Физический факультет

Кафедра математической физики

РЯДЫ ФУРЬЕ.

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Методические указания по решению задач математического анализа для студентов 2 курса физического факультета

Составители: А.А.Косарев
Е.А.Вервейко

Воронеж –2002

АННОТАЦИЯ

Работа содержит изложение теории, подробное решение наиболее типичных задач, а также задачи для самостоятельного решения. Задачи снабжены ответами и указаниями по их решению.

Внимательное изучение данной работы и выполнение всех упражнений в ней дает студентам возможность подготовиться к сдаче зачета по разделам математического анализа «Ряды Фурье. Преобразования Фурье. Интеграл Фурье»

СОДЕРЖАНИЕ

Ряд Фурье

1. Тригонометрическим рядом называют ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{kp}{l}X+b_k\sin\frac{kp}{l}X), \qquad (1.1)$$

где $a_{k,}b_k$-числовые коэффициенты.

Следует отметить, что все тригонометрические функции, входящие в (1.1) имеют общий период $2l,$ и если ряд (1.1) сходится и $f^*(x)$ его сумма, то $f^*(x)$ определена на $(-\infty,+\infty)$ и также является периодической функцией с тем же периодом $2l.$

Такое определение тригонометрического ряда достаточно формально. Более естественным является другой “ физический “ подход.

Рассмотрим последовательность простейших гармонических функций (гармоник) вида

$$A_k\sin(\frac{2kp}{T}X+j_k);\ \ k=1,2,...;\ \ -\infty < \mathrm{X} > +\infty \qquad (1.2)$$

Они называются гармониками с кратными частотами. У всех у них Т-общий период.

Рассмотрим суперпозицию этих гармоник

$$A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin(\frac{2pk}{T}X+j_k)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\sin j_k\cos\frac{2pk}{T}+A_k\cos j_k\sin\frac{2pk}{T}X) \quad (1.3)$$

Полагая $\frac{a_0}{2}=A_0,\ \ a_k=A_k\sin j_k,\ b_k=A_k\cos j_k,\ \ 2l=T,$ получим

$$A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin(\frac{2pk}{T}X+j_k)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{kp}{l}X+b_k\sin\frac{kp}{l}X,$$

приходим к ряду (1.1).

2. Пусть теперь имеется функция $f^*(x)$, определенная на $(-\infty,+\infty)$ и периодическая с периодом $2l.$ Построим ряд (1.1), в котором коэффициенты $a_{k,}b_k$ вычислены специальным образом по формулам

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^*(x)\cos\frac{kp}{l}Xdx \quad (k = 0,1,2,...);$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^*(x)\sin\frac{kp}{l}Xdx \quad (k = 0,1,2,...). \qquad (1.4)$$

Эти коэффициенты называются коэффициентами Фурье функции $f^*(x)$, а сам ряд (1.1) в этом случае называется рядом Фурье функции $f^*(x)$. Записывают это так:

$$f^*(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{kp}{l}X + b_k \sin\frac{kp}{l}X \qquad (1.5)$$

Если ряд (1.5) сходится (об условиях его сходимости ниже), то его сумма $S(x)$ равна:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{kp}{l}X + b_k \sin\frac{kp}{l}X = \begin{cases} f(x), & \textit{если X точка непрерывности} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \textit{если X точка разрыва} \\ & \textit{первого рода.} \end{cases} \qquad (1.6)$$

3. На практике приходится раскладывать в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на промежутке $[-l,l\ ]\ [(0,2l)\ ]$ *и т.д.* (в физике ее называют “сигналом”)
Для этого сначала приходится делать ее периодическое продолжение на всю числовую осью (см .рис.1) и раскладывать в ряд Фурье функцию $f^*(x)$.

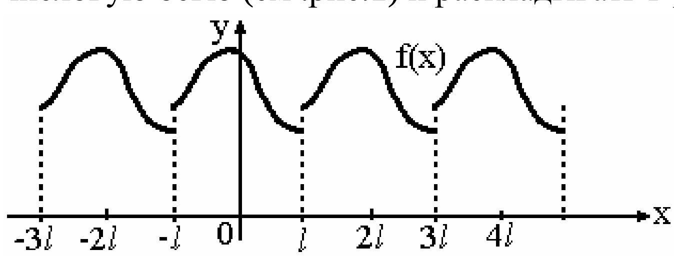

Рис 1

Поэтому на всей оси $(-\infty,+\infty)$ суммой ряда будет $f^*(x)$ (с учетом (1.6)), а на промежутке $[-l,l\ ]$- $f(x)$ (опять таки с учетом (1.6))

Если $f(x)$ задана на промежутке $[0,l\ ]$ $\quad (a, a+l, \textit{и т.д}),$ то ее возможно разложить в ряд Фурье, вообще говоря, бесчисленным количеством способов. На практике ,однако, используются два:

а) Продолжим $f(x)$ на промежуток $[-l,0\ ]$ четным образом (см. рис2).

Тогда, согласно (1.4) $$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{kp}{l}X\,dx \quad (\ k=0,1,...)$$ $$b_k = 0$$

и ряд Фурье принимает вид $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{kp}{l}X, \qquad (1.7)$$
где он представляет $f(x)$ на $[0,l\ ]$.

б) Продолжим $f(x)$ на $[-l,0\ ]$ нечетным образом (см.рис.3). Тогда

$a_k = 0\ (k=1,2,...\ )$ (a_0 может быть отличным от нуля), а

$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{kp}{l}X\,dx$ и ряд Фурье в этом случае будет иметь вид

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{kp}{l}X \qquad (1.8)$$

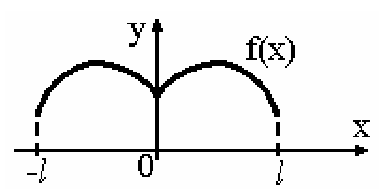

Рис 2

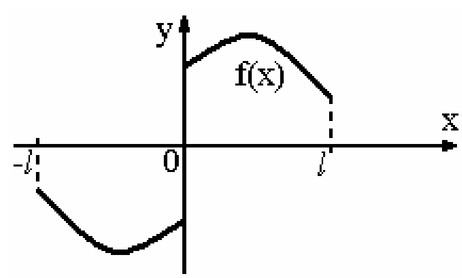

Рис 3

4. Часто, особенно в радиофизике, ряд Фурье записывают в комплексной форме:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{kp}{l}X + b_k \sin\frac{kp}{l}X = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\frac{kp}{l}X} \quad ,где$$

$$c_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{kp}{l}X}dx, \quad c_{-k} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{i\frac{kp}{l}X}dx. \quad (1.9)$$

5. **Условия сходимости ряда Фурье**

Существует довольно много достаточных признаков сходимости ряда Фурье. На практике,обычно, применяются два:
а) **Теорема 1.** Если $f(x)$ является кусочно-непрерывной и кусочно-гладкой на $[-l,l]$ то ее ряд Фурье сходится в каждой точке этого отрезка, причем для суммы $S(x)$ этого ряда выполняются равенства:

1). $S(x)=f(x)$, *если* $-l$<X>l и X точка непрерывности $f(x)$,

2). $S(x)=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, *если* $-l$<X>l и X - точка разрыва первого рода,

3). $S(-l)=S(l)=\dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$ (1.10)

б) **Теорема 2. (Условия Дирихле).**

Если $f(x)$ кусочно-непрерывна и кусочно-монотонна на $[-l,l]$, тогда ее ряд Фурье сходится в каждой точке $X \in [-l,l]$ (с учетом(1.10)).

Примеры задач с решениями

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на сегменте $[-p,p]$ уравнением

$$f(x)=p+X.$$

Решение. Графиком этой функции является отрезок, соединяющий точки $(-p;0)$ $u(p;2p)$.На рисунке 4 показан график функции $y=S(x)$, *где* $S(x)-$сумма ряда Фурье функции $f(x)$.

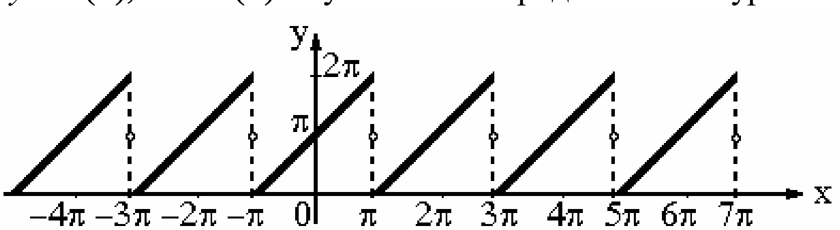

Рис 4

Эта сумма является периодической функцией с периодом $2p$ и совпадает с функцией $f(x)$ на сегменте $[-p,p]$.
Определяем коэффициенты ряда Фурье. Сначала находим

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}(p+X)dx=\int_{-p}^{p}dx+\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}Xdx$$

Второй интеграл равен нулю как интеграл от нечетной функции, взятый по интервалу, симметричному относительно начала координат. Таким образом, $a_0 = \int\limits_{-p}^{p} dx = 2p$.

Далее находим коэффициенты a_m. Имеем

$$a_m = \frac{1}{p}\int\limits_{-p}^{p} f(x)\cos mX\,dx = \frac{1}{p}\int\limits_{-p}^{p}(p + X)\cos mX\,dx =$$
$$= \int\limits_{-p}^{p} \cos mX\,dx + \frac{1}{p}\int\limits_{-p}^{p} X\cos mX\,dx.$$

Нетрудно видеть,что оба интеграла равны нулю(подынтегральная функция второго интеграла является нечетной как произведение четной функции на нечетную).

Итак, $a_m = 0$, *т.е.* $a_1 = a_2 = a_3 = ... = 0$. Определяем теперь коэффициенты b_m:

$$b_m = \frac{1}{p}\int\limits_{-p}^{p} f(x)\sin mX\,dx = \frac{1}{p}\int\limits_{-p}^{p}(p + X)\sin mX\,dx = \int\limits_{-p}^{p}\sin mX\,dx + \frac{1}{p}\int\limits_{-p}^{p} X\sin mX\,dx.$$

Первый интеграл равен нулю. Подынтегральная функция второго интеграла – четная как произведение двух нечетных функций. Таким образом, $b_m = \frac{2}{p}\int\limits_{0}^{p} X\sin mX\,dx.$

интегрируя по частям, получим

$u = X, dv = \sin mX\,dx,\ du = dx,\ v = -(\frac{1}{m})\cos mX,$ *т.е.*

$$b_m = -\frac{2X}{mp}\cos mX\Big|_0^p + \frac{2}{mp}\int\limits_0^p \cos mX dx = -\frac{2}{m}\cos mp + \frac{2}{p\,m^2}\sin mX\Big|_0^p = -\frac{2}{m}(-1)^m =$$
$$= \frac{2}{m}(-1)^{m+1}.$$

Следовательно, разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = p + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\sin mX = p + 2(\sin X - \frac{\sin 2X}{2} + \frac{\sin 3X}{3} - \frac{\sin 4X}{4} + ...).$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию тока, график которой выражает телеграфные сигналы в случае периодической передачи точек (рис.5).

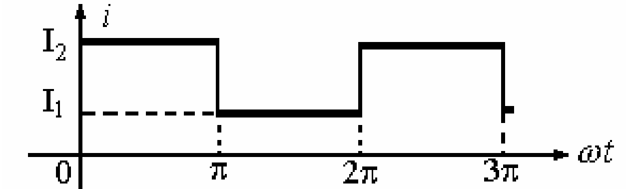

Рис 5

Решение. Функция $i(w\,t)$ в пределах периода $[0, 2p]$ имеет вид

$$i(w\,t) = \begin{cases} I_2 \ \textit{при} \ 0 < w\,t \le p, \\ I_1 \ \textit{при} \ p < w\,t \le 2p \end{cases}$$

Функция $i(w\,t)$ терпит разрыв первого рода при $w\,t = p$. Так как условия Дирихле удовлетворяются, то применимы формулы

$$f(w\,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nw\,t + b_n \sin nw\,t, \qquad (1.11)$$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(w\,t)\,d(w\,t), \quad a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(w\,t)\cos nw\,t d(w\,t),$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(w\,t)\sin nw\,t\,d(w\,t).$$

Придется лишь интервал интегрирования разбить на две части ($\textit{от}\ 0\ \textit{до} p\ \ \textit{и от} p\ \ \textit{до}\ 2p$), так как в каждой из них функция выражается по-разному:

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_0^{p} I_2 d(w\,t) + \frac{1}{p}\int_p^{2p} I_1 d(w\,t) = \frac{pI_2 + pI_1}{p} = I_1 + I_2,`$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{p} I_2 \cos\,nw\,t\,d(w\,t) + \frac{1}{p}\int_p^{2p} I_1 \cos\,nw\,t\,d(w\,t) = \frac{I_2}{p}\frac{\sin nw\,t}{n}\Bigg|_0^p + \frac{I_1}{p}\frac{\sin nw\,t}{n}\Bigg|_0^{2p} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{p} I_2 \sin nw\,t\,d(w\,t) + \frac{1}{p}\int_p^{2p} I_1 \sin nw\,t\,d(w\,t) = -\frac{I_2}{p}\frac{\cos\,nw\,t}{n}\Bigg|_0^p - \frac{I_1}{p}\frac{\cos\,nw\,t}{n}\Bigg|_p^{2p} =$$

$$= -\frac{I_2}{np}(\cos\,np - 1) - \frac{I_1}{np}(\cos 2np - \cos\,np) = \frac{I_2 - I_1}{np} + \frac{I_1 - I_2}{np}(-1)^n = \frac{I_2 - I_1}{np}\left[1 + (-1)^{n-1}\right].$$

Так как выражение в квадратных скобках равно 2 при n нечетном и 0 при n четном, то подставляя значения a_0 $\textit{и}$ b_n в формулу (1.11) получим

$$i(w\,t)=\frac{I_1+I_2}{2}+\frac{2(I_2-I_1)}{p}\sum_{n=1,3,5,...}^{\infty}\frac{\sin nw\,t}{n} \qquad \text{или}$$

$$i(w\,t)=\frac{I_1+I_2}{2}+\frac{2(I_2-I_1)}{p}(\sin w\,t+\frac{\sin 3w\,t}{3}+\frac{\sin 5w\,t}{5}+...).$$

Полученный ряд дает заданную функцию во всех точках, кроме точек разрыва

$(т.е.\ w\,t=0,\ \ w\,t=p\ ,\ \ w\,t=2p,\ \ w\,t=3p\,,...)$. В точках разрыва сумма ряда равна средне арифметическому предельных значений функции, т.е. $\frac{I_1+I_2}{2}$.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию напряжения на сетке лампы, график которой изображен на рисунке 6.

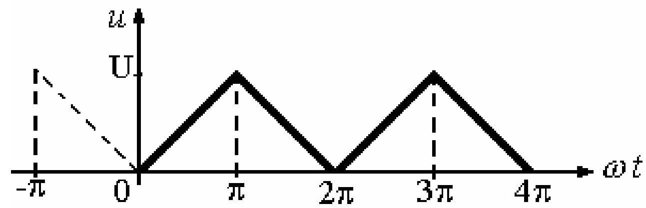

Рис 6

Решение. Рассматриваемая функция на отрезке $[0,p\,]$ определяется уравнением

$u(w\,t)=\frac{U}{p}w\,t.$ Продолжив функцию четным образом на отрезок $[-p\,,o]$ (см. пунктир на рис. 6),мы можем разложить ее в ряд Фурье по формулам

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nX, \qquad a_0=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx, \qquad a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos nXdx\ \ n=1,2,...,$$

которые для аргумента $w\,t$ принимают вид:

$$f(w\,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nw\,t, \quad a_0=\frac{2}{p}\int_0^p f(w\,t)d(w\,t),$$

$$a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(w\,t)\cos nw\,t\,d(w\,t) \qquad n=1,2,...$$

Имеем:

$$a_0=\frac{2}{p}\int_0^p\frac{U}{p}w\,t\,d(w\,t)=\frac{2U}{p^2}\frac{p^2}{2}=U; \quad a_0=U,$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p \frac{U}{p} w\,t \cos nw\,t\,d(w\,t) = \frac{2U}{p^2}\int_0^p X\cos nX dx = \frac{2U}{p^2}\left(\frac{X\sin nX}{n} + \frac{1}{n^2}\cos nX\right)\Bigg|_0^p =$$

$$= \frac{2U}{p^2}\left[0 + \frac{1}{n^2}(\cos np - 1)\right] = \frac{2U}{n^2p^2}\left[(-1)^n - 1\right], \qquad \text{или}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном,} \\ -\dfrac{4U}{n^2p^2} & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Следовательно, $u(w\,t) = -\dfrac{U}{2} - \dfrac{4U}{p^2}\sum\limits_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\dfrac{\cos nw\,t}{n^2}$ *или*

$$u(w\,t) = -\frac{U}{2} - \frac{4U}{p^2}\left(\cos w\,t + \frac{\cos\, 3w\,t}{3^2} + \frac{\cos\, 5w\,t}{5^2} + \ldots\right)$$

Поскольку точек разрыва нет, полученный ряд дает значение заданной функции при любых $w\,t$.

Сумма первых трех членов ряда изображена на рис.7.

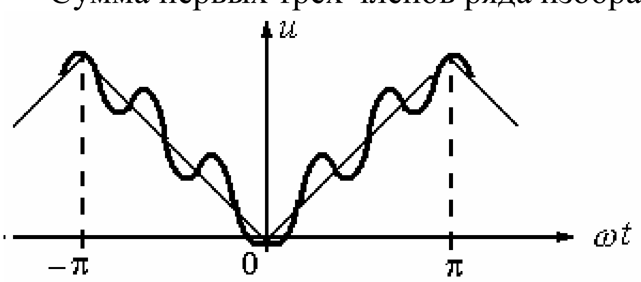

Рис 7

Пример 4. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на полупериоде в сегменте $[0,2]$ уравнением $f(x) = X - \dfrac{X^2}{2}$

Решение. Функция может быть разложена в ряд Фурье бесчисленным количеством способов.

Мы здесь приведем два наиболее важных варианта разложения.

1). Доопределим функцию $f(x)$ на сегменте $[-2,0]$ четным образом (рис.8).

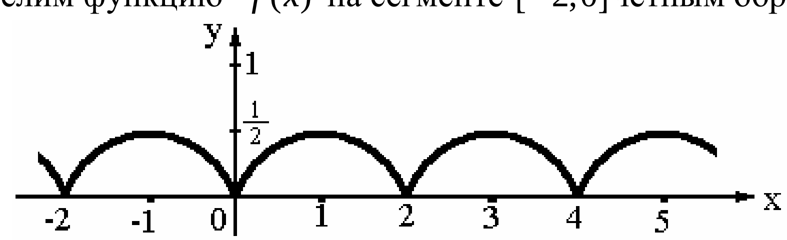

Рис 8

Имеем $l = 2$.

$$a_0=\int_0^2 (X-\frac{1}{2}X^2)\,dx=\left[\frac{X^2}{2}-\frac{X^3}{6}\right]_0^2=\frac{2}{3},$$

$a_m=\int_0^2 (X-\frac{1}{2}X^2)\cos\frac{mp\ X}{2}\,dx.$ Интегрируя по частям, получим:

$$.u=X-\frac{1}{2}X^2,\quad dv=\cos\frac{mp\ X}{2}dx,\ \ du=(1-X)\,dx,\ \ v=\frac{2}{mp}\sin\frac{mp\ X}{2};$$

$$a_m=\frac{2}{mp}(X-\frac{1}{2}X^2)\sin\frac{mp\ X}{2}\Bigg|_0^2-\frac{2}{mp}\int_0^2(1-X)\sin\frac{mp\ X}{2}dx=-\frac{2}{mp}\int_0^2(1-X)\sin\frac{mp\ X}{2}dx.$$

Еще раз интегрируем по частям:

$$u=1-X,\quad dv=\cos\frac{mp\ X}{2}dx,\ \ du=dx,\quad v=-\frac{2}{mp}\cos\frac{mp\ X}{2};$$

$$a_m=\frac{4}{m^2p^2}(1-X)\cos\frac{mp\ X}{2}\Bigg|_0^2+\frac{4}{m^2p^2}\int_0^2\cos\frac{mp\ X}{2}dx=$$

$$=-\frac{4}{m^2p^2}\cos mp-\frac{4}{m^2p^2}=-\frac{4}{m^2p^2}\left[1+(-1)^m\right],\quad b_m=0.$$

Итак,

$$f(x)=\frac{1}{3}-\frac{4}{p^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^m}{m^2}\cos\frac{mp\ X}{2}=\frac{1}{3}-\frac{8}{p^2}(\frac{1}{2^2}\cos p\ X+\frac{1}{4^2}\cos 2p\ X+\frac{1}{6^2}\cos 3p\ X+...).$$

2) Доопределим функцию $f(x)$ на сегменте $\left[-2,0\right]$ нечетным образом (рис.9):

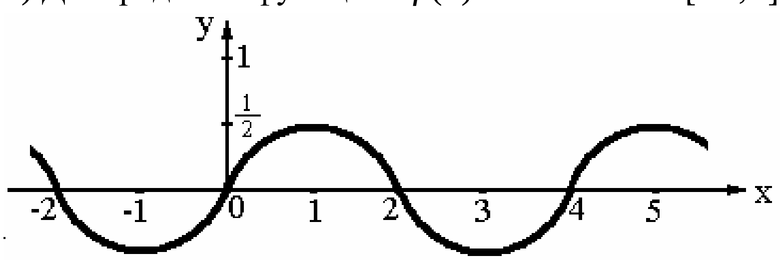

Рис 9

$$b_m=\int_0^2(X-\frac{1}{2}X^2)\sin\frac{mp\ X}{2}dx;\qquad u=X-\frac{1}{2}X^2,\quad dv=\sin\frac{mp\ X}{2}dx,$$

$$du=(1-X)dx,\qquad v=-\frac{2}{mp}\cos\frac{mp\ X}{2};$$

$$b_m = -\frac{2}{mp}(X - \frac{1}{2}X^2)\cos\frac{mp\ X}{2}\Bigg|_0^2 + \frac{2}{mp}\int_0^2 (1-X)\cos\frac{mp\ X}{2}dx = \frac{2}{mp}\int_0^2 (1-X)\cos\frac{mp\ X}{2}dx;$$

$$u = (1-X), \qquad dv = \cos\frac{mp\ X}{2}dx, \quad du = -dx, \quad v = \frac{2}{mp}\sin\frac{mp\ X}{2};$$

$$b_m = \frac{4}{m^2p^2}(1-X)\sin\frac{mp\ X}{2}\Bigg|_0^2 + \frac{4}{m^2p^2}\int_0^2 \sin\frac{mp\ X}{2}dx =$$

$$= -\frac{8}{m^3p^3}\cos\frac{mp\ X}{2}\Bigg|_0^2 = -\frac{8}{m^3p^3}\cos mp + \frac{8}{m^3p^3} = \frac{8}{m^3p^3}\left[1-(-1)^m\right];$$

$a_m = 0 \qquad (m = 0,1,2,...).$

Итак,

$$f(x) = \frac{8}{p^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^m}{m}\sin\frac{mp\ X}{2} = \frac{16}{p^3}(\sin\frac{p\ X}{2} + \frac{1}{3^3}\sin\frac{3p\ X}{2} + \frac{1}{5^3}\sin\frac{5p\ X}{2} + ...).$$

Пример 5. Разложить в ряд Фурье функцию двухполупериоднного выпрямленного тока, график которой изображен на рисунке 10.

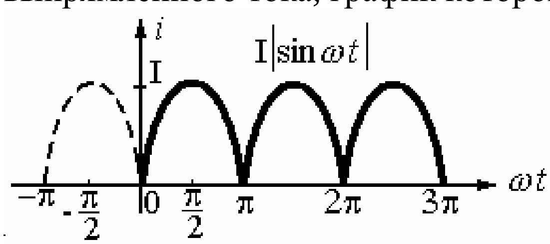

Рис 10

Решение. Функция определяется уравнением $i(w\,t) = I|\sin w\,t|$. Период $T = 2l = p$.

Продолжим функцию четным образом на отрезок [-π,0] . Как и в предыдущем примере $\frac{np\ w\,t}{l} = 2nw\,t.$

По формулам:

$$f(w\,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{npw\,t}{l},$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(w\,t)d(w\,t), \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(wt)\cos\frac{npw\,t}{l}d(w\,t), \quad (n = 1,2,...)$$

получим :

$$a_0 = \frac{2}{p/2}\int_0^{\frac{p}{2}} I\sin w\,t d(w\,t) = \frac{4I}{p}\int_0^{\frac{p}{2}}\sin X dx = -\frac{4I}{p}\cos X\Big|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{4I}{p},$$

$$a_n = \frac{2}{p/2}\int_0^{\frac{p}{2}} I\sin w\,t\cos 2nw\,t d(w\,t) = \frac{4I}{2p}\int_0^{\frac{p}{2}} 2\sin X\cos 2nX dx =$$

$$= \frac{2I}{p}\left[-\frac{\cos(2n+1)X}{2n+1} + \frac{\cos(2n-1)X}{2n-1}\right]_0^{\frac{p}{2}} = \frac{2I}{p}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right) = -\frac{4I}{p}\frac{1}{(4n^2-1)}.$$

Следовательно,

$$i(w\,t) = \frac{2I}{p} - \frac{4I}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nw\,t}{4n^2-1} \qquad \text{или}$$

$$i(w\,t) = \frac{4I}{p}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2w\,t}{3} - \frac{\cos 4w\,t}{3\cdot 5} - \frac{\cos 6w\,t}{5\cdot 7} - \frac{\cos 8w\,t}{7\cdot 9} - \ldots\right).$$

Разложение справедливо при любом $w\,t$. Постоянная составляющая, выпрямленного тока равна $\frac{2I}{p}$.

Пример 6. Разложить функцию $f(x) = \frac{p - X}{2}$ в промежутке $(0,2p)$.

Решение. Вычисляем коэффициенты ряда Фурье

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)dx = \frac{1}{p}\int_0^{2p}\frac{p - X}{2}dx = \frac{1}{2p}\left(p\,X - \frac{1}{2}X^2\right)\Big|_0^{2p} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\cos nX dx = \frac{1}{p}\int_0^{2p}\frac{p - X}{2}\cos nX dx = \frac{1}{2p}(p - X)\frac{\sin nX}{n}\Big|_0^{2p} -$$

$$-\frac{1}{2np}\int_0^{2p}\sin nX dx = 0, \qquad (n = 1,2,3,\ldots).$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\sin nX dx = \frac{1}{p}\int_0^{2p}\frac{p - X}{2}\sin nX dx = -\frac{1}{2p}(p - X)\frac{\cos nX}{n}\Big|_0^{2p} - \frac{1}{2np}\int_0^{2p}\cos nX dx = \frac{1}{n}.$$

Таким образом, мы приходим к замечательному по простоте разложению, содержащему одни лишь синусы:

$$\frac{p\ - X}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nX}{n} \qquad (0 < X > 2\pi\ ).$$

При X=0 (или 2π) сумма ряда равна нулю, и равенство нарушается. Не будет равенства и вне указанного промежутка. График суммы ряда S(x) состоит из бесчисленного множества параллельных отрезков и ряда отдельных точек на оси X. (Рис.11)

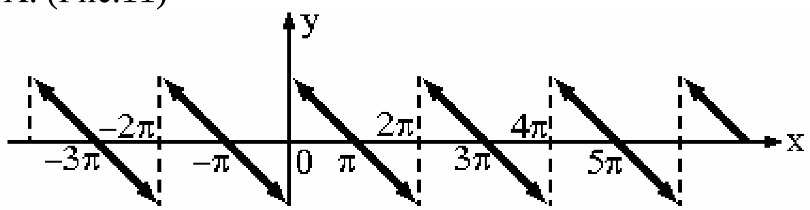

Рис 11

Задачи для самостоятельного решения

Пример 1. Разложить функцию $f(x) = e^{ax}$ в промежутке (0, π)

а) в ряд по косинусам и

б) в ряд по синусам

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную в сегменте [-π, π] уравнением $f(x) = X^3$.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию напряжения, график которой изображен на рис.(12).

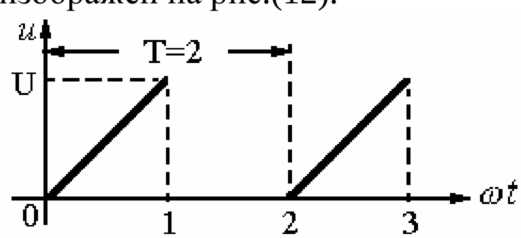

Рис 12

Пример 4. Разложить в ряд Фурье функцию двухполупериодного выпрямленного тока, график которой изображен на рис.(13).

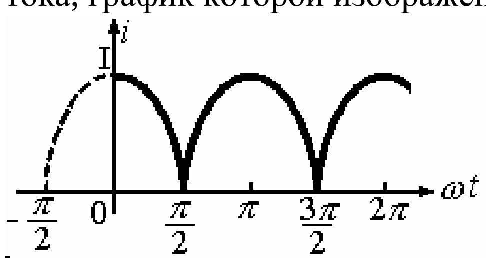

Рис 13

Пример 5. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную в сегменте [-π, π] так:

$$f(x) = \begin{cases} -2X, & если\ \ -p \le X \le 0; \\ 3X, & если\ \ 0 \le X \le p. \end{cases}$$

Пример 6

Разложить в ряд Фурье по косинусам в сегменте [0, 2] функцию

$$f(x)=\begin{cases} X, & если \quad 0<X\le 1;\\ 2-X, & если \quad 1<X\le 2.\end{cases}$$

Ответы: **1)** $a)\ e^{ax}=\dfrac{e^{ap}-1}{ap}+\dfrac{2a}{p}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{e^{ap}-1}{a^2+n^2}\cos nX \qquad (0\le X\le p),$

$$б)\ e^{ax}=\frac{2}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-(-1)^n e^{ap}\right]\frac{n}{a^2+n^2}\sin nX \qquad (0<X<p).$$

2). $f(x)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\dfrac{12}{m^3}-\dfrac{2p^2}{m}\right)\sin mX.$

3). $u(w\,t)=\dfrac{U}{4}-\dfrac{2U}{p^2}\sum\limits_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\dfrac{\cos np\,w\,t}{n^2}+\dfrac{U}{p}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\sin np\,w\,t$

Или

$$u(w\,t)=\frac{U}{4}-\frac{2U}{p^2}\left(\cos pw\,t+\frac{\cos 3pw\,t}{3^2}+\frac{\cos 5pw\,t}{5^2}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{U}{p}\left(\sin pw\,t-\frac{\sin 2pw\,t}{2}+\frac{\sin 3pw\,t}{3}-\ldots\right).$$

В точках разрыва $(w\,t=1,\ w\,t=3,\ldots)$ сумма ряда равна $\dfrac{U}{2}$.

4). $i(w\,t)=\dfrac{4I}{p}\left[\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\cos 2nw\,t}{4n^2-1}\right]$ Разложение справедливо при любом $w\,t$.

5). $f(x)=\dfrac{5p}{4}-\dfrac{10}{p}\left(\dfrac{\cos X}{1^2}+\dfrac{\cos 3X}{3^2}+\dfrac{\cos 5X}{5^2}+\ldots\right)+$

$$+\left(\frac{\sin X}{1}-\frac{\sin 2X}{2}+\frac{\sin 3X}{3}-\ldots\right).$$

6. $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{p^2}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{\cos\left(2m+1\right)p\ X}{(2m+1)^2}.$

Интеграл Фурье

Если $f(x)$ задана изначально на всей оси (-∞, ∞) и не периодична на ней, то разложить ее в ряд Фурье нельзя. Однако, при некоторых предположениях ее можно представить в виде некоторого аналога ряда Фурье, а именно в виде интеграла Фурье.

Если $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 предыдущего раздела на любом конечном промежутке $[-l, l]$ и абсолютно интегрируема на всей оси, то для нее справедлива интегральная формула Фурье:

$$f^*(x) = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} dl \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(u - l\ )du, \qquad (2.1) \quad \textit{где}$$

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{если } X - \textit{точка непрерывности } f(x) \\ \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & \textit{если } X - \textit{точка разрыва первого рода} \end{cases} \qquad (2.2)$$

Формула (2.1), вообще говоря, получается предельным переходом из ряда Фурье при $l \to \infty$. В этом смысле интеграл Фурье понимают как предельную форму ряда Фурье.

Интеграл Фурье часто записывают в комплексной форме:

$$f^*(x) = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty} dl \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{il(u-x)}du \qquad (2.3)$$

Часто интеграл Фурье записывают в виде:

$$f*(x) = \int_0^{+\infty} (a(l\ )\cos l\ X + b(l\ )\sin lX)dl, \qquad (2.4)$$

$$\textit{где} \quad a(l\ ) = \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos l u du, \qquad b(l\ ) = \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin l u du \qquad (2.5)$$

Примеры задач с решением

Представить интегралом Фурье следующие функции.

Пример 1.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \left| X \right| < 1; \\ 0, & \textit{если} \left| X \right| > 1. \end{cases}$$

Решение. Данная функция удовлетворяет всем условиям теоремы 1, и следовательно, ее можно представить интегралом Фурье. Легко видеть, что $b(l)=0$ (в силу четности функции $f(x)$), а

$$a(l)=\frac{2}{p}\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos l\ Xdx=\frac{2}{p}\int_{0}^{1}\cos l\ Xdx=\frac{2\sin l}{p\,l}.$$

Таким образом,

$$f(x)=\frac{2}{p}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin l}{l}\cos lXdx,\qquad |X|\neq 1,$$ что и требовалось доказать.

Следует заметить, что в точках $X=\pm 1$ разрыва функции $f(x)$ интеграл Фурье, согласно теории, равен $\frac{1}{2}$. Действительно, поскольку

$$\frac{2}{p}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin l\cos l\ X}{l}dl=\frac{1}{p}\left(\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin l\,(1+X)}{l}dl+\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin l\,(1-X)}{l}dl\right),$$

то применение формул (2.2) дает

$$\frac{2}{p}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin l}{l}\cos l\ Xdl=\frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(1+X)+(\operatorname{sgn}(1-X)),$$

откуда и следует указанный результат.

Пример 2. $f(x)=\operatorname{sgn}(X-a)-\operatorname{sgn}(X-b)\qquad (b>a).$

Решение. Замечая, что $$f(x)=\begin{cases}0, & \textit{если}\ \ X<a;\\ 1, & \textit{если}\ \ X=a;\\ 2, & \textit{если}\ \ a<X<b;\\ 1, & \textit{если}\ \ X=b;\\ 0, & \textit{если}\ \ X>b,\end{cases}$$

имеем:

$$a(l)=\frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos l\ Xdx=\frac{2}{p}\int_{a}^{b}\cos l\ Xdx=\frac{2}{p\,l}(\sin l\,b-\sin l\,a),$$

$$b(l)=\frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin l\ Xdx=\frac{2}{p}\int_{a}^{b}\sin l\ Xdx=\frac{2}{p\,l}(\cos l\,a-\cos l\,b).$$

Следовательно, интеграл Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{2}{p}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{l}((\sin l\, b - \sin l\, a)\cos l\ X + (\cos l\, a - \cos l\, b)\sin l\ X)dl =$$

$$\frac{2}{p}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin l\,(b - X) + \sin l\,(X - a)}{l}dl.$$

В данном примере функция $f(x)$ совпадает с ее интегралом Фурье во всех точках числовой оси.

Пример 3. $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + X^2}$.

Решение. Функция $f(x)$ при $a \neq 0$ дифференцируема и абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, она представима интегралом Фурье. Имеем: $b(l) = 0$ (в силу четности функции $f(x)$),

$$a(l) = \frac{2}{p}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos lXdx}{a^2 + X^2}(X = |a|t) = \frac{2}{p\,|a|}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(l\,|a|t)dt}{1 + t^2} = \frac{1}{|a|}e^{-l\,|a|},\ \ a \neq 0.$$

Запишем теперь интеграл Фурье данной функции:

$$f(x) = \frac{1}{|a|}\int_{0}^{+\infty}e^{-l\,|a|}\cos l\ xdl, \qquad \textit{если}\ \ (a \neq 0).$$

Пример 4. $f(x) = \dfrac{X}{a^2 + X^2}$ $\quad (a \neq 0)$.

Решение. Функция $f(x)$ дифференцируема и не является абсолютно интегрируемой на интервале $(-\infty, +\infty)$, однако она интегрируема на нем в смысле главного значения Коши. Как показал Коши (см., например: Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.2, М.: Наука, 1968), такая функция тоже может быть представлена интегралом Фурье.

Легко видеть, что $a(l) = 0$, *а* $b(l) = \dfrac{2}{p}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{X\sin l\ X}{a^2 + X^2}dx$.

Этот интеграл равномерно сходится по параметру $l \geq l_0 > 0$ (здесь $\dfrac{X}{a^2 + X^2}$ монотонно стремится к нулю при $X \to +\infty$, *а* $\left|\displaystyle\int_{0}^{x}\sin l\ tdt\right| \leq \dfrac{2}{l_0}$). Следовательно, его можно рассматривать как производную (с точностью до знака) от функции $a(l)$ предыдущего примера, т.е.

$$b(l) = -\left(\frac{2}{p}\int_0^{+\infty}\frac{\cos l\, Xdx}{a^2+X^2}\right)'_l = e^{-l\,|a|}.$$

Интеграл Фурье функции $\dfrac{X}{a^2+X^2}$ имеет вид: $\int\limits_0^{+\infty} e^{-l\,|a|}\sin l\, Xdl \qquad (a \neq 0).$

Пример 5. $f(x) = e^{-a|X|} \qquad (a > 0).$

Решение. Рассматриваемая функция непрерывна, дифференцируема всюду, за исключением точки X=0, и абсолютно интегрируема на всей числовой оси. Следовательно, она представима интегралом Фурье. Поскольку функция $f(x)$ - четная, то $b(l) = 0,$ а

$$a(l) = \frac{2}{p}\int_0^{-\infty} e^{-a\,X}\cos l\, Xdx = \frac{2a}{p(a^2+l^2)}.$$

Таким образом, искомое представление данной функции интегралом Фурье имеет вид

$$e^{-a|X|} = \frac{2a}{p}\int_0^{+\infty}\frac{\cos l\, X}{a^2+l^2}dl \qquad (a > 0).$$

Примеры для самостоятельного решения

Представить интегралом Фурье следующие функции:

Пример 1. $f(x) = \begin{cases} h\left(1-\dfrac{|X|}{a}\right), & \text{если } |X| \le a; \\ 0, & \text{если } |X| > a. \end{cases}$

Пример 2. $f(x) = \begin{cases} \sin X, & \text{если } |X| \le p; \\ 0, & \text{если } |X| > p. \end{cases}$

Пример3. $f(x) = \begin{cases} \cos X, & \text{если} |X| \le \dfrac{p}{2}; \\ 0, & \text{если} |X| > \dfrac{p}{2}. \end{cases}$

Пример4. $f(x) = \begin{cases} A\sin w\, t, & \text{если } |t| \le \dfrac{2p\,n}{w}; \\ 0, & \text{если } |t| > \dfrac{2p\,n}{w}. \end{cases}$

Пример 5. $f(x) = e^{-a|X|}\sin b\, X \qquad (a > 0).$

,

Ответы: 1) $f(x)=\dfrac{2h}{p\,a}\int\limits_{0}^{+\infty}\dfrac{1-\cos a\,l}{l^{2}}\cos lXd\,l$

2). $f(x)=\dfrac{2}{p}\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{\sin l\,p}{1-l^{2}}\sin l\;Xd\,l$

3). $f(x)=\dfrac{2}{p}\int\limits_{0}^{+\infty}\dfrac{\cos\dfrac{l\,p}{2}}{1-l^{2}}\cos l\;Xd\,l$.

4). $f(t)=\dfrac{2Aw}{p}\int\limits_{0}^{+\infty}\dfrac{\sin\dfrac{2p\,n\,l}{w}}{l^{2}-w^{2}}\sin l\,td\,l$.

5). $f(x)=\dfrac{4a\,b}{p}\int\limits_{0}^{+\infty}\dfrac{l\sin l\;X}{\left[(l-b)^{2}+a^{2}\right]\cdot\left[(l+b)^{2}+a^{2}\right]}d\,l$. $(a>0)$.

Преобразования Фурье

Интеграл Фурье (2.3) можно переписать в виде:

$$f^{*}(x)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\,l\,X}d\,l \qquad \Big(\frac{1}{\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{i\,l\,u}du\Big) \tag{3.1}$$

Рассмотрим интегралы

$$F(l)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{i\,l\,u}du \quad \text{и} \quad f^{*}(x)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\,l\,X}F(l)d\,l \tag{3.2}$$

Первый из них называется прямым преобразованием Фурье функции $f(u)$ (а $F(l)$ – образом Фурье $f(u)$), второй - обратным преобразованием Фурье (а $f(u)$ – прообразом).

Если $f(u)$ – четная функция, то

$$F(l)=\sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_{0}^{+\infty}f(u)\cos l\,udu, \quad \text{а} \quad f(u)=\sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_{0}^{+\infty}F(l)\cos l\,ud\,l \tag{3.3}$$

$F(l)$ и $f(u)$ называются косинус преобразованиями Фурье (прямым и обратным соответственно).

Если $f(u)$ – нечетная функция, то имеем синус - преобразования Фурье (прямое и обратное):

$$F(l)=\sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_{0}^{+\infty} f(u)\sin l\,u du \quad \text{и} \quad f(u)=\sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_{0}^{+\infty} F(l)\sin l\,u dl \qquad (3.4)$$

Замечание. Функцию $F(l)$ часто обозначают $\overline{f}(l)$ или $\hat{f}(l)$.

Примеры задач с решениями

Найти преобразование Фурье $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt$ для функции $f(t)$, если:

Пример1. $f(x)=e^{-a|x|} \quad (a>0).$

Решение. Подставляя данную функцию в указанную формулу преобразования, получаем:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|-itx}dt=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}\cos tXdt-\frac{i}{\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}\sin tXdt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-at}\cos tXdt=\sqrt{\frac{2}{p}}\frac{a}{a^2+t^2} \qquad (a>0).$$

Пример 2. $f(x)=xe^{-a|x|} \quad (a>0).$

Решение. Как и в предыдущем примере, находим:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{-a|t|-itx}dt=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{-a|t|}\cos tXdt-\frac{i}{\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{-a|t|}\sin tXdt=$$

$$=-i\sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_{0}^{+\infty} te^{-at}\sin tXdt=-i\sqrt{\frac{8}{p}}\frac{a\,x}{(x^2+a^2)^2} \qquad (a>0).$$

Заметим, что последний интеграл можно получить дифференцированием интеграла из предыдущего примера по параметру x (дифференцирование под знаком интеграла справедливо в силу равномерной сходимости интеграла $\int\limits_{0}^{+\infty} te^{-at}\sin tXdt$ относительно x).

Пример3. Найти косинус- и синус- преобразования функции $f(x)=e^{-x} \quad (x\geq 0).$

Решение. Имеем $f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{p}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-u}\cos zudu.$ Так как $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-u}\cos zudu=\frac{1}{z^2+1},$

то $f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{p}}\frac{1}{z^2+1}$. Аналогично получаем $f_s(z)=\sqrt{\frac{2}{p}}\frac{z}{z^2+1}$.

В свою очередь, применив косинус- и синус- преобразования Фурье к функциям $f_c(z)$ *и* $f_s(z)$, получим функцию $f(x)$, т.е.

$$\frac{2}{p}\int_0^{+\infty}\frac{\cos zX}{z^2+1}dz=e^{-x}, \qquad \frac{2}{p}\int_0^{+\infty}\frac{z\sin zX}{z^2+1}dz=e^{-x}.$$

Отсюда получаем интегралы Лапласа:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos zX}{z^2+1}dz=\frac{p}{2}e^{-x}, \qquad \int_0^{+\infty}\frac{z\sin zX}{z^2+1}dz=\frac{p}{2}e^{-x}.$$

Пример 4. Пусть функция $f(x)$ определена равенствами

$$f(x)=\begin{cases}1, & \textit{если}\ \ 0\le x<a;\\ \frac{1}{2}, & \textit{если}\ \ x=a;\\ 0, & \textit{если}\ \ x>a.\end{cases}$$

– Найти ее косинус- и синус- преобразования (рис. 14).

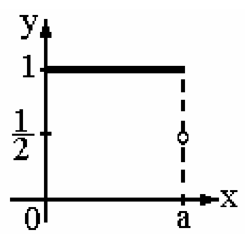

Рис 14

Решение. Находим косинус- преобразование данной функции:

$$f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^{+\infty}f(u)\cos zudu=\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^{a}\cos zudu+\sqrt{\frac{2}{p}}\int_a^{+\infty}0\cdot\cos zudu=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^{a}\cos zudu=\sqrt{\frac{2}{p}}\frac{\sin az}{z}.$$

Найдем теперь синус- преобразование:

$$f_s(z)=\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^{+\infty}f(u)\sin zudu=\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^{a}\sin zudu+\sqrt{\frac{2}{p}}\int_a^{\infty}0\cdot\sin zudu=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^{a}\sin zudu=\sqrt{\frac{2}{p}}\cdot\frac{1-\cos az}{z}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{2}{p}\int_0^{+\infty}\frac{\sin az}{z}\cos Xzdz=\begin{cases}1, & \textit{если}\quad 0\le x<a;\\ \frac{1}{2}, & \textit{если}\quad x=a;\\ 0, & \textit{если}\quad x>a.\end{cases}$$

(разрывный множитель Дирихле) и

$$\frac{2}{p}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos az}{z}\sin Xzdz=\begin{cases}1, & \textit{если}\quad 0\le x<a;\\ \frac{1}{2}, & \textit{если}\quad x=a;\\ 0, & \textit{если}\quad x>a.\end{cases}$$

Примеры для самостоятельного решения

Найти преобразования Фурье для функции

Пример 1. $f(x)=\begin{cases}\cos(X/2), & \textit{если}\quad |x|<p;\\ 0, & \textit{если}\quad |x|>p.\end{cases}$

Пример 2. $f(x)=\begin{cases}-e^{x}, & \textit{если}\quad -1\le x<0;\\ e^{-x}, & \textit{если}\quad 0\le x\le 1;\\ 0, & \textit{если}\quad |x|>1.\end{cases}$

Пример 3. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$

Пример 4. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\cos a\ X.$

Пример 5. Найти синус- и косинус- преобразования Фурье функции

$$f(y)=\begin{cases}-1, & \textit{если}\quad -1\le x\le -\frac{1}{2};\\ 0, & \textit{если}\quad -\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2};\\ 1, & \textit{если}\quad \frac{1}{2}\le x\le 1.\end{cases}$$

Ответы: **1)** $F(z)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\cdot\frac{4}{1-4z^2}\cos p\ z$

2) $F(z)=\frac{2i}{\sqrt{2p}}\frac{ze-\sin z-z\cos z}{e(1+z^2)}.$

3) $F(z)=e^{-\frac{z^2}{2.}}$

4) $F(z)=e^{-\frac{z^2+a^2}{2}}cha\ z.$

5) $f_c(z)=\frac{\sin z-\sin(z/2)}{z}\cdot\sqrt{\frac{2}{p}},$

$f_s(z)=\frac{\cos(z/2)-\cos(z)}{z}\sqrt{\frac{2}{p}}.$

Спектральная характеристика (спектр) функции

Вернемся к первому интегралу в формуле (3.2). Прямое преобразование Фурье функции играет большую роль в радиофизике. Здесь принято переменные x, l, F обозначать $u=x=t,\ l=w, F(l)=S(w)$. Саму функцию $f(t)$ называют сигналом. Теперь прямое преобразование Фурье (3.2) принимает вид

$$S(w)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{iwt}dt \quad \text{(иногда } S(w)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iwt}dt\text{)} \qquad (4.1)$$

и называют спектральной характеристикой (или спектром) сигнала. Функцию $|S(w)|$ называют амплитудным спектром, а саму $S(w)$ - частотно- фазовым спектром.

Примеры с решением

В качестве примеров применения интеграла Фурье рассмотрим спектры некоторых функций.

Пример 1. Спектр единичного скачка.

Единичный скачок определяется уравнениями

$$f(t)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad t\ge 0;\\ 0, & \text{если} \quad t<0.\end{cases}$$

(см. рис.15). Так как для этой функции $\int_0^{\infty}\left|f(t)\right|dt \to \infty,$ то формула (4.1) (она

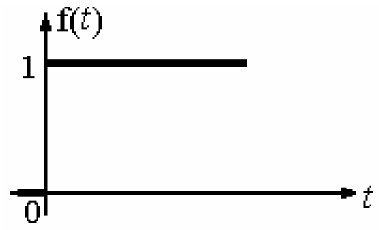

Рис 15

может быть еще в виде $S(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}dt$) не может быть применена непосредственно. Чтобы обойти это затруднение, рассмотрим вместо $f(t)$ функцию $f(t)e^{-at}$ при $a \to 0$.

Подставляя $f(t)e^{-at}$ в формулу (4.1) и замечая, что $f(t) = 1$ при $t \geq 0$ *и* $f(t) = 0$ *при* $t < 0$, получим

$$S(w) = \lim_{a \to 0}\int_0^{\infty} e^{-at}e^{-iwt}dt = \lim_{a \to 0}\int_0^{\infty} e^{-(a+iw)t}dt =$$

$$= \lim_{a \to 0}\left.\frac{e^{-(a+iw)t}}{-(a+iw)}\right|_0^{\infty} = \lim_{a \to 0}\frac{1}{a+iw} = \frac{1}{iw} = -\frac{i}{w}e^{-i\frac{p}{2}}.$$

Имеем, следовательно,

$$S(w) = \frac{1}{w}e^{-i\frac{p}{2}}, \quad \text{откуда находим модуль и фазу:}$$

$\left|S(w)\right| = \dfrac{1}{w}; \quad j(w) = \dfrac{p}{2}.$ Графики этих функций изображены на рис.16.

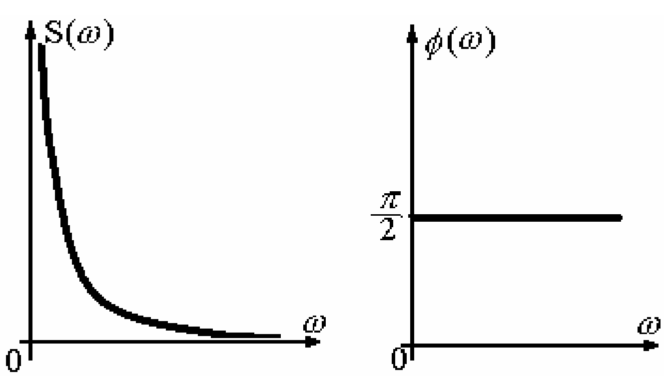

Рис 16

Пример 2. Спектр прямоугольного импульса.

Прямоугольный импульс (см. рис. 17) высотой h и длительностью t задан уравнениями:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < \frac{p}{2} \quad \text{и} \quad t > \frac{p}{2}, \\ h, & \text{при } -\frac{p}{2} < t < \frac{p}{2}. \end{cases}$$

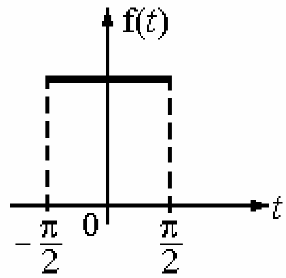

Рис 17

По формуле (4.1) находим:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=h\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-i\omega t}dt=h\left.\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=h\tau\frac{e^{\frac{i\omega\tau}{2}}-e^{-\frac{i\omega\tau}{2}}}{2i\omega\frac{\pi}{2}}=h\tau\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}.$$

Так как $h\tau=q$ - площадь импульса, то $S(\omega)=q\dfrac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$. График $|S(\omega)|$

изображен на рис. 18. Так как $\lim\limits_{\tau\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}=1$, то при $\tau=0$, $S=q$.

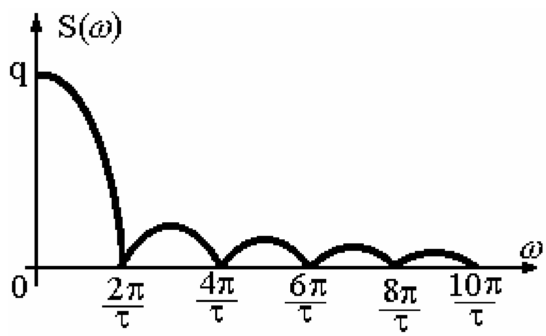

Рис 18

Пример 3. Спектр колокольного импульса.

Этот импульс (см.рис19) определяется функцией $f(t)=e^{-\beta^2 t^2}$.

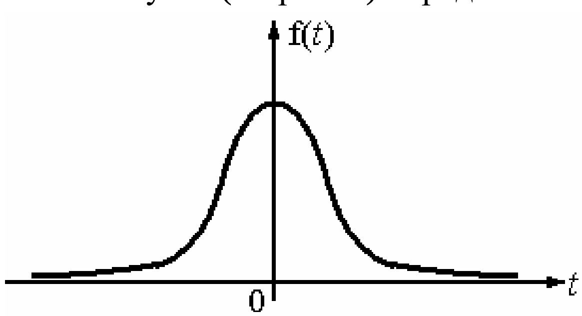

Рис 19

По формуле (4.1) находим:

$$S(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b^2t^2}e^{-iwt}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(b^2t^2+iwt)}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[(bt+\frac{iw}{2b})^2+\frac{w^2}{4b^2}\right]}dt=$$

$$=e^{-\frac{w^2}{4b^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(bt+\frac{iw}{2b})^2}dt.$$

Полагая $bt+\dfrac{iw}{2b}=X, \quad b\ dt=dX$, находим:

$$S(w)=\frac{1}{b}e^{-\frac{w^2}{4b^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{2}{b}e^{-\frac{w^2}{4b^2}}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{p}}{b}e^{-\frac{w^2}{4b^2}}$$

(так как $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{p}}{2}$). Итак, $S(w)=\dfrac{\sqrt{p}}{b}e^{-\frac{w2}{4b^2}}$.

В этом примере преобразование Фурье дало такую же функцию, как и исходная

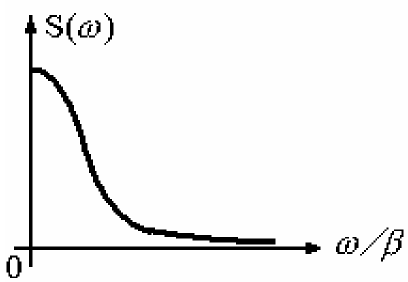

Рис 20

(см. рис. 20) .

Примеры для самостоятельного решения

Пример 1. Определить спектр импульса, график которого изображен на рис. 21.

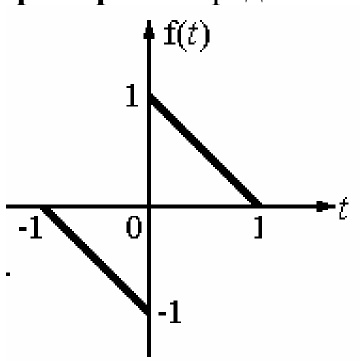

Рис 21

Пример 2. Найти спектральную функцию и амплитудный спектр функции

$$f(x)=\begin{cases} e^{-ax}, & при \quad X>0, \quad a>0, \\ 0, & при \quad X<0. \end{cases}$$

Ответы. **1).** $S(w) = \frac{2i}{w}(\frac{\sin w}{w} - 1).$

2). $S(w) = \frac{1}{2p\sqrt{a^2 + w^2}}.$