

А.Н. КРАЙКО

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

(КРАТКИЙ КУРС)

Оглавление

Предисловие.....	7
Часть 1. Уравнения состояния, законы сохранения в интегральной форме, поверхности разрыва, ударные волны, дифференциальные уравнения течения	9
Гл. 1.1. Некоторые сведения из термодинамики	9
Гл. 1.2. Уравнения движения идеального газа в интегральной форме	10
Гл. 1.3. Соотношения на разрывах и их классификация	12
Гл. 1.4. Ударные волны	15
Гл. 1.5. Ударные волны в сложных средах. Волны детонации. Изотермический скачок	28
Гл. 1.6. Дифференциальные уравнения течения в подобластях непрерывности параметров (<i>уравнения Эйлера</i>)	38
Часть 2. Одномерные нестационарные течения с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами	41
Гл. 2.1. Уравнения одномерных нестационарных течений. Их интегралы	41
Гл. 2.2. Характеристики и инварианты	45
Гл. 2.3. Выдвижение поршня из однородного покоящегося газа. Простая волна. Центрированная простая волна	50
Гл. 2.4. Движение поршня в газ. Образование ударной волны ..	54
Гл. 2.5. Распад произвольного разрыва (<i>задача Римана</i>). Теория ударной трубы. Центрированная волна сжатия	64
Гл. 2.6. Слабо возмущённое течение. Бегущие волны. Эволюционные и неэволюционные разрывы	71

Гл. 2.7. Нелинейное затухание слабых ударных волн	77
Гл. 2.8. Метод характеристик	87
Гл. 2.9. Изэнтропическое расширение и сжатие газа из покоя в покой	81
Гл. 2.10. Задача о сильном точечном взрыве	89
Гл. 2.11. Задача об отражении ударной волны от оси или центра симметрии (<i>задача Гудерля</i>)	92
Гл. 2.12. Быстрое сильное сжатие идеального газа	99
Часть 3. Стационарные течения газа	108
Гл. 3.1. Уравнения стационарного течения идеального газа. Их интегралы и следствия	117
Гл. 3.2. Связи параметров на линии тока. Источник, сток, вихрь	126
Гл. 3.3. Элементарная теория (ЭТ) течений в каналах переменного сечения (сопле, диффузоре, аэродинамической трубе)	132
Гл. 3.4. Характеристики плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений	140
Гл. 3.5. Плоскопараллельные однородные течения. Их инварианты. Простые волны. Теорема Никольского–Таганова	147
Гл. 3.6. Метод характеристик. Решение типичных задач	159
Гл. 3.7. Построение суперкритических профилей	167
Гл. 3.8. Ударная поляра. Обтекание клина	174
Гл. 3.9. Взаимодействие поверхностей разрыва. Нерасчётное истечение сверхзвуковых струй	185
Гл. 3.10. Осесимметричные конические течения. Обтекание кругового конуса	197
Гл. 3.11. Двумерные конические течения	206
Гл. 3.12. Уравнение Чаплыгина. Струйные течения. Выравнивание докритических и критических струй	216
Гл. 3.13. Законы подобия. Гиперзвуковая стабилизация	223

Часть 4. Оптимальные аэродинамические формы	236
Гл. 4.1. Задача Ньютона о головной части минимального сопротивления	236
Гл. 4.2. Симметричный профиль минимального волнового сопротивления	245
Гл. 4.3. Пространственные тела, оптимальные в приближении законов локального взаимодействия	255
Гл. 4.4. Метод неопределённого контрольного контура в рамках уравнений Эйлера	267
Гл. 4.5. Прямые методы построения оптимальных конфигураций	279
Список литературы	289
Именной указатель	295
Предметный указатель	297

Предисловие

Много лет назад автор был очарован курсом Газовой динамики, который студентам Московского физико-технического института читал на базовой кафедре в Центральном институте авиационного моторостроения им. П.И. Баранова (ЦИАМ) совсем ещё молодой Горимир Горимирович Чёрный. Содержание этого курса, форма его преподнесения и личность лектора произвели на тогдашнего студента такое впечатление, что вся его дальнейшая жизнь оказалась связанной сначала с лабораторией № 4 ЦИАМ, первым руководителем которой был Г.Г. Чёрный, а затем – с «научной школой Чёрного». По воле и инициативе Учителя ученик был привлечён к преподаванию на той же базовой кафедре. После перехода Г.Г. Чёрного на постоянную работу в МГУ им. М.В. Ломоносова «курс Чёрного» доверили читать ученику.

В течение прошедших с тех пор десятилетий, читая курс Теоретической газовой динамики, автор придерживался логической схемы Г.Г. Чёрного. Если же говорить о наполняющих её задачах, то они изменились радикально. Причина этого – и само развитие газовой динамики, и опыт, интересы и результаты автора, его учеников и коллег. Действительно, даже после издания книги Г.Г. Чёрного [1] прошло 20 лет, исключительно плодотворных и для газовой динамики, и для автора данной монографии. Разгадан «парадокс Неймана», связанный с дифракцией на клине слабых ударных волн. В обеспечение чисто газодинамическими средствами инерционного управляемого термоядерного синтеза реализована идея сферически и цилиндрически симметричного быстрого сильного (по температуре и плотности) сжатия идеального газа. Выявлены особенности течений в местных сверхзвуковых зонах. Предложен простой (без использования гипергеометрических функций) способ анализа асимптотических свойств струйных течений. Настоящий прорыв осуществлён в построении оптимальных аэродинамических форм. Эти и ряд других результатов, характеризующих современное состояние газовой динамики, не могли быть отражены в вышедших ранее руководствах [1-15]. Исправить такую ситуацию, объединяя классику и современность, – главная цель автора.

При написании монографии автор придерживался следующих принципов: 1. Дать основу, необходимую для понимания современного состояния газовой динамики и публикаций в научных журналах. 2. Для овладения представленным материалом достаточно физико-математической подготовки, получаемой на 1-3 курсах обучения на механико-математических факультетах ведущих российских университетов, в МФТИ и на кафедрах «прикладной математики» иных вузов. 3. Отражая и классические, и современные результаты, объём монографии должен быть близким к реальному годовому курсу, читаемому с применением компьютерных технологий.

Автору приятно отметить тех, кто способствовал появлению этой книги. Несколько лет назад на полезность и необходимость именно краткого курса газовой динамики указал автору Г.Г. Чёрный. Будучи деканом ФАЛТ МФТИ, идею создания подобного курса активно поддержал Г.Н. Дудин. Отдельные иллюстрации подготовили Х.Ф. Валиев, Д.Н. Малов, К.С. Пьянков и Н.И. Тилляева. Полезными при изложении ряда тем были дискуссии с В.А. Белоконовым, Л.Е. Стерниным и Н.И. Тилляевой. В течение почти полувека автору посчастливилось обсуждать многие проблемы, нашедшие отражение в данной монографии, с Юрием Дмитриевичем Шмыглевским. Горько сознавать, что подобных обсуждений больше не будет. К своим Учителям, а также названным и неназванным коллегам и ученикам автор испытывает глубокую и искреннюю благодарность.

Ряд соображений формального характера. В монографии четыре Части, которые состоят из глав. Нумерация глав, рисунков и таблиц десятичная сквозная в пределах каждой Части. Внутри глав нумерация формул и уравнений сквозная. При ссылках на формулы иной главы к номеру формулы спереди добавляется номер главы. Например, «формула (2.1.1)» – это формула (1) главы 2.1. Отмечая моменты приоритетного характера, автор избегал ссылок на трудно доступные первоисточники. Их можно найти в цитируемых статьях, монографиях (в этом отношении особенно интересна монография Р. Мизеса [11]) и ретроспективных сборниках [14-17]. Сквозной список литературы разбит на группы, относящиеся к разным частям.

Часть 1. Уравнения состояния, законы сохранения в интегральной форме, поверхности разрыва, ударные волны, дифференциальные уравнения течения

Глава 1.1. Некоторые сведения из термодинамики

Как правило, рассматриваются течения невязкого и нетеплопроводного – *идеального* газа. Газ, часто называемый в термодинамике *идеальным*, будем называть *совершенным* (см. ниже). В идеальном газе на любую площадку с нормалью $\mathbf{n}$ действует только нормальное напряжение (*давление* p), по величине одинаковое для всех направлений нормали $\mathbf{n}$.

Если не оговорено особо, то в термодинамическом отношении среда считается *двупараметрической*. Это означает, что все её термодинамические параметры – известные функции двух из них, взятых в качестве *основных*, например, давления p и плотности ρ , давления и удельной энтропии s , давления и абсолютной температуры T и т.п. Как будет видно из дальнейшего, в уравнения течения идеального газа наряду с p , ρ и s входят удельная внутренняя энергия e и удельная энтальпия h . Согласно определению $h = e + p/\rho$. Следовательно, в зависимости от выбора основных термодинамических параметров интересующие нас функции – *уравнения состояния* – имеют вид

$$\begin{aligned} e &= e(p, \rho), s = s(p, \rho), T = T(p, \rho); \\ e &= e(p, T), \rho = \rho(p, T), s = s(p, T); \\ e &= e(p, s), \rho = \rho(p, s), T = T(p, s) \end{aligned} \quad (1)$$

и т.п.

Двупараметричность имеет место, если характерные времена идущих в газе физико-химических процессов либо много меньше, либо много больше характерного времени течения. Процессы первого типа можно считать *равновесными*, а второго – *замороженными*. При отсутствии иных (*неравновесных*) процессов

$$Tds = de + pd(1/\rho) = dh - (1/\rho)dp. \quad (2)$$

Уравнения состояния (1) должны удовлетворять этому равенству. Так, если за основные термодинамические параметры взяты p и s , то в силу равенства (2)

$$h_s \equiv \frac{\partial h}{\partial s} = T, \quad h_p \equiv \frac{\partial h}{\partial p} = \frac{1}{\rho} \equiv \omega, \quad (3)$$

где ω – удельный объём.

Если есть подвод (или отвод) тепла δq , то $Tds \geq \delta q$. В идеальном газе знак $>$ имеет место при наличии неравновесных процессов, а равенство – при их отсутствии.

Совершенным будем называть газ, у которого p/ρ и e – линейные функции T : $p/\rho = RT$, $e = c_v T$, где R – газовая постоянная, а c_v – удельная теплоёмкость при постоянном объёме. Отсюда

$$h = (c_v + R)T = \frac{c_p}{R} \frac{p}{\rho} = \frac{c_p}{c_p - c_v} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad c_p = c_v + R, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad (4)$$

а с учётом равенства (2)

$$\begin{aligned} Tds &= dh - \frac{1}{\rho} dp \rightarrow RTds = c_p dRT - \frac{R}{\rho} dp \rightarrow \frac{p}{\rho} ds = c_p d \frac{p}{\rho} - \frac{R}{\rho} dp = \\ &= \frac{c_p - R}{\rho} dp + c_p p d \frac{1}{\rho} \rightarrow d \frac{s}{c_v} = d \ln \frac{p}{\rho^\gamma} \rightarrow \\ \frac{p}{\rho^\gamma} &= \chi(s) = \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} \exp \frac{s - s_1}{c_v}, \end{aligned} \quad (5)$$

где индекс «1» метит параметры в некотором фиксированном состоянии. Согласно равенству (5) росту энтропии оппечает рост **энтропийной функции** p/ρ^γ . При постоянной энтропии это – **уравнение изэнтропы** для совершенного газа (**адиабаты Пуассона**). Поэтому **отношение удельных теплоёмкостей** γ называют **показателем адиабаты**. Если f – число степеней свободы молекул (или атомов), образующих газ, то в рамках классической термодинамики $\gamma = (f+2)/f$.

Глава 1.2. Уравнения движения идеального газа в интегральной форме

Пусть t – время, x_k – декартовы координаты ($k = 1, 2, 3$), $\mathbf{i}_k$ – орты их осей, $\Omega(t)$ – произвольный замкнутый объём, $\partial\Omega(t)$ – ограничивающая его поверхность, а $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к элементу $d\sigma$ этой поверхности (рис. 1.1). Если элементы $d\sigma$ поверхности

$\partial\Omega(t)$ движутся, и D – проекция их скорости на нормаль $\mathbf{n}$, то для любой функции $A = A(t, x_1, x_2, x_3) = A(t, \mathbf{r})$ справедливо равенство (рис. 1.1)

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} A d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} A d\Omega + \int_{\partial\Omega} A D d\sigma.$$

Здесь Ω – тот же, но фиксированный (независящий от времени) объём, а $\partial\Omega$ – ограничивающая его поверхность. В частности, для **жидкого объёма** $\Omega(t)$, состоящего из фиксированных частиц (*жидких частиц*) $D = \mathbf{V}\mathbf{n}$, где $\mathbf{V}$ – вектор скорости газа, последнее равенство примет вид

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} A d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} A d\Omega + \int_{\partial\Omega} A \mathbf{V} \mathbf{n} d\sigma. \quad (1)$$

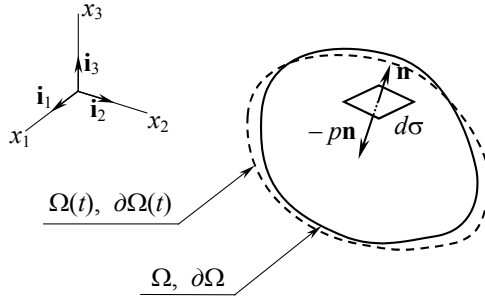


Рис. 1.1

Воспользовавшись равенством (1), законы сохранения массы количества движения и энергии запишем в форме:

1) закон сохранения массы:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{V} \mathbf{n} d\sigma,$$

2) закон сохранения количества движения:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{V} d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \{ \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \mathbf{n}) + \mathbf{p} \mathbf{n} \} d\sigma,$$

3) закон сохранения энергии:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(2e + V^2) d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{V} \mathbf{n} (2h + V^2) d\sigma.$$

Т а б л и ц а 1.1.

Функции в законах сохранения

Закон сохранения	A	$\mathbf{B}$
массы	ρ	$\rho \mathbf{V}$
количества движения ($k = 1, 2, 3$)	ρV_k	$\rho V_k \mathbf{V} + p \mathbf{i}_k$
энергии	$\rho(2e + V^2)$	$\rho \mathbf{V} (2h + V^2)$

Таким образом, для идеального газа законы сохранения в интегральной форме имеют вид

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} A d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{B} \mathbf{n} d\sigma. \quad (2)$$

Здесь $A(t, \mathbf{r})$ – скалярная, $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ – векторная функции, а $\mathbf{r}$ означает совокупность переменных x_1, x_2, x_3 . В общем случае A и $\mathbf{B}$ могут претерпевать разрывы на поверхностях Ω_D , разделяющих объём Ω на подобласти непрерывности параметров. Выражения для A и $\mathbf{B}$ через параметры потока, включая проекции V_k вектора скорости газа $\mathbf{V}$ на оси x_k , приведены в табл. 1.1.

Глава 1.3. Соотношения на разрывах и их классификация

Сокращение: ПР – *поверхность разрыва*.

Перейдём в инерциальную декартову систему координат, движущуюся по нормали $\mathbf{n}$ к рассматриваемой точке o поверхности разрыва (ПР) с постоянной скоростью D – «нормальной» скоростью ПР в этой точке (рис. 1.2). В такой системе координат в рассматриваемый момент времени в точке o ПР покоится. Начало координат поместим в точку o , а ось x_1 направим по $\mathbf{n}$. В законах сохранения (1.2.2) в качестве объёма Ω возьмем прямоугольный параллелепипед: $|x_1| \leq \varepsilon$, $|x_2| \leq \Delta$, $|x_3| \leq \Delta$, где ε и Δ малы по

сравнению с масштабами, характеризующими неоднородность течения в окрестности точки o . Благодаря этому ПР, близкая в пределах такого параллелепипеда к плоскости x_2x_3 , делит его практически пополам, а максимальное значение скорости ПР (равной нулю в точке o) – величина порядка $(\partial D/\partial x_2 + \partial D/\partial x_3)\Delta$. На боковых гранях параллелепипеда компонента B_2 вектора $\mathbf{B}$ с разных сторон от ПР отличается на величину порядка $(\partial B_2/\partial x_2)\Delta$. Аналогично для верхней и нижней граней – на величину порядка $(\partial B_3/\partial x_3)\Delta$. С учётом этого и того, что внешние нормали на противоположных гранях параллелепипеда направлены в противоположные стороны, для разных составляющих левой и правой частей равенства (1.2.2)

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} A d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{B} n d\sigma$$

получим оценки

$$\begin{aligned} O \left\{ \Delta^2 \varepsilon \left(\frac{\partial A_-}{\partial t} + \frac{\partial A_+}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial D}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial x_3} \right) \Delta^3 [A] \right\} = \\ = -O \left\{ \varepsilon \Delta^2 \left(\frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \right) + \Delta^2 [B_n] \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $[\varphi] = \varphi_+ - \varphi_-$, индексы « $-$ » и « $+$ » метят параметры с разных сторон от ПР, а $B_n \equiv B_1$ – проекция вектора $\mathbf{B}$ на нормаль к ней.

Слагаемые левой части равенства (1) и первые два слагаемых его правой части – величины более высокого порядка малости, чем последнее слагаемое справа. Поэтому следствие этого равенства – непрерывность нормальной к ПР компоненты вектора $\mathbf{B}$, т.е. $[B_n] = 0$. Отсюда, в согласии с табл. 1.1, в движущейся с ПР системе координат на ПР выполняются законы сохранения:

1) массы

$$[\rho V_n] = 0, \quad (2)$$

2) количества движения в проекции на нормаль к разрыву

$$[\rho V_n^2 + p] = 0, \quad (3)$$

3, 4) количества движения в проекциях, «касательных» к разрыву:

$$[\rho V_n V_{2,3}] = 0,$$

или, если $\mathbf{V}_\tau$ – двумерная проекция вектора $\mathbf{V}$ на ПР, то

$$[\rho V_n \mathbf{V}_\tau] = 0, \quad (4)$$

5) энергии

$$[\rho V_n (2h + V^2)] = 0. \quad (5)$$

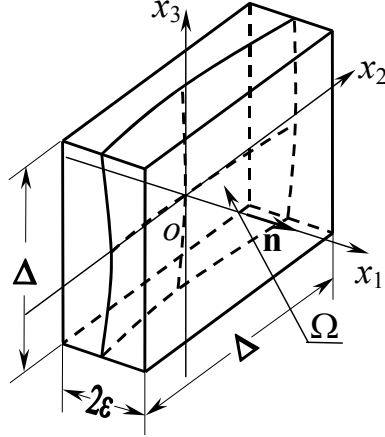


Рис. 1.2

В исходной (неподвижной – *лабораторной*) системе координат произвольная точка ПР движется по нормали к себе со скоростью D , а соответствующим проекциям скорости газа приписан индекс «0». В ней в силу равенств

$$V_n = V_n^0 - D, \quad \mathbf{V}_\tau = \mathbf{V}_\tau^0$$

полученные законы сохранения на ПР примут вид

$$[\rho(V_n^0 - D)] = 0, \quad (2^0)$$

$$[\rho(V_n^0 - D)^2 + p] = 0, \quad (3^0)$$

$$[\rho(V_n^0 - D)\mathbf{V}_\tau^0] = 0, \quad (4^0)$$

$$[\rho(V_n^0 - D)\{2h + (V_n^0 - D)^2 + (V_\tau^0)^2\}] = 0. \quad (5^0)$$

Введём непрерывный в силу (1.3.2) **поток массы** через разрыв $j = \rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}$. Здесь и далее индексы «1» и «2» заменяют индексы «-» и «+».

Есть две возможности

а) $j = 0$ – нет потока вещества через разрыв, т.е.

$$V_{n1} = V_{n2} = 0 \quad (6)$$

или

$$V_{n1}^0 = V_{n2}^0 = D. \quad (6^0)$$

Из (3) и (4) имеем

$$[p] = 0. \quad (7)$$

Законы сохранения (4) и (5) в случае $j = 0$ выполняются автоматически, допуская

$$[V_\tau] \neq 0, [2h + V^2] \neq 0,$$

Такие разрывы называются **контактными** (обычно, если $[V_\tau] = 0$) или **тангенциальными** (обычно, если $[V_\tau] \neq 0$).

б) $j \neq 0$.

В этом случае законы сохранения массы (2) и (2⁰) и нормальной компоненты количества движения (3) и (3⁰) остаются неизменными, т.е.

$$[\rho V_n] = [\rho(V_n^0 - D)] = 0, \quad (8)$$

$$[\rho V_n^2 + p] = [\rho(V_n^0 - D)^2 + p] = 0, \quad (9)$$

закон сохранения касательной компоненты количества движения (4) и (4⁰) после сокращения на $j \neq 0$ примет вид

$$[V_\tau] = [V_\tau^0] = 0, \quad (10)$$

а закон сохранения энергии (5) и (5⁰) также после сокращения на $j \neq 0$ с учётом (4) станет

$$[2h + V_n^2] = [2h + (V_n^0 - D)^2] = 0. \quad (11)$$

Поверхности разрыва, на которых $j \neq 0$, называются **ударными волнами (УВ)**.

Глава 1.4. Ударные волны

Сокращения: ПР – *поверхность разрыва*, ПРМ – *прямая Рэлея-Михельсона*, УА – *ударная адиабата*, УВ – *ударная волна*.

Для ударных волн (УВ) закон сохранения энергии (1.3.11), как и законы сохранения массы (1.3.8) и нормальной компоненты

количества движения (1.3.9) – для любых поверхностей разрыва, не содержит непрерывной на УВ касательной компоненты скорости V_τ . Поэтому при анализе соотношений на УВ о существовании этой компоненты можно забыть, что эквивалентно переходу в систему координат, которая движется по касательной к ПР со скоростью V_τ . С учётом этого перепишем нужные для дальнейшего законы сохранения, опустив у нормальной компоненты индекс «n»:

$$[\rho V] = 0, \quad (1)$$

$$[\rho V^2 + p] = 0, \quad (2)$$

$$[2h + V^2] = 0. \quad (3)$$

Вспомнив определения удельного объёма $\omega = 1/\rho$ и потока массы $j = \rho_k V_k = \rho_k(V_k^0 - D)$, выразим через них V_k . Подставив V_k

$= j\omega_k$ в (2) и разрешив получившееся равенство относительно j^2 , придём к уравнению

$$j^2 \equiv \rho_k^2 V_k^2 = \rho_k^2 (V_k^0 - D)^2 = -\frac{[p]}{[\omega]} \equiv -\frac{p_2 - p_1}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k = 1, 2. \quad (4)$$

Назовём его уравнением **прямой Рэля–Михельсона (ПРМ)**.

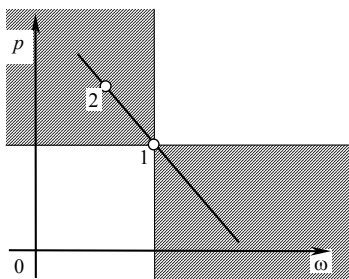


Рис. 1.3

Аналогично, подставив $V_{1,2} = j\omega_{1,2}$ в уравнение (3) и исключив j^2 с помощью равенства (4), придём к уравнению **ударной адиабаты (УА)** (*адиабаты Гюгонио или Ренкина–Гюгонио*)

$$h_2 - h_1 - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}(p_2 - p_1) = 0. \quad (5)$$

Так как f^2 неотрицательно, то в силу (4) точка 2 может оказаться во втором или четвёртом квадрантах (рис. 1.3). При этом росту давления отвечает уменьшение удельного объёма, а следовательно – рост плотности. Это – *скачки уплотнения*. Напротив, уменьшению давления отвечает рост удельного объёма и уменьшение плотности. Такие УВ – *скачки разрежения*.

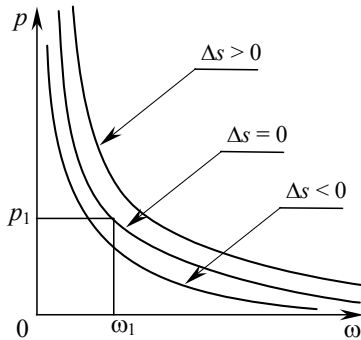


Рис. 1.4

Уравнение *изэнтропы* в силу равенства (1.1.2) в дифференциальной форме имеет вид

$$dh - \omega dp = 0. \quad (6)$$

Для совершенного газа получающееся отсюда уравнение адиабаты Пуассона (1.1.5) сводится к формуле

$$p\omega^\gamma = p_1\omega_1^\gamma \exp(\Delta s^\circ), \quad \Delta s^\circ = (s - s_1)/c_v.$$

Три таких изэнтропы для $\Delta s < 0$, $\Delta s = 0$ и $\Delta s > 0$ изображены на рис. 1.4.

Уравнение УА (5) получается, если уравнение (6) проинтегрировать от состояния 1 до состояния 2, взяв среднее значение удельного объёма. Поэтому в плоскости ωp УА и изэнтропа в окрестности начальной точки 1 должны быть близки друг к другу. Везде далее газ через УВ течёт от состояния 1 к состоянию 2.

Записав уравнения состояния в форме $h = h(p, s)$, $\omega = \omega(p, s)$ и учтя, что согласно равенству (1.1.3) $(\partial h / \partial p)_s \equiv h_p = \omega$, а $(\partial h / \partial s)_p \equiv h_s = T$, выпишем для h_2 и ω_2 разложения по $[p]$ и $[s]$ с тем, чтобы после их подстановки в уравнение УА (5) выразить $[s]$ через $[p]$. В (5) ω_2 умножено на $[p]$. Поэтому запишем

$$h_2 = h_1 + T_1[s] + \omega_1[p] + \frac{\omega_{p1}}{2}[p]^2 + \frac{\omega_{pp1}}{6}[p]^3 + \dots,$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_{p1}[p] + \frac{\omega_{pp1}}{2}[p]^2 + \dots$$

Подстановка этих представлений в уравнение (5) даст

$$T_1[s] + \omega_1[p] + \frac{\omega_{p1}}{2}[p]^2 + \frac{\omega_{pp1}}{6}[p]^3 - \omega_1[p] - \frac{\omega_{p1}}{2}[p]^2 - \frac{\omega_{pp1}}{4}[p]^3 + \dots = 0.$$

Отсюда после сокращений найдём

$$[s] = \frac{\omega_{pp1}}{12T_1}[p]^3 + \dots, \quad (7)$$

что оправдывает пренебрежение $[s][p]$ и $[s]$ в разложениях h_2 и ω_2 .

Так как вне УВ в идеальном (нетеплопроводном) газе потоки тепла отсутствуют, то при прохождении через УВ энтропия не может уменьшаться. Следовательно, для УВ малой интенсивности возможное направление изменения давления определяется знаком производной ω_{pp} . По этой причине производную ω_{pp} иногда называют **фундаментальной производной**.

Законы термодинамики не определяют знака ω_{pp} . Однако у обычно встречающихся газов $\omega_{pp} > 0$. По этой причине такие газы получили название **нормальных**. В противоположность этому, газы с $\omega_{pp} < 0$ назовём **ненормальными**. Согласно (7), в нормальном газе, в котором $\omega_{pp} > 0$, возможны слабые скачки уплотнения и невозможны слабые скачки разрежения. И наоборот: в ненормальном газе, в котором $\omega_{pp} < 0$, возможны слабые скачки разрежения и невозможны слабые скачки уплотнения. Можно показать, что сформулированное правило (**теорема Цемплена**) справедливо для УВ произвольной интенсивности. В нормальном газе изэнтропа – вогнутая (как на рис. 1.4), а в ненормальном – выпуклая кривая. Для совершенного газа в силу равенства (1.1.5)

$$\omega = \chi^{1/\gamma}(s)p^{-1/\gamma}, \quad \omega_p = -\chi^{1/\gamma} p^{-(\gamma+1)/\gamma} / \gamma, \quad \omega_{pp} = (\gamma+1)\omega/(\gamma^2 p^2) > 0. \quad (8)$$

При коэффициенте теплопроводности λ тепловой поток $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$ или, если ось n направить по ∇T , то

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (9)$$

На УВ $|\partial T / \partial n| = \infty$, и тепловой поток по нормали к поверхности разрыва при сколь угодно малом, но отличном от нуля λ был бы бесконечным. По указанной причине малые вязкость и теплопроводность приводят к тому, что в действительности вместо разрывов в газе имеют место узкие зоны с большими, но конечными изменениями T и других параметров. Покажем, как только из-за теплопроводности при прохождении таких зон будет расти энтропия (вязкость вносит дополнительный вклад).

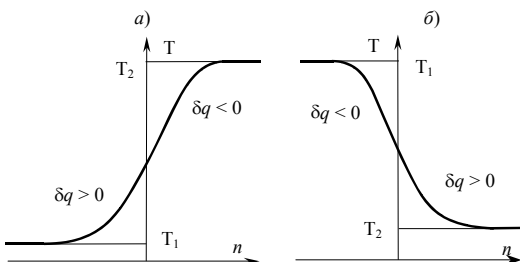


Рис. 1.5

При прохождении *размазанного* из-за вязкости и теплопроводности скачка уплотнения в согласии с формулой (9) количество тепла, получаемого *газовой частицей* – движущимся слоем газа фиксированной массы $\rho \Delta n$,

$$\delta q = q(n) - q(n + \Delta n) = k \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} \Delta n.$$

Поэтому при движении в направлении роста температуры (для скачка уплотнения на рис. 1.5 слева направо) до точки перегиба $\delta q > 0$, а после неё $\delta q < 0$, т.е. частица газа сначала получает, а затем отдаёт тепло. Изменение энтропии $[s]$ равно интегралу от $\delta q/T$, т.е.

$$[s] \equiv s_2 - s_1 = \int_{n<0} \frac{\delta q}{T} + \int_{n>0} \frac{\delta q}{T},$$

где n отсчитывается от точки перегиба кривой $T = T(n)$.

Поскольку извне ввиду пренебрежимо малых вне размазанного разрыва производных $\partial T/\partial n$ притока тепла нет, то суммарное количество полученного и отданного тепла равно нулю, т.е.

$$\int_{n<0} \delta q + \int_{n>0} \delta q = 0.$$

В случае скачка уплотнения температура T – монотонно растущая функция координаты n . Поэтому отсюда и из предыдущего равенства следует, что из-за теплопроводности

$$[s] \equiv s_2 - s_1 > 0. \quad (10)$$

Отличие скачка разрежения (рис. 1.5, б) от скачка уплотнения только в том, что газовый слой отдаёт тепло сначала (при $n < 0$, но по-прежнему при более высокой температуре), а получает потом (при $n > 0$, но по-прежнему при более низкой температуре). Поэтому и для скачка разрежения (если они реализуются, как в ненормальном газе) справедливо неравенство (10).

В малой окрестности точки 1 для изэнтропии имеем

$$\begin{aligned} \omega = \omega(p) = \omega(p, s_1) = \omega_1 + \omega_{p1}(p - p_1) + \\ + \frac{\omega_{pp1}}{2}(p - p_1)^2 + \frac{\omega_{ppp1}}{6}(p - p_1)^3 + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

В той же окрестности точки 1 для УА с учётом равенства (7) справедливо разложение

$$\begin{aligned} \omega = \omega(p) = \omega(p, s > s_1) = \omega_1 + \omega_{p1}(p - p_1) + \frac{\omega_{pp1}}{2}(p - p_1)^2 + \\ + \frac{\omega_{ppp1}}{6}(p - p_1)^3 + \omega_{s1} \frac{\omega_{pp1}}{12T_1}(p - p_1)^3 + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Сравнение равенств (11) и (12) показывает, что в начальной точке УА пересекается с изэнтропой, имея одинаковые наклоны и кривизны, т.е. **со вторым порядком касания**.

При постоянном давлении с подводом тепла (с ростом энтропии) газы обычно расширяются, т.е. $\omega_s > 0$. Следовательно, согласно (12), для нормальных газов, у которых $\omega_{pp} > 0$, в окрестно-

сти начальной точки взаимное расположение УА и изэнтропы такое, как показано на рис. 1.6, а. На нём сплошная кривая Γ – УА (адиабата Гюгонио), штрих-пунктирная кривая – изэнтропа, а штриховая прямая – общая касательная к ним в точке 1. Кстати,

$$\omega_p \equiv \left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_s = \left(\frac{\partial 1/\rho}{\partial p} \right)_s = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = \frac{-1}{\rho^2 a^2}, \quad a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s,$$

где a – **скорость звука**. С учётом этого уравнение УА (12) станет $\omega = \omega(p) = \omega_1 -$

$$-\frac{p-p_1}{\rho_1^2 a_1^2} + \frac{\omega_{pp1}}{2}(p-p_1)^2 + \left(\frac{\omega_{ppp1}}{6} + \frac{\omega_{s1}\omega_{pp1}}{12T_1} \right)(p-p_1)^3 + \dots \quad (13)$$

Для УВ малой интенсивности, подставив (13) в уравнение ПРМ (4), найдём

$$j^2 = \rho_1^2 V_1^2 = \rho_2^2 V_2^2 = -\frac{[p]}{[\omega]} \approx \rho_1^2 a_1^2 \left(1 - \rho^2 a^2 \omega_{pp} \frac{[p]}{2} \right)_1^{-1} \geq \rho_1^2 a_1^2. \quad (14)$$

В силу сказанного ранее, и в нормальном, и в ненормальном газах $\omega_{pp}(p_2 - p_1) \geq 0$. Следовательно, для УВ малой интенсивности

$$V_1^2 \geq a_1^2. \quad (15)$$

Это означает, что в системе координат, в которой поток перед УВ покоится, нормальная к фронту скорость её распространения

$$D \geq a_1. \quad (16)$$

Равенства в (15) и (16) имеют место лишь в предельном случае $(p_2 - p_1) \rightarrow 0$, что, естественно, согласуется с определением скорости звука a .

Можно показать, что в плоскости ωp УА аналогично изэнтропе в нормальном газе вогнутая (как на рис. 1.6, а), а в ненормальном – выпуклая кривая. Воспользовавшись этим, покажем, что неравенства (15) и (16) справедливы для УВ любой конечной интенсивности. Действительно, согласно (13) модуль тангенса угла наклона касательной к УА в точке 1 (штриховая прямая на рис. 1.6, б) равен $(\rho_1 a_1)^2$. Для штрих-пунктирной секущей, соединяющей точки 1 и 2 вогнутой УА (сплошной кривой на рис. 1.6, б) аналогичная величина равна $j^2 = (\rho_1 V_1)^2$. Из соотношения наклонов секущей и касательной вытекает справедливость неравенства (15) и его следствия – (16). Для ненормального газа

УА вогнутая, однако точка 2 лежит в четвёртом квадранте (рис. 1.3). Поэтому получается тот же результат.

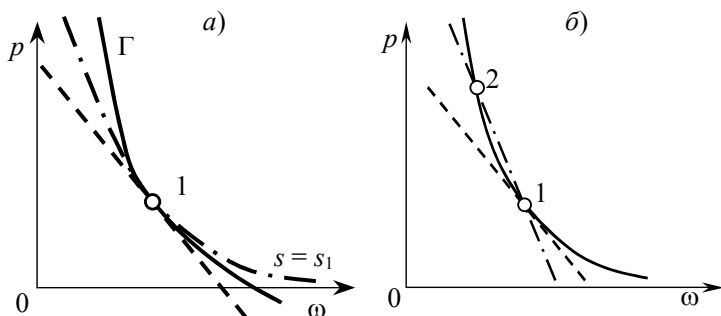


Рис. 1.6

Аналогично доказывается, что скачок разрежения конечной интенсивности в нормальном газе и скачок уплотнения также конечной интенсивности в ненормальном газе распространялись бы с дозвуковой скоростью. Так как в подобных ситуациях слабые скачки тех же знаков распространялись бы с большей (почти звуковой) скоростью, то физически очевидно, что указанные разрывы должны мгновенно разрушаться. Ниже возможность такого разрушения рассмотрена при анализе *эволюционности* разрывов.

Для установления связи между V_2 и a_2 перепишем уравнение УА (5) в форме

$$h(p_2, \omega_2) - h(p_1, \omega_1) - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}(p_2 - p_1) = 0 \quad (5_1)$$

и воспользуемся его симметрией относительно индексов 1 и 2. Если на УА Γ с начальной точкой 1 точка 2 отвечает скачку, то на УА Γ' с начальной точкой $1'$, совпадающей с точкой 2 (рис. 1.7), точка $2'$ отвечает скачку разрежения. В силу отмеченной выше симметрии уравнения УА, кривые Γ и Γ' пересекаются и в точке 1, и в точке 2. Для Γ' точка $1'$ (она же 2) является начальной. Поэтому в ней Γ' касается изэнтропы $s = s_2$. В силу этого модуль тангенса угла наклона касательной – штриховой прямой в рамке на рис. 1.7 равен $(\rho_2 a_2)^2$. Аналогичная величина для штрих-

пунктирной секущей, соединяющей точки 1 и 2, равна $j^2 = (\rho_2 V_2)^2$. Из соотношения наклонов секущей и касательной следует справедливость неравенства

$$V_2^2 \leq a^2, \quad (17)$$

где равенство имеет место только при $\rho_2 = \rho_1$. Для ненормального газа неравенство (17) выполняется для скачков разрежения.

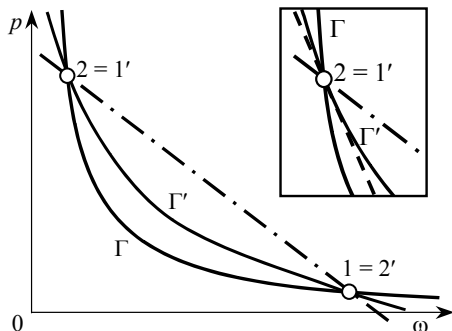


Рис. 1.7

Итак, для скачков уплотнения в нормальном и скачков разрежения в ненормальном газе в системе координат, в которой УВ покоится, нормальная компонента вектора скорости потока перед ней сверхзвуковая, а за ней – дозвуковая. На примере сверхзвукового стационарного обтекания заостренного тела сказанное демонстрирует рис. 1.8. На нём индексы у касательной компоненты V_τ опущены ввиду её непрерывности.

В задачах стационарного обтекания для дальнейшего важно знать взаимное расположение УВ конечной интенсивности и приходящих на неё спереди и сзади слабых скачков (в пределе «бесконечно слабых»). Для последних $V_n \approx a$. Так как нормальная компонента $\mathbf{V}$ перед УВ сверхзвуковая, а за ней – дозвуковая, то для выполнения равенства $V_n = a$ линию слабого скачка перед УВ нужно повернуть относительно $\mathbf{V}$ по часовой стрелке (это уменьшает V_n), а за УВ – против часовой стрелки. На рис. 1.8 два слабых скачка даны штрих-пунктиром.

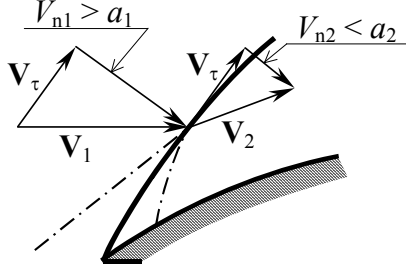


Рис. 1.8

Найденные выше соотношения дают связи между приращением термодинамическими параметров на слабых скачках. Связь с $[p]$ приращения нормальной компоненты вектора скорости: $[V_n] = [V_n^0]$, получается из закона сохранения нормальной компоненты количества движения. С использованием формулы (14) для слабых скачков она принимает вид

$$[V_n] = [V_n^0] = -\frac{[p]}{j} \approx \pm \frac{[p]}{\rho_1 a_1} \left(1 - \rho_1^2 a_1^2 \omega_{pp1} \frac{[p]}{4} \right) \approx \pm \frac{[p]}{\rho_1 a_1}. \quad (18)$$

Знак «+» («-») отвечает УВ, движущейся по газу вправо (влево).

Получим выражение для скорости D слабых УВ. Согласно (14) при $k = 1$ и 2

$$\rho_k^2 (V_k^0 - D)^2 \approx \rho_1^2 a_1^2 \left(1 - \rho^2 a^2 \omega_{pp} \frac{[p]}{2} \right)_1^{-1} \approx \rho_1^2 a_1^2 \left(1 + \rho^2 a^2 \omega_{pp} \frac{[p]}{2} \right)_1.$$

Отсюда для слабой УВ, распространяющейся по газу вправо,

$$V_1^0 - D \approx - \left(a + \rho^2 a^3 \omega_{pp} \frac{[p]}{4} \right)_1, \quad V_2^0 - D \approx - \left(a + \rho^2 a^3 \omega_{pp} \frac{[p]}{4} \right)_1 \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (19)$$

После подстановки $\omega_2 \approx \omega_1 + \omega_{p1}[p] = \omega_1 - [p]/(\rho a)_1^2$ второе равенство примет вид

$$V_2^0 - D \approx - \left(a - \frac{[p]}{\rho a} + \rho^2 a^3 \omega_{pp} \frac{[p]}{4} \right)_1, \quad (20)$$

а так как $a^{-2} = \rho_p = -\omega_p/\omega^2$, то

$$(a^{-2})_p = \frac{2}{\rho a^4} - \rho^2 \omega_{pp}, \quad a_2^{-2} \approx a_1^{-2} + 2 \frac{[p]}{\rho_1 a_1^4} - \rho_1^2 \omega_{pp1}[p],$$

и

$$a_2 \approx a_1 - \frac{[p]}{\rho_1 a_1} + \rho_1^2 a_1^3 \omega_{pp1} \frac{[p]}{2}. \quad (21)$$

Из равенств (19) – (21) найдём, что

$$V_1^0 - D + a_1 \approx -\rho_1^2 a_1^3 \omega_{pp1} \frac{[p]}{4}, \quad V_2^0 - D + a_2 \approx \rho_1^2 a_1^3 \omega_{pp1} \frac{[p]}{4}.$$

Откуда

$$D = (V_1^0 + a_1 + V_2^0 + a_2)/2. \quad (22)$$

Итак, скорость слабой УВ равна полусумме скоростей звуковых волн до и после неё, движущихся по газу в том же направлении. При выводе формулы (22) учитывались члены до $[p]$ включительно. Согласно более полному анализу погрешность этой формулы равна $O([p]^2)$.

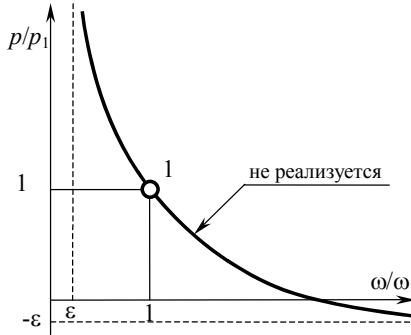


Рис. 1.9

Для совершенного газа, для которого согласно формуле (1.1.4) $h = \gamma p \omega / (\gamma - 1)$, уравнение УА (5) принимает вид

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} (p_2 \omega_2 - p_1 \omega_1) - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} (p_2 - p_1) = 0. \quad (23)$$

Вогнутая кривая $p = p(\omega)$, получающаяся из этого уравнения, показана на рис. 1.9. Кривая имеет вертикальную и горизонтальную асимптоты:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} \rightarrow \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \equiv \varepsilon, \quad \frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty; \quad \frac{p_2}{p_1} \rightarrow -\varepsilon, \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} \rightarrow \infty,$$

которые получаются из (23) при соответствующих предельных переходах.

Наличие вертикальной асимптоты, отвечающей скачкам уплотнения большой интенсивности, показывает, что при ударном сжатии совершенного газа отношение плотностей на УВ при $p_2/p_1 \rightarrow \infty$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad (24)$$

т.е. конечно и сравнительно невелико. Так, согласно (24) при $\gamma = 7/5 = 1.4$ максимальное сжатие равно 6 и даже при нереально близком к единице $\gamma = 1.1$ – всего 21.

Горизонтальная асимптота с $p_2/p_1 = -\varepsilon < 0$ и отрицательные p_2/p_1 на УА при

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} > \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

отвечают, как и весь участок УА с $\omega_2/\omega_1 > 1$, запрещенным в нормальном газе скачкам разрежения. Наряду с вогнутостью энтропии для совершенного газа (рис. 1.4) его нормальность следует из формулы (8).

Вертикальная асимптота ($p_2/p_1 \rightarrow \infty$) отвечает **сильным УВ**. Ввиду особой важности таких УВ остановимся на них подробнее. Выясним, какие из параметров набегающего потока (с индексом «1») окажутся несущественными. Очевидно, что это не ρ_1 , ибо при пренебрежении им (замене ρ_1 на 0) закон сохранения потока массы (1)

$$\rho_2 V_{n2} = \rho_1 V_{n1} \equiv \rho_1 D \quad (25)$$

приводит к бессмысленному результату: $\rho_2 V_{n2} = 0$.

В уравнении сохранения нормальной компоненты количества движения, переписанном в форме

$$p_2 + \rho_2 V_{n2}^2 = \rho_1 V_{n1}^2 \left(\frac{p_1}{\rho_1 V_{n1}^2} + 1 \right) \equiv \rho_1 D^2 \left(\frac{a_1^2}{\gamma D^2} + 1 \right),$$

первое слагаемое в скобке мало, если

$$M_D^2 \equiv \frac{D^2}{a_1^2} \gg \frac{1}{\gamma}. \quad (26)$$

При выполнении этого условия предыдущее уравнение станет

$$p_2 + \rho_2 V_{n2}^2 = \rho_1 V_{n1}^2 \equiv \rho_1 D^2. \quad (27)$$

Аналогично закон сохранения энергии при выполнении более жесткого, чем (26), условия

$$M_D^2 \gg 2/(\gamma - 1) \quad (28)$$

примет вид

$$2h_2 + V_{n2}^2 = V_{n1}^2 \equiv D^2. \quad (29)$$

Вместе с уравнением состояния в форме: $h_2 = \gamma p_2 / [(\gamma - 1)\rho_2]$ уравнения (25), (27) и (29) позволяют выразить параметры потока за сильной УВ через её скорость D и единственный термодинамический параметр набегающего («невозмущённого») потока ρ_1

$$\rho_2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_1, \quad p_2 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_1 D^2, \quad V_{n2}^0 = V_{n2} + D = \frac{2}{\gamma + 1} D. \quad (30)$$

Выведем важное для дальнейшего **соотношение Л. Прандт-ля**. В согласии с законом сохранения энергии (3) на УВ введём для совершенного газа **критическую скорость** a_* , такую, что

$$\begin{aligned} \frac{2\gamma p_1}{(\gamma - 1)\rho_1} + V_1^2 &\equiv \frac{2a_1^2}{\gamma - 1} + V_1^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} a_*^2, \\ \frac{2\gamma p_2}{(\gamma - 1)\rho_2} + V_2^2 &\equiv \frac{2a_2^2}{\gamma - 1} + V_2^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} a_*^2. \end{aligned} \quad (31)$$

При разгоне или торможении газа с сохранением полной энтальпии a_* – скорость газа там, где она равна скорости звука. Как показано ниже, такие разгон или торможение реализуются при стационарных течениях.

С использованием законов сохранения на УВ потоков массы (1) и нормальной компоненты количества движения (2) выразим ρ_2 и p_2 через V_2 и параметры набегающего потока:

$$\rho_2 = \rho_1 V_1 / V_2, \quad p_2 = p_1 + \rho_1 V_1 (V_1 - V_2).$$

Подстановка этих выражений во второе равенство (31) даст

$$\frac{2\gamma p_1 V_2}{(\gamma - 1)\rho_1 V_1} + \frac{2\gamma (V_1 - V_2)V_2}{(\gamma - 1)} + V_2^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} a_*^2.$$

Если из этого уравнения, умноженного на отношение V_1/V_2 , вычесть первое равенство (31), то результирующее соотношение примет вид

$$\frac{(\gamma+1)(V_1-V_2)V_1}{\gamma-1} = \frac{(\gamma+1)(V_1-V_2)}{(\gamma-1)V_2} a_*^2.$$

Откуда и получается требуемое соотношение

$$V_1 V_2 = a_*^2. \quad (32)$$

В данном равенстве V_1 и V_2 – нормальные к скачку составляющие вектора скорости в связанной с УВ системе координат. При введении непрерывной на УВ критической скорости a_* также использовали только эти компоненты.

Глава 1.5. Ударные волны в сложных средах. Волны детонации. Изотермический скачок

Сокращения: ДА – детонационная адиабата, ДВ – детонационная волна, ИС – изотермический скачок, ПРМ – прямая Рэлея–Михельсона, ТЖ – точка Жуге, УА – ударная адиабата, УВ – ударная волна.

При произвольных уравнениях состояния УА – геометрическое место точек 2, значения ω_2 и p_2 в которых для заданных ω_1 и p_1 связаны уравнением (1.4.5₁), может иметь весьма сложную форму: менять знак кривизны, не проходить через начальную точку – 1 и т.п. Особую роль на таких УА играют те точки 2 – **точки Чепмена–Жуге** (D.L. Chapman, E. Jouget) или **точки Жуге (ТЖ) – J**, в которых ПРМ, соединяющая точки 1 и 2, касается УА (рис. 1.10, Г – УА). Покажем, что в ТЖ выполняется равенство $|V_2| = a_2$, а энтропия s_2 как функция p_2 принимает экстремальное (минимальное s_{2m} или максимальное s_2^m) значение.

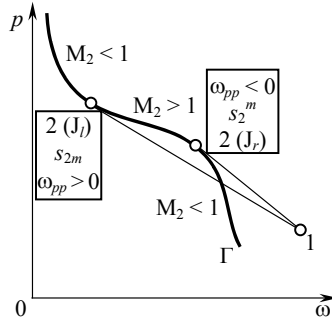


Рис. 1.10

Итак, пусть ω_1 и p_1 , определяющие термодинамическое состояние газа перед УВ, фиксированы, а давление p_2 , характеризующее её интенсивность, изменяется. Вместе с p_2 изменяются все параметры за УВ и скорость V_1 , а следовательно, в согласии с уравнением ПРМ (1.4.4) и

$$j^2 = -\frac{p_2 - p_1}{\omega_2 - \omega_1}.$$

В левой ТЖ (J_l) $j^2 = j^2(p_2)$ минимально, а в правой (J_r) – максимально. В обеих точках

$$dj^2 / dp_2 = 0. \quad (1)$$

Запишем выполняющиеся на УА Γ законы сохранения количества движения и энергии (1.4.2) и (1.4.3) в форме

$$p_2 = p_1 + \rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2 = p_1 + j^2(\omega_1 - \omega_2),$$

$$2h_2 = 2h_1 + V_1^2 - V_2^2 = 2h_1 + j^2(\omega_1^2 - \omega_2^2).$$

Отсюда при фиксированных p_1 , ω_1 и h_1 имеем

$$dp_2 + j^2 d\omega_2 = (\omega_1 - \omega_2) dj^2, \quad dh_2 + j^2 \omega_2 d\omega_2 = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} dj^2 \quad (2)$$

с dp_2 , $d\omega_2$, dh_2 и dj^2 , взятыми вдоль Γ . Но $Tds = dh - \omega dp$, в силу чего после исключения dh_2 второе равенство (2) примет вид

$$T_2 ds_2 + \omega_2 (dp_2 + j^2 d\omega_2) = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} dj^2,$$

а с учётом первого равенства (2)

$$ds_2 = \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{2T_2} dj^2. \quad (3)$$

Итак, вдоль Γ энтропия s_2 и j^2 меняются в одинаковом направлении. Поэтому на рис. 1.10 s_2 минимальна (s_{2m}) в точке J_l и максимальна (s_2^m) – в точке J_r .

Для доказательства того, что в ТЖ $|V_2| = a_2$, с учётом равенства (3) и определения скорости звука $a^{-2} = \rho_p = -\omega_p \rho^2$ запишем

$$d\omega_2 = \omega_{p2} dp_2 + \omega_{s2} ds_2 = \frac{-dp_2}{(\rho a)_2^2} + \omega_{s2} \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{2T_2} dj^2.$$

Подставив $d\omega_2$ в первое уравнение (2) и разделив на dp_2 , получим

$$1 - \left(\frac{V}{a}\right)_2^2 = (\omega_1 - \omega_2) \left(1 - j^2 \omega_{s2} \frac{\omega_1 - \omega_2}{2T_2}\right) \frac{dj^2}{dp_2}.$$

Согласно (1) правая часть данного равенства в ТЖ равна нулю. Следовательно, за такой УВ модуль нормальной к ней компоненты вектора скорости в ТЖ равен скорости звука.

Наконец, в ТЖ, в которой $dj^2/dp_2 = ds_2/dp_2 = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d(V/a)_2^2}{dp_2} &= \frac{d}{dp_2} \left(\frac{j}{\rho a}\right)_2^2 = -\frac{d(j^2 \omega_{p2})}{dp_2} = \\ &= -\omega_{p2} \frac{dj^2}{dp_2} - j^2 \omega_{pp2} - j^2 \omega_{ps2} \frac{ds_2}{dp_2} = -j^2 \omega_{pp2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, для нормального газа над ТЖ $V_2 < a_2$, а под ней $V_2 > a_2$. В ненормальном газе, наоборот, над ТЖ $V_2 > a_2$, а под ней $V_2 < a_2$.

Для обычных УВ в нормальных газах вогнутая УА проходит через начальную точку, которая в таких случаях является единственной «точкой Жуге», отвечающей УВ нулевой интенсивности. При этом сделанные выше выводы тривиальны, ибо при $p_2 = p_1$ «УВ» движется относительно газа перед ней со скоростью звука (имеется в виду нормальная к УВ компонента скорости), а приращение энтропии равно нулю. Сказанное тем не менее не означает, что изображённые на рис. 1.10 ситуации возможны только при знакопеременной производной ω_{pp} . Другая возможность, интересная и для теории, и для приложений, – не проходящая

через начальную точку вогнутая УА в нормальном газе. Именно это имеет место в **детонационных УВ (детонационных волнах – ДВ)**.

Отличие ДВ от обычной УВ в том, что при неизменных законах сохранения (1.4.1) – (1.4.3) в законе сохранения энергии (1.4.3) или в его следствии – уравнении УА (1.4.5) h_1 и h_2 – разные функции p и ω . Приходящая на ДВ **горючая смесь**, например, водорода, кислорода и инертных газов (при детонации в воздухе – азота и аргона) – совершенный газ, который при низкой («комнатной») температуре из-за пренебрежимо малых скоростей химических реакций находится в неравновесном («метастабильном») состоянии. Если по холодной горючей смеси пройдёт УВ достаточно большой интенсивности, то благодаря повышению температуры скорость реакций многократно возрастёт, и начнётся горение – процесс перехода к термодинамическому равновесию. Пусть отношения главных радиусов кривизны в общем случае пространственного фронта УВ к ширине **зоны реакции** $R_{1,2} \gg 1$. Тогда течение в зоне реакции можно считать одномерным, и для него законы сохранения (1.4.1) и (1.4.2) и их следствие – уравнение ПРМ (1.4.4) справедливы не только для начального и конечного, но и для промежуточных состояний (без индексов – параметры любого промежуточного состояния):

$$j^2 = \rho_1^2 V_1^2 = \rho_2^2 V_2^2 = \rho^2 V^2 = -\frac{p-p_1}{\omega-\omega_1} = -\frac{p_2-p_1}{\omega_2-\omega_1}. \quad (5)$$

Основной эффект горения – тепловыделение, связанное с изменением состава. Поэтому, пренебрегая изменением показателя адиабаты, примем, что ($q > 0$ – **теплота реакции**)

$$h = h(p, \omega, \alpha) = \frac{\gamma p \omega}{\gamma - 1} + \alpha q, \quad h_1 = \frac{\gamma p_1 \omega_1}{\gamma - 1} + q, \quad h_2 = \frac{\gamma p_2 \omega_2}{\gamma - 1} + \alpha_2 q.$$

Согласно таким уравнениям состояния h – функция трёх переменных, одна из которых (доля несгоревшего горючего α) меняется от 1 в холодной горючей смеси и сразу за УВ до $\alpha_2 \ll 1$ в продуктах сгорания. При этом уравнение УА (1.4.5), справедливое и для промежуточных состояний, примет вид

$$\frac{\gamma p \omega}{\gamma - 1} - \frac{\gamma p_1 \omega_1}{\gamma - 1} - \frac{\omega_1 + \omega}{2} (p - p_1) = (1 - \alpha) q, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \alpha \leq 1. \quad (6)$$

Переменная α как функция расстояния x от фронта УВ определяется решением задачи Коши для **уравнения кинетики**:

$$V \frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{\tau} f(p, \omega, \alpha), \quad \alpha(0) = 1. \quad (7)$$

Здесь τ – характерное время реакции, $f(p, \omega, \alpha)$ – известная функция, а α_2 определяется **условием термодинамического равновесия**: $f(p_2, \omega_2, \alpha_2) = 0$.

Принятые уравнения состояния и кинетики хотя и упрощают описание процесса горения, для выяснения интересующих нас свойств ДВ всё же довольно сложны. Дальнейшее упрощение состоит в пренебрежении малой величиной α_2 . В таком приближении уравнение кинетики (7) нужно только для понимания описанной выше исходной постановки, а уравнение **детонационной адиабаты (ДА)**, связывающее начальное (точка 1) и конечное (точка 2) состояния, запишется в форме

$$\frac{\gamma p_2 \omega_2}{\gamma - 1} - \frac{\gamma p_1 \omega_1}{\gamma - 1} - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} (p_2 - p_1) = q. \quad (8)$$

При $\omega_2 = \omega_1$ и $p_2 = p_1$ левая часть этого уравнения обращается в нуль при отличной от нуля правой, т.е. ДА не проходит через точку 1. Согласно уравнению (8) ДА располагается правее УА (рис. 1.11, а).

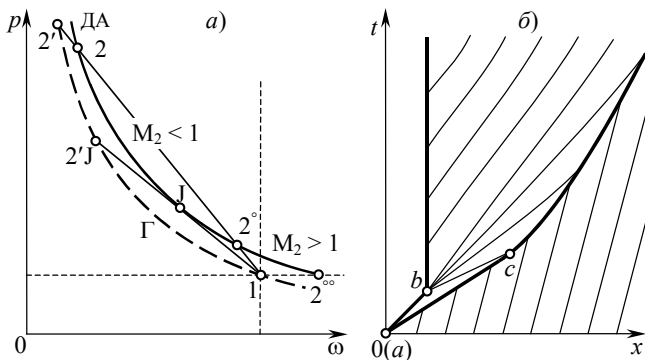


Рис. 1.11

Как отмечалось выше, ДВ начинается УВ, в которой согласно УА (на рис. 1.11, *а* – штриховой кривой Г) давление $p_{2'}$ и температура $T_{2'}$ существенно выше их значений p_1 и T_1 перед УВ. Вследствие этого начинается процесс горения (в рамках принятой модели – уменьшения параметра α от 1 до 0), описываемый уравнениями (5) – (7). Согласно первому из них в плоскости ωp изменению состояния газа отвечает движение по ПРМ 1–2' от точки 2' на УА Г до точки 2 на ДА. При этом p падает, а ω растёт. Как и в Гл. 1.4, из рассмотрения взаимного расположения ПРМ и касательной к Г в точке 1 следует, что для всей верхней ветви ДА (слева от штриховой вертикали) V_1 строго больше, чем a_1 .

Если давление за УВ равно p_{2J} , то реализуется ДВ, за которой $M_2 = V_2/a_2 = 1$. Такая ДВ называется *самоподдерживающейся* или *ДВ Чепмена–Жуге*. Смысл этого названия разъясняет рис. 1.11, *б*. На нём представлена xt -диаграмма течения с ДВ, инициированной движением поршня в газ. Жирная кривая с начальным участком ab – траектория поршня, жирная кривая с прямолинейным участком ac – траектория ДВ, тонкие линии – траектории звуковых волн, бегущих по газу вправо. Начальная скорость поршня достаточна для инициирования *пересжатой* ДВ, отвечающей участку ДА над точкой J на рис. 1.11, *а*. Здесь в силу равенства (4) для нормального газа $M_2 = V_2/a_2 < 1$. Благодаря этому вызванные остановкой поршня в момент $t = t_b$ волны разрежения (начиная с волны bc) догоняют ДВ и ослабляют её. На рис. 1.11, *а* уменьшению интенсивности ДВ соответствует движение точки 2 по ДА вниз. Когда точка 2 опустится до ТЖ J, в которой $V_2 = a_2$, дальнейшее ослабление ДВ прекратится, ибо волны разрежения перестанут догонять ДВ.

Согласно рис. 1.11, *а*, если давление за УВ $p_{2'} < p_{2J}$, то детонации не будет. Возможны иные режимы горения, удовлетворяющие тем же законам сохранения и потому в плоскости ωp описываемые уравнением ДА (8). В силу уравнения (5) всем режимам горения, как и УВ, отвечают точки 2, попадающие во второй и четвёртый квадранты, ограниченные на рис. 1.11, *а* штриховыми прямыми, проведёнными через точку 1. Отрезку ДА от

точки J до штриховой вертикали отвечают режимы, носящие название **быстрого горения**. Их особенность – сверхзвуковой поток до и после волны. Для скорости таких волн (наклона отрезка 1–2°) требуется дополнительное условие, получаемое из анализа физических механизмов их распространения. Участку ДА сразу под штриховой горизонталью (в частности, её отрезку 1–2°) соответствуют режимы **медленного горения**. На них $V_1 < a_1$ и $V_2 < a_2$, и также требуется дополнительное условие для скорости фронта пламени (см. Гл. 2.6).

Заканчивая параграф, рассмотрим разрыв, появляющийся в течениях **невязкого, но теплопроводного газа**. Модель такого газа используется при высоких (например, *термоядерных*) температурах, когда вклад излучения в перенос энергии (**лучистая теплопроводность**) много больше его вклада в перенос количества движения. Данная ситуация принципиально отличается от рассмотренной в Гл. 1.4 для простой иллюстрации (рис. 1.5) того, как благодаря теплопроводности растёт энтропия. Там в *зоне перехода* влияние вязкости не менее важно, чем влияние теплопроводности.

Пусть в приближении невязкого теплопроводного газа есть одномерное течение (**тепловая волна**), параметры которого в некоторой инерциальной системе координат не зависят от времени. Направим ось x по равномерному набегающему потоку. Тогда перед тепловой волной (при $x \rightarrow x_0$, где $x_0 \geq -\infty$) поток равномерный с $u \rightarrow D > 0$, $\rho \rightarrow \rho_0, \dots$. Вместе с $T \rightarrow T_0$ исчезает тепловой поток, равный $-\lambda T'_0$, где $T' = dT/dx$, а λ – коэффициент теплопроводности. Поэтому законы сохранения массы, x -компоненты количества движения и энергии для $x \geq x_0$ сведутся к равенствам

$$\rho u = \rho_0 D, \quad p + \rho u^2 = p_0 + \rho_0 D^2, \quad \rho u(2h + u^2) - 2\lambda T' = \rho_0 D(2h_0 + D^2).$$

Справа от тепловой волны (при $x \rightarrow x_+ \leq \infty$) поток также выравнивается. Поэтому $\lambda_+ T'_+ \rightarrow 0$, а параметры перед и за ней после соответствующей замены индексов связаны уравнением УА (1.4.5). Особенность невязкого теплопроводного газа в том, что в нём тепловая волна может состоять из непрерывного **«предвестника»**, заканчивающегося скачком особого типа.

Дальнейший анализ проведём для типичных для невязкого теплопроводного газа условий **холодного фона**, когда $p_0 \ll \rho_0 D^2$, $2h_0 \ll D^2$. Поэтому p_0 и h_0 можно пренебречь, и выписанные выше законы сохранения для $x_0 \leq x \leq x_+$ сведутся к равенствам

$$\rho u = \rho_0 D, \quad \rho_0 Du + p = \rho_0 D^2, \quad \rho_0 D(2h + u^2) - 2\lambda T' = \rho_0 D^3. \quad (9)$$

Для лучистой теплопроводности $\lambda = \lambda(T, \rho) = \beta T^3/\rho$, где β – константа.

При высоких температурах вклад излучения в p и h может быть большим и даже определяющим, однако для наших целей газ можно считать совершенным. Тогда при соответствующем выборе масштабов его уравнения состояния примут вид

$$p = \rho T, \quad h = \gamma T / (\gamma - 1). \quad (10)$$

Согласно первым равенствам (9) и (10) $\rho = \rho_0 D/u$, $p = \rho_0 T D/u$, что после подстановки во второе равенство (9) приведёт к квадратному уравнению: $u^2 - Du + T = 0$. Двум его решениям

$$u_{1,2} = u_{1,2}(T, D) = \frac{D}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{T}{D^2}} \right) \quad (11)$$

отвечают две записи уравнения энергии – третьего равенства из (9), которое после подстановки $\rho = \rho_0 D/u_{1,2}$ и с учётом формулы для h из (10) примет вид

$$4\beta \varepsilon u_{1,2} D^6 \tau^3 \tau' - \rho_0^2 F_{1,2}(\tau, \varepsilon) = 0, \quad (12)$$

$$F_{1,2}(\tau, \varepsilon) = 2\tau - \varepsilon \pm \varepsilon \sqrt{1 - 4\tau}, \quad \tau = T/D^2, \quad \varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1).$$

Условию $u(T = 0, D) = D$ удовлетворяет u_1 . Поэтому при интегрировании уравнения (12) следует начинать с u_1 и F_1 . Если после этого поменять местами τ и x , то определение $x = x(\tau)$ сведётся к квадратуре:

$$\frac{x - x_0}{2\beta \varepsilon D^5} = \frac{1}{\rho_0^2} \int_0^\tau \frac{(1 + \sqrt{1 - 4\theta}) \theta^3 d\theta}{2\theta - \varepsilon + \varepsilon \sqrt{1 - 4\theta}}. \quad (13)$$

Отсюда при малых τ

$$\frac{x - x_0}{2\beta \varepsilon D^5} \approx \frac{\tau^3}{3\rho_0^2(1 - \varepsilon)}, \quad \tau: (x - x_0)^{1/3}, \quad (14)$$

а в силу уравнений (11), определения $\tau = T/D^2$ и формул $\rho = \rho_0 D/u$ и $p = \rho_0 T D/u$ для малых τ

$$u \approx (1 - \tau)D, \quad \rho \approx \frac{\rho_0}{1 - \tau} \approx \rho_0(1 + \tau), \quad p = \rho T = \rho \tau D^2 \approx \tau \rho_0 D^2. \quad (15)$$

Естественно возникает вопрос о структуре тепловой волны на её правом конце (при $x \rightarrow x_+ \leq \infty$). Если она соединяет холодный газ с равномерным горячим потоком, где $\tau = \tau_+$, то $\tau' \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_+$, и в силу уравнения (12) с u_1 и F_1 при её непрерывной структуре $F_1(\tau_+, \varepsilon)$ также обращается в нуль (рис. 1.12, а). Покажем, что в принятой модели этого не происходит. После переноса в равенстве $F_1(\tau_+, \varepsilon) = 0$ радикала вправо и возведения обеих его частей в квадрат придём к квадратному уравнению

$$(\tau_+ - \varepsilon + \varepsilon^2)\tau_+ = 0. \quad (16)$$

Его корень $\tau_{+1} = 0$ отвечает холодному, а корень $\tau_{+2} = \varepsilon(1 - \varepsilon)$ – горячему газу. При возведении в квадрат могут появляться корни, не удовлетворяющие исходному уравнению. Корень $\tau_{+1} = 0$ уравнению $F_1(\tau_{+1}, \varepsilon) = 0$ удовлетворяет, а $\tau_{+2} = \varepsilon(1 - \varepsilon)$ не удовлетворяет. Действительно, при $\varepsilon \leq 1/2$

$$\sqrt{1 - 4\tau_{+2}} = \sqrt{1 - 4\varepsilon + 4\varepsilon^2} = \sqrt{(1 - 2\varepsilon)^2} = 1 - 2\varepsilon. \quad (17)$$

Следовательно,

$F_1(\tau_{+2}, \varepsilon) = 2\tau_{+2} - \varepsilon + \varepsilon\sqrt{1 - 4\tau_{+2}} = 2\varepsilon(1 - \varepsilon) - \varepsilon + \varepsilon(1 - 2\varepsilon) = 2\varepsilon(1 - 2\varepsilon)$, т.е. $F_1(\tau_{+2}, \varepsilon) > 0$ при $0 < \varepsilon < 1/2$, и решение (13) не может обеспечить переход от холодного фона к также равномерному горячему потоку.

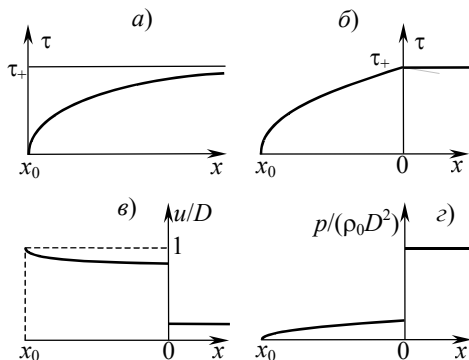


Рис. 1.12

На самом деле, любое из уравнений $F_{1,2}(\tau_+, \varepsilon) = 0$ приводит к уравнению (16) и к корням τ_{+1} и τ_{+2} , причём $F_2(\tau_{+1}, \varepsilon) = -2\varepsilon$, а $F_2(\tau_{+2}, \varepsilon) = 0$. Как следствие этого, решение (13) справедливо до $\tau = \tau_{+2} = \varepsilon(1 - \varepsilon)$, когда происходит *переключение* от первого корня (11) и от функции $F_1(\tau_{+2}, \varepsilon) = 2\varepsilon(1 - 2\varepsilon) \geq 0$ в уравнении (12) к u_2 и $F_2(\tau_{+2}, \varepsilon) = 0$. Переключение при фиксированном $\tau = \tau_{+2}$ и температуре

$$T_+ = \tau_{+2} D^2 = \varepsilon(1 - \varepsilon) D^2 = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} D^2$$

и разрывных прочих параметрах (рис. 1.12, б-г) отвечает **изотермическому скачку (ИС)**, который впервые был введён Рэлеем (1910 г.). Согласно формулам (9) – (11) и (17) в ИС

$$\frac{p_+}{p_-} = \frac{\rho_+}{\rho_-} = \frac{u_-}{u_+} = \frac{u_-(\tau_{+2})}{u_+(\tau_{+2})} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\tau_{+2}}}{1 - \sqrt{1 - 4\tau_{+2}}} = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{2}{\gamma - 1}, \quad (18)$$

где индексы «-» и «+» метят параметры перед и за ИС.

За ИС все параметры постоянны, и в законе сохранения энергии – в уравнении (12) с индексами «+» равны нулю $F_2(\tau_{+2}, \varepsilon)$ и τ' . С учётом этого из уравнений (9), (11), (17) и (18) получим

$$\begin{aligned} u_- = (1 - \varepsilon)D = \frac{2D}{\gamma + 1}, \quad \rho_- = \frac{\rho_0}{1 - \varepsilon} = \frac{\gamma + 1}{2} \rho_0, \quad p_- = \varepsilon \rho_0 D^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \rho_0 D^2; \\ u_+ = \varepsilon D = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} D, \quad \rho_+ = \frac{\rho_0}{\varepsilon} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0, \quad p_+ = (1 - \varepsilon) \rho_0 D^2 = \frac{2\rho_0 D^2}{\gamma + 1}. \end{aligned} \quad (19)$$

С учётом отличия обозначений и направления потоков формулы для u_+ , ρ_+ и p_+ сводятся к формулам (1.4.30) для сильных УВ в совершенном газе. Согласно формулам (19) при $\varepsilon = 0$ или $\gamma = 1$ нет предвестника, а при $\varepsilon = 0.5$ или $\gamma = 3$ нет изотермического скачка. С другой стороны, в силу формул (19) для энтропийной функции $\chi = p/\rho^\gamma$ перед ИС и за ним имеем

$$\chi_- = (1 - \varepsilon)^\gamma \varepsilon D^2, \quad \chi_+ = (1 - \varepsilon) \varepsilon^\gamma D^2, \quad \frac{\chi_+}{\chi_-} = \left(\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^{\gamma - 1} \leq_{0 \leq \varepsilon \leq 0.5} 1.$$

Итак, χ , а согласно формуле (1.1.5) и энтропия при переходе через ИС уменьшается (равенство имеет место, только для $\varepsilon = 0$, когда $\chi_+ = \chi_- = \chi_0 = 0$, и не имеющий предвестника ИС изэнтропичен). Уменьшение энтропии в ИС – результат отличия от нуля $T\dot{y}$, а, следовательно, и теплового потока слева от ИС. Разумеется, при переходе через всю тепловую волну энтропия не убывает ($s_+ \geq s_0$).

Наконец, если начало отсчёта x совместить с ИС, то в силу формулы (13) координата переднего фронта тепловой волны

$$x_0 = -\frac{2\beta\varepsilon D^5}{\rho_0^2} \int_0^{\varepsilon(1-\varepsilon)} \frac{(1+\sqrt{1-4\vartheta})\vartheta^3 d\vartheta}{2\vartheta - \varepsilon + \varepsilon\sqrt{1-4\vartheta}}. \quad (20)$$

Отсюда и из формулы (14) следует, что в приближении холодного фона протяженность непрерывного **предвестника** конечна.

При построении на рис. 1.12 распределений τ , скорости и давления в предвестнике учтены качественные особенности, следующие из формул (14), (15) и (20), а для разрыва параметров в ИС – из соотношений (19) для $\gamma = 7/5$.

Глава 1.6. Дифференциальные уравнения течения в подобластях непрерывности параметров (уравнения Эйлера)

При отсутствии в Ω поверхностей разрыва

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} A d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial A}{\partial t} d\Omega,$$

а по формуле Гаусса–Остроградского

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{B} n d\sigma = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{B} d\Omega.$$

В результате уравнение (1.2.2) примет вид

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \mathbf{B} \right) d\Omega = 0.$$

Откуда следует, что

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \mathbf{B} = 0$$

или после подстановки A и B из табл. 1.1

$$L \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho V_k)}{\partial t} + \nabla(\rho V_k \mathbf{V}) + \mathbf{i}_k \nabla p = 0, \quad k = 1, 2, 3; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho(2e + V^2)}{\partial t} + \nabla\{\rho \mathbf{V}(2h + V^2)\} = 0. \quad (3)$$

Дифференциальные уравнения течения в форме (1) – (3) удобны при численном интегрировании, но неудобны для анализа. По этой причине преобразуем их. Начнём с уравнения (2). Учтя уравнение (1), получим

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla. \quad (2')$$

Здесь d/dt – *полная* (или *субстанциональная*) производная по времени вдоль *траектории частиц*.

Аналогично из уравнения энергии, учтя, что $\rho e = \rho h - p$, и введя *полную энтальпию* H формулой: $2H = 2h + V^2$, получим

$$HL + \rho \frac{\partial H}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \nabla H - \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \propto \frac{\partial H}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla H - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

или

$$\frac{dH}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (3')$$

с тем же d/dt , что в (2').

Согласно уравнению (3') для стационарных (независящих от времени t) течений

$$\mathbf{V} \nabla H = 0, \quad (4)$$

т.е. полная энтальпия H сохраняется вдоль *линий тока*. Последние определяются как линии, которые в пространстве x_1, x_2, x_3 касаются вектора скорости, т.е.

$$\frac{dx_1}{V_1} = \frac{dx_2}{V_2} = \frac{dx_3}{V_3}. \quad (5)$$

Ещё одна форма уравнения энергии получается вычитанием из (3') скалярного произведения векторного уравнения (2') на $\mathbf{V}$:

$$\frac{dV^2/2}{dt} + \frac{1}{\rho} \mathbf{V} \nabla p = 0.$$

В результате получим

$$\frac{dh}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = 0. \quad (6)$$

Отсюда с учётом термодинамического соотношения (1.1.2) следует условие сохранения энтропии вдоль траекторий частиц:

$$\frac{ds}{dt} = 0. \quad (7)$$

Для идеального газа в подобластях непрерывности параметров выполнение данного условия можно было постулировать в качестве одной из форм записи уравнения энергии.

Дифференциальные уравнения течения идеального газа, записанные в форме (1) – (3), а также с заменой векторного уравнения движения (2) на (2') и уравнения энергии (3) на любую из его форм (3'), (6) или (7), называют *уравнениями Эйлера*.

Часть 2. Одномерные нестационарные течения с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами

Глава 2.1. Уравнения одномерных течений. Их интегралы

Рассмотрим одномерные нестационарные течения с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами, в которых все параметры – функции времени и единственной пространственной координаты x . В течениях с плоскими волнами x – одна из декартовых координат (рис. 2.1, y и z – две другие координаты, а u , v и w – соответствующие проекции вектора скорости $\mathbf{V}$). В течениях с цилиндрическими и сферическими волнами x – расстояние от оси или от центра симметрии. Отвечающие им цилиндрические и сферические координаты и компоненты $\mathbf{V}$ также представлены на рис. 2.1. Для течений со сферическими волнами условие сферической симметрии приводит к единственной отличной от нуля радиальной компоненте u вектора скорости $\mathbf{V}$.

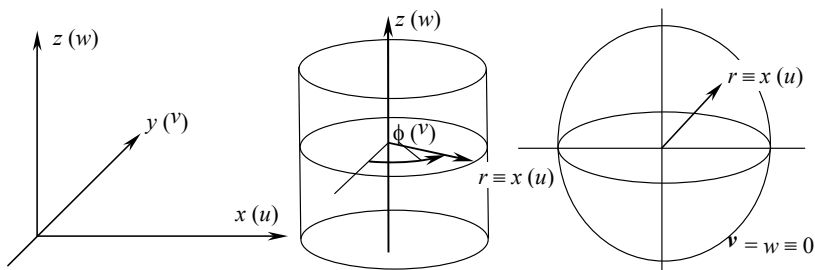


Рис. 2.1

Для одномерных течений все параметры – функции только t и x . Пусть для течений с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами $v = 1, 2$ и 3 . Тогда $\nabla(\rho V) = x^{1-v} \partial(x^{v-1} \rho u) / \partial x$, и уравнение неразрывности (1.6.1) принимает вид

$$L \equiv \frac{\partial(x^{v-1} \rho)}{\partial t} + \frac{\partial(x^{v-1} \rho u)}{\partial x} = 0, \quad v=1, 2, 3 \quad (1)$$

или

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v-1}{x} \rho u = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}, \quad v=1, 2, 3. \quad (1_v)$$

При $v = 1$ и 3 проекция уравнения движения на ось x имеет одинаковую форму, а при $v = 2$ в нём появляется центростремительное ускорение. С учётом этого для трёх $v = 1, 2$ и 3 уравнение движения в проекции на ось x запишем в форме

$$\rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = (v-1)(3-v) \frac{\rho v^2}{x}, \quad v=1, 2, 3. \quad (2)$$

Для течений с плоскими волнами из-за того, что давление $p = p(t, x)$, т.е. не зависит от y и z , проекции уравнения движения на две другие оси сведутся к

$$\frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{dw}{dt} = 0. \quad (3), (4)$$

Уравнение (4) выполняется и для цилиндрически симметричных течений, а уравнение (3) для них нарушается из-за наличия ускорения Кориолиса. Для таких течений проще записать закон сохранения z -компоненты момента количества движения. Этот момент благодаря отсутствию соответствующего момента силы (давление не зависит от угла ϕ) сохраняется *в частице*. Объединив уравнение сохранения момента с уравнением (3), получим

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \quad \Gamma = x^{v-1}v, \quad v = 1, 2. \quad (3_v)$$

Как уже отмечалось, для сферически симметричных течений $w = v = 0$.

Наконец, как и в случае произвольного пространственного течения, уравнение энергии можно записать в форме уравнения сохранения энтропии в частице или его следствий:

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt}, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{1}{a^2} \frac{dp}{dt}. \quad (5, 5_1, 5_2)$$

Здесь и далее **частицами** называются нормальные соответствующей оси x плоские, цилиндрические или сферические поверхности, движущиеся в направлении оси x со скоростью u . Траектории этих поверхностей, определяемые уравнением

$$dx/dt = u, \quad (6)$$

назовём *траекториями частиц*.

Уравнения (5) – (5₂) отличаются от их аналогов в общем, пространственном случае только более простым видом оператора *полной производной по времени*. Для одномерных течений

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x},$$

а в общем пространственном случае

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla$$

или в декартовых координатах

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}.$$

Введём *массовую лагранжеву переменную* m дифференциальным равенством

$$dm = kx^{v-1} \rho(dx - udt), \quad (7)$$

в котором k – нормирующий множитель, выбираемый из соображений удобства. Согласно (7) m определена с точностью до аддитивной постоянной, а в силу уравнения (6) она сохраняется на траекториях частиц. Покажем, что разность значений m в двух точках плоскости xt не зависит от пути интегрирования, т.е. что равен нулю интеграл от dm по любому замкнутому контуру Γ .

Пусть в плоскости xt контур Γ ограничивает область Ω . Если в Ω нет разрывов, а L – левая часть уравнения неразрывности (1), то

$$\oint_{\Gamma} dm = k \oint_{\Gamma} x^{v-1} \rho(dx - udt) = k \oint_{\Gamma} L dx dt = 0.$$

Если через Ω проходит траектория разрыва (рис. 2.2), то в силу уравнения (1.3.2⁰) с заменой V_n^0 на u , непрерывности координаты x и приращения dt на ней справедлива последовательность равенств (как и в Гл. 1.2 – 1.4, $[\phi]$ – разность ϕ на разрыве):

$$[\rho(u - D)] = 0, \left[kx^{v-1} \rho \left(u - \frac{dx}{dt} \right) \right] = 0, [dm] = 0, dm = kx^{v-1} \rho(udt - dx).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{T}}_G dm &= \mathbf{T}_{G_+} dm + \mathbf{T}_{G_-} dm + \mathbf{T}_{G_{d+}} dm - \mathbf{T}_{G_{d-}} dm = \dot{\mathbf{T}}_{G_+ + G_{d+}} dm + \dot{\mathbf{T}}_{G_- + G_{d-}} dm = \\
&= k_{\mathbf{T}\mathbf{T}}^{\Omega_+} L dx dt + k_{\mathbf{T}\mathbf{T}}^{\Omega_-} L dx dt = 0.
\end{aligned}$$

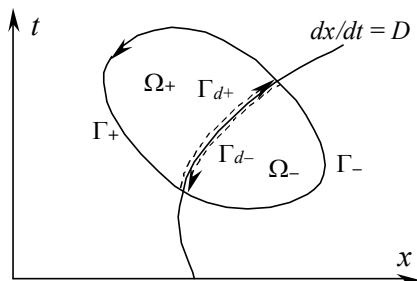


Рис. 2.2

Если t постоянно, то согласно определению (7) $dm = kx^{v-1}\rho dx$, и при $k > 0$ переменная m – монотонно растущая функция x . Поскольку m сохраняется вдоль траекторий частиц, то ей можно «метить» эти траектории. При этом в начальный момент на левой границе области течения (на неподвижной или подвижной стенке, на оси или в центре симметрии и т.п.) при $x = x_-$ удобно положить $m_- = 0$. Если рассматривается движение ограниченной массы газа, ограниченного и слева, и справа, то множитель k обычно выбирают так, чтобы на правой границе (при $x = x_+ > x_-$) $m_+ = 1$. При таком выборе для любого фиксированного t , например, $t = 0$:

$$k = \left(\int_{x_-}^{x_+} x^{v-1} \rho dx \right)^{-1}.$$

Введение лагранжевой переменной позволяет записать интегралы энтропии (5), поперечных скоростей и момента количества движения (4) и (3_v):

$$s = S(m), \quad v = 1, 2, 3; \quad w = W(m), \quad x^{v-1}v = \Gamma(m), \quad v = 1, 2. \quad (8)$$

Здесь $W(m)$ и $\Gamma(m)$ определяются только начальными условиями, а $S(m)$ – начальными условиями и изменениями энтропии на УВ.

Глава 2.2. Характеристики и инварианты

Сокращения: ТЧ – траектория частиц, УС – условия совместности.

Из выписанных в Гл. 2.1 уравнений часть (2.1.3) – (2.1.5)

$$\frac{ds}{dt} = 0 \propto \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \propto \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{a^2} \frac{dp}{dt}; \quad (1_s)$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \Gamma = x^{v-1}v, \quad v = 1, 2; \quad (1_\Gamma)$$

$$\frac{dw}{dt} = 0 \quad (1_w)$$

содержит оператор дифференцирования вдоль единственного направления – направления траекторий частиц (ТЧ) в плоскости xt , определяемого уравнением (2.1.6)

$$dx/dt = u. \quad (1_x)$$

Уравнения в частных производных, которые в плоскости независимых переменных xt содержат оператор дифференцирования по единственному направлению, назовём **характеристическими** или уравнениями, **имеющими характеристическую форму**, а соответствующие линии в той же плоскости – **характеристиками**. В указанном смысле характеристические уравнения по существу есть обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие изменения (или постоянство) соответствующих параметров вдоль заранее неизвестных кривых плоскости независимых переменных. Очевидно, что в общем случае указанных обыкновенных дифференциальных уравнений недостаточно для определения параметров, входящих в них. Несмотря на это, как будет видно из дальнейшего, наличие характеристик играет чрезвычайно важную роль в исследовании свойств течений, построении решений и т.д. В то же время уравнения $(1_s) - (1_x)$, как и все уравнения системы (2.1.1) – (2.1.5), квазилинейные, т.е. линейные относительно производных, но содержащие искомые функции в коэффициентах при производных (в частности, u в операторе d/dt) и в свободных членах.

ТЧ – характеристики, на которых выполняются уравнения (1), назовём **C^0 -характеристиками** (рис. 2.3). С учётом направления **стрелы времени** при движении вдоль C^0 -характеристик время t может лишь монотонно расти (или монотонно убывать) при допущении любого изменения координаты x .

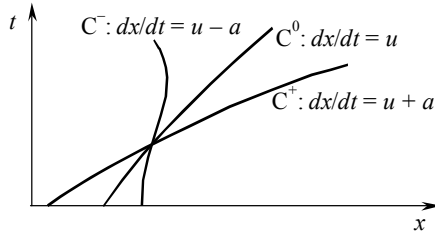


Рис. 2.3

В отличие от уравнений $(1_s) - (1_w)$ уравнения $(2.1.1_v)$ и $(2.1.2_v)$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v-1}{x} \rho u = 0, \quad (2)$$

$$\rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = (v-1)(3-v) \frac{\rho v^2}{x} \quad (3)$$

содержат операторы дифференцирования разных функций вдоль двух разных направлений: ТЧ (**полную** или **субстанциональную** производную по t) и прямых $t = \text{const}$. В этом смысле указанные уравнения – настоящие уравнения в частных производных.

Уравнения (2) и (3) содержат производные от трёх переменных. Исключив из уравнения неразрывности (2) производную от ρ с помощью уравнения энергии в форме $(2.1.5_2)$, получим

$$\frac{dp}{dt} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v-1}{x} \rho a^2 u = 0. \quad (2')$$

Теперь два квазилинейных уравнения $(2')$ и (3) содержат производные только от u и p , что существенно для дальнейшего.

Посмотрим, нельзя ли квазилинейные уравнения $(2')$ и (3) заменить такими их линейными комбинациями, которые имели бы характеристическую форму. С этой целью сложим уравнение $(2')$

с уравнением (3), умноженным на пока неизвестный множитель λ . В результате получим

$$\frac{dp}{dt} + \lambda \frac{\partial p}{\partial x} + \lambda p \left(\frac{du}{dt} + \frac{a^2}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{v-1}{x} p \{ a^2 u - (v-3)\lambda v^2 \} = 0. \quad (4)$$

Это уравнение будет характеристическим при двух значениях λ :

$$\lambda = \pm a.$$

Подставив их в уравнение (4) и вспомнив определение оператора d/dt , придём к двум, отличным от ТЧ характеристическим уравнениям и отвечающим им характеристикам. В любой точке плоскости xt направление характеристики *первого (второго) семейства* или $C^+(C^-)$ -*характеристики* определится уравнением

$$dx/dt = u \pm a, \quad (5^{\pm})$$

а выполняющиеся вдоль них уравнения имеют вид

$$du \pm \frac{dp}{\rho a} + (v-1) \frac{(3-v)v^2 \pm au}{x} dt = 0. \quad (6^{\pm})$$

Уравнения $(6^{\pm})$ называются *условиями совместности (УС)*.

В силу уравнений (7) §2.1 и $(5^{\pm})$ на $C^{\pm}$ -характеристиках приращения m связаны с dt или dx равенствами

$$dm = \pm kx^{v-1} \rho a dt = kx^{v-1} \frac{\rho a dx}{a \pm u}. \quad (7^{\pm})$$

Расположение C^+ - и C^- -характеристик относительно ТЧ (C^0 -характеристик) показано на рис. 2.3. Согласно уравнениям $(5^{\pm})$, в плоскости xt C^+ -характеристики – это траектории звуковых волн, распространяющихся относительно газа вправо, а C^- -характеристики – траектории звуковых волн, распространяющихся относительно газа влево. При движении по характеристике любого семейства время изменяется монотонно.

Пусть (рис. 2.4) на отрезке ab оси x , т.е. при $t = 0$, энтропия постоянна. Тогда в силу условия её сохранения на ТЧ она будет постоянна в области, ограниченной слева и справа C^0 -характеристиками, вышедшими из точек a и b , до тех пор пока в указанной области не возникнут УВ. Так как произведение ρa – функция p и s , то в такой области, т.е. при $s = s_0 = \text{const}$, это произведение – известная функция только давления, и можно ввести

$$\Phi(p) = \int_{p^\circ}^p \frac{dp}{\rho a} = \int_{h^\circ}^h \frac{dh}{a}. \quad (8)$$

Здесь и далее p° – произвольно выбранное давление, а h° , a° , ... – отвечающие p° и s_0 другие термодинамические параметры. Поскольку $\rho a \geq 0$, то Φ – монотонно растущая функция p , и между p и Φ имеет место взаимно однозначное соответствие. Следовательно, Φ можно считать функцией любого термодинамического параметра, кроме энтропии.

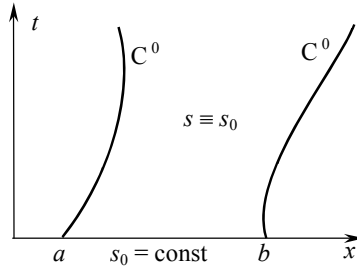


Рис. 2.4

Для совершенного газа с учётом выражения для h как функции скорости звука имеем

$$\Phi = \Phi(a) = \int_{h^\circ}^h \frac{dh}{a} = \frac{2(a - a^\circ)}{\gamma - 1}. \quad (9)$$

Отвечающая формуле (9) зависимость $\Phi = \Phi(p)$ изображена на рис. 2.5.

С учётом определения Φ формулой (8) в подобластях изэнтропического потока уравнения (6[±]) можно заменить на

$$d(u \pm \Phi) + (v - 1) \frac{(3 - v)v^2 \pm au}{x} dt = 0.$$

Если же в дополнение к изэнтропичности ограничиться течениями с плоскими волнами ($v = 1$), то отсюда следует, что вдоль $C^\pm$ -характеристик выполняются уравнения

$$C^\pm: dI^\pm = 0, \quad I^\pm = u \pm \Phi. \quad (10)$$

Таким образом, для изэнтропических течений с плоскими волнами вдоль C^+ - и C^- -характеристик постоянны соответственно Γ^+ и Γ^- . По этой причине найденные комбинации u и Φ получили название *инвариантов Римана* (Γ^+ – *правый инвариант*, а Γ^- – *левый инвариант*).

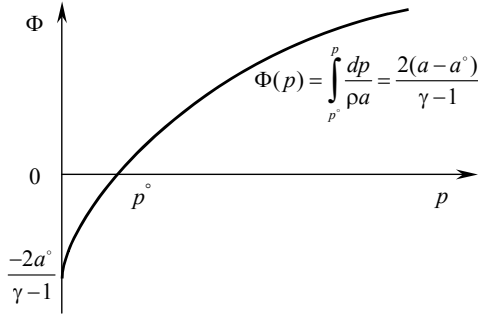


Рис. 2.5

Итак, одномерные течения с плоскими волнами ($v = 1$) описываются характеристической системой уравнений:

$$\begin{aligned} C^0: \frac{ds}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{dw}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{dx}{dt} = u; \\ C^\pm: \frac{d^\pm u}{dt} \pm \frac{1}{\rho a} \frac{d^\pm p}{dt} = 0, \quad \frac{d^\pm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{d^\pm x}{dt} = u \pm a. \end{aligned} \quad (11)$$

В подобластях изэнтропичности уравнения, выполняющиеся на C^+ - и C^- -характеристиках, сводятся к

$$\frac{d^+(u + \Phi)}{dt} = 0, \quad \frac{d^-(u - \Phi)}{dt} = 0, \quad \Phi(p) = \int_{p^\circ}^p \frac{dp}{\rho a} = \int_{h^\circ}^h \frac{dh}{a}.$$

Для совершенного газа:

$$\frac{\rho^\circ}{\rho} = \left(\frac{p^\circ}{p} \right)^{1/\gamma}, \quad a = a^\circ \left(\frac{p}{p^\circ} \right)^n, \quad n = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}. \quad (12)$$

Отсюда при $\gamma = 1$ имеем

$$a = a^\circ, \quad \rho = \frac{p}{a^{\circ 2}}, \quad \Phi(p) = \int_{p^\circ}^p \frac{dp}{\rho a} = a^\circ \int_{p^\circ}^p \frac{dp}{p} = a^\circ \ln \frac{p}{p^\circ}, \quad \Phi(0) = -\infty.$$

Глава 2.3. Выдвижение поршня из однородного покоящегося газа. Простая волна. Центрированная простая волна

Сокращения: ПВ – *простая волна*, ПВР – *ПВ разрежения*, УВ – *ударная волна*, ЦВР – *центрированная ПВР*.

Пусть в начальный момент $t = 0$ газ справа от поршня (при $x > 0$ на рис. 2.6, a ; нижний индекс «0» метит параметры при $t = 0$) однороден и покоится. В момент $t = 0$ поршень начинает двигаться влево со скоростью $U(t) < 0$, причём $U(0) = 0$. На рис. 2.6, a его траектория – жирная линия. Газ начнет двигаться в том же направлении, т.е. его скорость $u \leq 0$. Вдоль траекторий частиц сохраняется энтропия. Все они начинаются на полуоси x (при $t = 0$), где энтропия постоянна. Поэтому, пока не возникнут УВ, течение будет изэнтропическим, в котором все отличные от скорости u параметры – функции только давления p :

$$\rho = \rho(p, s_0) = \rho(p), \quad a = a(p, s_0) = a(p), \quad (1)$$

и можно ввести инварианты Римана. Если в формуле (2.2.9) для функции $\Phi(p)$ положить $p^\circ = p_0$, то $\Phi(p_0) = 0$ и на оси x оба инварианта $I_0^\pm = u_0 \pm \Phi(p_0) = 0$.

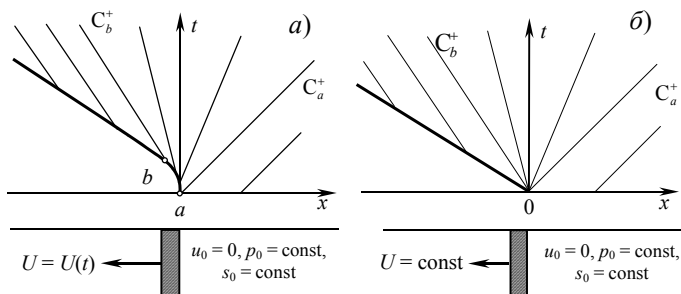


Рис. 2.6

Инварианты сохраняются вдоль характеристик. Часть течения справа от C_a^+ – C^+ -характеристики, выходящей из начала координат, покрыта и C^+ - и C^- -характеристиками, которые, начинаясь на оси x , несут нулевые значения обоих инвариантов: $u \pm \Phi(p) = 0$. Следовательно, справа от C_a^+ $u = 0$, $p = p_0$, а сама характеристика C_a^+ – прямая: $x = a_0 t$ – траектория звуковой волны, движущейся по невозмущённому газу. Скорость C^- -характеристик равна ($u - a$), и они, обгоняя частицы, покрывают всю область между C_a^+ и траекторией поршня (пока газ успевает следовать за ним). Поскольку C^+ -характеристики с оси x сюда не приходят, то слева от C_a^+ при $I^+ \equiv u + \Phi(p) \neq 0$ инвариант $I^- \equiv u - \Phi(p) = 0$, и

$$u = u(p) = \Phi(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho a}. \quad (2)$$

Известная функция $u(p)$ в этой формуле, как и функции в правых частях формул (1), не зависят от траектории поршня (жирной кривой на рис. 2.6, а). Течение, в котором все параметры – заранее известные функции одного из них, называется **простой волной (ПВ)**.

Равенство (2) выполняется и на траектории поршня, где скорость газа $u = u_W(x) = U(x) \leq 0$, т.е.

$$\Phi(p_W) \equiv \int_{p_0}^{p_W} \frac{dp}{\rho a} = u_W = U(t_W) \leq 0. \quad (3)$$

В силу этого неравенства (равенство – только при $x_W = t_W = 0$) верхний предел интеграла $p_W < p_0$. Таким образом, при выдвигании поршня давление на нём падает.

На любой C^+ -характеристике, выходящей из произвольной точки W траектории поршня, постоянен инвариант $I^+ = u + \Phi(p)$. Согласно формуле (3) на ней

$$u + \Phi(p) = 2u_W.$$

Кроме того, слева от C_a^+ , включая рассматриваемую C^+ -характеристику, выполняется равенство (2). Следовательно, на C^+ -характеристике

ристике, выходящей из точки W , $u = u_W$, $p = p_W$, а в силу формул (1) скорость звука $a = a_W = a(p_W)$ также постоянна. Значит, согласно уравнению (2.2.5⁺) для наклона C^+ -характеристик

$$dx/dt = u + a = u_W + a_W \quad (4)$$

любая выходящая с траектории поршня C^+ -характеристика прямолинейна.

Если со временем скорость поршня $U(t) < 0$ монотонно убывает, увеличиваясь по модулю, то согласно формуле (3) давление p_W также уменьшается монотонно, т.е. реализуется течение разрежения (**ПВ разрежения** – **ПВР**). Этот вывод справедлив для любого газа, ибо информация о знаке ω_{pp} при его получении не использовалась. Выясним, как при этом изменяется наклон C^+ -характеристик, равный согласно уравнению (4) сумме $(u + a)$. В рассматриваемой ПВР все параметры – функции p , причём производные d/dp и $\partial/\partial p \equiv (\partial/\partial p)_s$ совпадают. С учётом сказанного, равенства (2) и определения a^2 имеем

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)^{-1} = \frac{-1}{\rho^2 \omega_p}, \quad \frac{\partial a^2}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{-1}{\rho^2 \omega_p} \right) = -\frac{2}{\rho} + \rho^2 a^4 \omega_{pp}, \quad (5)$$

$$\frac{d(u+a)}{du} = 1 + \frac{da}{du} = 1 + \frac{da}{dp} \frac{dp}{du} = 1 + \rho a \frac{\partial a}{\partial p} = 1 + \frac{\rho}{2} \frac{\partial a^2}{\partial p} = \frac{\rho^3 a^4 \omega_{pp}}{2}.$$

Для нормального газа (с $\omega_{pp} > 0$) искомая производная положительна. Поэтому наклон C^+ -характеристик к оси t с уменьшением скорости уменьшается, и они расходятся веером, как изображено на рис. 2.6, *a*.

Если в точке b к криволинейному участку траектории поршня ab плавно примыкает прямолинейный участок, то ПВР будет ограничена слева выходящей из точки B C^+ -характеристикой C_b^+ . По этой характеристике к ПВР примыкает равномерный поступательный поток с $u = U(t_b) = U$. Зафиксировав скорость U , начнём уменьшать протяженность участка ab . В пределе он стянется в начало координат, а C^+ -характеристики ПВР станут выходящими из него лучами (рис. 2.6, *б*):

$$x/t = u + a. \quad (6)$$

Такое течение – *центрированная простая волна разрежения (ЦВР)*. В дополнение к уравнению (6) для ЦВР справедливы все соотношения, записанные выше для ПВР, в частности, – равенство (2.2.6). Пользуясь им, по скорости U можно определить $p_+ \equiv p(U) < p_0$, а по p_+ и формулам (1) – все остальные параметры на левой границе ЦВР. Так же находится C^+ -характеристика и одновременно – проведённый из начала координат луч (6), отвечающие любой величине скорости из интервала $[U < 0, 0]$.

Решение, описывающее ЦВР, можно построить, воспользовавшись тем, что среди определяющих параметров задачи движения поршня с конечной постоянной скоростью нет величины с размерностью длины. По этой причине указанная задача автомодельная с автомодельной переменной $\xi = x/(a_0 t)$. Условия существования нетривиального решения описывающих её обыкновенных дифференциальных уравнений приводит к равенствам (2) и (6). В случае совершенного газа первое из них, справедливое для произвольной ПВР, в том числе для ЦВР, принимает вид

$$u = 2(a - a_0)/(\gamma - 1). \quad (7)$$

Как видно из рис. 2.6, граничные C^+ -характеристики C_a^+ и C_b^+ – линии разрыва частных производных по x и t от u , p и любых функций p , т.е. ρ , a и т.д. Действительно, справа от C_a^+ и слева от C_b^+ все параметры постоянны. Значит, все их производные по x и t равны нулю. С другой стороны, в ограниченной теми же характеристиками волне разрежения параметры изменяются и по x , и по t . Следовательно, не равны нулю и их частные производные. Покажем, почему такое возможно.

На граничной C^+ -характеристике, например, на C_a^+ , параметры постоянны: $u \equiv 0$, $p \equiv p_0$. Поэтому полные производные от u и p вдоль неё равны нулю. С учётом наклона этой характеристики это значит, что четыре частных производные u_t , u_x , p_t и p_x справа и слева от неё удовлетворяют связям

$$u_t + a_0 u_x = 0, \quad p_t + a_0 p_x = 0.$$

Согласно характеристической системе (2.2.11) на C_a^+ те же производные удовлетворяют равенствам

$$\rho_0 a_0 (u_t + a_0 u_x) + p_t + a_0 p_x = 0, \quad \rho_0 a_0 (u_t - a_0 u_x) - p_t + a_0 p_x = 0.$$

Из выписанных уравнений третье – следствие первых двух, и для определения на C_a^+ четырёх производных есть только три независимых уравнения. Это и делает возможным неоднозначность производных при известных параметрах в данном случае – на C^+ -характеристиках. Использование указанного свойства – стандартный, хотя и достаточно трудоемкий способ получения уравнений в характеристической форме.

Для ПВР и ЦВР есть **предельная скорость истечения** u^m , которая отвечает $p = 0$ в интеграле, определяющем функцию $\Phi(p)$. Согласно равенству (2)

$$|u^m| = -\Phi(0) \equiv \int_0^{p_0} \frac{dp}{\rho a} = \int_0^{h_0} \frac{dh}{a} = \frac{2a_0}{\gamma - 1}. \quad (8)$$

В цепочке равенств (8) последний переход, согласующийся с результатом, вытекающим из формулы (7), справедлив для совершенного газа.

Если при выдвигании поршня модуль его скорости сразу (в ЦВР) или с некоторого $t = t^m$ превысит $|u^m|$, то поршень оторвется от газа. При этом между поршнем и движущейся с постоянной скоростью u^m границей газа возникнет зона пустоты (вакуума). На её границе $p = \rho = 0$ и, кроме того, обычно (например, для совершенного газа с $\gamma > 1$) обращается в нуль скорость звука a . В таком случае в плоскости xt уравнения границы с пустотой и прямолинейной, как и все в ПВР, последней C^+ -характеристики совпадают, ибо $u^m + a(u^m) = u^m$. По той же причине C^- -характеристики, приходящие на границу с вакуумом, касаются её. В трубе ЦВР с предельной скоростью движения границы с пустотой возникает при мгновенном исчезновении перегородки, отделяющей покоящийся газ от вакуума.

Глава 2.4. Движение поршня в газ. Образование ударной волны

Сокращения: ПВ – *простая волна*, УВ – *ударная волна*, ЦВР – *центрированная ПВ разрежения*.

Изменим в задаче, решённой в Гл. 2.3, направление движения поршня, т.е. пусть он не выдвигается, а вдвигается в газ. Начнём с **плавного движения**, при котором скорость поршня $U(t)$ монотонно растёт от $U(0) = 0$. Пока в возникающем течении отсутствуют УВ, слева от граничной C^+ -характеристики, как и при выдвигании поршня, реализуется ПВ, однако теперь – не разрежения, а сжатия. При этом для нормального газа с $\omega_{pp} > 0$ наклон C^+ -характеристик к оси t будет не уменьшаться, а увеличиваться, как показано на рис. 2.7. На нём жирная кривая – траектория поршня, параллельные прямые – C^+ -характеристики, отвечающие покоящемуся газу, а идущие от траектории поршня сходящиеся и пересекающиеся прямые – C^+ -характеристики ПВ сжатия.

На каждой из пересекающихся C^+ -характеристик значения параметров постоянны и равны их значениям либо на оси x , где $u = u_0 = 0$, либо на траектории поршня, где $u = U(t) \geq 0$. Согласно построенному решению в точках пересечения двух, трёх и иного числа C^+ -характеристик, которые занимают целые области плоскости xt , при фиксированных x и t решение неоднозначно. В рамках используемой в газовой динамике модели сплошной среды при фиксированных x и t два значения параметры могут принимать только по разные стороны поверхности разрыва. Наличие же целых областей многозначности – абсурд, возникший из-за того, что при построении решения не учитывалась возможность появления УВ. Как показано ниже, введение УВ в момент нарушения однозначности решения, устраняет этот абсурд.

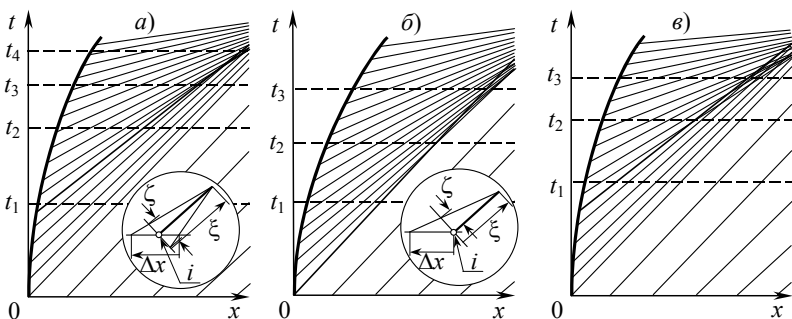


Рис. 2.7

Для определения момента зарождения УВ проследим за эволюцией течения. Если УВ возникает не при $t = 0$, то возможны разные ситуации, изображённые на рис. 2.7, *а-в* и на отвечающих им рис. 2.8, *а-в*. Кривые 1-4 на рис. 2.8 дают распределения скорости по x при $t = t_1 - t_4$. Левая ордината кривой k – значение скорости $u = U(t_k)$ на траектории поршня, а опускающаяся из этого конца тонкая вертикаль показывает отличную от нуля ординату поршня $x = X(t_k)$ в тот же момент времени. Во всех случаях при $t = t_1$ характеристики ещё не пересеклись, и зависимости $u = u_1(x) = u(x, t_1)$ однозначные.

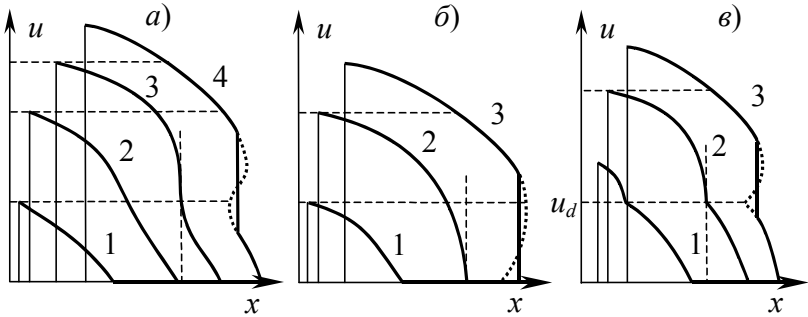


Рис. 2.8

В ПВ сжатия C^+ -характеристики, несущие фиксированные значения u , сближаются. Поэтому при $t = t_2 > t_1$ те же изменения скорости от 0 до $U(t_1)$, показанные на рис. 2.8 штриховыми горизонталями, отвечают меньшим приращениям x . В результате *начальные* участки кривых 2 становятся круче, чем кривые 1, и т.д., и неизбежно в некоторый момент $t = t_i$ у кривой $u = u_i(x)$ впервые появится вертикальная касательная. На рис. 2.8, *а* это – кривая 3, а на рис. 2.8, *б* и *в* – кривые 2. В рассматриваемой ПВ сжатия неоднозначную зависимость $u = u(x, t)$ удобно заменить однозначной зависимостью $x = x(t, u)$. Тогда в точках, где касательная к кривым на рис. 2.8 вертикальна, выполняется условие

$$(\partial x / \partial u)_i = 0. \quad (1)$$

Точки, в которых выполняется условие (1), т.е. касательная к кривой на рис. 2.8 вертикальна, есть не только у кривых $u = u_i(x)$, но и у любой кривой $u = u(x, t_k > t_i)$. Более того, у кривой 4 на рис. 2.8, *а* таких точек две. На рис. 2.8, *а* кривая 3 отличается от кривой 4 тем, что у неё точка с вертикальной касательной является и точкой перегиба, т.е. в ней одновременно с условием (1) выполняется равенство

$$(\partial^2 x / \partial u^2)_i = 0. \quad (2)$$

На кривой 4 точки с вертикальной касательной с точкой перегиба не совпадают, и условия (1) и (2) при одинаковых значениях t и u (или x) выполняться не могут.

Если закон движения поршня задан, то этим, как показано ниже, определяется зависимость $x = x(t, u)$, и два условия (1) и (2) позволят найти время t_i и координату x_i точки, в которой впервые пересекутся бесконечно близкие C^+ -характеристики. Так, однако, будет не при любом законе движения поршня, что связано с особой ролью граничной C^+ -характеристики. До того момента, пока её не опередит УВ, распространяющаяся со скоростью $D > a_0$, граничная характеристика отделяет ПВ сжатия от покоящегося газа. Граничная характеристика *разрывная* в том смысле, что на ней рвутся производные параметров газа. Возможны и другие разрывные C^+ -характеристики, идущие из таких точек траектории поршня, в которых скачком изменяется его ускорение. Подобную ситуацию отражают рис. 2.7 и 2.8, *в*. На них ускорение поршня увеличилось скачком при $u = u_d$. Если УВ, как на рис. 2.7 и 2.8, *б* и *в*, возникает на разрывной характеристике, то соответствующая точка кривой $u = u_k(x)$ – излом, а не точка перегиба, и условие (2) в ней не выполняется. Да этого и не требуется, ибо тут

$$u = u_d, \quad (3)$$

причём на граничной характеристике (рис. 2.7 и 2.8, *б*) $u_d = 0$. На рис. 2.7 C^+ -характеристики, на которых оказалась начальная точка УВ, даны более жирными прямыми. На рис. 2.8 распределения скорости, содержащие слабые УВ, даны сплошными кривыми 3 и 4 с жирными вертикальными отрезками, а непрерывные участки неоднозначности – пунктиром.

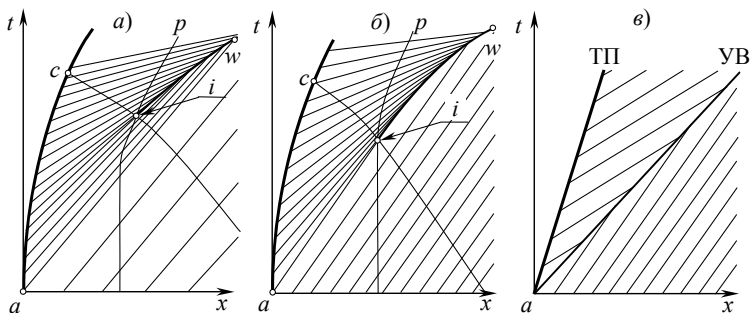


Рис. 2.9

Как введение УВ позволяет избавиться от многозначности решения, поясняет рис. 2.9, а. На нём iw – отрезок УВ, возникшей в точке i , а ic и ip – отрезки C^- -характеристики и траектории частиц, которые проходят через эту точку. После введения УВ пересекавшиеся на рис. 2.7, а C^+ -характеристики заканчиваются с разных сторон УВ. Течение под iw и слева от траектории ip – изэнтропическое, а в четырёхугольнике $awic$ – ПВ сжатия. Это – в точной постановке. На самом же деле, УВ, имея в общем случае в точке i нулевую интенсивность, некоторое время остаётся слабой. Для слабых УВ по формуле (1.4.7) приращение энтропии – величина порядка приращения давления в кубе и им можно пренебречь. Это позволяет и за УВ ввести инварианты $I^\pm$. Найдём, как при пересечении слабой УВ изменяется инвариант I . Согласно определению I формулами (2.2.8) и (2.2.10) при пересечении C^- -характеристикой УВ

$$[I^-] = [u] - [\Phi(p)] = [u] - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho a}.$$

Здесь и далее $[\varphi] = \varphi_2 - \varphi_1$, а индексы «1» и «2» метят параметры перед и за УВ. Разложение подынтегральной функции в ряд даст

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho a} = \frac{[p]}{\rho_1 a_1} \left(1 - \frac{\rho_1^2 a_1^2 \omega_{pp1}}{4} [p] \right) + O([p]^3).$$

Подставив полученное выражение в предыдущую формулу и воспользовавшись соотношением (1.4.18) для слабой УВ, движущейся по газу вправо, найдём

$$[I^-] = [u] - \frac{[p]}{\rho_1 a_1} \left(1 - \frac{\rho_1^2 a_1^2 \omega_{pp1}}{4} [p] \right) + O([p]^3) = O([p]^3). \quad (4)$$

Такая же оценка получается для приращения инварианта I^+ в УВ, движущейся по газу влево.

Итак, согласно оценке (4) в слабых УВ приращением I можно пренебречь, как и приращением энтропии. В результате за УВ реализуется ПВ сжатия с прямолинейными C^+ -характеристиками. Для скорости слабой УВ согласно формуле (1.4.22)

$$D = (u_1 + a_1 + u_2 + a_2)/2. \quad (5)$$

Эта формула эквивалентна *правилу равных площадей*: слабую УВ нужно вводить так (рис. 2.8), чтобы площади с обеих сторон вертикального отрезка между ним и пунктирной кривой были равны.

От того, где зарождается УВ (на непрерывной или на разрывной характеристике), зависит закон роста её интенсивности с удалением от начальной точки i . На схемах в кружках на рис. 2.7, *a* и *б* вверх и вправо из точки i идёт УВ, а ξ – расстояние, отсчитываемое от i вдоль её траектории. На рис. 2.7, *a* с разных сторон на УВ приходят C^+ -характеристики, а по правилу (5) УВ идёт по биссектрисе угла между ними, Δx и ζ – расстояния между этими характеристиками вдоль отрезков, проведённых в направлении оси x и нормали к УВ. В точке i касательные к УВ и к пришедшей в эту точку C^+ -характеристике совпадают. На рис. 2.7, *б* из приходящих на УВ характеристик есть только та, что приходит на неё слева (со стороны ПВ сжатия). При $\xi \ll 1$ углы между C^+ -характеристиками и УВ малы. Поэтому $\zeta \approx k_1 \Delta x$, где $k_1 = \sin \sigma$, а $\operatorname{ctg} \sigma = u_i + a_i$. В ПВ параметры на каждой C^+ -характеристике постоянны. Поэтому их разности, например, $[u]$ с разных сторон от УВ на расстоянии ξ от точки i и при $\xi = 0$ на концах отрезков Δx и ζ совпадают. Наконец, $\zeta = k_2 \xi [u]$ для малых $[u]$. Следовательно,

$$\Delta x = k_3 \xi [u]. \quad k_3 = k_2/k_1. \quad (6)$$

В первом случае (рис. 2.7, *a*), когда в точке i выполняются условия (1) и (2), подстановка $\Delta x = k_4 [u]^3$ в равенство (6) даёт

$$[u] = k\xi^{1/2}, \quad k = \sqrt{k_2/(k_1 k_4)}. \quad (7)$$

Во втором случае (рис. 2.7, б и в), когда в точке i выполняются условия (1) и (3), подставив $\Delta x = k_4[u]^2$ в равенство (6), получим

$$[u] = k\xi, \quad k = k_2/(k_1 k_4). \quad (8)$$

В ПВ все параметры – функции одного из них. Поэтому $[u]$ в формулах (7) и (8) можно заменить на $[p]$. Согласно формулам (1.4.7) и (4) приращения $[s]$ и $[I^-]$ на слабых УВ пропорциональны $[p]^3$. Следовательно, в случае рис. 2.7, а, когда УВ возникает на непрерывной C^+ -характеристике,

$$[s] = k_s \xi^{3/2}, \quad [I^-] = k_I \xi^{3/2}. \quad (9)$$

Если же точка i располагается на разрывной характеристике (рис. 2.7, б и в), то

$$[s] = k_s \xi^3, \quad [I^-] = k_I \xi^3. \quad (10)$$

Разрывы *выводящих* производных, обусловленные образованием УВ, распространяются затем по соответствующим характеристикам. Разрывы производных энтропии распространяются по C^0 -характеристике, прошедшей через точку i . Разрывы производных от инварианта I распространяются по C^- -характеристике, прошедшей через точку i , отражаясь от траектории поршня по C^+ -характеристике как разрывы производных инварианта I^+ . Разрывам производных от инвариантов пропорциональны разрывы производных от всех параметров, кроме энтропии.

Рассмотренные случаи различаются принципиально. В случае (10) первые и вторые выводящие производные от s и I непрерывны, а разрывы третьих и следующих производных конечны. В случае (9) при непрерывных первых производных разрывы всех производных, начиная со второй, бесконечны.

Получим для любой ПВ функцию $x = x(t, u)$. Если $U(t)$ – скорость поршня, то на нём

$$u(t) = U(t), \quad X(t) = \int_0^t U(t) dt = \int_0^t u(t) dt. \quad (11)$$

Обозначив через τ время ухода C^+ -характеристики с траектории поршня, проинтегрируем по t уравнение (2.2.5⁺)

$$dx/dt = u + a$$

вдоль C^+ -характеристики от τ до t . В ПВ на C^+ -характеристике u и $a = a(u)$ постоянны. Поэтому

$$x = x(t, \tau) = X(\tau) + \{u(\tau) + a[u(\tau)]\}(t - \tau). \quad (12)$$

При заданной скорости поршня, т.е. $u(\tau) = U(\tau)$, уравнения (11) и (12) вместе с выражением для скорости звука $a = a(p)$ и эквивалентным условием постоянства инварианта Γ равенством (2.3.2)

$$u = u(p) = \Phi(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho a} \quad (13)$$

дают параметрическую зависимость x от t и u . Последняя нужна лишь для подстановки в условия (1) и (2), которые эквивалентны

$$x_\tau \equiv (\partial x / \partial \tau)_t = 0, \quad x_{\tau\tau} \equiv (\partial^2 x / \partial \tau^2)_t = 0. \quad (1_\tau, 2_\tau)$$

При получении условия (2_τ) учтено, что в силу (1_τ) (индекс « t » опущен)

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} \left(\frac{d\tau}{du} \right)^2 + \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{d^2 \tau}{du^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} \left(\frac{d\tau}{du} \right)^2.$$

Рассмотрим теперь движение поршня с постоянным ускорением $c > 0$ в совершенный газ. В такой задаче выражения (11) и (13) имеют вид

$$u(\tau) = c\tau, \quad X(\tau) = \frac{c\tau^2}{2}, \quad a = a_0 + \frac{\gamma-1}{2}u = a_0 + \frac{\gamma-1}{2}c\tau. \quad (14)$$

Подставив их в формулу (12), найдём $x(t, \tau)$ и вычислим производные, входящие в условия (1_τ) и (2_τ) . В результате получим

$$x = \frac{c\tau^2}{2} + \left(a_0 + \frac{\gamma+1}{2}c\tau \right)(t - \tau), \quad x_\tau = \frac{\gamma+1}{2}ct - \gamma c\tau - a_0, \quad x_{\tau\tau} = -\gamma c. \quad (15)$$

В данном случае $x_{\tau\tau} \neq 0$. Значит, согласно условию (3) с $u_d = 0$ УВ возникает на граничной характеристике $x = a_0 t$, выходящей из начальной точки траектории поршня, в которой $\tau = 0$. Отсюда, из выражения для x_τ и из условия (1_τ) найдём, что время и координата начальной точки i УВ

$$t_i = \frac{2a_0}{(\gamma+1)c}, \quad x_i = \frac{2a_0^2}{(\gamma+1)c}. \quad (16)$$

Пока УВ слабая, её форму можно найти аналитически. Справа от УВ (рис. 2.9, б) – покоящийся газ, т.е. в формуле (5) $a_1 = a_0$

и $u_1 = 0$. Пусть $x = x(t)$ – уравнение УВ, а $u, a, \dots$ – параметры за УВ (на рис. 2.9, б – слева от неё). Тогда с учётом равенств (14) уравнение (5) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = D = \frac{a_0 + u + a}{2} = a_0 + \frac{\gamma + 1}{4} c\tau, \quad (17)$$

где $\tau = \tau(t)$ – время выхода с траектории поршня C^+ -характеристики, приходящей в рассматриваемую точку УВ. В начальной точке УВ $\tau = 0$, а $t = t_i$ и $x = x_i$ определены формулами (16). Координата x и время t точек на УВ и τ на траектории поршня связаны первым уравнением (15) – уравнением C^+ -характеристики, соединяющей эти точки. Продифференцировав его по t , придём к уравнению

$$\frac{dx}{dt} = a_0 + \frac{\gamma + 1}{2} c\tau + \left(\frac{\gamma + 1}{2} ct - a_0 - \gamma c\tau \right) \frac{d\tau}{dt}.$$

Исключив из него и из (17) dx/dt и умножив результат на $dt/d\tau$, получим

$$\frac{dt}{d\tau} + \frac{2}{\tau} t = 4 \frac{a_0 + \gamma c\tau}{(\gamma + 1)c\tau}.$$

Ограниченное при $\tau = 0$ решение этого уравнения и результат его подстановки в первое уравнение (15) с учётом формул (16) дают параметрическое представление УВ с $\tau \geq 0$ в качестве параметра

$$t(\tau) = t_i + \frac{4\gamma\tau}{3(\gamma + 1)}, \quad x(\tau) = a_0 t(\tau) + \frac{\gamma c\tau^2}{6}. \quad (18)$$

Эти формулы и выражения $u = u(\tau)$, $a = u(\tau)$ из (14) и $x = x(t, \tau)$ из (15) для ПВ сжатия между траекторией поршня и УВ, в которых $\tau \leq t \leq t(\tau)$ с $t(\tau)$ из (18) для каждого $\tau \geq 0$, дают полное решение задачи о движении поршня с постоянным ускорением. Если при $\tau \geq \tau_+$ поршень станет двигаться с постоянной скоростью U_+ =

$= c\tau_+$, то скорость УВ также станет постоянной и равной

$$D_+ = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_+} = \left. \frac{dx(\tau)}{d\tau} \left(\frac{dt(\tau)}{d\tau} \right)^{-1} \right|_{\tau_+} = a_0 + \frac{\gamma + 1}{4} c\tau_+,$$

а её траектория – прямой, выходяще из точки: $t_+ = t(\tau_+)$, $x_+ = x(\tau_+)$.

Такую же, как в (16), зависимость t_i и x_i от a_0 и ускорения поршня c можно получить и из простого анализа размерностей. Действительно, из всех определяющих параметров данной задачи *кинематические* размерности (комбинаций времени T и длины L) имеют только они: $[a_0] = L/T$, $[c] = L/T^2$, а единственная безразмерная константа – γ . Поэтому

$$t_i = f(\gamma)a_0/c, \quad x_i = \varphi(\gamma)a_0^2/c$$

с неизвестными функциями $f(\gamma)$ и $\varphi(\gamma)$. Очевидно, что эти формулы менее информативны, чем (16).

Согласно формулам (16) t_i и x_i стремятся к нулю при стремлении к бесконечности ускорения поршня. Это позволяет сделать некоторые качественные заключения об аналогичной задаче с $U = ct^n$, но с $n \neq 1$. В таких случаях ускорение $dU/dt = nct^{n-1}$. Поэтому если $0 < n < 1$, то начальное ускорение бесконечно и естественно ожидать, что УВ возникнет в начале координат. Её начальная интенсивность и в этом случае будет нулевой, поскольку и здесь $U(0) = 0$. При $n > 1$ УВ возникает внутри ПВ сжатия.

Заканчивая параграф, рассмотрим задачу о движении поршня сразу с постоянной скоростью $U > 0$. Из её размерных определяющих параметров (U , a_0 , ρ_0) нельзя составить комбинаций с размерностями длины и времени. Значит, u/a_0 , ρ/ρ_0 и $p/(\rho_0 a_0^2)$ могут зависеть только от автомодельной переменной $\xi = x/(a_0 t)$, отношения U/a_0 и безразмерных комбинаций, связанных с термодинамическими свойствами газа (для совершенного газа это γ).

В силу автомодельности в плоскости xt на каждом идущем из начала координат луче $\xi = \text{const}$ параметры постоянны. Этому условию удовлетворяет любая комбинация секторов с постоянными параметрами, разделённых идущими из начала координат УВ и ЦВР. На самом же деле, единственная, возможная для нормального газа комбинация содержит одну УВ и равномерный, движущийся со скоростью U поток между ней и траекторией поршня – ТП (рис. 2.9, в). Пусть это не так, т.е. возможны УВ и ЦВР, выходящие из начала координат, и секторы постоянных параметров между ними. Но две УВ, идущие по газу в одну сторо-

ну, невозможны, так как согласно неравенствам (1.4.15) – (1.4.17) скорость *догоняющей* волны больше скорости *догоняемой*. Аналогичная ситуация с ЦВР, ибо её граничные C^+ -характеристики – звуковые волны, бегущие по газу вправо со скоростью звука, а УВ относительно газа перед ней движется со сверхзвуковой, а относительно газа за ней – с дозвуковой скоростью. Одной же ЦВР не может быть из-за того, что за ней скорость потока отрицательна, и не выполняется условие непротекания на поршне.

С учётом сказанного и с теми же обозначениями, что при рассмотрении УВ, возникающей на граничной характеристике, законы сохранения (1.3.8), (1.3.9) и (1.3.11), справедливые на УВ, примут вид

$$\begin{aligned} \rho(D-U) &= \rho_0 D, \quad p + \rho(D-U)^2 = p_0 + \rho_0 D^2, \\ \frac{2\gamma p}{(\gamma-1)\rho} + (D-U)^2 &= \frac{2\gamma p_0}{(\gamma-1)\rho_0} + D^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Первые два из них дают D/a_0 и ρ/ρ_0 как функцию p/p_0 на УВ:

$$\frac{D}{a_0} = \frac{p/p_0 - 1}{\gamma M_U}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p/p_0 - 1}{p/p_0 - 1 - \gamma M_U^2}, \quad M_U = \frac{U}{a_0}. \quad (20)$$

Подстановка их в третье уравнение (19) даёт

$$2(p/p_0 - 1)^2 - \gamma[(\gamma+1)p/p_0 + \gamma - 1]M_U^2 = 0. \quad (21)$$

Разрешив это уравнение относительно p/p_0 и взяв корень, отвечающий сильной УВ при $M_U \gg 1$, получим

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{(\gamma+1)M_U + \sqrt{16 + (\gamma+1)^2 M_U^2}}{4} \gamma M_U.$$

Вместе с формулами (20) это выражение даёт полное решение задачи о движении поршня с постоянной скоростью в покоящийся однородный совершенный газ. Ниже понадобится получающееся из уравнения (21) выражение для U^2 как функции p/p_0 :

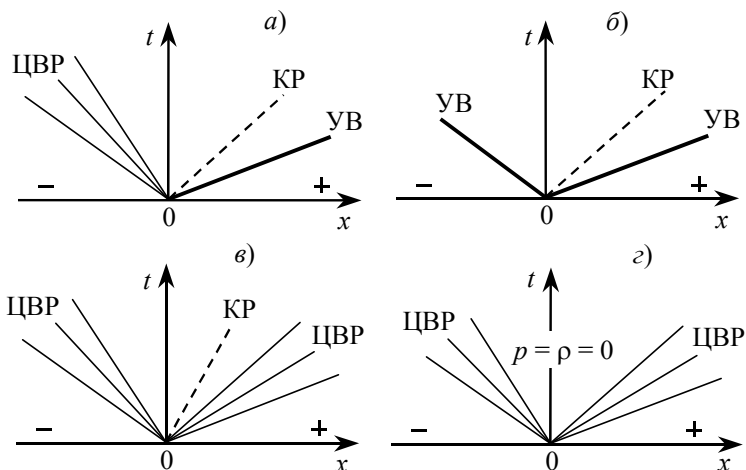
$$U^2 = \frac{2a_0^2(p/p_0 - 1)^2}{\gamma[(\gamma+1)p/p_0 + \gamma - 1]}. \quad (22)$$

Глава 2.5. Распад произвольного разрыва (задача Римана). Теория ударной трубы. Центрированная волна сжатия

Сокращения: ЗР – задача Римана о распаде произвольного разрыва, КР – контактный разрыв, ПВ – простая волна, УВ – ударная волна, ЦВ – центрированная ПВ, ЦВР – ЦВ разрежения.

Задача Римана (ЗР) о распаде произвольного разрыва ставится так. В начальный момент времени $t = 0$ при $x < 0$ и при $x > 0$ заданы постоянные разные значения параметров газа. В общем случае $p_- \neq p_+$, $\rho_- \neq \rho_+$, $u_- \neq u_+$, $\gamma_- \neq \gamma_+$ и т.д., где индексы «минус» («плюс») метят параметры при $x < 0$ (при $x > 0$).

Из заданных определяющих параметров задачи нельзя составить комбинации с размерностями времени и длины. Поэтому течение при $t > 0$ будет автомодельным, с автомодельной переменной $\xi = x/(a_- t)$, а безразмерные отношения u/a_- , a/a_- , ρ/ρ_- , ... будут функциями ξ и безразмерных констант γ_- , γ_+ , a_+/a_- , u_+/a_- , u_+/a_- , ρ_+/ρ_- . При $t > 0$ возможны две принципиально разные ситуации: *левый* и *правый* газы соприкасаются (рис. 2.10, а–в) и не соприкасаются (рис. 2.10, г).



Траектория соприкосновения – **контактный разрыв (КР)** уже потому, что по разные стороны от него могут быть разные газы. Через КР газ не протекает. Поэтому для течения с каждой стороны от него траектория КР эквивалентна траектории поршня, который либо выдвигается из однородного потока газа влево или вправо, либо вдвигается в него. То, что в общем случае однородный поток движется, а поршень может находиться от него не слева, а справа, вносит не принципиальные изменения в формулы Гл. 2.3 и 2.4, дающие решения соответствующих автомодельных задач о движении поршня с постоянной скоростью. Скорость КР («поршня») u_c при этом подбирается так, чтобы в обеих задачах о поршне за ЦВР и УВ (рис. 2.10, *а*; ЦВР и УВ могут поменяться местами), за двумя УВ (рис. 2.10, *б*) или за двумя ЦВР (рис. 2.10, *в*) в соответствии с условиями (1.3.6) и (1.3.7) при одинаковых скоростях, равных u_c , получались одинаковые давления p_c .

Если ни для одной из рассмотренных xt -диаграмм такую скорость u_c найти не удалось, это означает, что из-за большой разности скоростей $|u_+ - u_-|$ оба потока даже при предельном расширении до вакуума не взаимодействуют друг с другом (рис. 2.10, *г*). В УВ и в ЦВР сохраняются y - и z -компоненты вектора скорости.

Решение ЗР широко применяется прежде всего в современных численных методах газовой динамики. В настоящее время самые эффективные и распространенные разностные схемы – это так называемые распадные схемы – развитие схемы, предложенной С.К. Годуновым (1959, см. [18]). ЗР – важнейший их элемент.

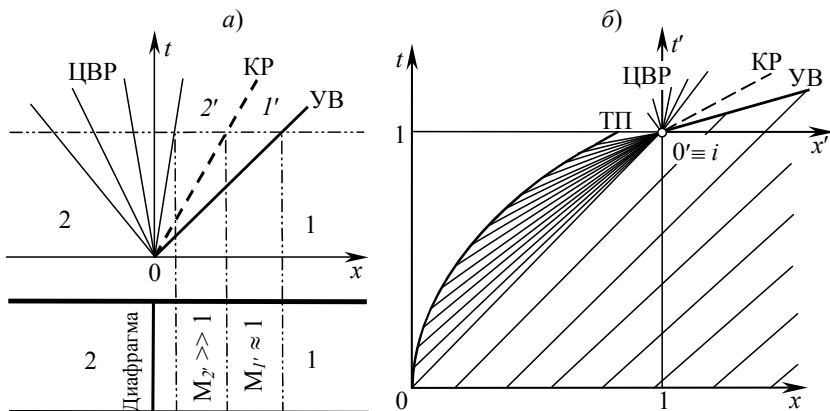


Рис. 2.11

Самостоятельный интерес представляет использующая решение ЗР элементарная теория **ударной трубы** – устройства, получившего широкое распространение как инструмент экспериментального исследования гиперзвуковых течений. Схема ударной трубы и xt -диаграмма её работы даны на рис. 2.11, а. Ударная труба состоит из секций низкого (1) и высокого (2) давления. До разрыва диафрагмы газ с обеих её сторон покоится. Обычно откачивание газа из секции низкого давления продолжается довольно долго. Из-за этого температура трубы и газа в ней близки к температуре окружающей среды T_0 . Итак, в начальный момент в ударной трубе: $u_{1,2} = 0$, $T_{1,2} = T_0$, $p_2 \gg p_1$. Если обе секции заполнены одним совершенным газом ($\gamma_{1,2} = \gamma$), то из равенства температур следует равенство скоростей звука $a_{1,2} = a_0$.

В элементарной теории ударной трубы реальный процесс разрыва диафрагмы моделируется её мгновенным исчезновением. Из физических соображений естественно ожидать, что после разрыва диафрагмы реализуется xt -диаграмма рис. 2.10, а, т.е. по газу в секции 1 распространяется УВ, а по газу в секции 2 – ЦВР. Покажем, что это действительно так.

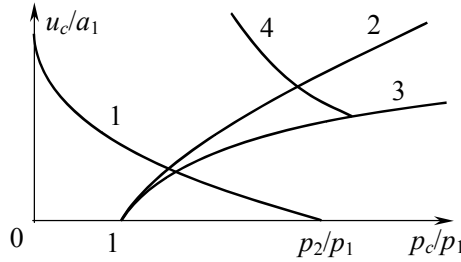


Рис. 2.12

Для ЦВР из условий сохранения инварианта I^+ и энтропии с использованием формулы (1.2.12) для отношения $a_{2'}/a_2$ имеем

$$u_{2'} + \frac{2a_{2'}}{\gamma - 1} = \frac{2a_2}{\gamma - 1}, \quad a_{2'} = a_2 \left(\frac{p_{2'}}{p_2} \right)^n = a_2 \left(\frac{p_c}{p_2} \right)^n, \quad n = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}.$$

Отсюда, допуская отличие начальных температур ($T_2 \neq T_1$) и скоростей звука ($a_2 \neq a_1$), найдём, что

$$\frac{u_c}{a_1} = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{a_2}{a_1} \left[1 - \left(\frac{p_c}{p_2} \right)^n \right] = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{a_2}{a_1} \left[1 - \left(\frac{p_c}{p_1} \right)^n \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^n \right]. \quad (1)$$

Здесь учтено, что $u_{2'} = u_c$ и $p_{2'} = p_c$. Согласно (1) u_c/a_1 монотонно убывает (кривая 1 на рис. 2.12) от $2(a_2/a_1)/(\gamma - 1)$ при $p_c/p_1 = 0$ до нуля при $p_c/p_1 = p_2/p_1$.

На УВ, идущей вправо, по формуле (2.4.22) имеем

$$\frac{u_c}{a_1} = \frac{(1 - p_1/p_c)\sqrt{2p_c/p_1}}{\sqrt{\gamma[\gamma + 1 + (\gamma - 1)p_1/p_c]}}. \quad (2)$$

В формуле (2) с ростом $p_c/p_1 \geq 1$ числитель растёт, а знаменатель уменьшается. Следовательно, u_c монотонно растёт от нуля при $p_c/p_1 = 1$ до бесконечности при $p_c/p_1 \rightarrow \infty$. При $p_c/p_1 > 1$ кривые 1 и 2, отвечающие формулам (1) и (2), обязательно пересекутся, причём в единственной точке (рис. 2.12).

При фиксированном p_2/p_1 увеличение отношения T_2/T_1 , а следовательно и a_2/a_1 «поднимает» кривую 1 и, таким образом, увеличивает значение p_c/p_1 в точке её пересечения с кривой 2. В том же направлении, но сильнее действует увеличение p_2/p_1 .

В УВ газ нагревается, а в ЦВР – охлаждается, и при $T_2 = T_1$ с разных сторон от КР (рис. 2.11, а) $T_{2'} < T_{1'}$ и $a_{2'} < a_{1'}$. В результате при одинаковых скоростях $u_{1'}, 2' = u_c$ числа Маха $M_{2'} > M_{1'}$. При большом перепаде давления на диафрагме, когда УВ получается сильной, согласно формулам (1.4.30) имеем (D – скорость УВ)

$$\rho_{1'} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1, \quad p_{1'} = \frac{2\rho_1 D^2}{\gamma+1}, \quad a_{1'}^2 = \frac{\gamma p_{1'}}{\rho_{1'}} = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} D^2, \quad u_{1'}^2 = \frac{4D^2}{(\gamma+1)^2},$$

$$M_{1'} = \sqrt{2/[\gamma(\gamma-1)]} \approx 1.8898, \quad \gamma=1.4$$

т.е. в типичном случае $M_{1'}$ близко к двум. Однако из-за разогрева газа в УВ и охлаждения в ЦВР отношение a_1/a_2 заметно больше единицы, обеспечивая гиперзвуковые скорости в области $2'$.

Ещё одна возможность реализации ЗР возникает после фокусировки волн сжатия. В общем случае в точке образования УВ (в Гл. 2.4 – в точке i) пересекаются лишь бесконечно близкие характеристики, и интенсивность УВ в момент возникновения нулевая. Однако при специальном выборе траектории поршня (ТП) в точке i можно сфокусировать S^+ -характеристики, идущие с конечного её отрезка (рис. 2.11, б). В таком случае интенсивность возникшей УВ будет конечной уже в точке i .

Для построения требуемой траектории поршня учтем, что в произвольную точку i с координатами t_i и $x_i = a_0 t_i$ приходят прямолинейные S^+ -характеристики ЦВ сжатия. Кроме того, для упрощения дальнейших формул в качестве масштабов длины, времени, скорости, плотности и давления возьмем x_i, t_i, a_0, ρ_0 и $\rho_0 a_0^2$. В результате $x_i = t_i = a_0 = \rho_0 = 1$, а $p_0 = 1/\gamma$.

Так как в ЦВ сжатия постоянен инвариант Γ , то

$$a = 1 + \frac{\gamma-1}{2} u, \quad (3)$$

а S^+ -характеристики ПВ сжатия в силу формулы (2.3.6), как показано на рис. 2.11, б, – прямые

$$\frac{x'}{t'} = \frac{x-1}{t-1} = u + a = 1 + \frac{\gamma+1}{2} u.$$

Отсюда на каждой S^+ -характеристике ЦВ сжатия, в том числе в её лежащей на траектории поршня концевой точке,

$$x = 1 + \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2}u\right)(t - 1). \quad (4)$$

Для построения ТП воспользуемся постоянной на каждой траектории частиц лагранжевой переменной m . В плоском случае (при $v = 1$) равенство (2.1.7), которым она была введена, принимает вид: $dm = k\rho(dx - udt)$. На C^+ -характеристиках $dx = (u + a)dt$ и $dm = k\rho adt$. Положив $m = 0$ на ТП и выбрав $k = 1$, проинтегрируем это уравнение сначала по отрезку $0i$, где $\rho a = 1$, а затем по любой C^+ -характеристике от ТП до точки i . Это даст $m_i = 1$ и

$$t = 1 - 1/(\rho a), \quad (5)$$

где t – время на ТП. Формулы (3) – (5) и выражение $\rho = \rho(a)$ из равенств (2.2.12) дают параметрическое представление ТП, реализующей ЦВ сжатия. Параметром служит скорость газа и поршня $u \geq 0$. При $u \rightarrow \infty$ газ изэнтропически сжимается в точку. Ограничившись любым конечным u_+ , построим к конечной точке найденной ТП прямолинейный участок $dx/dt = u_+$. После достижения им горизонтали $t = 1$ на оси x' возникает ЗР с покоящимся несжатым газом при $x' > 0$ и сжатым равномерным движущимся со скоростью $u_+ > 0$ потоком на конечном отрезке оси $x' < 0$.

Для выяснения типа $x't'$ -диаграммы ЗР, возникающей после реализации ЦВ сжатия, перейдём в формуле (3) от скорости звука к давлению. При $a_0 = 1$ с учётом формулы (2.2.12) найдём

$$u = 2 \frac{(p/p_0)^n - 1}{\gamma - 1}, \quad n = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}. \quad (6)$$

С другой стороны, согласно формуле (2.4.22) на УВ, выходящей из точки i ,

$$u = \frac{(1 - p_0/p)\sqrt{2p/p_0}}{\sqrt{\gamma[\gamma + 1 + (\gamma - 1)p_0/p]}}. \quad (7)$$

При одинаковых p/p_0 скорость газа за ЦВ сжатия с фокусом в точке i , которая даётся формулой (6), и определяемая формулой (7) скорость газа за выходящей из этой же точки УВ различаются. Поэтому согласно решению ЗР из точки i влево пойдёт либо ЦВР, как показано на рис. 2.11, б, либо УВ. Если при одинаковых давлениях скорость газа за УВ больше (меньше), чем за ЦВ сжатия, то влево пойдёт ЦВР (УВ).

Для малых сжатий $p/p_0 = 1 + \delta$ с $\delta \ll 1$, и формулы (6) и (7) примут вид

$$u_{\text{CWC}} \approx \frac{\delta}{\gamma} - \frac{\gamma+1}{4\gamma^2} \delta^2 + \frac{(\gamma+1)(3\gamma+1)}{24\gamma^3} \delta^3, \quad u_{\text{SW}} \approx \frac{\delta}{\gamma} - \frac{\gamma+1}{4\gamma^2} \delta^2 + \frac{3(\gamma+1)^2}{32\gamma^3} \delta^3.$$

В силу чего

$$u_{\text{SW}} - u_{\text{CWC}} \approx \frac{(\gamma+1)(5-3\gamma)}{96\gamma^3} \delta^3.$$

Согласно сказанному выше для малых сжатий при $\gamma < 5/3$ влево по газу будет распространяться ЦВР. Для сильного сжатия тот же результат получается для любых $\gamma > 1$. Действительно,

$$u_{\text{CWC}} = 2 \frac{(\gamma p)^n - 1}{\gamma - 1} \approx \frac{2(\gamma p)^n}{\gamma - 1}, \quad u_{\text{SW}} = \frac{[1 - 1/(\gamma p)] \sqrt{2\gamma p}}{\sqrt{\gamma(\gamma+1) + (\gamma-1)/p}} \approx \sqrt{\frac{2p}{\gamma+1}},$$

$$u_{\text{SW}} - u_{\text{CWC}} \approx \sqrt{\frac{2p}{\gamma+1}} - \frac{2}{\gamma-1} (\gamma p)^n \approx \sqrt{\frac{2p}{\gamma+1}} > 0,$$

а $n = (\gamma - 1)/(2\gamma) = 1/2 - 1/(2\gamma) < 1/2$ при $\gamma > 1$. Для $\gamma < 5/3$ кривая 3 на рис. 2.12 отвечает ЦВ сжатия, а кривая 4 – ЦВР. Точка пересечения кривых 2 и 4 определяет интенсивности УВ и ЦВР.

Глава 2.6. Слабо возмущённое течение. Бегущие волны. Эволюционные и неэволюционные разрывы

Сокращения: БВ – бегущая волна, КР – контактный разрыв, ПВ – простая волна, УВ – ударная волна, УВР и УВС – ударные волны разрежения и сжатия, ФГ – фронт горения, ЦВ – центрированная ПВ, ЦВР – ЦВ разрежения.

Для выявления качественных особенностей слабо возмущённых течений с плоскими волнами линеаризуем описывающие их уравнения. Зависящие от x и t малые возмущения параметров относительно некоторого постоянного фона будем обозначать маленькими буквами, а постоянные параметры фона – идентичными (или похожими) большими. В результате такого соглашения $A + a$ – скорость звука, $R + r$ – плотность, $U + u$ – x -компонента скорости, $P + p$ – давление и т.п., причём все возмущения, кроме u , ма-

лы (по модулю) в сравнении с соответствующей *большой* величиной. Для возмущения u сделано исключение: $|u| \ll A$, ибо для плоского течения можно перейти в такую движущуюся с постоянной скоростью в направлении оси x систему, что в ней $U = 0$. Пусть такой переход сделан, $U = 0$, и с точностью до линейных слагаемых включительно для любого параметра $\Phi + \varphi(x, t)$:

$$\frac{d(\Phi + \varphi)}{dt} = \frac{\partial(\Phi + \varphi)}{\partial t} + (U + u) \frac{\partial(\Phi + \varphi)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (U + u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (1)$$

С учётом (1) уравнение сохранения энтропии в частице и эквивалентные ему уравнения (2.2.1_s) станут

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial(Rh - p)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial(A^2 p - p)}{\partial t} = 0.$$

Согласно им в линейном приближении имеют место интегралы $s = s_1$, $Rh - p = s_2$, $A^2 p - p = s_3$, $s_k = s_k(x - Ut) = s_k(x)$, $k = 1 - 3$, (2) Функции $s_1 - s_3$ определяются начальными условиями; s_2 и s_3 пропорциональны s_1 . Пропорциональные $[p]^3$ приращения энтропии в слабых УВ лежат за пределами линейного приближения.

Аналогично линеаризация уравнений (2.2.11), справедливых на C^+ - и C^- -характеристиках, даёт уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^+ i^+}{dt} = 0, \quad \frac{d^- i^-}{dt} = 0, \quad i^\pm = u \pm \frac{p}{RA}, \quad \frac{d^\pm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (U \pm A) \frac{\partial}{\partial x} = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \pm A \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{d^\pm x}{dt} = U \pm A = \pm A. \end{aligned} \quad (3)$$

Согласно им в линейном приближении введение инвариантов i^+ и i^- не требует изэнтропичности течения. Решение уравнений (3) приводит к интегралам

$$i^\pm = i^\pm \{x - (U \pm A)t\} = i^\pm(x \mp At). \quad (4)$$

Интегралы (2) и (4) сохраняются на линеаризованных C^0 -характеристиках (траекториях частиц) и на линеаризованных $C^\pm$ -характеристиках (*правых* и *левых* звуковых волнах), которые назовём **бегущими БВ**. БВ, для которых справедливы интегралы (2), назовём **энтропийными БВ**, а БВ, для которых справедливы интегралы (4), – **звуковыми БВ** (или **акустическими БВ**).

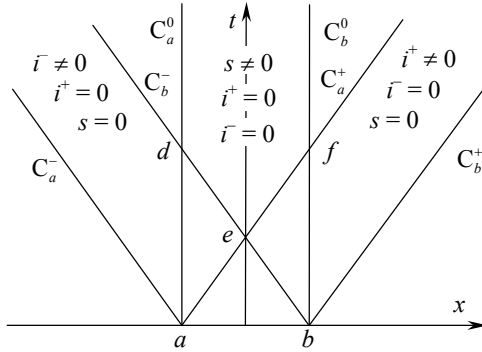


Рис. 2.13

В системе координат, в которой $U = 0$, рис. 2.13 демонстрирует развитие течения, вызванного наличием возмущений всех параметров только на отрезке ab оси x . По параметрам на ab находятся комбинации возмущений в левых частях интегралов (2) и (4) и определяются функции $s_k(x)$, $i^+(x)$ и $i^-(x)$ в их правых частях. При $x < x_a$ и $x > x_b$ все они равны нулю. Так, $s_k(x) = 0$ вне C_a^0 -полоски $x_a < x < x_b$, $t > 0$. Её границы – характеристики C_a^0 и C_b^0 : $x = x_a$ и $x = x_b$. При $t > 0$ функция $i^+ = 0$ вне C_a^+ -полоски, ограниченной характеристиками C_a^+ и C_b^+ , а $i^- = 0$ при $t > 0$ вне C^- -полоски, ограниченной характеристиками C_a^- и C_b^- .

Согласно определениям (2) и (3)

$$u = \frac{i^+ + i^-}{2}, \quad p = \frac{i^+ - i^-}{2} RA, \quad \rho = \frac{2s_3 + (i^+ - i^-)RA}{2A^2}. \quad (5)$$

Поэтому $u = p = \rho = 0$, т.е. течение не возмущено в четырёх областях: справа от характеристики C_b^+ , слева от характеристики C_a^- , и в двух секторах, один из которых ограничен характеристиками C_b^0 и C_a^+ , а второй – характеристиками C_b^- и C_a^0 .

Согласно сказанному выше и формулам (5) в вертикальной C^0 -полоске выше ломаной def $u = p = 0$, а возмущены только отличные от давления термодинамические параметры. В идущей вправо C^+ -полоске справа от bf плотность ρ , а начиная от отрезка

be , u и p пропорциональны инварианту i^+ , «профиль» которого не изменяется (рис. 2.14), начиная от основания C^+ -полоски на оси x . Аналогичная ситуация с заменой i^+ на i^- , bf на ad и be на ae реализуется в идущей влево C^- -полоске левее отрезка ad .

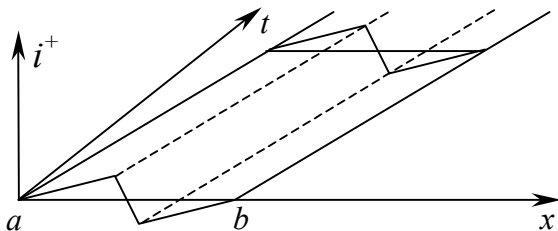


Рис. 2.14

Зона интерференции БВ – пятиугольник $abfeda$. В треугольниках bfe и aed интерференция энтропийной и одной из звуковых БВ, не влияя на распределения s , u и p в них, сказывается только на распределения отличных от s и p термодинамических параметров. Сложнее течение в треугольнике abe , где интерферируют три БВ. Однако и здесь интегралы (2) и (4) и формулы (5) позволяют найти все параметры потока.

Функции $s_k(x)$ и $i^\pm(x)$, определяющие распределения параметров в БВ, могут быть негладкими, как на рис. 2.14, и разрывными. Разрывам $s_k(x)$ отвечают КР, а разрывам $i^\pm(x)$ – слабые УВ. В линейном приближении допускаются УВ и уплотнения, и разрежения. УВ разрежения заменяют ЦВР. Это естественно, ибо в линейном приближении в плоскости xl наклон одноимённых характеристик одинаков. Согласно формуле (1.4.14) скорость УВ относительно газа с уменьшением её интенсивности $[p]$ стремится к скорости звука. При $[p] = 0$ УВ вырождается в характеристику.

Одно из применений результатов линейного приближения – исследование важного свойства поверхностей разрыва, получившего название *неэволюционности*. Тривиальный пример *неэволюционного* разрыва – произвольный разрыв. При его распаде мгновенно вместо единственной, заданной произвольно поверхности разрыва возникает одна из структур, изображённых на рис.

2.10. Это происходит не постепенно (*эволюционно*), а сразу и характеризуется термином *неэволюционность*. Понятия *неэволюционности* и *неустойчивости* (течения, поверхности разрыва и т.п.) не эквивалентны. Действительно, течение неустойчиво и тогда, когда разрушающие его возмущения растут плавно. Неэволюционность произвольного разрыва – естественное следствие того, что на нём не выполняются законы сохранения. Другое дело, поверхности разрыва, которые им удовлетворяют. Однако, как показано ниже, и они могут оказаться неэволюционными.

Пусть на поверхности разрыва, которая при отсутствии возмущений покоится в выбранной системе координат ($D = 0$), выполняются законы сохранения (1.3.2⁰), (1.3.3⁰) и (1.3.5⁰). Они выполняются и в невозмущённом состоянии, т.е. для параметров, обозначенных большими буквами ($U_{1,2}, P_{1,2}, R_{1,2}$), и при наличии возмущений $u_{1,2}, p_{1,2}, \rho_{1,2}$ – слева и справа от неё (через разрыв газ течёт слева направо). Согласно формулам (5) возмущения – линейные комбинации i^+ , i^- и s . Возмущение скорости разрыва обозначим буквой d . Итого, в случае плоской поверхности разрыва все возможные возмущения характеризуются **семью** функциями (возмущения касательных к поверхности разрыва компонент вектора скорости в данном случае несущественны, так как они не влияют на возмущения параметров, перечисленных выше).

Поскольку на невозмущённой поверхности разрыва выполняются три закона сохранения, то при их линеаризации получается система **трёх** однородных уравнений, линейных относительно **семи** функций времени $i_{1,2}^+, i_{1,2}^-, s_{1,2}$ и d . Рассмотрим теперь разрывные поверхности разрыва при отсутствии приходящих к ним возмущений (рис. 2.15).

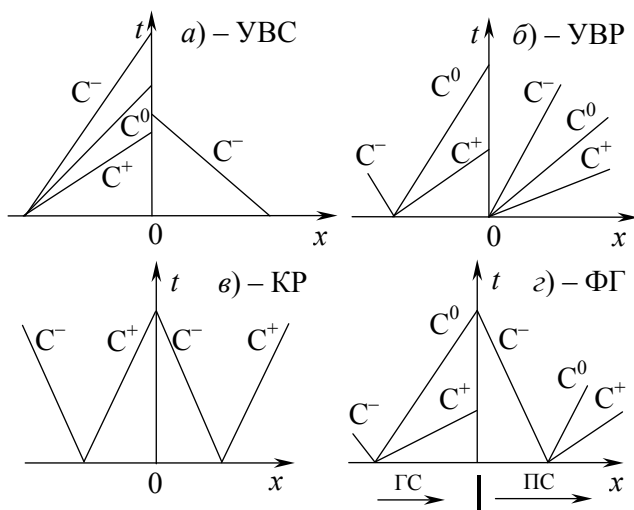


Рис. 2.15

Согласно Гл. 1.4 нормальный газ перед УВ сжатия (УВС – рис. 2.15, а) движется со сверхзвуковой скоростью ($U_1 > A_1$), а за ней – с дозвуковой ($U_2 < A_2$). Поэтому спереди (со стороны $x < 0$) на УВС приходят C^0 -, C^+ - и C^- -характеристики, а сзади (со стороны $x > 0$) – только C^- -характеристики. Следовательно, отсутствие приходящих возмущений означает, что возмущения $s_1 = i_1^+ = i_{1,2}^- = 0$. Здесь, для определения s_2, i_2^+ и d есть три линейных относительно этих возмущений однородных уравнения. Их решение: $s_2 = i_2^+ = d = 0$, и **в нормальном газе УВС эволюционны**.

В противоположность этому, согласно Гл. 1.4 нормальный газ перед УВ разрежения (УВР – рис. 2.15, б) движется с дозвуковой скоростью ($U_1 < A_1$), а за ней – со сверхзвуковой ($U_2 > A_2$). В результате спереди на УВР приходят только две характеристики (C^0 и C^+), а сзади – ни одной. Теперь условие отсутствия приходящих возмущений обращает в нули лишь две функции $s_1 = i_1^- = 0$, и в **трёх** уравнениях, линейных и однородных относительно возмущений, остаётся **пять** неизвестных. Двумя из них **Природа** может распорядиться по своему усмотрению, что **Она** и делает. На-

ряду с уменьшением энтропии это – ещё одна причина, запрещающая УВР в нормальных газах. Если же, несмотря на запрет, задать ступенчатое распределение параметров, отвечающее УВР, то произойдёт распад разрыва. При этом, как на рис. 2.10, *а* и *в*, влево по газу пойдёт ЦВР, а вправо – либо УВ сжатия (рис. 2.10, *а*), – либо ЦВР (рис. 2.10, *в*). Итак, **в нормальном газе УВР неэволюционны**. Наоборот, **в ненормальном газе УВР эволюционны, а УВС неэволюционны**. Аналогичным образом показывается неэволюционность детонационных волн, для которых $M_2 > 1$. На детонационной адиабате (рис. 1.11, *а*) им отвечают точки типа 2°.

Следующий пример – контактный разрыв (КР, рис. 2.15, *в*). Выполняющиеся на КР, линейные уравнения (1.3.6⁰) и (1.3.7), включающие условия непрерывности нормальной к КР скорости и давления, имеют вид

$$u_1 = u_2 = d, \quad p_1 = p_2. \quad (6)$$

Слева на КР приходят C^+ -, а справа – C^- -характеристики. Поэтому $i_1^+ = i_2^- = 0$, и формулы (5) сводятся к равенствам

$$u_1 = i_1^- / 2, \quad u_2 = i_2^+ / 2, \quad p_1 = -i_1^- R_1 A_1 / 2, \quad p_2 = i_2^+ R_2 A_2 / 2.$$

Подстановка этих выражений в уравнения (6) даёт: $d = i_1^- = i_2^+ = 0$, т.е. все влияющие на КР возмущения равны нулю, и он **эволюционен**.

Последний пример – фронт медленного горения (ФГ – рис. 2.15, *з*). Законы сохранения, выполняющиеся на ФГ, отличаются от выполняющихся на УВ лишь дополнительными постоянными слагаемыми в уравнениях энергии и ударной адиабаты. Эти слагаемые появляются из-за того, что **горючая смесь (ГС)** находится в неравновесном (метастабильном) состоянии, а **продукты сгорания (ПС)** – в равновесном. Следствие этого – разные уравнения состояния $h = h(p, \rho)$ горючей смеси и продуктов сгорания, главное отличие которых связано с энергией, выделяющейся при реакции (теплотой реакции).

Скорость ФГ D много меньше скоростей звука до и после него: $U_1 \ll A_1$ и $U_2 < A_2$. Поэтому спереди на ФГ приходят C^0 - и C^+ -характеристики, а сзади – C^- -характеристики, и отсутствие приходящих возмущений означает, что **три** возмущения

$s_1 = i_1^+ = i_2^- = 0$. Здесь для определения **четырёх** функций i_1^-, s_2, i_2^+ и d есть **три** линейных относительно них однородных уравнения. Отсюда, вроде бы, следует, что в противоречии с повседневной практикой ФГ неэволюционен. Разрешение этого противоречия в том, что скорость ФГ D – известная функция температур и давлений с обеих его сторон. Её линеаризация приводит к выражению для d как линейной комбинации прочих возмущений. Четыре линейных относительно i_1^-, s_2, i_2^+ и d однородных уравнений дают: $i_1^- = s_2 = i_2^+ = d = 0$. Значит, **ФГ эволюционен**.

Глава 2.7. Нелинейное затухание слабых ударных волн

Сокращения: БВ – бегущая волна, УВ – ударная волна.

Ошибки линейного приближения носят накопительный характер, т.е. растут с удалением от источника возмущений. Так, в волне, которая на рис. 2.13 бежит вправо, точные уравнения C^+ -характеристик в обозначениях Гл. 2.6 имеют вид

$$dx/dt = U + A + u + a = A + (\gamma + 1)u/2 = A + (\gamma + 1)i^+/4. \quad (1)$$

Здесь учтено, что $U = 0$, возмущение a скорости звука связано с возмущением u скорости газа условием постоянства инварианта Γ , а u выражено через i^+ формулой (2.6.5). В силу этого же условия волна, бегущая вправо, – простая волна даже после возникновения в ней слабых УВ. Поэтому и в точной постановке, и в линейном приближении на каждой C^+ -характеристике параметры постоянны, а сами они прямые линии. В линейном приближении, однако, все они имеют одинаковый наклон:

$$dx/dt = A. \quad (2)$$

Пусть i^{+m} – максимальное положительное возмущение инварианта i^+ в C^+ -волне, а L^m – расстояние при $t = 0$ от точки с $i^+ = i^{+m}$ до точки b . Тогда согласно уравнениям (1) и (2) максимальная погрешность линейного приближения в вычислении x

$$\Delta x^m = i^{+m}(\gamma + 1)t/4.$$

Пока t мало, $\Delta x^m \ll L^m$, но, нарастая со временем, она станет сколь угодно большой. При $t^m = 4L^m/[i^{+m}(\gamma + 1)]$ C^+ -характеристи-

ка, отвечающая $i^+ = i^{+m}$, пересечёт характеристику C_b^+ – правую границу C^+ -волны. Ещё раньше в C^+ -волне возникнет слабая УВ, которая, двигаясь в том же направлении, догонит характеристику C_b^+ и станет правой границей расширяющейся C^+ -волны. При наличии в профиле инварианта i^+ отрицательного минимума $i_m^+ < 0$ аналогичная ситуация возникнет на левой границе C^+ -волны. Таким образом, в отличие от линейного приближения ширина C^+ -волны будет расти. В любом случае C^+ -характеристики, отвечающие большим значениям i^+ , догоняют УВ, а меньшим – догоняются ею. Это ведёт к уменьшению i^+ , а с ним, согласно формулам (2.6.5) – к уменьшению возмущений всех параметров.

Подтвердим приведённые выше соображения решением задачи, смысл которой поясняют рис. 2.16, *a* и *б*. На них жирная линия – траектория поршня. При $t < 0$ он покоился. В момент $t = 0$ поршень стал двигаться с конечной скоростью $U_a > 0$ и с отрицательным ускорением, из-за чего его скорость, уменьшаясь, при $t = \tau_0$ стала нулевой, а затем – отрицательной. Вернувшись в момент $t = t_b = 2\tau_0$ в начальное положение $x_b = x_a = 0$, поршень мгновенно останавливается. Скорости U_a и $|U_b|$ предполагаются малыми, в силу чего на вызванных ими УВ можно пренебречь приращениями энтропии и инварианта Γ . Благодаря этому, несмотря на присутствие УВ, все C^+ -характеристики – прямые линии. На тех из них, что выходят с траектории поршня в момент $t = \tau_0$ и с оси t , параметры газа не отличаются от параметров однородного покоящегося газа на положительной полуоси x и на выходящих с неё C^+ -характеристиках. На рис. 2.16 почти все C^+ -характеристики даны тонкими прямыми. Исключения – C_a^+ и C_b^+ на рис. 2.16, *a* – УВ в линейном приближении.

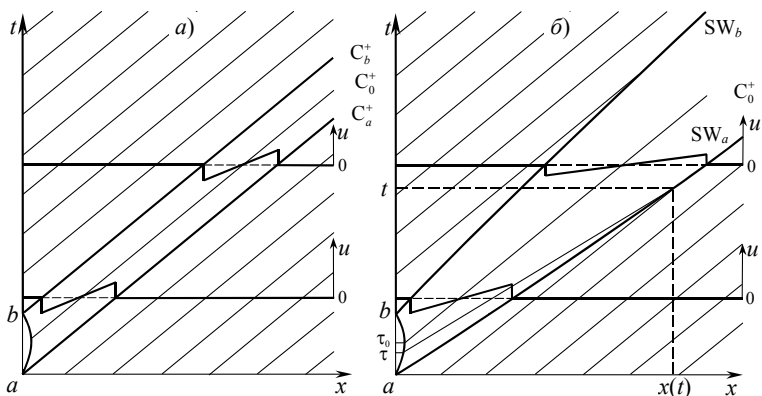


Рис. 2.16

Принципиальные отличия линейного и нелинейного приближений видны из сравнения рис. 2.16, *а* и *б*. В линейном приближении (*а*) наклон всех C^+ -характеристик, включая ударные волны C_a^+ и C_b^+ , одинаковый ($dx/dt = A$). В БВ не изменяются и показанные для двух моментов времени профили скорости $u = u(x)$. С учётом нелинейности (*б*) из идущих от траектории поршня C^+ -характеристик наклон единственной «нейтральной» характеристики C_0^+ такой же, как у C^+ -характеристик покоящегося газа. Характеристики, покинувшие траекторию поршня при $\tau < \tau_0$, догоняют ударную волну SW_a . Ударная волна SW_b , замыкающая C^+ -полоску слева, догоняет C^+ -характеристики, покинувшие траекторию поршня при $\tau > \tau_0$. Так получается потому, что скорость слабых УВ равна полусумме скоростей характеристик, движущихся в том же направлении. С ростом t и x УВ SW_a догоняют характеристики, покинувшие траекторию поршня всё ближе и ближе к точке нулевой скорости ($\tau = \tau_0$). Благодаря этому параметры за УВ приближаются к параметрам покоящегося газа. Аналогично с УВ SW_b с той разницей, что это происходит с параметрами перед ней (обе УВ движутся вправо). В этом – механизм нелинейного затухания УВ.

При определении траектории УВ SW_A индекс «0» припишем невозмущённым параметрам справа от УВ (без индекса – пара-

метры за УВ). Пусть $X(\tau)$ – координата траектории поршня. Тогда $u(\tau) = \dot{X}(\tau) \equiv dX/d\tau$ – равная скорости поршня скорость газа у поршня, сохраняющаяся на C^+ -характеристике. Проинтегрировав уравнение прямолинейной C^+ -характеристики ($dx/dt = u + a$) от траектории поршня ($t = \tau$) до УВ SW_a , найдём

$$x(t) = X(\tau) + (u + a)(t - \tau) = X(\tau) + \left\{ a_0 + \frac{\gamma + 1}{2} u(\tau) \right\} (t - \tau). \quad (3)$$

Здесь $x(t)$ – координата УВ. При получении этого равенства учтено, что в силу постоянства во всём течении инварианта Γ

$$a = a_0 + (\gamma - 1)u/2. \quad (4)$$

По формуле (1.4.22) скорость слабой УВ равна полусумме скоростей приходящих на неё C^+ -характеристик. С учётом равенства (4) это даст

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{a_0 + a(\tau) + u(\tau)}{2} = a_0 + \frac{\gamma + 1}{4} u(\tau). \quad (5)$$

Вычислив из уравнения (3) производную $dx(t)/dt$ и подставив её в уравнение (5), придём к уравнению

$$u(\tau) + 2\dot{u}(\tau)t \frac{d\tau}{dt} = \left\{ \frac{4a_0 + (\gamma - 3)u(\tau)}{\gamma + 1} + u(\tau) + 2\dot{u}(\tau)\tau \right\} \frac{d\tau}{dt},$$

которое после умножения на $u(\tau)$ сведётся к

$$\frac{d\{tu^2(\tau)\}}{d\tau} = \frac{4a_0 + (\gamma - 3)u(\tau)}{\gamma + 1} u(\tau) + \frac{d\{\tau u^2(\tau)\}}{d\tau}.$$

Интегрирование этого уравнения от точки a , где $t = \tau = 0$, даст

$$tu^2(\tau) = \tau u^2(\tau) + \frac{1}{\gamma + 1} \int_0^\tau \{4a_0 + (\gamma - 3)u(\tau)\} u(\tau) d\tau \approx \frac{4a_0}{\gamma + 1} \int_0^\tau u(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Второе выражение написано с учётом того, что $\tau \ll t$, а $u \ll a_0$.

Когда $\tau \rightarrow \tau_0$, скорость $u(\tau) \rightarrow u(\tau_0) = 0$. При этом первое слагаемое в правой части решения (6) стремится к нулю, а верхний предел в интеграле можно заменить на τ_0 . В результате получим

$$tu^2(\tau) = K^2, \quad K^2 = \frac{1}{\gamma + 1} \int_0^{\tau_0} \{4a_0 + (\gamma - 3)u(\tau)\} u(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Положительность интеграла – следствие выполнения неравенств $0 < u(\tau) \ll a_0$ при $0 \leq \tau \leq \tau_0$. Согласно формуле (7) при больших t интенсивность УВ определяется функцией $u(\tau) = Kt^{-1/2}$. Подставив это выражение в уравнение (3), найдём, что для больших t

$$x(t) \approx X(\tau_0) + a_0(t - \tau_0) + \frac{\gamma + 1}{2} K \sqrt{t}.$$

Первые два слагаемых в правой части дают уравнение нейтральной характеристики C_0^+ , а третье – расстояние от C_0^+ до УВ SW_a . Скорость $u(\tau)$ в окрестности $\tau = \tau_0$ – линейная функция $\tau - \tau_0$. При больших t это обеспечивает близкое к линейному распределение $u(x)$ между C_0^+ , где $u = 0$, и УВ, где $u = Kt^{-1/2}$. В результате площадь под практически треугольной эпюрой скорости близка к константе.

Для УВ SW_b получаются аналогичные результаты. Суммарное распределение скорости (рис. 2.16, б) имеет форму, получившую название ***N-волна***. Близкий математический аппарат применяется для расчёта нелинейного затухания УВ, возникающих при полёте сверхзвуковых летательных аппаратов («звуковой удар»).

Глава 2.8. Метод характеристик

Сокращения: МХ – метод характеристик, ТЧ – траектория частиц, УВ – ударная волна, УС – условия совместности, ЦПВ – централизованная простая волна, ЦС – центр симметрии.

Характеристики, ключевое значение которых в теории очевидно, занимают особое место и в численных методах газовой динамики – основном инструменте исследования всевозможных течений без ограничений на их одномерность, изэнтропичность, двупараметричность и идеальность газа и т.п. Особое место характеристик в численных методах обусловлено тем, что основанный на них **метод характеристик (МХ)** обладает свойствами, к которым иные численные методы приближаются лишь асимптотически – при бесконечном измельчении разностной сетки. Уже мысленная (*виртуальная*) реализация МХ ещё до проведения конкретных расчётов выявляет расположение таких важных эле-

ментов искомого решения, как области определённости разных участков границы и области их влияния. Уравнения характеристик и условия совместности помогают ставить **граничные условия** на естественных (твёрдая стенка, граница затопленной струи) и искусственных (поверхности раздела областей, описываемых в рамках разных моделей) границах. Данное свойство – следствие уравнений одномерных нестационарных течений с плоскими волнами применимо к решению вопроса о виде граничных условий в общем пространственном случае.

Имея в виду сказанное выше, рассмотрим основные идеи МХ и несколько решаемых им задач. Сначала напомним о возможности использования в расчётах вместо координаты x массовой лагранжевой переменной m . Переменная m , введённая дифференциальным равенством (2.1.7)

$$dm = kx^{v-1}\rho(dx - udt), \quad (1)$$

постоянна на траекториях частиц (ТЧ). На $C^\pm$ -характеристиках согласно формулам (2.2.5 $^\pm$)

$$dx/dt = u \pm a. \quad (2^\pm)$$

Поэтому на них

$$\frac{dm}{dt} = \pm kx^{v-1}\rho a, \quad \frac{dx}{dm} = \frac{a \pm u}{kx^{v-1}\rho a}, \quad (3^\pm)$$

и в каждой точке плоскости mt вертикали $m = \text{const}$, т.е. ТЧ идут по биссектрисе угла, образованного $C^\pm$ -характеристиками.

Вне зависимости от того, в плоскости xt или mt реализован МХ, используются интегралы (2.1.8)

$$s = S(m), \quad v = 1, 2, 3; \quad w = W(m), \quad x^{v-1}v = \Gamma(m), \quad v = 1, 2, \quad (4)$$

Функции $W(m)$ и $\Gamma(m)$ в них определяются начальными условиями, а $S(m)$ – ещё изменениями энтропии на УВ.

Условия совместности (2.2.6 $^\pm$) для $C^\pm$ -характеристик с учётом равенств (2 $^\pm$) и (3 $^\pm$) перепишем в двух формах:

$$du \pm \frac{dp}{\rho a} + \frac{n-1}{x} F_x^\pm dx = 0, \quad du \pm \frac{dp}{\rho a} + \frac{n-1}{x^v} F_m^\pm dm = 0, \quad (5^\pm)$$

$$F_x^\pm(u, v, \dots) = \frac{F^\pm}{a \pm u}, \quad F_m^\pm = F_m^\pm(u, v, \dots) = \frac{F^\pm}{k\rho a}, \quad F^\pm(u, v, \dots) =$$

$$= au \pm (3-n)v^2, \quad F_x^\pm(0,0,\dots) = F_m^\pm(0,0,\dots) = F^\pm(0,0,\dots) = 0.$$

При решении задач, представленных на рис. 2.17, параметры в точке 3 ищутся, а в точках 1 и 2 известны, 1–3 – отрезок C^+ -характеристики (характеристики 1-го семейства), 2–3 – отрезок C^- -характеристики (характеристики 2-го семейства).

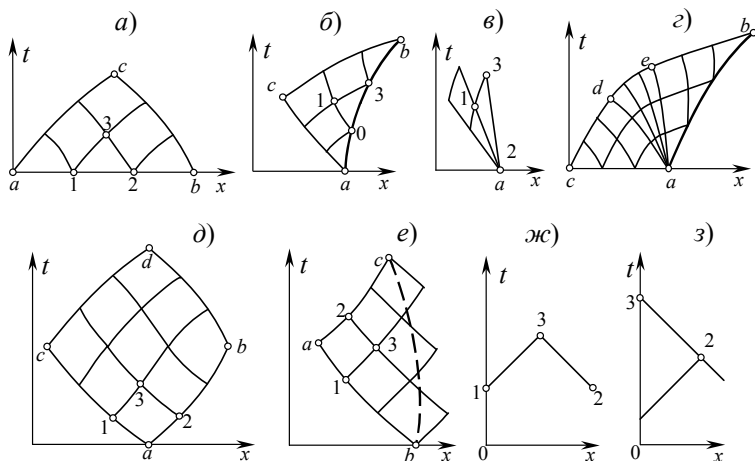


Рис. 2.17

В задаче Коши (рис. 2.17, а) параметры газа заданы на отрезке ab , отличном от отрезка характеристик всех трёх семейств. Функции $W(m)$, $\Gamma(m)$ и $S(m)$ заданы для $m_a \leq m \leq m_b$. C^+ - и C^- -характеристики, выходящие соответственно из точек a и b , пересекаются в точке c . На рис. 2.17, а ab – отрезок оси x . Это, однако, несущественно, ибо далее не предполагается, что $t_2 = t_1$.

Отрезки C^+ - и C^- -характеристик 1–3 и 2–3 пересекаются в точке 3. Поэтому, приблизительно проинтегрировав по этим отрезкам соответствующие уравнения $(2^\pm)$, получим

$$x_3 = x_1 + \frac{u_1 + a_1 + u_3 + a_3}{2}(t_3 - t_1), \quad x_3 = x_2 + \frac{u_2 + a_2 + u_3 + a_3}{2}(t_3 - t_2). \quad (6)$$

При известных коэффициентах перед разностями $(t_3 - t_1)$ и $(t_3 - t_2)$ эти уравнения позволяют найти x_3 и t_3 . Воспользовавшись затем результатом интегрирования уравнения (1) по отрезку 2–3

$$m_3 = m_2 + k \frac{x_2^{v-1} \rho_2 + x_3^{v-1} \rho_3}{2} (x_3 - x_2) - k \frac{x_2^{v-1} \rho_2 u_2 + x_3^{v-1} \rho_3 u_3}{2} (t_3 - t_2), (7)$$

определим m_3 . Зная m_3 и x_3 и воспользовавшись интегралами (4), вычислим энтропию s_3 и компоненты w_3 и v_3 вектора скорости. Если функции $W(m)$, $\Gamma(m)$ и $S(m)$ заданы таблицами, то их значения при $m = m_3$ находятся квадратичной интерполяцией.

Интегрирование первых уравнений (5⁺) даст

$$u_3 - u_1 + \left(\frac{1}{\rho_1 a_1} + \frac{1}{\rho_3 a_3} \right) \frac{p_3 - p_1}{2} + \frac{v-1}{2} \left(\frac{F_{x1}^+}{x_1} + \frac{F_{x3}^+}{x_3} \right) (x_3 - x_1) = 0, (8)$$

$$u_3 - u_2 - \left(\frac{1}{\rho_2 a_2} + \frac{1}{\rho_3 a_3} \right) \frac{p_3 - p_2}{2} + \frac{v-1}{2} \left(\frac{F_{x2}^-}{x_2} + \frac{F_{x3}^-}{x_3} \right) (x_3 - x_2) = 0.$$

Если коэффициенты при приращениях и координата x_3 известны, то решение уравнений (8) определит u_3 и p_3 . Наконец, известные s_3 и p_3 и уравнения состояния позволяют найти ρ_3 и a_3 и, таким образом, завершить определение всех параметров в точке 3.

Коэффициенты при приращениях в уравнениях (6) – (8) считались известными, хотя слагаемые с индексом «3» в них неизвестны. По этой причине решение строится итерациями. В первой итерации вторые слагаемые заменяются известными первыми, вычисленными в точке 1 или 2. В следующих итерациях они вычисляются по параметрам в точке 3 из предыдущей итерации. Разностные уравнения (6) – (8) аппроксимируют исходные дифференциальные со вторым порядком относительно приращений. Квадратичная интерполяция по m_3 сохраняет второй порядок точности. Теоретически второй порядок обеспечивают две итерации, но опыт расчётов оправдывает увеличение их числа до трёх.

Описанная процедура определения новой точки применяется для всех последовательных пар точек 1 и 2 отрезка ab . В результате получается новый слой, содержащий на одну точку меньше исходного. Если N – число точек на ab , то после расчёта N слоев выстроится характеристический треугольник abc , боковые стороны которого ac и bc – отрезки C^+ - и C^- -характеристик. Здесь и далее предполагается, что распределения параметров на ab , законы движения границ и т.п. обеспечивают безударное течение в рассчитываемой области, в данном случае – в треугольнике abc .

Последнее, разумеется, не означает, что УВ не возникнут никогда. Более того, согласно результатам Гл. 2.7 в общем случае УВ непременно возникнут в C^+ - и C^- -полосках, опирающихся на отрезок ab . Здесь же речь идёт о безударности течения лишь в треугольнике abc , эквивалентном треугольнику abe рис. 2.13.

При отсутствии УВ, проходящих извне на ac и bc , треугольник abc – **область определённости** отрезка ab в том смысле, что течение в нём полностью и единственным образом определяется заданными распределениями параметров на ab . Справедливость данного утверждения – результат мысленной реализации описанной процедуры МХ. Представление о погрешности вычислений даёт отличие от нуля интеграла по контуру abc от правой части уравнения (1). Погрешность оценивается разностью значений m_c , полученных интегрированием по отрезкам C^- -характеристик согласно (7) и аналогичным интегрированием по отрезку ac C^+ -характеристики.

Во второй задаче (рис. 2.17, б) заданы отрезок ac C^- -характеристики, включая функции $W(m)$, $\Gamma(m)$ и $S(m)$ при $m_c \leq m \leq m_a$, и траектория ab непроницаемого поршня, т.е. задание зависимости от времени его координаты $x = X(t)$ и скорости $U(t) = X'(t) \equiv dx/dt$. Начнём со случая $u_a = U_a = U(t_a)$, где u_a – скорость газа в точке a характеристики ac . В отличие от отрезка ab предыдущей задачи u и p на отрезке ac C^- -характеристики не могут задаваться произвольно. Они должны удовлетворять условиям (5⁻), которые по этой причине и названы *условиями совместности* (УС). Если такой отрезок – отрезок bc C^- -характеристики предыдущей задачи, то с точностью до погрешностей конечно-разностной записи (8) УС выполняется. Если же на C^- -характеристике задать $W(m)$, $\Gamma(m)$ и $S(m)$ и, например, $p = p(x)$, то $u = u(x)$ определится интегрированием УС (5⁻) с учётом интегралов (4).

Отличие второй задачи от первой только в расчёте точки на траектории поршня. Для определения её x_3 и t_3 используется первое уравнение (6) и уравнение траектории поршня, записанное для ускорения сходимости итераций в форме

$$x_3 = X(t_3) = X_0 + \left[X(t_3) - X_0 - \frac{X'_0 + X'_3}{2}(t_3 - t_0) \right] + \frac{X'_0 + X'_3}{2}(t_3 - t_0). \quad (9)$$

Здесь 0 – предыдущая точка траектории поршня (рис. 2.16, б), а $X' = dX/dt$. Уравнение (9) вместе с первым уравнением (6) решается итерациями. В итерациях наряду с X'_3 в последнем слагаемом участвует квадратная скобка. В ней в первой итерации индекс «3» заменяется на «0», и скобка исчезает. На траектории поршня $m_3 = m_a$, функции в интегралах (4) равны W_a , Γ_a и S_a , а по ним и найденному x_3 определяются $s_3 = S_a$, $w_3 = W_a$ и $v_3 = x_3^{1-\nu} \Gamma_a$.

Вычислив по t_3 , найденному в данной итерации, $u_3 = U(t_3)$ и проинтегрировав по отрезку 1–3 первое уравнение (5^+), получим

$$U_3 - u_1 + \left(\frac{1}{\rho_1 a_1} + \frac{1}{\rho_3 a_3} \right) \frac{p_3 - p_1}{2} + \frac{\nu - 1}{2} \left(\frac{F_{x1}^+}{x_1} + \frac{F_{x3}^+}{x_3} \right) (x_3 - x_1) = 0 \quad (10)$$

– уравнение, определяющее p_3 . Наконец, по p_3 и s_3 из уравнений состояния найдём ρ_3 и a_3 , чем и завершим данную итерацию. Выходящая из точки 3 C^- -характеристика рассчитывается точка за точкой так же, как при решении задачи Коши. Последняя точка отрезка новой C^- -характеристики принадлежит отрезку cb C^+ -характеристики. Число точек на каждом новом отрезке C^- -характеристики на единицу меньше, чем на предыдущем. Единственной точкой последнего отрезка будет точка b . Получившийся характеристический треугольник abc – область определённости отрезков траектории поршня (ab) и C^- -характеристики (ac).

Пусть теперь начальная скорость поршня $U_a > u_a$ – скорости газа в точке a отрезка ac C^- -характеристики. В таком случае точка a – фокус в общем случае неавтономного пучка волн разрежения. Для любых ν и неравномерностях параметров на ac течение в точке a описывается формулами центрированной простой волны с постоянными w и ν . Справедливость данного утверждения – следствие любого из уравнений (5^+), связывающих u , p и x на C^+ -характеристике, пересекающей пучок бесконечно близко к точке a . При этом отношение суммарного изменения x к x_a стремится к нулю, и увеличение скорости от u_a до U_a может компен-

сировать только конечное изменение давления. По этой причине при описании течения в точке a в уравнении (5^+), как в течении с плоскими волнами, остаются лишь два первых слагаемых. Расчёт совпадающих по $x \equiv x_a$ и $t \equiv t_a$ точек пучка, лежащих на разных C^- -характеристиках, можно вести и по формулам ЦПВ Гл. 2.3, и по первому уравнению (8) без слагаемого $s(x_3 - x_1)$. При расчёте новых C^- -характеристик пучка волн разрежения (рис. 2.17, в) число точек на них не изменяется.

Объединение трёх рассмотренных задач приводит к задаче (рис. 2.17, з) о выдвигании поршня, причём в отличие от Гл. 2.3 без ограничений на симметрию задачи и однородность начального газа. Однако и теперь из описанных выше схем решения при непрерывности параметров следует разрывность их первых производных на отрезках ad и ae C^- -характеристик, ограничивающих пучок волн разрежения с фокусом в точке a . Действительно, при расчёте МХ течения в пучке волн разрежения (рис. 2.17, в) используются полученные в задаче Коши (рис. 2.17, а) параметры на начальной C^- -характеристике пучка ad без привлечения какой-либо информации о выводящих производных. Аналогично расчёт МХ на рис. 2.17, б не использует информации о выводящих производных на замыкающей характеристике пучка ae .

Третья задача, решаемая МХ – *задача Гурса*, в которой строится течение между отрезками ab и ac C^+ - и C^- -характеристик. Отрезки ab и ac расположены либо по разные стороны от проходящей через точку a ТЧ (рис. 2.17, д), либо по одну сторону от неё (рис. 2.17, е). На рис. 2.17, д переменная m монотонно растёт при движении от точки c к a и далее к b . На рис. 2.17, е – через отрезки ac и ab проходят одни и те же ТЧ. Поэтому на этих отрезках функции $W(m)$, $\Gamma(m)$ и $S(m)$ должны совпадать. В обоих случаях определение параметров в каждой новой точке 3 независимо от расположения точек 1 и 2 ведётся так же и по тем же формулам, что и в задаче Коши. В результате в случае рис. 2.17, д течение рассчитывается в характеристическом четырёхугольнике $abdc$ – области определённости выходящих их точки a отрезков характеристик ab и ac .

В случае рис. 2.17, е функции $W(m)$, $\Gamma(m)$ и $S(m)$ обычно определены лишь при $m_a \leq m \leq m_b$. Для них течение можно постро-

ить только в треугольнике abc , одна сторона которого bc – отрезок ТЧ (дан штрихами). Можно показать, что форма отрезка bc и течение в abc не зависят от того, как $W(m)$, $\Gamma(m)$ и $S(m)$ заданы при $m > m_b$. При построении течения слева от bc Эти функции за $m = m_b$ удобно продолжить гладко, а счёт вести до таких новых точек, в которых впервые $m_3 > m_b$. Затем координаты x и t точки ТЧ и параметры в ней находятся квадратичной интерполяцией на $m = m_b$ по точкам характеристики одного семейства.

Если одна из точек 1 или 3 лежит на оси или в центре симметрии (далее – ЦС), где одновременно равны нулю x , u и v , а, следовательно, и F^+ или F^- , то в УС ($5^\pm$) появляется неопределённость F^+/x или F^-/x . Чтобы избавиться от них, умножив УС на x , получим

$$xdu \pm x \frac{dp}{\Gamma a} + (n-1)F^\pm dx = 0, \quad F^\pm = \frac{au \pm (3-n)v^2}{a \pm u}, \quad (11^\pm)$$

где, как и ранее, знак «+» («-») отвечает C^+ (C^-)-характеристике.

Пусть на оси (рис. 2.17, *ж*) находится точка 1. Тогда проинтегрировав уравнение (11^+) вдоль отрезка 1–3 и учтя, что $x_1 = u_1 = F_1^+ = 0$, придём к равенству

$$x_3 u_3 + \frac{x_3}{\Gamma_3 a_3} (p_3 - p_1) + (n-1)F_3^+ x_3 = 0,$$

а после сокращения на x_3

$$(\Gamma a)_3 u_3 + p_3 - p_1 + (n-1)(\Gamma a F^+)_3 = 0.$$

Для точки 3 в случае, когда точка 1 находится в ЦС, это уравнение и второе уравнение (8) определяют u_3 и p_3 . В нём в первой итерации $(\Gamma a)_3$ заменяется на $(\Gamma a)_1$, а F_3^+ – на $F_2^+ / 2$.

Для точки 3 в ЦС (рис. 2.17, *з*), где $x_3 = u_3 = F_3^+ = 0$, аналогичным способом придём к уравнению

$$p_3 = p_2 - (\Gamma a u)_2 - (v-1)(\Gamma a F^-)_2,$$

которое без итераций определяет давление p_3 . Поскольку ось t совпадает с ТЧ, то энтропия s_3 в ЦС известна, а по p_3 и s_3 из уравнений состояния находятся ρ_3 и a_3 . Наконец, уравнение

$$t_3 = t_2 + 2x_2 / (a_2 - u_2 + a_3)$$

– результат интегрирования уравнения (2[−]) также без итераций определит t_3 .

При отсутствии УВ рассмотренные задачи и их модификации могут решаться не только в прямом (в сторону роста t), но и в обратном направлении (в сторону уменьшения t).

Глава 2.9. Изэнтропическое расширение и сжатие газа из покоя в покой

Сокращения: УВ – ударная волна, ПВР – пучок волн разрежения, ТП – траектория поршня.

Можно так выбрать траекторию поршня (ТП), чтобы за малое время изэнтропически расширить или сжать газ из покоя в покой (согласно [19] J.P. Morreeum, J. Saillard сделали это в 1978 г., в 1993 г. А.Н. Крайко [20] пришёл к нему, решая вариационную задачу о сжатии, оптимальном по энергозатратам). Начнём из неподвижного однородного газа выдвигать поршень сразу с конечной скоростью (рис. 2.18, *a*). В плоском случае (при $v = 1$) в начале координат поместим неподвижную стенку. Тогда скорость $u(0, t) = 0$ при всех v (при $v = 2$ и 3 – в силу симметрии течения). В возникшем при этом неавтомодельном пучке волн разрежения – ПВР нет причин для образования УВ. Поэтому течение будет оставаться изэнтропическим, а из условия сохранения нулевой (при $v = 2$) закрутки – и незакрученным. В ПВР на оси t плотность и давление монотонно падают. В некоторой точке f пересечения оси t с C^- -характеристикой af получится любое меньшее начального давление $p_f < p_0$ и плотность $\rho_f = \rho(p_f, s_0) < \rho_0$. Из точки f проведём C^+ -характеристику fb , на которой, как и в точке f , положим $u \equiv 0$. Согласно условию совместности (2.8.5⁺):

$$du + \frac{dp}{\rho a} + \frac{v-1}{x} F_x^+ dx = 0,$$

причём $F_x^+(u = 0, v = 0, \dots) = 0$. Следовательно, одновременно с $u \equiv 0$ на fb постоянно давление: $p \equiv p_f$, а при отсутствии между характеристиками af и fb УВ – все термодинамические парамет-

ры. Наконец, из условия сохранения массы газа и уравнения прямолинейной C^+ -характеристики: $x_b = x_0(\rho_0/\rho_f)^{1/\nu}$, $t_b = t_f + x_b/a_f$.

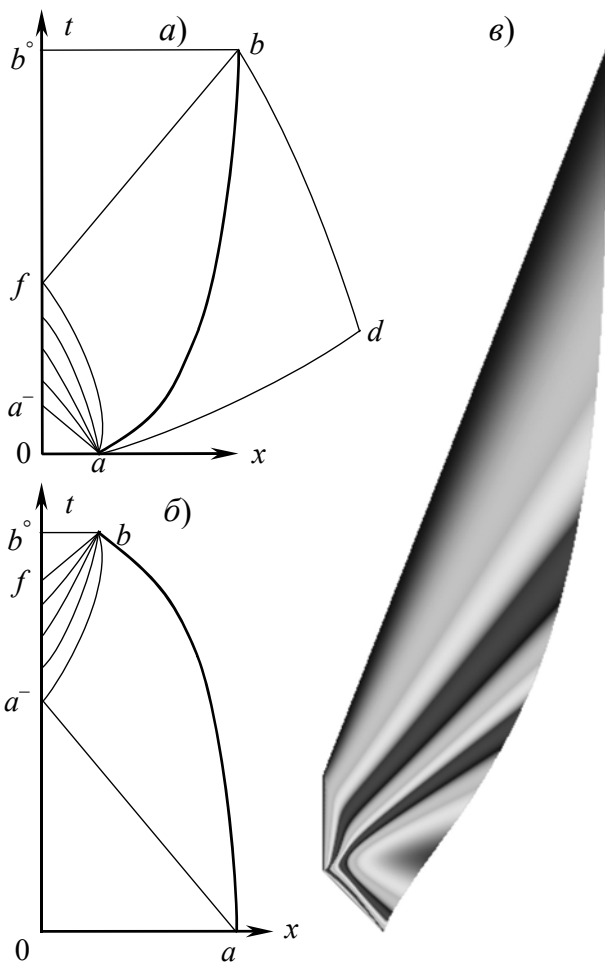


Рис. 2.18

Решение задачи Гурса с известными характеристиками af и fb позволяет рассчитать изэнтропическое течение в характеристическом четырёхугольнике $adbfb$ и построить в нём квадратичной ин-

терполяцией по m траекторию частиц $m = 1$, проходящую через точки a и b . Она и будет искомой ТП, которая осуществляет расширение из покоя в покой. На самом деле, весь четырёхугольник $adb\bar{f}$ считать не нужно. Достаточно при решении задачи Гурса вдоль C^+ - или C^- -характеристик лишь на одну точку *залезть* в область $m > 1$. При отсутствии именно в этой части характеристического четырёхугольника $adb\bar{f}$ пересечений одноимённых характеристик (опыт расчётов подтверждает, что это так) задачу следует считать решённой. Над характеристикой $f\bar{b}$, как и под характеристикой $a\bar{a}^-$, газ покоится, и все его параметры однородны.

Рассматриваемые одномерные безударные течения описываются уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho x^{v-1}}{\partial t} + \frac{\partial \rho x^{v-1} u}{\partial x} = 0,$$

которые инвариантны относительно одновременной замены u на $-u$ и t на $-t$ и сдвига по времени. Поэтому после зеркального отражения относительно оси x и сдвига по t из течения расширения получим течение сжатия из покоя в покой (рис. 2.18, $\bar{b}$).

Взятое из работы [21] распределение скорости («в периодической гамме») для сферически симметричного расширения из покоя в покой совершенного газа с $\gamma = 1.4$ при падении плотности в 100 раз приведено на рис. 2.18, $\bar{b}$.

Как видно из рис. 2.18, $\bar{b}$ и $\bar{b}$, основное время сжатия – время пробега звуковой волны по несжатому газу (в нём и расстояние больше и скорость звука меньше, чем в сжатом газе над $f\bar{b}$). Аналогично – при расширении. Для технических устройств размеры – величины порядка метра или его долей. Следовательно, соответствующие времена – сотые и тысячные доли секунды. Таким образом, решённые задачи избавляют при анализе термодинамических циклов тепловых машин от предположений о *бесконечно медленных сжатиях и расширениях*.

Глава 2.10. Задача о сильном точечном взрыве

Сокращение: УВ – ударная волна.

Задача о *сильном точечном взрыве* решена Л.И. Седовым в 1946 г. вскоре после взрывов первых атомных бомб. Эта задача – поучительный пример того, как оправданные упрощения физического характера привели к решению, несоизмеримо более сложному в исходной (*полной*) постановке.

Главная особенность взрывов ядерных устройств обусловлена величиной выделившейся энергии E . Она столь велика, что ударная волна (УВ), возникшая при взрыве, остаётся сильной на расстояниях, много больших размера устройства, а его масса пренебрежима по сравнению с массой газа, вовлекаемого при этом в движение. В результате из параметров среды, в которой произошел взрыв, в соотношения на УВ входит только плотность нежатого газа ρ_0 . При взрыве в совершенном газе определяющие параметры рассматриваемой задачи – E , ρ_0 , γ и константа $\nu = 1, 2$ и 3 соответственно для плоского, цилиндрического и сферического взрывов. При $\nu = 1$ и 2 в качестве E рассматриваются *удельные* величины, приходящиеся на единицу площади или длины.

Для дальнейшего важны размерности определяющих параметров. Пусть квадратные скобки означают размерность заключенного в них параметра, а M , L и T – размерности массы, длины и времени. Размерность E зависит от симметрии задачи: при $\nu = 3$ это – вся энергия, а при $\nu = 2$ и 1 – упомянутые выше удельные величины, т.е. $[E] = L^2 M / T^2$ при $\nu = 3$, $[E] = L M / T^2$ при $\nu = 2$ и $[E] = M / T^2$ при $\nu = 1$. Итак,

$$[E] = M L^{\nu-1} / T^2, \quad [\rho_0] = M / L^3.$$

Исключив массу из E и ρ_0 , получим константу c , размерность которой содержит размерности только длины (для удобства в первой степени) и времени:

$$c = \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{1/(2+\nu)}, \quad [c] = \frac{L}{T^n}, \quad n = \frac{2}{2+\nu} = \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \quad \nu = 1, 2, 3.$$

Из константы c и независимых переменных x и t можно составить единственную безразмерную *автомодельную переменную*

$$\xi = \frac{x}{c t^n}. \quad (1)$$

Искомые параметры (ρ , u , a , p и т.д.) как функции независимых переменных (t и x) и определяющих параметров не могут зависеть от произвола в выборе единиц измерения. Действительно, *год*, *сутки*, *час*, *минута* и *секунда*, связанные с движением Земли вокруг Солнца и с её вращением, не имеют никакого отношения к рассматриваемой задаче. По указанной причине в любой задаче искомые параметры и независимые переменные должны измеряться своими, связанными с каждой задачей масштабами. Поэтому (R , ... – функции ξ и констант γ , v , n)

$$\begin{aligned} \rho(x, t, E, \rho_0, \gamma, v) &= \rho_0 R(\xi), \quad u(x, t, \dots) = n \frac{x}{t} U(\xi), \\ a(x, t, \dots) &= n \frac{x}{t} A(\xi), \quad p(x, t, \dots) = \rho_0 \left(n \frac{x}{t} \right)^2 P(\xi), \quad P = \frac{1}{\gamma} R A^2, \end{aligned} \quad (2)$$

Введение множителя n в формулы для u , a и p упрощает уравнения и условия, определяющие функции U , A , ..., а v наряду с **показателем автомодельности** n в числе аргументов оставлено для задач, в которых n не выражается явно через v .

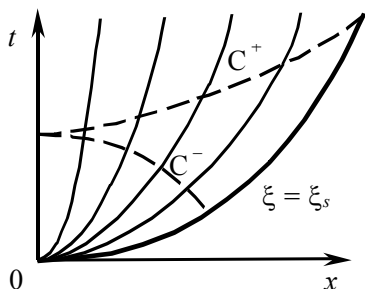


Рис. 2.19

На рис. 2.19 для $n < 1$ линии постоянства переменной ξ , а следовательно – и функций U , A , ... изображены в плоскости xt кривыми, выходящими из начала координат. В согласии с определением ξ оси координат – тоже такие линии: оси x отвечает $\xi = \infty$, а оси t – $\xi = 0$. При $0 \leq \xi \leq \xi_s$ располагается «зона взрыва» от его

эпицентра ($\xi = 0$) до УВ ($\xi = \xi_s < \infty$), а при $\xi_s \leq \xi \leq \infty$ – невозмущённый покоящийся газ (*однородная, холодная атмосфера*).

Траектория УВ совпадает с кривой $\xi = \xi_s$. Иначе УВ пересеклась бы линиями постоянства автомодельной переменной. При пересечении на линии $\xi = \text{const}$ с одной стороны от УВ поток невозмущён, а с другой возмущён, что противоречит формулам (2). При уравнении траектории УВ: $x_s = \xi_s c t^n$, её скорость $D = dx_s/dt = n \xi_s c t^{n-1} = n x_s/t$. Но за сильной УВ согласно формулам (1.4.30)

$$\frac{\rho_s}{\rho_0} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad u_s = \frac{2D}{\gamma+1}, \quad p_s = \frac{2\rho_0 D^2}{\gamma+1}, \quad a_s^2 = \frac{\gamma p_s}{\rho_s} = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} D^2,$$

и при $D = n x_s/t$ из сравнения с формулами (2) найдём ($B = A^2$)

$$R_s = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad U_s = \frac{2}{\gamma+1}, \quad P_s = \frac{2}{\gamma+1}, \quad B_s = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}, \quad \Phi_s = \Phi(\xi_s, \dots). \quad (3)$$

Независимость полученных условий от множителя n – следствие его включения в формулы (2).

Обыкновенные дифференциальные уравнения для определения $U, A, \dots$ получаются подстановкой представлений (2) в уравнения (2.1.1), (2.1.2) и (2.1.5). Эти уравнения с учётом сохранения энтропии вдоль траекторий частиц и выражения для удельной энтальпии: $h = a^2/(\gamma-1)$ перепишем в форме

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{x} u \right) a^2 = 0, \quad \frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{da^2}{dt} - \frac{\gamma-1}{\rho} \frac{dp}{dt} = 0.$$

При подстановке в них представлений (2) учтем, что ($U' = dU/d\xi$)

$$\frac{\partial U(\xi, \gamma, \nu, n)}{\partial t} = U' \frac{\partial \xi}{\partial t} = -n \frac{\xi}{t} U', \quad \frac{\partial U(\xi, \gamma, \nu, n)}{\partial x} = U' \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\xi}{x} U'$$

и аналогично для $A, P = A^2 R/\gamma$ и R . Проведя необходимые выкладки, получим систему трёх уравнений:

$$\begin{aligned} n(U-1)\xi B' + n(\gamma-1)B\xi U' + \nu n(\gamma-1)BU + 2(nU-1)B &= 0, \\ n\xi B' + n\gamma(U-1)\xi U' + nB\xi(\ln R)' + \gamma(nU-1)U + 2nB &= 0, \\ \xi U' + (U-1)\xi(\ln R)' + \nu U &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

или после разрешения относительно производных

$$f_0 \xi \frac{dU}{d\xi} = \frac{f_1}{n\gamma}, \quad f_0 \xi \frac{dB}{d\xi} = \frac{Bf_2}{n\gamma(U-1)}, \quad f_0 \xi \frac{d \ln R}{d\xi} = \frac{f_3}{n\gamma(1-U)}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
f_0 &= f_0(B, U) = (U-1)^2 - B, \quad f_1 = f_1(B, U, \gamma, v, n) = \\
&= (nv\gamma U + 2n - 2)B + \gamma U(U-1)(1-nU), \quad f_2 = f_2(B, U, \dots) = \\
&= \gamma[2(1-nU) - nv(\gamma-1)U]f_0(B, U) - (\gamma-1)f_1(B, U, \dots), \\
f_3 &= f_3(B, U, \dots) = n\gamma v U f_0(B, U) + f_1(B, U, \dots).
\end{aligned}$$

В функции f_k не входит R . Поэтому два первых уравнения системы (5) интегрируются независимо от третьего. Наконец, уравнения (5) не изменяются при замене ξ на $k\xi$ с произвольной константой k . Благодаря этому можно считать, что на УВ $\xi_s = 1$.

Согласно первым двум уравнениям системы (5)

$$\frac{dB}{dU} = \frac{Bf_2(B, U, \gamma, v, n)}{(U-1)f_1(B, U, \gamma, v, n)}. \quad (6)$$

В рассматриваемой модели энергия E при $t = 0$ мгновенно выделяется в точке (в начале координат). В результате в тот же момент T , p , s и энтропийная функция p/ρ^γ становятся бесконечными. Энтропия s и p/ρ^γ сохраняются в частице, а следовательно и в центре взрыва (при $x = 0$ или, что то же – на оси t), где в силу симметрии скорость газа $u = 0$. Поэтому в приближении нетеплопроводного газа p/ρ^γ бесконечно и при $t > 0$. Напротив из-за разлёта газа давление мгновенно становится конечным. Следовательно, разлёт должен обеспечивать падение до нуля плотности. В результате при $x = 0$ температура $T = p/\rho$ и скорость звука $a = (\gamma p/\rho)^{1/2}$ бесконечны и при $t > 0$.

На оси t , где $\xi = 0$, $u = 0$, а скорость звука $a = \infty$. Так как $x/t = \xi c/t^{(1-n)}$, то этим условиям удовлетворяют $U(0) \equiv U_0 < \infty$ и $B(0) = \infty$. В переменных U , $\delta = 1/B$ уравнение (6) принимает вид

$$\frac{d\delta}{dU} = \frac{\delta}{U-1} \left\{ \frac{\gamma[1-\delta(U-1)^2][2(1-nU) + v n(\gamma-1)U]}{v n \gamma U - 2(1-n) - \gamma U(U-1)(nU-1)\delta} + \gamma - 1 \right\}. \quad (7)$$

При любых $0 < n < 1$ отвечающие $\delta = 0$ особые точки этого уравнения – узел: $U = 1$, $\delta = 0$ и седло:

$$U_0 = 2(1-n)/(v\gamma n), \quad \delta_0 \equiv 1/B_0 = 0, \quad (8)$$

а одна из их сепаратрисс – ось U ($\delta = 0$). Другая сепаратрисса седла при $n = 2/(v+2)$, когда $U_0 = 1/\gamma$, приходит в точку (3) плоскости UB (или $U\delta$) и даёт решение задачи. Последнее установил Л.И. Седов (1946), который первым решил эту задачу.

Ключевой элемент решения Л.И. Седова – «интеграл энергии», наиболее просто получаемый из записанного для рассматриваемых одномерных течений уравнения энергии (1.7.3):

$$\frac{\partial \{x^{v-1} \rho(2e + u^2)\}}{\partial t} + \frac{\partial \{x^{v-1} \rho u(2h + u^2)\}}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Для совершенного газа после подстановки представлений (2) оно сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2R[2B + \gamma(\gamma - 1)U^2] + n\xi\{R[2B + \gamma(\gamma - 1)U^2]\}' - \\ - n\gamma(v + 2)RU[2B + (\gamma - 1)U^2] - n\gamma\xi\{RU[2B + (\gamma - 1)U^2]\}' = 0,$$

которое при $n = 2/(v + 2)$ принимает вид

$$\{\xi^{v+2}R[2B + \gamma(\gamma - 1)U^2] - \gamma\xi^{v+2}RU[2B + (\gamma - 1)U^2]\}' = 0$$

и приводит к интегралу (C – константа интегрирования)

$$\xi^{v+2}R\{2B + \gamma(\gamma - 1)U^2 - \gamma U[2B + (\gamma - 1)U^2]\} = C.$$

При определённых формулами (3) значениях U_s и B_s за УВ (при конечном ξ_s) его левая часть равна нулю, обращая в нуль константу интегрирования $C = 0$. Следовательно, выражение в фигурной скобке равно нулю при всех $0 \leq \xi \leq \xi_s$. Отсюда

$$B = \frac{\gamma(\gamma - 1)U^2(1 - U)}{2(\gamma U - 1)}. \quad (10)$$

Как и утверждалось выше, определяемая этим решением интегральная кривая, начинаясь в точке (3), приходит в седло с координатами: $U = 1/\gamma$, $\delta = 1/B = 0$. Уравнением энергии в форме (9) можно заменить любое из уравнений, использованных при получении системы (5) и её следствия уравнения (6). Поэтому решение (10) заведомо удовлетворяет этому уравнению, в чём можно убедиться и непосредственной подстановкой.

Позднее задачу о сильном взрыве численным интегрированием системы (5) от $\xi_s = 1$ с начальными условиями (3) до $\xi = 0$ решил Дж. Тейлор (1950). При интегрировании этой системы ни при каком ξ функция $f_0 = (U - 1)^2 - B$ с $B = A^2$ не должна обратиться в ноль. В рассматриваемой задаче этого не происходит. Действительно, пусть $(U - 1)^2 - A^2 = 0$ при некотором $\xi = \xi_0$, т.е.

на линии $x = \xi_0 ct$. Как следствие на ней выполняется одно из равенств: $1 = U \pm A$. Но в плоскости xt вдоль той же линии

$$\frac{dx}{dt} = n \xi_0 c t^{n-1} = n \frac{x}{t}.$$

С учётом предыдущих равенств и определений (2) это означает, что $dx/dt = u \pm a$, и данная линия – C^+ - или C^- -характеристика. Как отмечалось выше, на оси t при нулевой скорости скорость звука бесконечна. Значит, характеристики обоих семейств нормальны к этой оси, что отражено на рис. 2.19. На нём C^+ - и C^- -характеристики – штриховые линии, отличные от выходящих из начала координат кривых $\xi = \text{const}$.

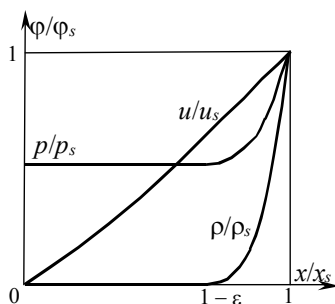


Рис. 2.20

Типичные распределения скорости, плотности и давления, получающиеся в результате решения, проиведёны на рис. 2.20. Одна из его особенностей – сосредоточение практически всего газа в тонком слое, примыкающем к УВ. Его относительная толщина имеет порядок $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ – *малого параметра*, широко используемого в газовой динамике. Вне этого слоя величина ρ близка к нулю, из уравнения движения $\partial p / \partial x = - \rho du / dt \approx 0$, и давление практически постоянно.

Отметим два следствия упрощений, лежащих в основе полученного решения. Бесконечные значения температуры, скорости звука, давления и энтропии при $t = 0$ – следствие пренебрежения размером и массой взрывающегося устройства. Даже при этом бесконечные значения энтропии, температуры и скорости звука

при $t > 0$ возможны только для нетеплопроводного газа. Вне малой окрестности начала координат (*эпицентра взрыва*) построенное решение справедливо лишь пока УВ остаётся сильной, т.е. её число Маха $M_D = D/a_0$ таково, что $M_D^2 \gg 2/(\gamma - 1)$.

Скорость УВ $D = dx_s/dt = n\xi_s c t^{(n-1)}$ – убывающая функция t , ибо $n < 1$. Входящее в выражения D значение ξ_s отлично от использованной выше величины $\xi_s = 1$. Для его вычисления воспользуемся тем, что в приближении сильной УВ энтальпия покоящегося газа $h_0 = 0$, и при $t > 0$ энергия газа, ограниченного УВ, равна E . С учётом интеграла (10) это даст ($\xi^\circ = \xi/\xi_s$)

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{x_s(t)} x^{\nu-1} \rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) dx = \int_0^{x_s(t)} x^{\nu-1} \rho \left[\frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)} + \frac{u^2}{2} \right] dx = \\ &= \rho_0 \int_0^{x_s(t)} x^{\nu-1} R(\xi) \left(n \frac{x}{t} \right)^2 \left[\frac{B(\xi)}{\gamma(\gamma-1)} + \frac{U^2(\xi)}{2} \right] dx = \\ &= n^2 \frac{\rho_0 c^{2+\nu}}{t^{2-n(2+\nu)}} \int_0^{\xi_s} \xi^{1+\nu} R(\xi) \left[\frac{B(\xi)}{\gamma(\gamma-1)} + \frac{U^2(\xi)}{2} \right] d\xi = \\ &= \frac{2(\gamma-1)E\xi_s^{2+\nu}}{(2+\nu)^2} \int_0^1 \frac{R(\xi^\circ)U^3(\xi^\circ)}{\gamma U(\xi^\circ) - 1} \xi^{\circ 1+\nu} d\xi^\circ. \end{aligned}$$

В выполненных преобразованиях использованы формулы для c и n , выражение $x = \xi c t^n$, и интеграл (9). В последнем интеграле $\xi^\circ = \xi/\xi_s$. Следовательно, значение ξ_s определится формулой

$$\xi_s^{-(2+\nu)} = [\xi_s(\gamma, \nu)]^{-(2+\nu)} = \frac{2(\gamma-1)}{(2+\nu)^2} \int_0^1 \frac{R(\xi^\circ)U^3(\xi^\circ)}{\gamma U(\xi^\circ) - 1} \xi^{\circ 1+\nu} d\xi^\circ,$$

а с учётом формул для c и n зависимость от времени числа Маха УВ примет вид

$$M_D = \frac{D}{a_0} = \frac{2\xi_s(\gamma, \nu)}{(2+\nu)a_0 t^{\nu/(2+\nu)}} \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{1/(2+\nu)}.$$

Глава 2.11. Задача об отражении ударной волны от оси

или центра симметрии (задача Гудерлея)

Сокращения: ЗГ – задача Гудерля, УВ – ударная волна, ЦС – центр симметрии.

Задача об отражении ударной волны (УВ) от оси или центра симметрии (далее – *центра симметрии* – ЦС) решена К. Гудерлеем (K.G. Guderley) в 1942 г. В середине XX века она оказалась одним из ключевых теоретических элементов при создании ядерного оружия, а в наше время – управляемого инерционного термоядерного синтеза.

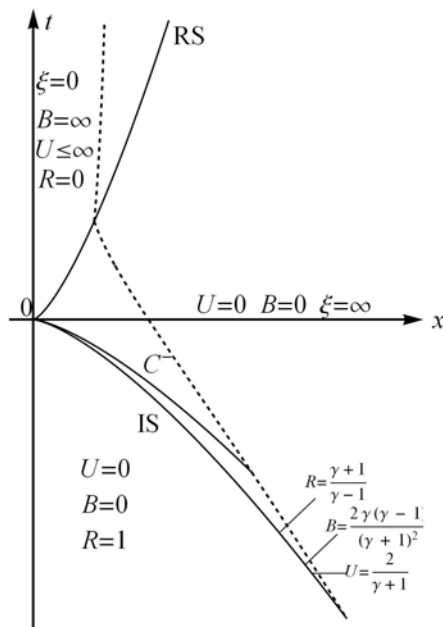


Рис. 2.21

В основе рассматриваемой задачи (*задачи Гудергея* – 3Г) лежит физически естественное предположение о неограниченном росте интенсивности УВ, движущейся к центру (при $\nu = 3$) или к оси ($\nu = 2$) симметрии. Одно из обоснований этого предположе-

ния – неограниченный рост при $v = 2$ и 3 интенсивностей разрывов в акустическом приближении. Если УВ сильная, то, как и в задаче о сильном взрыве, из параметров газа, покоящегося перед УВ, движущейся к ЦС, важна только его плотность ρ_0 .

Возьмем за начало отсчёта времени (рис. 2.21) момент прихода УВ в ЦС, введём $\tau = |t|$, $u = v \operatorname{sign} t$ и переменную ξ :

$$\xi = \frac{x}{c\tau^n} \quad (1)$$

с пока неопределённым **показателем автомодельности** n и константой c . В результате скорость u потока, движущегося за УВ IS к ЦС, как и скорость УВ $D = dx_s/d\tau$, станет положительной. Примем, что для u , a , ρ и p вблизи ЦС справедливы разложения (как и ранее, $U, \dots$ – функции ξ и постоянных γ, v, n)

$$u = n \frac{x}{\tau} \left[U(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} x^{\alpha_k} U_k(\xi) \right], \quad a = n \frac{x}{\tau} \left[A(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} x^{\beta_k} A_k(\xi) \right],$$

$$\rho = \rho_0 \left[R(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} x^{\delta_k} R_k(\xi) \right], \quad p = \rho_0 \left(n \frac{x}{\tau} \right)^2 \left[P(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} x^{\gamma_k} P_k(\xi) \right]$$

с положительными, растущими с увеличением номера k показателями степени $\alpha_k, \beta_k, \delta_k$ и γ_k . Тогда в главных порядках аналогично задаче о сильном взрыве будем иметь

$$u = n \frac{x}{\tau} U(\xi), \quad a = n \frac{x}{\tau} A(\xi), \quad \rho = \rho_0 R(\xi), \quad p = \rho_0 \left(n \frac{x}{\tau} \right)^2 P(\xi), \quad (2)$$

причём входящие сюда функции $U, \dots$ удовлетворяют условиям (2.10.3) на приходящей УВ IS и дифференциальным уравнениям (2.10.4) – (2.10.6) между IS и отраженной УВ RS и между RS и ЦС – осью времени t . На рис. 2.21 даны траектории УВ IS и RS и особая C^- -характеристика C_0^- , приходящая в ЦС одновременно с УВ IS, а штрихами – одна из траекторий частиц. Как и в Гл. 2.10, оси координат – линии постоянства ξ . На оси абсцисс $\xi = \infty$, а на оси ординат $\xi = 0$.

Как и в задаче о сильном взрыве, в ЗГ $n < 1$. Действительно, по тем же соображениям, что и в Гл. 2.10, траектории УВ IS и RS – линии постоянства ξ . Чтобы скорость D_I УВ IS в ЦС была бесконечной, касательная к ней должна быть горизонтальной. В силу

(1) это возможно лишь при $n < 1$, причём скорость D_R УВ RS также бесконечна. Несмотря на это, она, как показано ниже, не будет сильной даже в ЦС, ибо в ЦС скорость звука a_{R-} перед УВ RS также бесконечна, и $M_{DR} = D_R/a_{R-}$ не удовлетворяет неравенству (1.4.28).

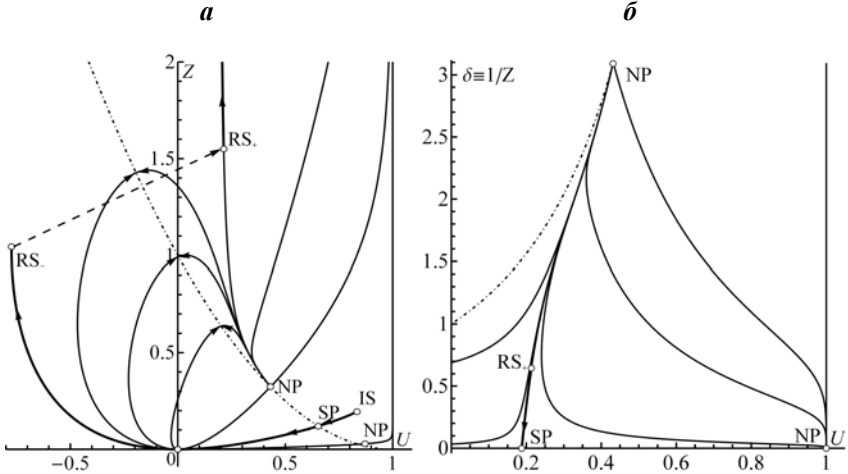


Рис. 2.22

Ключевая роль в определении показателя n принадлежит анализу в плоскости UB интегральных кривых уравнения (2.10.6):

$$\frac{dB}{dU} = \frac{Bf_2(B, U, \gamma, \nu, n)}{(U-1)f_1(B, U, \gamma, \nu, n)}. \quad (3)$$

Согласно условиям (2.10.3), интегральная кривая этого уравнения, дающая решение 3Γ , начинается в точке IS (рис. 2.22, построенный для $\nu = 3$, $\gamma = 7/5$). В точке IS

$$U_{IS} = \frac{2}{\gamma+1}, \quad B_{IS} = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}, \quad B_{IS} - (U_{IS}-1)^2 = (\gamma-1)/(\gamma+1) > 0, \quad (4)$$

т.е. эта точка лежит внутри **звуковой параболы** $B = (U-1)^2$, которая на рис. 2.22, а дана штрих-пунктиром. На ней множитель перед производными в уравнениях (2.10.5) – функция $f_0(B, U) = (U-1)^2 - B = 0$.

Подстановка τ или x из (1) в формулы (2) приводит к выражениям

$$\begin{aligned} u = \frac{n(c\xi)^{1/n}}{x^{1/n-1}} U(\xi) = \frac{nc\xi}{\tau^{1-n}} U(\xi), \quad a = \frac{n(c\xi)^{1/n}}{x^{1/n-1}} A(\xi) = \frac{nc\xi}{\tau^{1-n}} A(\xi), \\ \rho = \rho_0 R(\xi), \quad p = \rho_0 \frac{(nc\xi)^2}{\tau^{2(1-n)}} P(\xi), \quad \frac{p}{\rho^\gamma} = \rho_0^{1-1/\gamma} \frac{(nc\xi)^2}{\tau^{2(1-n)}} \frac{P(\xi)}{R^\gamma(\xi)}. \end{aligned} \quad (2')$$

Согласно им за УВ IS и на любой линии постоянства ξ плотность постоянна, а u , a , p и p/ρ^γ при приближении к ЦС неограниченно растут (для $\xi \neq 0$). При переходе в плоскости $x\tau$ от УВ IS к оси x переменная ξ монотонно растёт от конечной положительной величины ξ_{IS} до $\xi = \infty$. Неограниченно растёт и множитель $\xi^2 \tau^{2(n-1)}$ в формулах (2') для u и a . На оси x , за исключением начала координат, скорость газа u , и скорость звука a ограничены. Это возможно только при $U(\infty) = A(\infty) = 0$. Начало координат $B = U = 0$ плоскости UB – особая точка уравнения (3), которое при малых U и B принимает вид

$$\frac{dB}{dU} = \frac{2n\gamma B}{n\gamma U + 2(1-n)B}.$$

Проинтегрировав это уравнение, найдём, что $B \approx kU^2$ при $U \rightarrow 0$, т.е. начало координат узел, из которого выходит множество интегральных кривых, отличающихся значением постоянной k . При $k > 0$ интегральные кривые касаются оси U .

Итак, в плоскости UB интегральная кривая уравнения (3), начинающаяся в точке IS внутри звуковой параболы, должна при монотонном росте ξ прийти в начало координат $B = U = 0$. В силу первого уравнения (2.10.5), переписанного в форме

$$\frac{d\xi}{dU} = n\gamma\xi \frac{f_0}{f_1}, \quad (5)$$

такой переход через звуковую параболу

$$f_0 = f_0(B, U) = (U - 1)^2 - B = 0 \quad (6)$$

возможен лишь при одновременном выполнении равенства

$$f_1 = f_1(B, U, \gamma, v, n) = (n\gamma U + 2n - 2)B + \gamma U(U - 1)(1 - nU) = 0. \quad (7)$$

Действительно, искомая интегральная кривая должна прийти в начало координат, т.е. непременно пересечь звуковую параболу.

Моноотонному росту ξ от конечного значения ξ_{IS} на УВ IS до $\xi = \infty$ на оси x отвечает непрерывное изменение U , в том числе при пересечении звуковой параболы. Согласно (5) в произвольных ее точках $d\xi/dU = 0$, и ξ сначала растет, а затем убывает (или наоборот), что на рис. 2.22, *a* показано стрелками. Чтобы производная $d\xi/dU$ в точке пересечения интегральной кривой со звуковой параболой не меняла знак, одновременно с числителем в правой части уравнения (5) должен обратиться в ноль ее знаменатель.

В согласии с приведёнными после уравнений (2.10.5) выражениями выполнение равенств (6) и (7) обеспечивает обращение в нули и функций f_2 и f_3 – линейных комбинаций f_0 и f_1 . В результате все три производные U' , B' и R' в точке перехода конечны. Это естественно и без упомянутых выше выражений для f_2 и f_3 , ибо при конечной U' на звуковой параболе согласно первому и третьему уравнениям системы (2.10.4) конечны B' и R' .

В плоскости UB переход через звуковую параболу – возможен лишь в особых точках. При фиксированных γ , v и любом $0 < n < 1$ их координаты находятся из совместного решения уравнений (6) и (7). Для интересных в дальнейшем значениях n на звуковой параболе кроме особой точки $(1,0)$ есть две особые точки. В силу уравнений (6) и (7) их абсциссы равны

$$U_{1,2} = \frac{2 - 2n - \gamma + v n \gamma \pm \sqrt{(2n - 2 + \gamma - v n \gamma)^2 - 8n\gamma(v - 1)(1 - n)}}{2n\gamma(v - 1)}, \quad (8)$$

а ординаты $B_{1,2}$ находятся по $U_{1,2}$ из уравнения (6).

Пригодная для попадания выходящей из SP интегральной кривой и в точку (4), и в начало координат $B = U = 0$ особая точка – седло или узел, а дающая решение интегральная кривая – одна из их сепаратрисс (для узла – «главный ус»). Показатель n подбирается так, чтобы сепаратрисса попала в точку (4). Попадание её в точку $B = U = 0$ обеспечивается тем, что для всех γ , v и n начало координат плоскости UB – узел уравнения (3). Согласно расчётам, при $1 < \gamma < \gamma_*$, где $\gamma_* \approx 1.91$ и 1.87 при $v = 2$ и 3 , интегральная кривая проходит через нижнюю особую точку – седло с абсциссой U_1 . На рис. 2.22, *a* это – точка SP. Если $\gamma > \gamma_*$, то интегральная кривая, вышедшая из точки (4), проходит через верхнюю особую точку – узел с абсциссой U_2 .

Как показано в Гл. 2.10, выполнение при некотором ξ равенства (6) означает, что соответствующая линия постоянства $\xi = C^+$ -или

C^- -характеристика. В 3Г это – особая C^- -характеристика C_0^- , проходящая в ЦС одновременно с УВ IS. На рис. 2.22 интегральная кривая (сепаратрисса седла SP), соединяющая точку IS с началом координат, продолжается во второй квадрант до точки RS₋. В плоскости $x\tau$ (рис. 2.21) такое продолжение отвечает течению от оси x до отраженной УВ RS.

Далее, как и в задаче о сильном взрыве, неограниченность p/ρ^γ при конечном давлении означает, что в ЦС, где $\xi = 0$ и $u = 0$, скорость звука $a = \infty$ для $\tau = t > 0$. Согласно выражениям (2') это возможно, если $|U(0)| = |U_0| < \infty$, а $B(0) = \infty$. Для построения решения между УВ RS и осью t интегрируется уравнение (2.10.7), записанное в переменных U , $\delta = 1/B$. Интегральная кривая, которая приходит в седло (2.10.8), – его сепаратрисса. На рис. 2.22, б в плоскости $U\delta$ представлены интегральные кривые уравнения (2.10.7) в окрестности седла, включая горизонтальную ($\delta = 0$) и вертикальную ($U = 1$) прямые. Штрих-пунктиром нарисована часть звуковой параболы – кривой: $\delta = (1 - U)^{-2}$. Все отличные от прямых интегральные кривые, в том числе, сепаратрисса проходящая в седло сверху (а на рис. 2.22, а – наоборот, снизу) заканчиваются в узле NP на звуковой параболе.

На УВ RS – линии постоянства ξ выполняются законы сохранения (1.3.8), (1.3.9) и (1.3.11). Для совершенного газа в обозначениях данного параграфа они принимают вид:

$$\rho_+(u_+ - D) = \rho_-(u_- - D), \quad p_+ + \rho_+(u_+ - D)^2 = p_- + \rho_-(u_- - D)^2, \\ \frac{2a_+^2}{\gamma - 1} + (u_+ - D)^2 = \frac{2a_-^2}{\gamma - 1} + (u_- - D)^2,$$

где индексы «-» и «+» метят параметры перед и за УВ (справа и слева от RS на рис. 2.21). С учётом формул (1) и (2) и того, что на RS ξ постоянна, эти условия принимают вид

$$R_+(U_+ - 1) = R_-(U_- - 1), \quad P_+ + R_+(U_+ - 1)^2 = P_- + R_-(U_- - 1)^2, \\ 2B_+ + (\gamma - 1)(U_+ - 1)^2 = 2B_- + (\gamma - 1)(U_- - 1)^2,$$

а после разрешения относительно U_+ и B_+ :

$$\begin{aligned}
U_+ - 1 &= \frac{U_- - 1}{\gamma + 1} (2G + \gamma - 1), \quad G = \frac{B_-}{(U_- - 1)^2} \geq 0, \\
B_+ &= \frac{(U_- - 1)^2}{(\gamma + 1)^2} [2(1 - \gamma)G^2 + (6\gamma - \gamma^2 - 1)G + 2\gamma(\gamma - 1)].
\end{aligned}
\tag{9}$$

Для построения полного решения точка RS_- на «левой» ветви интегральной кривой (U_- и B_-) выбирается так, чтобы в согласии с равенствами (9) точка RS_+ с координатами U_+ и B_+ плоскости UB попала на идущую сверху интегральную кривую. На рис. 2.22, *а* этот переход показан стрелкой. Другие интегральные кривые даны тонкими линиями, а ещё два узла – кружками (NP , верхний – на звуковой параболе, он же – на рис. 2.22, *б*). Ось $B = 0$ и прямая $U = 1$ – тоже интегральные кривые уравнений (2.10.3) или (2.10.7).

После определения показателя n и интегральной кривой $B = B(U)$, выходящей из точки IS плоскости UB , строится полное решение задачи. Зависимости $\xi = \xi(U)$ и $R = R(U)$ находятся интегрированием первого и третьего уравнений системы (2.10.5), от точки IS , в которой $\xi_{IS} = 1$, а $R_{IS} = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$.

Если m – массовая лагранжева переменная, то при любом показателе n есть универсальная связь $R = R(\xi, U, B)$ и формула: $x = X(\xi, m)$ для траекторий частиц (далее – *траекторий*) в плоскости xt . Для получения этих функций учтём, что на траектории

$$\frac{dx}{d\tau} \equiv \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \right)_m = u = n \frac{X}{\tau} U, \tag{10}$$

а в силу определения переменной $\xi = x/(c\tau^n)$ имеем

$$dx = n \frac{x}{\tau} d\tau + \frac{x}{\xi} d\xi.$$

Данная связь справедлива, в частности, вдоль любой траектории (при $m = \text{const}$). Отсюда

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \right)_m = n \frac{X}{\tau} + \frac{X}{\xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau} \right)_m, \tag{11}$$

а с учётом равенства (10)

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\right)_m = \left(\frac{\partial \xi}{\partial X}\right)_m \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)_m = \left(\frac{\partial \xi}{\partial X}\right)_m n \frac{X}{\tau} U.$$

Подстановка формулы (10) и этого выражения в (11) даст

$$\frac{U}{U-1} = \left(\frac{\partial \ln X}{\partial \ln \xi}\right)_m.$$

Если из третьего уравнения системы (2.10.4), переписанного в дифференциалах и делённого на $(U-1)$, с помощью последней формулы исключить $U/(U-1)$, то оно примет вид

$$d \ln(U-1) + d \ln R + v \left(\frac{\partial \ln X}{\partial \ln \xi}\right)_m d \ln \xi = 0.$$

Но U и R – функции только ξ , и его можно переписать в форме

$$\left(\frac{\partial [\ln(U-1) + \ln R + v \ln X]}{\partial \ln \xi}\right)_m = 0.$$

Откуда после интегрирования и простых преобразований найдём

$$(U-1)RX^v = K_1(m). \quad (12)$$

До встречи с УВ RS вдоль траекторий сохраняется энтропийная функция, т.е. $\gamma p / \rho^\gamma = \rho^{1-\gamma} a^2 = \chi(m)$. Отсюда, воспользовавшись представлениями (2), получим

$$\rho_0^{1-\gamma} R^{1-\gamma} (nX / \tau)^2 B = \chi(m)$$

или после подстановки $1/\tau = (c\xi)^{1/n}/X^{1/n}$ и деления на константы

$$R^{1-\gamma} \frac{\xi^{2/n}}{X^{2\lambda}} B = K_2(m), \quad \lambda = \frac{1-n}{n}.$$

После исключения X из этого уравнения и равенства (12) придём к искомой связи

$$(U-1)R^{1+(1-\gamma)v/(2\lambda)} \xi^{v/(1-n)} B^{v/(2\lambda)} = K_1(m)[K_2(m)]^{v/(2\lambda)} = K.$$

Стоящая в правой части данного равенства комбинация функций от m – константа, поскольку его левая часть – функция ξ .

На участках траекторий между УВ IS и RS константа K и функция $K_1(m)$ определяются по параметрам на УВ IS. Перед ней газ покоится, $\rho = \rho_0$ и $dm = kX^{v-1}\rho_0 dX$. Отсюда, взяв нормирующий множитель $k = v/\rho_0$, найдём $X = m^{1/v}$. С учётом этого, формул (2.10.3) для параметров за УВ IS и того, что $\xi_s = 1$, найдём:

$$K_1(m) = -m, K_2(m) = \frac{2\gamma}{m^{2\lambda/\nu}} \frac{(\gamma-1)^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}, K = - \left[\frac{2\gamma(\gamma-1)^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}} \right]^{\nu/(2\lambda)}.$$

При известной $X(\xi, m)$ время на траектории согласно определению переменной ξ даётся равенством $|t|^n = X(\xi, m)/(c\xi)$.

Т а б л и ц а 2.1

Показатели n , константы μ и характерные плотности в 3Г

ν	γ	n	μ	ρ_{IS}	ρ_C	$\rho_{t=0}$	ρ_{RS-}	$\rho^m = \rho_{RS+}$
2	3	0.77567	0.52774	2	2.139	2.500	2.991	3.906
3	3	0.63641	0.49957	2	2.209	2.736	3.345	4.095
2	5/3	0.81562	1.302	4	4.749	7.018	11.71	22.98
3	5/3	0.68838	1.2819	4	5.190	9.550	18.88	32.28
2	7/5	0.83532	1.8868	6	7.566	12.90	28.77	77.70
3	7/5	0.71717	1.8851	6	8.492	20.07	64.32	145.1
2	4/3	0.84226	2.1377	7	9.018	16.24	41.17	127.5
3	4/3	0.72769	2.1453	7	10.21	26.55	106.9	273.2
2	6/5	0.86116	2.9760	11	15.00	31.62	122.6	590.1
3	6/5	0.75714	3.0160	11	17.33	59.55	539.6	2112

Рассчитанные Х.Ф. Валиевым (2009, [22]) показатели автономности n , константа μ и характерные значения плотности (ρ_{IS} за УВ IS, ρ_C – на C_0^- , $\rho_{t=0}$ – на оси x , ρ_{RS-} и $\rho^m = \rho_{RS+}$ – перед и за УВ RS) собраны в табл. 2.1. По отношению плотностей ρ_{RS+} к ρ_{RS-} отражённая УВ RS не сильная. На рис. 2.23 в плоскости xt для трёх вариантов даны траектории УВ и поля плотностей.

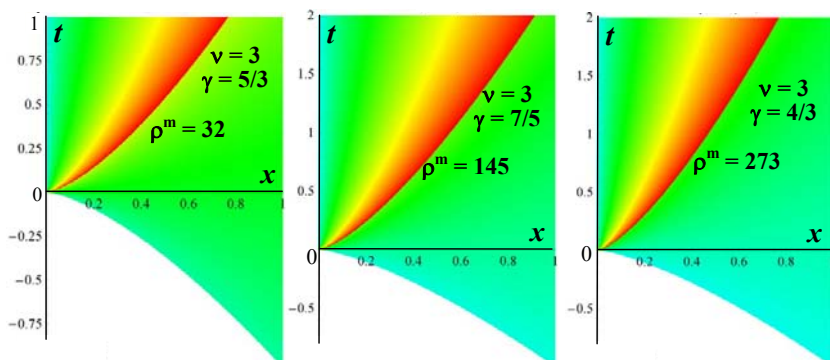


Рис. 2.23

Глава 2.12. Быстрое сильное сжатие идеального газа

Сокращения: ЗГ – задача Гудерлея, УВ – ударная волна, ЦВ и ЦПВ – центрированная волна и центрированная простая волна, ЦВС – центрированная волна сжатия, ЦС – центр симметрии.

В Гл. 2.9 описано изэнтропическое сжатие идеального газа из покоя в покой. Показано, что при этом возможны любые степени сжатия $s = \rho_f/\rho_i$, где ρ_i и ρ_f – начальное и конечное значения плотности, за время, близкое к t_0 – времени пробега звуковой волны по несжатому газу. Однако при изэнтропическом сжатии конечная температура невелика. Так, для совершенного газа $T_f/T_i = (\rho_f/\rho_i)^{\gamma-1}$, и если $\rho_f/\rho_0 = 10^4$, то $T_f/T_i \approx 40$ и 460 соответственно для $\gamma = 7/5$ и $5/3$. При $T_i = 300$ К это даёт $T_f = (0.12 \div 1.4) \cdot 10^5$ К, а для реализации управляемого **инерционного термоядерного синтеза** при несколько меньшей степени сжатия нужны $T_f = (0.3 \div 1) \cdot 10^8$ К. Следовательно, для достижения много более высоких конечных температур к тому же за времена $t_f \ll t_0$ сжатие должно начинаться в сильной УВ.

В рассмотренном в Гл. 2.11 сжатии, начинающемся в сильной идущей к оси или к центру симметрии (далее – к ЦС) УВ, $t_f \ll t_0$, и в принципе возможны сколь угодно высокие T_f , однако не достигаются необходимые для инерционного термоядерного синтеза

степени сжатия $c = (0.3 \div 4) \cdot 10^3$. Далее сжатие называется **быстрым и сильным** (А.Н. Крайко, 2005 [23, 24]), если за время $t_f \ll t_0$ оно позволяет получить требуемые для реализации инерционного термоядерного синтеза T_f/T_i и ρ_f/ρ_i .

Согласно определению, быстрое сильное сжатие должно начинаться сильной УВ, движущейся к ЦС. При её приближении к ЦС такое течение описывается автомодельным решением **задачи Гудерлея** (ЗГ, Гл. 2.11) с неограниченным в ЦС ростом температуры T и конечным увеличением плотности ρ и за приходящей (IS), и за отраженной (RS) УВ. Для обеспечения сколь угодно большого роста ρ к особой C^- -характеристике ЗГ C_0^- , догоняющей УВ в момент её прихода в ЦС, нужно пристроить центрированную волну сжатия (ЦВС) с фокусом в ЦС. Вне малой окрестности фокуса ЦВС и реализующую её траекторию поршня можно рассчитать методом характеристик. Однако, как и для любой ЦВ, такой расчёт ведётся от ЦС. Поскольку в ЦС часть параметров (заведомо, T , давление p и скорость u) неограниченна, то расчёту методом характеристик необходимо предпослать построение аналитического решения, справедливого в окрестности ЦС. В плоском случае это решение элементарно, а отвечающая ему xt -диаграмма приведёна на рис. 2.24, а. Увеличивая начальную скорость поршня, можно получить сколь угодно малое время сжатия при близком к $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ отношении плотностей на УВ, а сколь угодно большую ρ обеспечит ЦВС $i_1 0 i_2$, догоняющая УВ в момент её отражения от плоскости симметрии $x = 0$.

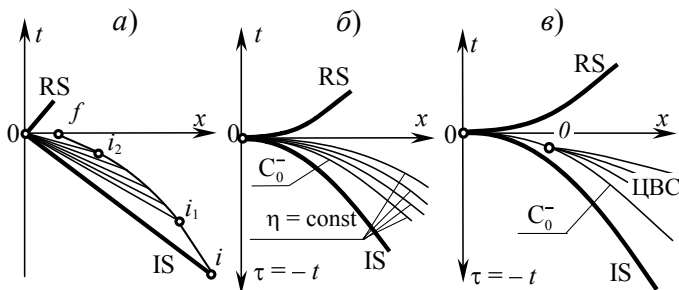


Рис. 2.24

Ниже вместо времени t , отсчитываемого от момента прихода УВ IS и характеристики C_0^- в ЦС, взято $\tau = -t$, а чтобы уравнения течения при замене t на τ не изменились, под u понимается скорость со знаком «минус». Фокусировке C^- -характеристик в ЦС ($x = \tau = 0$) за УВ IS при $v = 2$ и 3 отвечает xt -диаграмма рис. 2.24, б. При выяснении структуры течения вблизи ЦС учтем, что поток за УВ IS и на приходящей в ЦС характеристике C_0^- не-изэнтропический с известной энтропийной функцией $p/\rho^\gamma = \chi(m)$. Постоянная на траекториях частиц лагранжева переменная m введена равенством (2.1.8) с нормирующим множителем $k = 1$:

$$dm = x^{v-1} \rho(dx - u d\tau) = \rho dz - (vz)^{(v-1)/v} \rho u d\tau, \quad z = x^v / v. \quad (1)$$

Равенства (2.2.7), получающиеся отсюда для C^- -характеристик (с $-u$ вместо u), запишутся в форме

$$dm = (vz)^{(v-1)/v} \rho a d\tau = \frac{\rho a dz}{a + u}. \quad (1^-)$$

На характеристике C_0^- , совпадающей с линией постоянства автомодельной переменной $3\Gamma \xi = x/(c\tau^n) = \xi_0$, согласно формулам (2.11.2) (во избежание недоразумений в дальнейшем функциям $A(\xi)$ и $U(\xi)$ Гл. 2.11 приписан «градус») и равенствам (1) имеем

$$a = n \frac{x}{\tau} A^\circ(\xi_0), \quad u = n \frac{x}{\tau} U^\circ(\xi_0) = n \frac{x}{\tau} \mu A^\circ(\xi_0), \\ \rho = \rho_0 R(\xi_0), \quad z = (1 + \mu)m.$$

Постоянная μ и показатель степени $n < 1$ собраны в табл. 2.1, а $\tau = x^{1/n}/(c\xi_0)^{1/n}$, и поэтому $x/\tau = (c\xi_0)^{1/n}/x^{(1-n)/n}$. Следовательно, $x \sim m^{1/v}$, и при соответствующем выборе масштабов предыдущие формулы сведутся к

$$a = m^\alpha, \quad u = \mu m^\alpha, \quad \rho = 1, \quad \frac{p}{\rho^\gamma} = p = \frac{\rho a^2}{\gamma} = \frac{m^{2\alpha}}{\gamma}, \quad z = (1 + \mu)m, \quad \alpha = \frac{n-1}{vn}. \quad (2)$$

Так как $n < 1$, то $\alpha < 0$, и при $m \rightarrow 0$ плотность постоянна, а a , u и p неограниченно растут. Из равенств (2), формулы $a^2 = \gamma p/\rho$ и условия сохранения p/ρ^γ как функции m найдём, что в ЦВС

$$\rho = a^{1/\kappa} m^\omega, \quad p = \frac{1}{\gamma} a^{\gamma/\kappa} m^\omega, \quad \omega = -\frac{\alpha}{\kappa}, \quad \kappa = \frac{\gamma-1}{2}. \quad (3)$$

Если из уравнений неразрывности и движения (2.2.1_v) и (2.2.2_v) (для $v = 2$ – без закрутки) с помощью выражений (3) исключить ρ и p , то они запишутся в форме

$$\frac{da}{d\tau} + \kappa a \frac{\partial u}{\partial x} + \kappa(v-1)a \frac{u}{x} = 0, \quad \kappa \frac{du}{d\tau} + a \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\alpha}{\gamma m} x^{v-1} \rho a^2 = 0. \quad (4)$$

Формулы (3) предопределяют использование m в качестве одной из независимых переменных. В качестве второй возьмем постоянную на каждой C^- -характеристике пучка (рис. 2.24, б) характеристическую переменную η . При переходе от x и τ к m и η учтем, что в силу определения η равенства (1⁻) принимают вид:

$$z_m = \frac{a+u}{\rho a}, \quad \tau_m = \frac{1}{(vz)^{(v-1)/v} \rho a}, \quad (5)$$

где индексы m и η означают дифференцирование по этим переменным. В силу этих выражений равенство (1) станет

$$d\tau = \frac{\rho dz - dm}{(vz)^{(v-1)/v} \rho u} = \frac{\rho(z_m dm + z_\eta d\eta) - dm}{(vz)^{(v-1)/v} \rho u} = \frac{u dm + \rho a z_\eta d\eta}{(vz)^{(v-1)/v} \rho a u}, \quad (6)$$

для любой функции $\phi(m, \eta)$ или $\phi(x, \tau)$ в силу формул (5) и (6)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = (vz)^{(v-1)/v} \frac{\rho a z_\eta \phi_m - u \phi_\eta}{a z_\eta}, \quad \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = (vz)^{(v-1)/v} \frac{u \phi_\eta}{z_\eta},$$

а в переменных m и η уравнения (4) заменятся на

$$u_m + \frac{a_m}{\kappa} - \frac{\alpha a}{\gamma \kappa m} + \frac{v-1}{vz\rho} u = 0, \quad \rho a z_\eta a_m + (\kappa u_\eta - a_\eta) u - \frac{\alpha \rho a^2}{\gamma m} z_\eta = 0. \quad (7)$$

Выполняющееся на C^- -характеристиках первое уравнение этой системы – результат сложения записанных в переменных m и η уравнений (4).

В ЗГ a и u на характеристике C_0^- при $m \rightarrow 0$ растут неограниченно. С учётом этого в ЦВС z , a и u представим в форме (функции $A(\eta)$ и $U(\eta)$ отличны от $A(\xi)$ и $U(\xi)$ Гл. 2.11):

$$z = (1 + \mu)m + \phi(m)Z(\eta), \quad a = m^\alpha + \psi(m)A(\eta), \quad u = \mu m^\alpha + \psi(m)U(\eta), \quad (8)$$

где первые слагаемые, совпадающие с распределениями (2) на характеристике C_0^- , при $m \rightarrow 0$ много больше вторых, т.е.

$$(1 + \mu)m \gg \varphi(m)Z(\eta), \quad m^\alpha \gg \psi(m)A(\eta), \quad \mu m^\alpha \gg \psi(m)U(\eta). \quad (9)$$

В силу этого и формул (8) выражение для плотности (первое равенство (3)) в малой окрестности ЦС примет вид

$$\rho = 1 + \frac{\psi A}{\kappa m^\alpha}. \quad (10)$$

Подстановка выражений (8) в первое уравнение (5) при учёте соотношений (9), (10) и того, что главные слагаемые в равенствах (8) удовлетворяют тому же уравнению, даст

$$Z = \frac{\psi}{m^\alpha \dot{\varphi}} \Omega = c_0 \Omega, \quad \Omega = \frac{\kappa U - [1 + (1 + \kappa)\mu]A}{\kappa}; \quad \psi = c_0 m^\alpha \dot{\varphi} \quad (11)$$

с неизвестной постоянной c_0 . Эти равенства – следствия того, что Z , A , U и Ω – функции η , а ψ и φ – функции m . Здесь и далее точка означает производные по m , а штрих – по η .

Аналогично из первого уравнения (7) после исключения Z с помощью уравнения (11) получим

$$(\kappa U + A)c_2 + \frac{\kappa\omega}{\gamma} A + \frac{\kappa(v-1)\mu}{v(\mu+1)} \left(\frac{U}{\mu} - \frac{\Omega}{c_1} - \frac{A}{\kappa} \right) = 0, \quad \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = \frac{c_1}{m}, \quad \frac{\dot{\psi}}{\psi} = \frac{c_2}{m}. \quad (12)$$

Проинтегрировав второе и третье из этих уравнений, найдём

$$\varphi = C_\varphi m^{c_1}, \quad \psi = C_\psi m^{c_2} = C_\varphi c_0 c_1 m^{\alpha-1+c_1},$$

а приравняв, в согласии с определением функций φ и ψ , входящие сюда постоянные C_φ и C_ψ единице, получим

$$\varphi = m^{1+\Delta}, \quad \psi = m^{\alpha+\Delta}, \quad \Delta = c_1 - 1, \quad c_0 = 1/c_1, \quad c_2 = \alpha + c_1 - 1. \quad (13)$$

Левая часть первого уравнения (12) – линейная однородная функция A и U с постоянными коэффициентами. Поэтому для представляющих интерес, не равных тождественно нулю функций $A(\eta)$ и $U(\eta)$ имеем

$$U(\eta) = kA(\eta) \quad (14)$$

с подлежащей, как и c_1 , определению постоянной k . При учёте равенства (14) и выражения для c_2 (последнее равенство (13)) первое уравнение (12), связывающее искомые постоянные, запишем в форме

$$(1 + \kappa k)(\alpha - 1 + c_1)c_1 + \frac{\kappa\omega}{\gamma} c_1 + \frac{v-1}{\mu+1} \left[\frac{\kappa k - \mu}{v} c_1 + \mu \frac{1 + \mu + \kappa\mu - \kappa k}{v(\mu+1)} \right] = 0. \quad (15)$$

Второе уравнение для определения c_1 и k – результат подстановки выражений (8) во второе уравнение (7). Выразив в нём с помощью первого уравнения (11) и равенства (14) U' и Z' через A' , получим

$$\{2(1-n)[(1+\kappa)\mu+1-\kappa k]+(\kappa k-1)\nu n\gamma c_1\mu\}A'=0.$$

При неравной тождественно нулю производной A' равен нулю множитель при ней. Откуда

$$c_1 = 2(1-n) \frac{(1+\kappa)\mu+1-\kappa k}{(1-\kappa k)\nu n\gamma\mu}. \quad (16)$$

При $c_1 \equiv c_{1,0} = 0$ уравнения (15) и (16) совпадают и дают

$$k = k_0 = \frac{(1+\kappa)\mu+1}{\kappa}. \quad (17)$$

Таким образом, $c_{1,0} = 0$ и k_0 – одно из решений этой системы, причём k_0 – один из корней кубического уравнения, которое получается после исключения c_1 из уравнений (15) и (16). Знание корня (17) сводит кубическое уравнение к квадратному

$$k^2 - 2b_1k + b_2 = 0, \quad b_{1,2} = b_{1,2}(\nu, \gamma, \kappa, n, \mu) = b_{1,2}(\nu, \gamma) \quad (18)$$

с известными выражениями для коэффициентов b_1 и b_2 . Но согласно Гл. 2.11 n и μ – функции ν и γ . Следовательно, b_1 , b_2 и корни k_1 и k_2 уравнения (18) – функции ν и γ .

Т а б л и ц а 2.2

Константы в задаче быстрого сильного сжатия

ν	γ	$-\alpha$	k_0	$k = k_1$	$\Delta = \Delta_1$	$10^{-3\nu\Delta}$	k_2	$-\Delta_2$	$-C_z$	$-C_\tau$
2	5/3	0.113	8.21	2.40	0.00437	0.941	0.26	0.70	2.51	2.72
3	5/3	0.151	8.13	2.16	0.00481	0.905	0.24	0.60	2.60	2.24
2	7/5	0.099	16.3	4.10	0.01103	0.859	1.04	0.71	4.19	3.84
3	7/5	0.132	16.3	3.77	0.01401	0.748	1.06	0.62	4.29	3.05
2	6/5	0.081	42.7	8.48	0.01761	0.784	3.51	0.73	8.47	6.57
3	6/5	0.107	43.2	7.97	0.02374	0.784	3.55	0.64	8.56	5.02

Корни k_1 и k_2 уравнения (18) вместе с k_0 , отвечающие им согласно равенству (16) значения $c_{1,1}$ и $c_{1,2}$ и величины $\Delta_1 = c_{1,1} - 1$ и $\Delta_2 = c_{1,2} - 1$ ($c_{1,0} = 0$ для всех ν и γ и, следовательно, $\Delta_0 = -1$) и

показатель степени α представлены в табл. 2.2. Согласно приведённым данным и формулам (13) для функций φ и ψ неравенства (9) выполняются только при положительных Δ , т.е. при $\Delta = \Delta_1$. Ниже Δ_1 , μ_1 и k_1 пишутся без индекса.

Во всех случаях $\Delta \ll 1$. В табл. 2.2 приведены величины $10^{-3\nu\Delta}$, характеризующие малость показателя Δ . Если на $C_0^- m = 1$ при $x = 1$, то $m = 10^{-3\nu}$ при $x = 10^{-3}$. Поэтому величины $10^{-3\nu\Delta}$ показывают, что даже на столь малых расстояниях от ЦС добавки, равные нулю в ЦС, – величины порядка единицы.

В качестве характеристической переменной возьмем функцию A , положив $\eta = A(\eta)$. По определению, величина η , как и функция $A(\eta)$, равна нулю на начальной C^- -характеристике пучка волн сжатия (на особой C^- -характеристике 3Γ) и растёт с удалением от неё. В итоге в малой окрестности ЦС будем иметь

$$z = (\mu + 1)m(1 + C_z \eta m^\Delta), \quad C_z = \frac{\kappa k - 1 - \mu - \kappa \mu}{\kappa(\mu + 1)(1 + \Delta)},$$

$$a = m^\alpha(1 + \eta m^\Delta), \quad u = m^\alpha(\mu + k\eta m^\Delta), \quad \eta \geq 0.$$

Представление для τ , получающееся из второго уравнения (6), имеет вид

$$\tau = \frac{v^{1/\nu} n(1 - C_\tau \eta m^\Delta)}{(\mu + 1)^{(v-1)/\nu}} m^{1/(vn)}, \quad C_\tau = \frac{v + \kappa v + \kappa(v-1)C_z}{v\kappa(1 + \nu\eta\Delta)}.$$

Коэффициенты C_z и C_τ – функции ν и γ также даны в табл. 2.2.

Найденное решение и метод характеристик с последовательным расчётом отвечающих возрастающим значениям η C^- -характеристик позволяют построить течение до любой фиксированной траектории частиц – линии $m = \text{const}$, например, до $m = 1$. Её можно принять за искомую траекторию поршня.

Полученные в результате расчётов двух вариантов C^- -характеристики и траектории поршня представлены на рис. 2.25 для $\nu = 3$ при $\gamma = 5/3$ (а) и $\gamma = 6/5$ (б). На ней координата x и время t отнесены к x_p и τ_p , где p – точка пересечения траектории поршня (верхней кривой) с C_0^- -характеристикой (нижней кривой). В этих примерах вдоль траектории поршня $1 \leq \rho \leq 10^4$.

Зависимости ρ от τ° , где $\tau^\circ = \tau/\tau_p$, на поршня, полученные для шести представленных в табл. 2.2 вариантов, даны в логарифмическом масштабе на рис. 2.25, в. Так как $\rho = 1$ на C_0^- -характеристике, то близкие к прямым кривые 1–6 (их номера – номера строк табл. 2.2) на рис. 2.25, в выходят из начала координат. Умножение величин ρ , представленных на рис. 2.25, в, на ρ_C из табл. 2.1 даёт отношение плотности к её значению перед УВ IS.

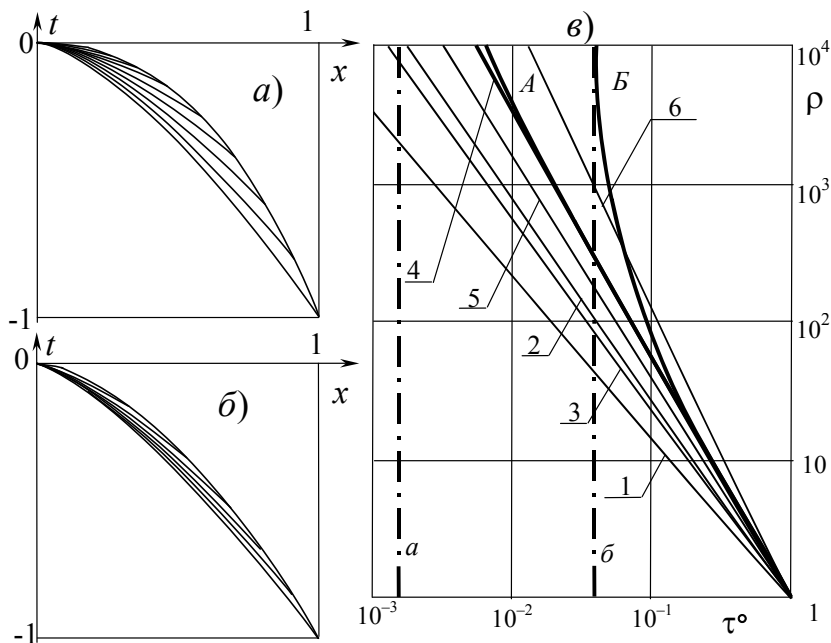


Рис. 2.25

После построения решения с пучком фокусирующихся в ЦС волн сжатия естественно рассмотреть решение с их фокусировкой в точке, расположенной на той же особой характеристике, но не в ЦС, а при $m_0 > 0$. Диаграмма такого течения изображена на рис. 2.24, в (CW – волна сжатия с фокусом в точке θ), а отвечающие $\nu = 3$, $\gamma = 7/5$ и двум значениям $m_0 = 10^{-6}$ и 10^{-3} зависимости ρ от τ° на поршне дают на рис. 2.25, в кривые А и Б. При $m_0 > 0$

течение в фокусе, описывается формулами для плоской ЦПВ (условиями постоянства инварианта I^+ и энтропии), т.е. в фокусе при постоянных $m = m_0$, z , x и τ переменные U и A или скорость u и скорость звука a удовлетворяют связям

$$\kappa U - A = \kappa\mu - 1, \quad \kappa u - a = m_0^\alpha (\kappa\mu - 1). \quad (19)$$

Формулы для ρ и p остаются прежними: $\rho = A^{1/\kappa}$, $p = \rho a^2/\gamma$.

Связи (19), по крайней мере, внешне не имеют ничего общего с построенным выше решением. Несмотря на это, кривые A и B на рис. 2.25, *в* отходят от кривой 4, рассчитанной для тех же ν и γ , только при приближении к своим фокусам. Это понятно, ибо при $m_0 > 0$ точка фокусировки S^- -характеристик с неограниченным ростом плотности отвечает хотя и малым, но всё же конечным τ_0° . При этих $\tau_0^\circ = \tau_0/\tau_p > 0$ кривые A и B имеют вертикальные асимптоты (a и b соответственно): $\tau^\circ = m_0^{1/(\nu n)}$, ибо на S_0^- -характеристике, на которой лежит отличный от ЦС фокус, $\tau^\circ = m^{1/(\nu n)}$.

Часть 3. Стационарные течения газа

Глава 3.1. Уравнения стационарного течения идеального газа. Их интегралы и следствия

Сокращения: ЗЛ – звуковая линия, ЛТ – линия тока, МСЗ – местная сверхзвуковая зона, ТР – тангенциальный разрыв, УВ – ударная волна, ЦВР – центрированная волна разрежения.

Если в некоторой желательной инерциальной системе координат параметры потока не изменяются со временем, то такие течения называются стационарными. Пример стационарного течения во вращающейся (неинерциальной) системе координат – течение в изолированном рабочем колесе турбомшины. Если система координат инерциальная, то дифференциальные уравнения, описывающие стационарные течения в подобластях их непрерывности, получаются из уравнений (1.6.1), (1.6.2'), (1.6.4) и (1.6.7) заменой частных производных по времени ($\partial/\partial t$) нулями

$$\nabla(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad \frac{d}{dt} = \mathbf{V} \nabla, \quad (2)$$

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad H = h + \frac{V^2}{2}, \quad (3)$$

$$\frac{ds}{dt} = 0. \quad (4)$$

Самые простые из них – два последних. Уравнение (4) – одна из записей уравнения энергии, а уравнение (3) – следствие уравнений движения (2) и энергии (4). Во многих задачах его удобно использовать вместо одной из проекций векторного уравнения движения (2). Здесь и далее оператор d/dt , как и в случае нестационарного течения, означает *полную (субстанциональную)* производную вдоль траектории частиц. Стационарные течения отличаются тем, что в них траектории всех частиц, проходящих через фиксированную точку, повторяют друг друга, образуя в пространстве независимые от времени *линии тока* (ЛТ). ЛТ покрывают всю занятую движущимся газом часть пространства.

В каждой точке, где хотя бы две компоненты вектора $\mathbf{V}$ не равны нулю, $\mathbf{V}$ и ЛТ касаются друг друга. Поэтому в декартовых (x, y, z) и в цилиндрических (x, y, ϕ) координатах

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}, \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{y d\phi}{w}. \quad (5)$$

Здесь $dx, \dots$ – приращения координат вдоль ЛТ, а u, v и w – соответствующие проекции вектора $\mathbf{V}$. Уравнения (3) и (4) – условия сохранения полной энтальпии H и энтропии s вдоль ЛТ.

Если ЛТ пересекает ударную волну (УВ), то энтропия возрастает, а полная энтальпия в силу её непрерывности на УВ не изменяется. Действительно, в общем случае на УВ непрерывна полная энтальпия, вычисленная в системе координат, в которой данный элемент УВ неподвижен. В стационарных течениях УВ неподвижны, и H сохраняется при пересечении УВ независимо от их формы и числа. Последнее существенно в задачах, в которых **набегающий поток** однороден или кусочно-однороден. При однородном набегающем потоке равенство

$$2h + V^2 = 2H_0 \quad (6)$$

с константой H_0 , вычисленной по параметрам набегающего потока, выполняется всюду, куда приходят начинающиеся в нём ЛТ. При этом энтропия

$$s = s_0 \quad (7)$$

также заведомо постоянна в полностью дозвуковых течениях, а в сверхзвуковых и околосзвуковых потоках с местными сверхзвуковыми зонами (МСЗ) при отсутствии УВ, а при их наличии, – по крайней мере, до пересечения ЛТ с УВ. В ряде задач при равномерном сверхзвуковом набегающем потоке головная УВ или её часть имеет постоянную интенсивность. За такими УВ также справедливо равенство (7), но с отличной от s_0 константой в правой части. Течения, с постоянной H , называются **изоэнергетическими**, а с постоянной s – **изэнтропическими**.

Если интенсивность УВ невелика (например, при сверхзвуковом обтекании тонких тел под малыми углами атаки или при числах Маха, близких к единице), то для них (см. (1.4.7)) рост энтропии пропорционален приращению давления в кубе. В таких случаях конечное соотношение (7) также с высокой точностью

выполняется во всём потоке, и равенства (6) и (7) – интегралы уравнений стационарного течения. Вместе с уравнениями состояния они выражают все термодинамические параметры, включая скорость звука a , через V^2 . При этом число подлежащих интегрированию уравнений в частных производных уменьшается с пяти до трёх.

Близкая ситуация имеет место для течений с кусочно-постоянными распределениями H и s . Один из примеров такого течения представлен на рис. 3.1, где в приближении идеального газа представлена картина истечения из выходного устройства двухконтурного воздушно-реактивного двигателя с центральным телом. Штрихами даны контактные разрывы (в стационарных задачах их называют «тангенциальными» – ТР) между потоками, прошедшие через *внутренний* (с индексом «минус») и *внешний* (с индексом «плюс») контуры двухконтурного двигателя, и между вторым из них и газом, обтекающим мотогондолу.

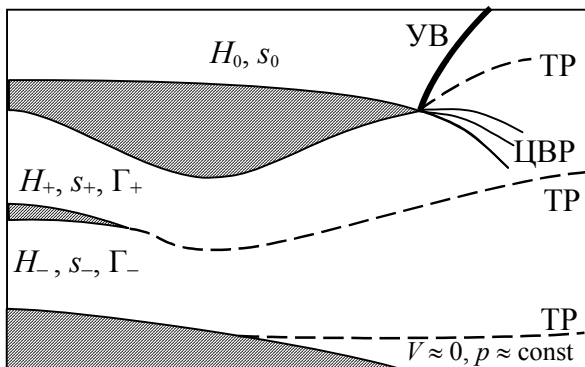


Рис. 3.1

Для двумерных (плоских и осесимметричных) течений равенства (6) и (7) обобщаются на произвольные распределения H и s , включающие кусочно-постоянные как частный случай. Это достигается введением **функции тока** $\psi = \psi(x, y)$ – стационарного аналога *лагранжевой переменной* t , которая применялась в части 2 при анализе одномерных нестационарных течений.

Введение функции тока опирается на уравнение неразрывности (1). Если в декартовых координатах xu параметры течения не зависят от переменной z или в цилиндрических координатах $xu\phi$ – от угловой переменной ϕ , то уравнение (1) принимает вид

$$L \equiv \frac{\partial(y^{v-1}\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(y^{v-1}\rho v)}{\partial y} = 0. \quad (8)$$

Здесь $v = 1$ и 2 соответственно для плоских и осесимметричных течений. Уравнение (8) справедливо и при наличии третьей компоненты скорости $w = w(x, y)$.

Функцию тока ψ введём дифференциальным равенством

$$d\psi = ky^{v-1}\rho(udy - vdx), \quad (9)$$

в котором k – произвольный «нормирующий» множитель, выбираемый из соображений удобства (см. ниже). Согласно (9)

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -ky^{v-1}\rho v, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = ky^{v-1}\rho u. \quad (10)$$

Благодаря этому при задании $\psi = \psi_1$ в некоторой точке a плоскости xu величина ψ в любой отличной от a точке b , определённая интегрированием уравнения (9), не зависит от пути интегрирования. Покажем это. Два разных, соединяющих точки a и b пути интегрирования Γ_1 и Γ_2 образуют замкнутый контур $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$, где знак минус перед Γ_2 означает его прохождение от точки b к точке a . С учётом равенств (9) и (10) и формулы Грина для разности интегралов получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} d\psi - \int_{\Gamma_2} d\psi &= \oint_{\Gamma} d\psi = k \oint_{\Gamma} y^{v-1}\rho(udy - vdx) = \\ &= k \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial(y^{v-1}\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(y^{v-1}\rho v)}{\partial y} \right\} dx dy = k \iint_{\Omega} L dx dy = 0, \end{aligned}$$

где Ω – ограниченная контуром Γ площадь в плоскости xu . Интеграл по Ω в силу уравнения неразрывности (8) равен нулю, что и доказывает сделанное выше утверждение.

ЛТ плоского течения, которые начинаются на прямой, перпендикулярной плоскости xu , при любой z -компоненте скорости w образуют в пространстве цилиндрическую поверхность, перпендикулярную той же плоскости. Аналогично начинающиеся на

окружности $y = y_0, x = x_0$ ЛТ осесимметричного течения образуют поверхность вращения. Далее ЛТ таких течений будем называть следы на *меридиональную плоскость* xu цилиндрических поверхностей или поверхностей вращения соответственно. Согласно уравнениям (5) и (9) на ЛТ

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}, \quad d\psi = 0, \quad (11)$$

т.е. ψ на ЛТ постоянна. Так, в случае рис. 3.1 функция тока постоянна на оси симметрии, на стенках и на сходящих с них ТР.

Дифференциальное равенство (9) определяет ψ с точностью до аддитивной постоянной. Поэтому на оси x и на центральном теле (при $y = y_{cb}$) можно положить $\psi(x, 0) = 0$. Тогда при фиксированном x

$$\psi = k \int_0^y y^{v-1} \rho u dy = k \int_{y_{cb}}^y y^{v-1} \rho u dy,$$

и, если газ течёт слева направо ($u > 0$), функция тока, пропорциональная расходу газа, монотонно растёт с ростом y . Сохранение расхода на поверхностях разрыва обеспечивает непрерывность ψ на УВ. Таким образом, ψ взаимно однозначно «метит» ЛТ. Согласно уравнениям (3) и (4) в стационарных течениях H и s сохраняются на ЛТ (s – между УВ). Поэтому

$$2h + V^2 = 2H(\psi), \quad s = S(\psi) \quad (12)$$

с известной по параметрам набегающего потока функцией $H(\psi)$ и с известной либо определяемой при расчёте УВ функцией $S(\psi)$. Равенства (12) назовём *интегралами полной энтальпии и энтропии*. По аналогии со стационарными течениями *идеальной несжимаемой жидкости* первое из них часто называют *интегралом Бернулли*.

Для двумерных течений есть ещё один интеграл. Так как в плоском случае (при $v = 1$) $\partial p / \partial z = 0$, то проекция уравнения движения (2) на ось z сводится к равенству

$$dw / dt = 0.$$

В осесимметричном случае (при $v = 2$) в приближении идеального газа из-за отсутствия момента внешних сил сохраняется мо-

мент количества движения кольца, составленного из фиксированных частиц, движущихся с одинаковой скоростью, т.е.

$$d(yw)/dt = 0.$$

В двумерных течениях компонента скорости w касается также двумерных УВ и, следовательно, сохраняется при их пересечении. В согласии с двумя последними уравнениями в дополнение к двум интегралам (12) в плоских и осесимметричных течениях имеется третий интеграл

$$y^{v-1}w = \Gamma(\psi) \quad (13)$$

с функцией $\Gamma(\psi)$, которая, как и H , определяется по параметрам набегающего потока. Для устройства, изображённого на рис. 3.1, отличные от нуля функции $\Gamma_-(\psi)$ и $\Gamma_+(\psi)$ могут быть связаны с закруткой потока за турбиной и за вентилятором. Закрутка с $\Gamma_-(0) \neq 0$ при наличии центрального тела неизбежно приведёт к отрыву потока. Действительно, при движении вдоль осесимметричного центрального тела y уменьшается, а в силу интеграла (13) $w = \Gamma(0)/y$ растёт (в предположении безотрывности течения – неограниченно). Но величина w ограничена в силу интегралов (12), что и обуславливает отрыв.

Пусть $y_{w+}(x)$ и $y_{cb}(x)$ – ординаты верхней стенки внешнего контура и центрального тела (рис. 3.1). Если множитель k определить равенством

$$k = \left(\int_{y_{cb}}^{y_{w+}} y^{v-1} \rho u dy \right)^{-1},$$

то $\psi_{w+} \equiv \psi(x, y_{w+}(x)) = 1$ при $\psi_{cb} \equiv \psi(x, y_{cb}(x)) = 0$.

Введение функции тока и запись с её помощью интегралов (12) и (13) существенно упрощает исследование плоских и осесимметричных стационарных течений. Для этого из пяти уравнений в частных производных остаются уравнение неразрывности (8), которое для дальнейшего перепишем в *квазиплоской* форме:

$$\nabla_1(\rho U) + (v-1)\frac{\rho v}{y} = 0, \quad U = iu + jv, \quad \nabla_1 = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y}, \quad (14)$$

и одна из проекций записанного аналогично уравнения движения:

$$\rho(\mathbf{U}\nabla_1)\mathbf{U} + \nabla_1 p - \mathbf{j}(v-1)\frac{\rho w^2}{y} = 0. \quad (15)$$

В уравнениях (14) и (15) $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ – орты осей x и y , а $\mathbf{U}$ – проекция полного вектора скорости $\mathbf{V}$ на меридиональную плоскость xy .

Возвращаясь к общему случаю пространственного стационарного течения, преобразуем уравнение движения (2) к ещё одной, полезной для дальнейшего форме. Заменим в нём первое слагаемое согласно известной формуле векторного анализа:

$$(\nabla\nabla)\mathbf{V} = \nabla\frac{V^2}{2} - \mathbf{V} \times \text{rot}\mathbf{V}$$

и учтем, что $Tds = dh - (dp)/\rho$, а следовательно, $(\nabla p)/\rho = = \nabla h - T\nabla s$. В результате придём к уравнению

$$\mathbf{V} \times \text{rot}\mathbf{V} = \nabla H - T\nabla s, \quad (16)$$

названному *уравнением движения в форме Крокко* (L. Крокко).

Умножив уравнение (16) скалярно на $\mathbf{V}$, придём к равенству

$$0 = \mathbf{V}\nabla H - T\nabla s.$$

Затем, учтя уравнение энергии (4), придём к полученному ранее иным способом уравнению (3). Столь же легко из уравнения (16) следует другой результат, важный для изоэнергетических и изэнтропических течений. Для них в силу уравнения (16)

$$\mathbf{V} \times \text{rot}\mathbf{V} = 0.$$

Во-первых, такое возможно в тривиальном случае покоящегося газа ($\mathbf{V} \equiv 0$). Во-вторых, если векторы $\text{rot}\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}$ коллинеарны, т.е. $\text{rot}\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V}$, где λ – скаляр. Лет сто назад этот довольно специфический случай исследовался в работах И.С. Громеки. Наиболее общей и интересной представляется третья возможность – безвихревое течение, в котором

$$\text{rot}\mathbf{V} = 0. \quad (17)$$

Линейное уравнение (17) много проще нелинейного уравнения (2), однако важнее другое. При его выполнении существует скалярная функция координат (*потенциал*) ϕ , такая, что

$$\mathbf{V} = \nabla\phi. \quad (18)$$

При применении аналитических методов работа с одной скалярной функцией ϕ подчас предпочтительнее работы с тремя компо-

нентами вектора $\mathbf{V}$ в пространственном случае и даже с двумя его компонентами – в плоском и осесимметричном.

Уравнение, определяющее потенциал, получается из уравнения неразрывности (1), предварительно преобразованного с использованием уравнений (4) и (3). Перепишем его в форме

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \mathbf{V} = 0 \quad (19)$$

и с учётом уравнения (4) перейдём к такой его записи

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + a^2 \nabla \mathbf{V} = 0.$$

Но в силу уравнений движения (2) в декартовых координатах

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\rho} \mathbf{V} \nabla p = -\mathbf{V}((\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V}) = -\mathbf{V} \nabla \frac{V^2}{2},$$

и после вычитания из предыдущего уравнения получим

$$a^2 \nabla \mathbf{V} - \mathbf{V} \nabla (V^2/2) = 0. \quad (20)$$

Для оператора ∇ , записанного в декартовых координатах, это уравнение справедливо в общем случае неизоэнергетических и неизэнтропических стационарных течений. В цилиндрических координатах x, y, z для осесимметричных незакрученных течений оно принимает вид

$$(u^2 - a^2)u_x + w u v_y + w v v_x + (v^2 - a^2)v_y - a^2 \frac{v}{y} = 0. \quad (21)$$

Для потенциальных течений в силу формулы (18) для $\mathbf{V}$

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{V} &= \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}, \quad \mathbf{V} \nabla \frac{V^2}{2} = \frac{\mathbf{V}}{2} \nabla (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) = \\ &= u(u\varphi_{xx} + v\varphi_{xy} + w\varphi_{xz}) + v(u\varphi_{xy} + v\varphi_{yy} + w\varphi_{yz}) + \\ &+ w(u\varphi_{xz} + v\varphi_{yz} + w\varphi_{zz}) = u^2\varphi_{xx} + v^2\varphi_{yy} + w^2\varphi_{zz} + \\ &+ 2uv\varphi_{xy} + 2uw\varphi_{xz} + 2vw\varphi_{yz}. \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в уравнение (20) даст

$$\begin{aligned} (1 - M_u^2)\varphi_{xx} + (1 - M_v^2)\varphi_{yy} + (1 - M_w^2)\varphi_{zz} - 2M_u M_v \varphi_{xy} - \\ - 2M_u M_w \varphi_{xz} - 2M_v M_w \varphi_{yz} = 0, \quad M_u = u/a, \quad M_v = v/a, \quad M_w = w/a. \end{aligned} \quad (22)$$

В уравнении (22) коэффициенты при производных – нелинейные функции первых производных от потенциала. Действительно, компоненты скорости согласно уравнению (18) равны первым производным от φ по соответствующим переменным. Скорость звука как функция V^2 , т.е. суммы квадратов тех же производных, определяется по известным полной энтальпии и энтропии. Так, если за масштаб скорости взять определённую в Гл. 3.2 критическую скорость, то для совершенного газа

$$a^2 = \frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2).$$

Условие непротекания, выполняющееся на поверхностях обтекаемых газом тел, – равенство нулю нормальной к поверхности составляющей скорости, в согласии с равенством (18), принимает вид ($\mathbf{n}$ – вектор нормали к поверхности)

$$V_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot (\nabla \varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

Здесь $\partial/\partial n$ – производная по нормали к поверхности.

Заканчивая параграф, с помощью справедливого в общем случае уравнения (20) сформулируем условие, которое характеризует влияние сжимаемости в стационарных течениях идеального газа. Для этого в рассматриваемой точке потока направим ось x декартовых координат по вектору скорости $\mathbf{V}$. В результате в такой точке $u = V$, $v = w = 0$, и уравнение (20) примет вид

$$(1 - M^2)u_x + v_y + w_z = 0, \quad M^2 = V^2/a^2.$$

Если $M^2 \ll 1$, то это уравнение сводится к $\nabla \mathbf{V} = 0$ – к уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости. Последнее, однако, в общем случае не означает постоянства плотности в соответствующих областях потока. Из-за отличия на разных ЛТ H и s плотность на них также может быть разной, оставаясь тем не менее практически постоянной вдоль каждой ЛТ. При этом первое слагаемое в уравнении неразрывности, записанном в форме (19), равно нулю, и вновь $\nabla \mathbf{V} = 0$.

Даже, если почти во всём потоке $M^2 \ll 1$, течения **идеального газа** принципиально отличаются от течений **идеальной несжимаемой жидкости**. Например, при безотрывном обтекании идеальной несжимаемой жидкостью сколь угодно малого выпук-

лого излома скорость V обращается в бесконечность, а давление в «минус бесконечность». При безотрывном обтекании с $M_0 \ll 1$ такого же излома идеальным газом перед изломом газ разгоняется до $M = 1$, а за изломом возникает небольшая МСЗ, в основном ограниченная звуковой линией (ЗЛ). ЗЛ выходит из излома, к ней примыкает центрированная волна разрежения с центром в изломе. Снизу по потоку МСЗ частично ограничена «замыкающим скачком», который начинается внутри неё. Чем больше излом, тем больше при его безотрывном обтекании увеличение скорости и падение давления. В любом случае согласно интегралу (6) скорость не может превысить своего максимального значения $V^M = (2H_0)^{1/2}$, а давление – стать меньше нуля. Ещё раньше при некоторой величине излома неминуемо произойдёт отрыв потока.

По той же причине при сколь угодно малом M_0 идеальный газ не может стационарно и безотрывно обтечь острую заднюю кромку профиля. Даже для нереально больших углов *заострения* задней кромки (порядка 50°) обогнувший кромку поток разогнался бы до $M \gg 1$ и давления, близкого к нулевому. Организовать его стационарную *встречу* с дозвуковым потоком, обтекающим профиль сверху, не представляется возможным. На самом же деле (см. ниже), для совершенного газа с $\gamma = 1.4$ максимальный угол поворота $\theta^M \approx 135^\circ$, и идеальный газ не может безотрывно обтечь никакую реальную заднюю кромку. Таким образом, для идеального газа единственная возможность – сход с задней кромки (при отсутствии МСЗ и УВ в них – по биссектрисе угла заострения). При околосвуковом обтекании, когда над профилем образуется достаточно большая МСЗ с интенсивным замыкающим скачком, поток будет сходиться с задней кромки, касаясь нижнего контура. В идеальной несжимаемой жидкости режим обтекания со сходом с задней кромки отбирает *условие Чаплыгина–Жуковского*.

Глава 3.2. Связи параметров на линии тока.

Источник, сток, вихрь

Сокращения: ЗЛ – звуковая линия, ЛТ – линия тока, УВ – ударная волна.

В некоторой точке 1 пространственной линии тока возьмем малую перпендикулярную ей площадку. Линии тока, проходящие через края площадки (рис. 3.2, а), образуют **трубку тока**. Расход газа G , протекающий через трубку тока, постоянен. Если F – площадь сечения трубки тока, а $j = \rho V$ – **плотность тока**, то

$$G = jF = \text{const.} \quad (1)$$

В силу уравнений (3.1.3) и (3.2.4) вдоль линии тока (ЛТ) сохраняется H , а в подобластях непрерывности параметров – и s , т.е.

$$2h + V^2 = \text{const} = 2H, \quad s = \text{const} = S. \quad (2)$$

В силу уравнений состояния $h = h(p, S)$, $\rho = \rho(p, S)$, $a = a(p, S)$, Согласно этому и уравнениям (2) все термодинамические параметры – функции одного из них, например, давления, а оно, в свою очередь, – функция V . Поскольку $Tds = dh - (dp)/\rho$, а вдоль линии тока $ds = 0$, то $dh/dp = 1/\rho$. Учтя это и продифференцировав первое уравнение (2) по V , найдём, что вдоль линии тока

$$\frac{dj}{dV} = -\rho V. \quad (3)$$

Введённая в (1) плотность тока $j = \rho V$ определяет изменение площади поперечного сечения трубки тока. В силу формулы (3) и определения скорости звука: $a^2 = (\partial p / \partial \rho)_s = dp/d\rho$ найдём

$$\frac{dj}{dV} = \rho + V \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{dV} = \rho - \rho \frac{V^2}{a^2} = \rho(1 - M^2). \quad (4)$$

По определению $j = \rho V \geq 0$, причём $j = 0$ при $V = 0$ и при $V = V^M$, когда равна нулю плотность ρ . Следовательно, согласно (4), при $M = 1$ плотность тока $j = j_*$ максимальна. Поэтому в реальном или гипотетическом сечении перехода через $M = 1$ в силу формулы (1) сечение трубки тока минимально. Равенство числа Маха единице означает, что в таком **критическом сечении** $V = a = a_*$, где a_* – **критическая скорость**, введённая в Гл. 3.2. Далее «звездочка» метит критические параметры. Для совершенного газа

$$2H = 2h_* + V_*^2 = \frac{2a_*^2}{\gamma - 1} + a_*^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} a_*^2 = (V^M)^2, \quad (5)$$

где **максимальная скорость** V^M отвечает такому стационарному разгону газа (с сохранением полной энтальпии и энтропии), при котором h , T , p и ρ уменьшаются до нуля.

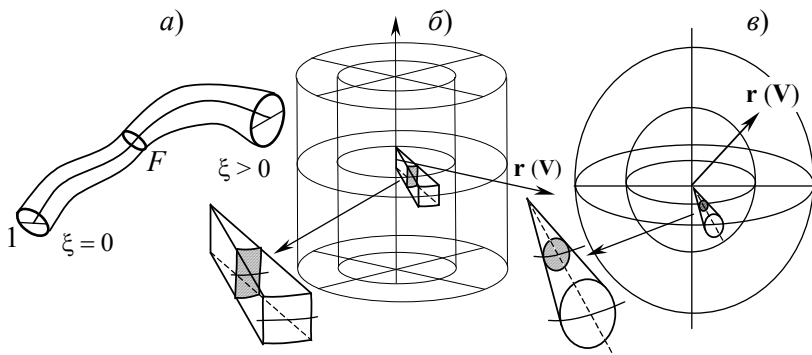


Рис. 3.2

Согласно равенствам (5) имеют место связи

$$a_* = \sqrt{2H\varepsilon}, \quad V^m = \sqrt{2H} = \frac{a_*}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}. \quad (6)$$

Связи (6) учтены при построении на рис. 3.3 j/j_* как функции отношения V/a_* . В прикладной газовой динамике при рассмотрении течений совершенного газа для этого отношения используется специальное обозначение $\lambda = V/a_*$. Связь λ с числом Маха $M = V/a$ получается из равенств

$$\frac{a^2}{a_*^2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) = \frac{\gamma+1}{2}, \quad \frac{a^2}{a_*^2} + \frac{\gamma-1}{2} \lambda^2 = \frac{\gamma+1}{2}$$

– следствий первого уравнения (2), записанного через M и λ с учётом формулы (5). Исключив из них a^2/a_*^2 , найдём

$$\lambda \equiv \frac{V}{a_*} = \frac{M\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{2 + (\gamma-1)M^2}}. \quad (7)$$

Как видно из рис. 3.3, разгон дозвукового потока сопровождается увеличением плотности тока j и сужением трубки тока. В противоположность этому, разгон сверхзвукового потока сопровождается уменьшением j и расширением трубки тока. Такое от-

личие нетрудно понять. Дело в том, что в дозвуковом потоке изменение j в основном обусловлено изменением скорости при малом изменении ρ (при малых числах Маха ρ практически постоянна). В сверхзвуковых течениях – наоборот – для совершенного газа скорость может вырасти максимум в $\varepsilon^{-1/2}$ раз. Плотность при этом уменьшается до нуля. Поскольку плотность тока максимальна при $M = 1$, то в соответствии с равенством (1) непрерывный переход от дозвуковой скорости к сверхзвуковой (и наоборот) сопровождается сначала сужением, а затем расширением трубки тока. Торможение потока в прямом скачке с изменением числа Маха от $M_1 > 1$ до $M_2 < 1$ не требует изменения площади поперечного сечения трубки тока.

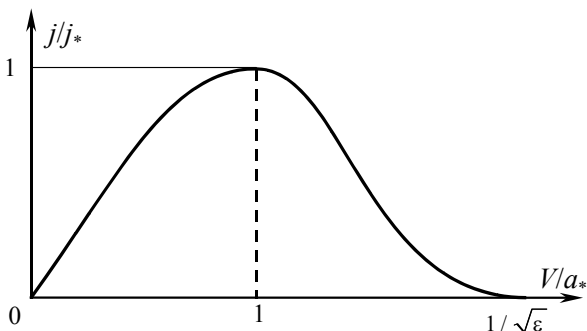


Рис. 3.3

Пусть ξ – расстояние, отсчитываемое вдоль линии тока, и $\varphi' = d\varphi/d\xi$. Согласно уравнению (1) и равенствам (3) и (4) справедливо соотношение

$$p' = \frac{-jF'}{(dj/dp)F} = \frac{\rho V^2 F'}{(1 - M^2)F}. \quad (8)$$

В общем случае зависимости $F = F(\xi)$, разные для разных линий тока, неизвестны. Несколько из немногих исключений – цилиндрические и сферические источник и сток (рис. 3.2, *a* и *б*). В этих течениях ЛТ – прямые, расходящиеся либо от оси (рис. 3.2, *a*, все ЛТ лежат в плоскостях, нормальных оси симметрии), либо

от центра симметрии (рис. 3.2, б). Поэтому $F = F(\xi = r) \sim r^{v-1}$, где $v = 2$ и 3 соответственно при осевой и при сферической симметрии. Итак, в направлении течения F либо монотонно растёт (для источника), либо монотонно уменьшается (для стока). Поэтому в таких течениях невозможен переход через $M = 1$. В них всегда есть сечение – *звуковой цилиндр* или *звуковая сфера* радиуса r_* . В область $r < r_*$ ни источник, ни сток продолжить невозможно. На рис. 3.2 «звуковые» сечения трубки тока заштрихованы.

Если r_* – линейный масштаб, а a_* и ρ_* – масштабы скорости и плотности, то для источника и стока уравнение (1) примет вид

$$\rho V r^{v-1} = 1, \quad r \geq 1.$$

При $r < 1$ решения нет. При $r \gg 1$ течение в дозвуковых источнике и стоке стремится к аналогичным течениям для несжимаемой жидкости, $V \rightarrow 0$, а $\rho \rightarrow \rho_{st}$, где ρ_{st} – ρ изоэнергетически и изэнтропически заторможенного потока. В сверхзвуковых источнике и стоке $V \rightarrow V^M$, $M \rightarrow \infty$, ρ и $p \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Как и для идеальной жидкости, для газа при $v = 2$ нетрудно построить ещё два простых плоских течения: вихрь и вихреисточник или вихресток. Для вихря ЛТ – концентрические окружности, причём в общем случае $H = H(\psi)$, $s = S(\psi)$, $rw = \Gamma(\psi)$, а $dp/dr = \rho w^2/r$. Здесь w – окружная компонента скорости, единственная отличная от нуля, а Γ – циркуляция. Для вихреисточника и вихрестока H , s и Γ постоянны во всём потоке.

Благодаря тому, что в стационарных течениях полная энтальпия на УВ также сохраняется, максимальная скорость не изменяется на них не только для совершенного газа, но и для газов с достаточно произвольными термодинамическими свойствами. Единственное необходимое для этого условие: $h \rightarrow 0$ при $p \rightarrow 0$ и $T \rightarrow 0$. В отношении a_* для произвольного газа это не так, ибо для газов с более сложной термодинамикой a_* зависит и от H , и от s . Согласно формулам (6) для совершенного газа a_* выражается только через H и потому на УВ также не изменяется.

На рис. 3.4 изображено обтекание затупленного осесимметричного тела сверхзвуковым потоком. Нарисованы УВ, звуковая линия (ЗЛ) и трубка тока (ТТ), которая, начинаясь круглой (вокруг ЛТ, совпадающей с осью симметрии), у поверхности тела

становится кольцевой. Сразу за УВ трубка тока расширяется, а дозвуковой поток тормозится. При обтекании торца уменьшение поперечного сечения трубки тока сопровождается разгоном газа. При пересечении ЗЛ площадь $F = F_*$ минимальна, а затем растёт.

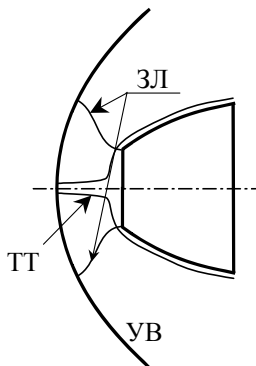


Рис. 3.4

Расчёт обтекания затупленного тела требует применения численных методов. Однако точные значения параметров в некоторых характерных точках можно найти, опираясь на весьма простые соображения. Начнём с того, что УВ на оси симметрии – **прямой скачок**. По соотношению Л. Прандтля (1.4.32) определим скорость, а затем по формулам (1.4.1) и (1.4.2) – плотность и давление за скачком («0» и «1» метят параметры перед и за УВ):

$$V_1 = a_*^2 / V_0, \quad \rho_1 = \rho_0 V_0 / V_1, \quad p_1 = p_0 + \rho_0 V_0 (V_0 - V_1). \quad (9)$$

Эти и последующие соотношения удобнее использовать в безразмерной форме, взяв за масштабы плотности, скорости и давления ρ_0 , V_0 и $\rho_0 (V_0)^2$. При таком масштабировании в согласии с равенствами (5) полная энтальпия H и критическая скорость даются формулами (M_0 – число Маха набегающего потока)

$$2H = \frac{2}{(\gamma - 1)M_0^2} + 1, \quad a_*^2 = 2H\varepsilon = \frac{2}{(\gamma + 1)M_0^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1},$$

а равенства (9) заменятся на

$$V_1 \equiv \frac{V_1}{V_0} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_0^2}, \quad \rho_1 \equiv \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{(\gamma+1)M_0^2}{(\gamma-1)M_0^2+2} = \frac{f(f+1)}{f+(f/M_0)^2},$$

$$p_1 \equiv \frac{p_1}{\rho_0 V_0^2} = \frac{2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma(\gamma+1)M_0^2}.$$

Вторая формула для ρ_1 записана с использованием правила классической термодинамики $\gamma = (f+2)/f$, где f – число степеней свободы газа. Согласно ей $\rho_1/\rho_0 = f$ при $M_0 = f$ (В.А. Белоконов, 1953).

За УВ по p_1 и ρ_1 найдём энтропийную функцию

$$\chi_1 = p_1 \rho_1^{-\gamma},$$

которая не изменяется до следующей УВ (на рис. 3.2, *a* её нет). В точке торможения скорость $V_{st} = 0$, а прочие параметры определяются по известной H и σ_1 формулами

$$a_{st}^2 = \frac{\gamma p_{st}}{\rho_{st}} = (\gamma-1)H, \quad \frac{p_{st}}{\rho_{st}^\gamma} = \chi_1 \rightarrow \rho_{st} = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma \chi_1} H \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad p_{st} = \chi_1 \rho_{st}^\gamma.$$

Аналогично параметры в звуковой точке на кромке торца равны

$$V_* = a_*, \quad a_*^2 = \frac{\gamma p_*}{\rho_*}, \quad \frac{p_*}{\rho_*^\gamma} = \chi_1 \rightarrow \rho_* = \left(\frac{a_*^2}{\gamma \chi_1} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad p_* = \chi_1 \rho_*^\gamma.$$

Глава 3.3. Элементарная теория (ЭТ) течений в каналах переменного сечения (сопле, диффузоре, аэродинамической трубе)

Сокращения: ЛТ – линия тока, УВ – ударная волна, ЭТ – элементарная теория.

В общем случае зависимость площади F поперечного сечения трубки тока от расстояния вдоль ЛТ неизвестна. В противоположность этому в описываемой ниже теории уравнения Гл. 3.2 применяются к каналам, для которых зависимость $F = F(x)$ от координаты x , отсчитываемой вдоль их оси, определяется заданной формой канала и, следовательно, известна. Пусть параметры газа, в частности, u – проекция вектора скорости на ось x , зависят и от других декартовых или цилиндрических координат. При фикси-

рованном x для любого параметра φ введём его среднюю по сечению величину $\langle \varphi \rangle$ и отклонение $\Delta \varphi$ от неё формулами

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{F} \int_F \varphi dF, \quad \Delta \varphi = \varphi - \langle \varphi \rangle. \quad (1)$$

В отличие от φ средняя величина $\langle \varphi \rangle$ – функция только x . В силу определения (1)

$$\int_F \Delta \varphi dF = \int_F (\varphi - \langle \varphi \rangle) dF = \int_F \varphi dF - \int_F \langle \varphi \rangle dF = F \langle \varphi \rangle - \langle \varphi \rangle F = 0. \quad (2)$$

С учётом определений (1) и равенства (2) для расхода газа G , протекающего через любое сечение канала, имеем

$$G = \int_F \rho u dF = \int_F (\langle \rho \rangle + \Delta \rho)(\langle u \rangle + \Delta u) dF = \langle \rho \rangle \langle u \rangle F + \int_F \Delta \rho \Delta u dF. \quad (3)$$

Если p и s в данном сечении близки к постоянным, т.е. $|\Delta p| \ll \langle p \rangle$, $|\Delta s| \ll \langle s \rangle$, то ряд Тейлора для $h(p, s)$ имеет вид

$$h(p, s) = h(\langle p \rangle, \langle s \rangle) + h_p \Delta p + h_s \Delta s + 0.5[h_{pp}(\Delta p)^2 + h_{ss}(\Delta s)^2] + h_{ps} \Delta p \Delta s + \dots,$$

где h_p , h_s , ... вычисляются при $p = \langle p \rangle$ и $s = \langle s \rangle$. Применив к нему операцию осреднения (1) и учтя равенство (2), получим

$$\langle h \rangle = h(\langle p \rangle, \langle s \rangle) + \frac{1}{2F} \int_F [h_{pp}(\Delta p)^2 + h_{ss}(\Delta s)^2 + 2h_{ps} \Delta p \Delta s] dF + \dots \quad (4)$$

Такие же выражения получаются для всех термодинамических параметров.

Осреднение равенств (3.2.2) – условий сохранения полной энтальпии и энтропии на ЛТ и подстановка в первое из них выражения (4) даст

$$2h(\langle p \rangle, \langle s \rangle) + \langle V \rangle^2 = 2\langle H_1 \rangle - \frac{1}{F} \int_F [h_{pp}(\Delta p)^2 + h_{ss}(\Delta s)^2 + 2h_{ps} \Delta p \Delta s + (\Delta V)^2] dF + \dots, \quad \langle s \rangle = \langle s_1 \rangle. \quad (5)$$

Для плоских и осесимметричных каналов (при отсутствии компоненты w) $V^2 = u^2 + v^2$. Рассматриваемые далее **плавные каналы** таковы, что угол между нормалью к стенке и осью x близок к 90° , хотя за счёт большой длины изменение F и параметров потока по их длине могут быть любыми. Для плавных каналов

отличные от u компоненты скорости малы по всему поперечному сечению. Для плоских и осесимметричных плавных каналов с уравнением стенки: $y = y_w(x)$ из условия непротекания на ней $v = uy'_w$ с $|y'_w| \equiv |dy_w(x)/dx| \ll 1$. Следовательно, для плавных каналов даже на стенке $v^2 \ll u^2$, а при приближении к оси симметрии v почти линейно убывает до нуля. Итак, для таких каналов

$$\langle u \rangle^2 = \langle V \rangle^2 + \frac{1}{F} \int_F [(\Delta V)^2 - (\Delta u)^2 - v^2 - w^2] dF. \quad (6)$$

Пусть направление вектора скорости на входе в канал близко к осевому, а распределения его полной энтальпии и энтропии однородны или близки к однородным. Эти предположения исключают из данного рассмотрения закрученные, а также слоистые потоки типа, изображённого на рис. 3.1. Для слоистых и закрученных течений в плавных каналах также развиты соответствующие элементарные теории.

В силу ограничений на форму каналов и характер течения на их входе интегральные слагаемые в равенствах (3) – (6) – малые второго порядка по параметру, характеризующему величину u'_w . Пренебрегая ими и опустив у оставшихся знак осреднения, придём к уравнениям, описывающим течения в плавных каналах в рамках теории, которую назовём **элементарной (ЭТ)**:

$$G = jF, \quad j = \rho V, \quad 2h + V^2 = 2H, \quad s = S, \quad (7)$$

$$\rho = \rho(p, s), \quad h = h(p, s), \quad a = a(p, s), \quad a^{-2} = \partial \rho / \partial p.$$

Входящие в эти уравнения константы G и H не изменяются и при наличии в некотором сечении канала **прямого скачка**, который также допускается ЭТ. При наличии прямого скачка изменение s или $\chi(s) = p/\rho^\gamma$ рассчитывается так же, как при обтекании тела с отошедшей УВ в Гл. 3.2.

Уравнения (7) тождественны уравнениям, справедливым для трубки тока. Поэтому в рамках ЭТ применимы все результаты Гл. 3.2. Опираясь на них, рассмотрим течения в соплах, сверхзвуковых диффузорах (*воздухозаборниках*) и в каналах с двумя пережатиями (аэродинамических трубах). Начнём с устройства, в котором поток можно разогнать до сверхзвуковой скорости – **сужающегося-расширяющегося канала – сопла Лавала**. Изображённое в нижней части рис. 3.5, а сопло слева присоединено к

большому объёму (*ресиверу*, камере сгорания и т.п.), а справа – открыто в атмосферу. Давление в ресивере близко к p_{st} – давлению изоэнергетически и изэнтропически заторможенного потока. Если **перепад** $\pi = p_{st}/p_e = 1$, где p_e – атмосферное (*внешнее*) давление, то газ покоится, и во всём устройстве $p/p_{st} \equiv 1$. На рис. 3.5, а этому режиму отвечает прямая 0.

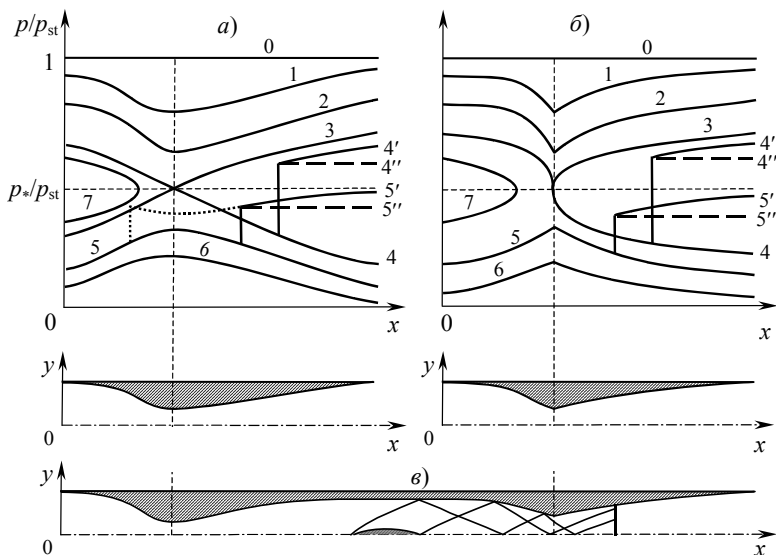


Рис. 3.5

При $\pi > 1$ начинается истечение газа, причём сначала с дозвуковой скоростью во всём сопле. Поток разгоняется в сужающейся части и, не достигнув скорости звука, тормозится в расширяющейся части сопла. Распределения давления, соответствующие таким течениям, представлены кривыми 1 и 2. До тех пор пока поток на срезе сопла дозвуковой, давление на срезе близко к внешнему, а в рамках ЭТ – равно ему. По указанной причине ординаты правых концов этих кривых равны p_e/p_{st} . С ростом π растет скорость потока во всём сопле, поэтому кривая 1 лежит ниже прямой 0, кривая 2 ниже кривой 1 и т.д. Для полностью дозвуковых режимов наименьшее давление (и наибольшая скорость) дос-

тигается в минимальном сечении. Здесь $F' = F'_m = 0$, и согласно равенству (3.2.8)

$$p'_m = \frac{\rho_m V_m^2 F'_m}{(1 - M_m^2) F_m} = 0. \quad (8)$$

При некотором перепаде в минимальном сечении число Маха становится равным 1. Для определения отвечающей такому режиму производной p'_* в минимальном (теперь – *критическом*) сечении сопла раскроем неопределённость. Все параметры, включая V и число Маха M , – функции давления. Поэтому

$$p'_* = \frac{F''}{-2M_{p^*} p'_*} \rightarrow p'_* = \pm \sqrt{\frac{F''}{-2M_{p^*}}}, \quad (9)$$

где за масштабы площади, скорости, плотности и давления взяты F_m , a_* , ρ_* и $\rho_* a_*^2$. Поэтому для совершенного газа при $M = 1$ в минимальном сечении

$$F_m = V_{m^*} = \rho_{m^*} = 1, p_{m^*} = 1/\gamma. \quad (10)$$

Для произвольного газа с учётом формулы (3.2.3), определений удельного объёма $\omega = 1/\rho$ и скорости звука $a^2 = 1/\rho_p = -\omega^2/\omega_p$ и того, что в ЭТ, как и на ЛТ, $(\partial/\partial p)_s = d/dp$, найдём

$$\begin{aligned} 2MM_p &= \frac{dM^2}{dp} = \frac{d}{dp} \frac{V^2}{a^2} = \frac{2a^2 V V_p - V^2 (a^2)_p}{a^4} = \frac{-2}{\rho a^2} + \frac{V^2}{a^4} \left(\frac{\omega^2}{\omega_p} \right)_p = \\ &= \frac{-2a^2 + \rho V^2 (\omega^2 / \omega_p)_p}{\rho a^4} = \frac{-2a^2 + \rho V^2 (2\omega\omega_p^2 - \omega^2\omega_{pp}) / \omega_p^2}{\rho a^4} = \\ &= \frac{2V^2 - 2a^2 - \rho V^2 \omega_{pp} \omega^2 / \omega_p^2}{\rho a^4} = \frac{2(M^2 - 1) - M^2 \rho^3 a^4 \omega_{pp}}{\rho a^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Вспомнив выбор масштабов, отсюда получим

$$\sigma^2 \equiv -2M_{p^*} = \omega_{pp^*}. \quad (12)$$

Согласно формуле (12) для нормальных газов σ^2 положительно, и в минимальном сечении, где $F'_m = 0$, а $F''_m > 0$, подкоренное выражение в формуле (9) также положительно. Для совершенного газа (см. равенство (1.1.5))

$$\omega = \frac{[\chi(s)]^{1/\gamma}}{p^{1/\gamma}}, \quad \omega_p = -\frac{1}{\gamma} \frac{\chi^{1/\gamma}}{p^{1/\gamma+1}}, \quad \omega_{pp} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \right) \frac{\chi^{1/\gamma}}{p^{1/\gamma+2}} = \frac{1+\gamma}{\gamma^2} \frac{\omega}{p^2},$$

и с учётом равенств (10) в минимальном сечении при $M = 1$

$$\omega_{pp*} = 1 + \gamma. \quad (13)$$

Итак, согласно формуле (9) наклон касательной к кривым $p = p(x)$, дающим распределение давления в сопле Лавала, при $M = 1$ в минимальном сечении может быть либо положительным, либо отрицательным. Поскольку в сужающейся части сопла дозвуковой поток разгоняется, то слева от минимального сечения, наклон соответствующей касательной – отрицательный. Справа от «звукового» сечения положительному наклону соответствует торможение потока в расширяющейся части (кривая 3 на рис. 3.5, а), а отрицательному – продолжение разгона газа и в расширяющейся части сопла (кривая 4). Величина перепада π_3 , соответствующая правому концу кривой 3, определяет границу так называемых **запертых** режимов, для которых течение слева от минимального сечения не зависит от перепада. Достигнутый расход G является максимально возможным, и дальнейший рост перепада не может изменить его, а следовательно, и все течение в сужающейся части сопла. Поэтому для перепадов, больших π_3 , начальный участок кривой распределения давления остается неизменным. Для значений π , превосходящих π_4 – перепад, соответствующий правому концу кривой 4, распределение давления в расширяющейся части сопла описывается единой кривой 4: рост перепада выше π_4 не может повлиять на течение внутри сопла в силу сверхзвукового характера течения на его выходе. Таким образом, в рамках ЭТ построены решения задачи о течении газа в сопле для перепадов $1 \leq \pi \leq \pi_3$ и $\pi \geq \pi_4$. Остается найти распределение давления в расширяющейся части сопла для $\pi_3 \leq \pi \leq \pi_4$.

Как уже отмечалось, ЭТ допускает введение прямого скачка. Для любого его положения в расширяющейся части все параметры, в том числе энтропия S_2 или энтропийная функция σ_2 за прямым скачком, определяются по известным параметрам перед ним (с индексом «1»). Если принять, что за прямым скачком течение безотрывное, то реализуется распределение, показанное на рис. 3.5, а кривой 4'. Если «прямой скачок» нулевой интенсивности

поместить в минимальном сечении, то кривая 4' совпадёт с кривой 3. При смещении скачка в расширяющуюся часть сопла одновременно растут его интенсивность – отношение давлений p_2/p_1 и приращение энтропии. Рост σ_2 вместе с уменьшением давления p_1 перед прямым скачком ведут к тому, что каждая следующая кривая 4' оказывается ниже предыдущей. Одновременно уменьшается давление на срезе сопла. Самое низкое давление на срезе $p_{e4-4'}$ реализуется при прямом скачке в сечении среза.

Из-за пограничного слоя на стенках сопла с ростом интенсивности скачка более обоснованной представляется модель с простирающейся от скачка до среза сопла отрывной зоной. В рамках отрывной модели получается распределение 4'', включающее штриховую горизонталь. По этой модели минимальное (равное p_*) давление на срезе получается при совершенно нереальном отрыве из-под скачка нулевой интенсивности.

В обеих моделях с дозвуковым за прямым скачком потоком на срезе сопла есть конечный интервал значений внешнего давления ($p_{e4} < p_e < p_{e4-4'}$ – в первой модели и $p_{e4} < p_e < p_*$ – во второй), для которого в ЭТ решения нет. Причина этого в том, что в ЭТ не рассматриваются косые скачки. В действительности, сначала при $p_e > p_{e4}$ от кромки сопла в сверхзвуковую струю отходит косой скачок (рис. 3.38, а), что не сказывается на течении внутри сопла. Когда отношение давлений на косом скачке p_e/p_{e4} превысит некоторый связанный с пограничным слоем на стенках сопла **критический перепад**, косой скачок войдёт в сопло. До этого ЭТ даёт приемлемые для инженерных оценок распределения параметров в сопле. Вход косого скачка в сопло сопровождается отрывом потока от стенок, причём с ростом p_e к минимальному сечению движется не прямой скачок, а система из первичного и отраженного косого скачка и близкого к прямому скачку **диска Маха**.

На рис. 3.5, а течениям в **сверхзвуковом диффузоре (воздухозаборнике)** отвечают кривые 5, 5', 5'' и 6. Главное отличие такого диффузора от сопла Лаваля – заданный сверхзвуковой поток на входе с числами Маха $M_{1,5}$ и $M_{1,6}$. По этой причине перечисленные кривые начинаются ниже штриховой горизонтали, отвечающей звуковому потоку. При этом, как и для сопла, в зависимости

от условий на выходе реализуется сверхзвуковое (кривые 5 и 6) или дозвуковое (кривые 5' и 5'') истечение. Для кривой 7 число Маха на входе $M_{1,7}$ столь близко к единице, что поток становится звуковым (с максимальной плотностью тока j_*) в сужающемся канале, левее минимального сечения.

Ещё одно, казалось бы, возможное распределение – полная кривая 3 с непрерывным торможением потока от $M > 1$ до $M < 1$. В отличие от трубок тока в двух- и трёхмерных течениях такой режим в канале с твердыми стенками неинтересен ввиду его неустойчивости по отношению к уменьшению $M_{1,3}$ на сколь угодно малую величину. Как бы мало ни было это уменьшение, поток с $M_1 < M_{1,3}$, как и в случае кривой 7, не может пройти через диффузор. В результате перед ним возникнет *отошедшая (выбитая)* УВ, а режим течения с расходом G , меньшим $G_{1,3}$ на конечную величину, и с $M < 1$ в сужающемся канале, как и в случае сопла, определится условием на выходе из канала.

Важная особенность течения в сверхзвуковом диффузоре – неединственность решений с прямым скачком. Так, наряду с *первым* решением, которому на рис. 3.5, а отвечает сплошная кривая 5–5', возможно «второе» с прямым скачком в сужающемся канале. Действительно, пусть M_1 – число Маха перед *первым* прямым скачком в расширяющемся канале. На сверхзвуковом участке кривой 5 распределение числа Маха немонотонно с минимумом в минимальном сечении. Воспользовавшись этим, найдём сечение с $M = M_1$ в сужающемся канале и поместим в него *второй* прямой скачок. Площади F и параметры потоков перед и за обоими прямыми скачками, включая энтропии S_2 , одинаковы. Поэтому пунктирная ломаная, которая на рис. 3.5, а даёт второе решение, справа от сечения первого скачка повторит отрезок сплошной кривой 5', дающей распределение $p(x)$ для первого решения.

Выбор одного из двух решений может определить исследование их устойчивости. В предположении отсутствия отражения возмущений от правого конца близкого к цилиндрическому дозвукового участка диффузора Г.Г. Чёрный (1950) показал, что течение с прямым скачком в расширяющемся канале устойчиво, а в сужающемся неустойчиво. В цикле работ автора с сотрудниками [25-27] (1970-е гг.) исследование устойчивости таких течений

проведёно для произвольных коэффициентов отражения акустических и энтропийных возмущений от выходного сечения, для каналов с любым плавным изменением площади поперечного сечения и для потребовавшего специального рассмотрения случая околосзвукового потока за прямым скачком.

Рис. 3.5, б даёт представление о том, к каким отличиям приводит замена гладкого контура с $F'_m = 0$ на контур с изломом в минимальном сечении. Если $F'_{m-} < 0$, а $F'_{m+} > 0$, то согласно формуле (8) при $M_m \neq 1$ производные p' и других параметров в этом сечении рвутся. В рамках ЭТ при $M_m = 1$ они обращаются в бесконечность, причём на режиме разгона (кривая 4) $p'_{m\pm} = -\infty$.

Аэродинамическая труба – канал с двумя минимальными сечениями (рис. 3.5, в). В аэродинамической трубе сверхзвуковой поток на срезе сопла поступает в рабочую часть постоянного сечения, а затем в диффузор. Назначение диффузора – уменьшение требуемого для работы трубы перепада давления. Из-за УВ, возникающих при обтекании модели, и других потерь энтропия потока на входе в диффузор выше, чем на срезе сопла. Кроме того, в диффузоре $M_m > 1$. Поэтому F_m диффузора должна превышать F_m сопла. ЭТ аэродинамической трубы получается объединением ЭТ сопла и диффузора (кривую 4 рис. 3.5. а продолжает одна из кривых 5' или 5'' рис. 3.5, б).

Даже теперь, в эпоху компьютеров и численных методов, ЭТ находит широкое применение в инженерной практике и даёт близкие к точным результаты (по крайней мере, для течений без скачков), причём не только для плавных, но и для неплавных каналов. В последнем случае точность ЭТ объясняется тем, что лежащие в её основе уравнения (7) конечные, а не дифференциальные. Для определения интересующих инженеров и исследователей характеристик (например, расхода и тяги сопла) они применяются к сечениям (минимальное, срез сопла), которые обычно условиям плавности удовлетворяют.

Глава 3.4. Характеристики плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений

Сокращения: ЛТ – линия тока, УВ – ударная волна, УС – условия совместности.

В декартовых (x, y, z) или цилиндрических (x, y, φ) координатах параметры плоских и осесимметричных течений не зависят от третьей переменной. Как показано ниже, тип уравнений, описывающих такие течения, определяется величиной уже вводившейся ранее **меридиональной скорости**. По этой причине и ввиду её частого присутствия в разных соотношениях ниже в отличие от Гл. 3.1 полный вектор скорости обозначим буквой $\mathbf{U}$, а его меридиональную проекцию – $\mathbf{V}$. После введения функции тока $\psi = \psi(x, y)$ дифференциальным равенством (3.1.9)

$$d\psi = ky^{v-1}\rho(udy - vdx) \quad (1)$$

дифференциальные уравнения

$$\frac{d(2h + U^2)}{dt} = 0, \quad \frac{ds}{dt} = 0, \quad \frac{d(y^{v-1}w)}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \mathbf{V}\nabla_1 \equiv u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}, \quad (2)$$

выполняющиеся вдоль линий тока – ЛТ (равенства (3.1.11))

$$vdx = udy, \quad d\psi = 0, \quad (3)$$

интегрируются. В интегралах (3.1.12) и (3.1.13)

$$2h + U^2 = 2H(\psi), \quad s = S(\psi), \quad y^{v-1}w = \Gamma(\psi) \quad (4)$$

функции $H(\psi)$ и $\Gamma(\psi)$ определяются по параметрам набегающего потока, а $S(\psi)$ – по параметрам набегающего потока и по приращениям энтропии на УВ, ψ , $H(\psi)$ и $\Gamma(\psi)$ на УВ не изменяются.

В дополнение к уравнениям и интегралам (1) – (4) и уравнениям состояния (согласно им все термодинамические параметры – известные функции двух из них, например, p и s) для описания рассматриваемых течений необходимо привлечь уравнение неразрывности (3.1.14)

$$\nabla_1(\rho\mathbf{V}) + (v-1)\frac{\rho v}{y} = 0, \quad \mathbf{V} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v, \quad \nabla_1 = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} \quad (5)$$

и одну из проекций векторного (двумерного) уравнения движения (3.1.15)

$$\rho(\mathbf{V}\nabla_1)\mathbf{V} + \nabla_1 p - \mathbf{j}(v-1)\frac{\rho w^2}{y} = 0. \quad (6)$$

В уравнениях (2), (5) и (6) $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ – орты осей x и y (при $v = 2$ ось x совпадает с осью вращения), а оператор ∇_1 при $v = 2$ допускает такие же сдвиги и вращения в плоскости x, y , как при $v = 1$.

В силу сохранения энтропии вдоль ЛТ

$$\mathbf{V}\nabla_1 p = \frac{1}{a^2} \mathbf{V}\nabla_1 p, \quad (7)$$

и уравнение неразрывности (5) принимает вид:

$$\frac{1}{\rho a^2} \mathbf{V}\nabla_1 p + \nabla_1 \mathbf{V} + (v-1) \frac{v}{y} = 0. \quad (8)$$

Дифференциальные уравнения (2) и (7), содержащие производные только вдоль ЛТ, имеют характеристическую форму, независимо от величины скорости $\mathbf{U}$ или её проекции $\mathbf{V}$. В соответствии с этим ЛТ, как и траектории частиц в нестационарных течениях назовём C^0 -характеристиками. В согласии с дифференциальными равенствами (2), (3) и (7) на них

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \operatorname{tg} \theta, \quad d\psi = 0, \quad d(2h + U^2) = 0, \quad ds = 0, \quad (9)$$

$$dp = a^2 d\rho = \rho dh = -\rho U dU, \quad d(y^{v-1}w) = 0.$$

Здесь θ – угол наклона вектора $\mathbf{V}$ к оси x , а цепочка выражений для dp – следствия третьего и четвёртого уравнений. Как и следовало ожидать, все уравнения (9), за исключением второго и последнего, совпадают или являются следствиями уравнений Гл. 3.2, которые выполняются на ЛТ в любых стационарных течениях.

Уравнение неразрывности (8) и проекция уравнения движения (6), например, на нормаль к вектору $\mathbf{V}$, содержат производные по разным направлениям, т.е. не являются характеристическими. Выясним, нельзя ли составить такие их линейные комбинации, которые будут характеристическими, т.е. будут содержать производные в одном направлении. Как будет показано ниже, характеристическую форму имеет проекция уравнения (6) на направление вектора $\mathbf{V}$. Однако получающееся при этом уравнение есть следствие выполняющихся на ЛТ уравнений (9). Последнее естественно, ибо (см. Гл. 3.1) из двух уравнений (6) одно – следствие второго и уравнения сохранения на ЛТ полной энтальпии.

Для упрощения анализа воспользуемся локальной прямоугольной системой координат $x'y'$ с началом в произвольной точке o и с осью ox' , направленной по вектору $\mathbf{V}$ в o , т.е. по каса-

тельной к проходящей через эту точку ЛТ (рис. 3.6, а). Если u' и v' – проекции $\mathbf{V}$ на оси x' и y' , $\mathbf{i}'$ и $\mathbf{j}'$ – орты этих осей, θ' – угол между $\mathbf{V}$ и осью x' и $\theta_o, \dots$ – значения $\theta, \dots$ в точке o , то

$$\begin{aligned}\theta &= \theta' + \theta_o, \quad u' = V \cos \theta', \quad v' = V \sin \theta', \quad \theta'_o = 0, \\ u'_o &= V_o, \quad v'_o = 0, \quad \mathbf{j} = \mathbf{i}' \sin \theta_o + \mathbf{j}' \cos \theta_o.\end{aligned}\quad (10)$$

Наконец, согласно свойствам оператора ∇_1 имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{V} \nabla_1 p &= u' \frac{\partial p}{\partial x'} + v' \frac{\partial p}{\partial y'} = V_o \frac{\partial p}{\partial x'}, \quad \nabla_1 \mathbf{V} = \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{\partial V}{\partial x'} + V_o \frac{\partial \theta'}{\partial y'}, \\ (\mathbf{V} \nabla_1) \mathbf{V} &= \mathbf{i}' \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) + \mathbf{j}' \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = \\ &= \mathbf{i}' V_o \frac{\partial V}{\partial x'} + \mathbf{j}' V_o^2 \frac{\partial \theta'}{\partial x'}, \quad \nabla_1 p = \mathbf{i}' \frac{\partial p}{\partial x'} + \mathbf{j}' \frac{\partial p}{\partial y'}.\end{aligned}\quad (11)$$

Вторые выражения записаны с учётом значений u' и v' в точке o .

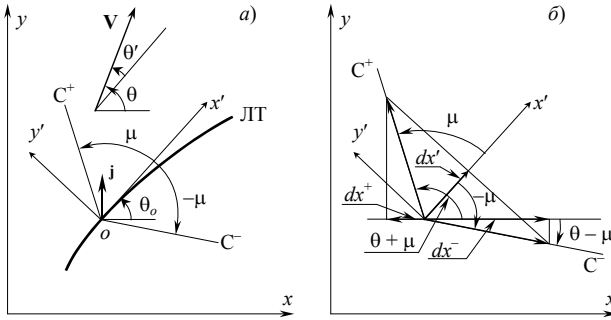


Рис. 3.6

Подстановка выражений (11) и формулы для $\mathbf{j}$ из (10) в уравнения (8) и (6) даст (индекс «о» опущен)

$$\begin{aligned}\frac{V}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial x'} + \frac{\partial V}{\partial x'} + V \frac{\partial \theta'}{\partial y'} + (v-1) \frac{v}{y} &= 0, \\ \mathbf{i}' \rho V \frac{\partial V}{\partial x'} + \mathbf{j}' \rho V^2 \frac{\partial \theta'}{\partial x'} + \mathbf{i}' \frac{\partial p}{\partial x'} + \mathbf{j}' \frac{\partial p}{\partial y'} - (\mathbf{i}' \sin \theta + \mathbf{j}' \cos \theta)(v-1) \frac{\rho w^2}{y} &= 0.\end{aligned}$$

Согласно первому равенству (10) углы θ' и θ отличаются на константу. С учётом этого полученные уравнения сведутся к

$$\frac{V}{a^2} \frac{\partial p}{\partial x'} + \rho \frac{\partial V}{\partial x'} + \rho V \frac{\partial \theta}{\partial y'} + \frac{v-1}{y} \rho V \sin \theta = 0, \quad (12)$$

$$\rho V \frac{\partial V}{\partial x'} + \frac{\partial p}{\partial x'} - \frac{v-1}{y} \rho w^2 \sin \theta = 0, \quad (13)$$

$$\rho V^2 \frac{\partial \theta}{\partial x'} + \frac{\partial p}{\partial y'} - \frac{v-1}{y} \rho w^2 \cos \theta = 0. \quad (14)$$

В дальнейшем вместо уравнения (12) используется не содержащая $\partial V/\partial x'$ комбинация уравнений (12) и (13):

$$(M^2 - 1) \frac{\partial p}{\partial x'} + \rho V^2 \frac{\partial \theta}{\partial y'} + \frac{v-1}{y} \rho U^2 \sin \theta = 0, \quad M^2 = \frac{V^2}{a^2}. \quad (15)$$

Число Маха в этом и в последующих уравнениях определяется по величине меридиональной компоненты V вектора скорости.

Как и ожидалось, уравнение (13) – проекция уравнения (6) на ось x' – имеет характеристический вид. Покажем, что это уравнение сводится к одному из справедливых на ЛТ уравнений (9). Последнее из них приводит к цепочке равенств

$$\begin{aligned} \frac{d(y^{v-1}w)}{dt} &= u \frac{\partial(y^{v-1}w)}{\partial x} + v \frac{\partial(y^{v-1}w)}{\partial y} = y^{v-1} \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v-1}{y} wv \right) = \\ &= y^{v-1} \left(\mathbf{V} \nabla_1 w + \frac{v-1}{y} wv \right) = y^{v-1} V \left(\frac{\partial w}{\partial x'} + \frac{v-1}{y} w \sin \theta \right) = 0, \end{aligned}$$

последнее из которых записано в точке o . С учётом этого уравнение (13) сведётся к

$$\begin{aligned} \rho V \frac{\partial V}{\partial x'} + \frac{\partial p}{\partial x'} + \rho w \frac{\partial w}{\partial x'} &= \frac{\rho}{2} \frac{\partial(V^2 + w^2)}{\partial x'} + \frac{\partial p}{\partial x'} = \frac{\rho}{2} \frac{\partial U^2}{\partial x'} + \frac{\partial p}{\partial x'} = \\ &= \rho U \frac{\partial U}{\partial x'} + \frac{\partial p}{\partial x'} = 0, \end{aligned}$$

т.е. – к одному из уравнений (9).

Уравнения (14) и (15) содержат производные от θ и p по разным направлениям, т.е. не являются характеристическими. Поскольку характеристическими могут оказаться их линейные ком-

бинации, умножим первое на пока неизвестный скаляр λ и сложим со вторым. После несложных преобразований получим

$$\lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial x'} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial y'} \right) + \frac{M^2 - 1}{\rho V^2} \left(\frac{\partial p}{\partial x'} + \frac{\lambda}{M^2 - 1} \frac{\partial p}{\partial y'} \right) + \frac{v - 1}{y} \frac{U^2 \sin \theta - \lambda w^2 \cos \theta}{V^2} = 0.$$

Это уравнение будет характеристическим при одинаковых дифференциальных операторах, действующих на p и на θ , т.е. при

$$\lambda = \pm \sqrt{M^2 - 1} = \pm \operatorname{ctg} \mu. \quad (16)$$

При таких значениях λ предыдущее уравнение станет

$$\frac{d^\pm \theta}{dx'} \pm \frac{\operatorname{ctg} \mu}{\rho V^2} \frac{d^\pm p}{dx'} + \frac{v - 1}{y} F^\pm = 0, \quad \frac{d^\pm}{dx'} = \frac{\partial}{\partial x'} \pm \operatorname{tg} \mu \frac{\partial}{\partial y'}, \quad (17)$$

$$F^\pm(\theta, w, \mu, V) = \frac{\pm V^2 \sin \theta \sin \mu - w^2 \cos(\theta \pm \mu)}{V^2 \cos \mu}, \quad F^\pm(0, 0, \mu, V) = 0.$$

Согласно (16) **угол Маха** μ удобно ввести формулой

$$\sin \mu = 1/M. \quad (18)$$

В силу определений (16) и (18) $\mu = \pi/2$ и 0 при $M = 1$ и ∞ .

Оба определения μ показывают, что нехарактеристические уравнения (14) и (15) можно заменить характеристическими уравнениями (17) лишь тогда, когда число Маха, посчитанное по меридиональной компоненте скорости, $M = V/a \geq 1$. В этом смысле при $M = V/a > 1$ система пяти уравнений, описывающих плоские и осесимметричные течения идеального газа, **гиперболическая**. На линиях, где $M = 1$ (**звуковых линиях** – 3Л), направления C^+ - и C^- -характеристик и два уравнения (17) совпадают. Такую ситуацию назывём **параболическим вырождением**. При $M < 1$ подсистема уравнений (14) и (15), содержащая производные только от p и θ , **эллиптическая**. Подсистема (2), выполняющаяся вдоль ЛТ, гиперболическая при любых числах Маха.

Независимость типа уравнений плоского и осесимметричного течений от z - или ϕ -компоненты вектора скорости естественна. Действительно, при $v = 1$, перейдя в инерциальную систему координат, движущуюся в направлении оси z , можно сделать ком-

поненту w и число Маха, посчитанное по полной скорости, любыми. Это, тем не менее, не должно отразиться на типе уравнений. Так оно и есть, ибо в плоском случае w вообще не входит в уравнения, определяющие остальные параметры.

Характеристическая система (17) записана в локальных координатах. Это упростило анализ, но неудобно при решении задачи в целом. Поэтому вернёмся к исходным координатам xu . Полные производные в уравнениях (17) берутся вдоль линий, касательные к которым в каждой точке сверхзвукового потока образуют с осью x' , т.е. с вектором $\mathbf{V}$ и с ЛТ углы $\pm\mu$ (рис. 3.6, а). Первые назовём ***C⁺-характеристиками***, вторые – ***C⁻-характеристиками (характеристиками 1-го и 2-го семейств)***. В координатах $x'y'$ их направления даются уравнениями

$$dy'/dx' = \pm \operatorname{tg} \mu.$$

С учётом ориентации локальной системы в координатах xu уравнения, определяющие направления $C^\pm$ -характеристик, станут

$$C^+ : dy/dx = \operatorname{tg}(\theta + \mu), \quad C^- : dy/dx = \operatorname{tg}(\theta - \mu). \quad (19^\pm)$$

Для возврата к переменным xu в уравнениях (17) свяжем приращения dx' и $dx^\pm$, отвечающие фиксированному смещению вдоль C^+ -характеристики (аналогично dx' и dx^- – вдоль C^- -характеристики). Согласно определениям dx' , dx^+ и dx^- , которые с учётом их знаков на рис. 3.6, б показаны стрелками, имеем

$$\frac{dx^-}{\cos(\theta - \mu)} = \frac{dx'}{\cos \mu}, \quad \frac{-dx^+}{\cos[\pi - (\theta + \mu)]} = \frac{dx^+}{\cos(\theta + \mu)} = \frac{dx'}{\cos \mu}$$

или

$$dx' = \frac{\cos \mu}{\cos(\theta \pm \mu)} dx^\pm.$$

Исключение с помощью этих равенств dx' из уравнений (17) даст

$$d\theta \pm \frac{\operatorname{ctg} \mu}{\rho V^2} dp + \frac{v-1}{y} F^\pm dx = 0, \quad (20^\pm)$$

$$F^\pm(\theta, w, \mu, V) = \pm \frac{\sin \theta \sin \mu}{\cos(\theta \pm \mu)} - \frac{w^2}{V^2}, \quad F^\pm(0, 0, \mu, V) = 0.$$

Уравнения (20[±]) – ***условия совместности (УС)*** согласно равенствам (19[±]) можно переписать в форме

$$d\theta \pm \frac{\text{ctg}\mu}{\rho V^2} dp + \frac{v-1}{y} F^\pm dy = 0, \quad F^\pm = F^\pm(\theta, w, \mu, V) =$$

$$= \pm \frac{\sin\theta \sin\mu}{\sin(\theta \pm \mu)} - \frac{w^2}{V^2} \text{ctg}(\theta \pm \mu), \quad F^\pm(0, 0, \mu, V) = 0. \quad (21^\pm)$$

При расчётах УС в форме (20[±]) непригодны там, где касательные к C⁺- или C⁻-характеристикам близки к вертикали, а в форме (21[±]) – к горизонтали. Дважды учтя уравнения (19[±]), получим

$$\frac{\pm \sin\mu dx}{\cos(\theta \pm \mu)} = \pm \sin\mu \frac{\sin^2(\theta \pm \mu) + \cos^2(\theta \pm \mu)}{\cos(\theta \pm \mu)} dx =$$

$$= \pm \sin\mu [\sin(\theta \pm \mu) dy + \cos(\theta \pm \mu) dx] = \cos\theta dy - \sin\theta dx.$$

В силу этого УС (20[±]) примут форму, пригодную во всех случаях

$$d\theta \pm \frac{\text{ctg}\mu}{\rho V^2} dp + (v-1) \frac{Ydy - Xdx}{y} = 0, \quad X = \sin^2\theta + \frac{w^2}{V^2}, \quad (22^\pm)$$

$$Y = \sin\theta \cos\theta.$$

Глава 3.5. Плоскопараллельные однородные течения.

Их инварианты. Простые волны.

Теорема Никольского – Таганова

Сокращения: ЗЛ – звуковая линия, ЛТ – линия тока, МСЗ – местная сверхзвуковая зона, ПВ – простая волна, ПВР – простая волна разрежения, ТНТ – теорема Никольского–Таганова, УВ – ударная волна, ЦПВ – центрированная ПВ, ЦВР – ЦПВ разрежения.

При $v = 1$ уравнения (3.4.19[±]) и (3.4.20[±]) сводятся к

$$C^+ : \frac{dy}{dx} = \text{tg}(\theta + \mu), \quad d\theta + \frac{\text{ctg}\mu}{\rho V^2} dp = 0;$$

$$C^- : \frac{dy}{dx} = \text{tg}(\theta - \mu), \quad d\theta - \frac{\text{ctg}\mu}{\rho V^2} dp = 0. \quad (1)$$

Пусть в дополнение в набегающем потоке $w = 0$, и он однороден по H и s . Так как w , H и s сохраняются на ЛТ (s – до УВ), то

$$2h + V^2 = 2H_0, \quad s = s_0, \quad w = 0$$

всюду, куда приходят эти ЛТ. Поэтому все отличные от угла θ параметры газа – функции только давления p , т.е.

$$\rho = \rho(p, s_0) = \rho(p), \quad a = a(p), \quad V = V(p), \quad M = M(p), \quad \mu = \mu(p), \quad (2)$$

и для $p \leq p_*$, где p_* – отвечающее $M = 1$ критическое давление, можно ввести функцию

$$\Phi(p) = \int_{p_*}^p \frac{\text{ctg} \mu}{\rho V^2} dp. \quad (3)$$

Производная $d\Phi/dp = (\text{ctg} \mu)/(\rho V^2) \geq 0$. Следовательно, $\Phi(p)$ – монотонно возрастающая функция p , и между p и $\Phi(p)$ имеет место взаимно однозначное соответствие.

С введением функции $\Phi(p)$ условия совместности из (1) сведутся к равенствам

$$C^\pm: \quad dI^\pm = 0, \quad I^\pm = \theta \pm \Phi(p). \quad (4)$$

Согласно им I^+ сохраняется на C^- , а I^- – на C^+ -характеристиках. Поэтому I^+ и I^- назовём *инвариантами* или *инвариантами Римана* сверхзвуковых однородных плоскопараллельных потоков.

Параметрам однородного набегающего потока припишем индекс «0». В областях возмущённого течения, покрытых C^+ -характеристиками, начинающимися в набегающем потоке, в силу уравнения (4) для C^+ -характеристик постоянен инвариант $I^+ = I_0^+$. На рис. 3.7, a – это треугольник $a^{\circ}cb^{\circ}$ (область 1). Аналогично в треугольнике acb (в области 2) постоянен инвариант $I = I_0$. Постоянство одного из инвариантов приводит к тому, что в областях 1 и 2 в дополнение к термодинамическим параметрам, для которых справедливы формулы (2), известной функцией давления является и угол θ . Если в набегающем потоке $\theta_0 = 0$, т.е. ось x направлена по вектору V_0 , то в областях 1 и 2 соответственно

$$\theta = \theta^+(p) = I_0^+ - \Phi(p) = \Phi(p_0) - \Phi(p) = - \int_{p_0}^p \frac{\text{ctg} \mu}{\rho V^2} dp, \quad (5^+)$$

$$\theta = \theta^-(p) = I_0^- + \Phi(p) = \Phi(p) - \Phi(p_0) = \int_{p_0}^p \frac{\text{ctg} \mu}{\rho V^2} dp. \quad (5^-)$$

Известные функции $\theta^\pm(p)$ в формулах $(5^\pm)$, как и функции в правых частях формул (2), не зависят от формы образующих ab и

$a^\circ b^\circ$ на рис. 3.7, а. Течение, все параметры которого – заранее известные функции одного из них, назовём **простой волной (ПВ)**.

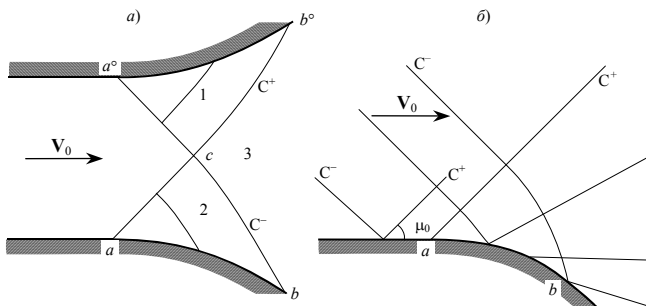


Рис. 3.7

В формуле (3), определяющей функцию $\Phi(p)$, нижний предел в интеграле p_* можно заменить на $p_0 \leq p_*$. Тогда при выбранном направлении оси x в набегающем потоке $\Gamma_0 = \Gamma_0^+ = 0$. При такой замене, что, как правило, далее предполагается,

$$\theta \pm \Phi(p) = 0, \quad (6^\pm)$$

в областях 1 и 2 при верхнем и нижнем знаках, соответственно.

Равенства (6^+) и (6^-) выполняются, в частности, на отрезках $a^\circ b^\circ$ и ab соответственно верхней стенки канала, где $\theta = \theta_{w^\circ}(x)$, и его нижней стенки, где $\theta = \theta_w(x)$, т.е.

$$\Phi(p_{w^\circ}) \equiv \int_{p_0}^{p_{w^\circ}} \frac{\text{ctg} \mu}{\rho V^2} dp = -\theta_{w^\circ}(x) \leq 0, \quad \Phi(p_w) \equiv \int_{p_0}^{p_w} \frac{\text{ctg} \mu}{\rho V^2} dp = \theta_w(x) \leq 0. \quad (7)$$

В силу этих неравенств верхние пределы интегралов – давления p_{w° и p_w меньше p_0 , т.е. при сверхзвуковом набегающем потоке на обеих стенках расширяющегося канала давление падает – в областях 1 и 2 реализуются **ПВ разрежения (ПВР)**.

Как видно из рис. 3.7, а, границей, по которой ПВ примыкает к равномерному набегающему потоку, служит C^+ - или C^- -характеристика, например, для области 1 это – отрезок C^- -характеристики $a^\circ c$. На любой C^- -характеристике, выходящей из произвольной точки w° отрезка $a^\circ b^\circ$ верхней стенки, постоянен инвариант $\Gamma = \theta - \Phi(p)$, равный согласно формуле (7) $2\theta_{w^\circ}$, и на ней

$$\theta - \Phi(p) = 2\theta_{w^{\circ}}.$$

Кроме того, в области 1 выполняется равенство (6⁺). Следовательно, в ней на отрезке С⁻-характеристики, выходящей из точки w° , $\theta = \theta_{w^{\circ}}$, $p = p_{w^{\circ}}$, а прочие параметры, включая угол Маха μ , – функции p – также постоянны. Значит, в силу уравнения (1) указанный отрезок С⁻-характеристики прямолинейный. Аналогично устанавливается прямолинейность в области 2 С⁺-характеристик. В область 3 С[±]-характеристики из набегающего потока не приходят. В ней при криволинейных контурах ab и $a^{\circ}b^{\circ}$ характеристики обоих семейств также криволинейны.

При обтекании изолированной стенки (рис. 3.7, б) ПВ с прямолинейными полубесконечными С⁺-характеристиками реализуется справа от *граничной* С⁺-характеристики, выходящей из точки a . Если с удалением от точки a угол θ_w монотонно уменьшается, то, как показано выше, давление p_w тоже монотонно падает. Этот вывод справедлив для любого газа, ибо информация о знаке ω_{pp} при его получении не использовалась. Выясним, как при этом изменяется наклон С⁺-характеристик, т.е. – величина $\operatorname{tg}(\theta + \mu)$. В рассматриваемой ПВ все параметры – функции p , причём в силу определений μ и $\Phi(p)$ и формулы (6⁻)

$$\mu_p \equiv \frac{d\mu}{dp} = \frac{-M_p}{M\sqrt{M^2-1}}, \quad \theta_p = \frac{\sqrt{M^2-1}}{\rho V^2}, \quad \frac{d\operatorname{tg}(\theta + \mu)}{dp} = \frac{\theta_p + \mu_p}{\cos^2(\theta + \mu)}.$$

В результате, учтя формулу (3.3.11) для M_p , найдём

$$\frac{d\operatorname{tg}(\theta + \mu)}{dp} = \frac{\rho^2 a^2 \omega_{pp}}{2 \cos^2(\theta + \mu) \sqrt{M^2 - 1}}.$$

Для нормального газа ($\omega_{pp} > 0$) эта производная положительна, и наклон С⁺-характеристик с уменьшением давления также уменьшается, и они расходятся веером, как изображено на рис. 3.7, б.

Пусть в точке b к криволинейному участку стенки ab плавно примыкает вторая прямолинейная образующая. Тогда снизу по потоку ПВР будет ограничена С⁺-характеристикой, выходящей из точки b . По этой характеристике к ПВ примыкает равномерный поступательный поток $M = M_+ > M_0$. Зафиксировав угол поворота потока θ_+ , начнём уменьшать протяженность участка ab . В

пределе он стянется в точку. Если совместить с ней начало координат, то C^+ -характеристики ПВ станут лучами (рис. 3.8):

$$y/x = \operatorname{tg}(\theta + \mu). \quad (8)$$

Получившееся течение – *центрированная простая волна разрежения (ЦВР)* или *течение Прандтля–Майера*. В дополнение к уравнению (8) для ЦВР справедливы все соотношения, записанные выше для ПВ, в частности, – равенство (6⁻). Пользуясь им, по углу θ_+ можно определить p_+ , а, зная p_+ , по формулам (2) – все остальные параметры на правой границе ЦВР. Тем же способом определяются C^+ -характеристики – лучи, идущие из излома и отвечающие любому давлению ($p_+ < p < p_0$).

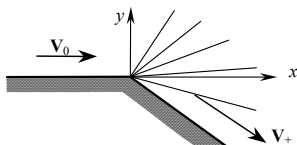


Рис. 3.8

Решение, описывающее ЦВР, можно построить, воспользовавшись тем, что среди определяющих параметров задачи обтекания излома нет величины с размерностью длины. По этой причине эта задача автомодельная с автомодельной переменной $\xi = x/y$. Условия существования нетривиального решения описывающих её обыкновенных дифференциальных уравнений приводит к равенству (8) и другим полученным выше соотношениям.

Для ПВР и ЦВР есть предельный угол θ^M поворота потока, отвечающий $p = 0$ в интеграле для функции $\Phi(p)$. Его модуль

$$|\theta^M| = -\Phi(0) \equiv \int_0^{p_0} \frac{\operatorname{ctgu}}{\rho V^2} dp \quad (9)$$

тем больше, чем ближе давление p_0 к p_* , т.е. M_0 – к единице.

В однородных течениях $dp = -\rho V dV$, и, перейдя от p к V , равенства (5[±]) заменим на

$$\theta \mp \Sigma(V) = I_0^\pm, \quad \Sigma(V) = -\Phi(p) = \int_{V_0}^V \frac{\operatorname{ctgu}}{V} dV. \quad (10^\pm)$$

Здесь, как и ранее, $C^+(C^-)$ -характеристикам отвечают верхние (нижние) знаки. Для совершенного газа после перехода в выражении для $\Sigma(V)$ от V к $\lambda = V/a_*$, а затем по формуле (3.2.7) от λ к M интеграл при $V_0 = V_* = a_*$ берётся и получается равным

$$\Sigma(V) = \int_{V_*}^V \frac{\text{ctg}\mu}{V} dV = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \arctg(\sqrt{\varepsilon} \text{ctg}\mu) + \mu - \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}. \quad (11)$$

Согласно формулам (9) – (11)

$$|\theta^M| = \Sigma(V^M) = 0.5(1/\sqrt{\varepsilon} - 1)\pi.$$

Для $\gamma = 1.4$ это даёт $|\theta^M| \approx 135^\circ$. Если $\gamma \rightarrow 1$, то ε уменьшается и предельный угол может стать сколь угодно большим. Плавный поворот на любой угол ограниченного по z потока возможен при введении постоянной z -компоненты скорости w_0 . Возникающий благодаря ей скос потока, не влияя на течение в плоскости xu , позволяет построить спиралевидный ограниченный или неограниченный по высоте канал постоянной (в направлении оси z) ширины, реализующий такой поворот. Кстати, при выполнении условий (2) течение в плоскости xu не изменяется при введении в набегающем потоке произвольного распределения $w_0(\psi)$.

Интегралы $(10^\pm)$ – **уравнения $C^\pm$ -характеристик в плоскости годографа** (рис. 3.9, а). В этой плоскости $C^\pm$ -характеристики покрывают *сверхзвуковое кольцо* $1 \leq V/a_* \leq V^M/a_* = \varepsilon^{-1/2}$. Согласно формулам $(10^\pm)$ вдоль них $d\theta/dV = \pm(\text{ctg}\mu)/V = \pm(M^2 - 1)^{1/2}/V$. Поэтому $C^\pm$ -характеристики на звуковой окружности (при $M = 1$) касаются лучей $\theta = \text{const}$, а на окружности $V = V^M$, где $M = \infty$, – этой окружности. Пусть некоторая базовая C^+ -характеристика (BX^+) выходит из точки $(V = 1, \theta = 0)$. Тогда аналогичная базовая C^- -характеристика (BX^-) согласно $(10^\pm)$ получается отражением BX^+ относительно оси u . На рис. 3.9, а BX^+ и BX^- – жирные кривые. Прочие C^+ - и C^- -характеристики получаются поворотом BX^+ и BX^- на произвольные углы. В кружках на рис. 3.9, а изображены ЦВР, описываемые кривыми C^+ или C^- , на которых постоянен инвариант Γ^+ или Γ_- , соответственно. Для совершенного газа $C^\pm$ -характеристики в плоскости годографа, описываемые уравнениями $(10^\pm)$ и (11), называются *эпициклоидами*.

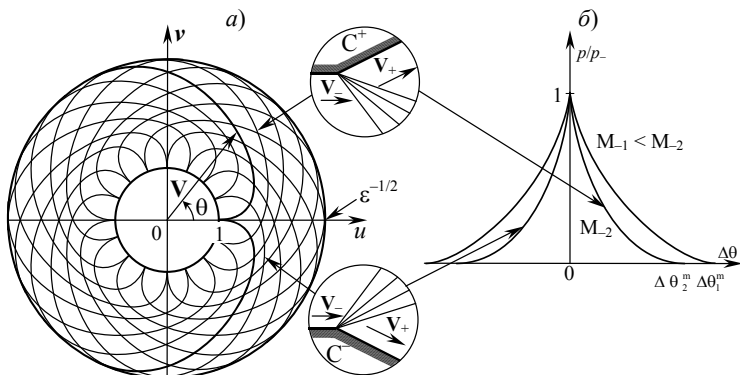


Рис. 3.9

При анализе взаимодействия поверхностей разрыва ЦВР удобно описывать в переменных θ и p . При заданных числе Маха $M_- \geq 1$, угле θ_- и давлении $p_- \leq p_*$ набегающего потока зависимости $p = p^\pm(\Delta\theta)$, где $\Delta\theta = \theta - \theta_-$, для ЦВР определяются формулами (5[±]). Согласно им

$$\Delta\theta = \mp\Phi(p) \pm \Phi(p_-), \quad \frac{d(p/p_-)}{d\Delta\theta} = \frac{\mp\rho V^2}{p_- \sqrt{M^2 - 1}}, \quad (12)$$

$$\left. \frac{d(p/p_-)}{d\Delta\theta} \right|_{p=p_-} = \frac{\mp\gamma M_-^2}{\sqrt{M_-^2 - 1}}, \quad \left. \frac{d(p/p_-)}{d\Delta\theta} \right|_{p=0} = \frac{\mp\rho V^2}{p_- \sqrt{M^2 - 1}} \Big|_{M=\infty} = 0.$$

При $M_- \geq 2^{1/2}$ модуль производной $d(p/p_-)/d\Delta\theta$ растёт с ростом M_- . Это и последнее равенство (12) учтены при построении зависимостей $p = p^\pm(\Delta\theta)$ на рис. 3.9, б для $M_-2 > M_-1 > 2^{1/2}$.

Для однородных плоских течений со **звуковыми линиями** (ЗЛ) развитый выше аппарат позволяет сформулировать важное правило, получившее название **теоремы Никольского–Таганова (ТНТ)** (А.А. Никольский, Г.И. Таганов, 1946). Согласно ей, если при движении по ЗЛ область сверхзвукового потока находится справа, то угол θ монотонно убывает, т.е. вектор скорости $\mathbf{V}$ поворачивается по часовой стрелке. Доказательство ТНТ опирается на уравнения (3.4.14) и (3.4.15). В плоском случае (при $v = 1$) они принимают вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial x'} = -\frac{1}{\rho V^2} \frac{\partial p}{\partial y'}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y'} = \frac{1-M^2}{\rho V^2} \frac{\partial p}{\partial x'}. \quad (13)$$

Пусть $y' = y'_{sl}(x')$ – уравнение ЗЛ в локальных координатах (рис. 3.10). Тогда согласно уравнениям (13) для производной $d\theta/dx'$, вычисляемой вдоль ЗЛ, имеем

$$\frac{d\theta}{dx'} = \frac{\partial \theta}{\partial x'} + \frac{dy'_{sl}}{dx'} \frac{\partial \theta}{\partial y'} = \frac{\partial \theta}{\partial x'} = -\frac{1}{\rho V^2} \frac{\partial p}{\partial y'}.$$

Для однородных плоских течений с ростом числа Маха давление уменьшается (точнее, не растёт). Для ситуаций, изображённых на рис. 3.10, число Маха с ростом y' уменьшается. Следовательно, производная $\partial p/\partial y'$ положительна (в каких-то точках ЗЛ она может обратиться в нуль), и в силу последнего уравнения

$$\frac{d\theta}{dx'} = -\frac{1}{\rho V^2} \frac{\partial p}{\partial y'} \leq 0. \quad (14)$$

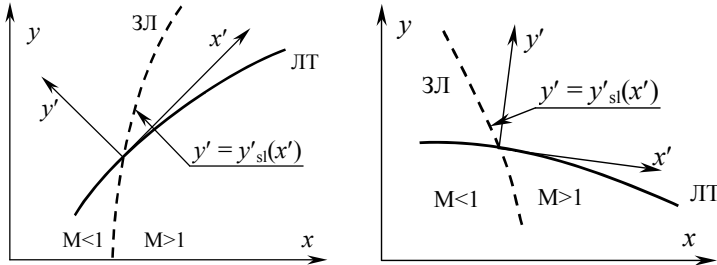


Рис. 3.10

В случаях, рассмотренных на рис. 3.10, направлению движения, которое фигурирует в формулировке ТНТ ($M > 1$ справа по ходу), отвечает рост x' . Поэтому согласно неравенству (14) θ при таком движении монотонно убывает. Если на рис. 3.10 поменять местами области до- и сверхзвукового течений, то одновременно изменятся знак неравенства в формуле (14) и направление движения (теперь x' будет уменьшаться). В результате если при движении по ЗЛ сверхзвуковой поток находится справа по ходу, то угол θ по-прежнему уменьшается.

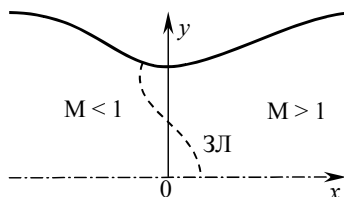


Рис. 3.11

ТНТ сразу даёт ответ о ЗЛ в плоском сопле Лавеля (рис. 3.11). Если ось x лежит на плоскости симметрии сопла, то на ней $\theta = 0$. В силу ТНТ при движении по ЗЛ угол θ либо убывает, либо остаётся неизменным. В первом случае ЗЛ приходит на стенку сужающегося участка образующей, как изображено на рис. 3.11. Второй случай особый, ибо его реализация возможна только при специальном профилировании сужающейся части контура сопла. Если такое профилирование выполнено, то все параметры на ЗЛ постоянны ($\theta = 0$, $M = 1$, $\mu = \pi/2$), ЗЛ – прямолинейный отрезок, нормальный оси x , характеристики обоих семейств касаются ЗЛ (более того, C -характеристика совпадает со ЗЛ).

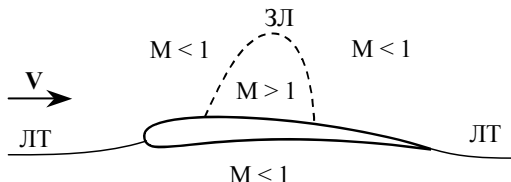


Рис. 3.12

ТНТ была доказана в связи с течениями в *местных сверхзвуковых зонах* (МСЗ), возникающих при обтекании профилей околозвуковым потоком (рис. 3.12). При превышении числа Маха набегающего потока M_0 некоторого критического значения M_0^* МСЗ возникает сначала в области максимального разрежения над верхней выпуклой образующей профиля, как это следует из первого уравнения (13). Действительно, над ней ЛТ тоже выпуклые, а значит, на них $\partial\theta/\partial x' < 0$. Поэтому согласно первому уравнению

(13) $\partial p / \partial y' > 0$, т.е. давление с удалением от профиля растёт. Следовательно, на профиле $p < p_0$, а $M > M_0$.

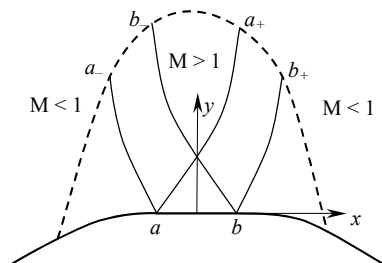


Рис. 3.13

Обычно МСЗ, наблюдаемые в аэродинамических трубах при сверхкритическом ($M_0 > M_0^*$) обтекании профилей, снизу по потоку ограничены достаточно интенсивной УВ – **закрывающим скачком**. В 40–50-х гг. XX века усилия многих аэродинамиков были направлены на выяснение причин его появления. Одно из следствий ТНТ – демонстрация разрушения безударного сверхзвукового течения при небольшом *спрямлении* в МСЗ обтекаемого контура (участок ab на рис. 3.13). Покажем это.

Вдоль отрезков a_a , b_b и aa_+ , bb_+ C^- и C^+ -характеристик сохраняются соответствующие инварианты. На ЗЛ $p = p_*$, а для оси x , направленной по ab , $\theta_b = \theta_a = 0$. С учётом этого и того, что $\Phi(p_{a-}) = \Phi(p_{b-}) = \Phi(p_*) = 0$, условие постоянства инварианта Γ на отрезках a_a и b_b C^- -характеристик сведётся к равенствам

$$\theta_{a-} = -\Phi(p_a) = -\int_{p_*}^{p_a} \frac{\text{ctg} \mu}{\rho V^2} dp, \quad \theta_{b-} = -\Phi(p_b) = -\int_{p_*}^{p_b} \frac{\text{ctg} \mu}{\rho V^2} dp.$$

Вычитание второго равенства из первого даст

$$\theta_{a-} - \theta_{b-} = \int_{p_*}^{p_b} \frac{\text{ctg} \mu}{\rho V^2} dp - \int_{p_*}^{p_a} \frac{\text{ctg} \mu}{\rho V^2} dp = \int_{p_a}^{p_b} \frac{\text{ctg} \mu}{\rho V^2} dp.$$

По ТНТ левая часть этого равенства положительна. Поэтому

$$p_b > p_a, \quad (15)$$

и поток на отрезке ab тормозится. Аналогично из условий сохранения инварианта I^+ на отрезках aa_+ и bb_+ следует, что

$$\theta_{a+} = \Phi(p_a) = \int_{p_*}^{p_a} \frac{\operatorname{ctgu}}{\rho V^2} dp, \quad \theta_{b+} = \Phi(p_b) = \int_{p_*}^{p_b} \frac{\operatorname{ctgu}}{\rho V^2} dp.$$

Отсюда в силу неравенства (15) $\theta_{b+} > \theta_{a+}$, что противоречит ТНТ. Разрешение этого противоречия – допущение пересечения характеристик aa_+ и bb_+ , исключающего их приход на ЗЛ. Следовательно, возникает УВ, интенсивность которой тем меньше, чем меньше длина участка ab . Введение прямолинейного участка – один из способов инициирования УВ в МСЗ. Другой более простой и естественный способ – малый излом контура. При его обтекании также возникает слабая УВ, интенсивность которой тем меньше, чем меньше величина излома и протяженность, связанной с ним неровности. В действительности эти примеры демонстрируют лишь то, что сверхзвуковое течение – весьма чувствительный объект в том смысле, что малые его возмущения, как правило, иницируют слабые УВ. Скачок, замыкающий МСЗ, не связан с подобными малыми возмущениями.

Изучение причин образования скачков, замыкающих МСЗ, имеет богатую историю, в которой участвовали многие учёные (Ф.И. Франкль, К Гудерлей, Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Ю.Б. Лифшиц, О.С. Рыжов, И.А. Чернов, Л.П. Горьков, Л.П. Питаевский и др.). Сначала рассматривалась возможность зарождения скачка на ЗЛ (в случае рис 3.12 – на правой границе МСЗ). Было установлено, что подобное возможно только тогда, когда на ЗЛ приходит характеристика, несущая конечные разрывы первых или бесконечные разрывы вторых производных от параметров потока, причём определённых знаков. В результате установилась точка зрения, что при обтекании достаточно гладких профилей замыкающий скачок, начинается из-за пересечения характеристик (в МСЗ над профилем – C^- -характеристик) – волн сжатия, идущих от ЗЛ. Пересечению C^- -характеристик способствует монотонное по ТНТ изменение угла наклона θ при движении вдоль ЗЛ: угол Маха на ней постоянен (равен $\pi/2$), и, следовательно, благодаря указанной монотонности каждая следующая C^- -характеристика направлена навстречу предыдущей.

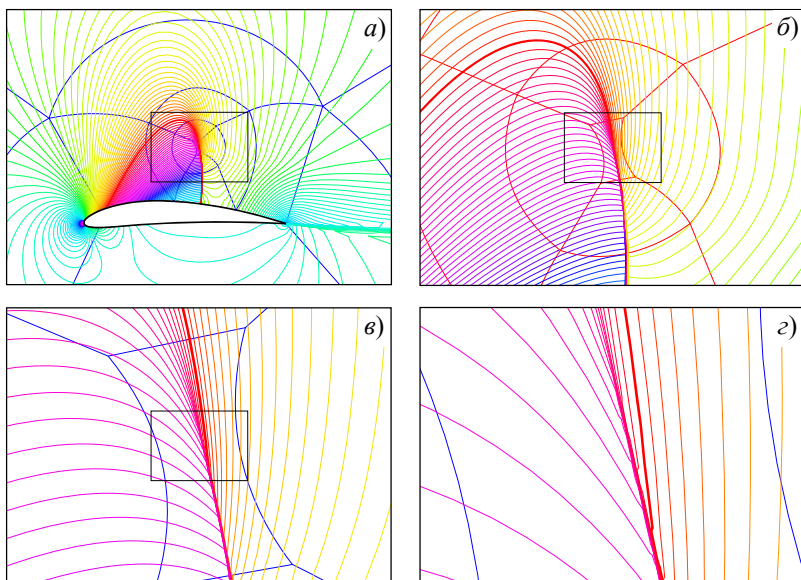


Рис. 3.14

Возникновение замыкающего скачка внутри МСЗ подтверждают результаты численного интегрирования уравнений Эйлера. На рис. 3.14 из [28], который отвечает обтеканию профиля потоком совершенного газа с $\gamma = 1.4$ и числом Маха $M_0 = 0.64$, изолинии нарисованы через $\Delta M = 0.01$. Наряду с ними, показаны границы блоков, покрывающих расчётную область. Вся расчётная область близка к кругу, радиус которого составлял пять хорд профиля. Жирная изолиния $M = 1$ включает звуковую линию и линию $M = 1$ в размазанном замыкающем скачке. Разбиение сетки на блоки с измельчением ячеек в блоках, окружающих начальную точку замыкающего скачка, проводилось в процессе счета. Из общего числа ячеек $4.6 \cdot 10^4$ на последний блок, занимающий пренебрежимо малую часть расчётной области, приходилось $1.6 \cdot 10^4$ ячеек.

Прямоугольники на рис. 3.14, а, б и в ограничивают те области, которые на последующих рисунках занимают все поле тече-

ния. Рассмотрение изолиний обнаруживает их сгущение и слияние слева от ЗЛ, т.е. внутри МСЗ, что, однако, обнаруживается не сразу. Если же исходить из рис. 3.14, а, то естественно принять, что замыкающий скачок начинается на ЗЛ, хотя качество изображения на фиг. 3.14, а выше качества снимков, получаемых в эксперименте.

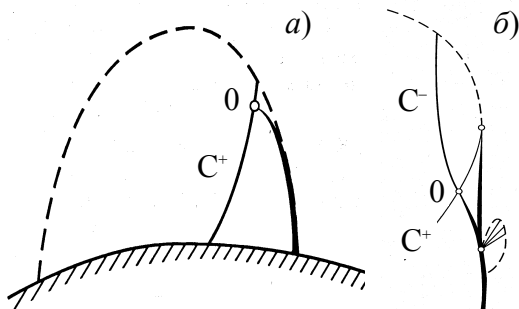


Рис. 3.15

Если ξ расстояние вдоль возникшего внутри МСЗ скачка от его начальной точки 0 (рис 3.15, а), а $[p]$ – перепад давления на нём, то, как и в Гл. 2.4, $[p] \propto \xi^{1/2}$. Следовательно, на C^+ -характеристике, проходящей через точку 0, $[I] \propto [p]^3 \propto \xi^{3/2}$, и терпят бесконечный разрыв вторые производные параметров потока. Знаки их оказываются такими, что в точке прихода C^+ -характеристики на ЗЛ зарождается второй скачок [29]. Оба скачка образуют «перевернутую λ -образную конфигурацию» (рис. 3.15, б). Для выявления, второго скачка нужны, однако, на порядки более мощные сетки, чем использовались при построении рис. 3.14.

Глава 3.6. Метод характеристик.

Решение типичных задач

Сокращения: ЗЛ – звуковая линия, ЛТ – линия тока, МХ – метод характеристик, ПВР – пучок волн разрежения, УВ – ударная волна, УС – условия совместности.

При расчёте и исследовании плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений метод характеристик (МХ) играет не меньшую роль, чем в одномерных нестационарных течениях.

В МХ используются интегралы (3.4.4)

$$2h + U^2 = 2H(\psi), \quad y^{v-1}w = \Gamma(\psi), \quad s = S(\psi), \quad (1)$$

Функции $H(\psi)$ и $\Gamma(\psi)$ определяются только набегающим потоком, $S(\psi)$ – им и изменениями энтропии на УВ (если они есть), а функция тока ψ введена дифференциальным равенством (3.1.9):

$$d\psi = ky^{v-1}\rho(udy - vdx) = ky^{v-1}\rho V(\cos\theta dy - \sin\theta dx). \quad (2)$$

Согласно ему ψ , постоянная на линиях тока (ЛТ), определена с точностью до аддитивной постоянной и множителя k , выбираемых из соображений удобства.

На $C^\pm$ -характеристиках справедливы уравнения (19 $^\pm$) и условия совместности – УС (3.4.22 $^\pm$)

$$\cos(\theta \pm \mu)dy = \sin(\theta \pm \mu)dx, \quad (3^\pm)$$

$$d\theta \pm \frac{\text{ctg}\mu}{\rho V^2} dp + \frac{v-1}{y}(Ydy - Xdx) = 0, \quad X\left(\theta, \frac{w}{V}\right) = \sin^2\theta + \frac{w^2}{V^2}, \quad (4^\pm)$$

$$Y(\theta) = \sin\theta\cos\theta, \quad Y(0) = X(0,0) = 0.$$

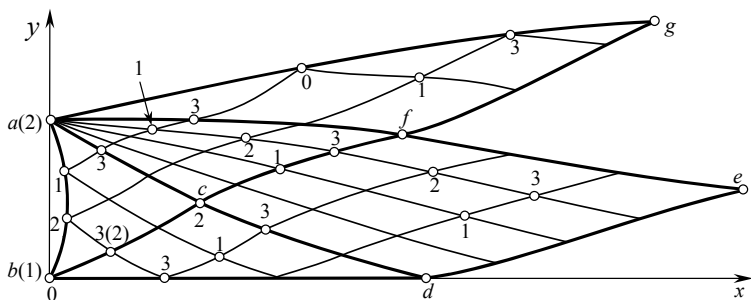


Рис. 3.16

В типичных задачах (рис. 3.16), параметры в точках 1 и 2 известны, а в точке 3 ищутся, 1–3 – отрезки C^+ -характеристик (характеристик 1-го семейства), 2–3 – отрезки C^- -характеристик (характеристик 2-го семейства). На рис. 3.16 изображены от-

личная от характеристик всех семейств линия начальных данных ab , стенка ag и $C^\pm$ -характеристики. Жирные линии – $C^\pm$ -характеристики – границы областей, течение в которых получается из решения задач: Коши, Гурса и т.д. Обозначение точки 3(2) означает, что она фигурирует в двух *тройках точек* 1, 2 и 3: сначала как искомая, а затем как известная.

В треугольнике abc решается **задача Коши**. В ней параметры заданы на отрезке ab , причём $\psi_b = 0$ и на оси x , а за счёт выбора множителя k в уравнении (2) $\psi_a = 1$ и на стенке ag . Таким образом, задание параметров на AB включает задание функций $H(\psi)$, $\Gamma(\psi)$ и $S(\psi)$ при $0 \leq \psi \leq 1$. При $v = 1$ всегда, а при $v = 2$ для точки 1, не лежащей на оси симметрии, расчёт точки 3 в разных задачах идентичен и состоит в следующем. Отрезки $C^\pm$ -характеристик 1–3 и 2–3 пересекаются в точке 3. Поэтому, приближённо проинтегрировав по этим отрезкам уравнения (3 $^\pm$), получим

$$\begin{aligned} [\cos(\theta + \mu)_1 + \cos(\theta + \mu)_3](y_3 - y_1) &= [\sin(\theta + \mu)_1 + \sin(\theta + \mu)_3](x_3 - x_1), \\ [\cos(\theta - \mu)_2 + \cos(\theta - \mu)_3](y_3 - y_2) &= [\sin(\theta - \mu)_2 + \sin(\theta - \mu)_3](x_3 - x_2). \end{aligned} \quad (5)$$

При известных коэффициентах перед разностями $(y_3 - y_1)$, ... эти уравнения позволяют найти x_3 и y_3 . После этого, воспользовавшись результатом интегрирования уравнения (2) по отрезку 2–3

$$\begin{aligned} \psi_3 = \psi_2 + k \frac{(y^{v-1} \rho V \cos \theta)_2 + (y^{v-1} \rho V \cos \theta)_3}{2} (y_3 - y_2) - \\ - k \frac{(y^{v-1} \rho V \sin \theta)_2 + (y^{v-1} \rho V \sin \theta)_3}{2} (x_3 - x_2), \end{aligned} \quad (6)$$

определим ψ_3 . Зная ψ_3 и y_3 и воспользовавшись интегралами (1), вычислим энтропию s_3 и компоненту w_3 вектора скорости. Если функции $H(\psi)$, $\Gamma(\psi)$ и $S(\psi)$ заданы таблицами, то их значения при $\psi = \psi_3$ находятся квадратичной интерполяцией.

Интегрирование УС (4 $^\pm$) по отрезкам 1–3 и 2–3 даёт

$$\theta_3 - \theta_1 + \left[\left(\frac{\operatorname{ctg} \mu}{\rho V^2} \right)_1 + \left(\frac{\operatorname{ctg} \mu}{\rho V^2} \right)_3 \right] \frac{p_3 - p_1}{2} = (v - 1) \left[\left(\frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1}{y_1} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sin \theta_3 \cos \theta_3}{y_3} \left) \frac{y_1 - y_3}{2} + \left(\frac{\sin^2 \theta_1}{y_1} + \frac{w_1^2}{y_1 V_1^2} + \frac{\sin^2 \theta_3}{y_3} + \frac{w_3^2}{y_3 V_3^2} \right) \frac{x_3 - x_1}{2} \right], \\
& \theta_3 - \theta_2 - \left[\left(\frac{\operatorname{ctg} \mu}{\rho V^2} \right)_2 + \left(\frac{\operatorname{ctg} \mu}{\rho V^2} \right)_3 \right] \frac{p_3 - p_2}{2} = (v-1) \left[\left(\frac{\sin \theta_2 \cos \theta_2}{y_2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\sin \theta_3 \cos \theta_3}{y_3} \right) \frac{y_2 - y_3}{2} + \left(\frac{\sin^2 \theta_2}{y_2} + \frac{w_2^2}{y_2 V_2^2} + \frac{\sin^2 \theta_3}{y_3} + \frac{w_3^2}{y_3 V_3^2} \right) \frac{x_3 - x_2}{2} \right].
\end{aligned} \quad (7)$$

Если коэффициенты при приращениях и координаты x_3 и y_3 известны, то уравнения (7) определяют θ_3 и p_3 . Наконец, известные s_3 и p_3 и уравнения состояния позволяют найти ρ_3 , a_3 и h_3 . По h_3 и H_3 интеграл полной энтальпии (1) определит U_3 , после чего найдутся $V_3 = (U_3^2 - w_3^2)^{1/2}$, $M_3 = V_3/a_3$ и $\operatorname{ctg} \mu_3 = (M_3^2 - 1)^{1/2}$. Этим завершается расчёт точки 3.

Коэффициенты при приращениях в уравнениях (5) – (7) считались известными. На самом же деле, слагаемые в них с индексом «3» неизвестны. Поэтому решение строится итерациями. В первой итерации вторые слагаемые заменяются первыми, вычисленными по параметрам в точке 1 или 2. В следующих итерациях они вычисляются по параметрам предыдущей итерации. Разностные уравнения (6) и (7) аппроксимируют исходные дифференциальные со вторым порядком относительно приращений (интегралы при их получении вычислялись по *формуле трапеций*). Квадратичная интерполяция по ψ_3 сохраняет второй порядок точности. Теоретически второй порядок обеспечивают две итерации, но опыт расчётов оправдывает увеличение их числа до трёх.

В осесимметричном случае (при $v = 2$) для точек 1 или 3 на оси симметрии коэффициенты при dx и dy в УС (4) неопределены из-за обращения в нуль y , Y и X . Чтобы избавиться от неопределённостей, умножив УС в форме (3.4.21[±]) на y , получим

$$y d\theta \pm y \frac{\operatorname{ctg} \mu}{\rho V^2} dp \pm \left[\frac{\sin \theta \sin \mu}{\sin(\theta \pm \mu)} \mp \frac{w^2}{V^2} \operatorname{ctg}(\theta \pm \mu) \right] dy = 0, \quad (8^\pm)$$

где верхние (нижние) знаки отвечают C^+ (C^-)-характеристикам.

Для точки $1 \equiv b$, проинтегрировав уравнение (8^+) вдоль отрезка 1–3 и учтя, что $y_1 = \theta_1 = F_1^+ = 0$, после сокращения на y_3 придём к равенству

$$\theta_3 + \frac{\text{ctg}\mu_3}{\rho_3 V_3^2} (p_3 - p_1) = \left[\frac{w^2}{V^2} \text{ctg}(\theta + \mu) - \frac{\sin\theta \sin\mu}{\sin(\theta + \mu)} \right]_3. \quad (9)$$

Оно и второе уравнение (7) определяют θ_3 и p_3 . В первой итерации коэффициент при $(p_3 - p_1)$ в (9) вычисляется по параметрам в точке 1, а правая часть – по полусумме параметров в точках 1 и 2.

Применение описанных процедур ко всем парам точек 1 и 2 на отрезке ab даёт новый слой, содержащий на одну точку меньше исходного. Если N – число точек на ab , то после расчёта N слоев выстроится характеристический треугольник abc , боковые стороны которого ac и bc – отрезки C^+ - и C^- -характеристик. Здесь и далее предполагается, что распределения параметров на ab обеспечивают безударное течение в рассчитываемой области.

Треугольник abc – **область определённости** отрезка ab в том смысле, что течение в нём полностью и единственным образом определяется заданными распределениями параметров на ab . Как и в Гл. 2.8, справедливость данного утверждения – результат мысленной реализации описанной выше процедуры МХ. Представление о погрешности вычислений даёт отличие от нуля интеграла по контуру abc от правой части уравнения (2). Погрешность оценивается разностью значений m_c , полученных интегрированием по отрезкам C^- -характеристик согласно (6) и аналогичным интегрированием по отрезку C^+ -характеристики bc . При отсутствии УВ задачу Коши можно решать и в прямом (в сторону роста x), и в обратном направлении (в сторону уменьшения x).

По найденному отрезку bc C^+ -характеристики и условию $\theta = 0$ на оси x определяется течение в треугольнике bdc . Первой находится точка 3 оси x . При этом в осесимметричном случае УС на отрезке 2–3 используется в форме (8^-) . Это даёт уравнение

$$p_3 = p_2 + (\rho V^2 \text{tg}\mu)_2 \left[\frac{\sin\theta \sin\mu}{\sin(\theta - \mu)} + \frac{w^2}{V^2} \text{ctg}(\theta - \mu) - \theta \right]_2, \quad (10)$$

которое без итераций определяет давление p_3 . Поскольку ось x – ЛТ, то энтропия $s_3 = S_b$ известна, и по p_3 и s_3 из уравнений со-

стояния находятся ρ_3 , a_3 и h_3 , по h_3 и $H_3 = H_b$ из интеграла полной энтальпии (1) определяется $V_3 = U_3$, а затем M_3 и μ_3 . Наконец, уравнение, получающееся после интегрирования уравнения (3⁻),

$$x_3 = x_2 + \frac{\cos(\theta - \mu)_2 + \cos \mu_3}{\sin(\mu - \theta)_2 + \sin \mu_3} y_2$$

также без итераций определяет x_3 .

На рис. 3.16 в точке a поток поворачивается на положительный угол, т.е. $\theta_a = \theta_{a+}$ на ag больше, чем $\theta_a = \theta_{a-}$ на ab . В таком случае точка a – фокус в общем случае неавтономного пучка волн разрежения (ПВР). При этом для любых v и неравномерностях параметров на ab течение в точке a описывается формулами централизованной простой волны с постоянной w . Справедливость данного утверждения – естественное следствие уравнения (4⁺), связывающего θ , p , x и y на C^+ -характеристике, пересекающей ПВР бесконечно близко к точке a . При этом отношения изменений x и y к y_a стремятся к нулю, и увеличение угла от θ_{a-} до θ_{a+} может компенсировать только конечное изменение давления. По этой причине при описании течения в точке a в уравнении (4⁺), как и при $v = 1$, остаются лишь два первых слагаемых. В том же пределе любой конечный масштаб неоднородности на ab становится бесконечным. Расчёт точек ПВР, лежащих на разных C^- -характеристиках и совпадающих по $x \equiv x_a$ и $y \equiv y_a$, ведётся при заданном приращении $(\theta_3 - \theta_1)$ или $(p_3 - p_1)$ по первому уравнению (7) с нулевой правой частью. Расчёт прочих точек ПВР acf или ade (если течение в bdc уже рассчитано) ведётся так же, как в abc .

При расчёте течения в треугольнике afg в отдельном рассмотрении нуждается только счёт точки на стенке ag , заданной уравнением $y = F(x)$. Для определения x_3 и y_3 используется первое уравнение (5) и уравнение стенки, записанное для ускорения сходимости итераций в форме

$$y_3 = F(x_3) = F_0 + \left[F(x_3) - F_0 - \frac{F'_0 + F'_3}{2}(x_3 - x_0) \right] + \frac{F'_0 + F'_3}{2}(x_3 - x_0). \quad (11)$$

Здесь 0 – предыдущая точка стенки, а $F' = dF/dx$. Уравнение (11) вместе с первым уравнением (5) решается итерациями. В итера-

циях наряду с F'_3 в последнем слагаемом участвует квадратная скобка. В ней в первой итерации индекс «3» заменяется на «0», и слагаемое в скобке исчезает.

На ag ψ постоянна. Поэтому $\psi_3 = \psi_a$, функции в интегралах (1) равны H_a , Γ_a и S_a , а по ним и найденному y_3 определяются $s_3 =$

$= S_a$ и $w_3 = y_3^{1-\nu} \Gamma_a$. Определив по x_3 , найденному в данной итерации, $\operatorname{tg} \theta_3 = F'(x_3)$ и проинтегрировав по отрезку 1–3 уравнение (4⁺), получим уравнение

$$\theta_3 - \theta_1 + \left(\frac{\operatorname{ctg} \mu_1}{\rho_1 V_1^2} + \frac{\operatorname{ctg} \mu_3}{\rho_3 V_3^2} \right) \frac{p_3 - p_1}{2} = (\nu - 1) \left[\left(\frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1}{y_1} + \right. \right. \quad (12)$$

$$\left. \left. + \frac{\sin \theta_3 \cos \theta_3}{y_3} \right) \frac{y_1 - y_3}{2} + \left(\frac{\sin^2 \theta_1}{y_1} + \frac{w_1^2}{y_1 V_1^2} + \frac{\sin^2 \theta_3}{y_3} + \frac{w_3^2}{y_3 V_3^2} \right) \frac{x_3 - x_1}{2} \right],$$

которое при найденных x_3 , y_3 и θ_3 определит p_3 . Затем, как и ранее, найдём ρ_3 , a_3 , h_3 , U_3 , V_3 , $M_3 = V_3/a_3$ и $\operatorname{ctg} \mu_3$.

Если расчёт пучка волн разрежения был выполнен до отрезка cf C^+ -характеристики, то далее решается **задача Гурса** с данными на отрезках cf и cd характеристик разных семейств. Расчёт точек в задаче Гурса такой же, как в задаче Коши для треугольника abc .

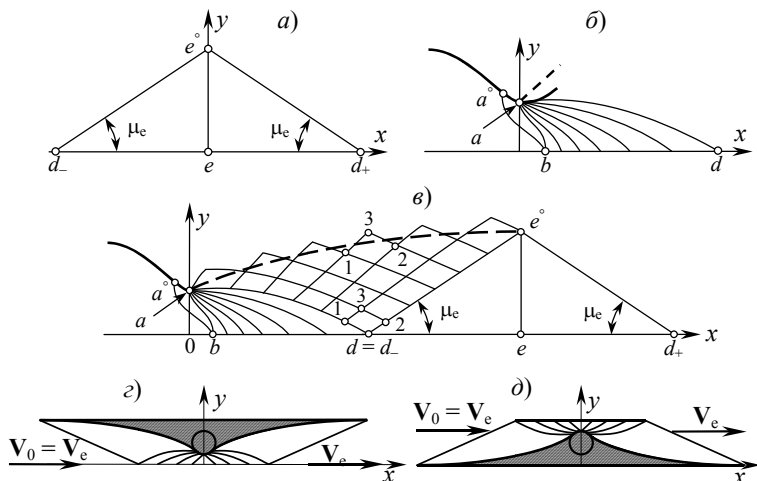


Рис. 3.17

Заканчивая параграф, решим задачу профилирования сверхзвуковой части сопла Лавала, реализующего заданный равномерный поток: $\theta \equiv 0$, $M \equiv M_e$, $p \equiv p_e$ в сечении выхода ee° (рис. 3.17, *a*). Равномерность потока в сечении ee° предполагает постоянство функций $H(\psi) \equiv H_{st}$ и $S(\psi) \equiv S_{st}$ и отсутствие закрутки ($\Gamma \equiv w \equiv 0$). При $\theta = 0$ и $w = 0$ функции X и Y в УС ($4^\pm$) и квадратные скобки в правых частях их разностных записей (7), (9), (10) и (12) равны нулю. С учётом этого мысленно решим прямую (в сторону роста x) и обратную (в сторону уменьшения x) задачу Коши с данными на отрезке ee° , а затем прямой и обратный аналоги задачи об определении течения в треугольнике bdc рис. 3.16. В результате найдём, что в равнобедренном треугольнике $d_e e^\circ d_+$ с углами при основании μ_e (рис. 3.17, *a*) $\theta \equiv 0$, $M \equiv M_e$, $p \equiv p_e$.

Пусть есть плавно сужающаяся и слегка расширяющаяся часть сопла, контур которой на рис. 3.17, *б* изображён жирной кривой. Согласно результатам Гл. 3.5 звуковая линия (ЗЛ) $a^\circ b$ начинается в точке a° , в которой $\theta_{a^\circ} < 0$. Правее точки a° со стенки выходит C^- -характеристика ab , имеющая со звуковой линией общую конечную точку b . Если справа от точки a исходную образующую (жирная сплошная кривая на рис. 3.17) заменить штриховой, то это не отразится на течение слева от ab , а излом в точке a станет фокусом пучка волн разрежения. При расчёте пучка одна за другой строятся C^- -характеристики, начинающиеся в изломе и заканчивающиеся на оси x . Вдоль всех ЛТ пучка, включая ось x , газ разгоняется, и в некоторой точке оси d его число Маха станет равно M_e . При одинаковых масштабах длины, плотности и скорости, в качестве которых удобно взять ординату точки a , критические плотность и скорость, ордината точки e° определится условием равенства расходов, протекающих через ЗЛ $a^\circ b$ и сечение выхода ee° :

$$y_e^v p_e V_e = v \int_b^{a^\circ} y^{v-1} (\cos \theta dy - \sin \theta dx). \quad (13)$$

Выполнив с помощью равенства (13) согласование размеров на рис. 3.17, a и b и объединив их (рис. 3.17, e), придём к задаче Гурса с данными на замыкающей C^- -характеристике ad пучка волн разрежения и на равномерной C^+ -характеристике de° , где $\theta \equiv 0$, $M \equiv M_e$, $p \equiv p_e$. Её решение начинается от точки 3, расположенной около точки d , и ведётся по C^- -характеристикам (ближайшей к ad и т.д.), каждый раз до точки 3, в которой $\psi_3 > \psi_a = 1$. При её расчёте $H_3 = H_{st}$, $S_3 = S_{st}$ и $\Gamma_3 = 0$. Координаты точек ЛТ ae° и параметры газа на ней находятся квадратичной интерполяцией на $\psi = 1$ по трём точкам, принадлежащим одной C^- -характеристике, включая точку 3 с $\psi_3 > 1$. В работах [30, 31] приведены примеры построения широкого многообразия кольцевых сопел, также реализующих равномерный сверхзвуковой поток.

Уравнения плоского и осесимметричного течения инвариантны при одновременном изменении знаков у x и v . Благодаря этому построенный контур сопла при зеркальном отражении относительно оси y превращается в контур воздухозаборника, безударно тормозящего равномерный набегающий поток с числом Маха $M_0 = M_e > 1$. Однако, как и в рамках элементарной теории Гл. 3.3, течение торможения до дозвуковой скорости неустойчиво при любом уменьшении M_0 . В связи с этим интересны сопла Лаваля, разгоняющие равномерный сверхзвуковой поток с $M_m > 1$ и $\theta_m \equiv 0$ до $M_e > M_m$ при $\theta_e \equiv 0$ и постоянных прочих параметрах. Их зеркальное отражение даёт воздухозаборники, тормозящие равномерный сверхзвуковой набегающий поток с $M_0 = M_e$ до равномерного сверхзвукового с $M_m < M_e$. Объединение таких воздухозаборников с *породившими* их соплами при параллельных набегающему потоку внешних обводах даёт конфигурации (рис. 3.17, z и d), не имеющие сопротивлений. Таким образом, **парадокс Эйлера–Даламбера** (отсутствие сопротивления при дозвуковом безотрывном обтекании тел идеальным газом) в некоторых случаях справедлив и при сверхзвуковом набегающем потоке. При $v = 1$ конфигурация, изображённая на рис. 3.17, z , называется **бипланом Буземана** (А. Буземан, 1935).

Глава 3.7. Построение суперкритических профилей

Сокращения: ЗЛ – звуковая линия, ЛТ – линия тока, МСЗ – местная сверхзвуковая зона, МХ – метод характеристик, ТЖ – точка Жуге, УВ – ударная волна, УВР – ударная волна разрежения, ЦПВ – центрированная простая волна, ЦВР – ЦПВ разрежения.

Суперкритическими назовём профили, при обтекании которых с образованием местных сверхзвуковых зон (МСЗ) нет УВ. Благодаря этому они, несмотря на наличие МСЗ, как и биплан Буземана, не имеют волнового сопротивления. Рассматриваемый ниже способ их построения (Н. Sobieczky, 1979; А.Н. Крайко, К.С. Пьянков, 2000 [32]) интересен, по крайней мере, в двух отношениях. Во-первых, как ещё один пример применения метода характеристик, и, во-вторых, использованием **ненормального газа** с $\omega_{pp} \equiv (\partial^2 \omega / \partial p^2)_s < 0$. Хотя ненормальный газ привлекается только на некотором вспомогательном этапе, это даёт возможность продемонстрировать ряд его необычных свойств. Одно из таких свойств следует из справедливой для стационарного течения вдоль линии тока формулы (3.3.11):

$$M_p = \frac{2(M^2 - 1) - M^2 \rho^3 a^4 \omega_{pp}}{2M \rho a^2}. \quad (1)$$

В силу неё для **нормального газа** на звуковой линии (ЗЛ) производная $M_p < 0$. Поэтому при $p < p_*$, где p_* – критическое давление, отвечающее $M = 1$, поток становится сверхзвуковым. Наоборот, для ненормального газа при $p < p_*$ поток, звуковой при $p = p_*$, становится дозвуковым. Использование этого свойства ненормального газа – ключевой элемент описываемого метода.

Пусть есть профиль, при обтекании которого заданным потоком нормального газа возникает МСЗ с, как правило, весьма интенсивным замыкающим скачком. На рис. 3.18, *a* изэнтропа нормального газа – жирная сплошная вогнутая кривая. Точка «0» на ней даёт p_0 и ω_0 набегающего потока с числом Маха M_0 , а точка «*» – отвечающие им критические p_* и ω_* , реализующиеся на ЗЛ. Выпуклая штриховая кривая – изэнтропа ненормального газа, касающаяся сплошной кривой в критической точке. Изэнтропу

ненормального газа зададим формулой (a_* – скорость звука в нормальном газе при $p = p_*$, $\omega = \omega_*$)

$$\omega = \omega_* - \omega_*^2 \frac{p - p_*}{a_*^2} + \alpha (p - p_*)^2 \quad (2)$$

с отрицательной константой α . Согласно формуле (2) и определению скорости звука в любом газе в ненормальном газе:

$$\omega_{pp} = 2\alpha < 0, \quad (a^{-2})_* = \rho_{p*} = -\omega_{p*} \omega_*^{-2} = a_*^{-2},$$

т.е. газ, определяемый изэнтропой (2), – действительно ненормальный, а на ЗЛ (в точке «*») сплошная и штриховая кривые касаются, что обеспечивает непрерывность скорости звука.

Из равенства $Tds = dh - \omega dp$ следует, что $h_p \equiv (\partial h / \partial p)_s = \omega$. Это позволяет с помощью формулы (2) восстановить с обеспечением непрерывности в точке «*» нужную для расчётов удельную энтальпию ненормального газа

$$h = h_* + \omega_*(p - p_*) - \frac{\omega_*^2}{2a_*^2}(p - p_*)^2 + \frac{\alpha}{3}(p - p_*)^3. \quad (3)$$

Непрерывность a и h при всюду постоянной полной энтальпии обеспечивает непрерывность на ЗЛ скорости и числа Маха.

Наряду с изэнтропой, проходящей через точку 0, рассмотрим континуум других изэнтроп нормального газа, и при $p = p_*$ – едином для всех них ω и h ненормального газа введём формулами (2) и (3). В таком случае отличные от p_* величины с индексом «*» – функции только энтропии, и формулы (2) и (3) дают зависимость термодинамических параметров ненормального газа от p и s .

С учётом последнего замечания воспользуемся введённым выше ненормальным газом для решения *вспомогательной задачи*. Последняя состоит в расчёте обтекания исходного профиля *композитным газом*, таким, что при $p \geq p_*$ его термодинамические параметры, включая скорость звука, совпадают с параметрами нормального газа, а при $p < p_*$ определяются формулами (2) и (3). Согласно выражению (1) для M_p при стационарном течении композитного газа с обеих сторон от ЗЛ число Маха $M < 1$. В ненормальном газе с уменьшением p скорость потока растёт, как и в нормальном газе, но скорость звука также растёт, причём растёт

быстрее. Как следствие этого в *закритической* зоне, где $p < p_*$, поток дозвуковой, а поэтому – безударный.

Расчёт обтекания профиля и нормальным, и композитным газом удобно проводить, интегрируя уравнения, описывающие двумерные нестационарные течения, и используя **процесс установления** по времени. Идея процесса установления состоит в том, что при произвольных начальных и стационарных граничных условиях нестационарное решение обычно при больших временах перестает зависеть от времени, т.е. удовлетворяет стационарным уравнениям и граничным условиям.

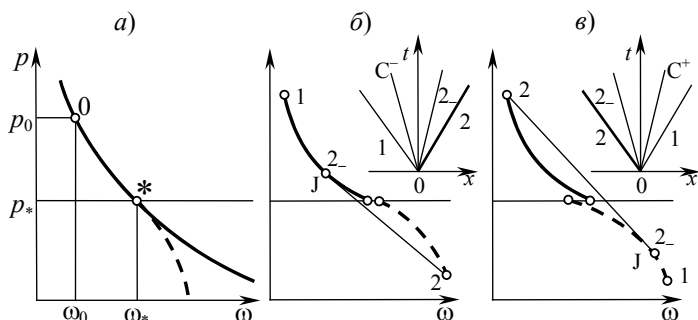


Рис. 3.18

При интегрировании нестационарных уравнений с помощью упоминавшихся в Гл. 2.5 *распадных схем* в композитном газе возникают интересные решения, невозможные ни в нормальном, ни в ненормальном газе. В них в одну сторону от контактного разрыва могут распространяться УВ и примыкающая к ней ЦПВ. Две таких ситуации изображены на рис. 3.18, б и в, причём пока рассчитываются нестационарные течения, имеют место УВ, и изэнтропы нормального и ненормального газа при $p = p_*$ начинаются в разных точках. На рис. 3.18, б точка 1 с известными $p = p_1$ и $\omega = \omega_1$, отвечающая состоянию газа перед движущейся по нему влево ЦПВ, принадлежит нормальному газу, а точка 2 с заданным $p_2 < p_1$ и с пока неизвестным $\omega_2 > \omega_1$ расположена в области параметров, отвечающих ненормальному газу. В плоскости ωp на прямой $p = p_*$ параметры нормального и ненормального газа не-

прерывны, в частности, непрерывны s и наклон изэнтроп. В нормальном газе (например, в совершенном) рост s отвечает движение изэнтроп в плоскости or вправо и вверх (с одновременной их деформацией). Следовательно, на нижней изэнтропе s больше, чем на верхней ($s_2 > s_1$). Покажем, что в данном случае переход из точки 1 в точку 2 осуществляется в ЦВР и в примыкающей к ней УВ разрежения (УВР), как изображено на xt -диаграмме (тонкие прямые – C^- -характеристики, жирная – траектория УВ).

Так как течение в ЦВР 1–2_– изэнтропично, то

$$s_{2-} \equiv s(p_{2-}, \omega_{2-}) = s_1, \quad (4)$$

где индекс «2–» приписан параметрам на правой границе ЦВР, совпадающим с параметрами перед УВ разрежения. На любой УВ выполняется уравнение ударной адиабаты (1.4.5):

$$h(p_{2-}, \omega_{2-}) - h(p_2, \omega_2) - \frac{\omega_{2-} + \omega_2}{2}(p_{2-} - p_2) = 0. \quad (5)$$

При известных параметрах газа слева от ЦВР (с индексом «1»), заданном давлении p_2 и известных уравнениях состояния – функциях $s(p, \omega)$ и $h(p, \omega)$ для нормального и ненормального газов двух уравнений (4) и (5) недостаточно для определения трёх неизвестных: ω_2 , p_{2-} и ω_{2-} . В ситуации, изображённой на xt -диаграмме рис. 3.18, б, когда траектория УВ совпадает с траекторией замыкающей характеристики ЦВР, прямая Рэлея–Михельсона 2–2 касается верхней изэнтропы. Здесь точка 2_– совпадает с **точкой Жуке – ТЖ (Ж)** для потока перед скачком, в которой выполняется условие касания. С учётом уравнения прямой Рэлея–Михельсона (1.4.4) для общего случая ЦВР из C^+ - или из C^- -характеристик это условие принимает вид

$$\rho_2 a_{2-}^2 = \frac{p_2 - p_{2-}}{\omega_{2-} - \omega_2}. \quad (6)$$

Так как a_{2-} – известная функция p_{2-} и ω_{2-} , а $\rho = 1/\omega$, то три уравнения (4) – (6) при вогнутых верхних изэнтропах и выпуклых нижних однозначно определяют ω_2 , p_{2-} и ω_{2-} . Этим определяются интенсивности ЦВР в нормальном газе и УВР с параметрами перед ним в нормальном, а за ним в ненормальном газе, причём, как и должно быть, $s_2 > s_{2-} = s_1$.

Выбор ТЖ в качестве точки 2_- требует дополнительного обоснования. Предположим, что это не так, и точка 2_- лежит на верхней изэнтропе под точкой J. Тогда в точке 2_- модуль наклона касательной к верхней изэнтропе $|dp/d\omega|_{2_-} = |(\partial p/\partial \omega)_s|_{2_-} = (\rho^2 a^2)_{2_-}$ меньше модуля наклона прямой Рэлея–Михельсона: $(\rho^2 a^2)_{2_-} < j^2 = \rho_{2_-}^2 (V_{2_-} - D)^2$, где V и D – скорости газа и УВ. Отсюда $(a^2)_{2_-} < (V_{2_-} - D)^2$, и скорость УВ относительно газа перед ней сверхзвуковая. В случае xt -диаграммы рис. 3.18, б такое было бы возможно не для точки 2_- , лежащей под точкой J, а при отсутствии ЦВР – совпадении точек 2_- и 1. Следовательно, решение с точкой 2_- под ТЖ невозможно. Также доказывается, что для точки 2_- над ТЖ скорость УВ относительно потока перед ней дозвуковая. Это отвечает xt -диаграмме с сектором постоянных параметров между УВ и последней характеристикой ЦВР. УВ, скорость потока относительно которой с обеих сторон дозвуковая (соответствующее неравенство в точке 2 получается аналогично), подобна фронту пламени без дополнительного условия на его скорость (Гл. 2.6). Такая УВ незволюционна и должна быть отвергнута. Остаётся единственная возможность с совпадающими точками 2_- и J.

Ситуация с точкой 1 под прямой $p = p_*$ анализируется аналогично. Для неё решение в плоскости ωp и xt -диаграмма (для волны, движущейся относительно газа вправо) представлены на рис. 3.18, в. Здесь ЦПВ сжатия из C^+ -характеристик в ненормальном газе замыкает УВ уплотнения, движущаяся относительно газа со звуковой скоростью.

Возвращаясь к профилированию суперкритического профиля, опираясь на опыт расчётов, будем исходить из того, что для достаточно произвольной константы α в уравнении изэнтропы ненормального газа (2) течение композитного газа вокруг исходного профиля, контур которого на рис. 3.19 дан сплошной кривой, установилось, т.е. вспомогательная задача решена. Ввиду отсутствия УВ получившееся стационарное течение изэнтропическое. Вне конечной **закритической зоны**, ограниченной ЗЛ adb , это течение, описываемое уравнениями нормального газа, удовлетворяет заданным условиям на бесконечности и условиям непро-

течения на профиле, за исключением лежащего в закритической зоне участка ab . Тем не менее построенное течение принципиально отличается от того, которое получается при обтекании данного профиля не композитным, а нормальным газом. Согласно сказанному ранее, при его обтекании тем же набегающим потоком нормального газа, т.е. при тех же условиях на бесконечности и при том же условии непротекания на профиле (вне участка ab !) МСЗ замыкалась интенсивным скачком. Следовательно, для сохранения безударного течения нормального газа в МСЗ, ограниченной ЗЛ adb , которая получилась из решения вспомогательной задачи, нужно скорректировать участок ab .

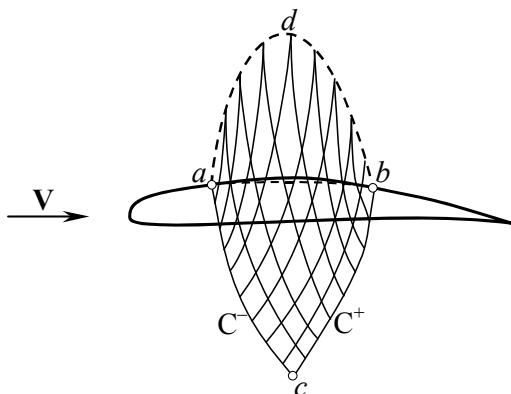


Рис. 3.19

При наличии ЗЛ, построенной во вспомогательной задаче, коррекция участка ab сводится к решению методом характеристик (МХ) задачи Коши для нормального газа с начальными данными на adb . На рис. 3.19 изображена область определённости ЗЛ adb – криволинейного основания перевернутого характеристического треугольника acb , течение в котором в принципе можно рассчитать МХ. На самом деле, для построения скорректированного участка ab , показанного на рис. 3.19 штрихами, расчёт МХ ведётся до каждой новой точки с отрицательным значением функции тока (на профиле функция тока $\psi = 0$). Найденная в ре-

зультате такого расчёта новая линия тока (ЛТ) ab и есть искомый участок контура. Во вспомогательной задаче и в задаче Коши $\psi_a = \psi_b = 0$. Поэтому с точностью до погрешностей счёта новая ЛТ соединяет точки a и b , причём без изломов в этих точках. Задача Коши имеет решение не при любых значениях константы α . На отсутствие решения указывает пересечение одноимённых характеристик при $\psi \geq 0$. Однако опыт расчётов подтвердил возможность такого выбора целого интервала значений α , при которых коррекция осуществима. Можно показать, что скорректированный профиль тоньше исходного.

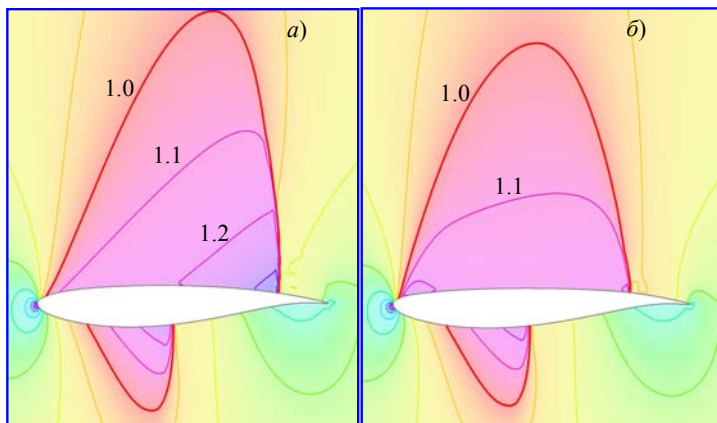


Рис. 3.20

Пример коррекции профиля, обтекаемого потоком совершенного газа с $\gamma = 1.4$ при $M_0 = 0.8$ и фиксированном коэффициенте подъёмной силы $C_y = 0.55$, приведён на рис. 3.20. Представлены распределения чисел Маха для исходного профиля (а) и профиля с подправленной верхней образующей (б). Сгущение изолиний числа Маха у правой границы МСЗ над исходным профилем представляет замыкающий скачок. На рис. 3.20, б такого сгущения нет. При сохранении длины хорды и C_y площадь скорректированного профиля уменьшилась на 4.9 %.

Глава 3.8. Ударная поляря. Обтекание клина

Сокращения: ЗЛ – звуковая линия, СК – сердцевидная кривая, ТР – тангенциальный разрыв, УВ – ударная волна, УП – ударная поляра, ЦВР – центрированная волна разрежения.

В задачах со стационарными УВ часто нужно знать, как при известном набегающем потоке величина вектора скорости за УВ связана с его углом поворота. Эту связь даёт уравнение **ударной поляры (УП)**. Для произвольной стационарной УВ уравнение УП справедливо в точках с однозначно определённой нормалью.

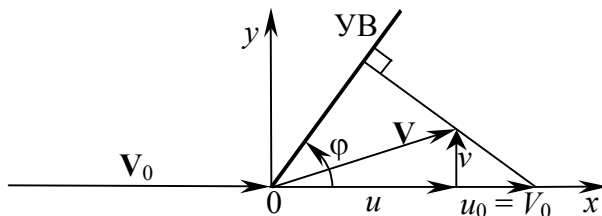


Рис. 3.21

Пусть $\mathbf{V}_0$ – вектор скорости набегающего потока перед точкой o УВ, а $\mathbf{n}$ – орт внутренней нормали к ней, такой, что $V_{n0} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_0) > 0$. Ось y локальных декартовых координат xyz с началом в точке o и с осью x , направленной по вектору $\mathbf{V}_0$, сориентируем так, чтобы орт $\mathbf{n}$ лежал в плоскости xu . При таком выборе осей x и y ось z касается УВ, проекция $\mathbf{V}_0$ на неё равна нулю, а в силу сохранения на УВ касательной компоненты проекция на ось z вектора скорости $\mathbf{V}$ за УВ также равна нулю. Итак, векторы $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{V}$ лежат в плоскости xu (рис. 3.21), $u_0 = V_0$, $v_0 = 0$ и u , v – проекции $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{V}$ на оси x и y . Здесь и далее символы без индекса обозначают параметры за УВ, а с индексом «0» – перед ней.

Для вывода уравнения УП, связывающего при заданном V_0 компоненты скорости или её модуль и угол поворота потока за УВ, воспользуемся условием непрерывности касательной к УВ компоненты скорости и соотношением Прандтля (1.4.32). Если φ – угол наклона УВ к оси x , то (рис. 3.21) первое из них даст

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V_0 - u}{v}. \quad (1)$$

В принятых обозначениях соотношение Прандтля имеет вид

$$V_{n0}V_n = a_{*n}^2, \quad V_{n0} = V_0 \sin \varphi, \quad V_n = u \sin \varphi - v \cos \varphi. \quad (2)$$

Согласно выводу, выполненному в Гл. 1.4, a_{*n} – критическая скорость, при определении которой в набегающем потоке отсутствовала касательная к УВ компонента вектора скорости $V_{\tau 0}$. Чтобы связать a_{*n} с a_* , воспользуемся их определениями

$$\frac{2a_0^2}{\gamma-1} + V_{n0}^2 + V_{\tau 0}^2 = \frac{2a_*^2}{\gamma-1} + a_*^2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} a_*^2, \quad \frac{2a_0^2}{\gamma-1} + V_{n0}^2 = \frac{2a_{*n}^2}{\gamma-1} + a_{*n}^2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} a_{*n}^2.$$

Отсюда

$$a_{*n}^2 = a_*^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_{\tau 0}^2, \quad V_{\tau 0} = V_0 \cos \varphi. \quad (3)$$

Подставим найденное a_{*n}^2 и выражения из (2) и (3) для нормальных и касательных компонент скорости в соотношение (2) и исключим, воспользовавшись формулой (1), появившиеся в нём $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$. В результате придём к уравнению УП

$$v^2 = (V_0 - u)^2 \frac{uV_0 - 1}{2V_0^2 / (\gamma + 1) - uV_0 + 1}, \quad (4)$$

в котором скорости отнесены к критической скорости a_* .

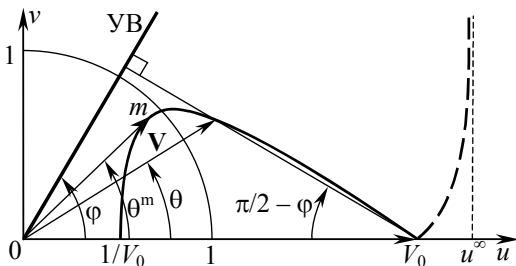


Рис. 3.22

Знаки «+» и «-», получающиеся при извлечении квадратного корня из правой части уравнения УП (4) – естественное следствие симметрии течения при отражении рис. 3.22 относительно оси абсцисс – замене положительного угла наклона УВ на отрицательный. Обращение в нуль скобки перед дробью даёт УВ нуле-

вой интенсивности: $u = V_0$, а числителя – прямой скачок: $u = 1/V_0$ в передней точке УП. Согласно уравнению (4) в ней касательная к УП вертикальна. Перед стационарной УВ поток сверхзвуковой ($V_0 > 1$), поток же за УВ может быть и сверх- и дозвуковым (по V , а не по нормальной компоненте $V_n < 1$). Сверхзвуковым течениям за УВ отвечает часть УП, лежащая вне **звуковой окружности**: $V = 1$, а дозвуковым – часть УП внутри неё.

Фиксированному углу поворота потока $\theta < \theta^m$, где $\theta^m = \theta^m(M_0, \gamma)$, отвечают два **косых скачка: сильного** и **слабого семейства**. Вне малой окрестности точки максимального поворота потока m за УВ слабого семейства $M > 1$. За скачками сильного семейства $M < 1$. В УВ, возникающей при сверхзвуковом обтекании, например, затупленной пластины, реализуется вся УП от прямого скачка, т.е. УВ сильного семейства на плоскости симметрии до УВ нулевой интенсивности – на бесконечности.

При наличии УП для выбранных $V_0 > 1$ (или M_0) и точки пересечения УП с лучом $\theta = \text{const} \leq \theta^m$ угол УВ φ определяется простым правилом – следствием непрерывности на УВ касательной компоненты скорости (рис. 3.21). Для этого из начала координат на прямую, проведённую через выбранную точку УП и её же точку $u = V_0$, нужно опустить перпендикуляр (рис. 3.22). Полуугол при острой вершине поляры – один из углов получившегося прямоугольного треугольника равен $\pi/2 - \varphi$. При $\theta \rightarrow 0$ он стремится к $\pi/2 - \mu_0$, где μ_0 – угол Маха в набегающем потоке. Если $M_0 \rightarrow 1$, то $\mu_0 \rightarrow \pi/2$, и толщина УП стремится к нулю. С ростом числа Маха ($V_0 \rightarrow \varepsilon^{-1/2}$) $\mu_0 \rightarrow 0$ и соответствующий угол в пределе становится прямым. Рассмотрим эти случаи подробнее.

Если $V_0 = 1 + \delta$ с $0 < \delta \ll 1$, то $1/V_0 = 1 - \delta$. Положив $u = 1 + \delta u^\circ$ и подставив эти выражения в уравнение (4), получим

$$v^2 = \delta^3 \frac{(\gamma + 1)(1 - u^\circ)^2(1 + u^\circ + \delta u^\circ)}{2 + [3 - \gamma - (1 + \delta)(\gamma + 1)u^\circ]\delta} \approx \delta^3 \frac{\gamma + 1}{2} (1 - u^\circ)^2 (1 + u^\circ).$$

Итак, при малой сверхзвуковой скорости уравнение УП записывается в универсальной (независящей от δ и γ) форме:

$$u = 1 + \delta u^\circ, v \approx \delta^{3/2} \sqrt{\gamma + 1} v^\circ, v^\circ = \pm (1 - u^\circ) \sqrt{(1 + u^\circ)/2}, -1 \leq u^\circ \leq 1. (5)$$

Функция $v^\circ(u^\circ)$, дающая универсальную околзвучковую УП (рис. 3.23, а), равна нулю при $u^\circ = \pm 1$ с вертикальной касательной при $u^\circ = -1$ и с $dv^\circ/du^\circ = \pm 1$ при $u^\circ = 1$. В максимуме и минимуме $v^\circ(-1/3) = \pm 4/3^{3/2} \approx \pm 0.77$, а $v^\circ(0) = \pm 2^{-1/2} \approx \pm 0.71$.

При $V_0 = V^M$ с учётом того, что $\frac{2V^M}{\gamma+1} + 1 = (V^M)^2$, $\frac{V^M + 1/V^M}{2} = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}$, $\frac{(V^M + 1/V^M)^2}{4} - 1 = \frac{1}{\gamma^2 - 1}$, уравнение УП (4) принимает вид

$$\left(u - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{\gamma^2 - 1}.$$

Это уравнение окружности (рис. 3.23, б) радиуса $R = (\gamma^2 - 1)^{-1/2}$ с центром на оси u при $u = \gamma R$. Максимальный угол поворота потока θ^m – угол наклона касательной к УП, проходящей через начало координат и касающейся этой окружности, т.е. $\sin\theta^m = 1/\gamma$.

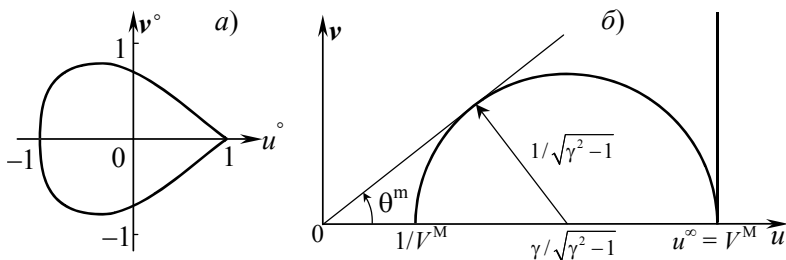


Рис. 3.23

Получающаяся из уравнения (4) штриховая кривая на рис. 3.22 с асимптотой $u = u^\infty$ отвечает $V > V_0$. При $V_0 = V^M$ она сливается с асимптотой $u = u^\infty = V^M$, касающейся окружности (рис. 3.23, б). Решения с $V > V_0$ отвечают скачкам разрежения, запрещенным в нормальном газе. Вместо них при развороте и разгоне сверхзвукового потока реализуются центрированные волны разрежения (ЦВР). Описывающие их кривые – $C^\pm$ -характеристики (рис. 3.9 Гл. 3.5) начинаются на оси u при тех же значениях V_0 и

заканчиваются на окружности $V = V^M = \varepsilon^{-1/2}$. В точке $V = V_0$, $\theta = 0$ они плавно сопрягаются с построенными для $V \leq V_0$ ветвями УП.

В задаче обтекания равномерным сверхзвуковым потоком бесконечного клина среди определяющих параметров нет параметра с размерностью длины. Поэтому параметры стационарного течения (если таковое есть) зависят не от x и y в отдельности, а от отношения $-y/x$. Начало декартовых координат x, y совмещено с вершиной клина. Плоскопараллельное течение такого типа может состоять из поступательных потоков, разделённых УВ (рис. 3.24), и, может быть, – ЦВР. Наличие двух УВ не противоречит автомодельности. Но $V'_n < a$, а проекция V'_n на нормаль к первой УВ больше, чем проекция V''_n на нормаль ко второй, т.е. $V''_n < V'_n < a$, и второй УВ с дозвуковой нормальной к ней компонентой вектора $\mathbf{V}$ быть не может. Также доказывается невозможность выходящих из начала координат УВ и ЦВР. Одна ЦВР поворачивает поток по часовой стрелке, и остаётся единственное сочетание – разделённые УВ набегающий поток и равномерный поток с $\theta \equiv \omega$.

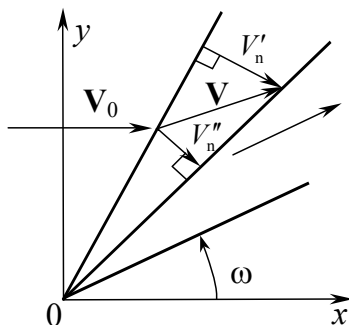


Рис. 3.24

В задаче сверхзвукового обтекания бесконечного клина с полууглом при вершине $\omega < \theta^m$ есть две точки пересечения УП с лучом $\theta = \omega$, и возникает проблема выбора одного из двух решений. Для *слабого* решения поток над клином – сверхзвуковой (исключение – малая окрестность точки m), и, если клин конечный, то это не сказывается на течении до первой S^+ -характери-

стики ЦВР, возникающей при обтекании его задней кромки (рис. 3.25). При *сильном* решении поток над клином – дозвуковой. Вверх по нему распространяется информация о конце клина, что искривляет УВ. Для реализации сильного решения при обтекании бесконечного клина нужно справа на бесконечности поддерживать давление, точно равное тому, которое даёт сильное решение. Это – исключительная постановка, которую вряд ли стоит рассматривать. Если конечный клин плавно (с монотонным уменьшением угла наклона контура) переходит в пластину постоянной толщины, то доказано (А.И. Рылов, 1991 [33]), что реализуется только слабое решение. С другой стороны, нельзя исключить, что у вершины клина, выдвинутого из торца обтекаемой с отошедшей УВ пластины, течение описывается сильным решением.

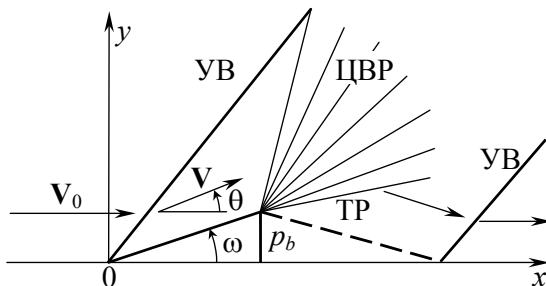


Рис. 3.25

При $\omega > \theta^m$ стационарного автомодельного течения в случае бесконечного клина нет. Чтобы понять, что же будет, рассмотрим две нестационарные задачи с бесконечным клином. В первой в равномерном сверхзвуковом набегающем потоке внезапно (в момент $t = 0$) по нормали к потоку возникает *клин* с углом $\omega = \pi/2$, т.е. стенка, перекрывающая набегающий поток. Решение очевидно: возникнет бегущая навстречу набегающему потоку и оставившая его УВ. При наклонной стенке также наклонная, параллельная стенке УВ *гасит* только нормальную к стенке компоненту скорости, не изменяя касательную. Во второй задаче клин по-прежнему бесконечный, но $\theta^m < \omega < \pi/2$. Вдали от вершины УВ и течение будут такими же, как в случае наклонной

стенки. В некоторой окрестности вершины течение будет более сложным, зависящим от двух переменных: $\xi = x/(a_0 t)$, $\eta = y/(a_0 t)$. Если же клин конечный, то имеется характерный размер, например, полувысота основания h , и реализуется стационарное неавтомодельное течение (рис. 3.26), зависящее от $\xi = x/h$, $\eta = y/h$. На оси x расстояние отхода УВ от вершины клина $\Delta/h = f(M_0, \omega, \gamma)$.

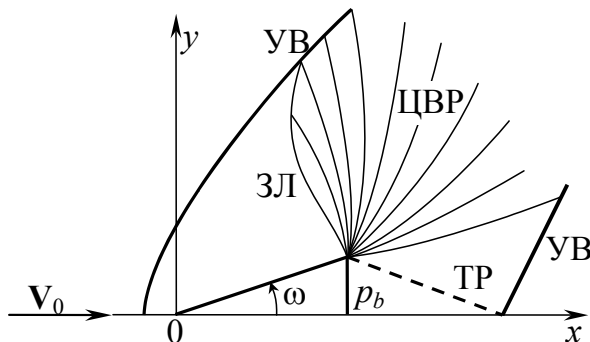


Рис. 3.26

При обтекании дна клина образуется застойная зона, в которой давление (*донное давление*) p_b близко к постоянному. Если принять, что кромка обтекается без разворота потока (*плавный сход*), то, как и при отрывном обтекании того же клина несжимаемой жидкостью по *схеме Кирхгофа* (G. Kirchhoff), отрывная зона будет простирается до бесконечности, вследствие чего $p_b = p_0$. В действительности за клином образуется зона с $p_b < p_0$. Чтобы обтечь кромку клина с разворотом, поток разгоняется сначала непрерывно вдоль боковой поверхности клина до $M = 1$, а затем в неавтомодельной ЦВР. Развернувшийся к плоскости симметрии сверхзвуковой поток поворачивается в УВ, близкой к косому скачку, а затем течёт параллельно оси x (рис. 3.26).

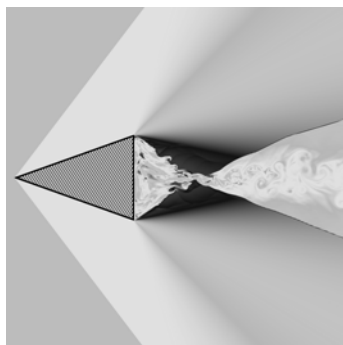


Рис. 3.27

Для течений, изображённых на рис. 3.25 и 3.26, в приближении идеального газа можно построить однопараметрическое семейство решений с p_b в качестве параметра. На самом деле, за клином образуется зона обратных токов, а над ней зона смешения, от границы которой отходят волны сжатия. Нужно выбрать такое давление p_b , чтобы в зоне обратных токов выполнялся закон сохранения массы, т.е. масса подсасываемого в зону смешения газа была равна массе газа, поворачивающегося в зону обратных токов при его торможении. При нестационарном расчёте получается *дышащая* донная область, где давление колеблется около некоторой величины p_b , зависящей от толщины пограничного слоя, а также от того, какие интегрируются уравнения Эйлера – двумерные или трёхмерные. Согласно расчётам А.Н. Крайко и К.С. Пьянков (2006 [34]) в течении, которое реализуется в двумерном приближении (рис. 3.27 с изображением мгновенного поля температуры при $M_0 = 2$ и $\omega = 19.65^\circ$), значение p_b намного меньше известной экспериментальной величины. Интегрирование трёхмерных уравнений Эйлера даёт значения p_b , близкие к наблюдаемым в эксперименте.

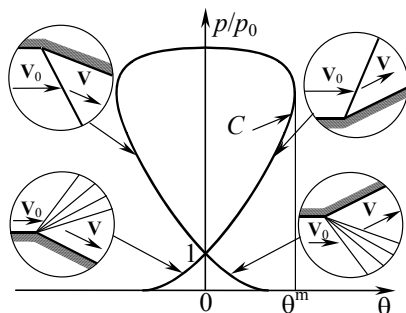


Рис. 3.28

Для решения ряда задач, в первую очередь, задач взаимодействия поверхностей разрыва, удобна ударная поляра, построенная в координатах p/p_0 , θ (рис. 3.28, θ^m – максимальный угол поворота потока в косом скачке, C – критическая точка, в которой число Маха за УВ равно единице). На рис. 3.28 в точке $\theta = 0$, $p/p_0 = 1$ к УП плавно примыкают $C^\pm$ -характеристики с рис. 3.9, б (Гл. 3.6), описывающие ЦВР. Получившуюся комбинацию называют **сердцевидной кривой (СК)**.

Для вывода уравнения ударной части СК в уравнениях (1), (2) и (4) компоненты вектора скорости выразим через V и θ . Уравнение ударной поляры (4) в таких переменных станет

$$V^2 \sin^2 \theta = (\gamma + 1) \frac{(V_0 - V \cos \theta)^2 (V_0 V \cos \theta - 1)}{2V_0^2 - (\gamma + 1)(V_0 V \cos \theta - 1)}. \quad (6)$$

При скорости, плотности и давлении, отнесённых к a_* , ρ_0 и $\rho_0 a_*^2$, условия сохранения расхода и нормальной компоненты импульса имеют вид

$$\rho V_n = V_{n0}, \quad p - p_0 = V_{n0}(V_{n0} - V_n). \quad (7)$$

Воспользуемся формулами (2) для V_{n0} и V_n с исключёнными из них тригонометрическими функциями угла наклона скачка φ с помощью равенства (1), переписанного в форме

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V_0 - V \cos \theta}{V \sin \theta}.$$

Полученные выражения для V_{n0} и V_n сводят условия (7) к форме

$$\rho \equiv \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{V_0 z \cos \theta}{V(V_0^2 \sin^2 \theta + z)}, \quad V \equiv \frac{V}{a_*} = \frac{V_0^2 + z}{V_0 \cos \theta}, \quad z = p_0 - p \leq 0. \quad (8)$$

Подстановка выражения для V в формулу (6) даёт уравнение СК:

$$\delta^2 \equiv \operatorname{tg}^2 \theta = \Phi^2(z) = \frac{z^2(V_0^2 - 1 + z)}{(V_0^2 + z)^2(1 - \varepsilon V_0^2 - z)}, \quad 1 - V_0^2 \leq z \leq 0. \quad (9)$$

Наконец, с учётом способа обезразмеривания давления

$$\frac{p(z)}{p_0} = 1 - \frac{2\gamma z}{1 - \varepsilon V_0^2}. \quad (10)$$

Формулы (9) и (10) дают параметрическое представление СК с z в качестве параметра, причём $z = 1 - V_0^2$ отвечает прямому скачку, а $z = 0$ – УВ нулевой интенсивности (C^+ и C^- -характеристикам).

При $V = 1$ равенство (6) даёт квадратное уравнению для $\cos \theta$. Его положительное, не превышающее единицу решение определяет угол поворота потока θ_* , при котором число Маха за УВ равно единице:

$$\theta_* = \arccos \frac{\kappa(V_0^2 + 3) - \sqrt{\Delta}}{4\gamma V_0},$$

$$\Delta = \kappa^2(V_0^2 + 3)^2 - 8\gamma[(2 + \kappa)V_0^2 + \kappa], \quad \kappa = \gamma + 1.$$

Подстановка $V = 1$ и $\theta = \theta_*$ в формулы (8) определит ρ_*/ρ_0 и z_* , а подстановка z_* в формулу (10) – отношение p_*/p_0 .

Также квадратное уравнение, но для определения z^m – величины параметра, отвечающего максимальному повороту потока, получится из равенства $d\Phi/dz = 0$ с функцией $\Phi(z)$ из уравнения СК (9). Приемлемый корень квадратного уравнения есть

$$z^m = \frac{4 - (1 + 3\varepsilon)V_0^2 - \sqrt{\Delta}}{2(1 + \varepsilon)} \leq 0,$$

$$\Delta = [4 - (1 + 3\varepsilon)V_0^2]^2 + 8(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon V_0^2)(V_0^2 - 1).$$

Две точки СК с $\theta = \pm \theta(z^m)$ получаются подстановкой z^m в формулы (9) и (10), а ρ^m/ρ_0 и V^m – подстановкой z_m в формулы (8). На СК «критические» точки, отвечающие звуковому потоку за УВ, лежат ниже точек его максимального поворота.

В задаче обтекания клина по известному углу поворота потока θ требуется найти все параметры за УВ. Такая задача сводится к нахождению корней кубического уравнения ($\delta^2 = \text{tg}^2 \theta$)

$$z^3 + rz^2 + sz + t = 0,$$

$$r = \frac{1 + (2 + \varepsilon)\delta^2}{1 + \delta^2} V_0^2 - 1, \quad s = \delta^2 \frac{(1 + 2\varepsilon)V_0^2 - 2}{1 + \delta^2} V_0^2, \quad t = -\delta^2 \frac{1 - \varepsilon V_0^2}{1 + \delta^2} V_0^4,$$

получающегося из уравнения СК (9). Так как $z = p_0 - p$, то скачкам уплотнения отвечают неположительные его корни. Два таких корня, существующих при $0 \leq |\theta| \leq \theta^m$, даются формулами

$$P = P(\theta) = s(\theta) - \frac{1}{3}r^2(\theta), \quad Q = Q(\theta) = t(\theta) - \frac{r(\theta)s(\theta)}{3} + \frac{2}{27}r^3(\theta),$$

$$R = R(\theta) = [\text{sign} Q(\theta)] \sqrt{\frac{|P(\theta)|}{3}}, \quad \Phi = \Phi(\theta) = \arccos \frac{Q(\theta)}{2R^3(\theta)},$$

$$z^+(\theta) = -2R \cos \frac{\Phi}{3} - \frac{r}{3}, \quad z^-(\theta) = -2R \cos \left(\frac{\Phi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) - \frac{r}{3}.$$

в которых индексы «+» («-») метят параметры за УВ сильного (слабого) семейства. При $|\theta| = \theta^m$ эти корни совпадают. При заданном θ и найденных $z^\pm$ формулы (8) и (10) определяют отвечающие им отношения $\rho^\pm/\rho_0$, $V^\pm/a_*$ и $p^\pm/p_0$.

Глава 3.9. Взаимодействие поверхностей разрыва.

Нерасчётное истечение сверхзвуковых струй

Сокращения: МО – *Маховское отражение*, РО – *регулярное отражение*, СК – *сердцевидная кривая*, ТР – *тангенциальный разрыв*, УВ – *ударная волна*, УП – *ударная поляра*, ЦВ – *центрированная волна*, ЦВР – *центрированная волна разрежения*.

В задачах взаимодействия поверхностей разрыва важное понятие – направление УВ, которое определяется направлением тангенциальной компоненты вектора скорости перед УВ (рис. 3.29, а). Направление УВ показывает, как за её фронтом распространяются возмущения давления. В этом смысле на рис. 3.29, а УВ *ao* и *bo* приходят в точку их пересечения *o*, а УВ *oc* и *of* выходят из неё. Если поток за УВ дозвуковой, то возмущения давления за УВ распространяются во все стороны, и введённое понятие

теряет смысл. Аналогично определяется направление характеристик. Так, C^- -характеристика oc и связанная с нею ЦВР на рис. 3.29, б выходят из точки o .

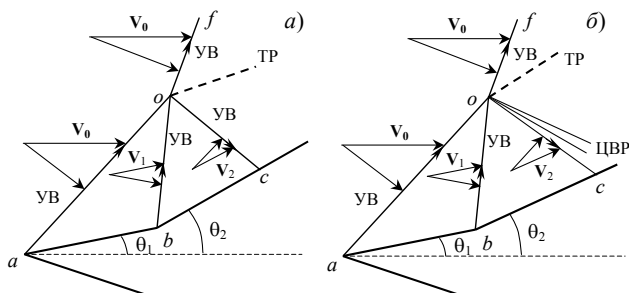


Рис. 3.29

Поверхности разрыва могут пересекаться. На малом отрезке линию их пересечения L можно считать прямой. Проекция на L скорости потока V перед пересекающимися УВ касается обеих УВ и, следовательно, не изменяется. Поэтому о ней можно забыть, т.е. рассматривать взаимодействие как двумерное, учитывая только те проекции V , которые в окрестности данной точки линии L параллельны плоскости, нормальной к L .

Рассмотрение взаимодействий поверхностей разрыва начнём с пересечения УВ, приходящих на L (на рис. 3.29 – в точку o) с одной стороны. На рис. 3.29 набегающий поток (с индексом «0») поворачивается против часовой стрелки (на положительные углы θ). Поэтому для анализа взаимодействия УВ нужна только правая часть сердцевидной кривой $СК_0$ (рис. 3.30). В УВ ao поток поворачивает на угол θ_1 , давление p_1 определится пересечением штриховой вертикали $\theta = \theta_1$ с $СК_0$. Идущая по потоку «1» в точку o УВ bo поворачивает его против часовой стрелки (относительно угла θ_1 на положительный угол). Этим определяются правые части $СК_1$ на рис. 3.30. На $СК_1$ найдём точку $\theta = \theta_2$ и определим все параметры, включая число Маха M_2 за УВ bo . Для $M = M_2$ строим $СК_2$. Уходящая по потоку «2» из точки o УВ oc повернет его по часовой стрелке (относительно угла θ_2 на отрица-

тельный угол), а ЦВР – против часовой стрелки (относительно угла θ_2 на положительный угол). Этим определяются части $СК_2$ на рис. 3.30 (включая *нижний ус*, описывающий ЦВР).

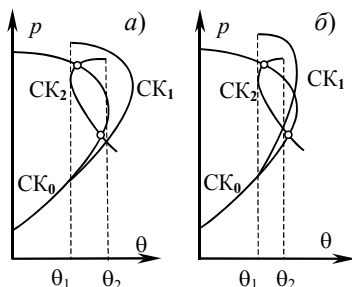


Рис. 3.30

Вверх от точки пересечения $УВ\ ao$ и bo по невозмущённому потоку может уходить (рис. 3.29) только $УВ\ of$, которая поворачивает поток против часовой стрелки (на положительный угол) и, следовательно, описывается уже нарисованной на рис. 3.30 правой частью $СК_0$. Потоки, прошедшие под и над точкой o , может разделять **тангенциальный разрыв** (ТР), который на рис. 3.29 дан штрихами. На ТР p и θ не рвутся. Поэтому решение дают точки пересечения $СК_0$ и $СК_2$ на рис. 3.30, *a* и *б*. Верхние точки отвечают решениям со скачками большей интенсивности, а нижние – меньшей. Обычно реализуются вторые, что, кстати, согласуется с *принципом минимального производства энтропии* неравновесной термодинамики. Итак, в случае рис. 3.29, *a* вниз из точки o уходит $УВ\ oc$, а в случае рис. 3.29, *б* – ЦВР.

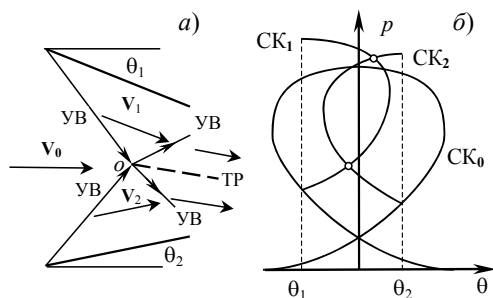


Рис. 3.31

На рис. 3.31, *a* УВ приходят в точку o с разных сторон. Для получения решения используются СК (рис. 3.31, *б*) – $СК_0$, $СК_1$ и $СК_2$. Вновь получаются две точки пересечения, из которых по той же причине выбирается нижняя. Важный частный случай рассмотренного взаимодействия отвечает приходящим УВ равной интенсивности ($\theta_2 = -\theta_1$). Благодаря симметрии отраженные УВ также имеют одинаковую интенсивность, а направление ТР, переставшего быть разрывом, совпадает с направлением набегающего потока. В приближении идеального газа линию тока, проходящую через точку o , можно заменить стенкой. Более того, именно эксперимент с $\theta_2 = -\theta_1$ позволяет моделировать отражение косой УВ от твердой стенки в идеальном газе. Проследим эволюцию взаимодействия симметричных УВ (или что то же – отражение УВ от стенки) с ростом интенсивности УВ. При анализе достаточно рассмотреть половинку $СК_0$ и только $СК_1$, которая на рис. 3.31, *б* отвечает течению за верхней косой УВ, а на рис. 3.32 – УВ, приходящей к стенке (*падающей* на неё).

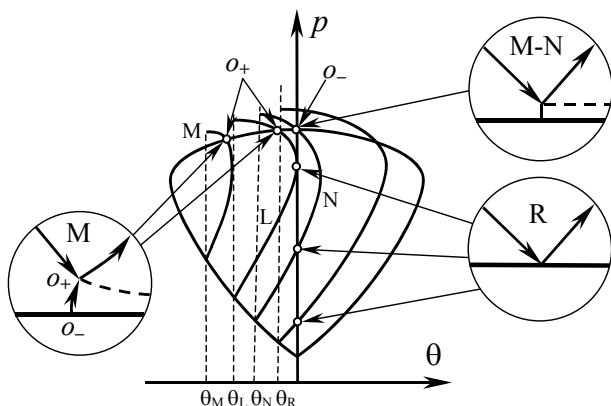


Рис. 3.32

Пока интенсивность приходящего на стенку скачка невелика, реализуется **регулярное отражение (РО)**. Ему на рис. 3.32 отвечают правое нижнее *окно*, символ «R» и значение $\theta = \theta_R$. РО реализуется в широком диапазоне интенсивностей падающего скачка. За отраженным скачком поток параллелен стенке, а давление определяется пересечением правой половинки соответствующей $СК_1$ (на рис. 3.32 нарисованы только они и $СК_0$) с осью ординат ($\theta = 0$). При $\theta_1 < \theta_L$ пересечения $СК_1$ с осью ординат отсутствуют, и РО становится невозможным ($СК_1$, отмеченная на рис. 3.32 буквой «L», касается оси ординат при $\theta_1 = \theta_L$). Для $\theta_1 < \theta_L$, пока пересекаются $СК_1$ и $СК_0$, реализуется **нерегулярное** или **маховское отражение (МО)**. На рис. 3.32 ему отвечают левое *окно*, символ «M» и $\theta = \theta_M$. При МО имеет место **расщепление** падающего скачка на отраженный и **диск Маха** o_-o_+ . В плоскости θp точка o_+ их пересечения (**тройная точка**) располагается на дозвуковых участках $СК_0$ и $СК_1$. Поэтому оба потока за отраженным скачком, по крайней мере, вблизи тройной точки и за всем диском Маха дозвуковые, а угол θ в тройной точке отрицательный. Из-за этого и отраженный скачок, и диск Маха искривлены. В плоскости θp отрезку o_-o_+ физической плоскости отвечает отрезок o_-o_+ $СК_0$. В точке o_- УВ становится прямым скачком.

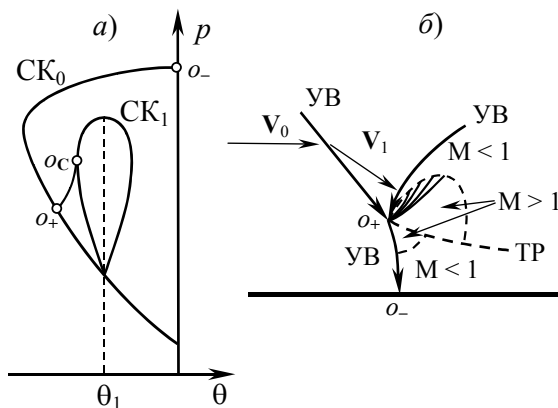


Рис. 3.33

Вопрос о переходе от РО к МО не столь прост, как кажется на первый взгляд. По Л.Д. Ландау РО реализуется при $\theta_1 \geq \theta_L$, после чего происходит переход к МО сразу с криволинейным диском Маха. По Дж. фон Нейману переход происходит раньше при достижении $\theta_1 = \theta_N$. Величина θ_N такова, что отвечающая ей CK_1 , помеченная на рис. 3.32 буквой «N», пересекается с CK_0 на оси ординат. В момент перехода реализуется течение, изображённое на рис. 3.32 в правом верхнем окне, с диском Маха в виде прямого скачка, с отраженным прямолинейным косым скачком сильного семейства, с параллельным стенке TP и с горизонтальными однородными дозвуковыми потоками под и над TP . Как уже отмечалось, при дозвуковой скорости за скачком (за диском Маха в левом окне и при отраженном скачке сильного семейства – в верхнем правом окне) стрелки на UB не означают направления распространения возмущения вдоль UB . В момент перехода давление за отраженной UB изменяется (возрастает) скачкообразно, однако искривление диска Маха происходит непрерывно. В экспериментах переход от РО к МО и наоборот наблюдается и при $\theta_1 = \theta_N$, и при $\theta_1 = \theta_L$.

С ростом интенсивности проходящей UB или, что то же, с увеличением по модулю угла θ_1 точка $\theta = \theta_1$ на CK_0 приближается к критической точке, а число Маха M_1 – к единице. Если $M_1 \rightarrow$

→ 1, то $СК_1$ настолько уменьшается в размерах (особенно в ширину, ибо у УП угол при *заостренной вершине* стремится к нулю), что $СК_0$ и $СК_1$ перестают пересекаться в точках, отличных от точки $\theta = \theta_1$, $p = p_1$ – начальной точки $СК_1$. Такая ситуация изображена на рис. 3.33, а. Более того, при M_0 , близких к единице, $СК_0$ и $СК_1$ не пересекаются ни для каких интенсивностей приходящей УВ. Отсутствие таких пересечений означает невозможность расщепления приходящей УВ, а следовательно, и МО. Тем не менее в подобных ситуациях при невозможности РО экспериментаторы наблюдали трёхволновую маховскую конфигурацию, внешне неотличимую от изображённой в левом окне рис. 3.32. Дж. фон Нейман (1945) назвал наблюдение такой теоретически невозможной ситуации *парадоксом*.

Правда, ещё в 1940-х гг. К. Гудерлей, не зная работы Неймана, предложил схему, суть которой поясняет рис. 3.33. Согласно предположению К. Гудерлея в условиях *парадокса Неймана* реализуется не *трёхволновое*, а *четырёхволновое* взаимодействие. При этом в малой окрестности точки расщепления приходящего скачка отраженная УВ такова, что за ней число Маха $M_2 \leq 1$ с $M_2 = 1$ только в его *начальной* точке o_c . Следовательно, указанная точка для отраженного скачка является *критической*, причём сам скачок с учётом сделанной ранее оговорки оказывается не уходящим, а приходящим. Благодаря такому направлению отраженного скачка точка o_c может быть фокусом неавтомоделльной ЦВР из C^+ -характеристик. На рис. 3.33 ЦВР отвечает отрезок $o_c o_+$. Начинаясь с ЦВР местная сверхзвуковая зона располагается над ТР. В плоскости θp диску Маха отвечает отрезок $o_+ o_-$ $СК_0$. Попытки обнаружить экспериментально, а позднее – методами *сквозного счёта* четырёхволновую конфигурацию оказались безрезультатными и о ней забыли.

Разгадать парадокс Неймана удалось лишь в 1999 г. с помощью прецизионных расчётов (Е.И. Васильев, А.Н. Крайко [35]), в которых сеточные линии одного семейства разностной сетки, сгущающейся к точке o_+ , фокусировались в ней, а все УВ не размывались, а строились явно. При расчёте начало декартовой системы координат xu совмещалось с вершиной клина, а время t отсчитывалось от момента совпадения с осью y УВ I , бегущей

вправо с постоянной скоростью D . Схема дифракции УВ I на клине представлена на рис. 3.34, *а*, на котором наряду с УВ I , изображены отражённая УВ R , диск Маха M , точка пересечения трёх УВ o_+ и прямая $0o_+$. Пока УВ I не дошла до конца клина, возникающее течение не отличается от дифракции на бесконечном клине, и в задаче нет констант с размерностями длины и времени. Следовательно, в автомодельных переменных $\xi = x/(Dt)$ и $\eta = y/(Dt)$ решение не зависит от времени, и точка o_+ движется вдоль некоторого фиксированного луча $0o_+$. Расчёт вёлся установлением, при достижении которого в переменных $\xi\eta$ разностная сетка, связанная с явно выделяемыми УВ R и диском Маха M , и распределения параметров переставали зависеть от времени.

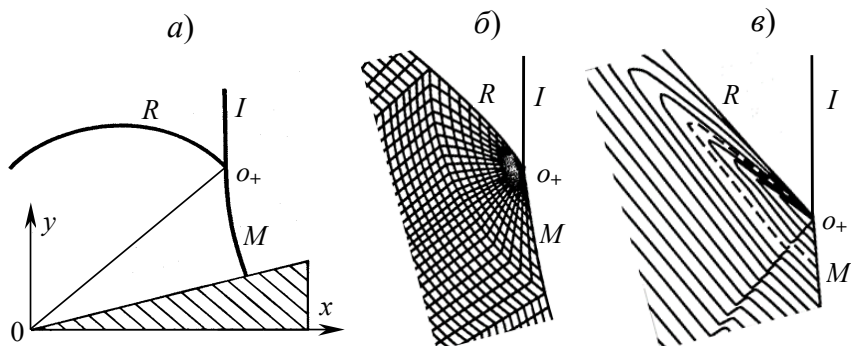


Рис. 3.34

На рис. 3.34, *б*, изображён фрагмент разреженной разностной сетки в малой окрестности точки o_+ . На рис. 3.34, *в* нарисованы линии постоянства чисел Маха (изомахи), определённые с учётом отмеченной выше автомодельности течения (в локальной системе координат, движущейся с точкой o_+ по лучу $0o_+$, течение в окрестности o_+ стационарно). Линия излома изомах – отличный от луча $0o_+$ контактный разрыв. Штриховые кривые – звуковые линии автомодельного течения. Изомахи, фокусирующиеся в точке o_+ , образуют неавтомодельную ЦВР. Расчёты показали, что в условиях парадокса Неймана реализуется схема К. Гудерлея, однако размеры местной сверхзвуковой зоны с ЦВР в окрестности

точки расщепления o_+ составляют сотые доли от размера диска Маха. Обнаруженный **масштабный эффект** – объясняет причину ненаблюдаемости четырёхволновой конфигурации и в экспериментах, и в грубых расчётах. В 2000 г. результаты, аналогичные описанным выше, опубликовали J.K. Hunter, M. Brio [36]. В статье B.W. Skews, J.T. Ashworth [37] наряду со ссылками на работы [35, 36] приведена картинка, полученная в первой из них.

При падении УВ на ТР – границу струи с затопленным пространством (рис. 3.35, а) давление p_1 за УВ больше давления p_0 перед УВ и в затопленном пространстве. Чтобы понизить давление за точкой прихода УВ на ТР, из неё выйдет ЦВР, которая ещё более развернет поток до $p_2 = p_0$. Если над ТР газ не покоится, а течёт с дозвуковой скоростью (рис. 3.35, б), то главное отличие в том, что в точке излома границы $p = p_{st}$, где p_{st} – давление торможения дозвукового потока. Кроме того, неравномерности параметров, распространяющиеся во все стороны по дозвуковому потоку, искривляют ТР, возмущая текущий под ним сверхзвуковой поток и приходящую УВ. Поэтому в целом такое течение не автомодельно даже при занимающем всю нижнюю полуплоскость равномерном (при $x \rightarrow -\infty$) сверхзвуковом потоке. Несмотря на это, в малой окрестности точек взаимодействия превалирует изменение параметров по угловой переменной полярных координат с центром в точке взаимодействия. Как результат – течение тем ближе к автомодельному, чем меньше указана окрестность УВ с ТР, разделяющим сверхзвуковые потоки, в случае $M_{0-} > M_{0+} > 1$ представлено на рис. 3.35, в и г. Здесь от ТР отражается УВ. Если же $M_{0+} > M_{0-} > 1$, то нетрудно показать, что от ТР отражается не УВ, а ЦВР.

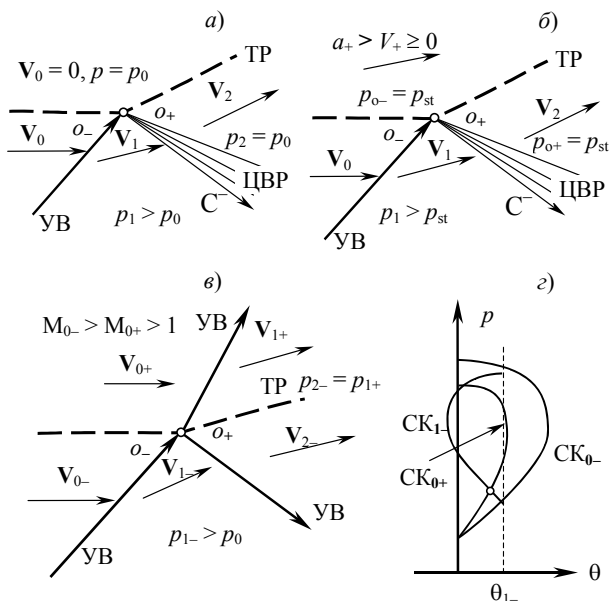


Рис. 3.35

Если перепад давления p_1/p_0 в УВ₁, падающей на стенку, превышает некоторую **критическую** величину, то из-за взаимодействия УВ с **пограничным слоем** её отражение принципиально отличается от описанного выше. При этом образуется отрывная зона (рис. 3.36), скорость в большей части которой мала, а давление $p \approx p_1^*$, т.е. близко к постоянному. Отношение p_1^*/p_0 – **критический перепад** давления в косой УВ_{1*} зависит от того ламинарный или турбулентный пограничный слой до точки его взаимодействия с УВ₁, от величин γ , числа Маха M_0 , числа Рейнольдса и других безразмерных определяющих параметров. Согласно экспериментам для турбулентного пограничного слоя на теплоизолированной стенке критический перепад и отношение длины отрывной зоны к характерной толщине пограничного слоя – функции только γ и M_0 . В свете таких экспериментальных данных, а в остальном считая течение невязким, придём к картине отражения, изображённой на рис. 3.36. Вне малой окрестности

пограничного слоя главное его влияние состоит в том, что вместо одной отраженной УВ получаются две (УВ₂ и УВ₄) и ЦВР между ними. Это отличие проявляется на расстояниях, много больших толщины пограничного слоя и размеров отрывной зоны, и становится несущественным только за точкой пересечения УВ₂ и УВ₄.

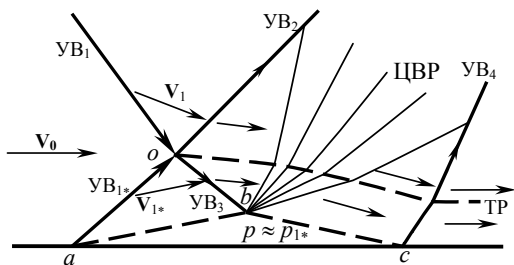


Рис. 3.36

Задача взаимодействия двух однородных сверхзвуковых потоков, встречающихся под разными углами (рис. 3.37), во многом аналогична рассмотренной в Гл. 2.5 нестационарной задаче о распаде произвольного разрыва. Однако здесь в отличие от нестационарного случая стационарное автомодельное решение, как и при обтекании бесконечного клина, существует не для любых потоков. Если же оно есть, то для нормального газа возможный набор течений, получающихся с использованием СК, как и в Гл. 2.5, включает идущие в разные стороны от ТР: две УВ (рис. 3.37, а), две ЦВР (б), УВ и ЦВР (в). При расходящихся углах «встречи» возможно решение с зоной вакуума между ЦВР (г). Задача взаимодействия – ключевой элемент стационарного аналога разностной схемы С.К. Годунова (А.Н. Крайко и др., 1972).

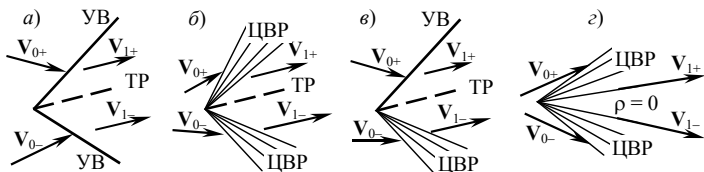


Рис. 3.37

Одно из приложений описанных выше результатов – *нерасчётное истечение* сверхзвуковых струй. Как правило, давление p_b в концевой точке b контура ab сверхзвукового сопла реактивного двигателя отличается от давления p_e в окружающем *затопленном* пространстве или в обтекающем летательный аппарат потоке. При $p_b < p_e$ сопло и истекающую из него струю называют **перерасширенными**, а при $p_b > p_e$ – **недорасширенными**.

Схема истечения перерасширенной струи идеального газа из симметричного плоского сопла с равномерным потоком в сечении $0b$ в затопленное пространство представлена на рис. 3.38, *a*. На нём $bdgh$ – граница струи, bc – УВ, cd – УВ, отраженная от **плоскости симметрии**, def – ЦВР, возникающая при отражении УВ от границы струи. В ЦВР def на отрезке ef плоскости симметрии при $\theta = 0$ поток разгоняется, и идущие от ef C^+ -характеристики также образуют волну разрежения. На участке границы gh для обеспечения постоянства p вектор скорости поворачивается по часовой стрелке (при движении от точки g к точке h при $p = p_e$ угол θ уменьшается). В результате C^- -характеристики, идущие от участка gh , образуют волну сжатия, и струя сужается.

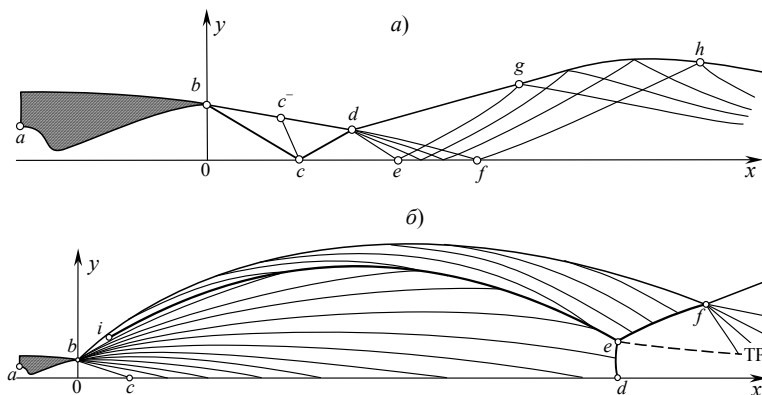


Рис. 3.38

Волна сжатия отражается от плоскости симметрии волной сжатия. В ней до или после отражения из-за пересечения одно-

имённых характеристик может возникнуть УВ. В результате к границе струи после отражения от плоскости симметрии придёт либо непрерывная волна сжатия, либо – волна сжатия с УВ, либо – одна УВ. Во всех перечисленных ситуациях для обеспечения постоянства давления угол θ на границе струи поворачивается на конечном участке границы или в точке против часовой стрелки, и струя вновь расширяется. В результате она приобретает **бочкообразную** форму, в линейном приближении – строго периодическую. В действительности из-за нелинейных эффектов и связанных с ними слабых УВ строгой периодичности нет даже при $|p_e/p_b - 1| \ll 1$. С другой стороны, в струйных задачах с удалением от среза сопла нарастает влияние неидеальности газа и неустойчивости ТР (границы струи). Поэтому распределения, получающиеся в рамках стационарного течения идеального газа, интересны в пределах одной-двух *бочек*.

С ростом нерасчётности струи – отношения p_e/p_b сначала РО УВ bc в точке c сменится МО, с образованием диска Маха. Затем величина p_e/p_b превысит значение, отвечающее для фиксированного M_b максимальному углу поворота потока, однако ещё раньше будет превышен упоминавшийся выше критический перепад p_{1*}/p_0 , связанный с взаимодействием УВ с пограничным слоем. С этого момента система УВ, начинающаяся косой УВ с критическим перепадом, войдёт в сопло. При этом в рамках отрывной модели *элементарной теории* Гл. 3.3 косая УВ займет положение, при котором перепад давления на ней сравняется с новым критическим («новым» из-за изменения параметров перед ней).

В осесимметричном случае при $p_e/p_b > 1$ отражение УВ bc от оси симметрии не может быть регулярным. Чтобы доказать это, проведём C^- -характеристику c^-c . Вдоль неё выполняется условие совместности (3.4.21¹):

$$d\theta - \frac{\text{ctgu}}{\rho V^2} dp - \left[\frac{\sin \theta \sin \mu}{\sin(\theta - \mu)} + \frac{w^2}{V^2} \text{ctg}(\theta - \mu) \right] \frac{dy}{y} = 0. \quad (1)$$

За косой УВ угол $\theta \neq 0$, а коэффициент перед dy/y при приближении к оси струи – знакоопределённая функция. Поэтому, проинтегрировав левую часть уравнения (1) от точки c^- до точки c , получим неограниченный интеграл от слагаемого с dy/y , который не

могут скомпенсировать конечные интегралы от двух первых слагаемых. Следовательно, такая C^- -характеристика не доходит до оси симметрии, что возможно в двух случаях: 1) нерегулярного отражение с образованием диска Маха, 2) реализацией между падающей и отраженной УВ центрированной волны (ЦВ) – конического течения с $M < 1$ за падающей УВ и с $M > 1$ перед отраженной УВ. Анализ свойств такой ЦВ в рамках изложенной в Гл. 3.10 теории конических течений показывает, что она невозможна, и остаётся течение с диском Маха. Пока отношение p_e/p_b невелико, размер диска Маха пренебрежимо мал.

В связи с полётами на больших высотах актуальны недорасширенные режимы истечения сверхзвуковых струй с $p_b/p_e \gg 1$. Схема такого истечения дана на рис. 3.38, б. При истечении осесимметричной струи её граница выпукла уже в точке b . В пределах **первой бочки** (до точки f) на границе постоянно давление $p = p_e$ и угол Маха. По этой причине C^- -характеристики, идущие от выпуклой границы, пересекаются, образуя висячий скачок ie , который быстро набирает большую интенсивность и отражается от оси симметрии с образованием диска Маха ed и косой УВ ef . При $p_b/p_e \gg 1$ размер первой бочки намного превосходит радиус среза сопла $x_f \gg y_b$, а с удалением от среза сопла почти весь газ струи течёт в **ударном слое** между её границей и сжимающим газ висячим скачком. Приосевая дозвуковая струя за диском Маха разгоняется до сверхзвуковой скорости под воздействием ЦВР, которая возникает при падении на границу струи косой УВ ef .

Глава 3.10. Осесимметричные конические течения. Обтекание кругового конуса

Сокращения: ОКТ – осесимметричное коническое течение, ККТ – кривая ОКТ, ПВР – пучок волн разрежения, ТР – тангенциальный разрыв, УКТ – уравнения ОКТ, УВ – ударная волна, УП – ударная поляра, ЯК – яблоковидная кривая.

Осесимметричные конические течения (ОКТ) – это такие стационарные течения, параметры которых зависят только от отношения меридиональных переменных y/x цилиндрических координат x, y с началом в вершине кругового конуса – границы ОКТ

с равномерным набегающим потоком. В плоскости xu ему отвечает C^+ -характеристика (рис. 3.39, a , μ_0 – угол Маха невозмущённого потока), C^- -характеристика или УВ. Как видно из дальнейшего, на рис. 3.39-3.40 вектор скорости в ОКТ поворачивается по часовой стрелке, а на рис. 3.42 и 3.42 – против неё.

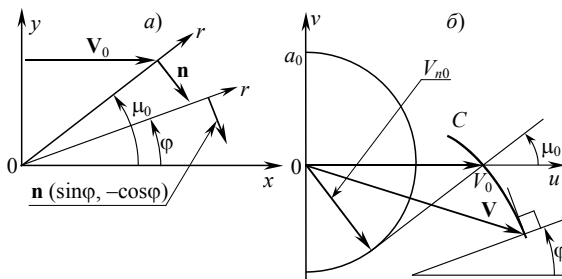


Рис. 3.39

В стационарных УВ полная энтальпия H не изменяется, а во всех точках УВ – круговом конусе приращение энтропии s одинаково. Следовательно, ОКТ, примыкающее с УВ или без неё к равномерному набегающему потоку, изэнтропично и изоэнергетично. Согласно Гл. 3.1 для таких течений уравнения движения сводятся к уравнению отсутствия вихря (3.1.17). Его единственное не равное тождественно нулю следствие и уравнение неразрывности в форме (3.1.21) принимают вид

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (u^2 - a^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2uv \frac{\partial u}{\partial y} + (v^2 - a^2) \frac{\partial v}{\partial y} - a^2 \frac{v}{y} = 0. \quad (1)$$

Второе из них – преобразованное с учётом первого уравнение (3.1.21), причём a^2 – известная функция модуля скорости V .

Если r и φ – полярные координаты в плоскости xu , то

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Для ОКТ u и v не зависят от r , и в силу этих формул равенства (1) сведутся к обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$u_\varphi + v_\varphi \operatorname{tg} \varphi = 0, \quad u_\varphi = a^2 v / N, \quad N = a^2 - V_n^2, \quad V_n = u \sin \varphi - v \cos \varphi. \quad (2)$$

Здесь и далее $z_\phi = dz/d\phi$, где z – любой параметр, а V_n – проекция V на нормаль n к лучу $\phi = \text{const}$ плоскости xu (рис. 3.39). Из уравнений (2) получим **уравнение ОКТ (УКТ)**, определяющее для таких течений зависимость $v = v(u)$, т.е. **кривую ОКТ (ККТ)** – C в плоскости годографа. Для этого записанное в форме

$$v' \equiv dv/du = -\text{ctg}\phi \quad (3)$$

первое уравнение (2) продифференцируем по u , исключим $\phi' = 1/u_\phi$ с u_ϕ из (2) и учтем, что согласно равенству (3)

$$V_n = u \sin \phi - v \cos \phi = (u - v \text{ctg}\phi) \sin \phi = (u + vv') \sin \phi,$$

$$V_n^2 = (u + vv')^2 \sin^2 \phi, \quad \sin^2 \phi = 1/(1 + v'^2).$$

В силу сказанного имеем

$$v'' \equiv \frac{d^2v}{du^2} = \frac{\phi'}{\sin^2 \phi} = \frac{N}{a^2 v \sin^2 \phi} = N \frac{1 + v'^2}{a^2 v} = \frac{1 + v'^2}{v} - \frac{(u + vv')^2}{a^2 v}.$$

Таким образом, УКТ запишется в двух эквивалентных формах:

$$vv'' = N \frac{1 + v'^2}{a^2} = 1 + v'^2 - \frac{(u + vv')^2}{a^2}, \quad N = a^2 - V_n^2. \quad (4)$$

Согласно уравнению (3) касательная к ККТ в плоскости uv (рис. 3.39, б) нормальна лучу $\phi = \text{const}$ плоскости xu (рис. 3.39, а).

Изучение течений, описываемых УКТ (4), начнём с ОКТ, примакающих на конусе $\phi = \phi_0$ к равномерному потоку: $u \equiv V_0$, $v \equiv 0$. При $\phi = \phi_0$ во втором уравнении (2) одновременно с v должно обращаться в нуль N . В противном случае $u_{\phi_0} = 0$, и течение продолжится за конус $\phi = \phi_0$ тем же равномерным потоком. Итак,

$$V_{n0}^2 = a_0^2. \quad (5)$$

Такое возможно только при $M_0 \geq 1$, и согласно определению V_n в (2) $\phi = \phi_0$ – **начальный конус Маха**: $\phi_0 = \mu_0$ или $\phi_0 = \pi - \mu_0$, где μ – угол Маха ($\sin \mu = 1/M$). Как уже отмечалось, на рис. 3.39 $\phi_0 = \mu_0$, и в силу уравнения (3)

$$v'_0 = \mp \text{ctg} \mu_0 = \mp \sqrt{M_0^2 - 1}. \quad (6)$$

Здесь и далее верхний знак и угол $\phi_0 = \mu_0$ отвечает начальному конусу Маха, направленному по набегающему потоку, а нижний знак и угол $\phi_0 = \pi - \mu_0$ – против него.

Равенства (5) и (6) обращают в нули правые части уравнения (4). Воспользовавшись ими и тем, что с учётом уравнения (3)

$$\begin{aligned} \frac{da^2}{dp} &= -\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\omega^2}{\omega_p} \right)_s = -\frac{2\omega(\omega_p)^2 - \omega^2 \omega_{pp}}{(\omega_p)^2} = -\frac{2}{\rho} + \rho^2 a^4 \omega_{pp}, \quad \frac{dp}{dh} = \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial h} \right)_s = \rho, \quad \frac{dh}{dV^2} = \left(\frac{\partial h}{\partial V^2} \right)_H = -\frac{1}{2}, \quad (V^2)' = 2u + 2vv' = 2(u - v \text{ctg} \varphi), \\ (a^2)' &= \frac{da^2}{dp} \frac{dp}{dh} \frac{dh}{dV^2} (V^2)' = (2 - \rho^3 a^4 \omega_{pp})(u - v \text{ctg} \varphi), \end{aligned} \quad (7)$$

раскроем неопределённость в делённом на v равенстве (4)

$$\begin{aligned} v_0'' &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{a^2(1+v'^2) - (u+vv')^2}{a^2v} = \\ &= \frac{(a^2)'(1+v'^2) + 2a^2v'v'' - 2(u+vv')(1+v'^2)}{a^2v'} \Big|_0 = \pm \frac{\rho_0^3 a_0^3 \omega_{pp0} M_0^3}{\sqrt{M_0^2 - 1}} + 2v_0''. \end{aligned}$$

Отсюда

$$v_0'' = \mp \rho_0^3 a_0^3 \omega_{pp0} M_0^3 / \sqrt{M_0^2 - 1}. \quad (8)$$

Дифференцируя уравнение (4) по u , можно последовательно вычислить любую производную $v_0^{(k)}$ с $k \geq 3$, причём третья производная также конечна и два её значения выражаются через параметры с индексом «0». Структура УКТ (4), однако, такова, что каждая производная с $k \geq 2$ представляется дробью, в знаменателе которой стоит v . Поэтому для конечности производных при $v \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow \varphi_0$ одновременно должны обращаться в нули и их числители. Неизбежно с некоторого $k > 3$ числители станут отличными от нуля, а соответствующие производные бесконечными. Это означает, что для УКТ (4) точки отрезка $a_* < u < V^M$ оси u плоскости годографа – особые. О том же свидетельствуют два наклона и две кривизны, получающиеся согласно формулам (6) и (8). Из любой особой точки выходит однопараметрическое семейство ККТ, а каждой ККТ C отвечает некоторое ОКТ в плоскости xu .

Для анализа ОКТ в плоскости xu найдём производные от компонент скорости и от $N = a^2 - V_n^2$ по φ на начальном конусе Маха. В силу определений V_n и N в (2) и формулы (7) при $\varphi = \varphi_0$ имеем

$$\begin{aligned}
(a^2)_{\varphi 0} &= (a^2)'_0 u_{\varphi 0} = (2 - \rho^3 a^4 \omega_{pp})_0 V_0 u_{\varphi 0}, \\
(V_n^2)_{\varphi 0} &= 2V_{n0}(u \sin \varphi - v \cos \varphi)_{\varphi 0} = 2V_0 u_{\varphi 0} + 2V_0^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0, \\
N_{\varphi 0} &= (a^2 - V_n^2)_{\varphi 0} = -(\rho^3 a^4 \omega_{pp} u)_0 u_{\varphi 0} - 2V_0^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0.
\end{aligned}$$

Раскрыв неопределённость во втором уравнении (2) и учтя равенство (3), найдём

$$u_{\varphi 0} = -a_0^2 (\operatorname{ctg} \varphi_0) u_{\varphi 0} / N_{\varphi 0}.$$

Подставив полученное отсюда $N_{\varphi 0}$ в приведённую выше формулу для $N_{\varphi 0}$, определим $u_{\varphi 0}$, а затем из уравнения (3) – $v_{\varphi 0}$. В итоге

$$u_{\varphi 0} = -\frac{V_0 \sin^2 \mu_0 \operatorname{ctg} \varphi_0}{\rho_0^3 a_0^4 \omega_{pp0}}, \quad v_{\varphi 0} = \frac{V_0 \cos^2 \mu_0}{\rho_0^3 a_0^4 \omega_{pp0}}, \quad N_{\varphi 0} = -a_0^2 \operatorname{ctg} \varphi_0. \quad (9)$$

Согласно формуле (1.4.8) для совершенного газа $\rho^3 a^4 \omega_{pp} = \gamma + 1$.

Пусть ОКТ примыкает к равномерному сверхзвуковому потоку по обращенному навстречу ему начальному конусу Маха (рис. 3.40, a , $\varphi_0 = \pi - \mu_0$). Если $M_0 \rightarrow \infty$, то $a_0/a_* \rightarrow 0$, $V_0/a_* \rightarrow V^M$, начальная C^- -характеристика C_0^- на рис. 3.40, a сливается с осью x , а касательная к окружности $V = a_0$ на рис. 3.40, b – с осью u .

Для нормальных газов с учётом знаков входящих в формулы (9) тригонометрических функций в рассматриваемом случае (φ во втором квадранте) в силу формул (6), (8) и (9)

$$v'_0 > 0, \quad v''_0 > 0, \quad u_{\varphi 0} > 0, \quad v_{\varphi 0} > 0, \quad N_{\varphi 0} > 0, \quad (10)$$

т.е. в точке $u = V_0$, $v = 0$ ККТ (C – на рис. 3.40, b) – вогнутая кривая. С уменьшением угла φ от $\varphi_0 = \pi - \mu_0$ сначала одновременно уменьшаются обе компоненты вектора скорости и $N = a^2 - V_n^2$. Поскольку на начальном конусе Маха $v = N = 0$, то они становятся отрицательными. Таким образом, сверхзвуковой поток тормозится, наклон его вектора скорости $\mathbf{V}$ становится отрицательным, а проекция $\mathbf{V}$ на нормаль к лучам $\varphi = \text{const}$ – сверхзвуковой. Согласно второму уравнению (2) в ОКТ возможно лишь одновременное обращение в нуль N и v . Однако, опираясь на уравнения (2), можно показать, что этого не происходит, т.е. они остаются отрицательными. Как следствие этого, согласно уравнению (4) ККТ C на рис. 3.40, b везде вогнутая, а в силу второго уравнения (2) u уменьшается вместе с уменьшением угла φ . При

С другой стороны, из отрицательности N следует, что $V_n > a$, и появляется возможность получения $v = 0$ за УВ, которая, совпадая с лучом $\varphi = \varphi_s < \pi/2$, поворачивает поток против часовой стрелки. Для определения φ_s введём обозначения $V_- = V(\varphi_s)$ и $M_- = M(\varphi_s) > 1$ и для каждого M_- построим на векторе V_- ударную поляру (УП на рис. 3.40, б). Пересечение этой УП с осью u даст параллельный оси x вектор скорости V_+ за УВ. Угол наклона УВ к оси x должен совпадать с углом наклона $\sigma = \sigma(\varphi_s)$ к оси u нормали, опущенной из начала координат плоскости годографа на прямую, проведённую через концы векторов V_- и V_+ . Равенство $\varphi_s = \sigma(\varphi_s)$ определяет угол φ_s . В приближении идеального газа линии тока построенного ОКТ можно заменить твердыми стенками. Получающийся при этом осесимметричный канал называют **диффузором Буземана** (А. Busemann, 1942).

$$v_0' < 0, \quad v_0'' < 0, \quad u_{\varphi 0} < 0, \quad v_{\varphi 0} > 0, \quad N_{\varphi 0} < 0.$$

204

Следовательно, поток разгоняется и поворачивает к оси симметрии. При этом нормальная к лучам $\varphi = \text{const}$ компонента вектора скорости становится дозвуковой. Рассматриваемое течение (см. ниже) возможно, только вне некоторой примыкающей к полубесконечному цилиндру «кормовой части» тела вращения. На рис. 3.41, а образующие цилиндра и кормовой части даны жирной линией, которая начинает искривляться после пересечения с C^+ -характеристикой C_0^+ – образующей начального конуса Маха.

Согласно уравнениям (2) разгоняться и оставаться сверхзвуковым (при постоянных H и s рост V ведёт к росту числа Маха) исследуемое ОКТ будет, пока не сменятся знаки v или N . Однако в силу тех же уравнений даже знак производной v_φ может измениться лишь после смены знака N , и только позднее v , в принципе, станет нулем. С другой стороны, согласно второму уравнению (2) непрерывное продолжение решения за луч, на котором $N = 0$, невозможно, если на нём $v \neq 0$. Итак, либо ОКТ разгоняется до оси симметрии $\varphi = 0$, где $v(0) < 0$, либо $N(\varphi_+ > 0) = 0$ при $v(\varphi_+) < 0$, и за луч $\varphi = \varphi_+$ ОКТ продолжить нельзя.

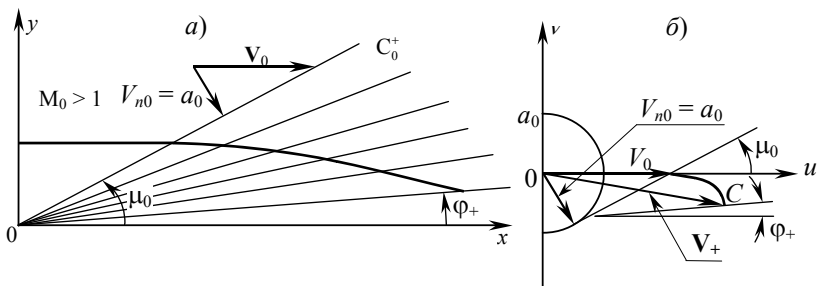


Рис. 3.41

Первая альтернатива отпадает по тем же соображениям, по которым в Гл. 3.9 показана невозможность регулярного отражения УВ от оси симметрии. Следовательно, есть предельный луч $\varphi =$

φ_+ , на котором $N_+ = 0$ и $V_{n+} = a_+$. По направлению он совпадает с C^+ -характеристикой ($\varphi_+ = \theta_+ + \mu_+$). Поскольку на этом луче p и

θ постоянны, причём $\theta_+ \neq 0$, то на нём не выполняется условие совместности (3.4.20⁺). Поэтому предельный луч – огибающая C^+ -характеристик. Согласно равенствам (2) на предельном луче производные по φ от всех параметров бесконечны. Построенную с использованием такого ОКТ (А.А. Никольский, 1949) кормовую часть можно закончить при любом $\varphi \geq \varphi_+$. При этом ОКТ сохранится левее идущих от концевой точки кормовой части УВ или C^+ -характеристики.

В задаче обтекания равномерным сверхзвуковым потоком бесконечного кругового конуса (А. Буземанн, 1929) отсутствует характерный линейный размер. Поэтому если при нулевом угле атаки реализуется стационарное течение, то его параметры – функции только отношения y/x (рис. 3.42, *а*). В силу этого УВ – также круговой конус, и её наклон, интенсивность и приращение энтропии постоянны.

За УВ $v > 0$, а нормальная к ней компонента скорости V_+ дозвуковая. Поэтому $N_+ = a_+^2 - V_n^2 > 0$, и в силу уравнения (4) ККТ C при $\varphi = \varphi_s$ – вогнутая кривая. В силу уравнений (2) и (7) при любых φ

$$N_\varphi = -(u - v \operatorname{ctg} \varphi) [\rho^3 a^4 \omega_{pp} u_\varphi + 2(u \cos \varphi + v \sin \varphi) \sin \varphi],$$

$$(V^2)_\varphi / 2 = (u - v \operatorname{ctg} \varphi) u_\varphi, \quad u - v \operatorname{ctg} \varphi = V_n / \sin \varphi, \quad u_\varphi = a^2 v / N. \quad (11)$$

Первый множитель правых частей, положительный за УВ, согласно условию непротекания на образующей конуса ($\varphi = \theta_c$) уменьшается до нуля. Согласно уравнениям (2) и (11) при положительных N и v производные $u_\varphi > 0$, $(V^2)_\varphi > 0$, а $v_\varphi < 0$. Наконец, для нормальных газов квадратная скобка в первом уравнении (11) заведомо положительна, и, как следствие этого, $N_\varphi < 0$. В силу выписанных неравенств при уменьшении φ от φ_s до θ_c поток тормозится, u уменьшается, N и v растут, и ККТ C остаётся вогнутой. При $\varphi = \theta_c$ нормаль к C на рис. 3.42, *б* направлена по образующей конуса на рис. 3.42, *а*, выполняется условие непротекания: $u = v \operatorname{ctg} \theta_c$ и вектор скорости V_c перпендикулярен ККТ C (3.41, *б*).

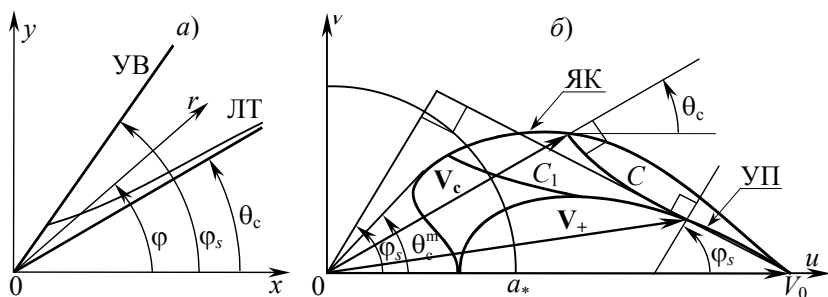


Рис. 3.42

Для фиксированного набегающего потока концевые точки ККТ, отвечающих всей УП, образуют в плоскости годографа (рис. 3.42, б) **яблоковидную кривую (ЯК)**. Прямая УВ и УВ нулевой интенсивности (конус Маха) возможны при обтекании конуса с $\theta_c = 0$. За УВ он (полуось $x > 0$) не возмущает поток. Поэтому на оси u начальная и конечная точки УП и ЯК совпадают. ЯК удобно строить, выпуская ККТ из разных точек УП. Если УП, ЯК и сетка соединяющих их ККТ построены, то задача обтекания конуса с заданным полууглом при вершине θ_c решается аналогично задаче обтекания клина с тем отличием, что при обтекании конуса роль УП играет ЯК. В соответствии с этим максимальный угол конуса θ_c^m , при котором есть ОКТ с присоединенной УВ, больше максимального угла клина.

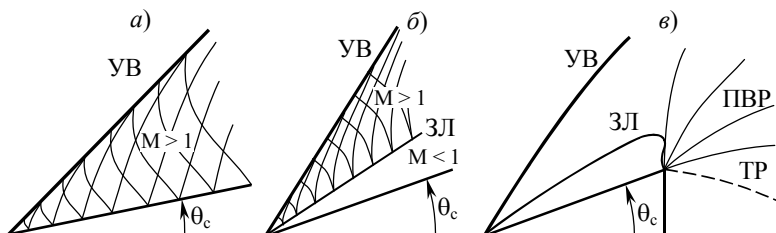


Рис. 3.43

При обтекании бесконечного конуса двум точкам пересечения ЯК с прямой, проведённой под углом θ_c из начала координат плоскости годографа, отвечают два стационарных ОКТ. Правой точке отвечает УВ слабого семейства, а левой – сильного. Относительно выбора решения для конуса сохраняют силу соображения Гл. 3.8, связанные с обтеканием клина.

Новыми в задаче обтекания конуса являются режимы с УВ слабого семейства и с дозвуковым потоком, примыкающим к конусу. Эти режимы реализуются из-за того, что часть вогнутых ККТ (например, C_1 на рис. 3.42, б) пересекает выпуклую звуковую окружность. На рис. 3.43, а и б представлены два режима обтекания бесконечного конуса: сверхзвуковой (а) и смешанный (б). Тонкими кривыми нарисованы C^+ и C^- -характеристики. Если на образующей бесконечного конуса $M \geq 1$, то, как и в случае клина, течение в конечной области вблизи наветренной (обращенной к набегающему потоку) поверхности его конечного варианта такое же, как для бесконечного конуса. При смешанном режиме возмущения, вызванные обтеканием задней кромки с образованием пучка волн разрежения (ПВР – на рис. 3.43, в), распространяясь по дозвуковой зоне, искривляют звуковую линию и УВ. Однако в вершине конуса течение и в этом случае остаётся коническим (в смысле зависимости параметров от угла φ).

Глава 3.11. Двумерные конические течения

Сокращения: КЗЛ – коническая звуковая линия, ЛТ – линия тока, КЛТ – коническая ЛТ, КП – конические переменные, КТ – коническое течение, ТФ – точка Ферри, УВ – ударная волна, УКТ – уравнения конического течения.

1. Конически до- и сверхзвуковые течения. При обтекании однородным сверхзвуковым потоком конических тел нет характерного линейного размера. Поэтому при совмещении начала координат с их вершиной (рис. 3.44) параметры стационарных течений, возможных при таком обтекании, – функции двух **конических переменных (КП)** $\eta = y/x$ и $\zeta = z/x$ или угловых сферических переменных, не завися от каждой декартовой координаты x , y и z

или от радиальной координаты r . Такие течения назовём **коническими** (КТ), а описывающие их двумерные уравнения – УКТ.

По аналогии с плоскими и осесимметричными течениями можно ожидать, что тип двумерных УКТ определит число Маха, вычисленное без радиальной компоненты вектора скорости $\mathbf{V}$. Действительно, УКТ в сферических координатах при отсутствии частных производных по r включают умноженные на $1/r$ производные по сферическим углам ϑ и ϕ и пропорциональные $1/r$ свободные члены. Последние обусловлены растеканием газа в уравнении неразрывности и центробежными и кориолисовыми ускорениями в уравнениях движения. Введём (рис. 3.44) в произвольной точке сферы $r = \text{const}$ локальные декартовы координаты $x'y'z'$ с осями x' и y' , направленным по параллелям и меридианам, и осью z' , направленной по $\mathbf{r}$. В этих координатах умноженные на $1/r$ производные по ϑ и ϕ станут производными по x' и y' , свободные члены сохранятся, а из-за отсутствия производных по r производных по z' не будет. С другой стороны, течение в малой окрестности рассматриваемой точки (при $|x'|, |y'| \ll r$) должно быть близко к плоскому, т.е. к независящему от z' при отличной от нуля z' -компоненте скорости. Следовательно, уравнения в координатах $x'y'z'$ будут отличаться от уравнений плоского течения свободными членами, а их тип определит число Маха, вычисленное по проекции $\mathbf{V}_\tau$ скорости $\mathbf{V}$ на плоскость $x'y'$, нормальную $\mathbf{r}$.

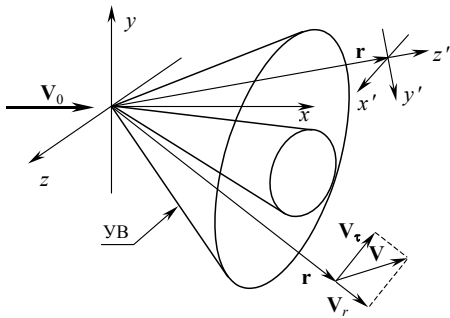


Рис. 3.44

По определению $\mathbf{V}_\tau = \mathbf{V} - \mathbf{V}_r$, где $\mathbf{V}_r = \mathbf{i}_r V_r$, а $\mathbf{i}_r = \mathbf{r}/r$. Направим ось x декартовых координат xyz по вектору скорости набегающего потока $\mathbf{V}_0$, и пусть u, v, w – проекции $\mathbf{V}$ на эти оси. Тогда

$$\mathbf{i}_r = \frac{(1, \eta, \zeta)}{\sqrt{1 + \eta^2 + \zeta^2}}, \quad V_r = \mathbf{V} \cdot \mathbf{i}_r = \frac{u + \eta v + \zeta w}{\sqrt{1 + \eta^2 + \zeta^2}}, \quad \mathbf{V}_r = (1, \eta, \zeta) \frac{u + \eta v + \zeta w}{1 + \eta^2 + \zeta^2},$$

$$\mathbf{V}_\tau = \mathbf{V} - \mathbf{V}_r = \left(u - \frac{u + \eta v + \zeta w}{1 + \eta^2 + \zeta^2}, v - \eta \frac{u + \eta v + \zeta w}{1 + \eta^2 + \zeta^2}, w - \zeta \frac{u + \eta v + \zeta w}{1 + \eta^2 + \zeta^2} \right) =$$

$$= \left(\frac{\eta(\eta u - v) + \zeta(\zeta u - w)}{1 + \eta^2 + \zeta^2}, \frac{v - \eta u + \zeta(v\zeta - \eta w)}{1 + \eta^2 + \zeta^2}, \frac{w - \zeta u + \eta(\eta w - \zeta v)}{1 + \eta^2 + \zeta^2} \right).$$

Отсюда найдём, что

$$V_\tau^2 = \frac{(v - \eta u)^2 + (w - \zeta u)^2 + (\zeta v - \eta w)^2}{1 + \eta^2 + \zeta^2}. \quad (1)$$

Для вывода УКТ воспользуемся записанными в координатах xyz уравнениями стационарного течения (3.1.1), (3.1.2) и (3.1.4):

$$\frac{1}{\rho a^2} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \rho \frac{dv}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\rho \frac{dw}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{ds}{dt} = 0 \quad \left(\frac{d}{dt} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (2) - (6)$$

В уравнении неразрывности (3.1.1) производная dp/dt заменена на dp/dt с учётом уравнения (6). Во всём КТ справедлив интеграл

$$2H \equiv 2h + u^2 + v^2 + w^2 = 2H_0. \quad (7)$$

Для перехода к КП $\eta = y/x$ и $\zeta = z/x$ используем равенства

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \varphi_\eta d\eta + \varphi_\zeta d\zeta =$$

$$= \varphi_\eta \left(\frac{1}{x} dy - \frac{\eta}{x} dx \right) + \varphi_\zeta \left(\frac{1}{x} dz - \frac{\zeta}{x} dx \right), \quad \varphi_\eta \equiv \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)_\zeta, \quad \varphi_\zeta \equiv \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right)_\eta,$$

в силу которых

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\eta \varphi_\eta + \zeta \varphi_\zeta}{x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\varphi_\eta}{x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\varphi_\zeta}{x}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v - \eta u}{x} \varphi_\eta + \frac{w - \zeta u}{x} \varphi_\zeta. \quad (8)$$

С учётом этих равенств пространственные уравнения (2) – (6) преобразуются к системе двумерных УКТ:

$$L \equiv (v - \eta u)p_\eta + (w - \zeta u)p_\zeta - \rho a^2(\eta u_\eta + \zeta u_\zeta - v_\eta - w_\zeta) = 0, \quad (9)$$

$$L_1 \equiv \rho[(v - \eta u)u_\eta + (w - \zeta u)u_\zeta] - (\eta p_\eta + \zeta p_\zeta) = 0, \quad (10)$$

$$L_2 \equiv \rho[(v - \eta u)v_\eta + (w - \zeta u)v_\zeta] + p_\eta = 0, \quad (11)$$

$$L_3 \equiv \rho[(v - \eta u)w_\eta + (w - \zeta u)w_\zeta] + p_\zeta = 0, \quad (12)$$

$$(v - \eta u)s_\eta + (w - \zeta u)s_\zeta = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13), как и его предшественник – уравнение (6), характеристическое. На **плоскости** КП $\eta\zeta$ оно выполняется вдоль C^0 -характеристик – **конических линий тока** (КЛТ):

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{w - \zeta u}{v - \eta u}. \quad (14)$$

Согласно уравнению (14) введём скорость КТ – двумерный вектор $\mathbf{V}_c$ с компонентами $V_{c\eta} = v - \eta u$ и $V_{c\zeta} = w - \zeta u$. Кроме уравнения (13), на КЛТ справедливо ещё одно уравнение – результат сложения уравнений (11) и (12), умноженных на компоненты $\mathbf{V}_c$. Итак, на КЛТ выполняются два **условия совместности**:

$$ds = 0, \quad \rho(V_{c\eta}dv + V_{c\zeta}dw) + dp = 0. \quad (15), (16)$$

Контур конического тела в конических переменных $\eta\zeta$ задаётся уравнением $F(\eta, \zeta) = 0$. Оно же определяет форму поверхности тела в пространстве. Для нормали $\mathbf{n}$ к контуру тела на плоскости конических переменных $\eta\zeta$, нормали $\mathbf{N}$ к его поверхности в пространстве и для проекции $\mathbf{V}$ на $\mathbf{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{F_\eta, F_\zeta}{\sqrt{F_\eta^2 + F_\zeta^2}}, \quad \mathbf{N} = \frac{-(\eta F_\eta + \zeta F_\zeta), F_\eta, F_\zeta}{\sqrt{(\eta F_\eta + \zeta F_\zeta)^2 + F_\eta^2 + F_\zeta^2}}, \quad V_N = \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} = \\ &= \frac{(v - \eta u)F_\eta + (w - \zeta u)F_\zeta}{\sqrt{(\eta F_\eta + \zeta F_\zeta)^2 + F_\eta^2 + F_\zeta^2}} = \frac{(\mathbf{V}_c \cdot \mathbf{n})\sqrt{F_\eta^2 + F_\zeta^2}}{\sqrt{(\eta F_\eta + \zeta F_\zeta)^2 + F_\eta^2 + F_\zeta^2}} = 0. \end{aligned}$$

Компоненты $\mathbf{N}$ получены с учётом формул (8). Из равенства $V_N = 0$ – условия непротекания на поверхности тела следует, что либо $\mathbf{V}_c$ и КЛТ касаются контура тела, либо на нём $\mathbf{V}_c = 0$. В обоих случаях на контуре тела в плоскости конических переменных $\eta\zeta$,

как и на его поверхности в пространстве, выполняется условие непротекания: $V_{cn} = 0$.

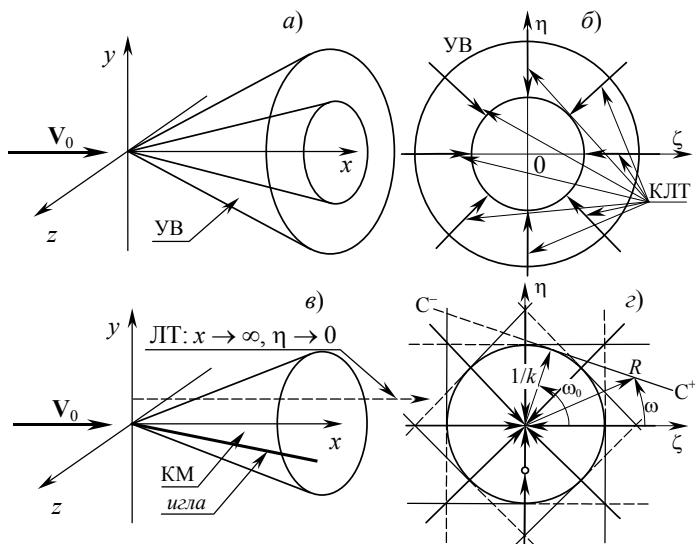


Рис. 3.45

На рис. 3.45 показаны КЛТ для двух простых КТ. На рис. 3.45, а и б как двумерное КТ рассмотрено осесимметричное обтекание кругового конуса. Отрезки оси η , где $\zeta = w = 0$, – интегральные кривые уравнения (14), т.е. КЛТ. При этом величина $V_{cn} \equiv v - \eta u$, отрицательная на УВ, увеличивается до нуля на конусе (в конических переменных на контуре тела $V_c = 0$). На рис. 3.45, б отрицательным V_{cn} отвечают стрелки, направленные к началу координат. В силу произвола в выборе ориентации осей η и ζ такими же КЛТ являются отрезки всех лучей $\zeta/\eta = \text{const}$.

На рис. 3.45, в и г под углом атаки обтекает не возмущающая течение (везде $u = V_0$, $v = w = 0$) игла – конус с полууглом при вершине $\theta_c = 0$. Тонкий конус возмутит поток внутри области, ограниченной близкой к конусу Маха конической УВ малой интенсивности. При этом, однако, почти всюду возмущения будут малы, а КЛТ – близки к КЛТ для иглы – сходящимся в начало

координат $\eta = \zeta = 0$ лучам $\zeta/\eta = \text{const}$. Исключение – малая окрестность конуса, на всём контуре которого, кроме нижней и верхней точек, $V_c \neq 0$. Точка плоскости конических переменных, в которую сходятся КЛТ, получила название **точки Ферри (ТФ)** в честь А. Ferri, указавшего на её возможность. На рис. 3.45, *з* КЛТ – стрелки, идущие в начало координат, а след *иглы* – кружок.

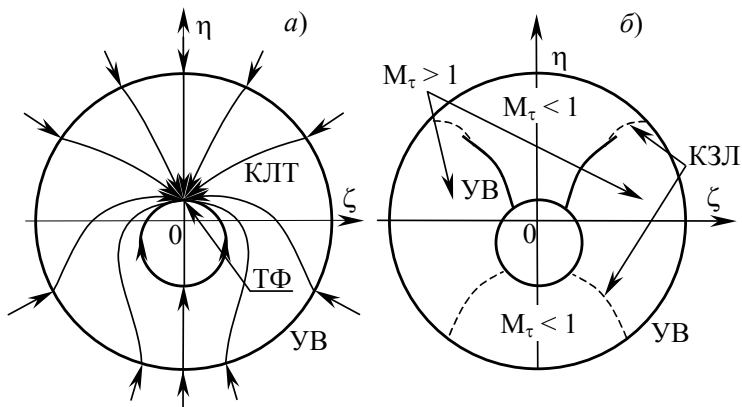


Рис. 3.46

С ростом угла θ_c размер конуса в плоскости $\eta\zeta$ растёт, возмущения – увеличиваются, а КЛТ между конусом и УВ – искривляются. Вне УВ поток невозмущён, и КЛТ, как на рис. 3.45, – лучи, сходящиеся в начало координат (стрелки на рис. 3.46, *а*). Если α – угол атаки, то при $\theta_c = \alpha$ верхняя точка конуса совпадёт с началом координат. При θ_c , равном или близком к α , с ней совпадёт и ТФ, которая, как на рис. 3.46, *а*, останется там при дальнейшем увеличении θ_c . При меньших θ_c ТФ, находящаяся над конусом, как на рис. 3.45, *з*, называется **всплывшей**.

Как показано выше, система УКТ при $M_\tau > 1$ должна быть гиперболической. Это значит, что в дополнение к выполняющимся на КЛТ уравнениям (15) и (16) при $M_\tau > 1$ должно быть ещё два характеристических уравнения. Для их вывода составим линейную комбинацию из уравнений (9) – (12):

$$L + \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$$

и выберем множители λ_k так, чтобы дифференциальные операторы в этом уравнении были одинаковыми. После несложных преобразований придём к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{V_{\text{c}\eta} - \lambda_1 \eta + \lambda_2}{\rho(\lambda_1 V_{\text{c}\eta} - a^2 \eta)} \left(p_\eta + \frac{V_{\text{c}\zeta} - \lambda_1 \zeta + \lambda_3}{V_{\text{c}\eta} - \lambda_1 \eta + \lambda_2} p_\zeta \right) + u_\eta + \frac{\lambda_1 V_{\text{c}\zeta} - a^2 \zeta}{\lambda_1 V_{\text{c}\eta} - a^2 \eta} u_\zeta + \\ & + \frac{\lambda_2 V_{\text{c}\eta} + a^2}{\lambda_1 V_{\text{c}\eta} - a^2 \eta} \left(v_\eta + \frac{\lambda_2 V_{\text{c}\zeta}}{\lambda_2 V_{\text{c}\eta} + a^2} v_\zeta \right) + \frac{\lambda_3 V_{\text{c}\eta}}{\lambda_1 V_{\text{c}\eta} - a^2 \eta} \left(w_\eta + \frac{\lambda_3 V_{\text{c}\zeta} + a^2}{\lambda_3 V_{\text{c}\eta}} w_\zeta \right) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

При выполнении равенств

$$\frac{V_{\text{c}\zeta} - \lambda_1 \zeta + \lambda_3}{V_{\text{c}\eta} - \lambda_1 \eta + \lambda_2} = \frac{\lambda_1 V_{\text{c}\zeta} - a^2 \zeta}{\lambda_1 V_{\text{c}\eta} - a^2 \eta} = \frac{\lambda_2 V_{\text{c}\zeta}}{\lambda_2 V_{\text{c}\eta} + a^2} = \frac{\lambda_3 V_{\text{c}\zeta} + a^2}{\lambda_3 V_{\text{c}\eta}} \quad (18)$$

все дифференциальные операторы в уравнении (17) станут одинаковыми, а оно – характеристическим.

Разрешив второе и третье равенства (18) относительно λ_1 и λ_3 :

$$\lambda_1 = \frac{(\zeta v - \eta w) \lambda_2 + a^2 \zeta}{V_{\text{c}\zeta}}, \quad \lambda_3 = -\frac{V_{\text{c}\eta} \lambda_2 + a^2}{V_{\text{c}\zeta}} \quad (19)$$

и подставив полученные выражения в первое равенство (18), придём к квадратному уравнению для λ_2 . Два его корня $\lambda_{2\pm}$ в силу формулы (1) для V_τ^2 равны

$$\lambda_{2\pm} = \frac{A_\pm}{B}, \quad A_\pm = \eta \zeta w - \zeta^2 v - V_{\text{c}\eta} \pm |V_{\text{c}\zeta}| \sqrt{(1 + R^2)(M_\tau^2 - 1)}, \quad (20)$$

$$B = (1 + R^2) M_\tau^2, \quad R^2 = \eta^2 + \zeta^2.$$

В результате из уравнения (17) и формул (19) для λ_1 и λ_3 найдём направления $C^\pm$ -характеристик в плоскости $\eta\zeta$:

$$\zeta'_\pm \equiv \frac{d^\pm \zeta}{d\eta} = \frac{V_{\text{c}\zeta} A_\pm}{V_{\text{c}\eta} A_\pm + a^2 B} \quad (21)$$

и выполняющиеся вдоль них **условия совместности**

$$\frac{(V_{\text{c}\eta} V_{\text{c}\zeta} - a^2 \eta \zeta) B + [V_{\text{c}\zeta} - \eta(\zeta v - \eta w)] A_\pm}{\rho(V_{\text{c}\eta} A_\pm + a^2 B)} dp - \zeta u^2 d \frac{v}{u} + \quad (22)$$

$$+ \eta u^2 d \frac{w}{u} + w^2 d \frac{v}{w} = 0.$$

Уравнения и формулы (20) – (22) подтверждают сделанный ранее вывод о наличии при $M_\tau > 1$ у системы УКТ (9) – (14) в дополнение к КЛТ (14) C^+ - и C^- -характеристик. Итак, при $M_\tau > 1$ система УКТ гиперболична. Области КТ, где $M_\tau > 1$, назовём *конически сверхзвуковыми*, наоборот – *конически дозвуковыми*, а линию, на которой $M_\tau = 1$, – *конической звуковой линией* (КЗЛ).

2. Характеристики слабо возмущённых КТ. Для невозмущённого ($u = V_0$, $v = w = 0$) потока в силу формулы (1)

$$(1 + R^2)(M_\tau^2 - 1) = R^2 k^2 - 1, \quad k^2 = M_0^2 - 1, \quad (23)$$

$$A_\pm = \left(\eta \pm \zeta \sqrt{R^2 k^2 - 1} \right) V_0, \quad B = R^2 (k^2 + 1).$$

Согласно первой формуле $M_\tau \rightarrow M_0$, когда $R \rightarrow \infty$, а лучи, идущие из носика тела, нормальны V_0 . В силу формул (23) уравнения (21) и (22) принимают вид (как и ранее, $C^+(C^-)$ -характеристикам отвечают верхние (нижние) знаки):

$$\zeta'_\pm = \frac{k^2 \zeta^2 - 1}{k^2 \eta \zeta \mp \sqrt{R^2 k^2 - 1}}, \quad \frac{\sqrt{R^2 k^2 - 1}}{\rho_0 V_0^2} dp \pm \zeta d \frac{v}{u} \mp \eta d \frac{w}{u} = 0. \quad (24)$$

Эти уравнения описывают слабо возмущённые КТ в конически сверхзвуковых зонах. Так как интенсивность УВ в них мала, то приращением энтропии в УВ можно пренебречь, положив $s \equiv s_0$. Кроме того, на КЛТ таких КТ – лучах $\zeta/\eta = \text{const}$ выполняется линеаризованное уравнение (16):

$$\rho_0 V_0 (\eta dv + \zeta dw) - dp = 0.$$

Наконец, в слабо возмущённых КТ справедлива связь

$$p - p_0 + \rho_0 V_0 (u - V_0) = 0$$

– результат линеаризации интеграла полной энтальпии (7).

В плоскости $\eta\zeta$ невозмущённое или слабо возмущённое КТ согласно уравнениям (23) конически дозвуковое в круге $R \equiv (\eta^2 + \zeta^2)^{1/2} < 1/k = \text{tg} \mu_0$, где μ – угол Маха, и конически сверхзвуковое – вне этого круга. Окружность $R = 1/k$ – его КЗЛ.

В полярных координатах $R\omega$ (рис. 3.45, z)

$$\eta = R \sin \omega, \quad \zeta = R \cos \omega, \quad \frac{d\zeta}{dR} = \cos \omega - \eta \frac{d\omega}{dR}, \quad \frac{d\eta}{dR} = \sin \omega + \zeta \frac{d\omega}{dR},$$

и первое уравнение (24) сводится к

$$d\omega = \frac{\pm d\chi}{\sqrt{1-\chi^2}}, \quad \chi = \frac{1}{kR}, \quad (25)$$

а после интегрирования – к конечной формуле (угол ω_0 – постоянная интегрирования):

$$\omega - \omega_0 = \mp \arccos \frac{1}{kR} \propto R = \frac{1}{k \cos(\omega - \omega_0)}. \quad (26)$$

В плоскости $\eta\zeta$ согласно формуле (26) C^+ - и C^- -характеристики – прямые, касающиеся при $\omega = \omega_0$ звуковой окружности $R = 1/k$. Действительно, в формуле (26) R – гипотенуза прямоугольного треугольника, с примыкающим к углу $-\pi/2 \leq \omega - \omega_0 \leq \pi/2$ катетом длины $1/k$. Если смотреть из центра круга, то справа от точки касания каждая такая прямая (рис. 3.45, *з*) – C^+ -характеристика (сплошная линия), а слева – штриховая C^- -характеристика. Семейство характеристик определяет равенство (25): для всех характеристик с удалением от точки касания R растёт, но согласно этому равенству для C^+ -характеристик угол ω уменьшается (верхний знак), а для C^- -характеристик – увеличивается. Для любого КТ в областях невозмущённого потока C^+ - и C^- -характеристики, как и КЛТ, естественно, определяются уравнениями (25) и (26), т.е. в плоскости конических переменных – прямые, касающиеся окружности (следа конуса Маха набегающего потока) на рис. 3.45, *з*. При этом не имеет значения, что такого конуса Маха нет, если в плоскости конических переменных он попадает в область, ограниченную УВ, и даже внутрь конического тела. Тем не менее эти C^+ - и C^- -характеристики полезны при анализе КТ.

3. Обтекание кругового конуса, треугольной пластины и их комбинации под углом атаки. При обтекании кругового конуса под нулевым углом атаки (рис. 3.45, *а* и *б*) закрутка потока отсутствует, и единственная нормальная к лучу, идущему вдоль УВ, компонента скорости V_τ совпадает с проекцией V_n вектора $\mathbf{V}$ на нормаль к УВ. Перед УВ она сверхзвуковая, а за УВ дозвуковая, т.е. $M_\tau > 1$ перед УВ и $M_\tau < 1$ за УВ. На поверхности кругового конуса $V_\tau = 0$ и $M_\tau = 0$, причём согласно Гл. 3.10 при движении от УВ к поверхности конуса M_τ уменьшается монотонно. Таким образом, безотносительно к полному числу Маха M рас-

смаатриваемое как двумерное КТ в кольце между УВ и конусом – конически дозвуковое.

На углах атаки перед боковыми участками УВ появляется и растёт нормальная к $\mathbf{r}$ и в то же время касательная к УВ компонента $\mathbf{V}$, непрерывная на волне. Вклад этой компоненты ведёт к тому, что в плоскости $\eta\zeta$ сначала возникают боковые конически сверхзвуковые зоны, которые затем достигают контура конуса (рис. 3.46, б), разделяя нижнюю и верхнюю конически дозвуковые зоны. Наличие последних неизбежно уже потому, что на оси η поток и за УВ, и за конусом Маха заведомо конически дозвуковой. От $M_\tau < 1$ к $M_\tau > 1$ с переходом через нижнюю КЗЛ поток разгоняется непрерывно. Торможение при приближении к верхнему участку оси η в основном происходит в висячей УВ.

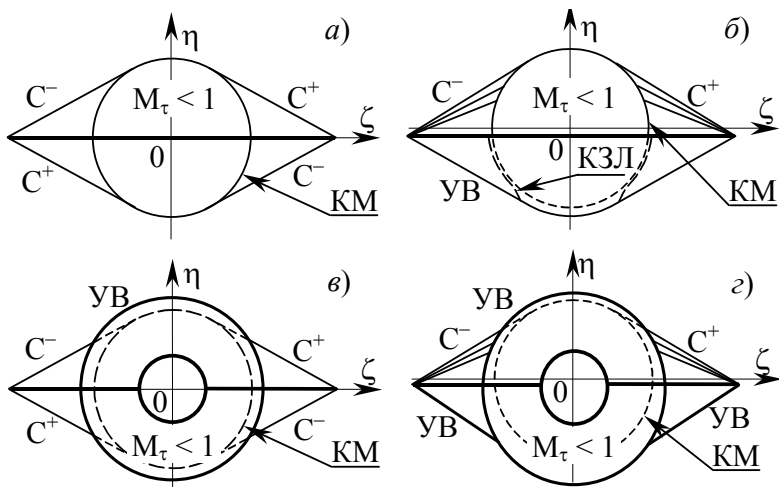


Рис. 3.47

Обтекаемая под нулевым углом атаки треугольная пластина нулевой толщины (рис. 3.47, а), как и игла на рис. 3.45, в и г, не возмущает набегающий поток. В то же время сколь угодно малый угол атаки возмутит КТ, но не только в конусе Маха, но и в боковых конически сверхзвуковых зонах. Границы таких зон – характеристики соответствующих семейств, идущие к конусу Маха из

концевых точек крыла (на рис. 3.47, *а* – жирного отрезка оси ζ). Те же характеристики ограничивают конически сверхзвуковые зоны меньших размеров при обтекании под нулевым углом атаки комбинации треугольного крыла и кругового конуса (рис. 3.47, *в*, штрихи – конус Маха невозмущённого набегающего потока и отрезки касающихся его характеристик, попавшие в конически дозвуковую кольцевую зону между конусом и УВ).

При конечном угле атаки в плоскости конических переменных не изменяется лишь след конуса Маха – окружность, которая на рис. 3.47, *б* и *г* частично или полностью дана штрихами. Её по-прежнему касаются C^+ - и C^- -характеристики, ограничивающие сверху конически сверхзвуковые зоны, над подветренной стороной обтекаемых тел. Кроме них от передних кромок крыла отходят прямолинейные характеристики тех же семейств, образующие, как можно показать, центрированные волны разрежения. На небольших углах атаки при обтекании наветренных (нижних) сторон рассматриваемых тел сохраняются боковые конически сверхзвуковые зоны, ограниченные прямолинейными или близкими к прямолинейным УВ. При малых углах атаки в случае изолированного треугольного крыла (рис. 3.47, *б*) КЗЛ близка к конусу Маха невозмущённого набегающего потока.

Глава 3.12. Уравнение Чаплыгина. Струйные течения.

Выравнивание докритических и критических струй

Сокращения: ЗЛ – звуковая линия, ЛТ – линия тока, УЧ – уравнение Чаплыгина.

Система дифференциальных уравнений, описывающих плоскопараллельные однородные по полной энтальпии (*изоэнергетические*) и энтропии (*изэнтропические*) течения, сводится к двум уравнениям для определения компонент вектора скорости $\mathbf{V}$ или его модуля V и угла наклона θ к оси x декартовых координат x, y . Коэффициенты этих уравнений – известные функции V . Поэтому, если в качестве независимых переменных взять V и θ , а искомым – координаты или функцию тока ψ и потенциал ϕ , то уравнения для их определения станут линейными. При этом, правда, возникают проблемы с записью граничного условия непротекания на

поверхности тел. Тем не менее, для некоторых струйных течений, как это поясняет рис. 3.48, таких проблем нет.

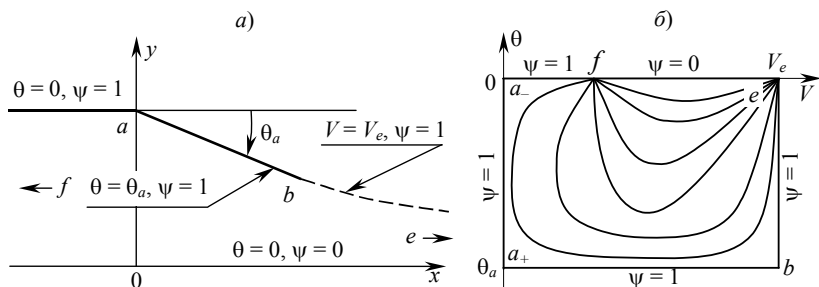


Рис. 3.48

На рис. 3.48, *a* струя истекает из симметричного плоского канала, контур которого образован двумя отрезками прямых, в **затопленном пространстве**. Давление p_e в затопленном пространстве удовлетворяет неравенствам $p_{e*} \leq p_e < p_{st}$, где p_{e*} и p_{st} – давления звукового (*критического*) и заторможенного (изоэнергетически и изэнтропически) потоков. При $p_e > p_{e*}$ струя **докритическая**, а при $p_e = p_{e*}$ – **критическая**. В обоих случаях граница струи be сходится с кромки канала без излома. На границе критической струи число Маха $M_{e*} = 1$. В точке излома стенки a поток при $V_a = 0$ поворачивается на отрицательный угол θ_a . Точки f и e на рис. 3.48, *a* отвечают равномерным потокам. Кривые, соединяющие их на рис. 3.48, *б*, – **линии тока** (ЛТ) $\psi = \text{const}$. Две ЛТ – ломаная $fa_{-}a_{+}be$ и отрезок fe – образуют границу прямоугольной области течения в плоскости V/θ . На отрезке fe – ЛТ, отвечающей плоскости симметрии, $\psi = 0$, при $\psi = 1$ на $fa_{-}a_{+}be$ за счёт выбора нормирующего множителя k в определяющем ψ дифференциальном равенстве (3.1.9) (для $v = 1$)

$$d\psi = k\rho(udy - vdx) = k\rho V(\cos\theta dy - \sin\theta dx). \quad (1)$$

Для перехода к V и θ в качестве независимых переменных воспользуемся тем, что согласно Гл. 3.1 рассматриваемые течения потенциальны. Если $\phi(x, y)$ – потенциал, то для них уравнение (3.1.18) сводится к равенствам

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

в силу которых

$$d\varphi = udx + vdy = V(\cos \theta dx + \sin \theta dy). \quad (2)$$

Для упрощения дальнейших вычислений, введя

$$z = x + iy, \quad dz = dx + idy, \quad u + iv = Ve^{i\theta}$$

и выразив из равенств (1) и (2) dx и dy через $d\varphi$ и $d\psi$, получим

$$dz = \frac{e^{i\theta}}{V} \left(d\varphi + \frac{i}{k\rho} d\psi \right). \quad (3)$$

Если входящие в это равенство z , φ и ψ – функции V и θ , то

$$z_V = \frac{e^{i\theta}}{V} \left(\varphi_V + \frac{i}{k\rho} \psi_V \right), \quad z_\theta = \frac{e^{i\theta}}{V} \left(\varphi_\theta + \frac{i}{k\rho} \psi_\theta \right).$$

Продифференцируем z_V по θ , а z_θ по V и приравняем получившиеся выражения. В результирующем уравнении вторые производные от φ и ψ сократятся, а приравнивание нулю действительной и мнимой частей даст равенства

$$k\varphi_\theta = \frac{V}{\rho} \psi_V, \quad k\varphi_V = \frac{M^2 - 1}{\rho V} \psi_\theta. \quad (4)$$

При получении учтено, что

$$\rho_p = \frac{1}{a^2}, \quad p_V = -\rho V, \quad \rho_V = -\frac{\rho V}{a^2}, \quad \left(\frac{1}{\rho V} \right)_V = \frac{M^2 - 1}{\rho V^2}. \quad (5)$$

Уравнения (4) называют **уравнениями Чаплыгина**.

Потенциал на границах струи неизвестен. Поэтому получим уравнение для ψ . Исключив производные от φ дифференцированием первого уравнения (4) по V , а второго по θ и учтя формулу для ρ_V из (5), придём к уравнению

$$V^2 \psi_{VV} + (1 + M^2) V \psi_V + (1 - M^2) \psi_{\theta\theta} = 0, \quad (6)$$

которое назовём **уравнением Чаплыгина (УЧ)**. В областях дозвукового (сверхзвукового) течения УЧ является уравнением эллиптического (гиперболического) типа. При $M = 0$ оно совпадает с записанным в полярных координатах $V\theta$ уравнением Пуассона.

Если для рассматриваемой задачи с помощью УЧ (6) функция тока $\psi(V, \theta)$ найдена, то координаты $x(V, \theta)$ и $y(V, \theta)$ определяются интегрированием уравнений

$$\begin{aligned} dx &= \frac{(M^2 - 1)\psi_\theta \cos \theta - V\psi_V \sin \theta}{k\rho V^2} dV + \frac{V\psi_V \cos \theta - \psi_\theta \sin \theta}{k\rho V} d\theta, \\ dy &= \frac{(M^2 - 1)\psi_\theta \sin \theta + V\psi_V \cos \theta}{k\rho V^2} dV + \frac{V\psi_V \sin \theta + \psi_\theta \cos \theta}{k\rho V} d\theta \end{aligned} \quad (7)$$

– следствий уравнения (3). При их выводе производные от ϕ выражены через производные от ψ согласно уравнениям (4).

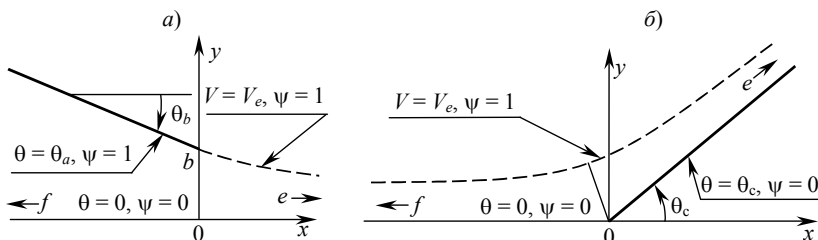


Рис. 3.49

В рамках УЧ полное решение ряда струйных задач, в частности, изображённых на рис. 3.49, удаётся построить методом разделения переменных. В результате $\psi(V, \theta)$ представляется рядами произведений тригонометрических функций и функций от V , которые в согласии с УЧ (6) удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка. Для совершенного газа эти уравнения сводятся к гипергеометрическому. Первым указанный подход для анализа докритических струй применил С.А. Чаплыгин (1902). Так, он строго показал, что докритические струи, как и струи идеальной несжимаемой жидкости, выравниваются при $x \rightarrow \infty$. В рамках того же подхода обобщение только этого результата на докритические струи несовершенного газа, вытекающих из симметричного канала произвольной формы (Ю.В. Руднев, 1949), сопряжено с весьма сложным доказательством. Для критической струи Л.В. Овсянников (1949) тем же способом получил прямо противоположный результат, доказав что

для неё **сечение выравнивания** расположено на конечном расстоянии, **звуковая линия** (ЗЛ) – отрезок прямой, нормальной плоскости симметрии, а за ней в приближении идеального газа течёт однородная звуковая струя. В задаче натекания докритической и критической струй конечной ширины на клин (рис. 3.49, б) или клиновидную выемку (при $\theta_c > \pi/2$) тем же методом получены аналогичные результаты (А.Н. Крайко, С.А. Мушин, 1989 [38]). Такое течение симметрично относительно биссектрисы внешнего угла, равного $\pi - \theta_c$, а для критической струи примыкающая к вершине клина дозвуковая область (с $M = 1$ на границе струи) ограничена сверху и снизу по потоку прямыми ЗЛ.

На самом же деле, характер выравнивания струй определяется структурой решения лишь в малой окрестности точки e плоскости $V\theta$, причём при достаточно произвольных термодинамике газа и форме канала (А.Н. Крайко, 2003 [39]). Для демонстрации этого при рассмотрении струи, истекающей из симметричного канала, ψ в окрестности точки e будем искать в форме

$$\psi = \chi(\omega) + r^m \chi_1(\omega) + \dots, \quad \omega = -\theta/\eta^n, \quad \eta = V_e - V, \quad r = (\theta^2 + \eta^k)^{1/2} \quad (8)$$

с подлежащим определению показателем n и несущественными для дальнейшего положительными m и k . При $n > 0$ переменная ω изменяется от $\omega = 0$ на оси V до $\omega = \infty$ на прямой $V = V_e$. Отсюда в согласии с рис. 3.48, б и представлением (8) имеем

$$0 \leq \chi(\omega) \leq 1, \quad 0 \leq \omega \leq \infty, \quad \chi(0) = 0, \quad \chi(\infty) = 1. \quad (9)$$

Если $\chi' = d\chi/d\omega$, то в силу (8) в главных порядках

$$\Psi_V = \frac{n\omega}{\eta} \chi', \quad \Psi_{VV} = \frac{n^2 \omega^2}{\eta^2} \chi'' + \frac{n+1}{\eta^2} n\omega \chi', \quad \Psi_\theta = -\frac{\chi'}{\eta^n}, \quad \Psi_{\theta\theta} = \frac{\chi''}{\eta^{2n}}. \quad (10)$$

Для докритической струи подстановка этих выражений в УЧ (6) вблизи точки e даст

$$\frac{n\omega \chi'' + (n+1)\chi'}{\eta^2} n\omega + \frac{1+M_e^2}{V_e \eta} n\omega \chi' + \frac{1-M_e^2}{V_e^2 \eta^{2n}} \chi'' = 0.$$

Поскольку $\eta \ll 1$ вблизи точки e , то в этом уравнении второе слагаемое заведомо меньше первого, и УЧ сводится к

$$\frac{n\omega \chi'' + (n+1)\chi'}{\eta^2} n\omega + \frac{1-M_e^2}{V_e^2 \eta^{2n}} \chi'' = 0. \quad (11)$$

Если $n > 1$, то уравнение (11) примет вид: $\chi'' = 0$. Проинтегрировав его, найдём $\chi = C_1 + C_0\omega$. При этом, однако, невозможно подобрать постоянные C_1 и C_0 так, чтобы удовлетворить условиям (9). При $n < 1$ уравнение (11) сведётся к: $n\omega\chi'' + (n+1)\chi' = 0$. Его решение: $\chi = C_1 - nC_0\omega^{-1/n}$ также не удовлетворяет условиям (9). Остается $n = 1$, при котором уравнение (11) станет

$$(\omega^2 V_e^2 + 1 - M_e^2)\chi'' + 2\omega V_e^2\chi' = 0.$$

Отсюда

$$\chi'(\omega) = \frac{2V_e^2/\pi}{\omega^2 V_e^2 + \beta^2}, \chi(\omega) = \frac{1}{C} \int_0^\omega \frac{d\omega}{\omega^2 V_e^2 + \beta^2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\omega V_e}{\beta}, \beta^2 = 1 - M_e^2, (12)$$

где постоянные интегрирования определены условиями (9). В плоскости $V\theta$ линии $\theta/(V_e - V) = \text{const}$, т.е. ЛТ – лучи, идущие под разными углами в точку e (рис. 3.50).

Координату x сечения выравнивания определим, интегрируя первое уравнение (7) по V до $V = V_e$ при $\theta = 0$, т.е. приближаясь к точке e плоскости $V\theta$ вдоль оси V . В плоскости xu этому отвечает движение по оси x . Если $X_e < \infty$ – координата точки на оси x , в которой $V_e - V = \eta = \varepsilon$, а $\varepsilon \ll 1$, то из уравнения (7) с учётом формулы (10) для ψ_θ с $n = 1$ и решения (12) найдём

$$\begin{aligned} x_e - X_\varepsilon &= \frac{1}{k} \int_{V_e - \varepsilon}^{V_e} \frac{M^2 - 1}{\rho V^2} \psi_\theta(V, 0) dV \approx \frac{1}{k} \int_\varepsilon^0 \frac{1 - M_e^2}{\rho_e V_e^2} \psi_\theta(V, 0) d\eta \approx \\ &\approx -\frac{\beta^2 \chi'(0)}{k \rho_e V_e^2} \int_\varepsilon^0 \frac{d\eta}{\eta} = -\frac{2}{k \pi \rho_e} \ln \eta \Big|_\varepsilon^0 = \infty. \end{aligned}$$

Итак, докритическая струя выравнивается асимптотически. Для любой струи, вытекающей из канала, входные образующие которого либо, как на рис. 3.48, прямые, параллельные оси x , либо имеют такие асимптоты, выполненный анализ почти без изменений переносится на окрестность точки f . Как результат – сечение выравнивания дозвукового потока в полубесконечном цилиндрическом входном канале находится при $x = -\infty$.

Для критических струй множитель $(1 - M^2)$ в УЧ при приближении к точке e стремится к нулю. Взяв за масштабы скорости и плотности их критические значения, будем иметь

$\rho_e = \rho_* = 1$, $V_e = V_* = 1$, $\eta = 1 - V$, $1 - M^2 = \sigma^2 \eta$, $\sigma^2 = -2M_{p*}$, (13)
 где $M_p = (\partial M / \partial p)_{H, s}$. Согласно формулам (3.3.12) и (3.3.13) $\sigma^2 = \omega_{pp*}$, а для совершенного газа $\omega_{pp*} = \gamma + 1$. Поступая в остальном так же, как для докритической струи, придём к уравнению

$$\frac{n\omega\chi'' + (n+1)\chi'}{\eta^2} n\omega + \frac{\sigma^2}{\eta^{2n-1}} \chi'' = 0. \quad (14)$$

Для него при $2n - 1 > 2$, т.е. при $n > 3/2$ и при $n < 3/2$ получаются те же не удовлетворяющие условиям (10) решения, что и решения уравнения (11) при $n > 1$ и $n < 1$. Остаётся $n = 3/2$, чему в плоскости $V\theta$ отвечают ЛТ (линии $\theta/\eta^{3/2} = \text{const}$), которые, приближаясь к точке e , касаются оси V (рис. 3.50, исключение – ЛТ $\psi = 1$).

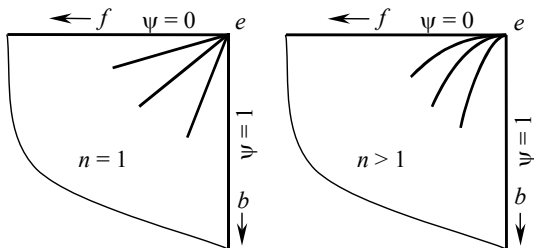


Рис. 3.50

При $n = 3/2$ уравнение (14) принимает вид

$$(9\omega^2 + 4\sigma^2)\chi'' + 15\omega\chi' = 0,$$

а его интегрирование с учётом граничных условий (9) даёт

$$\chi'(\omega) = \frac{C}{(9\omega^2 + 4\sigma^2)^{5/6}}, \quad (15)$$

$$\chi(\omega) = C \int_0^\omega \frac{d\omega}{(9\omega^2 + 4\sigma^2)^{5/6}}, \quad \frac{1}{C} = \int_0^\infty \frac{d\omega}{(9\omega^2 + 4\sigma^2)^{5/6}}.$$

Как и для докритической струи, x сечения выравнивания определим, интегрируя первое уравнение (7) по V до $V = V_e$ при $\theta = 0$. При прежнем определении ε и X_ε из уравнения (7) с учётом разложения (13), формулы (10) для ψ_θ и решения (15) найдём

$$x_e - X_\varepsilon = \frac{1}{k} \int_{1-\varepsilon}^1 \frac{M^2 - 1}{\rho V^2} \Psi_\theta(V, 0) dV \approx -\frac{C \sigma^{1/3}}{2^{5/3} k} \int_{\varepsilon}^0 \frac{d\eta}{\eta^{1/2}} = \frac{C}{k} \left(\frac{\sigma}{4} \right)^{1/3} \sqrt{\varepsilon}.$$

Итак, критическая струя в отличие от докритической выравнивается на конечном расстоянии. Опираясь на найденное решение, можно показать, что ЗЛ – отрезок прямой $x = \text{const}$.

Глава 3.13. Законы подобия. Гиперзвуковая стабилизация

Сокращения: УВ – ударная волна, УП – ударная поляра.

Законы подобия позволяют переносить экспериментальные и расчётные результаты, полученные для некоторого подчас единичного набора определяющих параметров, на целый класс течений. При их получении обычно привлекаются упрощающие предположения: о тонкости обтекаемых тел, малости вызываемых ими возмущений потока и т.п. Однако, как показывает опыт, законы подобия, полученные с использованием подобных упрощений, работают и тогда, когда эти упрощения не выполняются.

Как получаются законы подобия, покажем сначала на примере дозвукового обтекания тонкого профиля. Ось x декартовых координат xu направим по вектору скорости равномерного набегающего потока $\mathbf{V}_0$, начало координат и линейный масштаб выберем так, чтобы в передней точке хорды профиля $x_i = 0$, в её концевой точке $x_f = 1$, а $y_f = 0$ (рис. 3.51). С осью x хорда составляет угол атаки $\alpha < 0$. При выводе закона подобия профиль считается тонким, а $|\alpha| \ll 1$. В системе координат $x^\circ y^\circ$, связанной с хордой, профиль зададим уравнениями: $y^\circ = \tau Y^\pm(x^\circ)$ с относительной толщиной (точнее, полутолщиной) $\tau \ll 1$, $|Y^\pm| \leq 1$ и индексами «+» и «-» для верхней и нижней его образующих. В координатах xu из-за малости α профиль задаётся формулой

$$y = \tau Y^\pm(x) + \alpha(1 - x). \quad (1)$$

На профиле выполняется условие непротекания, которое при задании его образующих в форме (1) принимает вид $(\varphi_x = d\varphi(x)/dx)$

$$v/u = \tau Y_x^\pm(x) - \alpha, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y = \tau Y^\pm(x) + \alpha(1 - x). \quad (2)$$

Наряду с условием непротекания на профиле нужно удовлетворить условиям затухания возмущений вдаль от него:

$$u(x^2 + y^2 \rightarrow \infty) \rightarrow V_0, \quad v(x^2 + y^2 \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (3)$$

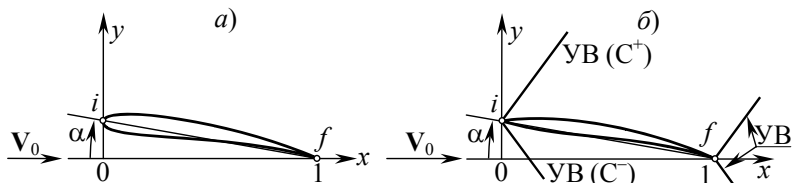


Рис. 3.51

Рассматриваемое однородное по H и s течение безвихревое, и уравнения, определяющие x - и y -компоненты скорости, сводятся к уравнениям (3.10.1) (второе при $v = 1$ без свободного члена):

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (u^2 - a^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2uv \frac{\partial u}{\partial y} + (v^2 - a^2) \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4), (5)$$

При выводе закона подобия предположим, что почти всюду отличие параметров от их значений в набегающем потоке мало. Однако при обтекании профиля дозвуковым потоком (рис. 3.51, a) это предположение нарушается в окрестности точек торможения (задней – при сходе с неё по биссектрисе малого, но конечного угла заострения), в которых $v = u = 0$, и возмущение x -компоненты скорости равно V_0 . В связи с этим слова *почти всюду* отвечают предположению о малости этих окрестностей и об их незначительном влиянии на весь поток. Его обоснованием служит эллиптичность уравнений дозвукового течения, а в них такое влияние действительно мало. Итак, примем, что $u = V_0 + u'$, $v = v'$, где u' , $v' \ll V_0$. Тогда при постоянных H и s возмущение давления

$$p' = -\rho_0 V_0 u', \quad (6)$$

и требование его малости $\rho_0 V_0 |u'| \ll p_0$ сводится к неравенству $|u'| \ll a_0/(\gamma M_0)$.

Подставим принятые представления в уравнения и граничные условия, пренебрежем малыми порядками квадратов возмущений и учтем, что в условии непротекания с той же точностью

$$v'[x, \tau Y^\pm(x) + \alpha(1-x)] \approx v'(x, 0) + \frac{\partial v'}{\partial y} \bigg|_{y=0} [\tau Y^\pm(x) + \alpha(1-x)] \approx v'(x, 0).$$

В результате исходная нелинейная задача (2) – (5) сведётся к линейной

$$v'(x, 0) = [\tau Y_x^\pm(x) - \alpha]V_0, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (2')$$

$$v'(x, 0) = [\tau Y_x^\pm(x) - \alpha]V_0, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (3')$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x} = 0, \quad (1 - M_0^2) \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \quad (4'), (5')$$

содержащей четыре определяющих параметра: V_0 , M_0 , τ и α . Смысл закона подобия состоит в уменьшении их числа.

Указанная цель достигается специальным выбором постоянных масштабных коэффициентов (переменная x промасштабирована ранее):

$$y = k_y y^\circ, \quad u' = k_u u^\circ, \quad v' = k_v v^\circ. \quad (7)$$

После подстановки переменных (7) в условие (2') и уравнения (4') и (5') последние примут вид

$$v^\circ = (V_0 \tau / k_v) [Y_x^\pm(x) - \alpha / \tau], \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (8)$$

$$\frac{k_u}{k_y k_v} \frac{\partial u^\circ}{\partial y^\circ} - \frac{\partial v^\circ}{\partial x} = 0, \quad (1 - M_0^2) \frac{k_y k_u}{k_v} \frac{\partial u^\circ}{\partial x} + \frac{\partial v^\circ}{\partial y^\circ} = 0. \quad (9), (10)$$

Три коэффициента k можно выбрать так, чтобы в получившемся условии и уравнениях три первых множителя стали единицами. Это достигается, если положить

$$k_v = \tau V_0, \quad k_y = \beta, \quad k_u = \tau \beta V_0, \quad \beta = 1 / \sqrt{1 - M_0^2}. \quad (11)$$

В результате исходная задача сведётся к задаче

$$v^\circ = Y_x^\pm(x) - \alpha / \tau, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (12)$$

$$u^\circ (x^2 + y^{\circ 2} \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad v^\circ (x^2 + y^{\circ 2} \rightarrow \infty) \rightarrow 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial u^\circ}{\partial y^\circ} - \frac{\partial v^\circ}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u^\circ}{\partial x} + \frac{\partial v^\circ}{\partial y^\circ} = 0, \quad (14), (15)$$

т.е. к задаче обтекания профиля идеальной несжимаемой жидкостью с одним **параметром подобия** – отношением α/τ . Из конти-

нуума её решений, отвечающих разным циркуляциям, единственное отбирает постулат Чаплыгина–Жуковского.

Для семейства профилей, которые при разных относительных толщинах τ задаются двумя функциями $Y^+(x)$ и $Y^-(x)$, определяемые при фиксированном отношении α/τ из решения задачи задачи (12) – (15) компоненты скорости с индексом «градус» как функции x и y° универсальны. Указанная универсальность состоит в том, что u° и v° – функции только x , y° и α/τ , независимые ни от вида уравнений состояния газа, ни от числа Маха набегающего потока M_0 , ни от относительной толщины τ и угла атаки α . Зависимость от этих параметров исходных компонент вектора скорости и других параметров получается возвращением к ним с использованием формул (7) и (11). Так, для давления с учётом этих формул и равенства (6) найдём, что

$$p = p_0 - \tau \beta \rho_0 V_0^2 u^\circ(x, y/\beta). \quad (16)$$

В силу этой формулы коэффициент подъемной силы профиля

$$c_y \equiv \frac{1}{\rho_0 V_0^2} \oint p' dx = \tau \beta \int_0^1 [u^{\circ-}(x) - u^{\circ+}(x)] dx, \quad (17)$$

где $u^{\circ+}(x)$ и $u^{\circ-}(x)$ – распределения $u^\circ(x)$ соответственно по верхней и нижней образующим. Полученный закон подобия носит название **закона подобия Прандтля–Глауэрта** (L. Prandtl, H. Glauert).

Аналогично рассматривается сверхзвуковое обтекание под малым углом атаки тонкого профиля (рис. 3.51, б) с острой передней кромкой (или затупленной, но с малым радиусом затупления $r \ll 1$). УВ, возникающие при его обтекании, настолько слабые, что приращением энтропии в них всюду, за исключением пренебрежимо малой окрестности передней кромки (если она затуплена) можно пренебречь. Поэтому такое течение также можно рассматривать как безвихревое, и для него справедливы предыдущие формулы и уравнения до (10) включительно. Отличие только в том, что условия (3) или (3') отсутствия возмущений с удалением от профиля достаточно поставить на оси y (при $x = 0$):

$$u^\circ(0, y^\circ) = v^\circ(0, y^\circ) = 0. \quad (13^\circ)$$

Теперь, однако, в уравнении (10) множитель $(1 - M_0^2) < 0$, следствие чего – иное определение β в формулах (11), (16) и (17):

$$\beta = 1/\sqrt{M_0^2 - 1} \quad (18)$$

и замена уравнения (15) на

$$\frac{\partial u^\circ}{\partial x} - \frac{\partial v^\circ}{\partial y} = 0. \quad (15^\circ)$$

Линейная задача, включающая уравнения (14) и (15°) и условия (12) и (13°), по-прежнему содержит один параметр подобия – отношение α/τ . Её решение элементарно: поток возмущён лишь в идущих от отрезка $0 \leq x \leq 1$ оси x характеристических полосках. В ограниченной C^+ -характеристиками: $y^\circ = x$ и $y^\circ = x - 1$ верхней полоске инвариант $I^\circ \equiv v^\circ + u^\circ = 0$, а в ограниченной C^- -характеристиками: $y^\circ = -x$ и $y^\circ = 1 - x$ нижней полоске $I^{\circ+} \equiv v^\circ - u^\circ = 0$. Справедливость сказанного вытекает и непосредственно из уравнений (14) и (15°), и как результат перехода к величинам с индексом «градус» в линеаризованных инвариантах $I^\pm$ из Гл. 3.4.

Равенства $I^\circ = 0$ и $I^{\circ+} = 0$ и условие (12) дают u° на профиле. Подставив найденные u° в выражение (17) с β , определённым формулой (18), получим коэффициент подъемной силы c_y . Коэффициент волнового сопротивления c_x получается аналогично и имеет вид

$$c_x \equiv -\frac{1}{\rho_0 V_0^2} \oint p' dy = \frac{\tau^2 c_x^\circ}{\sqrt{M_0^2 - 1}}, \quad c_x^\circ = \int_0^1 \left\{ u^{\circ-}(x) \left[Y_x^-(x) - \frac{\alpha}{\tau} \right] - u^{\circ+}(x) \left[Y_x^+(x) - \frac{\alpha}{\tau} \right] \right\} dx. \quad (19)$$

Сформулированный закон носит название **закона подобия Аккерета** (J. Akkeret).

При выводе закона подобия для **околозвуковых течений** (рис. 3.52) обтекаемый профиль по-прежнему тонкий. Однако его толщина, угол атаки и число Маха M_0 таковы, что коэффициент перед du/dx в уравнении (5) из-за его малости изменяется сильно, и его нельзя заменить константой, как делалось выше. Более того, при $M_0 < 1$ возможны местных сверхзвуковые зоны (рис. 3.52, а), а при $M_0 > 1$ – дозвуковые зон (рис. 3.52, б), когда этот коэффициент меняет знак. При анализе околозвуковых течений в качестве масштабов скорости и плотности возьмём их критические ве-

личины a_* и ρ_* , а масштаба давления – произведение $\rho_* a_*^2$. Далее запишем, что $u = 1 + u'$, а так как в околзвуковых течениях V_0 близко к 1, то почти всюду $|u'| \ll 1$. В силу этого граничные условия (2') и (3') заменятся на

$$v'(x, 0) = \tau Y_x^\pm(x) - \alpha, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (2'')$$

$$u'(x^2 + y^2 \rightarrow \infty) \rightarrow V_0 - 1, \quad v'(x^2 + y^2 \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (3'')$$

Другое следствие сделанного предположения – небольшие числа Маха в местных сверхзвуковых зонах и малая интенсивность возникающих в них УВ. При близких к единице сверхзвуковых M_0 интенсивность УВ также невелика. Поэтому, пренебрегая изменениями энтропии, будем, как и ранее, использовать уравнение отсутствия вихря (4').

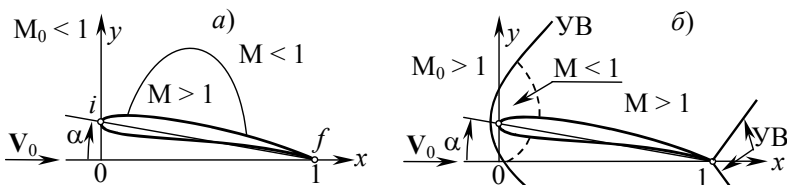


Рис. 3.52

Для знакопеременного коэффициента уравнения (5) справедливо разложение (см. формулы (3.3.12) и (3.3.13) и (3.12.13)):

$$1 - u^2 / a^2 \equiv 1 - M_u^2 \approx 1 - M^2 \approx -\sigma^2 u', \quad \sigma^2 = -2 \left(\frac{\partial M}{\partial p} \right)_{s, H} \Big|_* = \omega_{pp*}. \quad (20)$$

Для совершенного газа $\omega_{pp} = \gamma + 1$. Согласно разложению (2) уравнение (5) с сохранением *главных членов* примет вид

$$-\sigma^2 u' \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0. \quad (5'')$$

В получившейся нелинейной задаче наряду с коэффициентом σ^2 в уравнении (5'') есть правая часть $(V_0 - 1)$ в одном из условий (3''). Пусть в формулах (7) $k_v = \tau$. Тогда условие (2'') заменится на

$$v^\circ(x, 0) = Y_x^\pm(x) - \alpha / \tau, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (12_*)$$

а уравнения (4') и (5'') запишутся в форме

$$\frac{\partial u^\circ}{\partial y^\circ} - \frac{\tau k_y}{k_u} \frac{\partial v^\circ}{\partial x} = 0, \quad -\sigma^2 \frac{k_y k_u^2}{\tau} u^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial x} + \frac{\partial v^\circ}{\partial y^\circ} = 0.$$

Входящие в них комбинации τ , σ , k_y и k_u равны единице при

$$k_y = 1/(\sigma^2 \tau)^{1/3}, \quad k_u = (\tau/\sigma)^{2/3}. \quad (21)$$

Для таких k_y и k_u эти уравнения и условия (3'') заменятся на

$$u^\circ (x^2 + y^{\circ 2} \rightarrow \infty) \rightarrow K, \quad v^\circ (x^2 + y^{\circ 2} \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad (13_*)$$

$$\frac{\partial u^\circ}{\partial y^\circ} - \frac{\partial v^\circ}{\partial x} = 0, \quad -u^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial x} + \frac{\partial v^\circ}{\partial y^\circ} = 0. \quad (14_*), (15_*)$$

Константа K в первом условии (13_{*}) равна

$$K = \sigma^{2/3} \frac{V_0 - 1}{\tau^{2/3}} = 2 \frac{M_0 - 1}{(\sigma^2 \tau)^{2/3}}. \quad (22)$$

Здесь при переходе от V_0 к M_0 использованы формулы (20).

Для коэффициента давления $c_p = (p - p_0)/(\rho_0 V_0^2)$ имеем

$$c_p = \frac{p - p_*}{\rho_0 V_0^2} + \frac{p_* - p_0}{\rho_0 V_0^2} = \frac{p'}{\rho_0 V_0^2} + c_{p*} \approx p' + c_{p*}, \quad c_{p*} = \frac{p_* - p_0}{\rho_0 V_0^2},$$

а с учётом формул (7) и (21) и аналога формулы (6)

$$c_p \approx -u' + c_{p*} = -(\tau/\sigma)^{2/3} u^\circ + c_{p*}. \quad (23)$$

Подставив это выражение в интегралы (19) и (17), определяющие c_x и c_y профиля, получим (интегралы от c_{p*} равны нулю)

$$c_x = -\oint c_p dy = -\frac{\tau^{5/3}}{\sigma^{2/3}} c_x^\circ \left(\frac{\alpha}{\tau}, K \right), \quad c_y = \oint c_p dx = -\frac{\tau^{2/3}}{\sigma^{2/3}} c_y^\circ \left(\frac{\alpha}{\tau}, K \right), \quad (24)$$

где выражения для c_x° и c_y° – те же, что в (19) и (17).

Закон подобия для околосзвукового обтекания профиля, который включает уравнения и граничные условия (12_{*}) – (15_{*}) с параметрами подобия α/τ и K , определяемым формулами (22), формулы (7) с коэффициентами (21) и $k_v = \tau$ и выражения (23) и (24) для c_p , c_x и c_y , установлен **С.В. Фальковичем** (1947). Закон подобия для пространственных околосзвуковых течений сформулировали **Карман** (Th. Karman) и **Цянь Сюэ-сэнь** (Тзянь – Tsien H.S.).

Применим закон подобия С.В. Фальковича к сверхзвуковому обтеканию тонких клиньев с присоединенной УВ при M_0 , близких к единице. Подставив $\tau = \sigma(V_0 - 1)^{3/2}/K^{3/2}$ из формулы (22) в выражения для возмущений компонент скорости, получим

$$u' = u - 1 = k_u u^\circ(K) = \delta u^\circ(K) / K, \quad \delta = V_0 - 1,$$

$$v' = k_v v^\circ(K) = \tau v^\circ(K) = \sigma \delta^{3/2} v^\circ(K) / K^{3/2}.$$

Именно такое найденное из рассмотрения уравнения ударной волны (УП) нормирование этих компонент в Гл. 3.8 привело к её универсальной форме, изображённой на рис. 3.23, а.

Для околосвуковых течений обращение к УП явилось всего лишь иллюстрацией работы закона подобия С.В. Фальковича. В противоположность этому, при получении закона подобия для **гиперзвукового обтекания** тонких заостренных спереди тел свойства УП и $C^\pm$ -характеристик в плоскости годографа (для совершенного газа – эпициклоид) играют ключевую роль. Согласно рис. 3.5, а Гл. 3.5 при малых θ вблизи окружности $V = V^M$, т.е. при $M_0 \gg 1$ наклон указанных характеристик к оси u близок к $\pi/2$. Следовательно, в волнах разрежения, возникающих при гиперзвуковом обтекании тонких тел, при повороте на малые углы θ изменение модуля скорости V и её x -компоненты $u = V \cos \theta \approx V_0$ много меньше изменения y -компоненты $v = V \sin \theta \approx V_0 \theta$. При этом давление, плотность, скорость звука и прочие термодинамические параметры могут измениться на многие порядки.

Согласно рис. 3.23, б Гл. 3.8 при $V = V^M$ УП – окружность с центром на оси u . В правой её точке касательная вертикальна, а при V , слегка меньших V^M , близка к вертикали. Таким образом, для скачков слабого семейства, в которых поток с V_0 , близкой к V^M , поворачивается на малые углы θ , реализуется та же ситуация, что и для волн разрежения. Ещё с большей точностью она реализуется при обтекании конуса, ибо наклон яблоковидной кривой в окрестности точки $u = V_0$ оси u не меньше наклона УП в той же окрестности. Итак, при гиперзвуковом обтекании тонких заостренных тел под малыми углами атаки изменениями проекции вектора скорости на направление набегающего потока можно пренебречь ($u \approx V_0$). В противоположность этому нормальные к

V_0 компоненты вектора скорости и их изменения – величины порядка θ , т.е. порядка относительной толщины тела τ .

Ограничимся такими **гиперзвуковыми течениями**, для которых угол Маха $\mu_0 \approx 1/M_0 \ll 1$, определяющий наклон $C^\pm$ -характеристик или образующих конуса Маха к V_0 , порядка или меньше τ . В таких течениях УВ слабого семейства столь интенсивны, что изменения в них энтропии и иных термодинамических параметров могут значительно превосходить их значения в набегающем потоке. В условиях, когда предположения о малости возмущений всех параметров и о потенциальности потока неприменимы, малое изменение x -компоненты V существенно упрощает анализ.

Главное упрощение состоит в том, что в уравнениях пространственного стационарного течения, определяющих y - и z -компоненты V и термодинамические параметры, u заменяется на V_0 , а уравнение для u на данном этапе оказывается ненужным (при необходимости её можно найти из интеграла полной энтальпии: $u^2 = 2H_0 - 2h - v^2 - w^2$). Как и ранее, ось x декартовых координат $хуz$ с началом в носике тела направлена по вектору V_0 . При $u = V_0$ в уравнении неразрывности исчезнет слагаемое $\partial u/\partial x = \partial V_0/\partial x$, а входящий во все уравнения оператор $u\partial/\partial x$ заменится на $V_0\partial/\partial x$. Воспользовавшись этим, введём время $t = x/V_0$, после чего уравнения (3.1.1) – (3.1.3), описывающие пространственные стационарные течения (без уравнений для u), сведутся к системе

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0, \quad \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{dw}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ \frac{ds}{dt} &= 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \quad (25)$$

описывающей нестационарные плоские течений.

В исходной стационарной задаче (рис. 3.53, *a*) обтекается тело, поверхность которого задана уравнением

$$F(x, y^\circ, z^\circ) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y^\circ = y/\tau, \quad z^\circ = z/\tau, \quad (26)$$

где, как и в (1), за линейный масштаб взята длина тела, а τ – его относительная толщина. Запись уравнения поверхности тела в форме (26) даёт континуум тел разной длины и толщины. При функции F , зависящей только от x и y° , обтекается плоское тело,

например, профиль под углом атаки с фиксированным отношением α/τ . При такой записи производные F_x , F_{y° и F_{z° – независящие от τ функции порядка единицы. Если тело, как на рис. 3.53, а, заканчивается торцом: $x = 1$, то на него действует близкое к постоянному *донное давление* p_b . При гиперзвуковом обтекании p_b может превышать p_0 , однако всегда $p_b \ll p_{m-}$, где p_{m-} – минимальное давление на задней кромке обтекаемой поверхности.

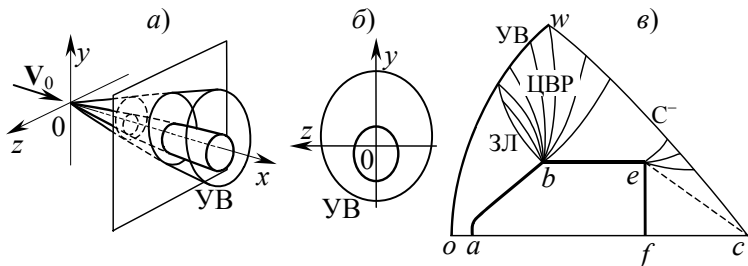


Рис. 3.53

В двумерной нестационарной задаче (рис. 3.53, б) в неподвижный при $t < 0$ и однородный газ с $v = w = 0$, $\rho = \rho_0$, ... из начала координат $z = y = 0$ начинает расширяться двумерный (*эластичный*) поршень. Его расширение, которое может смениться движением в обратном направлении, подчиняется закону:

$$F(x, y/\tau, z/\tau) = F(V_0 t, y^\circ, z^\circ) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1/V_0. \quad (27)$$

Движение поршня, на котором выполняется условие непротекания, приводит к образованию УВ. Движение УВ находится в процессе решения двумерной нестационарной задачи с привлечением соотношений (1.3.8) – (1.3.11) в каждой точке УВ. В них входят нормальная к фронту УВ скорость её движения по неподвижному газу D и две компоненты двумерного вектора скорости: нормальная и касательная к УВ.

Сведение задач пространственного стационарного гиперзвукового обтекания тонких заостренных тел к более простой задаче нестационарного движения двумерного поршня получило название *закона плоских сечений, поршневой или нестационарной аналогии*. Основы данного подхода, заложенные Цянь Сюэ-сэнем

(1946), У. Хейзом (1946), С.В. Фальковичем (1947) и А.А. Ильюшиным (1948), получили всестороннее обоснование, развитие и применение в работах Г.Г. Чёрного и В.В. Лунёва [40]. В рамках того же подхода Г.Г. Чёрный (1958) нашёл параметры подобия для гиперзвукового обтекания тонких тел с малым затуплением.

Проекции n_y и n_z на оси y и z вектора $\mathbf{n}$ нормали к поверхности поршня равны

$$n_y = \frac{F_{y^\circ}}{\sqrt{F_{y^\circ}^2 + F_{z^\circ}^2}}, \quad n_z = \frac{F_{z^\circ}}{\sqrt{F_{y^\circ}^2 + F_{z^\circ}^2}}, \quad F_{y^\circ} = \frac{\partial F}{\partial y^\circ}, \quad F_{z^\circ} = \frac{\partial F}{\partial z^\circ}. \quad (28)$$

Если V_n – проекция скорости поверхности поршня на $\mathbf{n}$, то на нём $dy/dt = V_n n_y$, $dz/dt = V_n n_z$, и согласно уравнению (27)

$$\frac{\tau V_0 F_x + F_{y^\circ} V_n n_y + F_{z^\circ} V_n n_z}{\sqrt{\tau^2 F_x^2 + F_{y^\circ}^2 + F_{z^\circ}^2}} = 0 \rightarrow V_n = \frac{-\tau V_0 F_x}{\sqrt{F_{y^\circ}^2 + F_{z^\circ}^2}}.$$

Отсюда с учётом равенств (28) условие непротекания на поршне: $v_n = V_n$, где $v_n = v n_y + w n_z$ – нормальная к поршню скорость газа, сведётся к равенству

$$v F_{y^\circ} + w F_{z^\circ} = -\tau V_0 F_x. \quad (29)$$

Так как F_x , F_{y° и F_{z° – величины порядка единицы, то на поршне v и w имеют порядок τV_0 .

В нестационарной задаче перейдём к новым переменным (с индексом «градус»), которые наряду с y° и z° введём равенствами

$$y = \tau y^\circ, \quad z = \tau z^\circ, \quad t^\circ = x = t V_0, \quad v = \tau V_0 v^\circ, \quad w = \tau V_0 w^\circ, \quad (30)$$

$$\rho = \rho_0 \rho^\circ, \quad p = \rho_0 (\tau V_0)^2 p^\circ, \quad a = \tau V_0 a^\circ, \quad D = \tau V_0 D^\circ.$$

В новых переменных уравнения (25) не изменятся

$$\frac{d\rho^\circ}{dt^\circ} + \rho^\circ \left(\frac{\partial v^\circ}{\partial y^\circ} + \frac{\partial w^\circ}{\partial z^\circ} \right) = 0, \quad \frac{dv^\circ}{dt^\circ} + \frac{1}{\rho^\circ} \frac{\partial p^\circ}{\partial y^\circ} = 0, \quad \frac{dw^\circ}{dt^\circ} + \frac{1}{\rho^\circ} \frac{\partial p^\circ}{\partial z^\circ} = 0, \quad (25^\circ)$$

$$\frac{ds}{dt^\circ} = 0, \quad \frac{d}{dt^\circ} = \frac{\partial}{\partial t^\circ} + v^\circ \frac{\partial}{\partial y^\circ} + w^\circ \frac{\partial}{\partial z^\circ},$$

закон движения поршня (27) и условие (29) на нём примут вид

$$F(t^\circ, y^\circ, z^\circ) = 0, \quad 0 \leq t^\circ \leq 1, \quad v^\circ F_{y^\circ} + w^\circ F_{z^\circ} = -F_x, \quad (27^\circ), (29^\circ)$$

а в условия на УВ наряду с её скоростью D° и параметрами с «градусом» за УВ войдут параметры покоящейся среды, которые для совершенного газа согласно определениям (30) равны

$$\rho_0^\circ = 1, \quad p_0^\circ = \frac{1}{\gamma(\tau M_0)^2}, \quad h_0^\circ = \frac{a_0^{\circ 2}}{\gamma - 1} = \frac{1}{(\gamma - 1)(\tau M_0)^2}. \quad (31)$$

Итак, нестационарная задача включает уравнения двумерного нестационарного течения (25°), условия на поршне (27°) и (29°) и переписанные с добавлением «градусов» четыре соотношения (1.3.8) – (1.3.11) на УВ:

$$[\rho^\circ(v_n^\circ - D^\circ)] = 0, \quad [\rho^\circ(v_n^\circ - D^\circ)^2 + p^\circ] = 0, \\ [v_t^\circ] = 0, \quad [2h^\circ + (v_n^\circ - D^\circ)^2] = 0.$$

Согласно им и выражениям (31) для совершенного газа решение зависит от показателя адиабаты γ , *гиперзвукового* параметра подобия **Цяня–Кармана**: $K = \tau M_0$ и от отношения α/τ . Последнее, как и в (1), появляется при записи уравнения поверхности тела.

Таким образом, для давления на поршне, или что то же – на поверхности тела, имеем

$$p = \rho_0(\tau V_0)^2 p^\circ(K, \gamma, \alpha/\tau, x = t^\circ, y^\circ, z^\circ), \quad (32)$$

а для коэффициентов сопротивления c_x и подъемной силы c_y пространственного тела справедливы формулы

$$c_x = \frac{1}{\rho_0 V_0^2} \oint\!\!\!\oint p dy dz = \tau^4 X + c_{xb}, \quad X = X(K, \gamma, \alpha/\tau) = \oint\!\!\!\oint p^\circ dy^\circ dz^\circ; \\ c_y = \frac{1}{\rho_0 V_0^2} \oint\!\!\!\oint p dx dz = \tau^3 Y, \quad Y = Y(K, \gamma, \alpha/\tau) = \oint\!\!\!\oint p^\circ dt^\circ dz^\circ$$

с $p^\circ = p^\circ(K, \dots)$ в соответствии с решением (32). Коэффициент донного сопротивления c_{xb} в формуле для c_x тел с донным срезом, согласно сказанному ранее, при гиперзвуковом обтекании много меньше первого слагаемого. Аналогично для профиля

$$c_x = \frac{1}{\rho_0 V_0^2} \oint p dy = \tau^3 X + c_{xb}, \quad X = X(K, \gamma, \alpha/\tau) = \oint p^\circ dy^\circ; \\ c_y = \frac{1}{\rho_0 V_0^2} \oint p dx = \tau^2 Y, \quad Y = Y(K, \gamma, \alpha/\tau) = \oint p^\circ dt^\circ. \quad (33)$$

В силу отмеченных выше свойств УП, яблоковидной кривой и $C^\pm$ -характеристик при $M_0 \gg 1$ нестационарная аналогия и её следствие – гиперзвуковой закон подобия справедливы и тогда, когда возмущения всех параметров малы и применим закон подобия Аккерета. В таких случаях $M_0^2 \gg 1$, и формулы (17) – (19) для профиля без заднего торца дают те же зависимости c_x и c_y от τ , что и (33). При этом X и $Y \sim 1/K$.

Заканчивая параграф, остановимся на важном свойстве гиперзвуковых течений – *гиперзвуковой стабилизации*. Согласно ей при достаточно больших числах Маха M_0 коэффициенты сопротивления и подъемной силы произвольных, в том числе толстых, пространственных и т.п. тел, а также поля безразмерных параметров вблизи них перестают зависеть от величины M_0 . На примере обтекания симметричного толстого профиля природу гиперзвуковой стабилизации объясняет рис. 3.53, в. На течение в области, ограниченной справа C^- -характеристикой ws , влияет конечный отрезок UB ow . Если на нём UB сильная, а начиная с некоторого M_0 , для телесного, а тем более затупленного профиля это обязательно случится, то из термодинамических параметров набегающего потока в соотношениях на UB остаётся только ρ_0 . Последнее эквивалентно $a_0 = 0$ или гиперзвуковому обтеканию с $M_0 = \infty$. За сильной UB по формулам (1.4.30)

$$\rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0, \quad p = \frac{2}{\gamma+1}\rho_0 D^2, \quad V_n = \frac{2}{\gamma+1}D,$$

при стационарном обтекании $D = V_{n0} = V_0 \sin \sigma$, а σ – угол наклона UB к оси x . Если на отрезке ow UB сильная, то $\sin \sigma \gg 1/M_0$. В таких случаях $\rho^\circ = \rho/\rho_0$, $V^\circ = V/V_0$ и $p^\circ = p/(\rho_0 V_0^2)$ в области течения, ограниченной слева отрезком ow UB , а справа – C^- -характеристикой ws , не зависят от M_0 . Вместе с ними не зависят от M_0 коэффициенты c_x и c_y , ибо в них под знаками интегралов стоит p° . По тем же причинам гиперзвуковая стабилизация имеет место и для осесимметричных, а также для пространственных гиперзвуковых течений. В пространственном случае роль $C^\pm$ -характеристик играют характеристические поверхности, которые строятся как огибающие конусов Маха. Гиперзвуковая ста-

билизация установлена С.В. Валландером (1947) и К. Осватичем (1951).

Часть 4. Оптимальные аэродинамические формы

Глава 4.1. Задача Ньютона о головной части минимального сопротивления

Сокращения: ЗН – задача Ньютона, УДЭ и УКЭ – участки двустороннего и краевого экстремума, ФН – формула Ньютона.

Решенная Ньютоном задача (*задача Ньютона – ЗН*) о построении осесимметричной *головной части* минимального сопротивления при заданных длине L и радиусе основания Y была первой задачей созданного им *вариационного исчисления*. Правда, у Ньютона в его «*Математических началах натуральной философии*» [41] к этой задаче имеют отношение лишь несколько кратких (3 фигуры и менее 30 строк), приведённых без доказательств утверждений, составивших одно *поучение*. *Почтение* затрагивает три темы: 1. О построении оптимального по сопротивлению усеченного конуса при заданных L и Y , 2. Об уменьшении сопротивления тела вращения при замене прилегающего к носику овального участка пересекающимися отрезками касательных с углами наклона к оси вращения в 90° и 45° и 3. О форме примыкающего к переднему торцу пологого участка оптимального контура, которую определяет комбинация длин четырех связанных с ним прямолинейных отрезков. Приведённый в «Математических началах ...» в примечаниях переводчиков XVIII века способ получения этой комбинации и отдалённо не напоминают привычный аппарат вариационного исчисления. В рамках аппарата вариационного исчисления такой вывод дан в примечаниях А.Н. Крылова – переводчика «Математических начал ...» на русский язык. Однако ни Ньютон, ни А.Н. Крылов не объяснили причину появления переднего торца – важнейшего элемента ЗН.

Долгое время ЗН, включенная в некоторые руководства по вариационному исчислению, рассматривалась безотносительно к аэродинамике. В середине XX века выяснилось, что введенная Ньютоном формула для давления на поверхности тела с внутренней нормалью $\mathbf{n}$ к его контуру (*формула Ньютона – ФН*):

$$p = p_0 + \rho_0 V_0^2 \alpha^2, \quad \alpha = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_0) / V_0 \quad (1)$$

неплохо работает при $M_0 \gg 1$. Тогда же аэродинамики, используя ФН, обратились к решению ЗН и её обобщений (сначала для плоских и осесимметричных тел) и сразу столкнулись с неожиданными, на первый взгляд, трудностями. Описание указанных трудностей и того, как они были преодолены, весьма поучительно. Однако сначала поясним смысл ФН. ФН получается, если принять, что частицы газа движутся до поверхности тела, не изменяя своей начальной скорости V_0 , а при соударении с телом теряют её нормальную к поверхности составляющую. С другой стороны, при $\gamma = 1$ для гиперзвукового потока $\rho/\rho_0 = \infty$ и сильная ударная волна ложится на поверхность тела. Поэтому согласно условию непротекания $V_n = 0$, и по условию (1.3.9) для нормальной компоненты количества движения формула (1) даёт давление за ударной волной. Если кривизна контура в плоскости xu мала, то давления за ударной волной и на контуре тела близки.

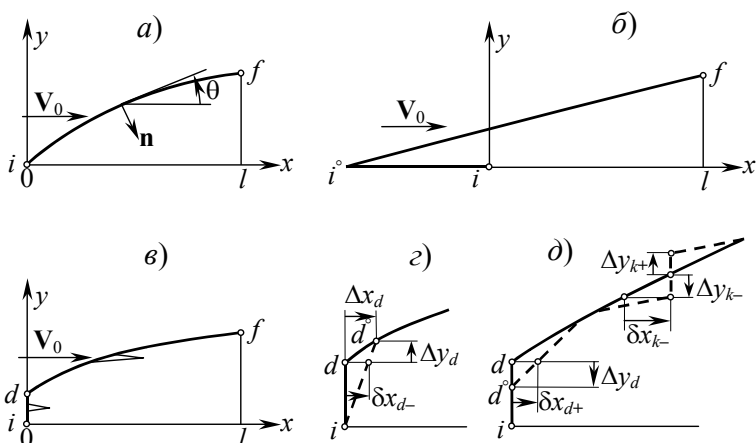


Рис. 4.1

Если в качестве линейного масштаба взять радиус или полувысоту (для симметричной относительно оси x плоского тела) основания, то $0 \leq x \leq l = L/Y$, $0 \leq y \leq 1$, и для головной части с образующей $x = x(y)$ в согласии с ФН коэффициент волнового сопротивления c_x равен (рис. 4.1, а):

$$c_x = \int_0^1 y^{v-1} \Phi(\alpha) dy = \int_0^1 y^{v-1} \varphi(x') dy, \quad (2)$$

$$x' \equiv \frac{dx}{dy} = \operatorname{ctg} \theta, \quad \alpha = \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1+x'^2}}.$$

Здесь $v = 1$ и 2 для плоских и осесимметричных тел и пока несуществен вид функций $\Phi(\alpha)$ и $\varphi(x')$, т.е. конкретная форма закона сопротивления. Важно лишь то, что силы, действующие на головную часть, определяются только ориентацией нормали $\mathbf{n}$ и константами, независимыми от формы образующей.

В согласии с формулой (2) для приращения c_x получим

$$\begin{aligned} \Delta c_x &= \int_0^1 y^{v-1} \left[\varphi_{x'} \delta x' + \frac{\varphi_{x'x'}}{2} (\delta x')^2 \right] dy = \\ &= y^{v-1} \varphi_{x'} \delta x \Big|_i^f - \int_0^1 \left[\frac{d(y^{v-1} \varphi_{x'})}{dy} \delta x - y^{v-1} \frac{\varphi_{x'x'}}{2} (\delta x')^2 \right] dy. \end{aligned}$$

Здесь и далее вариации $\delta x, \dots$ – разности $x, \dots$ проварьированного и исходного контуров при фиксированном y . При переходе ко второму выражению учтено, что $\delta x' = d(\delta x)/dy$, и выполнено интегрирование по частям. Так как $x_i = 0, x_f = 1$, то $\delta x_i = \delta x_f = 0$ и

$$\Delta c_x = - \int_0^1 \left[\frac{d(y^{v-1} \varphi_{x'})}{dy} \delta x - y^{v-1} \frac{\varphi_{x'x'}}{2} (\delta x')^2 \right] dy. \quad (3)$$

Поэтому если изображённая на рис. 4.1, *a* образующая *if* реализует минимум c_x , то при произвольных δx в согласии с представлением (3) необходимые условия оптимальности сводятся к

$$\frac{d(y^{v-1} \varphi_{x'})}{dy} = 0, \quad \varphi_{x'x'} \geq 0, \quad 0 < y < 1. \quad (4)$$

В условиях (4) равенство – *необходимое условие экстремума (уравнение Эйлера)*, а неравенство – *необходимое условие минимума c_x – условие Лежандра*, которое должно выполняться при $|\delta x'| \ll 1$. Уравнение Эйлера интегрируется и даёт интеграл

$$y^{v-1} \varphi_{x'} = \text{const}, \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (5)$$

В плоском случае из интеграла (5) найдём, что $x' = \text{const} = l$, т.е. оптимальный контур – прямая: $x = ly, 0 \leq y \leq 1$. Правда, воз-

никает вопрос: при любых ли $x' = l$ будет выполняться условие Лежандра: $\varphi_{xx'}|_{x'=l} \geq 0$ и что делать, если оно нарушится? Кстати, для ФН (1) $\Phi(\alpha) = \alpha^2$, в согласии с формулами (2)

$$\varphi(x') = \frac{1}{1+x'^2}, \quad \varphi_{x'}(x') = \frac{-2x'}{(1+x'^2)^2}, \quad \varphi_{xx'}(x') = 2 \frac{3x'^2 - 1}{(1+x'^2)^3}, \quad (6)$$

и условие Лежандра – неравенство (4) и в плоском, и в осесимметричном случаях выполняется лишь при

$$x' \geq 1/\sqrt{3} \approx 0.57735. \quad (7)$$

Для плоской головной части $x' = l$, и при $l < 1/3^{1/2}$ условие Лежандра нарушается, и найденное решение непригодно.

Ещё хуже ситуация с осесимметричными головными частями, для которых в силу интеграла (5): $u\varphi_{x'} = \text{const} = (u\varphi_{x'})_i = 0 \cdot (\varphi_{x'})_i$. Отсюда в общем случае $\varphi_{x'} = 0$, т.е. x' – постоянная, но теперь вполне определённая, и отвечающей ей прямой соединить точки i и f при произвольном удлинении l невозможно. Так, для ФН в силу формулы (6) $\varphi_{x'} = 0$ при $x' = 0$ и $x' = \infty$. Первое значение даёт торцы $x \equiv \text{const}$, второе – цилиндрические участки $y \equiv \text{const}$. При $0 < l < \infty$ они не позволяют построить требуемое решение.

Выход из создавшейся ситуации подсказал простой **мысленный эксперимент** (А.Н. Крайко, 1963). Выше как само собой разумеющееся полагалось, что образующая if из точки i идёт сразу вправо. А если не так? Составим её из двух участков (рис. 4.1, б): идущего влево отрезка ii° оси x и наклонного участка $i^{\circ}f$. Для такой образующей в рамках ФН и без вариационного исчисления $c_x \rightarrow 0$ при $x^{\circ} \rightarrow -\infty$. Но – тут же спохватился **экспериментатор** – мы ведь задавали длину головной части, и потому нельзя вылезать за ось y ! Правильно! Значит, оптимальный контур может содержать передний торец id (рис. 4.1, в), появляющийся из-за ограничения на длину как **участок краевого экстремума (УКЭ)**. На нём допустимые вариации $\delta x \geq 0$, и потому в отличие от **участков двустороннего экстремума (УДЭ)** с допустимыми δx любого знака уравнение Эйлера не обязано выполняться.

Как установлено выше, для ФН вертикальные и горизонтальные УКЭ удовлетворяют уравнению Эйлера, хотя на первых из них условие Лежандра нарушается. Однако для ЗН это совпаде-

ние несущественно. Важно другое: в рамках ФН c_x уменьшают выемки на любом участке образующей (рис. 4.1, в), и чем их больше, тем меньше c_x . Для *ежа* с бесконечным числом выемок и выступов $c_x = 0$. Лежандр, обратив внимание на данное обстоятельство, подверг сомнению правильность решения Ньютона. Однако, несмотря на это, решение Ньютона с передним торцом верно, поскольку он – УКЭ не только из-за ограничения на длину головной части, но и как граница применимости ФН. Для головной части она справедлива, если $0 \leq \theta \leq \pi/2$, и передний торец – УКЭ одновременно и по x , и по θ . Итак, согласно сказанному выше при решении ЗН или её обобщений в рамках ФН x , y и θ на искомом оптимальном контуре удовлетворяют ограничениям

$$0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2. \quad (8)$$

Любое равенство в них может приводить к появлению УКЭ.

Решение задач современной *теории оптимального управления* начинается с формулировки ограничений типа неравенств (8), и УКЭ в ней столь же обычны, как и УДЭ. В классическом вариационном исчислении об УКЭ вспоминали лишь в исключительных случаях, современная теория оптимального управления в середине XX века только начала своё развитие и для аэродинамиков того времени подобные формулировки, а вместе с ними УКЭ были незнакомы. Однако, УКЭ столь же естественны, как значения функции на границах конечной области изменения независимых переменных при поиске её максимальной или минимальной величины. Ньютон, наверняка, понимал это столь отчётливо, что в первой задаче вариационного исчисления не счел нужным объяснять, почему оптимальный контур имеет передний торец.

Вооруженные знанием структуры искомого оптимального контура и ограничениями (8) вернёмся к решению ЗН. Если оптимальный контур содержит передний торец id_- и пологий участок d_+f , то при варьировании наряду с вариациями $\delta x'$ и δx на id_- и d_+f появятся (рис. 4.1, з) приращения координат точки их стыковки Δy_d и Δx_d . Индексы «-» и «+» метят параметры до и после соответствующей точки при движении по if от точки i . Кроме того, наряду с малыми (*слабыми*) вариациями $\delta x'$ введём в окрестности произвольной внутренней точки k участка d_+f вертикаль-

ную ступеньку (рис. 4.1, ∂) с $x' = 0$ и высотами $\Delta y_{k-} \leq 0$ и $\Delta y_{k+} \geq 0$. Исходя из определения приращения Δc_x и учтя, что координаты точек i и f фиксированы, в произвольной точке излома (см. рис. 4.1, z и ∂) $\delta x = \Delta x - x' \Delta y$, а $\Delta x_k = 0$, последовательно найдём

$$\begin{aligned} \Delta c_x &= \left(\int_0^{y_d + \Delta y_d} + \int_{y_d + \Delta y_d}^{y_k + \Delta y_{k-}} + \int_{y_k + \Delta y_{k+}}^1 \right) y^{v-1} \left[\varphi(x') + \varphi_{x'} \delta x' + \frac{\varphi_{x'x'}}{2} (\delta x')^2 \right] dy + \\ &+ y_k^{v-1} \varphi(0) (\Delta y_{k+} - \Delta y_{k-}) - \left(\int_0^{y_d} + \int_{y_d}^1 \right) y^{v-1} \varphi(x') dy = \varphi(x') \Big|_{d+}^{d-} y_d^{v-1} \Delta y_d + \\ &+ y_k^{v-1} [\varphi(0) - \varphi(x'_k)] (\Delta y_{k+} - \Delta y_{k-}) + \left(\int_0^{y_d} + \int_{y_d}^{y_{k-}} + \int_{y_{k+}}^1 \right) y^{v-1} [\varphi_{x'} \delta x' + \\ &+ \frac{\varphi_{x'x'}}{2} (\delta x')^2] dy = (\varphi \Delta y + \varphi_{x'} \delta x) \Big|_{d+}^{d-} y_d^{v-1} + y_k^{v-1} [\varphi(0) - \varphi(x'_k)] (\Delta y_{k+} - \\ &- \Delta y_{k-}) + \delta x \Big|_{k+}^{k-} y_k^{v-1} \varphi_{x'_k} - \left(\int_0^{y_d} + \int_{y_d}^1 \right) \left[\frac{d(y^{v-1} \varphi_{x'})}{dy} \delta x - y^{v-1} \frac{\varphi_{x'x'}}{2} (\delta x')^2 \right] dy = \\ &= [(\varphi - x' \varphi_{x'}) \Delta y + \varphi_{x'} \Delta x] \Big|_{d+}^{d-} y_d^{v-1} + y_k^{v-1} [\varphi(0) - (\varphi - x' \varphi_{x'})_k] \times \\ &\times (\Delta y_{k+} - \Delta y_{k-}) - \left(\int_0^{y_d} + \int_{y_d}^1 \right) \left[\frac{d(y^{v-1} \varphi_{x'})}{dy} \delta x - y^{v-1} \frac{\varphi_{x'x'}}{2} (\delta x')^2 \right] dy. \end{aligned}$$

На торце $x' = 0$, $\varphi_{x'}(0) \equiv 0$, а слагаемое с $(\delta x')^2 \ll \Delta x_d$. Поэтому в рамках ФН с учётом формул (6) окончательно получим

$$\begin{aligned} \Delta c_x &= y^{v-1} x' \frac{x'(x'^2 - 1) \Delta y + 2 \Delta x}{(1 + x'^2)^2} \Big|_{d+} + y^{v-1} \frac{x'^2 (x'^2 - 1)}{(1 + x'^2)^2} (\Delta y_+ - \Delta y_-) \Big|_k + \\ &+ \int_{y_d}^1 \left\{ 2 \left[\frac{d}{dy} \frac{y^{v-1} x'}{(1 + x'^2)^2} \right] \delta x + y^{v-1} \frac{3x'^2 - 1}{(1 + x'^2)^3} (\delta x')^2 \right\} dy. \end{aligned} \quad (9)$$

В точке d допустимы приращения Δy_d любого знака. Поэтому для оптимального контура

$$x'_{d+} = 1. \quad (10)$$

Положительность коэффициента при Δx_d показывает, что c_x при допустимых $\Delta x_d \geq 0$ растёт, и передний торец – УКЭ. Согласно

принятому способу *сильного* варьирования (рис. 4.1, δ) в точке k допустимы $\Delta y_{k-} \leq 0$, а $\Delta y_{k+} \geq 0$. Значит, на пологом участке оптимального контура должно выполняться условие

$$x' \geq 1, \quad (11)$$

более сильное, чем условие Лежандра (7). Разумеется, как и при анализе выражения (3), условие Лежандра следует из рассмотрения второго слагаемого под знаком интеграла формулы (9). В примечаниях А.Н. Крылова к «Математическим началам ...» показано, что условие (11) вытекает из результатов Ньютона по первой и второй темам. В отличие от А.Н. Крылова Лежандр, специально занимавшийся ЗН и получивший для неё более слабое условие (7), не понял этого. Долго не понимали этого практически все аэродинамики, занимавшиеся ЗН и её обобщениями. Цитируя Ньютона, они использовали условие Лежандра, а не более сильное *условие Крылова* (11).

Уравнение Эйлера, получающееся из рассмотрения первого слагаемого под знаком интеграла формулы (9), не отличается от полученного ранее. Однако теперь его интеграл при $v = 2$ в согласии с тем, что $y_d > 0$, и с равенством (10) принимает форму

$$y = y_d \frac{(1+q^2)^2}{4q}, \quad q = x'. \quad (12)$$

С введением q уравнение оптимального контура записывается в параметрической форме, ибо наряду с формулой (12) имеем

$$\begin{aligned} x &= \int_0^y x' dy = \int_1^q q \frac{dy}{dq} dq = y_d \int_1^q q \left[\frac{d}{dq} \frac{(1+q^2)^2}{4q} \right] dq = \\ &= \frac{y_d}{4} \int_1^q \left(3q^3 + 2q - \frac{1}{q} \right) dq = y_d \frac{3q^4 + 4q^2 - 4 \ln q - 7}{16}. \end{aligned} \quad (13)$$

Продифференцировав равенство (12) по y , найдём

$$\frac{dq}{dy} \equiv q' \equiv x'' = \frac{4q^2}{y_d(q^2+1)(3q^2-1)}.$$

По условию (10) $q_d = 1$ и $q'_d > 0$, т.е. q с ростом y растёт, а следовательно, будет расти и дальше, обеспечивая выполнение условия Крылова (11) и выпуклость участка d_+f .

Так как $y_f = 1$, а $x_f = l$, то константа y_d , входящая в уравнения (12) и (13), и значение $q_f > 1$ в конечной точке оптимального контура находятся из двух равенств

$$y_d(1+q_f^2)^2 = 4q_f, \quad y_d(3q_f^4 + 4q_f^2 - 4\ln q_f - 7) = 16l.$$

Отсюда для $l \geq 4$ с высокой точностью

$$q_f \approx \frac{4l}{3}, \quad y_d = \frac{4q_f}{(1+q_f^2)^2} \approx \frac{27}{2(8l^2+9)l}, \quad \theta_f = \arctg \frac{1}{q_f} \approx \frac{3}{4l}.$$

В свете полученных результатов оптимальные контуры плоских головных частей при $l \geq 1$ – наклонные прямые, а при $l < 1$ – комбинация торца и отрезка прямой $x' = 1$. При $l < 1$ решение дают любые приходящие в точку $x_f = l, y_f = 1$ комбинации торцов и таких отрезков. В рамках ФН все они имеют одинаковый c_x .

В приближении ФН рассматривался ряд модификаций ЗН. В одной из них вместо длины L задаётся объём Ω или $\omega = \Omega/(\pi Y^3)$. Первая попытка решения этой задачи – *задачи Эггера* (А.А. Eggers и др., 1957 и 1965 [42]) оказалась неудачной. Причины неудачи – введение торца *при отсутствии ограничения на длину* и использование условия Лежандра при нарушении условия Крылова. В результате был сделан вывод о том, что при $0.149 < \omega < 0.346$ «*решение, если и существует, то не может быть получено в данной постановке*». Найденное для всех $0 \leq \omega \leq \infty$ решение задачи Эггера (А.Н. Крайко, 1991 [43], там же дан описанный выше вывод условия Крылова) показало, что и заостренная головная часть, построенная Эггерсом, оптимальна лишь при $0.433 \leq \omega$. При $0 < \omega < 0.433$ в приближении ФН оптимальны головные части принципиально нового типа: остриё, выступающее из *заднего торца* – УКЭ, также появляющегося в силу ограничений (8) с тем отличием, что теперь начало координат лежит в основании головной части, и $x \leq 0$. В точке стыковки d острия и заднего торца аналогично ЗН $x'_{d-} = 1$, однако образующая острия id_- вогнутая, что при $0 \leq y < y_d$ по-прежнему обеспечивает выполнение условия Крылова.

В рамках ФН А. Миеле (А. Miele, 1965 [42]) в приближении тонкого тела строил головные части, оптимальные при заданных L, Y и Ω , точнее, Y, l и $c_\Omega = \Omega/(\pi Y^2 L)$. Решение А. Миеле оказа-

лось неполным: полученные уравнения и условия позволяют строить оптимальные головные части лишь при $0.25 \leq c_\Omega \leq 0.5$ – в четверти полного интервала его значений ($0 \leq c_\Omega \leq 1$). Результаты полного решения этой задачи без приближения тонкого тела (Н.Л. Ефремов, А.Н. Крайко, К.С. Пьянков, 2005 [44]) представлены на рис. 4.2. При этом под заданием Y и l понималось задание габаритов. Так, при больших l и малых c_Ω отнесённая к Y длина головной части может быть меньше l . С другой стороны, при больших c_Ω понимаемое в этом смысле ограничение (8) на y приводит к УКЭ нового типа – цилиндрическому отрезку: $y = 1$.

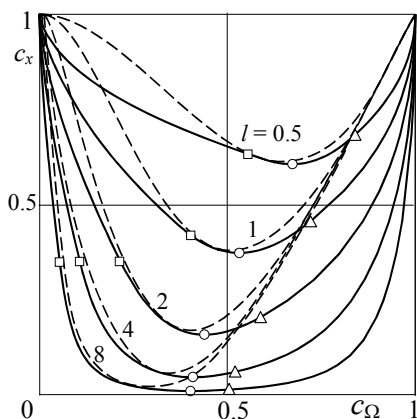


Рис. 4.2

На рис. 4.2 сплошными кривыми даны рассчитанные по ФН зависимости $c_x = c_x(c_\Omega, l)$ для оптимальных осесимметричных головных частей. Их крайние точки отвечают минимально и максимально возможным объёмам ($c_\Omega = 0$ и 1). Для них, согласно ФН, $c_x = 1$. Для каждого l кружок даёт величину c_x головной части ЗН, которая для этого l минимальна. Между кружками и треугольниками оптимальные контуры имеют передний торец и выпуклый УДЭ. Треугольники отвечают предельно толстым головным частям такого типа с горизонтальной касательной в точке f . Справа от них оптимальны контуры из переднего торца, выпуклого УДЭ и концевого УКЭ: $y = 1$. Между кружками и прямо-

угольниками оптимальные контуры состоят из переднего торца и УДЭ, сначала выпуклых. С уменьшением c_Ω на УДЭ появляются вогнутые участки, а начиная с квадратов – задний торец. Штрихами даны рассчитанные по ФН зависимости $c_x = c_x(c_\Omega, l)$ для острых и затупленных эквивалентных конусов, удовлетворяющих тем же габаритным ограничениям.

Рассчитанные интегрированием уравнений течения идеального газа c_x головных частей, построенных в рамках ФН, подтвердили преимущества выпуклых оптимальных контуров. В противоположность этому c_x головных частей с вогнутыми участками, а тем более с задним торцом, как правило, превосходили c_x эквивалентных конусов. В тех же примерах, где преимущество сохранялось, оно было заметно меньше, получавшегося по ФН. Одно из следствий этих результатов – изменение постановки задачи. На практике задание объёма головной части обусловлено размещением в ней полезного груза фиксированного объёма Ω^m . Для этого объём головной части должен удовлетворять неравенству $\Omega \geq \Omega^m$. Если Ω_0 отвечает решению ЗН со свободным объёмом, и $\Omega_0 \geq \Omega^m$, то именно оно с $c_x = c_{x0}$, минимальным для заданного l , даёт решение задачи. Согласно рис. 4.2 при этом возможно значительное (при $l \geq 1$ – в несколько раз) уменьшение c_x . С математической точки зрения, такая головная часть – пустотелый обтекатель со стенками нулевой толщины и располагающимся внутри него полезным объёмом Ω^m . Таким образом, оптимальные в рамках ФН головные части с $c_\Omega < c_{\Omega 0}$, отвечающие на рис. 4.2 участкам кривых слева от кружков, не представляют интереса.

Глава 4.2. Симметричный профиль минимального волнового сопротивления

Сокращения: ЗЛВ – закон локального взаимодействия, УКЭ – участок краевого экстремума, ФН – формула Ньютона.

Ниже на примере построения симметричного относительно оси x плоского тела (*профиля*) минимального волнового сопротивления покажем, как задание длины приводит к появлению не встречавшегося до этого УКЭ – *заднего торца*, замыкающего *оптимальный контур*. По предположению задний торец газом

не обтекается, а действующее на него *донное* давление p^+ задано и не зависит от формы оптимального контура. Ось x декартовых координат xu с началом в передней точке профиля направим по вектору скорости набегающего потока V_0 . Кроме длины профиля L зададим отнесённую к L^2 площадь F верхней половины его продольного сечения. В идеальном газе при задании только длины минимальное (равное нулю) волновое сопротивление имеет пластинка – отрезок оси x длины L . Если задать только F , то, неограниченно увеличивая длину, можно сделать волновое сопротивление сколь угодно малым. Если принять L за линейный масштаб, то (рис. 4.3): $x_i = y_i = y_f = 0$, $x_f = 1$.

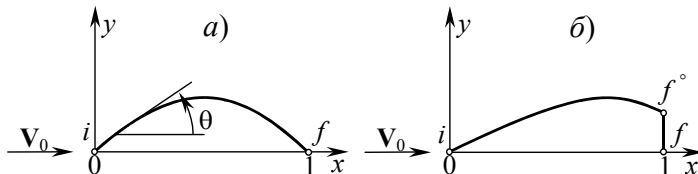


Рис. 4.3

Для определения давления p на поверхности профиля ограничимся так называемыми **законами локального взаимодействия (ЗЛВ)**, в силу которых, как и в случае ФН (4.1.1), p – функция только угла θ и констант, например, параметров набегающего потока. В отличие от рассмотренной в Гл. 4.1 головной части для профиля, имеющего не только наветренную (с $\theta > 0$), но и подветренную (с $\theta < 0$) части образующей ФН примет вид

$$p = p_0 + [(1 + \text{sign}\theta)/2] \sin^2 \theta. \quad (1)$$

Согласно такой записи ФН на подветренной части профиля, включая задний торец, $p = p_0$. При этом на наветренной части по-прежнему $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Здесь и далее p отнесено к $\rho_0 V_0^2$.

На ударной волне согласно Гл. 1.4 приращения энтропии s и аналогично Гл. 2.4 инварианта Γ сверхзвукового стационарного течения (Гл. 3.5) – величины порядка $[p]^3$, где $[p]$ – приращение p на ударной волне. Поэтому если профиль заострённый и тонкий, а число Маха набегающего потока M_0 невелико, то головная

ударная волна слабая, и с точностью до $[p]^2$ включительно во всём потоке, включая образующие if или if° , имеем (Гл. 3.5)

$$I^- = I_0^- \rightarrow \theta = \int_{p_0}^p \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho V^2} dp, \quad p_0 \equiv \frac{dp}{d\theta} = \frac{\rho V^2}{\sqrt{M^2 - 1}}. \quad (2)$$

Формулы (2) дают ещё один ЗЛВ. Объединение формулы (1), применяемой при $\theta \geq 0$, с формулами (2), применяемыми при $\theta \leq 0$, даёт ЗЛВ (1) + (2), для толстых профилей более точный, чем ЗЛВ (1) и (2) в отдельности. Наконец, линеаризация формул (2) приводит к менее точному, но наиболее простому ЗЛВ:

$$p = p_0 + \frac{\theta}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \quad (3)$$

– формуле *линейной теории*, уже встречавшейся в законе подобия Аккерета (Гл. 3.13).

В рамках ЗЛВ для коэффициента волнового сопротивления c_x , а также для площади F симметричного профиля без заднего торца (рис. 4.3, а) или с ним (рис. 4.3, б), будем иметь

$$c_x = \int_i^{f^\circ} p(\theta) dy - p^+ y_{f^\circ}, \quad F = \int_i^{f^\circ} (1-x) dy - \int_f^{f^\circ} (1-x) dy, \quad (4)$$

$$E(x', \theta) \equiv x' - \text{ctg}\theta = 0.$$

Равный нулю при $x = 1$ второй интеграл в выражении для F записан для правильного вычисления приращения площади. Для аналогичной цели $p^+ y_{f^\circ}$ в формуле для c_x записывается и при $y_{f^\circ} = 0$.

Для вывода необходимых условий минимума c_x , составим функционал

$$\begin{aligned} J &= c_x + \lambda F + \int_i^{f^\circ} \mu(y) E(x', \theta) dy = \\ &= \int_i^{f^\circ} [p(\theta) + \lambda(1-x) + \mu(y)(x' - \text{ctg}\theta)] dy - \int_f^{f^\circ} [p^+ + \lambda(1-x)] dy, \end{aligned}$$

в котором λ – постоянный, а $\mu(y)$ – переменный множители Лагранжа. При любых допустимых варьированиях исходного (не обязательно оптимального) контура, при которых сохраняется заданная величина F и выполняется равенство $E = 0$ с E из (4), и

любых конечных множителях λ и μ приращения c_x и функционала J совпадают. Поэтому, проварьировав J и перейдя от $\delta x'$ к δx интегрированием по частям, найдём

$$\Delta c_x = \Delta J = X^{f^\circ} \Delta x_{f^\circ} + Y^{f^\circ} \Delta y_{f^\circ} + \int_i^{f^\circ} (A^x \delta x + A^\theta \delta \theta) dy - \int_f^{f^\circ} A^+ \delta x dy. \quad (5)$$

Здесь и далее для тел без заднего торца f° заменяется на f ; Δx_{f° и Δy_{f° – приращения x и y точки f° ; δx и $\delta \theta$ – вариации, т.е. приращения x и θ проварьированного и исходного контуров при фиксированном y , а X^{f° , Y^{f° , A^x , A^θ и A^+ – функции x , θ , λ , μ , $\mu' = d\mu/dy$ и p^+ , выражения для которых приводятся по мере необходимости.

Для любого контура if° множитель $\mu(y)$ выберем так, чтобы обратить в нуль коэффициент A^θ . Это даст конечное уравнение

$$A^\theta \sin^2 \theta \equiv \mu + p_\theta \sin^2 \theta = 0, \quad p_\theta = dp(\theta)/d\theta \quad (6)$$

с $p(\theta)$, определяемым по одному из ЗЛВ (1) – (3) либо из ЗЛВ (1) + (2). После этого в выражении (5) для Δc_x останутся только слагаемые, пропорциональные Δx_{f° , Δy_{f° и δx в интеграле по if° , а при наличии торца – ещё в интеграле по ff° . Поскольку площадь F при варьировании не должна изменяться, то перечисленные приращения и вариации зависимы. Их независимость достигается введением при $0 < x < 1$ **компенсирующей точки** c . В ней за счёт произвола в выборе λ обратим в ноль коэффициент A^x :

$$-A^x \equiv \lambda + \mu' = 0. \quad (7)$$

Согласно уравнению (6) входящая в это равенство производная $\mu' \equiv d\mu/dy = -(p_\theta \sin^2 \theta)'$.

Выполнение равенства (7) в точке c позволяет при варьировании образующей $if^\circ f$ за счёт одновременного варьирования x в малой окрестности точки c сохранять постоянной величину F . В силу условия (7) варьирование x в окрестности точки c вносит в приращение Δc_x вклад более высокого порядка, чем Δx_{f° , Δy_{f° и δx в других точках if° или ff° . В результате эти вариации и приращения можно считать независимыми. Следовательно, если участок if° , где δx произвольны, реализует минимум c_x , то условие (7) должно выполняться всюду на этом участке.

Для оптимального профиля с задним торцом Δy_{f° произвольны, а при его отсутствии $\Delta y_{f^\circ} \geq 0$. В обоих случаях $\Delta x_{f^\circ} \leq 0$. При допустимом варьировании оптимального контура $\Delta c_x \geq 0$, и условия оптимальности, которые должны выполняться в совпадающих или несовпадающих точках f° и f , сводятся к неравенствам

$$Y^{f^\circ} \equiv (p - p^+ - \mu \operatorname{ctg} \theta)_{f^\circ} \geq 0, \quad X^{f^\circ} \equiv \mu_{f^\circ} \geq 0,$$

а после исключения множителя μ с помощью равенства (6) к

$$(p - p^+ + p_\theta \sin \theta \cos \theta)_{f^\circ} \geq 0, \quad (p_\theta \sin^2 \theta)_{f^\circ} \geq 0. \quad (8), (9)$$

Входящие сюда величины (исключение $-p^+$) – предельные значения при подходе к точке f° слева.

Нарушение неравенства (8) в точке $f^\circ \equiv f$ тела без заднего торца указывает на необходимость его введения. Во всех описанных выше ЗЛВ $p_\theta > 0$, т.е. неравенство (9) выполняется, указывая на увеличение c_x оптимального контура с уменьшением абсциссы точки f° или f . Для профилей с задним торцом это – одно из условий того, что он – УКЭ, где допустимые $\delta x \leq 0$. Поэтому ещё одно условие того, что задний торец – УКЭ, сводится к неравенству

$$A^+ \equiv -\lambda \geq 0. \quad (10)$$

Исключив множитель $\mu(y)$ из уравнений (6) и (7), придём к уравнению

$$(p_\theta \sin^2 \theta)' = \lambda \quad (11)$$

и к его первому интегралу

$$p_\theta \sin^2 \theta = C + \lambda y$$

с постоянной интегрирования C . Поскольку $\theta = \operatorname{arccctg} x'$, то для всех ЗЛВ это – нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка. Подобно Гл. 4.1 его решение представим в параметрической форме с θ в качестве параметра. Имеем $\lambda y = p_\theta \sin^2 \theta - C$, $\lambda x' = \lambda \operatorname{ctg} \theta$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \lambda x &= \int_{\theta_i}^{\theta} \operatorname{ctg} \theta \frac{d\lambda y}{d\theta} d\theta = (p_\theta \sin^2 \theta - C) \operatorname{ctg} \theta \Big|_{\theta_i}^{\theta} + \int_{\theta_i}^{\theta} \left(p_\theta - \frac{C}{\sin^2 \theta} \right) d\theta = \\ &= (p_\theta \sin^2 \theta - C) \operatorname{ctg} \theta \Big|_{\theta_i}^{\theta} + (p + C \operatorname{ctg} \theta) \Big|_{\theta_i}^{\theta} = (p + p_\theta \sin \theta \cos \theta) \Big|_{\theta_i}^{\theta}. \end{aligned}$$

Так как $y_i = 0$, то искомое параметрическое представление оптимального контура if° принимает вид

$$\lambda x = (p + p_\theta \sin \theta \cos \theta)|_{\theta_i}^\theta, \quad \lambda y = p_\theta \sin^2 \theta|_{\theta_i}^\theta. \quad (12)$$

Отсюда для оптимального контура без заднего торца в точке $f \equiv f^\circ$

$$\lambda = (p + p_\theta \sin \theta \cos \theta)|_{\theta_i}^{\theta_f}, \quad 0 = p_\theta \sin^2 \theta|_{\theta_i}^{\theta_f}, \quad (13), (14)$$

причём для выполнения равенства (14) p_{θ_i} и p_{θ_f} должны быть одинаковых знаков.

В рамках простейшего ЗЛВ – формулы (3) линейной теории p_θ – константа, и из условия (14) следует, что

$$\theta_f = -\theta_i < 0, \quad (15)$$

поскольку оптимальный контур if лежит над осью x . Из равенств (3) и (15) и линеаризованных ($|\theta| \leq \theta_i \ll 1$) формул (13) и (12) сначала найдём λ , а затем x и y оптимального контура:

$$\lambda = \frac{-4\theta_i}{\sqrt{M_0^2 - 1}}, \quad x = \frac{\theta_i - \theta}{2\theta_i}, \quad y = \frac{\theta_i^2 - \theta^2}{4\theta_i}, \quad -\theta_i \leq \theta \leq \theta_i.$$

Подставив θ , выраженное через x , в формулу для y , получим, что

$$y = x(1-x)\theta_i, \quad (16)$$

т.е. оптимальный контур симметричен относительно $x = 0.5$.

С использованием формул (3), (4) и (16) найдём

$$\begin{aligned} F &= \int_i^f (1-x)dy = (1-x)y|_i^f + \int_0^1 ydx = \theta_i \int_0^1 x(1-x)dx = \frac{\theta_i}{6}, \quad c_x = \int_i^f pdy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \int_0^1 \theta \frac{dy}{dx} dx = \frac{\theta_i^2}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \int_0^1 (1-2x)^2 dx = \frac{\theta_i^2}{3\sqrt{M_0^2 - 1}} = \frac{12F^2}{\sqrt{M_0^2 - 1}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Чтобы профиль с острой задней кромкой был оптимален, в точке f должно выполняться неравенство (8). После линеаризации и учёта выражений (15) и (17) для θ_f и F оно принимает вид

$$p_0 - p^+ + \frac{2\theta_f}{\sqrt{M_0^2 - 1}} = p_0 - p^+ - \frac{2\theta_i}{\sqrt{M_0^2 - 1}} = p_0 - p^+ - \frac{12F}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \geq 0.$$

Данное условие нарушается, если

$$F > F_m = \frac{p_0 \sqrt{M_0^2 - 1}}{12} \left(1 - \frac{p^+}{p_0} \right) = \frac{\sqrt{M_0^2 - 1}}{12 \gamma M_0^2} \left(1 - \frac{p^+}{p_0} \right), \quad (18)$$

т.е. при $p^+ = p_0$ – для любых F . Второе выражение правой части этого неравенства записано для совершенного газа с учётом того, что p_0 отнесено к $\rho_0 V_0^2$. Даже при $p^+ = 0$ величина F_m невелика и быстро уменьшается с ростом M_0 : так, $F_m \approx 0.026$ и 0.0083 для $\gamma = 1.4$ и $M_0 = 2$ и 4 . В рамках линейной теории на возможность появления в оптимальном контуре симметричного профиля заднего торца указал Чепмен (D.R. Chapman, 1952).

Для оптимального контура с задним торцом в рамках разных ЗЛВ по-прежнему справедливы параметрические представления (12), где λ определена формулой (13) с f° вместо f . Теперь, однако, условие (14) – следствие равенства: $y_f = 0$ – заменяет записанное в точке f° равенство (8):

$$(p - p^+ + p_0 \sin \theta \cos \theta)_{f^\circ} = 0. \quad (19)$$

Это равенство служит для определения θ_{f° , а через него $-y_{f^\circ} > 0$.

В рамках линейной теории условие (19) после линеаризации даст

$$\theta_{f^\circ} = -\frac{p_0 - p^+}{2} \sqrt{M_0^2 - 1} = -6F_m \quad (14^\circ)$$

с площадью F_m , определённой формулой (18). Как следствие этого, выражение для λ , параметрическое и *прямое* представления участка if° оптимального контура (после подстановки λ , линеаризации и исключения θ) и формула для y_{f° примут вид

$$\lambda = -2 \frac{6F_m + \theta_i}{\sqrt{M_0^2 - 1}}, \quad x = \frac{\theta_i - \theta}{6F_m + \theta_i}, \quad y = \frac{\theta_i^2 - \theta^2}{2(6F_m + \theta_i)}, \quad (15^\circ)$$

$$\theta = \theta_i - (6F_m + \theta_i)x, \quad y = \theta_i x - \frac{6F_m + \theta_i}{2} x^2, \quad y_{f^\circ} = y(1) = \frac{\theta_i}{2} - 3F_m.$$

Подставив θ , y и y_{f° из (15 $^\circ$) в формулы (4) для F и c_x , получим

$$F = \int_0^1 y dx = \int_0^1 \left(\theta_i x - \frac{6F_m + \theta_i}{2} x^2 \right) dx = \frac{\theta_i}{3} - F_m \rightarrow \theta_i = 3(F + F_m),$$

$$c_x = \int_i^{f^0} p dy - p^+ y_{f^0} = \int_i^{f^0} (p - p_0) dy - (p^+ - p_0) y_{f^0} = \frac{1}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \int_0^1 \theta^2 dx - \\ - (p^+ - p_0) y_{f^0} = 3 \frac{F^2 + 3F_m^2}{\sqrt{M_0^2 - 1}} - 3(p^+ - p_0) \frac{F - F_m}{2} = 3 \frac{F^2 + 3F_m(2F - F_m)}{\sqrt{M_0^2 - 1}}.$$

В последнем переходе использовано определение F_m .

Итак, для оптимального контура с задним торцом в рамках линейной теории справедливы формулы

$$\lambda = -6 \frac{F + 3F_m}{\sqrt{M_0^2 - 1}}, \quad y = 3(F + F_m)x - 3 \frac{F + 3F_m}{2} x^2, \quad y_{f^0} = 3 \frac{F - F_m}{2}, \quad (16^0) \\ \theta_i = 3(F + F_m), \quad \theta_{f^0} = -6F_m, \quad c_x = 3 \frac{F^2 + 3F_m(2F - F_m)}{\sqrt{M_0^2 - 1}}.$$

Напомним, что $\lambda \leq 0$ – одно из условий того, что задний торец – УКЭ. Если $p^+ \leq p_0$, то $F_m \geq 0$, и оно выполняется. Как уже отмечалось, при $p^+ = p_0$, т.е. при нулевом донном сопротивлении, $F_m = 0$, оптимальный контур имеет задний торец при любой $F > 0$, в силу (14°) и (16°) $\theta_{f^0} = 0$, а c_x такого оптимального контура в соответствии с формулами (17) и (16°) вчетверо меньше c_x **псевдо-оптимального контура** с острой задней кромкой. Если для тех же тел при $p^+ = p_0$ рассчитать c_x по линеаризованной ФН (1), то получается в точности тот же результат, несмотря на разную роль подветренной части профиля в линейной теории и в рамках ФН. Она, не внося сопротивления по ФН, в линейной теории даёт $0.5c_x$.

В рамках ФН (1) $p \equiv p_0$ на всей подветренной части контура с задним торцом или без него. Поэтому в оптимальный контур нет смысла включать бесполезный участок с отрицательным, отличным от $-\pi/2$ углом наклона касательной, увеличивая за счёт этого наклон и сопротивление наветренной части тела. Таким образом, задний торец в приближении ФН неизбежен, а действующее на него давление $p^+ = p_0$. При этом равенство (8) принимает вид

$$\sin^2 \theta_{f^0} (1 + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta)_{f^0} = 0,$$

откуда следует, что $\theta_{f^0} = 0$. Отсюда аналогично интегралам (12) получим параметрическое представление участка if^0 оптимального контура:

$$x = 1 + \frac{(3+q^2)q^2}{\lambda(1+q^2)^2}, \quad y = y_{f^0} + \frac{2q^3}{\lambda(1+q^2)^2}, \quad q = \operatorname{tg}\theta, \quad q_i \geq q \geq 0. \quad (20)$$

Если равенства (20) записать в точке i , то первое даст λ , а второе (с найденным λ) – y_{f^0} через q_i :

$$\lambda = -(3+q_i^2)q_i^2/(1+q_i^2)^2, \quad y_{f^0} = 2q_i/(3+q_i^2).$$

В силу первого из них $\lambda \leq 0$ и, следовательно, выполняется условие (10), показывающее, что задний торец – УКЭ. Значение q_i подбирается так, чтобы найденная по формуле (4) площадь F была равна заданной величине. Для ФН, выполнив дифференцирование в уравнении (11), найдём, что

$$d\theta/dx = \lambda/[(3-q^2)\sin\theta\cos^3\theta].$$

Как и в Гл. 4.1, можно показать, что в рассматриваемой задаче оптимальный контур должен удовлетворять условию Крылова: $q \equiv$

$\equiv 1/x' \leq 1$. Поскольку $\lambda \leq 0$, то $d\theta/dx \leq 0$, т.е. оптимальный контур выпуклый, и F – монотонно возрастающая функция q_i . Если $F_1 = F(q_i = 1)$, то для $F > F_1$ у оптимального контура, как и в Гл. 4.1, появляется еще один УКЭ – передний торец.

Для нелинейного ЗЛВ (2), как и для его линейной версии (3), при малых F оптимальные контуры имеют острую заднюю кромку, однако угол её заострения $|\theta_f| > \theta_i$. Покажем это. ЗЛВ (2) – простая волна, в которой все параметры – функции p или θ , причём в силу формул (2.3.5) и (1.4.8): $da^{-2}/dp = 2/(\rho a^4) - \rho^2 \omega_{pp}$, а для совершенного газа $\rho^3 a^4 \omega_{pp} = \gamma + 1$. Согласно им и тому, что в рассматриваемом изэнтропическом и изоэнергетическом течении $d\rho/dp = a^{-2}$ и $dV/dp = -1/(\rho V)$, имеем

$$p_0 = \frac{\rho V^2}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad p_{00} = \left(\frac{d}{dp} \frac{\rho V^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \right) p_0,$$

$$\frac{d}{dp} \frac{\rho V^2}{\sqrt{M^2 - 1}} = \frac{\rho^3 a^4 \omega_{pp} M^4 - 4M^2 + 4}{2(M^2 - 1)^{3/2}} = \frac{(\gamma + 1)M^4 - 4M^2 + 4}{2(M^2 - 1)^{3/2}}.$$

Значит, $p_{\theta\theta} > 0$ при $M \geq 1$, а p_θ – положительная растущая функция θ . Но для всех ЗЛВ заострённые с обоих концов оптимальные контуры удовлетворяют условию (14): $p_{\theta_i} \sin^2 \theta_i = p_{\theta_f} \sin^2 \theta_f$. В силу чётности $\sin^2 \theta$ для растущей функции p_θ , $\theta_i > 0$ и $\theta_f < 0$ оно выполняется только при $|\theta_f| > \theta_i$.

Для тонких тел существенно сопротивление трения, соизмеримое или превышающее волновое и слабо зависящее от формы образующей. Поэтому для демонстрации роли профилирования приведём результаты, полученные для достаточно толстых профилей (А.Н. Крайко, Д.Е. Пудовиков, 1997 [45, 46], см. также [47]). Оптимальные контуры строились в рамках ФН и линейной теории, но их c_x рассчитывались численным интегрированием уравнений Эйлера с явным выделением головной ударной волны. Для тел с $F = (\text{tg}30^\circ)/6 = (6\sqrt{3})^{-1} \approx 0.096$, обтекаемых газом с $\gamma = 1.4$, результаты представлены в табл. 4.1 и на рис. 4.4. У симметричного относительно $x = 0.5$ тела, построенного для этого F по формуле (16), $\theta_i = -\theta_f = 30^\circ$, а полутолщина $\tau_0 \equiv y(0.5) = 0.144$.

Т а б л и ц а 4.1

Сравнение оптимальных и псевдооптимальных профилей

p^+/p_0	0			1		
M_0	3	6	12	3	6	12
$c_{xL} \times 10^4$	254 (202)	125 (74)	85 (30)	140 (98)	92 (47)	75 (23)
$c_{xN} \times 10^4$	-	-	-	140 (53)	90 (53)	71 (53)
$c_{xS} \times 10^4$	448 (393)	296 (188)	253 (93)	448 (393)	296 (188)	253 (93)
$\Delta c_{xS}(\%)$	76 (95)	137 (154)	198 (210)	220 (301)	222 (300)	237 (304)
$y_{fL} \times 10^3$	116	130	137	144	144	144
$y_{fN} \times 10^3$	-	-	-	159	159	159

В табл. 4.1 собраны c_{xL} , c_{xN} и $c_{xS} - c_x$ тел, оптимальных по линейной теории и ФН (для $p^+ = p_0$) и псевдооптимальных без заднего торца. Для всех c_x дано две величины: найденная интегриро-

ванием уравнений Эйлера (*точная*), а в скобках – определённая по ФН (для c_{xN}) и по линейной теории (для c_{xL} и c_{xS}). Кроме того, приведены $\Delta c_{xS} = (c_{xS}/c_{xL} - 1) \cdot 100$, характеризующие преимущества оптимальных контуров и значения их y_f° . Влияние p^+/p_0 падает с ростом M_0 , что естественно, ибо $p_0 = 1/(\gamma M_0^2)$ и с ростом M_0 вклад в c_x заднего торца при $p^+/p_0 = O(1)$ много меньше вклада наветренного участка.

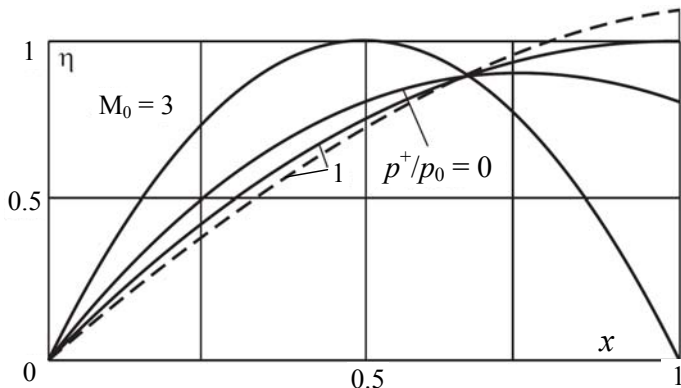


Рис. 4.4

Слабую зависимость от величины p^+/p_0 не только y_f° , но и всего оптимального контура демонстрирует рис. 4.4. На нём $\eta = y/\tau_0$, сплошными кривыми даны оптимальные и псевдооптимальные контуры, построенные в рамках линейной теории, а штрихами – по ФН. Табл. 4.1 и рис. 4.4 показывают, что несмотря на большие ошибки при определении c_x с помощью ЗЛВ, оптимальные контуры, построенные в рамках разных ЗЛВ, близки по форме и по точным значениям c_x . Последние много меньше, чем c_x псевдооптимальных контуров с острой задней кромкой.

Глава 4.3. Пространственные тела, оптимальные в приближении законов локального взаимодействия

Сокращения: ЗЛВ – закон локального взаимодействия, МХП – метод характеристических полосок, НП – наветренная поверх-

ность, УДЭ и УКЭ – участки двустороннего и краевого экстремума, ФН – формула Ньютона.

В рамках некоторого класса **законов локального взаимодействия (ЗЛВ)**, в которых кроме нормальной составляющей силы (давления) есть отличная от нуля касательная компонента (*трение*), рассмотрим задачу построения пространственных тел минимального полного сопротивления. Ограничившись сначала телами с заданным основанием S_b , покажем затем, что построенные решения можно использовать в задаче с заданными S_b и максимально допустимой длиной тела L . Используемые далее ЗЛВ, как и **формула Ньютона (ФН)** в Гл. 4.1, определяют силы, действующие только на **навстречную поверхность (НП)** тела (рис. 4.5).

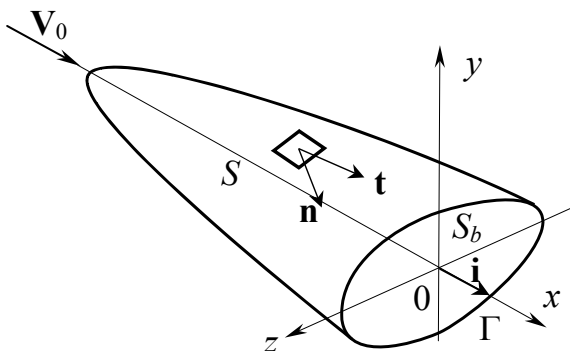


Рис. 4.5

Направим ось x декартовых координат x, y, z по скорости V_0 набегающего потока и совместим основание тела с плоскостью $x = 0$. Пусть $x = x(y, z)$ – уравнение НП, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{t}$ – орты внутренней нормали и касательной к НП, а $\mathbf{i}$ – орт оси x . Вектор $\mathbf{t}$ выбран так, что все они лежат в одной плоскости (*компланарны*). Для ЗЛВ, в которых сила трения направлена по вектору $\mathbf{t}$, получим, что

$$\mathbf{D} = \iint_S \{ [p_0 + qc_p(\alpha)]\mathbf{n} + qc_f(\alpha)\mathbf{t} \} dS, \\ \alpha = \alpha(y, z) \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = \frac{1}{\sqrt{1 + x_z^2 + x_y^2}}, \quad \mathbf{t} \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{i}] = 0, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{i} = \sqrt{1 - \alpha^2}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{D}$ – сила действующая на НП, S – площадь НП, $q = \rho_0 V_0^2$, а коэффициенты давления и трения $c_p(\alpha)$ и $c_f(\alpha)$ – известные положительно определённые функции α , параметров набегающего потока и констант ЗЛВ.

Если оптимальная НП не содержит параллельных $\mathbf{V}_0$ цилиндрических участков, что при задании только основания S_b достаточно очевидно, то $dS = dS_b/\alpha$, и коэффициент сопротивления НП c_D согласно формуле (1) равен

$$c_D = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{i} - S_b p_0}{q S_b} = \frac{1}{S_b} \iint_{S_b} F(\alpha) dS_b, \quad F(\alpha) = c_p(\alpha) + \frac{c_f(\alpha)}{\alpha} \sqrt{1 - \alpha^2}. \quad (2)$$

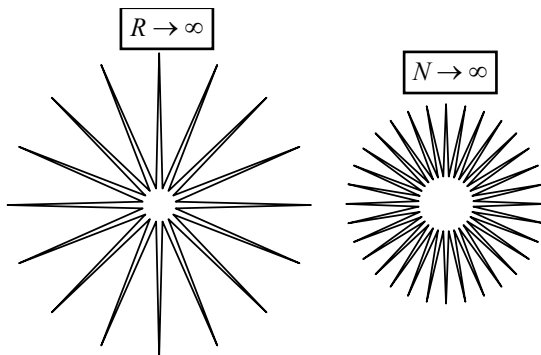


Рис. 4.6

Для ФН без трения, когда $c_p(\alpha) = \alpha^2$, а $c_f(\alpha) = 0$, задание только основания S_b недостаточно для корректной постановки задачи построения тела минимального сопротивления (для ФН – волнового). Действительно, здесь, как и в Гл. 4.1, $c_D = c_x \rightarrow 0$ с ростом длины тела L . Для пространственных тел при задании и L , и площади основания S_b задача по-прежнему некорректна. Теперь c_x

можно сделать сколь угодно малым, устремив к бесконечности внешний радиус R , а к нулю внутренний радиус r или при фиксированных R и r число N продольных рёбер *пространственного ежа* (рис. 4.6), для которого в отличие от выемок на рис. 4.1, в ФН применима. Даже, если задать L , R и S_b , то $c_x \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Именно поэтому в первых работах по построению оптимальных пространственных тел в рамках ФН без трения (А.Л. Гонор, Г.Г. Чёрный, начало 1960-х гг., см. [42]) фиксировались L , r и N .

В рамках принятого ЗЛВ на НП

$$0 \leq \alpha \leq 1. \quad (3)$$

При некотором $\alpha = \alpha_m$ из этого конечного интервала функция $F(\alpha)$ минимальна. Значит, в силу формулы (2) минимально возможное значение коэффициента сопротивления $c_{Dm} = F(\alpha_m)$ имеют тела, в каждой точке которых

$$\alpha = \alpha_m, \quad (4)$$

а для любого иного тела с тем же основанием $c_D > c_{Dm}$.

Согласно определению α из (1) равенство (4) приводит к нелинейному уравнению в частных производных первого порядка:

$$x_y^2 + x_z^2 = C^2 \equiv \alpha_m^{-2} - 1 \geq 0. \quad (5)$$

Оно решается *методом характеристических полосок (МХП)*, который состоит в следующем. Введя обозначения $q = x_y$ и $r = x_z$, продифференцируем уравнение (5), переписанное в форме

$$q^2 + r^2 = C^2, \quad (5^\circ)$$

по y и z . С учетом того, что $q_z = r_y$, это даст два уравнения:

$$qq_y + rq_z = 0, \quad qr_y + rr_z = 0,$$

из которых следует, что q и r постоянны вдоль *характеристических полосок*: $qdz = rdy$ – отрезков прямых в плоскости yz . Но $dx = x_y dy + x_z dz \equiv qdy + rdz$ и с учетом уравнения (5 $^\circ$) вдоль них

$$dx = (C^2/q)dy = (C^2/r)dz,$$

и на характеристических полосках x – линейная функция y или z .

НП пересекает плоскость yz по границе Γ_b основания S_b , заданной уравнением $\Gamma(y, z) = 0$. Следовательно, на Γ_b : $x(y, z) = 0$. Продифференцировав эти уравнения и исключив дифференциалы dy и dz , получим: $q/\Gamma_y = r/\Gamma_z$, а отсюда и из уравнения (5 $^\circ$) найдём

$$r = \pm C\Gamma_z / \sqrt{\Gamma_y^2 + \Gamma_z^2}, \quad q = \pm C\Gamma_y / \sqrt{\Gamma_y^2 + \Gamma_z^2}.$$

Из пары значений q и r берутся те, которые формируют НП, обращенную навстречу потоку. Если основание – круг, то МХП даёт круговой конус с полууглом при вершине

$$\theta_m = \arcsin(\alpha_m). \quad (6)$$

Первыми равенство (4) установили А. Миеле и Д. Халл (1965 [42]), которые при построении **пространственной оптимальной НП** в дополнение к S_b задавали площадь НП S . Согласно их результату, полученному МХП, $\alpha_m = S_b/S$, т.е. не зависит от вида ЗЛВ. Как показано ниже, этот результат при правильности равенства (4) неверен: при круговом основании конус с $\alpha_m = S_b/S$ – не единственная и не всегда оптимальная пространственная НП.

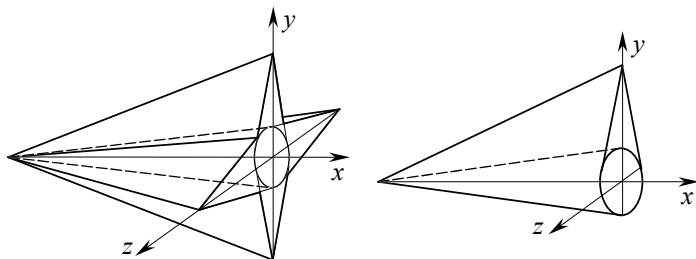


Рис. 4.7

Простейшие поверхности, нормаль к которым такова, что $\alpha = \alpha_m$, – это круговые конусы с полууглом при вершине θ_m и касающиеся их плоскости. Такие конусы и плоскости назовём **оптимальными**. Угол θ_m определяется формулой (6), в которой α_m доставляет минимум функции $F(\alpha)$ в выражении (2) для коэффициента сопротивления C_D . Используя оптимальные конусы и плоскости, можно исключительно просто конструировать широкий круг конических и неконических пространственных оптимальных НП (Г.Е. Якунина, 2000 [47-49]). Так, конические оптимальные НП строятся из оптимального конуса и не менее двух оптимальных плоскостей (рис. 4.7).

Идею построения пространственных оптимальных НП с круговым основанием поясняет рис. 4.8, *а*. На нём в плоскости $x = 0$ нарисованы окружности – основания трёх оптимальных конусов и прямые – линии пересечения плоскости $x = 0$ с восьмью оптимальными плоскостями, которые касаются меньшего конуса по симметрично расположенным образующим. Попарно эти плоскости формируют одинаковые оптимальные клинья с равным $2\theta_m$ углом при вершине. Угол между плоскостями симметрии четырёх «сплошных» клиньев (им отвечают сплошные прямые) равен $\pi/2$. Радиус и длина *внешнего* оптимального конуса с основанием, ограниченным сплошной окружностью, которая проходит через четыре точки пересечения сплошных прямых, в $\sqrt{2} \approx 1.41$ раз больше радиуса и длины меньшего (*внутреннего*) оптимального конуса. **Оптимальное тело** получается после удаления внешним оптимальным конусом четырех полубесконечных частей клиньев. Результирующая пространственная оптимальная НП – **наконечник крестообразной отвертки** при таких же, как у внешнего оптимального конуса, площади основания, S_D и площади НП S , имеет в $\sqrt{2}$ раз меньшую длину.

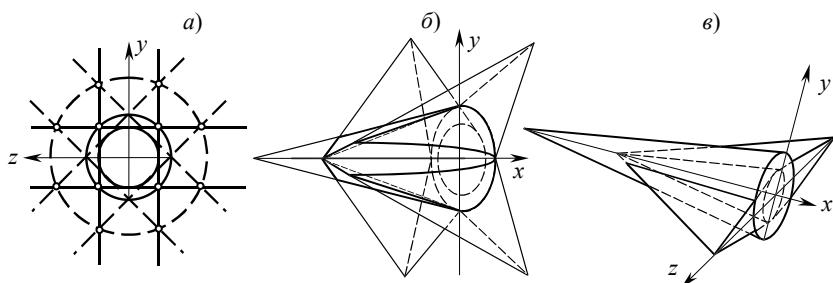


Рис. 4.8

Радиус штриховой окружности, проведённой через восемь точек пересечения и сплошных, и штриховых прямых, примерно в 2.61 раза больше радиуса внутреннего конуса. Во столько же раз меньшей (при одинаковых основаниях) оказывается длина пространственной головной части, которая получается после уда-

ления «штриховым» оптимальным конусом полубесконечных частей всех клиньев.

Описанное построение можно выполнить, срезая внешним оптимальным конусом *лишнюю часть* любых звездообразных оптимальных конических тел с N одинаковыми лепестками. Пример такого построения приведен на рис. 4.8, б. На нём для $N = 4$ удаляемые видимые части конического звездообразного оптимального тела и не входящая в пространственную оптимальную НП передняя часть *срезающего* оптимального конуса даны тонкими, а неконическое оптимальное тело – жирными линиями. При фиксированном N сокращение длины и ориентация передних кромок оптимального тела зависят от длины срезаемых лепестков. Как и в случае рис. 4.8, а, минимальная длина и нормальные оси x передние кромки получаются для бесконечно длинных лепестков. При этом для $N \geq 2$ отношение длины пространственного оптимального тела к длине оптимального конуса с тем же круговым основанием равно $\sin(\pi/N)$, позволяя за счёт увеличения N удовлетворить любому ограничению на длину оптимального тела с круговым основанием. При $N = 2$ внешний и внутренний оптимальные конусы совпадают, и оптимальное тело остаётся круговым конусом, а при $N = 4$ и 8 уменьшения длин указаны выше. Способ построения более простой самолётоподобной оптимальной конфигурации (рис. 4.8, в) достаточно очевиден.

Причина того, что при круговом основании с помощью МХП получается только оптимальный конус, объясняется следующим. В рамках МХП изломы искомой поверхности возможны либо при наличии изломов на границе основания, либо из-за пересечений полосок, идущих из разных точек гладкой границы. Так, полоски, получающиеся при круговом основании для уравнения (4), тоже пересекаются, но пересекаются в вершине оптимального конуса, где заканчивается искомая оптимальная НП. Расположенные за изломами пространственные вырезы *отвертки* на рис. 4.8, б – ***рукотворные создания***, не связанные с условиями на границе основания. Их МХП предсказать не мог.

Пока в данном параграфе удавалось обходиться без аппарата вариационного исчисления. В задаче построения пространственных оптимальных НП с заданными S_b и S без него обойтись не

удастся. Начнём с того, что при такой постановке следует предусмотреть торцы и цилиндрические УКЭ, которые могут появиться из-за ограничений (3) на α . Если S_1 и S_0 – их площади (отнесённые к S_b), то для ФН с постоянным коэффициентом трения

$$c_D = \iint_{S_b \setminus S_1} F dS_b + c_f S_0 + S_1, \quad S = \iint_{S_b \setminus S_1} \frac{dS_b}{\alpha} + S_0 + S_1, \quad F = \alpha^2 + \frac{c_f}{\alpha} \sqrt{1 - \alpha^2}, \quad (7)$$

где $S \geq S_b = 1$, $0 \leq S_0 < S$, $0 \leq S_1 \leq 1$, а $S_b \setminus S_1$ означает интегрирование по основанию без проекций на него торцевых участков.

Для получения необходимых условий минимума c_D при заданной площади S составим функционал: $J = c_D + \lambda S$ с неопределённым постоянным множителем λ . Так как S фиксировано, то условия минимума c_D и J совпадают, и

$$\begin{aligned} \Delta c_D = \Delta J &= \iint_{S_b \setminus S_1} \delta I dS_b + \oint_{\Gamma_1} (1 + \lambda - I) \delta n^1 d\Gamma_1 + (c_f + \lambda) \Delta S_0 = \\ &= \iint_{S_b \setminus S_1} \frac{\delta}{\alpha} \delta \alpha + \frac{I_{\alpha\alpha}}{2} (\delta \alpha)^2 + \dots + \iint_{S_b \setminus S_1} \delta S_b + \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

$$I = I(\alpha, \lambda) = F(\alpha) + \frac{\lambda}{\alpha} = \alpha^2 + \frac{c_f}{\alpha} \sqrt{1 - \alpha^2} + \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Здесь контурный интеграл берётся в плоскости $x = \text{const}$ по границе Γ_1 , отделяющей торец (при $S_1 > 0$) от наклонной части НП – УДЭ, δn^1 – смещение Γ_1 по внешней нормали к себе (в той же плоскости), I на Γ_1 – значение со стороны УДЭ.

Получение необходимых условий минимума начнём со случая отсутствия УКЭ ($S_1 = S_0 = 0$). В некоторой компенсирующей точке c поверхности S за счёт выбора множителя λ положим

$$(I_\alpha)_c \equiv (F_\alpha - \lambda \alpha^{-2})_c = 0 \quad (9)$$

и одновременно с варьированием α в произвольной точке НП за счёт изменения α в окрестности точки c сохраним S , причём при неизменной S_b . Благодаря этому все вариации и приращения в (8) можно считать независимыми.

На УДЭ вариации $\delta \alpha$ произвольны. Поэтому определяющее оптимальную НП необходимое условие минимума c_D , в первую очередь, сводится к равенству (9), которое должно выполняться

не только в точке c , но и на всей оптимальной НП. Значит, на оптимальной НП α константа, а согласно равенствам (7) для S и c_D при $S_0 = S_1 = 0$ и уравнению (9):

$$\alpha = \alpha_m \equiv 1/S = S_b/S \leq 1, \quad \lambda = \alpha_m^2 F_{\alpha_m}(\alpha_m), \quad c_{Dm} = F(1/S). \quad (10)$$

После этого выражение (8) для Δc_D примет вид

$$\Delta c_D = \frac{1}{2} \iint_{S_b \setminus S_1} I_{\alpha\alpha}(\delta\alpha)^2 dS_b + (1 + \lambda - I)\Delta S_1 + (c_f + \lambda)\Delta S_0.$$

Отсюда получается *условие Лежандра*:

$$\Phi_L(\alpha_m, c_f) \equiv I_{\alpha\alpha}|_{\alpha=\alpha_m} = 6 - \frac{c_f}{\alpha_m(1-\alpha_m^2)^{3/2}} = 6 - \frac{c_f S^4}{(S^2-1)^{3/2}} \geq 0, \quad (11)$$

но не только. Если оптимальная НП не содержит УКЭ ($S_0 = S_1 = 0$), то их введение ($\Delta S_0 > 0$, $\Delta S_1 > 0$) не должно уменьшать c_D . Следовательно, такие оптимальные НП должны удовлетворять еще двум необходимым условиям минимума c_D . После исключения λ они принимают вид

$$\begin{aligned} \Phi_0(\alpha_m, c_f) &\equiv 2\alpha_m^3 - c_f \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha_m^2}}{\sqrt{1 - \alpha_m^2}} = \frac{2}{S^3} - c_f \frac{S - \sqrt{S^2 - 1}}{\sqrt{S^2 - 1}} \geq 0, \\ \Phi_1(\alpha_m, c_f) &\equiv 1 + \alpha_m - 2\alpha_m^2 - \frac{c_f}{\sqrt{1 - \alpha_m^2}} = \frac{S^2 + S - 2}{S^2} - \frac{c_f S}{\sqrt{S^2 - 1}} \geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Вторые выражения – результат замены α_m на $1/S$ согласно (10).

Функции Φ_0 , Φ_1 и Φ_L при $c_f > 0$ знакопеременные и для любого $0 \leq \alpha_m \leq 1$ при превышении некоторой величины c_f – отрицательные. На рис. 4.9, а в плоскости $\alpha_m = 1/S$, c_f кривые 0, 1 и L отвечают обращению функций Φ_0 , Φ_1 и Φ_L в нуль. Под ними соответствующие условия выполняются, а над ними не выполняются. При всех α_m кривая L лежит выше одной из кривых 0 или 1, т.е. условия (12) сильнее условия Лежандра (11).

При нарушении хотя бы одного из условий (12) у оптимальных НП кроме УДЭ, где по-прежнему справедливо второе равенство (10), появляются УКЭ одного или обоих типов, т.е. в общем случае: $S_1 \geq 0$ и $S_0 \geq 0$. При этом по-прежнему $\alpha = \alpha_m$, однако теперь вместо первой формулы (10) для α_m справедлива связь:

$$S = (1 - S_1)/\alpha_m + S_1 + S_0.$$

При $S_1 > 0$ и $S_0 > 0$ приращения ΔS_1 и ΔS_0 произвольны, и из выражения (8) для Δc_D в качестве необходимых условий минимума c_D вместо неравенств (12) получаются равенства

$$c_f + \lambda = 0, \quad (13)$$

$$1 - \alpha_m^2 - \frac{c_f}{\alpha_m} \sqrt{1 - \alpha_m^2} - \frac{1 - \alpha_m}{\alpha_m} \lambda = 0. \quad (14)$$

При $S_0 > 0$ и $S_1 = 0$, то выполняются уравнение (13) и второе неравенство (12), а при $S_0 = 0$ и $S_1 > 0$ – уравнение (14) и первое неравенство (12). Опуская дальнейшие детали, приведём результаты выполненного анализа (А.Н. Крайко, Г.Е. Якунина, 2008 [50]).

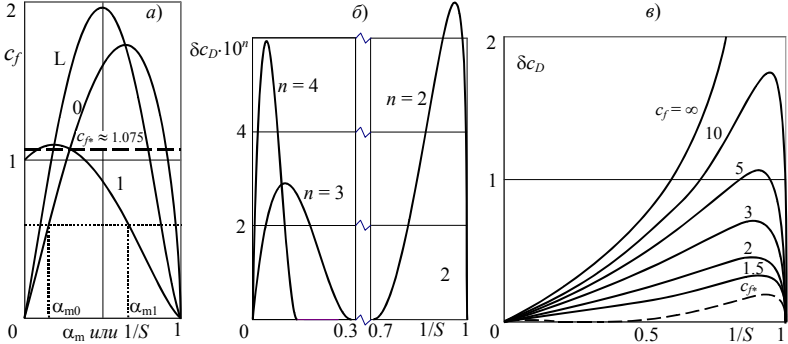


Рис. 4.9

Согласно полученным выше условиям форма оптимальной НП зависит не только от величины S , но и от ЗЛВ. На рис. 4.9, a пунктирная горизонталь $c_f = \text{const} < c_{f*} \approx 1.0752$ почти целиком лежит под кривыми 0 или 1 ($\alpha_{m*} \approx 0.2866$, $c_{f*} \approx 1.0752$ в точке их пересечения), ограничивающими сверху область, в которой удовлетворяются неравенства (12) – необходимые условия минимума c_D . Пусть $\alpha_{m0} = \alpha_m(c_f)$ на возрастающем участке кривой 0, $\alpha_{m1} = \alpha_m(c_f)$ на убывающем участке кривой 1, а заданная величина S и коэффициент трения $c_f < c_{f*}$ таковы, что $\alpha_{m0} \leq 1/S \leq \alpha_{m1}$. В таких случаях оптимальное $\alpha_m = 1/S$, и при круговом основании

одна из оптимальных НП – поверхность кругового конуса. Полуугол при его вершине $\theta = \arcsin(1/S)$. Наряду с конической можно построить бесконечно много оптимальных пространственных НП, которые при таких S , опираясь на круговое основание, имеют одинаковые $c_{Dm} = F(1/S)$. Одна из них изображена на рис. 4.8, б. На НП любого оптимального тела $\alpha = \alpha_m = 1/S$. В силу формул (7), записанных для $S_1 = S_0 = 0$, это обеспечивает одинаковые у всех оптимальных тел значения c_D и S .

Пусть теперь $c_f \leq c_{f*} \approx 1.0752$, а $\alpha_{ml} < 1/S \leq 1$. В таких случаях оптимальная НП состоит из торца и УДЭ, на котором для всех S из указанного диапазона $\alpha_m = \alpha_{ml}(c_f)$, т.е. постоянно. При круговом основании одна из оптимальных НП – поверхность усеченного кругового конуса. Три таких усеченных конуса изображены на рис. 4.10, а. При $S \rightarrow 1$ высота усеченного конуса стремится к нулю. Напротив, с ростом S при достижении ею величины $S = 1/\alpha_{ml}(c_f)$ конус становится острым. Полуугол при вершине усеченного конуса $\theta = \arcsin \alpha_{ml}(c_f) \leq \arcsin(1/S)$, и равенство имеет место в предельном случае $S = 1/\alpha_{ml}(c_f)$. Поверхность усеченного конуса (рис. 4.10, а) можно разбить на несколько, например, на две поверхности, как показано на рис. 4.10, б. Наконец, конические поверхности можно заменить пространственными. При круговом основании такие пространственные оптимальные НП можно получить удалением плоскостью $x = \text{const}$ носовой части оптимального тела, изображённого на рис. 4.8, б. Отличие от предыдущего случая в том, что пространственная оптимальная НП строится не для $\alpha_m = 1/S$, а для $\alpha_m = \alpha_{ml}(c_f)$.

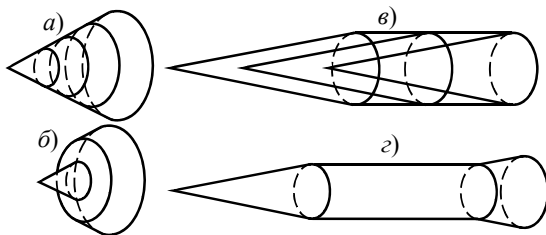


Рис. 4.10

Пусть теперь $c_f \leq c_{f*} \approx 1.0752$, но $0 \leq 1/S < \alpha_{m0}$. При этом оптимальная НП состоит из цилиндрического участка и УДЭ. На УДЭ для всех S из указанного диапазона $\alpha_m = \alpha_{m0}(c_f)$, т.е. опять постоянная, но меньшая величина. При круговом основании одна из оптимальных НП – поверхность кругового цилиндра с конусом, полуугол при вершине которого $\theta = \arcsin \alpha_{m0}(c_f) \geq \arcsin(1/S)$. Равенство имеет место при $S = 1/\alpha_{m0}(c_f)$. Две таких НП вместе с *предельным* конусом изображены на рис. 4.10, в. Цилиндрические и конические участки можно комбинировать произвольным образом при сохранении величин S и S_0 , а на конических участках $\alpha_m = \alpha_{m0}(c_f)$. Одна из получающихся при этом оптимальных конфигураций изображена на рис. 4.10, г. Любой конус на рис. 4.10, в и г можно заменить пространственной оптимальной НП, построенной для $\alpha_m = \alpha_{m0}(c_f)$.

Расчёты, выполненные для $c_f \leq c_{f*}$, подтвердили превосходство ПН с торцевыми (при $\alpha_{m1} < 1/S < 1$) и цилиндрическими (при $0 \leq 1/S < \alpha_{m0}$) УКЭ, хотя для $c_f \ll 1$ оно незначительно. С увеличением c_f уменьшение сопротивления становится более заметным, прежде всего для тел с торцами. На рис. 4.9, б кривые $n = 4$ и $n = 2$ рассчитаны для коэффициента трения $c_f = 0.5$, замечательного тем, что $\alpha_{m1}(0.5) = 1/\sqrt{2} \approx 0.7071$, а $c_{Dm} \equiv 1$ для всех $1/\sqrt{2} \leq$

$\leq 1/S \leq 1$. Для $c_f = 0.5$ при $0 \leq 1/S < \alpha_{m0}(0.5) \approx 0.1265$ оптимальные НП имеют цилиндрические УКЭ. На рис. 4.9, б и в приведены величины $\delta c_D = c_D/c_{Dm} - 1$, где $c_D = F(1/S)$ – сопротивление острого конуса. Кривая $n = 3$ дает зависимость δc_D от $1/S$ для $c_f = c_{f*} \approx$

≈ 1.0752 . Хотя в этом случае δc_D примерно в 5 раз больше, чем для $c_f = 0.5$, уменьшение сопротивления при переходе к комбинации конуса и цилиндра составляет десятые доли процента. Для больших $1/S$ переход к затупленным конусам уменьшает сопротивление заметно больше: до 5% при $c_f = 0.5$ (кривая $n = 2$ на рис. 4.9, б) и до 19% при $c_f = c_{f*}$ (штриховая кривая на рис. 4.9, в).

Согласно рис. 4.9, а для $c_f > c_{f*} \approx 1.0752$ и $0 \leq 1/S \leq 1$ нарушается хотя бы одно из необходимых условий (12). Это значит, что

при таких c_f оптимальная НП не может иметь УДЭ. Единственная остающаяся возможность – затупленный по торцу цилиндр, т.е. поверхность, образованная УКЭ двух допускаемых условиями (3) типов. Переход от построенных выше оптимальных НП с УДЭ происходит естественным образом, ибо при $c_f = c_{f*}$ их сопротивление равно сопротивлению затупленных цилиндров с теми же $0 \leq 1/S \leq 1$. Для $c_f > c_{f*} \approx 1.0752$ с ростом коэффициента трения преимущество оптимальных затупленных по торцу цилиндров над острыми конусами быстро растёт (рис. 4.9, в).

Глава 4.4. Метод неопределённого контрольного контура в рамках уравнений Эйлера

Сокращения: КК – контрольный контур, МКК – метод контрольного контура, МНКК – метод неопределённого контрольного контура, МХ – метод характеристик, ЗХ – замыкающая характеристика пучка волн разрежения, УКЭ – участок краевого экстремума, ЭХ – экстремальная характеристика.

В Гл. 4.1–4.3 оптимальные аэродинамические формы строились в рамках приближённых законов локального взаимодействия. В данном параграфе оптимальное профилирование выполнено в точной постановке с использованием *уравнений Эйлера*, описывающих плоские и осесимметричные течения идеального газа. В таком приближении будет спроектировано *сопло Лавалья*, реализующее максимум тяги, и построена осесимметричная *головная часть* минимального *волнового сопротивления*. В обеих задачах искомые контуры удовлетворяют дополнительным габаритным ограничениям. Для применяемого здесь метода отсутствие ограничений типа задания объёма или омываемой поверхности принципиально. Дело в том, что и объём, и омываемая поверхность не выражаются через интегралы по *контрольному контуру* (КК), сводящему двумерную задачу с уравнениями в частных производных к одномерной задаче вариационного исчисления.

Первым *метод контрольного контура* (МКК) применил А.А. Никольский (1950). В линейном приближении он построил

осесимметричную кормовую часть тела с протоком, реализующую при сверхзвуковом обтекании минимум волнового сопротивления. При этом КК состоял из отрезков линейризованных C^+ - и C^- -характеристик. **Характеристический КК** в рамках полных уравнений Эйлера первыми применили К. Гудерлей и Э. Хантш (1955). При профилировании сверхзвуковой части сопла Лавалья они свели определение **экстремальной характеристики (ЭХ)** к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ю.Д. Шмыглевский (1957) нашёл её точное решение, что существенно упростило построение оптимальных сопел, а Л.Е. Стернин (1957) распространил это решение на произвольный двухпараметрический газ. Более простой способ, которым к тем же результатам пришёл G.V.R. Rao (1958), сначала воспринимался как ошибочный. Позднее, однако, он получил необходимое обоснование (А.Н. Крайко, 1979 [51]) и как **метод неопределённого КК (МНКК)** существенно упростил построение ЭХ в ряде вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики.

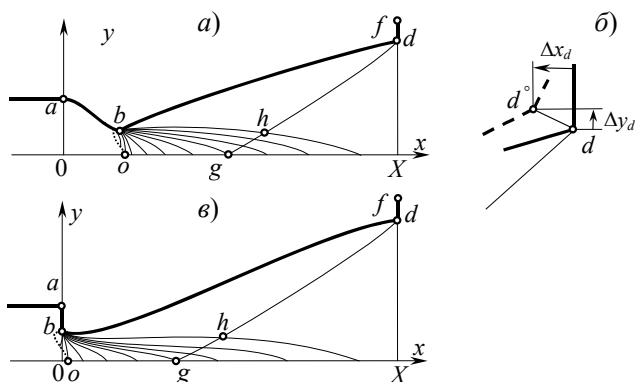


Рис. 4.11

Поясним идею МНКК на примере задачи оптимального профилирования **расширяющейся части** плоского ($v = 1$) или осесимметричного ($v = 2$) сопла Лавалья (рис. 4.11, а). Его **сужающаяся часть** ab , определяющая до- и трансзвуковое течение до

C^+ -характеристики bo , которая приходит на ось x в ту же точку o , что и *звуковая линия*, задана. На рис. 4.11 звуковые линии даны пунктиром. Кроме того, заданы давление p^+ в окружающем пространстве (например, $p^+ = 0$ при полёте в пустоте), длина расширяющейся части сопла или, что то же, при заданной сужающейся части – его полная длина X , а также максимально допустимая ордината Y его концевой точки f . Ограничимся однородным по H и s и незакрученным (при $v = 2$) потоком на входе в сопло. Требуется построить контур bf расширяющейся части, который при сформулированных условиях реализует максимум тяги сопла.

При отсутствии ограничений на кривизну контура стыковка заданной сужающейся части и искомой расширяющейся части в общем случае будет негладкой. Получающийся излом обтекается с образованием *пучка волн разрежения* из C^- -характеристик, выходящих из точки b . Из-за ограничения на длину искомый контур может содержать концевой *участок краевого экстремума* (УКЭ) – торец df , на котором $x \equiv X$. Примем, что торец сверхзвуковым потоком не обтекается, а действующее на него давление $p = p^+$ не зависит от формы искомого контура.

Тяга сопла равна сумме потока x -компоненты количества движения на входе в расширяющуюся часть I_* и интегралов сил давления, действующих на обтекаемый сверхзвуковым потоком участок контура bd и на торец df . При малых варьированиях искомого контура bdf течение в пучке волн разрежения, а вместе с ним и I_* не изменяются, а вариации p на bd связаны с изменениями формы этого участка условиями непротекания на нём и уравнениями Эйлера. Любой вариант МКК позволяет не привлекать уравнения Эйлера. В рамках МНКК это делается наиболее просто. Тягу χ представим как сумму потока x -компоненты количества движения через пока неопределённый контур gd и силу, действующую на возможный торец. Через интеграл по gd представим также фиксированный (определяемый формой сужающейся части) протекающий через сопло расход газа G . Если $x = x(y)$ – уравнение кривой gd , а $x' = dx/dy$, то с точностью до несущественных при решении вариационной задачи постоянных слагаемого и положительных множителей имеем

$$\chi = \int_{y_g=0}^{y_d} y^{v-1} [p + \rho u(u - vx')] dy - \frac{y_d^v}{v} p^+, \quad G = \int_{y_g=0}^{y_d} y^{v-1} \rho(u - vx') dy.$$

Для получения необходимых условий максимума χ составим функционал $J = \chi + \lambda G$ с неопределённым постоянным множителем Лагранжа λ . При любых допустимых варьированиях, сохраняющих расход, приращения χ и J совпадают. Вычисляя их, учтём, что вариации параметров на отрезке gh равны нулю, а на проходящей через точку h замыкающей C^- -характеристике (3X) пучка волн разрежения параметры непрерывны. Поэтому изменение ординаты y_h точки пересечения 3X с кривой gd не вносит вклада в линейную часть приращения $\Delta\chi = \Delta J$. Для изэнтропического и изоэнергетического течения $\delta\rho = a^{-2}\delta p$, а $\delta p = -\rho(u\delta u + v\delta v)$. Ещё не определённая кривая gd , а следовательно, x и x' вдоль неё не варьировуются. Поэтому при варьировании координат точки d нужно учесть потоки массы и x -компоненты количества движения через отрезок dd° (рис. 4.11, б, d° – проварьированная точка d). Эти потоки вычисляются по предельным непроварьированным параметрам потока слева от точки d . Выкладки, проведённые с учётом отмеченных обстоятельств, дают

$$\begin{aligned} \Delta\chi = \Delta J = & \int_{y_h}^{y_d} y^{v-1} \rho(A^u \delta u + A^v \delta v) dy + \\ & + y_d^{v-1} [p - p^+ + \rho(u + \lambda)u]_d \Delta y_d - y_d^{v-1} [\rho(u + \lambda)v]_d \Delta x_d, \end{aligned} \quad (1)$$

$$A^u = \frac{a^2 - u^2 + uvx'}{a^2} (u + \lambda) - vx', \quad A^v = \frac{(v^2 - a^2)x' - uv}{a^2} (u + \lambda) - v.$$

За счёт выбора кривой hd обратим в ноль коэффициент A^v , что приведёт к дифференциальному уравнению для её определения

$$x' = \frac{a^2 + u(u + \lambda)}{(u + \lambda)(v^2 - a^2)} v. \quad (2)$$

Вариации, оставшиеся после этого в выражении (1), не являются независимыми, так как при варьировании необходимо удовлетворять условию сохранения расхода, который определяется течением в сужающейся части и не изменяется при варьировании рас-

ширяющейся части. Как и в Гл. 4.2, их независимость достигается введением на *hd* компенсирующей точки *c*, в которой, пользуясь произволом в выборе множителя λ , обратим в ноль коэффициент A'' . Подставив в него x' из уравнением (2), найдём, что в точке *c*

$$\lambda = \pm v / \sqrt{M^2 - 1} - u. \quad (3)$$

Выполнение равенства (3) пока только в точке *c* позволяет при варьировании *u* на *hd* или координат точки *d* за счёт одно-временного варьирования *u* в малой окрестности точки *c* сохранять постоянным расход *G*. Благодаря выбору множителя λ согласно равенству (3) варьирование *u* в малой окрестности точки *c* вносит в приращение $\Delta\chi$ вклад более высокого порядка, чем Δx_d , Δy_d и δu в других точках *hd*, и перечисленные вариации и приращения можно считать независимыми. Следовательно, если распределения параметров на отрезке *hd*, где δu произвольны, реализуют максимум χ , то условие (3) должно выполняться во всех его точках. Подставив определяемое им λ в уравнение (2), найдём, что: $x' = \text{ctg}(\theta \mp \mu)$, где μ – угол Маха, т.е. для оптимальной обра-зующей сопла *hd* – отрезок C^- или C^+ -характеристики. Чтобы соединить точку *d* с 3X, в качестве *hd* естественно взять отрезок C^+ -характеристики, чему отвечает нижний знак в равенстве (3), которое примет вид (Л.Е. Стернин, 1957; G.V.R. Rao, 1958)

$$V \frac{\cos(\theta - \mu)}{\cos \mu} = -\lambda. \quad (4)$$

Вместе с уравнением C^+ -характеристики: $x' = \text{ctg}(\theta + \mu)$ и выполняющимся на ней условием совместности (3.4.20⁺) равенство (4) для произвольной точки *h* позволяет построить отрезок *hd* C^+ -характеристики. Константа в равенстве (4) вычисляется по параметрам в точке *h*. Для её выбора обратимся к оставшимся слагаемым выражения (1) для $\Delta\chi$, которое после исключения $(u + \lambda)$ с помощью равенства (3) со знаком минус примет вид

$$y_d^{1-v} \Delta\chi = (p - p^+ - \rho V^2 \text{tg} \mu \sin \theta \cos \theta)_d \Delta y_d + (\rho V^2 \text{tg} \mu \sin^2 \theta)_d \Delta x_d.$$

Положительный множитель перед Δx_d – свидетельство того, что торец, если он есть, – УКЭ, ибо при допустимых $\Delta x_d < 0$ тяга уменьшается. Возможно выполнение равенства $\theta_d = 0$. Как показано ниже, в таком случае $\theta \equiv 0$ на всей начинающейся на оси *x*

C^+ -характеристике hd . Это отвечает такой длине X^m , при которой поток на срезе сопла равномерный и параллельный оси x и дальнейшее увеличение длины не увеличивает тягу. В действительности из-за трения и весовых соображений задаваемые значения X значительно меньше, чем X^m .

Если оптимальная ордината $y_d = y_f = Y$, то допустимые приращения $\Delta y_d \leq 0$, и должно выполняться неравенство

$$(p - p^+ - \rho V^2 \operatorname{tg} \mu \sin \theta \cos \theta)_d \geq 0. \quad (5)$$

Если же для контура, в концевой точке которого $y_d = y_f = Y$, условие (5) не выполняется, то это значит, что оптимальное $y_d < Y$, т.е. допустимы приращения Δy_d любого знака, и условие, определяющее оптимальную ординату y_d , имеет вид

$$\Phi \equiv (p - p^+ - \rho V^2 \operatorname{tg} \mu \sin \theta \cos \theta)_d = 0. \quad (6)$$

Согласно ему при $y_d < Y$ равенство $p_d = p^+$ выполняется только для уже обсуждавшегося сопла длины X^m с равномерным потоком на срезе. В общем случае $\theta_d > 0$ и в силу условия (6) $p_d > p^+$. Это, в частности, имеет место при работе сопла в пустоте (при $p^+ = 0$).

В задаче построения оптимальной расширяющейся части сопла для удовлетворения пары условий: $y_d = y_f = Y$ или равенства (6) и $x_d = X$ или $\theta_d = 0$ при $X > X^m$ есть два произвола: интенсивность пучка волн разрежения и положение точки h на его ЗХ. При расчёте пучка волн разрежения **методом характеристик (МХ)** сначала из каждой вновь рассчитанной точки оси x выпускается прямолинейная C^+ -характеристика, отвечающая соплу с равномерным потоком на срезе. Пока интенсивность пучка волн разрежения мала, невелика и длина таких сопел, т.е. $x_d < X$. С момента, когда это неравенство нарушится, с ЗХ с использованием условия (4) выпускается несколько ЭХ и с использованием квадратичной интерполяции находится такая точка h ЗХ, что с требуемой точностью в точке d ЭХ выполняется равенство $x_d = X$.

В точке d все параметры известны, и сначала $y_d < Y$, а левая часть условия (6) Φ положительна (сначала $p_d \gg p^+$ при $\theta_d \ll 1$). С ростом интенсивности пучка разрежения y_d растёт, Φ уменьшается, и при некоторой его интенсивности в точке d выполнится либо условие (6), либо равенство $y_d = Y$. Найденные отрезки bh

$3X$ и hd ЭХ формулируют задачу Гурса, решение которой (см. Гл. 3.5) определит оптимальный контур bd расширяющейся части. При заданных сужающейся части, значениях X, Y, p^+, H, s и уравнениях состояния построенный контур реализует максимум тяги.

Из технических соображений, в частности, связанных с тепловыми потоками в стенку сопла, может появиться запрет на изломы контура. В описанном решении такой излом есть в точке b . Для его исключения в постановку задачи вводится ограничение на радиус кривизны контура $r \geq \varepsilon$, где ε задано. В изменённой постановке излом заменится ещё одним УКЭ – окружностью радиуса ε , плавно примыкающей к контуру сужающейся части в точке b , а пучок волн разрежения с фокусом в точке b – пучком волн разрежения, образующимся при обтекании участка окружности bb° . В остальном структура оптимального решения и способ построения контура $b^\circ d$ останутся прежними.

Для рассматриваемого однородного по H и s течения в плоском случае на отрезке hd C^+ -характеристики в дополнение к равенству (4) постоянен инвариант (см. Гл. 3.5)

$$I^+ = \theta + \Phi(p) = \theta_h, \quad \Phi(p) = \int_{p_h}^p \frac{\operatorname{ctg} \mu}{\rho V} dp.$$

Это – дополнительная, независящая от равенства (4) связь. Поэтому в таком случае параметры на отрезке hd постоянны, а сам он прямолинеен. Треугольники bhd или $b^\circ hd$ покрывают C^- -характеристики, которые, начинаясь на hd , несут постоянное значение инварианта $\Gamma = \theta - \Phi(p) = \theta_h$. Следовательно, в плоском случае однородное по H и s течение в треугольнике bhd – простая волна с прямолинейными C^+ -характеристиками, и все оптимальные плоские сопла получаются укорочением однопараметрического семейства сопел с равномерным потоком на срезе. Контур, получающиеся укорочением однопараметрического семейства аналогичных осесимметричных сопел, неоптимальны. Однако согласно многочисленным расчётам по величине реализуемой тяги они уступают оптимальным лишь на десятые доли процента.

Пусть форма сужающейся части не задана, но наряду с прочими заданными выше величинами фиксирован расход газа. Какой бы при такой постановке ни была сужающаяся часть (точнее,

дозвуковой контур), малые возмущения, связанные с варьированием *сверхзвукового контура*, не распространяются против сверхзвукового потока. Поэтому полученные выше условия, определяющие оптимальный сверхзвуковой контур, сохранят силу. Главный, возникающий при этом вопрос: каким будет оптимальный дозвуковой контур? В новой постановке задание длины всего сопла предполагает запрет на заглубление контура в его цилиндрическую часть (*камеру сгорания*), т.е. $0 \leq x \leq X$. С учётом такого добавления соображения качественного характера и расчёты (А.Н. Крайко, Н.И. Тилляева, С.А. Щербаков, 1986 [52]) показали, что претендент на оптимальный дозвуковой контур – внезапное сужение (рис. 4.11, в), возможно, ещё один тип УКЭ.

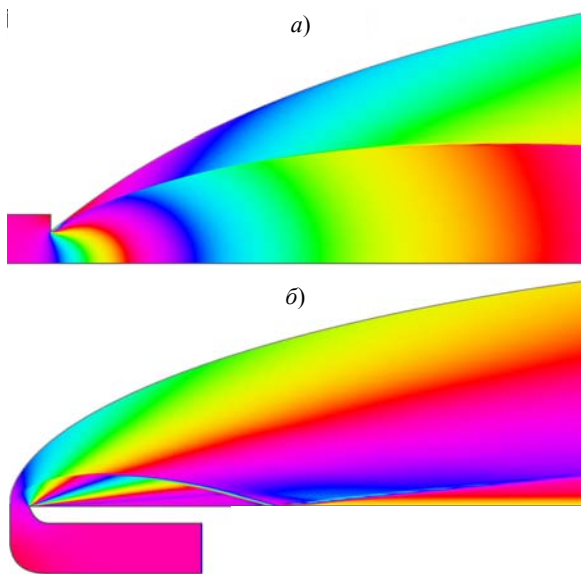


Рис. 4.12

При одинаковых общей длине и расходе такие сопла за счёт большей длины сверхзвуковой части (сначала слегка сужающейся) имеют заметно большую тягу, чем сопла с плавным входом. При учёте вязкости в рамках осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, замкнутых дифференциальной моделью

турбулентности, преимущество сопел с внезапным сужением возрастает (А.Н. Крайко, Е.В. Мышенков, К.С. Пьянков, Н.И. Тилляева, 2002 [53]). Интересно, что при внезапном сужении увеличение тяги достигается не только при оптимальном профилировании сверхзвукового контура. Выигрыш получается даже тогда, когда используются построенные в предположении параллельного оси звукового потока в минимальном сечении укороченные контуры, дающие равномерный поток на срезе, причём, несмотря на сильнейшее перерасширение за точкой излома и возникающий вблизи неё висячий скачок. Представление о поле чисел Маха в таком сопле даёт рис. 4.12, *а* с периодической гаммой. Согласно вязкому расчёту [53] в данном случае выигрыш по тяге по сравнению с соплом с плавным сужением составил 0.63 %. При правильном профилировании выигрыш равен 0.83 %, а висячий скачок может возникнуть только справа от $3X_{hd}$.

Кроме сопел Лаваля, с использованием МНКК строились сопла с центральным телом и сопла, названные «тарельчатыми» [54-59]. Представление о поле чисел Маха в тарельчатом сопле с камерой сгорания внутри него даёт рис. 4.12, *б*. Одна из особенностей таких сопел – поворот до- и трансзвукового потока на большие углы. При реальных ограничениях на габариты и заданном расходе газа из-за этого оптимальные сверхзвуковые контуры начинаются с вогнутого (в сторону течения) участка постоянного давления [54]. Идущие от них волны сжатия (на рис. 4.12, *б* – C^- -характеристики), пересекаясь, формируют висячий скачок, хорошо видный на рис. 4.12, *б*. Начальная точка висячего скачка располагается слева от замыкающей C^+ -характеристики, приходящей в концевую точку контура.

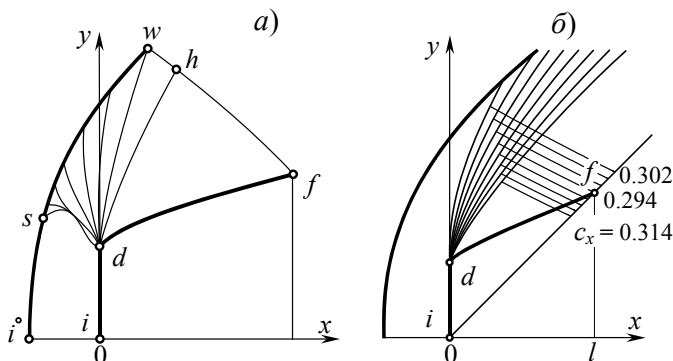


Рис. 4.13

Вторая задача, в которой будет применён МНКК, – задача Ньютона о головной части минимального волнового сопротивления, решаемая в отличие от Гл. 4.1 в рамках уравнений Эйлера (А.Н. Крайко, Д.Е. Пудовиков, К.С. Пьянков, Н.И. Тилляева, 2003 [60]). Однако и в новой постановке оптимальная головная часть имеет передний торец – УКЭ теперь только из-за задания её длины. Ограничимся головными частями, которые назовём **короткими**. Этот термин означает следующее: удлинение l (отношение длины к радиусу их основания) таково, что на до-, транс- и сверхзвуковое течение за отошедшей ударной волной до ЗХ пучка разрежения, образующегося при обтекании излома в точке стыковки d торца и пологого участка контура d_+f , не влияет форма последнего (рис. 4.13, a , d_+h – часть ЗХ, fw – C^- -характеристика). За отошедшей ударной волной перед затупленными головными частями энтропия $s = S(\psi)$, где ψ – функция тока. Для коротких головных частей функция $S(\psi)$ в характеристическом треугольнике d_+hfw не зависит от формы участка d_+f .

Волновое сопротивление χ выразим через разности потоков x -компоненты количества движения через ударную волну и через пока неопределённую кривую fw , соединяющую концевую точку головной части f и точку ударной волны w ,

$$\chi = \int_i^f p y dy = (p_0 + \rho_0 V_0^2) \int_{i^0}^w y dy - \int_f^w [y(p + \rho u^2) dy - y \rho u v dx] .$$

Перейдя к интегрированию по функции тока ψ , которая для $v = 2$ и нормирующего множителя $k = 1$ вводится равенством (3.1.10)

$$d\psi = y\rho(udy - vdx) , \quad (7)$$

получим

$$\chi = \left(\frac{p_0}{\rho_0 V_0} + V_0 \right) \psi_w - \int_f^w (y p dy + u d\psi) .$$

Если $y = y(\psi)$ на f_w , а штрих означает производную по ψ , то согласно равенству (7) для $x = x(\psi)$ на f_w и для длины f_w имеем

$$x' = \frac{uy'}{v} - \frac{1}{y\rho v}, \quad X \equiv x_f - x_w = \int_{\psi_f=0}^{\psi_w} \left(\frac{1}{y\rho v} - \frac{uy'}{v} \right) d\psi . \quad (8)$$

Для получения необходимых условий минимума χ , составим функционал

$$J = \chi + \lambda X = \left(\frac{p_0}{\rho_0 V_0} + V_0 \right) \psi_w - \int_{\psi_f=0}^{\psi_w} \left[y p y' + u + \lambda \left(\frac{uy'}{v} - \frac{1}{y\rho v} \right) \right] d\psi ,$$

в котором λ – неопределённый постоянный множитель Лагранжа. При любом допустимом варьировании $X = \text{const}$, и $\Delta\chi = \Delta J$.

При варьировании учтём, что зависимость $y = y(\psi)$, т.е. кривая f_w в плоскости ψu и значения ψ в её концевых точках фиксированы. Варьирование контура d_+f не изменяет течение слева от ЗХ пучка волн разрежения, а параметры на ЗХ, в частности, в точке h непрерывны. Наконец, вариации параметров потока – это их приращения при фиксированном ψ , а для короткой головной части $S(\psi)$ не изменяется при варьировании контура d_+f . Следовательно, $\delta\rho = a^{-2}\delta p$, а $\delta p = -\rho(udi + v\delta v)$. В соответствии с этим, проведя необходимые выкладки, получим

$$\Delta\chi = \Delta J = \int_{\psi_f=0}^{\psi_h} (A^u \delta u + A^v \delta v) d\psi, \quad (9)$$

$$A^u = \frac{\lambda u - \gamma \rho a^2 v}{\gamma \rho a^2 v} + \frac{\gamma \rho u v - \lambda}{v} y', \quad A^v = \frac{\gamma \rho v^3 + \lambda u}{v^2} y' - \lambda \frac{a^2 - v^2}{\gamma \rho a^2 v^2}.$$

Далее, как и при профилировании сопла, за счёт выбора кривой hf обратим в ноль коэффициент A^v , что даст уравнение для определения hf

$$y' = \frac{\lambda(a^2 - v^2)}{\gamma \rho a^2 (\gamma \rho v^3 + \lambda u)}. \quad (10)$$

Вариации δu , оставшиеся после этого в выражении (9), не являются независимыми, так как при варьировании необходимо удовлетворять условию постоянства X . Их независимость достигается введением на hf *компенсирующей* точки c , в которой, пользуясь произволом в выборе множителя λ , обратим в ноль коэффициент A^u . Подставив в него x' из уравнения (10), найдём, что в точке c

$$\lambda = \pm \gamma \rho v^2 / \sqrt{M^2 - 1}. \quad (11)$$

Рассудая далее, как при построении оптимального сопла, установим, что условие (11) должно выполняться на всём отрезке hf . Подставив затем определяемое им λ в уравнение (10), а получившееся y' – в дифференциальное уравнение из (8), найдём, что

$$y' = \frac{\mp \sin(\theta \mp \mu)}{\gamma \rho V \sin \mu}, \quad x' = \mp \frac{\cos(\theta \mp \mu)}{\gamma \rho V \sin \mu}.$$

Отсюда следует, что $dy/dx = \operatorname{tg}(\theta \pm \mu)$, т.е. для оптимального контура головной части fh – отрезок C^+ - или C^- -характеристики. Чтобы соединить точку f с $3X$, в качестве hf естественно взять отрезок C^- -характеристики, чему отвечает верхний знак в равенстве (11). В результате оно примет вид

$$\gamma \rho V^2 \sin^2 \theta \operatorname{tg} \mu = \lambda. \quad (12)$$

Оптимальный размер торца определяется численно. На рис. 4.13, б для фиксированного торца по результатам расчёта ($M_0 = 2$, $\gamma = 1.4$, $l = 1$) построено несколько $3X$ пучка волн разрежения с фокусом в точке d и выпущенных с них экстремальных C^- -харак-

теристик hf с точками f , лежащими на прямой $x = ly = y$. Благодаря этому удлинение всех отвечающих таким ЭХ головных частей одинаково ($l = 1$). Оптимальную головную часть выявило сравнение c_x головных частей, построенных для разных точек h . Её $c_x = 0.294$. То, что торец – УКЭ, проверялось сравнением c_x этой головной части и головных частей с торцами, деформированными разными допустимыми способами. Их c_x всегда был больше.

Так же, как для головной части, условие (12) получается в задаче о построении оптимального сопла для переменных H и s . Здесь именно оно, а не условие (4) определяет распределение параметров на отрезке hd . При постоянных H и s для оптимального сопла справедливы оба условия (4) и (12). Два условия, выполняющихся в таком случае на отрезке hd , не противоречат условию совместности для C^+ -характеристики, справедливому на том же отрезке. Как показал Ю.Д. Шмыглевский [61], любое из них и условие совместности даёт второе. В силу равенства (12), если $\theta = 0$ в одной точке hd , то $\theta = 0$ всюду на hd . Это доказывает сделанное ранее утверждение о том, что при $\theta_d = 0$ поток на срезе оптимального сопла равномерный и параллельный оси x .

Глава 4.5. Прямые методы построения оптимальных конфигураций

Сокращения: ГА – генетический алгоритм, КБ – кривая Безье, КПД – коэффициент полезного действия, ОММЛ – общий метод множителей Лагранжа, УДЭ и УКЭ – участки двустороннего и краевого экстремума, ФП – фронт Парето.

При несомненной теоретической красоте, а подчас, как в задаче о профилировании сопла максимальной тяги, и практической значимости результатов, которые удаётся получить непрямые методами вариационного исчисления (или что то же – теории оптимального управления), надежды на решение весьма сложных и важных для приложений задач построения оптимальных аэродинамических форм связываются с так называемыми **прямыми методами**. Последнее тем более справедливо, когда

речь заходит о задачах многодисциплинарной оптимизации. Хотя и здесь непрямые методы часто полезны, их роль сводится к выяснению структуры оптимальных конфигураций, а не к их окончательному построению. В последнее время прямые методы получили бурное развитие.

Начнём с задачи об осесимметричной головной части минимального **волнового сопротивления** при ограничениях на её габариты (максимально допустимые длину L и радиус Y или на удлинение $l = L/Y$ и на Y , который примем за линейный масштаб) и объём Ω или на коэффициент объёма $c_\Omega = \Omega/(\pi LY^2)$. Полученное непрямими методами в приближении формулы Ньютона решение этой задачи описано в Гл. 4.1. Согласно ему интерес представляют $\Omega_0 \leq \Omega \leq 1$, где Ω_0 – объём, который при том же удлинении l получается в задаче Ньютона. При таких Ω оптимальные головные части всегда имеют **передний торец**, а начиная с некоторого $\Omega_1 > \Omega_0$ – цилиндрический УКЭ $y = 1$. Эту информацию об оптимальной головной части естественно использовать и при решении той же задачи прямыми методами в рамках уравнений Эйлера, допуская у искомой головной части наличие переднего торца и цилиндрического УКЭ: $y = 1$.

В прямых методах искомый контур задается N параметрами, играющими роль управлений. В качестве управлений можно взять ординаты $(N - 1)$ -й точки **пологого участка** при фиксированных x и абсциссу начальной точки **цилиндрического участка**. Пологий участок можно аппроксимировать сплайнами или другими функциями. В таком случае управлений (параметров этих функций) будет меньше. Вне зависимости от выбора управлений в классических прямых методах каждая коррекция требует равного числа управлений **прямых расчётов** обтекания оптимизируемой конфигурации. Поэтому при большом числе управлений ($N \gg 1$) они весьма затратны по потребным вычислительным ресурсам и временам счета.

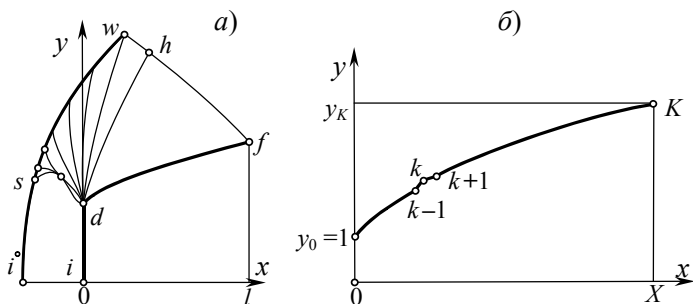


Рис. 4.14

Принципиальную возможность получения информации, необходимой для очередной коррекции оптимизируемого профиля, за один прямой расчёт даёт **общий метод множителей Лагранжа** – ОММЛ (К.Г. Guderley, J.V. Armitage, 1962; Т.К. Сиразетдинов, 1963, см. [51]). В рамках ОММЛ при фиксированном объёме Ω приращение коэффициента волнового сопротивления Δc_x при допустимых варьированиях короткой головной части (рис. 4.14, а, тонкие кривые – C^+ и C^- -характеристики и звуковая линия ds) даётся формулой

$$\Delta c_x = A^y \Delta y_d + A^x \Delta x_d + \left(\int_{i_-}^{d_-} + \int_{d_+}^f \right) B^x \delta^{\circ} x dy. \quad (1)$$

Здесь $\Delta y_d, \Delta x_d \geq 0$ и $\delta^{\circ} x$ – приращения y_d и x_d и вариация x на УКЭ id_- и УДЭ d_+f , а коэффициенты A^y, A^x и B^x – известные функции y , параметров течения и множителей Лагранжа $\mu_1-\mu_3$ на контуре idf . Множители μ_k вводят во вспомогательный функционал уравнения течения, записанные, например, в форме

$$L_1 \equiv \frac{\partial(y\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(y\rho v)}{\partial y} = 0, \quad L_2 \equiv \frac{\partial y(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(y\rho uv)}{\partial y} = 0, \\ L_3 \equiv \frac{\partial(y\rho us)}{\partial x} + \frac{\partial(y\rho vs)}{\partial y} = 0.$$

Для построенной на предыдущей итерации головной части рассматриваемого типа параметры течения определяются из ре-

шения прямой, а множители μ_k – сопряженной задачи. Её уравнения, линейные относительно μ_k , решаются в обратном направлении – от C -характеристики hf . Для определения μ_k , а вместе с ними и коэффициента B^x на УДЭ d_+f сопряженную задачу нужно решить только в треугольнике dhf при известных μ_k на hf и одном условии на участке d_+f контура тела. Задание Ω проявляется только в условии на d_+f . Решение сопряженной задачи в треугольнике dhf много проще расчёта обтекания головной части с отошедшей УВ.

Значения B^x на участке d_+f , найденные из одного прямого расчёта обтекания головной части и решения сопряженной задачи в треугольнике dhf , определяют направление требуемых изменений x на всем пологом участке ($x_d = 0$, $x_f = l$, т.е. фиксированы). Коэффициент A^y , определяющий направление изменения y_d , вместе с коэффициентами A^x и B^x на торце id_- можно найти только после решения всей сопряженной задачи, что неизмеримо сложнее [60]. Но коэффициенты A^x и B^x на торце id_- нужны не для построения контура idf , а для доказательства того, что торец – УКЭ. Найти же направление изменения y_d можно из ещё одного прямого расчёта.

С 1990-х годов широкое распространение получили подходы, основанные на **анализе чувствительности**. Как и множители Лагранжа и выражающийся через них множитель D в формуле (1), ключевые для таких прямых методов **коэффициенты чувствительности** находятся из одного прямого расчёта. Другое, сближающее эти подходы обстоятельство состоит в том, что один из способов определения коэффициентов чувствительности состоит в решении сопряженной задачи, которая при строгой реализации эквивалентна сопряженной задаче ОММЛ.

Для задач, в которых УДЭ оптимизируемых контуров и поверхностей обтекаются сверхзвуковым потоком, С.А. **Таковичий** [62, 63]. развил **метод локальной линеаризации (МЛЛ)**, в котором число прямых расчётов не связано с числом управлений K . Основные идеи этого метода изложим на примере задачи о построении оптимальной сверхзвуковой части осесимметричного сопла.

В качестве управлений возьмём величины y_k ($k = 1, \dots, K$) – радиусов правых точек K отрезков искомой образующей с фик-

сированными $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ и x_k ($k = 1, \dots, K$) с $x_K = X$. Средним параметрам на отрезках припишем полуцелые индексы, например, (рис. 4.14, б) $h_{k-1/2} = x_k - x_{k-1}$. Изменение ординат y_k изменяет углы наклона отрезков θ и давление p на них. Для связи приращений Δp и $\Delta\theta$ воспользуемся приближённой формулой простой волны

$$\Delta p \approx -\rho V^2 \operatorname{tg} \mu \Delta\theta \approx -A \Delta \operatorname{tg} \theta, \quad A = \rho V^2 \operatorname{tg} \mu \cos^2 \theta$$

– результатом локальной линеаризации уравнений течения относительно параметров около каждого отрезка. С учетом её при $h_{k-1/2} = h = X/K$

$$\Delta y_{k-1/2} = (\Delta y_{k-1} + \Delta y_k)/2, \quad \Delta y'_{k-1/2} \approx (\Delta y_k - \Delta y_{k-1})/h,$$

$$\Delta p_{k-1/2} \approx A_{k-1/2} (\Delta y_{k-1} - \Delta y_k)/h,$$

а для приращения интеграла сил давления

$$\chi = \int_0^X y p y' dx - \frac{P^+}{2} y_K^2$$

с точностью до квадратов Δy_k справедлива формула

$$\Delta \chi = \sum_{k=1}^{K-1} a_k \Delta y_k + \sum_{k=1}^{K-1} b_k (\Delta y_k)^2 + \sum_{k=1}^{K-1} c_k \Delta y_k \Delta y_{k+1} + a_K \Delta y_K + b_K (\Delta y_K)^2,$$

$$a_k = \left(y(y'A - p) + p y' \frac{h}{2} \right)_{k+1/2} - \left(y(y'A - p) - p y' \frac{h}{2} \right)_{k-1/2},$$

$$b_k = \left(\frac{y'A - p}{2} - A \frac{y}{h} \right)_{k+1/2} - \left(\frac{y'A - p}{2} + A \frac{y}{h} \right)_{k-1/2}, \quad c_k = 2 \left(A \frac{y}{h} \right)_{k+1/2},$$

$$a_K = \left(y(y'A - p) - p y' \frac{h}{2} \right)_{K-1/2} + y_K p^+, \quad b_K = \left(\frac{y'A - p}{2} + A \frac{y}{h} \right)_{K-1/2} + \frac{p^+}{2}.$$

Для получения необходимых условий минимума χ приравняем нулю производные от $\Delta \chi$ по Δy_k с $k = 1, 2, \dots, K$. Это даст

$$\begin{cases} \Delta y_0 = 0, \\ \frac{\partial \Delta \chi}{\partial \Delta y_k} = 0, \quad k = 1, \dots, K; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_1 & 2b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & \dots & c_{K-1} & 2b_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_0 \\ \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \vdots \\ \Delta y_K \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_K \end{pmatrix} \quad (2)$$

Каждый цикл коррекции включает *однопараметрический спуск*, состоящий в следующем. После решения системы (2) по вектору Δy находятся величины $\Delta\chi(\tau) = \chi(y + \tau\Delta y) - \chi(y)$ для трёх значений параметра $\tau = 0, 0.5$ и 1 . (для исходного контура), $0.5\Delta y$ и Δy . В плоскости $\tau\Delta\chi$ через три точки проводится парабола: $\chi(\tau) = \chi(0) + a_1\tau + a_2\tau^2$, находится $\tau_m = -a_1/(2a_2)$, дающее максимум χ , и определяются ординаты $y + \tau_m\Delta y$ нового контура, исходного для следующего цикла.

Описанный подход легко обобщается на задачи оптимизации сверхзвуковых частей сопел при дополнительных (изопериметрических) условиях, когда неприменим метод неопределённого контрольного контура. В рассчитанных примерах (А.А. Крайко, К.С. Пьянков, 2009) процесс оптимизации требовал 5-8 итераций, или 15-24 прямых расчётов течения.

С применением аналогичного подхода строились головные части, оптимальные по волновому сопротивлению при заданных габаритах и объёме (Ефремов Н.Л., Крайко А.Н., Пьянков К.С., Таковицкий С.А., 2006 [64]). Число точек K на участке $d_{*}f$ контура головной части изменялось от 60 до 275. Для таких K построение затупленных (с передним торцом) головных частей требовало менее 50 прямых расчётов их обтекания.

Наряду с классической оптимизацией, при которой искомая конфигурация реализует минимум или максимум некоторой характеристики при фиксированных других (изопериметрическая вариационная задача), в последнее время широкое распространение получила *многокритериальная оптимизация* или *оптимизация по Парето* (В. Парето, 1896). Её смысл поясним на примере профилирования пространственной лопатки *рабочего колеса вентилятора воздушно-реактивного двигателя*. Даже при ряде существенных упрощений эта задача – одна из сложнейших задач оптимального профилирования. Перечислим принятые далее при её решении упрощения: 1. На конечном расстоянии с обеих сторон от рабочего колеса образующие кольцевого канала – прямые, параллельные оси вращения; 2. Далеко перед колесом поток однородный и осевой; 3. Пограничные слои на стенках канала не учитываются; 4. Стационарное во вращающейся вместе с рабочим колесом системе координат пространственное турбулентное

течение описывается осреднёнными по Рейнольдсу уравнениями Навье–Стокса, замкнутыми дифференциальной моделью турбулентности « v_t -90» (А.Н. Секундов, 1990).

Важные характеристики рабочего колеса – степень повышения давления торможения π и **коэффициент полезного действия (КПД) η** . Далее при оптимизации фиксируются геометрия кольцевого канала, в котором вращается РК, угловая скорость вращения, расход газа, полная энтальпия H и энтропия s однородного по H и s потока перед колесом. Лопатки могут удовлетворять дополнительным ограничениям, например, на радиус кривизны передней кромки, закон изменения хорды, максимальную толщину и положение центра тяжести их цилиндрических сечений как функций расстояния от оси вращения и т.п. При перечисленных ограничениях и заданном $\pi = \pi_1 > 1$ можно построить лопатку, обеспечивающую максимум $\eta = \eta_1$. Решение той же задачи для $\pi = \pi_2 > \pi_1$ даст $\eta = \eta_2$ и т.д. Естественно, что при заданной угловой скорости вращения, расходе и других ограничениях $\pi_m \leq \pi \leq \pi^m$ с заранее неизвестными значениями π_m и π^m . Поэтому представляют интерес задачи, в которых при заданном $\eta = \eta_3$ строятся лопатки, реализующие максимум и минимум π (на рис. 4.15, *a* это π_3 и π'_3). Геометрическое место точек, которым в плоскости $\pi\eta$ отвечают рабочие колеса из лопаток, построенных в результате решения таких задач, образуют кривую, называемую далее **фронтом Парето (ФП)**. На рис. 4.15, *a* ФП дан жирной кривой (обычно под ФП понимают только её ниспадающий участок до точки a_3). В общем случае ФП – $(N - 1)$ -мерная поверхность в N -мерном пространстве характеристик объекта.

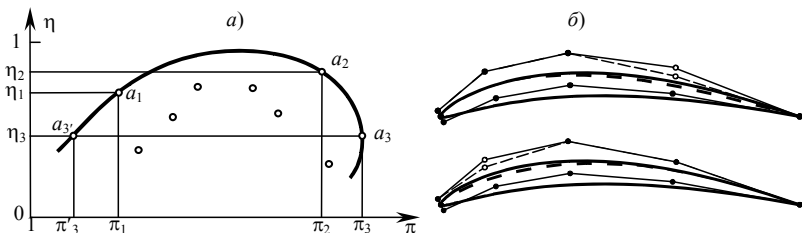


Рис. 4.15

По способу построения ФП ограничивает область всевозможных объектов, и в этом смысле отвечающие ФП объекты оптимальны. В то же время с учётом сложности расчёта обтекания даже фиксированной лопатки описанный выше метод построения оптимальных рабочих колес, а следовательно, и ФП даже в случае только π и η , как на рис. 4.15, *а*, практически нереализуем. Выход из создавшейся ситуации – в применении прямых методов, основанных на *генетических алгоритмах* (ГА, Дж. Холланд, 1975), использующих механизмы эволюции и селекции.

Поясним главные идеи ГА. Двумерные профили удобно задавать кривыми или *кривыми Безье* (КБ, Р. Bézier, 1962). КБ связан с координатами вершин многоугольника (полигона), координаты которых определяют гладкий профиль. На рис. 4.15, *б*, на котором определённый двумя КБ профиль имеет острую заднюю кромку, могут изменяться *поперечные* координаты вершин отрезков полигона при фиксированных *продольных*. Как деформируется профиль при изменении поперечной координаты одной вершины (светлые кружки), видно из сравнения сплошных и штриховых линий. Аналогично строятся поверхности Безье, определяющие две стороны гладкой пространственной лопатки. В приводимых далее примерах количество *свободных параметров*, используемых при задании пространственной лопатки, составляло 50–60. Каждый набор свободных параметров даёт лопатку, называемую в ГА *особью*. Разным особям отвечают точки плоскости $\pi\eta$, которые в общем случае располагаются под ФП (отличные от a_k кружки на рис. 4.15, *а*).

Сначала свободные параметры и отвечающие им особи выбираются достаточно произвольно, хотя и с отбраковкой тех из них, которые не удовлетворяют имеющимся *дополнительным ограничениям*. Начиная с некоторого размера популяции, вводятся различные принципы отбора лучших особей и их *скрещивание*. При скрещивании свободные параметры новых особей получаются как взвешенные свободные параметры родительских пар. Одновременно с некоторыми вероятностями допускаются случайные отклонения (*мутации*). Каждая новая особь проверяется

на выполнение дополнительных ограничений, после чего проводится расчёт её обтекания и определяется её место в популяции.

Как и в сельскохозяйственной селекции, для отбора перспективных особей развит и постоянно совершенствуется обширный набор правил и приёмов. Однако при использовании ГА у исследователя намного больше возможностей, в частности, благодаря свободе в выборе мутаций. К тому же ГА допускает простое и эффективное распараллеливание на большое число процессоров (обтекание каждой особи рассчитывается на отдельном процессоре), а стратегия счёта – возможность предварительного отбора по результатам расчётов на грубых сетках.

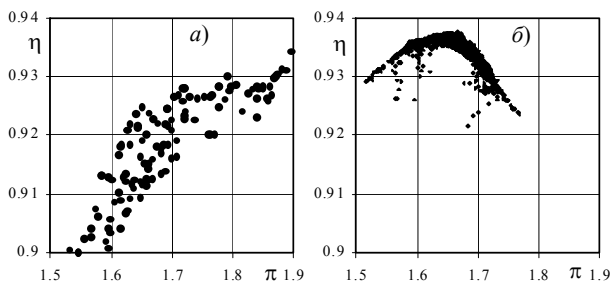


Рис. 4.16

Как показывает опыт, сначала движение к ФП идёт достаточно быстро, однако вскоре при традиционных подходах оно становится крайне медленным. Сказанное иллюстрирует рис. 4.16, а, на котором при оптимизации пространственных лопаток рабочего колеса (Н.И. Тилляева, 2007, см. [65]) точки дают π и η лучших особей, которые получались после 200 итераций при расчёте 100 особей в каждой итерации (общее время счёта эквивалентно 10^4 часов работы одного процессора). Для сравнения рис. 4.16, б демонстрирует заметное повышение η , достигнутое для выделенного интервала $1.60 < \pi < 1.75$ за в 10 раз меньшее время (К.С. Пьянков, 2007, см. [65]). На рис. 4.17 изображена одна из оптимальных лопаток и ее профили у втулки, на периферии и в промежуточных сечениях.

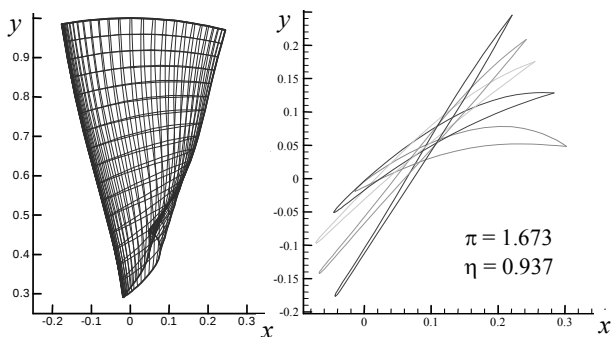


Рис. 4.17

С помощью ГА решаются и **многодисциплинарные** задачи многокритериальной оптимизации. Так, при расчёте обтекания длинных и сравнительно тонких лопаток современных вентиляторов нужно учитывать их деформацию под действием в основном центробежных сил. Поэтому, профилируя лопатку, необходимо решать и газодинамическую, и прочностную задачи, а при расчёте её напряжённо-деформированного состояния удовлетворять ограничениям по допустимому уровню напряжений. Результат включения в программный комплекс оптимизации специально созданного быстрого модуля пространственного прочностного расчёта методом конечного элемента (К.С. [Пьянков](#), Н.И. [Тилляева](#), 2009) демонстрирует рис. 4.18. На нём в разных ракурсах показаны распределения напряжений на оптимизируемой вентиляторной лопатке. В данном примере максимально допустимое напряжение равно 35 кГ/мм^2 .

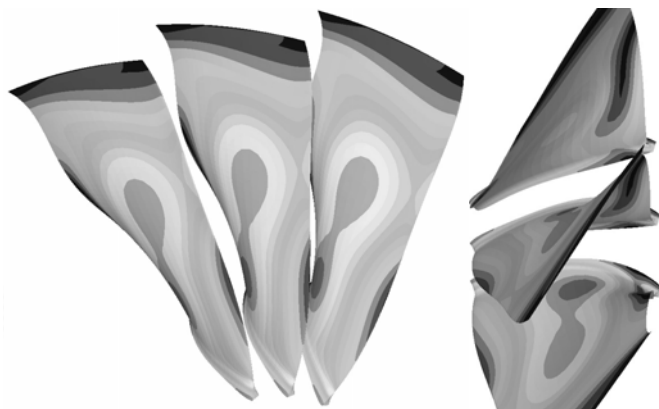


Рис. 4.18

Приведённые примеры подтверждают, что применение ГА — искусство, в котором талант исследователя не менее важен, чем использование суперкомпьютеров (за рубежом подобные задачи, причём отнюдь не мгновенно, решают на многих сотнях и тысячах процессоров).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

К Части 1

1. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
2. *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
3. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидродинамика / Под ред. И.А. Кибеля. М.: Физматгиз, 1963. Ч. I. 583 с.; Ч. II. 727 с.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
5. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967. 428 с.
6. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
7. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Издание третье, исправленное. М.: Физматлит, 2008. 656 с.
8. *Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1991. Ч. 1. 597 с.; Ч. 2. 301 с.
9. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 847 с.
10. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
11. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: ИЛ, 1961. 588 с.
12. *Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: ИЛ, 1950. 426 с.
13. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 787 с.
14. Газовая динамика. Избранное. Издание второе, исправленное / Редактор-составитель А.Н. Крайко. М.: Физматлит, 2005. Т. 1. 720 с.

15. Газовая динамика. Избранное. Издание второе, исправленное / Редакторы-составители А.Н. Крайко (отв.), А.Б. Ватажин, А.Н. Секундов. М.: Физматлит, 2005. Т. 2. 752 с.
16. Механика жидкости и газа. Избранное / Редакторы-составители А.Н. Крайко (отв.), А.Б. Ватажин, Г.А. Любимов. М.: Физматлит, 2003. 752 с.
17. Чёрный Г.Г. Избранные труды. М.: Наука, 2009. 759 с.

К Части 2

18. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С.К. Годунова. М.: Наука, 1976. 400 с.
19. *Meyer-ter-Vehn J., Schalk C.* Selfsimilar spherical compression waves in gas dynamics // *Zeitschrift fur Naturforschung. Teil A.* 1982. В. 37a. Н. 8. S. 955-969.
20. Крайко А.Н. Вариационная задача об одномерном изэнтропическом сжатии идеального газа // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 35-51 = [17] С. 311-330.
21. Скибин В.А., Крайко А.Н. Вычислительная газовая динамика и математическое моделирование устройств принципиально новых типов // Вестник МАИ. 2005. Т. 12. № 2. С. 123-141.
22. Валиев Х.Ф. Отражение ударной волны от центра или оси симметрии при показателях адиабаты от 1.2 до 3 // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 3. С. 397-407.
23. *Kraiko A.N.* Time-dependent compression of cylindrical or spherical ideal gas volumes // *Zababakhin Scientific Talks-2005 / Ed. by E.N. Avrorin and V.A. Simonenko. AIP. Melville, New York, 2006. AIP Conference Proceedings. V. 849. 520 p. (CP 849, Zababakhin Scientific Talks-2005 / Ed. by E.N. Avrorin and V.A. Simonenko. American Institute of Physics, 2006).* P. 74-81.
24. Крайко А.Н. Быстрое цилиндрически и сферически симметричное сильное сжатие идеального газа // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 5. С. 744-760.

К Части 3

25. *Гринь В.Т., Крайко А.Н., Тилляева Н.И.* Об устойчивости течения идеального газа в канале с замыкающим скачком уплотнения при одновременном отражении от сечения выхода акустических и энтропийных волн // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 469-478 = [15]. С. 620-629.
26. *Крайко А.Н., Широносков В.А.* Исследование устойчивости течения идеального газа в канале с замыкающим скачком уплотнения при околосвуковой скорости потока // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 579-586 = [15]. С. 630-639.
27. *Гринь В.Т., Крайко А.Н., Тилляева Н.И., Широносков В.А.* Анализ устойчивости одномерного течения в канале при произвольном изменении параметров стационарного потока между сечением замыкающего скачка и выходом из канала // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 637-645.
28. *Крайко А.Н., Пьянков К.С.* О скачках уплотнения в местных сверхзвуковых зонах // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 5. С. 181-188.
29. *Крайко А.Н.* О конфигурации скачков уплотнения, замыкающих местную сверхзвуковую зону // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 236-243 = [16]. С. 218-227.
30. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И.* Метод характеристик и полухарактеристические переменные в задачах профилирования сверхзвуковых частей плоских и осесимметричных сопел // ЖВМиМФ. 1996. Т. 36. № 9. С. 159-176.
31. *Тилляева Н.И., Широносова Е.Я.* Профилирование сверхзвуковых частей кольцевых сопел с равномерными параметрами на выходе // Препринт № 25. М.: ЦИАМ, 1995. 60 с.
32. *Крайко А.Н., Пьянков К.С.* Построение профилей и мотогондол, суперкритических в околосвуковом потоке идеального газа // ЖВМиМФ. 2000. Т. 40. № 12. С. 1890-1904 = [16]. С. 250-264.
33. *Рылов А.И.* О возможных режимах обтекания заостренных тел конечной толщины при произвольных сверхзвуковых скоростях набегающего потока // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 95-99.

34. *Крайко А.Н., Пьянков К.С.* Течения идеального газа с отрывными зонами и нестационарными контактными разрывами сложной формы // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 5. С. 41-54.
35. *Васильев Е.И., Крайко А.Н.* Численное моделирование дифракции слабых скачков на клине в условиях парадокса Неймана // ЖВМиМФ. 1999. Т. 39. № 8. С. 1393-1404 = [16]. С. 235-249.
36. *Hunter J.K., Brio M.* Weak shock reflection // J. Fluid Mech. 2000. V. 410. P. 235-261.
37. *Skews B.W., Ashworth J.T.* The physical nature of weak shock wave reflection // J. Fluid Mech. 2005. V. 542. P. 105-114.
38. *Крайко А.Н., Мунин С.А.* О натекании звуковой струи на клиновидные препятствия // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 36. С. 413-417 = [16]. С. 228-234.
39. *Крайко А.Н.* Предельные свойства кусочно-потенциальных докритических и критических струйных течений идеального газа // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 1. С. 30-41.
40. *Лунёв В.В.* Течение реальных газов с большими скоростями. М.: Физматлит, 2007. 759 с.

К Части 4

41. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. Пер. с латин. и комментарии А.Н. Крылова. М.: Наука, 1989. 688 с.
42. *Теория оптимальных аэродинамических форм* / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. 507 с.
43. *Крайко А.Н.* Головная часть заданного объема, оптимальная по волновому сопротивлению в приближении закона сопротивления Ньютона // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 382-388 = [15]. С. 394-402.
44. *Ефремов Н.Л., Крайко А.Н., Пьянков К.С.* Осесимметричная головная часть минимального волнового сопротивления при заданных габаритах и объеме // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 5. С. 723-741.

45. *Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е.* О роли ограничения на длину при построении тел минимального сопротивления // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 822-837 = [15]. С. 493-511.
46. *Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е.* О построении симметричных профилей, оптимальных в сверх- и гиперзвуковом потоке при произвольных изопериметрических условиях // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 931-946.
47. *Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Якунина Г.Е.* Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным / Под ред. А.Н. Крайко. М.: ЯНУС-К, 2001. 132 с.
48. *Якунина Г.Е.* К построению оптимальных пространственных форм в рамках модели локального взаимодействия // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 301-312.
49. *Якунина Г.Е.* Об оптимальных неконических и несимметричных пространственных конфигурациях // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 605-614 = [15]. С. 431-442.
50. *Крайко А.Н., Якунина Г.Е.* К построению оптимальных тел в рамках моделей локального взаимодействия // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 41-53.
51. *Крайко А.Н.* Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
52. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И., Щербаков С.А.* Сравнение интегральных характеристик и формы профилированных контуров сопел Лаваля с «плавным» и с «внезапным» сужениями // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 129-137 = [15]. С. 512-522.
53. *Крайко А.Н., Мышенков Е.В., Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Влияние неидеальности газа на характеристики сопел Лаваля с внезапным сужением // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 191-204 = [17]. С. 331-348.
54. *Крайко А.Н., Теляковский А.С., Тилляева Н.И.* Профилирование оптимального контура сверхзвукового сопла при значительном повороте потока // ЖВМиМФ. 1994. Т. 34. № 10. С. 1444-1460.
55. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И.* Оптимальное профилирование контура сверхзвуковой части тарельчатого сопла // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 6. С. 172-184 = [15]. С. 552-568.

56. *Kraiko A.N., Tillyayeva N.I., Baftalovskii S.V.* Optimal design of plug nozzles and their thrust determination at start // J. of Propulsion and Power. 2001. V. 17. № 6. P. 1347-1352.
57. *Крайко А.Н., Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Профилирование сверхзвуковой части тарельчатого сопла при неравномерном трансзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 4. С. 145-157.
58. *Мышенков Е.В., Мышенкова Е.В., Тилляева Н.И.* Численное исследование течения в кумулятивных соплах с коротким центральным телом в рамках уравнений Рейнольдса // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 3. С. 150-159.
59. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И.* Профилирование сопел с центральным телом и определение оптимального направления их первичных потоков // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 2. С. 194-203.
60. *Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Осесимметричные головные части заданного удлинения, оптимальные или близкие к оптимальным по волновому сопротивлению // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 795–828.
61. *Шмыглевский Ю.Д.* Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 231 с.
62. *Таковицкий С.А.* О сходимости в задаче оптимизации крыла сложной формы // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42. № 5. С. 690-697.
63. *Таковицкий С.А.* Остроконечные двухпараметрические степенные головные части минимального волнового сопротивления // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 829-835.
64. *Ефремов Н.Л., Крайко А.Н., Пьянков К.С., Таковицкий С.А.* Построение в рамках уравнений Эйлера головной части минимального сопротивления при заданных габаритах и объеме // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 6. С. 1017–1030.
65. *Kraiko A.N.* Optimal design for supersonic and transonic velocities // International Conference on Methods of Aerophysical Research (ICMAR 2008). June 30 – July 6, 2008, Novosibirsk, Russia. 10 p.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абрамович Г.Н. 307

Аврорин Е.Н. 308

Аккерет Я. (Ackeret J.) 240, 247, 261

Армитейдж Д. (Armitage J.) 296

Бафталовский С.В. 290, 312

Безье П. (Bézier P.) 294, 303, 304

Белоконь В.А. 8, 139

Бернулли Д. (Bernoulli D.) 128

Бернулли И. (Bernoulli J.) 128

Брио М. (Brio M.) 202, 310

Буземан А. (Busemann A.) 178, 214, 215

Валиев Х.Ф. 8, [106](#)

Валландер С.В. 248

Васильев Е.И. 200, 202, 309

Ватажин А.Б. [304](#), [306](#), [308](#), [309](#)

Гаусс К. (Gauss K.F.) 39

Глауэрт Г. (Glauert H.) 239

Годунов С.К. 70, 203, 307

Гонор А.Л. 272

Горьков Л.П. 167

Гринь В.Т. 148, 310, 311

Громека И.С. 130

Гудерлей К. (Guderley K.G.) 4, 106, 114,

116, 167, 199, 200, 281

Гурса Э. (Goursat E.) 94, 96, 169, 170,

175, 286

Гюгонио А. (Hugoniot H.) 16, 22

Даламбер Ж. (d'Alembert J.L.) 178

Дудин Г.Н. 8

Ефремов Н.Л. 258, 310, 313

Жуге Э. (Jouguet E.) 29, 31, 34, 178, 182

Жуковский Н.Е. 133, 238

Забродин А.В. 307

Иванов М.Я. 307

Ильюшин А.А. 245

Карман Т. (von Kármán Th.) 242, 247

Кибель И.А. 307

Кирхгоф Г. (Kirchhoff G.) 192

Кочин Н.Е. 307

Коши О. (Cauchy O.) 33, 89, 92–94, 170,

173, 175, 178, 184

Крайко А.Н. 96, 99, 114, 148, 169, 178,

193, 200, 202, 232, 253, 257, 258, 268,

278, 282, 288–290, 297, [303–309](#)

Крокко Л. (Crocco L.) 130

Крылов А.Н. 250, 256, 260

Курант Р. (Courant R.) 307

Лаваль К. (Laval K.) 142, 145, 146, 164,

175, 178, 281–283

Ландау Л.Д. 167, 197, 307

Лежандр А. (Legendre A.M.) 250, 253,

254, 256, 270, 276, 277

Лифшиц Е.М. 167, 307

Лифшиц Ю.Б. 167

Лойцянский Л.Г. 307

Лунёв В.В. 245, 307

Любимов Г.А. [304](#), [308](#)

Малов Д.Н. 8

Майер Т. (Meyer Th.) 150

Мейер-тер-Вен Дж. (Meyer-ter-Vehn J.)

96, 308

Мизес Р. (von Mises R.) 307

Миеле А. (Miele A.) 258, 274, 310

Михельсон В.А. 15, 16, 21, 29–34,

178, 182

Морриум Д. (Morreeum J.P.) 96

Мунин С.А. 232, 310

Мышенкова Е.В. 290, 312

Мышенков Е.В. 288–290, 312

Навье К. (Navier C.L.) 300, 302
Навье М. (Navier M.H.) 300, 302
Нейман Дж. (von Neumann J.) 188,
192–194, 309
Никольский А.А. 4, 155, 156, 162–166,
215, 281
Ньютон И. (Newton I.) 4, 250, 251,
253–258, 260, 261, 266–272, 275,
288, 295, 296, 310

Овсянников Л.В. 222, 307
Осватич К. (Oswatitsch K.) 248
Остроградский М.В. 39

Парето В. (Pareto V.F.D.) 294, 301,
303–305
Питаевский Л.П. 167
Прандтль Л. (Prandtl L.) 28, 138, 160,
186, 239
Прокопов Г.П. 307
Пуассон С. (Poisson S.D.) 10, 17, 230
Пудовиков Д.Е. 268, 288, 311, 313
Пьянков К.С. 172, 194, 258, 288–290,
305, 308–310, 312–313

Рао Д. (Rao G.V.R.) 272
Рейнольдс О. (Reynolds O.) 204,
289, 302, 312
Риман Г. (Riemann G.B.) 3, 51, 53,
68, 156
Рождественский Б.Л. 307
Розе Н.В. 307
Ренкин В. (Rankine W.J.M.) 16
Руднев Ю.В. 231
Рыжов О.С. 167
Рылов А.И. 191, 309
Рэлей Дж. (Rayleigh J.) 15, 16, 21,
29–34, 38 178, 182

Сайлард Дж. (Saillard J.) 96
Седов Л.И. 98, 103, 307
Секундов А.Н. 302, 304, 306, 309
Симоненко В.А. 308
Сиразетдинов Т.К. 284
Скибин В.А. 99, 308
Скьюз Б. (Skews B.W.) 202, 310
Стернин Л.Е. 8, 282
Стокс Дж. (Stokes G.G.) 288–302

Таганов Г.И. 155, 156, 162–166
Таковицкий С.А. 298, 313
Тейлор Дж. (Taylor G.I.) 104
Теляковский С.А. 280, 312
Тилляева Н.И. 8, 148, 288–290, 305,
309–313

Уизем Дж. (Whitham G.B.) 307

Фалькович С.В. 242, 245
Ферри А. (Ferri A.) 217, 221, 222
Франкль Ф.И. 167
Фридрихс К. (Friedrichs K.O.) 307

Халл Д. (Hull D.G.) 273
Хантер Дж. (Hunter J.K.) 202, 310
Хантш Е. (Hantsch E.) 281
Хейз У. (Hayes W.D.) 245
Холланд Дж. (Holland J.) 303

Цемплэн Г. (Zemplén G.) 18
Цянь Сюэ-сэнь (Тзянь) (Tsien H.–S.) 242,
245, 247

Чаплыгин С.А. 4, 133, 228, 230–232,
234, 238
Чепмен Д. (Chapman D.L.) 29, 34
Чепмен Д. (Chapman D.R.) 255
Чернов И.А. 167
Чёрный Г.Г. 7, 8, 144, 236, 262, 307

Шалк С. (Schalk C.) 96, 308
Шиرونосова Е.Я. 309
Шиرونосов В.А. 148, 310, 311
Шмыглевский Ю.Д. 8, 282, 291, 313

Щербakov С.А. 288, 311

Эггерс А. (Eggers A.) 250, 257, 258
Эйлер Л. (Euler L.) 3, 4, 39, 41, 178,
193, 250, 253, 254, 256, 260, 268,
269, 281, 283, 288, 295, 308
Эшворт Дж. (Ashworth J.T.) 202, 310

Якунина Г.Е. 274, 278, 311
Яненко Н.Н. 307

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная температура 9
Автомодельные переменные 55, 99
Адиабата Гюгоннио 16
– детонационная 33
– Пуассона 10
– ударная 16
Аналогия нестационарная
(поршневая) 245
Аэродинамическая труба 148

Безвихревое течение 130
Биплан Буземана 178
Быстрое сильное сжатие 114

Взаимодействие трёхволновое 199
Вентилятор 302
Вихрь 137
Воздухозаборник 142
Волна бегущая акустическая 76
– – энтропийная 76
– детонационная 32
– – пересжатая 34
– – самоподдерживающаяся
(Чепмена–Жуге) 34
– простая 53, 158
– разрежения 54, 158
– сжатия 57
– тепловая 35
– ударная 15
– – отошедшая 147
– – слабая 25
– – сильная 27
– центрированная простая 55, 160

Газ идеальный 9
– двухпараметрический 9
– композитный 181
– нормальный (ненормальный) 18
– совершенный 10
Генетические алгоритмы 303

Гиперзвуковое обтекание (течение) 242
– подобие 247
Гиперзвуковая стабилизация 247
Головная часть, оптимальная
осесимметричная 250, 288, 294
– – – пространственная 274
Горение медленное 35

Давление 9
Диск Маха 146, 198
Дифференциальные уравнения сохра-
нения количества движения и момен-
та количества движения 40, 43, 129
– – – – массы 40, 42
– – – – энергии 40, 44
Диффузор Буземана 204
– сверхзвуковой (воздухозаборник) 146

Задача автомодельная 55, 99
– Гудерля 106
– Гурса 94, 175
– Коши 89, 170
– Ньютона 249
– Римана о распаде
произвольного разрыва 68
– Эггерса 257
Закон локального взаимодействия 251
– подобия Аккерета 240
– – Прандтля–Глауэрта 239
– – Фальковича 242
– – Цяня–Кармана 247
– плоских сечений 245
Замыкающая характеристика 284
Запирание сопла 145
Звуковая линия 163
– окружность 187
– парабола 109
Зона реакции 32

Изэнтропа 17
Инварианты Римана 51, 157

Интеграл полной энтальпии
 (интеграл Бернулли) 128
 Интегральные уравнения сохранения
 количества движения, массы и
 энергии 11
 Интегралы уравнений двумерных
 стационарных течений 128, 129
 — — одномерных нестационарных
 течений 46
 Источник и сток сферические и
 цилиндрические 137

 Количество движения 11
 Конус под углом атаки 221
 — Маха 211
 Конические переменные 217
 Конически дозвуковое и конически
 сверхзвуковые течения 223
 Коническая линия тока 219
 Контрольный контур 281
 Кривая конического течения 210
 — сердцевидная 193
 — яблоковидная 216
 Критический перепад 202
 Критическое сечение 135, 145

 Линия тока 41, 125
 Локальная линеаризация 299

 Максимальный угол поворота
 в волне разрежения 161
 — — — при обтекании клина 187, 189
 — — — — конуса 217
 Массовая лагранжева переменная 44
 Местная сверхзвуковая зона 165
 Метод контрольного контура (КК) 281
 — неопределённого КК 282
 — характеристик 87, 170
 — множителей Лагранжа 296
 — оптимизации прямой 294
 Момент количества движения 43, 129

 Нелинейное затухание ударных волн 82
 Нерегулярное отражение 197

 Область определённости 91, 173
 Обтекание треугольной пластины 226
 — — — с конусом 226
 Образование ударной волны 59, 60
 Оптимизация по Парето 301

Отражение ударной волны,
 нерегулярное (Маховское) 197
 — — — регулярное 197

 Парадокс Неймана 199
 — Эйлера—Даламбера 178
 Параметр подобия, гиперзвукового
 Цаня—Кармана 247
 — околозвукового Фальковича 242
 Переменные и плоскость
 годографа 161, 229
 — конические 217
 Плотность 9
 — тока 134
 Поверхность разрыва 12
 Показатель автомодельности 100, 107
 Показатель адиабаты 10
 Полная энтальпия 40
 Поляра ударная 185
 Потенциальное течение,
 потенциал 129-132, 230
 Производная полная
 (субтангентальная) 40, 44, 124
 — фундаментальная 18
 Простая волна 53, 158
 Профиль оптимальный 260
 — суперкритический 179
 Прямая Рэлея—Михельсона (ПРМ) 16
 Прямые методы оптимизации 294

 Рабочее колесо вентилятора 302
 Разрыв контактный
 (тангенциальный) 15
 — неэволюционный (эволюционный) 78
 Регулярное отражение скачка 197

 Сечение выравнивания струи 231
 Система уравнений
 гиперболическая 153
 — — эллиптическая 154
 Скачок изотермический 38
 — косой сильного и
 слабого семейств 187
 — висячий 208
 — замыкающий 165
 — прямой 138
 — разрежения и уплотнения 17
 Скорость газа 11
 — — критическая 28, 135
 — звука 21
 Скорость, максимальная при

стационарном истечении 135
Скорость газа, предельная при
нестационарном истечении 56
Слой ударный 208
Соотношение Прандтля 28
Сопло Лавала 142
Сплайн Безье 303
Струя докритическая и критическая 228
– нерасчётная 203

Теорема Никольского–Таганова 163
– Цемплена 18
Теплопроводность лучистая 35
Теплота реакции 32
Течение гиперзвуковое 243
– изоэнергетическое и
изэнтропическое 126
– околозвуковое 240
– Прандтля–Майера 160
Течения конические
осесимметричные 209
– двумерные конически
до- и сверхзвуковые 223
Торец задний 260
– передний 250, 288, 294
Точка Жуге 29
– тройная 198
– Ферри 221
Траектория частиц 40, 44
Трубка тока 134

Угол Маха 153
– поворота, максимальный
в волне разрежения 161
– – – – – косом скачке 187, 189
Ударная адиабата 16
– поляра 186
– труба 70
Удельная внутренняя энергия 9
– теплоёмкость при постоянном
давлении или объёме 10
энтальпия 9
энтропия 9
Удельный объём 10
Уравнение движения
в форме Крокко 126
– кинетики 33
– сохранения момента
количества движения 40, 43, 129

Уравнение сохранения полной
энтальпии 41
– – энтропии 41
– ударной адиабаты (Ренкина–
Гюгонно) 16
– Чаплыгина 230
– Эйлера 253
Уравнения двумерного
конического течения 219
– состояния 9
– характеристик двумерного конически
сверхзвукового течения 223, 224
– – одномерного нестационарного
течения 42–44
– – плоского и осесимметричного
сверхзвукового течения 154, 155
– Чаплыгина 230
– Эйлера 41
Условие Лежандра 253, 257
– Крылова 256
– термодинамического равновесия 33
– Чаплыгина–Жуковского 133
Условия совместности 49, 155, 224
Участки двустороннего и
краевого экстремума 254

Формула Ньютона 251
Фронт медленного горения 81
– Парето 303
Функция тока 127

Характеристики двумерного конически
сверхзвукового течения 223, 224
– одномерного нестационарного
течения 42–44
– плоского и осесимметричного
сверхзвуковых течений 154, 155

Центр симметрии 47, 48
Центрированная волна
разрежения 55, 160
– – сжатия 72

Число Маха 72

Энтальпия 9
Энтропия 9
Эпициклоида 162



Автор: доктор физико-математических наук, профессор Александр Николаевич Крайко закончил Московский физико-технический институт (МФТИ) в 1959 г. Начальник отдела Центрального института авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, профессор МФТИ.

Основные научные направления: теоретическая газовая динамика, численные методы, оптимальные аэродинамические формы. Автор более двухсот статей, трех монографий и ответственный редактор-составитель двух уникальных ретроспективных сборников: «Газовая динамика. Избранное» в двух томах (Физматлит, 2000–2001 гг., второе издание – 2005 г.) и «Механика жидкости и газа. Избранное» (Физматлит, 2003 г.).

Награжден Золотой медалью и I премией им. профессора Н.Е. Жуковского, премией им. профессора Н.Е. Жуковского за лучшее учебное пособие по теории авиации, орденом «Знак почета», Государственной премией СССР, медалями и премиями: им. академиков П.Л. Капицы, А.М. Люльки и Л.И. Седова. Заслуженный деятель науки РФ. Почётный самолетостроитель РФ. Член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, действительный член Российской Академии естественных наук.