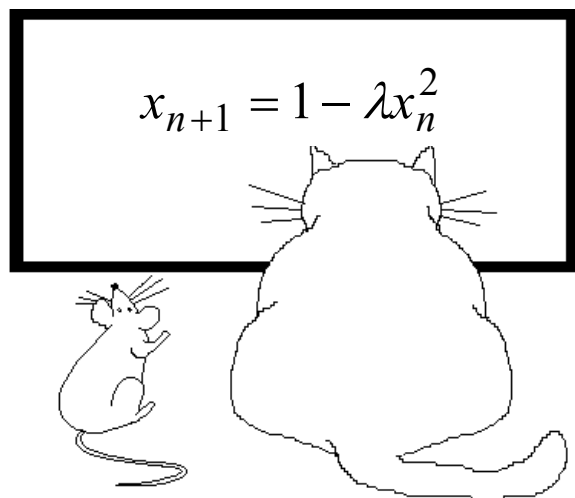


*У моря видел дуб зеленый;
Под ним сидел, и кот ученый
Свои мне сказки говорил.
Одну я помню: сказку эту
Поведаю теперь я свету...*

А.С.Пушкин

А.П.Кузнецов

Колебания Катастрофы Бифуркации Хаос



Издательство ГосУНЦ «Колледж»

Саратов 2000

УДК 517.9

K89

Кузнецов А.П.

K89 Колебания, катастрофы, бифуркации, хаос.
Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2000, 98 с.

ISBN 5-900641-90-2

В сборнике представлено около 300 задач по нелинейным колебаниям, катастрофам, динамическим системам, бифуркациям, хаосу. Каждый раздел содержит как теоретические задачи, так и задачи исследовательского характера, решаемые с использованием компьютера. Задачи апробированы на Факультете нелинейных процессов Саратовского госуниверситета.

*Издание выполнено при поддержке
Федеральной целевой программы «Интеграция»
и гранта РФФИ №0014-96673.*

*Использованы результаты исследований
по грантам РФФИ №97-02-16414 и №00-02-17509*

Рецензент: член-кор. РАН, профессор Трубецков Д.И.

© А. П. Кузнецов, 2000

© Обложка; Д. В. Соколов

ISBN 5-900641-90-2

Оглавление

Глава 1 Колебания	9
Линейность и нелинейность. Нелинейные элементы .	10
Зависимость периода нелинейных колебаний от амплитуды	13
Особенности спектров нелинейных систем	14
Мультистабильность и гистерезис	16
Динамические системы. Консервативные и диссипативные системы	18
Фазовые портреты нелинейных систем	19
Нелинейный осциллятор. Приближение слабой нелинейности	23
Нелинейный осциллятор. Движение вблизи сепаратрисы	25
Метод медленно меняющихся амплитуд	26
Быстрые и медленные движения в случае сильной диссипации	28
Автоколебательные системы	28
Уравнения Ван-дер-Поля и Рэлея	30
Жесткое возникновение автоколебаний	32
Релаксационные колебания	33
Сечение Пуанкаре. Одномерные дискретные отображения	34
Нелинейные колебания. Задачи для компьютерного исследования	35
Глава 2 Катастрофы	39
Ряд Тейлора и модели	40
Понятия типичности и коразмерности	41
«Игрушки» теории катастроф	42
Критические точки функций одной переменной	43
Критические точки функций двух переменных	44
Катастрофа коразмерности один – складка	45

Катастрофа коразмерности два – сборка	47
Катастрофа коразмерности три - ласточкин хвост	49
Каспидные катастрофы в двумерных системах	50
Катастрофа коразмерности три – эллиптическая омбилика	52
Катастрофа коразмерности три – гиперболическая омбилика	53
Катастрофы и теория упругости	53
Катастрофы и физика фазовых переходов	54
Каустики и волны	54
Колебания	55
Катастрофы. Задачи для компьютерных исследований	57
Глава 3 Бифуркации	60
Классификация и примеры динамических систем	61
Бифуркации одномерных потоков	65
Бифуркация Андронова-Хопфа	65
Бифуркации предельных циклов	68
Бифуркации одномерных отображений коразмерности один	69
Бифуркации двух- и трехпараметрических одномерных отображений	71
Бифуркации двумерных отображений	74
Квазипериодические режимы и синхронизация в двумерных и одномерных отображениях	76
Динамические системы и бифуркации. Задачи для компьютерных исследований	78
Глава 4 Хаос	85

Предисловие

Вынесенные в заголовок этой книги термины - колебания, катастрофы, бифуркации, хаос - стали основными для современного междисциплинарного подхода, известного как нелинейная динамика. Их можно услышать среди математиков, физиков, химиков, биологов, специалистов по экономике. Эти термины не только образовали основу нового "интернационального" языка науки, но стали элементами фундаментальных представлений о природе.

К сожалению, схемы образования более консервативны, чем живая наука. Поэтому современные концепции проникают обычно лишь на вершину "пирамиды" образовательной системы. В этом случае трудно говорить о раннем воспитании мышления, основанного на идеях нелинейной динамики. По мнению возглавляемого член-корр. РАН Д.И. Трубецковым авторского коллектива такое мышление можно воспитать не только у студентов старших курсов, но и у младшекурсников, и даже учащихся средних школ. О возможности этого говорят успехи системы непрерывного образования, состоящей из лицея Колледжа прикладных наук и Высшего Колледжа прикладных наук (ныне факультет нелинейных процессов) Саратовского государственного университета.

Автор принимал активное участие в становлении этой системы непрерывного образования. Для учащихся лицея был разработан четырехлетний курс, в рамках которого представлены такие понятия, как оценки, методы размерностей, подобия и другие. На основе этого курса была подготовлена и издана книга "Как работают и думают физики"¹. Настоящая же книжка явилась итогом создания соответствующей системы знаний на базе нелинейной динамики уже для студентов университета.

Педагогический опыт учит, что мало познакомить молодых людей с новыми понятиями. Надо, чтобы сформировался "активный" багаж знаний и навыков работы. Этому можно научиться, лишь решая задачи. В этой книге представлено около 350 задач, которые были разработаны для факультета нелинейных процессов как четыре последовательные ступеньки "нелинейного" образования. Они основываются на четырех учебных курсах: "Нелинейные колебания", "Теория катастроф", "Динамические системы и

¹ Читателям, интересующимся синергетикой на "школьном" уровне, рекомендуем книгу Д.И. Трубецкого "Колебания и волны для гуманитариев".

бифуркации", "Динамический хаос". Подавляющее большинство задач оригинальны.

Создавая задачник по нелинейной динамике, нельзя игнорировать использование компьютеров. Изобретение компьютера - одно из наиболее значительных интеллектуальных событий XX века. Сейчас уже ясно, что просто учить программированию, не решая задач, для которых характерно органичное использование компьютера, нельзя. Использование компьютера формируют новую сторону профессии ученого, которая дополняет традиционное деление на теоретиков и экспериментаторов. Успехи нелинейной динамики являются одним из наиболее ярких примеров синтеза математических, физических и компьютерных подходов. Поэтому каждую главу книги завершает подборка задач для решения с использованием компьютера. Все такие задачи имеют свое название. Подчеркну, что это задачи исследовательского характера, требующие соответствующей теоретической и компьютерной подготовки. В этом существенное отличие от компьютерных практикумов, в рамках которых студент фактически выполняет лабораторную работу на компьютере, не программируя сам в соответствии с логикой решения задачи.

Весьма существенной была необходимость глубокой взаимосвязи с курсом общей физики. Поэтому многие задачи имеют характерный для обычных физических задач антураж. Однако вопросы, которые ставятся, требуют решения в другом контексте, характерном именно для нелинейной динамики. Такой подход дал прекрасные результаты и обеспечил активность и заинтересованность студентов.

Ряд задач являются "информационными", т.е. не просто содержат собственно условие, но и несут новую информацию, иногда опережающую лекционный материал, а иногда и совершенно новую. Это, по моему мнению, очень важно, поскольку услышать новую информацию, механически записывая лекцию или усвоить ее, интенсивно решая задачи, - существенно разные вещи. Думается, что такой подход весьма перспективен. Его развитие может дать большие резервы учебного времени, которого всегда не хватает в рамках традиционных учебных планов.

Несколько задач своим появлением обязаны научным исследованиям, проводимым в Саратовском отделении Института радиотехники и электроники РАН. Особенно это относится к задачам для компьютерного решения в главах "Бифуркации" и "Хаос". Структура же задачника обязана этим исследованиям еще в большей степени. Именно благодаря им понятия типичности, коразмерности, случая общего положения, универсальности приобретают статус общих для всей нелинейной теории. Эти понятия появляются очень рано и "отрабатываются" с помощью

на первый взгляд привычных задач по физике и математике (начало главы "Катастрофы").

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность Д.И.Трубецкову за возможность реализации представленных задач в Саратовском госуниверситете, С.П.Кузнецову за многочисленные полезные обсуждения, он также выполнил рисунок кота и мыши, изучающих логистическое отображение, Д.В.Соколову за рисунок на обложке - кота, путешествующего по многообразию катастрофы сборки, А.А.Короновскому, Н.М.Рыскину и Л.В.Красичкову за "аппробацию" задач на семинарских и компьютерных занятиях, всем студентам факультета нелинейных процессов, принявших активное участие в этих занятиях, а также И.Р.Сатаеву и А.П.Широкову за помощь в подготовке компьютерного макета книги.

Компьютерные рисунки, представленные в начале каждой главы, демонстрируют соответственно конденсацию изображающих точек на фазовой плоскости на предельный цикл уравнения Ван-дер-Поля, многолистную поверхность, содержащую складки и сборки, бифуркационное дерево логистического отображения и карту ляпуновских показателей кубического отображения.

Линейность и нелинейность. Нелинейные элементы

1. Считая, что в описанных ниже системах нелинейность является слабой, представьте их уравнения движения в форме осциллятора с нелинейностью степени n

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x + \mu x^n) = 0.$$

Определите в каждом случае константы μ и n .

- Массивное колесо с моментом инерции I может вращаться вокруг
- оси, проходящей через центр колеса (рис.1). На ободе колеса укреплен груз массы m на расстоянии R от оси.

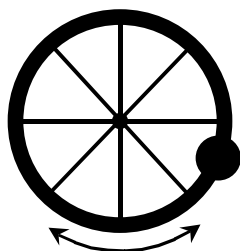


Рис.1

- Сосуд объемом $2V_0$ разделен подвижным поршнем площади S на две равные части (рис.2). Начальное давление газа p_0 . При колебаниях поршня процесс в газе считать адиабатическим. Масса поршня равна m .

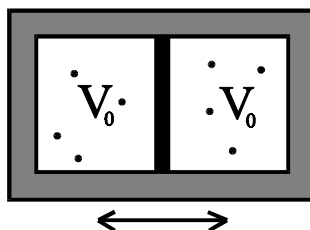


Рис.2

- Резиновый жгут натянут с силой F . Посередине жгута прикреплен шарик массы m (рис.3). Шарик может совершать лишь поперечные колебания. Жгут подчиняется закону Гука, его длина в ненатянутом состоянии l_0 , коэффициент жесткости k . Колебания происходят в невесомости.

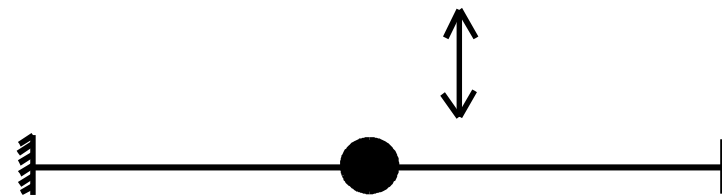


Рис.3

- 2. Небольшой грузик массы m прикреплен к концу легкой пружины, вращающейся в невесомости вокруг другого ее конца с угловой скоростью ω , и совершает малые радиальные колебания около положения равновесия (рис.4).

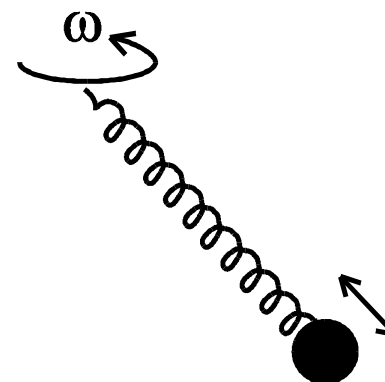


Рис.4

Длина недеформированной пружины l_0 . Покажите, что в рамках модели линейной пружины с коэффициентом жесткости k такое поведение системы можно описать лишь при не очень больших значениях частоты вращения. Найдите критическую частоту ω_c , при которой линейная модель полностью теряет смысл. Покажите, что учет нелинейности пружины позволяет дать

описание поведения системы и при $\omega \geq \omega_c$. Считайте, что зависимость упругой силы от деформации имеет вид $F = kx + cx^3$, где k и c — положительные коэффициенты. (Указание. Определите положение равновесия системы графическим методом.)

3. Шарик массы m подвешен в поле тяжести на пружине, зависимость упругой силы которой от деформации имеет вид $F = kx + cx^3$, где k и c — положительные коэффициенты. Получите уравнение, описывающее колебания шарика около положения равновесия и покажите, что оно содержит как кубическую, так и квадратичную нелинейности. Выясните условия, при которых свойства пружины линейны и колебания также линейны; свойства пружины нелинейны, а колебания линейны; колебания нелинейны.

4. Для описания динамики популяции в 1838 году Ферхюльст предложил следующую модель:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2.$$

Здесь N — численность популяции, a и b — коэффициенты. Найдите решение этого уравнения и постройте график зависимости $N(t)$. Начальное число особей равно N_0 . Покажите, что если начальное число особей невелико, то можно выделить “линейную” стадию процесса, на которой исходное дифференциальное уравнение заменяется соответствующим линейным. По какому закону изменяется число особей N на линейной стадии? Через какое характерное время начнут сказываться нелинейные эффекты? К чему приведет воздействие нелинейности по истечении достаточно большого времени? Используя полученные результаты, дайте интерпретацию коэффициентам a и b .

5. Конденсатор с нелинейной характеристикой $q = CU + aU^2$ замкнут на резистор с сопротивлением R . Получите зависимость напряжения на конденсаторе от времени, если его начальное значение равно U_0 . Оцените характерное время τ , в течение которого существенны нелинейные эффекты. Найдите закон изменения напряжения на линейной стадии процесса разряда конденсатора.

6. Получите дифференциальное уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре, образованном емкостью C и катушкой с нелинейной индуктивностью. Магнитный поток Φ , пронизывающий катушку, связан с током I соотношением $\Phi = LI + kI^3$.

7. Проявляет ли парамагнетик нелинейные свойства во внешнем магнитном поле? Если да, то какова природа нелинейности?

8. В соленоид с поперечным сечением S и индуктивностью L вставляют ферромагнитный сердечник. Получите выражение для потока, пронизывающего соленоид, в приближении слабой нелинейности в виде ряда, содержащего линейный и кубичный по току члены. Считайте, что ферромагнетик описывается моделью Вейса, в рамках которой нормированная намагниченность $\eta = M/M_0$ связана с магнитным полем H соотношением

$$\text{th} \eta = \frac{T}{T_c} \eta - \frac{\mu_B}{kT} \cdot H.$$

Здесь T — температура, μ_B , k , M_0 , T_c — постоянные коэффициенты, причем T_c представляет собой температуру в точке Кюри. Ферромагнетик плотно входит в соленоид, температура среды выше точки Кюри. Покажите, что при приближении температуры к точке Кюри и линейная модель, и модель слабой нелинейности оказываются несостоятельными. (Указание. Следует искать решение уравнения Вейса $\eta = \eta(H)$ в виде соответствующего ряда по H .)

Зависимость периода нелинейных колебаний от амплитуды

9. На рис.5 изображены три варианта симметричной потенциальной ямы, характеризующихся одним и тем же периодом линейных колебаний T . Пунктир соответствует закону $U = kx^2$. Возрастает или убывает период колебаний с ростом амплитуды при движении частицы в двух других ямах?

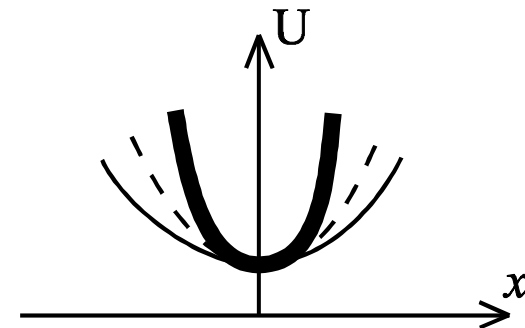


Рис.5

10. Определите зависимость периода колебаний от амплитуды при движении частицы массы m в потенциальной яме вида $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$ и постройте соответствующий график. Найдите период линейных колебаний и укажите его значение на графике. С какими особенностями рассматриваемой потенциальной ямы связано то, что с ростом амплитуды период колебания уменьшается по сравнению со значением, предсказанным линейной теорией?

11. Исследуйте колебания материальной точки массы m в потенциальной яме вида $U(x) = k|x|^n$. Определите период колебаний с точностью до константы. Покажите, что для $n = 2$ и малые и большие колебания изохронны. Покажите, что для $n \neq 2$ как большие, так и малые колебания неизохронны. Определите для $n \neq 2$ характер зависимости периода колебаний от амплитуды при её стремлении к нулю.

12. Опишите, как зависит период колебаний от амплитуды для систем, представленных в задаче 1. Для случая в) укажите значения параметров, при которых период колебаний стремится к бесконечности при уменьшении амплитуды. По какому закону обращается в бесконечность период колебаний?

13. Проволочка изогнута так, что ее профиль задан функцией - цепной линией $y = a \operatorname{ch} x$. Ось x горизонтальна. По проволочке без трения скользит маленькая бусинка. Трение отсутствует. Получите "эффективный" потенциал $U(x)$, описывающий колебания бусинки. Возрастает или убывает период нелинейных колебаний с ростом амплитуды?

Особенности спектров нелинейных систем

14. Нелинейный элемент описывается квадратичной вольт-амперной характеристикой $I = aU + bU^2$. Напряжение на элементе изменяется по следующим законам:

- $U = U_0 \cos(\omega t)$,
- $U = U_1 \cos(\omega_1 t) + U_2 \cos(\omega_2 t)$,
- $U = U_1 \cos(\omega_1 t) + U_2 \sin(\omega_2 t)$,
- $U = U_1 \cos(\omega_1 t) + U_2 \cos(\omega_2 t) + U_3 \cos(\omega_3 t)$.

Какие частоты присутствуют в спектре тока?

15. Нелинейная пружина одним концом прикреплена к стенке (рис.6). Второй конец пружины перемещают вдоль горизонтальной оси по закону $x = x_0 \cos(\omega t)$. Определите спектр силы, действующей на стенку. Пружина невесома, сила упругости F зависит от координаты x по закону $F = kx + cx^3$. Сколько будет компонент в спектре, если координата изменяется по закону $x = x_1 \cos(\omega t) + x_2 \cos(2\omega t)$?

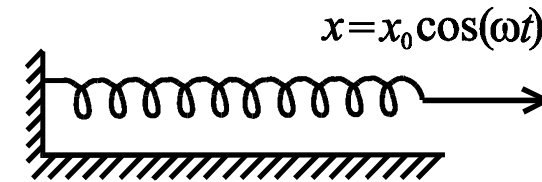


Рис.6

16. На обложке журнала "Scientific American" за июль 1963 года изображена эффектная фотография, на которой показан пучок красного цвета с длиной волны $6940 \text{ \AA}$, падающий на кристалл. С противоположной стороны кристалла выходит пучок синего цвета с длиной волны $3470 \text{ \AA}$. Каков характер нелинейности, которая приводит к подобному преобразованию света?

17. В книге Ф. Крауффорда "Волны" описан следующий опыт. Возьмем два камертона, соответствующие двум нотам с частотами 440 Гц и 523 Гц. Возбудив их, можно услышать не только две эти ноты, но и колебание, близкое к частоте некоторой третьей ноты. Частота третьей ноты 349 Гц. Объяснение этого эффекта состоит в нелинейности уха. Каков характер нелинейности, проявившейся в этом опыте?

18. Можно ли изготовить радиоприемник, содержащий только линейные элементы? Является ли нелинейным элементом громкоговоритель? Может ли быть электрический звонок линейным элементом?

19. Вольт-амперная характеристика некоторого элемента имеет вид

$$I = \begin{cases} 0, & U < 0, \\ U/R, & U \geq 0. \end{cases}$$

На элемент подано напряжение $U = U_0 \cos(\Omega t)$. Определите спектр тока. По какому закону спадают с ростом частоты ω далекие фурье-компоненты

тока? С какими особенностями нелинейного преобразования связан этот закон?

20. Грузик массы m прикреплен к пружине жесткости k и может двигаться по горизонтальной плоскости без трения (рис.7).

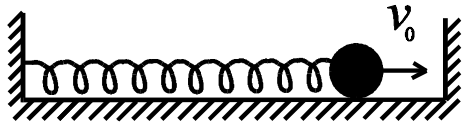


Рис.7

Грузику ударом сообщают скорость v_0 . Расстояние от грузика до стенки l , удары о стенку абсолютно упругие. Исследуйте зависимость спектра колебаний системы от величины v_0 . По какому закону в нелинейном режиме колебаний спадают с ростом частоты ω далекие фурье-компоненты? С какими особенностями нелинейности системы связан этот закон?

Мультистабильность и гистерезис

21. На рис.8 показана система, представляющая собой маятник в верхнем положении равновесия, прикрепленный к пружине. Покажите, что если пружина линейна и ее коэффициент жесткости k невелик, то положение равновесия неустойчиво. Покажите, что если пружина нелинейная, то в системе возможна бистабильность — реализуются два положения устойчивого равновесия. Считайте, что нелинейность пружины описывается соотношением $F = kx + cx^3$, где k и c — положительные коэффициенты, а угол отклонения маятника от вертикали мал. Длина стержня l , масса шарика m . (Указание. Получите в явном виде зависимость потенциальной энергии маятника от координаты x .)

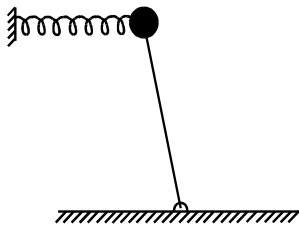


Рис.8

22. В системе, описанной в предыдущей задаче, точка прикрепления пружины C может перемещаться вдоль горизонтали влево-вправо. Изобразите график зависимости деформации пружины x , отвечающей положениям равновесия, от величины смещения точки прикрепления пружины x_0 . Опишите трансформации графика зависимости потенциальной энергии $U(x)$ при вариации x_0 . Обсудите возможность гистерезиса в системе.

23. На рис.9 показана вольт-амперная характеристика полупроводникового радиотехнического элемента — туннельного диода. Такой диод включен в цепь, содержащую регулируемую э.д.с. $\mathcal{E}$ с внутренним сопротивлением R . Графически решив уравнение, соответствующее закону Ома, покажите, что существуют такие значения $\mathcal{E}$ и R , при которых в системе реализуется бистабильность. Рассмотрите эту же задачу аналитически, используя кубическую аппроксимацию вольт-амперной характеристики $I = a(U - U_0)^3 - b(U - U_0) + c$, где a , b и c — коэффициенты. Покажите, что при вариации э.д.с. бистабильность возможна лишь при выполнении условия $bR > 1$.

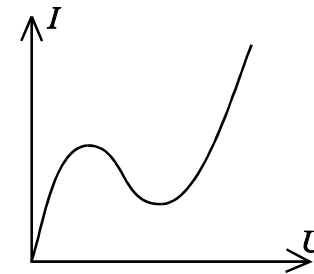


Рис.9

24. Для модели ферромагнетика Вейса постройте графики зависимости намагниченности образца M от внешнего поля H . Покажите, что эти графики имеют качественно разный вид при температуре T большей и меньшей точки Кюри. Обсудите возможность мультистабильности и гистерезиса в системе. Свяжите Ваши рассуждения с известной Вам информацией о поведении ферромагнетиков.

25. Резонатор Фабри-Перо, представляющий собой два плоскопараллельных полупрозрачных зеркала, заполнен средой с нелинейным показателем

преломления (рис.10). Свойства нелинейности таковы, что полный набег фазы волны между зеркалами зависит от интенсивности света по формуле $\varphi = \varphi_0 + \alpha I$, где φ_0 и α — константы, I — интенсивность выходящего излучения. Используя известное в оптике соотношение

$$I = \frac{\alpha I_0}{1 + b \sin^2(\varphi/2)}$$

где I_0 — интенсивность на входе в интерферометр, a и b — константы, покажите, что в системе существует мультистабильность. Для этого постройте график зависимости интенсивности света на выходе I от интенсивности на входе I_0 . Покажите на полученном графике петли гистерезиса.

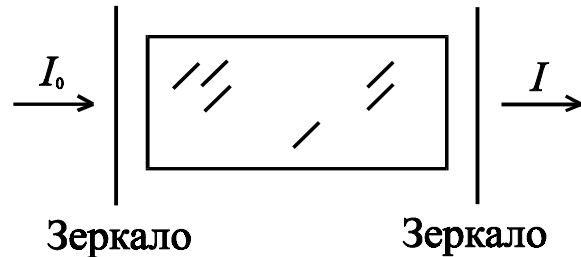


Рис.10

Динамические системы.

Консервативные и диссипативные системы

26. Найдите матрицу эволюции для гармонического осциллятора, позволяющую определить вектор-столбец, составленный из величин x и $\dot{x}$, в любой момент времени по его начальному значению. Вычислите определитель этой матрицы и покажите, что рассматриваемая система является консервативной.

27. Представьте уравнение линейного осциллятора с затуханием в “стандартной” форме, отвечающей определению динамической системы. Покажите, что рассматриваемая система является диссипативной, для чего вычислите дивергенцию соответствующего векторного поля на фазовой плоскости.

28. Одной из первых систем, для которой был обнаружен динамический хаос, являлась простая модель тепловой конвекции в атмосфере, исследованная Лоренцем (1963 г.):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}$$

Здесь σ , r , b — параметры. Установите значения параметров, при которых модель Лоренца является диссипативной.

29. Простейший генератор электромагнитных колебаний, содержащий электронную лампу, описывается уравнением Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Представьте это уравнение в “стандартной” форме. Укажите области в фазовом пространстве, для которых имеет место сжатие фазового объема. Что можно сказать об остальных областях?

Фазовые портреты нелинейных систем

30. Шарик массы m может колебаться в невесомости на пружине, зависимость упругой силы которой от деформации имеет вид $F = kx + cx^3$, где k и c — положительные коэффициенты. Постройте фазовый портрет системы. В чем его отличие от фазового портрета соответствующей линейной системы? Укажите область на фазовой плоскости, в пределах которой систему можно считать линейной.

31. Найдите уравнение фазовых траекторий для колебательного контура, составленного из конденсатора емкости C и нелинейной индуктивности, для которой зависимость магнитного потока от тока I дается соотношением $\Phi = LI + kI^3$. Постройте соответствующий фазовый портрет. (Указание. Найдите выражение для энергии, запасенной индуктивностью.)

32. Небольшое тело массы m может скользить без трения по горизонтальному стержню (рис.11). Тело прикреплено пружиной жесткости k к точке O , находящейся на расстоянии l от стержня. Длина пружины в нерастянутом состоянии l_0 , причем $l_0 > l$. Найдите положения равновесия и соответствующие им значения потенциальной энергии. Постройте график функции $U(x)$, дающий зависимость потенциальной энергии от координаты тела, и с его помощью определите, какие из положений равновесия устойчивы. Постройте фазовый портрет системы. Укажите характерные элементы фазового

портрета: особые точки, типичные траектории, сепаратрисы. Напишите уравнение сепаратрисы в явной форме. Используя график потенциальной энергии, опишите поведение тела, отвечающее перечисленным элементам фазового портрета.

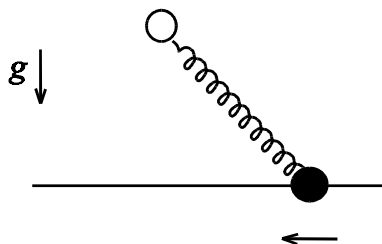


Рис.11

33. Молекула может совершать колебательные движения в поле, заданном потенциалом Леннарда-Джонса

$$U(r) = 4a \left[\left(\frac{b}{r} \right)^{12} - \left(\frac{b}{r} \right)^6 \right].$$

Постройте фазовый портрет системы и проведите его исследование по схеме, описанной в предыдущей задаче. Масса молекулы m , параметры a и b считайте известными. Какую физическую интерпретацию можно дать для движения по сепаратрисе?

34. Шарик массы m , несущий заряд q , может без трения скользить по непроводящей спице. Спица проходит через центры двух неподвижных колец перпендикулярно их плоскости (рис.12). Кольца несут заряды противоположных знаков $-Q$ и Q и расположены на расстоянии $2a$ друг от друга. Радиусы колец R . Постройте фазовый портрет системы.

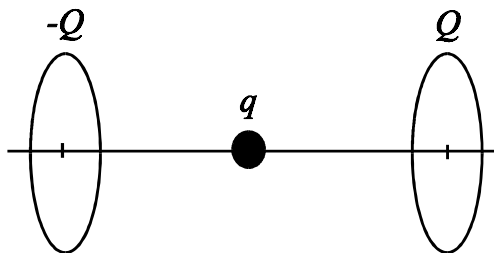


Рис.12

35. На рис.13 показан график функции $U(x)$. Изобразите соответствующий ему фазовый портрет консервативной системы.

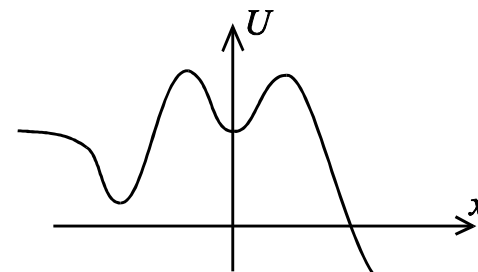


Рис.13

36. На рис.14 показан фазовый портрет системы. Изобразите соответствующий ему график функции $U(x)$.

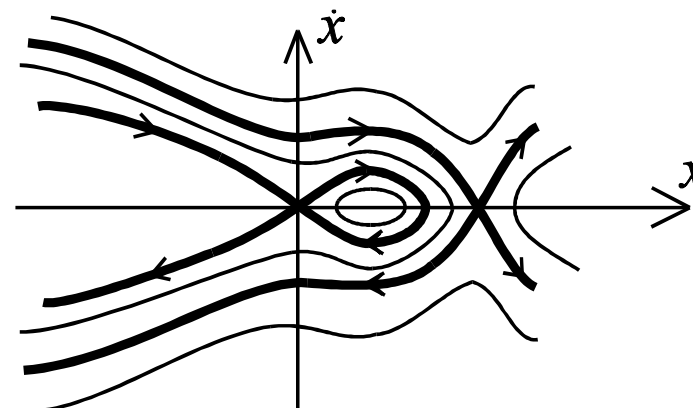


Рис.14

37. Частица движется в потенциальной яме $U(x)$. На фазовой плоскости представлена система фазовых траекторий, для которых полные энергии отличаются на малую величину ΔE . Оцените расстояние между точками, в которых соседние траектории пересекают ось x . Рассмотрите два случая: когда обе траектории являются типичными и когда одна из них является сепаратрисой. Сгущаются или разрежаются фазовые траектории при приближении к сепаратрисе?

38. На рис.15 показаны три фазовые траектории. Одна из них относится к консервативной системе. Какая из двух остальных может относиться к этой же системе при включении небольшой диссипации? Ответ обоснуйте.

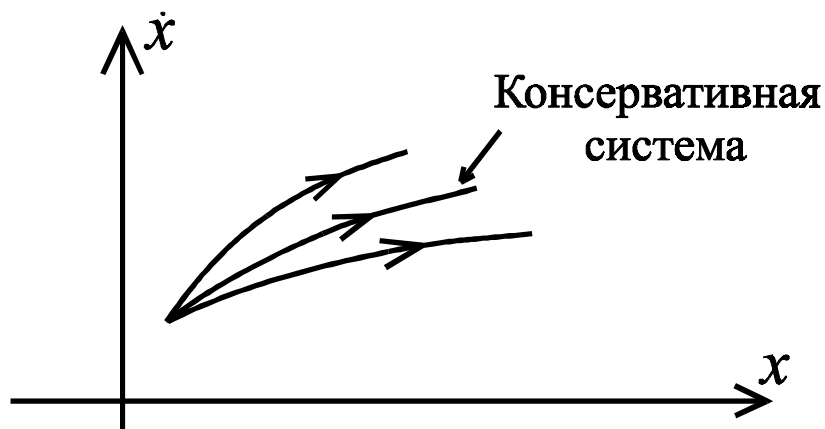


Рис.15

39. Частица массы m движется в потенциальной яме $U(x)$ по некоторой типичной траектории, причем ее координата изменяется по закону $x(t)$. В момент времени, когда координата частицы равна x_0 , а скорость — нулю, в системе появляется очень небольшое затухание. Сила сопротивления пропорциональна скорости с известным коэффициентом γ . Покажите, что благодаря затуханию частица не вернется в точку x_0 , а пройдет от нее на расстоянии порядка

$$\Delta x \approx \frac{\gamma \int_0^T \dot{x}^2(t) dt}{U'(x_0)}.$$

Проверьте вашу оценку для случая линейной системы, когда $U(x) = kx^2/2$. Изобразите траектории частицы без затухания и с затуханием на фазовой плоскости.

40. На рис.16 изображена петля сепаратрисы некоторой консервативной системы. Изобразите вид сепаратрисы при включении небольшой диссипации. (Указание. Восстановите вид функции $U(x)$ и выясните характер движения и его модификацию при включении диссипации для каждой из ветвей сепаратрисы.)

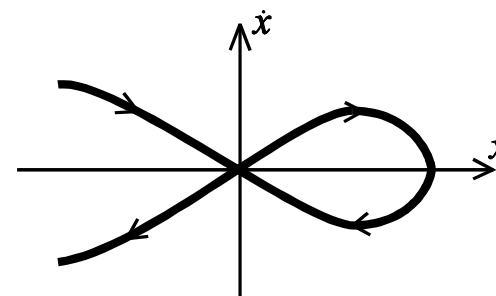


Рис.16

41. В системе, описанной в задаче 32 имеется затухание, причем сила сопротивления, действующая на шарик, пропорциональна его скорости с известным коэффициентом γ . Изменяются ли при введении диссипации координаты положений равновесия? Найдите значение параметра затухания γ_0 , при котором происходит изменение типа устойчивых неподвижных точек. Постройте фазовый портрет системы для случая $\gamma < \gamma_0$. Сколько аттракторов имеет система? Заштрихуйте на отдельном рисунке на фазовой плоскости соответствующие бассейны притяжения. Обсудите роль сепаратрис с точки зрения определения бассейнов притяжения.

Нелинейный осциллятор. Приближение слабой нелинейности

42. Квадратная рамка, по которой течет ток I , может вращаться без трения вокруг оси OO' (рис.17). Рамка помещена в однородное магнитное поле с индукцией B , перпендикулярное оси рамки. Покажите, что колебания рамки описываются уравнением математического маятника. Масса рамки m .

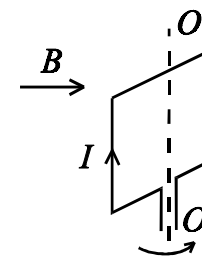


Рис.17

43. Приведите приближенно задачу о движении частицы массы m в потенциальной яме вида $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2(ax)$ к модели осциллятора с кубической нелинейностью. В рамках этой модели найдите зависимость периода колебаний от частоты. Сравните полученный результат с точным (задача 10), построив соответствующую таблицу.

44. Шарик массы m , несущий положительный заряд q , может без трения скользить по непроводящей спице (рис.18).

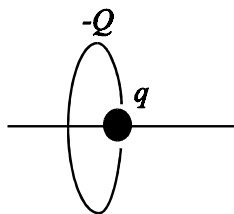


Рис.18

Спица проходит через центр неподвижного кольца перпендикулярно его плоскости. Кольцо несет отрицательный заряд $-Q$. Радиус кольца равен R . Представьте эту систему в виде модели нелинейного осциллятора с кубической нелинейностью. Какие особенности динамики системы такая модель передает верно, а какие нет? Оцените относительное изменение частоты колебаний по сравнению с линейным случаем, если амплитуда колебаний равна $R/3$.

45. С помощью модели осциллятора с кубической нелинейностью оцените угловую амплитуду колебаний математического маятника, для которой период на 1% отличается от значения, предсказанного линейной теорией.

46. С помощью модели осциллятора с кубической нелинейностью оцените отношение первой и третьей гармоник в спектре математического маятника, совершающего колебания с угловыми амплитудами $\pi/6$ и $\pi/2$.

47. Найдите поправку к частоте линейных колебаний для математического маятника. Покажите, что в первом порядке по квадрату амплитуды полученная оценка согласуется с известным результатом, отвечающим аппроксимации математического маятника осциллятором с кубической нелинейностью. Оцените период колебаний с угловой амплитудой $\pi/2$. Сравните найденное значение с точным и оценкой для осциллятора с кубической нелинейностью. (Указание. Используйте формулу для разложения функции $\sin(x \sin \theta)$ в ряд по функциям Бесселя.)

48. Маятник в верхнем положении равновесия прикреплен к нелинейной пружине (см. задачу 21). Нелинейность пружины описывается соотношением $F = kx + cx^3$, где k и c — положительные коэффициенты. Угол отклонения маятника от вертикали мал, длина стержня l , масса шарика m . Какой из универсальных моделей нелинейного осциллятора следует пользоваться при $lk > mg$ и при $lk < mg$? Получите уравнения соответствующих моделей в явном виде, оцените поправку к частоте и величину смещения центра колебаний относительно положения равновесия. Амплитуда колебаний A .

49. Молекула может совершать колебательные движения в поле, заданном потенциалом Леннарда-Джонса. Представьте такую систему в виде модели нелинейного осциллятора с квадратичной нелинейностью. Используя эту модель, оцените увеличение расстояния между молекулами, совершающими колебания с амплитудой a . На основании полученной оценки, объясните механизм теплового расширения твердых тел.

50. Найдите поправку к частоте линейных колебаний для осциллятора, описываемого уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^5 = 0.$$

Нелинейный осциллятор. Движение вблизи сепаратрисы

51. Массивное колесо радиуса $R = 30$ см массы $M = 1$ кг может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр колеса. На ободе колеса укреплен груз массы $m = 100$ г. Колесо находится в покое. Какую линейную скорость необходимо сообщить колесу, чтобы возникло движение, соответствующее сепаратрисе? Масса колеса сосредоточена в его ободе, трение отсутствует.

52. Для математического маятника $\ddot{x} + \sin x = 0$ покажите, что движение по сепаратрисе дается соотношениями $x = -\pi + 4 \arctg e^t$, $v = 2 / \operatorname{ch} t$. Используя этот результат, найдите спектр скорости ротационных и колебательных движений вблизи сепаратрисы. Для этого считайте, что закон изменения скорости дается в виде ряда приведенных выше импульсов, отстоящих на период T .

53. Математический маятник длины $l = 1$ м отклонили на угол $\alpha = 1^\circ$ от верхнего положения равновесия и отпустили. Оцените период возникших колебаний. Для этого найдите закон изменения координаты от времени вблизи положения неустойчивого равновесия в линейном приближении, получите

его асимптотику и “сшейте” полученное решение с законом изменения координаты от времени, который соответствует движению по сепаратрисе.

54. Математический маятник длины $l = 1$ м находится в верхнем положении равновесия. Маятнику сообщили начальную скорость $v_0 = 10^{-3}$ м/с. Оцените период колебаний. (Указание. Действуйте по аналогии с задачей оценки периода колебаний маятника, отклоненного на определенный угол.)

55. Для осциллятора с кубической нелинейностью, описываемого уравнением $\ddot{x} + x - x^3 = 0$, найдите закон изменения координаты и скорости, соответствующий движению по сепаратрисе.

56. Осциллятор с кубической нелинейностью, описываемый уравнением $\ddot{x} + x - x^3 = 0$, совершает колебательное движение вблизи сепаратрисы. Оцените период колебаний. Начальное значение координаты x_0 , а начальная скорость равна нулю.

57. Найдите приближенно спектр скорости для осциллятора с кубической нелинейностью, совершающего колебательное движение вблизи сепаратрисы.

Метод медленно меняющихся амплитуд

58. Покажите, что если $A(t)$ — комплексная амплитуда, соответствующая действительной переменной $x(t)$, определенной из $x = \frac{Ae^{i\omega_0 t} + k.c.}{2}$ при дополнительном условии $\dot{A}e^{i\omega_0 t} + k.c. = 0$, то справедливы следующие соотношения:

- $\dot{x} = i\omega_0(A/2)\exp(i\omega_0 t) + \text{к.с.},$
- $\ddot{x} + \omega_0^2 x = i\omega_0 \dot{A} \exp(i\omega_0 t).$

59. Покажите, что для линейного осциллятора с затуханием $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ уравнение для комплексной амплитуды имеет вид

$$\dot{A} + \alpha A = A A^* \exp(-2i\omega_0 t).$$

Запишите укороченное уравнение для амплитуды A в предположении о медленности ее изменения во времени и решите это уравнение. Сравните закон изменения координаты осциллятора от времени, полученный методом медленно меняющихся амплитуд, с точным.

60. Покажите, что укороченное уравнение для комплексной амплитуды в случае диссипативного осциллятора с кубической нелинейностью $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0$ имеет вид $\dot{A} = -\alpha A + \frac{3}{8} \frac{i\beta}{\omega_0} A |A|^2$. Используя его, найдите

уравнения для модуля a и фазы φ комплексной амплитуды $A = ae^{i\varphi}$. Покажите, что в отсутствие диссипации полученные уравнения позволяют найти правильное выражение для поправки к частоте линейных колебаний.

61. Колебательный контур состоит из последовательно соединенных индуктивности L , емкости C и нелинейного резистора, характеризующегося вольт-амперной характеристикой $U = IR + kI^3$. Найдите закон изменения заряда на обкладках конденсатора с помощью метода медленно меняющихся амплитуд.

62. В осцилляторе, параметры которого изменяются по гармоническому закону в соответствии с уравнением Матье $\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + \varepsilon \cos(2\omega t)]x = 0$, при условии, что $\omega = \omega_0 + \Delta$, где Δ — малая величина, возможна так называемая параметрическая неустойчивость. Считая, что $x = \text{Re}(A \exp i\omega t)$, получите соответствующее укороченное уравнение. Покажите, что в системе действительно возможна неустойчивость и определите инкремент нарастающих колебаний. Найдите область на плоскости параметров Δ, ε , внутри которой наблюдается параметрическая неустойчивость.

63. Получите укороченное уравнение, описывающее параметрическую неустойчивость в осцилляторе с кубической нелинейностью.

64. Получите укороченное уравнение, описывающее нелинейный резонанс в осцилляторе с кубической нелинейностью $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = b \cos \omega t$. Используйте подстановку

$x = \frac{Ae^{i\omega t} + k.c.}{2}$. Покажите, что его неподвижная точка приводит к уравнению для резонансной кривой

$$\left[\left(\omega - \omega_0 + \frac{3}{8} \frac{\beta}{\omega_0} |A|^2 \right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} \right] |A|^2 = \frac{b^2}{4\omega_0^2}.$$

Быстрые и медленные движения в случае сильной диссипации

65. Для линейного колебательного контура, состоящего из последовательно соединенных индуктивности L , емкости C и резистора R , получите условие сильной диссипации в явной форме.

66. Линейный осциллятор с затуханием, находящийся в положении равновесия, получил ударом скорость v_0 . Найдите закон изменения координаты от времени и выполните в полученном соотношении предельный переход к случаю сильной диссипации. Постройте график зависимости координаты от времени и укажите на нем участки быстрого и медленного движения. Покажите, что закон изменения координаты на фазе быстрого движения может быть получен, если в исходном уравнении отбросить инерционный член, а на фазе медленного движения — если отбросить член, соответствующий упругой возвращающей силе.

67. Математическому маятнику длины l и массы m , находящемуся в покое в положении устойчивого равновесия в среде с сильной вязкостью (сила сопротивления пропорциональна скорости), сообщили ударом достаточно большую скорость v_0 . Найдите зависимость угла отклонения маятника от времени. Оцените максимальный угол отклонения. (Указания. Выполните предварительные оценки, которые уточняют понятия “сильная вязкость” и “большая скорость” для данной задачи. Найдите решения, соответствующие фазам быстрого и медленного движений, постройте их суперпозицию и подчините ее начальным условиям.)

Автоколебательные системы

68. В сосуд с поперечным сечением S_1 из крана с сечением S_2 поступает со скоростью V вода. Вода может выливаться через узкую сифонную трубку с поперечным сечением S_3 (рис.19). Высота левого колена трубки равна h , а правого — H . Постройте график зависимости уровня воды в сосуде от времени и обоснуйте автоколебательный характер поведения системы. Найдите период установившихся автоколебаний. Считайте, что скорость вытекания воды через трубку определяется формулой Торричелли.

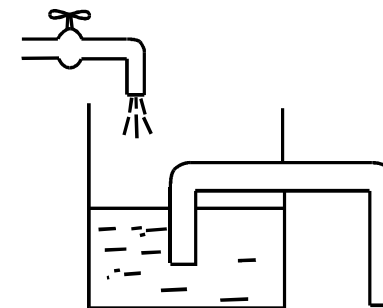


Рис.19

69. Найдите период автоколебаний в схеме с неоновой лампочкой (рис.20). Э.д.с. источника $\mathcal{E}$, сопротивление резистора R , емкость конденсатора C . Неоновая лампочка зажигается, если напряжение на ней превышает U_0 и гаснет, если оно близко к нулю. Сопротивление горящей лампочки очень мало, а потухшей — велико.

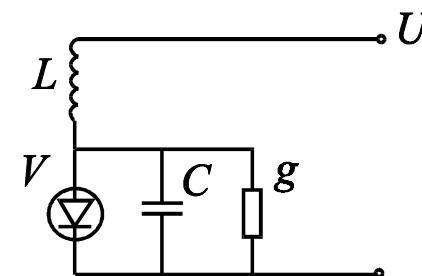


Рис.20

70. Если провести по струне скрипки смычком, то она зазвучит. Почему? К какому типу колебаний следует отнести такой процесс (вынужденные колебания, параметрические колебания, автоколебания)?

71. Почему скрипит плохо смазанная дверь?

72. Прodelайте следующий эксперимент. Пустите в ванну воду из под крана. Внесите под струю воды шарик от пинг-понга. Пронаблюдайте поведение шарика. Проведите наблюдения для разных значений скорости струи, вытекающей из крана. Опишите поведение шарика на языке теории колебаний. Попробуйте объяснить поведение шарика.

73. Почему гудят провода? (Указание. Гудение проводов является чисто механическим эффектом.)

Уравнения Ван-дер-Поля и Рэлея

74. Каким свойством должна обладать вольт-амперная характеристика нелинейного элемента в схеме автогенератора, показанного на рис.20, чтобы автоколебания описывались уравнением Ван-дер-Поля?

75. На рис.21 изображена полученная экспериментально вольт-амперная характеристика туннельного диода. В эксперименте измерены значения максимума и минимума тока I_1 , I_2 и соответствующие значения напряжения V_1 и V_2 . На этом диоде собран автогенератор по схеме, приведённой на рис.20. Параметры схемы L , C и g считайте известными. Найдите величину амплитуды напряжения установившихся квазигармонических автоколебаний на туннельном диоде. При каком условии автоколебания будут квазигармоническими? Пусть величина проводимости g может регулироваться. При каком значении g возникнут автоколебания? Чему равна максимально возможная амплитуда автоколебаний?

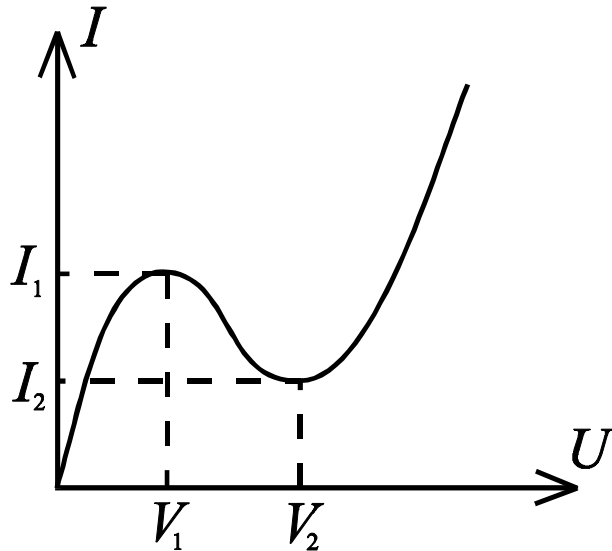


Рис.21

76. На ленте транспортера, движущегося с постоянной скоростью V , находится тело массы m , прикрепленное к пружине жесткости k (рис.22). Зависимость силы трения от относительной скорости движения ленты и транспортера при $v > 0$ дается формулой

$$f(v) = f_1 + \frac{f_2}{1 + v^2/u^2},$$

где f_1 , f_2 , u — постоянные коэффициенты. Масса груза m , коэффициент жесткости пружины k . Сопротивление воздуха очень мало. Найдите скорость транспортера V , при которой уравнение движения груза может быть приближенно приведено к уравнению Рэлея. Оцените амплитуду квазигармонических автоколебаний груза. Оцените амплитуду колебаний, для которой справедливо уравнение Рэлея.

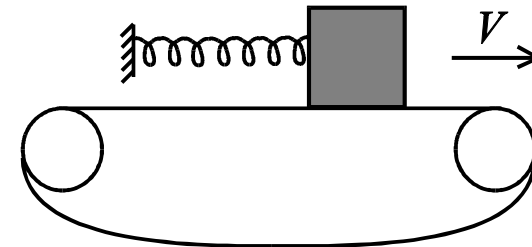


Рис.22

77. Покажите, что для уравнения Ван-дер-Поля $\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0$ подстановка $x = (Ae^{i\omega t} + k.c.) / 2$ после усреднения приводит к действительному укороченному уравнению $\dot{A} = \frac{\lambda}{2}A - \frac{1}{8}A^3$. Получите его решение при $\lambda > 0$ и постройте соответствующий график.

78. Покажите, что решение укороченного уравнения Ван-дер-Поля в случае $\lambda < 0$ при больших временах отвечает экспоненциальному затуханию. Соответствует ли множитель перед экспонентой начальной амплитуде колебаний? Почему?

79. В рамках метода медленно меняющихся амплитуд оцените время установления квазигармонических колебаний в системе, описываемой уравнением Ван-дер-Поля. Начальная амплитуда A_0 много меньше амплитуды

установившихся колебаний. Как ведет себя время установления при приближении параметра к бифуркационному значению?

80. Для системы, описываемой уравнением $\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu x^3 = 0$, получите укороченное уравнение. Покажите, что оно соответствует обобщенному уравнению для бифуркации Андронова Хопфа.

81. Напишите уравнение типа уравнения Ван-дер-Поля, в котором наблюдается субкритическая бифуркация Андронова Хопфа.

82. Рассмотрите систему Ван-дер-Поля под гармоническим воздействием $\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = b \sin \Omega t$ положив $x = (ae^{i\Omega t} + k.c.) / 2$, получите укороченное уравнение $\dot{A} + i\Delta A = \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{8}|A|^2 A + \frac{b}{2}$. Здесь $\Delta = \Omega - 1$ - отстройка частоты внешнего воздействия от собственной. Представьте это уравнение в декартовых координатах (x, y) , считая $A = x + iy$ и в полярных, считая $A = a e^{i\varphi}$, где a - действительная амплитуда, φ - фаза колебаний.

83. Используя укороченное уравнение для системы Ван-дер-Поля под гармоническим воздействием покажите, что в случае малого воздействия уравнения для амплитуды и фазы можно считать независимыми:

$$\dot{a} = \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{8}a^3,$$

$$\dot{\varphi} = -\Delta - \varepsilon \sin \varphi,$$

где $\varepsilon = b/4\sqrt{\lambda}$. Обсудите эволюцию фазового портрета при фиксированных λ и b с ростом ε . Какой случай соответствует режимам захвата, а какой биениям? Укажите разграничительную линию (границу языка Арнольда) на плоскости безразмерных частоты Δ и амплитуды воздействия ε .

84. Проинтегрируйте уравнение $\dot{\varphi} = -\Delta - \varepsilon \sin \varphi$, описывающее фазовую синхронизацию. Обсудите его свойства с точки зрения этого явления.

Жесткое возникновение автоколебаний

85. Покажите, что уравнение $\ddot{x} - (\varepsilon + \mu \dot{x}^2 - \dot{x}^4)\dot{x} + x = 0$ приводится к традиционной модели автогенератора с жестким возбуждением $\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$.

86. Приведите приближенно уравнение $\ddot{x} - (\varepsilon + \cos x)\dot{x} + x = 0$ к традиционной модели автогенератора с жестким возбуждением, и найдите в этом приближении значение параметра ε , отвечающее жесткому возникновению предельного цикла.

87. Для модели автогенератора

$$\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$$

укажите значения параметров, при которых возникающий жестким образом предельный цикл будет иметь заданный размер R_0 .

88. Для модели автогенератора с жестким возбуждением

$$\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$$

изобразите разбиение k, λ плоскости на области, отвечающие различным возможными типами динамики. Изобразите фазовые портреты для каждой из областей. Укажите устойчивые и неустойчивые предельные множества.

89. Для той же модели постройте графики зависимости амплитуды колебаний от параметра λ для $k < 0$, $k = 0$ и $k > 0$. В каком случае наблюдается гистерезис? Покажите, что вблизи точки жесткого перехода зависимость амплитуды от параметра λ имеет корневой характер. На полученных графиках покажите пунктиром зависимость амплитуды неустойчивого предельного цикла от λ .

90. Постройте зависимости амплитуды автоколебаний от параметра k для $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ и $\lambda > 0$.

Релаксационные колебания

91. Исследуйте релаксационные колебания, описываемые уравнением Рэлея в форме, соответствующей малому параметру перед старшей производной, $\varepsilon \ddot{x} - (1 - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0$.

- Постройте линию медленных движений на фазовой плоскости и фазовый портрет.
- Найдите диапазон изменения координаты x и скорости $\dot{x}$ на участке медленных движений.
- Найдите связь между скоростью $\dot{x}$ и временем t на фазе медленных движений. Постройте график зависимости скорости от времени.
- Оцените период колебаний.

92. Используя результат предыдущей задачи, получите выражение для периода релаксационных колебаний для уравнения Рэля в “стандартной” форме

$$\ddot{x} - (\lambda - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0.$$

93. Изобразите предельные циклы для автогенератора с жестким возбуждением, описываемого уравнением $\ddot{x} - (\varepsilon + \mu \dot{x}^2 - \dot{x}^4)\dot{x} + x = 0$, в случае релаксационных колебаний. Обсудите бифуркации циклов, возможные в этой системе.

94. На ленте транспортера, движущегося с постоянной скоростью V , находится тело массы m , прикрепленное к пружине жесткости k . Зависимость силы трения от относительной скорости движения груза и транспортера при $v > 0$ дается соотношением $f(v) = a - b \ln(1 + v^2/u^2)$, где a, b, u — некоторые положительные константы. Коэффициент вязкого трения груза о воздух α . Найдите линию медленных движений и постройте фазовый портрет в случае релаксационных колебаний. Найдите диапазон изменения скорости и координаты груза в режиме релаксационных колебаний. Описываются ли эти колебания уравнением Рэля?

Сечение Пуанкаре. Одномерные дискретные отображения

95. Дискретное отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ имеет неподвижную точку x^* такую, что $f'(x^*) \neq 0$. Покажите, что поведение последовательности $y_n = x_n - x^*$ в малой окрестности этой точки соответствует сходящейся геометрической прогрессии, если $|f'(x^*)| < 1$ и расходящейся при $|f'(x^*)| > 1$.

96. Покажите, что отображение $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$ можно использовать для вычисления квадратного корня из числа a (такой способ применяли еще в древнем Вавилоне). Найдите первые пять членов последовательности x_n , порождаемой этим отображением при $a = 2$. Величину x_0 положите равной единице. Проиллюстрируйте решение задачи с помощью итерационной диаграммы. Покажите, что неподвижная точка этого отображения устойчива. Можно ли использовать отображение $x_{n+1} = a/x_n$?

97. Найдите неподвижные точки отображения $x_{n+1} = \varepsilon \log(1 + x_n)$ и исследуйте их устойчивость. Решение проиллюстрируйте итерационной диаграммой.

98. Используя укороченное уравнение Ван-дер-Поля, исследуйте его на устойчивость. Покажите, что соответствующее дискретное отображение имеет вид $x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2(e^{2\pi\lambda} - 1)/4\lambda + 1}}$ и изобразите соответствующие итерационные диаграммы.

99. Получите отображение, соответствующее укороченному уравнению для колебательного контура с нелинейным резистором из задачи 61. Изобразите для него итерационную диаграмму.

100. Получите отображение, соответствующее укороченному уравнению для автогенератора с жестким возбуждением $\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$ в случае $k = 0$.

101. Постройте итерационную диаграмму для одномерного отображения, отвечающего представленным на рис.23 фазовому портрету системы и секущему лучу.

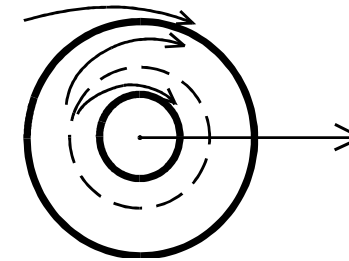


Рис.23

Нелинейные колебания. Задачи для компьютерного исследования.

102. **Фазовые портреты нелинейных систем.** Постройте фазовые портреты перечисленных ниже систем. Для этого можно рекомендовать следующий метод: выбранный фрагмент фазовой плоскости равномерно покрывается решеткой из точек. Затем исходные уравнения решаются вперед и назад

во времени, пока соответствующие фазовые траектории не выйдут за границы области или не придут к предельному притягивающему множеству. Этот метод обеспечивает адекватное заполнение области траекториями.

Динамические системы для исследования.

- Осциллятор с кубической нелинейностью

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0.$$

- Осциллятор с квадратичной нелинейностью

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^2 = 0.$$

- Осцилляторы из задач 32, 33, 34.

Обсудите вид фазовых портретов, характерные особенности этих портретов, их трансформации при вариации параметров, а также устройство бассейнов притяжения неподвижных точек.

103. Нелинейные преобразования сигналов и спектров. Исследуйте преобразование гармонического сигнала $x = A \cos \omega t$ нелинейным элементом, т.е. рассмотрите его преобразование $y = f(x)$ при различном выборе функции $f(x)$, например, $f(x) = a + bx, x^2, x^3, x^2 + x^3, \sin x, xe^{-x^2}$. Выберите подходящий шаг дискретизации времени и постройте графики зависимости входного и выходного сигнала от времени при разных значениях амплитуды A . Как трансформируется при увеличении амплитуды спектр выходного сигнала?

104. Математический маятник. Проведите следующее исследование уравнения математического маятника $\ddot{x} + \sin x = 0$.

- Создайте анимационную программу, демонстрирующую движение маятника.
- Постройте зависимость от времени координаты и скорости. Пронаблюдайте колебания с малой амплитудой и движение вблизи сепаратрисы. Для случая умеренных колебаний постройте другим цветом график, отвечающий решению, полученному методом медленно меняющихся амплитуд, и сравните его с точным. То же для движения вблизи сепаратрисы.
- Постройте график зависимости периода колебаний от амплитуды. Для этого используйте точное выражение через эллиптический интеграл, либо метод Эно, в рамках которого исходное уравнение численно решается до начала повторений. Постройте соответствующий

график и сравните его с выражением в приближении слабой нелинейности.

- Постройте спектр Фурье скорости колебаний и наблюдайте его эволюцию с ростом амплитуды: от малых колебаний до движения вблизи сепаратрисы. В последнем случае сравните численный результат с соответствующим аналитическим решением (задача 52).
- Постройте фазовый портрет консервативного и диссипативного осцилляторов. Пронаблюдайте его эволюцию с ростом параметра диссипации.

105. Нелинейный резонанс. Постройте систему резонансных кривых для нелинейного осциллятора с кубической нелинейностью $\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = b \cos \omega t$ (см. задачу 64) для различных значений параметра диссипации. Покажите другим цветом линию $\omega = \omega_0 - \frac{3}{8} \frac{\beta}{\omega_0} |A|^2$. Обсудите возможность гистерезиса. Чем отличаются случаи положительных и отрицательных значений параметров нелинейности β ? Решая численно исходное уравнение, получите фазовый портрет на плоскости $(x, \dot{x})$, отвечающий колебаниям осциллятора точно на частоте внешней силы. Параметры осциллятора подберите самостоятельно. Обратите внимание на трансформацию фазового портрета при изменении параметров, не описывающуюся в рамках приближения, для которого получено уравнение резонансной кривой. (Можно рекомендовать построить рядом истинный фазовый портрет установившегося движения и портрет, который восстанавливается из метода медленно меняющихся амплитуд.)

106. Система Ван-дер-Поля. Для осциллятора Ван-дер-Поля $\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0$ постройте для различных значений параметра λ графики реализаций $x(t)$. Нанесите другим цветом приближенное решение, полученное методом медленно меняющихся амплитуд, и сравните его с точным (задача 77). Постройте предельные циклы и наблюдайте их эволюцию с ростом λ . Отметьте существование релаксационных колебаний.

107. Жесткое возникновение автоколебаний. Для модели автогенератора с жестким возбуждением $\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$ постройте все характерные фазовые портреты на (λ, k) плоскости, на которую предварительно нанесите линии прямой и обратной бифуркаций Андронова Хопфа и рождения цикла из сгущения фазовых траекторий, полученную с помощью метода медленно меняющихся амплитуд (задача 88). Обсудите трансформации

ции фазового портрета. Не ограничивайте исследование областью малых значений параметров. В чем особенности поведения системы вне её?

108. Фазовая синхронизация. Постройте семейство функций, являющихся решениями канонического уравнения $\dot{\varphi} = -\Delta - \varepsilon \sin \varphi$, описывающего синхронизацию, для различных начальных значений фазы (см. задачи 82, 83). Варьируя ε , наблюдайте фазовые захваты и их превращение в режимы биений. Постройте спектры реализаций $x(t) = \cos(\Omega t + \varphi(t))$. Обсудите их устройство в режиме биений. Определите частоту биений.

109. Метод дискретных (точечных) отображений. С помощью метода сечений Пуанкаре постройте одномерные отображения для двумерных потоков. Выберите прямую линию или луч, пересечение с которым определит сечение Пуанкаре. (Для этого может понадобиться предварительно построить аттрактор на фазовой плоскости.) Изучите трансформацию вида одномерного отображения при вариации параметров. Для полученного численно отображения постройте несколько итерационных диаграмм, характеризующих типичные режимы динамики.

Системы для исследования:

- Уравнение Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

- Автогенератор с жестким возбуждением:

$$\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0.$$

- Трехпараметрическая модель автогенератора с жестким возбуждением:

$$\ddot{x} - (\lambda + kx^2 + px^4 - x^6)\dot{x} + x = 0.$$

Ряд Тейлора и модели

1. Маленькое тело массы m движется по плоской кривой $y=f(x)$. Какая математическая аппроксимация этой кривой достаточна, чтобы верно задать скорость тела в некоторой точке кривой? Силы, действующие на тело в этой точке?

2. Эллипс задан уравнением $y^2/a^2 + x^2/b^2 = 1$. Получите аппроксимацию эллипса кубической параболой и параболой четвертой степени в окрестности точки $x=0$. С помощью этой аппроксимации определите ординату точки пересечения эллипса с осью абсцисс и сравните полученный результат с точным значением.

3. Свойства некоторой системы определяются функцией $f(x) = Ax + Bx^2 + C \sin x + Dx \cos x + E \sinh x$, зависящей от пяти параметров. Найдите число существенных параметров, которые необходимы при использовании аппроксимации с помощью двух первых членов ряда Тейлора. Что означает свойство “полноты” аппроксимирующей “модельной” функции в применении к обсуждаемой задаче?

4. Точки A и B расположены на фиксированном расстоянии друг от друга. Точки соединены некоторым путем, заданным гладкой функцией $f(x)$. Используя разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора, постройте систему моделей, позволяющих охарактеризовать путь из точки A в точку B . Каково число параметров этих моделей? Расстояние AB примите за единицу.

5. Линза из материала с показателем преломления n образована плоской поверхностью и поверхностью, полученной вращением вокруг оси y некоторой четной функции $y(x)$ с единственным квадратичным экстремумом, расположенным в точке $x=0$. Обоснуйте универсальные свойства такой фокусирующей системы.

6. Консервативный осциллятор характеризуется некоторой потенциальной функцией $U(x)$. Сколько членов ряда Тейлора надо учесть в разложении функции $U(x)$, чтобы получить существенно двухпараметрическую модель консервативного нелинейного осциллятора? Постройте такую модель.

7. Используя примеры, обсудите понятие универсальности применительно к модели осциллятора с кубической нелинейностью.

8. Обсудите, что означает свойство “полноты” модели, содержащей параметры, на примере автогенератора с жестким возбуждением.

9. Отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ задано некоторой гладкой функцией $f(x)$. Используя разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора, а также замены переменной и параметров, получите одно- и двухпараметрические универсальные модельные отображения.

Понятия типичности и коразмерности

10. Кубическое уравнение $x^3 + px + q = 0$ может иметь три, два или один действительный корень. Изобразите плоскость параметров p, q , разбитую на соответствующие области и исследуйте вопрос о типичности и коразмерности каждой из возможных ситуаций.

11. Как известно, космическая станция в поле массивной звезды может двигаться по эллипсу, параболе или гиперболе. Какие из этих траекторий относятся к случаям общего положения, а какие - к вырожденным?

12. Как могут располагаться друг относительно друга плоская кривая и касающаяся ее окружность? Какие из этих вариантов соответствуют случаям общего положения, а какие представляют собой вырожденные ситуации? Какова коразмерность последних?

13. Какие возможны ситуации взаимного расположения тора и плоскости? Какие из них соответствуют случаям общего положения, а какие являются вырожденными? Какова их коразмерность? В своих рассуждениях используйте метод малых шевелений.

14. На доске массы M лежит небольшой брусок массы m (рис.24). Коэффициент трения между доской и бруском равен μ_1 , а между доской и поверхностью - μ_2 . К бруску приложена горизонтальная сила F . Укажите все возможные качественно разные ситуации поведения системы и изобразите на плоскости параметров μ_1, μ_2 области, соответствующие различным типам динамики. Укажите возможные негрубые ситуации коразмерности один и два.

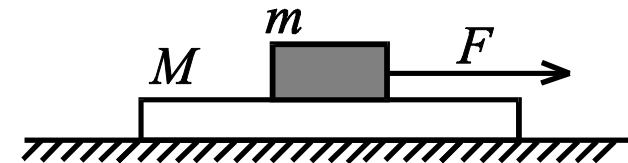


Рис.24

15. Укажите случаи общего положения, а также вырожденные ситуации коразмерности один и два на фазовых диаграммах состояния вещества.

16. Иголку бросают на плоскость, на которой (а) выделена некоторая область, (б) проведена линия, (в) поставлена точка. Пересечет ли иголка данный геометрический объект в типичном случае? Охарактеризуйте коразмерность различных возможных ситуаций.

“Игрушки” теории катастроф

17. Возьмите металлическую линейку и сожмите ее так, чтобы она прогнулась в одну сторону. Попробуйте “ликвидировать” этот прогиб, надавливая на выгнувшуюся линейку другой рукой. Пронаблюдайте происшедшую катастрофу.

18. Изготовьте машину Зимана (рис.25). Проведите эксперименты с этой машиной и определите примерное расположение области мультистабильности на плоскости x, y , где x, y - координаты конца указки.

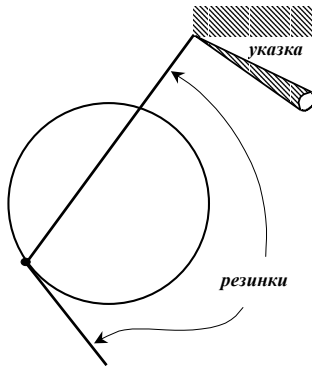


Рис.25.

19. Имеется машина Зимана со следующими параметрами: диаметр диска 1, длина резинок в нерастянутом состоянии 1, расстояние от центра диска до точки прикрепления одной резинки 4. Найдите расположение двух “клювов” области мультистабильности - ближайшего и наиболее удаленного от центра диска.

20. Рассмотрите параболическую качалку, форма которой задана уравнением $y = x^2$ (рис.26). В системе координат, привязанной к качалке, найдите

геометрическое место точек, размещение грузика в которых обеспечивает существование такого состояния равновесия, что качалка касается горизонтальной поверхности в точке x_0 . Найдите условия устойчивости этого положения равновесия. Как располагается точка потери устойчивости относительно центра кривизны параболы?

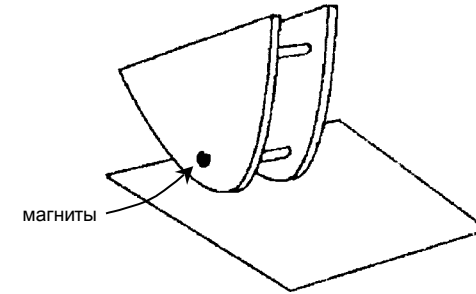


Рис.26.

21. Эволютой кривой называется кривая, представляющая собой геометрическое место центров кривизны для исходной кривой. Найдите эволюту для параболической качалки. Каковы координаты точки “клюва” на эволюте? Проинтерпретируйте эту кривую с точки зрения существования и сосуществования устойчивых состояний равновесия качалки.

22. Изготовьте качалку и приведите с ней эксперименты в духе теории катастроф.

23. Решите задачу Архимеда об устойчивости судна с параболическим профилем.

Критические точки функций одной переменной

24. Какую критическую точку имеет функция $f(x) = x(1 - \cos x)$ в точке $x=0$? Какие конфигурации функции в окрестности критической точки возникнут при введении возмущения вида px , где p - некоторый малый параметр? Все ли возможные трансформации $f(x)$ в окрестности кубической точки перегиба можно пронаблюдать, вводя такое возмущение?

25. Массивная платформа движется по прямой вдоль оси x со скоростью V . На платформе находится прикрепленный к пружине жесткости k груз

массы m , совершающий колебания вдоль оси x с амплитудой a . Какие критические точки может иметь функция, определяющая зависимость от времени координаты груза относительно неподвижного наблюдателя? Какие из них "более типичны"?

26. Найдите явный вид замены переменной и параметров, приводящей полином $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ к виду, не содержащему член x^3 .

27. Рассмотрите возмущение функции $f(x)=x^4$ вида px , где p - некоторый малый параметр. Какое число квадратичных экстремумов возникает при "малом шевелении" параметра p ?

28. Небольшое тело массы m может скользить без трения по горизонтальному стержню (рис.27). Тело прикреплено пружиной жесткости k к точке O , находящейся на расстоянии l от стержня. Длина пружины в нерастянутом состоянии l_0 . Как трансформируется график функции $U(x)$ при изменении параметра l ? Какие критические точки имеет функция $U(x)$? Укажите коразмерность вырожденной критической точки. Все ли возможные трансформации, характерные для снятия вырождения такой критической точки, можно пронаблюдать, варьируя l ? Как модифицировать задачу, чтобы все они стали возможны?

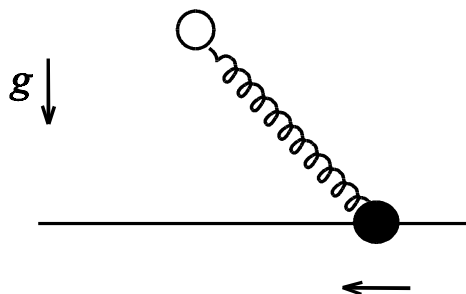


Рис.27.

29. Чему равна коразмерность критической точки x^6 на классе гладких функций?

Критические точки функций двух переменных

30. Найдите матрицу Гессе в критических точках типа "максимум", "минимум" "перевал", "обезьянье седло", "желоб" и "скрещенные желоба" и выясните, какие из них являются вырожденными, а какие нет.

31. Изобразите систему линий уровня, соответствующую всем перечисленным в предыдущей задаче критическим точкам.

32. Найдите в явном виде выражение для потенциала $\varphi(x,y)$ в системе двух параллельных нитей, несущих положительные заряды с одинаковой линейной плотностью q . Постройте картину линий уровня функции $\varphi(x,y)$ – так называемые овалы Кассини. Нити расположены на расстоянии d .

33. Какие критические точки имеет функция $\varphi(x,y)$ из предыдущей задачи? В их окрестности выделите у функции $\varphi(x,y)$ морсовскую часть, выполнив соответствующее разложение в ряд Тейлора.

34. Представьте себе тор в трехмерном пространстве x,y,z . Какие критические точки располагаются на поверхности тора, если считать, что она локально задает некоторую функцию $z(x,y)$? Какие из этих точек являются морсовскими? Рассмотрите различные ориентации тора в пространстве.

35. Какие объекты на фазовой плоскости консервативного осциллятора соответствуют морсовским седлам?

36. Докажите, что квадратичная форма четырех переменных может быть заменой переменных приведена к виду "морсовского седла".

37. К какой из канонических кубик приводится "обезьянье седло" $z = (y^3 - y^2x)$?

38. К какой из канонических кубик приводится кубическая форма $(ax + by)(x^2 - y^2)$ в случаях вырождения?

39. Укажите, какая из канонических кубик соответствует следующим полиномам: а) $x^3 - 3x^2y + 2xy^2$, б) $x^3 - 3x^2y + 6xy^2 - 4y^3$.

40. Покажите, что количество канонических "квартичных" форм от двух переменных, т.е. форм четвертой степени, бесконечно велико.

Катастрофа коразмерности один - складка

41. Как будет вести себя качалка, если прикрепить магнит в точке на границе области устойчивости, т.е. на линии складки.

42. Для системы двух проводов с током, из которых один удерживается упругой пружиной, а другой неподвижен (рис.28) покажите, что реализуется катастрофа складки, и вблизи точки катастрофы зависимость энергии от координаты может быть приведена к соответствующей канонической форме.

Величины токов I и i , коэффициент жесткости пружины k , расстояние между проводниками в отсутствие токов l .

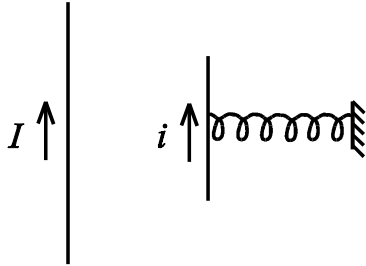


Рис.28.

43. Шарик массы m , несущий заряд q , может скользить без трения по горке, профиль которой задан функцией $y = a \ln(x^2/a^2 + 1)$, в электрическом поле напряженности E , направленном по горизонтали. Проследите за трансформацией зависимости потенциальной энергии шарика от координаты x при изменении параметра mg/qE . Определите тип катастрофы, происходящей в системе и изобразите ее многообразие.

44. В пробирке под невесомым поршнем находится идеальный газ. Поверх поршня налита ртуть (рис.29). Газ очень медленно нагревают. При этом поршень поднимается, и ртуть постепенно выливается из пробирки. При превышении некоторого значения температуры T_c происходит "катастрофа": поршень поднимается вверх и выбрасывает оставшуюся ртуть из пробирки, даже если температура газа больше не увеличивается. Установите тип наблюдающейся катастрофы и постройте ее многообразие. Атмосферное давление p_0 , начальная температура газа T_0 , длина пробирки l , первоначально газом занята часть пробирки l_0 .

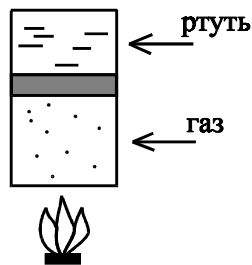


Рис.29.

Катастрофа коразмерности два - сборка

45. Шарик массы m может без трения скользить по стержню, наклоненному под углом α к горизонту. Шарик прикреплен к пружине жесткости k , второй конец которой неподвижно зафиксирован на расстоянии a от стержня в точке, принадлежащей проходящей через стержень вертикальной плоскости (рис.30). Длина пружины в нерастянутом состоянии l . Как трансформируется при изменении параметров вид зависимости потенциальной энергии от координаты шарика x , отсчитываемой вдоль стержня? Найдите линии складок и точку сборки на плоскости параметров $\alpha, l/a$.

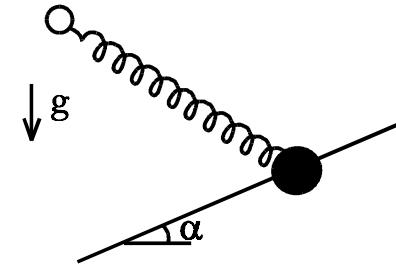


Рис.30.

46. Маленькая бусинка массы m может без трения скользить по тонкому проволочному кольцу радиуса R (рис.31). Кольцо вращают с частотой ω вокруг вертикальной оси, проходящей через плоскость кольца на расстоянии a от его центра. Проследите за трансформацией зависимости потенциальной энергии бусинки от ее координаты во вращающейся системе отсчета. Найдите линии складок и точку сборки на плоскости параметров $a, \omega^2 R/g$.

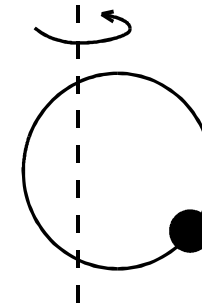


Рис.31.

47. Покажите, что в системе из задачи 22 из главы “Колебания” реализуется катастрофа сборки.

48. Изобразите поверхность, задаваемую уравнением газа Ван-дер-Ваальса в пространстве давление P , объем V , температура T и обсудите ее устройство с точки зрения теории катастроф. С помощью компьютера или калькулятора постройте линии складок и точку сборки в координатах P/P_k , T/T_k , где P_k и T_k – известные из термодинамики критические значения температуры и давления. На этом же графике постройте аппроксимацию в виде “полукубического” острия.

49. Для задачи о туннельном диоде (задача 23 из главы “Колебания”), найдите координаты точки сборки на плоскости $\mathcal{E}$, R и изобразите расположение вольт-амперной характеристики диода и нагрузочной прямой в различных точках в окрестности этой точки и непосредственно в ней.

50. Параметры системы, демонстрирующей катастрофу сборки, медленно изменяют так, что точка на плоскости параметров обходит сборку 5 раз (рис.32а). Сколько жестких переходов происходит в системе? Для маршрутов на рис.32б-г, изобразите качественно зависимость состояния системы от параметра, отсчитываемого вдоль этих маршрутов.

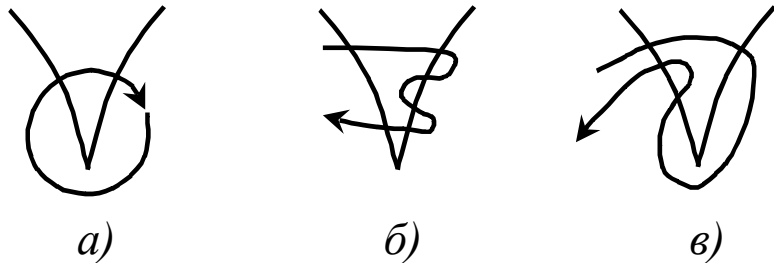


Рис.32

51. Как будет вести себя качалка, если прикрепить магнит в точке сборки?

52. Чем отличаются свойства нелинейного осциллятора в случаях, когда зависимость потенциальной энергии от координаты имеет катастрофу сборки и двойственной сборки?

53. Изобразите различные возможные проекции тора на плоскость. Укажите точки сборки, которые возникают при таком проектировании. Обсудите проблему устойчивости сборок при малом шевелении тора.

54. Покажите, что траектория точки на ободе колеса, катящегося без проскальзывания, имеет острия с характерной “полукубической” особенностью.

Катастрофа коразмерности три - ласточкин хвост

55. Для катастрофы ласточкин хвост, соответствующей потенциальной функции $U(x) = x^5/5 + ax^3/3 + bx^2/2 + cx$, изобразите проекции линий сборок на плоскости (a, b) , (a, c) и (c, b) . Для каждой из проекций укажите показатель степени, который отвечает полученным остриям.

56. Покажите, что в сечениях катастрофы ласточкин хвост плоскостью $a = \text{const}$ линии складок подходят к точкам сборки по универсальному “полукубическому” закону.

57. Изобразите характерные конфигурации потенциальной функции $U(x)$, отвечающие сечению катастрофы ласточкин хвост плоскостью $a = \text{const}$ для $a > 0$.

58. На рис.33 изображены несколько маршрутов на плоскости параметров b, c , отвечающих сечению катастрофы ласточкин хвост плоскостью $a = \text{const}$. Изобразите, как происходит трансформация потенциальной функции $U(x)$ при движении вдоль этих маршрутов.

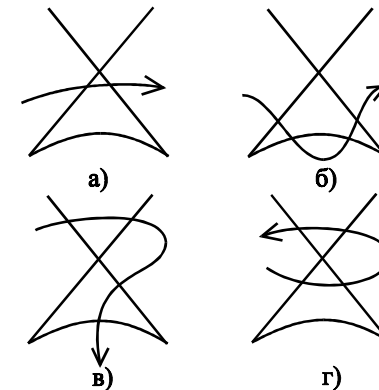


Рис.33.

59. Пусть потенциальная функция задана полиномом $U(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$. Какие геометрические объекты образуют в пространстве параметров A, B, C, D складки, сборки, “линия самопересече-

ний", ласточкин хвост? Дайте ответ, не проводя детальных вычислений, а используя понятие коразмерности.

60. Покажите, что для полинома $U(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$ точка катастрофы ласточкин хвост реализуется при выполнении условий $B = 2A^2/5$, $C = 2A^3/25$, $D = A^4/125$.

61. В системе из задачи 22 из главы "Колебания" шарик маятника несёт заряд q . На расстоянии a от него (в ситуации, когда пружина не растянута) помещен неподвижный заряд $-Q$. Нарисуйте график потенциальной энергии $U(x)$ в зависимости от координаты шарика. Сколько критических точек может иметь функция $U(x)$? Покажите, что в системе может наблюдаться катастрофа ласточкин хвост и найдите соответствующие значения параметров.

62. Для предыдущей задачи получите выражение для потенциальной энергии шарика в виде полинома пятой степени, используя разложение в ряд Тейлора электростатической энергии как функции координаты x . Используя эту аппроксимацию, получите значения параметров, соответствующих точке катастрофы ласточкин хвост. Сравните полученные значения с точными. Можно ли считать полученное приближенное решение приведением катастрофы ласточкин хвост к канонической форме? Почему?

Каспидные катастрофы в двумерных системах

63. По горизонтальной плоскости может кататься шарик массы m , несущий положительный заряд q . Под плоскостью на расстоянии a от нее и на расстоянии l друг от друга помещены два отрицательных заряда Q_1 и Q_2 (рис.34). Найдите значения параметров, отвечающих точке катастрофе самой высокой коразмерности (какая это катастрофа?) и получите уравнение, задающее линии уровня потенциальной энергии шарика в этой точке. Решите эту же задачу в случае, если заряды Q_1 и Q_2 положительны.

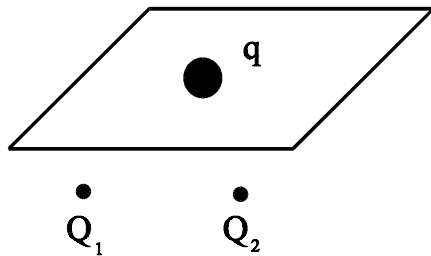


Рис.34

64. Придумайте физическую систему, для которой в точке катастрофы сливаются максимум и два седла.

65. Изобразите картину линий уровня потенциальной энергии $U(x, y) = \frac{x^4}{4} + a\frac{x^2}{2} + bx + y^2$ в различных характерных точках плоскости параметров вблизи точки сборки.

66. Решите ту же задачу для функции $U(x, y) = \frac{x^4}{4} + a\frac{x^2}{2} + bx - y^2$. Укажите линию на плоскости параметров, соответствующую нелокальному бифуркационному множеству.

67. Установите вид сепаратрис для системы линий уровня в двумерных системах в точках катастроф типа ласточкин хвост и бабочка.

68. Движение консервативного осциллятора задается потенциальной функцией $U(x)$. Какие катастрофы - каспидные или омбилические - могут происходить с линиями уровня на фазовой плоскости осциллятора? Будут ли "проблемы" с приведением этих катастроф к каноническим формам?

69. Найдите замену переменных, приводящую к канонической форме катастрофы сборки функцию $U(x, y) = y^3/3 - x^2y - 2y^2$. Каков «тип» этой сборки (характерный для задачи 64 или 65)?

70. Рассмотрите функцию $U(x, y) = (x^2 - 1)y - \varepsilon x$. Найдите критические точки на плоскости x, y и "высоту", на которой они расположены. Постройте систему линий уровня для случаев $\varepsilon = 0$, $\varepsilon < 0$, $\varepsilon > 0$, укажите сепаратрисы и покажите, что наблюдается нелокальная бифуркация.

71. Рассмотрите следующую систему: вертикально висящий маятник, несущий заряд q , расположен посередине между двумя вертикальными нитями, несущими заряд с линейной плотностью λ_1 и λ_2 . Колебания могут происходить и в поперечном направлении. Найдите потенциальную энергию маятника как функцию координат x, y . Отклонения маятника от вертикали считайте малыми. Изобразите характерный потенциальный рельеф и картину линий уровня. Покажите, что при $\lambda_1 = \lambda_2$ имеет место нелокальная бифуркация и изобразите соответствующую картину линий уровня. Покажите, что соответствующая бифуркационная линия при вариации параметра $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ обрывается в точке, отвечающей сборке того же типа, что и в задаче 65. Изобразите соответствующую эволюцию линий уровня.

Катастрофа коразмерности три – эллиптическая омбилика

72. Для эллиптической омбилики, заданной потенциальной функцией $U(x, y) = x^2 y - y^3 / 3 + a(y^2 + x^2) + bx + cy$, получите уравнение для линий сборок в пространстве параметров a, b, c .

73. Найдите выражение для потенциальной функции $U(x, y)$ в точке сборки $a=1, b=0, c=3$. Каков “тип” (см. задачи 64 и 65) этой сборки?

74. Покажите, что линия складок в сечении $a=1$ является гипоциклоидой – кривой, получаемой при движении точек катящейся окружности по внутренней части другой окружности.

75. Исследуйте эволюцию критических точек на плоскости переменных x, y при движении вдоль линии $a=1, b=0$. (Нарисуйте предварительно линию складок, точки сборки и выбранный маршрут.) Покажите, что

а) при $c < -1$ имеются два седла, которые с ростом c двигаются по линии $y=-1$ навстречу друг другу;

б) при $c=-1$ в точке $x=0, y=1$ рождаются минимум и седло;

в) при $-1 < c < 3$ эти седло и минимум расходятся по оси x в противоположные стороны, а два исходных седла продолжают сближаться;

г) при $c=3$ два седла и минимум сливаются в точке $x=0, y=-1$;

д) при $c > 3$ остаются два седла, которые расходятся по оси x с ростом c .

Дайте соответствующие иллюстрации на плоскости переменных x, y .

76. Изобразите нелокальное бифуркационное множество в пространстве параметров a, b, c .

77. Объясните симметрию бифуркационного множества эллиптической омбилики. Для этого покажите, что повороты системы координат x, y на 120° и 240° соответствуют аналогичным повторам на плоскости параметров b, c . (Указание. Используйте комплексное представление преобразования поворота.)

78. Имеется система трех одинаковых параллельных, равномерно заряженных нитей. Нити располагаются так, что их пересечение с перпендикулярной плоскостью образуют равносторонний треугольник. Покажите, что электростатический потенциал в такой системе как функция координат на этой плоскости имеет критическую точку, отвечающую росту катастрофы эллиптической омбилики.

79. Придумайте, как можно использовать предыдущую задачу, чтобы реализовать систему с катастрофой эллиптической омбилики. (Указание. Используйте маятник, несущий заряд Q).

Катастрофа коразмерности три – гиперболическая омбилика

80. Проведите исследование гиперболической омбилики, заданной потенциальной функцией $U(x, y) = x^2 y + y^3 / 3 + a(y^2 - x^2) + bx + cy$, по следующей схеме:

а) получите выражение для критических точек;

б) найдите уравнение для линий складок в сечении пространства параметров плоскостью $a=1$;

в) найдите точки сборки в этом сечении и напишите уравнение для линий сборки в пространстве параметров;

г) выясните расположение и характер критических точек на плоскости x, y при $a=1, b=0$ и различных c ;

д) сделайте выводы об устройстве бифуркационного множества.

Катастрофы и теория упругости

81. Оцените критическую нагрузку для стального стержня длины 20 см и диаметром 5 мм.

82. Найдите критическую нагрузку для обычной стальной линейки. На сколько надо превысить эту нагрузку, чтобы линейка выгнулась на 2 см?

83. Получите выражение для энергии упругого стержня как функции амплитуды “выпучивания” a , считая что конфигурация стержня описывается выражением $y(s) = af(s)$, где $f(s) = s(s-L)/4$. Здесь s – координата, отсчитываемая вдоль стержня. Найдите с помощью этого приближения критическую нагрузку и соответствующий степенной закон для амплитуды a . Сравните результаты с полученными для случая $f(s) = \sin \pi s / h$.

84. Попробуйте угадать без вычислений структуру выражения для энергии Эйлера стержня в двухмодовом приближении с точностью до членов четвертого порядка. Представляет ли оно собой элементарную катастрофу Тома?

85. Найдите критическую нагрузку в задаче о выпучивании Эйлера стержня в многомодовом приближении в случае, когда он лежит на упругом основании с заданным коэффициентом жесткости.

86. Найдите значения коэффициента жесткости основания, при котором теряют устойчивость сразу две моды.

87. Найдите критические значения нагрузок потери устойчивости мод в случае отсутствия упругого основания. В каком порядке моды теряют устойчивость? Покажите, что соответствующие критические значения соответствуют простому пересчету длины стержня и объясните, почему это так.

Катастрофы и физика фазовых переходов

88. Изобразите линии фазовых переходов жидкость-газ, жидкость-твердое тело, газ-твердое тело, тройную и критическую точки вещества на P, T плоскости. Покажите характерные конфигурации зависимости потенциала Гиббса от параметра порядка во всех характерных точках такой диаграммы.

89. Используя теорию Ландау, найдите скачок теплоемкости C_V в точке фазового перехода.

90. Изобразите качественно зависимость термодинамического потенциала от параметра порядка для системы с метастабильным фазовым переходом 1-го рода.

91. Дайте интерпретацию закона соответственных состояний в духе теории катастроф.

92. Какой параметр в задаче о выпучивании стержня является аналогом параметра порядка в физике фазовых переходов?

93. Для модели Гинзбурга-Ландау с так называемым трикритическим термодинамическим потенциалом $\Phi(\eta) = \frac{1}{6}\eta^6 + \frac{a}{4}\eta^4 + \frac{b}{2}\eta^2 + h\eta$ найдите линии фазовых переходов 1-го рода на b, h плоскости при $a = 1$. Здесь h – параметр порядка. Как они трансформируются при вариации a ?

Каустики и волны

94. На борту корабля, стоящего у причала, можно наблюдать медленно меняющуюся картину бликов, возникающую из-за отражений солнечного света от воды. Обсудите свойства яркости этой картины с точки зрения теории катастроф.

95. При отражении от цилиндрической поверхности возникает яркая каустика и еще более яркая точка сборки. Проведите экспериментальное исследование этой каустики (в частности определите положение точки сборки) и сравните с результатами теоретического анализа.

96. Пронаблюдайте картину, возникающую при прохождении света через “гофрированное” стекло. Что будет происходить при шевелении стекла?

97. Обсудите известные вам аберрации линз с позиций теории катастроф.

98. В узких заливах океанские волны могут образовывать каустики. Обсудите проблему безопасности плавания в таких заливах.

99. В момент времени $t=0$ волновой фронт имеет форму параболы $y=x^2$. Получите уравнение линии, задающей положение волнового фронта в момент времени t . Скорость распространения волны c . Когда волновой фронт претерпит катастрофу ласточкин хвост?

100. Какие катастрофы волновых фронтов акустических волн наиболее опасны с точки зрения возможных разрушений?

Колебания

101. Найдите зависимость частоты линейных колебаний от параметров для механической системы из задачи 45. Покажите, что в точках катастроф частота обращается в ноль, а период – в бесконечность (феномен “смягчения мод”).

102. То же самое для системы из задачи 46.

103. Исследуйте вид поверхности $\omega^2 = \omega^2(a, b)$, дающей зависимость частоты линейных колебаний от параметров для нелинейного осциллятора в окрестности катастрофы сборки $\ddot{x} + ax + b + x^3 = 0$. Сколько листов имеет эта поверхность? Чему это отвечает с точки зрения конфигурации потенциальной функции? Какие листы соответствуют устойчивым, а какие неустойчивым движениям? Каков смысл линии самопересечения? Покажите, что в окрестности линии складки и точки сборки частота зависит от параметров по степенным законам и найдите соответствующие показатели.

104. Почему опрокидыванию корабля предшествует долгопериодическая качка?

105. Как наблюдать феномен смягчения мод с помощью качалки?

106. В книге Постона и Стюарта “Теория катастроф” читаем: “Значит, ненагруженный стержень издает “тиньк”, при умеренной нагрузке “бумм”, а

вблизи точки выпучивания – “буинньккк”. Это великолепно известно опытным инженерам, а неискушенного читателя должно предостеречь от предпочтения конструкций в тоне сопрано басовым.” Обсудите эти утверждения с позиций теории катастроф и феномена смягчения мод.

107. При исследовании нелинейного резонанса в осцилляторе

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = b \cos \omega t$$

методом медленно меняющихся амплитуд, как известно, получается следующее уравнение для резонансной кривой:

$$\frac{b^2}{4\omega_0^2} = \left[\left(\omega - \omega_0 - \frac{3}{8} \frac{\beta}{\omega_0} |a|^2 \right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} \right] |a|^2,$$

где a – амплитуда установившихся колебаний (задача 64 из раздела “Колебания”). Покажите, что подходящей заменой переменных это соотношение приводится к виду

$$A = [(\Delta - B)^2 + 1]B.$$

Здесь A – безразмерная амплитуда колебаний, B – безразмерный квадрат амплитуды воздействия, Δ – безразмерная отстройка частоты от собственной. Приведите последнее соотношение к канонической для катастрофы сборки форме. Найдите уравнение линии складок и координаты точки сборки на плоскости Δ, B . Изобразите многообразие катастрофы и ее бифуркационное множество. Дайте им интерпретацию с точки зрения колебаний осциллятора и вида резонансных кривых.

108. Какая катастрофа в укороченном уравнении автогенератора с жестким возбуждением отвечает точке, в которой бифуркация Андронова-Хопфа из прямой превращается в обратную?

109. Для канонического уравнения для фазы колебаний

$$\dot{\varphi} = -\Delta - \varepsilon \sin \varphi,$$

описывающего синхронизацию, введите эффективный потенциал $U(\varphi)$ такой, что $\dot{\varphi} + U'(\varphi) = 0$. Как трансформируется потенциал при вариации ε ? Какие катастрофы наблюдаются? Дайте в этих терминах интерпретацию режимам захвата и биений.

Катастрофы. Задачи для компьютерных исследований

110. Многообразия каспидных катастроф. Постройте многообразия катастроф в следующих случаях:

- Для катастрофы сборки в канонической форме,
- Для задачи 45 о прикрепленном к пружине шарике, скользящем вдоль стержня,
- Для канонической формы катастрофы ласточкин хвост в случае нескольких различных значений параметра a .

111. Бифуркационные множества простейших систем. Постройте бифуркационные множества катастроф в следующих случаях:

- Для задачи 49 о туннельном диоде на плоскости E, R ,
- Для газа Ван-дер-Ваальса,
- Для канонической формы катастрофы ласточкин хвост,
- Для задачи 60, демонстрирующей катастрофу ласточкин хвост. Используйте подходящие безразмерные координаты и параметры.

112. Машина Зимана. Постройте многообразие катастроф для машины Зимана. Диаметр диска и длины нерастянутых резинок положите равными 1, а расстояние от неподвижной точки прикрепления резинки до центра диска – 2. Предварительно получите строгое выражение для энергии упругой деформации резинок как функции угла поворота диска.

113. Эллиптическая качалка. Постройте многообразие катастроф эллиптической качалки, или поверхность, отвечающую семейству нормалей эллипса. Используйте стандартное уравнение для нормалей. Попробуйте провести исследование других кривых.

114. Колебания осциллятора в потенциале с двумя ямами. Постройте фазовые портреты консервативного и диссипативного осциллятора $\ddot{x} + \alpha \dot{x} + U'(x) = 0$ в потенциале, отвечающем катастрофе сборки $U(x) = x^4/4 + ax^2/2 + bx$. Создайте программу, демонстрирующую вид потенциала и фазовые портреты в различных точках плоскости a, b . Предварительно нанесите на нее линии складок и точку сборки. За эволюцией картинок удобно наблюдать, если изменение параметров (координаты выделенной на экране точки) осуществлять с помощью “мыши”.

115. Ласточкин хвост. Изучите эволюцию формы потенциала для катастрофы ласточкин хвост. Для этого предварительно получите на экране дисплея соответствующее бифуркационное множество. Создайте программу,

которая демонстрирует вид потенциала в точке, отмеченной на экране с помощью "мыши". Выберите несколько значений параметра a .

116. Трансформации эквипотенциалей. Над поверхностью океана помещена материальная точка массы m . Точка располагается на высоте h над невозмущенным уровнем океана. Постройте "карту" эквипотенциалей гравитационного поля в такой системе. Проследите за ее трансформациями при вариации безразмерного параметра m/gh^2 . (Ось x направьте вдоль невозмущенной поверхности воды.) Что можно сказать о форме возмущенной поверхности воды? Изобразите несколько характерных рельефов потенциальной функции $U(x,y)$.

117. Каспидные катастрофы в двумерных системах. Изучите эволюцию линий уровня для катастрофы сборки, заданной потенциальной функцией $U(x,y)=x^4/4+ax^2/2+bx+y^2$. Предварительно получите на экране дисплея соответствующее бифуркационное множество. Создайте программу, которая демонстрирует вид эквипотенциалей в точке, отмеченной на экране. Создайте программу, которая демонстрирует рельеф потенциальной функции в выделенной точке.

Решите аналогичную задачу в случае потенциальной функции $U(x,y)=x^4/4+ax^2/2+bx-y^2$.

118. Эллиптическая омбилика. С помощью компьютера постройте картину линий уровня потенциальной функции $U(x,y)$ для катастрофы эллиптической омбилики в случае $a=1$. Подберите характерные точки на плоскости параметров b и c , на которой предварительно получите соответствующее бифуркационное множество. Обратите внимание на точки сборки. Постройте несколько потенциальных рельефов.

Решите эту же задачу в случае $a=0$.

Постройте бифуркационное множество в трехмерном пространстве параметров.

119. Гиперболическая омбилика. Решите задачу 118 для случая гиперболической омбилики при $a=1$ и при $a=0$. Постройте бифуркационное множество это катастрофы

120. Гладкие кривые с особенностями. Постройте простейшие кривые, имеющие особенности в виде точек сборки с характерными полукубическими острями: циклоиду, гипоциклоиду, астроиду. Пополните этот список самостоятельно.

121. Каустики в чашке. В цилиндрическом сосуде (например, в чашке с кофе) можно наблюдать яркую линию с еще более ярким острием. Эта линия – каустика – представляет собой огибающую световых лучей, отраженных от

цилиндрической поверхности. Проведите компьютерное моделирование такой каустики. Рассмотрите далее ситуации, когда имеется точечный источник света, который может быть расположен как внутри, так и вне отражающей цилиндрической поверхности. Изучите трансформации каустик. Решите аналогичную задачу в случае эллиптической отражающей поверхности.

122. Миражи. В атмосфере температура изменяется с высотой и, соответственно, изменяется показатель преломления. Проведите компьютерное исследование траекторий световых лучей в такой среде. Используйте известные из оптики законы зависимости показателя преломления воздуха от температуры. Рассмотрите некоторые простейшие законы изменения температуры с высотой. Охарактеризуйте наблюдаемые картины в терминах теории катастроф.

123. Радуга. Найдите в справочнике данные по коэффициенту преломления света в воде в диапазоне от красного цвета до фиолетового и воспроизведите на компьютере расчет траекторий лучей света в капле воды (теория радуги Декарта). Пронаблюдайте образование каустик. Определите, под какими углами по отношению к направлению на солнце наблюдатель видит красное и фиолетовое кольца радуги. Используйте цветную графику.

124. Каустики в электронном потоке. Одно из известных устройств микроволновой электроники – клистрон – содержит две близко расположенные металлические сетки, на которые подано переменное напряжение $U=U_0 \cos \omega t$. Через сетки со скоростью v_0 летит пучок электронов (рис.35). Проведите компьютерное исследование пространственно-временных диаграмм для электронов в области за сетками. Охарактеризуйте полученные результаты в терминах теории катастроф.

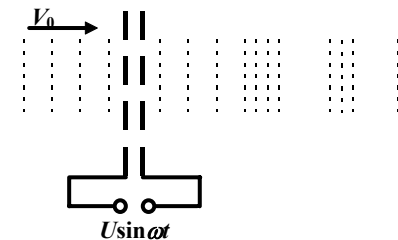
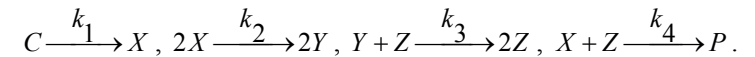


Рис.35.

Классификация и примеры динамических систем

1. Охарактеризуйте с точки зрения классификации следующие динамические системы: уравнение нелинейного осциллятора, уравнение Ван-дер-Поля, уравнение Релея, уравнение автогенератора с жестким возбуждением.

2. Бриггсом и Раушером в 1973 г. была открыта реакция, названная йодными часами. В процессе этой реакции может периодически изменяться концентрация иода, а цвет раствора меняется с белого на синий, снова на белый и т.д. (Подробнее см. Д.Гарел, О.Гарел, "Колебательные химические реакции".) Схема реакции выглядит следующим образом:



Получите динамическую систему для переменных X, Y, Z , описывающую эту реакцию.

3. Получите отображение для механической системы, являющейся моделью ускорения Ферми (рис.36). Все удары упругие, стенка колеблется по гармоническому закону. Смещением стенки пренебречь.

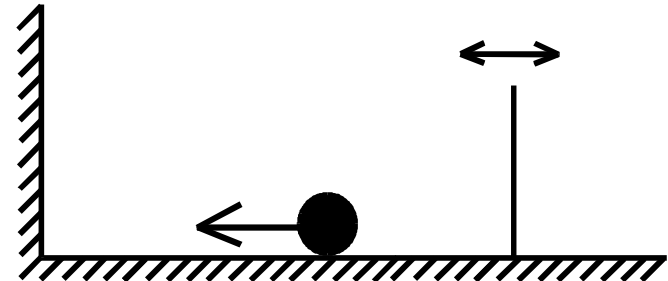


Рис.36

4. В работе Икеды с соавторами была рассмотрена оптическая система в виде кольцевого резонатора, частично заполненного средой с фазовой нелинейностью (рис.37). Резонатор возбуждается лучом лазера через одно полупрозрачное зеркало, а выходной сигнал снимается через другое. Как показал Икеда, при некоторых условиях такая система может быть приближенно описана с помощью отображения $z_{n+1} = A + Bz_n \cdot \exp(i|z_n|^2)$. Здесь z - комплексная амплитуда света, A - параметр, пропорциональный сигналу лазера,

B - параметр диссипации поля в среде. Получите соответствующее действительное отображение и дайте его классификацию.

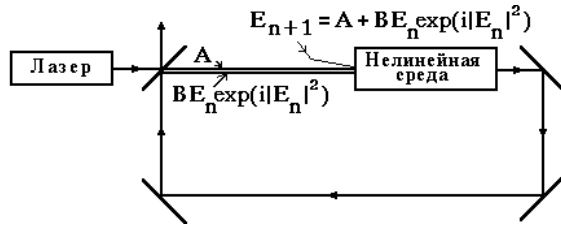


Рис. 37

5. Тенисон, Либерман и Лихтенберг рассмотрели следующую систему: луч света может бежать между двумя зеркалами, одно из которых имеет “гофрировку” в виде синусоидального профиля (рис.38). Получите двумерное дискретное отображение, описывающее динамику этой системы. В качестве переменных используйте угол ϕ и координату x падения луча на нижнее зеркало. Покажите, что в случае слабой гофрировки:

$$\begin{aligned}\phi_{n+1} &= \phi_n - 2a \sin x_n \quad (\phi_n, \text{mod } 2\pi), \\ x_{n+1} &= x_n + h \operatorname{tg} \phi_{n+1} \quad (x_n, \text{mod } 2\pi).\end{aligned}$$

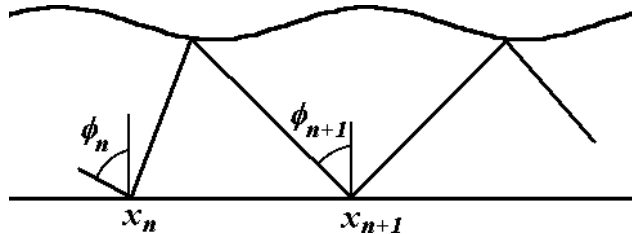


Рис.38

6. Получите отображение для системы с импульсным воздействием вида

$$\dot{x} = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(t - nT).$$

Охарактеризуйте полученное отображение.

7. Рассмотрите движение линейного диссипативного осциллятора под действием внешней периодической импульсной силы, амплитуда которой зависит от координаты осциллятора:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(t - nT).$$

(В качестве физической реализации может выступать железный маятник между полюсами электромагнита.) Охарактеризуйте полученное отображение. Покажите, что при определенном выборе функции $f(x)$ оно приводится к отображению Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 - by_n, \\ y_{n+1} &= x_n,\end{aligned}$$

и установите смысл его параметров.

8. Покажите, что отображение Эно и обобщенное отображение Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) - by_n, \\ y_{n+1} &= x_n\end{aligned}$$

обратимы. Когда они консервативны, а когда диссипативны?

9. Нелинейный диссипативный осциллятор находится под импульсным воздействием

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = C \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Используя в промежутке между ударами решение, полученное методом медленно меняющихся амплитуд, получите дискретное отображение для координаты и скорости осциллятора. Покажите, что оно совпадает с отображением Икеды.

10. Покажите, что система

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = A + \varepsilon \sin x \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

приводится к двумерному отображению Заславского

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{K}{\Gamma} (1 - e^{-\Gamma}) \sin(2\pi x_n) + \frac{1 - e^{-\Gamma}}{\Gamma} y_n, \\ y_{n+1} &= e^{-\Gamma} (y_n + \varepsilon \sin 2\pi x_n),\end{aligned}$$

и установите смысл параметров и переменных в этом отображении. Как оно выглядит в консервативном случае?

11. Рассмотрите неавтономный генератор пилообразных колебаний, для которого момент запуска каждого очередного импульса управляется сигналом $U(t) = U_0 + \varepsilon \sin \omega t$ (рис.39). Получите дискретное отображение, дающее зависимость момента начала $(n+1)$ -го импульса от момента начала n -го импульса и покажите, что оно совпадает с отображением окружности. Длительность импульсов в автономном режиме T .

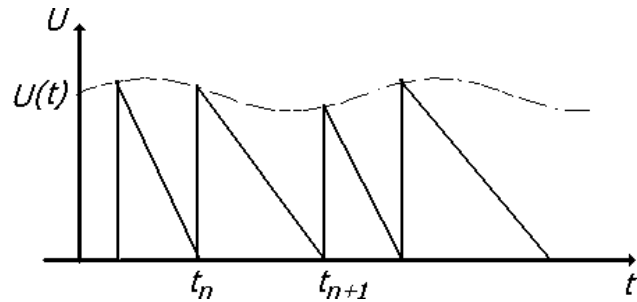


Рис.39

12. Получите одномерное отображение для генератора пилообразных колебаний из предыдущей задачи в случае, когда "запускающий" сигнал также представляет собой некоторое пилообразное напряжение. Покажите, что при определенном выборе параметров систему можно привести к отображению $x_{n+1} = \{2x_n\}$, известному как сдвиг Бернулли.

13. Предлагается следующая классификационная схема построения эталонных модельных отображений:

- логистическое отображение $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$,
- кубическое отображение $x_{n+1} = a + bx_n \pm x_n^3$,
- ...

Продолжите этот ряд. Постройте аналогичный ряд двумерных обратимых отображений.

Бифуркации одномерных потоков

14. Покажите, что одномерная потоковая система всегда градиентна. Какие результаты теории катастроф по этой причине можно перенести в теорию бифуркаций?

15. Изобразите бифуркационные диаграммы для бифуркаций седло-узел $\dot{x} = \lambda - x^2$, транскритической $\dot{x} = \mu x - x^2$ и вилки $\dot{x} = \lambda x - x^3$. То же самое для обратных (субкритических) форм этих бифуркаций.

16. Найдите закон изменения во времени переменной $x(t)$ для бифуркаций седло-узел и вилки при $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$. Решите аналогичную задачу в случае субкритических бифуркаций.

17. Установите связь бифуркации седло-узел и транскритической бифуркации.

18. Установите связь с катастрофой сборки бифуркаций седло-узел, вилки, а так же вилки в случае снятия вырождения. Используйте трехмерный рисунок многообразия катастрофы сборки и бифуркационные диаграммы.

19. Изобразите фазовые портреты двумерной системы, отвечающие бифуркации седло-узел. Рассмотрите случай устойчивого и неустойчивого узла. Изобразите аналогичный рисунок для бифуркации вилки.

Бифуркация Андронова-Хопфа

20. Покажите, что для двумерного потока общего вида

$$\dot{x} = f(x, y),$$

$$\dot{y} = g(x, y),$$

порог бифуркации Андронова Хопфа может быть определен из условия $S = 0, J > 0$, где S и J – след и якобиан матрицы, описывающей эволюцию возмущения потока

$$\begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix},$$

и вычисленной непосредственно в неподвижной точке.

21. Найдите порог бифуркации Андронова Хопфа в уравнении Брюсселя-тора

$$\dot{x} = A - Bx + x^2 y - x,$$

$$\dot{y} = Bx - x^2 y.$$

22. Приведите уравнение Брюсселятора в окрестности неподвижной точки к каноническому для фокуса виду.

23. Одна из популярных в популяционной биологии моделей "хищник-жертва" может быть представлена в виде

$$\dot{x} = \alpha(x)x - xy, \quad \dot{y} = xy - my.$$

Если положить $\alpha = \text{const}$, то мы получим классическую модель Вольтерра. (Подробнее см. Ю.М. Свиржев, "Нелинейные диссипативные структуры и катастрофы в экологии", где рассмотрены и другие варианты такой системы.) Покажите, что если функция $\alpha(x)$, характеризующая мальтузианский рост "жертвы", имеет вид, показанный на рис.40а, то в системе невозможна бифуркация Андронова-Хопфа, а если ее вид соответствует рис.40б, то такая бифуркация возможна. Найдите порог бифуркации в случае $\alpha(x) = a + bx - x^2$. (Предварительно покажите, что для произвольной параболической аппроксимации функции $\alpha(x)$ коэффициент перед членом x^2 действительно можно убрать перенормировкой.)

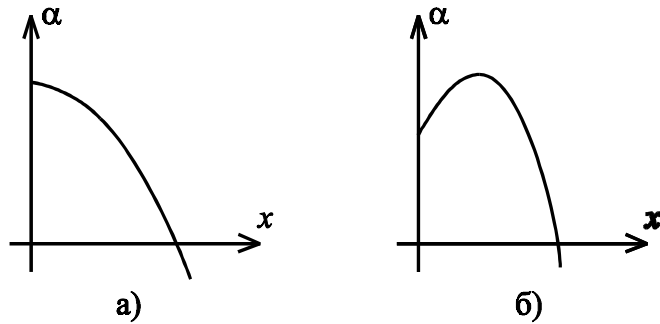


Рис.40

24. Изобразите качественно фазовые портреты трехмерного потока, демонстрирующего бифуркацию Андронова Хопфа.

25. Покажите, что для трехмерного потока порогу бифуркации Андронова Хопфа отвечает соотношение $J=HS$, связывающее три инварианта матрицы для возмущений, вычисленной в неподвижной точке. Здесь J – якобиан, S – след матрицы, а H – третий инвариант, выражающийся через собственные числа матрицы λ_i следующим образом: $H = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$.

26. Найдите порог бифуркации Андронова Хопфа в трехмерном потоке, описывающем генератор Кислова-Дмитриева. Этот генератор состоит из

трех замкнутых в кольцо элементов: нелинейного усилителя НУ, инерционного элемента ИЭ и фильтра Ф в виде колебательного контура (рис.41). Для усилителя предполагается, что сигналы на входе и выходе связаны через функцию $F(z) = Mze^{-z^2}$. Такая система описывается трехмерным потоком

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x/T + F(z)/T, \\ \dot{y} &= x - z, \\ \dot{z} &= y - z/Q. \end{aligned}$$

Здесь M – коэффициент усиления, Q – добротность контура, T – характерное время инерционного элемента. Покажите, что порог бифуркации Андронова Хопфа дается соотношением

$$\frac{2 \ln M}{T} = \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{Q} \right) \left(1 + \frac{1}{TQ} \right).$$

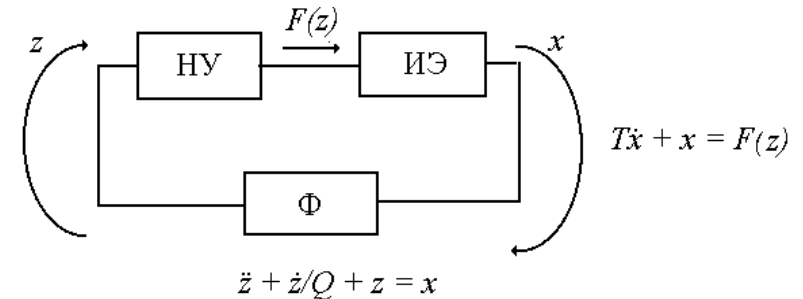


Рис.41

27. Для модели Реслера следующего вида

$$\dot{x} = -(y + z), \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = bx + z(x - c),$$

найдите связь между параметрами, соответствующую бифуркации Андронова-Хопфа неподвижной точки $x=y=z=0$. (Такой вариант модели Реслера рассмотрен в книге Г.Николиса и И.Пригожина "Познание сложного".)

Бифуркации предельных циклов

28. Какая бифуркация предельных циклов возможна на фазовой плоскости, если уравнение для медленной амплитуды имеет вид

$$\dot{a} = -a + \lambda a^3 - a^5.$$

Найдите пороговое значение параметра λ . Предварительно изобразите график искусственно введенного потенциала $U(a)$, такого что $\dot{a} + \partial U / \partial a = 0$, и обсудите его трансформации при вариации λ . Покажите, что в системе возможна катастрофа складки. Найдите бифуркационное значение параметра λ и изобразите соответствующий фазовый портрет. Какова коразмерность этой бифуркации? Как она называется в теории бифуркаций?

29. Проведите аналогичное рассмотрение в случае

$$\dot{a} = a - \lambda a^3 + \mu a^5 - a^7,$$

отвечающем катастрофе сборки.

30. Для разновидности системы Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + a + (x+1)^2 = 0,$$

проведите двухпараметрическое исследование бифуркаций. Найдите линию бифуркации Андронова Хопфа неподвижной точки. Покажите, что она обрывается в точке бифуркации коразмерности два, которая лежит на линии бифуркации седло-узел. Изобразите фазовый портрет в окрестности этой точки. Обратите внимание, что к этой точке подходит ещё и линия нелокальной бифуркации, на которой предельный цикл рождается из петли сепаратрисы. Найдите также линии превращения узлов в фокусы. Исследуйте устойчивость узлов и фокусов.

31. Проведите исследование бифуркаций для модели

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + a + (x-1)^2 = 0.$$

В чем отличия от системы, рассмотренной в предыдущей задаче?

32. Проведите двухпараметрическое исследование бифуркаций в динамической системе типа "хищник-жертва"

$$\dot{x} = \alpha(x)x - xy, \quad \dot{y} = V(x)y - my,$$

в случае искусственно выбранных функций $\alpha(x) = 1 + ax - x^2$, $V(x) = x - x^2$. Укажите коразмерность найденных бифуркаций. Обратите внимание на бифуркацию, аналогичную представленной в предыдущих задачах.

33. Проведите полный бифуркационный анализ укороченного уравнения Ван-дер-Поля под гармоническим воздействием (см. задачу 82 из главы "Колебания")

$$\dot{a} = \lambda a / 2 - a^3 + B \cos \varphi / 2a,$$

$$\dot{\varphi} = -\Delta - B \sin \varphi / 2a.$$

Представьте результаты исследования на плоскости параметров Δ , B . Покажите, что в системе может быть три неподвижные точки и укажите линию, на которой возможно их слияние в результате бифуркации седло-узел. Обратите внимание, что эта линия имеет точку сборки. Какая её часть является границей языка синхронизации? Найдите далее линию бифуркации Андронова Хопфа. На ней так же расположена точка бифуркации коразмерности два, к которой подходит вторая ветвь линии седло-узловой бифуркации и линия рождения предельного цикла из петли сепаратрисы. Исследование можно провести не в полярных, а в декартовых координатах.

Бифуркации одномерных отображений коразмерности один

34. Найдите неподвижную точку и отвечающий ей мультипликатор для логистического отображения $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$. Используя этот результат найдите порог касательной бифуркации, условие максимальной устойчивости неподвижной точки и порог бифуркации рождения 2-цикла. Изобразите соответствующие итерационные диаграммы.

35. Найдите значения параметра, отвечающие касательной бифуркации и бифуркации удвоения периода для неподвижной точки отображения $x_{n+1} = \lambda - x_n^4$.

36. Получите уравнения, определяющие значения переменной x и бифуркационные значения параметра λ для касательной бифуркации неподвижных точек отображения $x_{n+1} = \lambda \cos x_n$. Дайте графическое решение уравнения для переменной x . Покажите, что существует множество таких бифуркаций. Приблизительно оцените соответствующие значения параметра λ . То же самое для бифуркации удвоения периода.

37. Оцените число итераций, необходимое для прохождения "коридора" ширины $\Delta x = 0,1$ для отображения $x_{n+1} = \lambda + x_n - x_n^2$ в случае $\lambda = -0,001$.

38. Изобразите итерационные диаграммы до порога бифуркации типа «вилки» и за ним для отображения $x_{n+1} = \lambda x_n - x_n^3$. То же самое для обратной формы бифуркации.

39. Покажите, что для отображения $x_{n+1} = \lambda x_n / \sqrt{1 + x_n^2}$ имеет место бифуркация типа "вилка". Найдите бифуркационное значение параметра и изобразите итерационные диаграммы для ситуаций до и после бифуркации.

40. Найдите элементы 2-цикла логистического отображения и определите его мультипликатор как функцию управляющего параметра λ . Найдите значения λ , отвечающие рождению 2-цикла, 2-циклу максимальной устойчивости и порогу бифуркации удвоения периода - рождению 4-цикла. Изобразите соответствующие итерационные диаграммы.

41. Постройте функцию $F(x) = f(f(x))$, где $f(x) = \lambda - x^2$. Изобразите её график при различных λ и обсудите его трансформации у порога бифуркации рождения 2-цикла логистического отображения. Укажите элементы 2-цикла на этом рисунке.

42. Покажите, что если отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ имеет неподвижную точку x_0 , в которой мультипликатор обращается в минус единицу: $\mu = f'(x_0) = -1$, то двукратно проитерированное отображение $F(x_0) = f(f(x_0))$ обладает следующими свойствами:

$$1. \quad F'(x_0) = +1,$$

$$2. \quad F''(x_0) = 0,$$

$$3. \quad F'''(x_0) = 2Sf(x_0), \text{ где } Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 - \text{ так называемая производная Шварца функции } f.$$

43. Используя результат предыдущей задачи, покажите, что бифуркация $\mu = -1$ на «языке» двукратно проитерированной функции $F(x) = f(f(x))$ отвечает бифуркации вилки. Изобразите трансформации функции $F(x)$ для прямой и обратной такой бифуркации. Когда происходит бифуркация удвоения периода, а когда жесткий переход через -1 ? Что можно сказать о знаке производной Шварца в этих ситуациях?

44. Найдите производную Шварца для функции $f(x) = a + bx \pm x^3$, соответствующей кубическому отображению. О чем говорят результаты вычислений?

45. Возможны ли жесткие переходы через мультипликатор -1 в четвертичном отображении $x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4$?

46. Получите уравнение, с помощью которого можно найти 3-цикл максимальной устойчивости логистического отображения и определите соответствующее значение параметра λ , хотя бы приближенно.

47. Изобразите 2, 4 и 8-циклы максимальной устойчивости логистического отображения $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$ на итерационной диаграмме.

48. В таблице представлены бифуркационные значения параметра, отвечающие удвоениям периода на базе неподвижной точки логистического отображения. Оцените по этим данным константы K и δ в законе Фейгенбаума.

n	λ_n
0	0.75
1	1.25
2	1.36809894
3	1.39404616
4	1.39963724
5	1.40082874
	...

Бифуркации двух- и трехпараметрических одномерных отображений

49. Для кубического отображения вида $x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3$ найдите область устойчивости на плоскости параметров a, b ограниченную линией касательной бифуркации и линией удвоения периода. Покажите, что первая имеет точку сборки.

50. Для кубического отображения из предыдущей задачи область устойчивости 2-цикла имеет вид, типичный для циклов всех периодов и для двухпараметрических отображений (рис.42). Такие конфигурации К.Мира называют "crossroad area". Линии каких бифуркаций изображены на рисунке? Изобразите эволюцию двукратно проитерированной функции при движении по нескольким характерным маршрутам и поясните типичность подобных конфигураций. Найдите координаты точки сборки.

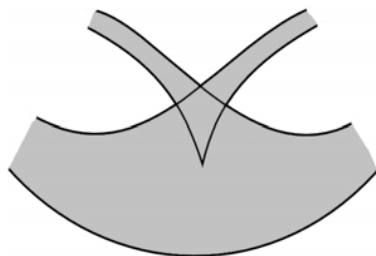


Рис.42

51. На примере предыдущего отображения установите, как расположены линии, отвечающие отображению максимума в минимум и минимума в максимум. Укажите точку на плоскости параметров, отвечающую 2-циклу, опирающемуся одновременно на два квадратичных экстремума. Покажите, что вдоль найденных линий двукратно проитерированное отображение имеет экстремум четвертой степени.

52. Для неподвижной точки кубического отображения $x_{n+1} = a + bx_n - x_n^3$:

а) Найдите линию мультипликатора $\mu = +1$ (касательной бифуркации) на плоскости a, b . Покажите, что эта линия имеет точку сборки и укажите её координаты. Изобразите все характерные конфигурации функции $f(x) = a + bx - x^3$ в точке сборки и её окрестности.

б) Найдите линию мультипликатора $\mu = -1$ и нанесите её на плоскость a, b . Вычислите производную Шварца вдоль этой линии и укажите, какие её части отвечают бифуркации удвоения, а какие – жесткому переходу. Укажите на плоскости a, b точку коразмерности два, в которой производная Шварца обращается в нуль (flip – бифуркация коразмерности два).

в) Найдите уравнение для линий касательной бифуркации 2-цикла и покажите, что они выходят из найденной выше точки с нулевой производной Шварца и пересекают ось a в точках $a = \pm\sqrt{2/3}$.

г) Заштрихуйте на рисунке область устойчивости 2-цикла. (Вторая типичная конфигурация двухпараметрических отображений – “spring-area” по терминологии К.Мира).

53. Изобразите характерную трансформацию двукратно проитерированного отображения из предыдущей задачи в окрестности точки flip-бифуркации коразмерности два.

54. Изобразите качественно бифуркационные диаграммы, соответствующие двум представленным на рис.43 маршрутам на карте динамических режимов.

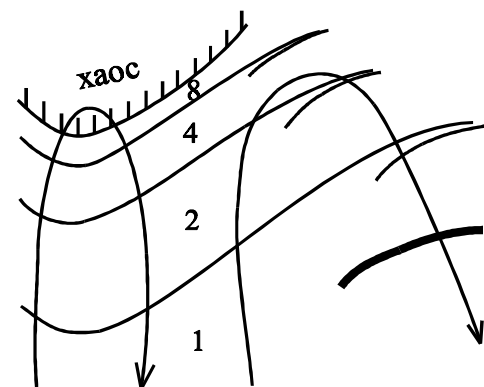


Рис.43

55. Найдите условие, отвечающее существованию кубической точки перегиба для отображения $x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4 - cx_n$. Какой объект задает это условие в пространстве трех параметров a, b, c ? Найдите условие, отвечающее отображению квадратичного экстремума в кубическую точку перегиба. Какой объект задает это условие в пространстве трех параметров a, b, c ? То же самое для ситуации, когда кубическая точка перегиба отображается в квадратичный экстремум.

56. Покажите, что при условии, что квадратичный экстремум отображается в кубическую точку перегиба, двукратно проитерированное отображение имеет экстремум шестой степени. Изобразите соответствующую ситуацию на итерационной диаграмме. Какова ее коразмерность?

57. Покажите, что при условии, что квадратичный экстремум отображается в другой квадратичный экстремум, а тот - еще в один, то трехкратно проитерированное отображение имеет экстремум восьмой степени. Изобразите соответствующую ситуацию на итерационной диаграмме. Какова ее коразмерность?

Бифуркации двумерных отображений

58. Изобразите качественно динамику изображающей точки на фазовой плоскости двумерного отображения непосредственно в окрестности неподвижной точки в случаях, когда

а) оба мультипликатора μ_1 и μ_2 действительны и $0 < \mu_1 < 1$, $0 < \mu_2 < 1$; $0 < \mu_1 < 1$, $-1 < \mu_2 < 0$; $\mu_1 > -1$, $\mu_2 > -1$; $\mu_1 < -1$, $\mu_2 < -1$.

б) Мультипликаторы комплексные, причем модуль близок к единице, а фаза – к $\pi/2$; к π .

59. Покажите, что для произвольного двухмерного отображения область устойчивости неподвижной точки на плоскости след S , якобиан J линеаризованной матрицы (матрицы монодромии) имеет вид треугольника, ограниченного тремя линиями:

а) $J = S - 1$, которой отвечает значение одного из мультипликаторов $+1$ и, соответственно, касательная бифуркация;

б) $J = -S - 1$, которой отвечает значение одного из мультипликаторов -1 и, соответственно, бифуркация удвоения периода;

в) $J = 1$, которой отвечает пара комплексно сопряженных мультипликаторов модуль которых равен единице, т.е. бифуркация Неймарка рождения инвариантной кривой.

Изобразите эти линии и «треугольник устойчивости» на S, J плоскости.

60. Укажите, как располагаются точки, отвечающие всем ситуациям из задачи 58 относительно «треугольника устойчивости».

61. Укажите точки бифуркаций коразмерности два, не имеющие аналога в одномерном случае, на рисунке «треугольника устойчивости».

62. Найдите диапазон значений параметра μ , в котором является устойчивой нетривиальная неподвижная точка отображения Гукенхеймера и Холмса

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n, \\ y_{n+1} &= \mu y_n (1 - x_n). \end{aligned}$$

Определите фазовый угол θ (аргумент мультипликатора), отвечающий обращению якобиана отображения в единицу.

63. Для отображения Эно $x_{n+1} = \lambda - x_n^2 - by_n$, $y_{n+1} = x_n$ найдите неподвижные точки, матрицу монодромии, а также её след и якобиан как функции

параметров b и λ . Найдите линии касательной бифуркации, бифуркации удвоения периода и нанесите их на плоскость b, λ . Укажите также области действительных и комплексных мультипликаторов.

64. Опишите эволюцию мультипликаторов неподвижной точки отображения Эно на комплексной плоскости при фиксированном $b > 0$ при увеличении λ .

65. Покажите, что для неподвижной точки отображения Эно матрица монодромии представляется в виде

$$\begin{pmatrix} S & -J \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

66. Покажите, что вектора-столбцы

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

являются собственными векторами матрицы монодромии неподвижной точки отображения Эно. Здесь λ_1 и λ_2 – её собственные значения. Найдите соответствующие собственные числа. Покажите, что эти вектора задают на плоскости x, y систему координат, для которой матрица монодромии диагональна. (Используйте результат предыдущей задачи.) Найдите эволюцию в дискретном времени произвольной начальной точки x_0, y_0 .

67. Найдите элементы 2-цикла отображения Эно как функции параметров λ и b . Покажите, что при условии $\lambda = 3(1+b)^2/4$, соответствующем обращению одного из мультипликаторов неподвижной точки в -1 , рождается 2-цикл. Исследуйте устойчивость этого цикла, для чего найдите матрицу монодромии, вычислите след S и якобиан J этой матрицы. Найдите аналитическое выражение для линии удвоения периода 2-цикла и нанесите ее на b, λ плоскость.

68. Чему равен якобиан N -цикла отображения Эно? Уменьшается или увеличивается радиус окружности, по которой движутся в комплексной плоскости мультипликаторы циклов отображения Эно при удвоениях периода?

69. Для консервативного отображения Эно опишите эволюцию мультипликаторов на комплексной плоскости при удвоениях периода.

70. Рассмотрите два идентичных связанных одномерных отображения

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \varepsilon(y_n - x_n), \\y_{n+1} &= f(y_n) + \varepsilon(x_n - y_n).\end{aligned}$$

Исследуйте симметричный режимы, т.е. такие, для которых $x=y$. Покажите, что аттракторы симметричного режима определяются соответствующими решениями для автономной системы. Покажите, что мультипликаторы неподвижной точки связанных систем даются выражениями $\mu_1 = f'(x)$ и $\mu_2 = \mu_1 - 2\varepsilon$. Исходя из этих результатов, найдите линии касательной бифуркации и бифуркации удвоения периода неподвижной точки на плоскости λ, ε в случае двух связанных логистических отображений, т.е. при $f(x) = \lambda - x^2$.

71. Изобразите на фазовой плоскости эволюцию устойчивого и неустойчивого многообразий неподвижной точки, 2-цикла и 4-цикла при последовательных удвоениях периода.

72. Изготовьте лист Мебиуса из бумажной полосы. Изготовьте бумажную модель неустойчивого многообразия цикла удвоенного периода в трехмерном пространстве на базе 3-цикла, показанного на рис.44.

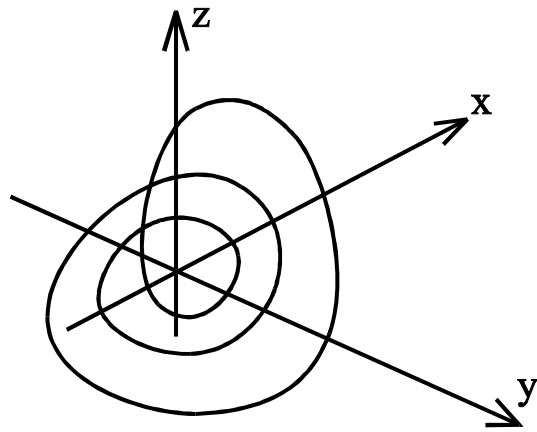


Рис.44

Квазипериодические режимы и синхронизация в двумерных и одномерных отображениях

73. Для квадратичного отображения вида

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2), \\y_{n+1} &= Jx_n - 1/5(x_n^2 + y_n^2)\end{aligned}$$

покажите, что область устойчивости неподвижной точки имеет вид треугольника из задачи 59. Укажите линию бифуркации Неймарка рождения инвариантной кривой на плоскости параметров S, J . Изобразите качественно картину языков синхронизации, примыкающих к этой линии. Где расположены острия языков с числами вращения $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$?

74. Найдите линию бифуркации Неймарка на базе симметричного 2-цикла для двух связанных логистических отображений из задачи 70. Для этого, используя свойства якобиана произведения матриц, найдите якобиан матрицы монодромии такого цикла и приравняйте его единице. (Указание. Используйте выражения для произведения и суммы элементов 2-цикла логистического отображения.)

75. Выпишите все числа вращения, отвечающие резонансному циклу периода 5. Изобразите качественно все соответствующие правила обхода элементов цикла. То же самое для цикла периода 7.

76. Для неавтономной системы Ван-дер-Поля в сечении Пуанкаре наблюдается бифуркация Неймарка рождения инвариантной кривой. Какая бифуркация отвечает этой ситуации, если она описывается укороченным уравнением?

77. Есть ли бифуркация Неймарка в отображении Заславского? Отображении Эно?

78. Как соотносятся отображения Заславского, кольца и окружности, описывающие явления синхронизации?

79. Изобразите качественно итерационные диаграммы для отображения окружности (без взятия модуля), отвечающие числам вращения $w=1/3$ и $w=2/3$.

80. Приведите рисунок зависимости напряжения релаксационного генератора пилообразных колебаний из задачи 9 от времени и дайте интерпретацию числа вращения для такой системы. Какие режимы генератора соответствуют иррациональным, а какие - рациональным числам вращения?

81. Для отображения окружности $x_{n+1} = x_n + \Omega + k \sin 2\pi x_n \pmod{1}$ найдите границы основного языка синхронизации, и изобразите их на плоскости Ω, K . Найдите линию, отвечающую циклам максимальной устойчивости, и укажите на ней точку, отвечающую циклу, опирающемуся одновременно на максимум и на минимум. Найдите линию удвоения периода, лежащую внутри этого языка, и также изобразите ее на плоскости параметров.

82. Получите (в неявном виде) уравнения, определяющие для отображения окружности границы языка синхронизации с числом вращения $\omega = 1/2$.

84. *Эволюция облака изображающих точек в фазовом пространстве для отображений.* Проведите исследование, аналогичное описанному в предыдущей задаче, для представленных ниже дискретных отображений.

Динамические системы и бифуркации. Задачи для компьютерных исследований

83. *Эволюция облака изображающих точек в фазовом пространстве для потоковых систем.* Задайте облако изображающих точек в фазовом пространстве в виде прямоугольной "решетки" из набора точек. Напишите программу, позволяющую наблюдать за эволюцией этого облака во времени для представленных ниже потоковых систем. Проследите за эволюцией облака. Ответьте на вопросы: консервативна или диссипативна система? Есть ли в ней аттракторы? Какого типа эти аттракторы? Проведите компьютерное моделирование для различных значений параметров. Изменяется ли при этом характер эволюции облака? Что происходит с аттракторами? Попробуйте изменить форму облака и его начальное положение.

Динамические системы для исследования.

- Нелинейный осциллятор вблизи катастрофы сборки

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + ax + b + x^3 = 0.$$

- Уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

- Уравнение Релея

$$\ddot{x} - (\lambda - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0.$$

- Уравнение автогенератора с жестким возбуждением

$$\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0.$$

- Брюсселятор

$$\dot{x} = A - Bx + x^2y - x,$$

$$\dot{y} = Bx - x^2y.$$

- Система Реслера

$$\dot{x} = -(y + z),$$

$$\dot{y} = x + ay,$$

$$\dot{z} = b + z(x - c).$$

Динамические системы для исследования.

- Отображение Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - by_n, \\y_{n+1} &= x_n.\end{aligned}$$

- Шарик на вибрирующем столе

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= (1 - \varepsilon)v_n + K \sin \varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + v_{n+1} \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

- Система Икеды

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp(i|z_n|^2).$$

- Отображение Теннисона, Либермана и Лихтенберга, описывающее отражение света от гофрированного зеркала

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n - 2a \sin x_n \pmod{2\pi}, \\ x_{n+1} &= x_n + h \operatorname{tg} \varphi_{n+1} \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

Если система может быть консервативной, особо рассмотрите соответствующие значения параметров.

85. Однопараметрический анализ потоковых систем. Бифуркация Андронова-Хопфа. Создайте программу, строящую портреты для представленных ниже динамических систем. Пронаблюдайте бифуркацию Андронова-Хопфа рождения предельного цикла, его эволюцию при дальнейшем увеличении параметра. Определите порог бифуркации Андронова-Хопфа из линейного анализа и сравните с результатами компьютерного моделирования.

Динамические системы для исследования.

- Брюсселятор при фиксированном $A=1$ и различных B .
- Система, описывающая колебания в гликолизе

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - xy^y, \\ \dot{y} &= \alpha(xy^y - y).\end{aligned}$$

(Зафиксируйте какой-либо из параметров.)

- Уравнения колебаний самолета

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \rho - \cos \varphi, \\ \dot{\rho} &= 2\rho(\lambda - \mu\rho - \sin \varphi).\end{aligned}$$

(Зафиксируйте какой-либо из параметров.)

- Модель хищник-жества вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (a + bx - x^2)x - xy, \\ \dot{y} &= xy - my,\end{aligned}$$

при $a=b=1$.

- Система Реслера при $b=2$, $c=4$ и различных a . Для системы Реслера постройте как проекции аттракторов на какую-либо координатную плоскость, так и аттракторы в трехмерном пространстве.
- Генератор Кислова-Дмитриева

$$\begin{aligned}T\dot{x} + x &= F(z), \\ \dot{y} &= x - z, \\ \dot{z} &= y - z/Q,\end{aligned}$$

где $F(z) = Mz \exp(-z^2)$ для $Q=10$ и $T=1$.

86. Двухпараметрическое исследование двумерных потоковых систем. Постройте плоскость параметров вашей системы, содержащую аналитически определенные линии и точки бифуркаций – свои для каждой динамической системы. Постройте портреты аттракторов (или фазовые портреты) в выбранных вами точках на плоскости параметров. Проведите компьютерные эксперименты, иллюстрирующие динамику системы вблизи линий и точек бифуркаций, а также внутри характерных областей на плоскости параметров. Не демонстрирует ли ваша система каких-либо иных бифуркаций, не представленных на плоскости параметров?

Динамические системы для исследования.

- Модель "хищник-жества"

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (a + bx - x^2)x - xy, \\ \dot{y} &= xy - my,\end{aligned}$$

в случае $a=1$. Нанесите на плоскость b, m линию бифуркации Андронова-Хопфа. Есть ли в анализируемой системе бифуркации коразмерности два? Если да, то какие (см. задачу 32)?

- Уравнение типа Ван-дер-Поля с нелинейностью, характерной для осциллятора с катастрофой складки

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + a + (x+1)^2 = 0.$$

Нанесите на плоскость параметров линии бифуркаций седло-узел, Андронова-Хопфа и точку бифуркации коразмерности два (см. задачи 30 и 31). Постройте все характерные фазовые портреты грубых систем в окрестности точки бифуркации коразмерности два. Попробуйте по результатам компьютерного моделирования нанести на плоскость параметров линию, отвечающую петле сепаратрисы.

- Укороченное уравнение, отвечающее системе Ван-дер-Поля под гармоническим воздействием (см. задачу 33)

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \lambda a/2 - a^3 + B \cos \varphi / 2a, \\ \dot{\varphi} &= -\Delta - B \sin \varphi / 2a.\end{aligned}$$

87. Двухпараметрическое исследование одномерных отображений.

Постройте карту динамических режимов одного из предложенных отображений – т.е. плоскость параметров, на которой оттенком серого цвета обозначены циклы определенного периода. Линии каких бифуркаций коразмерности один можно обнаружить на вашей карте? Какие точки бифуркаций коразмерности два? Укажите ситуации типа "crossroad area" и "spring area". Создайте дополнительную программу, которая строит итерационные диаграммы в задаваемых вами точках карты. С помощью этой программы проведите следующее исследование:

- а) выберите маршрут, пересекающий несколько линий удвоения и пронаблюдайте каскад удвоений периода на итерационной диаграмме,
- в) получите циклы с небольшими периодами, например 3 или 5, в островках устойчивости в области хаоса,
- в) выберите точку вблизи линии касательной бифуркации (до ее порога) и пронаблюдайте соответствующую эволюцию изображающей точки,
- г) пронаблюдайте хаотические режимы,
- д) исследуйте эволюцию аттракторов в окрестности точки сборки,
- е) исследуйте эволюцию аттракторов в окрестности критической точки линии удвоения периода (flip-бифуркации коразмерности два).

"Просмотрите" увеличенные фрагменты карты, внутри которых можно наблюдать интересную динамику.

Примеры динамических систем для исследования.

- Кубическое отображение вида

$$x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3.$$

- Кубическое отображение вида

$$x_{n+1} = a + bx_n - x_n^3.$$

- "Квартичное" отображение

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4.$$

- Любое другое двух- (и более) параметрическое отображение.

88. Двухпараметрический исследование двумерных отображений. Постройте карты динамических режимов двумерного двухпараметрического отображения. Идентифицируйте бифуркационные линии коразмерности один и точки коразмерности два, а также характерные композиции бифуркаций на карте. "Просмотрите" увеличенные фрагменты карты, внутри которых можно наблюдать интересную динамику. Создайте программу, которая демонстрирует аттракторы отображения. С ее помощью пронаблюдайте эволюцию аттракторов при вариации параметров, в частности, каскады удвоений периода, а также хаотические аттракторы и их эволюцию. Особое внимание уделите фейгенбаумовским критическим аттракторам. Просмотрите увеличенные фрагменты критических и хаотических аттракторов. С помощью программы, демонстрирующей эволюцию изображающей точки на фазовой плоскости пронаблюдайте последовательные "прыжки" этой точки, приближающейся к неподвижной точке, а также последовательные "прыжки" изображающей точки, приближающейся к циклу.

Динамические системы для исследования.

- Отображение Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - y_n, \\ y_{n+1} &= x_n.\end{aligned}$$

- Шарик на вибрирующем столе

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= (1 - \varepsilon)v_n + K \sin \varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + v_n \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

- Система Икеды

$$z_{n+1} = A + Bz_n \exp(i|z_n|^2).$$

89. Квазипериодические движения, синхронизация и бифуркация Неймарка. Получите карты динамических режимов для представленных ниже систем. Идентифицируйте на картах линию бифуркации Неймарка (линию нейтральности) и языки синхронизации. Постройте портреты аттракторов в

окрестности какого-либо языка синхронизации. Варьируя параметры, наблюдайте инвариантную кривую и цикл, отвечающий синхронизации. Пронаблюдайте "прыжки" изображающей точки, приближающейся к инвариантной кривой и к некоторому циклу. Определите число вращения, соответствующее этому циклу. С помощью конденсации изображающих точек в фазовом пространстве наблюдайте в режиме компьютерной мультипликации многообразия цикла, реализующегося внутри языка синхронизации. Идентифицируйте точки бифуркации коразмерности два, характерные для двумерных отображений, если они имеются в вашей системе.

Динамические системы для исследования.

- Универсальное двумерное отображение

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2), \\ y_{n+1} &= Jy_n - (x_n^2 + y_n^2)/5.\end{aligned}$$

- Два идентичных логистических отображения с линейной связью

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + \varepsilon(y_n - x_n), \\ y_{n+1} &= \lambda - y_n^2 + \varepsilon(x_n - y_n).\end{aligned}$$

- неидентичные связанные логистические отображения с квадратичной связью

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - Cy_n^2, \\ y_{n+1} &= 1 - Ay_n^2 - Bx_n^2,\end{aligned}$$

для фиксированных $B=0,375$, $C=-0,25$.

90. Неустойчивое и устойчивое многообразие. Создайте программу, которая строит устойчивое и неустойчивое многообразия неподвижной точки. Алгоритм может выглядеть следующим образом. В очень малой (за пределами разрешения экрана) окрестности неподвижной точки выбирается случайным образом стартовая точка, которая подвергается последовательным итерациям. Затем процедура повторяется для другой стартовой точки и т.д. В результате на экране компьютера прорисовывается неустойчивое многообразие. Чтобы построить устойчивое многообразие, необходимо реализовать ту же процедуру, итерируя отображение в обратном времени. Для реализации этого метода необходимо очень точно знать координаты неподвижной точки. Если она не ищется аналитически, то предварительно необходимо организовать соответствующий численный поиск с помощью метода Ньютона. Пронаблюдайте трансформацию многообразий при вариации параметров. Зафиксируйте момент образования гомоклинической структуры и наблюдайте

ее эволюцию. Исследуйте две системы: дискретное отображение и поток, причем в последнем случае используйте результаты решения предыдущей задачи.

Дискретные отображения:

- отображение Эно,
- кубическое отображение типа Эно

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a - bx_n + x_n^3 - cy_n, \\ y_{n+1} &= x_n,\end{aligned}$$

- отображение кольца

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + \Omega - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta_n + br_n, \\ r_{n+1} &= br_n - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta_n, \\ x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.\end{aligned}$$

1. Природа хаоса в простейшей модели. Задайте случайный код из двух символов достаточно большой длины N , для чего используйте стандартную процедуру генерации случайных чисел. Затем,

а) Для логистического отображения $x' = 1 - \lambda x^2$ при $\lambda=2$ методом итераций в обратном времени получите значение x , с которого надо стартовать для того, чтобы последовательность знаков переменной при прямых итерациях воспроизвела вашу случайную последовательность. До каких N компьютер правильно воспроизводит последовательность?

б) Воспроизведите расчеты для меньших значений λ , например, $\lambda=1.8$. Оцените какой процент кодов определенной длины составляют запрещенные, приводящие на некотором шаге к появлению отрицательного числа под знаком квадратного корня.

в) При $\lambda=2$ сопоставьте результаты прямых итераций, начиная от $x_0 = \sqrt{3}/2$ и расчета по аналитической формуле

$$x_n = -\cos(2^n \arccos(-x_0)).$$

При каких n наступает расхождение?

2. Перемешивание. Продемонстрируйте на экране компьютера несколько шагов итераций двумерных консервативных отображений – как деформируется закрашенная область, в качестве которой возьмите изображение кота, как у Арнольда. Прodelайте это для

- Для отображения "кот Арнольда", заданного уравнениями

$$x' = x + y, y' = x + 2y \pmod{1},$$

- Для отображения пекаря

$$\begin{aligned} x' &= 2x, y = y/2, x \leq 1/2, \\ x' &= 2x - 1, y' = (y + 1)/2, x > 1/2. \end{aligned}$$

В чем выражается наличие свойства перемешивания?

3. Система Лоренца. Проведите следующее исследование системы Лоренца.

а) Составьте анимационную программу, показывающую вращение жидкости в конвективной петле, описываемое уравнениями Лоренца при $b=1$. Распределение температуры кодируйте цветом. Пронаблюдайте качественно разные режимы динамики при различной интенсивности подогрева.

б) Составьте программу численного решения уравнений Лоренца

$$dx/dt = \sigma(y - x), dy/dt = rx - y - xz, dz/dt = xy - bz$$

стандартным методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Постройте графики временной зависимости для динамических переменных от времени и проекции фазового портрета на плоскости (x, y) , (y, z) , (z, x) . Используйте "классический" набор параметров, $r=28$, $b=8/3$, $\sigma=10$

в) Запуская траекторию системы Лоренца из окрестности начала координат, отследите ее поведение при $r=5, 12, 13.927, 20, 24.06, 28$. Остальные параметры стандартные, $\sigma=10$, $b=8/3$. Обсудите результаты в контексте бифуркационного анализа.

г) Пронаблюдайте переход к хаосу через удвоения периода в системе Лоренца. Для этого постройте "бифуркационное дерево" на плоскости (r, z) , где по оси ординат откладывайте максимумы z . Положите $\sigma=10$, $b=8/3$, а интервал изменения параметра r от 98 до 100. (Проверьте, обеспечивает ли выбранный шаг интегрирования достаточную точность!)

д) Пронаблюдайте переход к хаосу через перемежаемость в системе Лоренца. Для этого постройте графики зависимости $z(t)$ в интервале времени порядка 200 для системы Лоренца при $\sigma=10$, $b=8/3$ и значениях $r=166, 166.15, 166.3$. Получите для указанных параметров также фазовые портреты аттрактора в проекциях на три координатные плоскости.

4. Регулярные режимы и хаос в трехмерных потоках. Постройте фазовые портреты аттракторов для следующих систем.

а) Система Ресслера при $a=0.2$, $b=0.2$, и различных c в интервале от 2 до 5.

б) Генератор с инерционной нелинейностью Анищенко-Астахова

$$dx/dt = mx + y - xz, dy/dt = -x, dz/dt = g(-z + \Phi(x)), \Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases},$$

при $g=0.6$, и различных значениях m от 0.4 до 1.5.

в) Схема Чуа

$$\begin{aligned} dx/dt &= \alpha(y - h(x)), \\ dy/dt &= x - y + z, \quad h(x) = \begin{cases} (2x - 3)/7, & x \geq 1 \\ -x/7, & |x| \leq 1 \\ (2x + 3)/7, & x \leq -1 \end{cases} \\ dz/dt &= -\beta y, \end{aligned}$$

α и β от 2 до 5.

г) Несколько систем Спротта:

$$dx/dt = yz, dy/dt = x - y, dz/dt = 1 - xy,$$

$$dx/dt = -y, dy/dt = x + z, dz/dt = xz + 3y,$$

$$dx/dt = yz, dy/dt = x^2 - y, dz/dt = 1 - 4x,$$

$$dx/dt = -0.2y, dy/dt = x + z, dz/dt = x + y^2 - z,$$

$$dx/dt = xy - z, dy/dt = x - y, dz/dt = x + 0.3y,$$

$$dx/dt = -2y, dy/dt = x + z^2, dz/dt = 1 + y - 2z,$$

5. Неавтономные потоковые системы. Проведите исследование одной из представленных ниже неавтономных систем по следующей схеме:

а) Постройте несколько различных реализаций $x(t)$ для значений параметров, отвечающих периодическим и хаотическим режимам.

б) Прдемонстрируйте существование чувствительной зависимости от начальных условий, для чего слегка измените эти условия для хаотической реализации; подберите эту вариацию так, чтобы на экране дисплея реализации на начальном участке совпадали, а затем – расходились.

в) Прдемонстрируйте чувствительную зависимость от начальных условий для фазовых траекторий на плоскости $x, \dot{x}$.

г) Создайте программу, рисующую проекцию портрета аттрактора на плоскость $x, \dot{x}$, и пронаблюдайте трансформацию аттрактора при вариации параметров.

д) Прдемонстрируйте возможность сосуществования аттракторов при фиксированных значениях параметров.

е) Создайте программу, которая рисует не только фазовые траектории на плоскости $x, \dot{x}$, но и точки в сечении Пуанкаре (соответствующие сечения должны быть проведены через период внешнего воздействия) и пронаблюдайте различные режимы с помощью таких сечений.

ж) Используя программу построения отображения Пуанкаре, получите карту динамических режимов на плоскости параметров (как правило, используйте плоскость амплитуда – частота воздействия).

Неавтономные системы для исследования

- Система Уеды

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = B \cos t,$$

- Осциллятор Дуффинга

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x - x^3/6 = A \sin \omega t,$$

- Система Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = A \sin \omega t,$$

- Брюсселятор

$$\dot{x} = A - Bx + x^2 y - x + A \cos \omega t,$$

$$\dot{y} = Bx - x^2 y.$$

(положите $A=0,4$).

6. Сечение Пуанкаре и метод Эно. Создайте программу, позволяющую строить сечения Пуанкаре для трехмерных потоков. Для определения координат точки пересечения с секущей плоскостью используйте метод Эно. Получите вид аттракторов в сечении Пуанкаре и пронаблюдайте их эволюцию при вариации параметров. Сопоставьте вид сечений с соответствующими фазовыми портретами. Модифицируйте программу так, чтобы она демонстрировала так же и отображение первого возвращения, используя в качестве переменной одну из координат точки пересечения фазовой траектории с плоскостью. Что можно сказать о динамике системы на основе полученных иллюстраций? Постройте бифуркационные деревья для той же переменной в зависимости от одного из параметров. Сопоставьте исследование аттракторов и вид бифуркационного дерева.

Динамические системы для исследования.

- Система Реслера.
- Генератор с инерционной нелинейностью.
- Генератор Кияшко-Пиковского-Рабиновича.
- Генератор Кислова-Дмитриева.

$$T\dot{x} + x = F(z),$$

$$\dot{y} = x - z,$$

$$\dot{z} = y - z/Q,$$

где $F(z) = Mz \exp(-z^2)$ для $Q=10$ и $T=1$.

7. Двухпараметрическое исследование трехмерных потоков.

Используя предыдущую программу и программу построения карт динамических режимов двумерных отображений, постройте карты для трехмерных потоков. Постройте трехмерные портреты аттракторов в характерных точках плоскости параметров. Пронаблюдайте каскад удвоений периода, хаотические аттракторы, аттракторы, отвечающие "островкам устойчивости" в хаотической области.

Динамические системы для исследования те же, что и предыдущей задаче

8. Ляпуновские показатели. Составьте программы, позволяющие вычислять старший ляпуновский показатель для одномерных отображений, двумерных отображений и потоков. Получите графики зависимости этого показателя от какого-либо параметра для трех систем (по одной из каждого класса). Самостоятельно подберите диапазон изменения управляющего параметра и значения остальных параметров, чтобы зафиксировать интересные особенности динамики (удвоения периода, хаос и др.). Отметьте точки циклов максимальной устойчивости, точки бифуркаций удвоения периода, области хаоса.

Одномерные отображения.

- Логистическое.
- Кубическое.
- Окружности.
- $x_{n+1} = \lambda \cos x_n$.

Двумерные отображения

- Отображение Эно.
- Система Икеды.
- Нелинейное модельное отображение с бифуркацией Неймарка

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2), \\y_{n+1} &= Jy_n - (x_n^2 + y_n^2)/5.\end{aligned}$$

Потоки.

- Система Ресслера.
- Система Лоренца.
- Система Уеды.

- Генератор с инерционной нелинейностью.
- Одна из систем Спротта: $\ddot{x} + \lambda x - \dot{x}^2 + x = 0$, $2,12 < \lambda < 2,18$.

9. Спектр ляпуновских показателей. Составьте программу вычисления спектра ляпуновских показателей для системы Ресслера с использованием процедуры ортогонализации по Граму-Шмидту. Проведите аккуратные вычисления с оценкой погрешности при $c=5$, $a=1/5$, $b=1/5$. Какова сигнатура спектра ляпуновских показателей в этом случае?

10. Двухпараметрический ляпуновский анализ. Составьте программу по построению карт ляпуновского показателя, на которой оттенком серого цвета отобразите его величину. Постройте такие карты для одной из следующих систем.

- Кубическое отображение.
- Логистическое отображение вида $x_{n+1} = r_n x_n (1 - x_n)$ под действием бинарного сигнала, для следующих законов изменения r_n : $b, a, \dots; b, b, a, b, a, \dots; b, b, b, b, b, b, a, a, a, a, a, a, \dots$. Попробуйте подобрать другие интересные варианты последовательности r_n .
- Логистическое отображение под действием гармонического сигнала $x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon \cos 2\pi \omega n$, где частота ω принимает значения $1/3, 1/5, 1/7$.
- Отображение окружности.
- Отображение Эно.
- Система Икеды.
- Универсальное отображение с бифуркацией Неймарка из задачи 89 главы "Бифуркации". Как представлены на таких картах циклы максимальной устойчивости? Области crossroad area? Языки синхронизации?

11. Устойчивость по Пуассону и возвраты Пуанкаре.

а) Для одной из систем с хаотической динамикой (Лоренца, Ресслера, или любой другой) отследите последовательность возвратов Пуанкаре, взяв несколько значений ε , задающих точность возврата. Какой характер носит последовательность временных интервалов между возвратами?

б) Рассмотрите систему двух осцилляторов с несоизмеримыми частотами. Отследите последовательность возвратов Пуанкаре, взяв несколько значений ε , задающих точность возврата. Какой характер носит последовательность временных интервалов между возвратами?

12. Геометрия странных аттракторов.

а) Для отображения Эно

$$x' = 1 - ax^2 - by, y' = x.$$

при $b=-0.3$, $a=1.4$ получите изображение странного аттрактора на плоскости (x,y) , а также в увеличенном масштабе фрагменты этого изображения, позволяющие рассмотреть канторо-подобную поперечную структуру аттрактора. Рассмотрите далее аналогичным образом критический аттрактор в точке $b=0.3$, $a_c=1.9516465$. В чем отличие этих случаев?

б) Придумайте способ графического изображения на экране компьютера процедуры последовательного построения аттрактора Смейла-Вильямса. Этот аттрактор имеет место в трехмерном отображении, определение которого в цилиндрических координатах (r, φ, z) таково:

$$r' = 1 + 0.2(r-1) + 0.1 \cos \varphi, z' = 0.1 \sin \varphi, \varphi' = 2\varphi \pmod{2\pi}.$$

Связь цилиндрических координат с декартовыми: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. Тор, фигурирующий на начальном этапе построения, в сечении имеет окружность радиуса 0.3.

13. Фрактальная размерность. Следующая процедура позволяет генерировать последовательность точек, принадлежащих двухмасштабному канторову множеству с масштабными факторами a и b :

$$x_{2n} = b(x_n + 1), x_{2n+1} = -a(x_n + 1), x_0 = b/(1-b).$$

Опробуйте на этом множестве алгоритм вычисления размерности по Grassberger-Росассиа. Специально рассмотрите случай $a=b=1/3$, что соответствует классическому канторову множеству, а также $a=2.5029\dots$, $b=a^2$, что отвечает аппроксимации аттрактора Фейгенбаума двухмасштабным канторовым множеством. Сравните значение размерности с теоретическим.

14. Бассейны притяжения. Постройте бассейны притяжения отображения Эно $x_{n+1} = \lambda - x_n^2 - by_n$, $y_{n+1} = x_n$ при $b=0.3$ и значениях параметра $\lambda=1.15$, 1.395 и 1.405 . Укажите другими цветами аттракторы системы и все седловые точки и циклы. Пронаблюдайте эволюцию границы бассейнов притяжения и ее фрактализацию. Постройте многообразия всех седловых режимов. Как они связаны с границами бассейнов?

15. Удвоения периода. Создайте программу, демонстрирующую бифуркационное дерево для системы с удвоениями периода и одновременно – портрет аттрактора в выбранной с помощью “мыши” точке на дереве. Пронаблюдайте удвоения периода, хаотические режимы, основные периодические окна в хаотической области и каскад удвоений на их базе, бифуркации слияния полос. Исследование проведите параллельно для одномерного необратимого, двумерного обратимого отображений и потока:

- Логистическое отображение.
- Отображение Эно.
- Система Реслера.

Что общего, а что различного обнаруживается для этих классов систем?

16. Скейлинг для систем с удвоениями периода. Представьте иллюстрации скейлинга на бифуркационном дереве и графике ляпуновского показателя для одномерного отображения, демонстрирующего удвоения периода. Предварительно определите положение критической точки.

Системы для исследования:

- Логистическое отображение.
- Отображение $x_{n+1} = \lambda \cos x_n$.
- Отображение окружности внутри одного из языков синхронизации.

17. Спектры для систем с удвоениями периода. Постройте спектр дискретного отображения в области изменения одного из параметров, отвечающей удвоениям периода. Проследите за эволюцией спектра при удвоениях. Постройте спектр точно в критической точке. Оцените уровень перепада между субгармониками разного уровня и сравните с предсказанием теории Фейгенбаума. Постройте спектр для одного из окон устойчивости в закритической точке и в точке, отвечающей хаотическому режиму.

Системы для исследования:

- Логистическое отображение, $\lambda_c=1.4011552$.
- Отображение Эно для $b=0.3$, $\lambda_c=1.9516465$.

18. Фрактальные свойства критического аттрактора при переходе к хаосу через удвоения периода.

а) Составьте программу, позволяющую находить неустойчивые циклы периода $2, 4, 8, \dots, 2^k$ для логистического отображения $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ в критической точке $\lambda_c=1.401155189092$ и вычислите мультипликаторы этих

циклов. Для нахождения циклов используйте хорошо сходящуюся рекуррентную схему $x^{(n+1)} = x^{(n)} + (f(x^{(n)}) - x^{(n)})/2.6$, где $f(x)$ обозначает результат 2^k -кратной итерации логистического отображения при старте из точки x .

б) Для логистического отображения получите на экране компьютера несколько первых уровней построения критического аттрактора, как кантороподобного множества.

в) Постройте график сигма-функции Фейгенбаума.

г) Вычислите размерность Хаусдорфа критического аттрактора Фейгенбаума D . Для этого составьте программу, вычисляющую сумму l_i^D , где l_i – длины интервалов, отвечающие k -ому уровню построения аттрактора, и подберите D так, чтобы значения суммы для k -ого и $k+1$ -го уровней совпадали. Как зависит точность расчета от уровня k ?

д) Составьте программу, позволяющую получить спектр обобщенных размерностей Реньи D_q и скейлинг-спектр $f(\alpha)$. Постройте графики этих зависимостей при различном выборе уровня k . Сравните результаты с расчетами по модели двухмасштабного канторова множества. Вычислите по возможности точно информационную и корреляционную размерности критического аттрактора.

19. Воздействие шума на системы с удвоениями периода.

а) Постройте бифуркационное дерево и график ляпуновского показателя для логистического отображения под действием шума $x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon y_n$, где y_n – случайная последовательность, генерируемая компьютером. Покажите, что шум разрушает тонкую структуру дерева тем сильнее, чем более глубокий уровень организации дерева мы рассматриваем. Как влияет шум на положение границы хаоса?

б) Проясните скейлинг на бифуркационном дереве и графике ляпуновского показателя. Для этого действуйте аналогично задаче 16 но пересчитывайте амплитуду шума на каждом шаге преобразования подобия в $\mu_F = 6.618\dots$ раз. (Константа μ_F найдена Кратчфильдом с соавторами).

в) Продумайте, как можно использовать свойство скейлинга для оценки константы μ для отображений $x_{n+1} = \lambda - x_n^N + \varepsilon y_n$ с другим порядком экстремума. Сделайте такие оценки для $N=4,6,8$.

г) Постройте карты ляпуновских показателей для кубического отображения $x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3 + \varepsilon y_n$ при различных значениях амплитуды

шума. Как трансформируется граница хаоса и режимы максимальной устойчивости?

20. Нефейгенбаумовские удвоения и трикритические точки в двухпараметрических отображениях. Для кубического отображения $x_{n+1} = a - bx_n + x_n^3$ найдите условие, когда максимум отображается в минимум и нанести соответствующую линию на карту динамических режимов (см. также задачу 51 из раздела “Бифуркации”). определите визуальную точку, в которой эта линия подходит к границе хаоса на основе фейгенбаумовских удвоений. Сравните вашу оценку с точными значениями $a_T=0.24269876\dots$, $b_T=1.95138576\dots$. Постройте бифуркационное дерево и графики ляпуновского показателя вдоль этой линии. В чем их отличие от фейгенбаумовского случая? Продемонстрируйте скейлинг на этих графиках, используя константы $\delta_T=7.248$ по оси управляющего параметра, $a_T^2=2.876$ по оси переменной x . Константа δ_T характерна для удвоений в отображении $x_{n+1} = \lambda - x_n^4$. Для объяснения ее появления в нашем случае покажите, что при условии отображения экстремума в экстремум двукратно проитерированное отображение имеет экстремум четвертого порядка. Обсудите универсальный характер полученных результатов для двухпараметрических одномерных отображений. Какой способ можно рекомендовать на их основе для поиска концевых точек фейгенбаумовских линий на плоскости параметров?

21. Переमेжаемость. Пронаблюдайте переход к хаосу через перемежаемость в логистическом отображении $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ при выходе из окна периода 3 в сторону уменьшения параметра λ (начните с $\lambda=1.76$). Постройте графики зависимости x от дискретного времени n для нескольких значений параметра λ меньших порога возникновения перемежаемости. Пронаблюдайте присутствие ламинарных и турбулентных стадий и изменение их длительности в зависимости от параметра λ .

22. Синхронизация и квазипериодические режимы для отображения окружности. Постройте карту динамических режимов для отображения окружности. Получите так называемую “чертову лестницу”, дающую зависимость числа вращения от параметра при $K<1$ и $K=1$. Укажите на этой лестнице ступеньки, отвечающие нескольким последовательным уровням построения дерева Фейри. Получите увеличенный фрагмент чертовой лестницы в окрестности иррационального числа вращения, $\omega = (\sqrt{5}-1)/2$, известного как “золотое сечение” при $K=1$. Идентифицируйте ступеньки этой лестницы, отвечающие аппроксимации золотого сечения при помощи чисел Фибоначчи. Получите итерационные диаграммы, демонстрирующие циклы с числами вращения $1/3$ и $2/5$. Получите итерационную диаграмму,

отвечающую какому-либо квазипериодическому режиму. Используйте для определения соответствующих параметров чертову лестницу. Постройте спектр в этой точке. Как в структуре спектра проявляется квазипериодический характер режима?

23. Разрушение инвариантной кривой. Сильные и слабые резонансы. Проследите за эволюцией инвариантной кривой вдоль границ языков синхронизации с числами вращения $\omega=1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5$ для отображения кольца

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta_n + br_n,$$

$$r_{n+1} = br_n - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta_n.$$

(Если это удобно, можно использовать языки $2/3, 2/5$ и т.д.) В качестве фазовых переменных используйте $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$. Как из инвариантной кривой возникает хаотический аттрактор? Обсудите устройство многообразий соответствующих основных циклов внутри языков. Однотипно ли оно для разных языков, или имеются принципиальные отличия? Используйте как построение многообразий, так и технику “конденсации” облака изображающих точек в фазовом пространстве.

Затем проведите аналогичное рассмотрение для универсального двумерного отображения с бифуркацией Неймарка

$$x_{n+1} = Sx_n - y_n - (x_n^2 + y_n^2),$$

$$y_{n+1} = Jy_n - (x_n^2 + y_n^2)/5.$$

В чем отличие наблюдаемой картины для этих двух отображений? В каком случае можно говорить о “сильных” и “слабых” резонансах? Обсудите как только возможно детально внутреннее устройство каждого языка в обоих случаях (удвоения периода, хаос на их основе, вторичные бифуркации Неймарка, вторичная структура языков синхронизации, точки бифуркаций коразмерности два и т.д.).

24. Глобальные бифуркации в системе с квазипериодическими режимами. Постройте карту динамических режимов неавтономного Брюсселятора

$$\dot{x} = A - (B+1)x + x^2y + b \cos \omega t,$$

$$\dot{y} = Bx - x^2y,$$

на плоскости параметров амплитуда воздействия b – частота воздействия ω при $b=1.2, A=0.4$. Укажите точку бифуркации коразмерности два, в которой

смыкаются два основных языка синхронизации с числами вращения $\omega=1$ и $\omega=1/2$. Постройте сечение Пуанкаре в окрестности этой точки. Попробуйте восстановить хотя бы качественно полную картину бифуркаций на основе такого исследования. Пронаблюдайте более подробно глобальную бифуркацию исчезновения инвариантной кривой в результате ее столкновения с неустойчивым многообразием седлового 2-цикла при $b=0.02$ и $\omega=0.62, 0.6288, 0.62889$. Для последнего значения увеличьте “ломанный” участок инвариантной кривой и покажите, что он имеет складки. При $\omega=0.629$ наблюдайте, как изображающие точки в сечении Пуанкаре “убегают” с инвариантной кривой. К какому множеству они при этом движутся?

25. Удвоения торов. Для логистического отображения под квазипериодическим воздействием

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon \cos(2\pi y_n),$$

$$y_{n+1} = y_n + \omega \pmod{1},$$

$$\omega = (\sqrt{5} - 1)/2,$$

пронаблюдайте при небольших ε ($\varepsilon \leq 0.1$) инвариантные кривые (торы). С помощью отображения первого возвращения для переменной x продемонстрируйте удвоения торов с ростом управляющего параметра λ при фиксированной амплитуде ε . Могут ли пересекаться инвариантные кривые, отвечающие удвоенному тору? Как изображающая точка “прыгает” по 2-тору? 4-тору? Определите примерное положение линий удвоения торов на плоскости (λ, ε) . Какие значения параметра λ отвечают точкам, в которых эти линии подходят к оси λ ? Обсудите связь бифуркации удвоения торов с обычными удвоениями. Как вы думаете, возможны ли удвоения разрушенных торов?

26. Странные нехаотические аттракторы. Для логистического отображения под действием квазипериодического воздействия с частотой, отвечающей золотому сечению

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon \cos(2\pi y_n + \varphi),$$

$$y_{n+1} = y_n + \omega \pmod{1},$$

$$\omega = (\sqrt{5} - 1)/2,$$

постройте отображения первого возвращения для переменной x при $\varepsilon=0.3, \lambda=0.9; \varepsilon=0.15, \lambda=0.9; \varepsilon=0.45, \lambda=0.8; \varepsilon=0.45, \lambda=0.9$. Какие из полученных объектов обладают фрактальной структурой? Найдите в каждом случае показатели Ляпунова. Классифицируйте соответствующие аттракторы. Значение $\lambda_c=1.1580968, \varepsilon_c=0.3602485, \varphi_c=2.48323$ отвечают критической

ситуации, в которой сходятся области существования странного нехаотического аттрактора, хаоса и различных торов. Постройте фазовый портрет аттрактора в этой точке. С помощью программы, рисующей фазовые портреты, просмотрите возможные режимы в окрестности критической точки на плоскости (λ, ε) .

Учебное издание

Кузнецов Александр Петрович

КОЛЕБАНИЯ, КАТАСТРОФЫ, БИФУРКАЦИИ, ХАОС

Оригинал-макет подготовили
Сатаев И.Р., Широков А.П.

Обложка художника Д.В.Соколова

Изд. лицензия ЛР № 020773 от 15.05.98

Подписано к печати 26.04.2000. Формат 60х84 1/16.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Бумага типографская N1
Усл. печ. Л. 6,25 (6,5). Уч.-изд. л. 6,4. Тираж 300 экз. Заказ 170.

410026, Саратов, ул. Астраханская, 83
Издательство ГосУНЦ «Колледж»

Отпечатано в ГосУНЦ «Колледж»