связанной с ней сложной динамики (бесконечное счетное множество периодических орбит, континуум непериодических траекторий). В этом и состоит критерий Мельникова.

Продemonстрируем, как работает этот критерий применительно к нелинейному осциллятору (7.1), уравнение которого можно переписать в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -x + x^2 - \gamma \dot{x} + \beta \cos \Omega t. \quad (7.11)$$

Это соответствует форме (7.3), где следует положить

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}, \quad f(x, p, t) = 0, \quad g(x, p, t) = -\gamma p + \beta \cos \Omega t. \quad (7.12)$$

Решение невозмущенной задачи, отвечающее движению по сепаратрисе, оказывается возможным получить в явном виде через элементарные функции. Выпишем интеграл энергии

$$\frac{\dot{X}^2}{2} + \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{3} = C. \quad (7.13)$$

и выберем значение константы $C = 1/6$, так, чтобы равенство (7.13) удовлетворялось в точке седла $\dot{X} = 0$, $X = 1$. Тогда из (7.13) находим:

$$\dot{X} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{2X^3 - 3X^2 + 1} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (X - 1) \sqrt{2X + 1}. \quad (7.14)$$

Используя стандартный метод разделения переменных, получаем

$$t = \pm \int \frac{\sqrt{3} dX}{(X - 1) \sqrt{2X + 1}} = \pm \ln \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2X + 1}}{\sqrt{3} - \sqrt{2X + 1}} - \theta, \quad (7.15)$$

где θ — константа интегрирования. Выражая отсюда X , имеем

$$X = \frac{\exp(2(t + \theta)) - 4 \exp(t + \theta) + 1}{\exp(2(t + \theta)) + 2 \exp(t + \theta) + 1} = \frac{\operatorname{ch}(t + \theta) - 2}{\operatorname{ch}(t + \theta) + 1} \quad (7.16)$$

и, соответственно,

$$P = \dot{X} = \frac{3 \operatorname{sh}(t + \theta)}{(\operatorname{ch}(t + \theta) + 1)^2}. \quad (7.17)$$

С учетом (7.16) и (7.17), выражение для мельниковского расстояния между возмущенными сепаратрисами (7.10) принимает вид

$$\Delta(\theta) = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} P^2 dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} P \cos \Omega t dt \quad (7.18)$$

Фигурирующие здесь интегралы вычисляются аналитически:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{9 \operatorname{sh}^2 t}{(\operatorname{ch} t + 1)^4} dt = \frac{6}{5}, \quad (7.19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P \cos \Omega t dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3 \operatorname{sh}(t + \theta)}{(\operatorname{ch}(t + \theta) + 1)^2} \cos \Omega t dt = \frac{6\pi\Omega^2}{\operatorname{sh} \pi\Omega} \sin \Omega\theta. \quad (7.20)$$

Таким образом,

$$\Delta(\theta) = -\frac{6}{5}\gamma + \beta \frac{6\pi\Omega^2}{\operatorname{sh} \pi\Omega} \sin \Omega\theta. \quad (7.21)$$

Эта функция становится знакопеременной, если коэффициент перед синусом больше $(6/5)\gamma$, т. е. при

$$\frac{\beta}{\gamma} > \frac{\pi \operatorname{sh} \pi\Omega}{5 \pi^2 \Omega^2}. \quad (7.22)$$

Согласно критерию Мельникова, при выполнении этого условия возникает гомоклиническая структура и сложная динамика вблизи сепаратрисы. Это условие выглядит вполне разумно с физической точки зрения. Амплитуда внешнего воздействия, обеспечивающая переход к сложной динамике (параметр β), должна быть тем

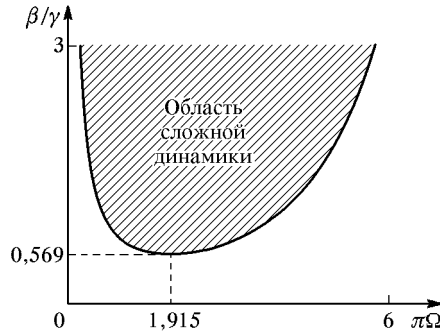


Рис. 7.6. Область существования гомоклинической структуры для осциллятора с квадратичной нелинейностью на плоскости частота воздействия–отношение амплитуды воздействия к параметру диссипации

больше, чем больше диссипация (параметр γ). Зависимость правой части (7.22) от Ω имеет минимум, т. е. существует оптимальная, «резонансная» частота, при которой амплитуда воздействия, обеспечивающая переход к сложной динамике, минимальна. Найдя численно минимум функции в правой части (7.22), заключаем, что это соответствует $\pi\Omega = 1,9150$, $\beta/\gamma = 0,5688$. На рис. 7.6 показано расположение области сложной динамики на плоскости параметров $(\pi\Omega, \beta/\gamma)$.

Аналогичным образом можно рассмотреть другой пример — осциллятор с кубической нелинейностью

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = x - x^3 - \gamma\dot{x} + \beta \cos \Omega t. \quad (7.23)$$

Он имеет то преимущество, что в присутствии внешнего воздействия динамика остается финитной, тогда как в первой модели возможен уход траекторий на бесконечность.

Невозмущенной системе отвечает гамильтониан $H(x, p) = p^2/2 + x^2/2 - x^4/4$ и фазовый портрет, показанный на рис. 7.7.

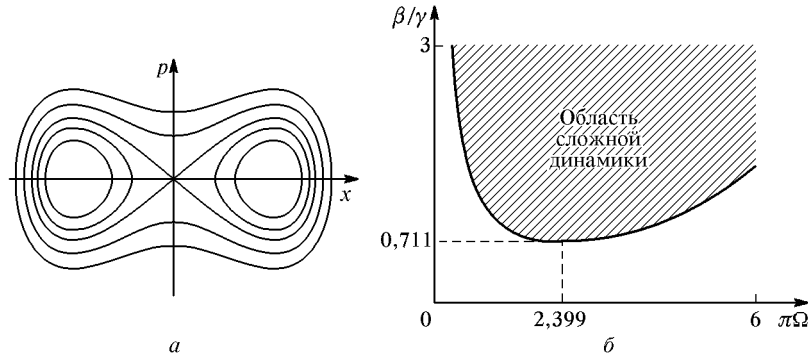


Рис. 7.7. Фазовый портрет невозмущенной системы — осциллятора с кубической нелинейностью (а) и область существования гомоклинической структуры на плоскости частота воздействия—отношение амплитуды воздействия к параметру диссипации (б)

Седловая точка расположена в начале координат, движение по петле сепаратрисы описывается выражениями

$$X = \sqrt{2} \operatorname{ch}^{-1}(t + \theta), \quad P = -\sqrt{2} \operatorname{sh}(t + \theta) \operatorname{ch}^{-2}(t + \theta), \quad (7.24)$$

которые получаются из решения уравнений (7.2). Вычисление интегралов в выражении для мельниковского расстояния (7.10) дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} P^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^4 t} dt = \frac{4}{3}, \quad (7.25)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P \cos \Omega t dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \operatorname{sh}(t + \theta)}{\operatorname{ch}^2(t + \theta)} \cos \Omega t dt = \frac{\pi \Omega}{\operatorname{ch}(\pi \Omega / 2)} \sin \Omega \theta. \quad (7.26)$$

Таким образом, $\Delta(\theta) = -(4/3)\gamma - \beta[\sqrt{2}\pi\Omega / \operatorname{ch}(\pi\Omega/2)] \sin \Omega\theta$. Условие того, что эта функция знакопеременная, выглядит так: $\beta/\gamma > (2\sqrt{2}/3)[\operatorname{ch}(\pi\Omega/2)/\pi\Omega]$ и иллюстрируется графически на рис. 7.7. Минимальное значение β/γ , обеспечивающее выполнение критерия Мельникова, составляет 0,7113 и достигается при выборе частоты воздействия $\pi\Omega = 2,3994$.

Лекция 8

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ИНВАРИАНТНАЯ МЕРА, ЭРГОДИЧНОСТЬ И ПЕРЕМЕШИВАНИЕ

Для изучения хаоса представляется естественным привлечь подход, подразумевающий введение и анализ усредненных характеристик динамического поведения. Вместо того, чтобы работать с одной отдельно взятой системой, будем рассматривать ансамбль, состоящий из большого количества идентичных копий этой си-

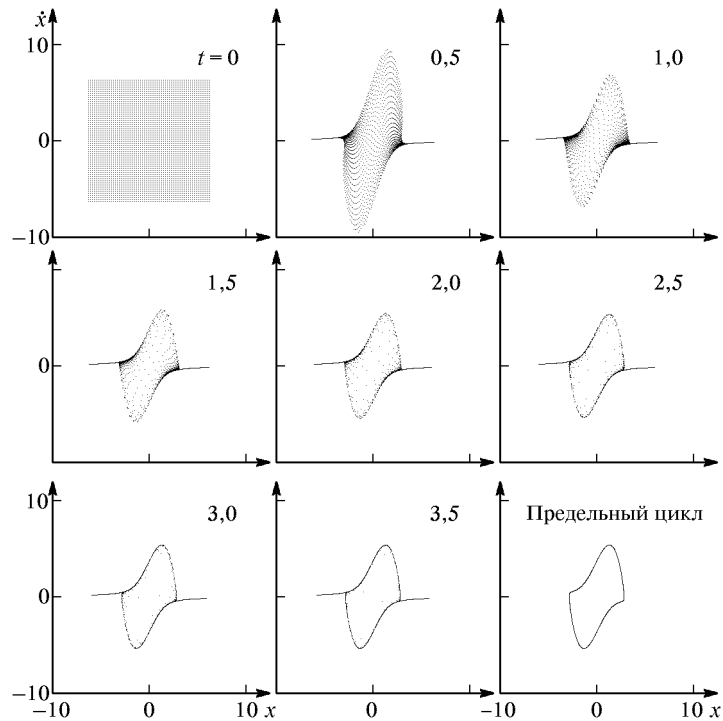


Рис. 8.1. Эволюция набора изображающих точек, располагавшихся в начальный момент в узлах прямоугольной сетки на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$ для ансамбля систем Ван-дер-Поля (8.1) при $\lambda = 2$

стемы и предположим, что все представители ансамбля могут отличаться друг от друга только лишь начальными условиями. В фазовом пространстве ансамбль представляется облаком изображающих точек. С течением времени каждая изображающая точка перемещается в фазовом пространстве, как предписано динамическими уравнениями системы. Соответственно, форма облака и распределение плотности изображающих точек в нем будут изменяться во времени.

На рис. 8.1 и 8.2 приведены два примера эволюции ансамблей. Первый пример (рис. 8.1) относится к уравнению Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (8.1)$$

Это простая динамическая система с двумерным фазовым пространством, имеющая при $\lambda > 0$ в качестве единственного аттрактора предельный цикл и демонстрирующая режим периоди-

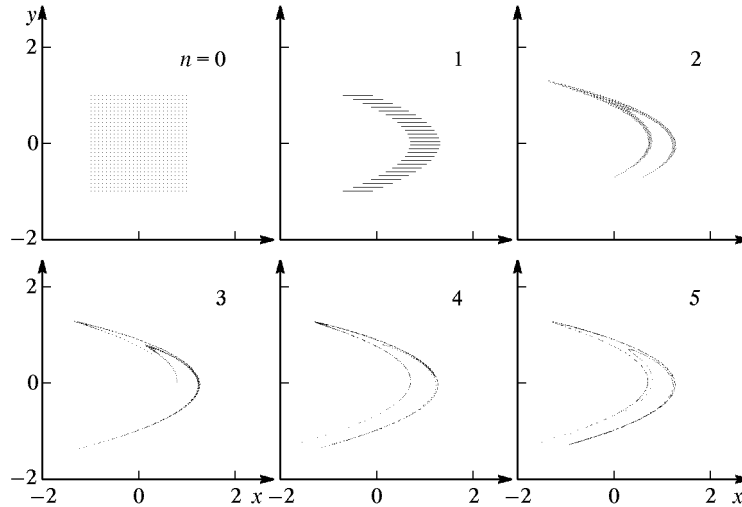


Рис. 8.2. Эволюция набора изображающих точек, располагавшихся в начальный момент в узлах прямоугольной сетки на фазовой плоскости (x, y) , для ансамбля, составленного из отображений Эно $x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n$, $y_{n+1} = x_n$ при $a = 1,4$, $b = -0,3$

ческих автоколебаний. Из рисунка можно видеть, как изображающие точки на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$, расположенные в начальный момент в узлах прямоугольной сетки, с течением времени «оседают» на предельный цикл. Второй пример (рис. 8.2) — отображение Эно, обсуждавшееся в лекции 5. На диаграммах, представляющих распределение точек на нескольких последовательных шагах дискретного времени, можно видеть, как постепенно прорисовывается хаотический аттрактор — аттрактор Эно.

Различные представляющие интерес статистические характеристики можно определить посредством усреднения по ансамблю и анализировать, например, средние значения динамических переменных, их степеней и произведений, вероятности пребывания переменных в определенных интервалах и т. д. Все эти величины будут эволюционировать во времени, и можно ожидать, что асимптотически они будут стремиться к каким-то предельным значе-

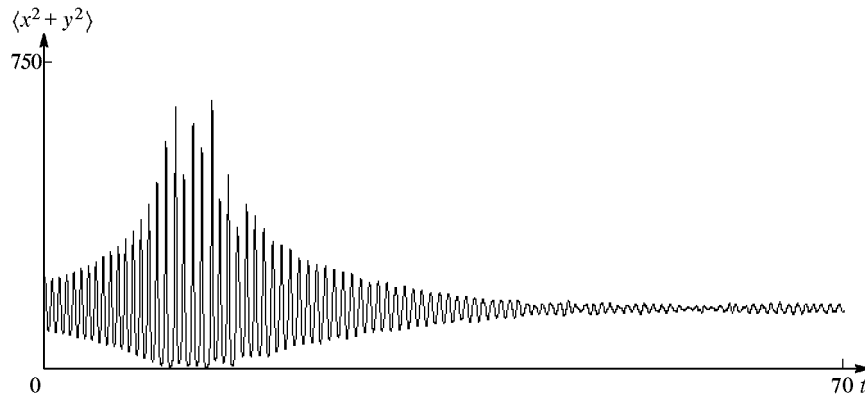


Рис. 8.3. Эволюция среднего по ансамблю от суммы квадратов переменных x и y в системе Лоренца $\dot{x} = \sigma(y - x)$, $\dot{y} = rx - y - xz$, $\dot{z} = xy - bz$ при $r = 28$, $b = 8/3$, $\sigma = 10$. Ансамбль образован 1500 системами, начальные условия для которых заданы вблизи одного из неустойчивых фокусов со случайным разбросом внутри шара радиуса 0,05

ниям, относящимся к установившемуся в статистическом смысле режиму динамики системы (рис. 8.3). Данная лекция посвящена обсуждению теоретического аппарата, предназначенного для работы с ансамблями и распределениями в фазовом пространстве.

8.1. Функция распределения и инвариантная мера

Рассмотрим ансамбль, составленный из систем, фазовое пространство каждой из которых имеет размерность N , и при этом динамика происходит в ограниченной области фазового пространства. Имея в виду, что число систем в ансамбле очень велико, будем предполагать, что соответствующее облако изображающих точек можно охарактеризовать функцией плотности распределения в фазовом пространстве $\rho(\mathbf{x}, t)$, которую считаем нормированной на единицу: $\int \rho(\mathbf{x}, t) dV \equiv 1$. Смысл этой функции состоит в том, что $\rho(\mathbf{x}, t) dV$ есть относительное число систем, состояние которых принадлежит элементарному объему $dV = dx_1 dx_2 \dots dx_N$, содержащему точку $\mathbf{x}$. Можно сказать также, что $\rho(\mathbf{x}, t) dV$ есть вероятность того, что состояние выбранного случайным образом

члена ансамбля в момент t окажется принадлежащим элементу объема dV .

Всевозможные характеристики, представляющие интерес в рамках такого способа описания, получаются посредством усреднения различных функций $f(\mathbf{x})$ по ансамблю и выражаются через плотность распределения соотношением

$$\langle f \rangle = \int f(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}, t) dV. \quad (8.2)$$

Например, при $f(\mathbf{x}) = x_i$ получаем среднее значение динамической переменной x_i , при $f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in D \\ 0, & \mathbf{x} \notin D \end{cases}$ — вероятность обнаружения системы в момент t в области фазового пространства D .

Предположим, что выбранный нами ансамбль систем в начальный момент времени характеризуется «хорошей» функцией распределения — непрерывной и спадающей достаточно быстро при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Каким будет характер распределения на больших вре-

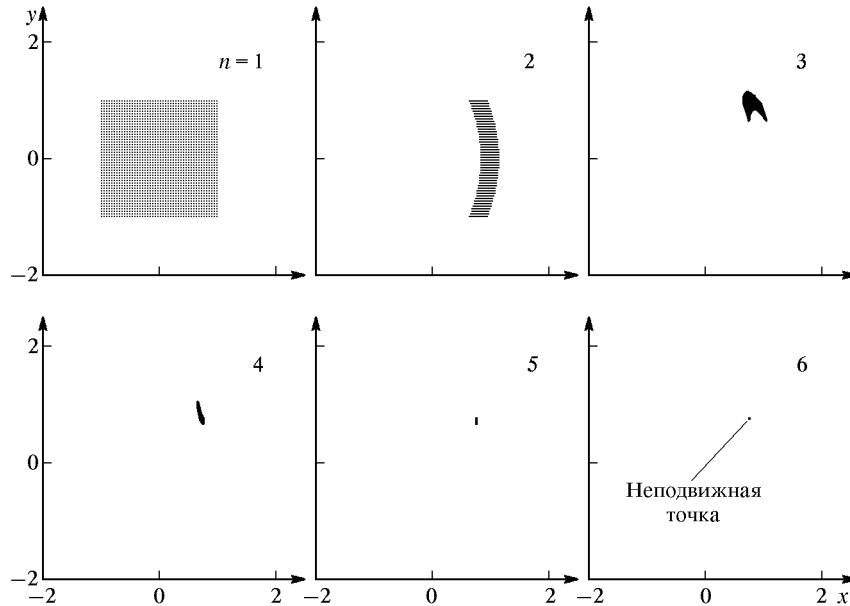


Рис. 8.4. Эволюция ансамбля в ситуации, когда аттрактором является устойчивая неподвижная точка. В качестве индивидуальной системы выбрано отображение Эно при $a = 0,2$, $b = 0,15$

менах? Как можно убедиться, даже в самых простых ситуациях возникающие в пределе $t \rightarrow \infty$ распределения оказываются сингулярными и представляются обобщенными функциями, такими как дельта-функция Дирака.

Пусть, например, имеется единственный аттрактор в виде устойчивой неподвижной точки. Поскольку каждая принадлежащая ансамблю система с течением времени приближается к этой точке, все облако будет уменьшаться в объеме и стягиваться к ней (рис. 8.4). При $t \rightarrow \infty$ функция распределения имеет пределом дельта-функцию. Если аттрактором служит предельный цикл, то по истечении достаточно большого времени распределение будет сосредоточено на этом предельном цикле, причем вероятность пребывания будет больше в тех точках цикла, где скорость движения изображающей точки мала, и меньше там, где скорость велика (рис. 8.5). Для странных аттракторов приходится иметь дело с

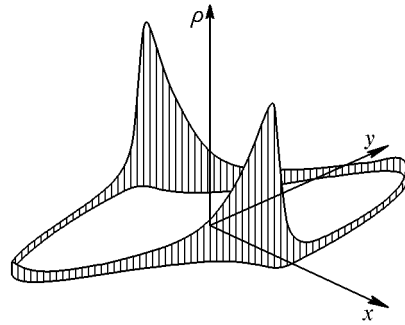


Рис. 8.5. Инвариантное распределение для уравнения Ван-дер-Поля при $\lambda = 2$. Формально плотность распределения обращается в бесконечность на цикле и равна нулю в остальных точках фазовой плоскости $x, y = \dot{x}$. На рисунке отложенная по вертикальной оси величина отвечает амплитудному множителю при дельта-функции

еще более сложно и тонко устроенными сингулярными распределениями в фазовом пространстве.

Обобщение, охватывающее как гладкие, так и сингулярные распределения, достигается привлечением специальной математической конструкции, *меры*. Мету можно рассматривать как функцию, которая ставит в соответствие подмножеству фазового пространства (не любому, но принадлежащему к достаточно обширному классу измеримых подмножеств) некоторое неотрицательное число. Понятие меры шире, чем понятие функции распределения: любой функции распределения отвечает некоторая мера, но не всякой мере будет соответствовать «разумная» функция распределения. Интерпретация вероятностных распределений посредством теории меры позволило в свое время А.Н. Колмогорову разработать ныне общепризнанную аксиоматическую основу теории вероятностей.

Пусть мы имеем ансамбль идентичных динамических систем, отличающихся начальными условиями, и пусть D — какая-нибудь ограниченная область фазового пространства. Этой области при-

пишем меру $\mu(D)$, равную относительному числу представителей ансамбля, состояния которых принадлежат области D . Объединение непересекающихся областей $D_1, \dots, D_n$ будет иметь меру, равную сумме мер этих областей:

$$\mu(D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n) = \mu(D_1) + \mu(D_2) + \dots + \mu(D_n). \quad (8.3)$$

В силу динамики индивидуальных систем, составляющих ансамбль, приписанная различным подмножествам фазового пространства мера будет, вообще говоря, изменяться во времени. Предположим, однако, что начальное распределение изображающих точек специально подобрано так, что мера любого измеримого подмножества, расположение которого в фазовом пространстве фиксировано, остается все время одной и той же. Соответствующая мера называется *инвариантной мерой* для динамической системы, фигурирующей в качестве индивидуального элемента ансамбля. Усреднение по ансамблю трактуется при этом как интегрирование по инвариантной мере μ и записывается следующим образом:

$$\langle f \rangle = \int f(\mathbf{x}) d\mu. \quad (8.4)$$

Если существует соответствующая данной мере плотность распределения $\rho(\mathbf{x})$, то в интеграле можно использовать подстановку $d\mu = \rho(\mathbf{x}) dV$.

Если динамика протекает в ограниченной области фазового пространства, как мы предположили, то инвариантная мера обязательно существует (теорема Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова). Более того, инвариантных мер, вообще говоря, может быть много. Пусть, например, система имеет несколько неподвижных точек, все равно, устойчивых или неустойчивых. Распределение, заданное помещенными в неподвижные точки дельта-функциями, при произвольном соотношении их весов порождает инвариантную меру. Аналогичным образом можно построить меры, сосредоточенные на периодических орбитах, если таковые имеются.

Среди всевозможных инвариантных мер основной интерес представляет обычно только одна, так называемая *естественная инвариантная мера*, которую называют также *мерой Крылова–Боголюбова*. Предположим, что мы запускаем динамическую систему из начальной точки, принадлежащей бассейну притяжения интересующего нас аттрактора. Припишем любой области D меру $\mu(D)$, равную относительной доле времени пребывания изображающей точки в этой области при времени наблюдения, стремящемся к бесконечности. Если определенная таким образом мера получается одной и той же почти при любом выборе начальной точки (т. е. с вероятностью единица), то это и есть естественная инвариантная мера на нашем аттракторе. Это такая мера,

усреднение по которой дает те же результаты, как и усреднение по вероятностному распределению $\rho(\mathbf{x}, t)$ в пределе $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int f(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int f(\mathbf{x}) d\mu. \quad (8.5)$$

Математические доказательства, относящиеся к общим свойствам хаотической динамики, исходят, как правило, из предположения о наличии однозначно определенной естественной инвариантной меры. Этот фундамент безупречно обоснован для систем с гиперболическими аттракторами (см. примеры в лекции 2: аттрактор Плыкина и аттрактор Смейла–Вильямса) и, в определенной степени, для так называемых квазигиперболических аттракторов, к которым относится аттрактор Лоренца. Однако для большинства реалистичных систем (см. лекцию 5) приходится иметь дело с ситуацией, когда наблюдаемая хаотическая динамика ассоциируется с так называемым *квазиаттрактором* — сложным устроенным притягивающим множеством траекторий, которое помимо неустойчивых траекторий содержит также множество устойчивых периодических орбит, характеризующихся большими периодами и очень узкими областями притяжения. В такой ситуации неясно, как однозначно определить естественную инвариантную меру, поскольку речь идет по сути дела не об одном аттракторе, а о множестве сосуществующих аттракторов. В то же время, в численных расчетах из-за ограниченной точности вычислений и в эксперименте из-за неизбежных шумов присутствие устойчивых долгопериодических орбит обычно никак не проявляется, а получаемые результаты разумным образом согласуются с предположением о существовании однозначно определенной инвариантной меры и вытекающими из этого математическими следствиями. По этой причине общепринятой практикой стало привлекать базирующиеся на существовании инвариантной меры математические результаты к более широкому кругу задач, нежели это можно считать строго обоснованным. Наверное, такая ситуация вообще характерна для физики и других дисциплин, которые с точки зрения математика являются прикладными. Тем не менее, из сказанного следует, во-первых, что проблема разработки строгого подхода к описанию сложной динамики негиперболических систем остается актуальной и, во-вторых, что при анализе и интерпретации сложной динамики реальных систем исследователь должен проявлять определенную осторожность, когда ссылается на так называемые строгие математические результаты.

8.2. Эргодичность и перемешивание

Свойство динамической системы, позволяющее ввести однозначно определенную инвариантную меру, называется *эргодичностью*. Исторически концепция эргодичности восходит к Людвигу

Больцману, который ввел ее при рассмотрении проблемы обоснования термодинамики и статистической физики. Эргодичность означает эквивалентность усреднения по времени усреднению по ансамблю, отвечающему инвариантной мере μ : для любой типичной траектории $\mathbf{x}(t)$ (исключение могут составлять траектории, принадлежащие множеству нулевой меры) и для произвольной непрерывной функции $f(\mathbf{x})$ должно выполняться соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\mathbf{x}(t)) dt = \int f(\mathbf{x}(t)) d\mu. \quad (8.6)$$

В контексте термодинамики и статистической физики, эргодичность обеспечивает возможность обращаться с равновесными ансамблями и определять постоянные во времени усредненные характеристики систем, но не позволяет рассматривать процесс релаксации системы к равновесному состоянию. Само по себе свойство эргодичности нельзя считать достаточным для того, чтобы можно было говорить о хаосе.

В качестве простого примера эргодической, но нехаотической динамики рассмотрим систему с двумерным фазовым пространством. Пусть динамические переменные x и y определены по модулю 1 и удовлетворяют уравнениям

$$\dot{x} = \omega, \quad \dot{y} = 1, \quad (8.7)$$

где ω — иррациональное число. Инвариантная мера задается равномерным распределением в единичном квадрате $\rho(x, y) \equiv 1$. В силу условий периодичности по обеим переменным противоположные стороны квадрата можно считать отождествленными (склеенными) и интерпретировать фазовое пространство как двумерный тор. С учетом этого обстоятельства произвольную функцию, от которой мы собираемся находить средние, можно представить в виде

$$f(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{kl} \exp 2\pi i(kx + ly). \quad (8.8)$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что среднее по ансамблю (по инвариантной мере)

$$\langle f(x, y) \rangle = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = c_{00} \quad (8.9)$$

и среднее по времени

$$\begin{aligned}
 \overline{f(x(t), y(t))} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x_0 + \omega t, y_0 + t) dt = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{kl} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \exp(2\pi i(k\omega + l)t) dt = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{kl} \delta_{kl} = c_{00} \quad (8.10)
 \end{aligned}$$

совпадают, т. е. эргодичность имеет место. С другой стороны, динамику, определенную уравнениями (8.7), никак нельзя назвать хаотической. Облако изображающих точек для ансамбля таких систем в ходе временной эволюции остается локализованным

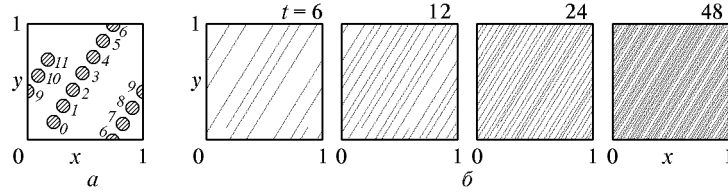


Рис. 8.6. Эргодичность без хаоса: а) перемещение облака изображающих точек, представляющего ансамбль систем вида (8.7); б) индивидуальная траектория, отвечающая интервалу времени от нуля до t

(рис. 8.6), и динамика на сколь угодно большом интервале времени предсказуема с той же точностью, с какой известно начальное состояние.

Что же означает хаос с точки зрения представлений об инвариантной мере? Из примеров, обсуждавшихся в лекции 2, мы видели, что хаос должен ассоциироваться с непредсказуемостью на больших временах при наличии даже малой ошибки в задании начальных условий.

Пусть мы имеем некоторую систему с хаотической динамикой, для которой оператор эволюции за время T записывается как $F^T(\mathbf{x})$. Предположим сначала, что наша система допускает однозначное построение динамики вперед и назад во времени. Пусть мы имеем ансамбль таких систем, соответствующий инвариантной мере μ . Рассмотрим некоторую область фазового пространства D_0 положительной меры $\mu(D_0)$. Величина $\mu(D_0)$ показывает, какую долю среди представителей ансамбля составляют системы, состояние которых принадлежит D_0 . Если динамика хаотическая,

то фазовые точки, оказавшиеся в данный момент $t = 0$ в области D_0 , через достаточно большое время T разбредутся по всей доступной области фазового пространства и распределятся в соответствии с инвариантной мерой. Возьмем некоторую другую произвольную область D_1 . Вероятность пребывания каждой точки из рассматриваемого нами множества точек в области D_1 в момент T должна определяться исключительно мерой этой области и составлять $\mu(D_1)$, т. е.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mu(F^T(D_0) \cap D_1)}{\mu(D_0)} = \mu(D_1). \quad (8.11)$$

Здесь $F^T(D_0)$ обозначает множество точек-образов, в которые переходят точки области D_0 за время T .

Свойство, выражаемое условием (8.11), называется *перемешиванием*. Чтобы лучше почувствовать смысл этого соотношения, представьте себе стакан воды, в который поместили каплю чернил (рис. 8.7). Капля — это область D_0 , а ее мера $\mu(D_0)$ есть отно-

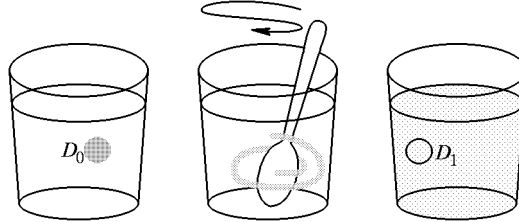


Рис. 8.7. К пояснению свойства перемешивания. Капля чернил в стакане воды — область D_0 , ее мера $\mu(D_0)$ есть отношение объема капли к объему жидкости в стакане. После перемешивания взятая на пробу капля (область D_1) содержит долю чернил, равную отношению объема области D_0 к объему стакана, независимо от первоначальной формы и местоположения капли чернил, а также от формы и местоположения капли, отбираемой на пробу

шение объема капли к объему стакана. Теперь перемешаем воду в стакане ложкой (что представляет динамику в течение времени T), а затем возьмем на пробу капельку жидкости. Эта капелька есть область D_1 . Условие хорошего перемешивания (в самом обычном, бытовом смысле) состоит в том, что из какой бы части объема стакана мы ни взяли каплю D_1 , относительная доля чернил в ней $\mu(F^T(D_0) \cap D_1)/\mu(D_1)$ должна равняться отношению объема области D_0 к объему стакана, т. е. $\mu(D_0)$. Это условие не должно зависеть от первоначальной формы и местоположения капли чернил, а также от формы и местоположения капли, отбираемой на пробу.

В лекции 2 обсуждались иллюстрации, демонстрирующие присутствие перемешивания в отображении пекаря и кота Арнольда

(см. также рис. 8.8). Свойство перемешивания считается принципиальным для статистической физики в плане объяснения релаксации систем к термодинамическому равновесию. Перемешивание часто интерпретируют как свойство расщепления корреляций в процессе динамики. Рассмотрим две (непрерывные) функции

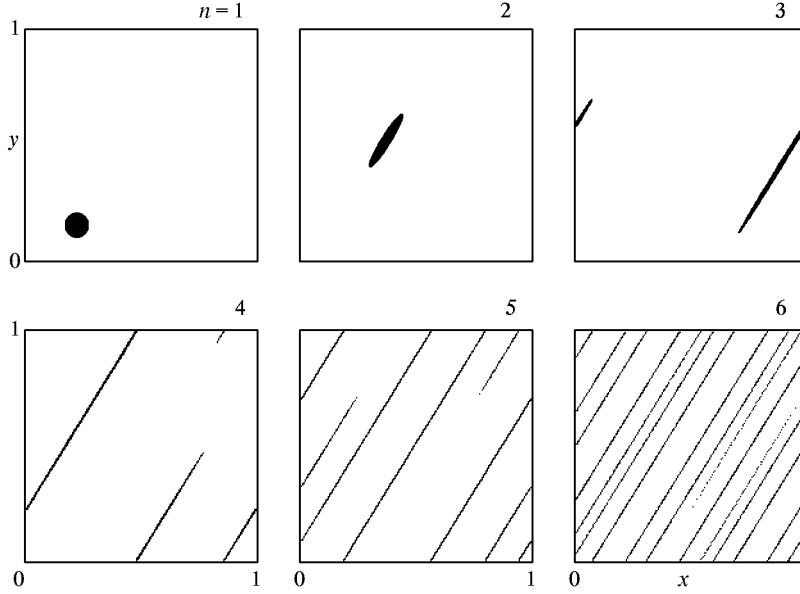


Рис. 8.8. Перемешивание: эволюция облака изображающих точек, представляющего ансамбль систем вида $y_{n+1} = x_n + y_n$, $x_{n+1} = 2x_n + y_n \pmod{1}$ (отображение кота Арнольда). Сравните эту диаграмму с рис. 8.6

динамических переменных, $f(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x})$. В системе с перемешиванием, как можно показать,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle f(F^T \mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \rangle = \langle f(\mathbf{x}) \rangle \langle \varphi(\mathbf{x}) \rangle, \quad (8.12)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю, т. е. по инвариантной мере, $\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int f(\mathbf{x}) d\mu$.

Еще одна, несколько более изощренная по сравнению с (8.11) формулировка свойства перемешивания получается, если рассматривать динамику в обратном времени. В обратном времени динамика тоже хаотическая, поэтому точки множества $F^{-T}(D_1)$ при больших T также распределяются в соответствии с инвариантной мерой. Вероятность попадания в область D_0 должна определяться только мерой этой области. Таким образом, должно выполняться

соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mu(F^{-T}(D_1) \cap D_0)}{\mu(D_1)} = \mu(D_0), \quad (8.13)$$

где $F^{-T}(D_1) \cap D_0$ есть множество точек области D_0 , являющихся прообразами точек области D_1 .

Для систем, допускающих однозначное описание динамики вперед и назад во времени, оба условия (8.11) и (8.13) эквивалентны. Для систем, описываемых необратимыми отображениями, адекватным определением перемешивания оказывается соотношение (8.13). (Подчеркнем, что определение множества прообразов $F^{-T}(D_1)$ не требует возможности отслеживания динамики назад во времени, как могло бы показаться. Это просто множество точек, стартовав из которых траектория попадет за время T в области D_1 .)

При рассмотрении динамики вперед во времени в необратимом случае образ области D_0 может частично накладываться на себя (ср. рис. 8.9а и б), так что мера множества $F^T(D_0) \cap D_1$ может оказаться отличной

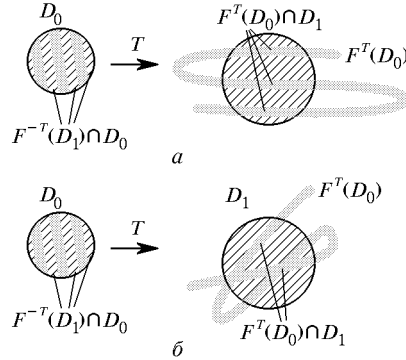


Рис. 8.9. К пояснению определения перемешивания (8.11) в случае обратимой динамики (а) и его неадекватности для необратимой динамики (б)

от $\mu(D_1)\mu(D_0)$. Определение (8.13) лишено этого недостатка, хотя оно несколько труднее для восприятия из-за необходимости иметь дело с прообразами.

8.3. Одномерные отображения: инвариантные распределения и уравнение Фробениуса–Перрона

В этом разделе мы обсудим инвариантные распределения для динамических систем, представленных одномерными отображениями

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (8.14)$$

Рассмотрим ансамбль, построенный из индивидуальных систем, заданных отображением (8.14), и пусть $\rho_n(x)$ задает плотность распределения в момент дискретного времени n . Выведем уравнение, описывающее эволюцию функции $\rho_n(x)$ от шага к шагу дискретного времени.

Если исходное распределение было сконцентрировано в одной точке $\rho_0(x) = \delta(x - \xi)$, то на следующем временном шаге $\rho_1(x) = \delta(x - f(\xi))$. В общем случае начальную функцию распределения можно записать как интеграл $\rho_0(x) = \int \delta(x - \xi) \rho_0(\xi) d\xi$. Соответственно, в следующий момент распределение будет представляться интегралом $\rho_1(x) = \int \delta(x - f(\xi)) \rho_0(\xi) d\xi$. Его вычисление с использованием стандартных правил обращения с дельта-функцией дает $\rho_1(x) = \sum_{k=1}^r |f'(\xi_k)|^{-1} \rho_0(\xi_k)$, где суммирование ведется по всем корням $\xi(x)$ уравнения $x = f(\xi)$, т. е. по всем точкам-прообразам, которые за один шаг итераций отображаются в точку x . Итак, эволюция функции распределения ансамбля одномерных отображений описывается рекуррентным соотношением

$$\rho_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^r |f'(\xi_k(x))|^{-1} \rho_n(\xi_k(x)), \quad (8.15)$$

которое называется *уравнением Фробениуса–Перрона*. Инвариантные распределения формально представляют собой не что иное как неподвижные точки этого функционального уравнения.

В простых случаях вид инвариантного распределения можно найти явно. Например, для отображения «зуб пилы» уравнение $x = f(\xi)$ имеет два корня: $\xi_1 = x/2$ и $\xi_2 = (1+x)/2$, а производная постоянна и равна по абсолютной величине 2. Поэтому уравнение (8.15) принимает вид

$$\rho_{n+1}(x) = \frac{\rho_n(x/2) + \rho_n((1+x)/2)}{2}. \quad (8.16)$$

Подставляя в левую и правую часть $\rho(x) \equiv 1$, $0 \leq x < 1$, видим, что однородное распределение является инвариантным распределением. Можно показать, что, задав в качестве начального условия произвольную гладкую функцию $\rho(x)$, при $n \rightarrow \infty$ будем иметь однородное распределение, т. е. именно оно ассоциируется с естественной инвариантной мерой. То же самое справедливо для отображений тент и косой тент.

Рассмотрим менее тривиальный пример, логистическое отображение $f(x) = 1 - \lambda x^2$, $\lambda = 2$. Уравнение $x = 1 - 2\xi^2$ имеет два корня: $\xi_1 = \sqrt{(1-x)/2}$ и $\xi_2 = -\sqrt{(1-x)/2}$, и при этом

$|f'(\xi)| = 4|\xi|$. Следовательно, уравнение (8.15) будет иметь вид

$$\rho_{n+1}(x) = \frac{\rho_n(\sqrt{(1-x)/2}) + \rho_n(-\sqrt{(1-x)/2})}{2\sqrt{2}\sqrt{1-x}}. \quad (8.17)$$

Чтобы найти инвариантное распределение, вспомним, что заменой переменной $x = -\cos 2\pi y$ логистическое отображение приводится к отображению «зуб пилы» (лекция 2). Поэтому для переменной y инвариантное распределение однородное. Для переменной x этому соответствует такое распределение:

$$\rho(x) = \int_0^1 \delta(x + \cos 2\pi y) dy = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}. \quad (8.18)$$

(Убедитесь, что при подстановке этого выражения в левую и правую часть уравнения Фробениуса–Перрона (8.17) оно превращается в тождество.)

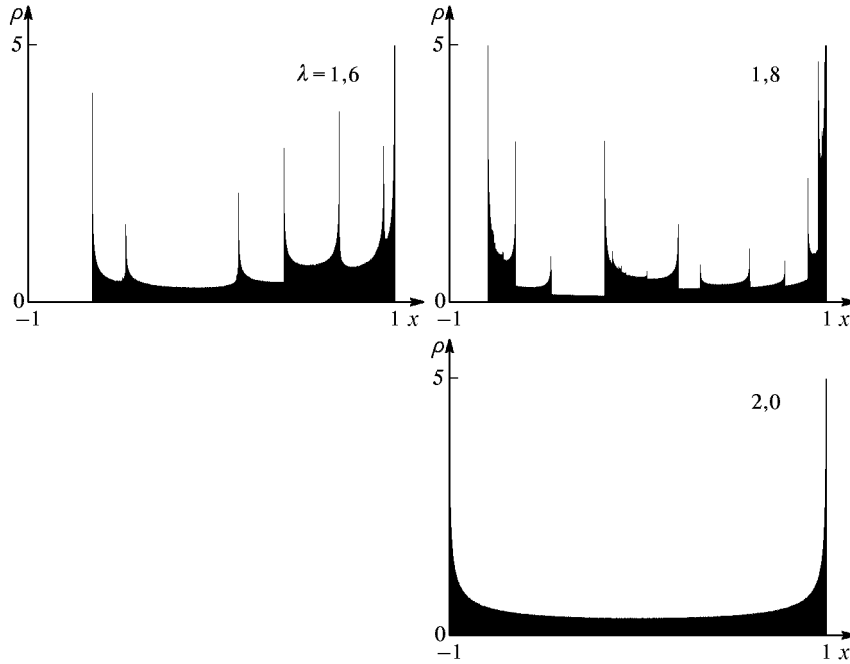


Рис. 8.10. Инвариантные распределения для логистического отображения $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$, полученные численно при различных значениях управляющего параметра λ

В более общем случае, когда параметр λ не равен 2, получить инвариантное распределение для логистического отображения в явной аналитической форме не удастся, однако его можно найти численно. Разобьем отрезок $[-1, 1]$, где происходят итерации, на N интервалов равной длины $\Delta x = 2/N$. Задавшись случайным начальным условием, будем проводить последовательные итерации логистического отображения и подсчитывать число попаданий изображающей точки в каждый интервал M_i . При достаточно большом числе итераций M будем иметь $\rho(x_i) \cong (M_i/M)\Delta x^{-1}$. На рис. 8.10 показаны результаты расчета инвариантных распределений для нескольких значений параметра λ , которым отвечают хаотические режимы динамики. В частности, при $\lambda = 2$ численный расчет дает хорошее совпадение с аналитическим соотношением (8.18). При $\lambda = 2$ функция распределения содержит сингулярности степени минус одна вторая только на краях интервала, в то время как при $\lambda < 2$ они присутствуют и во внутренних точках. Причина появления сингулярностей поясняется на рис. 8.11: набор траекторий, отвечающих различным индивидуальным си-

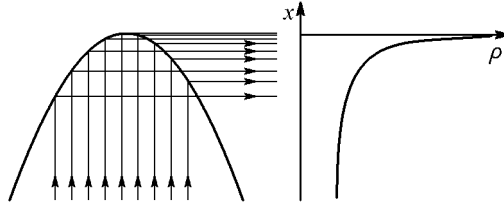


Рис. 8.11. Объяснение возникновения сингулярности в инвариантном распределении, порождаемом одномерным отображением с экстремумом

стемам, попадая в окрестность экстремума, формирует каустику. Сингулярности возникают в точках, в которые за одну или более итераций отображается точка экстремума.

8.4. Системы с непрерывным временем, уравнение для функции распределения и портреты странных аттракторов

Рассмотрим ансамбль, составленный из большого числа идентичных автономных систем с N -мерным фазовым пространством, заданных уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (8.19)$$

Выведем уравнение для функции распределения $\rho(\mathbf{x}, t)$, которое для системы с непрерывным временем играет ту же роль, как

уравнение Фробениуса–Перрона для отображений. Если в начальный момент распределение имеет вид $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, т. е. сконцентрировано в одной точке x_0 , то эволюция во времени будет соответствовать просто движению дельта-пики по фазовой траектории. В момент t будем иметь $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0))$, где $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)$ есть реше-

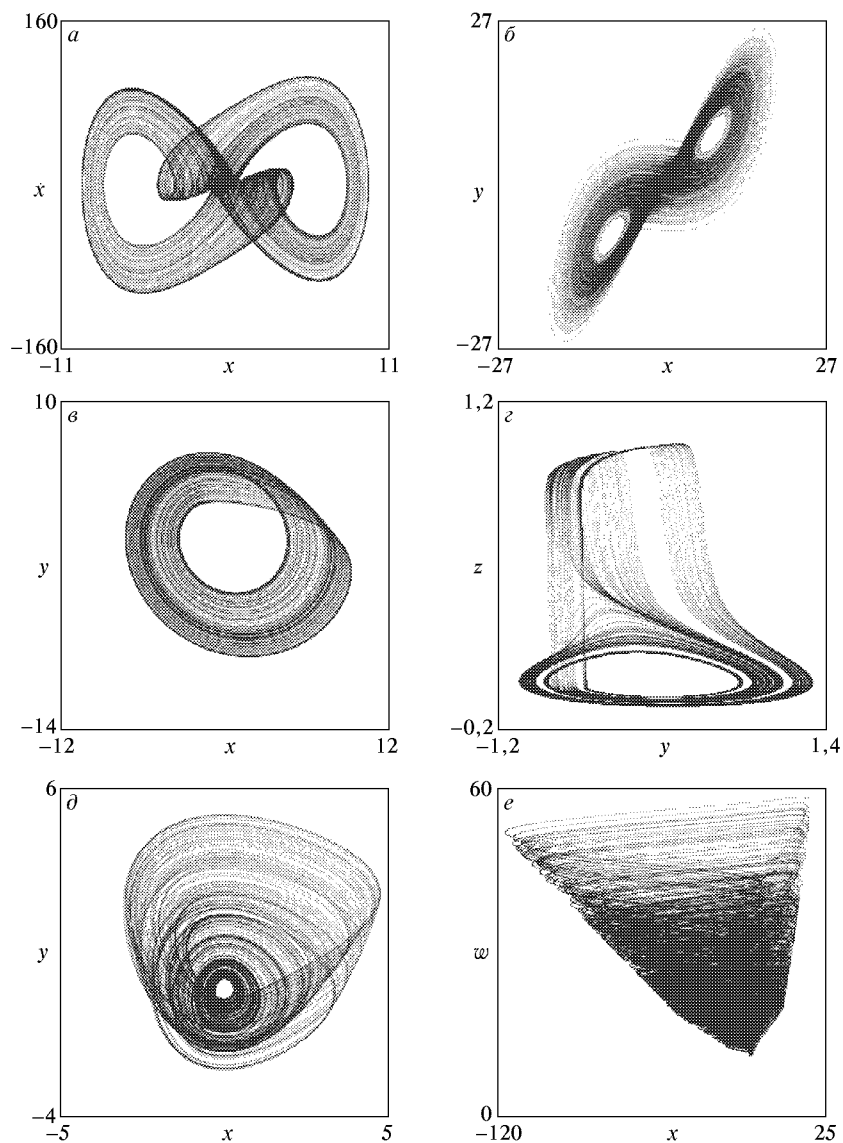


Рис. 8.12. (см. развернутую подпись на с. 133)

ние уравнения (8.19) с начальным условием $\mathbf{X}|_{t=0} = \mathbf{x}_0$. Если функция распределения в начальный момент есть $\rho(\mathbf{x}, 0)$, то ее можно представить в виде линейной комбинации дельта-функций как интеграл

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rho(\mathbf{x}_0, 0) dV_0, \quad (8.20)$$

где интегрирование ведется по всему пространству начальных состояний. Соответственно, в момент t распределение будет представлять собой линейную комбинацию

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)) \rho(\mathbf{x}_0, 0) dV_0. \quad (8.21)$$

Дифференцирование соотношения (8.21) по времени дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= - \int \rho(\mathbf{x}_0, 0) dV_0 \{ (\dot{\mathbf{X}} \nabla) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)) \} = \\ &= - \nabla \int \rho(\mathbf{x}_0, 0) \mathbf{F}(\mathbf{X}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)) dV_0 = \\ &= - \nabla \left\{ \mathbf{F}(\mathbf{x}) \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)) \rho(\mathbf{x}_0, 0) dV_0 \right\} = - \nabla (\mathbf{F}(\mathbf{x}) \rho), \end{aligned} \quad (8.22)$$

или

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla (\mathbf{F}(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}, t)) = 0. \quad (8.23)$$

Это и есть искомое уравнение. Тот факт, что оно имеет вид закона сохранения (производная по времени равна дивергенции некоторого векторного поля), выражает постоянство числа систем

Рис. 8.12. Фазовые портреты аттракторов, выполненные в технике кодирования плотности тонами серого цвета, что дает представление о распределении естественной инвариантной меры:

- а) нелинейный осциллятор $\ddot{x} + x + x^3 = A \sin \Omega t$, $A = 230$, $\Omega = 2,9$;
- б) система Лоренца $\dot{x} = \sigma(y - x)$, $\dot{y} = rx - y - xz$, $\dot{z} = xy - bz$, $r = 28$, $b = 8/3$, $\sigma = 10$;
- в) система Ресслера $\dot{x} = -y - z$, $\dot{y} = y + az$, $\dot{z} = b - rz + xz$, $a = 0,2$, $b = 0,2$, $r = 4,6$;
- г) генератор Кияшко–Пиковского–Рабиновича $\dot{x} = 2\delta x + y - gz$, $\dot{y} = -x$, $\dot{z} = \gamma(x - f(z))$, $g = 0,95$, $\delta = 0,115$, $\gamma = 0,2$, $f(z) = 8,592z - 22z^2 + 14,408z^3$;
- д) генератор Анищенко–Астахова $\dot{x} = mx + y - xz$, $\dot{y} = -x$, $\dot{z} = -gz + 1(x)x^2$, $m = 1,42$, $g = 0,2$, $1(x) = 0$ при $x \leq 0$ и 1 при $x > 0$;
- е) гиперхаос Ресслера $\dot{x} = -y - z$, $\dot{y} = x + ay + w$, $\dot{z} = b + xz$, $\dot{w} = cw - dz$, $a = 0,25$, $b = 3$, $c = 0,05$, $d = 0,5$

в ансамбле. Для консервативных систем это уравнение известно как *уравнение Лиувилля*. Обобщением соотношения (8.23) на системы, подверженные действию шума (флуктуаций), служит *уравнение Фоккера–Планка*, оно отличается присутствием вторых производных по фазовым координатам, которые отвечают за обусловленную шумом диффузию в фазовом пространстве.

Один из распространенных способов наглядного представления странных аттракторов при экспериментальном исследовании радиотехнических и электронных систем состоит в том, что на вход x и y осциллографа подается напряжение, пропорциональное величине двух различных динамических переменных исследуемой системы. На экране можно видеть при этом проекцию фазового портрета аттрактора на определенную двумерную плоскость. Каждый, кто наблюдал такого рода портреты, мог заметить одно отличие от портретов, рисуемых на компьютере и изображающих траекторию на аттракторе. Оно состоит в том, что на экране осциллографа ярче высвечиваются одни области (те, которым отвечает большее время пребывания в них изображающей точки — падающего на экран электронного луча) и слабее — другие. Из-за инерционности нашего зрительного восприятия то, что наблюдается на экране осциллографа, представляет собой уже не фазовую траекторию в проекции на плоскость экрана, а скорее изображение проекции распределения естественной инвариантной меры.

Впрочем, аналогичные по характеру фазовые портреты можно получить и на компьютере, если использовать технику изображения тонами серого цвета. Пусть имеем программу, интегрирующую динамические уравнения и вычисляющую шаг за шагом фазовую траекторию. На каждом шаге выводим на экран точку с соответствующими координатами, но присваиваемый данному пикселю серый тон определяется в зависимости от наличествующего в предыдущий момент: число, кодирующее яркость, увеличивается каждый раз на единицу при попадании новой точки в данный пиксель. На рис. 8.12 показаны примеры портретов аттракторов, выполненные в этой технике. Эти диаграммы дают представление о распределении естественной инвариантной меры для нескольких систем (нелинейный осциллятор, система Лоренца, система Ресслера, генераторы Кияшко–Пиковского–Рабиновича и Анищенко–Астахова, четырехмерная система, предложенная Ресслером в качестве примера гиперхаоса — динамического режима с двумя положительными ляпуновскими показателями).

Л е к ц и я 9

УСТОЙЧИВОСТЬ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ. ЛЯПУНОВСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ

Наличие хаотической динамики тесно связано с неустойчивостью, присущей фазовым траекториям системы. В качестве иллюстрации рассмотрим рис. 9.1, где показан набор большого числа наложенных друг на друга временных зависимостей одной из динамических переменных для модели Лоренца. Все они получены ре-

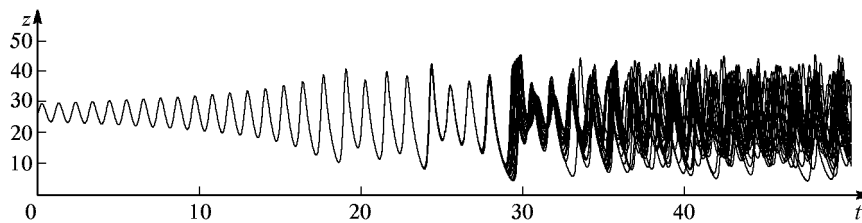


Рис. 9.1. Иллюстрация чувствительной зависимости решений уравнения Лоренца от начальных условий в хаотическом режиме. Значения параметров: $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$. Начальные условия: $x_0 = 10,485 + \xi$, $y_0 = 10,485 + \eta$, $z_0 = 27 + \zeta$, где ξ , η , ζ — случайные добавки порядка 0,01

шением одной и той же системы уравнений, демонстрирующей хаотическую динамику, при слегка отличающихся начальных условиях. Видно, что разные реализации практически неотличимы на начальном участке, но с течением времени уходят друг от друга и картина «замазывается». Связь между хаосом и неустойчивостью можно отследить и для других модельных систем, встречавшихся в нашем курсе. Именно присутствие неустойчивости создает возможность соединить казалось бы несоединимое — динамическую природу системы, т. е. предсказуемость, и хаос, т. е. непредсказуемость. Предметом этой и следующей лекции будет обсуждение вопроса об устойчивости и неустойчивости, о различных трактовках этих важнейших атрибутов динамики.

В этой лекции мы будем вести речь об автономных системах, описываемых обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (9.1)$$

и предполагать, что состояние задается зависящим от времени N -мерным вектором $\mathbf{x}(t)$. Здесь $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ есть векторная функция, отображающая N -мерное пространство в себя. Вводимые понятия, однако, обобщаются и на другие классы динамических систем, в том числе на рекуррентные отображения.

Как мы сейчас увидим, понятие устойчивости и, соответственно, неустойчивости, можно определять по-разному — по Лагранжу, Пуассону, Ляпунову, акцентируя внимание на разных аспектах динамического поведения фазовой траектории или множества близлежащих траекторий.

9.1. Устойчивость по Лагранжу

Точка $\mathbf{x}_0$, а также исходящая из нее фазовая траектория $\mathbf{x}(t)$ называются *устойчивыми по Лагранжу*, если состояние $\mathbf{x}(t)$ всегда, при всех $t > 0$, остается в некоторой ограниченной области фазового пространства. Иначе говоря, существует такая константа R , что для всех $t > 0$ имеем $\|\mathbf{x}(t)\| < R$. (Запись $\|\mathbf{x}(t)\|$ будет в нашем изложении обозначать, как правило, обычную евклидову норму: $\|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$, где $x_1, x_2, \dots, x_N$ — компоненты вектора $\mathbf{x}$.)

Когда в лекции 4 мы показали, что аттрактор Лоренца располагается в ограниченной области фазового пространства, мы доказали тем самым устойчивость множества траекторий системы Лоренца по Лагранжу.

9.2. Устойчивость по Пуассону и возвраты Пуанкаре

Точка фазового пространства $\mathbf{y}$ называется *ω -предельной точкой* фазовой траектории $\mathbf{x}(t)$, если можно указать такую последовательность моментов времени $t_k \rightarrow \infty$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{y}$. Аналогично, точка $\mathbf{z}$ называется *α -предельной точкой*, если можно указать такую последовательность моментов времени $t_k \rightarrow -\infty$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{z}$. Множество всех ω -предельных точек называется ω -предельным множеством данной траектории $\Omega_{\mathbf{x}}$, а множество всех α -предельных точек — α -предельным множеством $A_{\mathbf{x}}$. Траектория $\mathbf{x}(t)$ называется *устойчивой по Пуассону*, если каждая ее точка является α -предельной и ω -предельной, т. е. $\mathbf{x}(t) \in \Omega_{\mathbf{x}} \cap A_{\mathbf{x}}$.

Чтобы уяснить значение введенного понятия, заметим, что любой установившийся режим колебаний нелинейных диссипативных систем представляется траекториями, устойчивыми по Пуассону. Это относится и к динамическому хаосу, связанному с существованием странного аттрактора — режиму, который можно счи-

тать установившимся в смысле постоянства во времени его усредненных статистических характеристик.

С другой стороны, обратное утверждение неверно — не всякая устойчивая по Пуассону траектория представляет режим динамики, который с физической точки зрения может считаться установившимся. Дело в том, что само по себе свойство устойчивости по Пуассону еще ничего не говорит о том, как ведут себя соседние траектории — притягиваются ли они к исходной траектории или уходят от нее. Однако заведомо справедливо, что траектории, отвечающие процессам установления (переходным процессам), устойчивыми по Пуассону не являются.

Обсудим несколько примеров.

Простейший пример — это состояние равновесия. Ему отвечает фазовая траектория, состоящая из одной точки, и она, очевидно, устойчива по Пуассону.

Если рассматривается траектория, отличная от неподвижной точки, то устойчивой по Пуассону она будет в том случае, если обладает свойством возвращаться в сколь угодно малую окрестность каждой своей точки бесконечное число раз. Возврат траектории в ε -окрестность произвольно выбранной на ней начальной точки называют *возвратом Пуанкаре*.

Рассмотрим замкнутую траекторию — предельный цикл. Возвраты Пуанкаре будут фиксироваться периодически, со сколь угодно высокой точностью (рис. 9.2a). Время возврата T есть просто период цикла и оно не зависит от выбора ε , по крайней мере, когда ε становится достаточно малым.

Обратимся к следующему по степени сложности примеру и предположим, что для любого заданного ε можно указать период возврата $T(\varepsilon)$, один и тот же для любой точки старта на данной траектории, причем при $\varepsilon \rightarrow 0$ этот период стремится к бесконечности (рис. 9.2б). Иными словами, возвраты с данной степенью точностью следуют друг за другом регулярно, с правильной периодичностью, но период увеличивается, если мы хотим увеличить точность сравнения состояний. Такие движения называют *квазипериодическими*. В частности, к ним относится суперпозиция двух периодических колебаний с несоизмеримыми (находящимися в иррациональном отношении) частотами. В фазовом пространстве этому типу динамики отвечает траектория, плотно покрывающая поверхность тора. При наличии большего числа несоизмеримых частот говорят о квазипериодических режимах, ассоциирующихся с торами размерности 3, 4 и т. д.

Наконец, динамический хаос — это такая ситуация, когда возвраты Пуанкаре в ε -окрестность стартовой точки не проявляют регулярности, интервал времени между двумя последовательными возвратами оказывается каждый раз другим и возникает некоторое статистическое распределение времен возврата (рис. 9.2в).

Из сказанного ясно, что изучение статистики возвратов Пуанкаре — мощное средство анализа и классификации динамических режимов. По-видимому, потенциальные возможности этого под-

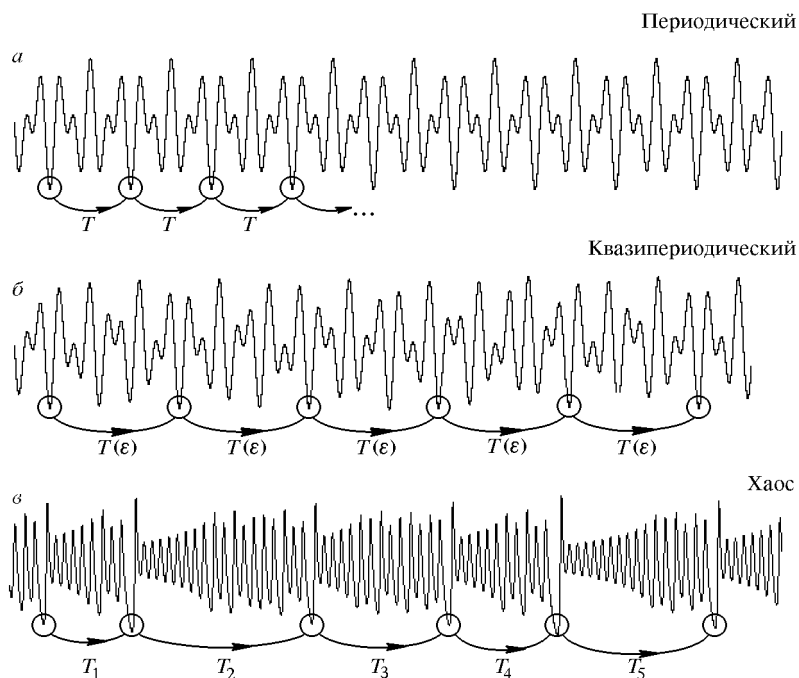


Рис. 9.2. Возвраты Пуанкаре для периодического, квазипериодического и хаотического режима динамики

хода еще не полностью исчерпаны в современной нелинейной динамике.

9.3. Устойчивость по Ляпунову

Вводя определение устойчивости по Лагранжу и Пуассону, мы говорили о свойствах одной, отдельно взятой траектории. Понятие устойчивости по Ляпунову характеризует траекторию с точки зрения поведения соседних траекторий, располагающихся в ее окрестности.

Предположим, что динамическая система (9.1) при старте из начальной точки $\mathbf{x}_0$ порождает траекторию $\mathbf{x}(t)$. Рассмотрим другую траекторию той же системы $\mathbf{y}(t)$, стартовая точка которой $\mathbf{y}_0$ близка к $\mathbf{x}_0$. Если обе траектории остаются близкими в любой последующий момент времени, то траектория $\mathbf{x}(t)$ называется *устойчивой по Ляпунову*. Говоря более формально, траектория

$\mathbf{x}(t)$ устойчива, если для любого, сколь угодно малого положительного числа ε существует такое $\delta > 0$, что для любой точки старта из δ -окрестности точки $\mathbf{x}_0$, т. е. при $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| < \delta$, имеем для всех $t > 0$ $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| < \varepsilon$.

Более сильное свойство — асимптотическая устойчивость. Траектория $\mathbf{x}(t)$ *асимптотически устойчива*, если для любого, сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| < \delta$ имеем для всех $t > 0$ $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| = 0$.

Наглядная качественная иллюстрация устойчивости по Лагранжу, Пуассону и Ляпунову приводится на рис. 9.3. Когда говорят

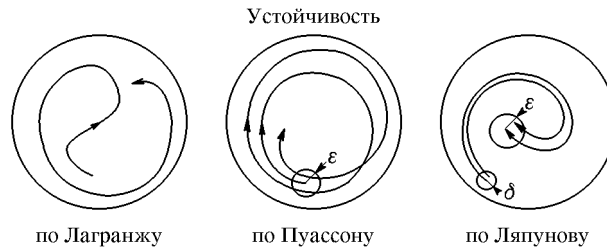


Рис. 9.3. Качественная иллюстрация устойчивости по Лагранжу (траектория остается в замкнутой области), по Пуассону (траектория многократно возвращается в ε -окрестность стартовой точки) и по Ляпунову (две близкие на старте траектории остаются близкими всегда)

просто об устойчивой траектории, то «по умолчанию» всегда имеется в виду устойчивость по Ляпунову.

Имеет место следующая замечательная теорема: *если непериодическая траектория устойчива по Пуассону и Ляпунову, то она квазипериодическая*. Это утверждение очень существенно с точки зрения представления о том, что возможно и что невозможно в динамических системах.

Приведем набросок доказательства. Если траектория $\mathbf{x}(t)$ устойчива по Пуассону, то в сколь угодно малой окрестности любой ее точки $\mathbf{x}_0(t_0)$ отыщутся две различные точки $\mathbf{x}(t_1)$ и $\mathbf{x}(t_1 + \tau)$, причем временной сдвиг τ может быть выбран сколь угодно большим. В силу устойчивости траектории $\mathbf{x}(t)$ по Ляпунову, точки $\mathbf{x}(t_1 + t)$ и $\mathbf{x}(t_1 + \tau + t)$ должны оставаться близкими к $\mathbf{x}_0(t_0 + t)$ и, следовательно, друг к другу. Отсюда следует, что траектория $\mathbf{x}(t)$ квазипериодическая.

Анализ фазовой траектории на устойчивость по линейному приближению и теорема Ляпунова. Пусть $\mathbf{x}(t)$ есть некоторая фазовая траектория, порождаемая динамической системой (9.1), а $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t)$ — близкая траектория, реализующаяся при немного измененном начальном условии. Подставим выражение для $\mathbf{y}(t)$ в

уравнение (9.1) и разложим правую часть в ряд Тейлора по возмущению $\tilde{\mathbf{x}}$. Имеем:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x}(t))\tilde{\mathbf{x}} + \dots, \quad (9.2)$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t))$ есть матрица, составленная из частных производных от компонент векторной функции $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ по компонентам вектора $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1} & \frac{\partial F_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}. \quad (9.3)$$

Пренебрегая членами второго и более высокого порядка и учитывая, что $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет уравнению $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, находим, что эволюция малого возмущения $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ в линейном приближении описывается уравнением

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}. \quad (9.4)$$

Подчеркнем, что через посредство переменной $\mathbf{x}$, описывающей движение по невозмущенной траектории, матрица $\mathbf{A}$ зависит от времени: $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{x}(t)) \equiv \mathbf{A}(t)$.

Забудем пока об исходной задаче и будем рассматривать свойства решений линейного уравнения (9.4). Это как раз та математическая проблема, применительно к которой была сформулирована знаменитая *теорема Ляпунова*. Основное условие справедливости этой теоремы состоит в том, что должна существовать такая константа M , что для всех элементов матрицы A_{ij} и для произ-

вольного T величина $\frac{1}{T} \int_0^T |A_{ij}(t)| dt$ не превышает M .

Теорема утверждает следующее.

1) Для любого решения уравнения (9.4) $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ существует *ляпуновский характеристический показатель* — вещественное число, отличное от $\pm\infty$, определяемое как верхний предел,

$$\Lambda_{\tilde{\mathbf{x}}(t)} = \overline{\lim_{T \rightarrow \infty}} \frac{1}{T} \ln \|\tilde{\mathbf{x}}(T)\|. \quad (9.5)$$

2) При умножении решения на константу ляпуновский показатель не меняется, т. е.

$$\Lambda_{C\tilde{\mathbf{x}}(t)} = \Lambda_{\tilde{\mathbf{x}}(t)}. \quad (9.6)$$

3) Ляпуновский показатель линейной комбинации двух решений, $\tilde{\mathbf{x}}_1(t)$ и $\tilde{\mathbf{x}}_2(t)$, меньше или равен большему из показателей этих двух решений, т. е.

$$\Lambda_{C_1\tilde{\mathbf{x}}_1+C_2\tilde{\mathbf{x}}_2} \leq \max(\Lambda_{\tilde{\mathbf{x}}_1}, \Lambda_{\tilde{\mathbf{x}}_2}). \quad (9.7)$$

4) Имеется N (по размерности фазового пространства) линейно независимых решений уравнения (9.4) $\tilde{\mathbf{x}}_i(t)$ (фундаментальная система решений), которым отвечает N ляпуновских показателей, нумеруемых в порядке убывания: $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_N$. Наибольшее из этих чисел, Λ_1 , называют старшим ляпуновским показателем.

Спектр ляпуновских показателей, т. е. набор чисел $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N\}$, следует рассматривать как характеристику линейной системы уравнений (9.4), а не какого-то одного решения $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, поскольку он не зависит от выбора фундаментальной системы $\{\tilde{\mathbf{x}}_i(t)\}$. Для любого решения $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ ляпуновским показателем будет обязательно одно из чисел $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N\}$.

Вернемся теперь к исходной задаче, т. е. к нелинейной системе уравнений (9.1). Для каждой траектории $\mathbf{x}(t)$ уравнение в вариациях (9.4) даст определенный спектр ляпуновских показателей. Присутствие в этом спектре показателя Λ означает, что существует такое возмущение исходной траектории, которое эволюционирует во времени, грубо говоря, как $\exp(\Lambda t)$ (пока амплитуда мала и оправдано использование линейного приближения). Следовательно, наличие в спектре хотя бы одного положительного ляпуновского показателя означает неустойчивость рассматриваемой фазовой траектории. Если все показатели отрицательны, то это говорит об асимптотической устойчивости траектории. Если старший показатель нулевой, то это может свидетельствовать о недостаточности линейного анализа для заключения об устойчивости или неустойчивости траектории по Ляпунову.

В качестве примеров, допускающих простой анализ, рассмотрим задачу о вычислении ляпуновских показателей для неподвижной точки и для замкнутой траектории — предельного цикла.

В случае неподвижной точки $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0 = \text{const}$, и матрица $\mathbf{A}$ в уравнении (9.4) постоянна. Возмущение $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ представляется в виде суперпозиции собственных векторов этой матрицы как

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \sum_{s=1}^N C_s \tilde{\mathbf{x}}_s \exp(\lambda_s t), \quad (9.8)$$

где $\tilde{\mathbf{x}}_s$ и λ_s — собственные векторы и собственные значения, определяемые из уравнения $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}_s = \lambda_s\tilde{\mathbf{x}}_s$. Вещественному собственному числу отвечает ляпуновский показатель $\Lambda = \lambda_s$, а комплексному $\Lambda = \operatorname{Re}\lambda_s$, так что каждая комплексно-сопряженная пара собственных чисел дает два одинаковых показателя.

Если имеется хотя бы один положительный ляпуновский показатель, то неподвижная точка неустойчива. Если же все показатели отрицательны, то это означает асимптотическую устойчивость.

В случае предельного цикла зависимость состояния от времени периодическая, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + T)$. Также периодической будет и зависимость от времени матрицы $\mathbf{A}$. В силу линейности уравнения в вариациях (9.4), векторы возмущения в моменты времени $t = nT$ и $t = (n + 1)T$ связаны посредством некоторой матрицы $\mathbf{U}_T$, которую называют *матрицей монодромии*:

$$\tilde{\mathbf{x}}((n + 1)T) = \mathbf{U}_T\tilde{\mathbf{x}}(nT). \quad (9.9)$$

Матрицу $\mathbf{U}_T$ можно найти численно. Если задать в качестве начального условия для $\mathbf{x}$ точку на цикле, а для $\tilde{\mathbf{x}}$ — вектор $[0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0]$, где единица стоит на i -й позиции, и провести совместное решение уравнений (9.1) и (9.4) на интервале в один период T , то полученный в результате вектор $\tilde{\mathbf{x}}(T)$ будет представлять собой i -й столбец матрицы $\mathbf{U}_T$.

Рассмотрим задачу на собственные векторы и собственные значения для матрицы монодромии:

$$\mathbf{U}_T\tilde{\mathbf{x}}_s = \mu_s\tilde{\mathbf{x}}_s. \quad (9.10)$$

Собственные числа μ_s могут быть вещественными или комплексными и их называют *мультипликаторами* цикла. Предполагая для простоты, что матрица невырожденная, можно представить решение уравнения в вариациях в виде суперпозиции собственных векторов:

$$\tilde{\mathbf{x}}(nT) = \sum_{s=1}^N C_s \tilde{\mathbf{x}}_s \mu_s^n. \quad (9.11)$$

Если возмущение направлено вдоль собственного вектора, имеющего действительное собственное число, то на каждом очередном периоде цикла оно просто умножается на μ_s , так что амплитуда нарастает по закону

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(nT)\| \cong |\mu|^n. \quad (9.12)$$

Рассматривая случай комплексного собственного числа $\mu = \rho e^{i\vartheta}$, в формуле (9.11) следует учесть вклад двух комплексно-сопряженных членов, так что возмущение ведет себя как

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(nT)\| = |C\mu^n + C^*\mu^{*n}| = |C\rho^n \cos(n\vartheta + \arg C)|. \quad (9.13)$$

Вычисляя *верхний* предел $\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} (1/T) \ln \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$, можно не обращать внимание на множитель $\cos(n\vartheta + \arg C)$. Таким образом, в обоих случаях ляпуновский показатель предельного цикла дается соотношением

$$\Lambda = \frac{1}{T} \ln |\mu|. \quad (9.14)$$

Наличие мультипликатора, превышающего по модулю единицу, означает присутствие положительного ляпуновского показателя и неустойчивость цикла. Следует отметить, что у любой периодической траектории, устойчивой или неустойчивой, обязательно имеется нулевой ляпуновский показатель, связанный с возмущением типа сдвига вдоль траектории. Действительно, такое возмущение в среднем не нарастает и не затухает во времени: возмущенное решение отвечает движению изображающей точки по той же траектории и имеет, следовательно, такой же временной период, что и невозмущенное. Таким образом, устойчивый предельный цикл имеет нулевой старший показатель, тогда как остальные показатели отрицательны.

Геометрический и алгебраический смысл ляпуновских показателей. Представим себе ансамбль систем, каждая из которых описывается уравнением (9.1), и все они характеризуются слегка отличающимися начальными условиями, так что в фазовом пространстве системы имеем шарообразное облако изображающих точек малого радиуса ε с центром на траектории $\mathbf{x}(t)$. С течением времени, по мере того как каждая точка облака движется по своей фазовой траектории, оно будет деформироваться. До тех пор пока размеры облака еще можно считать малыми, оно будет иметь вид N -мерного эллипсоида (рис. 9.4). Пусть его размеры по N главным

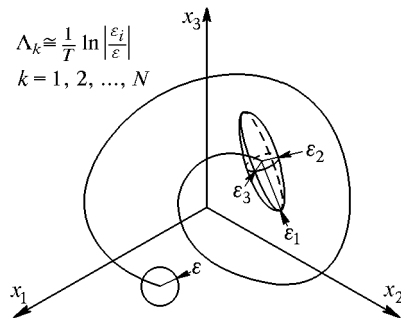


Рис. 9.4. Геометрическая интерпретация спектра ляпуновских показателей: каждый из показателей характеризует изменение масштаба вдоль одной из главных осей эллипсоида, в который за большое время T переходит бесконечно малый шарик с центром на рассматриваемой траектории

полуосям в момент времени t будут $\{l_1, l_2, \dots, l_N\} = \{\varepsilon \exp(\Lambda_1 t), \varepsilon \exp(\Lambda_2 t), \dots, \varepsilon \exp(\Lambda_N t)\}$. В пределе малых ε и больших t фигурирующие здесь величины $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N\}$ как раз и определяют спектр ляпуновских характеристических показателей. Таким образом, каждый показатель отвечает за расширение или сжатие эллипсоида изображающих точек вдоль одной из его главных осей.

Более формальная, алгебраическая интерпретация ляпуновских показателей состоит в следующем (Greene, Kim, 1987). Рассмотрим вновь определенную фазовую траекторию $\mathbf{x}(t)$ и эволюцию малого возмущения $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ вдоль этой траектории. Определение ляпуновского показателя (9.5) можно переписать следующим образом:

$$\Lambda = \overline{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \ln \|\tilde{\mathbf{x}}(T)\|^2} = \overline{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \ln (\tilde{\mathbf{x}}^+(T), \tilde{\mathbf{x}}(T))}, \quad (9.15)$$

где крестик обозначает транспонированный вектор, а круглые скобки — скалярное произведение:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_N \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}^+ = (\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \dots \tilde{x}_N), \quad (9.16)$$

$$(\tilde{\mathbf{x}}^+, \tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \dots + \tilde{x}_N^2 = \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2.$$

В силу линейности уравнения в вариациях (9.4), векторы возмущения в начальный ($t = 0$) и конечный ($t = T$) моменты времени связаны посредством некоторой матрицы $\mathbf{U}_T$ — матрицы эволюции:

$$\tilde{\mathbf{x}}(T) = \mathbf{U}_T \tilde{\mathbf{x}}(0). \quad (9.17)$$

В соответствии с правилами линейной алгебры отсюда следует, что $\tilde{\mathbf{x}}^+(T) = \tilde{\mathbf{x}}^+(0) \mathbf{U}_T^+$. Поэтому можно записать

$$\frac{1}{T} \ln \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| = \frac{1}{2T} \ln (\tilde{\mathbf{x}}^+(0) \mathbf{U}_T^+ \mathbf{U}_T \tilde{\mathbf{x}}(0)). \quad (9.18)$$

Рассмотрим задачу на собственные векторы и собственные значения для матрицы $\mathbf{V}_T = \mathbf{U}_T^+ \mathbf{U}_T$:

$$\mathbf{V}_T \mathbf{u} = \kappa_s \mathbf{u}. \quad (9.19)$$

Эта матрица размера $N \times N$ будет иметь N штук собственных векторов $\mathbf{u}_s$ и собственных значений κ_s (среди которых могут быть и вырожденные). Если в качестве вектора возмущения задан один

из собственных векторов матрицы $\mathbf{V}_T$, то в асимптотике по T получаем как раз один из N показателей Ляпунова:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \ln \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| &= \frac{1}{2T} \ln (\tilde{\mathbf{x}}^+(0) \mathbf{V} \tilde{\mathbf{x}}(0)) = \\ &= \frac{1}{2T} \ln (\tilde{\mathbf{x}}^+(0) \tilde{\mathbf{x}}(0) \kappa_s) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \Lambda_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln \kappa_s}{2T}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Собственные числа матрицы $\mathbf{V} = \mathbf{U}^+ \mathbf{U}$ называются *сингулярными числами* матрицы $\mathbf{U}$. Таким образом, проведенное рассуждение связывает спектр ляпуновских показателей со спектром сингулярных чисел матрицы эволюции малых возмущений исследуемой траектории. Известно, что сингулярные числа матрицы $N \times N$ составляют набор из N действительных положительных чисел, так что при подстановке в (9.20) всех возможных собственных векторов получается как раз полный спектр ляпуновских показателей.

Интерпретация сингулярных чисел состоит в том, что они представляют собой факторы пересчета масштаба вдоль главных осей эллипсоида, в который преобразуется шар с центром в начале координат при действии рассматриваемой матрицы. Это находится в очевидном соответствии с геометрической трактовкой ляпуновских показателей в начале данного раздела.

Ляпуновские показатели аттракторов. До сих пор, говоря о спектре ляпуновских показателей, мы имели в виду общую задачу об устойчивости некоторой фазовой траектории. Зададимся теперь более конкретным вопросом о динамике диссипативной системы в установившемся режиме, т. е. динамикой на аттракторе.

Если аттрактор представляет собой состояние равновесия или предельный цикл, то он состоит из одной траектории, и соответствующий спектр ляпуновских показателей естественным образом выступает как атрибут этого аттрактора. Однако аттрактор может иметь более сложную природу и включать множество траекторий, как, например, тор или странный аттрактор. В этом случае возникает вопрос, можно ли говорить о ляпуновских показателях аттрактора, поскольку разные траектории на нем могут иметь разные ляпуновские показатели. Считается, однако, что типичная, взятая наугад траектория на аттракторе с единичной вероятностью будет иметь некоторый вполне определенный спектр ляпуновских показателей, который можно отнести к аттрактору в целом. Математическую основу для этого утверждения дает так называемая *мультипликативная эргодическая теорема* В.И.Оселедеца, справедливая при очень общих предположениях; основное исходное условие состоит лишь в том, что на аттракторе должна быть определена естественная инвариантная мера (Оселедец, 1968).

Спектр ляпуновских показателей аттрактора обязан удовлетворять следующим требованиям.

Во-первых, сумма всех N показателей должна быть отрицательна:

$$\sum_{s=1}^N \Lambda_s < 0. \quad (9.21)$$

Это условие диссипативности, благодаря которому аттрактор является притягивающим множеством нулевой меры в фазовом пространстве, на котором концентрируется с течением времени облако изображающих точек.

Во-вторых, у аттрактора, отличного от неподвижной точки, обязательно должен иметься хотя бы один нулевой показатель. Действительно, рассмотрим две траектории на аттракторе, стартовые, соответственно, из точек $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}(\Delta t)$, где временной сдвиг Δt считается малым. По предположению, аттрактор не является неподвижной точкой, поэтому $\mathbf{y}_0$ не совпадает с $\mathbf{x}_0$. Обе изображающих точки следуют по одной траектории, т. е. отличаются только временным сдвигом, так что $\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t) \cong \frac{d\mathbf{x}}{dt} \Delta t = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \Delta t$. Норма этой разности ограничена: $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) \Delta t\| < M \Delta t$, так что ляпуновский показатель для возмущения типа сдвига вдоль по траектории нулевой: $\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} (1/T) \ln \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = 0$.

Обсудим, какими могут быть знаки ляпуновских показателей аттракторов при различной размерности фазового пространства системы. Будем считать, что показатели упорядочены в порядке убывания, и обозначать положительный показатель знаком плюс, отрицательный — знаком минус, а нулевой — нулем. Аттрактору в фазовом пространстве размерности N будет отвечать тогда определенный набор из N знаков, о котором говорят как о сигнатуре спектра ляпуновских показателей.

При $N = 1$ возможен только один вариант сигнатуры, $\langle - \rangle$, что соответствует аттрактору в виде неподвижной точки — состоянию равновесия.

Для $N = 2$ возможны два типа сигнатуры:

$\langle -, - \rangle$ — устойчивая неподвижная точка,

$\langle 0, - \rangle$ — предельный цикл.

Может ли сигнатура содержать знак плюс? Нет, вариант $\langle +, 0 \rangle$ исключается требованием диссипативности (сумма ляпуновских показателей не получалась бы отрицательной), а вариант $\langle +, - \rangle$ — условием обязательного наличия нулевого показателя аттрактора, не являющегося неподвижной точкой. Неподвижная же точка с такой сигнатурой неустойчива и не может быть аттрактором.

Возможность реализации аттрактора с положительным ляпуновским показателем возникает, начиная с размерности фазового пространства $N = 3$. В этом случае допустимые варианты таковы:

- $\langle -, -, - \rangle$ — притягивающая неподвижная точка,
- $\langle 0, -, - \rangle$ — предельный цикл,
- $\langle 0, 0, - \rangle$ — двумерный тор,
- $\langle +, 0, - \rangle$ — странный аттрактор.

Для больших размерностей фазового пространства количество возможностей увеличивается. Например, при $N = 4$ помимо странного аттрактора с одним положительным ляпуновским показателем $\langle +, 0, -, - \rangle$ может иметь место ситуация, именуемая *гиперхаосом*: $\langle +, +, 0, - \rangle$, когда положительных показателей два.

Замечательно, каким простым путем мы приходим к фундаментальному выводу — *принципиальная возможность реализации аттрактора с положительным ляпуновским показателем, а значит, и хаоса, возникает, начиная с размерности фазового пространства $N = 3$* . (В этом месте стоит еще раз подчеркнуть, что проведенное здесь рассмотрение относится к динамическим системам, описываемым автономными дифференциальными уравнениями. Именно для этих систем справедлива рассмотренная классификация по сигнатуре спектров ляпуновских показателей.)

Лекция 10

ЛЯПУНОВСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОЙ ОЦЕНКИ ЛЯПУНОВСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

В этой лекции мы сначала обсудим обобщение ляпуновских показателей для динамических систем, описываемых рекуррентными отображениями, и приведем примеры аналитического вычисления ляпуновских показателей в нескольких простых моделях.

Для сколько-нибудь реалистичных динамических систем ляпуновские показатели можно рассчитать только численно, и соответствующие алгоритмы будут рассмотрены во второй половине лекции.

Как известно, критерием хаоса является наличие положительного старшего ляпуновского показателя, поэтому его определение особенно важно, и в то же время алгоритм расчета сравнительно прост. Более сложной и уточненной является процедура вычисления нескольких ляпуновских показателей, которая также будет изложена.

10.1. Обобщение ляпуновских показателей на рекуррентные отображения

Рассмотрим динамическую систему, заданную рекуррентным отображением вида

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad (10.1)$$

где $\mathbf{x}$ — N -мерный вектор, n — индекс, обозначающий дискретное время.

Пусть $\mathbf{x}_n$ и $\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n + \tilde{\mathbf{x}}_n$ — две близкие траектории, порождаемые динамической системой (10.1) при немного различающихся начальных условиях. Подставим выражение для $\mathbf{y}$ в отображение (10.1) и разложим правую часть в ряд Тейлора по $\tilde{\mathbf{x}}$. Имеем:

$$\mathbf{x}_{n+1} + \tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{a}(\mathbf{x}_n)\tilde{\mathbf{x}}_n + \dots, \quad (10.2)$$

где $\mathbf{a}$ есть матрица частных производных от компонент векторной

функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ по компонентам вектора $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}. \quad (10.3)$$

Пренебрегая членами второго и более высокого порядка и учитывая, что $\mathbf{x}_n$ удовлетворяет уравнению (10.1), находим, что эволюция малого возмущения в линейном приближении описывается уравнением

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{a}(\mathbf{x}_n) \tilde{\mathbf{x}}_n. \quad (10.4)$$

Ляпуновский показатель траектории $\mathbf{x}_n$ определяется как

$$\Lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|\tilde{\mathbf{x}}_n\|, \quad (10.5)$$

где черта означает верхний предел.

В частном случае одномерных отображений

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (10.6)$$

уравнение (10.4) принимает вид

$$\tilde{x}_{n+1} = f'(x_n) \tilde{x}_n. \quad (10.7)$$

Поэтому $\tilde{x}_n = \left(\prod_{i=0}^n f'(x_i) \right) \cdot \tilde{x}_0$, и из определения (10.5) следует, что ляпуновский показатель есть

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (10.8)$$

Ляпуновские показатели можно ввести также через матрицу эволюции малых возмущений и ее сингулярные числа. Из уравнения (10.4) видно, что матрица эволюции за M шагов итераций определяется как

$$\mathbf{u}_M = \mathbf{a}(\mathbf{x}_{M-1}) \mathbf{a}(\mathbf{x}_{M-2}) \dots \mathbf{a}(\mathbf{x}_0). \quad (10.9)$$

Соответственно, транспонированная матрица есть

$$\mathbf{u}_M^+ = \mathbf{a}^+(\mathbf{x}_0) \mathbf{a}^+(\mathbf{x}_1) \dots \mathbf{a}^+(\mathbf{x}_{M-1}). \quad (10.10)$$

Далее, по аналогии с (9.18) можно записать

$$\frac{1}{n} \ln \|\tilde{\mathbf{x}}_n\| = \frac{1}{2n} \ln (\tilde{\mathbf{x}}_0^+ \mathbf{u}_n^+ \mathbf{u}_n \tilde{\mathbf{x}}_0), \quad (10.11)$$

после чего ляпуновские показатели определяются через спектр собственных чисел матрицы $\mathbf{v}_n = \mathbf{u}_n^+ \mathbf{u}_n$, а именно,

$$\mathbf{v}_n \mathbf{h}_s = \chi_s \mathbf{h}_s, \quad (10.12)$$

$$\Lambda_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \chi_s}{2n}. \quad (10.13)$$

Матрица $\mathbf{v}$ имеет размер $N \times N$, так что спектр содержит N ляпуновских показателей. Геометрическая интерпретация, рассмотренная в предыдущей лекции, остается в силе: ляпуновские показатели характеризуют изменение масштаба вдоль главных осей эллипсоида, в который преобразуется в процессе эволюции шар бесконечно малого радиуса с центром на рассматриваемой траектории, при усреднении за достаточно большой временной интервал.

Как и в случае дифференциальных уравнений, спектр ляпуновских показателей аттрактора следует понимать как определенный для типичной траектории на аттракторе. Тех ограничений на сигнатуру спектра, какие имели место для автономных дифференциальных уравнений, у отображений нет. Нулевой показатель может не присутствовать. Свойство диссипативности также не обязательно выполняться, если отображение необратимо. Обратившись к примерам из лекции 2, для которых ляпуновские показатели вычисляются аналитически, мы обнаружим варианты хаотических режимов с сигнатурой спектра $\langle + \rangle$ в одномерных отображениях и $\langle +, - \rangle$ в двумерных.

10.2. Примеры аналитического расчета ляпуновских показателей

Первый пример — отображение «зуб пилы» (см. рис. 2.2). Производная $f'(x)$ везде, где она определена, равна 2, так что из (10.8) получаем $\Lambda = \ln 2 = 0,6931$.

Второй пример — логистическое отображение при значении параметра $\lambda = 2$: $x_{n+1} = 1 - 2x_n^2$ (см. рис. 2.3). Уравнение в вариациях имеет вид

$$\tilde{x}_{n+1} = -4x_n \tilde{x}_n. \quad (10.14)$$

Производная $f'(x) = -4x$ непостоянна, так что для вычисления ляпуновского показателя нужно изобрести какой-то трюк. Введем

вместо $\tilde{x}$ новую переменную $\xi = \tilde{x}/\sqrt{1-x^2}$. Подставляя выражение $\tilde{x}$ через ξ в обе части уравнения (10.14), получаем

$$\xi_{n+1} \sqrt{1-x_{n+1}^2} = -4x_n \xi_n \sqrt{1-x_n^2},$$

или, после подстановки $x_{n+1} = 1 - 2x_n^2$, сокращения на общий множитель и взятия абсолютной величины

$$|\xi_{n+1}| = 2|\xi_n|.$$

Отсюда следует, что

$$\ln |\xi_n| = \ln |\xi_0| + n \ln 2$$

и

$$\ln |\tilde{x}_n| = \ln |\tilde{x}_0| + n \ln 2 + \ln \sqrt{\frac{1-x_n^2}{1-x_0^2}}.$$

Последний член в этом выражении ограничен сверху и поэтому не влияет на величину верхнего предела в (10.5). Таким образом находим $\Lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (1/n) \ln |\tilde{\mathbf{x}}_n| = \ln 2$. Тот же результат можно было бы получить с помощью замены Улама–фон Неймана, обсуждавшейся в лекции 2.

Для отображения «косой тент» (см. рис. 2.4 и формулу (2.9)) производная может принимать два значения: $f'(x) = 1/\alpha$ при $0 \leq x < \alpha$ и $f'(x) = 1/(1-\alpha)$ при $\alpha < x \leq 1$. Соотношение (10.5) можно переписать в виде

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n_1}{n} \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right) + \frac{n_2}{n} \ln \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) \right], \quad (10.15)$$

где n_1 и n_2 — числа попаданий изображающей точки на левый и правый склон графика за n итераций. В пределе $n \rightarrow \infty$ отношения n_1/n и n_2/n отвечают вероятностям пребывания на левом и правом склоне и равны, соответственно, α и $1-\alpha$. Поэтому получаем $\Lambda = \alpha \ln (1/\alpha) + (1-\alpha) \ln (1/(1-\alpha))$. Например, при $\alpha = 0,7$ имеем $\Lambda = 0,6109$. При $\alpha = 1/2$ (симметричный тент) получаем, как и следовало ожидать, $\Lambda = \ln 2$.

Дальнейшие примеры относятся к двумерным отображениям.

Для отображения «кот Арнольда» (см. рис. 2.6) матрица эволюции малых возмущений за один шаг постоянна, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, а за n шагов итераций представляет собой n -ю степень данной матрицы, т. е. $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}^n$. Далее, замечаем, что $\mathbf{u} = \mathbf{u}^+$, так что имеем $\mathbf{v}_n = (\mathbf{u}^+ \mathbf{u})^n = \mathbf{u}^{2n}$. Собственные числа матрицы $\mathbf{v}_n$ будут $\chi_1 = \lambda_1^{2n}$ и $\chi_2 = \lambda_2^{2n}$, где $\lambda_1 = (3 + \sqrt{5})/2$ и $\lambda_2 = (3 - \sqrt{5})/2$ — собственные

числа матрицы $\mathbf{u}$. Из (10.11) получаем ляпуновские показатели: $\Lambda_1 = \ln((3 + \sqrt{5})/2) = 0,9624$ и $\Lambda_2 = \ln((3 - \sqrt{5})/2) = -0,9624$. Тот факт, что $\Lambda_1 + \Lambda_2 = 0$, отражает консервативную природу рассматриваемого отображения.

В качестве заключительного примера, найдем ляпуновские показатели странного аттрактора для обобщенного отображения пекаря:

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{\alpha} & \text{для } x \leq \alpha, \\ y' = \mu y & \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{x - \alpha}{1 - \alpha} \\ y' = 1 + \nu(y - 1) \end{cases} \quad \text{для } x > \alpha, \quad (10.16)$$

в котором $\alpha + \beta = 1$, $\mu + \nu < 1$ (см. рис. 2.8). Матрица эволюции возмущений за один шаг имеет вид

$$\mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} l_1(x) & 0 \\ 0 & l_2(x) \end{pmatrix}, \quad (10.17)$$

$$l_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & x \leq \alpha, \\ \frac{1}{1 - \alpha}, & x > \alpha, \end{cases} \quad l_2(x) = \begin{cases} \mu, & x < \alpha, \\ \nu, & x > \alpha, \end{cases}$$

ее элементы зависят от того, какое значение на этом шаге имеет переменная x . Вычислим далее матрицу $\mathbf{v}_n = (\mathbf{u}^+(x_0)\mathbf{u}^+(x_1)\dots\mathbf{u}^+(x_{n-1})\mathbf{u}(x_{n-1})\dots\mathbf{u}(x_1)\mathbf{u}(x_0))$. Учитывая, что все фигурирующие в этом выражении сомножители — диагональные матрицы, находим $\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix}$, где $\chi_1 = \prod_{i=0}^n l_1(x_i)$ и $\chi_2 = \prod_{i=0}^n l_2(x_i)$ — собственные числа матрицы $\mathbf{v}_n$. Таким образом,

$$\ln \chi_1 = \sum_{i=0}^{n-1} l_1(x_i) = \frac{n_1}{n} \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right) + \frac{n_2}{n} \ln \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right), \quad (10.18)$$

$$\ln \chi_2 = \sum_{i=0}^{n-1} l_2(x_i) = \frac{n_1}{n} \ln \mu + \frac{n_2}{n} \ln \nu. \quad (10.19)$$

В пределе $n \rightarrow \infty$ отношения n_1/n и n_2/n отвечают вероятностям пребывания изображающей точки слева или справа от вертикальной линии разреза на рис. 2.8 и стремятся, соответственно, к α и $1 - \alpha$. Поэтому из формулы (10.11) окончательно получаем

$$\Lambda_1 = \alpha \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right) + (1 - \alpha) \ln \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right), \quad \Lambda_2 = \alpha \ln \mu + (1 - \alpha) \ln \nu. \quad (10.20)$$

Например, при $\alpha = 0,3$, $\mu = 0,4$, $\nu = 0,2$ получаем $\Lambda_1 = 0,6108$ и $\Lambda_2 = -1,4015$. Сигнатура спектра ляпуновских показателей $\langle +, - \rangle$.

10.3. Алгоритм вычисления старшего ляпуновского показателя

Приведенные выше примеры, в которых для режимов сложной динамики удается аналитически найти ляпуновские показатели, являются исключительными. Как правило, для их определения приходится прибегать к численным методам. Рассмотрим сначала вычисление старшего ляпуновского показателя, что особенно важно для диагностики режимов сложной динамики — присутствие положительного старшего показателя является критерием хаоса.

Схема вычислений основывается непосредственно на определении (9.5) или (10.13) в зависимости от того, задана ли система дифференциальным уравнением или рекуррентным отображением.

Имеется две возможности:

- (1) взять две копии динамической системы с близкими начальными условиями и отследить характер эволюции расстояния между изображающими точками во времени;
- (2) решать систему уравнений динамики, описывающих движение изображающей точки вдоль фазовой траектории, совместно с уравнениями в вариациях, которые описывают эволюцию бесконечно малого возмущения этой траектории.

Первый способ можно предпочесть в том случае, когда по каким-либо причинам вызывает затруднение вывод или численное решение уравнения в вариациях. При этом в процессе расчетов нужно следить, чтобы расстояние между изображающими точками оставалось малым по сравнению с характерными масштабами неоднородности распределения векторного поля в фазовом пространстве. Второй способ свободен от указанного осложнения, но постановка задачи требует предварительного анализа (вывода уравнений в вариациях) и оказывается в итоге несколько более громоздкой. Все же второму способу в большинстве случаев следует отдать предпочтение.

Имеется еще третий подход, который основан на обработке записи реализации временной зависимости одной или нескольких динамических переменных. Этот подход будет обсуждаться в одной из последующих лекций. Его можно рекомендовать только в тех случаях, когда речь идет не о численном решении динамических уравнений, а, например, о необходимости извлечь информацию о динамике системы из экспериментальных данных.

Процедура вычисления старшего ляпуновского показателя начинается с того, что производится численное решение динамических уравнений на интервале времени, достаточном, чтобы иметь уверенность в выходе траектории на аттрактор. В результате получаем некоторую точку фазового пространства $\mathbf{x}_0$, которую принимаем за исходную. Дальнейшая последовательность действий иллюстрируется на рис. 10.1 и известна как *алгоритм Бенеттина* (Benettin et al., 1976).

Рассмотрим траекторию, исходящую из точки $\mathbf{x}_0$, и возмущенную траекторию, стартующую из точки $\mathbf{x}_0 + \tilde{\mathbf{x}}_0^0$, $\|\tilde{\mathbf{x}}_0^0\| = \varepsilon$. Зададимся некоторым интервалом времени T и, решая численно

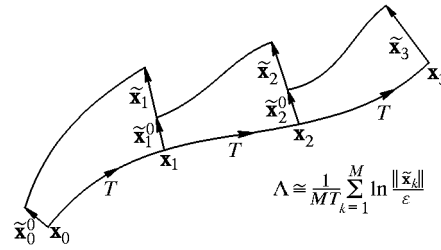


Рис. 10.1. К оценке старшего ляпуновского показателя с помощью алгоритма Бенеттина (см. текст)

уравнения динамики, найдем вектор состояния и его возмущение в момент T : $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_1$, $\tilde{\mathbf{x}}(T) = \tilde{\mathbf{x}}_1$. Отношение $\|\tilde{\mathbf{x}}_1\|/\varepsilon$ характеризует изменение нормы вектора возмущения за время T . Теперь переопределим этот вектор так, чтобы его направление осталось тем же, а норма стала равна исходному значению ε , а именно, $\tilde{\mathbf{x}}_1^0 = \varepsilon \tilde{\mathbf{x}}_1 / \|\tilde{\mathbf{x}}_1\|$ ¹⁾. Далее, продолжим процедуру численного решения уравнений с начальной точкой $\mathbf{x}_1$ и для возмущенной траектории с начальной точкой $\mathbf{x}_1 + \tilde{\mathbf{x}}_1^0$. Получив вектор состояния и возмущения в момент $2T$: $\mathbf{x}(2T) = \mathbf{x}_2$, $\tilde{\mathbf{x}}(2T) = \tilde{\mathbf{x}}_2$, вычислим отношение $\|\tilde{\mathbf{x}}_2\|/\varepsilon$, переопределим вектор возмущения $\tilde{\mathbf{x}}_2^0 = \varepsilon \tilde{\mathbf{x}}_2 / \|\tilde{\mathbf{x}}_2\|$ и т. д. Если начальная точка $\mathbf{x}_0$ может рассматриваться как лежащая на типичной траектории в аттракторе, и начальное возмущение $\tilde{\mathbf{x}}_0^0$ задано наугад, то эволюция амплитуды возмущения будет определяться, очевидно, старшим ляпуновским показателем. Фактор изменения амплитуды возмущения за M шагов выражается как $P = \prod_{k=1}^M (\|\tilde{\mathbf{x}}_k\|/\varepsilon)$. Поэтому старший ляпуновский показатель

¹⁾ При наличии хаоса амплитуда возмущения быстро нарастает. Переопределение амплитуды возмущения необходимо для того, чтобы не дать ей увеличиться до уровня, сравнимого с характерным масштабом неоднородности фазового пространства, или для избежания переполнения числовых регистров компьютера.

оценивается как

$$\Lambda \cong \frac{1}{MT} \ln P = \frac{1}{MT} \sum_{k=1}^M \ln \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}_k\|}{\varepsilon}, \quad (10.21)$$

при этом число шагов M должно быть достаточно большим. Для получения статистически достоверной оценки ляпуновского показателя, а также оценки погрешности желательно повторить процедуру несколько раз с разными начальными условиями для вектора состояния и вектора возмущения, подвергая результаты стандартным процедурам статистической обработки (оценка среднего, среднеквадратичного отклонения, доверительного интервала).

При реализации алгоритма на основе совместного решения исходных уравнений системы и уравнений в вариациях нет жестких ограничений на выбор параметров ε и T . Величина T не должна быть слишком большой, чтобы не допустить переполнения числовых регистров компьютера, а ε можно просто положить равным 1.

10.4. Ортогонализация Грама–Шмидта и вычисление спектра ляпуновских показателей

Чтобы вычислить несколько ляпуновских показателей, необходимо отслеживать эволюцию соответствующего числа векторов возмущения вдоль рассматриваемой фазовой траектории. Если не предпринимать специальных мер, то в каждом векторе будет представлена составляющая с максимальным ляпуновским показателем, которая будет доминировать на больших временах, и оценить следующие показатели не удастся. Попытка рассчитать полную матрицу эволюции и ее сингулярные числа также обычно не приводит к успеху. По той же самой причине, из-за доминирования возмущения с максимальным ляпуновским показателем, задача оказывается плохо обусловленной.

Работоспособный метод оценки спектра ляпуновских показателей можно сконструировать как обобщение алгоритма Бенеттина, причем переопределение векторов возмущения должно состоять не только в изменении нормы, но сопровождаться их ортогонализацией (Benettin et al., 1980).

В линейной алгебре известна ортогонализация Грама–Шмидта, простая процедура построения ортонормированной системы, исходя из набора векторов

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_N, \quad (10.22)$$

которые, как предполагается, не являются линейно зависимыми.

Пусть норма вектора и скалярное произведение векторов определены стандартным образом: для $\mathbf{a} = (x, y, \dots, z)$ и $\mathbf{b} = (u, v, \dots, w)$ имеем $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + \dots + z^2}$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$

$= xu + yv + \dots + zw$. Новый набор $\mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0, \mathbf{a}_3^0, \dots, \mathbf{a}_N^0$ строится по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^0 &= \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|}, \\ \mathbf{a}_2' &= \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1^0)\mathbf{a}_1^0, \quad \mathbf{a}_2^0 = \frac{\mathbf{a}_2'}{\|\mathbf{a}_2'\|}, \\ \mathbf{a}_3' &= \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1^0)\mathbf{a}_1^0 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2^0)\mathbf{a}_2^0, \quad \mathbf{a}_3^0 = \frac{\mathbf{a}_3'}{\|\mathbf{a}_3'\|}, \\ \mathbf{a}_4' &= \mathbf{a}_4 - (\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_1^0)\mathbf{a}_1^0 - (\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_2^0)\mathbf{a}_2^0 - (\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_3^0)\mathbf{a}_3^0, \quad \mathbf{a}_4^0 = \frac{\mathbf{a}_4'}{\|\mathbf{a}_4'\|}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (10.23)$$

Как нетрудно проверить, полученная система векторов ортонормированная:

$$(\mathbf{a}_i^0, \mathbf{a}_j^0) = \delta_{ij}. \quad (10.24)$$

Вернемся к проблеме расчета ляпуновских показателей. Процедура, позволяющая получить заданное число K показателей, наибольших по величине из набора, занумерованного в порядке убывания, состоит в следующем. Возьмем за исходную некоторую точку на аттракторе $\mathbf{x}_0$ и будем отслеживать вместе с исходящей из нее траекторией эволюцию K векторов возмущения. Пусть, например, $K = 3$, тогда необходимо решать численно исходные уравнения системы, дополненные тремя комплектами уравнений в вариациях. В качестве начальных векторов возмущения задаем набор векторов $\tilde{\mathbf{x}}_0^0, \tilde{\mathbf{y}}_0^0, \tilde{\mathbf{z}}_0^0$, которые ортогональны друг другу и нормированы на единицу. Через некоторое время T траектория придет в точку $\mathbf{x}_1$, а векторы возмущения будут $\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_1$. Перенормируем их и ортогонализуем по Граму–Шмидту:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_1^0 &= \frac{\tilde{\mathbf{x}}_1}{\|\tilde{\mathbf{x}}_1\|}, \\ \tilde{\mathbf{y}}_1' &= \tilde{\mathbf{y}}_1 - (\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_1^0)\tilde{\mathbf{x}}_1^0, \quad \tilde{\mathbf{y}}_1^0 = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_1'}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1'\|}, \\ \tilde{\mathbf{z}}_1' &= \tilde{\mathbf{z}}_1 - (\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_1^0)\tilde{\mathbf{x}}_1^0 - (\tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{y}}_1^0)\tilde{\mathbf{y}}_1^0, \quad \tilde{\mathbf{z}}_1^0 = \frac{\tilde{\mathbf{z}}_1'}{\|\tilde{\mathbf{z}}_1'\|}. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Далее, продолжаем счет, отправляясь от точки $\mathbf{x}_1$ и векторов возмущения $\tilde{\mathbf{x}}_1^0, \tilde{\mathbf{y}}_1^0, \tilde{\mathbf{z}}_1^0$. Через очередной интервал времени T получаем новый набор векторов возмущения $\tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{y}}_2, \tilde{\mathbf{z}}_2$, который вновь подвергается ортогонализации и перенормировке по правилу (10.25). Описанная последовательность действий повторяется достаточно большое число раз M , при этом по ходу вычислений под-

считываются суммы

$$S_1 = \sum_{i=1}^M \ln \|\tilde{\mathbf{x}}_i\|, \quad S_2 = \sum_{i=1}^M \ln \|\tilde{\mathbf{y}}'_i\|, \quad S_3 = \sum_{i=1}^M \ln \|\tilde{\mathbf{z}}'_i\|, \quad (10.26)$$

в которых фигурируют векторы возмущения до перенормировки, но после ортогонализации. Оценка первых трех ляпуновских показателей получается как

$$\Lambda_i = \frac{S_i}{MT}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10.27)$$

10.5. Примеры численного расчета ляпуновских показателей

Отображение Эно. Отображение

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - by_n, \quad y_{n+1} = x_n \quad (10.28)$$

при задании «классического» набора параметров $a = 1,4$, $b = -0,3$ имеет странный аттрактор. Фазовое пространство двумерно, поэтому спектр содержит два ляпуновских показателя. Для их вычисления отображение (10.28) итерируется совместно с двумя комплектами уравнений в вариациях

$$\tilde{x}_{n+1} = -2ax_n\tilde{x}_n - b\tilde{y}_n, \quad \tilde{y}_{n+1} = \tilde{x}_n, \quad (10.29)$$

при этом по ходу вычислений производится перенормировка и ортогонализация векторов возмущений по Граму–Шмидту, как это объяснялось в предыдущем разделе. На рис. 10.2 показана зависимость сумм $S_{1,2}$ от времени накопления t . Ляпуновские показате-

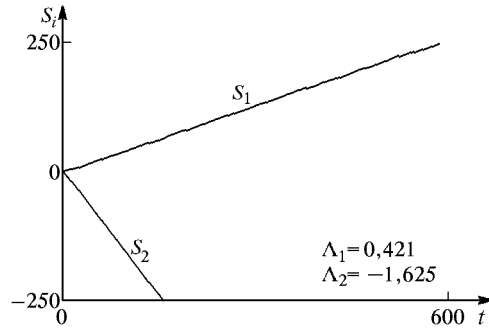


Рис. 10.2. К вычислению двух ляпуновских показателей странного аттрактора отображения Эно с использованием ортогонализации по Граму–Шмидту. Значения параметров $a = 1,4$, $b = -0,3$. Ляпуновские показатели определяют наклон прямых, аппроксимирующих зависимости сумм (10.26) от времени накопления t . Сумма ляпуновских показателей равна $\ln |b| = -1,20397$

тели определяют наклон прямых, аппроксимирующих эти зависимости. Отметим, что сумма ляпуновских показателей отрицательна, как это и должно быть для аттрактора. Можно показать, что она точно равна $\ln |b| = -1,20397$, что хорошо согласуется с результатами численного расчета.

Система Лоренца. Для вычисления спектра ляпуновских показателей система уравнений

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy \quad (10.30)$$

дополняется тремя комплектами уравнений в вариациях вида

$$\dot{\tilde{x}} = \sigma(\tilde{y} - \tilde{x}), \quad \dot{\tilde{y}} = r\tilde{x} - \tilde{y} - x\tilde{z} - \tilde{x}z, \quad \dot{\tilde{z}} = -b\tilde{z} + x\tilde{y} + \tilde{x}y. \quad (10.31)$$

Полная система, содержащая 12 уравнений, решается численно методом Рунге–Кутты с использованием перенормировки векторов возмущения и их ортогонализации по ходу вычислений. На рис. 10.3 приводятся результаты расчета зависимости сумм $S_{1,2,3}$ от времени, наклон графиков дает три ляпуновских показателя.

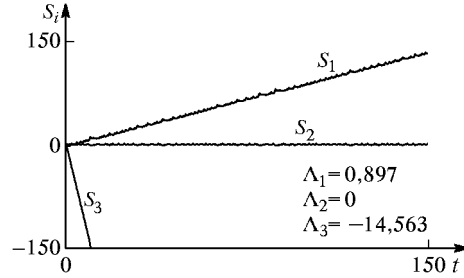


Рис. 10.3. К вычислению трех ляпуновских показателей аттрактора системы Лоренца с использованием ортогонализации по Граму–Шмидту. Значения параметров $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$. Ляпуновские показатели определяют наклон прямых, аппроксимирующих зависимости сумм (10.26) от времени накопления t . Обратите внимание, что у системы Лоренца, как автономной системы с непрерывным временем, имеется нулевой показатель, и что сумма ляпуновских показателей равна $-(\sigma + b + 1) = -13,666$

Сигнатура спектра показателей $\langle +, 0, - \rangle$. Наличие положительного старшего показателя свидетельствует о хаотической природе аттрактора. В силу того, что система дифференциальных уравнений автономная, имеется нулевой показатель. Благодаря присутствию большого по абсолютной величине отрицательного показателя, сумма всех трех показателей отрицательна (аттрактор). Она обязана равняться константе $-(\sigma + b + 1)$, фигурирующей в соотношении для элемента фазового объема $\Delta V = \Delta V_0 \exp [-(\sigma + b + 1)t]$ (см. лекцию 4).

Гиперхаос Ресслера. Предложенный Ресслером (Rössler, 1979) пример динамической системы, аттрактор которой характеризуется наличием двух положительных ляпуновских показателей, описывается системой уравнений

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + ay + w, \quad \dot{z} = b + xz, \quad \dot{w} = cw - dz, \quad (10.32)$$

где $a = 0,25$, $b = 3$, $c = 0,05$, $d = 0,5$.

Уравнения в вариациях имеют вид

$$\dot{\tilde{x}} = -\tilde{y} - \tilde{z}, \quad \dot{\tilde{y}} = \tilde{x} + a\tilde{y} + \tilde{w}, \quad \dot{\tilde{z}} = \tilde{x}z + x\tilde{z}, \quad \dot{\tilde{w}} = c\tilde{w} - d\tilde{z}. \quad (10.33)$$

Для расчета спектра ляпуновских показателей удобно использовать модифицированный метод с ортогонализацией по Граму–Шмидту, в рамках которого для сокращения объема вычислений и повышения их точности используется, как известный факт, что

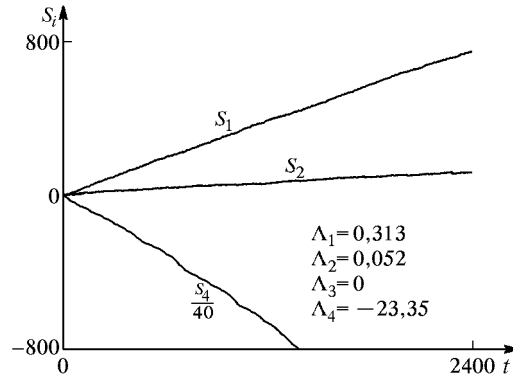


Рис. 10.4. К вычислению ненулевых ляпуновских показателей гиперхаоса Ресслера (система (10.32) при $a = 0,25$, $b = 3$, $c = 0,05$, $d = 0,5$) с использованием ортогонализации по Граму–Шмидту. Ляпуновские показатели определяют наклон прямых, аппроксимирующих зависимости сумм (10.26) от времени накопления t

один из ляпуновских показателей нулевой, и ему отвечает вектор возмущения, направленный вдоль траектории $\tilde{\mathbf{r}}_0 = \{-y - z, x + ay + w, b + xz, cw - dz\}$. Для получения ненулевых показателей Ляпунова уравнение (10.32) решается совместно с тремя комплектами уравнений в вариациях, к решениям которых применяется процедура ортогонализации к вектору $\tilde{\mathbf{r}}_0$ и друг к другу, как было объяснено выше. На рис. 10.4 приводится график зависимости сумм S_i от времени накопления. Видно, что два показателя положительные и один отрицательный. Обратите внимание, что сумма ляпуновских показателей отрицательна, что обеспечивает притяжение траекторий к аттрактору.

10.6. Зависимость ляпуновского показателя от параметра

Рассмотрим одномерное логистическое отображение

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad (10.34)$$

содержащее параметр λ , от которого зависит характер динамики при итерациях. От него будет зависеть, очевидно, и ляпуновский показатель. При каждом фиксированном λ для вычисления ляпуновского показателя можно использовать соотношение (10.8), в котором следует положить $f'(x) = -2\lambda x$. Проведя такие расчеты для различных значений параметра с некоторым достаточно малым шагом в интервале, скажем, от 1 до 2, получаем замечательный график (рис. 10.5), содержащий обширную информацию о характере динамики данной системы. При значении параметра

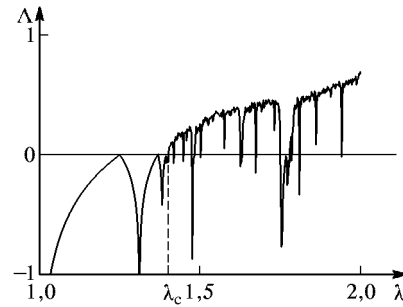


Рис. 10.5. Зависимость ляпуновского показателя Λ логистического отображения (10.34) от параметра λ . Множество значений λ , отвечающих положительному ляпуновскому показателю, т. е. хаосу, располагается в области $\lambda > \lambda_c$.

тра $\lambda = \lambda_c \cong 1,4$ располагается критическая точка, которая разграничивает области регулярной и сложной динамики. В докритической области ляпуновский показатель отрицателен и подходит к нулю только в отдельных точках, отвечающих бифуркациям удвоения периода. В закритической области имеется множество значений параметра, при которых ляпуновский показатель положителен, т. е. реализуется хаос. Это множество сложно и тонко устроено. Как можно видеть, график ляпуновского показателя содержит провалы в область отрицательных значений, они соответствуют так называемым окнам периодичности. Это конечные по ширине интервалы значений параметра в закритической области, где режим динамики оказывается периодическим.

Такого рода зависимость ляпуновского показателя от параметра очень характерна для широкого класса диссипативных нелинейных систем, демонстрирующих переход к хаосу через удвоения периода, и будет сейчас проиллюстрирована на более сложном примере — модели Ресслера.

Для вычисления трех ляпуновских показателей система

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = b - rz + xz \quad (10.35)$$

должна решаться численно совместно с тремя комплектами уравнений в вариациях

$$\dot{\tilde{x}} = -\tilde{y} - \tilde{z}, \quad \dot{\tilde{y}} = \tilde{x} + a\tilde{y}, \quad \dot{\tilde{z}} = -r\tilde{z} + \tilde{x}z + x\tilde{z}, \quad (10.36)$$

с выполнением перенормировки векторов возмущения и их ортогонализации по ходу процедуры. Зафиксируем два параметра $a = 0,2$, $b = 0,2$ и исследуем зависимость ляпуновских показателей от оставшегося параметра r . Результаты вычислений показаны на рис. 10.6. Во всем интервале изменения параметра один

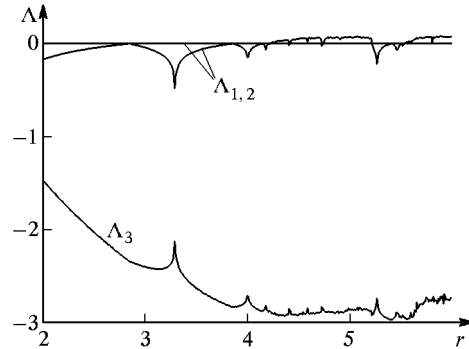


Рис. 10.6. Зависимость трех ляпуновских показателей от параметра r , полученная численно для модели Ресслера при $a = b = 0,2$

из показателей остается нулевым, и один отрицательным. Что касается другого отличного от нуля показателя, то он демонстрирует зависимость от параметра, замечательно похожую на рис. 10.5. Критическая точка находится примерно при $r \cong 4,2$, в докритической области показатель отрицателен, в закритической — положителен за исключением окон периодичности. Сходство с рис. 10.5 не случайно. Известно, что модель Ресслера в рассматриваемом интервале параметра r демонстрирует переход к хаосу через удвоения периода такого же типа, как и логистическое отображение (подробнее см. лекции 15, 16).

10.7. Двухпараметрический анализ и карты ляпуновских показателей

Если рассматривается динамика системы, уравнения которой содержат два управляющих параметра, то очень полезное представление о возможных в ней режимах динамики дает построение

карты на плоскости параметров, где различными цветами или тонами серого цвета обозначены уровни значений наибольшего отличного от нуля ляпуновского показателя Λ .

В цветном варианте можно использовать правило кодировки, принятое в географии: глубины морей, т. е. области отрицательных значений Λ , — тона от фиолетового и темно-синего до светло-голубого, суша, т. е. области положительного показателя, — тона от желтого и оранжевого до красного и коричневого («горы»).

В варианте кодировки тонами серого цвета, по-видимому, наиболее наглядными получаются карты, где области регулярной динамики обозначены тонами от темно-серого («глубины», большие по абсолютной величине отрицательные Λ) до белого («отмели»,

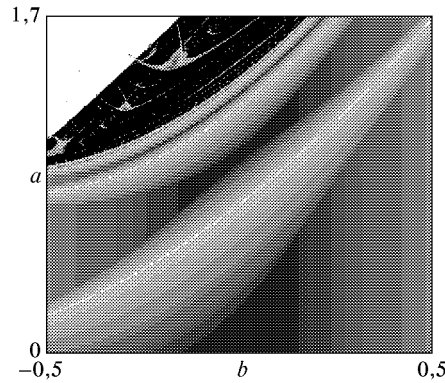


Рис. 10.7. Карта распределения старшего ляпуновского показателя Λ на плоскости параметров отображения Эно (10.28). Тонами от темно-серого (большие по абсолютной величине отрицательные Λ) до белого (близкие к нулю отрицательные Λ) обозначены области регулярной динамики, а черным — области хаоса, где $\Lambda > 0$. Белая область в левом верхнем углу отвечает расходимости — убеганию траекторий на бесконечность

близкие к нулю отрицательные Λ), а области хаоса $\Lambda > 0$ — черным цветом. На рис. 10.7 приводится пример такой карты для отображения Эно (10.28).

На рис. 10.8 показана карта ляпуновского показателя для отображения Икеды (см. лекцию 5) на плоскости параметров A и B . Через действительную и мнимую части комплексной переменной z отображение записывается в виде

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= A + B(x_n \cos(x_n^2 + y_n^2) - y_n \sin(x_n^2 + y_n^2)), \\ y_{n+1} &= B(x_n \sin(x_n^2 + y_n^2) + y_n \cos(x_n^2 + y_n^2)), \end{aligned} \quad (10.37)$$

а уравнения в вариациях даются соотношениями

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_{n+1} &= \\
 &= B(\cos(x_n^2 + y_n^2) - 2x_n^2 \sin(x_n^2 + y_n^2) - 2x_n y_n \cos(x_n^2 + y_n^2))\tilde{x}_n + \\
 &+ B(-2x_n y_n \sin(x_n^2 + y_n^2) - \sin(x_n^2 + y_n^2) - 2y_n^2 \cos(x_n^2 + y_n^2))\tilde{y}_n, \\
 \tilde{y}_{n+1} &= \\
 &= B(\sin(x_n^2 + y_n^2) + 2x_n^2 \cos(x_n^2 + y_n^2) - 2x_n y_n \sin(x_n^2 + y_n^2))\tilde{x}_n + \\
 &+ B(2x_n y_n \cos(x_n^2 + y_n^2) + \cos(x_n^2 + y_n^2) - 2y_n^2 \sin(x_n^2 + y_n^2))\tilde{y}_n.
 \end{aligned}
 \tag{10.38}$$

Ляпуновскую карту на рис. 10.8 интересно сравнить с картой динамических режимов, обсуждавшейся в лекции 5. Хорошо видна сложная структура границы хаоса, которая только местами

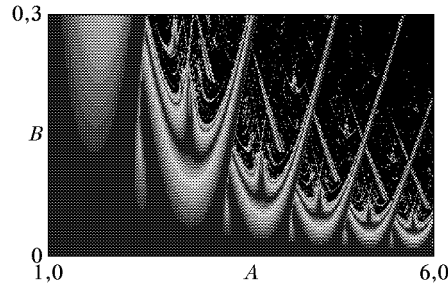


Рис. 10.8. Карта распределения старшего ляпуновского показателя Λ на плоскости параметров отображения Икеды (10.37). Тонами от темно-серого (бóльшие по абсолютной величине отрицательные Λ) до белого (близкие к нулю отрицательные Λ) обозначены области регулярной динамики, а черным — области хаоса, где $\Lambda > 0$

выглядит гладкой кривой. Можно видеть образования типа «перекрестков», а также простирающиеся далеко в область хаоса узкие области регулярных режимов вдоль линий складок. Угадывается расположение точек сборки и областей мультистабильности.

Лекция 11

ГЕОМЕТРИЯ СТРАННЫХ АТТРАКТОРОВ И ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ

Рассмотрим представленное на рис. 11.1 изображение странного аттрактора системы Ресслера

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = b - rz + xz.$$

Его геометрическую конфигурацию можно наглядно представить следующим образом. Возьмем бумажную ленту, расширя-

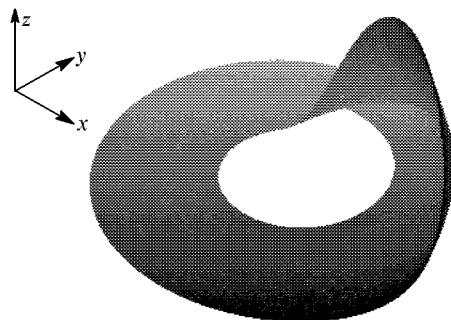


Рис. 11.1. Аттрактор системы Ресслера при $a = b = 0,2$, $r = 5,7$

ющуюся к одному концу (рис. 11.2а). На широком конце сложим ленту вдвое и затем склеим ее в кольцо так, как показано на рис. 11.2б–г. Такая бумажная модель (изготовьте ее сами!) дает

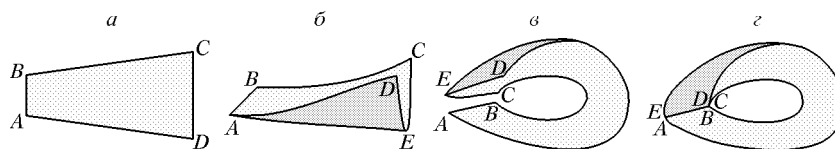


Рис. 11.2. Модель аттрактора Ресслера из бумажной ленты

неплохое представление об аттракторе Ресслера и пространственном расположении принадлежащих ему траекторий. Она, однако, неточна в одной очень существенной детали. Решение системы

дифференциальных уравнений Ресслера можно строить как вперед, так и назад во времени, и при этом справедлива теорема единственности. Следовательно, никакие две разные фазовые траектории не могут сойтись в одну, а значит, процедура склеивания незаконна.

Разрешение противоречия состоит в том, что «лента», из которой «склеен» аттрактор Ресслера, на самом деле представляет собой слоистое образование, набор листов. Процедура склеивания эквивалентна установлению взаимно однозначного соответствия между множеством листов исходной ленты и множеством листов

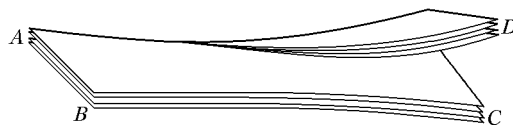


Рис. 11.3. Слоистая структура «ленты», из которой «склеивается» аттрактор Ресслера

ленты, сложенной вдвое (рис. 11.3). Такое соответствие может иметь место только в том случае, если оба множества бесконечны.

Известна история о герое фантастических новелл С. Лема, Ийоне Тихом, который сумел разместить бесконечное счетное множество вновь прибывших постояльцев в гостинице с бесконечным числом номеров, хотя все они были заняты. Для этого каждому проживающему было предложено перейти в комнату с номером вдвое большим исходного, а новые жильцы были поселены в комнаты с нечетными номерами.

Таким образом, аттрактор Ресслера обязан иметь в сечении бесконечное множество слоев и представлять собой, следовательно, сложно устроенный, как говорят, фрактальный объект. Этот вывод можно проверить, проведя достаточно аккуратные численные расчеты.

Такой же характер структуры свойствен и другим странным аттракторам. На рис. 11.4 приводится диаграмма из статьи Эно,

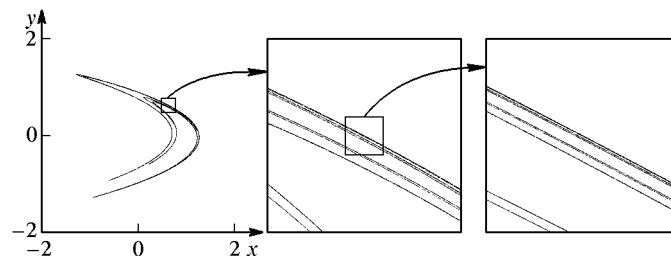


Рис. 11.4. Воспроизведение фрактальной структуры аттрактора Эно на разных масштабах разрешения

иллюстрирующая структуру аттрактора в отображении $x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - by_n$, $y_{n+1} = x_n$ при $a = 1,4$, $b = -0,3$. Можно отметить, что основной момент в мотивации этой работы как раз и состоял в намерении представить более наглядный для рассмотрения пример фрактальной структуры аттрактора, нежели демонстрировала известная к тому времени модель Лоренца. (В системе Лоренца степень сжатия фазового объема очень велика, так что разглядеть фрактальную поперечную структуру можно лишь при очень большом разрешении.)

Возникновение фрактальной структуры можно наблюдать и в тех простых моделях систем со странными аттракторами, которые обсуждались в лекции 2: в обобщенном отображении пекаря (см. рис. 2.8), отображении Плыкина (см. рис. 2.10), отображении Смейла–Вильямса (см. рис. 2.14). В фазовом пространстве динамических систем могут встречаться также фрактальные множества, не являющиеся аттракторами; примером может служить подкова Смейла. Эта и следующая лекция специально посвящены фрактальным множествам и знакомству с количественными характеристиками их геометрической структуры — фрактальной размерностью и ее обобщениями.

11.1. Фракталы

Под фракталами понимают множества, демонстрирующие на разных масштабах разрешения своей геометрической структуры свойства подобия в строгом или приближенном смысле, а также объекты в природе, обладающие этим свойством, хотя бы приближенно, в достаточно широком интервале масштабов.

Понятие фрактала вошло в обиход благодаря математику Бенуа Мандельброту (Mandelbrot, 1982). Он родился в 1924 г. в Варшаве, образование получил во Франции, в знаменитых Эколь Нормаль и Эколь Политекник. Участвовал в работе группы французских математиков, выступавших под псевдонимом Бурбаки, и был изгнан из этой группы за свою приверженность к стилю математического мышления, опирающегося на использование наглядных геометрических образов. Целый ряд примеров фрактальных множеств был придуман математиками гораздо раньше, как иллюстрации тонких моментов теории множеств, теории функций и т. п. Однако именно Мандельброт обратил внимание на то, что эти объекты могут рассматриваться не только как «математические монстры», но как модели геометрических свойств вполне реальных образований в природе. Такого рода примеров известно теперь очень много (береговая линия, облака, горные массивы, кластеры из частиц во взвешях, магнитные домены в точке фазового перехода Кюри, вихри в турбулентной жидкости и так далее), хотя, разумеется, любой реальный объект может иметь свойства

подобия лишь в ограниченном интервале масштабов. Сверху этот интервал ограничен размерами объекта, как целого, а снизу, например, атомной структурой. Если все же интервал масштабов, в котором можно говорить о подобии, достаточно велик, то тогда описание свойств объекта в терминах теории фракталов оказывается оправданным.

Простейший фрактал связан с построением, предложенном еще в прошлом веке основоположником теории множеств Георгом Кантором. Имея единичный отрезок, разделим его на три равные части и выбросим интервал, занимающий среднюю треть. Каждый из оставшихся отрезков вновь делим на три части и выбрасываем среднюю треть, и так далее до бесконечности (рис. 11.5). То, что

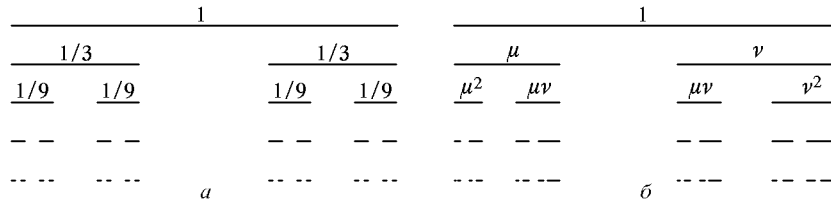


Рис. 11.5. Построение классического канторова множества (а) и двухмасштабного канторова множества с параметрами μ и ν (б)

останется в итоге, и есть *множество Кантора* или, как его называют Мандельброт, «канторова пыль». Ясно, что множество Кантора удовлетворяет определению фрактала: каждый его фрагмент, полученный из какого-то отрезка на некотором уровне построения, подобен всему множеству и переходит в него при соответствующем пересчете масштаба.

Простой пример появления этого фрактала, как инвариантного множества динамической системы, можно обнаружить в отображении вида

$$x' = \begin{cases} 3x, & x \leq \frac{1}{2}, \\ 3x - 2, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

(рис. 11.6). Большая часть начальных условий приводит к убежанию на бесконечность, но некоторые точки не уходят из единичного интервала. Как устроено это множество точек? Нетрудно показать, что это множество Кантора. Действительно, точки, которые не покидают интервал за одну итерацию, занимают два отрезка: $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$, точки, которые выживают в течение двух итераций, занимают четыре отрезка: $[0, 1/9]$, $[2/9, 1/3]$, $[2/3, 5/9]$ и $[8/9, 1]$. И вообще, n -й уровень построения Кантора отвечает

множеству точек, остающихся в интервале на протяжении n итераций.

Стоит отметить два свойства множества Кантора, которые особенно замечательны и поразительны в своем сочетании. С одной стороны, это множество имеет нулевую меру, т. е. суммарная длина всех выброшенных интервалов равна единице, длине исходного интервала. В самом деле, на первом шаге выбрасывается интервал длины $1/3$, на втором — два интервала длины $1/9$, на n -м — 2^n интервалов длины 3^{-n+1} . Вычисляя сумму, получаем

$$L_{\text{sum}} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1/3}{1 - 2/3} = 1.$$

С другой стороны, множество Кантора имеет мощность континуума, т. е. допускает установление взаимно-однозначного соответствия с множеством всех точек единичного интервала. Действительно, канторово множество можно интерпретировать как множество точек единичного интервала, числовая запись которых в троичной системе счисления содержит только цифры 0 и 2 (точки, для которых на какой-то позиции встречается цифра 1, исключены).

Сопоставим каждому элементу канторова множества (например, 0,020020220...) точку единичного интервала, записанную в двоичной системе такой же последовательностью с заменой двоек на единицы (0,010010110...). Этим и устанавливается требуемое взаимно-однозначное соответствие.

Слегка изменив правила игры, приходим к *двухмасштабному канторову множеству*, упоминавшемуся в лекции 2, как сечение аттрактора в обобщенном отображении пекаря. Задавшись парой положительных чисел μ, ν , такой, что $\mu + \nu > 1$, на первом шаге разделим единичный отрезок в отношении $\mu, 1 - \mu - \nu, \nu$ и исключим центральный интервал. На каждом следующем шаге построения делим в таком же отношении все оставшиеся отрезки и вновь выбрасываем центральные интервалы (рис. 11.5б).

Дальнейшие примеры фракталов представлены на рис. 11.7–11.9.

Снежинка Коха — пример области с фрактальной границей. Начинаем построение с равностороннего треугольника. Затем на каждой стороне среднюю треть заменяем ломаной из двух отрезков той же длины. Повторяя процедуру многократно до бесконечности, приходим в итоге к фрактальному объекту (рис. 11.7).

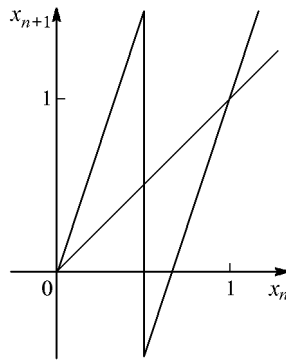


Рис. 11.6. Одномерное отображение, для которого инвариантно множество точек, остающихся всегда в пределах единичного интервала, есть множество Кантора

Чтобы построить *салфетку Серпиньского*, берем равносторонний треугольник, который можно представить как составленный из четырех меньших треугольников. Средний треугольник

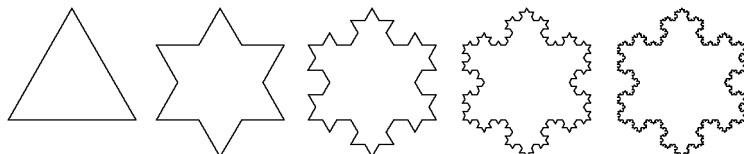


Рис. 11.7. Пять шагов построения снежинки Коха

выбрасываем. Далее те же действия выполняем с каждым из оставшихся треугольников до бесконечности (рис. 11.8).

Ковер Серпиньского строится, исходя из квадрата, который делим вертикальными и горизонтальными линиями на 9 равных

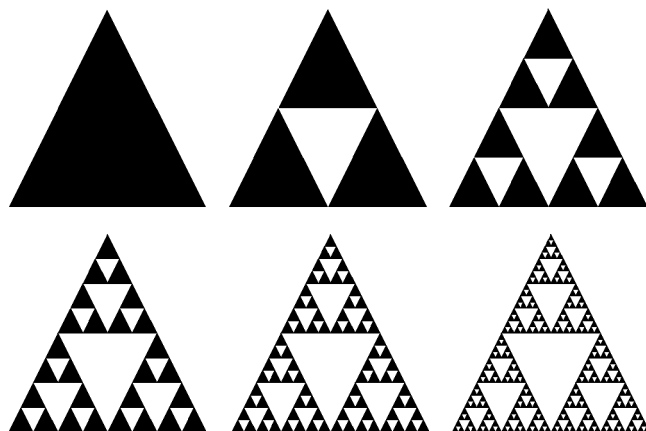


Рис. 11.8. Построение салфетки Серпиньского

частей, и средний квадрат выбрасываем. С каждым оставшимся квадратом повторяем ту же процедуру, и так до бесконечности

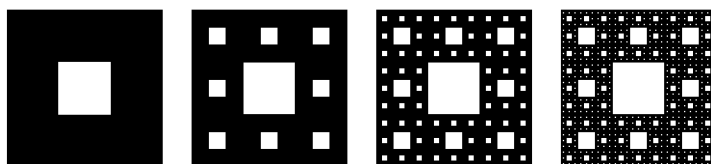


Рис. 11.9. Построение ковра Серпиньского

(рис. 11.9). Аналогичное построение в трехмерном пространстве приводит к фракталу, который называют *губкой Серпиньского*.

11.2. Фрактальная размерность — емкость

Известен простой прибор — палетка, который служит для измерения площади областей на плане или карте. Это прозрачная пластинка, на которой нанесена квадратная сетка с заданным шагом, скажем, 1 см. Наложив палетку на карту, можно подсчитать число квадратиков, попавших внутрь области, и получить оценку площади снизу, или подсчитать количество квадратиков, полностью покрывающих область, и получить оценку площади сверху. Чем меньше размер квадратиков сетки, тем точнее будет оценка.

Как будет зависеть количество ячеек сетки, покрывающих область, от размера ячейки ε ? Ясно, что при уменьшении ε это число будет возрастать как $N(\varepsilon) \cong 1/\varepsilon^2$ (рис. 11.10а). Если же мы рассмотрим покрытие не области, а отрезка линии, то получим $N(\varepsilon) \cong 1/\varepsilon$ (рис. 11.10б). Оба соотношения имеют вид

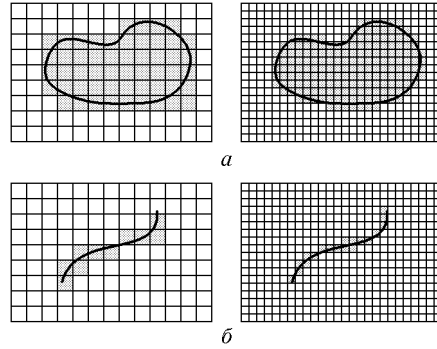


Рис. 11.10. Покрытие двумерной области (а) и отрезка кривой (б) ячейками квадратной сетки

$N(\varepsilon) \cong 1/\varepsilon^D$, причем показатель D следует интерпретировать как размерность рассмотренных множеств: для области $D = 2$, а для отрезка линии $D = 1$. Размерность выступает как число, характеризующее скорость роста числа ячеек покрытия данного множества при уменьшении размера ячеек. Логарифмируя соотношение $N(\varepsilon) \cong 1/\varepsilon^D$ и устремляя ε к нулю, можно записать

$$D = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}, \quad (11.1)$$

где основание логарифма произвольное.

Если применить аналогичный подход к таким объектам, как канторово множество или ковер Серпиньского, то величина D оказывается дробной. Это дало основание для термина *фрактал* и для того, чтобы именовать величину D *фрактальной размерностью* (от слова *fraction* — дробь).

Найдем размерность ковра Серпиньского. Если размер ячейки $\varepsilon = 1/3$, то число ячеек покрытия $N = 8$, при уменьшении ячеек в три раза получаем $\varepsilon = 1/9$ и $N = 64$ ячеек, и так далее: k -й уровень построения ассоциируется с покрытием ячейками размера $\varepsilon = (1/3)^k$ в количестве $N(\varepsilon) = 8^k$. Применяя формулу (11.1), получаем

$$D = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log \varepsilon} = -\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 8^k}{\log 3^{-k}} = \log_3 8 = 1,8927 \dots$$

Рассмотренная процедура легко обобщается: для объектов, представляющих собой подмножества n -мерного евклидова пространства. В этом случае сетка для построения покрытия образована n -мерными кубиками со стороной ε . В англоязычной литературе размерность, определенную с помощью покрытия такой сеткой, называют *box-counting dimension* (буквально — размерность, полученная подсчетом ящиков, т. е. кубиков).

В частности, при $n = 1$ роль ячеек покрытия выполняют интервалы длины ε . Например, как видно из процедуры построения множества Кантора, покрытие интервалами размера $\varepsilon = 1/3$ содержит два элемента, при $\varepsilon = 1/9$ — четыре, а при $\varepsilon = (1/3)^k$ количество элементов покрытия будет 2^k . Отсюда следует, что размерность равна $D = -\lim_{k \rightarrow \infty} (\log 2^k / \log 3^{-k}) = \log_3 2 = 0,6309 \dots$ (снова дробное число!).

Работать с квадратной сеткой не всегда удобно. Например при вычислении размерности салфетки Серпиньского (рис. 11.8) лучше взять треугольную сетку, что, очевидно, не должно влиять на показатель степени зависимости числа элементов покрытия от размера ε . Обозначая через ε сторону треугольной ячейки можно заключить из рис. 11.8, что k -му уровню построения отвечает покрытие из 3^k ячеек размера $\varepsilon = (1/2)^k$. Формула (11.1) дает $D = -\lim_{k \rightarrow \infty} (\log 3^k / \log 2^{-k}) = \log_2 3 = 1,5849 \dots$ (Попробуйте самостоятельно получить этот результат с помощью покрытия квадратными ячейками.)

Фрактальную размерность, определенную с помощью покрытия множества ячейками фиксированной формы и размера, математики называют *емкостью множества*.

11.3. Размерность Хаусдорфа и ее связь с емкостью

Следующий шаг в разработке понятия фрактальной размерности состоит в том, чтобы разрешить использовать для ее определения элементы покрытия произвольной формы и размера. Эта идея приводит к важному понятию *размерности Хаусдорфа*.

Пусть мы имеем множество F , являющееся подмножеством n -мерного евклидова пространства. Рассмотрим его покрытие элементами произвольной формы и размера, с тем ограничением, что диаметр множества, отвечающего любому элементу покрытия, не превышает заданной величины δ . Диаметр i -го элемента покрытия E_i определяется как верхняя грань расстояния между двумя точками, ему принадлежащими: $\varepsilon_i = \text{diam } E_i = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_i} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Введем зависящую от параметра d и от δ сумму по всем элементам покрытия

$$\Gamma_d(\delta) = \sum \varepsilon_i^d \quad (11.2)$$

и определим нижнюю грань этой суммы по всевозможным покрытиям:

$$\gamma_d(\delta) = \inf \sum \varepsilon_i^d. \quad (11.3)$$

Если d велико, то, очевидно, $\gamma_d(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$. Если же d мало (близко к нулю), то $\gamma_d(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \infty$. Промежуточное, критическое значение d_H такое, что при уменьшении δ величина γ_d стремится к нулю для $d > d_H$ и к бесконечности для $d < d_H$, есть размерность Хаусдорфа множества F .

Рассмотрим вопрос о соотношении между емкостью и размерностью Хаусдорфа. Пусть мы имеем покрытие множества F ячейками фиксированной формы и размера ε , причем число элементов покрытия есть $N(\varepsilon) \cong \varepsilon^{-D}$, где D — емкость множества F . Вычисляя сумму (11.2), получаем $\Gamma_d(\delta) = \sum \varepsilon^d = N(\varepsilon)\varepsilon^d \cong \varepsilon^{d-D}$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ эта величина стремится к нулю, если $d > D$, и к бесконечности, если $d < D$. Ее и надо было бы принять за размерность Хаусдорфа, если забыть об операции взятия нижней грани по всевозможным покрытиям. В самом общем случае, однако, $\Gamma_d(\delta) \geq \gamma_d(\delta)$, поскольку $\gamma_d(\delta)$ есть нижняя грань. Взаимное расположение

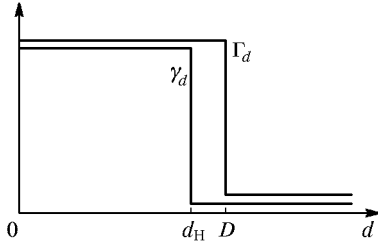


Рис. 11.11. К пояснению соотношения между емкостью и размерностью Хаусдорфа

графиков зависимости величин Γ_d и γ_d от параметра d обязательно поэтому выглядеть так, как это показано на рис. 11.11. Отсюда видно, что справедливо соотношение $D \geq d_H$.

Те же соображения позволяют прийти к более общему утверждению. Если при каком-то конкретном выборе последовательности покрытий с уменьшающимся разрешенным диаметром ячейки

δ имеем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Gamma_d(\delta) = \begin{cases} 0, & d > d', \\ \infty, & d < d', \end{cases} \quad (11.4)$$

то d' есть оценка размерности Хаусдорфа сверху, т. е. $d' \geq d_H$. Наиболее трудный момент в математически строгом вычислении размерности Хаусдорфа состоит в том, чтобы найти нижнюю грань сумм (11.2). Однако для фракталов, встречающихся в задачах нелинейной динамики, в большинстве случаев размерность Хаусдорфа, емкость и другие величины d' , получаемые при различном выборе покрытий, совпадают. Поэтому терминологически их часто не различают и говорят просто о фрактальной размерности объекта.

В качестве примера множества, у которого емкость и размерность Хаусдорфа не совпадают, можно привести множество точек единичного интервала с координатами $1/n$, где $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$. Попробуем вычислить емкость. Зададим некоторое большое целое число M и построим покрытие множества интервалами длины $\varepsilon = 1/M^2$. Интервал от 0 до $1/M$ потребует для своего покрытия M элементов. Еще $M - 1$ элементов потребуется для покрытия остальных точек, $1, 1/2, 1/3, \dots, (M-1)^{-1}$, поскольку расстояние между двумя ближайшими из этих точек $1/(M-1) - 1/M = 1/(M^2 - M) > 1/M^2$. Таким образом, для $\varepsilon = 1/M^2$ имеем $N(\varepsilon) = 2M$. Поэтому $D = -\lim_{M \rightarrow \infty} [\log 2M / \log(M^{-2})] = 1/2$. Размерность же Хаусдорфа с очевидностью равна нулю, поскольку рассматриваемое множество счетное. Действительно, его можно покрыть интервалами $\varepsilon_i = \varepsilon \cdot 2^{-i}$, $i = 0, 1, 2, \dots, \infty$. Тогда $\Gamma_d(\delta) = \sum \varepsilon_i^d = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^d \cdot 2^{-id} = \varepsilon^d / (1 - 2^{-d})$, и при $\varepsilon \rightarrow 0$ предел всегда нуль для любого $d > 0$.

11.4. Фрактальная размерность двухмасштабного канторова множества и странного аттрактора в обобщенном отображении пекаря

В качестве конкретного примера вычислим фрактальную размерность аттрактора в обобщенном отображении пекаря, которое было введено в лекции 2:

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{\alpha} & \text{для } x \leq \alpha, \\ y' = \mu y & \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{x - \alpha}{\beta} \\ y' = 1 + \nu(y - 1) \end{cases} \quad \text{для } x > \alpha, \quad (11.5)$$

здесь α, β, μ, ν — положительные параметры, причем $\alpha + \beta = 1$ и $\mu + \nu < 1$. Аттрактор этого отображения есть фрактальный объект, сечение которого вертикальной прямой представляет собой двухмасштабное канторово множество. Естественно полагать,

что размерность аттрактора $D_B = D_C + 1$, где D_C — размерность упомянутого канторова множества. Далее мы это покажем, но сначала найдем величину D_C .

Вспомним процедуру построения двухмасштабного канторова множества (см. рис. 11.5б). Набор интервалов ε_i , отвечающих k -му уровню построения, задает, очевидно, покрытие множества, и можно определить сумму $\Gamma_d(k) = \sum \varepsilon_i^d$. На следующем уровне построения получаем новое покрытие. Каким будет новое значение суммы? При переходе с k -го на $k+1$ -й уровень каждый интервал ε_i заменяется двумя интервалами, $\mu\varepsilon_i$ и $\nu\varepsilon_i$. Соответственно, каждый член суммы $\Gamma_d(k)$ заменяется двумя членами, $(\mu\varepsilon_i)^d$ и $(\nu\varepsilon_i)^d$. Но тогда новое значение суммы выражается через старое:

$$\begin{aligned} \Gamma_d(k+1) &= \sum \left[(\mu\varepsilon_i)^d + (\nu\varepsilon_i)^d \right] = \\ &= (\mu^d + \nu^d) \sum \varepsilon_i^d = (\mu^d + \nu^d) \Gamma_d(k). \end{aligned} \quad (11.6)$$

Если $\mu^d + \nu^d < 1$, то при $k \rightarrow \infty$ величина $\Gamma_d(k)$ будет стремиться к нулю, а если $\mu^d + \nu^d > 1$, то к бесконечности. Пограничная критическая ситуация определяется условием

$$\mu^d + \nu^d = 1. \quad (11.7)$$

При $\mu + \nu < 1$ величина d , являющаяся решением этого уравнения, лежит в интервале между 0 и 1. Это и есть размерность двухмас-

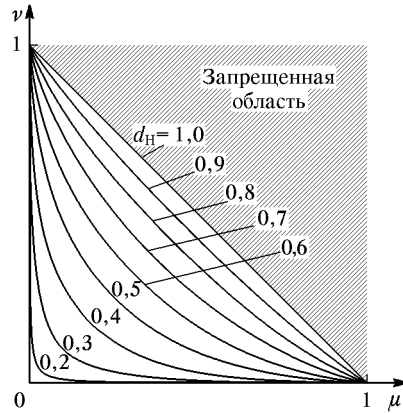


Рис. 11.12. Линии равных значений фрактальной размерности двухмасштабного канторова множества на плоскости параметров μ, ν

штабного канторова множества D_C . На рис. 11.12 показаны линии равных значений размерности на плоскости параметров μ, ν . (В частности, при $\mu = \nu = 1/3$ из (11.7) получаем $2 \cdot 3^{-d} = 1$ и

$D_C = \log_3 2$ — уже известный нам результат для классического канторова множества.)

Покажем теперь, что размерность аттрактора обобщенного отображения пекаря действительно выражается соотношением $D_B = D_C + 1$. Согласно геометрической трактовке действия отображения пекаря в лекции 2 (см. рис. 2.8), на k -м шаге итераций имеется 2^k горизонтальных полос, покрывающих аттрактор. Обозначим через ε_i поперечный размер i -й полосы. Для покрытия этой полосы квадратиками со стороной ε_i требуется $n_i = \lceil 1/\varepsilon_i \rceil + 1$ квадратиков, где квадратные скобки означают целую часть числа (рис. 11.13). При вычислениях, связанных с анализом предела $k \rightarrow \infty$ и $\varepsilon_i \rightarrow 0$, можно считать, что $n_i \cong 1/\varepsilon_i$. Сумма $\Gamma_d(k)$, которую нужно вычислять при определении размерности Хаусдорфа, выражается тогда следующим образом:

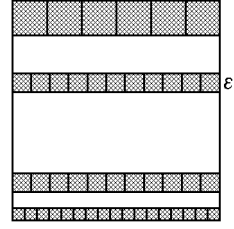


Рис. 11.13. К вычислению размерности аттрактора обобщенного отображения пекаря

$$\Gamma_d(k) = \sum_i n_i \varepsilon_i^d \cong \sum_i \varepsilon_i^{-1} \varepsilon_i^d = \sum_i \varepsilon_i^{d-1}. \quad (11.8)$$

На следующем, $(k+1)$ -м шаге построения аттрактора каждая полоса ширины ε_i дает две более узкие полосы, $\mu\varepsilon_i$ и $\nu\varepsilon_i$, так что

$$\Gamma_d(k+1) = (\mu^{d-1} + \nu^{d-1})\Gamma_d(k). \quad (11.9)$$

Размерность D_B определяется, следовательно, как решение уравнения

$$\mu^{d-1} + \nu^{d-1} = 1. \quad (11.10)$$

Сопоставляя его с уравнением (11.7), корень которого соответствовал размерности двухмасштабного канторова множества D_C , заключаем, что $D_B - 1 = D_C$.

Лекция 12

ОБОБЩЕННЫЕ РАЗМЕРНОСТИ И МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ ФОРМАЛИЗМ

Рассмотрим, как в начале предыдущей лекции, покрытие аттрактора ячейками фиксированного размера (рис. 12.1). Фрактальную размерность (емкость) аттрактора, определенную как по-

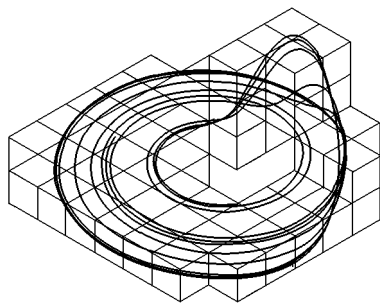


Рис. 12.1. Покрытие аттрактора элементами одинакового размера ε

казатель степени в формуле зависимости количества ячеек покрытия $N(\varepsilon)$ от размера ячейки ε , будем с этого момента обозначать через D_0 :

$$N(\varepsilon) \cong \varepsilon^{-D_0}, \quad \text{или} \quad D_0 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \quad (12.1)$$

Наряду с величиной D_0 вводят и используют целый ряд других размерностей, в том числе информационную, корреляционную, обобщенные размерности Рёны. Цель данной лекции в том, чтобы познакомиться с этими размерностями и выяснить, как они соотносятся. Необходимость иметь дело не с одной, а со многими размерностями связана в конечном итоге со сложностью рассматриваемых объектов — фрактальных аттракторов.

12.1. Информационная размерность

Почему же одной размерности D_0 недостаточно? Представим себе, что аттрактор неоднороден — одни области (элементы покрытия) посещаются чаще, другие реже. Это обстоятельство никак не отражено в определении размерности D_0 , хотя, по идее, оно

должно быть существенным для такой количественной характеристики свойств аттрактора, какой претендует быть размерность.

Попытаемся «исправить» определение размерности, приняв во внимание разную вероятность посещения ячеек покрытия. Для этого следует привлечь конструкцию, обсуждавшуюся в лекции 8, — инвариантную меру.

Напомним, что естественная инвариантная мера любой области фазового пространства S определяется как вероятность пребывания в этой области типичной фазовой траектории:

$$p(S) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau(S, \mathbf{x}_0, T)}{T}. \quad (12.2)$$

где $\mathbf{x}_0$ — точка старта траектории, $\tau(S, \mathbf{x}_0, T)$ — время пребывания изображающей точки в области S при наблюдении за интервал T . Предполагается, что величина $p(S)$ одна и та же почти для всех начальных условий из бассейна данного аттрактора, так что ее можно считать не зависящей от $\mathbf{x}_0$.

Пусть для аттрактора определена инвариантная мера, и мы построили покрытие этого аттрактора, тогда каждая ячейка покрытия будет иметь свою определенную величину меры. Иными словами, каждой i -й ячейке покрытия будет отвечать некоторая вероятность пребывания в ней p_i . Считая, что ячейки полностью покрывают аттрактор и не накладываются друг на друга, име-

ем $\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i = 1$.

Рассмотрим теперь сумму

$$I(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \log p_i. \quad (12.3)$$

Эту величину можно интерпретировать как количество информации в утверждении, что изображающая точка обнаружена в одной определенной ячейке покрытия.

Простой пример: пусть имеется $N = 16$ клеток, одна из которых выбрана случайно и помечена крестиком:

[] [] [] [] [×] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] []

Вероятность того, что крестик находится в i -й клетке, $1/16$. Количество информации в битах получается по формуле, где логарифм берется по основанию 2: $I = - \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i = - \sum_{i=1}^{16} (1/16) \log_2 (1/16) = 4$. Смысл этого результата в том, что однозначно установить расположение крестика можно, задав четыре вопроса, на которые разрешается дать ответ да или нет. Это мера информации по Шеннону.

Ясно, что при уменьшении размера ячеек покрытия величина суммы (12.3) будет возрастать: чем мельче ячейки, тем больше информации в утверждении, что точка попала в данную определенную ячейку. Можно предположить, что это нарастание следует степенному закону:

$$I(\varepsilon) \cong \varepsilon^{-D_1}, \quad (12.4)$$

или, что эквивалентно, существует предел

$$D_1 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \log p_i}{\log \varepsilon}. \quad (12.5)$$

Величину D_1 называют *информационной размерностью*.

Информационная размерность обладает важным свойством, которое делает ее очень важной характеристикой фрактальных аттракторов. Имеет место следующая теорема, которую приведем без доказательства.

Пусть имеется аттрактор A , на котором определена инвариантная мера, и пусть S — подмножество этого аттрактора, имеющее меру θ между 0 до 1, т. е. $0 < \theta < 1$. (Смысл θ в том, что это вероятность для взятой наугад точки аттрактора принадлежать подмножеству S .) Тогда *фрактальная размерность множества S равна информационной размерности аттрактора A : $D_0(S) = D_1(A)$.*

Это будет так при любом $\theta \in (0, 1)$, даже при $\theta = 0,99$! Только при $\theta = 1$ будем иметь $D_0(S) = D_0(A)$.

12.2. Корреляционная размерность и алгоритм Грассбергера–Прокаччия

Рассмотрим снова покрытие аттрактора ячейками одинакового размера ε и предположим, что выбраны наугад две точки, принадлежащие аттрактору, $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$. Какова вероятность того, что обе они окажутся в i -й ячейке? Вероятность того, что одна точка попадает в i -й элемент покрытия, равна p_i . Если попадание обеих точек в данную ячейку можно считать независимыми событиями, то вероятность будет p_i^2 .

Рассмотрим теперь сумму

$$C(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2 \quad (12.6)$$

и зададимся вопросом, как она будет вести себя при уменьшении размера ячеек, которыми производится покрытие. При уменьшении ε сумма будет убывать, и можно предположить, что это будет

происходить по степенному закону:

$$C(\varepsilon) \cong \varepsilon^{D_2}, \quad (12.7)$$

или, что эквивалентно, существует предел

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C(\varepsilon)}{\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2}{\log \varepsilon}. \quad (12.8)$$

Величину D_2 называют *корреляционной размерностью*.

Особое значение корреляционной размерности для нелинейной динамики состоит в том, что для ее вычисления имеется относительно простой и эффективный (во всяком случае более простой и эффективный, нежели для других размерностей) *алгоритм Грассбергера–Прокачиа*.

Он состоит в следующем. Пусть мы получили, скажем, из численного решения уравнений динамики набор векторов состояния $\{\mathbf{x}_i, i = 1, 2, \dots, M\}$, отвечающих последовательным итерациям отображения или шагам интегрирования дифференциального уравнения. Задавшись некоторым (малым) ε , можно использовать наш набор данных для оценки суммы $C(\varepsilon)$, фигурирующей в определении корреляционной размерности. Имеем:

$$\begin{aligned} C(\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2 = \{\text{вероятность того,} \\ &\quad \text{что две точки разделены расстоянием меньше } \varepsilon\} = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M(M-1)} \times \{\text{число пар } i \neq j \text{ таких, что } \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| < \varepsilon\} = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M(M-1)} \sum_{i,j=1}^M \theta(\varepsilon - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) \equiv C_M(\varepsilon), \end{aligned} \quad (12.9)$$

где θ — ступенчатая функция Хевисайда,

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Величину $C_M(\varepsilon)$ называют *корреляционным интегралом*. При достаточно больших M (обычно тысячи или десятки тысяч) он служит статистической оценкой суммы $C(\varepsilon)$ и, следовательно, может быть использован для вычисления корреляционной размерности. Для этого проводят расчет $C_M(\varepsilon)$ при различных ε и представляют результаты в координатах $\log \varepsilon$ и $\log C_M(\varepsilon)$. Предполагаемая зависимость $C_M(\varepsilon)$ имеет вид ε^{D_2} , так что полученный

график должен иметь вид прямой линии с угловым коэффициентом D_2 .

Объем вычислений при подсчете корреляционного интеграла непосредственно с помощью (12.9) очень велик, поскольку количество операций пропорционально M^2 . Чтобы его сократить, применяют несколько «маленьких хитростей».

Во-первых, можно разбить рассматриваемую область фазового пространства на несколько частей и рассортировать обрабатываемые точки $\mathbf{x}_i$ по группам, отвечающим этим частям. Если ε мало, а это как раз интересующий нас случай, то при расчете корреляционного интеграла можно учитывать только те пары точек, у которых обе точки принадлежат одной и той же группе.

Во-вторых, вместо евклидовой нормы можно использовать другую, требующую меньшего объема вычислений. При этом величина размерности от выбора нормы не зависит. Математики вводят семейство норм

$$\|\mathbf{x}\|_q = \sqrt[q]{\sum_{i=1}^N |x_i|^q}, \quad (12.10)$$

где q — параметр; в частности, $q = 2$ отвечает евклидовой норме. Среди них наиболее удобными для быстрого вычисления являются

нормы $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|$ и $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$.

На практике график зависимости корреляционного интеграла от ε , построенный в логарифмических координатах, отклоняется

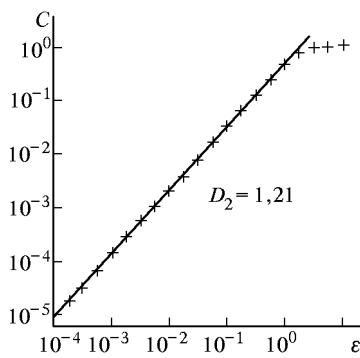


Рис. 12.2. К оценке корреляционной размерности странного аттрактора отображения Эно по алгоритму Грассбергера–Прокачиа

от прямой линии в области больших ε , сравнимых с размерами аттрактора, и очень малых ε , когда количество пар точек становится мало для хорошей статистической оценки. Интервал линейности тем шире, чем больше объем обрабатываемых данных M . Чаще всего его выбирают «на глаз», а затем подвергают полученные точки обработке с помощью метода наименьших квадратов для нахождения аппроксимирующей прямой.

В качестве примера на рис. 12.2 воспроизведены результаты расчета корреляционной размерности аттрактора в отображении Эно $x_{n+1} =$

$1 - ax^2 - by_n$, $y_{n+1} = x_n$, представленные в оригинальной работе (Grassberger, 1983). Параметры отображения: $a = 1,4$, $b = -0,3$,

количество точек $M = 16384$. Результат расчета — значение корреляционной размерности $D_2 \cong 1,21$.

12.3. Спектр обобщенных размерностей Реньи

В 1983 г. Грассбергер, Хэнтчел и Прокаччиа ввели в употребление в нелинейной динамике семейство обобщенных размерностей D_q , которые называют *размерностями Реньи*, по имени венгерского математика, предложившего их ранее в другом контексте (Grassberger, 1983; Hentschel, Procaccia, 1983)

Предположим, что построено покрытие аттрактора ячейками размера ε , и вероятность пребывания в i -й ячейке покрытия, т. е. естественная инвариантная мера ячейки, есть p_i . Тогда для любого действительного числа q , $-\infty < q < \infty$, размерность D_q определяется как предел

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q}{\log \varepsilon}. \quad (12.11)$$

Из формулы (12.11) непосредственно видно, что при $q = 0$ она сводится к определению емкости, а при $q = 2$ — корреляционной размерности (см., соответственно, (11.1) и (12.8)). При попытке подставить $q = 1$ возникает неопределенность типа $0/0$, но ее раскрытие по правилу Лопиталя приводит к определению информационной размерности (12.5). Таким образом, емкость, информационная и корреляционная размерности выступают как представители семейства размерностей Реньи, отвечающие частным значениям параметра q , соответственно, D_0 , D_1 и D_2 . Отметим еще две специальные размерности — *максимальную размерность* $D_{-\infty} = \lim_{q \rightarrow -\infty} D_q$ и *минимальную размерность* $D_{\infty} = \lim_{q \rightarrow \infty} D_q$.

Можно спросить: каковы же будут обобщенные размерности, например для канторова множества? Надо четко понимать, что в такой постановке вопрос неправиомерен. Для того чтобы можно было говорить об обобщенных размерностях, недостаточно иметь само множество, на нем еще должна быть задана мера.

Для множества Кантора определение меры можно «вмонтировать» в процесс его построения. Пусть на каждом очередном шаге построения два интервала, остающиеся от одного родительского отрезка, наследуют его меру, но не обязательно в равной пропорции, а, скажем, в отношении $a : b$, где $a + b = 1$. Если на k -м

шаге фигурирующая в определении (12.11) сумма $\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q = S_k$,

то на следующем шаге каждый ее член заменяется на два, $p_i^q \rightarrow (ap_i)^q + (bp_i)^q$, так что $S_{k+1} = (a^q + b^q)S_k$. Отсюда следует, что

$S_k \propto (a^q + b^q)^k$. Поскольку длины отрезков на k -м шаге построения канторова множества составляют $\varepsilon = 3^{-k}$, то в соответствии с (12.11) имеем

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log(a^q + b^q)}{-k \log 3} = \frac{\log_3(a^q + b^q)}{1-q}. \quad (12.12)$$

В частном случае $a = b = 1/2$ на каждом уровне построения всем отрезкам приписывается одинаковая мера, из (12.12) получаем $D_q = \log_3(2^{-q} + 2^{-q})/(1-q) = \log_3 2$. Таким образом, все размерности D_q в этом случае равны и совпадают с фрактальной размерностью D_0 . Множества, обладающие этим свойством, называются *однородными фракталами*.

Множества, у которых обобщенная размерность зависит от параметра q , называют *мультифракталами*. Канторово множество следует считать мультифракталом, если параметры a и b , ответственные за распределение меры, не равны друг другу. На рис. 12.3

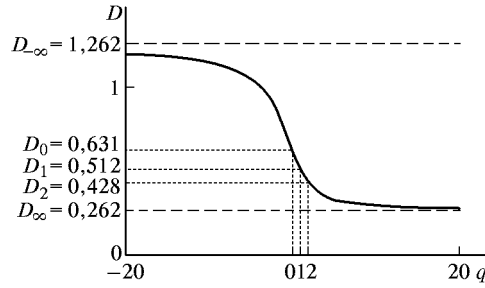


Рис. 12.3. График обобщенной размерности для множества Кантора с мерой, заданной параметрами $a = 3/4$ и $b = 1/4$

показана зависимость D от q для частного случая, $a = 3/4$ и $b = 1/4$. График целиком заключен в интервале от $D_{-\infty} = -\log_3(\min(a, b))$ до $D_{\infty} = -\log_3(\max(a, b))$. Заметим, что эта зависимость монотонно убывающая, так что емкость D_0 больше информационной размерности D_1 , а она, в свою очередь, больше корреляционной D_2 . Доказано, что соотношение между размерностями

$$D_{-\infty} \geq D_0 \geq D_1 \geq D_2 \geq D_{\infty} \quad (12.13)$$

справедливо в самом общем случае.

12.4. Усовершенствованное определение и спектр размерностей аттрактора обобщенного отображения пекаря

Как отмечалось в предыдущей лекции, определение емкости в более точном математическом контексте заменяют определением размерности по Хаусдорфу. Аналогичным образом можно пере-

определить обобщенные размерности, рассматривая покрытия аттрактора элементами произвольной формы и размера (Halsey et al., 1986). Предположим, что построено такое покрытие, причем диаметр его элементов не превышает заданной величины δ . Диаметр i -го элемента покрытия обозначим ε_i , а его меру p_i . Введем сумму по всем элементам покрытия, зависящую от двух параметров, q и τ :

$$\Gamma_{q, \tau}(\delta) = \sum \frac{p_i^q}{\varepsilon_i^\tau}. \quad (12.14)$$

Далее следует определить нижнюю или верхнюю грань по всем возможным покрытиям:

$$\gamma_{q, \tau}(\delta) = \begin{cases} \inf \Gamma_{q, \tau}(\delta), & q \leq 1, \tau \leq 0, \\ \sup \Gamma_{q, \tau}(\delta), & q > 1, \tau > 0. \end{cases} \quad (12.15)$$

Пусть q фиксировано, и потребуем, чтобы при уменьшении размера элементов покрытия величина $\gamma_{q, \tau}(\delta)$ не стремилась бы ни к нулю, ни к бесконечности, а реализовалась бы промежуточная, критическая ситуация. Это достигается при некотором вполне определенном выборе τ ; обозначим его $\tau(q)$. Тогда отвечающая данному q обобщенная размерность определяется как

$$d_q = \frac{\tau(q)}{q - 1}. \quad (12.16)$$

В большинстве случаев, с которыми приходится иметь дело в нелинейной динамике, справедливо равенство размерностей d_q и D_q . Поэтому далее мы их, как правило, не различаем и будем пользоваться обозначением D_q .

Обратимся к примеру — аттрактору обобщенного отображения пекаря (2.21) (см. рис. 2.8). Его сечение вертикальной прямой представляет собой двухмасштабное канторово множество, у которого отношение геометрических размеров дочерних интервалов к исходному дается параметрами μ и ν , тогда как наследуемая от родительского отрезка мера распределяется в отношении $a : b$. Совокупность интервалов, имеющихся на k -м шаге построения, образует покрытие двухмасштабного канторова множества. Предположим, мы нашли для него сумму $\Gamma_k = \sum p_i^q / \varepsilon_i^\tau$. На следующем шаге построения каждый член заменяется на два, $p_i^q / \varepsilon_i^\tau \rightarrow (ap_i)^q / (\mu \varepsilon_i)^\tau + (bp_i)^q / (\nu \varepsilon_i)^\tau$, так что

$$\Gamma_{k+1} = \left(\frac{a^q}{\mu^\tau} + \frac{b^q}{\nu^\tau} \right) \Gamma_k. \quad (12.17)$$

Отсюда следует, что критическая ситуация, разграничивающая области, где $\Gamma_k \rightarrow 0$ и $\Gamma_k \rightarrow \infty$, отвечает условию

$$\frac{a^q}{\mu^\tau} + \frac{b^q}{\nu^\tau} = 1. \quad (12.18)$$

Оно определяет зависимость $\tau = \tau_C(q)$ и, по формуле (12.16), размерность двухмасштабного канторова множества:

$$D_q^C = \frac{\tau_C(q)}{1 - q}.$$

Переходя к аттрактору обобщенного отображения пекаря, рассмотрим покрытие, показанное на рис. 11.13. Покрытие i -й полосы содержит $n_i \cong 1/\varepsilon_i$ квадратиков со стороной ε_i . Мера, приходящаяся на один квадратик, составляет $p_i/n_i \cong \varepsilon_i p_i$, где p_i — мера соответствующего интервала для двухмасштабного канторова множества. Сумма, которую нужно вычислять для определения обобщенных размерностей, выражается тогда следующим образом:

$$\Gamma_k = \sum_i \frac{n_i (p_i/n_i)^q}{\varepsilon_i^\tau} = \sum_i \frac{p_i^q}{\varepsilon_i^{\tau-q+1}}. \quad (12.19)$$

На следующем, $k+1$ -м шаге построения аттрактора каждый член суммы порождает два, $p_i^q/\varepsilon_i^{\tau-q+1} \rightarrow (ap_i)^q/(\mu\varepsilon)^{\tau-q+1} + (bp_i)^q/(\nu\varepsilon)^{\tau-q+1}$, так что

$$\Gamma_{k+1} = \left(\frac{a^q}{\mu^{\tau-q+1}} + \frac{b^q}{\nu^{\tau-q+1}} \right) \Gamma_k. \quad (12.20)$$

Сравнивая (12.17) и (12.20), видим, что $\tau_B(q) = \tau_C(q) + q - 1$, где $\tau_B(q)$ отвечает аттрактору отображения пекаря, а $\tau_C(q)$ — двухмас-

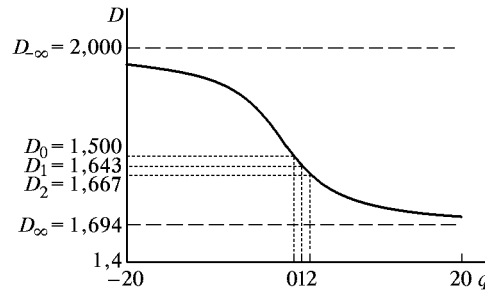


Рис. 12.4. График обобщенной размерности для аттрактора обобщенного отображения пекаря с параметрами $\mu = 1/4$, $\nu = 1/2$, $a = b = 1/2$

штабному канторову множеству. Из формулы (12.16) тогда видно, что $D_q^B = 1 + D_q^C$.

Рассмотрим пример, допускающий аналитическое решение: пусть $\mu = \nu^2$ и $a = b = 1/2$. Тогда из (12.18) получается квадратное уравнение относительно $\nu^{-\tau}$: $\nu^{-2\tau} + \nu^{-\tau} - 2^q = 0$. Его решение дает $\nu^\tau = -1/2 + \sqrt{1/4 + 2^q}$. Отсюда

$$\tau = -\frac{\log(\sqrt{1/4 + 2^q} - 1/2)}{\log \nu}$$

и

$$D_q^B = 1 + D_q^C = 1 + \frac{\log_\nu(\sqrt{1/4 + 2^q} - 1/2)}{1 - q}.$$

На рис. 12.4 показан график зависимости размерности от параметра q при $\nu = 1/2$. Отметим, что, как и в предыдущем примере, размерность D_0 превышает информационную, а та, в свою очередь, больше корреляционной размерности. Максимальная и минимальная размерности равны, соответственно, $D_{-\infty} = 1 - \log_\nu 2$ и $D_\infty = 1 - (1/2) \log_\nu 2$.

12.5. Скейлинг-спектр

Вернемся к покрытию аттрактора ячейками фиксированного размера ε . Имея в виду, что каждой ячейке отвечает своя инвариантная мера p_i , припишем ей *индекс сингулярности* α_i , определенный таким образом, что

$$p_i = \varepsilon^{\alpha_i}. \quad (12.21)$$

Считая, что размер ячеек очень мал, и их число очень велико, можно ввести функцию распределения ячеек по индексу α . Можно предположить, что количество ячеек dn , попадающих в интервал от $\alpha - d\alpha/2$ до $\alpha + d\alpha/2$, будет возрастать при уменьшении ε по степенному закону, с некоторым показателем степени, зависящим от α . Добавляя (несущественный для дальнейшего) предэкспоненциальный множитель, полагаем

$$dn = \rho(\alpha) \varepsilon^{-f(\alpha)} d\alpha. \quad (12.22)$$

Функция $f(\alpha)$ — важная характеристика мультифракталов, которую называют *скейлинг-спектром*, *спектром сингулярностей* или просто *$f(\alpha)$ -спектром* (Halsey et al., 1986).

Рассмотрим связь между $f(\alpha)$ -спектром и спектром обобщенных размерностей. Фигурирующая в определении (12.11) сумма

$\gamma(q) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \varepsilon^{\alpha_i q}$ выражается с помощью функции распределения (12.22) как интеграл

$$\gamma(q) = \int \rho(\alpha) \varepsilon^{-f(\alpha) + \alpha q} d\alpha = \int \rho(\alpha) \exp(L[f(\alpha) - \alpha q]) d\alpha, \quad (12.23)$$

где $L = \ln(1/\varepsilon)$. Поскольку параметр L большой, основной вклад в интеграл дает узкая окрестность точки, где показатель экспоненты максимален, т. е.

$$f'(\alpha) - q = 0. \quad (12.24)$$

Обозначим решение этого уравнения через $\alpha(q)$ и разложим показатель в ряд по $\tilde{\alpha} = \alpha - \alpha(q)$. Предполагая, что $f''(\alpha(q)) > 0$, с учетом (12.24) имеем:

$$\begin{aligned} \gamma(q) &\cong \\ &\cong \int \rho(\alpha(q)) \exp \left(L[f(\alpha(q)) - \alpha(q)q] - \frac{1}{2}L|f''(\alpha(q))|\tilde{\alpha}^2 \right) d\tilde{\alpha} \cong \\ &\cong \varepsilon^{-f(\alpha(q)) + \alpha(q)f'(\alpha(q))}. \end{aligned} \quad (12.25)$$

Используя определение (12.11), получаем

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \gamma(\varepsilon)}{\log \varepsilon} = \frac{\alpha(q)q - f(\alpha(q))}{q-1}. \quad (12.26)$$

Для вычисления скейлинг-спектра удобно использовать введенную в предыдущем разделе сумму $\Gamma_{q,\tau}(\delta) = \sum p_i^q / \varepsilon_i^\tau$. Напомним, что критическое значение $\tau(q)$, такое, что $\Gamma_{q,\tau}(\delta) \rightarrow 0$ при $\tau < \tau(q)$ и $\Gamma_{q,\tau}(\delta) \rightarrow \infty$ при $\tau > \tau(q)$, определяет

$$\text{обобщенную размерность: } D_q = \frac{\tau(q)}{(q-1)}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \tau(q) &= \alpha(q)q - f(\alpha(q)), \\ \tau'(q) &= \alpha'(q)q + \alpha(1) - \\ &\quad - f'(\alpha(q))\alpha'(q) = \alpha(q), \end{aligned} \quad (12.27)$$

где мы учли (12.24). Отсюда следует, что скейлинг-спектр можно определить через известную зависимость $\tau(q)$, как неявную функцию,

$$\begin{cases} \alpha = \tau'(q), \\ f(\alpha) = \alpha q - \tau(q). \end{cases} \quad (12.28)$$

На рис. 12.5 показан скейлинг-спектр двухмасштабного канторова множества с параметрами $\mu = \nu^2$ и $a = b = 1/2$. Отметим, что максимум функции $f(\alpha)$ отвечает фрактальной размерности D_0 , а точка касания графика с биссектрисой — информационной размерности D_1 . Минимальная и максимальная размерности, D_∞ и

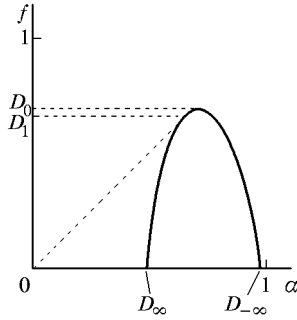


Рис. 12.5. Скейлинг-спектр двухмасштабного канторова множества с параметрами $\mu = 1/4$, $\nu = 1/2$, $a = b = 1/2$

$D_{-\infty}$, определяют интервал значений α , в котором располагается скейлинг-спектр.

В заключение следует упомянуть, что существует далеко идущая аналогия между рассмотренным подходом к описанию мультифракталов и термодинамикой. Она основана на том, что сумму

$\gamma(q) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q$ можно рассматривать как аналог статистической суммы $Z(\beta) = \sum_i e^{-\beta E_i}$, где роль обратной температуры β играет

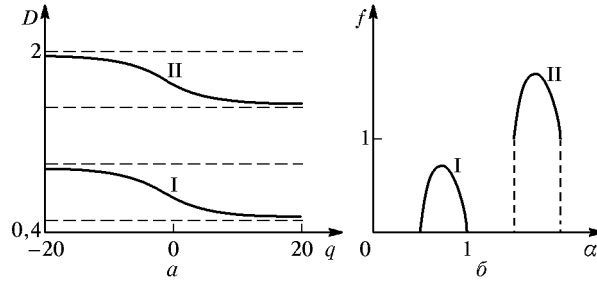


Рис. 12.6. К пояснению соотношения между спектром обобщенных размерностей (а) и скейлинг-спектром (б) для двухмасштабного канторова множества (I) и аттрактора обобщенного отображения пекаря (II)

параметр q , а энергетических уровней E_i — логарифм меры ячеек покрытия ($-\ln p_i$). Подобно тому как обобщенные размерности и скейлинг-спектр выражаются через сумму $\gamma(q)$ и ее производные, термодинамические характеристики выражаются через статсумму $Z(\beta)$. По этой причине рассмотренный подход к теории мультифракталов называют *термодинамическим формализмом* (рис. 12.6).

Указанная аналогия лежит в основе интересного направления развития теории, состоящего в изучении так называемых *q-фазовых переходов*, аналогичных фазовым переходам в термодинамических системах. Как полагают, они характерны для негиперболических аттракторов и проявляются в возникновении разрывов производных в спектре обобщенных размерностей и скейлинг-спектре. В качестве примера на рис. 12.7 показан скейлинг-спектр аттрактора отображения Эно (Cvitanović et al., 1988; Ott et al., 1989). Область справа от точки фазового перехода, где график выглядит как глад-

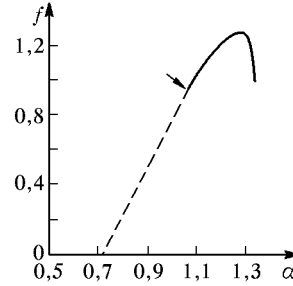


Рис. 12.7. Скейлинг-спектр аттрактора в отображении Эно при $a = 1.4$, $b = -0.3$. Стрелкой указано расположение точки фазового перехода

кая кривая, отвечает интервалу гиперболичности, а слева, где он изображается прямой линией, — области негиперболичности.

12.6. Ляпуновская размерность и формула Каплана–Йорке

Обсудим вопрос о том, какая взаимосвязь существует между спектром ляпуновских показателей аттрактора и его фрактальной размерностью (Kaplan, Yorke, 1979).

Пусть размерность фазового пространства диссипативной системы N , тогда мы имеем N штук ляпуновских показателей, $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots, \Lambda_N$, которые считаем занумерованными в порядке убывания. Если наш аттрактор странный хаотический, то старший показатель положителен, $\Lambda_1 > 0$. С другой стороны, сумма всех ляпуновских показателей отрицательна: $S_N = \sum_{i=1}^N \Lambda_i < 0$. По-

этому, вычисляя сумму $S_m = \sum_{i=1}^m \Lambda_i$ последовательно для $m = 1, 2, \dots$, мы будем получать в результате сначала положительные, а потом отрицательные величины S_m (рис. 12.8). Найдем такое m , что $S_m > 0$, но $S_{m+1} < 0$. Если рассмотреть подпространство, образованное векторами возмущений, которые отвечают первым m ляпуновским показателям, то в этом пространстве объем облака изображающих точек будет возрастать в процессе динамики. С другой стороны, в подпространстве, ассоциирующемся с количеством ляпуновских показателей на единицу большим, объем будет уже сжиматься. По остальным измерениям

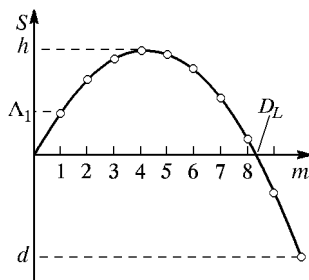


Рис. 12.8. Зависимость суммы ляпуновских показателей $S_m = \sum_{i=1}^m \Lambda_i$ от числа слагаемых.

В частности, S_1 есть старший ляпуновский показатель Λ_1 , максимальное значение S_m отвечает КС-энтропии h , S_N есть отрицательная величина d , характеризующая сжатие фазового объема при конденсации облака изображающих точек на аттрактор. Точка пересечения графика, образованного отрезками прямых, с осью абсцисс дает ляпуновскую размерность по формуле Каплана–Йорке (12.32)

фазового пространства, которым отвечают ляпуновские показатели $\Lambda_{m+2}, \dots, \Lambda_N$, сжатие происходит еще быстрее, и эти измерения будем игнорировать.

В подпространстве размерности $m+1$ рассмотрим покрытие аттрактора кубиками со стороной ε , причем ориентация ребер предполагается соответствующей направлениям, ассоциирующимся с

ляпуновскими показателями $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{m+1}$. Общее количество элементов покрытия пусть будет $N(\varepsilon)$. В силу динамики изображающих точек по фазовым траекториям, область, покрытая кубиками, перейдет через некоторое время T в другую область, сильно вытянутую по направлению, отвечающему старшему показателю и сплюснутую по направлению, связанному с последним учитываемым показателем Λ_{m+1} (рис. 12.9). Каждый кубик превратится

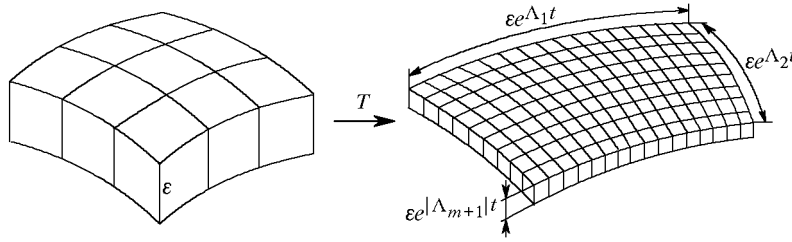


Рис. 12.9. К выводу формулы Каплана–Йорке

при этом в параллелепипед размера $\varepsilon_1 \times \varepsilon_2 \times \varepsilon_3 \times \dots \times \varepsilon_{m+1}$, где $\varepsilon_i = \varepsilon \exp(\Lambda_i T)$. Покрытие одного параллелепипеда кубиками со стороной ε_{m+1} потребует

$$n = \prod_{i=1}^m \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{m+1}} \right) = \prod_{i=1}^m \left(\frac{\varepsilon \exp(\Lambda_i T)}{\varepsilon \exp(-|\Lambda_{m+1}|T)} \right)$$

элементов. Прodelав это со всеми $N(\varepsilon)$ параллелепипедами, получим новое покрытие аттрактора с количеством элементов

$$\begin{aligned} N(\varepsilon_{m+1}) &= nN(\varepsilon) = N(\varepsilon) \prod_{i=1}^m \left(\frac{\varepsilon \exp(\Lambda_i T)}{\varepsilon \exp(-|\Lambda_{m+1}|T)} \right) = \\ &= N(\varepsilon) \prod_{i=1}^m \left(\frac{\exp(\Lambda_i T)}{\exp(-|\Lambda_{m+1}|T)} \right). \end{aligned} \quad (12.29)$$

Оценка фрактальной размерности по формуле (11.1) тогда дает

$$\begin{aligned} D &\cong -\frac{\log N(\varepsilon_{m+1})}{\log \varepsilon_{m+1}} = \\ &= \frac{\log N(\varepsilon) + \log \prod_{i=1}^m \exp(\Lambda_i T) - m \log \exp(-|\Lambda_{m+1}|T)}{-\log \varepsilon + |\Lambda_{m+1}|T}. \end{aligned} \quad (12.30)$$

Умножая левую и правую части на $-\log \varepsilon + |\Lambda_{m+1}|T$, получаем

$$-D \log \varepsilon + D|\Lambda_{m+1}|T = \log N(\varepsilon) + \sum_{i=1}^m \Lambda_i T + m|\Lambda_{m+1}|T, \quad (12.31)$$

причем первые члены в левой и правой части сокращаются, поскольку $D \cong -\log N(\varepsilon)/\log \varepsilon$. Таким образом, окончательно из (12.31) находим

$$D = m + \frac{\sum_{i=1}^m \Lambda_i}{|\Lambda_{m+1}|}, \quad (12.32)$$

Здесь, напомним, число m определяется так, что $S_m = \sum_{i=1}^m \Lambda_i > 0$,

но уже $S_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} \Lambda_i < 0$.

Соотношение (12.32) называют формулой Каплана–Йорке по именам исследователей, предложивших ее в 1979 г. Первоначальная гипотеза состояла в том, что эта формула позволяет вычислять информационную размерность аттракторов. Для хаотических аттракторов двумерных обратимых отображений, у которых $\Lambda_1 > 0$ и $\Lambda_2 < 0$, это утверждение доказано строго. Однако в общем случае доказать предположение Каплана–Йорке не удастся, и, по-видимому, оно, вообще говоря, и не справедливо. В то же время, численно оценка размерности по формуле (12.32) получается обычно очень хорошей. Соломоново решение, принятое научным сообществом в отношении формулы Каплана–Йорке, состоит в том, чтобы рассматривать ее как определение новой фрактальной размерности, которую называют *ляпуновской размерностью*. Большое практическое преимущество этой размерности состоит в простоте ее вычисления, поскольку для этого требуется только спектр ляпуновских показателей.

Формулу (12.32) можно иллюстрировать графически, если изобразить зависимость сумм ляпуновских показателей $S_m = \sum_{i=1}^m \Lambda_i$ от числа слагаемых и соединить точки ломаной линией (рис. 12.8). Точка пересечения графика с осью абсцисс как раз соответствует размерности D_L , подсчитанной по формуле Каплана–Йорке. График позволяет также почувствовать взаимное соотношение между несколькими существенными для нелинейной динамики характеристиками аттрактора. В частности, максимальное значение S_m отвечает сумме положительных ляпуновских показателей, так называемой *энтропии Колмогорова–Синя* аттрактора h . Получаемая при $m = 1$ величина S_1 есть старший ляпуновский показатель Λ_1 . (Для хаотических аттракторов h и Λ_1 положительны, это критерий хаоса.) Наконец, сумма S_N есть отрицательная величина d , характеризующая сжатие фазового объема при конденсации облака изображающих точек на аттрактор.

Лекция 13

ОБРАБОТКА РЕАЛИЗАЦИЙ: РЕКОНСТРУКЦИЯ АТТРАКТОРА ПО НАБЛЮДАЕМОЙ, ПРОБЛЕМА ВЛОЖЕНИЯ, ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

В различных областях знания, от медицины и биологии до метеорологии и астрофизики, приходится сталкиваться с ситуацией, когда объект исследования либо не допускает непосредственного исследования своей структуры, либо эта структура слишком сложна, но для анализа доступен производимый системой сигнал. В медицинских приложениях это может быть кардиограмма или электроэнцефалограмма, в климатологии — запись данных метеорологических наблюдений за длительный период, в астрофизике — зависимость оптической яркости или интенсивности ра-

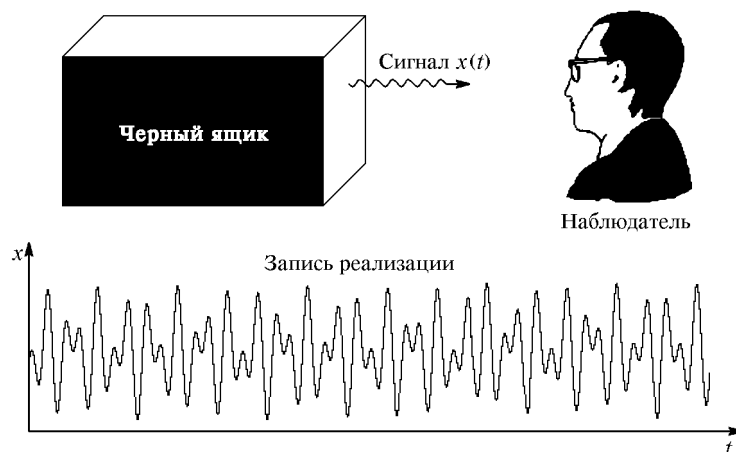


Рис. 13.1. К проблеме обработки наблюдаемой реализации: можно ли по ее записи установить, что в «черном ящике» находится динамическая система?

диоизлучения от отдаленного объекта. Абстрагируясь от конкретной природы объекта, можно представить себе «черный ящик», на выходе которого наблюдатель регистрирует временную зависимость одной или нескольких переменных (рис. 13.1).

Пусть мы имеем записанную реализацию

$$x = x(t) \quad (13.1)$$

или, при наличии искусственной или естественной дискретизации, временной ряд

$$x_k = x(k\Delta t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, M, \quad (13.2)$$

и пусть зависимость от времени визуально выглядит сложной и непериодической. Можно ли из ее анализа заключить, произведена ли реализация динамической системой или это просто случайный шумовой сигнал? Если это динамическая система, то что можно сказать о ее свойствах и характеристиках — сколько переменных необходимо для задания состояния, какова фрактальная размерность аттрактора, отвечающего за наблюдаемый режим, хаотический ли он, можно ли сконструировать модель в виде дифференциальных уравнений или отображений, которая позволяла бы адекватно воспроизвести наблюдаемую временную зависимость и прогнозировать будущее состояние системы? Если такой анализ возможен, то аппарат нелинейной динамики с очевидностью превращается в неоценимый инструмент исследования, позволяющий делать заключения или предположения о структуре объекта и, возможно, выработать пути к управлению его динамикой посредством внешнего воздействия. Поэтому разработка методов и алгоритмов анализа реализаций рассматривается как одно из важнейших направлений нелинейной динамики, непосредственно связанное с возможными приложениями. В этой лекции мы познакомимся с идеями и представлениями, которые лежат в основе развиваемых подходов.

13.1. Реконструкция фазового пространства методом запаздывания (delay-time reconstruction)

Имея запись зависимости наблюдаемой переменной от времени $x = x(t)$, зададимся некоторым временным шагом τ и целым числом m , и построим m -мерный вектор, компонентами которого являются значения x в моменты времени $t, t - \tau, t - 2\tau, \dots, t - (m - 1)\tau$, т. е.

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), x(t - \tau), x(t - 2\tau), \dots, x(t - (m - 1)\tau)). \quad (13.3)$$

Вектор $\mathbf{x}(t)$ задает точку в m -мерном пространстве, которая с течением времени t перемещается по некоторой траектории. В дискретном случае полагаем

$$\mathbf{x}_k = (x_k, x_{k-p}, x_{k-2p}, \dots, x_{k-(m-1)p}), \quad (13.4)$$

где p — фиксированное целое, например, 1, 2, 3, ... При переборе по k получаем дискретный набор точек m -мерного пространства.

Если предположить, что мы имеем дело с установившимся режимом колебаний диссипативной системы, то возникающая при описанном построении картинка есть реконструированный портрет аттрактора.

Это построение позволяет связать с анализируемой реализацией наглядный образ, что само по себе заслуживает внимания (Packard et al., 1980). Рассматривая реконструированный портрет при небольших m , именно, $m = 2$ и 3 , уже можно сделать полезные качественные заключения. Картинку можно интерпретировать как проекцию изображения аттрактора из «естественного» фазового пространства системы в «реконструированное» пространство размерности m . Если изображение выглядит как бесструктурная область, заполненная точками, то это означает, что размерность системы N велика по сравнению с m , либо анализируемый сигнал имеет природу случайного шума. Если же сигнал генерируется динамической системой с невысокой размер-

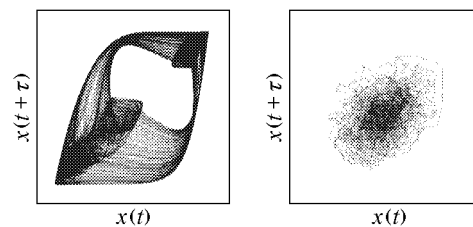


Рис. 13.2. Пример представления данных в виде портрета реализации в реконструированном фазовом пространстве при $m = 2$. Слева — для реализации, генерируемой уравнением с запаздыванием $\dot{x} + \gamma x = a - x^2(t - 1)$, $a = 1,5$, $\gamma = 10$; справа — для реализации случайного сигнала (с конечным временем корреляции)

ностью фазового пространства, то наблюдается картинка с характерной выраженной тонкой внутренней структурой (рис. 13.2).

Можно ли указать не «глазомерный», а количественный критерий динамической природы обрабатываемой реализации? В начале 80-х годов было предложено использовать для этой цели корреляционную размерность, адаптируя соответствующим образом алгоритм Грассбергера–Прокачиа (Takens, 1980; Malraison et al., 1983)

13.2. Оценка корреляционной размерности по наблюдаемой

Рассмотрим временной ряд, полученный в результате записи наблюдаемой переменной величины в последовательные равноотстоящие моменты времени, $x_1, x_2, \dots, x_N$. Зададимся некоторым целым m и используем идею реконструкции аттрактора методом

запаздывания в пространстве размерности m , т. е. положим

$$\mathbf{x}_i = (x_i, x_{i-p}, x_{i-2p}, \dots, x_{i-(m-1)p}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (13.5)$$

(Целое число p рекомендуется подобрать так, чтобы по возможности улучшить получаемый результат, см. ниже.)

Рассматривая множество точек $\mathbf{x}_i$ в m -мерном пространстве как фазовый портрет аттрактора, оценим его размерность по методу Грассбергера–Прокачиа, т. е. вычислим для разных ε корреляционный интеграл

$$\tilde{N}(\varepsilon) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M(M-1)} \sum_{i,j=1}^M \theta(\varepsilon - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|), \quad (13.6)$$

отложим полученную зависимость на графике в координатах $(\log \varepsilon, \log C(\varepsilon))$, отыщем на ней линейный участок и определим угловой коэффициент $D(m)$. Описанную процедуру выполним несколько раз, рассматривая последовательно $m = 1, 2, 3, \dots$. Наличие или отсутствие насыщения зависимости $D(m)$ при увеличении m рассматривается как критерий того, генерируется ли сигнал динамической системой или же он является шумовым. Если наблюдается насыщение на некотором уровне D , то эту величину D принимаем в качестве оценки корреляционной размерности аттрактора динамической системы, породившей наблюдаемый сигнал. Основываясь на оценке D и так называемой теореме о вложении (см. следующий раздел), можно заключить, что размерность фазового пространства этой динамической системы не превышает $2D + 1$. Независимую оценку этой величины (*размерности вложения*) дает число m , начиная с которого наступает насыщение зависимости $D(m)$.

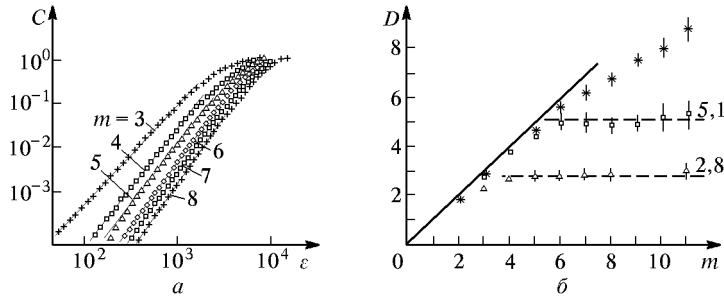


Рис. 13.3. Оценка размерности аттрактора в эксперименте по конвекции Релея–Бенара по наклону зависимости корреляционного интеграла от размера элемента покрытия в двойном логарифмическом масштабе (а) и результаты оценки размерности в зависимости от размерности вложения m для белого шума, конвекции Релея–Бенара и электроконвекции (Malraison et al., 1983)

Рассмотрим один из исторически первых примеров применения такого подхода к обработке временного ряда, полученного в экспериментах по конвекции в работе французской группы (Mallraison et al., 1983). На рис. 13.3 приводятся зависимости корреляционного интеграла от ε и от размерности вложения m для исследованного режима конвекции Релея–Бенара, причем в качестве обрабатываемой переменной фигурировало отклонение светового луча, прошедшего через конвекционную ячейку. Количество отсчетов в обрабатываемой последовательности составляло $M = 15000$. В области, где график аппроксимируется прямой, ее наклон с ростом m имеет тенденцию к насыщению на уровне $D \cong 2,8$. Было показано, что изменение шага выборки при реконструкции фазового пространства ($p = 4 \div 15$) не влияет заметным образом на оценку размерности. Аналогичной обработке были подвергнуты данные эксперимента по конвекции, вызванной электрическим полем, а также тестовый шумовой сигнал. Для электроконвекции размерность тоже оказалось конечной, $D \cong 5,1$, тогда как для шумового сигнала зависимость $D(m)$ не показывает тенденции к насыщению (рис. 13.3б).

13.3. О технических проблемах, возникающих при вычислении размерности. Оценка Экмана–Рюэля

Первоначальный энтузиазм, вызванный возможностью выявления динамической природы сигналов, оправдался лишь отчасти. Вычисление корреляционной размерности по наблюдаемой действительно стало рабочим инструментом многих исследователей, но таит много «подводных камней» и не всегда приводит к однозначно интерпретируемым результатам.

В «хорошем» случае график корреляционного интеграла должен выглядеть, как показано на рис. 13.3а. Чтобы этого добиться, рекомендуется, во-первых, отыскать оптимальный шаг выборки, в наших обозначениях τ или p .

На рис. 13.4 показано, как выглядят реконструированные портреты аттракторов для одной конкретной системы при $m = 2$ и разных τ . При очень малых τ аттрактор занимает узкую полосу вблизи диагонали, при очень больших его тонкая структура сильно замазана из-за потери корреляции между компонентами реконструированного вектора состояния. Очевидно, оптимальный выбор τ должен быть таким, чтобы интервал $m\tau$ соответствовал характерному временному периоду процесса (на рис. 13.4 недалеко от оптимума вторая и третья картинки). Пытаться использовать более точные количественные критерии вряд ли целесообразно, поскольку все предложенные до сих пор варианты не дают заметно лучших результатов, чем «глазомерный» способ.

Далее, необходимо определить интервал масштабов ($\log \varepsilon_{\min}$, $\log \varepsilon_{\max}$), принимая во внимание возможное наличие шумов и погрешностей измерений или вычислений, которые могут портить результат в области малых ε , и иметь уверенность в том, что для определения наклона графика выбран правильный интервал. Отклонение от прямой линии в области больших ε связано с тем, что элементы покрытия становятся сравнимыми с размерами аттрак-

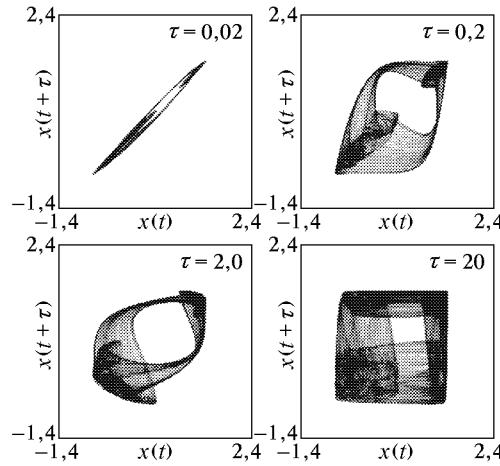


Рис. 13.4. Вид реконструированных портретов аттракторов при размерности вложения $m = 2$ и разных τ для системы, описываемой уравнением с запаздыванием $\dot{x} + \gamma x = a - x^2(t - 1)$ при $a = 1,5$, $\gamma = 10$

тора, а при малых ε чаще всего с тем, что количество пар точек мало и недостаточно для хорошей статистической оценки.

Чтобы добиться более широкого интервала линейности, по возможности увеличивают временную протяженность обрабатываемых реализаций, т. е. число точек M . Вообще говоря, оно должно быть тем больше, чем выше размерность системы. Приведем соответствующую количественную оценку, принадлежащую Экману и Рюэлю (Eckmann, Ruelle, 1992).

Задавая размер окрестности при вычислении корреляционного интеграла в пределах от $r = 0$ до $r = L$ (размер аттрактора), будем получать число пар точек, попавших в один элемент покрытия $N(r)$ в пределах от 0 до $M^2/2$. Величина $M^2/2$ должна достигаться при $r \cong L$, и при этом $N(r)$ должно быть пропорционально r^D . Отсюда следует, что приближенно можно записать

$$N(r) \cong \left(\frac{M^2}{2}\right) \left(\frac{r}{L}\right)^D. \quad (13.7)$$

Чтобы иметь достаточно протяженный для оценки размерности рабочий участок графика, потребуем выполнения соотношения

$$\frac{r}{L} = \rho \ll 1, \quad (13.8)$$

а для обеспечения достаточной статистики нужно иметь

$$N(r) \gg 1. \quad (13.9)$$

Таким образом, должно выполняться неравенство

$$\left(\frac{M^2}{2}\right) \left(\frac{r}{L}\right)^D \gg 1, \text{ или } M^2 \gg \frac{1}{\rho^D}, \text{ или } 2 \log M > D \log \left(\frac{1}{\rho^D}\right). \quad (13.10)$$

Если взять $\rho \cong 0,1$, то получаем $2 \lg M > D$, или $M > 10^{D/2}$. Формула $D_{\max} \cong 2 \lg M$ дает максимальную величину размерности, которую допустимо оценивать, имея в распоряжении M точек. Например, доверять оценке размерности при $M = 10^5$ можно лишь до тех пор, пока $D < 10$.

Все же далеко не всегда на графике корреляционного интеграла удастся выявить интервал линейности и дать обоснованную оценку размерности. Что делать, скажем, с графиком, показанным на рис. 13.5 справа? Возможная разумная позиция состоит в том,

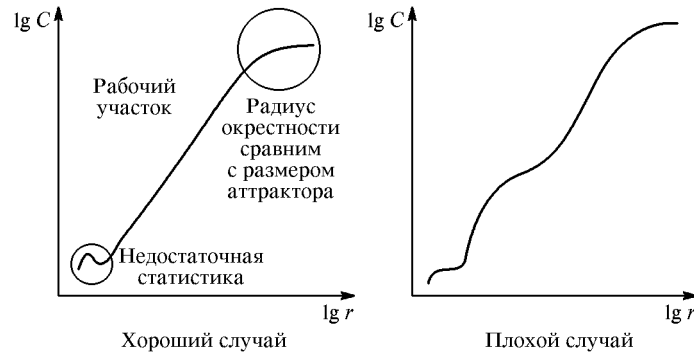


Рис. 13.5. Вид зависимости корреляционного интеграла от радиуса окрестности в случае, допускающем оценку размерности (слева), и пример «плохой» ситуации, когда разумная оценка невозможна (справа)

чтобы смотреть на сам этот график как на характеристику динамических свойств системы в определенном интервале масштабов. По-видимому, в некоторых случаях анализ таких графиков может пролить свет на физическую природу объекта исследования. Если, например, за поведение реализации на разных масштабах отвечают разные динамические процессы, то наклон соответствующих

участков зависимости $\log C$ от $\log \varepsilon$ может относиться к подсистемам, отвечающим за эти процессы. Это наблюдение может послужить основанием для выделения такого рода подсистем в качестве структурных элементов рассматриваемого объекта с последующим их специальным исследованием.

13.4. Теорема о вложении

Математической основой для описанной процедуры реконструкции аттрактора служит так называемая *теорема о вложении* (Embedding Theorem). Чтобы ознакомиться с ее содержанием, мы должны сначала уточнить, что понимается под термином «вложение».

Пусть A есть компактное подмножество N -мерного пространства X . Определить вложение множества A в m -мерное пространство Y означает задать отображение X в Y такое, что совпадение образов двух векторов, принадлежащих множеству A , возможно только при равенстве этих векторов.

Утверждение, доказанное Мане, состоит в том, что практически любое (типичное в определенном смысле) гладкое отображение X в Y будет задавать вложение множества A в пространство Y при условии, что

$$m \geq 2D_A + 1, \quad (13.11)$$

где D_A — фрактальная размерность (емкость) множества A (Mané, 1981).

Будем интерпретировать X как фазовое пространство динамической системы, множество A как ее аттрактор, а Y — как фазовое пространство, реконструированное, например, методом запаздывания. При достаточно большой размерности m условие (13.11) заведомо выполняется, и тем самым процедура оценки размерности оправдана (теорема Такенса). Если допустить, что корреляционная размерность несущественно отличается от хаусдорфовой, то ее можно подставить в (13.11) и получить оценку размерности вложения.

Поясним смысл теоремы Мане на простых примерах.

Рассмотрим аттрактор в виде замкнутой орбиты — предельный цикл. Если мы попытаемся спроецировать его на плоскость, то, вообще говоря, образ аттрактора может оказаться кривой с самопересечениями, одним или несколькими (рис. 13.6). Каждая точка самопересечения является образом двух разных точек исходного аттрактора, так что условие вложения нарушается. Что особенно существенно, эти самопересечения не устраняются посредством «малого шевеления» конфигурации, в частности, при малом изменении направления проецирования. Это говорит о том, что двух измерений в общем случае недостаточно, чтобы реализовать вложение. С другой стороны, представим себе замкнутую

кривую в трехмерном пространстве. Хотя у нее могут быть точки самопересечения, но они с очевидностью устраняются «малым шевелением». Поэтому при $m = 3$ в типичном случае будем иметь вложение.

Размерность предельного цикла $D = 1$, поэтому из формулы (13.11) получаем $m = 3$ в полном соответствии с приведенным рассуждением. Для двумерного аттрактора ситуация вложения обес-

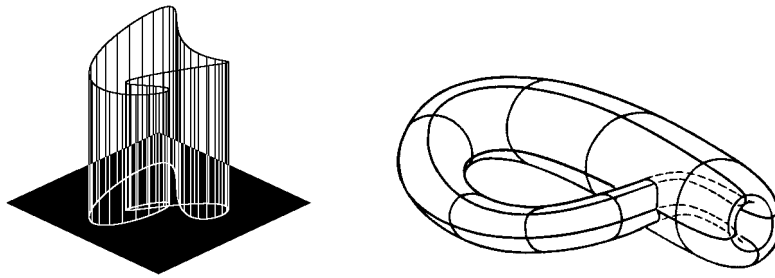


Рис. 13.6. Иллюстрация того, что отображение замкнутой орбиты (предельного цикла) в двумерное пространство, вообще говоря, не является вложением: замкнутая кривая-образ имеет точки самопересечения, не устраняющиеся «малым шевелением»

Рис. 13.7. Бутылка Клейна — двумерная поверхность, не допускающая вложения в трехмерное пространство без самопересечения

печена, начиная с $m = 5$. Отсюда, между прочим, следует, что должны существовать двумерные объекты, которые невозможно вложить в трехмерное пространство без самопересечения. Примером такого рода служит известная в топологии бутылка Клейна (рис. 13.7).

Чтобы понять происхождение формулы (13.11), рассмотрим задачу о нахождении точек пересечения двух гладких гиперповерхностей целой размерности в m -мерном пространстве. Пусть первая гиперповерхность имеет размерность D_1 и задана посредством $m - D_1$ уравнений вида $f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$, а вторая — размерность D_2 и задана $m - D_2$ уравнениями $g_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$. Множество точек их пересечения определяется совместной системой, содержащей $2m - D_1 - D_2$ уравнений. Если $D_1 + D_2 = m$, то для нахождения точек пересечения имеем систему m уравнений с m неизвестными, которая в типичном случае будет иметь конечное множество решений и определит конечный набор точек. Если же $D_1 + D_2 \leq m - 1$, то уравнений больше, чем неизвестных, и в типичном случае точек пересечения нет. Подставляя в последнее выражение $D_1 = D_2 = D$, получаем условие отсутствия самопересечений у гиперповерхности размерности D : $2D \leq m - 1$ или $m \geq 2D + 1$, что соответствует формуле (13.11).

Теорема Мане имеет более глубокое и нетривиальное содержание, чем это может показаться из наших пояснений, поскольку она относится не только к простым объектам типа гладких многообразий, но и к сложным фрактальным множествам, таким, как странные аттракторы.

13.5. Вычисление ляпуновских показателей по реализации

Поскольку критерием хаотической динамики служит присутствие положительного старшего ляпуновского показателя, представляет большой интерес возможность его оценки на основании обработки записи реализации (временных рядов). Предложенная для этой цели процедура (Wolf et al., 1985; Eckmann et al., 1986) состоит в следующем.

Сначала производится реконструкция аттрактора в фазовом пространстве методом запаздываний и определяется размерность вложения m . Дальнейшая последовательность действий похожа на алгоритм Бенеттина (рис. 13.8). Берем за исходную некото-

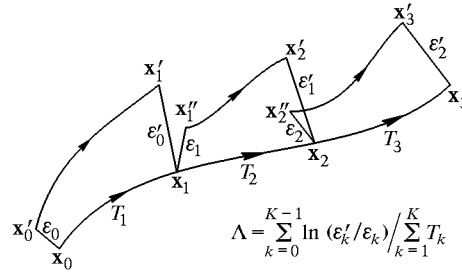


Рис. 13.8. К алгоритму вычисления ляпуновского показателя по реализации

рую точку $\mathbf{x}_0$ на реконструированном аттракторе и находим, просматривая запись временного ряда, другую точку $\mathbf{x}'_0$, находящуюся на малом расстоянии $\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\| = \epsilon_0$, но не близкую по времени. Затем, используя запись реализации, отслеживаем шаг за шагом динамику при старте из этих двух точек. Когда расстояние между изображающими точками $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}'_1$ превысит некоторую заданную величину $\epsilon_{\max}$, остановимся и зафиксируем период времени T_1 , который для этого понадобился, и отношение конечного и начального расстояний ϵ'_0 / ϵ_0 . Теперь вновь просмотрим реализацию с тем, чтобы отыскать другую точку старта возмущенной траектории. Она должна быть по возможности близка к точке $\mathbf{x}_1$ и сдвинута от нее по направлению, близкому к направлению вектора $\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}_1$. Пусть это точка $\mathbf{x}''_1$ и $\|\mathbf{x}''_1 - \mathbf{x}_1\| = \epsilon_1$. Отслеживаем теперь траектории, стартующие из точек $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}''_1$, пока через некоторый следующий период времени T_2 расстояние не превысит $\epsilon_{\max}$, и вычисляем отношение ϵ'_1 / ϵ_1 . Далее процедура повторяется

многократно, и ляпуновский показатель оценивается как

$$\Lambda = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} \ln (\varepsilon'_k / \varepsilon_k)}{\sum_{k=1}^K T_k}, \quad (13.12)$$

где K — общее число «ступенек» алгоритма.

Процедура оценки ляпуновского показателя требует еще большего объема данных, нежели вычисление корреляционной размерности. Согласно Экману–Рюэлю, если для адекватной оценки размерности нужно M отсчетов, то для оценки ляпуновского показателя в той же ситуации — порядка M^2 отсчетов.

13.6. Идея реконструкции уравнений динамической системы по наблюдаемой реализации

Предположим, что при обработке сигнала, поступившего от «черного ящика», установлено, что ему соответствует конечномерный аттрактор размерности D . Тогда, согласно теореме Такенса, его можно вложить в пространство размерности $N = [2D + 1] + 1$, где квадратные скобки означают целую часть числа. Это значит, что в принципе можно обеспечить адекватное описание динамики на аттракторе системой дифференциальных уравнений размерности N для случая непрерывного времени или N -мерным отображением в случае дискретного времени.

Идея реконструкции дифференциальных уравнений или отображений на основании анализа реализаций (Broomhead, King, 1986; Crutchfield, McNamara, 1987) вкратце состоит в следующем. Сначала определяем размерность вложения, т. е. размерность фазового пространства конструируемой модели. Далее берем за основу некоторую форму уравнений, содержащую набор неопределенных коэффициентов, например, коэффициентов разложения правых частей уравнений в ряд Тейлора по динамическим переменным. Потребуем, чтобы наблюдаемая реализация оптимальным образом описывалась данной моделью, для чего привлекается метод наименьших квадратов. Именно, формулируется условие минимума некоторой положительной величины типа суммы квадратов невязок. Из условия минимальности этой величины получается система уравнений, позволяющая найти неопределенные коэффициенты. Этим и завершается процедура построения модели.

Хотя идея выглядит достаточно простой и разумной, ее практическое осуществление сталкивается с большими трудностями. Как нетрудно видеть, задача в принципе некорректна. Действительно,

если обрабатываемая реализация отвечает движению по аттрактору, то в фазовом пространстве изображающая точка остается на множестве нулевой меры. Однако функции, фигурирующие в правых частях уравнений (отображений), должны быть определены во всем фазовом пространстве. Поэтому правильно передающая динамику на аттракторе реконструированная модель может оказаться неадекватной с точки зрения описания траекторий, отвечающих за приближение к аттрактору и выходу в установившийся режим (траектории, которые, собственно, и делают аттрактор аттрактором). Возможное решение проблемы состоит в том, чтобы помимо реализации, соответствующей аттрактору, обрабатывать еще и реализации, характеризующие процессы установления. Это, однако, возможно не во всех приложениях.

Первый нетривиальный момент при попытке реконструкции модели состоит в выборе конкретной формы уравнений, в которых предполагается осуществить подгонку неопределенных коэффициентов. С одной стороны, эта форма должна быть возможно более простой, чтобы минимизировать количество подбираемых параметров, с другой — обладать потенциально достаточной сложностью, чтобы передать наблюдаемую динамику. Общая рекомендация состоит в том, что при выборе формы уравнений в максимальной степени учитывать всю имеющуюся априорную информацию о системе: чем больше такой информации имеет исследователь, тем больше шансов получить хорошую модель.

Заметим, что формула (13.11) очень часто дает завышенную оценку размерности фазового пространства достаточной для реконструкции динамики (вспомните пример предельного цикла, для которого теорема вложения приводит к результату $m = 3$). Поэтому разумным может быть такой подход, когда шаг за шагом делаются попытки построить модель сначала с малой, а затем с последовательно увеличивающейся размерностью фазового пространства, до тех пор пока не будет достигнута разумная степень соответствия. При этом предварительная оценка размерности вложения становится, вообще говоря, необязательной.

Рассмотрим более конкретно одну из схем реконструкции отображения по наблюдаемому временному ряду $x_1, x_2, \dots, x_N$. Пусть размерность фазового пространства модели m уже выбрана. Используя для реконструкции векторов состояния метод запаздываний со сдвигом $p = 1$, построим набор векторов, отвечающих последовательным точкам траектории:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(n) &= (x_n, x_{n-1}, x_{n-p}, \dots, x_{n-m+1}) \equiv \\ &\equiv (y_1(n), y_2(n), \dots, y_m(n)). \end{aligned} \quad (13.13)$$

Соотношения, связывающие компоненты вектора состояния в два

Представим функцию f в виде (13.15) и для наилучшего соответствия модели и реализации потребуем, чтобы интеграл

$$S = \int (x^{(m)} - f(x, \dot{x}, \dots, x^{(m-1)}))^2 dt \quad (13.19)$$

был минимален. Для этого частные производные от S по коэффициентам A_i , B_{ij} , C_{ijk} должны обращаться в нуль, что приводит к системе линейных алгебраических уравнений, из которой получаются указанные коэффициенты.

Достоинством рассмотренного метода является его простота, поскольку находить приходится только одну функцию f . Однако он имеет существенный недостаток: процедура численного дифференцирования, которую приходится выполнять для нахождения компонент реконструированного вектора состояния, на практике приводит к значительным вычислительным погрешностям, — это хорошо известно в вычислительной математике. Поэтому такой подход можно рекомендовать только в применении к реализациям высокого качества, заданным гладкими функциями при пренебрежимо малом уровне шумов и прочих погрешностей. Альтернативными вариантами могут служить реконструкция методом запаздываний, использование для конструирования компонент вектора состояния операции интегрирования, «скользящего» усреднения (по интервалу времени разной длины для разных компонент вектора состояния), пропускание через линейные фильтры (с разными для разных компонент характеристиками) и т. п.

Таким образом, уже из нашего краткого обзора вырисовывается сложность поставленной задачи реконструкции динамических уравнений на основании анализа наблюдаемой реализации и проблематичность ее исчерпывающего и универсального решения. Однако перспективы очень привлекательны. Это и возможность эффективного прогноза состояния систем с хаотической динамикой, и подход к изучению динамических механизмов, лежащих в основе функционирования систем различной природы, и возможность разработки способов управления сложной динамикой систем посредством контролируемого, относительно небольшого по величине, внешнего воздействия. Поэтому настойчивые попытки продвигнуться в решении данной проблемы, как в общей постановке, так и применительно к конкретным системам, продолжаются. Можно еще раз повторить, что наиболее успешной реконструкция уравнений оказывается в тех случаях, когда имеется и эффективно используется достаточно богатая априорная информация об исследуемой системе.

Лекция 14

СЦЕНАРИИ ПЕРЕХОДА К ХАОСУ. ОБЩАЯ ДИСКУССИЯ

Как известно, в уравнениях динамических систем обычно присутствуют параметры — величины, которые считаются постоянными во времени, но от задания которых может зависеть характер реализующегося в системе режима. Можно представить себе, что система заключена в черный ящик, на котором имеется несколько ручек настройки. Предположим, что при одном положении ручек наблюдается регулярный режим динамики, например, периодические колебания, а при другом — хаос. Если мы плавно меняем настройку так, чтобы перейти от первой ситуации ко второй (рис. 14.1), то какой будет на пути к хаосу последовательность

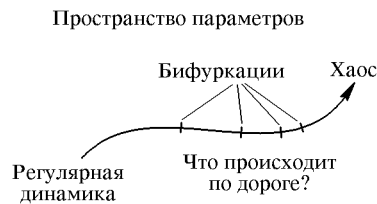


Рис. 14.1. К понятию сценария перехода к хаосу

бифуркаций — событий, состоящих в качественном изменении характера наблюдаемого режима? Об этой последовательности бифуркаций принято говорить как о *сценарии перехода к хаосу*. При этом подразумевается, что имеется сравнительно немного сценариев, являющихся в определенном смысле слова типичными, так что проблема их классификации и изучения не является необозримой.

Общепризнанно, что отправным пунктом в исследовании проблемы перехода к хаосу послужила работа Л.Д. Ландау, опубликованная в 1944 г. В ней ставится вопрос о том, как возникает турбулентность при увеличении числа Рейнольдса, основного управляющего параметра в гидродинамических задачах. Согласно предложенному Ландау сценарию, первичное течение теряет устойчивость по отношению к колебательному возмущению на некоторой частоте, затем возникшее осциллирующее течение в свою

очередь становится неустойчивым по отношению к возмущению на другой частоте и т. д. В результате большого числа бифуркаций, которые сопровождаются возникновением все новых и новых частот, находящихся в иррациональных отношениях, возникает сложный динамический режим — турбулентность. Несмотря на то, что речь идет о гидродинамической турбулентности, аргументация носит столь общий характер, что ее можно с равным основанием отнести и к другим диссипативным динамическим системам с многомерным фазовым пространством. Несколько позднее аналогичные представления были развиты немецким математиком Эберхардом Хопфом (Hopf, 1948). Он предложил также конкретную модельную систему, демонстрирующую усложнение динамики в результате последовательного рождения составляющих с несоизмеримыми частотами.

В начале 70-х годов анализ Ландау и Хопфа был подвергнут критике в работе исследователей из Франции и Голландии Дэвида Рюэля и Флориса Такенса. Согласно их утверждению, после рождения первых трех (в другой версии теоремы — после четырех) составляющих с несоизмеримыми частотами может возникнуть странный аттрактор, который характеризуется неустойчивостью принадлежащих ему фазовых траекторий (Ruelle, Takens, 1971; Newhouse, Ruelle, Takens, 1978). По Рюэлю и Такенсу, странный аттрактор и есть математический образ турбулентного движения. Ситуация, когда имеет место большее число бифуркаций не то чтобы невозможна, но атипична, т. е. практически невероятна.

Хотя в литературе часто встречается словосочетание «сценарий Рюэля и Такенса», его нельзя признать вполне правомерным, поскольку на самом деле они не дали явного описания последовательности бифуркаций на пути от порядка к хаосу. Что же в действительности ими было доказано? Если сформулировать основной результат на физическом языке, то он сводится к следующему. Пусть мы имеем $M \geq 3$ диссипативных систем, каждая из которых демонстрирует периодические автоколебания на своей частоте, причем все частоты находятся в иррациональных отношениях. В этом случае система, составленная из несвязанных подсистем, будет иметь аттрактором M -мерный тор. Введем теперь связь между подсистемами. Согласно Рюэлю и Такенсу, при сколь угодно малой величине связи можно так подобрать вид этой связи, что реализуется странный аттрактор, и динамика будет хаотической. Ими доказан даже более сильный результат. Представим себе пространство функций, которые стоят в правых частях динамических уравнений системы. Утверждается, что в этом пространстве множество точек, соответствующих хаотической динамике, является всюду плотным в сколь угодно малой окрестности точки, отвечающей отсутствию связи.

Первоначальная интерпретация работы Рюэля и Такенса не критически настроенными исследователями состояла в том, что появление третьей частотной составляющей в наблюдаемом спектре колебаний системы должно сопровождаться немедленным рождением хаоса. Как выяснилось, проблема на самом деле оказалась куда более сложной и тонкой.

Во-первых, были приведены убедительные примеры реалистичных систем, в которых, в противоположность заключениям Рюэля и Такенса, наблюдаются квазипериодические режимы с числом несоизмеримых частот более 3 (Tavakol, Tworkowski, 1984; Grebogi et al., 1985; C. Baesens et al., 1991). Оказалось, что при достаточно слабой связи подсистем это весьма распространенная ситуация.

В работе Grebogi et al., 1985 был предпринят численный эксперимент с модельной системой, описывающей динамику с тремя несоизмеримыми частотами:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + w_1 + kP_1(\theta_n, \varphi_n) \mod 2\pi, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + w_2 + kP_2(\theta_n, \varphi_n) \mod 2\pi,\end{aligned}\quad (14.1)$$

где переменные θ и φ имеют смысл фаз, одна частота отвечает шагу дискретного времени, а вторая и третья задаются, соответственно, параметрами w_1 и w_2 . Функции $P_1(\theta, \varphi)$ и $P_2(\theta, \varphi)$ имеют период 2π по каждому аргументу и представляются рядами Фурье. Была проведена большая серия расчетов. Задав величины коэффициентов Фурье и параметры w_1 и w_2 случайным образом, исследователи определяли характер реализующегося режима по показателям Ляпунова:

- $\Lambda_{1,2} < 0$ — периодический,
- $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0$ — 2-х частотный квазипериодический, 2-тор,
- $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0$ — 3-х частотный квазипериодический, 3-тор,
- $\Lambda_1 > 0$ — хаос.

На рис. 14.2 приведена диаграмма, где сопоставляется относительная доля испытаний, в которых обнаруживался тот или иной тип ре-

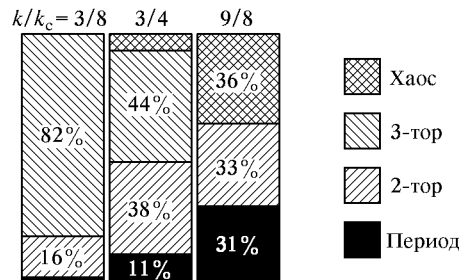


Рис. 14.2. Относительная доля испытаний, в которых обнаруживался различный тип режима при случайном выборе параметров и функций в модельном отображении (14.1) (Grebogi et al., 1985). Величина параметра $k = k_c$ отвечает моменту потери обратимости отображения

жима. При малом уровне возмущения k доминирует трехчастотная квазипериодичность. С ростом уровня возмущения растет доля периодических и хаотических режимов. При $k > k_c$, где k_c отвечает моменту потери обратимости модельного отображения, трехчастотная квазипериодичность становится невозможной.

Надо подчеркнуть, что сказанное противоречит не утверждению теоремы Рюэля и Такенса, как таковой, а, скорее, интерпретации понятия типичности, которое оказалось не вполне адекватным. Действительно, всюду плотное множество совсем не обязательно имеет заметно отличную от нуля меру. Поэтому присутствие в пространстве систем плотного множества, отвечающего наличию хаоса, еще не означает, что хаос будет наблюдаться с высокой вероятностью.

Во-вторых, после опубликованной в 1984 г. работы группы из Мэрилендского университета (Grebogi et al., 1984) и последующих исследований стало ясно, что сценарий перехода к хаосу через квазипериодические режимы может включать, как промежуточный этап, образование *странных нехаотических аттракторов*. В интерпретации мэрилендской группы, термин «странный» относится к геометрической структуре аттрактора, который представляет собой фрактальный объект, а термин «нехаотический» указывает на отсутствие чувствительной зависимости динамики от начальных условий: среди ляпуновских показателей аттрактора нет положительных.

С другой стороны, подвергнутое критике предположение о том, что число бифуркаций на пути к хаосу может быть бесконечным, оказалось справедливым, хотя и для другого сценария. Речь идет о переходе к хаосу через каскад (бесконечную последовательность) бифуркаций удвоения периода. Около 1976 г. американский физик Митчел Фейгенбаум, работавший в Лос-Аламосской национальной лаборатории США, обнаружил ряд замечательных закономерностей, сопровождающих этот тип перехода к хаосу (Feigenbaum, 1978, 1979). О нем говорят теперь как о *сценарии Фейгенбаума*, и это наименование можно считать заслуженным. Хотя Фейгенбаум не является первооткрывателем удвоений периода, описанных и изучавшихся до него многими исследователями (Мау, 1986), он первым осознал присущие этому сценарию свойства *универсальности* и *скейлинга* (масштабного подобия) и разработал их теоретическое обоснование, привнес в нелинейную динамику метод *ренормализационной группы* (сокращенно ренормгруппы или РГ).

Сущность концепции универсальности состоит в том, что имеется обширное множество нелинейных диссипативных систем различной природы (*класс универсальности*), которые не просто демонстрируют одну и ту же последовательность бифуркаций, но проявляют у порога возникновения хаоса одни и те же количественные закономерности скейлинга с присущими данному классу универсальности определенными значениями масштабных констант.

Метод ренормгруппы, концепции универсальности и скейлинга ранее были развиты в теории фазовых переходов. В 1982 г. американский физик Кеннет Вильсон получил Нобелевскую премию за вклад в разработку этих концепций. При приближении температуры вещества к критической точке фазового перехода T_c корреляционная длина флуктуаций возрастает и становится большой по сравнению с межатомным расстоянием. В широком интервале пространственных масштабов поведение флуктуаций становится не зависящим от их масштаба и не чувствительным к деталям межатомных взаимодействий, приобретая универсальные свойства. Помимо прочего, это делает продуктивным изучение фазовых переходов с помощью модельных систем, огрубляющих детали локальных взаимодействий из соображений удобства анализа, но сохраняющих интересующий тип критического поведения.

Как оказалось, аналогичный подход плодотворен и в нелинейной динамике при рассмотрении проблемы возникновения хаоса. Представим себе динамическую систему, в которой при переходе параметра через некоторое критическое значение наблюдается мягкое (без скачка) рождение хаоса. В силу непрерывности динамических уравнений по параметру, обнаружить различие между регулярным и хаотическим режимами, реализующимися в ε -окрестности точки перехода, можно только при их наблюдении за достаточно большое время $T(\varepsilon)$. Очевидно, при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $T(\varepsilon) \rightarrow \infty$. Сужая рассматриваемую окрестность критической точки, можно добиться того, чтобы временной масштаб $T(\varepsilon)$ намного превышал все величины с размерностью времени, фигурирующие в уравнениях системы. С точки зрения трансформации природы режима в узкой окрестности точки перехода, локальные во времени детали динамики, как можно ожидать, становятся не существенными, и собственно переход должен носить универсальный характер¹⁾. В этом случае для феноменологического описания динамики нелинейных систем у порога хаоса естественно использовать наиболее простые модели, обладающие нужным типом критического поведения, т. е. правильно передающие динамику на больших временных масштабах. Ясно, что конструирование таких моделей следует рассматривать как одну из важных задач теории.

В контексте нелинейной динамики и перехода к хаосу идея метода ренормгруппы состоит в следующем. Предположим, что мы имеем зависящий от параметров оператор, описывающий эволюцию состояния динамической системы на некотором временном интервале. Используя его, мы можем построить оператор эволюции на некотором большем временном интервале. Далее по-

¹⁾ Это рассуждение не исключает возможность существования разных классов универсальности, так что одинаковые закономерности могут быть справедливыми лишь в пределах одного определенного класса.

средством масштабных замен переменных мы стараемся добиться того, чтобы новый оператор эволюции по возможности совпадал со старым. Если при некоторых значениях параметров это удастся сделать, то процедуру можно повторять многократно, получая последовательность операторов эволюции для все больших и больших временных интервалов. Процедура перехода от старого оператора к новому, перенормированному, называется РГ преобразованием, а набор значений параметров, о котором мы говорили, задает расположение критической точки. В критической точке структура операторов эволюции на больших временах оказывается обусловленной не конкретным видом исходного оператора системы, а структурой РГ преобразования. В этом и состоит универсальность. Поскольку в критической точке получаемые при многократном применении РГ преобразования операторы эволюции оказываются одинаковыми с точностью до масштабной замены переменных, система должна демонстрировать на различных временах подобную динамику с соответствующим пересчетом масштаба динамических переменных, проявляя свойство скейлинга. При выходе по параметрам из критической точки возникающее возмущение оператора эволюции будет трансформироваться при итерациях РГ преобразования вполне определенным, универсальным образом. В результате топография пространства параметров вблизи критической точки также обладает свойствами универсальности и скейлинга.

Работа Фейгенбаума показала, что проблема сценариев возникновения хаоса не ограничивается качественной стороной, т. е. не сводится к перечислению возможных последовательностей бифуркаций, а имеет количественный аспект. Закономерности, аналогичные фейгенбаумовским, но характеризующиеся другими значениями масштабных констант, были в дальнейшем обнаружены для целого ряда типов критического поведения, возникающих при многопараметрическом анализе перехода к хаосу через удвоения периода (Kuznetsov et al., 1997; Кузнецов и др., 1997). Количественные закономерности и универсальные константы найдены также для многих ситуаций, отвечающих переходу к хаосу через квазипериодические режимы (Shenker, 1982; Feigenbaum et al., 1982; Rand et al., 1982), хотя в этом случае полная картина оказывается очень сложной, и многие ее аспекты остаются до сих пор до конца не изученными.

В 1980 г. появилось сообщение французских исследователей И. Помо и П. Манневилля, положившее начало изучению группы сценариев перехода к хаосу через перемежаемость (Pomeau, Manneville, 1980). В гидродинамике давно известна так называемая перемежающаяся турбулентность, когда течение в определенных пространственных областях имеет плавный, ламинарный характер, но они чередуются с областями нерегулярного, турбулентного

течения. Благодаря тому, что турбулентные области перемещаются, меняют форму, возникают и исчезают, перемежающийся характер носит также зависимость наблюдаемых величин от времени в фиксированной точке пространства (рис. 14.3). Помо и Манневилль указали несколько возможных ситуаций, когда в динамических системах (в том числе со сравнительно небольшой размерностью фазового пространства) может возникнуть перемежаемость, и наметили классификацию, введя в рассмотрение три

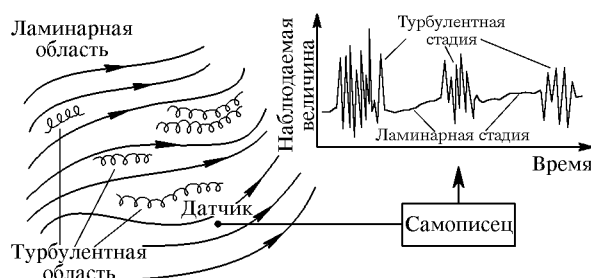


Рис. 14.3. Перемежающаяся турбулентность в гидродинамическом течении

типа перемежаемости. В дальнейшем свойства такого рода переходов были исследованы более подробно. В частности, для перемежаемости типа I и III был развит ренормгрупповой анализ, аналогичный теории Фейгенбаума²⁾.

Итак, в итоге изучения вопроса о переходе динамических систем к хаосу сложилось представление о трех основных сценариях, а именно: через каскад удвоений периода, перемежаемость и квазипериодические режимы. Оставшаяся часть нашего курса будет посвящена рассмотрению этих сценариев и, соответствующих им особенностей сложной динамики нелинейных систем в области перехода от порядка к хаосу.

Обсудим, почему типичными оказываются именно перечисленные выше сценарии и в каком отношении друг к другу они находятся.

Предположим сначала, что в системе реализуется простейший устойчивый периодический режим динамики, т. е. предельный цикл. Чтобы увидеть, что с ним может произойти при изменении параметров, воспользуемся методом сечения Пуанкаре. Пусть для простоты цикл «живет» в трехмерном фазовом пространстве, тогда имеем двумерное отображение Пуанкаре

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y). \quad (14.2)$$

²⁾ Заметим, что вопрос об отношении перехода к хаосу по Помо–Манневиллю к перемежающейся турбулентности в общем случае остается неясным, хотя этот феномен и сыграл роль толчка для развития всей концепции.

Точка, где предельный цикл протыкает поверхность сечения, есть неподвижная точка этого отображения: $x_0 = f(x_0, y_0)$, $y_0 = g(x_0, y_0)$. Исследование на устойчивость заключается в том, что мы подставляем в (14.2) $x = x_0 + \tilde{x}$, $y = y_0 + \tilde{y}$ и, удерживая члены первого порядка, получаем

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \quad (14.3)$$

где

$$\hat{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

— матрица Якоби. Рассмотрим задачу на собственные векторы и собственные значения этой матрицы:

$$\mu_s \begin{pmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{y}_s \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} \tilde{x}_s \\ \tilde{y}_s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2. \quad (14.4)$$

Если ввести след и детерминант матрицы $\hat{\mathbf{J}}$, соответственно,

$$\begin{aligned} S &= f_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, y_0), \\ J &= f_x(x_0, y_0)g_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0)g_x(x_0, y_0), \end{aligned} \quad (14.5)$$

то собственные числа получаются как корни квадратного уравнения

$$\mu^2 - S\mu + J = 0. \quad (14.6)$$

Именно,

$$\mu_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - J}. \quad (14.7)$$

Произвольный вектор возмущения представляется в виде линейной комбинации двух собственных векторов. При каждом обходе предельного цикла возмущение, отвечающее каждому собственному вектору, умножается на соответствующее собственное число — мультипликатор μ . Поэтому цикл устойчив, если оба мультипликатора по модулю меньше единицы, и неустойчив, если хотя бы один мультипликатор по модулю больше единицы. Две пограничные линии области устойчивости на плоскости (S, J) можно получить из (14.6), полагая $\mu = 1$ или $\mu = -1$, что дает, соответственно,

$$1 - S + J = 0 \quad (14.8)$$

или

$$1 + S + J = 0. \quad (14.9)$$

Третья пограничная линия находится из соотношения (14.7): если под знаком квадратного корня стоит отрицательное число, то модуль мультипликатора будет единичным при

$$J = 1. \quad (14.10)$$

Область внутри треугольника, образованного линиями (14.8)–(14.10), есть область устойчивости.

Предположим, что наша система содержит параметр A . Когда мы варьируем этот параметр, будут изменяться координаты неподвижной точки x_0, y_0 , и, соответственно, след и детерминант матрицы Якоби: $S = S(A)$, $J = J(A)$. При этом на плоскости (S, J) мы будем двигаться вдоль некоторой кривой. Ясно, что ти-

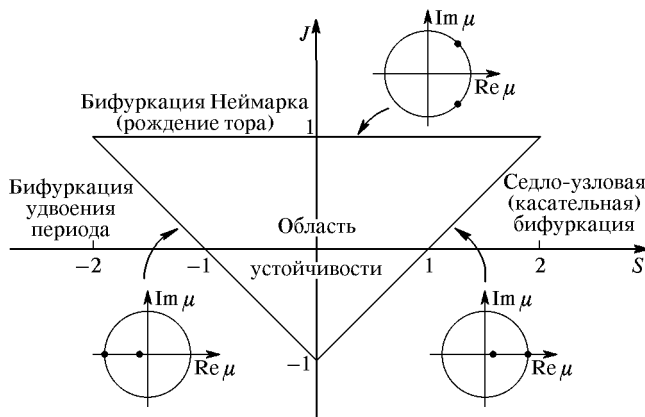


Рис. 14.4. Область устойчивости предельного цикла на плоскости след-детерминант матрицы Якоби

пичным надо признать выход из треугольника устойчивости через одну из его сторон (рис. 14.4).

Предположим сначала, что выход осуществляется через левую границу треугольника. На пороге потери устойчивости мультипликатор равен минус единице. Это значит, что при однократном обходе цикла малое возмущение меняет знак (рис. 14.5a). Чтобы траектория замкнулась, нужно совершить еще один обход, так что период вновь возникшего движения оказывается вдвое больше, чем у исходного.

Если присущая системе нелинейность такова, что при увеличении амплитуды возмущения происходит его стабилизация, то результатом бифуркации будет рождение цикла с периодом, вдвое большим исходного. Это бифуркация удвоения периода. Очень часто при дальнейшем изменении параметра за ней вновь следуют бифуркации такой же природы. Последовательность бифуркационных значений параметра накапливается к определенному пределу,

критической точке, которая является в определенном смысле границей хаоса. Это сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода — сценарий Фейгенбаума.

Может встретиться другая ситуация, когда нелинейность способствует ускорению роста возмущения и уходу системы от ставшей неустойчивой периодической орбиты. В этом случае, когда



Рис. 14.5. Поведение близкой к предельному циклу траектории на трех границах треугольника устойчивости

мы подходим к точке бифуркации, к рассматриваемому циклу приближается неустойчивый цикл удвоенного периода, который сливается с исходным циклом в точке бифуркации и, как говорят, передает ему свою неустойчивость. После бифуркации наблюдается уход близлежащих траекторий от неустойчивого цикла в удаленные области фазового пространства. Может случиться, что динамика в этих удаленных областях такова, что через некоторое время траектория возвращается в окрестность неустойчивого цикла, тогда она останется вблизи него в течение некоторого времени, вновь уйдет, затем вновь вернется и т. д. Если такая реинжек-



Рис. 14.6. Бифуркация удвоения периода: мягкая, нормальная, суперкритическая

ция траектории в окрестность неустойчивого цикла имеет место, и если динамика в удаленных областях фазового пространства характеризуется наличием неустойчивости по отношению к возмущению начальных условий, то это приводит к возникновению хаотического режима перемежающегося типа. Помо и Манневилль обозначают его как перемежаемость типа III.

Рассмотренные варианты бифуркаций наглядно иллюстрируются с помощью одномерных отображений (рис. 14.6 и 14.7). Та-

кая возможность связана с тем, что анализируемая граница потери устойчивости пересекает ось $J = 0$, которую можно трактовать как соответствующую случаю одномерных отображений.

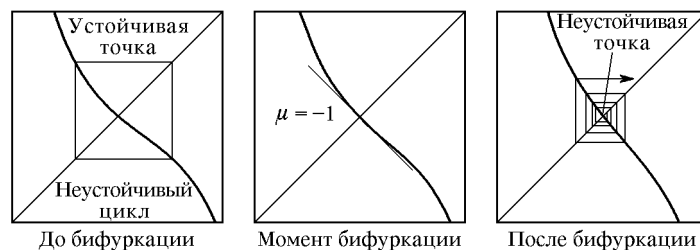


Рис. 14.7. Субкритическая бифуркация удвоения периода

Пусть теперь выход из треугольника устойчивости осуществляется через правую сторону. Тогда на пороге потери устойчивости мультипликатор обращается в плюс единицу. При однократном обходе цикла возмущенная траектория почти замыкается (рис. 14.5б). Чтобы выяснить, как трансформируется динамика, оказывается необходимым обязательно учитывать нелинейность. Когда мы движемся к точке бифуркации, к устойчивому предельному циклу приближается неустойчивый цикл; в точке бифуркации оба цикла сливаются и исчезают. Таким образом, в рассматриваемой области фазового пространства вообще не остается периодических орбит.

Проясняет ситуацию рассмотрение одномерного отображения. (Это оправдано, поскольку, как и в предыдущем случае, рассматриваемая сторона треугольника устойчивости пересекает ось $J = 0$.) График отображения до бифуркации, в момент ее и после нее показан на рис. 14.8. Для одномерного отображения бифуркация состоит в слиянии и исчезновении пары неподвижных точек. В мо-

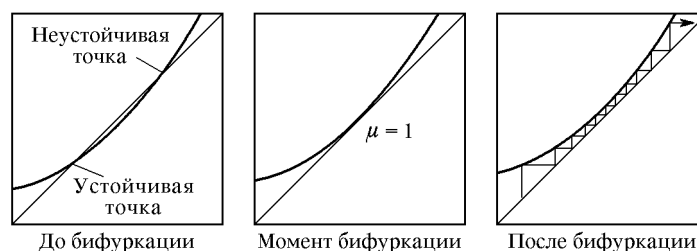


Рис. 14.8. Касательная бифуркация

мент бифуркации график касается биссектрисы, что определяет ее название — *касательная бифуркация*. После бифуркации на месте исчезнувшей пары неподвижных точек остается узкий «коридор», прохождение которого изображающей точкой требует тем

большого числа итераций, чем ближе мы находимся к точке бифуркации. После прохождения «коридора» траектория уходит в удаленные области фазового пространства. Если динамика в этих удаленных областях характеризуется неустойчивостью по отношению к возмущению начальных условий и если обеспечена реинжекция, т. е. через некоторое время траектория оказывается вновь на входе в «коридор», то наблюдается переход к хаосу через перемежаемость типа I по Помо и Манневиллю. Прохождение через «коридор» интерпретируется как ламинарная стадия процесса, а блуждание в удаленных областях фазового пространства как турбулентная стадия.

Наконец, третий вариант выхода из треугольника устойчивости отвечает пересечению его верхней границы $J = 1$. При этом пара комплексно-сопряженных мультипликаторов μ и μ^* переходит через единичную окружность. Возмущенная траектория извивается вокруг теряющего устойчивость предельного цикла (рис. 14.56), причем угол поворота за один обход определяется аргументом комплексного числа μ . Как видно из соотношения (14.7), $\mu_{1,2} = S/2 \pm i(1 - S^2/4)^{1/2}$, так что аргумент зависит от того, в какой именно точке мы пересекаем сторону треугольника. Если величина $(\arg \mu)/2\pi$ выражается рациональным числом p/q , то возмущенная орбита замыкается после q обходов.

Как и в случае $\mu = -1$, результат бифуркации определяется тем, способствует нелинейность стабилизации возмущения или же его усилению.

В первом случае происходит мягкая бифуркация рождения тора, если $(\arg \mu)/2\pi$ иррациональное число, или периодической орбиты — резонансного цикла на торе, если оно рациональное. Области периодичности имеют вид языков, подходящих сверху к линии $J = 1$, а в промежутках между языками реализуются квазипериодические режимы. Бифуркация рождения тора из предельного цикла носит название *бифуркации Неймарка*. Дальнейшая эволюция аттрактора при изменении управляющего параметра может быть разнообразной и сложной, но в общем можно сказать, что реализуется та ситуация, о которой говорят как о переходе к хаосу через квазипериодичность.

Второй случай, когда нелинейность способствует раскачке возмущений, отвечает уходу траектории от потерявшего устойчивость предельного цикла в отдаленные области фазового пространства. Если динамика там хаотическая и если имеет место реинжекция с возвратом траектории в окрестность неустойчивого цикла, то реализуется перемежаемость типа II по Помо и Манневиллю. Это наиболее сложный и наименее изученный из трех типов перемежаемости.

Сводка всех перечисленных возможностей потери устойчивости предельного цикла и ассоциирующихся с ними сценариев возникновения хаоса дается на рис. 14.9.

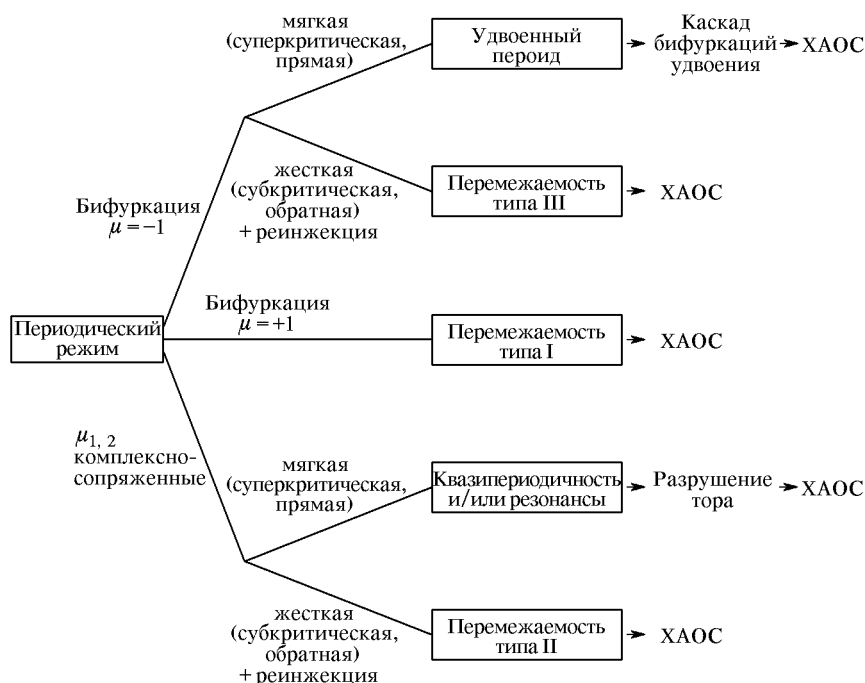


Рис. 14.9. Различные пути потери устойчивости предельного цикла и ассоциирующиеся с ними сценарии возникновения хаоса

Оказывается, что и при большей размерности фазового пространства проведенный анализ остается в силе, в том смысле, что типичными будут три варианта линейной потери устойчивости предельного цикла (с переходом мультипликатора через единицу, минус единицу, или пары комплексно-сопряженных мультипликаторов через единичную окружность) и те же варианты действия нелинейности на динамику возмущений вблизи бифуркаций, какие мы обсудили. Поэтому намеченная классификация сценариев перехода к хаосу оказывается весьма общей. В следующих лекциях мы обратимся к более детальному рассмотрению различных аспектов динамики, связанной с этими сценариями.

Лекция 15

СЦЕНАРИЙ ФЕЙГЕНБАУМА: РЕНОРМГРУППА, УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ, СКЕЙЛИНГ

Обратимся к модели, уже обсуждавшейся в нашем курсе, — логистическому отображению

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2. \quad (15.1)$$

Динамика зависит от единственного параметра λ . При $\lambda = 0$ после первой же итерации получаем $x = 1$, и далее величина x не меняется, т. е. это простой регулярный режим — устойчивая неподвижная точка. С другой стороны, как мы знаем из предыдущих лекций, при $\lambda = 2$ реализуется хаос. Естественно спросить, как он возникает при плавном увеличении λ от 0 до 2?

15.1. Переход к хаосу в логистическом отображении

Рис. 15.1 показывает, как устроено одномерное пространство параметров модели и как выглядят итерационные диаграммы в различных областях.

При $\lambda < 0,75$ аттрактором служит неподвижная точка, которую можно также назвать циклом периода 1. Ее можно найти явно, решив квадратное уравнение $x = 1 - \lambda x^2$, откуда $x_0 = (1 - \sqrt{1 + 4\lambda}) / 2\lambda$. (Второй корень квадратного уравнения отвечает неустойчивой неподвижной точке, репеллеру.) Чтобы исследовать неподвижную точку на устойчивость, следует вычислить мультипликатор, показывающий как изменяется малое возмущение за период цикла. Это производная функции $f(x) = 1 - \lambda x^2$ в точке $x = x_0$: $\mu = f'(x_0) = -2\lambda x_0 = -1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda}$. Отсюда видим, что при $\lambda = 0,75$ мультипликатор переходит через (-1) , и неподвижная точка теряет устойчивость. При этом от нее отделяется цикл периода 2: установившийся режим представляет собой чередующуюся последовательность двух чисел: $x_1, x_2, x_1, x_2, \dots$, которые должны удовлетворять системе уравнений

$$x_2 = 1 - \lambda x_1^2, \quad x_1 = 1 - \lambda x_2^2. \quad (15.2)$$

Вычитая одно уравнение из другого и предполагая, что $x_1 \neq x_2$, получаем $x_1 + x_2 = 1/\lambda$. Исключая с помощью этого вы-

ражения одно из неизвестных, приходим к квадратному уравнению $1/\lambda - x = 1 - \lambda x^2$, откуда $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{4\lambda - 3})/2\lambda$. Мультипликатор цикла периода 2 вычисляется с использованием цепного правила дифференцирования сложной функции и равен $\mu = f'(x_1)f'(x_2) = 4 - 4\lambda$. При $\lambda = 1,25$ мультипликатор цикла проходит через (-1) , и он, в свою очередь, теряет устойчивость. Рождается устойчивый цикл периода 4. Далее таким же образом

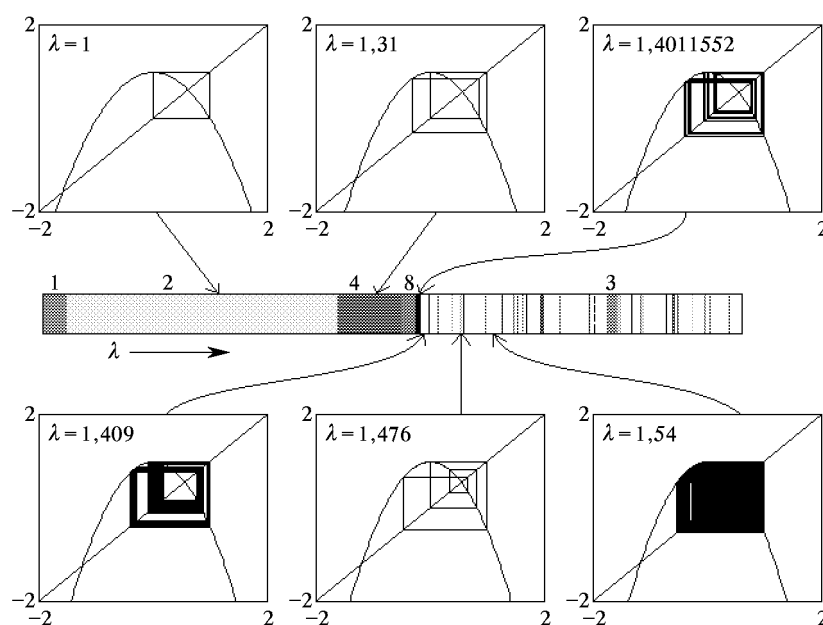


Рис. 15.1. Области различных режимов на оси параметра λ для логистического отображения (15.1) — «карта динамических режимов» в одномерном пространстве и итерационные диаграммы, иллюстрирующие динамику в некоторых точках. Области хаоса показаны белым цветом

происходит потеря устойчивости цикла периода 4 и рождение цикла периода 8 и т. д. до бесконечности. Соответствующие бифуркационные значения параметра λ приведены в таблице.

Реализующийся каскад бифуркаций удвоения периода наглядно представлен на рис. 15.2, где показана так называемая бифуркационная диаграмма или бифуркационное дерево. Для его построения на компьютере последовательно задаются значения параметра с некоторым малым шагом; для каждого производится некоторое число итераций отображения до выхода на аттрактор, а затем получаемые при итерациях величины x откладываются на графике. На рисунке хорошо видны точки бифуркаций удвоений периода,

Таблица. Значения параметра в логистическом отображении $x' = 1 - \lambda x^2$, отвечающие бифуркациям удвоения периода, сверхустойчивым циклам и точкам Мизюревича («развитый хаос»)

Номер k	Бифуркация удвоения периода, λ_k	Сверхустойчивые циклы, λ_k^0	Точки Мизюревича, λ_k^M
1	0,75	0	2
2	1,25	1	1,54368901269
3	1,36809893939	1,31070264134	1,43035763245
4	1,39404615660	1,38154748443	1,40740511816
5	1,39963123887	1,39694535970	1,40249217636
6	1,40082874237	1,40025308121	1,40144149425
7	1,40108527126	1,40096196294	1,40121650431
8	1,40114021470	1,40111380494	1,40116832084
9	1,40115198203	1,40114632583	1,40115800151
10	1,40115450224	1,40115329085	1,40115579142
Предел	1,40115518909	1,40115518909	1,40115518909

где каждая ветвь дерева расщепляется на две. При достаточно больших λ наблюдается хаос, соответствующие области выглядят как более или менее равномерно заполненные точками участки «кроны». Области хаоса чередуются с «окнами устойчивости» — узкими зонами по параметру, в которых динамика становится периодической.

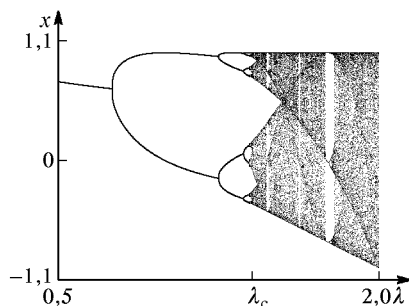


Рис. 15.2. Бифуркационная диаграмма («бифуркационное дерево») для логистического отображения

Определенные заключения о порядке появления циклов различного периода и, в том числе, окон устойчивости в закрытической области, можно сделать на основании теоремы Шарковского (лекция 2). Справедливо следующее утверждение (книга Шарковский и др., 1986). Пусть $\lambda[m]$ — наименьшее значение параметра, при котором у отображения

имеется цикл периода m . Тогда

$$\begin{aligned} \lambda[1] &\leq \lambda[2] \leq \lambda[2^2] \leq \lambda[2^3] \leq \dots \leq \\ &\leq \lambda[2^3 \cdot 9] \leq \lambda[2^3 \cdot 7] \leq \lambda[2^3 \cdot 5] \leq \lambda[2^3 \cdot 3] \leq \dots \leq \lambda[2^2 \cdot 9] \leq \\ &\leq \lambda[2^2 \cdot 7] \leq \lambda[2^2 \cdot 5] \leq \lambda[2^2 \cdot 3] \leq \dots \leq \lambda[2 \cdot 9] \leq \\ &\leq \lambda[2 \cdot 7] \leq \lambda[2 \cdot 5] \leq \lambda[2 \cdot 3] \leq \dots \leq \lambda[9] \leq \lambda[7] \leq \lambda[5] \leq \lambda[3]. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что теорема говорит только о наличии циклов и ничего не утверждает относительно их устойчивости или неустойчивости.

Как можно видеть из таблицы, последовательность точек бифуркаций удвоения периода сходится к определенному пределу, который по аналогии с теорией фазовых переходов называют *критической точкой*. Другой, более простой способ найти критическую точку состоит в том, чтобы проследить за последовательностью так называемых сверхустойчивых циклов. Эти циклы, содержащие в своей орбите точку экстремума, реализуются при некоторых определенных значениях параметра λ_k^0 . Последовательность λ_k^0 сходится по такому же закону и к тому же пределу, как и последовательность λ_k :

$$\lambda_c = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k^0 = 1,40115518909205060052382 \dots \quad (15.3)$$

В определенном смысле эта точка является границей хаоса: при $\lambda < \lambda_c$ реализуется только регулярное, периодическое поведение, а для $\lambda > \lambda_c$ в сколь угодно малой окрестности критической точки существуют значения параметра, отвечающие хаосу. О наличии хаоса можно судить по графику ляпуновского показателя, обсуждавшемуся в одной из предыдущих лекций (см. рис. 10.5). В области устойчивых периодических движений ляпуновский показатель отрицателен. В точках бифуркаций удвоения периода он подходит к нулю. За точкой накопления каскада удвоений периода зависимость ляпуновского показателя от параметра имеет сложный характер, причем чередуются области хаоса с положительными его значениями и периодическими режимов, для которых он отрицателен.

Фейгенбаум заметил, что интервал по параметру между последовательными бифуркациями удвоения периода уменьшается с ростом их номера так, что отношение $(\lambda_k - \lambda_{k-1})/(\lambda_{k+1} - \lambda_k)$ стремится к константе $\delta = 4,669\dots$, которую принято называть *константой Фейгенбаума*. Иными словами, последовательность значений λ_k сходится по закону геометрической прогрессии. Таким же свойством обладает и последовательность λ_k^0 . Эти наблюдения были бы интересными и сами по себе, но оказалось, что такой же закон сходимости, с той же самой константой, имеет место

для многих других одномерных отображений (например, $x_{n+1} = \lambda \sin x_n$), а также для многих нелинейных диссипативных систем, описываемых дифференциальными уравнениями (см. лекцию 5). Это замечательное обстоятельство нуждается, очевидно, в серьезном теоретическом обосновании. Оно достигается привлечением метода ренормгруппы (РГ), к изложению которого мы теперь переходим.

15.2. Уравнение РГ

Для нашей исходной модели уравнение $x_{n+1} = f(x_n)$, $f(x) = 1 - \lambda x^2$ определяет оператор эволюции за один временной шаг. Если рассмотреть два шага, то имеем, очевидно, $x_{n+2} = f(f(x_n)) = 1 - \lambda(1 - \lambda x_n^2)^2$. Введем вместо x новую переменную, отличающуюся от старой только постоянным множителем α_0 . Этот множитель подберем так, чтобы функция, задающая оператор эволюции за два шага, была нормирована в начале координат на единицу. Заменяя в левой и правой частях уравнения x на x/α_0 , запишем результат в виде $x_{n+2} = f_1(x_n)$, где $f_1(x) = \alpha_0 f(f(x/\alpha_0))$, $\alpha_0 = 1/f(f(0)) = 1 - \lambda$. Теперь примем за исходную функцию $f_1(x)$ и произведем над ней те же действия. Получится перенормированный оператор эволюции за четыре шага: $x_{n+4} = f_2(x_n)$, где $f_2(x) = \alpha_1 f_1(f_1(x/\alpha_1))$, $\alpha_1 = 1/f_1(f_1(0))$. Далее эту процедуру можно повторять снова и снова, что приводит к рекуррентному уравнению

$$f_{k+1}(x) = \alpha_k f_k \left(f_k \left(\frac{x}{\alpha_k} \right) \right), \quad \alpha_k = \frac{1}{f_k(f_k(0))}. \quad (15.4)$$

Это и есть *уравнение РГ*. Смысл его в том, что оно выражает оператор эволюции за 2^{k+1} шагов через оператор за 2^k шагов, причем для каждого оператора динамическая переменная нормирована на свой масштабный множитель.

Задавая в качестве начальной функцию $f(x) = 1 - \lambda x^2$, рассмотрим значения параметра λ немного меньшее, равное и немного большее критического λ_c . Как будет вести себя в каждом из этих случаев порождаемая уравнением (15.4) последовательность функций? Можно написать программу для компьютера, которая строила бы графики функций $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... На рис. 15.3 показано, как они выглядят. При $\lambda < \lambda_c$ график становится от шага к шагу все более пологим, а при $\lambda > \lambda_c$ — все более крутым. Если же $\lambda = \lambda_c$, то форма кривой на графике стабилизируется после первых шагов РГ преобразования и более не меняется. Иными словами, при больших значениях индекса k функции $f_k(x)$ перестают от него зависеть, и существует определенный предел: $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = g(x)$. Тогда из формулы (15.4) следует, что для

функции $g(x)$ должно быть справедливо соотношение

$$g(x) = \alpha g\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right), \quad (15.5)$$

которое называется *уравнением Фейгенбаума–Цвигановича*. При этом

$$g(0) = 1 \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{1}{g(g(0))}. \quad (15.6)$$

Заметим, что функция $g(x)$ должна иметь при $x = 0$ квадратичный экстремум, ибо он присутствует у всех функций $f_k(x)$. С учетом этого условия, решение уравнения (15.5) оказывается

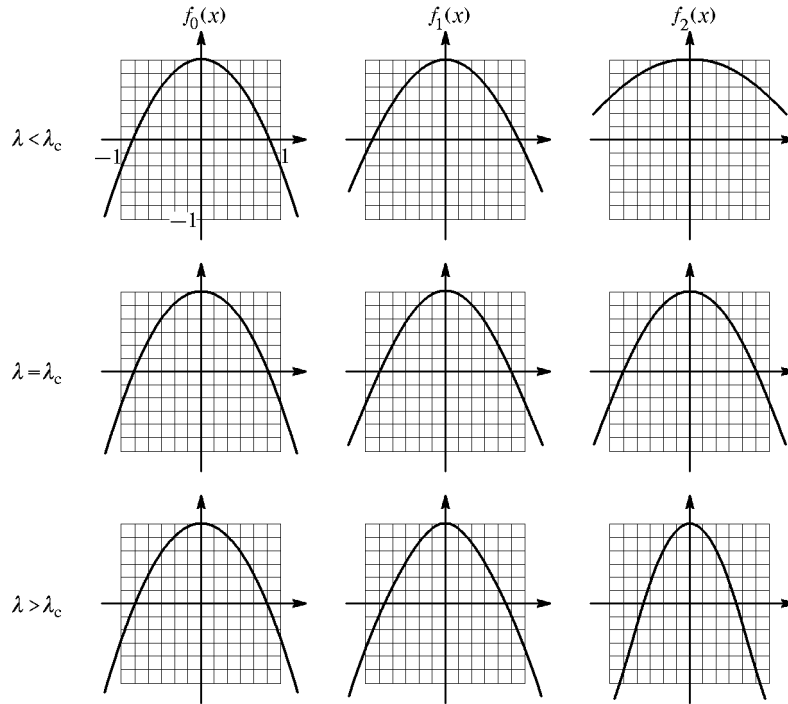


Рис. 15.3. Действие РГ преобразования на функцию $f(x)$ при значениях параметра λ меньшем, равном и большем критического λ_c

единственным, и его можно найти следующим методом. Представим функцию $g(x)$ конечным отрезком ряда Тейлора, содержащим четные степени x ,

$$g(x) = 1 + \sum_{r=1}^m g_r x^{2r} \quad (15.7)$$

преобразования) оператор эволюции исходной системы в критической точке за число шагов 2^k . Более конкретно, в асимптотике по k справедливо следующее соотношение:

$$f^{2^k}(x) = f(f(f(\dots(x)\dots))) \cong \frac{g(A_k x)}{A_k}, \quad A_k = \frac{1}{f^{2^k}(0)} \cong \text{const} \cdot \alpha^k. \quad (15.11)$$

Подчеркнем, что в формулах (15.5) и (15.6) присутствует только функция g и не содержится никакого воспоминания о конкретной форме исходного отображения. Это значит, что функция $g(x)$ *универсальна* — ее вид обусловлен лишь структурой операции РГ, привязанной именно к изучению перехода к хаосу через удвоения периода (напомним, что мы следили за изменением вида перенормированного оператора эволюции при последовательных удвоениях длительности рассматриваемых временных интервалов). Если в отображении, имеющем квадратичный экстремум, реализуется каскад бифуркаций удвоений периода и существует критическая точка, то независимо от конкретного вида отображения перенормированный оператор эволюции на больших временах в критической точке будет описываться той же самой функцией g . (Существенная деталь: за начало отсчета, относительно которого пересчитывается масштаб при перенормировке, должна быть принята точка экстремума исходного отображения.)

Заметим, что отображение $x' = g(x)$ имеет неподвижную точку $x^* = 0,5493\dots$. Отсюда следует, что точка x^*/α принадлежит циклу периода 2 того же отображения. Действительно, из функционального уравнения, которому удовлетворяет функция $g(x)$, можно видеть, что $g(g(x^*/\alpha)) = x^*/\alpha$. Аналогичным образом можно показать, что x^*/α^2 принадлежит циклу периода 4, x^*/α^3 — циклу периода 8 и т. д. Таким образом, отображение $x' = g(x)$ имеет циклы со всевозможными периодами 2^k . Все эти циклы неустойчивы и характеризуются такими же по величине мультипликаторами, как и неподвижная точка: $\mu_c = g'(x^*) = -1,6011913\dots$. Для логистического отображения (и любой другой конкретной системы, относящейся к данному классу универсальности) мультипликаторы циклов периода 2^k в критической точке быстро сходятся при увеличении k к универсальной константе μ_c .

15.3. Линеаризованное уравнение РГ

Предположим, что мы немного изменили параметр в исходном отображении и вышли тем самым из критической точки. Это соответствует некоторому возмущению начального условия в уравнении РГ (15.4), так что теперь будем иметь дело не с неподвижной

точкой $g(x)$, а с решениями вблизи нее. Формально, нам следовало бы просто искать решение уравнения (15.4) в виде

$$f_k(x) = g(x) + \varepsilon h_k(x) \quad (15.12)$$

и исследовать поведение малого возмущения h . Однако для упрощения анализа полезен небольшой трюк. Давайте слегка модифицируем уравнение (15.4) и подставим вместо переменного масштабного фактора найденную выше константу $\alpha = -2,5029 \dots$. Переформулированное таким образом РГ преобразование столь же правомерно, как исходное, и имеет в качестве неподвижной точки ту же самую функцию $g(x)$. Отметим только, что нормировка в начале координат на единицу теперь не заложена в самой постановке задачи, а представляет собой дополнительное условие.

Итак, сделаем подстановку (15.12) в уравнение

$$f_{k+1}(x) = \alpha f_k\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right), \quad (15.13)$$

тогда в линейном приближении получаем

$$h_{k+1}(x) = \alpha \left[g'\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) h_k\left(\frac{x}{\alpha}\right) + h_k\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) \right]. \quad (15.14)$$

Уравнение (15.14) имеет структуру $h_{k+1} = \hat{\mathbf{m}} h_k$, где $\hat{\mathbf{m}}$ — линейный оператор, действующий в пространстве функций. Вопрос о том, как ведет себя при итерациях решение линеаризованного уравнения РГ (15.14), тесно связан с вопросом о спектре собственных чисел линейного оператора $\hat{\mathbf{m}}$. Действительно, если мы имеем какую-либо собственную функцию $h(x)$ и собственное значение ν , удовлетворяющие уравнению $\nu h = \hat{\mathbf{m}} h$, то решение может содержать компоненту, которая при итерациях ведет себя как $\nu^k h(x)$. Существенную роль будут играть собственные числа, превышающие по абсолютной величине 1, поскольку соответствующие им компоненты возмущения нарастают при последовательных итерациях РГ преобразования.

Итак, нам необходимо рассмотреть следующую задачу на собственные функции и собственные значения:

$$\nu h(x) = \alpha \left[g'\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) h\left(\frac{x}{\alpha}\right) + h\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) \right]. \quad (15.15)$$

Оказывается, что она имеет дискретный спектр. Для численного решения уравнения (15.15) используется уже известное полиномиальное разложение функции $g(x)$ и аналогичное представление для функции $h(x)$. Уравнение (15.15) соответствует тогда задаче на собственные векторы и собственные значения для конечномерной матрицы, к которой применимы стандартные методы линейной алгебры. Расчеты показывают, что наибольшие по абсолютной

величине собственные числа таковы:

$$\nu_0 = \delta = 4,669201609102990672 \dots, \quad \nu_1 = \alpha, \quad \nu_2 = 1, \quad (15.16)$$

а остальные собственные числа по модулю меньше единицы.

Собственное число δ играет основную роль: как можно заметить, оно определяет константу сходимости, обнаружение которой послужило толчком к разработке всей теории. Соответствующая ему собственная функция аппроксимируется полиномом

$$h_0(x) = 1 - 0,325651x^2 - 0,050554x^4 + 0,014560x^6 - \\ - 0,000881x^8 - 0,000106x^{10} + 0,000020x^{12}. \quad (15.17)$$

Что касается собственных чисел α и 1, то они оказываются связанными с инфинитезимальными заменами переменной и являются несущественными, т. е. их можно игнорировать.

Остановимся подробнее на этом моменте. Пусть мы выполнили в исходном отображении замену переменной $x \rightarrow x + \varepsilon\varphi(x)$, $\varepsilon \ll 1$. Хотя это приведет к возмущению порождаемой итерациями уравнения РГ последовательности функций $f_k(x)$, но такие возмущения всегда могут быть устранены обратной заменой.

Часть спектра уравнения (15.15), ассоциирующаяся с заменами переменной, может быть найдена явно. Рассмотрим отображение $x' = g(x)$. Если в обеих частях положить $x \rightarrow x + \varepsilon x^m$, $\varepsilon \ll 1$, $m = 0, 1, 2, \dots$, то получим $x' = g(x) + \varepsilon[g'(x)x^m - (g(x))^m]$. Появившееся в квадратных скобках выражение $g'(x)x^m - (g(x))^m$ представляет собой собственную функцию уравнения (15.15) с собственным значением $\nu = \alpha^{1-m}$, в чем нетрудно убедиться прямой подстановкой.

Полагая $m = 0$, получаем собственное значение $\nu_1 = \alpha$, связанное с заменой переменной типа сдвига, $x \rightarrow x + \varepsilon$. Ему отвечает собственная функция $h_1(x) = g'(x) - 1$. Собственное значение $\nu_2 = 1$ ассоциируется с инфинитезимальной масштабной заменой $x \rightarrow x + \varepsilon x$, этому соответствует $m = 1$ и собственная функция $h_2(x) = g'(x)x - g(x)$.

С точки зрения классификации неподвижных точек, неподвижная точка уравнения РГ $g(x)$ является *седлом*. У этого седла имеется единственное существенное неустойчивое направление (собственное число δ) и бесконечное множество устойчивых направлений, связанных с собственными числами, которые по модулю меньше 1.

Попытаемся представить себе действие РГ преобразования (15.4) геометрически, вообразив бесконечномерное пространство, где каждой точке отвечает некоторая функция $f(x)$. Преобразование (15.4) переводит каждую точку этого пространства в другую, но при этом точка, соответствующая $g(x)$, остается неподвижной. Вблизи этой седловой точки имеется единственное (существенное) неустойчивое направление, вдоль которого возмущение нарастает при применении РГ преобразования, и гиперповерхность

коразмерности один, на которой имеет место приближение к неподвижной точке и которая является устойчивым многообразием. (рис. 15.5).

Наша исходная модель — логистическое отображение при различных значениях параметра λ представляется некоторой кривой, причем точка ее пересечения с устойчивым многообразием отве-

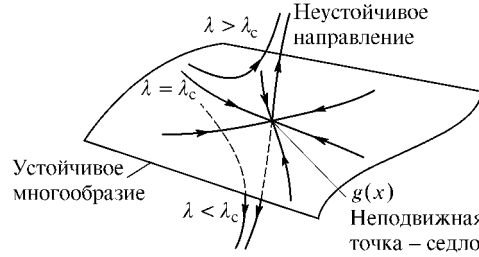


Рис. 15.5. Схематическое представление динамики, порождаемой РГ преобразованием в пространстве функций вблизи неподвижной точки

чает критической точке: стартуя из нее, мы приходим при итерациях РГ преобразования в неподвижную точку $g(x)$.

Если значение параметра очень мало отличается от критического, то при итерациях РГ преобразования сначала происходит приближение к неподвижной точке вдоль устойчивого многообразия, а потом уход от нее вдоль неустойчивого направления, связанного с собственным числом δ . Итак, если мы сдвигаемся по параметру из критической точки, то решение уравнения РГ в линейном приближении по возмущению будет иметь вид

$$f_k(x) = g(x) + C\delta^k h_0(x). \quad (15.18)$$

В более общем случае, когда добавка мала только в исходном отображении, а при итерациях РГ преобразования становится значительной, решение можно представить в виде

$$f_k(x) = G(x, C\delta^k), \quad (15.19)$$

где функция двух аргументов $G(x, C)$ отвечает неустойчивому многообразию неподвижной точки $g(x)$, причем $G(x, 0) = g(x)$.

Из уравнения (15.18) или (15.19) следуют важные выводы:

1. *Универсальность.* Вид оператора эволюции на больших временах 2^k определяется единственным параметром, в качестве какового выступает коэффициент C . Этот коэффициент можно считать пропорциональным отклонению управляющего параметра от критической точки: $C = \text{const} \cdot \Delta\lambda$, где $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_c$.

2. *Скейлинг.* Вид оператора эволюции (в терминах перенормированной переменной x) не меняется при замене $C \rightarrow C/\delta$, $k \rightarrow k + 1$.

15.4. Скейлинг

Обнаруженный Фейгенбаумом закон сходимости есть не что иное, как частное проявление свойства скейлинга: если при некотором значении $\Delta\lambda$ наблюдается бифуркация удвоения периода, то при отклонении от критической точки $\Delta\lambda/\delta$ оператор эволюции за удвоенный период времени должен быть подобен, т. е. тоже отвечать моменту бифуркации.

Более общая формулировка состоит в том, что структура разбиения оси параметра λ на области различного типа динамики воспроизводит себя при уменьшении масштаба относительно критической точки в δ раз (рис. 15.6). Иными словами, в сходственных точках λ и $\lambda_c + (\lambda - \lambda_c)/\delta$ реализуются подобные режимы динамики. Это означает, во-первых, совпадение характера режимов

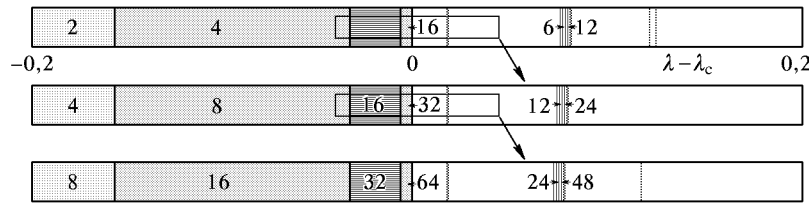


Рис. 15.6. Скейлинг пространства параметров вблизи критической точки. Цифрами обозначены периоды циклов. Пересчет масштаба по оси параметра λ производится в $\delta = 4,669\dots$ раза

(периодический, хаотический), а во-вторых, возможность определения характеристик одного режима по характеристикам другого с помощью надлежащего пересчета. Этот пересчет сопровождается изменением масштаба времени, так что характерный период движений возрастает при приближении к критической точке, а в ней самой обращается в бесконечность.

Скейлинг работает и в докритической, и в закритической области. Мы видели, что при $\lambda = 2$ логистическое отображение демонстрирует развитый хаос. Можно указать такую сходящуюся к критической точке сверху по закону Фейгенбаума последовательность значений λ_k^M , для которых режим развитого хаоса, допускающий кодирование траекторий произвольными последовательностями двух символов, имеет место у отображения, определенного за 2^k временных шагов, это так называемые точки Мизюревича (см. таблицу на с. 220). Поэтому, взяв сколь угодно малый интервал параметра $(\lambda_c, \lambda_c + \varepsilon)$, мы непременно найдем в нем точки, где реализуется хаос. В этом смысле критическая точка служит границей хаоса. Полная же картина динамических режимов в закритической области очень сложна, содержит как хаос, так и «окна» периодических режимов. К тому же она репродуцируется

бесконечно много раз в бесконечно малой окрестности критической точки, в силу свойства скейлинга!

Одним из проявлений скейлинга является характерная зависимость мультипликаторов от параметра для циклов периода 2^k вблизи критической точки (рис. 15.7).

В момент рождения каждого цикла его мультипликатор равен $+1$. При увеличении параметра λ мультипликатор уменьшается, проходит через 0 и затем через -1 . В этот момент цикл перестает

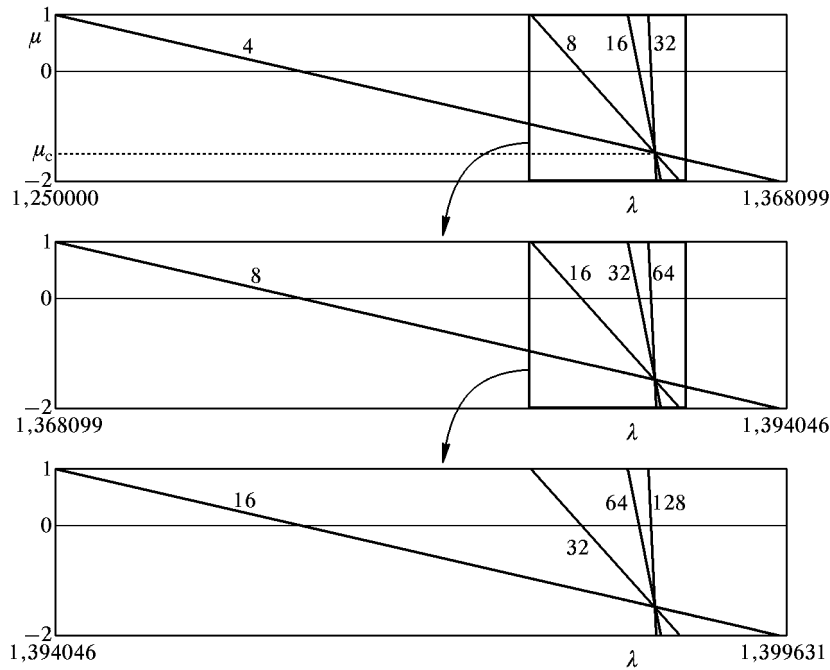


Рис. 15.7. Зависимость мультипликаторов циклов (период указан цифрами) от параметра λ вблизи критической точки и иллюстрация скейлинга — картинка воспроизводит себя при пересчете масштаба по горизонтальной оси в δ раз

быть устойчивым, и рождается цикл удвоенного периода также с мультипликатором $+1$. Графики, отвечающие циклам периода 2^k и 2^{k+1} , переходят друг в друга при пересчете масштаба по оси параметра λ на фактор δ . Точка пересечения кривых зависимости μ_k от λ для циклов разного периода (в асимптотике по k) есть критическая точка. Величина мультипликатора в точке пересечения стремится к универсальной константе $\mu_c = -1,60119\dots$

Тот факт, что мультипликаторы циклов в критической точке для циклов периода 2^k сходятся к универсальной константе, удобно использо-

вать для нахождения критической точки в конкретных нелинейных системах. Для этого нужно подобрать параметр так, чтобы мультипликатор какого-либо цикла периода 2^k обращался в μ_c . Точность оценки можно проконтролировать, увеличив k . Например, для логистического отображения мультипликатор цикла периода 2 выражается формулой $\mu = 4 - 4\lambda$. Потребовав $\mu = \mu_c$, получаем $\lambda = 1,4003$, что уже хорошо согласуется с точным значением $1,401155\dots$

Скейлинг проявляется также в структуре бифуркационного дерева, что иллюстрируется серией диаграмм на рис. 15.8. Каждый последующий рисунок представляет собой увеличенный фрагмент предыдущего. При этом масштаб по оси динамической переменной

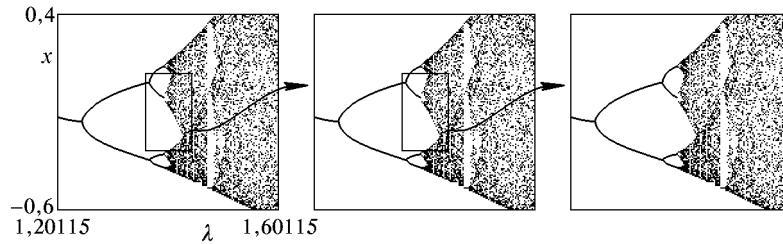


Рис. 15.8. Иллюстрация скейлинга в структуре бифуркационного дерева. Масштаб по горизонтальной оси пересчитывается в $\delta = 4,6692\dots$ раза относительно критической точки $\lambda = \lambda_c$, а по вертикальной оси x — в $\alpha = -2,5029\dots$ раза относительно точки $x = 0$ (знак минус означает изменение ориентации — картинка переворачивается вверх ногами)

x пересчитывается в α раз относительно точки $x = 0$ (экстремума отображения), а по оси управляющего параметра — в δ раз относительно критической точки $\lambda = \lambda_c$. Как можно видеть, картинки хорошо совпадают, причем степень соответствия тем лучше, чем на более глубокий уровень иерархии мы проникаем.

На рис. 15.9 демонстрируется свойство скейлинга на графике ляпуновского характеристического показателя вблизи критической точки. Как уже говорилось, при пересчете управляющего параметра

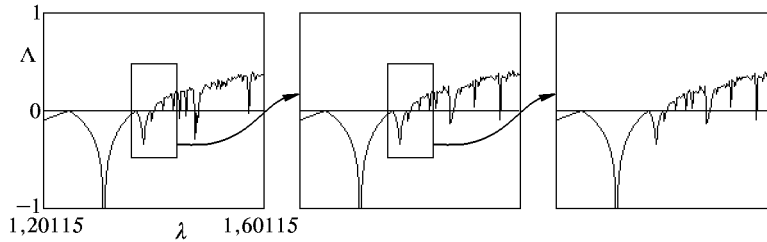


Рис. 15.9. Иллюстрация скейлинга на графике ляпуновского показателя. Масштаб по горизонтальной оси пересчитывается в $\delta = 4,6692\dots$ раза относительно критической точки $\lambda = \lambda_c$, а по вертикальной — в 2 раза

тра по правилу $\Delta\lambda \rightarrow \Delta\lambda/\delta$ получается режим динамики подобный исходному, но с удвоенным временным масштабом. Поэтому ляпуновский показатель (который имеет размерность обратного времени) пересчитывается по правилу $\Lambda \rightarrow \Lambda/2$. Из рисунка видно, что ожидаемый скейлинг подтверждается с высокой точностью, растущей при переходе к более глубоким уровням. Огибающая на графике зависимости ляпуновского показателя от параметра подчиняется соотношению

$$\Lambda \propto (\lambda - \lambda_c)^\chi, \quad (15.20)$$

где критический индекс $\chi = \log_\delta 2 = 0,449806966466\dots$

Изложенные результаты ренормгруппового анализа дают обоснование обнаруженной Фейгенбаумом количественной универсальности для одномерных отображений. Они оказались применимыми, однако, к гораздо более широкому классу нелинейных диссипативных систем. На качественном уровне это можно объяснить тем, что при приближении к критической точке, когда характерный временной период становится очень большим, степень сжатия элемента фазового объема возрастает и, соответственно, многомерное отображение Пуанкаре все точнее аппроксимируется одномерным. Доказательство теоремы, обосновывающей этот факт, опубликовали Колле, Экмани и Кох в 1981 г. (Collet et al., 1981).

Лекция 16

КРИТИЧЕСКИЙ АТТРАКТОР ФЕЙГЕНБАУМА

Обсуждая переход к хаосу, стоит уделить особое внимание собственно моменту перехода, ситуации пограничной между порядком и хаосом. Когда речь идет об удвоениях периода, это точка накопления каскада бифуркаций — критическая точка Фейгенбаума. Аттрактор, реализующийся в этой точке, представляет собой фрактальное множество с интересными и нетривиальными свойствами. Мы называем его *критическим аттрактором*, в литературе используется также термин *аттрактор Фейгенбаума*. Основываясь на результатах, полученных методом РГ, мы имеем возможность обсудить и проиллюстрировать особенности динамики в критической точке и свойства критического аттрактора. Имея в виду вытекающую из РГ анализа универсальность, на эти результаты следует смотреть как на очень общие, относящиеся ко всем типичным однопараметрическим нелинейным диссипативным системам, демонстрирующим переход к хаосу через удвоения периода.

16.1. Критический аттрактор как фрактал

При приближении по параметру к критической точке мы наблюдаем, что аттракторами становятся по очереди циклы периода 2, 4, 8, ..., каждый из которых перестает быть притягивающим в момент рождения следующего цикла. При значении управляющего параметра, отвечающем точке накопления бифуркаций удвоения, все эти циклы существуют, но неустойчивы — для циклов большого периода мультипликатор асимптотически равен универсальной константе $\mu_c = -1,60119\dots$. Естественно задаться вопросом, что за объект является аттрактором в критической точке.

Некоторое представление о критическом аттракторе логистического отображения дает итерационная диаграмма, показанная на рис. 16.1. На ней выделены два фрагмента, вблизи точек $x = 0$ и $x = 1$, которые показаны отдельно с возрастающим разрешением. Видно, что структура аттрактора воспроизводит себя при пересчете масштаба вблизи этих точек на факторы α и α^2 соответственно. Причина появления фактора α вблизи точки экстремума понятна в свете результатов РГ анализа из предыдущей лекции.

Поскольку в критической точке операторы эволюции за 2^k и 2^{k+1} шагов идентичны с точностью до замены масштаба динамической переменной на фактор α , то и структура аттрактора должна воспроизводить себя при таком пересчете масштаба.

На следующей итерации, после прохождения области экстремума, весь пучок траекторий, образующих аттрактор, переводится в окрестность крайней точки $x = 1$, будучи подвергнутым квадра-

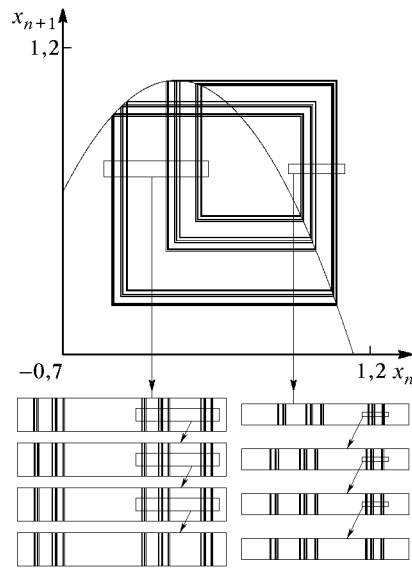


Рис. 16.1. Итерационная диаграмма для логистического отображения $x' = 1 - \lambda x^2$ при критическом значении параметра $\lambda = 1,401155$ и иллюстрация свойств скейлинга критического аттрактора в окрестности точек $x = 0$ (с масштабным фактором $\alpha = -2,5029$) и $x = 1$ (с фактором α^2)

тичному преобразованию. Поэтому вблизи точки $x = 1$ фактор масштабного подобия равен, очевидно, α^2 .

Наличие свойств самоподобия свидетельствует о том, что критический аттрактор есть фрактальное множество. Говоря точнее, это мультифрактал, поскольку в своих разных частях он характеризуется разными масштабными факторами.

Довольно хорошей аппроксимацией критического аттрактора служит двухмасштабное канторово множество, построенное с использованием упомянутых выше констант α и α^2 . Полагая $\mu = 1/|\alpha|$ и $\nu = 1/\alpha^2$, на первом шаге построения делим исходный отрезок в отношении μ , $1 - \mu - \nu$, ν и выбрасываем среднюю часть. На последующих шагах процедура повторяется, причем от-

резки различной длины располагаются так, как это показано на рис. 16.2а.

На самом деле структура критического аттрактора сложнее, поскольку факторы пересчета масштаба на каждом уровне варьируются. Для точного построения критического аттрактора рассмотрим последовательность итераций логистического отображения,

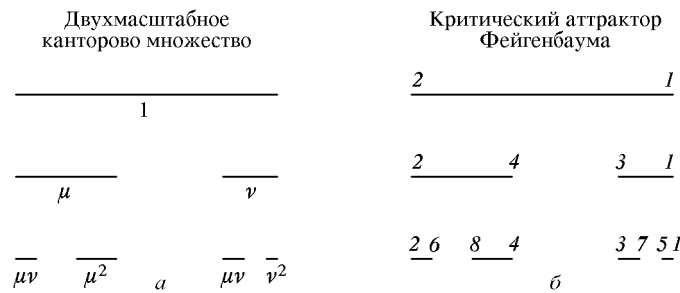


Рис. 16.2. Двухмасштабное канторово множество, построенное с использованием факторов $\mu = 1/|\alpha|$ и $\nu = 1/\alpha^2$ (а), и построение критического аттрактора Фейгенбаума (б). Точки, отмеченные цифрами $i = 1, 2, \dots$, отвечают последовательным итерациям точки экстремума логистического отображения при критическом значении параметра

стартовую из точки экстремума: $x_0 = 0, x_1, x_2, x_3, \dots$. Нулевой шаг состоит в том, что мы берем интервал $[x_2, x_1]$, содержащий целиком критический аттрактор (рис. 16.2б). На первом шаге исключаем центральную часть этого отрезка и оставляем объединение двух интервалов $[x_2, x_4]$ и $[x_3, x_1]$. На втором шаге исключаем центральную часть каждого из двух оставленных интервалов и рассматриваем объединение четырех интервалов $[x_2, x_6], [x_8, x_4], [x_7, x_3], [x_5, x_1]$. На k -м шаге имеем объединение $N = 2^k$ интервалов $\bigcup_{i=1}^{2^k} [x_i, x_{i+2^k}]$. Множество, которое получается в пределе при $k \rightarrow \infty$, и есть критический аттрактор.

Для анализа и представления фрактальных свойств критического аттрактора можно привлечь формализм, обсуждавшийся в лекциях 11, 12.

На k -м шаге наше построение реализует покрытие аттрактора 2^k интервалами, длины которых $l_i = |x_i - x_{i+2^k}|$. Каждый интервал для i от 2 до 2^k получается действием логистического отображения из предыдущего, $(i-1)$ -го интервала, поэтому всем им следует приписать одну и ту же вероятность, а именно, $p_i = p = 1/2^k$.

Чтобы найти размерность Хаусдорфа, составляем суммы $\Gamma_d^{(k)} = \sum_{i=1}^{2^k} l_i^d$, отвечающие различным шагам построения k . При малых значениях d эти суммы стремятся с ростом k к бесконечности, а при больших d — к нулю. Если подобрать значение d , разграничивающее обе ситуации, то эта величина d и будет размерностью Хаусдорфа. Для критического аттрактора Фейгенбаума она вычислена с высокой точностью (Christiansen et al., 1990) и составляет

$$d = 0,53804514358054991167 \dots \quad (16.1)$$

Для получения других мультифрактальных характеристик критического аттрактора вводим суммы более общего вида (Halsey et al., 1986):

$$\Gamma_{q\tau}^{(k)} = \sum_{i=1}^{2^k} \frac{p_i^q}{l_i^\tau} = 2^{-qk} \sum_{i=1}^{2^k} l_i^{-\tau}. \quad (16.2)$$

Потребуем, чтобы q и τ соотносились так, чтобы при $k \rightarrow \infty$ суммы не убывали к нулю и не росли в бесконечность. Для этого полагаем

$$q(\tau) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log_2 \sum_{i=1}^{2^k} l_i^{-\tau}. \quad (16.3)$$

Имея функцию $q(\tau)$, можно получить, как параметрически определенную функцию, обобщенную размерность в зависимости от q :

$$q = q(\tau), \quad D(q) = \frac{\tau}{q-1}. \quad (16.4)$$

Описанная процедура без особых трудностей реализуется численно, причем получаемую точность можно контролировать, рассматривая различные уровни k . График обобщенной размерности показан на рис. 16.3. Величина $D(0)$ есть размерность Хаусдорфа

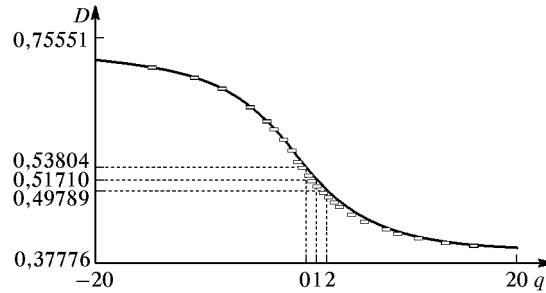


Рис. 16.3. Спектр обобщенных размерностей для критического аттрактора Фейгенбаума (сплошная линия) и для аппроксимирующего его двухмасштабного канторова множества (квадратики)

d , информационная размерность составляет $D(1) = 0,51710$, а корреляционная $D(2) = 0,49780$. При $q \rightarrow \pm\infty$ имеем $D(-\infty) = 1/\log_2 |\alpha| = 0,755512$ (максимальная размерность) и $D(\infty) = 1/\log_2 \alpha^2 = 0,37776$ (минимальная размерность).

Скейлинг-спектр критического аттрактора определяется как зависимость между величинами $\alpha = d\tau/dq$ и $f = \alpha q - \tau$. Его вид приводится на рис. 16.4. Он располагается в интервале измене-

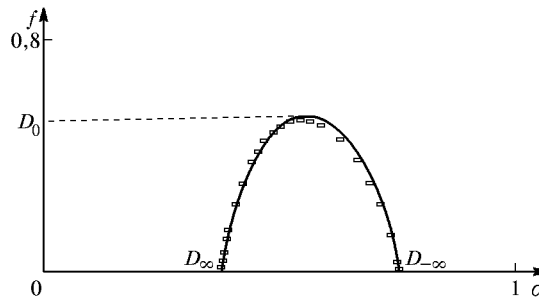


Рис. 16.4. Скейлинг-спектр для критического аттрактора Фейгенбаума (сплошная линия) и для аппроксимирующего его двухмасштабного канторова множества (квадратики)

ния α от $D(\infty)$ до $D(-\infty)$ и имеет экстремум, равный величине хаусдорфовой размерности аттрактора $f_{\max} = D(0)$.

При аппроксимации критического аттрактора двухмасштабным канторовым множеством можно воспользоваться результатами вычисления скейлинг-спектра и спектра обобщенных размерностей в лекции 12, подставив в полученные там выражения $\mu = 1/|\alpha|$ и $\nu = 1/\alpha^2$. Соответствующие данные приведены для сравнения на рис. 16.3 и 16.4 (квадратики).

16.2. 0 последовательности посещения точек на критическом аттракторе

Так как фрактальная размерность критического аттрактора меньше единицы, можно заключить, что он имеет нулевую меру, если ее понимать как предел суммарной длины интервалов, оставаемых на последовательных уровнях построения. В то же время, как и канторово множество, он обладает мощностью континуума. Последнее вытекает из того, что можно построить правило кодирования принадлежащих аттрактору точек бесконечными двоичными последовательностями.

На рис. 16.5 изображено схематически бинарное дерево, которое можно рассматривать как набросок «докритической» части бифуркационной диаграммы рис. 15.2. Занумеруем каждую ветвь дерева символом 0 или 1, как показано на рисунке, используя по-

вторяющийся паттерн «0110» для нумерации сверху вниз ветвей, относящихся к одному уровню. Пусть наше дерево содержит k уровней, тогда точки на правом краю диаграммы отражают взаимное расположение элементов цикла периода 2^k . *Последовательность, кодирующая спуск по ветвям дерева от любой из этих крайних точек, отвечает двоичной записи номера соответствующего элемента цикла.* Имеются в виду номера, отсчитываемые в порядке следования элементов цикла во времени, причем за нулевой принимается наиболее удаленный от точки экстремума элемент. В пределе, при $k \rightarrow \infty$, описанная процедура определяет правило кодирования точек, принадлежащих критическому аттрактору, бесконечными двоичными последовательностями,

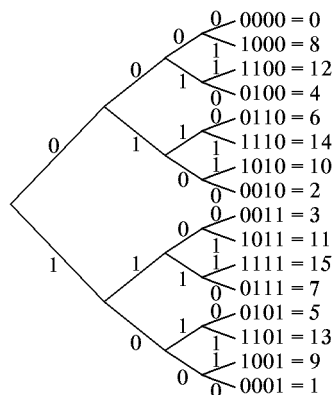


Рис. 16.5. Бинарное дерево для кодирования точек, принадлежащих критическому аттрактору; показано четыре уровня

причем это правило отражает порядок обхода точек во времени. Следовательно, множество точек критического аттрактора находится во взаимно-однозначном соответствии с точками единичного отрезка и имеет мощность континуума.

Заметим, что в рамках мультифрактального формализма критический аттрактор рассматривался как статический объект, ибо порядок обхода точек во внимание не принимался. При его учете обнаруживаются дальнейшие интересные свойства критического аттрактора.

16.3. Символическая динамика в критической точке

Будем обозначать символом R посещение траекторией правого склона параболы при итерациях логистического отображения, а буквой L — посещение левого склона. Как было объяснено в лекции 2, хаотической динамике при $\lambda = 2$ отвечает такая ситуация, когда имеет место взаимно-однозначное соответствие между

множеством траекторий и множеством всевозможных бесконечных последовательностей двух символов. Как будет выглядеть с этой точки зрения ситуация в критической точке? Рассмотрим RL -последовательность, которая получается при старте из точки экстремума, ее называют *нидинг-последовательностью* (kneading sequence). В критической точке это вполне определенная последовательность, правило построения которой приведем здесь без доказательства (Procaccia et al., 1987). Обозначим точку экстремума символом C и это будет начальный символ кода. На следующем шаге точка попадает на правый склон, так что следующий символ будет R . Слово CR принимаем за первый шаг построения. Далее действуем по следующему правилу. Берем слово, полученное на предыдущем шаге, повторяем его дважды, и заменяем попавшую в середину букву C на R или L попеременно. В результате получается последовательность слов:

$$\begin{aligned} & CR \\ & CRLR \\ & CRLRRRLR \\ & CRLRRRLRLRLRRRLR \\ & CRLRRRLRLRLRRRLRRRLRRRLRLRLRRRLR \end{aligned} \quad (16.5)$$

и т. д. Для ясности, символы, полученные заменой из буквы C , подчеркнуты.

Другой способ таков (Schroeder, 1991). Начинаем с однобуквенного слова R и выполняем последовательность шагов, каждый из которых состоит в замене каждой буквы в слове на две буквы по правилу

$$R \leftarrow RL, \quad L \leftarrow RR. \quad (16.6)$$

Применяя это правило подстановки шаг за шагом, получаем

$$\begin{aligned} & R \\ & RL \\ & RLRR \\ & RLRRRLRL \\ & RLRRRLRLRLRRRLRR \\ & RLRRRLRLRLRRRLRRRLRRRLRLRLRRRLRL \end{aligned} \quad (16.7)$$

и т. д. Сравните коды, полученные по обоим правилам на последнем шаге, и убедитесь, что они идентичны.

Заметим, что начальный участок, раз возникнув в процессе построения, более не меняется, так что последовательность, получаемая в пределе бесконечного числа шагов процедуры, хорошо определена. Это и есть *критическая нидинг-последовательность*.

траектории. Определим ее через циклы периода 2^k , существующие в критической точке. Пусть x_n и x'_n — значения динамической переменной, принадлежащие циклам периода 2^k и 2^{k+1} , причем начало отсчета дискретного времени соответствует самой удаленной от экстремума точке орбиты. Введем функцию $\sigma(t)$ как предел

$$\sigma\left(\frac{m}{2^k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x'_m - x'_{m+2^k}}{x_m - x_{m+2^{k-1}}}. \quad (16.9)$$

На рис. 16.6 показан график этой функции, полученной численно. Из рисунка видно, что сигма-функция имеет фрактальную структуру и содержит разрывы во всех точках $m/2^n$, т.е. в точках, представляемых в двоичной системе конечными дробями. Справедливы предельные соотношения

$$\sigma^{-1}(1-0) = \alpha, \quad \sigma^{-1}(+0) = \alpha^2. \quad (16.10)$$

Эти две величины задают максимальное и минимальное значения из всего набора масштабных факторов и отвечают окрестности, соответственно, экстремума и крайней точки критического аттрактора.

16.5. Спектр Фурье

Обсудим вопрос о спектре Фурье сигнала, порождаемого динамикой в критической точке (Feigenbaum, 1979; Huberman, A. Zisook, 1981; M. Nauenberg, J. Rudnik, 1981). Как уже говорилось, в этой точке сосуществуют неустойчивые циклы со всевозможными периодами 2^k . Критический аттрактор можно мыслить как предельный объект, аппроксимируемый этими циклами со все большей точностью при $k \rightarrow \infty$.

Рассмотрим для логистического отображения цикл периода $N = 2^k$ в критической точке, ему соответствует последовательность значений динамической переменной $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$. Разложение в ряд Фурье и обратное преобразование определяются выражениями

$$x_n = \sum_{m=0}^{N-1} c_m \exp\left(\frac{2\pi i}{N} mn\right), \quad c_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} mn\right). \quad (16.11)$$

Величина $f = m/N$ представляет собой частоту m -й компоненты, а для квадрата амплитуды введем обозначение $S(f) = S(m/N) = |c_m|^2$.

Перейдем теперь к циклу удвоенного периода $2N$, все относящиеся к нему величины будем отмечать штрихом. Покажем, что коэффициенты ряда Фурье для этого цикла

$$c'_m = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{2N-1} x'_n \exp\left(-\frac{2\pi i}{2N} mn\right) = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} x'_{2n} \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} mn\right) + \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} x'_{2n+1} \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} mn - \frac{\pi i}{N} m\right) \quad (16.12)$$

приближенно выражаются через коэффициенты c_m .

В силу свойства скейлинга, для цикла удвоенного периода элементы последовательности значений динамической переменной с четными номерами будут определяться как $x'_{2n} \cong x_n/\alpha$, $\alpha = -2,5029\dots$, а нечетные можно выразить с помощью логистического отображения как

$$x'_{2n+1} = 1 - \lambda_c x_n'^2 \cong 1 - \frac{\lambda_c x_n^2}{\alpha^2} = 1 - \frac{1 - x_{n+1}}{\alpha^2}.$$

Подставляя эти выражения в (16.12), имеем:

$$c'_m \cong \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{x_n}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} mn\right) + \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} mn - \frac{\pi i}{N} m\right) + \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{x_{n+1}}{\alpha^2}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} mn - \frac{\pi i}{N} m\right). \quad (16.13)$$

Из сравнения с (16.11) видно, что первая сумма есть не что иное, как $c_m/2\alpha$, а третья заменой индекса $n+1 \rightarrow \nu$ сводится к сумме того же вида и равна $c_m \exp((\pi i/N)m)/2\alpha^2$. Оставшийся член вычисляется явно и отличен от нуля только при $m=0$ и $m=N$. В результате имеем

$$\begin{aligned} c'_0 &= \frac{c_0(\alpha^{-1} + \alpha^{-2})}{2} + \frac{1 - \alpha^{-2}}{2}, \\ c'_N &= \frac{c_0(\alpha^{-1} - \alpha^{-2})}{2} - \frac{1 - \alpha^{-2}}{2}, \end{aligned} \quad (16.14)$$

$$\left. \begin{aligned} c'_m &= c_m \frac{\alpha^{-1} + \alpha^{-2} \exp(\pi i m/N)}{2} \\ c'_{m+N} &= c_m \frac{\alpha^{-1} - \alpha^{-2} \exp(\pi i m/N)}{2} \end{aligned} \right\} 0 < m < N. \quad (16.15)$$

Уравнение для c_0 имеет вид рекуррентного выражения. При его итерациях коэффициент стремится к $c_0 = (\alpha + 1)/(2\alpha + 1)$, что соответствует пределу бесконечного периода циклов, $N \rightarrow \infty$. Из второго соотношения видно, что $\lim c_N = (\alpha + 1)(2\alpha + 1)^{-1} \times (\alpha^{-1} - \alpha^{-2})/2 - (1 - \alpha^2)/2$, следовательно,

$$S(0) = S(1) = \left(\frac{\alpha + 1}{2\alpha + 1} \right)^2, \quad S\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha(2\alpha + 1)} \right)^2. \quad (16.16)$$

Для $m \neq 0$ из (16.15) можно выразить $S'(f/2)$ и $S'(1/2 + f/2)$ через $S(f)$. Если рассмотреть предельный переход к бесконечно большому периоду, то штрихи можно опустить и записать результат в виде

$$\begin{aligned} S\left(\frac{f}{2}\right) &= \left(\frac{1 + \alpha^2}{4\alpha^4} + \frac{1}{2\alpha^3} \cos \pi f \right) S(f), \\ S\left(\frac{1}{2} + \frac{f}{2}\right) &= \left(\frac{1 + \alpha^2}{4\alpha^4} - \frac{1}{2\alpha^3} \cos \pi f \right) S(f). \end{aligned} \quad (16.17)$$

Из полученных соотношений можно заключить, что спектр будет содержать дискретные составляющие на частотах $f = m2^{-k}$ со всевозможными целыми m и $k = 0, 1, 2, \dots$. Их амплитуды можно вычислить рекуррентным образом с помощью (16.17), используя (16.16) в качестве «начальных условий».

На рис. 16.7 показаны фурье-спектры, найденный численно и полученный с помощью приближенных соотношений (16.16),

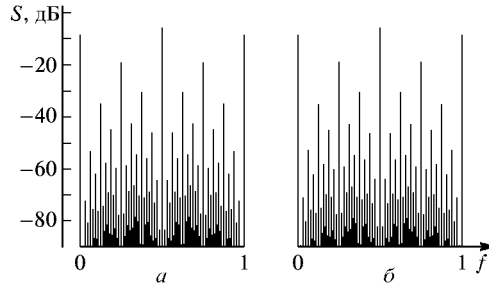


Рис. 16.7. Спектр Фурье на пороге возникновения хаоса в логистическом отображении, найденный численно (а) и с помощью приближенных аналитических соотношений (б)

(16.17). На вид они почти неразличимы. По вертикальной оси отложена спектральная интенсивность в децибеллах $S(\text{дБ}) = 10 \lg S$. Спектр обладает иерархической структурой: субгармоники каждого последующего уровня k уменьшаются по интенсивности в

среднем на фактор $\gamma = (1 + \alpha^2)/4\alpha^4$, т. е. в 21,6 раза или на 13,4 дБ. Неравномерность распределения амплитуд в пределах данного уровня дается фактором $\kappa = 2\alpha/(1 + \alpha^2) \approx 0,69$.

Чтобы представить присущие спектру свойства подобия в более наглядном виде, используем логарифмический масштаб по обеим осям, причем спектральные интенсивности отнесем к f^κ , где показатель $\kappa \approx 6,39$ подобран эмпирически (рис. 16.8). Как можно

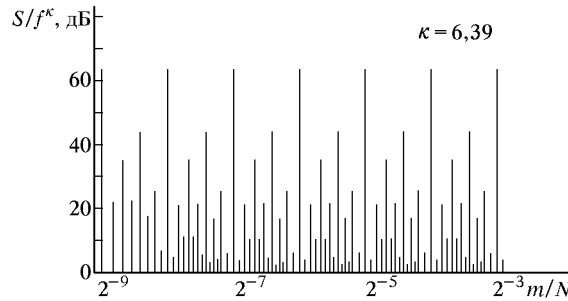


Рис. 16.8. Спектр Фурье на пороге возникновения хаоса в логистическом отображении, найденный численно и представленный в двойном логарифмическом масштабе. Спектральные интенсивности отнесем к f^κ , где показатель $\kappa \approx 6,39$ подобран эмпирически

заметить, относительная высота и взаимное расположение пиков воспроизводят друг друга с правильной периодичностью по оси логарифма частот.

На основании нашего приближенного анализа спектральных соотношений этот результат можно объяснить следующим образом. Спектральные интенсивности на частотах $f = f_0 2^{-k}$ получают в последовательном применении первой формулы (16.17). Поскольку при этом $f \rightarrow 0$, то косинус стремится к нулю, и фактор пересчета интенсивностей оказывается равным $\rho = (1 + \alpha^2)/4\alpha^4 + 1/2\alpha^3$. Поэтому $S(f \cdot 2^{-k}) \cong \rho^k S(f)$. Введем $s(f) = S(f)/f^\kappa$, где $\kappa = \log_2 \rho = 6,19$, тогда будем иметь $s(f \cdot 2^{-k}) \cong s(f)$. Значение константы несколько отличается от найденного эмпирически, что объясняется приближениями, сделанными при выводе формул (16.17).

16.6. 0 переходе к хаосу через удвоения периода в реальных системах и моделях в виде дифференциальных уравнений

В реальных нелинейных диссипативных системах очень часто можно наблюдать переход к хаосу через удвоения периода. Из-за неизбежного присутствия шумов, удастся различить, разумеется только ограниченное число бифуркаций (по-видимому, не более 5–6 в тщательно поставленных экспериментах). Тем не менее,

общая картина перехода очень характерна и демонстрирует многие тонкие детали, присущие данному классу универсальности. Оценки констант Фейгенбаума α и δ , полученные в экспериментах, находятся в разумном соответствии с теорией.

В лекции 5 были приведены спектры и фазовые портреты, полученные экспериментально при переходе к хаосу через удвоения периода в нелинейном колебательном контуре с периодическим внешним воздействием (см. рис. 5.18). Первая бифуркация удвоения состоит в том, что траектория при обходе вокруг цикла не попадает в исходную точку, а идет на второй оборот, после которого замыкается. После следующей бифуркации оказывается, что, совершив два оборота, траектория «промахивается» мимо начальной точки и замыкается только после четырех оборотов, затем после восьми оборотов и т. д. В закритической области наблюдается обратный процесс последовательного «огрубления» тонкой структуры аттрактора. Аттрактор похож на ленту, замыкающуюся после $\dots$, 8, 4, 2 оборотов.

Эволюция спектра при переходе к хаосу выглядит следующим образом. Сначала в нем присутствуют только гармоники, отвечающие основному периоду. Далее, после первой бифуркации удвоения появляется субгармоническая составляющая, затем каждая последующая бифуркация сопровождается возникновением все новых субгармоник точно в середине интервала между существовавшими ранее спектральными компонентами. В критической точке представлены субгармоники всех уровней. В закритической области субгармонические составляющие разрушаются в порядке, обратном порядку их появления, на их месте остаются участки сплошного спектра (хаос). В некоторых узких областях по параметру спектр вновь делается дискретным, что соответствует окнам периодичности, а затем опять возникает хаос.

В автономных системах эволюция фазовых портретов и спектров выглядит в общем аналогично, но присутствующие в спектре узкие пики в закритической области имеют конечную ширину (Пиковский, 1982).

На рис. 16.9 иллюстрируется эволюция фазового портрета аттрактора при переходе к хаосу через удвоения периода в системе Чуа — электронной схеме, которая описывается системой трех дифференциальных уравнений первого порядка с кусочной нелинейностью (см. лекцию 5). Остановимся специально на ситуации в точке накопления бифуркаций удвоения периода, где формируется критический аттрактор, обладающий фрактальной структурой. На рис. 16.10 показан фазовый портрет аттрактора в критической точке $\alpha = 3,3684481649$, $\beta = 4,0388943177$. Как можно убедиться, поперечная структура полос, из которых состоит аттрактор, представляет собой канторовоподобное множество, фрактальные свойства которого те же самые, как для аттрактора

Фейгенбаума в логистическом отображении. В частности, вблизи определенной точки структура полос воспроизводит себя при пересчете масштаба на константу Фейгенбаума α .

Ранее мы говорили, что хаотический аттрактор — фрактальный объект, теперь мы обсуждаем фрактальные свойства критического аттрактора. Следует подчеркнуть существенное различие между этими фрактальными структурами. Сравните диаграммы на рис. 16.9 z и d . Модель хаотического аттрактора — лента, опре-

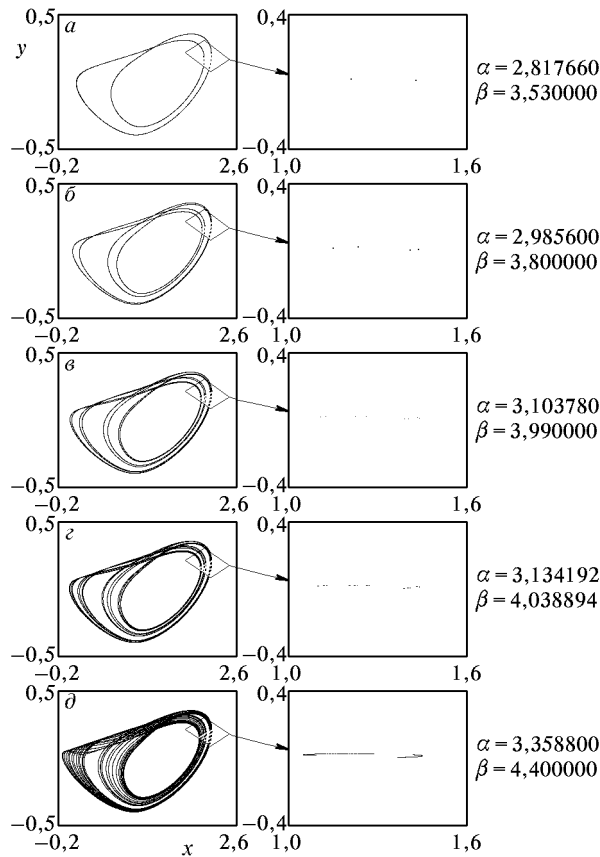


Рис. 16.9. Фазовые портреты аттрактора схемы Чуа (5.22) в проекции на плоскость (x, y) (левая колонка) и в сечении Пуанкаре (правая колонка): a – c — периодические режимы; z — критический аттрактор; d — хаос

деленным образом скрученная и склеенная, а фрактальная природа аттрактора выражается в том, что лента слоистая, имеет тонкую поперечную структуру из бесконечного числа «листов» по своей «толщине». Критический аттрактор — это лента, из которой

вырезана центральная полоса, из оставленных полосок вырезаны центральные более узкие полоски и т. д., т. е. речь идет о фрактальной структуре не по толщине, а по ширине ленты. Возможно, более наглядно это различие структуры видно в сечении Пуанкаре

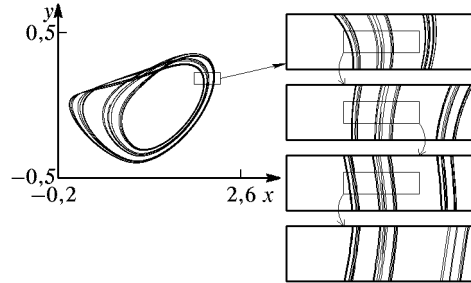


Рис. 16.10. Фазовый портрет аттрактора системы Чуа в критической точке накопления бифуркаций удвоения периода в проекции на плоскость (x, y) при $\alpha = 3,3684481$, $\beta = 4,0388943$. Вырезанная полоска вблизи точки $(x, y, z) = (2,09924, 0,18922, -2,24700)$ показана на нескольких шагах увеличения на фактор Фейгенбаума $\alpha = -2,5029\dots$ (Отрицательное значение масштабной константы соответствует изменению ориентации.)

(см. правую колонку на рис. 16.9). Хаотический аттрактор имеет фрактальную структуру поперек, а критический — вдоль его изображения в сечении Пуанкаре. Такую же картину можно видеть на рис. 16.11, где показаны критический и хаотический аттракторы отображения Эно.

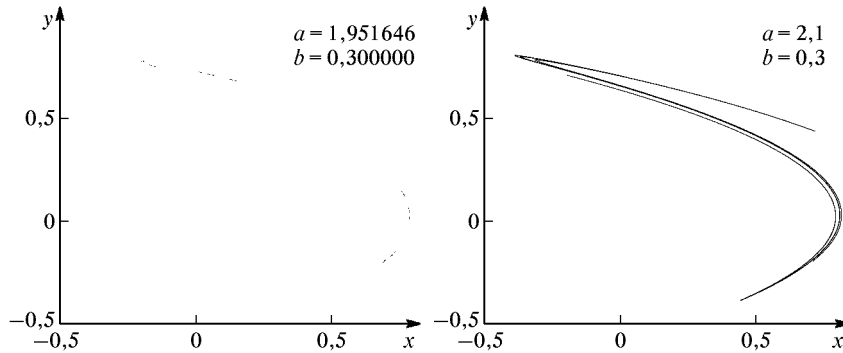


Рис. 16.11. Критический (а) и хаотический (б) аттракторы отображения Эно $x' = 1 - ax^2 - by$, $y' = x$

Для формирования (или выявления при наблюдении) k -го уровня фрактальной структуры критического аттрактора нужно удвоить рассматриваемый временной интервал: $T_k \cong 2^k T$, где

T — характерный период основного движения системы. Для хаотического аттрактора характерное время формирования каждого нового уровня фрактальной структуры одно и то же, порядка Λ^{-1} , где Λ — показатель Ляпунова, так что $T_k \cong k\Lambda^{-1}$.

В трехмерном фазовом пространстве для систем с непрерывным временем хаотический аттрактор обязан иметь фрактальную размерность, превышающую 2. Она, разумеется, зависит от конкретной системы и от выбора режима. Размерность критического аттрактора, реализующегося в результате фейгенбаумовского каскада удвоений периода, всегда одна и та же и составляет $1 + d$, где $d = 0,538\dots$ — универсальная константа (см. (16.1)); единица добавляется из-за наличия дополнительного измерения вдоль фазовой траектории. Формула Каплана–Йорке, которая обычно дает правильную оценку фрактальной размерности хаотических аттракторов, к критическому аттрактору неприменима. Старший ляпуновский показатель критического аттрактора равен нулю.

Лекция 17

ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ

Если в какой-то системе имеет место чередование стадий (фаз) регулярного и хаотического поведения, то говорят о перемежаемости. Например, в гидродинамических течениях встречается перемежающаяся турбулентность, когда течение одновременно имеет в одних пространственных областях плавный, ламинарный, а в других — нерегулярный, турбулентный характер.

В контексте динамических систем термин перемежаемость (английский эквивалент *intermittency*), вошел в обиход после опубликованной в 1980 г. работы французских исследователей Помо и Манневилля (Pomeau, Manneville, 1980). Они указали три типа перемежаемости, которые могут сопровождать переход от периодического движения к хаосу (см. лекцию 14).

Наиболее распространенной является перемежаемость типа I, которая и будет основным предметом обсуждения в данной лекции. Напомним, что ее возникновение ассоциируется с касательной бифуркацией и появлением «коридора» на месте исчезнувших после слияния устойчивой и неустойчивой точек (циклов). Предполагается, что после пребывания в удаленных областях фазового пространства, где динамика сложная и нерегулярная, система всегда возвращается в исходную область (реинжекция) и должна снова и снова проходить через «коридор» (рис. 17.1).

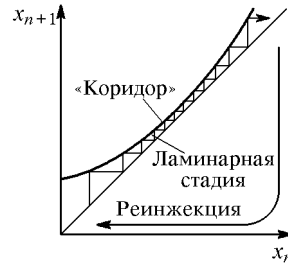


Рис. 17.1. К механизму возникновения перемежаемости типа I

17.1. Перемежаемость типа I: примеры

Следуя Помо и Манневиллю, рассмотрим динамику модели Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy \quad (17.1)$$

при $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и значениях r в некотором диапазоне вблизи 166. На рис. 17.2 показаны полученные на компьютере зависимости динамической переменной от времени. На рис. 17.3 приведены фазовые портреты, выполненные в технике кодирования

тонами серого цвета в соответствии с вероятностью пребывания изображающей точки в тех или иных областях.

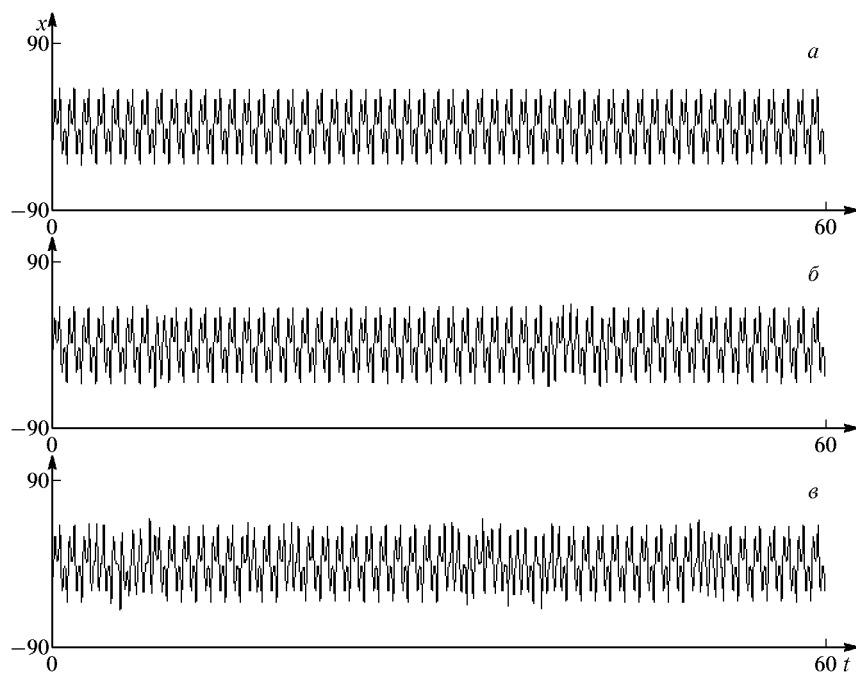


Рис. 17.2. Временные зависимости динамической переменной x в системе Лоренца, иллюстрирующие переход к хаосу через перемежаемость: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 166$ (а), 166,12 (б), 166,24 (в)

При $r = 166$ реализуется периодический режим, которому в фазовом пространстве отвечает предельный цикл. При r немного большем этой величины, наблюдаются длительные временные

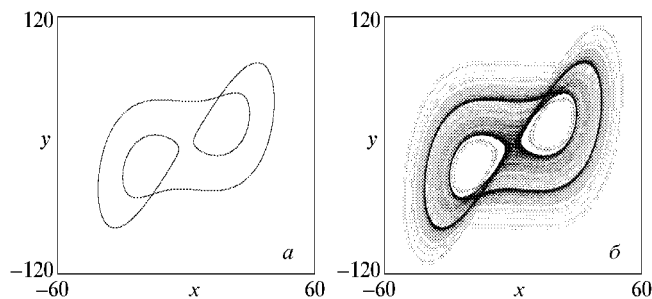


Рис. 17.3. Фазовые портреты аттрактора в проекции на плоскость переменных x , y , иллюстрирующие переход к хаосу через перемежаемость в системе Лоренца: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 166$ (а), 166,24 (б)

участки регулярного, почти периодического движения — ламинарные стадии, которые перемежаются относительно непродолжительными турбулентными всплесками. Чем дальше мы по параметру от точки возникновения перемежаемости, тем короче ламинарные стадии. На фазовом портрете можно видеть ярко прорисованную область, близкую по форме к исчезнувшему предельному циклу. В этой области протекает динамика на ламинарных стадиях. Остальная часть портрета, прорисованная бледными тонами, соответствует турбулентным стадиям.

Чтобы прояснить механизм возникновения перемежаемости в системе Лоренца, обратимся к построению сечения Пуанкаре и выберем в качестве секущей поверхности плоскость $x = 0$. Пусть (y_n, z_n) — последовательность точек, в которых фазовая траектория пересекается с этой плоскостью. На рис. 17.4 показана зависимость y_{n+1} от y_n в режиме перемежаемости. Видно, что в выбранном интервале точки располагаются вдоль гладкой кривой, почти касающейся биссектрисы. (Чем ближе мы к точке возникновения перемежаемости, тем ситуация ближе к касанию.) Таким образом, налицо присутствие характерного для перемежаемости типа I «коридора» на итерационной диаграмме, где изображающая точка проводит основное время, а именно, на протяжении ламинарных стадий.

Второй пример — логистическое отображение

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad f(x) = 1 - \lambda x^2. \quad (17.2)$$

Как известно, в области $\lambda > \lambda_c = 1,401155\dots$ наряду с областями хаоса имеется множество окон устойчивости — интервалов параметра, где реализуется аттрактор в виде устойчивого цикла того или иного определенного периода (рис. 17.5). При выходе из окна устойчивости в сторону увеличения параметра можно наблюдать каскад удвоений периода на базе исходного цикла, а выход в сторону уменьшения параметра, как оказывается, сопровождается возникновением хаоса через перемежаемость.

Рассмотрим самое широкое окно, нижняя граница которого расположена при $\lambda = 1,75$ (рис. 17.5). В этом окне реализуется цикл периода 3, итерационная диаграмма которого приведена на рисунке справа. Чтобы понять, что происходит с этим циклом при уменьшении λ , построим график отображения за три шага итера-

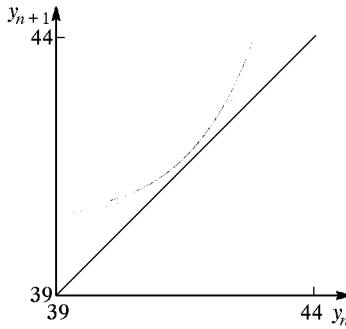


Рис. 17.4. Отображение возврата для переменной y системы Лоренца в режиме перемежаемости: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 166,2$. Секущая поверхность $x = 0$

ций, $f^3(x) = f(f(f(x)))$ при λ немного большем, равном, и немного меньшем бифуркационного значения 1,75. Соответствующие

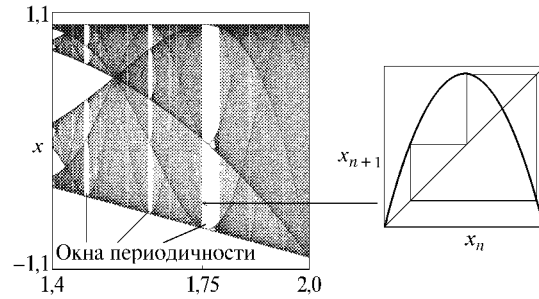


Рис. 17.5. Бифуркационная диаграмма логистического отображения в закритической области (слева) и итерационная диаграмма, отвечающая окну периода 3 (справа). Нижняя граница окна располагается при $\lambda = 1,75$; при переходе через нее в сторону уменьшения λ возникает перемежаемость

диаграммы приведены на рис. 17.6, причем фрагмент, представляющий основной интерес, показан в увеличенном виде (правая часть рисунка). Ясно, что имеет место касательная бифуркация: в результате слияния устойчивой и неустойчивой точек (для ис-

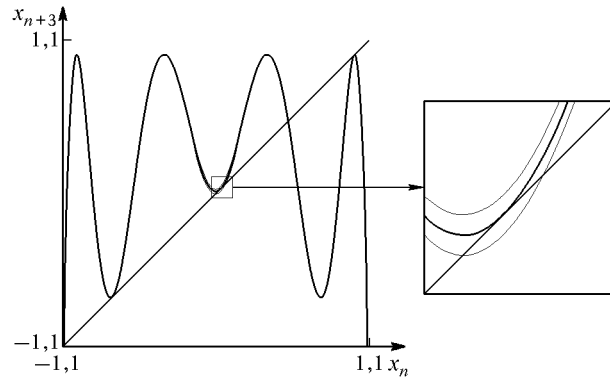


Рис. 17.6. График логистического отображения за три шага итерации при $\lambda = 1,745$ (верхняя кривая), $1,755$ (нижняя кривая) и $1,750$, что соответствует касательной бифуркации

ходного отображения — циклов периода 3) образуется «коридор». Рис. 17.7 иллюстрирует зависимость динамической переменной от дискретного времени для трех значений параметра λ . Первая диаграмма отвечает регулярному режиму — циклу периода 3, вторая и третья демонстрируют перемежаемость. На ламинарных стадиях поведение похоже на периодический режим, однако более тщательный анализ выявляет присутствие медленно накап-

ливающих возмущений. Этот процесс завершается появлением турбулентного всплеска. После этого вновь возникает ламинарная стадия, затем вновь турбулентный всплеск и т. д., причем промежутки времени между последовательными всплесками не повторяются, а оказываются случайными. Каждый турбулентный всплеск сопровождается сбоем фазы колебаний близких к периодическим

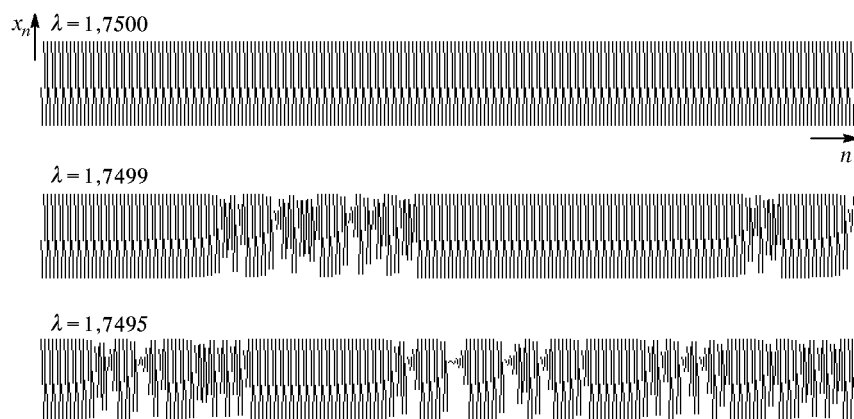


Рис. 17.7. Зависимость переменной x от дискретного времени n для логистического отображения при выходе по параметру из окна периода 3 с возникновением переमेжаемости

на ламинарных стадиях. Средняя продолжительность ламинарных стадий уменьшается при удалении от порога касательной бифуркации, а при приближении к нему стремится к бесконечности.

Известно, что присущий логистическому отображению тип динамики с переходом к хаосу через удвоения периода и соответствующим устройством пространства параметров встречается в огромном количестве нелинейных диссипативных систем, относящихся к фейгенбаумовскому классу универсальности. Непременным атрибутом закритической области является присутствие окон устойчивости. Выход же из такого окна в одном из двух возможных направлений сопровождается переमेжаемостью, как мы видели на примере логистического отображения. Отсюда следует, что переमेжаемость должна быть так же распространена в нелинейных диссипативных системах, как и каскад удвоений периода. В качестве примера на рис. 17.8 иллюстрируется перемежаемость, наблюдаемая в системе Ресслера.

В недавних работах Харви Каплана, американского исследователя из Нью-Йорка, было показано, однако, что для многомерных систем существует дополнительное условие реализации перемежаемости типа I при выходе из окон периодичности в закритической области удвоений периода (Kaplan, 1992, 1993). Оно состоит в

том, что степень сжатия фазового объема за характерный временной период должна быть достаточно велика (рис. 17.9). Для

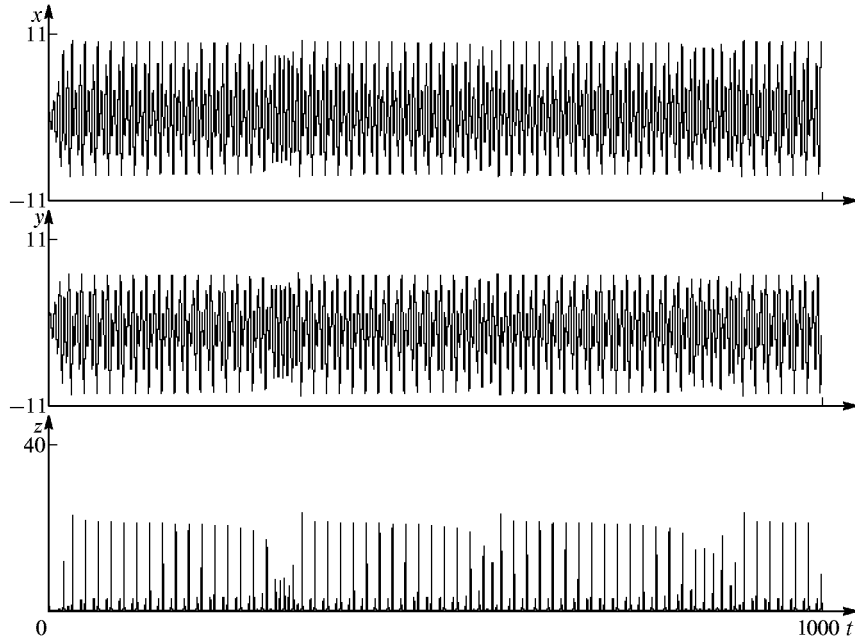


Рис. 17.8. Зависимости динамических переменных от времени в режиме переमेжаемости, который реализуется в системе Ресслера $\dot{x} = -y - z$, $\dot{y} = x + ay$, $\dot{z} = b + (x - r)z$ при $a = 0,24$, $b = 0,2$, $r = 4,66$

отображений типа Эно Каплан нашел, что переमेжаемость «классического» типа при выходе из окна периода 3 наблюдается при значениях якобиана $J = b < 0,00155$, а при больших значениях

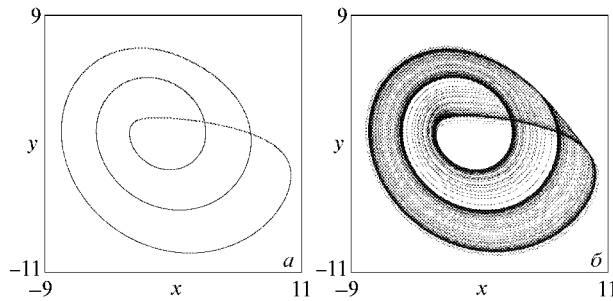


Рис. 17.9. Фазовые портреты в проекции на плоскость переменных x , y , иллюстрирующие переход к хаосу через переमेжаемость в системе Ресслера. Значения параметров: $a = 0,24$, $b = 0,2$, $r = 4,68$ (а) и $4,66$ (б)

характер перехода меняется — возникают эффекты типа жестких переходов и гистерезиса. Таким образом, при анализе конкретных систем полезно иметь оценку фактора сжатия фазового пространства за период, чтобы быть уверенным в правильной интерпретации режимов переमेжаемости. Для систем Лоренца и Ресслера степень сжатия за характерный период очень велика, так что условие Каплана заведомо выполняется.

Наличие переमेжаемости не всегда означает хаотическую природу возникающего режима. Альтернативная возможность иллюстрируется на примере отображения Заславского на рис. 17.10. Перемежаемость, реализующаяся при выходе из языка Арнольда че-

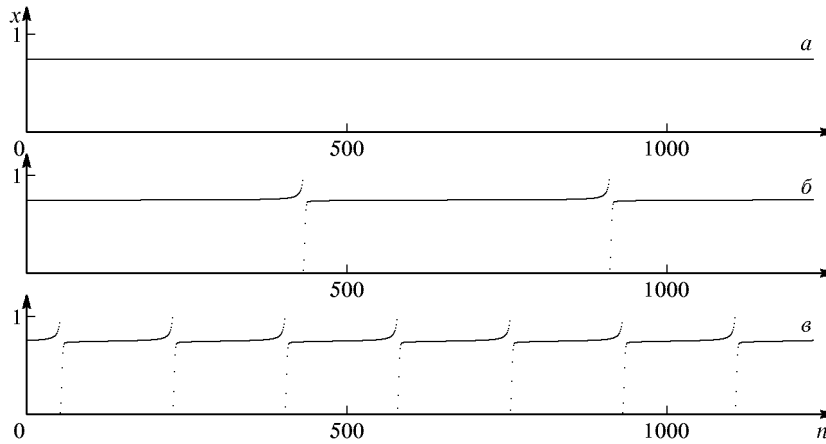


Рис. 17.10. Переход через перемежаемость к квазипериодическому режиму у края языка Арнольда в отображении Заславского $\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Delta + k \sin \varphi_n + d\rho_n$, $\rho_{n+1} = d\rho_n + k \sin \varphi_n$ при $d = 0,3$, $k = 0,5$, $\Delta/2\pi = 0,1136$ (а), $0,1137$ (б), $0,1138$ (в)

рез его край при небольших k , характеризуется *регулярным* чередованием ламинарных стадий и стадий переключения. Фактически это квазипериодический режим. Механизм реинжекции в данном случае очень простой, он связан с периодичностью пространства состояний по фазовой координате. Причина отсутствия хаоса состоит в том, что при выбранном значении параметра $k = 0,5$ динамика на стадиях переключения не обладает высокой чувствительностью по отношению к возмущениям начальных условий.

17.2. Перемежаемость типа I: теория

Перемежаемость возникает в момент касательной бифуркации, соответствующее значение параметра будем называть критической точкой. При приближении к критической точке протяженность ламинарных стадий стремится к бесконечности, так что они состав-

влияют основную, подавляющую часть времени наблюдения. Если рассмотреть очень узкий интервал по параметру, на краю которого находится критическая точка, то в его пределах протяженность ламинарных стадий будет меняться весьма значительно. В то же время, в силу малости вариации параметра, изменением характера динамики на турбулентных стадиях можно пренебречь. Следовательно, сам по себе переход не сопровождается изменением структуры турбулентных всплесков. Поэтому теоретический анализ собственно перехода должен быть сконцентрирован на изучении ламинарных стадий (Pomeau, Manneville, 1980; В.Ну, J. Rudnik, 1982, 1986).

Рассмотрим модельное отображение следующего вида:

$$x' = x + \varepsilon + x^2, \quad (17.3)$$

где ε — управляющий параметр. При $\varepsilon < 0$ оно имеет пару неподвижных точек, устойчивую и неустойчивую. При критическом значении $\varepsilon = 0$ эти точки сливаются, затем исчезают, и на их месте при $\varepsilon > 0$ образуется «коридор».

Если ε положительно и очень мало, то прохождение через коридор занимает очень большое число шагов итераций отображения (17.3). При этом изменение переменной x за один шаг незначительно, что позволяет перейти от разностного уравнения к дифференциальному. Положим

$$\frac{x' - x}{\Delta t} \cong \frac{dx}{dt}, \quad (17.4)$$

где $\Delta t = 1$. Тогда уравнение (17.3) перепишется в виде

$$\dot{x} = \varepsilon + x^2. \quad (17.5)$$

Рассмотрим сначала ситуацию точно в критической точке, $\varepsilon = 0$. Уравнение $\dot{x} = x^2$ без труда интегрируется: $dx/x^2 = dt$, $-1/x = t + C$. Выбирая константу C так, чтобы подчинить решение начальному условию $x|_{t=0} = x_0$, получаем

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t} = F_t(x_0). \quad (17.6)$$

Отметим, что при любом положительном начальном значении x_0 решение уходит на бесконечность за конечное время: модель (17.5), как и (17.3), пригодна для описания определенной стадии процесса, но не динамики в целом.

Функция $F_t(x)$ определяет оператор эволюции за время t . Совокупность таких операторов, отвечающих разным значениям параметра t , образует непрерывную группу (группу Ли). Основное

групповое свойство состоит в том, что применение оператора эволюции за время τ_1 и затем оператора эволюции за время τ_2 приводит к такому же результату, как применение оператора эволюции за время $\tau_1 + \tau_2$:

$$F_{\tau_2}(F_{\tau_1}(x)) = F_{\tau_1+\tau_2}(x). \quad (17.7)$$

Действительно,

$$F_{\tau_2}\left(\frac{x}{1-\tau_1 x}\right) = \frac{x/(1-\tau_1 x)}{1-\tau_2 x/(1-\tau_1 x)} = \frac{x}{1-(\tau_1+\tau_2)x} = F_{\tau_1+\tau_2}(x). \quad (17.8)$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$. В этом случае имеем $\int dx/(\varepsilon + x^2) = \int dt$, откуда $\varepsilon^{-1/2} \operatorname{arctg}(\varepsilon^{-1/2}x) = t + C$. Подчиняя решение начальному условию $x|_{t=0} = x_0$, находим

$$x(t) = \frac{x_0 + \varepsilon^{1/2} \operatorname{tg}(\varepsilon^{1/2}t)}{1 - x_0 \varepsilon^{-1/2} \operatorname{tg}(\varepsilon^{1/2}t)} = F_t(x_0; \varepsilon). \quad (17.9)$$

Как можно проверить, оператор эволюции (17.9) также удовлетворяет групповому свойству (17.7).

Поскольку нас больше всего интересует асимптотически малая окрестность критической точки, разложим выражение (17.9) в ряд Тейлора по параметру ε , удерживая член первого порядка. Результат выглядит следующим образом:

$$F_\tau(x, \varepsilon) = \frac{x}{1-x\tau} + \varepsilon\tau \frac{1-x\tau+x^2\tau^2/3}{(1-x\tau)^2} + O(\varepsilon^2). \quad (17.10)$$

В этом приближении эволюция начального состояния x за время τ описывается отображением

$$x' = \frac{x}{1-x\tau} + \varepsilon\tau \frac{1-x\tau+x^2\tau^2/3}{(1-x\tau)^2}. \quad (17.11)$$

Если мы произведем в обеих частях последнего уравнения замену $x = X/\tau$, то оно сводится к виду

$$X' = \frac{X}{1-X\tau} + \varepsilon\tau^2 \frac{1-X+X^2/3}{(1-X)^2}, \quad (17.12)$$

содержащему в качестве единственного параметра комбинацию $\varepsilon\tau^2$. При изменении времени τ в произвольное число раз γ и одновременно изменении параметра ε в $1/\gamma^2$ раз форма оператора эволюции остается неизменной. Отсюда следует, что характерная продолжительность ламинарных стадий у порога возникновения

перемежаемости должна вести себя как $\varepsilon^{-1/2}$. В этом состоит присущее перемежаемости свойство скейлинга. Оно допускает прямую проверку в экспериментах с различными системами и часто служит основанием для интерпретации наблюдаемого в эксперименте или расчетах режима как перемежаемости типа I (рис. 17.11).

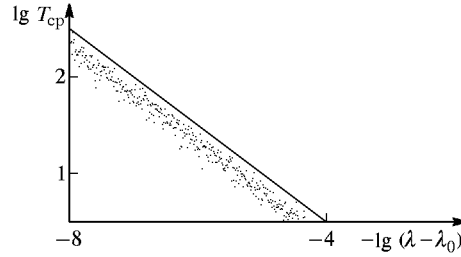


Рис. 17.11. Полученная в компьютерном эксперименте статистика средней длительности ламинарных фаз для перемежаемости в логистическом отображении вблизи края окна периода 3 $\lambda_0 = 1,75$. На графике, построенном в двойном логарифмическом масштабе, прямая с наклоном $(-1/2)$ отвечает зависимости вида $T_{\text{ср}} \propto (\lambda_0 - \lambda)^{-1/2}$, которую предсказывает теория

Обсудим, как ведет себя ляпуновский показатель вблизи точки перехода к хаосу через перемежаемость.

Пусть мы имеем малое начальное возмущение $\tilde{x}(0)$. Рассмотрим интервал времени T , содержащий большое число N турбулентных всплесков и запишем выражение для ляпуновского показателя:

$$\Lambda \cong \frac{1}{T} \ln \left| \frac{\tilde{x}(T)}{\tilde{x}(0)} \right| = \frac{\ln |\tilde{x}(T)| - \ln |\tilde{x}(0)|}{NT_{\text{ср}}}, \quad (17.13)$$

где $T_{\text{ср}}$ — средняя продолжительность ламинарных стадий, которая при $\varepsilon \rightarrow 0$ ведет себя как $\varepsilon^{-1/2}$. Член $\ln |\tilde{x}(T)|$ достаточно оценить в нулевом порядке по ε . Его можно представить как сумму вкладов от ламинарных и турбулентных стадий. Вклад от турбулентных всплесков будет порядка $\sum_{i=1}^N \ln A_i \cong N \overline{\ln A}$, где A_i — фак-

тор усиления возмущения за время i -го турбулентного всплеска, а чертой обозначено усреднение по всем N всплескам. Эту величину можно считать не зависящей от ε в силу допущения о том, что структура турбулентных всплесков не меняется в рассматриваемом узком интервале изменения параметра. Для ламинарной стадии выпишем уравнение эволюции переменной x вместе с уравнением в вариациях:

$$\dot{x} = \varepsilon + x^2, \quad \dot{\tilde{x}} = 2x\tilde{x}, \quad (17.14)$$

поделим их друг на друга и проинтегрируем. Тогда получаем $\ln |\tilde{x}/\tilde{x}_0| = \ln |(x^2 + \varepsilon)/(x_0^2 + \varepsilon)| \cong 2 \ln |x/x_0|$, так что сумма по всем ламинарным стадиям даст $2N \ln |x/x_0|$. Подставляя полученные оценки в (17.13) видим, что $\Lambda \cong (\ln A + 2 \ln |x/x_0|)/T_{\text{хар}} = \text{const}/T_{\text{хар}} = \text{const} \cdot \varepsilon^{1/2}$, т. е критический показатель для ляпуновского показателя $1/2$. На рис. 17.12 показан график зависимости ляпуновского показателя от величины отстройки по па-

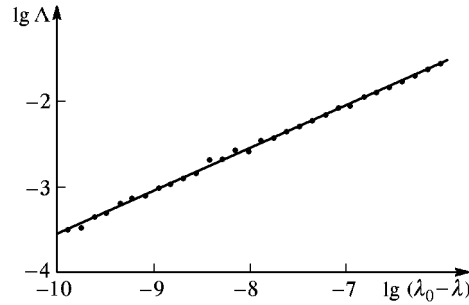


Рис. 17.12. Полученная в компьютерном эксперименте зависимость показателя Ляпунова от величины отклонения параметра от критической точки для перемежаемости в логистическом отображении вблизи края окна периода 3 $\lambda_0 = 1,75$. На графике, построенном в двойном логарифмическом масштабе, прямая с наклоном $1/2$ отвечает теоретической зависимости вида $\Lambda \propto (\lambda_0 - \lambda)^{1/2}$

раметру от критической точки для логистического отображения вблизи края окна периода 3. В двойном логарифмическом масштабе видно, что точки хорошо ложатся на прямую линию с наклоном $1/2$, как и предсказывает теория.

17.3. Ренормгрупповой подход к анализу перемежаемости

Теоретическому анализу перемежаемости можно придать форму, аналогичную теории Фейгенбаума (В.Ну, J.Rudnik, 1982; Hirsch et al., 1982). Выводы, которые при этом получаются, не идут дальше предыдущего раздела. Тем не менее, представляет принципиальный интерес, что оба очень различных по своим проявлениям сценария перехода к хаосу, через удвоения периода и через перемежаемость, находят описание в рамках одного и того же формализма. Это ведет к интересным сопоставлениям и ассоциациям, и, в итоге, к более глубокому пониманию сущности перехода к хаосу.

Запишем исходное отображение $x' = x + x^2 + \varepsilon$ в виде $x' = f(x)$ и, следуя логике рассуждений лекции 15, построим оператор эволюции за два шага итераций: $x'' = f(f(x))$. Далее, произведем перенормировку динамической переменной, подставив в обе ча-

сти последнего соотношения $x = X/\alpha$. Следует подчеркнуть, что использованное ранее правило нормировки функций на единицу в начале координат теперь не годится, поскольку в критической точке $f(0) = 0$. Вместо этого можно потребовать, чтобы вторая производная перенормированной функции равнялась ее значению для исходной $f(x)$. Это обеспечивается выбором константы $\alpha = 2$. Полученную в результате функцию обозначим $f_1(X) = \alpha f(f(X/\alpha))$. Она задает перенормированный оператор эволюции за два временных шага. Повторяя эту процедуру многократно с тем же самым α , получаем рекуррентное функциональное уравнение РГ

$$f_{k+1}(X) = \alpha f_k \left(\frac{X}{\alpha} \right). \quad (17.15)$$

На рис. 17.13 показано, как ведут себя графики для первых членов порождаемой уравнением (17.15) последовательности функций при значении ε в исходном отображении меньшем, равном и большем

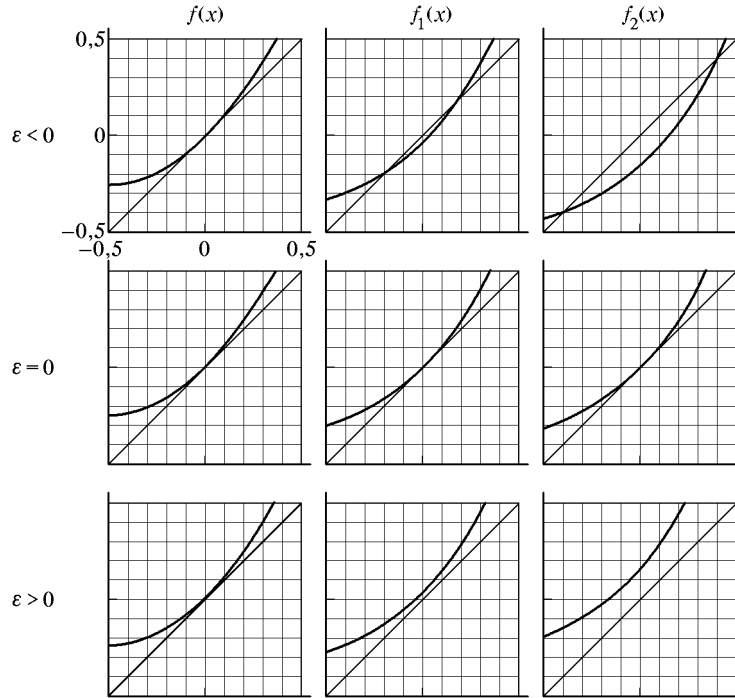


Рис. 17.13. Действие РГ преобразования (17.15) на функцию $f(x)$ при значениях параметра ε меньшем, равном и большем критического

нуля. При $\varepsilon < 0$ с ростом k график опускается шаг за шагом вниз, а при $\varepsilon > 0$ — поднимается вверх, так что зазор между графиком функции и биссектрисой увеличивается. В критической точке $\varepsilon = 0$ вид графика с ростом номера k стабилизируется. Иными словами, последовательность функций $f_k(x)$ сходится к определенному пределу — функции $g(x)$, которая должна удовлетворять уравнению

$$g(X) = \alpha g\left(g\left(\frac{X}{\alpha}\right)\right). \quad (17.16)$$

Оно в точности совпадает по виду с уравнением Фейгенбаума–Цвитановича. Однако дополнительные условия, которым подчинено решение уравнения (17.16), совсем другие. Именно, функция должна обращаться в нуль в начале координат, иметь там производную, равную 1, и разложение в ряд Тейлора должно содержать квадратичный член.

В отличие от удвоений периода, функция, представляющая собой неподвижную точку уравнения РГ, может быть записана в аналитическом виде. Фактически мы уже нашли ее в предыдущем разделе: $g(X) = X/(1 - X)$. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что при $\alpha = 2$ она удовлетворяет уравнению (17.16).

Неподвижная точка уравнения РГ является седлом и имеет единственное существенное неустойчивое направление. Собственное число и собственный вектор удовлетворяют уравнению, которое совпадает по форме с (15.14):

$$\nu h(x) = \alpha \left[g'\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) h\left(\frac{x}{\alpha}\right) + h\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) \right], \quad (17.17)$$

но здесь $g(X) = X/(1 - X)$ и $\alpha = 2$. Как можно проверить, решением служит функция, фигурирующая в (17.12) в качестве второго члена:

$$h_0(X) = \frac{1 - X + X^2/3}{(1 - X)^2}, \quad (17.18)$$

а соответствующее собственное число есть $\nu_0 = \delta = 4$. Асимптотическое выражение для перенормированного оператора эволюции за 2^k шагов представляется, следовательно, в виде

$$f_k(x) = g(x) + C\delta^k h_0(x), \quad (17.19)$$

где константа C пропорциональна ε . При уменьшении расстояния от критической точки в $\delta = 4$ раза оператор эволюции за удвоенное число шагов итераций совпадает с исходным. В этом выражается свойство скейлинга. (Из рассмотренной здесь версии РГ анализа оно получается в менее общем виде, чем сформулировано в конце предыдущего раздела: там речь шла о пересчете масштаба времени на произвольный фактор γ , а не только об удвоении.)

Лекция 18

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И ПЕРЕХОД К ХАОСУ В ОТОБРАЖЕНИИ ОКРУЖНОСТИ

При общем обсуждении проблемы перехода к хаосу мы говорили, что в многомерных нелинейных системах хаосу часто предшествует несколько бифуркаций рождения колебательных составляющих, отношение частот которых, вообще говоря, зависит от параметров задачи. Когда оно иррационально, реализуются квазипериодические режимы. В фазовом пространстве им соответствуют аттракторы в виде торов, размерность которых определяется количеством основных частотных компонент. При отношениях частот близких к рациональным из-за присущей системе нелинейности эти компоненты взаимодействуют, обнаруживая тенденцию к взаимной синхронизации («захвату частот», *mode locking*) с возникновением периодических режимов. Квазипериодические и периодические режимы в свою очередь могут претерпевать различные бифуркации.

Говоря о переходе к хаосу через квазипериодичность, нужно иметь в виду всю эту сложную картину. В данном курсе мы ограничимся обсуждением лишь тех ее аспектов, которые могут быть выявлены при анализе простой модельной системы — одномерного отображения окружности.

18.1. Отображение окружности

Если в задаче о потере устойчивости предельного цикла рассматривать выход из треугольника устойчивости через верхнюю границу, то это соответствует переходу двух комплексно сопряженных мультипликаторов через единичную окружность и рождению новой частотной составляющей движения. Предположим, что нелинейность в системе такова, что она способствует ограничению возникающей новой компоненты, т. е. это мягкая (прямая, суперкритическая) бифуркация рождения тора. Пока мы находимся у порога бифуркации, свести задачу к одномерному отображению в принципе нельзя — модель должна быть как минимум двумерной. Обратимся, однако, к ситуации вдали от точки бифуркации, когда тор-аттрактор уже образовался. Рассмотрим его сечение площадкой S , расположенной, как показано на рис. 18.1. В сечении

имеем замкнутую кривую, точкам которой можно приписать угловую координату θ . Если выпустить траекторию из точки $\theta = \theta_n$, то, оставаясь на торе, она обойдет вокруг него и вновь пересечет поверхность S в какой-то другой точке $\theta = \theta_{n+1}$. Соотношение, связывающее θ_{n+1} и θ_n , в общем случае будет иметь вид

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta + f(\theta_n), \quad (18.1)$$

где $f(\theta)$ — некоторая периодическая функция, а параметр Δ определяется отношением периодов обхода тора по параллели и меридиану, т. е. отношением частоты, существовавшей до рождения тора и частоты, появившейся в результате бифуркации. Функцию $f(\theta)$ можно представить в виде ряда Фурье. Предположим, что допустимо ограничиться первой гармоникой. Обозначим ее амплитуду через k и выберем начало отсчета θ так, чтобы $f(0) = 0$. Тогда из (18.1) получаем

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta + k \sin \theta_n \pmod{2\pi}. \quad (18.2)$$

Переменную θ можно трактовать как координату точки на окружности, поэтому об отображении (18.2) говорят как об *отображении окружности* (*circle map*).

К этому же отображению можно прийти, отправляясь от рассмотренной в лекции 5 физической задачи о воздействии последовательности импульсов на автоколебательную систему. Предположим, что период следования импульсов достаточно велик, так что возмущение предельного цикла, вызванное каждым импульсом, успевает полностью затухнуть к моменту появления следующего. Тогда вместо двумерного отображения Заславского получается одномерное отображение окружности. Формально это достигается подстановкой $d = 0$ в (5.11). Фигурирующие в отображении параметры k и Δ имеют ясный физический смысл. Первый характеризует амплитуду импульсных толчков, а второй — расстройку между частотой их следования и частотой автоколебаний.

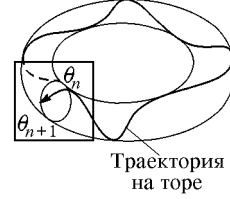


Рис. 18.1. К пояснению описания динамики на торе с помощью отображения окружности

18.2. Динамика отображения окружности

Обсудим, как зависит динамика отображения окружности от параметров k и Δ .

Прежде всего, заметим, что фигурирующая в правой части выражения (18.2) функция $f(\theta) = \theta + \Delta + k \sin \theta$ имеет существенно разные свойства при $k < 1$, $k = 1$ и $k > 1$ (рис. 18.2). При $k < 1$ она монотонная, отображение является взаимно-однозначным,

причем обратная функция гладкая. При $k = 1$ отображение по-прежнему монотонное и взаимно-однозначное, но имеет кубические точки перегиба. Обратная функция более не является гладкой: первая и вторая производные стремятся к бесконечности при приближении к сингулярным точкам, отвечающим точкам перегиба функции $F(\theta)$. Наконец, при $k > 1$ функция $f(\theta)$ становится

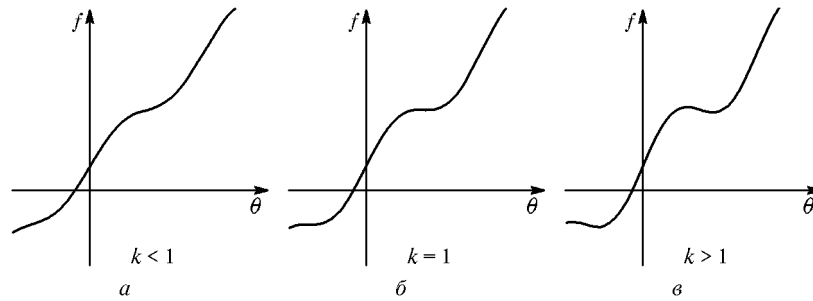


Рис. 18.2. График функции $f(\theta) = \theta + \Delta + k \sin \theta$ в докритической области (а), при критическом значении параметра k (б) и в закритической области (в)

немонотонной, она имеет максимумы и минимумы (по одному на каждый период) и уже не является взаимно-однозначной.

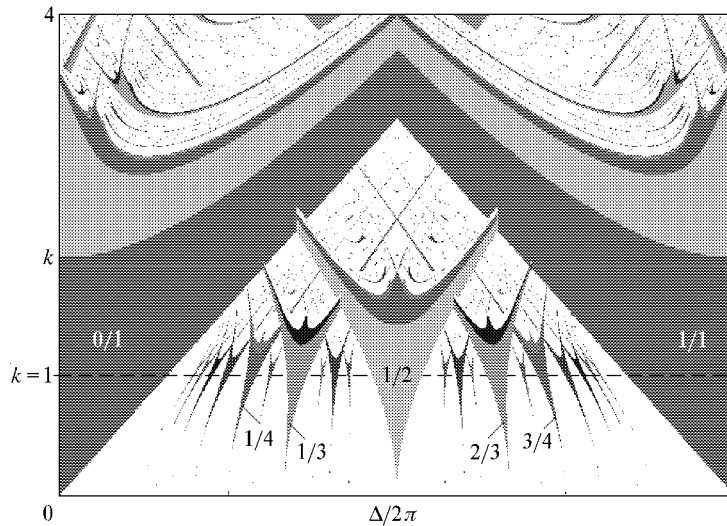


Рис. 18.3. Карта динамических режимов на плоскости параметров отображения окружности $\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta + k \sin \theta \pmod{2\pi}$. Области, изображенные различными тонами серого цвета, отвечают периодическим режимам (языки Арнольда), для нескольких языков цифрами указано число вращения. Области квазипериодичности и хаоса показаны белым; $k = 1$ — критическая линия

Полезной характеристикой, позволяющей различать типы динамических режимов, служит число вращения, определяемое как

$$w(\Delta, k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n - \theta_0}{2\pi n}. \quad (18.3)$$

Режим считается периодическим, если начальное значение θ через некоторое число шагов q воспроизводится с точностью до добавки целого числа полных периодов, т. е. $\theta_{n+q} - \theta_n = 2\pi p$. Такому режиму отвечает рациональное число вращения $w = p/q$. Квазипериодические режимы имеют иррациональное число вращения и нулевой ляпуновский показатель. Хаос диагностируется по наличию положительного ляпуновского показателя.

На рис. 18.3 приведена карта динамических режимов отображения окружности на плоскости параметров (Δ, k) , а на рис. 18.4 —

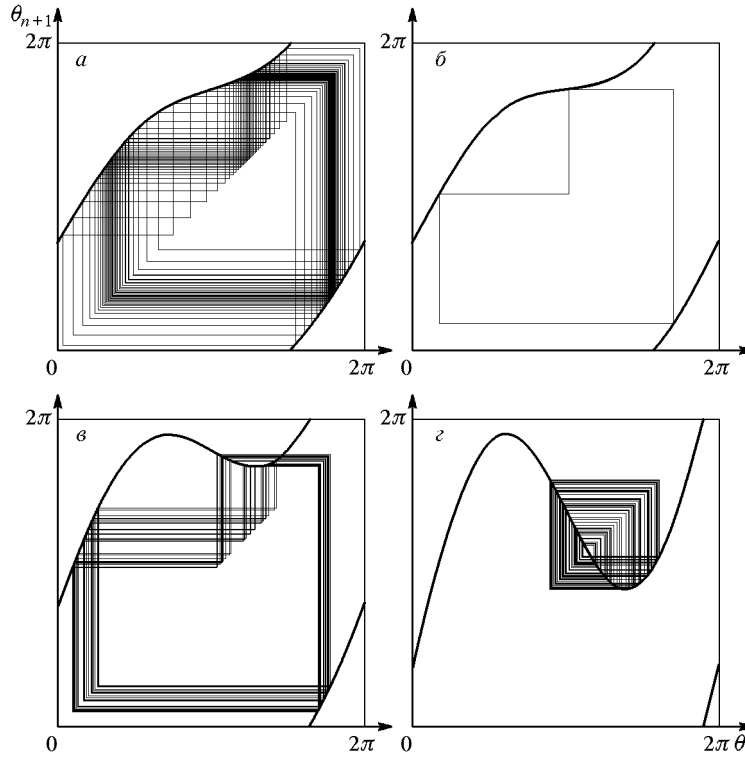


Рис. 18.4. Итерационные диаграммы, иллюстрирующие различные режимы динамики отображения окружности: а) квазипериодический, $k = 0,7$, $\Delta/2\pi = 0,35$; б) периодический, $k = 0,9$, $\Delta/2\pi = 0,35$; в) хаотический $k = 1,56$, $\Delta/2\pi = 0,4$; з) хаотический $k = 3$, $\Delta/2\pi = 0,2$

итерационные диаграммы, иллюстрирующие различные режимы. В области $k < 1$ возможны периодические и квазипериодические режимы, в области $k > 1$ — периодические и хаотические режимы. Линия $k = 1$, разграничивающая области существенно разного динамического поведения, называется *критической линией*.

При $k = 0$ число вращения $w = \Delta/2\pi$, так что при рациональных значениях $\Delta/2\pi$ имеют место периодические, а при иррациональных — квазипериодические режимы. На плоскости параметров области периодичности имеют вид характерных языков (языки Арнольда), которые остриями подходят к рациональным точкам оси абсцисс.

Несмотря на то, что количество языков бесконечно, между ними остается место для квазипериодических режимов. Это очевидно при $k = 0$, но оказывается справедливым и при конечных k , пока $k < 1$.

При фиксированном $0 < k < 1$ для каждого рационального числа p/q существует свой интервал значений параметра расстройки, в пределах которого число вращения фиксировано и равно p/q . Этот интервал определяется шириной соответствующего языка Арнольда при данном k . Зависимость числа вращения от параметра расстройки оказывается монотонной непрерывной функцией, содержащей бесконечное число горизонтальных ступенек (рис. 18.5).

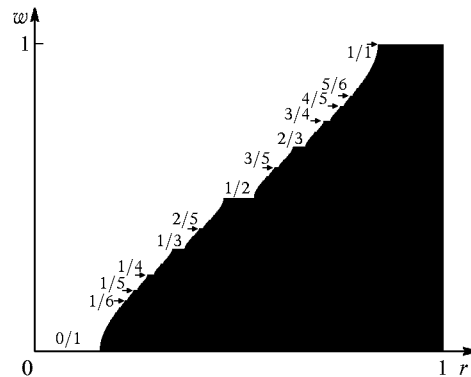


Рис. 18.5. «Чертова лестница» — зависимость числа вращения от параметра $r = \Delta/2\pi$ в критическом отображении окружности, $k = 1$

Ее называют «чертовой лестницей» (devil's staircase). При $k \rightarrow 0$ суммарная длина всех ступенек чертовой лестницы стремится к нулю. При увеличении k она монотонно возрастает и при $k = 1$ становится равной единице. Множество значений параметра $\Delta/2\pi$, не принадлежащих ступенькам, соответствует иррациональным числам вращения и квазипериодическим режимам динамики. Мера этого множества равна единице при $k = 0$ и убывает до

нуля при $k = 1$. В этом последнем случае чертову лестницу называют полной. Достаточно убедительные и аккуратные численные расчеты показывают, что при $k = 1$ квазипериодическим режимам отвечает фрактальное множество значений расстройки, которое имеет меру нуль и размерность Хаусдорфа, приблизительно равную 0,870 (Jensen et al., 1983, 1984).

На рис. 18.6 зависимость числа вращения от k и $\Delta/2\pi$ показана в виде трехмерного графика. Проекция этого графика на

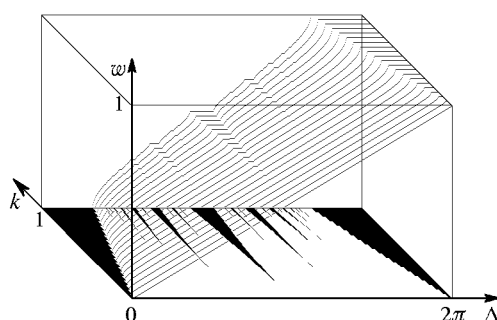


Рис. 18.6. Зависимость числа вращения от k и $\Delta/2\pi$ в виде трехмерного графика

плоскость (Δ, k) дает расположение языков синхронизации, а сечение плоскостью $k = 1$ — полную чертову лестницу.

В закритической области $k > 1$ языки Арнольда частично перекрываются, что говорит о наличии мультистабильности: при одних и тех же значениях параметров может сосуществовать несколько аттракторов, отвечающих разным динамическим режимам. Каждый из них реализуется при задании начальных условий в бассейне притяжения соответствующего аттрактора. Внутри языков можно видеть сложную картину областей, где имеет место переход к хаосу через каскад удвоений периода на базе основного для данного языка периодического режима, присутствуют структуры типа перекрестков, точки сборок, линии складок.

Чем больше знаменатель рационального числа вращения $w = p/q$, тем ближе к критической линии $k = 1$ располагается в данном языке Арнольда область хаоса. В пределе $q \rightarrow \infty$, что соответствует иррациональным числам вращения, хаос можно обнаружить сколь угодно близко к критической линии.

Подмножество критической линии $k = 1$, отвечающее иррациональным числам вращения, уже упоминалось при обсуждении чертовой лестницы. Фрактальная структура этого множества подразумевает наличие в окрестности его точек определенных свойств масштабного подобия — скейлинга, которые должны быть выявлены

и изучены. Это достигается применением метода РГ. Прежде чем перейти к его рассмотрению, мы должны остановиться на представлении чисел вращения так называемыми цепными дробями.

18.3. Цепные дроби

Произвольное число w , принадлежащее интервалу $0 < w \leq 1$, может быть представлено единственным образом в виде разложения в цепную дробь:

$$w = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}} = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle, \quad (18.4)$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots$ — натуральные числа, называемые элементами цепной дроби. Рациональные числа представляются конечными цепными дробями: $w = p/q = \langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_N \rangle$, а иррациональные — бесконечными. Цепные дроби, у которых, начиная с некоторого номера, последовательность элементов периодическая, $a_{m+M} = a_m$, соответствуют специальному классу иррациональных чисел — квадратичным иррациональностям. Это числа вида $w = a + b\sqrt{c}$, где a, b, c — рациональные.

Если оборвать бесконечную цепную дробь $w = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ на m -м элементе, то получится рациональное число

$$w_m = \frac{p_m}{q_m} = \langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_m \rangle, \quad (18.5)$$

которое называется m -й подходящей дробью для иррационального числа w . Известно, что это наилучшая аппроксимация иррационального числа w рациональным со знаменателем, не превосходящим q_m . Для определения числителя и знаменателя подходящих дробей через элементы цепной дроби $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ существует удобная рекуррентная формула

$$\begin{aligned} p_{m+1} &= p_m a_m + p_{m-1}, & p_0 &= 0, & p_{-1} &= 1, \\ q_{m+1} &= q_m a_m + q_{m-1}, & q_0 &= 1, & q_{-1} &= 0. \end{aligned} \quad (18.6)$$

Самая простая бесконечная цепная дробь, которую только можно себе представить, получается, если все элементы равны 1. Соответствующее ей иррациональное число называют *золотым средним*

(*golden mean*). Согласно определению цепной дроби,

$$\omega = \langle 1, 1, 1, \dots \rangle = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = \frac{1}{1 + \omega}, \quad (18.7)$$

так что ω должно удовлетворять квадратному уравнению $\omega^2 + \omega - 1 = 0$. Отсюда находим

$$w = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,618034005 \dots \quad (18.8)$$

Подходящие дроби для этого числа получаются как отношения последовательных чисел Фибоначчи:

$$\omega_m = \frac{F_{m-1}}{F_m}, \quad (18.9)$$

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \dots \\ \dots, F_{m+1} = F_m + F_{m-1}. \quad (18.10)$$

18.4. Уравнение РГ: общий случай

Для дальнейшего нам удобно ввести вместо θ новую переменную $x = \theta/2\pi + 1/2$ и обозначить $\Delta = 2\pi r$, так что отображение окружности принимает вид

$$x_{n+1} = x_n + r - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x_n \pmod{1}, \quad (18.11)$$

и кубическая точка перегиба при $k = 1$ оказывается расположенной в начале координат.

Рассмотрим построение уравнения РГ для критической точки, отвечающей иррациональному числу вращения w и расположенной при $k = 1$ и некотором $r = r_c(w)$ (Rand et al., 1982; Ostlund et al., 1983). Число вращения представляется цепной дробью $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ и аппроксимируется рациональными числами p_m/q_m — подходящими дробями (см. (18.5), (18.6)). Идея состоит в том, чтобы рассмотреть последовательность операторов эволюции для интервалов времени, заданных последовательными знаменателями подходящих дробей q_m .

Введем обозначение:

$$f_m(x) = f^{q_m}(x) - p_m = \underbrace{f(f(f(\dots(x)\dots)))}_{(q_m \text{ раз})} - p_m, \quad (18.12)$$

где $f(x) = x + r - (k/2\pi) \sin 2\pi x$. Если известны $f_m(x)$ и $f_{m-1}(x)$, то в соответствии с формулой (18.6) можно записать

$$f_{m+1}(x) = f_{m-1}(f_m^{a_m}(x)), \quad (18.13)$$

где принято во внимание, что для любого целого p функция $f(x)$ обладает тем свойством, что $f(x+p) = f(x) + p$.

Далее, на каждом шаге построения введем свою нормировку динамической переменной на фактор A_m , так что оператор эволюции за q_m шагов будет представлен функцией

$$g_m(x) = A_m f_m \left(\frac{x}{A_m} \right). \quad (18.14)$$

Этот фактор удобно выбрать так, чтобы $g_m(0) = 1$, т. е. положить

$$A_m = \frac{1}{f_m(0)}. \quad (18.15)$$

С использованием обозначения $\alpha_m = A_m/A_{m-1}$ можно переписать уравнения, определяющие последовательность функций g_m , в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1} &= \frac{1}{\alpha_m g_{m-1}(\alpha_m^{-1} g_m^{a_m}(0))}, \\ g_{m+1}(x) &= \alpha_{m+1} \alpha_m g_{m-1} \left(\alpha_m^{-1} g_m^{a_m} \left(\frac{x}{\alpha_{m+1}} \right) \right). \end{aligned} \quad (18.16)$$

Преобразование, позволяющее получить новую функцию g_{m+1} из пары старых, обозначим для краткости символом R_m :

$$g_{m+1} = R_m[g_m, g_{m-1}]. \quad (18.17)$$

Это уравнение РГ, которому в теории Фейгенбаума было аналогично соотношение (15.4).

Альтернативная формулировка РГ преобразования получается, если при построении оператора эволюции f_{m+1} вместо (18.13) использовать выражение

$$f_{m+1}(x) = f_m^{a_m}(f_{m-1}(x)). \quad (18.18)$$

В этом случае вместо (18.16) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1} &= \frac{1}{g_m^{a_m}(\alpha_m)}, \\ g_{m+1}(x) &= \alpha_{m+1} g_m^{a_m} \left(\alpha_m g_{m-1} \left(\frac{x}{\alpha_m \alpha_{m+1}} \right) \right), \end{aligned} \quad (18.19)$$

которая, с точки зрения описания интересующего нас поведения на границе хаоса, приводит в итоге к тем же результатам, что и (18.16).

Отметим два существенных момента. Во-первых, новая функция g_{m+1} выражается через две предыдущие, а не через одну, как это было в теории Фейгенбаума. (Можно сказать, что (18.17) — это рекуррентное функциональное уравнение второго порядка, в отличие от уравнения теории Фейгенбаума (15.4), которое было рекуррентным уравнением первого порядка.) Во-вторых, оператор РГ преобразования R_n зависит от n . Структура этой зависимости закодирована последовательностью элементов a_m в разложении рассматриваемого числа вращения в цепную дробь. Таким образом, уравнение РГ неавтономно, что делает в общем случае невозможным существование не зависящего от m решения (неподвижной точки).

Если, однако, обратиться к более частному случаю чисел вращения, представляющихся квадратичными иррациональностями, то можно определить оператор РГ преобразования за число шагов M , равное периоду цепной дроби. Тогда рекуррентное уравнение, определяющее трансформацию пары функций (g_m, g_{m-1}) за M шагов, становится автономным и может иметь неподвижную точку. Далее мы ограничимся обсуждением только случая $M = 1$.

18.5. РГ анализ критической точки, отвечающей золотому среднему

Рассмотрим число вращения, заданное золотым средним. Соответствующую ему точку на линии $k = 1$ будем именовать *критической точкой* ГМ (от слов «golden mean»). Для отображения окружности (18.11) она имеет координаты на плоскости параметров

$$(k, r)_{\text{ГМ}} = (1, 0,6066610634702\dots)$$

(Shenker, 1982; Feigenbaum et al., 1982). Процедура вычисления значения r , при котором число вращения равно заданному иррациональному числу, упрощается тем обстоятельством, что на линии $k = 1$ число вращения еще является монотонной функцией параметра расстройки.

Для золотого среднего все элементы цепной дроби равны единице, поэтому уравнения (18.16) принимают вид

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1} &= \frac{1}{\alpha_m g_{m-1}(\alpha_m^{-1} g_m(0))}, \\ g_{m+1}(x) &= \alpha_{m+1} \alpha_m g_{m-1} \left(\alpha_m^{-1} g_m \left(\frac{x}{\alpha_{m+1}} \right) \right). \end{aligned} \quad (18.20)$$

При этом функция g_m имеет смысл перенормированного оператора эволюции за число шагов, равное числу Фибоначчи F_m .

Рассмотрим значения параметра r немного меньшее, равное и немного большее критического r_{GM} . Можно составить программу для компьютера, которая строила бы графики функций g_m при $m = 1, 2, 3, \dots$. На рис. 18.7 показано, как они выглядят. При $r = r_{\text{GM}}$ замечаем, что вид графика при итерациях не меняется, это

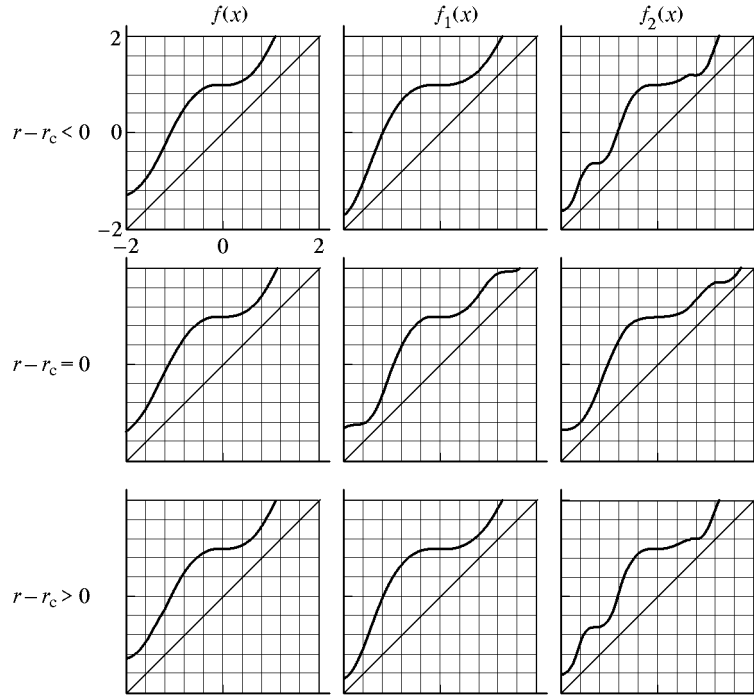


Рис. 18.7. Действие РГ преобразования на функцию $f(x)$ при $k = 1$ и значениях r меньшем, равном и большем критического $r_c (= r_{\text{GM}}) = 0,60666106 \dots$

говорит о сходимости последовательности пар функций (g_m, g_{m-1}) к неподвижной точке РГ преобразования. Факторы α_m также сходятся к определенному пределу α . При $r < r_{\text{GM}}$ и при $r > r_{\text{GM}}$ наблюдается уход от неподвижной точки.

Получающаяся в пределе при $m \rightarrow \infty$ функция $g(x)$ должна удовлетворять функциональному уравнению (Feigenbaum et al., 1982; Dixon et al., 1996)

$$g(x) = \alpha^2 g\left(\alpha^{-1} g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right), \quad (18.21)$$

которое называют *уравнением Фейгенбаума–Каданова–Шенкера*. Решение этого уравнения, подчиненное дополнительному условию

наличия кубической точки перегиба в начале координат, может быть получено без апелляции к исходной форме «затравочного» отображения (18.11), что означает универсальность рассматриваемого типа критического поведения. Полученное численно в виде полиномиальной аппроксимации решение имеет вид

$$g(\theta) = 1 + 0,765184x^3 - 0,215464x^6 - 0,053469x^9 + 0,032921x^{12} + \\ + 0,001231x^{15} - 0,004304x^{18} + 0,000668x^{21} + 0,000501x^{24} + \\ + 0,000177x^{27} - 0,000042x^{30} + 0,000031x^{33} - 0,000004x^{39} \dots, \quad (18.22)$$

Заметьте, что здесь представлены только степени, кратные трем. Попутно находится также масштабный фактор α , который оказывается равным

$$\alpha = -1,288574553954368866 \dots \quad (18.23)$$

График универсальной функции $g(x)$ показан на рис. 18.8. (Отметим, что за пределами этого интервала $-1 \leq x \leq 1$ для вычисления значений универсальной функции следует пользоваться функциональным уравнением (18.21) так, чтобы разложение (18.22) применялось только в пределах указанного интервала.)

Следующий шаг состоит в том, чтобы рассмотреть малое возмущение, соответствующее сдвигу из критической точки ГМ. При этом полезен такой же трюк, который был сделан при РГ анализе удвоений периода. Именно, подставив вместо переменного масштабного фактора в (18.20) константу $\alpha = -1,28857 \dots$, получаем рекуррентное функциональное уравнение

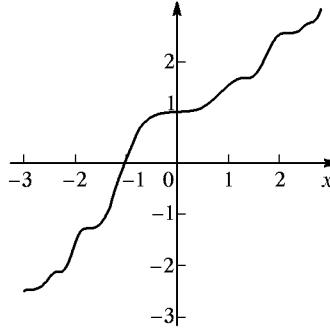


Рис. 18.8. График универсальной функции $g(x)$, являющейся неподвижной точкой уравнения РГ (18.20)

$$g_{m+1}(x) = \alpha^2 g_{m-1} \left(\alpha^{-1} g_m \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right), \quad (18.24)$$

которое имеет ту же неподвижную точку (18.22). Будем искать решение в виде $g_m(x) = g(x) + \varepsilon h_m(x)$, $\varepsilon \ll 1$. В первом порядке по ε получаем

$$h_{m+1}(x) = \alpha^2 g' \left(\alpha^{-1} g \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right) h_m \left(\frac{x}{\alpha} \right) + \alpha h_{m-1} \left(\alpha^{-1} g \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right). \quad (18.25)$$

Относительно $h_m(x)$ это разностное линейное функциональное уравнение, решение которого можно искать в виде $h_m(x) = \delta^m h(x)$, что приводит к следующей задаче на собственные функции и собственные значения:

$$\delta^2 h(x) = \delta \alpha^2 g' \left(\alpha^{-1} g \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right) h \left(\frac{x}{\alpha} \right) + \alpha h \left(\alpha^{-1} g \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right). \quad (18.26)$$

Численное решение показывает, что имеется два существенных собственных числа, превышающих по абсолютной величине единицу (Dixon et al., 1996)¹⁾:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -2,833610655891167799 \dots, \\ \delta_2 &= \alpha^2 = 1,660424381098700680 \dots \end{aligned} \quad (18.27)$$

Собственная функция, ассоциирующаяся с δ_1 , имеет разложение Тейлора вида $h_1(x) = 1 + \sum h_n x^{3n}$. Очевидно, она соответствует возмущению исходного отображения, оставляющему его на критической линии. Вторая собственная функция содержит в своем разложении все степени x . Она включается при наличии возмущения, уводящего отображение с критической линии.

Итак, если мы слегка сдвинемся по параметрам из критической точки ГМ, то операторы эволюции для интервалов времени, заданных последовательными числами Фибоначчи F_m , будут вести себя асимптотически в зависимости от m следующим образом:

$$g_m(x) = g(x) + C_1 \delta_1^m h_1(x) + C_2 \delta_2^m h_2(x), \quad (18.28)$$

где коэффициенты C_1 и C_2 зависят от параметров исходного отображения и обращаются в нуль в критической точке.

В более общем случае, когда добавки малы только в исходном отображении, а при итерациях РГ преобразования становятся значительными, решение можно представить в виде

$$g_m(x) = G(x, C_1 \delta_1^m, C_2 \delta_2^m), \quad (18.29)$$

где функция трех аргументов $G(x, C_1, C_2)$ отвечает двумерному неустойчивому многообразию неподвижной точки $g(x)$, причем $G(x, 0, 0) = g(x)$.

В следующей лекции мы рассмотрим и проиллюстрируем выводы, которые проведенный анализ позволяет сделать относительно свойств скейлинга в критической точке ГМ и в ее окрестности.

¹⁾ Кроме δ_1 и δ_2 , спектр собственных значений содержит несущественные числа, связанные с инфинитезимальными заменами переменной, а также с возмущениями, выводящими решение из подпространства коммутирующих функциональных пар. Чтобы пояснить последний момент, заметим, что все операторы эволюции f_m (см. (18.13)) коммутируют, т. е. результат их действия не зависит от порядка, поскольку они представляют собой многократные композиции одного и того же отображения. Например, $f_m(f_{m+1}(x)) = f_{m+1}(f_m(x))$. Это влечет за собой определенные ограничения на вид функций h_m .

Лекция 19

КРИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И СВОЙСТВА СКЕЙЛИНГА В СЛУЧАЕ ЧИСЛА ВРАЩЕНИЯ, ЗАДАННОГО ЗОЛОТЫМ СРЕДНИМ

В предыдущей лекции мы изложили результаты РГ анализа для критической точки, отвечающей иррациональному числу вращения, заданному золотым средним $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$. В этой лекции будут рассмотрены выводы относительно динамики в критической точке GM и в ее окрестности, которые можно сделать на основании РГ анализа.

Чтобы пояснить смысл критической точки GM, представим себе, что мы движемся на плоскости параметров (r, k) от $k = 0$ в сторону увеличения параметра k вдоль линии постоянного числа вращения $w = \omega$ (рис. 19.1). При $k = 1$ она оканчивается,

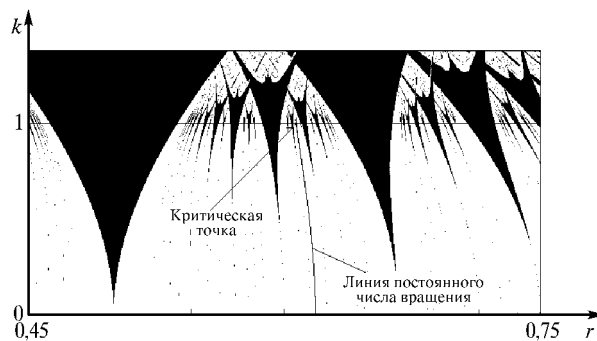


Рис. 19.1. Траектория на плоскости параметров (линия постоянного иррационального числа вращения $(\sqrt{5} - 1)/2$) и критическая точка, отвечающая моменту перехода к хаосу через разрушение квазипериодического движения

и здесь располагается критическая точка. Как мы увидим, в ней аттрактор перестает быть гладким тором и превращается во фрактальный объект.

19.1. Критический аттрактор GM

Предположим сначала, что параметры исходного отображения выбраны точно соответствующими критической точке GM. Тогда, согласно результатам РГ анализа, операторы эволюции в критической точке за интервалы времени, даваемые (асимптотически большими) числами Фибоначчи F_m , определяются универсальной функцией; при этом на каждом очередном шаге m пересчет масштаба динамической переменной производится на фактор $\alpha = -1,28857\dots$. Отсюда следует, что структура критического аттрактора в окрестности кубической точки перегиба должна воспроизводить себя при указанном пересчете масштаба.

Попытка проиллюстрировать это свойство скейлинга на обычной итерационной диаграмме оказывается не очень удачной: траектория плотно заполняет критический аттрактор из-за присущей квазипериодической динамике эргодичности, и детали структуры становятся неразличимы. Используем поэтому диаграмму, выполненную в технике кодирования тонами серого цвета подобно портретам аттракторов в конце лекции 8 (рис. 19.2). Более темные области на диаграмме соответствуют большему относительному

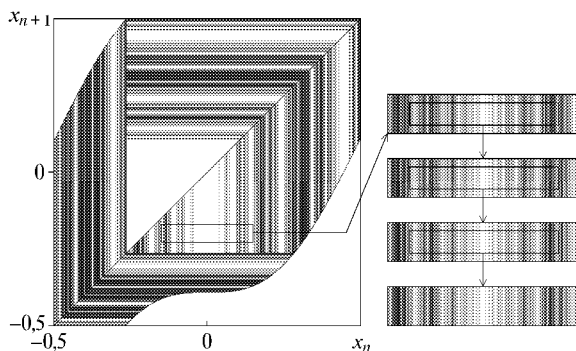


Рис. 19.2. Итерационная диаграмма, иллюстрирующая распределение инвариантной меры на аттракторе отображения окружности в критической точке GM. При выводе каждой точки на экран компьютера число, кодирующее яркость в данном пикселе, увеличивается на единицу. Вставка показывает фрагмент изображения в окрестности точки перегиба отображения окружности и результат последовательного увеличения с изменением масштаба от уровня к уровню в α раз

времени пребывания, а более светлые — редкому посещению. По существу картина отражает распределение инвариантной меры на критическом аттракторе.

Если выделить фрагмент картины вблизи точки перегиба, то можно убедиться, что структура полос в нем воспроизводит себя при изменении масштаба на фактор α (с изменением ориентации, поскольку фактор отрицателен).

Таким образом, фрактальные свойства критического аттрактора на пороге разрушения квазипериодичности проявляются в распределении на нем инвариантной меры. Эту меру можно исследовать с помощью следующего приема. Рассмотрим отображение окружности на себя, состоящее в повороте на фиксированный угол:

$$y_{n+1} = y_n + w \pmod{1}, \quad (19.1)$$

где $w = (\sqrt{5} - 1)/2$ и попытаемся найти такую функцию $\varphi(y)$, чтобы $x_n = \varphi(y_n)$ в точности давала последовательность итераций отображения окружности в критической точке GM. Функции $x = \varphi(y)$ и $y = \varphi^{-1}(x)$ будут определять замену, переводящую отображение поворота в критическое отображение окружности и обратно. Для y инвариантная мера отвечает, очевидно, равномерному распределению на единичном интервале $[0, 1)$. Соответственно, плотность распределения для x будет получаться как $\rho(x) = \int \delta(x - \varphi(y)) dy$.

График функции $\varphi(y)$ можно построить численно следующим образом: стартуем из $x = 0$, $y = 0$ и будем итерировать одновременно критическое отображение окружности (18.11) и отображение поворота (19.1), откладывая получаемые пары величин в координа-

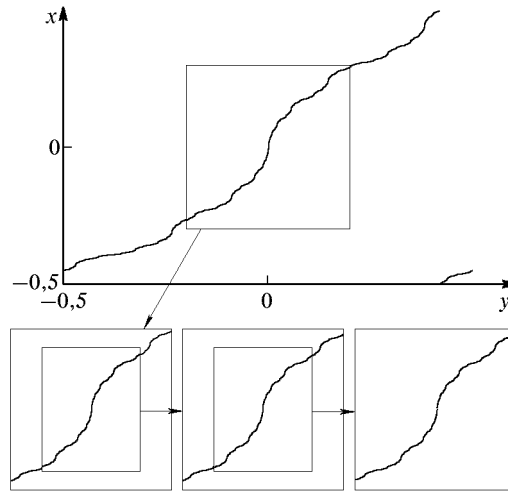


Рис. 19.3. Построенный численно график функции $x = \varphi(y)$, которая определяет замену, приводящую критическое отображение окружности к отображению поворота. Для иллюстрации свойства скейлинга, присущего этой фрактальной кривой, фрагмент графика воспроизводится на нескольких последовательных шагах пересчета масштаба по оси x на фактор $\alpha = -1,28857$ и по оси y на фактор $\beta = -(\sqrt{5} + 1)/2$

тах (y, x) . Полученный таким образом график показан на рис. 19.3 и он выглядит как фрактальная кривая. Чтобы убедиться в наличии масштабного подобия, выделим фрагмент кривой в окрестности точки $(0, 0)$. При пересчете масштаба по оси x на фактор α и по оси y на фактор $\beta = -(\sqrt{5} + 1)/2$ картина воспроизводит себя тем с большей точностью, чем глубже уровень разрешения.

Для анализа критического аттрактора можно привлечь мультифрактальный формализм (Halsey, 1986). Построим последовательность x_n , порождаемую критическим отображением окружности при старте из $x_0 = 0$ для $n = 1, 2, \dots, F_{m+1}$, где F_{m+1} —

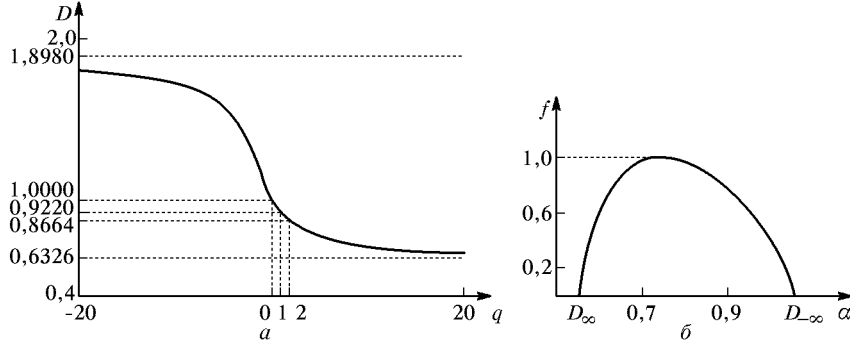


Рис. 19.4. Спектр обобщенных размерностей (а) и скейлинг спектр (б) для критического аттрактора отображения окружности в точке GM

некоторое достаточно большое число Фибоначчи. Пусть l_n обозначает длину интервала между точками x_n и $x_{n+F_{m-1}}$, вычисленную по модулю 1. Каждому интервалу l_n , $n = 1, \dots, F_{m-1}$, припишем одинаковую меру (вероятность) $p_n = p = 1/F_m$. Далее, определим суммы вида

$$\Gamma_{q\tau}^{(m)} = \sum_{i=1}^{F_m} \frac{p^q}{l_i^\tau} = F_m^{-q} \sum_{i=1}^{F_m} l_i^{-\tau} \quad (19.2)$$

и потребуем, чтобы при $k \rightarrow \infty$ они не убывали к нулю и не росли в бесконечность. Для этого полагаем

$$q(\tau) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log \Gamma_{q\tau}^{(m)}}{\log F_m}. \quad (19.3)$$

Имея функцию $q(\tau)$, строим график обобщенной размерности как зависимость между величинами $q = q(\tau)$ и $D(q) = \tau/(q - 1)$, а также скейлинг-спектр как зависимость между $\alpha = d\tau/dq$ и $f = \alpha q - \tau$ (рис. 19.4).

Заметим, что размерность Хаусдорфа $D(0)$ равна 1. (Так и должно быть, поскольку существует непрерывная замена, сводящая критическую динамику к отображению поворота (19.1).) Однако критический аттрактор все же фрактал, о чем говорит наличие нетривиальных дробных информационной и корреляционной размерностей: $D(1) = 0,9220$ и $D(2) = 0,8664$. При $q \rightarrow \pm\infty$ имеем $D(-\infty) = \log w^{-1} / \log |\alpha| = 1,8980$ (максимальная размерность) и $D(\infty) = \log w^{-1} / \log |\alpha|^3 = 0,6326$ (минимальная размерность). Скейлинг-спектр располагается в интервале изменения α от $D(\infty)$ до $D(-\infty)$ и имеет экстремум, равный величине хаусдорфовой размерности аттрактора $f_{\max} = D(0) = 1$.

Перейдем к обсуждению спектра Фурье критического аттрактора. Поскольку переменная x имеет смысл фазы, то все физически значимые величины должны зависеть от нее периодически.

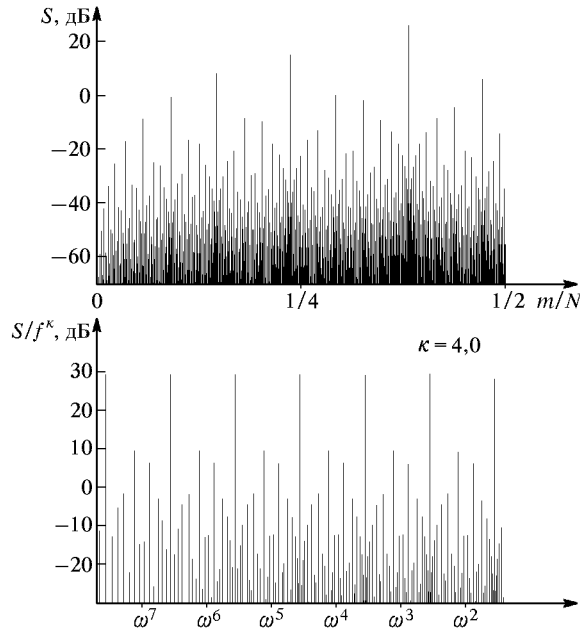


Рис. 19.5. Спектры Фурье для критической динамики отображения окружности (аппроксимация циклом периода $N = F_{17} = 1597$). На верхней диаграмме использован логарифмический масштаб по оси амплитуд и обычный пропорциональный по оси частот. На нижней диаграмме использован логарифмический масштаб по обеим осям, и при этом спектральные интенсивности отнесены к f^κ , где показатель $\kappa \approx 4,0$ подобран эмпирически

Следовательно, мы должны интересоваться спектральным составом не самой по себе последовательности x_n , а последовательностей вида $s_n = F(x_n)$, где F — некоторая функция периода 1.

Для практического построения спектра возьмем близкое к критическому, но не равное ему значение параметра r в отображении окружности, так, чтобы при $k = 1$ реализовался стартующий из $x = 0$ цикл с периодом равным достаточно большому числу Фибоначчи, скажем, $N = F_{17} = 1597$. Далее, вычисляем амплитуды компонент Фурье стандартным образом:

$$c_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F(x_n) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} mn\right). \quad (19.4)$$

При этом $f = m/N$ есть частота m -й компоненты, а квадрат модуля коэффициента — ее интенсивность $S(f) = S(m/N) = |c_m|^2$. Что касается функции F , то ее зададим просто в виде $F(x) = \sin 2\pi x$.

На рис. 19.5 (верхняя диаграмма) спектр показан в том виде, который обычно используется в экспериментальных исследованиях: по оси абсцисс отложена частота, а по оси ординат — амплитуда компонент в логарифмическом масштабе $S(\text{дБ}) = 10 \lg |c_m|^2$. Чтобы сделать видимыми присущие спектру свойства подобия, используют двойной логарифмический масштаб (рис. 19.5, нижняя диаграмма). Как можно заметить, относительная высота и взаимное расположение пиков воспроизводят друг друга с правильной периодичностью по оси логарифма частот.

19.2. Скейлинг на критической линии

Выведем отображение из критической точки изменением параметра расстройки r , оставив величину k неизменной и равной 1. При этом отображение сохраняет кубическую точку перегиба с нулевыми первой и второй производными в ней. В решении ли-неаризованного уравнения РГ

$$g_m(x) = g(x) + C_1 \delta_1^m h_1(x) + C_2 \delta_2^m h_2(x) \quad (19.5)$$

коэффициент C_1 будет пропорционален $r - r_c$, а коэффициент C_2 будет нулевым: наличие добавки $h_2(x)$ привело бы к «разрушению» точки перегиба и уходу с критической линии. Таким образом, асимптотическое выражение для перенормированного оператора эволюции за F_m шагов принимает вид

$$g_m(x) = g(x) + \text{const} \cdot (r - r_c) \delta_1^m h_1(x).$$

Если уменьшить отклонение от критической точки в $\delta_1 = -2,8336\dots$ раз, то форма оператора эволюции за F_{m+1} шагов будет такой же, какой она была для F_m шагов при старом значении параметра. Следовательно, характер динамики должен быть аналогичным, но с временным масштабом в $F_{m+1}/F_m = \omega^{-1} = 1,6180\dots$

раза больше. Соответственно, значение ляпуновского показателя будет в такое же число раз меньше.

На рис. 19.6 вверху показан график зависимости ляпуновского показателя отображения окружности от параметра расстройки вдоль линии $k = 1$. «Провалы» ниже нуля соответствуют обла-

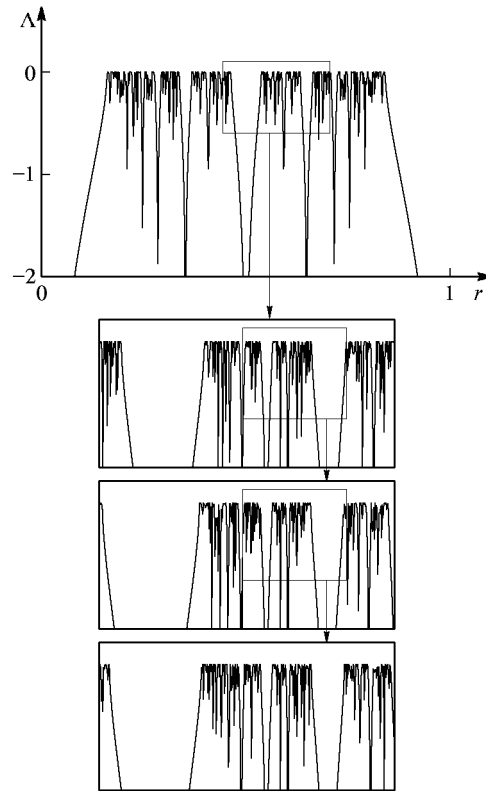


Рис. 19.6. Вверху — график зависимости ляпуновского показателя отображения окружности от параметра r при $k = 1$. Каждый следующий рисунок представляет собой увеличенный фрагмент предыдущего. Пересчет масштаба по оси параметра r производится на фактор $\delta_1 = -2,8336\dots$, а по оси ляпуновского показателя — в $\omega^{-1} = 1,6180\dots$ раза

стям периодичности, т. е. языкам Арнольда, а множество точек, где показатель нулевой, — множеству сохранившихся на критической линии квазипериодических режимов. В нижней части рисунка представлены диаграммы, показывающие детали структуры в окрестности точки $r = r_c$, так что каждая последующая представляет собой увеличенный фрагмент предыдущей. При этом масштаб по оси ляпуновского показателя пересчитывается в ω^{-1} раз,

а по оси параметра r — в δ_1 раз относительно критической точки $r = r_c$. Можно видеть, что графики хорошо воспроизводятся на разных уровнях разрешения. На более глубоких уровнях степень соответствия, как можно ожидать, будет еще выше.

Другим проявлением скейлинга служит масштабное подобие «чертовой лестницы» в окрестности той ее точки, где число вращения равно золотому среднему. Как известно, при переходе к аппроксимации золотого среднего очередной подходящей дробью погрешность уменьшается на фактор $v = (-w^{-2})$ (знак минус означает, что погрешность попеременно положительная или отрицательная). Это будет фактор скейлинга по вертикальной оси. По горизонтальной оси фактором скейлинга служит, как следует из

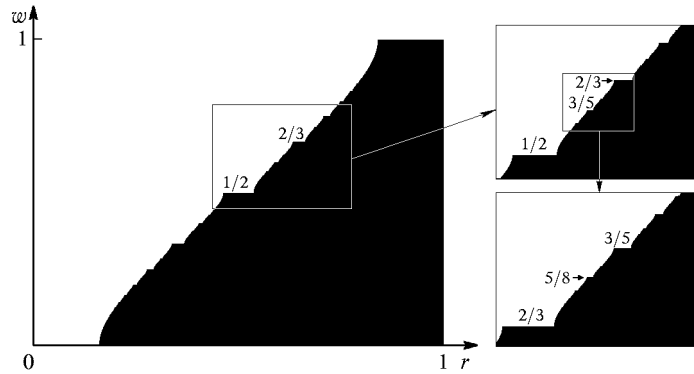


Рис. 19.7. Иллюстрация скейлинга «чертовой лестницы» в окрестности точки, где число вращения равно золотому среднему. Структура воспроизводит себя при пересчете масштаба на фактор $\delta_1 = -2,8336\dots$ по горизонтали и $v = (-w^{-2}) = -2,6180\dots$ по вертикали

проведенных рассуждений, константа δ_1 . Если выделить фрагмент «чертовой лестницы» вблизи соответствующей точки и представить его с увеличением на указанные факторы по осям координат, то конфигурация ступеней воспроизведет себя (рис. 19.7).

19.3. Скейлинг языков Арнольда на плоскости параметров

Как мы видели, из результатов РГ анализа, вблизи критической точки ГМ выражение для оператора эволюции, получаемое при многократных итерациях РГ преобразования, зависит от двух параметров — коэффициентов C_1 и C_2 . Если построить карту динамических режимов на плоскости этих параметров, то она, очевидно, будет обладать свойством *двумерного скейлинга*. Действительно, одновременный пересчет параметров по правилу $C'_1 = C_1/\delta_1$, $C'_2 = C_2/\delta_2$ и увеличение индекса m на единицу оставляет форму оператора эволюции неизменной. Поэтому в точке

(C_1, C_2) и в точке (C'_1, C'_2) будут существовать подобные режимы, отличающиеся масштабом времени, который во второй точке в $1/w$ раз больше. Если неизвестно выражение, связывающее коэффициенты C_1 и C_2 с параметрами исходного отображения, то задача построения системы координат, подходящей для иллюстрации скейлинга, должна быть решена численно с достаточной степенью точности.

В качестве начала координат естественно выбрать саму критическую точку GM. Координатная ось C_1 , как мы уже знаем, должна быть направлена вдоль критической линии $k = 1$, поскольку именно собственная функция h_1 отвечает возмущению, не разрушающему кубическую точку перегиба. Что касается второй

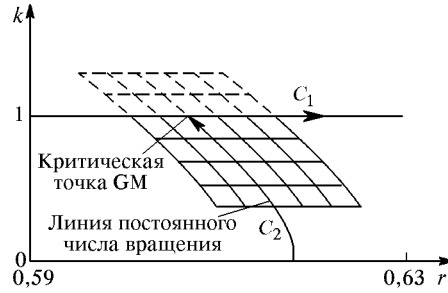


Рис. 19.8. К выбору «скейлинговых координат» вблизи критической точки GM для отображения окружности

координатной линии (C_2), то она, как можно сообразить, должна идти вдоль кривой на плоскости (r, k) , отвечающей постоянному числу вращения, золотому среднему (рис. 19.8). Эту кривую можно найти численно. Используем аппроксимацию полиномом:

$$\Delta k = c_2, \quad \Delta r = ac_2 + bc_2^2 + o(c_2^2), \quad (19.6)$$

где $\Delta = r - r_c$, $\Delta k = k - 1$. Тогда численный расчет дает

$$a = -0,01749, \quad b = -0,00148. \quad (19.7)$$

С учетом сделанных замечаний, связь между «скейлинговыми координатами» (c_1, c_2) и параметрами исходного отображения можно определить как

$$\Delta r = c_1 + ac_2 + bc_2^2, \quad \Delta k = c_1. \quad (19.8)$$

Что принципиально, замена переменных, приводящая к скейлинговым координатам, получилась нелинейной. При этом учет квадратичных членов разложения Тейлора существен, а последующих — нет! Это связано с конкретным, присущим критической точке GM, соотношением факторов δ_1 и δ_2 . Чтобы разъяснить данный момент, представим себе,

что мы рассматриваем серию картинок, показывающих окрестность критической точки на плоскости параметров во все меньших и меньших масштабах, так что $c_1 \propto \delta_1^{-m}$, $c_2 \propto \delta_2^{-m}$. Если мы пренебрегаем коэффициентом разложения в ряд Тейлора при c_2^p , то в коэффициент при первом собственном векторе будет внесена погрешность порядка δ_2^{-pm} . Полный же вклад первого собственного вектора с учетом его нарастания по закону δ_1^m будет порядка $\delta_1^m \delta_2^{-pm}$. Этот вклад не опасен и исчезает при

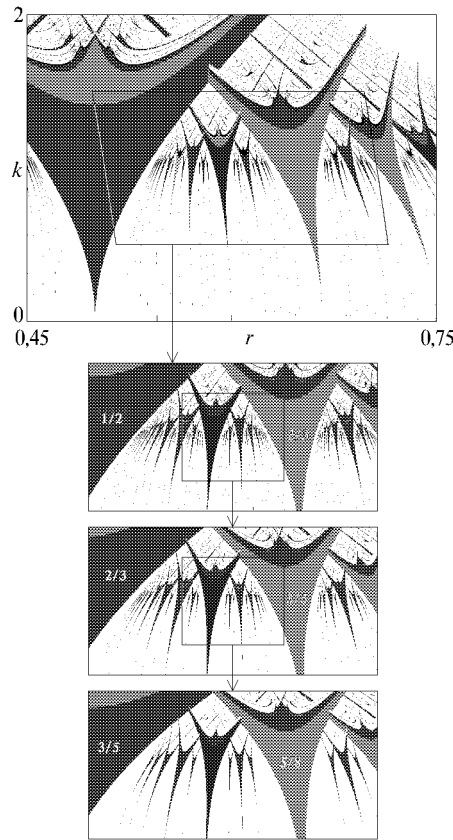


Рис. 19.9. Иллюстрация двумерного скейлинга картины языков Арнольда на карте динамических режимов отображения окружности вблизи критической точки ГМ. Криволинейный четырехугольник, в центре которого располагается критическая точка, образован координатными линиями $c_1 = \pm 0,1$ и $c_2 = \pm 0,5$. Попадая внутрь этого четырехугольника часть плоскости параметров показана отдельно в координатах (c_1, c_2) . Пересчет масштаба на вставках от уровня k уровню производится на факторы $\delta_1 = -2,8336 \dots$ и $\delta_2 = 1,6604 \dots$, соответственно, по горизонтали и вертикали. Цифрами в основных языках Арнольда указаны числа вращения

$m \rightarrow \infty$, если $|\delta_1| < |\delta_2^p|$. В нашем случае $\delta_1 = -2,83361$ и $\delta_2 = 1,66044$, так что $|\delta_2| < |\delta_1|$ и $|\delta_2^2| < |\delta_1|$, но $|\delta_2^p| > |\delta_1|$ при $p \geq 3$. Следовательно, в (19.8) достаточно учитывать линейный и квадратичный члены по c_2 .

На рис. 19.9 иллюстрируется двумерный скейлинг картины языков Арнольда вблизи критической точки ГМ. На верхней диаграмме по осям координат отложены параметры исходного отображения, r и k . Криволинейный четырехугольник, в центре которого располагается критическая точка, образован координатными линиями $c_1 = \pm 0,1$ и $c_2 = \pm 0,5$. Далее, попавшая внутрь этого четырехугольника часть плоскости параметров показана отдельно, теперь уже в координатах (c_1, c_2) , а затем воспроизведена с пересчетом масштаба на факторы δ_1 и δ_2 по соответствующим осям координат. Поскольку фактор δ_1 отрицателен, картина инвертируется по горизонтали при каждом масштабном пересчете. Обратите внимание, как при этом перенумеровываются языки Арнольда: если число вращения было F_{m-1}/F_m , то для аналогичного языка на следующей картинке оно оказывается равным F_m/F_{m+1} .

Как и универсальность Фейгенбаума, имевшая место при удвоениях периода, критическая точка ГМ, может встречаться не только в одномерных отображениях, но и в многомерных нелинейных диссипативных системах при переходе к хаосу через квазипериодичность. С общей точки зрения, этот тип критического поведения следует рассматривать как ситуацию *коразмерности два*. Это значит, что она будет возникать в некоторой точке, если пространство параметров двумерное, на линии, если оно трехмерное и т. д. Действительно, чтобы реализовать критическую ситуацию, нужно обеспечить подбором параметров равенство нулю *двух* коэффициентов в (19.5); соответствующая система уравнений $C_1(A, B, C, \dots) = 0$ и $C_2(A, B, C, \dots) = 0$ определит расположение критической точки, линии или поверхности в пространстве параметров исходной задачи $(A, B, C, \dots)$. В отличие от фейгенбаумской критической точки, имеющей коразмерность один, критическое поведение типа ГМ труднее обнаружить и наблюдать. Тем не менее, в литературе описаны вполне успешные эксперименты, в которых удалось реализовать критическое поведение типа ГМ, в частности, при конвекции Релея–Бенара, в электронных системах и др. Были оценены масштабные факторы α и δ , получены спектры Фурье и даже скейлинг-спектры в разумном соответствии с ожидаемыми на основе анализа одномерного отображения окружности (см. Stavans, 1985; обзор Леви, 1987).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Книги

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.—М.: Наука, 1981.
2. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах.—М.: Наука, 1990. 312 с.
3. Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Астахов В. В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем.—Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1999. 368 с.
4. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1978. 304 с.
5. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика.—М.: Мир, 1978. Т. 2. Приложение: Эргодическая проблема.
6. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности.—М.: Мир, 1991. 368 с.
7. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний.—М.: Наука, 1976. 384 с.
8. Вдовиченко Н. В. Развитие фундаментальных принципов статистической физики в первой половине XX века.—М.: Наука, 1986. 160 с.
9. Гальперин Г. А., Земляков А. Н. Математические бильярды. (Библиотечка «Квант». Вып. 77).—М.: Наука, 1990. 288 с.
10. Гарднер М. А ну-ка, догадайся!—М.: Мир, 1984. 213 с.
11. Гельфер Я. М. История и методология термодинамики и статистической физики.—М.: Высшая школа, 1969, в 2-х томах.
12. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности / Под ред. Х. Суинни и Дж. Голлаба.—М.: Мир, 1984. 344 с.
13. Динамические системы (Современные проблемы математики, фундаментальные направления). Т. 1, 2.—М.: ВИНТИ, 1985.
14. Дмитриев А. С., Кислов В. Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике.—М.: Наука, 1989. 280 с.
15. Заславский Г. М. Стохастическая необратимость в нелинейных системах.—М.: Наука, 1970.
16. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем.—М.: Наука, 1984. 271 с.
17. Компьютеры и нелинейные явления. Информатика и современное естествознание / Предисловие А. А. Самарского.—М.: Наука, 1988. 192 с.
18. Крылов Н. С. Работы по обоснованию статистической физики.—М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1950.
19. Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы.—М.: Наука, 1980.
20. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика.—М.: Наука, 1986. С. 30.
21. Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Введение в синергетику.—М.: Наука, 1990. 272 с.
22. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и хаотическая динамика.—М.: Мир, 1984.
23. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.—М.—Л.: ГИТТЛ, 1950.
24. Мандельштам Л. И. Лекции по колебаниям.—М.: Изд-во АН СССР, 1955.

-
25. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения.—М.: Мир, 1980. 368 с.
 26. Мун Ф. Хаотические колебания.—М.: Мир, 1990. 312 с.
 27. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний.—М.: Наука, 1972. 472 с.
 28. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания, 1987. 424 с.
 29. Нелинейные волны / Под ред. А.В.Гапонова-Грехова.—М.: Наука, 1979. 360 с.
 30. Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность / Под ред. М.И.Рабиновича.—М.: Наука, 1980. 220 с.
 31. Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие / Под ред. А.В.Гапонова-Грехова.—М.: Наука, 1981. 244 с.
 32. Нелинейные волны. Самоорганизация / Под ред. А.В.Гапонова-Грехова и М.И.Рабиновича.—М.: Наука, 1983. 264 с.
 33. Нелинейные волны. Структуры и бифуркации / Под ред. А.В.Гапонова-Грехова и М.И.Рабиновича.—М.: Наука, 1987.
 34. Нелинейные волны. Динамика и эволюция / Под ред. А.В.Гапонова-Грехова и М.И.Рабиновича.—М.: Наука, 1989. 400 с.
 35. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений.—М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. 551 с.
 36. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного: Введение.—М.: Мир, 1990. 342 с.
 37. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов.—М.: Мир, 1993. 176 с.
 38. Пригожин И. От существующего к возникающему.—М.: Наука, 1985. 328 с.
 39. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса.—М.: Мир, 1986. 430 с.
 40. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избранные труды. Т. 1, 2.—М.: Наука, 1971.
 41. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн.—М.: Наука, 1984. 432 с.
 42. Странные аттракторы / Под ред. Я.Г.Синая и Л.П.Шильникова.—М.: Мир, 1981.
 43. Трубецков Д.И. Колебания и волны для гуманитариев.—Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1997. 393 с.
 44. Федер Е. Фракталы.—М.: Мир, 1991. 254 с.
 45. Хакен Г. Синергетика.—М.: Мир, 1980.
 46. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах.—М.: Мир, 1985.
 47. Хинчин А.Я. Цепные дроби.—М.: Наука, 1978. 112 с.
 48. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.А., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения.—Киев: Наукова Думка, 1986. 280 с.
 49. Хустер Г. Детерминированный хаос.—М.: Мир, 1988.
 50. Beck C., Schlögl F. Thermodynamics of chaotic systems.—Cambridge University Press, 1993. 281 p.
 51. Devaney R.L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.—Addison-Wesley Publ. Co., Inc., 1989. 336 p.
 52. Dorfman J.R. An Introduction to Chaos in Nonequilibrium Statistical Mechanics.—Cambridge University Press, 1999. 288 p.

53. Eckmann J.-P., Collet P. Iterated Maps as Dynamical Systems.—Basel: Birkhäuser, 1980.
54. Gleick J. Chaos. Making a new science.—N. Y.: Penguin Books, 1987. 354 p.
55. Guckenheimer J., Holmes P. J. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields.—Berlin: Springer-Verlag, 1983.
56. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature.—San Francisco: Freeman, 1982.
57. Ott E. Chaos in Dynamical Systems.—Cambridge University Press, 1993. 385 p.
58. Reichl L. E. The Transition to Chaos In Conservative Classical Systems: Quantum Manifestations.—N. Y.: Springer-Verlag, 1992.
59. Schroeder M. Fractals, Chaos, Power Laws.—N. Y.: Freeman & Co, 1991. 430 p.
60. Thompson J. M. T., Stewart H. B. Nonlinear dynamics and chaos.—N. Y.: Wiley, 1986. 376 p.

Обзоры

1. Анищенко В. С. Аттракторы динамических систем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 1. С. 109–127.
2. Бронштейн Е. М. Новое о квадратном трехчлене // Соросовский образовательный журнал. 1999. № 9. С. 123–127.
3. Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // УМН. 1984. Т. 39, № 3. С. 3–37.
4. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Л. И. Мандельштам и современная теория колебаний и волн // УФН. 1979. Т. 128, № 3. С. 579–624.
5. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Хаотическая динамика простых систем // Природа. 1981. № 2. С. 54–65.
6. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Нелинейная физика. Стохастичность и структуры.—В сб.: Физика XX века: Развитие и перспективы.—М.: Наука, 1984. С. 219–280.
7. Дьюдни А. К. Аффинные преобразования и фрактальные структуры // В мире науки. 1990. № 7. С. 82–86.
8. Жиков В. В. Фракталы // Соросовский образовательный журнал. 1996. № 12. С. 115–121.
9. Заславский Г. М., Чириков Б. В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний // УФН. 1971. Т. 105, № 1. С. 3–40.
10. Каданов Л. П. Пути к хаосу.—В сб.: Физика за рубежом. Вып. 85.—М.: Мир, 1985. С. 9–32.
11. Кратчфилд Д. П., Фармер Д. Д., Паккард Н. Х., Шоу Р. С. Хаос // В мире науки. 1987. № 2. С. 16–28.
12. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П. Критическая динамика одномерных отображений. Ч. I. Сценарий Фейгенбаума // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 1, 2. С. 15–32.
13. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. Критическая динамика одномерных отображений. Ч. II. Двухпараметрический переход к хаосу // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 2. С. 17.
14. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. Коразмерность и типичность в контексте проблемы описания перехода к хаосу через удвоения периода в диссипативных динамических системах // Регулярная и хаотическая динамика. 1997. Т. 2, № 3, 4. С. 90–105.

15. Леви Б. Г. Новый глобальный фрактальный формализм описывает различные сценарии перехода к хаосу.—В сб.: Физика за рубежом. Вып. 87.—М.: Мир, 1987. С. 263–270.
16. Монин А. С. О природе турбулентности // УФН. 1978. Т. 125, № 1. С. 97–122.
17. Монин А. С. Гидродинамическая неустойчивость // УФН. 1986. Т. 150, № 1. С. 62–105.
18. Ораевский А. Н. Мазеры, лазеры и странные аттракторы // Квантовая электроника. 1981. Т. 8, № 1. С. 130–142.
19. Ораевский А. Н. Динамика одномодовых лазеров и динамический хаос // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 1, 2. С. 3–32.
20. Рабинович М. И. Стохастические колебания и турбулентность // УФН. 1978. Т. 125, № 1. С. 123–167.
21. Рабинович М. И., Сушик М. М. Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости // УФН. 1990. Т. 160, № 1. С. 3–64.
22. Синай Я. Г. О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 4. С. 768–771.
23. Трубецков Д. И. Турбулентность и детерминированный хаос // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 1. С. 77–83.
24. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН. 1983. Т. 141, № 2. С. 343–374.
25. Хаотические системы // Тематический выпуск журнала ТИИЭР. 1987. Т. 75, № 8. 175 с.
26. Экман Ж.-П. Переход к турбулентности в диссипативных динамических системах.—В кн.: Синергетика / Под ред. Б. Б. Кадомцева.—М.: Мир, 1984. С. 190–219.
27. Юргенс Х., Пайтген Х.-О., Заупе Д. Язык фракталов // В мире науки. 1990. № 10. С. 36–44.
28. Cvitanović P. Universality in Chaos (or Feigenbaum for cyclists) // Acta Physica Polonica. 1984. V. A65. P. 203–239.
29. Eckmann J.-P. Roads to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems // Rev. Mod. Phys. 1981. V. 53. P. 643–654.
30. Hasler M. // Int. J. of Bifurcations and Chaos. 1998. V. 8, № 4. P. 647.
31. Ott E. Strange Attractors and Chaotic Motion of Dynamical Systems // Rev. Mod. Phys. 1981. V. 53. P. 655–672.

Статьи

1. Анищенко В. С., Астахов В. В. Экспериментальное исследование механизма возникновения и структуры странного аттрактора в генераторе с инерционной нелинейностью // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28, № 6. С. 1109–1115.
2. Анищенко В. С., Астахов В. В., Летчфорд Т. Е., Сафонова М. А. О бифуркациях в трехмерной двухпараметрической автономной колебательной системе с инерционной нелинейностью // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26, № 7. С. 832–842.
3. Астахов В. В., Безручко Б. П., Селезнев Е. П. Исследование динамики нелинейного колебательного контура при гармоническом воздействии // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32, № 12. С. 2558.

4. Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Экспериментальное наблюдение стохастических автоколебаний в динамической системе электронный поток — обратная электромагнитная волна // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29. Вып. 3. С. 180–184.
5. Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Стохастические автоколебания и неустойчивость в лампе обратной волны // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28, № 6. С. 1136–1139.
6. Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П. Периодические и стохастические автомодуляционные режимы в электронных генераторах с распределенным взаимодействием.—В сб.: Релятивистская высокочастотная электроника.— Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 101–144.
7. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в автогенераторе с инерционным запаздыванием первого порядка // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29, № 12. С. 2389–2398.
8. Дмитриев А.С., Кислов В.Я., Старков С.О. Экспериментальное исследование образования и взаимодействия странных аттракторов в кольцевом автогенераторе // ЖТФ. 1985. Т. 55, № 12. С. 2417–2419.
9. Кислов В.Я., Залогин Н.Н., Мясин Е.А. Исследование стохастических автоколебательных процессов в автогенераторах с запаздыванием // Радиотехника и электроника. 1979. Т. 24, № 6. С. 1118–1130.
10. Княшко С.В., Пиковский А.С., Рабинович М.И. Автогенератор радиодиапазона со стохастическим поведением // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25, № 2. С. 336–343.
11. Колмогоров А.Н. Об энтропии на единицу времени, как метрическом инварианте автоморфизмов // ДАН СССР. 1959. Т. 124. С. 754, 755.
12. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30, № 4. С. 299–303.
13. Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т. 44, № 8. С. 339–342.
14. Мельников В.К. Устойчивость центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. мат. общества. 1963. Т. 12. С. 3–52.
15. Обухов А.М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока // ДАН СССР. 1941. Т. 32, № 1. С. 22–24.
16. Оселедец В.И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. Моск. мат. общества. 1968. Т. 19. С. 179–210.
17. Пиковский А.С. О поведении спектра странного аттрактора в критической точке // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 7. С. 883, 884.
18. Пиковский А.С., Рабинович М.И. Простой автогенератор со стохастическим поведением // ДАН СССР. 1978. Т. 239, № 2. С. 301–304.
19. Плыкин Р.В. О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов // УМН. 1980. Т. 35, № 3. С. 94–104.
20. Ферми Э., Паста Дж., Улам С. Исследование нелинейных задач.— В кн.: Ферми Э. Научные труды. Т. 2.—М.: Наука, 1972. С. 645–656.
21. Шарковский А.Н. Существование циклов непрерывного отображения прямой в себя // Укр. мат. журн. 1964. № 1. С. 61–71.
22. Шильников Л.П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений // ДАН СССР. 1965. Т. 160, № 3. С. 558–561.

23. Шильников Л. П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус // Математический сборник. 1970. Т. 81(123), № 1. С. 92–103.
24. Шильников Л. П. Теория бифуркаций и модель Лоренца.—В кн.: Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения.—М.: Мир, 1980.
25. Adler R. C., Konheim A. C., McAndrew M. H. Topological Entropy // Trans. Am. Math. Soc. 1965. V. 114, № 2. P. 309–319.
26. Andreev Yu. V., Dmitriev A. S., Chua L. O., Wu C. W. Associative and Random Access Memory Using One-Dimensional Maps // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1992. V. 3, № 2. P. 483–504.
27. Arneodo A., Couillet P., Tresser C. Oscillators with chaotic behavior / An illustration of a theorem by Shilnikov // J. Stat. Phys. 1982. V. 27. P. 171–182.
28. Aurell E. Feigenbaum attractor as a spin system // Phys. Rev. 1987. V. A35, № 9. P. 4016–4019.
29. Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R. S. Three coupled oscillators: mode-locking, global bifurcations and toroidal chaos // Physica. 1991. V. D49. P. 387–475.
30. Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.-M. Kolmogorov entropy and numerical experiments // Phys. Rev. 1976. V. A14. P. 2338–2345.
31. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. P. I: Theory. P. II: Numerical application // Meccanica. 1980. V. 15. P. 9–30.
32. Bensimon D., Jensen M. H., Kadanoff L. P. Renormalization-group analysis of the global structure of the period-doubling attractor // Phys. Rev. 1986. V. A33, №5. P. 3622–3624.
33. Bollt E. M., Meiss J. D. Targeting chaotic orbits to the Moon through recurrence // Phys. Lett. 1995. V. A204. P. 373–378.
34. Bohr T., Bak P., Jensen M. H. Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. II. Josephson junctions, charge-density waves, and standard maps // Phys. Rev. 1984. V. A30. P. 1970–1981.
35. Born M. Vorhersagbarkeit in der klassischen Mechanik // Z. Physik. 1958. V. B153, № 3. S. 372–388.
36. Broomhead D. S., King G. P. Extracting qualitative dynamics from experimental data // Physica. 1986. V. D20. P. 217–236.
37. Cartwright M. L., Littlewood J. E. On nonlinear differential equations of the second order. I. The equation $\ddot{y} + k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + a)$, k large // J. Lond. Math. Soc. 1945. V. 20. P. 180–189.
38. Christiansen F., Cvitanović P., Rugh H. H. The spectrum of the period-doubling operator in terms of cycles // J. Phys. 1990. V. A23. P. L713–L717.
39. Chua L. O., Komuro M., Matsumoto T. The Double Scroll Family // IEEE Trans. 1986. V. CAS33. P. 1073–1118.
40. Cremers J., Hübner A. Construction of differential equations from experimental data // Z. Naturforschung. 1987. V. A42. S. 797–802.
41. Crutchfield J. P., McNamara B. S. Equations of motion from a data series // Complex Systems. 1987. V. 1. P. 417–452.

42. Cvitanović P., Gunaratne G.H., Procaccia I. Topological and metric properties of Hénon-type strange attractors // *Phys. Rev.* 1988. V. A38. P. 1503–1520.
43. Derrida B., Gervois A., Pomeau Y. Universal metric properties of bifurcations of endomorphisms // *J. Phys.* 1979. V. A12, № 3. P. 269–296.
44. Dixon T.W., Kenny B.G. Transition to criticality in circle maps at the golden mean // *J. Math. Phys.* 1998. V. 39, № 11. P. 5952–5963.
45. Dixon T.W., Gherghetta T., Kenny B.G. Universality in the quasiperiodic route to chaos // *CHAOS*. 1996. V. 6, № 1. P. 32–42.
46. Collet P., Eckmann J.-P., Koch H. Period doubling bifurcations for families of maps on R^n // *J. Stat. Phys.* 1981. V. 25. P. 1–14.
47. Eckmann J.-P., Kamphorst S.O., Ruelle D., Gilbert D. Lyapunov exponents from a time series // *Phys. Rev.* 1986. V. A34. P. 4971–4979.
48. Eckmann J.-P., Ruelle D. Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems // *Physica*. 1992. V. D56. P. 185–187.
49. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1978. V. 19, № 1. P. 25–52.
50. Feigenbaum M.J. The universal metric properties of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1979. V. 21, № 6. P. 669–706.
51. Feigenbaum M.J. The onset spectrum of turbulence // *Phys. Lett.* 1979. V. A74, № 6. P. 375–378.
52. Feigenbaum M.J. The transition to aperiodic behavior in turbulent systems // *Commun. Math. Phys.* 1980. V. 77, № 1. P. 65–86.
53. Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker S.J. Quasiperiodicity in dissipative systems: A renormalization group analysis // *Physica*. 1982. V. D5. P. 370.
54. Grassberger P. Generalized dimensions of strange attractors // *Phys. Lett.* 1983. V. A97. P. 227–230.
55. Grassberger P. On the fractal dimension of the Hénon attractor // *Phys. Lett.* 1983. V. A97. P. 224–226.
56. Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors // *Physica*. 1983. V. D9. P. 189–208.
57. Grassberger P., Badii R., Politi A. Scaling laws for invariant measures on hyperbolic and non-hyperbolic attractors // *J. Stat. Phys.* 1988. V. 51. P. 135–178.
58. Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic // *Physica*. 1984. V. D13. P. 261–268.
59. Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. Attractors on an N -torus. Quasiperiodicity versus chaos // *Physica*. 1985. V. D15. P. 354–373.
60. Greene J.M., Kim J.-S. The calculation of Lyapunov spectra // *Physica*. 1987. V. D24. P. 213–225.
61. Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Shraiman B.I. Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets // *Phys. Rev.* 1986. V. A33. P. 1141–1151.
62. Heagy J.F. A physical interpretation of the Hénon map // *Physica*. 1992. V. D57. P. 436–446.

-
63. Hénon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor // *Commun. Math. Phys.* 1976. V. 50. P. 69–77. (Перевод: Хенон М. Двумерное отображение со странным аттрактором.—В сб.: Странные аттракторы / Под ред. Я. Г. Синая и Л. П. Шильникова.—М.: Мир, 1981. С. 152–163.)
 64. Hénon M. On the numerical computation of Poincaré maps // *Physica*. 1982. V. D5, № 2, 3. P. 412–414.
 65. Hénon M., Heiles C. The applicability of the third integral of the motion: Some numerical experiments // *Astron. J.* 1964. V. 69. P. 73–79.
 66. Hentschel H.G.E., Procaccia I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors // *Physica*. 1983. V. D8. P. 435–444.
 67. Hirsch J.E., Nauenberg M., Scalapino D.J. Intermittency in the presence of noise: A renormalization group formulation // *Phys. Lett.* 1982. V. A87. P. 391.
 68. Hopf E. A mathematical example displaying the features of turbulence // *Comm. Pure Appl. Math.* 1948. V. 1. P. 303–322.
 69. Hu B., Rudnik J. Exact solution of the Feigenbaum renormalization group equations for intermittency // *Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 48. P. 1645.
 70. Hu B., Rudnik J. Differential-equation approach to functional equations: exact solutions intermittency // *Phys. Rev.* 1986. V. A34. P. 2453.
 71. Huberman B., Zisook A. Power spectra of strange attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1981. V. 26, № 10. P. 626–632.
 72. Ikeda K., Daido H., Akimoto O. Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // *Phys. Rev. Lett.* 1980. V. 45. P. 709–712.
 73. Jensen M.H., Bak P., Bohr T. Complete devil's staircase, fractal dimension, and universality of mode-locking structure in the circle map // *Phys. Rev. Lett.* 1983. V. 50. P. 1637–1639.
 74. Jensen M.H., Bak P., Bohr T. Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. I. Circle maps // *Phys. Rev.* 1984. V. A30. P. 1960–1969.
 75. Kaplan J.L., Yorke J.A. The onset of chaos in a fluid flow model of Lorenz // *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 1979. V. 316. P. 400.
 76. Kaplan J.L., Yorke J.A. Preturbulence: a regime observed in a fluid flow model of Lorenz // *Commun. Math. Phys.* 1979. V. 67. P. 93.
 77. Kaplan J.L., Yorke J.A. A chaotic behavior of multi-dimensional differential equations.—In: *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points. Lecture Notes in Mathematics* / Eds H. O. Peitgen, H. O. Walther.—Berlin; N. Y.: Springer, 1979. V. 730. P. 204–227.
 78. Kaplan H. Return to Type-I Intermittency // *Phys. Rev. Lett.* 1992. V. 68, № 5. P. 553–556.
 79. Kaplan H. Type-I intermittency for the Henon-like family // *Phys. Rev.* 1993. V. E48, № 3. P. 1655–1669.
 80. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // *Physica*. 1997. V. D109. P. 91–112.
 81. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Chua L.O. Two-parameter study of transition to chaos in Chua's circuit: renormalization group, universality and scaling // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1993. V. 3, № 4. P. 943–962.

82. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Chua L.O. Multi-parameter criticality in Chua's circuit at period-doubling transition to chaos // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1996. V. 6, № 1. P. 119–148.
83. Li T.-Y., Yorke J. A. Period Three Implies Chaos // *Amer. Math. Monthly*. 1975. V. 82. P. 982–985.
84. Maurer J., Libchaber A. Rayleigh–Bénard experiment in liquid helium; frequency locking and the onset of turbulence // *J. de Phys. Lett.* 1979. V. 40. P. L419–L423.
85. Linsay P. S. Period Doubling and Chaotic Behavior in a Driven Anharmonic Oscillator // *Phys. Rev. Lett.* 1981. V. 47. P. 1349–1352.
86. Lorenz E. N. Deterministic Nonperiodic Flow // *J. Atmos. Sci.* 1963. V. 20. P. 130–141. (Перевод: Лоренц Э. Детерминированное неперiodическое течение.—В сб.: Странные аттракторы / Под ред. Я. Г. Синая и Л. П. Шильникова.—М.: Мир, 1981. С. 88–116.)
87. Malraison B., Atten P., Bergé P., Dubois M. Dimension of strange attractors. An experimental determination for the chaotic regime of two convective systems // *J. Phys. Lett.* 1983. V. 44. P. 897–902.
88. Mané R. On the dimension of the compact invariant sets of certain nonlinear maps.—In: *Dynamical systems and turbulence. Lecture Notes in Mathematics* / Eds D. A. Rand, L.-S. Young.—Berlin: Springer-Verlag, 1981. V. 898. P. 230–242.
89. May R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics // *Nature*. 1976. V. 261. P. 459–467.
90. Mori H., So B. C., Kuroki S. Spectral structure of intermittent chaos // *Physica*. 1986. V. D21. P. 355–370.
91. Nauenberg M., Rudnik J. Universality and the power spectrum at the onset of chaos // *Phys. Rev.* 1981. V. B24, № 1. P. 493–495.
92. Newhouse S. E., Ruelle D., Takens F. Occurrence of strange axiom A attractors near quasi-periodic flows on T_m ($m = 3$ or more) // *Commun. Math. Phys.* 1978. V. 64. P. 35–40.
93. Packard N. H., Crutchfield J. P., Farmer J. D., Shaw R. S. Geometry from a Time Series // *Phys. Rev. Lett.* 1980. V. 45. P. 712–715.
94. Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E. D. Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems // *Physica*. 1983. V. D8, № 3. P. 303–342.
95. Ott E., Grebogi C., Yorke J. A. Theory of First Order Phase Transitions for Chaotic Attractors of Nonlinear Dynamical Systems // *Phys. Lett.* 1989. V. A135. P. 343–348.
96. Ott E., Grebogi C., Yorke J. A. Controlling Chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1990. V. 64. P. 1196–1199.
97. Pomeau Y., Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems // *Commun. Math. Phys.* 1980. V. 74. P. 189.
98. Procaccia I., Thomae S., Tresser C. First return maps as a unified renormalization scheme for dynamical systems // *Phys. Rev.* 1987. V. A35. P. 1884–1900.
99. Rand D., Ostlund S., Sethna J., Siggia E. D. Universal transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems // *Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 49, № 2. P. 132–135.

100. Reynolds O. An Experimental Investigation on the Circumstances which Determine whether the Motion of Water shall be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels // *Phil. Trans. Roy. Soc.* 1883. V. 174. P. 935.
101. Rössler O.E. An equation for continuous chaos // *Phys. Lett.* 1976. V. A57, № 5. P. 397, 398.
102. Rössler O.E. An equation for hyperchaos // *Phys. Lett.* 1979. V. A71, № 2, 3. P. 155–159.
103. Rubinfeld L.A., Siegmán W.L. Nonlinear dynamic theory for a double-diffusive convection model // *SIAM J. Appl. Math.* 1977. V. 32. P. 871.
104. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // *Comm. Math. Phys.* 1971. V. 20. P. 167–192.
105. Sinha S., Ditto W.L. Dynamics Based Computation // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81, № 10. P. 2156–2159.
106. Shenker S.J. Scaling behavior in a map of a circle onto itself: Empirical results // *Physica*. 1982. V. D5. P. 405–411.
107. So B.C., Mori H. Asymptotic shapes of power spectra of intermittent chaos near its onset point // *Physica*. 1986. V. D21. P. 126–136.
108. Sprott J.C. Some simple chaotic flows // *Phys. Rev.* 1994. V. E50, № 2. P. 647–650.
109. Stavans J., Hulsot F., Libchaber A. Fixed winding number and the quasiperiodic route to chaos in a convective fluid // *Phys. Rev. Lett.* 1985. V. 55. P. 595–599.
110. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence.—In: *Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics* / Eds D.A. Rand, L.-S. Young.—Berlin: Springer-Verlag, 1980. V. 898. P. 366–381.
111. Tavakol R.K., Workowski A.S. On the occurrence of quasiperiodic motion on three tori // *Phys. Lett.* 1984. V. A100, № 2. P. 65–67.
112. Tavakol R.K., Workowski A.S. An example of quasiperiodic motion on T^4 // *Phys. Lett.* 1984. V. A100, № 6. P. 273–276.
113. Testa J., Perez J., Jeffries C. Evidence for Universal Chaotic Behavior of a Driven Nonlinear Oscillator // *Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 48. P. 714–717.
114. Ueda Y. Steady Motions Exhibited by Duffing's Equation: A Picture Book of Regular and Chaotic Motions.—In: *New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics* / Ed. P. J. Holmes.—Philadelphia: SIAM, 1980. P. 311–322.
115. Ulam S.M., von Neumann J. On combination of stochastic and deterministic processes // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1947. V. 53, № 11. P. 1120.
116. Van der Pol B., Van der Mark J. Frequency demultiplication // *Nature*. 1927. V. 120. P. 363, 364.
117. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica*. 1985. V. D16. P. 285–317.