А.В. Коротков

ЭЛЕМЕНТЫ ПЯТНАДЦАТИМЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Издательство "НОК"

Новочеркасск 2011

ББК 22.14
УДК 512.7
К 68

Рецензент: ***Логинов В.Т.***, докт. техн. наук, профессор,
академик Российской Инженерной Академии

Коротков А.В.
К 68 Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. Новочеркасск: Изд-во «НОК», 2011. – 36 с.

ISBN 978-5-8431-0209-8

В брошюре содержится материал по основам составного пятнадцати-векторного исчисления применительно к многомерной физической теории в пятнадцатимерном физическом пространстве. Изложение построено в традиционной символике с учетом потребности приложений, в которых используются трехмерное и семимерное векторные исчисления. Это делает ее доступной пониманию студентов, преподавателей и научных работников, специализирующихся во многих областях науки и техники. Брошюра окажется полезной, прежде всего, в области многомерной математической физики, в частности, в теории поля и в физике элементарных частиц. Она приоритетна в рассмотрении закономерностей пятнадцати мерных симметрий.

ББК 22.14
УДК 512.7

ISBN 978-5-8431-0209-8

Глава 1.

ПЯТНАДЦАТИМЕРНАЯ ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

На практике широко используется трехмерное векторное исчисление во многих отраслях науки и техники. Менее известно, но хорошо изучено семимерное векторное исчисление. Оно разработано в последние десятилетия и рассмотрено в плане векторного семимерного анализа, спинорного и изовекторного исчислений [1,2].

Трехмерное и семимерное векторные исчисления обладают рядом замечательных свойств и выделяются среди евклидовых векторных пространств наличием операции векторного умножения двух векторов. Другим свойством этих алгебр является отсутствие обратного вектора и деления двух векторов друг на друга. Это, казалось бы, неприятное свойство, однако, дало трехмерные и семимерные векторные алгебры, широко используется и дает возможность дальнейшего расширения размерности векторных алгебр.

Векторным алгебрам в принципе не свойственно наличие обратных величин и процедуры деления векторов, а, следовательно, полученный в XIX веке замечательный результат в отношении гиперкомплексных чисел с делением не является ограничением для получения многомерных векторных алгебр. Рассмотрим в связи с этим порядок получения пятнадцати векторной алгебры, используя известную процедуру удвоения чисел, которая дала возможность получить из алгебры одномерных чисел (действительных чисел), алгебры двух-, четырех- и восьмимерных чисел – комплексных чисел, кватернионов и октонионов Кэли.

Порядок получения комплексных чисел кватернионов и октонионов свяан с процедурой удвоения. Отметим, что задача нахождения пятнадцатимерных векторных алгебр имеет неоднозначное решение. Каждое решение определяется видом процедуры удвоения, так, например, при удвоении действительных чисел можно получить двухмерные комплексные числа

$$\boldsymbol{ab}=(a_0b_0-b_1a_1,\ a_0b_1+b_0a_1),$$

т.е. $$\boldsymbol{ab}=(a_0,\ a_1)(b_0,\ b_1)=(a_0b_0-b_1a_1,\ a_0b_1+b_0a_1).$$

В координатной форме записи операция умножения двух двумерных чисел может быть представлена в виде:

$$\boldsymbol{ab}=\begin{array}{ll}(a_0b_0 & -b_1a_1, \\ \ a_0b_1 & +b_0a_1)\end{array}$$

При удвоении комплексных чисел можно получить четырехмерные кватернионы. При этом произведением двух пар вещественных чисел $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1)$ и $\boldsymbol{b}=(b_0,b_1)$ назовем пару

$$\boldsymbol{ab}=(a_0b_0-b_1\overline{a}_1,\ \overline{a}_0b_1+b_0a_1),$$

т.е. $$\boldsymbol{ab}=(a_0,a_1)(b_0,b_1)=(a_0b_0-b_1\overline{a}_1,\overline{a}_0b_1+b_0a_1).$$

В координатной форме записи операция умножения двух четырехмерных кватернионов может быть представлена в виде:

$$\boldsymbol{ab}= \begin{array}{cc|cc|} a_0b_0 & -b_1a_1 & -b_2a_2 & -a_3b_3, \\ a_0b_1 & +b_0a_1 & +b_2a_3 & -a_2b_3, \\ \cline{1-2} a_0b_2 & +b_3a_1 & +b_0a_2 & -a_3b_1, \\ a_0b_3 & -b_2a_1 & +b_0a_3 & +a_2b_1. \\ \hline \end{array}$$

При удвоении кватернионов можно получить восьмимерные октонионы. При этом произведением пар $\boldsymbol{a}=(a_0, a_1)$ и $\boldsymbol{b}=(b_0, b_1)$ называется пара

$$\boldsymbol{ab}=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1,\ \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

т.е. $$\boldsymbol{ab}=(a_0, a_1)(b_0, b_1)=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1,\ \bar{a}_0b_1+b_0a_1).$$

В координатной форме записи операция умножения двух восьмимерных октонионов может быть представлена в виде:

$$\begin{array}{llllllll} \boldsymbol{ab}= (a_0b_0 & -b_1a_1 & -b_2a_2 & -a_3b_3 & -b_4a_4 & -a_5b_5 & -a_6b_6 & -b_7a_7, \\ a_0b_1 & +b_0a_1 & +b_2a_3 & -a_2b_3 & +b_4a_5 & -a_4b_5 & +a_6b_7 & -b_6a_7, \\ a_0b_2 & +b_3a_1 & +b_0a_2 & -a_3b_1 & +b_4a_6 & +a_7b_5 & -a_4b_6 & -b_7a_5, \\ a_0b_3 & -b_2a_1 & +b_0a_3 & +a_2b_1 & +b_4a_7 & -a_6b_5 & -a_4b_7 & +b_6a_5, \\ a_0b_4 & +b_5a_1 & +b_6a_2 & +a_3b_7 & +b_0a_4 & -a_5b_1 & -a_6b_2 & -b_3a_7, \\ a_0b_5 & -b_4a_1 & -b_6a_3 & +a_2b_7 & +b_0a_5 & +a_4b_1 & +a_6b_3 & -b_2a_7, \\ a_0b_6 & -b_7a_1 & -b_4a_2 & +a_3b_5 & +b_0a_6 & +a_7b_1 & +a_4b_2 & -b_3a_5, \\ a_0b_7 & +b_6a_1 & -b_4a_3 & -a_2b_5 & +b_0a_7 & -a_6b_1 & +a_4b_3 & +b_2a_5). \end{array}$$

Указанная процедура удвоения – одна из процедур, позволяющих получать комплексные числа, кватернионы и октонионы. Эта процедура не позволяет получить другие многомерные числовые системы с делением, что было определено еще в XIX веке. Более того, отсутствует не только деление, но также и наличие обратных векторов, а вместе с тем кватернионы теряют свойство коммутативности произведения, а октонионы – также свойство ассоциативности. Это резко ограничивает возможности использования этих систем на практике.

Вместе с тем получаемые из комплексных чисел, кватернионов и октонионов одно-, трех- и семимерные векторные алгебры, как отмечалось, не требуют наличия свойств деления и получения обратных векторов, так что, применение той же процедуры удвоения приводит к возможности получения шестнадцатимерной алгебры, из которой выделяется пятнадцатимерная векторная алгебра с весьма экзотическими свойствами.

Применим процедуру удвоения к октонионам. При удвоении октонионов можно получить шестнадцатимерные (тернарные) числа. При этом произведением двух пар октонионов $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1)$ и $\boldsymbol{b}=(b_0,b_1)$ назовем пару

$$\boldsymbol{ab}=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1,\ \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

т.е. $$\boldsymbol{ab}=(a_0, a_1)(b_0, b_1)=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1,\ \bar{a}_0b_1+b_0a_1).$$

В координатной форме записи операция умножения шестнадцатимерных чисел (при такой процедуре удвоения) может быть представлена в виде:

***ab*=**

a_0b_0	$-a_1b_1$	$-a_2b_2$	$-a_3b_3$	$-a_4b_4$	$-a_5b_5$	$-a_6b_6$	$-a_7b_7$	$-a_8b_8$	$-a_9b_9$	$-a_{10}b_{10}$	$-a_{11}b_{11}$	$-a_{12}b_{12}$	$-a_{13}b_{13}$	$-a_{14}b_{14}$	$-a_{15}b_{15}$
a_0b_1	$+a_1b_0$	$-a_2b_3$	$+a_3b_2$	$-a_4b_5$	$+a_5b_4$	$-a_7b_6$	$+a_6b_7$	$-a_8b_9$	$+a_9b_8$	$-a_{11}b_{10}$	$+a_{10}b_{11}$	$-a_{13}b_{12}$	$+a_{12}b_{13}$	$-a_{14}b_{15}$	$+a_{15}b_{14}$
a_0b_2	$+a_2b_0$	$-a_4b_6$	$+a_6b_4$	$-a_5b_7$	$+a_7b_5$	$-a_3b_1$	$+a_1b_3$	$-a_8b_{10}$	$+a_{10}b_8$	$-a_{14}b_{12}$	$+a_{12}b_{14}$	$-a_{15}b_{13}$	$+a_{13}b_{15}$	$-a_9b_{11}$	$+a_{11}b_9$
a_0b_3	$+a_3b_0$	$-a_6b_5$	$+a_5b_6$	$-a_1b_2$	$+a_2b_1$	$-a_4b_7$	$+a_7b_4$	$-a_8b_{11}$	$+a_{11}b_8$	$-a_{13}b_{14}$	$+a_{14}b_{13}$	$-a_{10}b_9$	$+a_9b_{10}$	$-a_{15}b_{12}$	$+a_{12}b_{15}$
a_0b_4	$+a_4b_0$	$-a_5b_1$	$+a_1b_5$	$-a_7b_3$	$+a_3b_7$	$-a_6b_2$	$+a_2b_6$	$-a_8b_{12}$	$+a_{12}b_8$	$-a_9b_{13}$	$+a_{13}b_9$	$-a_{11}b_{15}$	$+a_{15}b_{11}$	$-a_{10}b_{14}$	$+a_{14}b_{10}$
a_0b_5	$+a_5b_0$	$-a_7b_2$	$+a_2b_7$	$-a_3b_6$	$+a_6b_3$	$-a_1b_4$	$+a_4b_1$	$-a_8b_{13}$	$+a_{13}b_8$	$-a_{10}b_{15}$	$+a_{15}b_{10}$	$-a_{14}b_{11}$	$+a_{11}b_{14}$	$-a_{12}b_9$	$+a_9b_{12}$
a_0b_6	$+a_6b_0$	$-a_1b_7$	$+a_7b_1$	$-a_2b_4$	$+a_4b_2$	$-a_5b_3$	$+a_3b_5$	$-a_8b_{14}$	$+a_{14}b_8$	$-a_{15}b_9$	$+a_9b_{15}$	$-a_{12}b_{10}$	$+a_{10}b_2$	$-a_{11}b_{13}$	$+a_{13}b_{11}$
a_0b_7	$+a_7b_0$	$-a_3b_4$	$+a_4b_3$	$-a_6b_1$	$+a_1b_6$	$-a_2b_5$	$+a_5b_2$	$-a_8b_{15}$	$+a_{15}b_8$	$-a_{12}b_{11}$	$+a_{11}b_{12}$	$-a_9b_{14}$	$+a_{14}b_9$	$-a_{13}b_{10}$	$+a_{10}b_{13}$
a_0b_8	$+a_8b_0$	$-a_9b_1$	$+a_1b_9$	$-a_{10}b_2$	$+a_2b_{10}$	$-a_{11}b_3$	$+a_3b_{11}$	$-a_{12}b_4$	$+a_4b_{12}$	$-a_{13}b_5$	$+a_5b_{13}$	$-a_{14}b_6$	$+a_6b_{14}$	$-a_{15}b_7$	$+a_7b_{15}$
a_0b_9	$+a_9b_0$	$-a_3b_{10}$	$+a_{10}b_3$	$-a_5b_{12}$	$+a_{12}b_5$	$-a_6b_{15}$	$+a_{15}b_6$	$-a_1b_8$	$+a_8b_1$	$-a_{11}b_2$	$+a_2b_{11}$	$-a_{13}b_4$	$+a_4b_{13}$	$-a_{14}b_7$	$+a_7b_{14}$
a_0b_{10}	$+a_{10}b_0$	$-a_6b_{12}$	$+a_{12}b_6$	$-a_7b_{13}$	$+a_{13}b_7$	$-a_1b_{11}$	$+a_{11}b_1$	$-a_2b_8$	$+a_8b_2$	$-a_{14}b_4$	$+a_4b_{14}$	$-a_{15}b_5$	$+a_5b_{15}$	$-a_9b_3$	$+a_3b_9$
a_0b_{11}	$+a_{11}b_0$	$-a_5b_{14}$	$+a_{14}b_5$	$-a_2b_9$	$+a_9b_2$	$-a_7b_{12}$	$+a_{12}b_7$	$-a_3b_8$	$+a_8b_3$	$-a_{13}b_6$	$+a_6b_{13}$	$-a_{10}b_1$	$+a_1b_{10}$	$-a_{15}b_4$	$+a_4b_{15}$
a_0b_{12}	$+a_{12}b_0$	$-a_1b_{13}$	$+a_{13}b_1$	$-a_3b_{15}$	$+a_{15}b_3$	$-a_2b_{14}$	$+a_{14}b_2$	$-a_4b_8$	$+a_8b_4$	$-a_9b_5$	$+a_5b_9$	$-a_{11}b_7$	$+a_7b_{11}$	$-a_{10}b_6$	$+a_6b_{10}$
a_0b_{13}	$+a_{13}b_0$	$-a_2b_{15}$	$+a_{15}b_2$	$-a_6b_{11}$	$+a_{11}b_6$	$-a_4b_9$	$+a_9b_4$	$-a_5b_8$	$+a_8b_5$	$-a_{10}b_7$	$+a_7b_{10}$	$-a_{14}b_3$	$+a_3b_{14}$	$-a_{12}b_1$	$+a_1b_{12}$
a_0b_{14}	$+a_{14}b_0$	$-a_7b_9$	$+a_9b_7$	$-a_4b_{10}$	$+a_{10}b_4$	$-a_3b_{13}$	$+a_{13}b_3$	$-a_6b_8$	$+a_8b_6$	$-a_{15}b_1$	$+a_1b_{15}$	$-a_{12}b_2$	$+a_2b_{12}$	$-a_{11}b_5$	$+a_5b_{11}$
a_0b_{15}	$+a_{15}b_0$	$-a_4b_{11}$	$+a_{11}b_4$	$-a_1b_{14}$	$+a_{14}b_1$	$-a_5b_{10}$	$+a_{10}b_5$	$-a_7b_8$	$+a_8b_7$	$-a_{12}b_3$	$+a_3b_{12}$	$-a_9b_6$	$+a_6b_9$	$-a_{13}b_2$	$+a_2b_{13}$

***(ab)*=**	$-a_1b_1$	$-a_2b_2$	$-a_3b_3$	$-a_4b_4$	$-a_5b_5$	$-a_6b_6$	$-a_7b_7$	$-a_8b_8$	$-a_9b_9$	$-a_{10}b_{10}$	$-a_{11}b_{11}$	$-a_{12}b_{12}$	$-a_{13}b_{13}$	$-a_{14}b_{14}$	$-a_{15}b_{15}$

***[ab]*=**

$-a_2b_3$	$+a_3b_2$	$-a_4b_5$	$+a_5b_4$	$-a_7b_6$	$+a_6b_7$	$-a_8b_9$	$+a_9b_8$	$-a_{11}b_{10}$	$+a_{10}b_{11}$	$-a_{13}b_{12}$	$+a_{12}b_{13}$	$-a_{14}b_{15}$	$+a_{15}b_{14}$
$-a_4b_6$	$+a_6b_4$	$-a_5b_7$	$+a_7b_5$	$-a_3b_1$	$+a_1b_3$	$-a_8b_{10}$	$+a_{10}b_8$	$-a_{14}b_{12}$	$+a_{12}b_{14}$	$-a_{15}b_{13}$	$+a_{13}b_{15}$	$-a_9b_{11}$	$+a_{11}b_9$
$-a_6b_5$	$+a_5b_6$	$-a_1b_2$	$+a_2b_1$	$-a_4b_7$	$+a_7b_4$	$-a_8b_{11}$	$+a_{11}b_8$	$-a_{13}b_{14}$	$+a_{14}b_{13}$	$-a_{10}b_9$	$+a_9b_{10}$	$-a_{15}b_{12}$	$+a_{12}b_{15}$
$-a_5b_1$	$+a_1b_5$	$-a_7b_3$	$+a_3b_7$	$-a_6b_2$	$+a_2b_6$	$-a_8b_{12}$	$+a_{12}b_8$	$-a_9b_{13}$	$+a_{13}b_9$	$-a_{11}b_{15}$	$+a_{15}b_{11}$	$-a_{10}b_{14}$	$+a_{14}b_{10}$
$-a_7b_2$	$+a_2b_7$	$-a_3b_6$	$+a_6b_3$	$-a_1b_4$	$+a_4b_1$	$-a_8b_{13}$	$+a_{13}b_8$	$-a_{10}b_{15}$	$+a_{15}b_{10}$	$-a_{14}b_{11}$	$+a_{11}b_{14}$	$-a_{12}b_9$	$+a_9b_{12}$
$-a_1b_7$	$+a_7b_1$	$-a_2b_4$	$+a_4b_2$	$-a_5b_3$	$+a_3b_5$	$-a_8b_{14}$	$+a_{14}b_8$	$-a_{15}b_9$	$+a_9b_{15}$	$-a_{12}b_{10}$	$+a_{10}b_2$	$-a_{11}b_{13}$	$+a_{13}b_{11}$
$-a_3b_4$	$+a_4b_3$	$-a_6b_1$	$+a_1b_6$	$-a_2b_5$	$+a_5b_2$	$-a_8b_{15}$	$+a_{15}b_8$	$-a_{12}b_{11}$	$+a_{11}b_{12}$	$-a_9b_{14}$	$+a_{14}b_9$	$-a_{13}b_{10}$	$+a_{10}b_{13}$
$-a_9b_1$	$+a_1b_9$	$-a_{10}b_2$	$+a_2b_{10}$	$-a_{11}b_3$	$+a_3b_{11}$	$-a_{12}b_4$	$+a_4b_{12}$	$-a_{13}b_5$	$+a_5b_{13}$	$-a_{14}b_6$	$+a_6b_{14}$	$-a_{15}b_7$	$+a_7b_{15}$
$-a_3b_{10}$	$+a_{10}b_3$	$-a_5b_{12}$	$+a_{12}b_5$	$-a_6b_{15}$	$+a_{15}b_6$	$-a_1b_8$	$+a_8b_1$	$-a_{11}b_2$	$+a_2b_{11}$	$-a_{13}b_4$	$+a_4b_{13}$	$-a_{14}b_7$	$+a_7b_{14}$
$-a_6b_{12}$	$+a_{12}b_6$	$-a_7b_{13}$	$+a_{13}b_7$	$-a_1b_{11}$	$+a_{11}b_1$	$-a_2b_8$	$+a_8b_2$	$-a_{14}b_4$	$+a_4b_{14}$	$-a_{15}b_5$	$+a_5b_{15}$	$-a_9b_3$	$+a_3b_9$
$-a_5b_{14}$	$+a_{14}b_5$	$-a_2b_9$	$+a_9b_2$	$-a_7b_{12}$	$+a_{12}b_7$	$-a_3b_8$	$+a_8b_3$	$-a_{13}b_6$	$+a_6b_{13}$	$-a_{10}b_1$	$+a_1b_{10}$	$-a_{15}b_4$	$+a_4b_{15}$
$-a_1b_{13}$	$+a_{13}b_1$	$-a_3b_{15}$	$+a_{15}b_3$	$-a_2b_{14}$	$+a_{14}b_2$	$-a_4b_8$	$+a_8b_4$	$-a_9b_5$	$+a_5b_9$	$-a_{11}b_7$	$+a_7b_{11}$	$-a_{10}b_6$	$+a_6b_{10}$
$-a_2b_{15}$	$+a_{15}b_2$	$-a_6b_{11}$	$+a_{11}b_6$	$-a_4b_9$	$+a_9b_4$	$-a_5b_8$	$+a_8b_5$	$-a_{10}b_7$	$+a_7b_{10}$	$-a_{14}b_3$	$+a_3b_{14}$	$-a_{12}b_1$	$+a_1b_{12}$
$-a_7b_9$	$+a_9b_7$	$-a_4b_{10}$	$+a_{10}b_4$	$-a_3b_{13}$	$+a_{13}b_3$	$-a_6b_8$	$+a_8b_6$	$-a_{15}b_1$	$+a_1b_{15}$	$-a_{12}b_2$	$+a_2b_{12}$	$-a_{11}b_5$	$+a_5b_{11}$
$-a_4b_{11}$	$+a_{11}b_4$	$-a_1b_{14}$	$+a_{14}b_1$	$-a_5b_{10}$	$+a_{10}b_5$	$-a_7b_8$	$+a_8b_7$	$-a_{12}b_3$	$+a_3b_{12}$	$-a_9b_6$	$+a_6b_9$	$-a_{13}b_2$	$+a_2b_{13}$

Векторное произведение двух векторов можно представить в виде суммы:

$$[\mathbf{ab}] = [(a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+\ldots+a_{15}\mathbf{e}_{15})(b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+\ldots+b_{15}\mathbf{e}_{15})],$$

т. е. $[\mathbf{ab}]=$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_8 & \mathbf{e}_9 \\ a_1 & a_8 & a_9 \\ b_1 & b_8 & b_9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{10} \\ a_1 & a_{11} & a_{10} \\ b_1 & b_{11} & b_{10} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_{13} & \mathbf{e}_{12} \\ a_1 & a_{13} & a_{12} \\ b_1 & b_{13} & b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_{14} & \mathbf{e}_{15} \\ a_1 & a_{14} & a_{15} \\ b_1 & b_{14} & b_{15} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_6 \\ a_2 & a_4 & a_6 \\ b_2 & b_4 & b_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_8 & \mathbf{e}_{10} \\ a_2 & a_8 & a_{10} \\ b_2 & b_8 & b_{10} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_{14} & \mathbf{e}_{12} \\ a_2 & a_{14} & a_{12} \\ b_2 & b_{14} & b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_{15} & \mathbf{e}_{13} \\ a_2 & a_{15} & a_{13} \\ b_2 & b_{15} & b_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_9 & \mathbf{e}_{11} \\ a_2 & a_9 & a_{11} \\ b_2 & b_9 & b_{11} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_5 \\ a_3 & a_6 & a_5 \\ b_3 & b_6 & b_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_8 & \mathbf{e}_{11} \\ a_3 & a_8 & a_{11} \\ b_3 & b_8 & b_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_{13} & \mathbf{e}_{14} \\ a_3 & a_{13} & a_{14} \\ b_3 & b_{13} & b_{14} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_{10} & \mathbf{e}_9 \\ a_3 & a_{10} & a_9 \\ b_3 & b_{10} & b_9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_{15} & \mathbf{e}_{12} \\ a_3 & a_{15} & a_{12} \\ b_3 & b_{15} & b_{12} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_1 \\ a_4 & a_5 & a_1 \\ b_4 & b_5 & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_8 & \mathbf{e}_{12} \\ a_4 & a_8 & a_{12} \\ b_4 & b_8 & b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_9 & \mathbf{e}_{13} \\ a_4 & a_9 & a_{13} \\ b_4 & b_9 & b_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{15} \\ a_4 & a_{11} & a_{15} \\ b_4 & b_{11} & b_{15} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_{10} & \mathbf{e}_{14} \\ a_4 & a_{10} & a_{14} \\ b_4 & b_{10} & b_{14} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_7 & \mathbf{e}_2 \\ a_5 & a_7 & a_2 \\ b_5 & b_7 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_8 & \mathbf{e}_{13} \\ a_5 & a_8 & a_{13} \\ b_5 & b_8 & b_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_{10} & \mathbf{e}_{15} \\ a_5 & a_{10} & a_{15} \\ b_5 & b_{10} & b_{15} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_{14} & \mathbf{e}_{11} \\ a_5 & a_{14} & a_{11} \\ b_5 & b_{14} & b_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_{12} & \mathbf{e}_9 \\ a_5 & a_{12} & a_9 \\ b_5 & b_{12} & b_9 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_7 \\ a_6 & a_1 & a_7 \\ b_6 & b_1 & b_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_8 & \mathbf{e}_{14} \\ a_6 & a_8 & a_{14} \\ b_6 & b_8 & b_{14} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_{15} & \mathbf{e}_9 \\ a_6 & a_{15} & a_9 \\ b_6 & b_{15} & b_9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_{12} & \mathbf{e}_{10} \\ a_6 & a_{12} & a_{10} \\ b_6 & b_{12} & b_{10} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{13} \\ a_6 & a_{11} & a_{13} \\ b_6 & b_{11} & b_{13} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{e}_7 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ a_7 & a_3 & a_4 \\ b_7 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_7 & \mathbf{e}_8 & \mathbf{e}_{15} \\ a_7 & a_8 & a_{15} \\ b_7 & b_8 & b_{15} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_7 & \mathbf{e}_{12} & \mathbf{e}_{11} \\ a_7 & a_{12} & a_{11} \\ b_7 & b_{12} & b_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_7 & \mathbf{e}_9 & \mathbf{e}_{14} \\ a_7 & a_9 & a_{14} \\ b_7 & b_9 & b_{14} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_7 & \mathbf{e}_{13} & \mathbf{e}_{10} \\ a_7 & a_{13} & a_{10} \\ b_7 & b_{13} & b_{10} \end{vmatrix}$$

тридцати пяти определителей третьего порядка, заданных таблицей:

орт	коммутатор a_ib_j-a_jb_i						
$\mathbf{e}_1$	[2.3]	[4.5]	[7.6]	[8.9]	[11.10]	[13.12]	[14.15]
$\mathbf{e}_2$	[4.6]	[5.7]	[3.1]	[8.10]	[14.12]	[15.13]	[9.11]
$\mathbf{e}_3$	[6.5]	[1.2]	[4.7]	[8.11]	[13.14]	[10.9]	[15.12]
$\mathbf{e}_4$	[5.1]	[7.3]	[6.2]	[8.12]	[9.13]	[11.15]	[10.14]
$\mathbf{e}_5$	[7.2]	[3.6]	[1.4]	[8.13]	[10.15]	[14.11]	[12.9]
$\mathbf{e}_6$	[1.7]	[2.4]	[5.3]	[8.14]	[15.9]	[12.10]	[11.13]
$\mathbf{e}_7$	[3.4]	[6.1]	[2.5]	[8.15]	[12.11]	[9.14]	[13.10]
$\mathbf{e}_8$	[9.1]	[10.2]	[11.3]	[12.4]	[13.5]	[14.6]	[15.7]
$\mathbf{e}_9$	[3.10]	[5.12]	[6.15]	[1.8]	[11.2]	[13.4]	[14.7]
$\mathbf{e}_{10}$	[6.12]	[7.13]	[1.11]	[2.8]	[14.4]	[15.5]	[9.3]
$\mathbf{e}_{11}$	[5.14]	[2.9]	[7.12]	[3.8]	[13.6]	[10.1]	[15.4]
$\mathbf{e}_{12}$	[1.13]	[3.15]	[2.14]	[4.8]	[9.5]	[11.7]	[10.6]
$\mathbf{e}_{13}$	[2.15]	[6.11]	[4.9]	[5.8]	[10.7]	[14.3]	[12.1]
$\mathbf{e}_{14}$	[7.9]	[4.10]	[3.13]	[6.8]	[15.1]	[12.2]	[11.5]
$\mathbf{e}_{15}$	[4.11]	[1.14]	[5.10]	[7.8]	[12.3]	[9.6]	[13.2]

Здесь индексом i,j-обозначена величина

$$a_ib_j\text{-}a_jb_i,$$

а все элементы суммируются покоординатно.

Та же таблица может быть представлена в виде:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
\mathbf{[a,b]}= & |1,2,3| & + & |1,8,\ 9| & + & |1,11,10| & + & |1,13,12| & + & |1,14,15| & + \\
 & |2,4,6| & + & |2,8,10| & + & |2,14,12| & + & |2,15,13| & + & |2,\ 9,11\ | & + \\
 & |3,6,5| & + & |3,8,11| & + & |3,13,14| & + & |3,10,\ 9| & + & |3,15,12| & + \\
 & |4,5,1| & + & |4,8,12| & + & |4,\ 9,13| & + & |4,11,15| & + & |4,10,14| & + \\
 & |5,7,2| & + & |5,8,13| & + & |5,10,15| & + & |5,14,11| & + & |5,12,\ 9\ | & + \\
 & |6,1,7| & + & |6,8,14| & + & |6,15,\ 9| & + & |6,12,10| & + & |6,11,13| & + \\
 & |7,3,4| & + & |7,8,15| & + & |7,12,11| & + & |7,\ 9,14| & + & |7,13,10| & .
\end{array}
$$

явно определяющем трех-, семи-, и 15-ти варианты, или же в виде:

1,2,3	1,4,5	1,7,6	1,8,9	1,11,10	1,13,12	1,14,15
2,4,6	2,5,7	2,3,1	2,8,10	2,14,12	2,15,13	2,9,11
3,6,5	3,1,2	3,4,7	3,8,11	3,13,14	3,10,9	3,15,12
4,5,1	4,7,3	4,6,2	4,8,12	4,9,13	4,11,15	4,10,14
5,7,2	5,3,6	5,1,4	5,8,13	5,10,15	5,14,11	5,12,9
6,1,7	6,2,4	6,5,3	6,8,14	6,15,9	6,12,10	6,11,13
7,3,4	7,6,1	7,2,5	7,8,15	7,12,11	7,9,14	7,13,10
8,9,1	8,10,2	8,11,3	8,12,4	8,13,5	8,14,6	8,15,7
9,3,10	9,5,12	9,6,15	9,1,8	9,11,2	9,13,4	9,14,7
10,6,12	10,7,13	10,1,11	10,2,8	10,14,4	10,15,5	10,9,3
11,5,14	11,2,9	11,7,12	11,3,8	11,13,6	11,10,1	11,15,4
12,1,13	12,3,15	12,2,14	12,4,8	12,9,5	12,11,7	12,10,6
13,2,15	13,6,11	13,4,9	13,5,8	13,10,7	13,14,3	13,12,1
14,7,9	14,4,10	14,3,13	14,6,8	14,15,1	14,12,2	14,11,5
15,4,11	15,1,14	15,5,10	15,7,8	15,12,3	15,9,6	15,13,2

Трехмерная и семимерная векторные алгебры являются частным случаем пятнадцатимерной. Векторное произведение двух векторов удобно определять также в соответствии с таблицей подстановки индексов

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	6	5	7	1	3	8	10	12	14	13	15	9	11
3	6	5	1	2	7	4	8	11	14	13	9	10	15	12
4	5	1	7	3	2	6	8	12	13	9	15	11	10	14
5	7	2	3	6	4	1	8	13	15	10	11	14	12	9
6	1	7	2	4	3	5	8	14	9	15	10	12	11	13
7	3	4	6	1	5	2	8	15	11	12	14	9	13	10
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	10	11	12	13	14	15	8	1	2	3	4	5	6	7
10	12	14	13	15	9	11	8	2	4	6	5	7	1	3
11	14	13	9	10	15	12	8	3	6	5	1	2	7	4
12	13	9	15	11	10	14	8	4	5	1	7	3	2	6
13	15	10	11	14	12	9	8	5	7	2	3	6	4	1
14	9	15	10	12	11	13	8	6	1	7	2	4	3	5
15	11	12	14	9	13	10	8	7	3	4	6	1	5	2

Эти таблицы определяют также запись операторов момента импульса ***L*** (матриц Паули) в виде:

$\boldsymbol{L}$ =

$m(\,[L_2L_3]$	$+[L_4L_5]$	$+[L_7L_6]$	$+n[L_8L_9]$	$+[L_{11}L_{10}]$	$+[L_{13}L_{12}]$	$+[L_{14}L_{15}]\,)$	=	$-3iL_1$
$m(\,[L_4L_6]$	$+[L_5L_7]$	$+[L_3L_1]$	$+n[L_8L_{10}]$	$+[L_{14}L_{12}]$	$+[L_{15}L_{13}]$	$+[L_9L_{11}]\,)$	=	$-3iL_2$
$m(\,[L_6L_5]$	$+[L_1L_2]$	$+[L_4L_7]$	$+n[L_8L_{11}]$	$+[L_{13}L_{14}]$	$+[L_{10}L_9]$	$+[L_{15}L_{12}]\,)$	=	$-3iL_3$
$m([L_5L_1]$	$+[L_7L_3]$	$+[L_6L_2]$	$+n[L_8L_{12}]$	$+[L_9L_{13}]$	$+[L_{11}L_{15}]$	$+[L_{10}L_{14}]\,)$	=	$-3iL_4$
$m(\,[L_7L_2]$	$+[L_3L_6]$	$+[L_1L_4]$	$+n[L_8L_{13}]$	$+[L_{10}L_{15}]$	$+[L_{14}L_{11}]$	$+[L_{12}L_9]\,)$	=	$-3iL_5$
$m(\,[L_1L_7]$	$+[L_2L_4]$	$+[L_5L_3]$	$+n[L_8L_{14}]$	$+[L_{15}L_9]$	$+[L_{12}L_{10}]$	$+[L_{11}L_{13}]\,)$	=	$-3iL_6$
$m(\,[L_3L_4]$	$+[L_6L_1]$	$+[L_2L_5]$	$+n[L_8L_{15}]$	$+[L_{12}L_{11}]$	$+[L_9L_{14}]$	$+[L_{13}L_{10}]\,)$	=	$-3iL_7$
$1/n(\,[L_9L_1]$	$+[L_{10}L_2]$	$+[L_{11}L_3]$	$+[L_{12}L_4]$	$+[L_{13}L_5]$	$+[L_{14}L_6]$	$+[L_{15}L_7]\,)$	=	$-3iL_8$
$m(\,[L_3L_{10}]$	$+[L_5L_{12}]$	$+[L_6L_{15}]$	$+n[L_1L_8]$	$+[L_{11}L_2]$	$+[L_{13}L_4]$	$+[L_{14}L_7]\,)$	=	$-3iL_9$
$m(\,[L_6L_{12}]$	$+[L_7L_{13}]$	$+[L_1L_{11}]$	$+n[L_2L_8]$	$+[L_{14}L_4]$	$+[L_{15}L_5]$	$+[L_9L_3]\,)$	=	$-3iL_{10}$
$m(\,[L_5L_{14}]$	$+[L_2L_9]$	$+[L_7L_{12}]$	$+n[L_3L_8]$	$+[L_{13}L_6]$	$+[L_{10}L_1]$	$+[L_{15}L_4]\,)$	=	$-3iL_{11}$
$m(\,[L_1L_{13}]$	$+[L_3L_{15}]$	$+[L_2L_{14}]$	$+n[L_4L_8]$	$+[L_9L_5]$	$+[L_{11}L_7]$	$+[L_{10}L_6]\,)$	=	$-3iL_{12}$
$m(\,[L_2L_{15}]$	$+[L_6L_{11}]$	$+[L_4L_9]$	$+n[L_5L_8]$	$+[L_{10}L_7]$	$+[L_{14}L_3]$	$+[L_{12}L_1]\,)$	=	$-3iL_{13}$
$m(\,[L_7L_9]$	$+[L_4L_{10}]$	$+[L_3L_{13}]$	$+n[L_6L_8]$	$+[L_{15}L_1]$	$+[L_{12}L_2]$	$+[L_{11}L_5]\,)$	=	$-3iL_{14}$
$m(\,[L_4L_{11}]$	$+[L_1L_{14}]$	$+[L_5L_{10}]$	$+n[L_7L_8]$	$+[L_{12}L_3]$	$+[L_9L_6]$	$+[L_{13}L_2]\,)$	=	$-3iL_{15}$

где $[L_iL_j]=L_iL_j-L_jL_i$,,коммутатор, причем $n=11/3$, $m=(3/5)^2$.

Матрицы L_i приведены ниже. У пятнадцатимерной алгебры коммутирующих между собой операторов нет, и подалгебры Картана отсутствуют. Её ранг равен единице и, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми операторами и соответствующий оператору момента импульса

$$\boldsymbol{L}^2=L_1^2+L_2^2+\ldots+L_{15}^2=14I,$$

где I-единичная матрица. Квадрат оператора момента импульса, следовательно, сохраняется, что соответствует закону сохранения момента импульса.

Таким образом, удается построить анти симметричную векторную алгебру, определяемую векторами с пятнадцатью координатами в каждом из них. Свойства этой алгебры следует изучить, но можно заранее сказать, что она анти коммутативна, не ассоциативна по умножению и не альтернативна. Она имеет нуль, единицу, противоположный элемент, коммутативна и ассоциативна по сложению. Выполняется свойство дистрибутивности. Эта алгебра следует из аналогичной шестнадцатимерной не коммутативной по умножению и не ассоциативной алгебры, определяемой гиперкомплексными числами без деления и обратных элементов.

L_1

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0

L_2

0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0

L_3

0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0

L_4

0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i
0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0

L_5

0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0

L_6

0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0

L_7

0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0

L_8

0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0

L_9

0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0

L_{10}

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0
0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

L_{11}

0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0
0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

L_{12}

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i
0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0
0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

L_{13}

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

L_{14}

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

L_{15}

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Нулевая координата шестнадцатимерной (тернарной алгебры) определяет скалярное произведение двух пятнадцатимерных векторов. Таким образом, определено как векторное, так и скалярное произведение векторов одной из пятнадцатимерных алгебр. Скалярное произведение двух векторов определяется нулевой координатой шестнадцатимерной алгебры и соответствует единичному метрическому 15-тензору.

Чтобы говорить более предметно о свойствах пятнадцатимерной алгебры можно проанализировать пятнадцати рядные квадратные матрицы L_i (Паули). С их помощью, как известно, записываются уравнения (Дирака) [1]. Трехмерные и семимерные матрицы (Паули) при этом характеризуют момент импульса в указанных алгебрах меньшей размерности.

Непосредственным умножением этих операторов можно получить приведенные выше соотношения для операторов момента импульса Найденное выше соотношение для векторного произведения двух векторов может оказаться не самым простым. Неудовлетворенность вызывает своеобразие его восьмой координаты

Обратим внимание читателей на существование не только одномерной и трехмерной векторной алгебры, но также семимерной, а теперь - пятнадцатимерной и более высокой размерности. Это в свою очередь ребром ставит вопрос о размерности физического пространства. Я считаю, что "Размерность физического пространства неопределённа. Она характеризуется лишь свойствами алгебры (симметрии), используемой для описания процессов, и может быть как угодно большой"!

Более симметричны алгебры большей размерности; алгебры меньшей размерности соответствуют той или иной степени нарушения симметрии.

Глава 2.

ДВОЙНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ В ПЯТНАДЦАТИМЕРНОЙ АЛГЕБРЕ

Обозначим определитель третьего порядка символом

$$|\boldsymbol{i},j,k|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e_i} & \boldsymbol{e_j} & \boldsymbol{e_k} \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix}$$

тогда векторное произведение двух векторов **[a,b]**

-в ***одномерном*** случае равно $|\mathbf{1},0,0|=0$;

-в ***трехмерном*** случае

$$\boldsymbol{[a,b]}=|\boldsymbol{1},2,3|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix};$$

или в координатной форме записи

$$\begin{aligned} \boldsymbol{[a,b]}= \ & (a_2b_3 \ \ -b_2a_3) \ \ \boldsymbol{e_1}, \\ & (a_3b_1 \ \ -b_3a_1) \ \ \boldsymbol{e_2}, \\ & (a_1b_2 \ \ -b_1a_2) \ \ \boldsymbol{e_3}. \end{aligned}$$

Тензор структурных констант $\sigma^{ijk}=\pm 1$ – является совершенно антисимметричным единичным 3-тензором, в котором компоненты меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1.

Отметим, что подстановки на множестве индексов $1,2,3$ дают взаимно однозначное отображение векторного произведения двух векторов на себя [1,2]:

1	*2*	*3*
2	*3*	*1*
3	*1*	*2*

т. е. в тензоре структурных констант векторных произведений двух векторов:

- в ***трехмерном*** случае

$$\boldsymbol{[a,b]}=[a_i\boldsymbol{e_i}b_j\boldsymbol{e_j}]=a_ib_j[\boldsymbol{e_i}\boldsymbol{e_k}]=\sigma_{ij}^{\ \ k}a_ib_j\boldsymbol{e_k};$$

при последовательности чисел $\boldsymbol{e_i}a_jb_k = \mathbf{1},2,3; \quad \mathbf{2},3,1; \quad \mathbf{3},1,2;$

$$\sigma_{ij}^{\ \ k}=1;$$

при обратной последовательности $\sigma_{ij}^{\ \ k}=-1;$

для других наборов чисел $\sigma_{ij}^{\ \ k}=0.$

- в ***семимерном*** случае [1]:

$$\boldsymbol{[ab]}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_4} & \boldsymbol{e_6} \\ a_2 & a_4 & a_6 \\ b_2 & b_4 & b_6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \boldsymbol{e_3} & \boldsymbol{e_6} & \boldsymbol{e_5} \\ a_3 & a_6 & a_5 \\ b_3 & b_6 & b_5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \boldsymbol{e_4} & \boldsymbol{e_5} & \boldsymbol{e_1} \\ a_4 & a_5 & a_1 \\ b_4 & b_5 & b_1 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} \boldsymbol{e_5} & \boldsymbol{e_7} & \boldsymbol{e_2} \\ a_5 & a_7 & a_2 \\ b_5 & b_7 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \boldsymbol{e_6} & \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_7} \\ a_6 & a_1 & a_7 \\ b_6 & b_1 & b_7 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \boldsymbol{e_7} & \boldsymbol{e_3} & \boldsymbol{e_4} \\ a_7 & a_3 & a_4 \\ b_7 & b_3 & b_4 \end{vmatrix},$$

т. е. в тензоре структурных констант векторных произведений двух векторов

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]=[a_i\mathbf{e}_i b_j\mathbf{e}_j]=a_ib_j[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k]=\sigma_{ij}^{\ k}a_ib_j\mathbf{e}_k;$$

при последовательностях чисел $\mathbf{e}_i a_j b_k$ =

$$\mathbf{1},2,3;\quad \mathbf{2},4,6;\quad \mathbf{3},6,5;\quad \mathbf{4},5,1;\quad \mathbf{5},7,2;\quad \mathbf{6},1,7;\quad 7,3,4;$$

$$\sigma_{ij}^{\ k}=1;$$

при обратной последовательности $\sigma_{ij}^{\ k}=-1;$

для других наборов чисел $\sigma_{ij}^{\ k}=0.$

Тензор структурных констант $\sigma^{ijk}=\pm 1$ – является совершенно антисимметричным единичным *7*- тензором, в котором компоненты меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из анти симметричности следует, что все компоненты тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля лишь те, у которых все три индекса различны.

Векторное произведение двух семимерных векторов удобно записать в виде суммы семи определителей

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]=|\mathbf{1},2,3|+|\mathbf{2},4,6|+|\mathbf{3},6,5|+|\mathbf{4},5,1|+|\mathbf{5},7,2|+|\mathbf{6},1,7|+|7,3,4|,$$

или в координатной форме записи

$$\begin{aligned}[\mathbf{a},\mathbf{b}]= &\ (\ (a_2b_3\ \ -b_2a_3)\ \ +(a_4b_5\ \ -b_4a_5)\ \ +(b_6a_7,\ \ -a_6b_7))\ \ \mathbf{e_1},\\ &(+(a_4b_6\ \ -b_4a_6)\ \ +(a_5b_7\ \ -b_5a_7)\ \ +(b_1a_3,\ \ -a_1b_3))\ \ \mathbf{e_2},\\ &(+(a_6b_5\ \ -b_6a_5)\ \ +(a_1b_2\ \ -b_1a_2)\ \ +(b_7a_4,\ \ -a_7b_4))\ \ \mathbf{e_3},\\ &(+(a_5b_1\ \ -b_5a_1)\ \ +(a_7b_3\ \ -b_7a_3)\ \ +(b_2a_6,\ \ -a_2b_6))\ \ \mathbf{e_4},\\ &(+(a_7b_2\ \ -b_7a_2)\ \ +(a_3b_6\ \ -b_3a_6)\ \ +(b_4a_1,\ \ -a_4b_1))\ \ \mathbf{e_5},\\ &(+(a_1b_7\ \ -b_1a_7)\ \ +(a_2b_4\ \ -b_2a_4)\ \ +(b_3a_5,\ \ -a_3b_5))\ \ \mathbf{e_6},\\ &(+(a_3b_4\ \ -b_3a_4)\ \ +(a_6b_1\ \ -b_6a_1)\ \ +(b_5a_2,\ \ -a_5b_2))\ \ \mathbf{e_7}.\end{aligned}$$

Отметим, что подстановки на множестве индексов *1,2,3,…,7* дают взаимно однозначное отображение векторного произведения двух векторов на себя, причем имеет место следующая таблица системы подстановки индексов

1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	5	7	1	3
3	6	5	1	2	7	4
4	5	1	7	3	2	6
5	7	2	3	6	4	1
6	1	7	2	4	3	5
7	3	4	6	1	5	2

Первые три столбца (или строки) этой таблицы характеризуют значения индексов определителей в векторном произведении двух векторов.

В пятнадцатимерной векторной алгебре векторное произведение двух векторов можно записать в виде суммы ста пяти величин вида:

$$(a_ib_j-a_jb_i)\mathbf{e}_k,$$

по семь компонент для каждой координаты (7*15=105) в соответствии с таблицей

1,2,3	**1**,4,5	**1**,7,6	**1**,8,9	**1**,11,10	**1**,13,12	**1**,14,15
2,4,6	**2**,5,7	**2**,3,1	**2**,8,10	**2**,14,12	**2**,15,13	**2**,9,11
3,6,5	**3**,1,2	**3**,4,7	**3**,8,11	**3**,13,14	**3**,10,9	**3**,15,12
4,5,1	**4**,7,3	**4**,6,2	**4**,8,12	**4**,9,13	**4**,11,15	**4**,10,14
5,7,2	**5**,3,6	**5**,1,4	**5**,8,13	**5**,10,15	**5**,14,11	**5**,12,9
6,1,7	**6**,2,4	**6**,5,3	**6**,8,14	**6**,15,9	**6**,12,10	**6**,11,13
7,3,4	7,6,1	7,2,5	7,8,15	7,12,11	7,9,14	7,13,10
8,9,1	**8**,10,2	**8**,11,3	**8**,12,4	**8**,13,5	**8**,14,6	**8**,15,7
9,11,2	**9**,13,4	**9**,14,7	**9**,1,8	**9**,3,10	**9**,5,12	**9**,6,15
10,14,4	**10**,15,5	**10**,9,3	**10**,2,8	**10**,6,12	**10**,7,13	**10**,1,11
11,13,6	**11**,10,1	**11**,15,4	**11**,3,8	**11**,5,14	**11**,2,9	**11**,7,12
12,9,5	**12**,11,7	**12**,10,6	**12**,4,8	**12**,1,13	**12**,3,15	**12**,2,14
13,10,7	**13**,14,3	**13**,12,1	**13**,5,8	**13**,2,15	**13**,6,11	**13**,4,9
14,15,1	**14**,12,2	**14**,11,5	**14**,6,8	**14**,7,9	**14**,4,10	**14**,3,13
15,12,3	**15**,9,6	**15**,13,2	**15**,7,8	**15**,4,11	**15**,1,14	**15**,5,10

где ***i**,j,k* циклически повторяются для каждой величины, так что они создают определитель третьего порядка вида

$$|\boldsymbol{i},j,k| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_i} & \boldsymbol{e_j} & \boldsymbol{e_k} \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix},$$

например, три величины ***1**,2,3; **2**,3,1; **3**,1,2* дают определитель |***1**,2,3*|. В результате векторное произведение двух векторов в пятнадцатимерной алгебре может быть записано в виде суммы сорока девяти определителей третьего порядка, семь из которых с восьмой координатой, например (**1**, 8, 9) повторяются трижды (49=28+3*7). При этом орт $\boldsymbol{e_8}$ является общим ортом для всех семи пространств и встречается чаще остальных, так что, имеется 35 не примитивных определителей ***[ab]=***

= |**1**, 2, 3| + |**2**, 8,10| + |**3**,10, 9| + |**8**, 9, 1| + |**9**,11, 2| + |**10**, 1,11| + |**11**, 3, 8|
+ |**2**, 4, 6| + |**4**, 8,12| + |**6**,12,10| + |**8**,10, 2| + |**10**,14 ,4| + |**12**, 2,14| + |**14**, 6, 8|
+ |**3**, 6, 5| + |**6**, 8,14| + |**5**,14,11| + |**8**,11, 3| + |**11**,13 ,6| + |**14**, 3,13| + |**13**, 5, 8|
+ |**4**, 5, 1 | + |**5**, 8,13| + |**1**,13,12| + |**8**,12, 4| + |**12**, 9, 5| + |**13**, 4, 9| + |**9**, 1, 8|
+ |**5**, 7, 2| + |7**,** 8,15| + |**2**,15,13| + |**8**,13, 5| + |**13**,10, 7| + |**15**, 5,10| + |**10**, 2, 8|
+ |**6**, 1, 7| + |**1**, 8, 9| + |7, 9,14| + |**8**,14, 6| + |**14**,15, 1| + |**9**, 6,15| + |**15**, 7, 8|
+ |7, 3, 4| + |**3**, 8,11| + |**4**,11,15| + |**8**,15, 7| + |**15**,12, 3| + |**11**, 7,12| + |**12**, 4,8|

Таблицы подстановки индексов для каждого из семи семимерных пространств, составляющих 15-мерное произведение двух векторов, имеют вид:

1	2	3	8	9	10	11		2	4	6	8	10	12	14		3	6	5	8	11	14	13
2	8	10	9	11	1	3		4	8	12	10	14	2	6		6	8	14	11	13	3	5
3	10	9	1	2	11	8		6	12	10	2	4	14	8		5	14	11	3	6	13	8
8	9	1	11	3	2	10		8	10	2	14	6	4	12		8	11	3	13	5	6	14
9	11	2	3	10	8	1		10	14	4	6	12	8	2		11	13	6	5	14	8	3
10	1	11	2	8	3	9		12	2	14	4	8	6	10		14	3	13	6	8	5	11
11	3	8	10	1	9	2		14	6	8	12	2	10	4		13	5	8	14	3	11	6
4	5	1	8	12	13	9		5	7	2	8	13	15	10		6	1	7	8	14	9	15
5	8	13	12	9	4	1		7	8	15	13	10	5	2		1	8	9	14	15	6	7
1	13	12	4	5	9	8		2	15	13	5	7	10	8		7	9	14	6	1	15	8
8	12	4	9	1	5	13		8	13	5	10	2	7	15		8	14	6	15	7	1	9
12	9	5	1	13	8	4		13	10	7	2	15	8	5		14	15	1	7	9	8	6
13	4	9	5	8	1	12		15	5	10	7	8	2	13		9	6	15	1	8	7	14
9	1	8	13	4	12	5		10	2	8	15	5	13	7		15	7	8	9	6	14	1

7	*3*	*4*	*8*	*15*	*11*	*12*		
3	*8*	*11*	*15*	*12*	*7*	*4*		
4	*11*	*15*	*7*	*3*	*12*	*8*		
8	*15*	*7*	*12*	*4*	*3*	*11*		
15	*12*	*3*	*4*	*11*	*8*	*7*		
11	*7*	*12*	*3*	*8*	*4*	*15*		
12	*4*	*8*	*11*	*7*	*15*	*3*		

что даёт координатную запись 15-мерного векторного произведения двух векторов как совокупность семи 7-мерных векторных произведений двух векторов с индивидуальными подстановками индексов.

Векторным произведением ***[ab]*** двух векторов ***a,b*** можно назвать вектор

$$\boldsymbol{[a,b]}=[a_i\boldsymbol{e_i}b_j\boldsymbol{e_j}]=a_ib_j\boldsymbol{[e_ie_j]}=\sigma_{ij}^{\ k}a_ib_j\boldsymbol{e_k},$$

как совокупность векторных произведений двух векторов семи семимерных пространств ***[ab]=***

=	$([a_2b_3]$	+	$[a_8b_9]$	+	$[a_{11}b_{10}])$	$\boldsymbol{e_1}$	+	+	$([a_7b_2]$	+	$[a_8b_{13}]$	+	$[a_{10}b_{15}])$	$\boldsymbol{e_5}$	+
+	$([a_8b_{10}]$	+	$[a_9b_{11}]$	+	$[a_3b_1])$	$\boldsymbol{e_2}$	+	+	$([a_8b_{15}]$	+	$[a_{13}b_{10}]$	+	$[a_2b_5])$	$\boldsymbol{e_7}$	+
+	$([a_{10}b_9]$	+	$[a_1b_2]$	+	$[a_8b_{11}])$	$\boldsymbol{e_3}$	+	+	$([a_{15}b_{13}]$	+	$[a_5b_7]$	+	$[a_8b_{10}])$	$\boldsymbol{e_2}$	+
+	$([a_9b_1]$	+	$[a_{11}b_3]$	+	$[a_{10}b_2])$	$\boldsymbol{e_8}$	+	+	$([a_{13}b_5]$	+	$[a_{10}b_2]$	+	$[a_{15}b_7])$	$\boldsymbol{e_8}$	+
+	$([a_{11}b_2]$	+	$[a_3b_{10}]$	+	$[a_1b_8])$	$\boldsymbol{e_9}$	+	+	$([a_{10}b_7]$	+	$[a_2b_{15}]$	+	$[a_5b_8])$	$\boldsymbol{e_{13}}$	+
+	$([a_3b_8]$	+	$[a_{10}b_1]$	+	$[a_2b_9])$	$\boldsymbol{e_{11}}$	+	+	$([a_2b_8]$	+	$[a_{15}b_5]$	+	$[a_7b_{13}])$	$\boldsymbol{e_{10}}$	+
+	$([a_1b_{11}]$	+	$[a_2b_8]$	+	$[a_9b_3])$	$\boldsymbol{e_{10}}$	+	+	$([a_5b_{10}]$	+	$[a_7b_8]$	+	$[a_{13}b_2])$	$\boldsymbol{e_{15}}$	+
+	$([a_4b_6]$	+	$[a_8b_{10}]$	+	$[a_{14}b_{12}])$	$\boldsymbol{e_2}$	+	+	$([a_1b_7]$	+	$[a_8b_{14}]$	+	$[a_{15}b_9])$	$\boldsymbol{e_6}$	+
+	$([a_8b_{12}]$	+	$[a_{10}b_{14}]$	+	$[a_6b_2])$	$\boldsymbol{e_4}$	+	+	$([a_8b_9]$	+	$[a_{14}b_{15}]$	+	$[a_7b_6])$	$\boldsymbol{e_1}$	+
+	$([a_{12}b_{10}]$	+	$[a_2b_4]$	+	$[a_8b_{14}])$	$\boldsymbol{e_6}$	+	+	$([a_9b_{14}]$	+	$[a_6b_1]$	+	$[a_8b_{15}])$	$\boldsymbol{e_7}$	+
+	$([a_{10}b_2]$	+	$[a_{14}b_6]$	+	$[a_{12}b_4])$	$\boldsymbol{e_8}$	+	+	$([a_{14}b_6]$	+	$[a_{15}b_7]$	+	$[a_9b_1])$	$\boldsymbol{e_8}$	+
+	$([a_{14}b_4]$	+	$[a_6b_{12}]$	+	$[a_2b_8])$	$\boldsymbol{e_{10}}$	+	+	$([a_{15}b_1]$	+	$[a_7b_9]$	+	$[a_6b_8])$	$\boldsymbol{e_{14}}$	+
+	$([a_6b_8]$	+	$[a_{12}b_2]$	+	$[a_4b_{10}])$	$\boldsymbol{e_{14}}$	+	+	$([a_7b_8]$	+	$[a_9b_6]$	+	$[a_1b_{14}])$	$\boldsymbol{e_{15}}$	+
+	$([a_2b_{14}]$	+	$[a_4b_8]$	+	$[a_{10}b_6])$	$\boldsymbol{e_{12}}$	+	+	$([a_6b_{15}]$	+	$[a_1b_8]$	+	$[a_{14}b_7])$	$\boldsymbol{e_9}$	+
+	$([a_6b_5]$	+	$[a_8b_{11}]$	+	$[a_{13}b_{14}])$	$\boldsymbol{e_3}$	+	+	$([a_3b_4]$	+	$[a_8b_{15}]$	+	$[a_{12}b_{11}])$	$\boldsymbol{e_7}$	+
+	$([a_8b_{14}]$	+	$[a_{11}b_{13}]$	+	$[a_5b_3])$	$\boldsymbol{e_6}$	+	+	$([a_8b_{11}]$	+	$[a_{15}b_{12}]$	+	$[a_4b_7])$	$\boldsymbol{e_3}$	+
+	$([a_{14}b_{11}]$	+	$[a_3b_6]$	+	$[a_8b_{13}])$	$\boldsymbol{e_5}$	+	+	$([a_{11}b_{15}]$	+	$[a_7b_3]$	+	$[a_8b_{12}])$	$\boldsymbol{e_4}$	+
+	$([a_{11}b_3]$	+	$[a_{13}b_5]$	+	$[a_{14}b_6])$	$\boldsymbol{e_{8,}}$	+	+	$([a_{15}b_7]$	+	$[a_{12}b_4]$	+	$[a_{11}b_3])$	$\boldsymbol{e_8}$	+
+	$([a_{13}b_6]$	+	$[a_5b_{14}]$	+	$[a_3b_8])$	$\boldsymbol{e_{11}}$	+	+	$([a_{12}b_3]$	+	$[a_4b_{11}]$	+	$[a_7b_8])$	$\boldsymbol{e_{15}}$	+
+	$([a_5b_8]$	+	$[a_{14}b_3]$	+	$[a_6b_{11}])$	$\boldsymbol{e_{13}}$	+	+	$([a_4b_8]$	+	$[a_{11}b_7]$	+	$[a_3b_{15}])$	$\boldsymbol{e_{12}}$	+
+	$([a_3b_{13}]$	+	$[a_6b_8]$	+	$[a_{11}b_5])$	$\boldsymbol{e_{14}}$	+	+	$([a_7b_{12}]$	+	$[a_3b_8]$	+	$[a_{15}b_4])$	$\boldsymbol{e_{11}}$	,
+	$([a_5b_1]$	+	$[a_8b_{12}]$	+	$[a_9b_{13}])$	$\boldsymbol{e_4}$	+								
+	$([a_8b_{13}]$	+	$[a_{12}b_9]$	+	$[a_1b_4])$	$\boldsymbol{e_5}$	+								
+	$([a_{13}b_{12}]$	+	$[a_4b_5]$	+	$[a_8b_9])$	$\boldsymbol{e_1}$	+								
+	$([a_{12}b_4]$	+	$[a_9b_1]$	+	$[a_{13}b_5])$	$\boldsymbol{e_8}$	+								
+	$([a_9b_5]$	+	$[a_1b_{13}]$	+	$[a_4b_8])$	$\boldsymbol{e_{12}}$	+								
+	$([a_1b_8]$	+	$[a_{13}b_4]$	+	$[a_5b_{12}])$	$\boldsymbol{e_9}$	+								
+	$([a_4b_9]$	+	$[a_5b_8]$	+	$[a_{12}b_1])$	$\boldsymbol{e_{13}}$	+								

Здесь $[a_ib_j]=a_ib_j-a_jb_i$ – коммутатор.

Возможна также укороченная (не симметричная) запись векторного произведения двух векторов, которая имеет вид:

$$
\begin{array}{llllllllllll}
[a,b]= & |\mathbf{1},2,3| & + & 3*|\mathbf{1},8,9| & + & |\mathbf{1},11,10| & + & |\mathbf{1},13,12| & + & |\mathbf{1},14,15| & + \\
 & |\mathbf{2},4,6| & + & 3*|\mathbf{2},8,10| & + & |\mathbf{2},14,12| & + & |\mathbf{2},15,13| & + & |\mathbf{2},9,11| & + \\
 & |\mathbf{3},6,5| & + & 3*|\mathbf{3},8,11| & + & |\mathbf{3},13,14| & + & |\mathbf{3},10,9| & + & |\mathbf{3},15,12| & + \\
 & |\mathbf{4},5,1| & + & 3*|\mathbf{4},8,12| & + & |\mathbf{4},9,13| & + & |\mathbf{4},11,15| & + & |\mathbf{4},10,14| & + \\
 & |\mathbf{5},7,2| & + & 3*|\mathbf{5},8,13| & + & |\mathbf{5},10,15| & + & |\mathbf{5},14,11| & + & |\mathbf{5},12,9| & + \\
 & |\mathbf{6},1,7| & + & 3*|\mathbf{6},8,14| & + & |\mathbf{6},15,9| & + & |\mathbf{6},12,10| & + & |\mathbf{6},11,13| & + \\
 & |7,3,4| & + & 3*|7,8,15| & + & |7,12,11| & + & |7,9,14| & + & |7,13,10| & ,
\end{array}
$$

поскольку

$$
\begin{gathered}
|\mathbf{1},8,9|+|\mathbf{8},9,1|+|\mathbf{9},1,8|=\mathbf{3*}|\mathbf{1},8,9|,\\
|\mathbf{2},8,10|+|\mathbf{8},10,2|+|\mathbf{10},2,8|=\mathbf{3*}|\mathbf{2},8,10|,\\
|\mathbf{3},8,11|+|\mathbf{8},11,3|+|\mathbf{11},3,8|=\mathbf{3*}|\mathbf{3},8,11|,\\
|\mathbf{4},8,12|+|\mathbf{8},12,4|+|\mathbf{12},4,8|=\mathbf{3*}|\mathbf{4},8,12|,\\
|\mathbf{5},8,13|+|\mathbf{8},13,5|+|\mathbf{13},5,8|=\mathbf{3*}|\mathbf{5},8,13|,\\
|\mathbf{6},8,14|+|\mathbf{8},14,6|+|\mathbf{14},6,8|=\mathbf{3*}|\mathbf{6},8,14|,\\
|\mathbf{7},8,15|+|\mathbf{8},15,7|+|\mathbf{15},7,8|=\mathbf{3*}|\mathbf{7},8,15|.
\end{gathered}
$$

Порядок записи соотношений пятнадцатимерной алгебры удобно определять с помощью таблицы подстановки индексов

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	6	5	7	1	3	8	10	12	14	13	15	9	11
3	6	5	1	2	7	4	8	11	14	13	9	10	15	12
4	5	1	7	3	2	6	8	12	13	9	15	11	10	14
5	7	2	3	6	4	1	8	13	15	10	11	14	12	9
6	1	7	2	4	3	5	8	14	9	15	10	12	11	13
7	3	4	6	1	5	2	8	15	11	12	14	9	13	10
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	10	11	12	13	14	15	8	1	2	3	4	5	6	7
10	12	14	13	15	9	11	8	2	4	6	5	7	1	3
11	14	13	9	10	15	12	8	3	6	5	1	2	7	4
12	13	9	15	11	10	14	8	4	5	1	7	3	2	6
13	15	10	11	14	12	9	8	5	7	2	3	6	4	1
14	9	15	10	12	11	13	8	6	1	7	2	4	3	5
15	11	12	14	9	13	10	8	7	3	4	6	1	5	2

В пятнадцатимерной алгебре восьмая компонента не распределена по всей таблице, а сосредоточена в столбике или строке.

Трехмерное и семимерное векторные исчисления являются частным случаем пятнадцатимерной векторной алгебры в основе, которой лежат определения не только векторного произведения, но и скалярного. Скалярное произведение двух векторов определяется скаляром:

$$(\mathbf{ab})=(a_i\mathbf{e_i}b_k\mathbf{e_k})=a_ib_k(\mathbf{e_i}\mathbf{e_k})=g_{ik}a_ib_k,$$

где g_{ik}-метрический 15-тензор, равный единичной матрице.

Очевидно, что свойства пятнадцатимерной векторной алгебры определяются скалярным, а также векторным произведением двух векторов, которое повторяет свойства определителей т.е.:

1. векторное произведение двух векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель;

2. векторное произведение двух векторов изменяет знак при перестановке векторов;

3. векторное произведение двух векторов дистрибутивно;

$$[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]=[\boldsymbol{ab}]+[\boldsymbol{ac}]$$

4. если два вектора в векторном произведении компланарны, то это произведение равно нулю и т. д.

Модулю векторного произведения двух векторов ***a*** и ***b*** можно сопоставить скаляр, равный площади построенного на них параллелограмма

$$[\boldsymbol{ab}]=ab\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

Скалярное и векторное произведения двух векторов в координатной форме записи представлены в таблице, приведенной ниже.

В 15-тензоре структурных констант векторных произведений двух векторов

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[a_i\boldsymbol{e_i}b_j\boldsymbol{e_j}]=a_ib_j[\boldsymbol{e_i}\boldsymbol{e_k}]=\sigma_{ij}^{\ k}a_ib_j\boldsymbol{e_k};$$

для положительных последовательностей чисел $\boldsymbol{e_i}a_jb_k$

$$\sigma_{ij}^{\ k}=1;$$

при обратной последовательности $\sigma_{ij}^{\ k}=-1;$

для других наборов чисел $\sigma_{ij}^{\ k}=0.$

Знаки компонент векторного произведения двух векторов в пятнадцатимерном случае можно определять в соответствии с таблицей:

	3	*-2*	*5*	*-4*	*-7*	*6*	*9*	*-8*	*-11*	*10*	*-13*	*12*	*15*	*-14*
-3		*1*	*6*	*7*	*-4*	*-5*	*10*	*11*	*-8*	*-9*	*-14*	*-15*	*12*	*13*
2	*-1*		*7*	*-6*	*5*	*-4*	*11*	*-10*	*9*	*-8*	*-15*	*14*	*-13*	*12*
-5	*-6*	*-7*		*1*	*2*	*3*	*12*	*13*	*14*	*15*	*-8*	*-9*	*-10*	*-11*
4	*-7*	*6*	*-1*		*-3*	*2*	*13*	*-12*	*15*	*-14*	*9*	*-8*	*11*	*-10*
7	*4*	*-5*	*-2*	*3*		*-1*	*14*	*-15*	*-12*	*13*	*10*	*-11*	*-8*	*9*
-6	*5*	*4*	*-3*	*-2*	*1*		*15*	*14*	*-13*	*-12*	*11*	*10*	*-9*	*-8*
-9	*-10*	*-11*	*-12*	*-13*	*-14*	*-15*		*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
8	*-11*	*10*	*-13*	*12*	*15*	*-14*	*-1*		*-3*	*2*	*-5*	*4*	*7*	*-6*
11	*8*	*-9*	*-14*	*-15*	*12*	*13*	*-2*	*3*		*-1*	*-6*	*-7*	*4*	*5*
-10	*9*	*8*	*-15*	*14*	*-13*	*12*	*-3*	*-2*	*1*		*-7*	*6*	*-5*	*4*
13	*14*	*15*	*8*	*-9*	*-10*	*-11*	*-4*	*5*	*6*	*7*		*-1*	*-2*	*-3*
-12	*15*	*-14*	*9*	*8*	*11*	*-10*	*-5*	*-4*	*7*	*-6*	*1*		*3*	*-2*
-15	*-12*	*13*	*10*	*-11*	*8*	*9*	*-6*	*-7*	*-4*	*5*	*2*	*-3*		*1*
14	*-13*	*-12*	*11*	*10*	*-9*	*8*	*-7*	*6*	*-5*	*-4*	*3*	*2*	*-1*	

Эта таблица фиксирует также покоординатную запись пятнадцати операторов момента импульса L_i $(i=1, 2,\ldots, 15)$, как показано ниже.

$(\boldsymbol{ab})= \quad -a_1b_1 \quad -a_2b_2 \quad -a_3b_3 \quad -a_4b_4 \quad -a_5b_5 \quad -a_6b_6 \quad -a_7b_7 \quad -a_8b_8 \quad -a_9b_9 \quad -a_{10}b_{10} \quad -a_{11}b_{11} \quad -a_{12}b_{12} \quad -a_{13}b_{13} \quad -a_{14}b_{14} \quad -a_{15}b_{15}$

$[\boldsymbol{ab}]=$

$-a_2b_3$	$+a_3b_2$	$-a_4b_5$	$+a_5b_4$	$-a_7b_6$	$+a_6b_7$	$-a_8b_9$	$+a_9b_8$	$-a_{11}b_{10}$	$+a_{10}b_{11}$	$-a_{13}b_{12}$	$+a_{12}b_{13}$	$-a_{14}b_{15}$	$+a_{15}b_{14}$,
$-a_4b_6$	$+a_6b_4$	$-a_5b_7$	$+a_7b_5$	$-a_3b_1$	$+a_1b_3$	$-a_8b_{10}$	$+a_{10}b_8$	$-a_{14}b_{12}$	$+a_{12}b_{14}$	$-a_{15}b_{13}$	$+a_{13}b_{15}$	$-a_9b_{11}$	$+a_{11}b_9$,
$-a_6b_5$	$+a_5b_6$	$-a_1b_2$	$+a_2b_1$	$-a_4b_7$	$+a_7b_4$	$-a_8b_{11}$	$+a_{11}b_8$	$-a_{13}b_{14}$	$+a_{14}b_{13}$	$-a_{10}b_9$	$+a_9b_{10}$	$-a_{15}b_{12}$	$+a_{12}b_{15}$,
$-a_5b_1$	$+a_1b_5$	$-a_7b_3$	$+a_3b_7$	$-a_6b_2$	$+a_2b_6$	$-a_8b_{12}$	$+a_{12}b_8$	$-a_9b_{13}$	$+a_{13}b_9$	$-a_{11}b_{15}$	$+a_{15}b_{11}$	$-a_{10}b_{14}$	$+a_{14}b_{10}$,
$-a_7b_2$	$+a_2b_7$	$-a_3b_6$	$+a_6b_3$	$-a_1b_4$	$+a_4b_1$	$-a_8b_{13}$	$+a_{13}b_8$	$-a_{10}b_{15}$	$+a_{15}b_{10}$	$-a_{14}b_{11}$	$+a_{11}b_{14}$	$-a_{12}b_9$	$+a_9b_{12}$,
$-a_1b_7$	$+a_7b_1$	$-a_2b_4$	$+a_4b_2$	$-a_5b_3$	$+a_3b_5$	$-a_8b_{14}$	$+a_{14}b_8$	$-a_{15}b_9$	$+a_9b_{15}$	$-a_{12}b_{10}$	$+a_{10}b_2$	$-a_{11}b_{13}$	$+a_{13}b_{11}$,
$-a_3b_4$	$+a_4b_3$	$-a_6b_1$	$+a_1b_6$	$-a_2b_5$	$+a_5b_2$	$-a_8b_{15}$	$+a_{15}b_8$	$-a_{12}b_{11}$	$+a_{11}b_{12}$	$-a_9b_{14}$	$+a_{14}b_9$	$-a_{13}b_{10}$	$+a_{10}b_{13}$,
$-a_9b_1$	$+a_1b_9$	$-a_2b_{10}$	$+a_{10}b_2$	$-a_{11}b_3$	$+a_3b_{11}$	$-a_4b_{12}$	$+a_{12}b_4$	$-a_{13}b_5$	$+a_5b_{13}$	$-a_{14}b_6$	$+a_6b_{14}$	$-a_{15}b_7$	$+a_7b_{15}$,
$-a_{11}b_2$	$+a_2b_{11}$	$-a_4b_{13}$	$+a_{13}b_4$	$-a_{14}b_7$	$+a_7b_{14}$	$-a_8b_1$	$+a_1b_8$	$-a_3b_{10}$	$+a_{10}b_3$	$-a_{13}b_4$	$+a_4b_{13}$	$-a_{14}b_7$	$+a_7b_{14}$,
$-a_{14}b_4$	$+a_4b_{14}$	$-a_5b_{15}$	$+a_{15}b_5$	$-a_9b_3$	$+a_3b_9$	$-a_8b_2$	$+a_2b_8$	$-a_6b_{12}$	$+a_{12}b_6$	$-a_{15}b_5$	$+a_5b_{15}$	$-a_9b_3$	$+a_3b_9$,
$-a_{13}b_6$	$+a_6b_{13}$	$-a_1b_{10}$	$+a_{10}b_1$	$-a_{15}b_4$	$+a_4b_{15}$	$-a_8b_3$	$+a_3b_8$	$-a_5b_{14}$	$+a_{14}b_5$	$-a_{10}b_1$	$+a_1b_{10}$	$-a_{15}b_4$	$+a_4b_{15}$,
$-a_9b_5$	$+a_5b_9$	$-a_7b_{11}$	$+a_{11}b_7$	$-a_{10}b_6$	$+a_6b_{10}$	$-a_8b_4$	$+a_4b_8$	$-a_1b_{13}$	$+a_{13}b_1$	$-a_{11}b_7$	$+a_7b_{11}$	$-a_{10}b_6$	$+a_6b_{10}$,
$-a_{10}b_7$	$+a_7b_{10}$	$-a_3b_{14}$	$+a_{14}b_3$	$-a_{12}b_1$	$+a_1b_{12}$	$-a_8b_5$	$+a_5b_8$	$-a_2b_{15}$	$+a_{15}b_2$	$-a_{14}b_3$	$+a_3b_{14}$	$-a_{12}b_1$	$+a_1b_{12}$,
$-a_{15}b_1$	$+a_1b_{15}$	$-a_2b_{12}$	$+a_{12}b_2$	$-a_{11}b_5$	$+a_5b_{11}$	$-a_8b_6$	$+a_6b_8$	$-a_7b_9$	$+a_9b_7$	$-a_{12}b_2$	$+a_2b_{12}$	$-a_{11}b_5$	$+a_5b_{11}$,
$-a_{12}b_3$	$+a_3b_{12}$	$-a_6b_9$	$+a_9b_6$	$-a_{13}b_2$	$+a_2b_{13}$	$-a_8b_7$	$+a_7b_8$	$-a_4b_{11}$	$+a_{11}b_4$	$-a_9b_6$	$+a_6b_9$	$-a_{13}b_2$	$+a_2b_{13}$.

причем $\boldsymbol{L}=$

$[L_2L_3]$	+	$[L_4L_5]$	+	$[L_7L_6]$	+	$[L_8L_9]$	+	$[L_{11}L_{10}]$	+	$[L_{13}L_{12}]$	+	$[L_{14}L_{15}]$	=	$-3iL_1$,
$[L_4L_6]$	+	$[L_5L_7]$	+	$[L_3L_1]$	+	$[L_8L_{10}]$	+	$[L_{14}L_{12}]$	+	$[L_{15}L_{13}]$	+	$[L_9L_{11}]$	=	$-3iL_2$,
$[L_6L_5]$	+	$[L_1L_2]$	+	$[L_4L_7]$	+	$[L_8L_{11}]$	+	$[L_{13}L_{14}]$	+	$[L_{10}L_9]$	+	$[L_{15}L_{12}]$	=	$-3iL_3$,
$[L_5L_1]$	+	$[L_7L_3]$	+	$[L_6L_2]$	+	$[L_8L_{12}]$	+	$[L_9L_{13}]$	+	$[L_{11}L_{15}]$	+	$[L_{10}L_{14}]$	=	$-3iL_4$,
$[L_7L_2]$	+	$[L_3L_6]$	+	$[L_1L_4]$	+	$[L_8L_{13}]$	+	$[L_{10}L_{15}]$	+	$[L_{14}L_{11}]$	+	$[L_{12}L_9]$	=	$-3iL_5$,
$[L_1L_7]$	+	$[L_2L_4]$	+	$[L_5L_3]$	+	$[L_8L_{14}]$	+	$[L_{15}L_9]$	+	$[L_{12}L_{10}]$	+	$[L_{11}L_{13}]$	=	$-3iL_6$,
$[L_3L_4]$	+	$[L_6L_1]$	+	$[L_2L_5]$	+	$[L_8L_{15}]$	+	$[L_{12}L_{11}]$	+	$[L_9L_{14}]$	+	$[L_{13}L_{10}]$	=	$-3iL_7$,
$[L_9L_1]$	+	$[L_{10}L_2]$	+	$[L_{11}L_3]$	+	$[L_{12}L_4]$	+	$[L_{13}L_5]$	+	$[L_{14}L_6]$	+	$[L_{15}L_7]$	=	$-3iL_8$,
$[L_3L_{10}]$	+	$[L_5L_{12}]$	+	$[L_6L_{15}]$	+	$[L_1L_8]$	+	$[L_{11}L_2]$	+	$[L_{13}L_4]$	+	$[L_{14}L_7]$	=	$-3iL_9$,
$[L_6L_{12}]$	+	$[L_7L_{13}]$	+	$[L_1L_{11}]$	+	$[L_2L_8]$	+	$[L_{14}L_4]$	+	$[L_{15}L_5]$	+	$[L_9L_3]$	=	$-3iL_{10}$,
$[L_5L_{14}]$	+	$[L_2L_9]$	+	$[L_7L_{12}]$	+	$[L_3L_8]$	+	$[L_{13}L_6]$	+	$[L_{10}L_1]$	+	$[L_{15}L_4]$	=	$-3iL_{11}$,
$[L_1L_{13}]$	+	$[L_3L_{15}]$	+	$[L_2L_{14}]$	+	$[L_4L_8]$	+	$[L_9L_5]$	+	$[L_{11}L_7]$	+	$[L_{10}L_6]$	=	$-3iL_{12}$,
$[L_2L_{15}]$	+	$[L_6L_{11}]$	+	$[L_4L_9]$	+	$[L_5L_8]$	+	$[L_{10}L_7]$	+	$[L_{14}L_3]$	+	$[L_{12}L_1]$	=	$-3iL_{13}$,
$[L_7L_9]$	+	$[L_4L_{10}]$	+	$[L_3L_{13}]$	+	$[L_6L_8]$	+	$[L_{15}L_1]$	+	$[L_{12}L_2]$	+	$[L_{11}L_5]$	=	$-3iL_{14}$,
$[L_4L_{11}]$	+	$[L_1L_{14}]$	+	$[L_5L_{10}]$	+	$[L_7L_8]$	+	$[L_{12}L_3]$	+	$[L_9L_6]$	+	$[L_{13}L_2]$	=	$-3iL_{15}$.

L_1

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0

L_2

0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0

L_3

0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0

L_4

0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i
0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0

L_5

0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0

L_6

0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0

L_7

0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0

L_8

0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0

L_9

0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0

L_{10}

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0
0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

L_{11}

0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0
0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

L_{12}

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i
0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0
0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

L_{13}

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

L_{14}

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

L_{15}

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

где L_i - антисимметричные матрицы операторов момента импульса,

$$[L_i L_j]=L_i L_j - L_j L_i$$

- коммутаторы,

Семерки матриц, составляющих операторы момента импульса, также антисимметричны. В свою очередь пятнадцать операторов L_i составляют оператор квадрата 15- момента импульса

$$\boldsymbol{L}^2 = L_1{}^2 + L_2{}^2 + \ldots + L_{15}{}^2 = 14I,$$

что характеризует закон сохранения момента импульса при матрице I равной единичной матрице.

Этот оператор коммутативен с каждым из операторов L_i

$$\boldsymbol{L}^2 L_i{}^2 - L_i \boldsymbol{L}^2 = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,15),$$

что характеризует закон сохранения момента импульса. Отметим, что подстановки на множестве индексов $(1,2,..,15)$ дают взаимно однозначное отображение векторного произведения двух векторов на себя.

Знаки компонент векторного произведения двух векторов определяются совершенно анти симметричным единичным 15-тензором второго ранга σ^{ijk}, компоненты которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из анти симметричности следует, что все компоненты тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля лишь те, у которых все три индекса различны. Задать осмысленно параметры совершенно анти симметричного 15-тензора второго ранга, однако, не возможно, поэтому желательно найти симметричную схему подстановки индексов. Выход, однако, можно найти, если рассмотреть пятнадцатимерное пространство, как совокупность семимерных пространств. Такая возможность, как показано выше, существует.

Это характеризует анти симметричное пятнадцатимерное векторное произведение двух векторов, как совокупность семи семимерных произведений, что отличается от краткой формы записи векторного произведения двух векторов отсутствием коэффициентов 3 при 8-ых компонентах.

Произведения трех векторов

Все произведения трех векторов можно получить умножением произведения двух векторов на третий вектор. В соответствии с этим возможны следующие типы произведений:

1. ***a(bc)***- простейшее произведение трех векторов;
2. ***(a[bc])***- смешанное произведение трех векторов;
3. ***[a[bc]]***- двойное векторное произведение трех векторов.

Простейшее произведение трех векторов ***a(bc)*** компланарно с третьим вектором

т. е. $\boldsymbol{a(bc)} \neq \boldsymbol{(ab)c}$,

так что векторные n-мерные $(n=1,3,7,15,\ldots)$ алгебры не ассоциативны.

Смешанное произведение

$$\boldsymbol{(a[bc])=(abc)}$$

получается скалярным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате получаем антисимметричную по перестановке любой пары векторов скалярную функцию:

$$(\boldsymbol{abc})=((a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+a_n\boldsymbol{e}_n)*\sigma_{ij}{}^k b_i c_j \boldsymbol{e}_k);$$

т. е. смешанное произведение трех векторов в одномерном случае равно нулю, в трехмерном случае – определяется одним определителем третьего порядка, в семимерном – суммой семи определителей, а в пятнадцатимерном – суммой тридцати пяти определителей третьего порядка причем

- в ***трехмерном*** случае

$$(\boldsymbol{abc}) = \quad |1,2,3|,$$

- в ***семимерном*** случае

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{abc}) = \quad & |1,2,3|+\\ &+|2,4,6|+\\ &+|3,6,5|+\\ &+|4,5,1|+\\ &+|5,7,2|+\\ &+|6,1,7|+\\ &+|7,3,4|,\end{aligned}$$

- в ***пятнадцатимерном*** случае

(abc)=

$= \lvert 1,\ 2,\ 3\rvert$	$+ \lvert 2,\ 8,10\rvert$	$+ \lvert 3,10,9\ \rvert$	$+ \lvert 8,\ 9,\ 1\ \rvert$	$+ \lvert 9,11,\ 2\ \rvert$	$+ \lvert 10,1,11\rvert$	$+ \lvert 11,3,\ 8\ \rvert$
$+ \lvert 2,\ 4,\ 6\rvert$	$+ \lvert 4,\ 8,12\rvert$	$+ \lvert 6,12,10\rvert$	$+ \lvert 8,10,\ 2\rvert$	$+ \lvert 10,14,4\rvert$	$+ \lvert 12,2,14\rvert$	$+ \lvert 14,\ 6,\ 8\rvert$
$+ \lvert 3,\ 6,\ 5\rvert$	$+ \lvert 6,\ 8,14\rvert$	$+ \lvert 5,14,11\rvert$	$+ \lvert 8,11,\ 3\rvert$	$+ \lvert 11,13,6\rvert$	$+ \lvert 14,3,13\rvert$	$+ \lvert 13,\ 5,\ 8\rvert$
$+ \lvert 4,\ 5,\ 1\ \rvert$	$+ \lvert 5,\ 8,13\rvert$	$+ \lvert 1,13,12\rvert$	$+ \lvert 8,12,\ 4\rvert$	$+ \lvert 12,9,\ 5\rvert$	$+ \lvert 13,4,\ 9\rvert$	$+ \lvert\ 9,\ 1,\ 8\rvert$
$+ \lvert 5,\ 7,\ 2\rvert$	$+ \lvert 7,\ 8,15\rvert$	$+ \lvert 2,15,13\rvert$	$+ \lvert 8,13,\ 5\rvert$	$+ \lvert 13,10,7\rvert$	$+ \lvert 15,5,10\rvert$	$+ \lvert 10,\ 2,8\ \rvert$
$+ \lvert 6,\ 1\ ,7\rvert$	$+ \lvert\ 1,\ 8,\ 9\ \rvert$	$+ \lvert\ 7,\ 9,14\rvert$	$+ \lvert\ 8,14,\ 6\rvert$	$+ \lvert 14,15,1\rvert$	$+ \lvert\ 9,6,15\rvert$	$+ \lvert 15,\ 7,\ 8\rvert$
$+ \lvert 7,\ 3,\ 4\rvert$	$+ \lvert 3,\ 8,11\rvert$	$+ \lvert 4,11,15\rvert$	$+ \lvert\ 8,15,\ 7\rvert$	$+ \lvert 15,12,3\rvert$	$+ \lvert 11,7,12\rvert$	$+ \lvert 12,\ 4,\ 8\rvert$

или в сокращенной записи:

(abc) =	$\lvert 1,2,3\rvert$	$+3*\lvert 1,8,\ 9\rvert$	$+\lvert 1,11,10\rvert$	$+\lvert 1,13,12\rvert$	$+\lvert 1,14,15\rvert$
	$+\lvert 2,4,6\rvert$	**$+3*\lvert 2,8,10\rvert$**	**$+\lvert 2,14,12\rvert$**	**$+\lvert 2,15,13\rvert$**	**$+\lvert 2,\ 9,11\ \rvert$**
	$+\lvert 3,6,5\rvert$	**$+3*\lvert 3,8,11\rvert$**	**$+\lvert 3,13,14\rvert$**	**$+\lvert 3,10,\ 9\rvert$**	**$+\lvert 3,15,12\rvert$**
	$+\lvert 4,5,1\rvert$	$+3*\lvert 4,8,12\rvert$	$+\lvert 4,\ 9,13\rvert$	$+\lvert 4,11,15\rvert$	$+\lvert 4,10,14\rvert$
	$+\lvert 5,7,2\rvert$	**$+3*\lvert 5,8,13\rvert$**	**$+\lvert 5,10,15\rvert$**	**$+\lvert 5,14,11\rvert$**	**$+\lvert 5,12,\ 9\ \rvert$**
	$+\lvert 6,1,7\rvert$	$+3*\lvert 6,8,14\rvert$	$+\lvert 6,15,\ 9\rvert$	$+\lvert 6,12,10\rvert$	$+\lvert 6,11,13\rvert$
	$+\lvert 7,3,4\rvert$	**$+3*\lvert 7,8,15\rvert$**	**$+\lvert 7,12,11\rvert$**	**$+\lvert 7,\ 9,14\rvert$**	**$+\lvert 7,13,10\rvert$**

В этой таблице символом $|i,j,k|$ обозначен определитель вида:

$$(i,j,k)=\begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix}.$$

Из свойств определителей следует:

1. смешанное произведение трех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель,

$$(\alpha\boldsymbol{abc})=\alpha(\boldsymbol{abc});$$

2. смешанное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары его векторов;

3. циклическая подстановка векторов не изменяют смешанного произведения трех векторов;

4. смешанное произведение трех векторов дистрибутивно, т. е.

$$(\boldsymbol{ab}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}))=(\boldsymbol{abc})+(\boldsymbol{abd});$$

5. если два вектора в смешанном произведении трех векторов компланарны, то это произведение равно нулю, в частности если два вектора в смешанном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль, так что векторное произведение двух векторов ортогонально каждому из входящих в него векторов для всех рассмотренных алгебр

$$([\mathbf{ab}]\mathbf{a})=([\mathbf{ba}]\mathbf{b})=0$$

и т. д. Модулю смешанного произведения $(\mathbf{abc})$ трех векторов $\mathbf{a,b}$ и $\mathbf{c}$ можно сопоставить скаляр, равный объему построенного на них параллелепипеда.

Вместе с тем пятнадцатимерное пространство можно рассматривать как совокупность семимерных пространств. При этом векторное произведение двух векторов не существенно отличается коэффициентом (3 при 8-ой координате), который зачастую мы не будем учитывать. Запись скалярного произведения двух векторов остается в прежнем виде так, что смешанное произведение трех векторов представляется аналогично формуле векторного произведения.

Однако, оно содержит ($49=28+3*7$) определителей третьего порядка, в случае представления 15-мерного пространства семимерными пространствами, что равносильно использованию тридцати пяти не повторяющихся определителей.

Двойное векторное произведение $[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]]$ трех векторов $\mathbf{a,b}$ и $\mathbf{c}$ получается векторным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате имеем вектор такой, что

$$[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]]=[\mathbf{ad}]=\mathbf{f}=f_1\mathbf{e}_1+f_2\mathbf{e}_2+\ldots+f_{15}\mathbf{e}_{15}.$$

В координатной форме записи для двойного векторного произведения имеет место соотношение:

- в ***трехмерном*** случае

$$f_1=a_2d_3-d_2a_3=a_2(b_1c_2-b_2c_1);$$
$$f_2=a_3d_1-d_3a_1=a_3(b_2c_3-b_3c_2);$$
$$f_3=a_1d_2-d_1a_2=a_1(b_3c_1-b_1c_3);$$

т.е. $$[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]]=\mathbf{b}(\mathbf{ca})-(\mathbf{ab})\mathbf{c};$$

- в ***семимерном*** случае для первой координаты

$$f_1=a_2d_3-a_3d_2+a_4d_5-a_5d_4+a_7d_6-a_6d_7=$$
$$=a_2(b_6c_5-b_5c_6+b_1c_2-b_2c_1+b_4c_7-b_7c_4)-a_3(b_4c_6-b_6c_4+b_5c_7-b_7c_5+b_3c_1-b_1c_3)+$$
$$+a_4(b_7c_2-b_2c_7+b_3c_6-b_6c_3+b_1c_4-b_4c_1)-a_5(b_5c_1-b_1c_5+b_7c_3-b_2c_6+b_6c_2-b_2c_6)+$$
$$+a_7(b_1c_7-b_7c_1+b_2c_4-b_4c_2+b_5c_3-b_3c_5)-a_6(b_3c_4-b_4c_3+b_6c_1-b_1c_6+b_2c_5-b_5c_2),$$

т.е. $f_1=b_1(\mathbf{ca})-(\mathbf{ab})c_1+[\mathbf{abc}]_1$ где $[\mathbf{abc}]_1=|2,4,7|+|3,7,5|+|4,3,6|+|6,5,2|$.

Аналогично для других координат

$$f_2=b_2(\mathbf{ca})-(\mathbf{ab})c_2+[\mathbf{abc}]_2, \qquad [\mathbf{abc}]_2=|4,5,3|+|6,3,7|+|5,6,1|+|1,7,4|,$$
$$f_3=b_3(\mathbf{ca})-(\mathbf{ab})c_3+[\mathbf{abc}]_3, \qquad [\mathbf{abc}]_3=|6,1,4|+|5,4,2|+|1,5,7|+|7,2,6|,$$
$$f_4=b_4(\mathbf{ca})-(\mathbf{ab})c_4+[\mathbf{abc}]_4, \qquad [\mathbf{abc}]_4=|5,7,6|+|1,6,3|+|7,1,2|+|2,3,5|,$$
$$f_5=b_5(\mathbf{ca})-(\mathbf{ab})c_5+[\mathbf{abc}]_5, \qquad [\mathbf{abc}]_5=|7,3,1|+|2,1,6|+|3,2,4|+|4,6,7|,$$
$$f_6=b_6(\mathbf{ca})-(\mathbf{ab})c_6+[\mathbf{abc}]_6, \qquad [\mathbf{abc}]_6=|1,2,5|+|7,5,4|+|2,7,3|+|3,4,1|,$$
$$f_7=b_7(\mathbf{ca})-(\mathbf{ab})c_7+[\mathbf{abc}]_7, \qquad [\mathbf{abc}]_7=|3,6,2|+|4,2,1|+|6,4,5|+|5,1,3|.$$

Таким образом, в семимерном случае, окончательно напишем

$$[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]]=\mathbf{b}(\mathbf{ca})-(\mathbf{ab})\mathbf{c}+[\mathbf{abc}],$$

где вектор ***[abc]*** определяется суммой *28*-ми определителей третьего порядка или семью определителями четвертого порядка, причем имеет место соотношение Якоби в виде:

$$[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc],$$
$$[b[ca]]=c(ab)-(bc)a+[bca],$$
$$[c[ab]]=a(bc)-(ca)b+[cab],$$

т.е. $$[a[bc]]+[b[ca]]+[c[ab]]=3[abc].$$

Обозначим сумму четырех определителей третьего порядка через

$$|\boldsymbol{i},j,k,h|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e_i} & \boldsymbol{e_j} & \boldsymbol{e_k} & \boldsymbol{e_h} \\ a_i & a_j & a_k & a_h \\ b_i & b_j & b_k & b_h \\ c_i & c_j & c_k & c_h \end{vmatrix}$$

тогда ***[abc]*** определяется суммой семи определителей четвертого порядка причем

$$[abc]=|\boldsymbol{1},2,4,7|+|\boldsymbol{2},4,5,3|+|\boldsymbol{3},6,1,4|+|\boldsymbol{4},5,7,6|+|\boldsymbol{5},7,3,1|+|\boldsymbol{6},1,2,5|+|\boldsymbol{7},3,6,2|.$$

Следует отметить, что подстановки

1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	5	7	1	3
3	6	5	1	2	7	4
4	5	1	7	3	2	6
5	7	2	3	6	4	1
6	1	7	2	4	3	5
7	3	4	6	1	5	2

на множестве индексов *(1,2,3,4,5,6,7)* дают взаимно однозначное отображение векторного произведения трех векторов на себя. Аналогичным образом получим соотношение Якоби в виде:

$$[[ab]c]=b(ac)-(cb)a+[cba]=b(ac)-(cb)a-3[abc],$$

Назовем анти симметричную по перестановке любой пары векторов функцию трех векторов ***[abc]*** векторным произведением трех векторов при этом двойное векторное произведение трех векторов сводится к линейной комбинации двух простейших и векторного произведения трех векторов. Из свойств определителей следует, что

1. векторное произведение трех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т. е.

$$[\alpha abc]=[\alpha abc];$$

2. векторное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;

3. векторное произведение трех векторов дистрибутивно т.е.

$$[ab(c+d)]=[abc]+[abd];$$

4. если два вектора в векторном произведении трех векторов компланарны, то это произведение равно нулю, в частности, если два вектора в векторном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль и т. д..

Векторным произведением ***[abc]*** трех векторов ***a,b*** и ***c*** можно назвать вектор

$$[abc]=[a_i\boldsymbol{e_i}b_j\boldsymbol{e_j}c_k\boldsymbol{e_k}]=a_ib_jc_k[\boldsymbol{e_i}\boldsymbol{e_j}\boldsymbol{e_k}]=\sigma_{ijk}{}^{k}a_ib_jc_k\boldsymbol{e_k},$$

определяемый совершенно анти симметричным единичным 7-тензором третьего ранга σ^{ijk} компоненты, которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из анти симметрии следует, что все компоненты 7-тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля лишь те, у которых все три индекса различны. Вектор ***[abc]*** в семимерном случае определяется суммой *28*-ми определителей третьего порядка дополняющих совокупность из (*35=7+7*4)* возможных комбинаций как число сочетаний $C_7^3=(5*6*7)/(2*3)=35$. Компоненты совершенно анти симметричного единичного 7-тензора третьего ранга σ^{ijk} не изменяются по отношению к вращению семимерной системы координат.

Соотношение Якоби в семимерной алгебре не выполняется, она не ассоциативна и не является алгеброй Ли. В [1] показано, что она удовлетворяет соотношению Мальцева.

Скалярное произведение двух векторов в 15-мерной алгебре определяется скаляром:

$$\boldsymbol{(ab)}=(a_i\boldsymbol{e_i}b_k\boldsymbol{e_k})=a_ib_k(\boldsymbol{e_ie_k})=g_{ik}a_ib_k,$$

где g_{ik}-метрический 15-тензор, равный единичной матрице. Согласно сказанному выше имеем:

[ab]=

=	$\lvert \mathbf{1}, 2, 3\rvert$	+	$\lvert \mathbf{2}, 8, 10\rvert$	+	$\lvert \mathbf{3}, 10, 9\rvert$	+	$\lvert \mathbf{8}, 9, 1\rvert$	+	$\lvert \mathbf{9}, 11, 2\rvert$	+	$\lvert \mathbf{10}, 1, 11\rvert$	+	$\lvert \mathbf{11}, 3, 8\rvert$
+	$\lvert \mathbf{2}, 4, 6\rvert$	+	$\lvert \mathbf{4}, 8, 12\rvert$	+	$\lvert \mathbf{6}, 12, 10\rvert$	+	$\lvert \mathbf{8}, 10, 2\rvert$	+	$\lvert \mathbf{10}, 14, 4\rvert$	+	$\lvert \mathbf{12}, 2, 14\rvert$	+	$\lvert \mathbf{14}, 6, 8\rvert$
+	$\lvert \mathbf{3}, 6, 5\rvert$	+	$\lvert \mathbf{6}, 8, 14\rvert$	+	$\lvert \mathbf{5}, 14, 11\rvert$	+	$\lvert \mathbf{8}, 11, 3\rvert$	+	$\lvert \mathbf{11}, 13, 6\rvert$	+	$\lvert \mathbf{14}, 3, 13\rvert$	+	$\lvert \mathbf{13}, 5, 8\rvert$
+	$\lvert \mathbf{4}, 5, 1\rvert$	+	$\lvert \mathbf{5}, 8, 13\rvert$	+	$\lvert \mathbf{1}, 13, 12\rvert$	+	$\lvert \mathbf{8}, 12, 4\rvert$	+	$\lvert \mathbf{12}, 9, 5\rvert$	+	$\lvert \mathbf{13}, 4, 9\rvert$	+	$\lvert \mathbf{9}, 1, 8\rvert$
+	$\lvert \mathbf{5}, 7, 2\rvert$	+	$\lvert \mathbf{7}, 8, 15\rvert$	+	$\lvert \mathbf{2}, 15, 13\rvert$	+	$\lvert \mathbf{8}, 13, 5\rvert$	+	$\lvert \mathbf{13}, 10, 7\rvert$	+	$\lvert \mathbf{15}, 5, 10\rvert$	+	$\lvert \mathbf{10}, 2, 8\rvert$
+	$\lvert \mathbf{6}, 1, 7\rvert$	+	$\lvert \mathbf{1}, 8, 9\rvert$	+	$\lvert 7, 9, 14\rvert$	+	$\lvert \mathbf{8}, 14, 6\rvert$	+	$\lvert \mathbf{14}, 15, 1\rvert$	+	$\lvert \mathbf{9}, 6, 15\rvert$	+	$\lvert \mathbf{15}, 7, 8\rvert$
+	$\lvert 7, 3, 4\rvert$	+	$\lvert \mathbf{3}, 8, 11\rvert$	+	$\lvert \mathbf{4}, 11, 15\rvert$	+	$\lvert \mathbf{8}, 15, 7\rvert$	+	$\lvert \mathbf{15}, 12, 3\rvert$	+	$\lvert \mathbf{11}, 7, 12\rvert$	+	$\lvert \mathbf{12}, 4, 8\rvert$

Для первой координаты f_1 двойного векторного произведения двух векторов получим:

$f_1=$	$((a_2d_3-a_3d_2)$	$+(a_4d_5-a_5d_4)$	$+(a_7d_6-a_6d_7)$	$+3(a_8d_9-a_9d_8)$	$+(a_{11}d_{10}-a_{10}d_{11})$	$+(a_{13}d_{12}-a_{12}d_{13})$	$+(a_{14}d_{15}-a_{15}d_{14}))$
$=-a_3*$	$((b_4c_6-b_6c_4)$	$+(b_5c_7-b_7c_5)$	$+(b_3c_1-b_1c_3)$	$+3(b_8c_{10}-b_{10}c_8)$	$+(b_{14}c_{12}-b_{12}c_{14})$	$+(b_{15}c_{13}-b_{13}c_{15})$	$+(b_9c_{11}-b_{11}c_9))$
$+a_2*$	$((b_6c_5-b_5c_6)$	$+(b_1c_2-b_2c_1)$	$+(b_4c_7-b_7c_4)$	$+3(b_8c_{11}-b_{11}c_8)$	$-(b_{13}c_{14}-b_{14}c_{13})$	$+(b_{10}c_9-b_9c_{10})$	$-(b_{15}c_{12}-b_{12}c_{15}))$
$-a_5*$	$((b_5c_1-b_1c_5)$	$+(b_7c_3-b_3c_7)$	$+(b_6c_2-b_2c_6)$	$+3(b_8c_{12}-b_{12}c_8)$	$+(b_9c_{13}-b_{13}c_9)$	$+(b_{11}c_{15}-b_{15}c_{11})$	$+(b_{10}c_{14}-b_{14}c_{10}))$
$+a_4*$	$((b_7c_2-b_2c_7)$	$+(b_3c_6-b_6c_3)$	$+(b_1c_4-b_4c_1)$	$+3(b_8c_{13}-b_{13}c_8)$	$-(b_{10}c_{15}-b_{15}c_{10})$	$-(b_{14}c_{11}-b_{11}c_{14})$	$+(b_{12}c_9-b_9c_{12}))$
$+a_7*$	$((b_1c_7-b_7c_1)$	$+(b_2c_4-b_4c_2)$	$+(b_5c_3-b_3c_5)$	$+3(b_8c_{14}-b_{14}c_8)$	$+(b_{15}c_9-b_9c_{15})$	$-(b_{12}c_{10}-b_{10}c_{12})$	$-(b_{11}c_{13}-b_{13}c_{11}))$
$-a_6*$	$((b_3c_4-b_4c_3)$	$+(b_6c_1-b_1c_6)$	$+(b_2c_5-b_5c_2)$	$+3(b_8c_{15}-b_{15}c_8)$	$+(b_{12}c_{11}-b_{11}c_{12})$	$+(b_9c_{14}-b_{14}c_9)$	$+(b_{13}c_{10}-b_{10}c_{13}))$
$-a_9*$	$((b_9c_1-b_1c_9)$	$+(b_{10}c_2-b_2c_{10})$	$+(b_{11}c_3-b_3c_{11})$	$+(b_{12}c_4-b_4c_{12})$	$+(b_{13}c_5-b_5c_{13})$	$+(b_{14}c_6-b_6c_{14})$	$+(b_{15}c_7-b_7c_{15}))$
$+a_8*$	$(3(b_{11}c_2-b_2c_{11})$	$+3(b_{13}c_4-b_4c_{13})$	$+3(b_{14}c_7-b_7c_{14})$	$+(b_1c_8-b_8c_1)$	$+3(b_3c_{10}-b_{10}c_3)$	$+3(b_5c_{12}-b_{12}c_5)$	$+3(b_6c_{15}-b_{15}c_6))$
$+a_{11}*$	$((b_{14}c_4-b_4c_{14})$	$-(b_{15}c_5-b_5c_{15})$	$+(b_9c_3-b_3c_9)$	$+3(b_3c_8-b_8c_3)$	$-(b_6c_{12}-b_{12}c_6)$	$+(b_7c_{13}-b_{13}c_7)$	$+(b_1c_{11}-b_{11}c_1))$
$-a_{10}*$	$(-(b_{13}c_6-b_6c_{13})$	$+(b_{10}c_1-b_1c_{10})$	$+(b_{15}c_4-b_4c_{15})$	$+3(b_2c_8-b_8c_2)$	$-(b_5c_{14}-b_{14}c_5)$	$+(b_2c_9-b_9c_2)$	$+(b_7c_{12}-b_{12}c_7))$
$+a_{13}*$	$((b_9c_5-b_5c_9)$	$+(b_{11}c_7-b_7c_{11})$	$-(b_{10}c_6-b_6c_{10})$	$+3(b_5c_8-b_8c_5)$	$+(b_1c_{13}-b_{13}c_1)$	$-(b_3c_{15}-b_{15}c_3)$	$+(b_2c_{14}-b_{14}c_2))$
$-a_{12}*$	$((b_{10}c_7-b_7c_{10})$	$-(b_{14}c_3-b_3c_{14})$	$+(b_{12}c_1-b_1c_{12})$	$+3(b_4c_8-b_8c_4)$	$+(b_2c_{15}-b_{15}c_2)$	$-(b_6c_{11}-b_{11}c_6)$	$+(b_4c_9-b_9c_4))$
$-a_{15}*$	$((b_{15}c_1-b_1c_{15})$	$+(b_{12}c_2-b_2c_{12})$	$-(b_{11}c_5-b_5c_{11})$	$+3(b_6c_8-b_8c_6)$	$+(b_7c_9-b_9c_7)$	$+(b_4c_{10}-b_{10}c_4)$	$-(b_3c_{13}-b_{13}c_3))$
$+a_{14}*$	$(-(b_{12}c_3-b_3c_{12})$	$+(b_9c_6-b_6c_9)$	$+(b_{13}c_2-b_2c_{13})$	$+3(b_7c_8-b_8c_7)$	$+(b_4c_{11}-b_{11}c_4)$	$+(b_1c_{14}-b_{14}c_1)$	$-(b_5c_{10}-b_{10}c_5))$

или

$$f_1=b_1\boldsymbol{(ca)}-\boldsymbol{(ab)}c_1+\boldsymbol{[abc]}_1$$

Здесь 18 компонентов суммы имеют отрицательные знаки перед скобками. Величины вида a_i, b_j, c_k будем обозначать цифрами, например, так. $a_2*(b_6*c_5-b_5*c_6)=2, 6, 5$.

В результате имеем таблицу:

3,6,4	3,7,5	3, 1,3	3*(3,10,8)	3,12,14	3,13,15	3,11,9
2,6,5	2,1,2	2,4,7	3*(2,8,11)	2,14,13	2, 10,9	2,12,15
5, 1,5	5,3,7	5,2, 6	3*(5,12,8)	5,13,9	5,15,11	5,14,10
4,7,2	4,3, 6	4, 1,4	3*(4,8,13)	4,15,10	4,11,14	4,12,9
7, 1,7	7,2,4	7,5,3	3*(7,8,14)	7,15,9	7,10,12	7,13,11
6,4,3	6, 1, 6	6,5,2	3*(6,15,8)	6,11,12	6,14,9	6,10,13
9,1,9	9,2,10	9,3,11	(9,4,12)	9,5,13	9,6,14	9,7,15
3*(8,11,2)	3*(8,13,4)	3*(8,14,7)	(8,1,8)	3*(8,3,10)	3*(8,5,12)	3*(8,6,15)
11,14,4	11,5,15	11,9,3	3*(11,3,8)	11,12,6	11,7,13	11,1,11
10,13,6	10,1,10	10,4,15	3*(10,8,2)	10,5,14	10,9,2	10,12,7
13,9,5	13,11,7	13,6,10	3*(13,5,8)	13,1,13	13,15,3	13,2,14
12,7,10	12,14,3	12,1,12	3*(12,8,4)	12,15,2	12,6,11	12,9,4
15,1,15	15, 2,12	15,11,5	3*(15,8,6)	15,9,7	15,10,4	15,3,13
14,3,12	14,9,6	14,13,2	3*(14,7,8)	14,4,11	14,1,14	14,10,5
[abc]$_1$=						
=|2,4,7|	+3*|4,8,13|	+3*|8,11,2|	+|11,14,4|	+3*|14,7,8|	7,13,11	+|13,2,14|
+|3,7,5|	+|5,13,9|	+|9,2,10|	+|10,4,15|	+3*|15,8,6|	6,11,12	+|12,14,3|
+|4,3,6|	+3*|8,5,12|	+|11,9,3|	+|14,10,5|	+|7,15,9|	13,6,10	+|2,12,15|
+|6,5,2|	+|12,9,4|	+3*|3,10,8|	+|5,15,11|	+|9,6,14|	10,12,7	+|15,3,13|

При этом семерка семимерных пространств 15-мерного пространства определяется семью таблицами подстановки индексов наряду с уже известной исходной таблицей

1	2	3	8	9	10	11		2	4	6	8	10	12	14		3	6	5	8	11	14	13
2	8	10	9	11	1	3		4	8	12	10	14	2	6		6	8	14	11	13	3	5
3	10	9	1	2	11	8		6	12	10	2	4	14	8		5	14	11	3	6	13	8
8	9	1	11	3	2	10		8	10	2	14	6	4	12		8	11	3	13	5	6	14
9	11	2	3	10	8	1		10	14	4	6	12	8	2		11	13	6	5	14	8	3
10	1	11	2	8	3	9		12	2	14	4	8	6	10		14	3	13	6	8	5	11
11	3	8	10	1	9	2		14	6	8	12	2	10	4		13	5	8	14	3	11	6
4	5	1	8	12	13	9		5	7	2	8	13	15	10		6	1	7	8	14	9	15
5	8	13	12	9	4	1		7	8	15	13	10	5	2		1	8	9	14	15	6	7
1	13	12	4	5	9	8		2	15	13	5	7	10	8		7	9	14	6	1	15	8
8	12	4	9	1	5	13		8	13	5	10	2	7	15		8	14	6	15	7	1	9
12	9	5	1	13	8	4		13	10	7	2	15	8	5		14	15	1	7	9	8	6
13	4	9	5	8	1	12		15	5	10	7	8	2	13		9	6	15	1	8	7	14
9	1	8	13	4	12	5		10	2	8	15	5	13	7		15	7	8	9	6	14	1
7	3	4	8	15	11	12										1	2	3	4	5	6	7
3	8	11	15	12	7	4										2	4	6	5	7	1	3
4	11	15	7	3	12	8										3	6	5	1	2	7	4
8	15	7	12	4	3	11										4	5	1	7	3	2	6
15	12	3	4	11	8	7										5	7	2	3	6	4	1
11	7	12	3	8	4	15										6	1	7	2	4	3	5
12	4	8	11	7	15	3										7	3	4	6	1	5	2

Этой таблице можно сопоставить таблицу подстановки индексов семи сопряженных пространств,

9	10	11	8	1	2	3		10	12	14	8	2	4	6		11	14	13	8	3	6	5
10	8	2	1	3	9	11		12	8	4	2	6	10	14		14	8	6	3	5	11	13
11	2	1	9	10	3	8		14	4	2	10	12	6	8		13	6	3	11	14	5	8
8	1	9	3	11	10	2		8	2	10	6	14	12	4		8	3	11	5	13	14	6
1	3	10	11	2	8	9		2	6	12	14	4	8	10		3	5	14	13	6	8	11
2	9	3	10	8	11	1		4	10	6	12	8	14	2		6	11	5	14	8	13	3
3	11	8	2	9	1	10		6	14	8	4	10	2	12		5	13	8	6	11	3	14

12	13	9	8	4	5	1		13	15	10	8	5	7	2		14	9	15	8	6	1	7
13	8	5	4	1	12	9		15	8	7	5	2	13	10		9	8	1	6	7	14	15
9	5	4	12	13	1	8		10	7	5	13	15	2	8		15	1	6	14	9	7	8
8	4	12	1	9	13	5		8	5	13	2	10	15	7		8	6	14	7	15	9	1
4	1	13	9	5	8	12		5	2	15	10	7	8	13		6	7	9	15	1	8	14
5	12	1	13	8	9	4		7	13	2	15	8	10	5		1	14	7	9	8	15	6
1	9	8	5	12	4	13		2	10	8	7	13	5	15		7	15	8	1	14	6	9
15	11	12	8	7	3	4																
11	8	3	7	4	15	12																
12	3	7	15	11	4	8																
8	7	15	4	12	11	3																
7	4	11	12	3	8	15																
3	15	4	11	8	12	7																
4	12	8	3	15	7	11																

Аналогично для остальных координат получим:

<table>
<tr><td colspan="7">$f_1=b_1(ca)-(ab)c_1+[abc]_1$
$[abc]_1=$</td></tr>
<tr><td>=|2,4,7|</td><td>+3*|4,8,13|</td><td>+3*|8,11,2|</td><td>+|11,14,4|</td><td>+3*|14,7,8|</td><td>|7,13,11|</td><td>+|13,2,14|</td></tr>
<tr><td>+|3,7,5|</td><td>+|5,13,9|</td><td>+|9,2,10|</td><td>+|10,4,15|</td><td>+3*|15,8,6|</td><td>|6,11,12|</td><td>+|12,14,3|</td></tr>
<tr><td>+|4,3,6|</td><td>+3*|8,5,12|</td><td>+|11,9,3|</td><td>+|14,10,5|</td><td>+|7,15,9|</td><td>|13,6,10|</td><td>+|2,12,15|</td></tr>
<tr><td>+|6,5,2|</td><td>+|12,9,4|</td><td>+3*|3,10,8|</td><td>**+|5,15,11|**</td><td>+|9,6,14|</td><td>|**10,12,7**|</td><td>**+|15,3,13|**</td></tr>
<tr><td colspan="7">$f_2=b_2(ca)-(ab)c_2+[abc]_2$
$[abc]_2=$</td></tr>
<tr><td>= |4,5,3|</td><td>+3*|5,8,15|</td><td>+3*|8,14,4|</td><td>+|14,9 ,5|</td><td>+3*| 9, 3,8|</td><td>+|3,15,14|</td><td>+|15,4,9|</td></tr>
<tr><td>+|6,3,7|</td><td>+|7,15,10|</td><td>+|10,4,12|</td><td>+|12,5,11|</td><td>+3*|11,8,1|</td><td>+|1,14,13|</td><td>+|13,9 ,6|</td></tr>
<tr><td>+|5,6,1|</td><td>+3*|8,7,13|</td><td>+|14,10,6|</td><td>+| 9,12 7|</td><td>+|3,11,10|</td><td>+|15,1,12|</td><td>+|4,13,11|</td></tr>
<tr><td>+|1,7,4|</td><td>+|13,10,5|</td><td>+3*|6,12,8|</td><td>+|7,11,14|</td><td>+|10,1, 9|</td><td>+|12,13,3|</td><td>+|11,6,15|</td></tr>
<tr><td colspan="7">$f_3=b_3(ca)-(ab)c_3+[abc]_3$
$[abc]_3=$</td></tr>
<tr><td>=|6,1,4|</td><td>+3*|1,8,10|</td><td>+3*|8,13,6|</td><td>+|13,15,1|</td><td>+3*|15,4,8|</td><td>+|4,10,13|</td><td>+|10,6,15|</td></tr>
<tr><td>+|5,4,2|</td><td>+|2,10,11|</td><td>+|11,6,14|</td><td>+|14,1,12|</td><td>+3*|12,8,7|</td><td>+|7,13,9|</td><td>+|9,15,5|</td></tr>
<tr><td>+|1,5,7|</td><td>+3*|8,2,9|</td><td>+|13,11,5|</td><td>+|15,14,2|</td><td>+|4,12,11|</td><td>+|10,7,14|</td><td>+|6,9,12|</td></tr>
<tr><td>+|7,2,6|</td><td>+|9,11,1|</td><td>+3*|5,14,8|</td><td>+|2,12,13|</td><td>+|11,7,15|</td><td>+|14,9,4|</td><td>+|12,5,10|</td></tr>
<tr><td colspan="7">$f_4=b_4(ca)-(ab)c_4+[abc]_4$
$[abc]_4=$|</td></tr>
<tr><td>=5,7,6|</td><td>+3*|7,8,11|</td><td>+3*|8,9,5|</td><td>+|9,10,7|</td><td>+3*|10,6,8|</td><td>+|6,11,9|</td><td>+|11,5,10|</td></tr>
<tr><td>+|1,6,3|</td><td>+|3,11,12|</td><td>+|12,5,13|</td><td>+|13,7,14|</td><td>+3*|14,8,2|</td><td>+|2,9,15|</td><td>+|15,10,1|</td></tr>
<tr><td>+|7,1,2|</td><td>+3*|8,3,15|</td><td>+|9,12,1|</td><td>+|10,13,3|</td><td>+|6,14,12|</td><td>+|11,2,14|</td><td>+|5,15,14|</td></tr>
<tr><td>+|2,3,5|</td><td>+|15,12,7|</td><td>+3*|1,13,8|</td><td>+|3,14,9|</td><td>+|12,2,10|</td><td>+|14,15,6|</td><td>+|14,1,11|</td></tr>
<tr><td colspan="7">$f_5=b_5(ca)-(ab)c_5+[abc]_5$
$[abc]_5=$</td></tr>
<tr><td>=|7,3,1|</td><td>+3*|3,8,14|</td><td>+3*|8,10,7|</td><td>+|10,12,3|</td><td>+3*|12,1,8|</td><td>+|1,14,10|</td><td>+|14,7,12|</td></tr>
<tr><td>+|2,1,6|</td><td>+|6,14,13|</td><td>+|13,7,15|</td><td>+|15,3,9|</td><td>+3*|9,8,4|</td><td>+|4,10,11|</td><td>+|11,12,2|</td></tr>
<tr><td>+|3,2,4|</td><td>+3*|8,6,11|</td><td>+|10,13,2|</td><td>+|12,15,6|</td><td>+|1,9,13|</td><td>+|14,4,9|</td><td>+|7,11,9|</td></tr>
<tr><td>+|4,6,7|</td><td>+|11,13,3|</td><td>+3*|2,15,8|</td><td>+|6,9,10|</td><td>+|13,4, 12|</td><td>+|9,11,1|</td><td>+|9,2,14|</td></tr>
<tr><td colspan="7">$f_6=b_6(ca)-(ab)c_6+[abc]_6$
$[abc]_6=$</td></tr>
<tr><td>=|1,2,5|</td><td>+3*|2,8,12|</td><td>+3*|8,15,1|</td><td>+|15,11,2|</td><td>+3*|11,5,8|</td><td>+|5,12,15|</td><td>+|12,1,11|</td></tr>
<tr><td>+|7,5,4|</td><td>+|4,12,14|</td><td>+|14,1,9|</td><td>+|9,2,13|</td><td>+3*|13,8,3|</td><td>+|3,15,10|</td><td>+|10,11,7|</td></tr>
<tr><td>+|2,7,3|</td><td>+3*|8,4,10|</td><td>+|15,14,7|</td><td>+|11,9,4|</td><td>+|5,13,14|</td><td>+|12,3,13|</td><td>+|1,10,13|</td></tr>
<tr><td>+|3,4,1|</td><td>+|10,14,2|</td><td>+3*|7,9,8|</td><td>+|4,13,15|</td><td>+|14,3,11|</td><td>+|13,10,5|</td><td>+|13,7,12|</td></tr>
<tr><td colspan="7">$f_7=b_7(ca)-(ab)c_7+[abc]_7$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="7">[abc]$_7$=</td></tr>
<tr><td>=|3,6,2|</td><td>+3*|6,8,9|</td><td>+3*|8,12,3|</td><td>+|12,13,6|</td><td>+3*|13,2,8|</td><td>+|2,9,12|</td><td>+|9,3,13|</td></tr>
<tr><td>+|4,2,1|</td><td>+|1,9,15|</td><td>+|15,3,11|</td><td>+|11,6,10|</td><td>+3*|10,8,5|</td><td>+|5,12,14|</td><td>+|14,13,4|</td></tr>
<tr><td>+|6,4,5|</td><td>+3*|8,1,14|</td><td>+|12,15,4|</td><td>+|13,11,1|</td><td>+|2,10,15|</td><td>+|9,5,10|</td><td>+|3,14,10|</td></tr>
<tr><td>+|5,1,3|</td><td>+|14,15,6|</td><td>+3*|4,11,8|</td><td>+|1,10,12|</td><td>+|15,5,13|</td><td>+|10,14,2|</td><td>+|10,4,9|</td></tr>
<tr><td colspan="7">$f_8=b_8(ca)-(ab)c_8+[abc]_8$</td></tr>
<tr><td colspan="7">[abc]$_8$=</td></tr>
<tr><td>|9,11,10|</td><td>|11,13,14|</td><td>|13,10,15|</td><td>|10,14,12|</td><td>|14,15,9|</td><td>|15,12,11|</td><td>|12, 9,13|</td></tr>
<tr><td>|1,10, 3|</td><td>| 3, 14, 5|</td><td>| 5, 15, 2|</td><td>| 2, 12, 6|</td><td>| 6, 9, 7|</td><td>| 7, 11, 4|</td><td>| 4, 13, 1|</td></tr>
<tr><td>|11, 1, 2|</td><td>|13, 3, 6|</td><td>| 10, 5, 7|</td><td>| 14, 2, 4|</td><td>| 15, 6, 1|</td><td>| 12, 7, 3|</td><td>| 9, 4, 5|</td></tr>
<tr><td>| 2, 3, 9|</td><td>| 6, 5, 11|</td><td>| 7, 2, 13|</td><td>| 4, 6, 10|</td><td>| 1, 7,14|</td><td>| 3, 4,15|</td><td>| 5, 1,12|</td></tr>
<tr><td colspan="7">$f_9=b_9(ca)-(ab)c_9+[abc]_9$</td></tr>
<tr><td colspan="7">[abc]$_9$=</td></tr>
<tr><td>=|10,12,15|</td><td>+3*|12,8,5|</td><td>+3*|8,3,10|</td><td>+|3,6,12|</td><td>+3*|6,15,8|</td><td>+|15,5,3|</td><td>+|5,10,6|</td></tr>
<tr><td>+|11,15,13|</td><td>+|13,5,1|</td><td>+|1,10,2|</td><td>+|2,12,7|</td><td>+3*|7,8,14|</td><td>+|14,3,4|</td><td>+|4,6,11|</td></tr>
<tr><td>+|12,11,14|</td><td>+3*|8,13,4|</td><td>+|3,1,11|</td><td>+|6,2,13|</td><td>+|15,7,1|</td><td>+|5,14,2|</td><td>+|10,4,7|</td></tr>
<tr><td>+|14,13,10|</td><td>+|4,1,12|</td><td>+3*|11,2,8|</td><td>+|13,7,3|</td><td>+|1,14,6|</td><td>+|2,4,15|</td><td>+|7,11,5|</td></tr>
<tr><td colspan="7">$f_{10}=b_{10}(ca)-(ab)c_{10}+[abc]_{10}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">[abc]$_{10}$=</td></tr>
<tr><td>=|12,13,11|</td><td>+3*|13,8,7|</td><td>+3*|8,6,12|</td><td>+|6,1 ,13|</td><td>+3*|1,11,8|</td><td>+|11,7,6|</td><td>+|7,12 ,1|</td></tr>
<tr><td>+|14,11,15|</td><td>+|15,7,2|</td><td>+|2,12,4|</td><td>+|4,13,3|</td><td>+3*|3,8, 9|</td><td>+|9,6,5|</td><td>+|5,1 ,14|</td></tr>
<tr><td>+|13,14,9|</td><td>+3*|8,15,5|</td><td>+|6,2,14|</td><td>+|1,4 ,15|</td><td>+|11,3,2|</td><td>+|7,9,4|</td><td>+|12,5,3|</td></tr>
<tr><td>+|9,15,12|</td><td>+|5,2,13|</td><td>+3*|14,4,8|</td><td>+|15,3,6|</td><td>+|2,9, 1|</td><td>+|4,5,11|</td><td>+|3,14,7|</td></tr>
<tr><td colspan="7">$f_{11}=b_{11}(ca)-(ab)c_{11}+[abc]_{11}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">[abc]$_{11}$=</td></tr>
<tr><td>=|14,9,12|</td><td>+3*|9,8,2|</td><td>+3*|8,5,14|</td><td>+|5,7,9|</td><td>+3*|7,12,8|</td><td>+|12,2,5|</td><td>+|2,14,7|</td></tr>
<tr><td>+|13,12,10|</td><td>+|10,2,3|</td><td>+|3,14,6|</td><td>+|6,9,4|</td><td>+3*|4,8,15|</td><td>+|15,5,1|</td><td>+|1,7,13|</td></tr>
<tr><td>+|9,13,15|</td><td>+3*|8,10,1|</td><td>+|5,3,13|</td><td>+|7,6,10|</td><td>+|12,4,3|</td><td>+|2,15,6|</td><td>+|14,1,4|</td></tr>
<tr><td>+|15,10,14|</td><td>+|1,3,9|</td><td>+3*|13,6,8|</td><td>+|10,4,5|</td><td>+|3,15,7|</td><td>+|6,1,12|</td><td>+|4,13,2|</td></tr>
<tr><td colspan="7">$f_{12}=b_{12}(ca)-(ab)c_{12}+[abc]_{12}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">[abc]$_{12}$=</td></tr>
<tr><td>=|13,15,14|</td><td>+3*|15,8,3|</td><td>+3*|8,1,13|</td><td>+|1,2,15|</td><td>+3*|2,14,8|</td><td>+|14,3,1|</td><td>+|3,13,2|</td></tr>
<tr><td>+|9,14,11|</td><td>+|11,3,4|</td><td>+|4,13,5|</td><td>+|5,15,6|</td><td>+3*|6,8,10|</td><td>+|10,1,7|</td><td>+|7,2,9|</td></tr>
<tr><td>+|15,9,10|</td><td>+3*|8,11,7|</td><td>+|1,4,9|</td><td>+|2,5,11|</td><td>+|14,6,4|</td><td>+|3,10,5|</td><td>+|13,7,6|</td></tr>
<tr><td>+|10,11,13|</td><td>+|7,4,15|</td><td>+3*|9,5,8|</td><td>+|11,6,1|</td><td>+|4,10,2|</td><td>+|5,7,14|</td><td>+|6,9,3|</td></tr>
<tr><td colspan="7">$f_{13}=b_{13}(ca)-(ab)c_{13}+[abc]_{13}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">[abc]$_{13}$=</td></tr>
<tr><td>=|15,11,9|</td><td>+3*|11,8,6|</td><td>+3*|8,2,15|</td><td>+|2,4,11|</td><td>+3*|4,9,8|</td><td>+|9,6,2|</td><td>+|6,15,4|</td></tr>
<tr><td>+|10,9,14|</td><td>+|14,6,5|</td><td>+|5,15,7|</td><td>+|7,11,1|</td><td>+3*|1,8,12|</td><td>+|12,2,3|</td><td>+|3,4,10|</td></tr>
<tr><td>+|11,10,12|</td><td>+3*|8,14,3|</td><td>+|2,5,10|</td><td>+|4,7,14|</td><td>+|9,1,5|</td><td>+|6,12,7|</td><td>+|15,3,1|</td></tr>
<tr><td>+|12,14,15|</td><td>+|3,5,11|</td><td>+3*|10,7,8|</td><td>+|14,1,2|</td><td>+|5,12, 4|</td><td>+|7,3,9|</td><td>+|1,10,6|</td></tr>
<tr><td colspan="7">$f_{14}=b_{14}(ca)-(ab)c_{14}+[abc]_{14}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">[abc]$_{14}$=</td></tr>
<tr><td>=|9,10,13|</td><td>+3*|10,8,4|</td><td>+3*|8,7,9|</td><td>+|7,3,10|</td><td>+3*|3,13,8|</td><td>+|13,4,7|</td><td>+|4,9,3|</td></tr>
<tr><td>+|15,13,12|</td><td>+|12,4,6|</td><td>+|6,9,1|</td><td>+|1,10,5|</td><td>+3*|5,8,11|</td><td>+|11,7,2|</td><td>+|2,3,15|</td></tr>
<tr><td>+|10,15,11|</td><td>+3*|8,12,2|</td><td>+|7,6,15|</td><td>+|3,1,12|</td><td>+|13,5,6|</td><td>+|4,11,1|</td><td>+|9,2,5|</td></tr>
<tr><td>+|11,12,9|</td><td>+|2,6,10|</td><td>+3*|15,1,8|</td><td>+|12,5,7|</td><td>+|6,11,3|</td><td>+|1,2,13|</td><td>+|5,15,4|</td></tr>
<tr><td colspan="7">$f_{15}=b_{15}(ca)-(ab)c_{15}+[abc]_{15}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">[abc]$_{15}$=</td></tr>
<tr><td>=|11,14,10|</td><td>+3*|14,8,1|</td><td>+3*|8,4,11|</td><td>+|4,5,14|</td><td>+3*|5,10,8|</td><td>+|10,1,4|</td><td>+|1,11,5|</td></tr>
<tr><td>+|12,10,9|</td><td>+|9,1,7|</td><td>+|7,11,3|</td><td>+|3,14,2|</td><td>+3*|2,8,13|</td><td>+|13,4,6|</td><td>+|6,5,12|</td></tr>
<tr><td>+|14,12,13|</td><td>+3*|8,9,6|</td><td>+|4,7,12|</td><td>+|5,3,9|</td><td>+|10,2,7|</td><td>+|1,13,3|</td><td>+|11,6,2|</td></tr>
<tr><td>+|13,9,11|</td><td>+|6,7,14|</td><td>+3*|12,3,8|</td><td>+|9,2,4|</td><td>+|7,13,5|</td><td>+|3,6,10|</td><td>+|2,12,1|</td></tr>
</table>

Таким образом, окончательно напишем

$$[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc],$$

где каждая компонента пятнадцатимерного вектора векторного произведения трех векторов ***[abc]*** определяется суммой 28 определителей третьего порядка, так что этот вектор характеризуется (28*15=420) определителями третьего порядка, отличающимися друг от друга. С учетом 35 определителей, используемых для векторного произведения двух векторов, получаем 455 определителей третьего порядка, как полное число сочетаний

$$C_{15}^{3}=(15*14*13)/(2*3)=455.$$

Четверки определителей третьего порядка объединяются в определитель четвертого порядка. Это сильно упрощает запись векторного произведения трех векторов. Так, сумма 28 определителей третьего порядка

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
$+\|2,4,7\|$	$+\|4,5,3\|$	$+\|6,1,4\|$	$+\|5,7,6\|$	$+\|7,3,1\|$	$+\|1,2,5\|$	$+\|3,6,2\|$
$+\|3,7,5\|$	$+\|6,3,7\|$	$+\|5,4,2\|$	$+\|1,6,3\|$	$+\|2,1,6\|$	$+\|7,5,4\|$	$+\|4,2,1\|$
$+\|4,3,6\|$	$+\|5,6,1\|$	$+\|1,5,7\|$	$+\|7,1,2\|$	$+\|3,2,4\|$	$+\|2,7,3\|$	$+\|6,4,5\|$
$+\|6,5,2\|$	$+\|1,7,4\|$	$+\|7,2,6\|$	$+\|2,3,5\|$	$+\|4,6,7\|$	$+\|3,4,1\|$	$+\|5,1,3\|$

образует сумму семи определителей четвертого порядка

$$|e_1\ \ e_2\ \ e_4\ \ e_7| \ +|e_2\ \ e_4\ \ e_5\ \ e_3| \ +|e_3\ \ e_6\ \ e_1\ \ e_4| \ +|e_4\ \ e_5\ \ e_7\ \ e_6| \ +|e_5\ \ e_7\ \ e_3\ \ e_1| \ +|e_6\ \ e_1\ \ e_2\ \ e_5| \ +|e_7\ \ e_3\ \ e_6\ \ e_2|.$$

В результате векторное произведение трех векторов может быть получено с помощью таблицы, соответствующей двум семеркам семимерных пространств:

e_1	e_2	e_4	e_7	e_1	e_4	e_8	e_{13}	e_1	e_8	e_{11}	e_2	e_1	e_{11}	e_{14}	e_4
e_2	e_4	e_5	e_3	e_2	e_5	e_8	e_{15}	e_2	e_8	e_{14}	e_4	e_2	e_{14}	e_9	e_5
e_3	e_6	e_1	e_4	e_3	e_1	e_8	e_{10}	e_3	e_8	e_{13}	e_6	e_3	e_{13}	e_{15}	e_1
e_4	e_5	e_7	e_6	e_4	e_7	e_8	e_{11}	e_4	e_8	e_9	e_5	e_4	e_9	e_{10}	e_7
e_5	e_7	e_3	e_1	e_5	e_3	e_8	e_{14}	e_5	e_8	e_{10}	e_7	e_5	e_{10}	e_{12}	e_3
e_6	e_1	e_2	e_5	e_6	e_2	e_8	e_{12}	e_6	e_8	e_{15}	e_1	e_6	e_{15}	e_{11}	e_2
e_7	e_3	e_6	e_2	e_7	e_6	e_8	e_9	e_7	e_8	e_{12}	e_3	e_7	e_{12}	e_{13}	e_6
				e_1	e_{14}	e_7	e_8	e_1	e_7	e_{13}	e_{11}	e_1	e_{13}	e_2	e_{14}
				e_2	e_9	e_3	e_8	e_2	e_3	e_{15}	e_{14}	e_2	e_{15}	e_4	e_9
				e_3	e_{15}	e_4	e_8	e_3	e_4	e_{10}	e_{13}	e_3	e_{10}	e_6	e_{15}
				e_4	e_{10}	e_6	e_8	e_4	e_6	e_{11}	e_9	e_4	e_{11}	e_5	e_{10}
				e_5	e_{12}	e_1	e_8	e_5	e_1	e_{14}	e_{10}	e_5	e_{14}	e_7	e_{12}
				e_6	e_{11}	e_5	e_8	e_6	e_5	e_{12}	e_{15}	e_6	e_{12}	e_1	e_{11}
				e_7	e_{13}	e_2	e_8	e_7	e_2	e_9	e_{12}	e_7	e_9	e_3	e_{13}
e_9	e_{10}	e_{12}	e_{15}	e_9	e_{12}	e_8	e_5	e_9	e_8	e_3	e_{10}	e_9	e_3	e_6	e_{12}
e_{10}	e_{12}	e_{13}	e_{11}	e_{10}	e_{13}	e_8	e_7	e_{10}	e_8	e_6	e_{12}	e_{10}	e_6	e_1	e_{13}
e_{11}	e_{14}	e_9	e_{12}	e_{11}	e_9	e_8	e_2	e_{11}	e_8	e_5	e_{14}	e_{11}	e_5	e_7	e_9
e_{12}	e_{13}	e_{15}	e_{14}	e_{12}	e_{15}	e_8	e_3	e_{12}	e_8	e_1	e_{13}	e_{12}	e_1	e_2	e_{15}
e_{13}	e_{15}	e_{11}	e_9	e_{13}	e_{11}	e_8	e_6	e_{13}	e_8	e_2	e_{15}	e_{13}	e_2	e_4	e_{11}
e_{14}	e_9	e_{10}	e_{13}	e_{14}	e_{10}	e_8	e_4	e_{14}	e_8	e_7	e_9	e_{14}	e_7	e_3	e_{10}
e_{15}	e_{11}	e_{14}	e_{10}	e_{15}	e_{14}	e_8	e_1	e_{15}	e_8	e_4	e_{11}	e_{15}	e_4	e_5	e_{14}

	e_9	e_6	e_{15}	e_8	e_9	e_{15}	e_5	e_3	e_9	e_5	e_{10}	e_6
	e_{10}	e_1	e_{11}	e_8	e_{10}	e_{11}	e_7	e_6	e_{10}	e_7	e_{12}	e_1
	e_{11}	e_7	e_{12}	e_8	e_{11}	e_{12}	e_2	e_5	e_{11}	e_2	e_{14}	e_7
	e_{12}	e_2	e_{14}	e_8	e_{12}	e_{14}	e_3	e_1	e_{12}	e_3	e_{13}	e_2
	e_{13}	e_4	e_9	e_8	e_{13}	e_9	e_6	e_2	e_{13}	e_6	e_{15}	e_4
	e_{14}	e_3	e_{13}	e_8	e_{14}	e_{13}	e_4	e_7	e_{14}	e_4	e_9	e_3
	e_{15}	e_5	e_{10}	e_8	e_{15}	e_{10}	e_1	e_4	e_{15}	e_1	e_{11}	e_5

что соответствует сумме 98-ми определителей четвертого порядка, характеризующих векторное произведение трех векторов. Остается записать еще семь определителей, составляющих векторное произведение трех векторов. Ими являются определители:

$$|\boldsymbol{e_1}\ \ \boldsymbol{e_2}\ \ \boldsymbol{e_4}\ \ \boldsymbol{e_7}| + |\boldsymbol{e_2}\ \ \boldsymbol{e_4}\ \ \boldsymbol{e_5}\ \ \boldsymbol{e_3}| + |\boldsymbol{e_3}\ \ \boldsymbol{e_6}\ \ \boldsymbol{e_1}\ \ \boldsymbol{e_4}| + |\boldsymbol{e_4}\ \ \boldsymbol{e_5}\ \ \boldsymbol{e_7}\ \ \boldsymbol{e_6}|$$
$$+|\boldsymbol{e_5}\ \ \boldsymbol{e_7}\ \ \boldsymbol{e_3}\ \ \boldsymbol{e_1}| + |\boldsymbol{e_6}\ \ \boldsymbol{e_1}\ \ \boldsymbol{e_2}\ \ \boldsymbol{e_5}| + |\boldsymbol{e_7}\ \ \boldsymbol{e_3}\ \ \boldsymbol{e_6}\ \ \boldsymbol{e_2}|.$$

Обозначим сумму четырех определителей третьего порядка через

$$|\boldsymbol{i},j,k,h| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_i} & \boldsymbol{e_j} & \boldsymbol{e_k} & \boldsymbol{e_h} \\ a_i & a_j & a_k & a_h \\ b_i & b_j & b_k & b_h \\ c_i & c_j & c_k & c_h \end{vmatrix}$$

тогда векторное произведение трех векторов образует сумма определителей четвертого порядка вида:

<table>
<tr><td>|1,2,4,7|</td><td>|1,4,8,13|</td><td>|1,8,11,2|</td><td>|1,11,14,4|</td><td>|1,14,7,8|</td><td>|1,7,13,11|</td><td>|1,13,2,14|</td></tr>
<tr><td>|2,4,5,3|</td><td>|4,8,9,5|</td><td>|8,11,10,9|</td><td>|11,14,15,10|</td><td>|14,7,6,15|</td><td>|7,13,12,6|</td><td>|13,2,3,12|</td></tr>
<tr><td>|3,6,1,4|</td><td>|5,12,1,8|</td><td>|9,3,1,11|</td><td>|10,5,1,14|</td><td>|15,9,1,7|</td><td>|6,10,1,13|</td><td>|12,15,1,2|</td></tr>
<tr><td>|4,5,7,6|</td><td>|8,9,13,12|</td><td>|11,10,2,3|</td><td>|14,15,4,5|</td><td>|7,6,8,9|</td><td>|13,12,11,10|</td><td>|2,3,14,15|</td></tr>
<tr><td>|5,7,3,1|</td><td>|9,13,5,1|</td><td>|10,2 ,9,1|</td><td>|15,4,10,1|</td><td>|6,8,15,1|</td><td>|12,11,6,1|</td><td>|3,14,12,1|</td></tr>
<tr><td>|6,1,2,5|</td><td>|12,1,4,9|</td><td>|3,1,8,10|</td><td>|5,1,11,15|</td><td>|9,1,14,6|</td><td>|10,1,7,12|</td><td>|15,1,13,3|</td></tr>
<tr><td>|7,3,6,2|</td><td>|13,5,12,4|</td><td>|2,9,3,8|</td><td>|4,10,5,11|</td><td>|8,15,9,14|</td><td>|11,6,10,7|</td><td>|14,12,15,13|</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>|2,4,5,3|</td><td>|2,5,8,15|</td><td>|2,8,14,4|</td><td>|2,14,9,5|</td><td>|2,9,3,8|</td><td>|2,3,15,14|</td><td>|2,15,4,9|</td></tr>
<tr><td>|4,5,7,6|</td><td>|5,8,10,7|</td><td>|8,14,12,10|</td><td>|14,9,11,12|</td><td>|9,3,1,11|</td><td>|3,15,13,1|</td><td>|15,4,6,13|</td></tr>
<tr><td>|6,1,2,5|</td><td>|7,13,2,8|</td><td>|10,6,2,14|</td><td>|12,7,2,9|</td><td>|11,10,2,3|</td><td>|1,12,2,15|</td><td>|13,11,2,4|</td></tr>
<tr><td>|5,7,3,1|</td><td>|8,10,15,13|</td><td>|14,12,4,6|</td><td>|9,11,5,7|</td><td>|3,1,8,10|</td><td>|15,13,14,12|</td><td>|4,6,9,11|</td></tr>
<tr><td>|7,3,6,2|</td><td>|10,15,7,2|</td><td>|12,4 ,10,2|</td><td>|11,5,12,2|</td><td>|1,8,11,2|</td><td>|13,14,1,2|</td><td>|6,9,13,2|</td></tr>
<tr><td>|1,2,4,7|</td><td>|13,2,5,10|</td><td>|6,2,8,12|</td><td>|7,2,14,11|</td><td>|10,2,9,1|</td><td>|12,2,3,13|</td><td>|11,2,15,6|</td></tr>
<tr><td>|3,6,1,4|</td><td>|15,7,13,5|</td><td>|4,10,6,8|</td><td>|5,12,7,14|</td><td>|8,11,10,9|</td><td>|14,1,12,3|</td><td>|9,13,11,15|</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>|3,6,1,4|</td><td>|3,1,8,10|</td><td>|3,8,13,6|</td><td>|3,13,15,1|</td><td>|3,15,4,8|</td><td>|3,4,10,13|</td><td>|3,10,6,15|</td></tr>
<tr><td>|6,1,2,5|</td><td>|1,8,11,2|</td><td>|8,13,14,11|</td><td>|13,15,12,14|</td><td>|15,4,7,12|</td><td>|4,10,9,7|</td><td>|10,6,5,9|</td></tr>
<tr><td>|5,7,3,1|</td><td>|2,9,3,8|</td><td>|11,5,3,13|</td><td>|14,2,3,15|</td><td>|12,11,3,4|</td><td>|7,14,3,10|</td><td>|9,12,3,6|</td></tr>
<tr><td>|1,2,4,7|</td><td>|8,11,10,9|</td><td>|13,14,6,5|</td><td>|15,12,1,2|</td><td>|4,7,8,11|</td><td>|10,9,13,14|</td><td>|6,5,15,12|</td></tr>
<tr><td>|2,4,5,3|</td><td>|11,10,2,3|</td><td>|14,6 ,11,3|</td><td>|12,1,14,3|</td><td>|7,8,12,3|</td><td>|9,13,7,3|</td><td>|5,15,9,3|</td></tr>
<tr><td>|7,3,6,2|</td><td>|9,3,1,11|</td><td>|5,3,8,14|</td><td>|2,3,13,12|</td><td>|11,3,15,7|</td><td>|14,3,4,9|</td><td>|12,3,10,5|</td></tr>
<tr><td>|4,5,7,6|</td><td>|10,2,9,1|</td><td>|6,11,5,8|</td><td>|1,14,2,13|</td><td>|8,12,11,15|</td><td>|13,7,14,4|</td><td>|15,9,12,10|</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>|4,5,7,6|</td><td>|4,7,8,11|</td><td>|4,8,9,5|</td><td>|4,9,10,7|</td><td>|4,10,6,8|</td><td>|4,6,11,9|</td><td>|4,11,5,10|</td></tr>
<tr><td>|5,7,3,1|</td><td>|7,8,12,3|</td><td>|8,9,13,12|</td><td>|9,10,14,13|</td><td>|10,6,2,14|</td><td>|6,11,15,2|</td><td>|11,5,1,15|</td></tr>
<tr><td>|1,2,4,7|</td><td>|3,15,4,8|</td><td>|12,1,4,9|</td><td>|13,3,4,10|</td><td>|14,12,4,6|</td><td>|2,13,4,11|</td><td>|15,14,4,5|</td></tr>
<tr><td>|7,3,6,2|</td><td>|8,12,11,15|</td><td>|9,13,5,1|</td><td>|10,14,7,3|</td><td>|6,2,8,12|</td><td>|11,15,9,13|</td><td>|5,1,10,14|</td></tr>
<tr><td>|3,6,1,4|</td><td>|12,11,3,4|</td><td>|13,5 ,12,4|</td><td>|14,7,13,4|</td><td>|2,8,14,4|</td><td>|15,9,2,4|</td><td>|1,10,15,4|</td></tr>
<tr><td>|2,4,5,3|</td><td>|15,4,7,12|</td><td>|1,4,8,13|</td><td>|3,4,9,14|</td><td>|12,4,10,2|</td><td>|13,4,6,15|</td><td>|14,4,11,1|</td></tr>
<tr><td>|6,1,2,5|</td><td>|11,3,15,7|</td><td>|5,12,1,8|</td><td>|7,13,3,9|</td><td>|8,14,12,10|</td><td>|9,2,13,6|</td><td>|10,15,14,11|</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>|5,7,3,1|</td><td>|5,3,8,14|</td><td>|5,8,10,7|</td><td>|5,10,12,3|</td><td>|5,12,1,8|</td><td>|5,1,14,10|</td><td>|5,14,7,12|</td></tr>
<tr><td>|7,3,6,2|</td><td>|3,8,13,6|</td><td>|8,10,15,13|</td><td>|10,12,9,15|</td><td>|12,1,4,9|</td><td>|1,14,11,4|</td><td>|14,7,2,11|</td></tr>
<tr><td>|2,4,5,3|</td><td>|6,11,5,8|</td><td>|13,2,5,10|</td><td>|15,6,5,12|</td><td>|9,13,5,1|</td><td>|4,15,5,14|</td><td>|11,9,5,7|</td></tr>
<tr><td>|3,6,1,4|</td><td>|8,13,14,11|</td><td>|10,15,7,2|</td><td>|12,9,3,6|</td><td>|1,4,8,13|</td><td>|14,11,10,15|</td><td>|7,2,12,9|</td></tr>
<tr><td>|6,1,2,5|</td><td>|13,14,6,5|</td><td>|15,7 ,13,5|</td><td>|9,3,15,5|</td><td>|4,8,9,5|</td><td>|11,10,4,5|</td><td>|2,12,11,5|</td></tr>
<tr><td>|4,5,7,6|</td><td>|11,5,3,13|</td><td>|2,5,8,15|</td><td>|6,5,10,9|</td><td>|13,5,12,4|</td><td>|15,5,1,11|</td><td>|9,5,14,2|</td></tr>
<tr><td>|1,2,4,7|</td><td>|14,6,11,3|</td><td>|7,13,2,8|</td><td>|3,15,6,10|</td><td>|8,9,13,12|</td><td>|10,4,15,1|</td><td>|12,11,9,14|</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>|6,1,2,5|</td><td>|6,2,8,12|</td><td>|6,8,15,1|</td><td>|6,15,11,2|</td><td>|6,11,5,8|</td><td>|6,5,12,15|</td><td>|6,12,1,11|</td></tr>
<tr><td>|1,2,4,7|</td><td>|2,8,14,4|</td><td>|8,15,9,14|</td><td>|15,11,13,9|</td><td>|11,5,3,13|</td><td>|5,12,10,3|</td><td>|12,1,7,10|</td></tr>
<tr><td>|7,3,6,2|</td><td>|4,10,6,8|</td><td>|14,7,6,15|</td><td>|9,4,6,11|</td><td>|13,14,6,5|</td><td>|3,9,6,12|</td><td>|10,13,6,1|</td></tr>
<tr><td>|2,4,5,3|</td><td>|8,14,12,10|</td><td>|15,9,1,7|</td><td>|11,13,2,4|</td><td>|5,3,8,14|</td><td>|12,10,15,9|</td><td>|1,7,11,13|</td></tr>
<tr><td>|4,5,7,6|</td><td>|14,12,4,6|</td><td>|9,1 ,14,6|</td><td>|13,2,9,6|</td><td>|3,8,13,6|</td><td>|10,15,3,6|</td><td>|7,11,10,6|</td></tr>
<tr><td>|3,6,1,4|</td><td>|10,6,2,14|</td><td>|7,6,8,9|</td><td>|4,6,15,13|</td><td>|14,6,11,3|</td><td>|9,6,5,10|</td><td>|13,6,12,7|</td></tr>
<tr><td>|5,7,3,1|</td><td>|12,4,10,2|</td><td>|1,14,7,8|</td><td>|2,9,4,15|</td><td>|8,13,14,11|</td><td>|15,3,9,5|</td><td>|11,10,13,12|</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>|7,3,6,2|</td><td>|7,6,8,9|</td><td>|7,8,12,3|</td><td>|7,12,13, 6|</td><td>|7,13,2,8|</td><td>|7,2,9,12|</td><td>|7,9,3,13|</td></tr>
<tr><td>|3,6,1,4|</td><td>|6,8,15,1|</td><td>|8,12,11,15|</td><td>|12,13,10,11|</td><td>|13,2,5,10|</td><td>|2,9,14,5|</td><td>|9,3,4,14|</td></tr>
<tr><td>|4,5,7,6|</td><td>|1,14,7,8|</td><td>|15,4,7,12|</td><td>|11,1,7,13|</td><td>|10,15,7,2|</td><td>|5,11,7,9|</td><td>|14,10,7,3|</td></tr>
<tr><td>|6,1,2,5|</td><td>|8,15,9,14|</td><td>|12,11,3,4|</td><td>|13,10,6,1|</td><td>|2,5,8,15|</td><td>|9,14,12,11|</td><td>|3,4,13,10|</td></tr>
<tr><td>|1,2,4,7|</td><td>|15,9,1,7|</td><td>|11,3 ,15,7|</td><td>|10,6,11,7|</td><td>|5,8,10,7|</td><td>|14,12,5,7|</td><td>|4,13,14,7|</td></tr>
<tr><td>|5,7,3,1|</td><td>|14,7,6,15|</td><td>|4,7,8,11|</td><td>|1,7,12,10|</td><td>|15,7,13,5|</td><td>|11,7,2,14|</td><td>|10,7,9,4|</td></tr>
<tr><td>|2,4,5,3|</td><td>|9,1,14,6|</td><td>|3,15,4,8|</td><td>|6,11,1,12|</td><td>|8,10,15,13|</td><td>|12,5,11,2|</td><td>|13,14,10,9|</td></tr>
</table>

В этой таблице представлено 343 определителя четвертого порядка. Вместе с тем, легко заметить, что сумма семерки определителей из первых строк первого столбика совпадает с суммой определителей последующих строк первого столбика. Так, что реально в первом столбике представлено не семь, а лишь одна семерка определителей четвертого порядка.

Аналогично второй, третий и четвертые столбики представляют одну и ту же последовательность определителей, так что во второй столбик входят значения определителей второго столбика, а третий и пятый столбик исключаются из рассмотрения.

Четвертый столбик также повторяется в шестом и седьмом столбиках, причем вторая строка последовательностей четвертого столбика повторяется трижды. Третья, четвертая, шестая, седьмая строки повторяются в шестом и седьмом столбиках с разными знаками и взаимно исключаются. Так что, эти строки входят в сумму определителей без коэффициента. Наконец, первая и пятая строка семерок четвертого столбика суммируются в шестом и седьмом столбиках, так что эти строки входят в сумму определителей с обратным знаком.

В результате имеет место семикратное повторение семерок определителей первого столбика, трехкратное повторение семерок определителей второго столбика, трехкратное повторение определителей из вторых строк четвертого столбика, однократное использование определителей второй, третьей, шестой и седьмой строк определителей четвертого столбика и однократное использование определителей первой и пятой строк четвертого столбика, взятых с обратным знаком. Таким образом, имеем набор 105 определителей четвертого порядка, а предыдущая таблица приобретает вид:

<table>
<tr><td>|1,2,4,7|</td><td>|1,4,8,1|
|4,8,9,5|
|5,12,1,8|
|8,9,13,12|
|9,13,5,1|
|12,1,4,9|
|13,5,12,4|</td><td>|11,14,15,10|</td><td>|10,5,1,14|
|14,15,4,5|
|5,1,11,15|
|4,10,5,11|</td><td>-|1,11,14,4|
-|15,4,10,1|</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>|2,4,5,3|</td><td>|2,5,8,15|
|5,8,10,7|
|7,13,2,8|
|8,10,15,13|
|10,15,7,2|
|13,2,5,10|
|15,7,13,5|</td><td>|14,9,11,12|</td><td>|12,7,2,9|
|9,11,5,7|
|7,2,14,11|
|5,12,7,14|</td><td>-|2,14,9,5|
-|11,5,12,2|</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>|3,6,1,4|</td><td>|3,1,8,10|
|1,8,11,2|
|2,9,3,8|
|8,11,10,9|
|11,10,2,3|
|9,3,1,11|
|10,2,9,1|</td><td>|13,15,12,14|</td><td>|14,2,3,15|
|15,12,1,2|
|2,3,13,12|
|1,14,2,13|</td><td>-|3,13,15,1|
-|12,1,14,3|</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>|4,5,7,6|</td><td>|4,7,8,11|
|7,8,12,3|
|3,15,4,8|
|8,12,11,15|
|12,11,3,4|
|15,4,7,12|
|11,3,15,7|</td><td>|9,10,14,13|</td><td>|13,3,4,10|
|10,14,7,3|
|3,4,9,14|
|7,13,3,9|</td><td>-|4,9,10,7|
-|14,7,13,4|</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>|5,7,3,1|</td><td>|5,3,8,14|
|3,8,13,6|
|6,11,5,8|
|8,13,14,11|
|13,14,6,5|
|11,5,3,13|
|14,6,11,3|</td><td>|10,12,9,15|</td><td>|15,6,5,12|
|12,9,3,6|
|6,5,10,9|
|3,15,6,10|</td><td>-|5,10,12,3|
-|9,3,15,5|</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>|6,1,2,5|</td><td>|6,2,8,12|
|2,8,14,4|
|4,10,6,8|
|8,14,12,10|
|14,12,4,6|
|10,6,2,14|
|12,4,10,2|</td><td>|15,11,13,9|</td><td>|9,4,6,11|
|11,13,2,4|
|4,6,15,13|
|2,9,4,15|</td><td>-|6,15,11,2|
-|13,2,9,6|</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>|7,3,6,2|</td><td>|7,6,8,9|
|6,8,15,1|
|1,14,7,8|
|8,15,9,14|
|15,9,1,7|
|14,7,6,15|
|9,1,14,6|</td><td>|12,13,10,11|</td><td>|11,1,7,13|
|13,10,6,1|
|1,7,12,10|
|6,11,1,12|</td><td>-|7,12,13, 6|
-|10,6,11,7|</td></tr>
</table>

Сумма определителей из полученной таблицы преобразуется к симметричной форме:

<table>
<tr><td>|1,4,8,13|</td><td>|2,5,8,15|</td><td>|3,1,8,10|</td><td>|4,7,8,11|</td><td>|5,3,8,14|</td><td>|6,2,8,12|</td><td>|7,6,8,9|</td></tr>
<tr><td>|2,3,7,6|</td><td>|4,6,3,1|</td><td>|6,5,4,7|</td><td>|5,1,6,2|</td><td>|7,2,1,4|</td><td>|1,7,5,3|</td><td>|3,4,2,5|</td></tr>
<tr><td>|3,6,10,15|</td><td>|6,1,12,11|</td><td>|5,7,14,12|</td><td>|1,2,13,14|</td><td>|2,4,15,9|</td><td>|7,3,9,13|</td><td>|4,5,11,10|</td></tr>
<tr><td>|4,8,9,5|</td><td>|5,8,10,7|</td><td>|1,8,11,2|</td><td>|7,8,12,3|</td><td>|3,8,13,6|</td><td>|2,8,14,4|</td><td>|6,8,15,1|</td></tr>
<tr><td>|5,12,1,8|</td><td>|7,13,2,8|</td><td>|2,9,3,8|</td><td>|3,15,4,8|</td><td>|6,11,5,8|</td><td>|4,10,6,8|</td><td>|1,14,7,8|</td></tr>
<tr><td>|6,10,11,7|</td><td>|1,12,14,3|</td><td>|7,14,13,4|</td><td>|2,13,9,6|</td><td>|4,15,10,1|</td><td>|3,9,15,5|</td><td>|5,11,12,2|</td></tr>
<tr><td>|7,14,3,10|</td><td>|3,9,6,12|</td><td>|4,15,5,14|</td><td>|6,10,1,13|</td><td>|1,12,2,15|</td><td>|5,11,7,9|</td><td>|2,13,4,11|</td></tr>
<tr><td>|8,9,13,12|</td><td>|8,10,15,13|</td><td>|8,11,10,9|</td><td>|8,12,11,15|</td><td>|8,13,14,11|</td><td>|8,14,12,10|</td><td>|8,15,9,14|</td></tr>
<tr><td>|9,13,5,1|</td><td>|10,15,7,2|</td><td>|11,10,2,3|</td><td>|12,11,3,4|</td><td>|13,14,6,5|</td><td>|14,12,4,6|</td><td>|15,9,1,7|</td></tr>
<tr><td>|10,11,15,14|</td><td>|12,14,11,9|</td><td>|14,13,12,15|</td><td>|13,9,14,10|</td><td>|15,10,9,12|</td><td>|9,15,13,11|</td><td>|11,12,10,13|</td></tr>
<tr><td>|11,7,14,2|</td><td>|14,3,9,4|</td><td>|13,4,15,6|</td><td>|9,6,10,5|</td><td>|10,1,12,7|</td><td>|15,5,11,1|</td><td>|12,2,13,3|</td></tr>
<tr><td>|12,1,4,9|</td><td>|13,2,5,10|</td><td>|9,3,1,11|</td><td>|15,4,7,12|</td><td>|11,5,3,13|</td><td>|10,6,2,14|</td><td>|14,7,6,15|</td></tr>
<tr><td>|13,5,12,4|</td><td>|15,7,13,5|</td><td>|10,2,9,1|</td><td>|11,3,15,7|</td><td>|14,6,11,3|</td><td>|12,4,10,2|</td><td>|9,1,14,6|</td></tr>
<tr><td>|14,15,2,3|</td><td>|9,11,4,6|</td><td>|15,12,6,5|</td><td>|10,14,5,1|</td><td>|12,9,7,2|</td><td>|11,13,1,7|</td><td>|13,10,3,4|</td></tr>
<tr><td>|15,2,6,11|</td><td>|11,4,1,14|</td><td>|12,6,7,13|</td><td>|14,5,2,9|</td><td>|9,7,4,10|</td><td>|13,1,3,15|</td><td>|10,3,5,12|</td></tr>
</table>

характеризующей векторное произведение трех векторов как сумму 105-ти определителей четвертого порядка строго фиксируемого состава. Очевидна симметрия построения таблицы. Во-первых – построчно строго соблюдаются найденные выше подстановки индексов;

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	6	5	7	1	3	8	10	12	14	13	15	9	11
3	6	5	1	2	7	4	8	11	14	13	9	10	15	12
4	5	1	7	3	2	6	8	12	13	9	15	11	10	14
5	7	2	3	6	4	1	8	13	15	10	11	14	12	9
6	1	7	2	4	3	5	8	14	9	15	10	12	11	13
7	3	4	6	1	5	2	8	15	11	12	14	9	13	10
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	10	11	12	13	14	15	8	1	2	3	4	5	6	7
10	12	14	13	15	9	11	8	2	4	6	5	7	1	3
11	14	13	9	10	15	12	8	3	6	5	1	2	7	4
12	13	9	15	11	10	14	8	4	5	1	7	3	2	6
13	15	10	11	14	12	9	8	5	7	2	3	6	4	1
14	9	15	10	12	11	13	8	6	1	7	2	4	3	5
15	11	12	14	9	13	10	8	7	3	4	6	1	5	2

во-вторых – все 28 столбиков включают полный набор 15-ти координат без повторений; в-третьих – все координаты входят в таблицу ровно 28 раз. В результате векторное произведение трёх векторов определяется суммой 105-ти не повторяющихся определителей 4-го порядка и может рассматриваться как совокупность 15-ти (105=7*15) семимерных пространств.

Равенства

$$[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc]$$

или $$[a[bc]]+[b[ca]]+[c[ab]]=3[abc]$$

указывают на то, что 15-тимерная алгебра не является алгеброй Ли. Можно показать, что она удовлетворяет соотношению Мальцева.

Из свойств определителей следует, что

1. векторное произведение трех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т. е.

$$[\alpha \boldsymbol{abc}] = \alpha\, [\boldsymbol{abc}];$$

2. векторное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;

3. векторное произведение трех векторов дистрибутивно т.е.

$$[\boldsymbol{ab}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})]=[\boldsymbol{abc}]+[\boldsymbol{abd}];$$

4. если два вектора в векторном произведении трех векторов компланарны, то это произведение равно нулю, в частности, если два вектора в векторном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль.

Векторным произведением ***[abc]*** трех векторов ***a,b*** и ***c*** можно назвать вектор

$$[\boldsymbol{abc}]=[a_i\boldsymbol{e_i}b_j\boldsymbol{e_j}c_k\boldsymbol{e_k}]=a_ib_jc_k[\boldsymbol{e_i}\boldsymbol{e_j}\boldsymbol{e_k}]=\sigma_{ijk}{}^{k}a_ib_jc_k\boldsymbol{e_k},$$

определяемый совершенно анти симметричным единичным 15-тензором третьего ранга σ^{ijk} компоненты, которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из анти симметричности следует, что все компоненты 15-тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличные от нуля лишь те у которых все три индекса различны, так что вектор ***[abc]*** определяется суммой *420*-ти определителей третьего порядка. Компоненты тензора не изменяются по отношению к вращению трехмерной системы координат.

Подчеркнем что подстановки на множестве индексов *(1,2,…,15)* дают взаимно однозначное отображение векторного произведения трех векторов на себя, например, имеем:

11	14	13	9	10	15	12	8	3	6	5	1	2	7	4
14	9	15	10	12	11	13	8	6	1	7	2	4	3	5

Подчеркнем еще раз, что

- в ***трехмерном*** случае

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ca})-(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c},$$

и

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]+[\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ca}]]+[\boldsymbol{c}[\boldsymbol{ab}]]=0,$$

- в ***семимерном*** случае

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ca})-(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}+[\boldsymbol{abc}],$$

и

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]+[\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ca}]]+[\boldsymbol{c}[\boldsymbol{ab}]]=3[\boldsymbol{abc}],$$

- в ***пятнадцатимерном*** случае

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ca})-(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}+[\boldsymbol{abc}],$$

и

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]+[\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ca}]]+[\boldsymbol{c}[\boldsymbol{ab}]]=3[\boldsymbol{abc}],$$

причем вектор ***[abc]*** сохраняет соответствующие свойства у семимерной и пятнадцатимерной алгебр, а, следовательно, сохраняется вид уравнений семимерной и пятнадцатимерной алгебр, представленных в векторной форме записи. Координатная форма записи при этом кардинально видоизменяется, однако свойства алгебр от этого не зависят, т.е. векторные соотношения семимерной пятнадцатимерной алгебр совпадают при рассмотрении произведений векторов от двух до семи. Вместе с тем, произведения векторов от восьми до пятнадцати имеют место лишь пятнадцатимерной алгебре, только 16-ый вектор в пятнадцатимерной алгебре раскладывается по пятнадцати векторам.

Можно прогнозировать, что будут иметь место векторные алгебры соответствующие 31-ой, 63-ех, 127-ми,… и вообще 2^n-1 координатам, вплоть до бесконечномерных алгебр и, следовательно, стоит ребром вопрос о размерности физического пространства, поскольку трехмерная векторная алгебра определила в XIX веке название трехмерной физики. Физическое пространство не имеет размерности. Оно лишь отражает ту или иную степень симметрии выражений, используемых для описания явлений физического пространства.

Более симметричны алгебры высокой размерности; алгебры меньшей размерности могут рассматриваться как та или иная степень нарушения симметрии и являются их частным случаем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коротков А. В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996. – 244 с.
2. Коротков А. В. Элементы трех- и семимерного изовекторного и спинорного исчислений. – Новочеркасск: Набла, 1999. – 100 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Пятнадцатимерная векторная алгебра 3

Глава 2. Двойное векторное произведение пятнадцатимерной алгебры 12

Литература 35

Об авторе

Коротков Анатолий Васильевич, доктор физико-математических наук, академик Международной академии системных исследований (МАСИ).

Длительное время работал в ОКТБ "Старт" и "Орбита" в г. Новочеркасске. Область научных интересов – обоснование многомерного векторного исчисления (семимерной, пятнадцатимерной, а также 2^n-1 -мерной векторной алгебры, дифференциальной геометрии и теории поля) как математической базы многомерной физической теории.

346421 Ростовская обл., г. Новочеркасск, пр. Баклановский, 180-13.
Тел. (86352) 6-52-29. Факс (86352) 2-78-85.

Научное издание

Анатолий Васильевич Коротков

ЭЛЕМЕНТЫ ПЯТНАДЦАТИМЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Издательство «***Н***аука-***О***бразование-***К***ультура»
346430 Новочеркасск, ул. Дворцовая, 1.
Подписано в печать 20.10.2011 г.
Формат 60x90 1/16. Гарнитура "Таймс". Усл. п.л. 2,25.
Тираж 200 экз. Печать цифровая. Зак. 81-11.
Отпечатано ООО НПП «НОК»
346428 Новочеркасск, ул. Просвещения, 155