А.В. Коротков

ЭЛЕМЕНТЫ МНОГОМЕРНОГО (15- и 31-МЕРНОГО) ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Новочеркасск
"НОК"
2012

ББК 22.14
УДК 512.7
К 68

Рецензент: ***Логинов В.Т.***, докт. техн. наук, профессор,
академик Российской Инженерной Академии

Коротков А.В.

К 68 Элементы многомерного (15- и 31-мерного) векторного исчисления Новочеркасск: Изд-во «НОК», 2012. – 76 с.

ISBN 978-5-8431-0256-2

В брошюре содержатся избранные труды автора по многомерному векторному исчислению(7-, 15- и 31-мерному). Изложение построено в традиционной символике с учетом потребности приложений, в которых используются векторное исчисление. Это делает ее доступной пониманию студентов, преподавателей и научных работников, специализирующихся во многих областях науки и техники. Рассмотрены также вопросы применения 15- и 31-мерной векторной алгебры в области физики. Брошюра окажется полезной прежде всего в области многомерной математической физики, в частности, в теории поля и в физике элементарных частиц.

ББК 22.14
УДК 512.7

ISBN 978-5-8431-0256-2

ПЯТНАДЦАТИМЕРНАЯ ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

©2012г., А.В. Коротков
Международный центр теоретической физики (2^n-1)-D мерные технологии,
г. Новочеркасск

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{3\text{-}D} & \mathbf{2^m\text{-}1} & \mathbf{2n+1} \\ \mathbf{2n+1} & \mathbf{7\text{-}D} & \mathbf{2^m\text{-}1} \\ \mathbf{2^m\text{-}1} & \mathbf{2n+1} & \mathbf{15\text{-}D} \end{Vmatrix}$$

На практике широко используется трехмерное векторное исчисление во многих отраслях науки и техники. Менее известно, но хорошо изучено семимерное векторное исчисление. Оно разработано в последнюю четверть столетия и рассмотрено в плане векторного семимерного анализа, спинорного и изовекторного исчислений [1,2].

Трехмерное и семимерное векторные исчисления обладают рядом замечательных свойств и выделяются среди евклидовых векторных пространств наличием операции векторного умножения двух векторов. Другим свойством этих алгебр является отсутствие обратного вектора и деления двух векторов друг на друга. Это, казалось бы, неприятное свойство, однако, дало трехмерные и семимерные векторные алгебры, широко используется и дает возможность дальнейшего расширения размерности векторных алгебр.

Векторным алгебрам в принципе не свойственно наличие обратных величин и процедуры деления векторов, а, следовательно, полученный в XIX веке замечательный результат в отношении гиперкомплексных чисел с делением не является ограничением для получения многомерных векторных алгебр. Рассмотрим в связи с этим порядок получения пятнадцатимерной векторной алгебры, используя известную процедуру удвоения чисел, которая дала возможность получить из алгебры одномерных чисел (действительных чисел), алгебры двух-, четырех- и восьмимерных чисел- комплексных чисел, кватернионов и октонионов Кэли.

Порядок получения комплексных чисел кватернионов и октонионов связан с процедурой удвоения. Отметим, что задача нахождения Пятнадцатимерных векторных алгебр имеет неоднозначное решение. Каждое решение определяется видом процедуры удвоения, так, например, при удвоении действительных чисел можно получить двухмерные комплексные числа

$$\boldsymbol{ab}=(a_0b_0-b_1a_1,\ a_0b_1+b_0a_1),$$

т.е. $$\boldsymbol{ab}=(a_0,\ a_1)(b_0,\ b_1)=(a_0b_0-b_1a_1,\ a_0b_1+b_0a_1).$$

В координатной форме записи операция умножения двух двумерных чисел может быть представлена в виде:

$$\boldsymbol{ab}=\begin{array}{ll} \underline{(a_0b_0\,|} & -b_1a_1, \\ a_0b_1 & +b_0a_1) \end{array}$$

При удвоении комплексных чисел можно получить четырехмерные кватернионы. При этом произведением двух пар вещественных чисел $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1)$ и $\boldsymbol{b}=(b_0,b_1)$ назовем пару

$$\boldsymbol{ab}=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1,\ \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

т.е. $$\boldsymbol{ab}=(a_0,a_1)(b_0,b_1)=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1,\bar{a}_0b_1+b_0a_1).$$

В координатной форме записи операция умножения двух четырехмерных кватернионов может быть представлена в виде:

$$\boldsymbol{ab}=\begin{array}{cccc} a_0b_0 & -b_1a_1 & -b_2a_2 & -a_3b_3, \\ a_0b_1 & +b_0a_1 & +b_2a_3 & -a_2b_3, \\ a_0b_2 & +b_3a_1 & +b_0a_2 & -a_3b_1, \\ a_0b_3 & -b_2a_1 & +b_0a_3 & +a_2b_1. \end{array}$$

При удвоении кватернионов можно получить восьмимерные октонионы. При этом произведением пар $\boldsymbol{a}=(a_0, a_1)$ и $\boldsymbol{b}=(b_0, b_1)$ называется пара

$$\boldsymbol{ab}=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1,\ \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

т.е. $$\boldsymbol{ab}=(a_0, a_1)(b_0, b_1)=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1,\ \bar{a}_0b_1+b_0a_1).$$

В координатной форме записи операция умножения двух восьмимерных октонионов может быть представлена в виде:

$$\boldsymbol{ab}=\begin{array}{cccccccc} (a_0b_0 & -b_1a_1 & -b_2a_2 & -a_3b_3 & -b_4a_4 & -a_5b_5 & -a_6b_6 & -b_7a_7, \\ a_0b_1 & +b_0a_1 & +b_2a_3 & -a_2b_3 & +b_4a_5 & -a_4b_5 & +a_6b_7 & -b_6a_7, \\ a_0b_2 & +b_3a_1 & +b_0a_2 & -a_3b_1 & +b_4a_6 & +a_7b_5 & -a_4b_6 & -b_7a_5, \\ a_0b_3 & -b_2a_1 & +b_0a_3 & +a_2b_1 & +b_4a_7 & -a_6b_5 & -a_4b_7 & +b_6a_5, \\ a_0b_4 & +b_5a_1 & +b_6a_2 & +a_3b_7 & +b_0a_4 & -a_5b_1 & -a_6b_2 & -b_3a_7, \\ a_0b_5 & -b_4a_1 & -b_6a_3 & +a_2b_7 & +b_0a_5 & +a_4b_1 & +a_6b_3 & -b_2a_7, \\ a_0b_6 & -b_7a_1 & -b_4a_2 & +a_3b_5 & +b_0a_6 & +a_7b_1 & +a_4b_2 & -b_3a_5, \\ a_0b_7 & +b_6a_1 & -b_4a_3 & -a_2b_5 & +b_0a_7 & -a_6b_1 & +a_4b_3 & +b_2a_5). \end{array}$$

Указанная процедура удвоения – одна из процедур, позволяющих получать комплексные числа, кватернионы и октонионы. Эта процедура не позволяет получить другие многомерные числовые системы с делением, что было определено еще в XIX веке. Более того, отсутствует не только деление, но также и наличие обратных векторов, а вместе с тем кватернионы теряют свойство коммутативности произведения, а октонионы – также свойство ассоциативности. Это резко ограничивает возможности использования этих систем на практике.

Вместе с тем, получаемые из комплексных чисел, кватернионов и октонионов одно-, трех- и семи мерные векторные алгебры, как отмечалось, не требуют наличия свойств деления и обратных векторов, так что, применение той же процедуры удвоения приводит к возможности получения шестнадцати мерной алгебры, из которой выделяется Пятнадцатимерная векторная алгебра. Применим процедуру удвоения к октонионам. При удвоении октонионов можно получить шестнадцати мерные числа. При этом произведением двух пар октонионов $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1)$ и $\boldsymbol{b}=(b_0,b_1)$ назовем пару

$$\boldsymbol{ab}=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1,\ \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

т.е. $$\boldsymbol{ab}=(a_0, a_1)(b_0, b_1)=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1,\ \bar{a}_0b_1+b_0a_1).$$

В координатной форме записи операция умножения 16-ти мерных $\boldsymbol{ab}$

a_0b_0	$-a_1b_1$	$-a_2b_2$	$-a_3b_3$	$-a_4b_4$	$-a_5b_5$	$-a_6b_6$	$-a_7b_7$	$-a_8b_8$	$-a_9b_9$	$-a_{10}b_{10}$	$-a_{11}b_{11}$	$-a_{12}b_{12}$	$-a_{13}b_{13}$	$-a_{14}b_{14}$	$-a_{15}b_{15}$
a_0b_1	$+a_1b_0$	$-a_2b_3$	$+a_3b_2$	$-a_4b_5$	$+a_5b_4$	$-a_7b_6$	$+a_6b_7$	$-a_8b_9$	$+a_9b_8$	$-a_{11}b_{10}$	$+a_{10}b_{11}$	$-a_{13}b_{12}$	$+a_{12}b_{13}$	$-a_{14}b_{15}$	$+a_{15}b_{14}$
a_0b_2	$+a_2b_0$	$-a_4b_6$	$+a_6b_4$	$-a_5b_7$	$+a_7b_5$	$-a_3b_1$	$+a_1b_3$	$-a_8b_{10}$	$+a_{10}b_8$	$-a_{14}b_{12}$	$+a_{12}b_{14}$	$-a_{15}b_{13}$	$+a_{13}b_{15}$	$-a_9b_{11}$	$+a_{11}b_9$
a_0b_3	$+a_3b_0$	$-a_6b_5$	$+a_5b_6$	$-a_1b_2$	$+a_2b_1$	$-a_4b_7$	$+a_7b_4$	$-a_8b_{11}$	$+a_{11}b_8$	$-a_{13}b_{14}$	$+a_{14}b_{13}$	$-a_{10}b_9$	$+a_9b_{10}$	$-a_{15}b_{12}$	$+a_{12}b_{15}$
a_0b_4	$+a_4b_0$	$-a_5b_1$	$+a_1b_5$	$-a_7b_3$	$+a_3b_7$	$-a_6b_2$	$+a_2b_6$	$-a_8b_{12}$	$+a_{12}b_8$	$-a_9b_{13}$	$+a_{13}b_9$	$-a_{11}b_{15}$	$+a_{15}b_{11}$	$-a_{10}b_{14}$	$+a_{14}b_{10}$
a_0b_5	$+a_5b_0$	$-a_7b_2$	$+a_2b_7$	$-a_3b_6$	$+a_6b_3$	$-a_1b_4$	$+a_4b_1$	$-a_8b_{13}$	$+a_{13}b_8$	$-a_{10}b_{15}$	$+a_{15}b_{10}$	$-a_{14}b_{11}$	$+a_{11}b_{14}$	$-a_{12}b_9$	$+a_9b_{12}$
a_0b_6	$+a_6b_0$	$-a_1b_7$	$+a_7b_1$	$-a_2b_4$	$+a_4b_2$	$-a_5b_3$	$+a_3b_5$	$-a_8b_{14}$	$+a_{14}b_8$	$-a_{15}b_9$	$+a_9b_{15}$	$-a_{12}b_{10}$	$+a_{10}b_2$	$-a_{11}b_{13}$	$+a_{13}b_{11}$
a_0b_7	$+a_7b_0$	$-a_3b_4$	$+a_4b_3$	$-a_6b_1$	$+a_1b_6$	$-a_2b_5$	$+a_5b_2$	$-a_8b_{15}$	$+a_{15}b_8$	$-a_{12}b_{11}$	$+a_{11}b_{12}$	$-a_9b_{14}$	$+a_{14}b_9$	$-a_{13}b_{10}$	$+a_{10}b_{13}$
a_0b_8	$+a_8b_0$	$-a_9b_1$	$+a_1b_9$	$-a_{10}b_2$	$+a_2b_{10}$	$-a_{11}b_3$	$+a_3b_{11}$	$-a_{12}b_4$	$+a_4b_{12}$	$-a_{13}b_5$	$+a_5b_{13}$	$-a_{14}b_6$	$+a_6b_{14}$	$-a_{15}b_7$	$+a_7b_{15}$
a_0b_9	$+a_9b_0$	$-a_3b_{10}$	$+a_{10}b_3$	$-a_5b_{12}$	$+a_{12}b_5$	$-a_6b_{15}$	$+a_{15}b_6$	$-a_1b_8$	$+a_8b_1$	$-a_{11}b_2$	$+a_2b_{11}$	$-a_{13}b_4$	$+a_4b_{13}$	$-a_{14}b_7$	$+a_7b_{14}$
a_0b_{10}	$+a_{10}b_0$	$-a_6b_{12}$	$+a_{12}b_6$	$-a_7b_{13}$	$+a_{13}b_7$	$-a_1b_{11}$	$+a_{11}b_1$	$-a_2b_8$	$+a_8b_2$	$-a_{14}b_4$	$+a_4b_{14}$	$-a_{15}b_5$	$+a_5b_{15}$	$-a_9b_3$	$+a_3b_9$
a_0b_{11}	$+a_{11}b_0$	$-a_5b_{14}$	$+a_{14}b_5$	$-a_2b_9$	$+a_9b_2$	$-a_7b_{12}$	$+a_{12}b_7$	$-a_3b_8$	$+a_8b_3$	$-a_{13}b_6$	$+a_6b_{13}$	$-a_{10}b_1$	$+a_1b_{10}$	$-a_{15}b_4$	$+a_4b_{15}$
a_0b_{12}	$+a_{12}b_0$	$-a_1b_{13}$	$+a_{13}b_1$	$-a_3b_{15}$	$+a_{15}b_3$	$-a_2b_{14}$	$+a_{14}b_2$	$-a_4b_8$	$+a_8b_4$	$-a_9b_5$	$+a_5b_9$	$-a_{11}b_7$	$+a_7b_{11}$	$-a_{10}b_6$	$+a_6b_{10}$
a_0b_{13}	$+a_{13}b_0$	$-a_2b_{15}$	$+a_{15}b_2$	$-a_6b_{11}$	$+a_{11}b_6$	$-a_4b_9$	$+a_9b_4$	$-a_5b_8$	$+a_8b_5$	$-a_{10}b_7$	$+a_7b_{10}$	$-a_{14}b_3$	$+a_3b_{14}$	$-a_{12}b_1$	$+a_1b_{12}$
a_0b_{14}	$+a_{14}b_0$	$-a_7b_9$	$+a_9b_7$	$-a_4b_{10}$	$+a_{10}b_4$	$-a_3b_{13}$	$+a_{13}b_3$	$-a_6b_8$	$+a_8b_6$	$-a_{15}b_1$	$+a_1b_{15}$	$-a_{12}b_2$	$+a_2b_{12}$	$-a_{11}b_5$	$+a_5b_{11}$
a_0b_{15}	$+a_{15}b_0$	$-a_4b_{11}$	$+a_{11}b_4$	$-a_1b_{14}$	$+a_{14}b_1$	$-a_5b_{10}$	$+a_{10}b_5$	$-a_7b_8$	$+a_8b_7$	$-a_{12}b_3$	$+a_3b_{12}$	$-a_9b_6$	$+a_6b_9$	$-a_{13}b_2$	$+a_2b_{13}$

$(ab)=$

$-a_1b_1$ $-a_2b_2$ $-a_3b_3$ $-a_4b_4$ $-a_5b_5$ $-a_6b_6$ $-a_7b_7$ $-a_8b_8$ $-a_9b_9$ $-a_{10}b_{10}$ $-a_{11}b_{11}$ $-a_{12}b_{12}$ $-a_{13}b_{13}$ $-a_{14}b_{14}$ $-a_{15}b_{15}$

$[ab]=$

$-a_2b_3$	$+a_3b_2$	$-a_4b_5$	$+a_5b_4$	$-a_7b_6$	$+a_6b_7$	$-a_8b_9$	$+a_9b_8$	$-a_{11}b_{10}$	$+a_{10}b_{11}$	$-a_{13}b_{12}$	$+a_{12}b_{13}$	$-a_{14}b_{15}$	$+a_{15}b_{14}$
$-a_4b_6$	$+a_6b_4$	$-a_5b_7$	$+a_7b_5$	$-a_3b_1$	$+a_1b_3$	$-a_8b_{10}$	$+a_{10}b_8$	$-a_{14}b_{12}$	$+a_{12}b_{14}$	$-a_{15}b_{13}$	$+a_{13}b_{15}$	$-a_9b_{11}$	$+a_{11}b_9$
$-a_6b_5$	$+a_5b_6$	$-a_1b_2$	$+a_2b_1$	$-a_4b_7$	$+a_7b_4$	$-a_8b_{11}$	$+a_{11}b_8$	$-a_{13}b_{14}$	$+a_{14}b_{13}$	$-a_{10}b_9$	$+a_9b_{10}$	$-a_{15}b_{12}$	$+a_{12}b_{15}$
$-a_5b_1$	$+a_1b_5$	$-a_7b_3$	$+a_3b_7$	$-a_6b_2$	$+a_2b_6$	$-a_8b_{12}$	$+a_{12}b_8$	$-a_9b_{13}$	$+a_{13}b_9$	$-a_{11}b_{15}$	$+a_{15}b_{11}$	$-a_{10}b_{14}$	$+a_{14}b_{10}$
$-a_7b_2$	$+a_2b_7$	$-a_3b_6$	$+a_6b_3$	$-a_1b_4$	$+a_4b_1$	$-a_8b_{13}$	$+a_{13}b_8$	$-a_{10}b_{15}$	$+a_{15}b_{10}$	$-a_{14}b_{11}$	$+a_{11}b_{14}$	$-a_{12}b_9$	$+a_9b_{12}$
$-a_1b_7$	$+a_7b_1$	$-a_2b_4$	$+a_4b_2$	$-a_5b_3$	$+a_3b_5$	$-a_8b_{14}$	$+a_{14}b_8$	$-a_{15}b_9$	$+a_9b_{15}$	$-a_{12}b_{10}$	$+a_{10}b_2$	$-a_{11}b_{13}$	$+a_{13}b_{11}$
$-a_3b_4$	$+a_4b_3$	$-a_6b_1$	$+a_1b_6$	$-a_2b_5$	$+a_5b_2$	$-a_8b_{15}$	$+a_{15}b_8$	$-a_{12}b_{11}$	$+a_{11}b_{12}$	$-a_9b_{14}$	$+a_{14}b_9$	$-a_{13}b_{10}$	$+a_{10}b_{13}$
$-a_9b_1$	$+a_1b_9$	$-a_{10}b_2$	$+a_2b_{10}$	$-a_{11}b_3$	$+a_3b_{11}$	$-a_{12}b_4$	$+a_4b_{12}$	$-a_{13}b_5$	$+a_5b_{13}$	$-a_{14}b_6$	$+a_6b_{14}$	$-a_{15}b_7$	$+a_7b_{15}$
$-a_3b_{10}$	$+a_{10}b_3$	$-a_5b_{12}$	$+a_{12}b_5$	$-a_6b_{15}$	$+a_{15}b_6$	$-a_1b_8$	$+a_8b_1$	$-a_{11}b_2$	$+a_2b_{11}$	$-a_{13}b_4$	$+a_4b_{13}$	$-a_{14}b_7$	$+a_7b_{14}$
$-a_6b_{12}$	$+a_{12}b_6$	$-a_7b_{13}$	$+a_{13}b_7$	$-a_1b_{11}$	$+a_{11}b_1$	$-a_2b_8$	$+a_8b_2$	$-a_{14}b_4$	$+a_4b_{14}$	$-a_{15}b_5$	$+a_5b_{15}$	$-a_9b_3$	$+a_3b_9$
$-a_5b_{14}$	$+a_{14}b_5$	$-a_2b_9$	$+a_9b_2$	$-a_7b_{12}$	$+a_{12}b_7$	$-a_3b_8$	$+a_8b_3$	$-a_{13}b_6$	$+a_6b_{13}$	$-a_{10}b_1$	$+a_1b_{10}$	$-a_{15}b_4$	$+a_4b_{15}$
$-a_1b_{13}$	$+a_{13}b_1$	$-a_3b_{15}$	$+a_{15}b_3$	$-a_2b_{14}$	$+a_{14}b_2$	$-a_4b_8$	$+a_8b_4$	$-a_9b_5$	$+a_5b_9$	$-a_{11}b_7$	$+a_7b_{11}$	$-a_{10}b_6$	$+a_6b_{10}$
$-a_2b_{15}$	$+a_{15}b_2$	$-a_6b_{11}$	$+a_{11}b_6$	$-a_4b_9$	$+a_9b_4$	$-a_5b_8$	$+a_8b_5$	$-a_{10}b_7$	$+a_7b_{10}$	$-a_{14}b_3$	$+a_3b_{14}$	$-a_{12}b_1$	$+a_1b_{12}$
$-a_7b_9$	$+a_9b_7$	$-a_4b_{10}$	$+a_{10}b_4$	$-a_3b_{13}$	$+a_{13}b_3$	$-a_6b_8$	$+a_8b_6$	$-a_{15}b_1$	$+a_1b_{15}$	$-a_{12}b_2$	$+a_2b_{12}$	$-a_{11}b_5$	$+a_5b_{11}$
$-a_4b_{11}$	$+a_{11}b_4$	$-a_1b_{14}$	$+a_{14}b_1$	$-a_5b_{10}$	$+a_{10}b_5$	$-a_7b_8$	$+a_8b_7$	$-a_{12}b_3$	$+a_3b_{12}$	$-a_9b_6$	$+a_6b_9$	$-a_{13}b_2$	$+a_2b_{13}$

чисел (при такой процедуре удвоения) может быть представлена в виде произведения $\boldsymbol{ab}$, приведенного на альбомном листе. Там же показаны скалярное $\boldsymbol{(ab)}$ и векторное $\boldsymbol{[ab]}$ произведения двух векторов.

Векторное произведение двух векторов можно представить в виде суммы:

$$\boldsymbol{[ab]}=[(a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+\ldots+a_{15}\mathbf{e}_{15})(b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+\ldots+b_{15}\mathbf{e}_{15})],$$

т.е. $\boldsymbol{[ab]}=$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_2&\mathbf{e}_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_8&\mathbf{e}_9\\a_1&a_8&a_9\\b_1&b_8&b_9\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_{11}&\mathbf{e}_{10}\\a_1&a_{11}&a_{10}\\b_1&b_{11}&b_{10}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_{13}&\mathbf{e}_{12}\\a_1&a_{13}&a_{12}\\b_1&b_{13}&b_{12}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_{14}&\mathbf{e}_{15}\\a_1&a_{14}&a_{15}\\b_1&b_{14}&b_{15}\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_2&\mathbf{e}_4&\mathbf{e}_6\\a_2&a_4&a_6\\b_2&b_4&b_6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_2&\mathbf{e}_8&\mathbf{e}_{10}\\a_2&a_8&a_{10}\\b_2&b_8&b_{10}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_2&\mathbf{e}_{14}&\mathbf{e}_{12}\\a_2&a_{14}&a_{12}\\b_2&b_{14}&b_{12}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_2&\mathbf{e}_{15}&\mathbf{e}_{13}\\a_2&a_{15}&a_{13}\\b_2&b_{15}&b_{13}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_2&\mathbf{e}_9&\mathbf{e}_{11}\\a_2&a_9&a_{11}\\b_2&b_9&b_{11}\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_3&\mathbf{e}_6&\mathbf{e}_5\\a_3&a_6&a_5\\b_3&b_6&b_5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_3&\mathbf{e}_8&\mathbf{e}_{11}\\a_3&a_8&a_{11}\\b_3&b_8&b_{11}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_3&\mathbf{e}_{13}&\mathbf{e}_{14}\\a_3&a_{13}&a_{14}\\b_3&b_{13}&b_{14}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_3&\mathbf{e}_{10}&\mathbf{e}_9\\a_3&a_{10}&a_9\\b_3&b_{10}&b_9\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_3&\mathbf{e}_{15}&\mathbf{e}_{12}\\a_3&a_{15}&a_{12}\\b_3&b_{15}&b_{12}\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_4&\mathbf{e}_5&\mathbf{e}_1\\a_4&a_5&a_1\\b_4&b_5&b_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_4&\mathbf{e}_8&\mathbf{e}_{12}\\a_4&a_8&a_{12}\\b_4&b_8&b_{12}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_4&\mathbf{e}_9&\mathbf{e}_{13}\\a_4&a_9&a_{13}\\b_4&b_9&b_{13}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_4&\mathbf{e}_{11}&\mathbf{e}_{15}\\a_4&a_{11}&a_{15}\\b_4&b_{11}&b_{15}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_4&\mathbf{e}_{10}&\mathbf{e}_{14}\\a_4&a_{10}&a_{14}\\b_4&b_{10}&b_{14}\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_5&\mathbf{e}_7&\mathbf{e}_2\\a_5&a_7&a_2\\b_5&b_7&b_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_5&\mathbf{e}_8&\mathbf{e}_{13}\\a_5&a_8&a_{13}\\b_5&b_8&b_{13}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_5&\mathbf{e}_{10}&\mathbf{e}_{15}\\a_5&a_{10}&a_{15}\\b_5&b_{10}&b_{15}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_5&\mathbf{e}_{14}&\mathbf{e}_{11}\\a_5&a_{14}&a_{11}\\b_5&b_{14}&b_{11}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_5&\mathbf{e}_{12}&\mathbf{e}_9\\a_5&a_{12}&a_9\\b_5&b_{12}&b_9\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_6&\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_7\\a_6&a_1&a_7\\b_6&b_1&b_7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_6&\mathbf{e}_8&\mathbf{e}_{14}\\a_6&a_8&a_{14}\\b_6&b_8&b_{14}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_6&\mathbf{e}_{15}&\mathbf{e}_9\\a_6&a_{15}&a_9\\b_6&b_{15}&b_9\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_6&\mathbf{e}_{12}&\mathbf{e}_{10}\\a_6&a_{12}&a_{10}\\b_6&b_{12}&b_{10}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_6&\mathbf{e}_{11}&\mathbf{e}_{13}\\a_6&a_{11}&a_{13}\\b_6&b_{11}&b_{13}\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_7&\mathbf{e}_3&\mathbf{e}_4\\a_7&a_3&a_4\\b_7&b_3&b_4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_7&\mathbf{e}_8&\mathbf{e}_{15}\\a_7&a_8&a_{15}\\b_7&b_8&b_{15}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_7&\mathbf{e}_{12}&\mathbf{e}_{11}\\a_7&a_{12}&a_{11}\\b_7&b_{12}&b_{11}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_7&\mathbf{e}_9&\mathbf{e}_{14}\\a_7&a_9&a_{14}\\b_7&b_9&b_{14}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_7&\mathbf{e}_{13}&\mathbf{e}_{10}\\a_7&a_{13}&a_{10}\\b_7&b_{13}&b_{10}\end{vmatrix}$$

тридцати пяти определителей третьего порядка, заданных таблицей в немых индексах:

орт	коммутатор $[\boldsymbol{a_i b_j}]= a_i b_j - a_j b_i$						
$\mathbf{e}_1$	[2.3]	[4.5]	[7.6]	[8.9]	[11.10]	[13.12]	[14.15]
$\mathbf{e}_2$	[4.6]	[5.7]	[3.1]	[8.10]	[14.12]	[15.13]	[9.11]
$\mathbf{e}_3$	[6.5]	[1.2]	[4.7]	[8.11]	[13.14]	[10.9]	[15.12]
$\mathbf{e}_4$	[5.1]	[7.3]	[6.2]	[8.12]	[9.13]	[11.15]	[10.14]
$\mathbf{e}_5$	[7.2]	[3.6]	[1.4]	[8.13]	[10.15]	[14.11]	[12.9]
$\mathbf{e}_6$	[1.7]	[2.4]	[5.3]	[8.14]	[15.9]	[12.10]	[11.13]
$\mathbf{e}_7$	[3.4]	[6.1]	[2.5]	[8.15]	[12.11]	[9.14]	[13.10]
$\mathbf{e}_8$	[9.1]	[10.2]	[11.3]	[12.4]	[13.5]	[14.6]	[15.7]
$\mathbf{e}_9$	[11,2]	[13,4]	[14,7]	[1.8]	[3,10]	[5,12]	[6,15]
$\mathbf{e}_{10}$	[14,4]	[15,5]	[9,3]	[2.8]	[6,12]	[7,13]	[1,11]
$\mathbf{e}_{11}$	[13,6]	[10,1]	[15,4]	[3.8]	[5,14]	[2, 9]	[7,12]
$\mathbf{e}_{12}$	[9,5]	[11,7]	[10,6]	[4.8]	[1,13]	[3,15]	[2,14]
$\mathbf{e}_{13}$	[10,7]	[14,3]	[12,1]	[5.8]	[2,15]	[6,11]	[4, 9]
$\mathbf{e}_{14}$	[15,1]	[12,2]	[11,5]	[6.8]	[7, 9]	[4,10]	[3,13]
$\mathbf{e}_{15}$	[12,3]	[9,6]	[13,2]	[7.8]	[4,11]	[1,14]	[5,10]

Здесь индексом *i,j*-обозначена величина

$$[a_ib_j]=a_ib_j-a_jb_i,$$

а все элементы суммируются покоординатно.

Та же таблица может быть представлена в виде суммы 35-ти определителей третьего порядка:

[a,b]= |*1,2,3*| + |*1,8, 9*| + |*1,11,10*| + |*1,13,12*| + |*1,14,15*| +
+|*2,4,6*| + |*2,8,10*| + |*2,14,12*| + |*2,15,13*| + |*2, 9,11* | +
+|*3,6,5*| + |*3,8,11*| + |*3,13,14*| + |*3,10, 9*| + |*3,15,12*| +
+|*4,5,1*| + |*4,8,12*| + |*4, 9,13*| + |*4,11,15*| + |*4,10,14*| +
+|*5,7,2*| + |*5,8,13*| + |*5,10,15*| + |*5,14,11*| + |*5,12, 9* | +
+|*6,1,7*| + |*6,8,14*| + |*6,15, 9*| + |*6,12,10*| + |*6,11,13*| +
+|*7,3,4*| + |*7,8,15*| + |*7,12,11*| + |*7, 9,14*| + |*7,13,10*| .

явно определяющем трех-, семи-, и 15-ти мерные варианты, или же просто:

1,2,3	*1,4,5*	*1,7,6*	*1,8,9*	*1,11,10*	*1,13,12*	*1,14,15*
2,4,6	*2,5,7*	*2,3,1*	*2,8,10*	*2,14,12*	*2,15,13*	*2,9,11*
3,6,5	*3,1,2*	*3,4,7*	*3,8,11*	*3,13,14*	*3,10,9*	*3,15,12*
4,5,1	*4,7,3*	*4,6,2*	*4,8,12*	*4,9,13*	*4,11,15*	*4,10,14*
5,7,2	*5,3,6*	*5,1,4*	*5,8,13*	*5,10,15*	*5,14,11*	*5,12,9*
6,1,7	*6,2,4*	*6,5,3*	*6,8,14*	*6,15,9*	*6,12,10*	*6,11,13*
7,3,4	*7,6,1*	*7,2,5*	*7,8,15*	*7,12,11*	*7,9,14*	*7,13,10*
8,9,1	*8,10,2*	*8,11,3*	*8,12,4*	*8,13,5*	*8,14,6*	*8,15,7*
9,3,10	*9,5,12*	*9,6,15*	*9,1,8*	*9,11,2*	*9,13,4*	*9,14,7*
10,6,12	*10,7,13*	*10,1,11*	*10,2,8*	*10,14,4*	*10,15,5*	*10,9,3*
11,5,14	*11,2,9*	*11,7,12*	*11,3,8*	*11,13,6*	*11,10,1*	*11,15,4*
12,1,13	*12,3,15*	*12,2,14*	*12,4,8*	*12,9,5*	*12,11,7*	*12,10,6*
13,2,15	*13,6,11*	*13,4,9*	*13,5,8*	*13,10,7*	*13,14,3*	*13,12,1*
14,7,9	*14,4,10*	*14,3,13*	*14,6,8*	*14,15,1*	*14,12,2*	*14,11,5*
15,4,11	*15,1,14*	*15,5,10*	*15,7,8*	*15,12,3*	*15,9,6*	*15,13,2*

Операторы момента импульса ***L*** (матриц Паули) удовлетворяют соотношениям:

$m([L_2L_3]$	$+[L_4L_5]$	$+[L_7L_6]$	$+n[L_8L_9]$	$+[L_{11}L_{10}]$	$+[L_{13}L_{12}]$	$+[L_{14}L_{15}])$	=	$-iL_1;$
$m([L_4L_6]$	$+[L_5L_7]$	$+[L_3L_1]$	$+n[L_8L_{10}]$	$+[L_{14}L_{12}]$	$+[L_{15}L_{13}]$	$+[L_9L_{11}])$	=	$-iL_2;$
$m([L_6L_5]$	$+[L_1L_2]$	$+[L_4L_7]$	$+n[L_8L_{11}]$	$+[L_{13}L_{14}]$	$+[L_{10}L_9]$	$+[L_{15}L_{12}])$	=	$-iL_3;$
$m([L_5L_1]$	$+[L_7L_3]$	$+[L_6L_2]$	$+n[L_8L_{12}]$	$+[L_9L_{13}]$	$+[L_{11}L_{15}]$	$+[L_{10}L_{14}])$	=	$-iL_4;$
$m([L_7L_2]$	$+[L_3L_6]$	$+[L_1L_4]$	$+n[L_8L_{13}]$	$+[L_{10}L_{15}]$	$+[L_{14}L_{11}]$	$+[L_{12}L_9])$	=	$-iL_5;$
$m([L_1L_7]$	$+[L_2L_4]$	$+[L_5L_3]$	$+n[L_8L_{14}]$	$+[L_{15}L_9]$	$+[L_{12}L_{10}]$	$+[L_{11}L_{13}])$	=	$-iL_6;$
$m([L_3L_4]$	$+[L_6L_1]$	$+[L_2L_5]$	$+n[L_8L_{15}]$	$+[L_{12}L_{11}]$	$+[L_9L_{14}]$	$+[L_{13}L_{10}])$	=	$-iL_7;$
$k([L_9L_1]$	$+[L_{10}L_2]$	$+[L_{11}L_3]$	$+[L_{12}L_4]$	$+[L_{13}L_5]$	$+[L_{14}L_6]$	$+[L_{15}L_7])$	=	$-iL_8;$
$m([L_3L_{10}]$	$+[L_5L_{12}]$	$+[L_6L_{15}]$	$+n[L_1L_8]$	$+[L_{11}L_2]$	$+[L_{13}L_4]$	$+[L_{14}L_7])$	=	$-iL_9;$
$m([L_6L_{12}]$	$+[L_7L_{13}]$	$+[L_1L_{11}]$	$+n[L_2L_8]$	$+[L_{14}L_4]$	$+[L_{15}L_5]$	$+[L_9L_3])$	=	$-iL_{10};$
$m([L_5L_{14}]$	$+[L_2L_9]$	$+[L_7L_{12}]$	$+n[L_3L_8]$	$+[L_{13}L_6]$	$+[L_{10}L_1]$	$+[L_{15}L_4])$	=	$-iL_{11};$
$m([L_1L_{13}]$	$+[L_3L_{15}]$	$+[L_2L_{14}]$	$+n[L_4L_8]$	$+[L_9L_5]$	$+[L_{11}L_7]$	$+[L_{10}L_6])$	=	$-iL_{12};$
$m([L_2L_{15}]$	$+[L_6L_{11}]$	$+[L_4L_9]$	$+n[L_5L_8]$	$+[L_{10}L_7]$	$+[L_{14}L_3]$	$+[L_{12}L_1])$	=	$-iL_{13};$
$m([L_7L_9]$	$+[L_4L_{10}]$	$+[L_3L_{13}]$	$+n[L_6L_8]$	$+[L_{15}L_1]$	$+[L_{12}L_2]$	$+[L_{11}L_5])$	=	$-iL_{14};$
$m([L_4L_{11}]$	$+[L_1L_{14}]$	$+[L_5L_{10}]$	$+n[L_7L_8]$	$+[L_{12}L_3]$	$+[L_9L_6]$	$+[L_{13}L_2])$	=	$-iL_{15},$

где $[L_iL_j]=L_iL_j-L_jL_i$, коммутатор, причем n=11/3, m=3/25, k=1/11.

Трехмерная и семимерная векторные алгебры являются частным случаем Пятнадцатимерной. Таблица подстановки индексов в ней имеет вид:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
2	*4*	*6*	*5*	*7*	*1*	*3*	*8*	*10*	*12*	*14*	*13*	*15*	*9*	*11*
3	*6*	*5*	*1*	*2*	*7*	*4*	*8*	*11*	*14*	*13*	*9*	*10*	*15*	*12*
4	*5*	*1*	*7*	*3*	*2*	*6*	*8*	*12*	*13*	*9*	*15*	*11*	*10*	*14*
5	*7*	*2*	*3*	*6*	*4*	*1*	*8*	*13*	*15*	*10*	*11*	*14*	*12*	*9*
6	*1*	*7*	*2*	*4*	*3*	*5*	*8*	*14*	*9*	*15*	*10*	*12*	*11*	*13*
7	*3*	*4*	*6*	*1*	*5*	*2*	*8*	*15*	*11*	*12*	*14*	*9*	*13*	*10*

Матрицы пятнадцатого порядка L_i приведены в [3]. С целью упрощения записи лучше использовать сумму операторов момента импульсов, вида:

-iL	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
1	*0*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*
2	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*
3	*-1*	*1*	*0*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*
4	*1*	*1*	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*
5	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*0*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*
6	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*0*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*
7	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*0*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*
8	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*
9	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*
10	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*
11	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*0*	*1*	*-1*	*1*	*-1*
12	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*0*	*1*	*1*	*1*
13	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*0*	*-1*	*1*
14	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*0*	*-1*
15	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*0*

или расширенный вариант записи:

$-iL_r$	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
1	*0*	*-3*	*2*	*-5*	*4*	*7*	*-6*	*-9*	*8*	*11*	*-10*	*13*	*-12*	*-15*	*14*
2	*3*	*0*	*-1*	*-6*	*-7*	*4*	*5*	*-10*	*-11*	*8*	*9*	*14*	*15*	*-12*	*-13*
3	*-2*	*1*	*0*	*-7*	*6*	*-5*	*4*	*-11*	*10*	*-9*	*8*	*15*	*-14*	*13*	*-12*
4	*5*	*6*	*7*	*0*	*-1*	*-2*	*-3*	*-12*	*-13*	*-14*	*-15*	*8*	*9*	*10*	*11*
5	*-4*	*7*	*-6*	*1*	*0*	*3*	*-2*	*-13*	*12*	*-15*	*14*	*-9*	*8*	*-11*	*10*
6	*-7*	*-4*	*5*	*2*	*-3*	*0*	*1*	*-14*	*15*	*12*	*-13*	*-10*	*11*	*8*	*-9*
7	*6*	*-5*	*-4*	*3*	*2*	*-1*	*0*	*-15*	*-14*	*13*	*12*	*-11*	*-10*	*9*	*8*
8	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*0*	*-1*	*-2*	*-3*	*-4*	*-5*	*-6*	*-7*
9	*-8*	*11*	*-10*	*13*	*-12*	*-15*	*14*	*1*	*0*	*3*	*-2*	*5*	*-4*	*-7*	*6*
10	*-11*	*-8*	*9*	*14*	*15*	*-12*	*-13*	*2*	*-3*	*0*	*1*	*6*	*7*	*-4*	*-5*
11	*10*	*-9*	*-8*	*15*	*-14*	*13*	*-12*	*3*	*2*	*-1*	*0*	*7*	*-6*	*5*	*-4*
12	*-13*	*-14*	*-15*	*-8*	*9*	*10*	*11*	*4*	*-5*	*-6*	*-7*	*0*	*1*	*2*	*3*
13	*12*	*-15*	*14*	*-9*	*-8*	*-11*	*10*	*5*	*4*	*-7*	*6*	*-1*	*0*	*-3*	*2*
14	*15*	*12*	*-13*	*-10*	*11*	*-8*	*-9*	*6*	*7*	*4*	*-5*	*-2*	*3*	*0*	*-1*
15	*-14*	*13*	*12*	*-11*	*-10*	*9*	*-8*	*7*	*-6*	*5*	*4*	*-3*	*-2*	*1*	*0*

определяющий координаты моментов импульса.

Удивительны свойства суммы операторов моментов импульса:

- во-первых, сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна нулю;
- во-вторых, число разных знаков в каждой строке и в каждом столбце одинаково;
- матрицы нечётных степеней антисимметричны, а четных – симметричны ;
- размерность матрицы (как совершенного числа) определяется числом 2^n-1;

- все нечетные степени матрицы пропорциональны L, а четные – L^2;
- целые степени матрицы определяются лишь двумя числами;
- матрица L определяет векторное произведение двух векторов;
- определитель матрицы L (и всех её степеней) равен нулю.

Приведем несколько примеров.

$-L^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14

$-iL^3/15^1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1
14	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1
15	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0

$L^4/15^1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14

$-iL^5/15^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1
14	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1
15	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0

Очевидно, что, чётные и нечетные степени матрицы суммы операторов момента импульса, образуют числовые величины, аналогичные **единицам комплексных чисел**, при этом числа приобретают 2^n-1 -мерный векторный характер среди, которых выделяется четыре класса вычетов, определяемых степенями мнимой единицы. Особо отметим, что любое нарушение суммы операторов момента импульса ведет к нарушению симметрии всей совокупности чисел. Каждая из *3,7,15,31,63,127,…,*2^n*-1,…*-мерных векторных алгебр имеют сумму операторов момента импульса совершенно аналогичного вида.

В пятнадцатимерной алгебре коммутирующих между собой операторов нет, и подалгебры Картана отсутствуют. Её ранг равен единице и, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми операторами. Он соответствует скалярному квадрату оператора момента импульса

$$L^2=L_1^2+L_2^2+\ldots+L_{15}^2=14I,$$

где I-единичная матрица. Скалярный квадрат оператора момента импульса, следовательно, сохраняется, что соответствует закону сохранения момента импульса.

Таким образом, удается построить антисимметричную векторную алгебру, определяемую векторами с пятнадцатью координатами в каждой из них. Свойства этой алгебры следует изучить, но можно заранее сказать, что она соответствует линейному векторному пространству, анти коммутативна, не ассоциативна по умножению и не альтернативна. Она имеет нуль, единицу, противоположный элемент, коммутативна и ассоциативна по сложению. Выполняется свойство дистрибутивности. Эта алгебра следует из аналогичной шестнадцати мерной не коммутативной по умножению и не ассоциативной алгебры, определяемой гиперкомплексными числами без деления и обратных элементов.

Нулевая координата шестнадцатимерной алгебры определяет скалярное произведение двух Пятнадцатимерных векторов. Скалярное произведение двух векторов соответствует единичному метрическому 15-тензору. Таким образом, определено как векторное, так и скалярное произведение векторов одной из Пятнадцатимерных алгебр.

Чтобы говорить предметно о свойствах Пятнадцатимерной алгебры можно проанализировать пятнадцати рядные квадратные матрицы L_i (Паули). С их помощью, как известно, записываются уравнения (Дирака) [1]. Трехмерные и семимерные матрицы (Паули) при этом характеризуют момент импульса в указанных алгебрах меньшей размерности.

Непосредственным умножением этих операторов можно получить приведенные выше соотношения для операторов момента импульса.

Обратим внимание читателей на существование не только одномерной и трехмерной векторной алгебры, но также семимерной, а теперь -Пятнадцатимерной, 31-но мерной и более высокой размерности. Это в свою очередь ребром ставит вопрос о размерности физического пространства. Я считаю, что “**Размерность физического пространства неопределённа.** Она характеризуется лишь свойствами алгебры (симметрии), используемой для описания процессов, и может быть как угодно большой”!

Более симметричны алгебры большей размерности; алгебры меньшей размерности соответствуют той или иной степени нарушения симметрии определяющих соотношений.

Литература

1. Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996. – 244 с.

2. Коротков А.В. Элементы трех- и семимерного изовекторного и спинорного исчислений. – Новочеркасск: Набла, 1999. – 100 с.

3. Коротков А. В. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. – Новочеркасск: Изд-во “НОК“, 2011. – 36с.

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТРЕХ ВЕКТОРОВ В ПЯТНАДЦАТИМЕРНОЙ АЛГЕБРЕ

©2012 г., А.В. Коротков
Международный центр теоретической физики (2^n-1-мерные технологии),
г. Новочеркасск

$$\left\| \begin{matrix} 3\text{-}D & 2^m\text{-}1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 7\text{-}D & 2^m\text{-}1 \\ 2^m\text{-}1 & 2n+1 & 15\text{-}D \end{matrix} \right\|$$

Обозначим определитель третьего порядка символом

$$|i,j,k| = \begin{vmatrix} e_i & e_j & e_k \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix}$$

тогда векторное произведение двух векторов $[a,b]$ представляется

-в ***одномерном*** случае как $|1,0,0|=0$;

-в ***трехмерном*** случае в виде одного определителя третьего порядка

$$[a,b]=|1,2,3|= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix};$$

или в координатной форме записи

$$\begin{aligned} [a,b]= &(a_2b_3 \;\; -b_2a_3)\;\; e_1, \\ &(a_3b_1 \;\; -b_3a_1)\;\; e_2, \\ &(a_1b_2 \;\; -b_1a_2)\;\; e_3. \end{aligned}$$

Тензор структурных констант $\sigma^{ijk}=\pm 1$ – является совершенно антисимметричным единичным 3-тензором, в котором компоненты меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1.

Тензор структурных констант имеет вид:

σ^{ijk}	1	2	3
1	0	-1	1
2	1	0	-1
3	-1	1	0

С целью упрощения записи лучше использовать сумму трех операторов момента импульса $L=(L_1,L_2,L_3)$. Она определяет векторное произведение двух векторов и может быть представлена в виде суммы трёх компонент. Матрицы L и L_i третьего порядка с мнимыми элементами.

В трехмерном случае

$$[a,b]=[a_ie_ib_je_j]=a_ib_j[e_ie_k]=\sigma_{ij}^{k}a_ib_je_k;$$

при последовательности чисел $e_ia_jb_k$ = **1,2,3;   2,3,1;   3,1,2;**

$$\sigma_{ij}^{k}=1;$$

при обратной последовательности $\sigma_{ij}^{k}=-1;$

для других наборов чисел $\sigma_{ij}^{k}=0.$

Отметим, что подстановки на множестве индексов **1,2,3** дают взаимно однозначное отображение векторного произведения двух векторов на себя ***[1,2]:***

1	***2***	***3***
2	***3***	***1***
3	***1***	***2***

Удивительны свойства (суммы операторов момента импульса)-тензора структурных констант:

- во-первых, сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна нулю;
- во-вторых, число разных знаков в каждой строке и в каждом столбце одинаково;
- матрицы нечётных степеней антисимметричны, а четных – симметричны ;
- размерность матрицы (как совершенного числа) определяется числом 2^n-1 и может быть как угодно большой;
- все нечетные степени матрицы пропорциональны L, а четные – L^2;
- целые степени матрицы определяются двумя числами;
- матрицы L определяют векторное произведение двух векторов;
- определитель матрицы L и всех её степеней равен нулю.

Приведем несколько примеров.

$-L^2/3^0$	1	2	3		$-iL^3/3^0$	1	2	3		$L^4/3^1$	1	2	3		$-iL^5/3^1$	1	2	3
1	-2	1	1		1	0	-1	1		1	-2	1	1		1	0	-1	1
2	1	-2	1		2	1	0	-1		2	1	-2	1		2	1	0	-1
3	1	1	-2		3	-1	1	0		3	1	1	-2		3	-1	1	0

Операторы момента импульса связаны соотношениями:

$$-iL_1=L_2\cdot L_3-L_3\cdot L_2,$$
$$-iL_2=L_3\cdot L_1-L_1\cdot L_3,$$
$$-iL_3=L_1\cdot L_2-L_2\cdot L_1,$$

причём

$$L= L_1+ L_2+ L_3$$

и скалярный квадрат операторов момента импульса

$$L^2= L_1^2+ L_2^2+ L_3^2.$$

Очевидно, что без учёта коэффициентов, чётные (кроме 0) и нечетные степени матрицы суммы операторов момента импульса совпадают и образуют числовые величины, аналогичные **единицам комплексных чисел**, при этом эти числа приобретают 2^n-1 -мерный векторный характер и средин них выделяется четыре класса вычетов, определяемых степенями мнимой единицы. Особо отметим, что любое нарушение суммы операторов момента импульса ведет к нарушению симметрии всей совокупности чисел. При этом

$$L^1/3^0=-L^3/3^1=L^5/3^2=\ldots \begin{Vmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{Vmatrix}, \quad -L^2/3^0=L^4/3^1=-L^6/3^2=\ldots \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix},$$

$$p^1=-L^2/3^0=p^3/3^2=p^5/3^4=\ldots \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -i & i \end{Vmatrix}, \quad -p^2/3^1=-p^4/3^3=-p^6/3^5=\ldots \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$-(L^1/3^1)p^1=(L^3/3^4)p^3=\ldots \begin{Vmatrix} i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{Vmatrix}, \quad -(L^2/3^2)p^2=(L^4/3^5)p^4=\ldots \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{array}{r}\text{(квадрат модуля)} \\ -(p^1+iL^1)(p^1-iL^{1)}/(3^1+1)=\end{array} \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix}, \quad \begin{array}{r}\text{(теорема Пифагора)} \\ (p^2+L^2)/(3^2-1)=\end{array} \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix},$$

определители

$/L/=0, \ \ldots \ /L^n/=0,$ $\qquad$ $/p/=0, \ \ldots \ /p^n/=0,$

что аналогично комплексным числам.

У 3-мерной алгебры коммутирующих между собой операторов нет, и под алгебры Картана отсутствуют. Её ранг равен единице и, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми операторами. Он соответствует скалярному квадрату оператора момента импульса

$$L^2=L_1^2+L_2^2+L_3^2=2I,$$

где I-единичная матрица. Скалярный квадрат оператора момента импульса, следовательно, сохраняется, что соответствует закону сохранения момента импульса.

В семимерном случае векторное произведение двух векторов удобно записать в координатной форме записи

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{[a,b]}= &(\ (a_2b_3 \ \ -b_2a_3) \ +(a_4b_5 \ \ -b_4a_5) \ +(b_6a_7, \ \ -a_6b_7)) \ \boldsymbol{e_1}, \\
&(+(a_4b_6 \ \ -b_4a_6) \ +(a_5b_7 \ \ -b_5a_7) \ +(b_1a_3, \ \ -a_1b_3)) \ \boldsymbol{e_2}, \\
&(+(a_6b_5 \ \ -b_6a_5) \ +(a_1b_2 \ \ -b_1a_2) \ +(b_7a_4, \ \ -a_7b_4)) \ \boldsymbol{e_3}, \\
&(+(a_5b_1 \ \ -b_5a_1) \ +(a_7b_3 \ \ -b_7a_3) \ +(b_2a_6, \ \ -a_2b_6)) \ \boldsymbol{e_4}, \\
&(+(a_7b_2 \ \ -b_7a_2) \ +(a_3b_6 \ \ -b_3a_6) \ +(b_4a_1, \ \ -a_4b_1)) \ \boldsymbol{e_5}, \\
&(+(a_1b_7 \ \ -b_1a_7) \ +(a_2b_4 \ \ -b_2a_4) \ +(b_3a_5, \ \ -a_3b_5)) \ \boldsymbol{e_6}, \\
&(+(a_3b_4 \ \ -b_3a_4) \ +(a_6b_1 \ \ -b_6a_1) \ +(b_5a_2, \ \ -a_5b_2)) \ \boldsymbol{e_7}.
\end{aligned}$$

или в виде суммы семи определителей

$$\boldsymbol{[ab]}= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_2 & e_4 & e_6 \\ a_2 & a_4 & a_6 \\ b_2 & b_4 & b_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_3 & e_6 & e_5 \\ a_3 & a_6 & a_5 \\ b_3 & b_6 & b_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_4 & e_5 & e_1 \\ a_4 & a_5 & a_1 \\ b_4 & b_5 & b_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} e_5 & e_7 & e_2 \\ a_5 & a_7 & a_2 \\ b_5 & b_7 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_6 & e_1 & e_7 \\ a_6 & a_1 & a_7 \\ b_6 & b_1 & b_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_7 & e_3 & e_4 \\ a_7 & a_3 & a_4 \\ b_7 & b_3 & b_4 \end{vmatrix},$$

Тензор структурных констант и сумма операторов момента импульса имеют вид:

σ^{ijk}= -iL	1	2	3	4	5	6	7	-iLr	1	2	3	4	5	6	7
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	1	0	-3	2	-5	4	7	-6
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	2	3	0	-1	-6	-7	4	5
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	3	-2	1	0	-7	6	-5	4
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	4	5	6	7	0	-1	-2	-3
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	5	-4	7	-6	1	0	3	-2
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	6	-7	-4	5	2	-3	0	1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	7	6	-5	-4	3	2	-1	0

Они определяют векторное произведение двух векторов. Матрица суммы операторов момента импульса $\boldsymbol{L}=(L_1,L_2,\ldots,L_7)$ может быть представлена в виде суммы семи компонент. Матрицы $\boldsymbol{L}$ и L_i 7-го порядка .

В 7-ми мерном случае

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[a_i\boldsymbol{e}_i b_j\boldsymbol{e}_j]=a_i b_j[\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k]=\sigma_{ij}^{\ k} a_i b_j \boldsymbol{e}_k;$$

при последовательности чисел

$$\boldsymbol{e}_i a_j b_k = \mathbf{1,2,3;\ \ 2,4,6;\ \ 3,6,5;\ \ 4,5,1;\ \ 5,7,2;\ \ 6,1,7;\ \ 7,3,4;}$$

$\sigma_{ij}^{\ k}=1;$ при обратной последовательности $\sigma_{ij}^{\ k}=-1;$ для других наборов чисел $\sigma_{ij}^{\ k}=0.$

При этом тензор структурных констант $\sigma^{ijk}=\pm 1$ – является совершенно антисимметричным единичным 7- тензором, в котором компоненты меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из анти симметричности следует, что все компоненты тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля лишь те, у которых все три индекса различны.

Отметим, что подстановки на множестве индексов $1,2,\ldots,7$ дают взаимно однозначное отображение векторного произведения двух векторов на себя, причем имеет место следующая таблица подстановки индексов:

1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	5	7	1	3
3	6	5	1	2	7	4
4	5	1	7	3	2	6
5	7	2	3	6	4	1
6	1	7	2	4	3	5
7	3	4	6	1	5	2

Первые три столбца (или строки) этой таблицы характеризуют значения индексов определителей в векторном произведении двух векторов.

Удивительны свойства (суммы операторов момента импульса) и тензора структурных констант:

- во-первых, суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце равны нулю;
- во-вторых, число разных знаков в каждой строке и в каждом столбце одинаково;
- матрицы нечётных степеней антисимметричны, а четных – симметричны;
- размерность матрицы (как совершенного числа) определяется числом 2^n-1;

- все нечетные степени матрицы пропорциональны L, а четные – L^2;
- целые степени матрицы определяются двумя числами;
- матрицы L_i определяют векторное произведение двух векторов;
- определитель матрицы L и её степеней равен нулю.

Приведем несколько примеров. Имеем

$$-iL_1=m(L_2 \cdot L_3 - L_3 \cdot L_2 + L_4 \cdot L_5 - L_5 \cdot L_4 + L_7 \cdot L_6 - L_6 \cdot L_7),$$
$$-iL_2=m(L_4 \cdot L_6 - L_6 \cdot L_4 + L_5 \cdot L_7 - L_7 \cdot L_5 + L_3 \cdot L_1 - L_1 \cdot L_3),$$
$$-iL_3=m(L_6 \cdot L_5 - L_5 \cdot L_6 + L_1 \cdot L_2 - L_2 \cdot L_1 + L_4 \cdot L_7 - L_7 \cdot L_4),$$
$$-iL_4=m(L_5 \cdot L_1 - L_1 \cdot L_5 + L_7 \cdot L_3 - L_3 \cdot L_7 + L_6 \cdot L_2 - L_2 \cdot L_6),$$
$$-iL_5=m(L_7 \cdot L_2 - L_2 \cdot L_7 + L_3 \cdot L_6 - L_6 \cdot L_3 + L_1 \cdot L_4 - L_4 \cdot L_1),$$
$$-iL_6=m(L_1 \cdot L_7 - L_7 \cdot L_1 + L_2 \cdot L_4 - L_4 \cdot L_2 + L_5 \cdot L_3 - L_3 \cdot L_5),$$
$$-iL_7=m(L_3 \cdot L_4 - L_4 \cdot L_3 + L_6 \cdot L_1 - L_1 \cdot L_6 + L_2 \cdot L_5 - L_5 \cdot L_2),$$

причём $m=1/3$.

$$L=-i \cdot (L_1+ L_2+ L_3+ {}_4+ L_5+ L_6+L_7),$$

и

$$L^2= L_1^2+ L_2^2+ L_3^2+ L_4^2+ L_5^2+ L_6^2+ L_7^2=6I.$$

Возведём L в целую положительную степень. При этом:

$-L^2/7^0$	1	2	3	4	5	6	7
1	-6	1	1	1	1	1	1
2	1	-6	1	1	1	1	1
3	1	1	-6	1	1	1	1
4	1	1	1	-6	1	1	1
5	1	1	1	1	-6	1	1
6	1	1	1	1	1	-6	1
7	1	1	1	1	1	1	-6

$-iL^3/7^1$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	-1	1	-1	1	1	-1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1
3	-1	1	0	-1	1	-1	1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1
5	-1	1	-1	1	0	1	-1
6	-1	-1	1	1	-1	0	1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0

$L^4/7^1$	1	2	3	4	5	6	7
1	-6	1	1	1	1	1	1
2	1	-6	1	1	1	1	1
3	1	1	-6	1	1	1	1
4	1	1	1	-6	1	1	1
5	1	1	1	1	-6	1	1
6	1	1	1	1	1	-6	1
7	1	1	1	1	1	1	-6

$-iL^5/7^2$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	-1	1	-1	1	1	-1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1
3	-1	1	0	-1	1	-1	1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1
5	-1	1	-1	1	0	1	-1
6	-1	-1	1	1	-1	0	1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0

Очевидно, что без учёта коэффициентов, чётные и нечетные степени матрицы суммы операторов момента импульса совпадают и образуют две величины, аналогичные единицам **комплексных чисел**, при этом эти числа приобретают 2^n-1 -мерный векторный характер среди, которых выделяется четыре класса вычетов, определяемых степенями мнимой единицы. Особо отметим, что любое нарушение суммы операторов момента импульса ведет к нарушению симметрии всей совокупности чисел.

В 7-мерной алгебре коммутирующих между собой операторов нет, и подалгебры Картана отсутствуют. Её ранг равен единице и, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми операторами. Он соответствует скалярному квадрату оператора момента импульса

$$L^2=L_1^2+L_2^2+\ldots+L_7^2=6I,$$

где I-единичная матрица. Скалярный квадрат оператора момента импульса, следовательно, сохраняется, что соответствует закону сохранения момента импульса.

Приведем ещё несколько примеров.

$$L=L^3/7=L^5/7^2=\ldots \begin{Vmatrix} 0 & -i & i & -i & i & i & -i \\ i & 0 & -i & -i & -i & i & i \\ -i & i & 0 & -i & i & -i & i \\ i & i & i & 0 & -i & -i & -i \\ -i & i & -i & i & 0 & i & -i \\ -i & -i & i & i & -i & 0 & i \\ i & -i & -i & i & i & -i & 0 \end{Vmatrix} \qquad -L^2=-L^4/7=-L^6/7^2\ldots \begin{Vmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{Vmatrix}$$

$$p=p^3/7^2=p^5/7^4=\ldots \begin{Vmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{Vmatrix} \qquad -p^2/7=-p^4/7^3=-L^6/7^5=\ldots \begin{Vmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{Vmatrix}$$

$$-(L/7)p=-(L^3/7^4)p^3=\ldots \begin{Vmatrix} 0 & -i & i & -i & i & i & -i \\ i & 0 & -i & -i & -i & i & i \\ -i & i & 0 & -i & i & -i & i \\ i & i & i & 0 & -i & -i & -i \\ -i & i & -i & i & 0 & i & -i \\ -i & -i & i & i & -i & 0 & i \\ i & -i & -i & i & i & -i & 0 \end{Vmatrix} \qquad -(L^2/7^2)p^2=-(L^4/7^5)p^4=\ldots \begin{Vmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{matrix}\text{(квадрат модуля)} \\ -(p+iL)(p-iL)/(7+1)=\end{matrix} \begin{Vmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{Vmatrix} \qquad \begin{matrix}\text{(теорема Пифагора)} \\ (p^2+L^2)/(-7-1)=\end{matrix} \begin{Vmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{Vmatrix}$$

определители

$/L/=0,\ \ldots\ /L^n/=0,$ $\qquad$ $/p/=0,\ \ldots\ /p^n/=0,$

Мы построили матричную аналогию комплексных чисел.

В пятнадцатимерной векторной алгебре векторное произведение двух векторов можно записать в виде суммы ста пяти величин вида:

$$(a_ib_j-a_jb_i)\boldsymbol{e}_k,$$

по семь компонент в каждой координате ($7\cdot15=105$) в соответствии с таблицей:

1,2,3	1,4,5	1,7,6	1,8,9	1,11,10	1,13,12	1,14,15
2,4,6	2,5,7	2,3,1	2,8,10	2,14,12	2,15,13	2,9,11
3,6,5	3,1,2	3,4,7	3,8,11	3,13,14	3,10,9	3,15,12
4,5,1	4,7,3	4,6,2	4,8,12	4,9,13	4,11,15	4,10,14
5,7,2	5,3,6	5,1,4	5,8,13	5,10,15	5,14,11	5,12,9
6,1,7	6,2,4	6,5,3	6,8,14	6,15,9	6,12,10	6,11,13
7,3,4	7,6,1	7,2,5	7,8,15	7,12,11	7,9,14	7,13,10
8,9,1	8,10,2	8,11,3	8,12,4	8,13,5	8,14,6	8,15,7
9, 11,2	9 ,13,4	9,14 ,7	9,1,8	9,3,10	9,5,12	9,6,15
10,14,4	10,15,5	10 ,9 ,3	10,2,8	10,6,12	10,7,13	10,1,11
11,13,6	11,10,1	11,15,4	11,3,8	11,5,14	11,2,9	11,7,12
12, 9, 5	12,11,7	12,10,6	12,4,8	12,1,13	12,3,15	12,2,14
13,10,7	13,14,3	13,12,1	13,5,8	13,2,15	13,6,11	13,4,9
14,15,1	14,12,2	14,11,5	14,6,8	14,7,9	14,4,10	14,3,13
15,12,3	15 ,9, 6	15,13,2	15,7,8	15,4,11	15,1,14	15,5,10

где ***i**,j,k* циклически повторяются для каждой величины, так что они создают определители третьего порядка.

Например, три величины ***1,2,3; 2,3,1; 3,1,2*** дают определитель **|*1,2,3*|.** В результате векторное произведение двух векторов в Пятнадцатимерной алгебре может быть записано в виде суммы сорока девяти определителей третьего порядка, семь из которых (с восьмой координатой, например ***1, 8, 9***) повторяются трижды (49=28+3·7). При этом орт e_8 является общим ортом для всех семи пространств, так что, имеется 35 не примитивных определителей

[ab]=

=	|1, 2, 3|	+	|2, 8,10|	+	| 3,10, 9|	+	|8, 9, 1|	+	| 9,11, 2|	+	|10, 1,11|	+	|11, 3, 8|
+	|2, 4, 6|	+	|4, 8,12|	+	| 6,12,10|	+	|8,10, 2|	+	|10,14 ,4|	+	|12, 2,14|	+	|14, 6, 8|
+	|3, 6, 5|	+	|6, 8,14|	+	| 5,14,11|	+	|8,11, 3|	+	|11,13 ,6|	+	|14, 3,13|	+	|13, 5, 8|
+	|4, 5, 1 |	+	|5, 8,13|	+	| 1,13,12|	+	|8,12, 4|	+	|12, 9, 5|	+	|13, 4, 9|	+	| 9, 1, 8|
+	|5, 7, 2|	+	|7, 8,15|	+	| 2,15,13|	+	|8,13, 5|	+	|13,10, 7|	+	|15, 5,10|	+	|10, 2, 8|
+	| 6, 1, 7|	+	| 1, 8, 9|	+	| 7, 9,14|	+	| 8,14, 6|	+	|14,15, 1|	+	| 9, 6,15|	+	|15, 7, 8|
+	|7, 3, 4|	+	|3, 8,11|	+	| 4,11,15|	+	| 8,15, 7|	+	|15,12, 3|	+	|11, 7,12|	+	|12, 4,8|

Возможна также укороченная (не симметричная) запись векторного произведения двух векторов, которая имеет вид:

[a,b]=	|1,2,3|	+	3·|1,8, 9|	+	|1,11,10|	+	|1,13,12|	+	|1,14,15|	+
	|2,4,6|	+	3·|2,8,10|	+	|2,14,12|	+	|2,15,13|	+	|2, 9,11 |	+
	|3,6,5|	+	3·|3,8,11|	+	|3,13,14|	+	|3,10, 9|	+	|3,15,12|	+
	|4,5,1|	+	3·|4,8,12|	+	|4, 9,13|	+	|4,11,15|	+	|4,10,14|	+
	|5,7,2|	+	3·|5,8,13|	+	|5,10,15|	+	|5,14,11|	+	|5,12, 9 |	+
	|6,1,7|	+	3·|6,8,14|	+	|6,15, 9|	+	|6,12,10|	+	|6,11,13|	+
	|7,3,4|	+	3·|7,8,15|	+	|7,12,11|	+	|7, 9,14|	+	|7,13,10|	,

поскольку суммируются компоненты с восьмой координатой:

$$|1, 8, 9|+|8, 9, 1|+|9, 1, 8|=3\cdot|1, 8, 9|,$$
$$|2, 8, 10|+|8, 10, 2|+|10, 2, 8|=3\cdot|2, 8, 10|,$$
$$|3, 8, 11|+|8, 11, 3|+|11, 3, 8|=3\cdot|3, 8, 11|,$$
$$|4, 8, 12|+|8, 12, 4|+|12, 4, 8|=3\cdot|4, 8, 12|,$$
$$|5, 8, 13|+|8, 13, 5|+|13, 5, 8|=3\cdot|5, 8, 13|,$$
$$|6, 8, 14|+|8, 14, 6|+|14, 6, 8|=3\cdot|6, 8, 14|,$$
$$|7, 8, 15|+|8, 15, 7|+|15, 7, 8|=3\cdot|7, 8, 15|.$$

Тензор структурных констант и сумма операторов момента импульса имеют вид:

-iL	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1
14	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1
15	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0

или в расширенном виде

$-iL_r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-3	2	-5	4	7	-6	-9	8	11	-10	13	-12	-15	14
2	3	0	-1	-6	-7	4	5	-10	-11	8	9	14	15	-12	-13
3	-2	1	0	-7	6	-5	4	-11	10	-9	8	15	-14	13	-12
4	5	6	7	0	-1	-2	-3	-12	-13	-14	-15	8	9	10	11
5	-4	7	-6	1	0	3	-2	-13	12	-15	14	-9	8	-11	10
6	-7	-4	5	2	-3	0	1	-14	15	12	-13	-10	11	8	-9
7	6	-5	-4	3	2	-1	0	-15	-14	13	12	-11	-10	9	8
8	9	10	11	12	13	14	15	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
9	-8	11	-10	13	-12	-15	14	1	0	3	-2	5	-4	-7	6
10	-11	-8	9	14	15	-12	-13	2	-3	0	1	6	7	-4	-5
11	10	-9	-8	15	-14	13	-12	3	2	-1	0	7	-6	5	-4
12	-13	-14	-15	-8	9	10	11	4	-5	-6	-7	0	1	2	3
13	12	-15	14	-9	-8	-11	10	5	4	-7	6	-1	0	-3	2
14	15	12	-13	-10	11	-8	-9	6	7	4	-5	-2	3	0	-1
15	-14	13	12	-11	-10	9	-8	7	-6	5	4	-3	-2	1	0

Они определяют векторное произведение двух векторов. Матрица суммы операторов момента импульса $L=(L_1,L_2,\ldots,L_{15})$ может быть представлена в виде суммы 15-ти компонент. Матрицы L и L_i 15-го порядка .

В пятнадцатимерном случае

$$\boldsymbol{[a,b]}=[a_i\boldsymbol{e}_i b_j\boldsymbol{e}_j]=a_i b_j[\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k]=\sigma_{ij}^{\ k} a_i b_j \boldsymbol{e}_k;$$

при последовательности чисел

$$\boldsymbol{e}_i a_j b_k = \mathbf{1,2,3;\ 2,4,6;\ 3,6,5;\ 4,5,1;\ 5,7,2;\ 6,1,7;\ 7,3,4;}$$
$$\mathbf{1,8,9;\ 2,8,10;\ 3,8,11;\ 4,8,12;\ 5,8,13;\ 6,8,14;\ 7,8,15;}$$
$$\mathbf{1,11,10;\ 2,14,12;\ 3,13,14;\ 4,9,13;\ 5,10,15;\ 6,15,9;\ 7,12,11;}$$
$$\mathbf{1,13,12;\ 2,15,13;\ 3,10,9;\ 4,11,15;\ 5,14,11;\ 6,12,10;\ 7,9,14;}$$
$$\mathbf{1,14,15;\ 2,9,11;\ 3,15,12;\ 4,10,14;\ 5,12,9;\ 6,11,13;\ 7,13,10}$$
$$\sigma_{ij}^{\ k}=1;$$

при обратной последовательности $\sigma_{ij}^{\ k}=-1;$

для других наборов чисел $\sigma_{ij}^{\ k}=0.$

При этом тензор структурных констант $\sigma^{ijk}=\pm 1$ – является совершенно антисимметричным единичным *15*-тензором, в котором компоненты меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ±*1*. Из анти симметричности следует, что все компоненты тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля лишь те, у которых все три индекса различны.

Отметим, что подстановки на множестве индексов *1,2,…,15* дают взаимно однозначное отображение векторного произведения двух векторов на себя, причем имеет место следующая таблица системы подстановки индексов:

1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***
2	***4***	***6***	***5***	***7***	***1***	***3***	***8***	***10***	***12***	***14***	***13***	***15***	***9***	***11***
3	***6***	***5***	***1***	***2***	***7***	***4***	***8***	***11***	***14***	***13***	***9***	***10***	***15***	***12***
4	***5***	***1***	***7***	***3***	***2***	***6***	***8***	***12***	***13***	***9***	***15***	***11***	***10***	***14***
5	***7***	***2***	***3***	***6***	***4***	***1***	***8***	***13***	***15***	***10***	***11***	***14***	***12***	***9***
6	***1***	***7***	***2***	***4***	***3***	***5***	***8***	***14***	***9***	***15***	***10***	***12***	***11***	***13***
7	***3***	***4***	***6***	***1***	***5***	***2***	***8***	***15***	***11***	***12***	***14***	***9***	***13***	***10***

Удивительны свойства (суммы операторов момента импульса) тензора структурных констант:

- во-первых, суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце равны нулю;
- во-вторых, число разных знаков в каждой строке и в каждом столбце одинаково;
- матрицы нечётных степеней антисимметричны, а четных – симметричны ;
- размерность матрицы (как совершенного числа) определяется числом 2^n-1;
- все нечетные степени матрицы пропорциональны L, а четные (кроме 0) – L^2;
- целые степени матрицы определяются двумя числами;
- матрицы L определяют векторное произведение двух векторов;
- определитель матрицы L и её степеней равен нулю.

Приведем ещё несколько примеров.

$$L=L^3/7=L^5/7^2=\ldots \begin{Vmatrix} 0 & -i & i & -i & i & i & -i \\ i & 0 & -i & -i & -i & i & i \\ -i & i & 0 & -i & i & -i & i \\ i & i & i & 0 & -i & -i & -i \\ -i & i & -i & i & 0 & i & -i \\ -i & -i & i & i & -i & 0 & i \\ i & -i & -i & i & i & -i & 0 \end{Vmatrix} \qquad -L^2=-L^4/7=-L^6/7^2\ldots \begin{Vmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{Vmatrix}$$

$$p=p^3/7^2=p^5/7^4=\ldots \begin{Vmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{Vmatrix} \qquad -p^2/7=-p^4/7^3=-L^6/7^5=\ldots \begin{Vmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{Vmatrix}$$

$$-(L/7)p=-(L^3/7^4)p^3=\ldots \begin{Vmatrix} 0 & -i & i & -i & i & i & -i \\ i & 0 & -i & -i & -i & i & i \\ -i & i & 0 & -i & i & -i & i \\ i & i & i & 0 & -i & -i & -i \\ -i & i & -i & i & 0 & i & -i \\ -i & -i & i & i & -i & 0 & i \\ i & -i & -i & i & i & -i & 0 \end{Vmatrix} \qquad -(L^2/7^2)p^2=-(L^4/7^5)p^4=\ldots \begin{Vmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{array}{r}\text{(квадрат модуля)}\\ -(p+iL)(p-iL)/(7+1)=\end{array} \begin{Vmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{Vmatrix} \qquad \begin{array}{r}\text{(теорема Пифагора)}\\ (p^2+L^2)/(-7-1)=\end{array} \begin{Vmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{Vmatrix}$$

определители
$/L/=0, \ldots /L^n/=0,$

определители
$/p/=0, \ldots /p^n/=0,$

Мы построили 7-мерную матричную аналогию комплексных чисел.

Скалярное и векторное произведения двух векторов в координатной форме записи представлены в таблице на альбомном листе, приведенном ниже.

Эта таблица фиксирует векторное произведение двух векторов и покоординатную запись пятнадцати операторов момента импульса

L_i *(i=1, 2,…, 15)*, как показано ниже.

$$\boldsymbol{(ab)}= -a_1b_1 \quad -a_2b_2 \quad -a_3b_3 \quad -a_4b_4 \quad -a_5b_5 \quad -a_6b_6 \quad -a_7b_7 \quad -a_8b_8 \quad -a_9b_9 \quad -a_{10}b_{10} \quad -a_{11}b_{11} \quad -a_{12}b_{12} \quad -a_{13}b_{13} \quad -a_{14}b_{14} \quad -a_{15}b_{15}$$

$$\boldsymbol{[ab]}=$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
-a_2b_3 & +a_3b_2 & -a_4b_5 & +a_5b_4 & -a_7b_6 & +a_6b_7 & -a_8b_9 & +a_9b_8 & -a_{11}b_{10} & +a_{10}b_{11} & -a_{13}b_{12} & +a_{12}b_{13} & -a_{14}b_{15} & +a_{15}b_{14}, \\
-a_4b_6 & +a_6b_4 & -a_5b_7 & +a_7b_5 & -a_3b_1 & +a_1b_3 & -a_8b_{10} & +a_{10}b_8 & -a_{14}b_{12} & +a_{12}b_{14} & -a_{15}b_{13} & +a_{13}b_{15} & -a_9b_{11} & +a_{11}b_9, \\
-a_6b_5 & +a_5b_6 & -a_1b_2 & +a_2b_1 & -a_4b_7 & +a_7b_4 & -a_8b_{11} & +a_{11}b_8 & -a_{13}b_{14} & +a_{14}b_{13} & -a_{10}b_9 & +a_9b_{10} & -a_{15}b_{12} & +a_{12}b_{15}, \\
-a_5b_1 & +a_1b_5 & -a_7b_3 & +a_3b_7 & -a_6b_2 & +a_2b_6 & -a_8b_{12} & +a_{12}b_8 & -a_9b_{13} & +a_{13}b_9 & -a_{11}b_{15} & +a_{15}b_{11} & -a_{10}b_{14} & +a_{14}b_{10}, \\
-a_7b_2 & +a_2b_7 & -a_3b_6 & +a_6b_3 & -a_1b_4 & +a_4b_1 & -a_8b_{13} & +a_{13}b_8 & -a_{10}b_{15} & +a_{15}b_{10} & -a_{14}b_{11} & +a_{11}b_{14} & -a_{12}b_9 & +a_9b_{12}, \\
-a_1b_7 & +a_7b_1 & -a_2b_4 & +a_4b_2 & -a_5b_3 & +a_3b_5 & -a_8b_{14} & +a_{14}b_8 & -a_{15}b_9 & +a_9b_{15} & -a_{12}b_{10} & +a_{10}b_2 & -a_{11}b_{13} & +a_{13}b_{11}, \\
-a_3b_4 & +a_4b_3 & -a_6b_1 & +a_1b_6 & -a_2b_5 & +a_5b_2 & -a_8b_{15} & +a_{15}b_8 & -a_{12}b_{11} & +a_{11}b_{12} & -a_9b_{14} & +a_{14}b_9 & -a_{13}b_{10} & +a_{10}b_{13}, \\
-a_9b_1 & +a_1b_9 & -a_2b_{10} & +a_{10}b_2 & -a_{11}b_3 & +a_3b_{11} & -a_4b_{12} & +a_{12}b_4 & -a_{13}b_5 & +a_5b_{13} & -a_{14}b_6 & +a_6b_{14} & -a_{15}b_7 & +a_7b_{15}, \\
-a_{11}b_2 & +a_2b_{11} & -a_4b_{13} & +a_{13}b_4 & -a_{14}b_7 & +a_7b_{14} & -a_8b_1 & +a_1b_8 & -a_3b_{10} & +a_{10}b_3 & -a_{13}b_4 & +a_4b_{13} & -a_{14}b_7 & +a_7b_{14}, \\
-a_{14}b_4 & +a_4b_{14} & -a_5b_{15} & +a_{15}b_5 & -a_9b_3 & +a_3b_9 & -a_8b_2 & +a_2b_8 & -a_6b_{12} & +a_{12}b_6 & -a_{15}b_5 & +a_5b_{15} & -a_9b_3 & +a_3b_9, \\
-a_{13}b_6 & +a_6b_{13} & -a_1b_{10} & +a_{10}b_1 & -a_{15}b_4 & +a_4b_{15} & -a_8b_3 & +a_3b_8 & -a_5b_{14} & +a_{14}b_5 & -a_{10}b_1 & +a_1b_{10} & -a_{15}b_4 & +a_4b_{15}, \\
-a_9b_5 & +a_5b_9 & -a_7b_{11} & +a_{11}b_7 & -a_{10}b_6 & +a_6b_{10} & -a_8b_4 & +a_4b_8 & -a_1b_{13} & +a_{13}b_1 & -a_{11}b_7 & +a_7b_{11} & -a_{10}b_6 & +a_6b_{10}, \\
-a_{10}b_7 & +a_7b_{10} & -a_3b_{14} & +a_{14}b_3 & -a_{12}b_1 & +a_1b_{12} & -a_8b_5 & +a_5b_8 & -a_2b_{15} & +a_{15}b_2 & -a_{14}b_3 & +a_3b_{14} & -a_{12}b_1 & +a_1b_{12}, \\
-a_{15}b_1 & +a_1b_{15} & -a_2b_{12} & +a_{12}b_2 & -a_{11}b_5 & +a_5b_{11} & -a_8b_6 & +a_6b_8 & -a_7b_9 & +a_9b_7 & -a_{12}b_2 & +a_2b_{12} & -a_{11}b_5 & +a_5b_{11}, \\
-a_{12}b_3 & +a_3b_{12} & -a_6b_9 & +a_9b_6 & -a_{13}b_2 & +a_2b_{13} & -a_8b_7 & +a_7b_8 & -a_4b_{11} & +a_{11}b_4 & -a_9b_6 & +a_6b_9 & -a_{13}b_2 & +a_2b_{13}.
\end{array}$$

причем

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
-iL_1= & m[L_2L_3] & + & [L_4L_5] & + & [L_7L_6] & + & n[L_8L_9] & + & [L_{11}L_{10}] & + & [L_{13}L_{12}] & + & [L_{14}L_{15}], \\
-iL_2= & m[L_4L_6] & + & [L_5L_7] & + & [L_3L_1] & + & n[L_8L_{10}] & + & [L_{14}L_{12}] & + & [L_{15}L_{13}] & + & [L_9L_{11}], \\
-iL_3= & m[L_6L_5] & + & [L_1L_2] & + & [L_4L_7] & + & n[L_8L_{11}] & + & [L_{13}L_{14}] & + & [L_{10}L_9] & + & [L_{15}L_{12}], \\
-iL_4= & m[L_5L_1] & + & [L_7L_3] & + & [L_6L_2] & + & n[L_8L_{12}] & + & [L_9L_{13}] & + & [L_{11}L_{15}] & + & [L_{10}L_{14}], \\
-iL_5= & m[L_7L_2] & + & [L_3L_6] & + & [L_1L_4] & + & n[L_8L_{13}] & + & [L_{10}L_{15}] & + & [L_{14}L_{11}] & + & [L_{12}L_9], \\
-iL_6= & m[L_1L_7] & + & [L_2L_4] & + & [L_5L_3] & + & n[L_8L_{14}] & + & [L_{15}L_9] & + & [L_{12}L_{10}] & + & [L_{11}L_{13}], \\
-iL_7= & m[L_3L_4] & + & [L_6L_1] & + & [L_2L_5] & + & n[L_8L_{15}] & + & [L_{12}L_{11}] & + & [L_9L_{14}] & + & [L_{13}L_{10}], \\
-iL_8= & (k[L_9L_1] & + & [L_{10}L_2] & + & [L_{11}L_3] & + & [L_{12}L_4] & + & [L_{13}L_5] & + & [L_{14}L_6] & + & [L_{15}L_7]), \\
-iL_9= & m[L_3L_{10}] & + & [L_5L_{12}] & + & [L_6L_{15}] & + & n[L_1L_8] & + & [L_{11}L_2] & + & [L_{13}L_4] & + & [L_{14}L_7], \\
-iL_{10}= & m[L_6L_{12}] & + & [L_7L_{13}] & + & [L_1L_{11}] & + & n[L_2L_8] & + & [L_{14}L_4] & + & [L_{15}L_5] & + & [L_9L_3], \\
-iL_{11}= & m[L_5L_{14}] & + & [L_2L_9] & + & [L_7L_{12}] & + & n[L_3L_8] & + & [L_{13}L_6] & + & [L_{10}L_1] & + & [L_{15}L_4], \\
-iL_{12}= & m[L_1L_{13}] & + & [L_3L_{15}] & + & [L_2L_{14}] & + & n[L_4L_8] & + & [L_9L_5] & + & [L_{11}L_7] & + & [L_{10}L_6], \\
-iL_{13}= & m[L_2L_{15}] & + & [L_6L_{11}] & + & [L_4L_9] & + & n[L_5L_8] & + & [L_{10}L_7] & + & [L_{14}L_3] & + & [L_{12}L_1], \\
-iL_{14}= & m[L_7L_9] & + & [L_4L_{10}] & + & [L_3L_{13}] & + & n[L_6L_8] & + & [L_{15}L_1] & + & [L_{12}L_2] & + & [L_{11}L_5], \\
-iL_{15}= & m[L_4L_{11}] & + & [L_1L_{14}] & + & [L_5L_{10}] & + & n[L_7L_8] & + & [L_{12}L_3] & + & [L_9L_6] & + & [L_{13}L_2],
\end{array}$$

где L_i – 15-ть антисимметричных 15-ти мерных матриц операторов момента импульса,

$$[L_i L_j]=L_i L_j- L_j L_i$$

- коммутаторы, причём

$$m=3/25,\ n=11/3,\ k=1/11.$$

$$L=L_1+ L_2+ \dots +L_{15},$$

и $$L^2= L_1^2+ L_2^2+\dots+L_{15}^2=14I.$$

Трехмерное и семимерное векторные исчисления являются частным случаем Пятнадцатимерной векторной алгебры. Скалярное произведение двух векторов определяется скаляром:

$$(\boldsymbol{ab})=(a_i\boldsymbol{e_i}b_k\boldsymbol{e_k})=a_ib_k(\boldsymbol{e_i}\boldsymbol{e_k})=g_{ik}a_ib_k,$$

где g_{ik}-метрический 15-тензор, равный единичной матрице.

Очевидно, что свойства Пятнадцатимерной векторной алгебры определяются векторным произведением двух векторов, которое повторяет свойства определителей т.е.:

1. векторное произведение двух векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель;
2. векторное произведение двух векторов изменяет знак при перестановке векторов;
3. векторное произведение двух векторов дистрибутивно;

$$[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]=[\boldsymbol{ab}]+[\boldsymbol{ac}]$$

4. если два вектора в векторном произведении компланарны, то это произведение равно нулю и т. д.

Модулю векторного произведения двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ можно сопоставить скаляр, равный площади построенного на них параллелограмма

$$[\boldsymbol{ab}]=ab\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

Приведем несколько примеров.

$-iL=L^3/i5=L^5/i5^2=\dots$

0	-i	i	-i	i	i	-i	-i	i	i	-i	i	-i	-i	i
i	0	-i	-i	-i	i	i	-i	-i	i	i	i	i	-i	-i
-i	i	0	-i	i	-i	i	-i	i	-i	i	i	-i	i	-i
i	i	i	0	-i	-i	-i	-i	-i	-i	-i	i	i	i	i
-i	i	-i	i	0	i	-i	-i	i	-i	i	-i	i	-i	i
-i	-i	i	i	-i	0	i	-i	i	i	-i	-i	i	i	-i
i	-i	-i	i	i	-i	0	-i	-i	i	i	-i	-i	i	i
i	i	i	i	i	i	i	0	-i	-i	-i	-i	-i	-i	-i
-i	i	-i	i	-i	-i	i	i	0	i	-i	i	-i	-i	i
-i	-i	i	i	i	-i	-i	i	-i	0	i	i	i	-i	-i
i	-i	-i	i	-i	i	-i	i	i	-i	0	i	-i	i	-i
-i	-i	-i	-i	i	i	i	i	-i	-i	-i	0	i	i	i
i	-i	i	-i	-i	-i	i	i	i	-i	i	-i	0	-i	i
i	i	-i	-i	i	-i	-i	i	i	i	-i	-i	i	0	-i
-i	i	i	-i	-i	i	-i	i	-i	i	i	-i	-i	i	0

	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1
$-L^2=-L^4/15=L^6/15^2=\ldots$	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14

При этом

$$\boldsymbol{p=p^3/15^2=p^5/15^4=\ldots -p^2/15=-p^4/15^3=L^6/15^5=\ldots -(p+iL)(p-iL)/16=-(p^2+L^2)/16=\ldots -(L^2/15^2)p^2=-/15^5)p^4=-L^2}$$

$$\boldsymbol{-(L/15)p=-L^3/(15^4)p=-L^5/(15^7)p^5 \ldots =L \qquad /L/=0\ldots /L^n/=0, \qquad /p/=0, \ \ldots\ /p^n/=0.}$$

Очевидно, что без учёта коэффициентов, чётные и нечетные степени матрицы суммы операторов момента импульса совпадают и образуют две числовые величины аналогичные единицам **комплексных чисел**, при этом числа приобретают 2^n-1 -мерный векторный характер среди, которых выделяется четыре класса вычетов, определяемых степенями мнимой единицы. Особо отметим, что любое нарушение суммы операторов момента импульса ведет к нарушению симметрии всей совокупности чисел.

У 15-мерной алгебры коммутирующих между собой операторов нет, и под алгебры Картана отсутствуют. Её ранг равен единице и, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми операторами. Он соответствует скалярному квадрату оператора момента импульса

$$L^2=L_1^2+L_2^2+\ldots.+L_{15}^2=14I,$$

где I - единичная матрица. Скалярный квадрат оператора момента импульса, следовательно, сохраняется, что соответствует закону сохранения момента импульса. Матрица, составляющая сумму операторов момента импульса, антисимметрична, причём этот оператор коммутативен с каждым из операторов L_i

$$L^2\, L_i^{\,2}\, _{-}L_i\, L^2=0 \qquad (i=1,2,\ldots,15),$$

что также характеризует закон сохранения момента импульса.

Произведения трех векторов

Все произведения трех векторов можно получить умножением произведения двух векторов на третий вектор. В соответствии с этим возможны следующие типы произведений:

1. ***a(bc)*-** простейшее произведение трех векторов;
2. ***(a[bc])* -** смешанное произведение трех векторов;
3. ***[a[bc]]* -** двойное векторное произведение трех векторов.

Простейшее произведение трех векторов ***a(bc)*** компланарно с третьим вектором т. е. $\boldsymbol{a(bc)\neq(ab)c}$,

так что векторные n-мерные $(n=1,3,7,15,\ldots)$ алгебры не ассоциативны.

Смешанное произведение

$$\boldsymbol{(a[bc])=(abc)}$$

получается скалярным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате получаем антисимметричную по перестановке любой пары векторов скалярную функцию:

$$\boldsymbol{(abc)}=((a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+a_n\boldsymbol{e}_n)\cdot\sigma_{ij}^{\ k}b_ic_j\boldsymbol{e}_k);$$

т. е. смешанное произведение трех векторов в одномерном случае равно нулю, в трех мерном случае – определяется одним определителем третьего порядка, в семи мерном – суммой семи определителей, а в Пятнадцатимерном – суммой тридцати пяти определителей третьего порядка причем

- в ***трехмерном*** случае

$$\boldsymbol{(abc)} = \lvert 1,2,3\rvert,$$

- в ***семимерном*** случае

$$\boldsymbol{(abc)} = \lvert 1,2,3\rvert + \lvert 2,4,6\rvert + \lvert 3,6,5\rvert + \lvert 4,5,1\rvert + \lvert 5,7,2\rvert + \lvert 6,1,7\rvert + \lvert 7,3,4\rvert,$$

- в ***пятнадцатимерном*** случае

$\boldsymbol{(abc)}=$

=	$\lvert 1,2,3\rvert$	+	$\lvert 2,8,10\rvert$	+	$\lvert 3,10,9\rvert$	+	$\lvert 8,9,1\rvert$	+	$\lvert 9,11,2\rvert$	+	$\lvert 10,1,11\rvert$	+	$\lvert 11,3,8\rvert$
+	$\lvert 2,4,6\rvert$	+	$\lvert 4,8,12\rvert$	+	$\lvert 6,12,10\rvert$	+	$\lvert 8,10,2\rvert$	+	$\lvert 10,14,4\rvert$	+	$\lvert 12,2,14\rvert$	+	$\lvert 14,6,8\rvert$
+	$\lvert 3,6,5\rvert$	+	$\lvert 6,8,14\rvert$	+	$\lvert 5,14,11\rvert$	+	$\lvert 8,11,3\rvert$	+	$\lvert 11,13,6\rvert$	+	$\lvert 14,3,13\rvert$	+	$\lvert 13,5,8\rvert$
+	$\lvert 4,5,1\rvert$	+	$\lvert 5,8,13\rvert$	+	$\lvert 1,13,12\rvert$	+	$\lvert 8,12,4\rvert$	+	$\lvert 12,9,5\rvert$	+	$\lvert 13,4,9\rvert$	+	$\lvert 9,1,8\rvert$
+	$\lvert 5,7,2\rvert$	+	$\lvert 7,8,15\rvert$	+	$\lvert 2,15,13\rvert$	+	$\lvert 8,13,5\rvert$	+	$\lvert 13,10,7\rvert$	+	$\lvert 15,5,10\rvert$	+	$\lvert 10,2,8\rvert$
+	$\lvert 6,1,7\rvert$	+	$\lvert 1,8,9\rvert$	+	$\lvert 7,9,14\rvert$	+	$\lvert 8,14,6\rvert$	+	$\lvert 14,15,1\rvert$	+	$\lvert 9,6,15\rvert$	+	$\lvert 15,7,8\rvert$
+	$\lvert 7,3,4\rvert$	+	$\lvert 3,8,11\rvert$	+	$\lvert 4,11,15\rvert$	+	$\lvert 8,15,7\rvert$	+	$\lvert 15,12,3\rvert$	+	$\lvert 11,7,12\rvert$	+	$\lvert 12,4,8\rvert$

или в сокращенной записи:

$$\begin{array}{rlllll}
\boldsymbol{(abc)} = & \lvert 1,2,3\rvert & +3\cdot\lvert 1,8,9\rvert & +\lvert 1,11,10\rvert & +\lvert 1,13,12\rvert & +\lvert 1,14,15\rvert \\
& +\lvert 2,4,6\rvert & +3\cdot\lvert 2,8,10\rvert & +\lvert 2,14,12\rvert & +\lvert 2,15,13\rvert & +\lvert 2,9,11\rvert \\
& +\lvert 3,6,5\rvert & +3\cdot\lvert 3,8,11\rvert & +\lvert 3,13,14\rvert & +\lvert 3,10,9\rvert & +\lvert 3,15,12\rvert \\
& +\lvert 4,5,1\rvert & +3\cdot\lvert 4,8,12\rvert & +\lvert 4,9,13\rvert & +\lvert 4,11,15\rvert & +\lvert 4,10,14\rvert \\
& +\lvert 5,7,2\rvert & +3\cdot\lvert 5,8,13\rvert & +\lvert 5,10,15\rvert & +\lvert 5,14,11\rvert & +\lvert 5,12,9\rvert \\
& +\lvert 6,1,7\rvert & +3\cdot\lvert 6,8,14\rvert & +\lvert 6,15,9\rvert & +\lvert 6,12,10\rvert & +\lvert 6,11,13\rvert \\
& +\lvert 7,3,4\rvert & +3\cdot\lvert 7,8,15\rvert & +\lvert 7,12,11\rvert & +\lvert 7,9,14\rvert & +\lvert 7,13,10\rvert
\end{array}$$

В этой таблице символом $\lvert i,j,k\rvert$ обозначен определитель вида:

$$\lvert i,j,k\rvert=\begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix}.$$

Из свойств определителей следует:

- смешанное произведение трех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель,

$$\boldsymbol{(\alpha abc)=\alpha(abc)};$$

- смешанное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары его векторов;

- циклическая подстановка векторов не изменяют смешанного произведения трех векторов;

- смешанное произведение трех векторов дистрибутивно, т. е.

$$(\boldsymbol{ab}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}))=(\boldsymbol{abc})+(\boldsymbol{abd});$$

- если два вектора в смешанном произведении трех векторов компланарны, то это произведение равно нулю, в частности, если два вектора в смешанном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль, так что векторное произведение двух векторов ортогонально каждому из входящих в него векторов для всех рассмотренных алгебр

$$([\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{a})=([\boldsymbol{ba}]\boldsymbol{b})=0$$

и т. д.

Модулю смешанного произведения ***(abc)*** трех векторов ***a,b*** и ***c*** можно сопоставить скаляр, равный объему построенного на них параллелепипеда.

Вместе с тем Пятнадцатимерное пространство можно рассматривать как совокупность 35-ти трехмерных пространств. При этом векторное произведение двух векторов в не симметричной форме располагает коэффициентом 3 при 8-ой координате. Запись скалярного произведения двух векторов остается в прежнем виде так, что смешанное произведение трех векторов представляется аналогично формуле векторного произведения двух векторов.

Оно содержит ($49=28+3\cdot7$) определителей третьего порядка, в случае представления 15-мерного пространства трёх мерными пространствами, что равносильно использованию тридцати пяти не повторяющихся определителей.

Двойное векторное произведение ***[a[bc]]*** трех векторов ***a,b*** и ***c*** получается векторным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате имеем вектор такой, что

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]=[\boldsymbol{ad}]=\boldsymbol{f}=f_1\boldsymbol{e}_1+f_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+f_{15}\boldsymbol{e}_{15}.$$

В координатной форме записи для двойного векторного произведения имеет место соотношение:

- в ***трехмерном*** случае

$$f_1=a_2d_3-d_2a_3=a_2(b_1c_2-b_2c_1);$$
$$f_2=a_3d_1-d_3a_1=a_3(b_2c_3-b_3c_2);$$
$$f_3=a_1d_2-d_1a_2=a_1(b_3c_1-b_1c_3);$$

т.е. $$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ca})-(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c};$$

- в ***семимерном*** случае для первой координаты

$$f_1=a_2d_3-a_3d_2+a_4d_5-a_5d_4+a_7d_6-a_6d_7=$$
$$=a_2(b_6c_5-b_5c_6+b_1c_2-b_2c_1+b_4c_7-b_7c_4)-a_3(b_4c_6-b_6c_4+b_5c_7-b_7c_5+b_3c_1-b_1c_3)+$$
$$+a_4(b_7c_2-b_2c_7+b_3c_6-b_6c_3+b_1c_4-b_4c_1)-a_5(b_5c_1-b_1c_5+b_7c_3-b_2c_6+b_6c_2-b_2c_6)+$$
$$+a_7(b_1c_7-b_7c_1+b_2c_4-b_4c_2+b_5c_3-b_3c_5)-a_6(b_3c_4-b_4c_3+b_6c_1-b_1c_6+b_2c_5-b_5c_2),$$

т.е. $f_1=b_1(\boldsymbol{ca})-(\boldsymbol{ab})c_1+[\boldsymbol{abc}]_1$ где $[\boldsymbol{abc}]_1=|2,4,7|+|3,7,5|+|4,3,6|+|6,5,2|$.

Аналогично для других координат

$$f_2=b_2(\boldsymbol{ca})-(\boldsymbol{ab})c_2+[\boldsymbol{abc}]_2,\qquad [\boldsymbol{abc}]_2=|4,5,3|+|6,3,7|+|5,6,1|+|1,7,4|,$$
$$f_3=b_3(\boldsymbol{ca})-(\boldsymbol{ab})c_3+[\boldsymbol{abc}]_3,\qquad [\boldsymbol{abc}]_3=|6,1,4|+|5,4,2|+|1,5,7|+|7,2,6|,$$
$$f_4=b_4(\boldsymbol{ca})-(\boldsymbol{ab})c_4+[\boldsymbol{abc}]_4,\qquad [\boldsymbol{abc}]_4=|5,7,6|+|1,6,3|+|7,1,2|+|2,3,5|,$$
$$f_5=b_5(\boldsymbol{ca})-(\boldsymbol{ab})c_5+[\boldsymbol{abc}]_5,\qquad [\boldsymbol{abc}]_5=|7,3,1|+|2,1,6|+|3,2,4|+|4,6,7|,$$
$$f_6=b_6(\boldsymbol{ca})-(\boldsymbol{ab})c_6+[\boldsymbol{abc}]_6,\qquad [\boldsymbol{abc}]_6=|1,2,5|+|7,5,4|+|2,7,3|+|3,4,1|,$$
$$f_7=b_7(\boldsymbol{ca})-(\boldsymbol{ab})c_7+[\boldsymbol{abc}]_7,\qquad [\boldsymbol{abc}]_7=|3,6,2|+|4,2,1|+|6,4,5|+|5,1,3|.$$

Таким образом, в семимерном случае, окончательно напишем

$$[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc],$$

где вектор $[abc]$ определяется суммой 28-ми определителей третьего порядка, причем имеет место соотношение Якоби в виде:

$$[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc],$$

т.е. $$[a[bc]]+[b[ca]]+[c[ab]]=3[abc].$$

Следует отметить, что подстановки

1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	5	7	1	3
3	6	5	1	2	7	4
4	5	1	7	3	2	6
5	7	2	3	6	4	1
6	1	7	2	4	3	5
7	3	4	6	1	5	2

на множестве индексов $(1,2,3,4,5,6,7)$ дают взаимно однозначное отображение векторного произведения трех векторов на себя. Аналогичным образом:

$$[[ab]c]=b(ac)-(cb)a+[cba]=b(ac)-(cb)a-3[abc],$$

Назовем анти симметричную по перестановке любой пары векторов функцию трех векторов $[abc]$ векторным произведением трех векторов при этом двойное векторное произведение трех векторов сводится к линейной комбинации двух простейших и векторного произведения трех векторов. Из свойств определителей следует, что

- векторное произведение трех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т. е.

$$[\alpha abc]=[\alpha abc];$$

- векторное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;
- векторное произведение трех векторов дистрибутивно т.е.

$$[ab(c+d)]=[abc]+[abd];$$

- если два вектора в векторном произведении трех векторов компланарны, то это произведение равно нулю, в частности, если два вектора в векторном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль и т. д..

Векторным произведением $[abc]$ трех векторов a,b и c можно назвать вектор

$$[abc]=[a_i\boldsymbol{e}_i b_j\boldsymbol{e}_j c_k\boldsymbol{e}_k]=a_ib_jc_k[\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k]=\sigma_{ijk}{}^{k}a_ib_jc_k\boldsymbol{e}_k,$$

определяемый совершенно анти симметричным единичным 7-тензором третьего ранга σ^{ijk} компоненты, которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из анти симметрии следует, что все компоненты 7-тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля лишь те, у которых все три индекса различны. Вектор $[abc]$ в семимерном случае определяется суммой 28-ми определителей третьего порядка (по четыре в каждой координате), дополняющих совокупность из $(35=7+7\cdot 4)$ возможных комбинаций как число сочетаний $C_7^3=35$. Компоненты совершенно анти симметричного единичного 7-тензора третьего ранга σ^{ijk} не изменяются по отношению к вращению семимерной системы координат.

Соотношение Якоби в семимерной алгебре не выполняется, она не ассоциативна и не является алгеброй Ли. В [1] показано, что она удовлетворяет соотношению Мальцева.

В ***15-мерной*** алгебре скалярное произведение двух векторов определяется скаляром:

$$(\boldsymbol{ab})=(a_i\boldsymbol{e_i}b_k\boldsymbol{e_k})=a_ib_k(\boldsymbol{e_i}\boldsymbol{e_k})=g_{ik}a_ib_k,$$

где g_{ik}-метрический 15-тензор, равный единичной матрице. Согласно сказанному выше имеем:

[ab]	=	***|1, 2,***	***+3·***	***|2,***	+	***| 3,10,***	+	***| 9,11,***	+	***|10,***
	+	***|2, 4,***	***+3·***	***|4,***	+	|	+	***|10,14***	+	***|12,***
	+	***|3, 6,***	***+3·***	***|6,***	+	|	+	***|11,13***	+	***|14,***
	+	***|4, 5, 1***	***+3·***	***|5,***	+	|	+	***|12, 9,***	+	***|13, 4,***
	+	***|5, 7,***	***+3·***	***|7,***	+	|	+	***|13,10,***	+	***|15,***
	+	***| 6, 1,***	***+3·***	***| 1, 8,***	+	***| 7,***	+	***|14,15,***	+	***| 9,***
	+	***|7, 3,***	***+3·***	***|3,***	+	|	+	***|15,12,***	+	***|11,***

Для первой координаты f_1 двойного векторного произведения двух векторов получим таблицу приведенную, на альбомном листе. Здесь 6 коммутаторов имеют отрицательные знаки перед скобками. Величины вида a_i, b_j, c_k будем обозначать цифрами, например, так.

$$a_2 \cdot (b_6 \cdot c_5 - b_5 \cdot c_6) = 2,\ 6,\ 5.$$

Из таблицы следует, что:

2,6,5	***2,1,2***	***2,4,7***	***3·(2,8,11)***	***-2,13,14***	***2, 10,9***	***-2,15,12***
3,6,4	***3,7,5***	***3, 1,3***	***3·(3,10,8)***	***+3,12,14***	***+3,13,15***	***3,11,9***
4,7,2	***4,3,6***	***4, 1,4***	***3·(4,8,13)***	***-4,10,15***	***-4,14,11***	***4,12,9***
5,1,5	***5,3,7***	***5,2, 6***	***3·(5,12,8)***	***5,13,9***	***+5,15,11***	***+5,14,10***
6,4,3	***6,1, 6***	***6,5,2***	***3·(6,15,8)***	***+6,11,12***	***6,14,9***	***+6,10,13***
7,1,7	***7,2,4***	***7,5,3***	***3·(7,8,14)***	***7,15,9***	***-7,12,10***	***-7,11,13***
3·(8,11,2)	***3·(8,13,4)***	***3·(8,14,7)***	***(8,1,8)***	***3·(8,3,10)***	***3·(8,5,12)***	***3·(8,6,15)***
9,1,9	***9,2,10***	***9,3,11***	***(9,4,12)***	***9,5,13***	***9,6,14***	***9,7,15***
-10,6,13	***10,1,10***	***10,4,15***	***3·(10,8,3)***	***-10,14,5***	***10,9,2***	***10,12,7***
11,14,4	***-11,15,5***	***11,9,3***	***3·(11,2,8)***	***11,6,12***	***11,7,13***	***11,1,11***
12,7,10	***12,3,14***	***12,1,12***	***3·(12,8,5)***	***12,15,2***	***12,11,6***	***12,9,4***
13,9,5	***13,11,7***	***-13,10,6***	***3·(13,4,8)***	***13,1,13***	***-13,3,15***	***13,2,14***
14,12,3	***14,9,6***	***14,13,2***	***3·(14,7,8)***	***14,4,11***	***14,1,14***	***-14,5,10***
15,1,15	***15, 2,12***	***-15,5,11***	***3·(15,8,6)***	***15,9,7***	***15,10,4***	***-15,13,3***
т.е.[abc]₁=						
=|2,4,7|	***+3·|4,8,13|***	***+3·|8,11,2|***	***+|11,14,4|***	***+3·|14,7,8|***	***+|7,13,11|***	***+|13,2,14|***
+|3,7,5|	***+|5,13,9|***	***+|9,2,10|***	***+|10,4,15|***	***+3·|15,8,6|***	***-|6,11,12|***	***-|12,14,3|***
+|4,3,6|	***+3·|8,5,12|***	***+|11,9,3|***	***-|14,10,5|***	***+|7,15,9|***	***-|13,6,10|***	***+|2,12,15|***
+|6,5,2|	***+|12,9,4|***	***+3·|3,10,8|***	***-|5,15,11|***	***+|9,6,14|***	***+|10,12,7|***	***-|15,3,13|***

$$
\begin{array}{llllllll}
f_1= & ((a_2d_3-a_3d_2) & +(a_4d_5-a_5d_4) & +(a_7d_6-a_6d_7) & +3(a_8d_9-a_9d_8) & +(a_{11}d_{10}-a_{10}d_{11}) & +(a_{13}d_{12}-a_{12}d_{13}) & +(a_{14}d_{15}-a_{15}d_{14}))= \\
 & & & & & & & \\
+a_2\cdot & ((b_6c_5-b_5c_6) & +(b_1c_2-b_2c_1) & +(b_4c_7-b_7c_4) & +3(b_8c_{11}-b_{11}c_8) & -(b_{13}c_{14}-b_{14}c_{13}) & +(b_{10}c_9-b_9c_{10}) & -(b_{15}c_{12}-b_{12}c_{15})) \\
-a_3\cdot & ((b_4c_6-b_6c_4) & +(b_5c_7-b_7c_5) & +(b_3c_1-b_1c_3) & +3(b_8c_{10}-b_{10}c_8) & +(b_{14}c_{12}-b_{12}c_{14}) & +(b_{15}c_{13}-b_{13}c_{15}) & +(b_9c_{11}-b_{11}c_9)) \\
+a_4\cdot & ((b_7c_2-b_2c_7) & +(b_3c_6-b_6c_3) & +(b_1c_4-b_4c_1) & +3(b_8c_{13}-b_{13}c_8) & -(b_{10}c_{15}-b_{15}c_{10}) & -(b_{14}c_{11}-b_{11}c_{14}) & +(b_{12}c_9-b_9c_{12})) \\
-a_5\cdot & ((b_5c_1-b_1c_5) & +(b_7c_3-b_3c_7) & +(b_6c_2-b_2c_6) & +3(b_8c_{12}-b_{12}c_8) & +(b_9c_{13}-b_{13}c_9) & +(b_{11}c_{15}-b_{15}c_{11}) & +(b_{10}c_{14}-b_{14}c_{10})) \\
+a_7\cdot & ((b_1c_7-b_7c_1) & +(b_2c_4-b_4c_2) & +(b_5c_3-b_3c_5) & +3(b_8c_{14}-b_{14}c_8) & +(b_{15}c_9-b_9c_{15}) & -(b_{12}c_{10}-b_{10}c_{12}) & -(b_{11}c_{13}-b_{13}c_{11})) \\
-a_6\cdot & ((b_3c_4-b_4c_3) & +(b_6c_1-b_1c_6) & +(b_2c_5-b_5c_2) & +3(b_8c_{15}-b_{15}c_8) & +(b_{12}c_{11}-b_{11}c_{12}) & +(b_9c_{14}-b_{14}c_9) & +(b_{13}c_{10}-b_{10}c_{13})) \\
+a_8\cdot & (3(b_{11}c_2-b_2c_{11}) & +3(b_{13}c_4-b_4c_{13}) & +3(b_{14}c_7-b_7c_{14}) & +(b_1c_8-b_8c_1) & +3(b_3c_{10}-b_{10}c_3) & +3(b_5c_{12}-b_{12}c_5) & +3(b_6c_{15}-b_{15}c_6)) \\
-a_9\cdot & ((b_9c_1-b_1c_9) & +(b_{10}c_2-b_2c_{10}) & +(b_{11}c_3-b_3c_{11}) & +(b_{12}c_4-b_4c_{12}) & +(b_{13}c_5-b_5c_{13}) & +(b_{14}c_6-b_6c_{14}) & +(b_{15}c_7-b_7c_{15})) \\
+a_{11}\cdot & ((b_{14}c_4-b_4c_{14}) & +(b_{15}c_5-b_5c_{15}) & +(b_9c_3-b_3c_9) & +3(b_3c_8-b_8c_3) & +(b_6c_{12}-b_{12}c_6) & +(b_7c_{13}-b_{13}c_7) & +(b_1c_{11}-b_{11}c_1)) \\
-a_{10}\cdot & ((b_{13}c_6-b_6c_{13}) & +(b_{10}c_1-b_1c_{10}) & +(b_{15}c_4-b_4c_{15}) & +3(b_2c_8-b_8c_2) & +(b_5c_{14}-b_{14}c_5) & +(b_2c_9-b_9c_2) & +(b_7c_{12}-b_{12}c_7)) \\
+a_{13}\cdot & ((b_9c_5-b_5c_9) & +(b_{11}c_7-b_7c_{11}) & +(b_{10}c_6-b_6c_{10}) & +3(b_5c_8-b_8c_5) & +(b_1c_{13}-b_{13}c_1) & +(b_3c_{15}-b_{15}c_3) & +(b_2c_{14}-b_{14}c_2)) \\
-a_{12}\cdot & ((b_{10}c_7-b_7c_{10}) & +(b_{14}c_3-b_3c_{14}) & +(b_{12}c_1-b_1c_{12}) & +3(b_4c_8-b_8c_4) & +(b_2c_{15}-b_{15}c_2) & +(b_6c_{11}-b_{11}c_6) & +(b_4c_9-b_9c_4)) \\
+a_{14}\cdot & ((b_{12}c_3-b_3c_{12}) & +(b_9c_6-b_6c_9) & +(b_{13}c_2-b_2c_{13}) & +3(b_7c_8-b_8c_7) & +(b_4c_{11}-b_{11}c_4) & +(b_1c_{14}-b_{14}c_1) & -(b_5c_{10}-b_{10}c_5)) \\
-a_{15}\cdot & ((b_{15}c_1-b_1c_{15}) & +(b_{12}c_2-b_2c_{12}) & +(b_{11}c_5-b_5c_{11}) & +3(b_6c_8-b_8c_6) & +(b_7c_9-b_9c_7) & +(b_4c_{10}-b_{10}c_4) & +(b_3c_{13}-b_{13}c_3))
\end{array}
$$

или $f_1=b_1(ca)-(ab)c_1+[abc]_1$.

Аналогично для остальных координат (без учета коэффициентов пропорциональности и знаков сложения определителей):

$$f_1=b_1(ca)-(ab)c_1+[abc]_1$$

$[abc]_1$						
$\lvert 2,4,7\rvert$	$\lvert 8,11,2\rvert$	$\lvert 8,13,4\rvert$	$\lvert 8,14,7\rvert$	$\lvert 13,14,2\rvert$	$\lvert 14,11,4\rvert$	$\lvert 11,13,7\rvert$
$\lvert 3,7,5\rvert$	$\lvert 9,2,10\rvert$	$\lvert 9,4,12\rvert$	$\lvert 9,7,15\rvert$	$\lvert 12,2,15\rvert$	$\lvert 15,4,10\rvert$	$\lvert 10,7,12\rvert$
$\lvert 4,3,6\rvert$	$\lvert 11,9,3\rvert$	$\lvert 13,9,5\rvert$	$\lvert 14,9,6\rvert$	$-\lvert 14,12,3\rvert$	$-\lvert 11,15,5\rvert$	$-\lvert 13,10,6\rvert$
$\lvert 6,5,2\rvert$	$\lvert 3,10,8\rvert$	$\lvert 5,12,8\rvert$	$\lvert 6,15,8\rvert$	$-\lvert 3,15,13\rvert$	$-\lvert 5,10,14\rvert$	$-\lvert 6,12,11\rvert$

$$f_2=b_2(ca)-(ab)c_2+[abc]_2$$

$[abc]_2$						
$\lvert 4,5,3\rvert$	$\lvert 8,14,\ 4\rvert$	$\lvert 8,15,5\rvert$	$\lvert 8,\ 9,\ 3\rvert$	$\lvert 15,9,\ 4\rvert$	$\lvert 9,\ 14,5\rvert$	$\lvert 14,15,3\rvert$
$\lvert 6,3,7\rvert$	$\lvert 10,4,12\rvert$	$\lvert 10,5,13\rvert$	$\lvert 10,3,11\rvert$	$\lvert 13,4,11\rvert$	$\lvert 11,5,12\rvert$	$\lvert 12,3,13\rvert$
$\lvert 5,6,1\rvert$	$\lvert 14,10,6\rvert$	$\lvert 15,10,7\rvert$	$\lvert 9,10,1\rvert$	$-\lvert 9,13,\ 6\rvert$	$-\lvert 14,11,7\rvert$	$-\lvert 15,12,1\rvert$
$\lvert 1,7,4\rvert$	$\lvert 6,12,8\rvert$	$\lvert 7,13,8\rvert$	$\lvert 1,11,8\rvert$	$-\lvert 6,11,15\rvert$	$-\lvert 7,12,\ 9\rvert$	$-\lvert 1,13,14\rvert$

$$f_3=b_3(ca)-(ab)c_3+[abc]_3$$

$[abc]_3$						
$\lvert 6,1,4\rvert$	$\lvert 8,13,\ 6\rvert$	$\lvert 8,10,1\rvert$	$\lvert 8,15,4\rvert$	$\lvert 10,15,6\rvert$	$\lvert 15,13,1\rvert$	$\lvert 13,10,4\rvert$
$\lvert 5,4,2\rvert$	$\lvert 11,6,14\rvert$	$\lvert 11,1,9\rvert$	$\lvert 11,4,12\rvert$	$\lvert 9,\ 6,12\rvert$	$\lvert 12,1,14\rvert$	$\lvert 14,\ 4,9\rvert$
$\lvert 1,5,7\rvert$	$\lvert 13,11,5\rvert$	$\lvert 10,11,2\rvert$	$\lvert 15,11,7\rvert$	$-\lvert 15,9,\ 5\rvert$	$-\lvert 13,12,2\rvert$	$-\lvert 10,14,7\rvert$
$\lvert 7,2,6\rvert$	$\lvert 5,\ 14,8\rvert$	$\lvert 2,\ 9,8\rvert$	$\lvert 7,12,\ 8\rvert$	$-\lvert 5,12,10\rvert$	$-\lvert 2,14,15\rvert$	$-\lvert 7,\ 9,13\rvert$

$$f_4=b_4(ca)-(ab)c_4+[abc]_4$$

$[abc]_4$						
$\lvert 5,7,6\rvert$	$\lvert 8,9,\ 5\rvert$	$\lvert 8,11,7\rvert$	$\lvert 8,10,6\rvert$	$\lvert 11,10,5\rvert$	$\lvert 10,\ 9,7\rvert$	$\lvert 9,11,\ 6\rvert$
$\lvert 1,6,3\rvert$	$\lvert 12,5,13\rvert$	$\lvert 12,7,15\rvert$	$\lvert 12,6,14\rvert$	$\lvert 15,5,14\rvert$	$\lvert 14,7,13\rvert$	$\lvert 13,6,15\rvert$
$\lvert 7,1,2\rvert$	$\lvert 9,12,\ 1\rvert$	$\lvert 11,12,3\rvert$	$\lvert 10,12,2\rvert$	$-\lvert 10,15,1\rvert$	$-\lvert 9,14,\ 3\rvert$	$-\lvert 11,13,2\rvert$
$\lvert 2,3,5\rvert$	$\lvert 1,13,\ 8\rvert$	$\lvert 3,\ 15,8\rvert$	$\lvert 2,\ 14,8\rvert$	$-\lvert 1,14,11\rvert$	$-\lvert 3,13,10\rvert$	$-\lvert 2,15,9\rvert$

$$f_5=b_5(ca)-(ab)c_5+[abc]_5$$

$[abc]_5$						
$\lvert 7,3,1\rvert$	$\lvert 8,10,\ 7\rvert$	$\lvert 8,14,3\rvert$	$\lvert 8,12,1\rvert$	$\lvert 14,12,7\rvert$	$\lvert 12,10,3\rvert$	$\lvert 10,14,1\rvert$
$\lvert 2,1,6\rvert$	$\lvert 13,7,15\rvert$	$\lvert 13,3,11\rvert$	$\lvert 13,1,\ 9\rvert$	$\lvert 11,7,\ 9\rvert$	$\lvert 9,\ 3,15\rvert$	$\lvert 15,1,11\rvert$
$\lvert 3,2,4\rvert$	$\lvert 10,13,2\rvert$	$\lvert 14,13,6\rvert$	$\lvert 12,13,4\rvert$	$-\lvert 12,11,2\rvert$	$-\lvert 10,\ 9,6\rvert$	$-\lvert 14,15,4\rvert$
$\lvert 4,6,7\rvert$	$\lvert 2,15,8\rvert$	$\lvert 6,\ 11,8\rvert$	$\lvert 4,\ 9,8\rvert$	$-\lvert 2,\ 9,14\rvert$	$-\lvert 6,15,12\rvert$	$-\lvert 4,11,10\rvert$

$$f_6=b_6(ca)-(ab)c_6+[abc]_6$$

$[abc]_6$						
$\lvert 1,2,5\rvert$	$\lvert 8,15,1\rvert$	$\lvert 8,12,\ 2\rvert$	$\lvert 8,11,\ 5\rvert$	$\lvert 12,11,1\rvert$	$\lvert 11,15,2\rvert$	$\lvert 15,12,5\rvert$
$\lvert 7,5,4\rvert$	$\lvert 14,1,\ 9\rvert$	$\lvert 14,2,10\rvert$	$\lvert 14,5,13\rvert$	$\lvert 10,1,13\rvert$	$\lvert 13,2,\ 9\rvert$	$\lvert 9,5,10\rvert$
$\lvert 2,7,3\rvert$	$\lvert 15,14,7\rvert$	$\lvert 12,14,4\rvert$	$\lvert 11,14,3\rvert$	$-\lvert 11,10,7\rvert$	$-\lvert 15,13,4\rvert$	$-\lvert 12,9,3\rvert$
$\lvert 3,4,1\rvert$	$\lvert 7,\ 9,\ 8\rvert$	$\lvert 4,10,\ 8\rvert$	$\lvert 3,\ 13,8\rvert$	$-\lvert 7,13,12\rvert$	$-\lvert 4,9,11\rvert$	$-\lvert 3,10,15\rvert$

$$f_7=b_7(ca)-(ab)c_7+[abc]_7$$

$[abc]_7$						
$\lvert 3,6,2\rvert$	$\lvert 8,12,3\rvert$	$\lvert 8,\ 9,\ 6\rvert$	$\lvert 8,13,2\rvert$	$\lvert 9,\ 13,3\rvert$	$\lvert 13,12,6\rvert$	$\lvert 12,9,\ 2\rvert$
$\lvert 4,2,1\rvert$	$\lvert 15,3,11\rvert$	$\lvert 15,6,14\rvert$	$\lvert 15,2,10\rvert$	$\lvert 14,3,10\rvert$	$\lvert 10,6,11\rvert$	$\lvert 11,2,14\rvert$
$\lvert 6,4,5\rvert$	$\lvert 12,15,4\rvert$	$\lvert 9,\ 15,1\rvert$	$\lvert 13,15,5\rvert$	$-\lvert 13,14,4\rvert$	$-\lvert 12,10,1\rvert$	$-\lvert 9,\ 11,5\rvert$
$\lvert 5,1,3\rvert$	$\lvert 4,\ 11,8\rvert$	$\lvert 1,14,\ 8\rvert$	$\lvert 5,10,8\rvert$	$-\lvert 4,10,\ 9\rvert$	$-\lvert 1,11,13\rvert$	$-\lvert 5,14,12\rvert$

$$f_8=b_8(ca)-(ab)c_8+[abc]_8$$

$[abc]_8$						
$\lvert 11,13,14\rvert$	$\lvert 14,15,9\rvert$	$\lvert 13,10,15\rvert$	$\lvert 9,11,10\rvert$	$\lvert 10,14,12\rvert$	$\lvert 15,12,11\rvert$	$\lvert 12,9,13\rvert$
$\lvert 3,14,5\rvert$	$\lvert 6,\ 9,7\rvert$	$\lvert 5,15,2\rvert$	$\lvert 1,10,3\rvert$	$\lvert 2,12,6\rvert$	$\lvert 7,11,4\rvert$	$\lvert 4,13,1\rvert$
$\lvert 13,3,6\rvert$	$\lvert 15,6,1\rvert$	$\lvert 10,5,7\rvert$	$\lvert 11,1,2\rvert$	$\lvert 14,2,4\rvert$	$\lvert 12,7,3\rvert$	$\lvert 9,4,5\rvert$
$\lvert 6,5,11\rvert$	$\lvert 1,7,14\rvert$	$\lvert 7,2,13\rvert$	$\lvert 2,\ 3,9\rvert$	$\lvert 4,6,10\rvert$	$\lvert 3,4,15\rvert$	$\lvert 5,1,12\rvert$

$f_9=b_9(ca)-(ab)c_9+[abc]_9$

$[abc]_9$						
$\vert 10,12,15\vert$	$\vert 8,10,11\vert$	$\vert 8,12,13\vert$	$\vert 8,15,14\vert$	$\vert 5,6,10\vert$	$\vert 6,3,12\vert$	$\vert 3,5,15\vert$
$\vert 11,15,13\vert$	$\vert 1,11,3\vert$	$\vert 1,13,5\vert$	$\vert 1,14,6\vert$	$\vert 4,10,7\vert$	$\vert 7,12,2\vert$	$\vert 2,15,4\vert$
$\vert 12,11,14\vert$	$-\vert 10,1,2\vert$	$-\vert 12,1,4\vert$	$-\vert 15,1,7\vert$	$-\vert 6,4,11\vert$	$-\vert 3,7,13\vert$	$-\vert 5,2,14\vert$
$\vert 14,13,10\vert$	$-\vert 2,3,8\vert$	$-\vert 4,5,8\vert$	$-\vert 7,6,8\vert$	$-\vert 11,7,5\vert$	$-\vert 13,2,6\vert$	$-\vert 14,4,3\vert$

$f_{10}=b_{10}(ca)-(ab)c_{10}+[abc]_{10}$

$[abc]_{10}$						
$\vert 12,13,11\vert$	$\vert 8,12,14\vert$	$\vert 8,13,15\vert$	$\vert 8,11,9\vert$	$\vert 7,1,12\vert$	$\vert 1,6,13\vert$	$\vert 6,7,11\vert$
$\vert 14,11,15\vert$	$\vert 2,14,6\vert$	$\vert 2,15,7\vert$	$\vert 2,9,1\vert$	$\vert 5,12,3\vert$	$\vert 3,13,4\vert$	$\vert 4,11,5\vert$
$\vert 13,14,9\vert$	$-\vert 12,2,4\vert$	$-\vert 13,2,5\vert$	$-\vert 11,2,3\vert$	$-\vert 1,5,14\vert$	$-\vert 6,3,15\vert$	$-\vert 7,4,9\vert$
$\vert 9,15,12\vert$	$-\vert 4,6,8\vert$	$-\vert 5,7,8\vert$	$-\vert 3,1,8\vert$	$-\vert 14,3,7\vert$	$-\vert 15,4,1\vert$	$-\vert 9,5,6\vert$

$f_{11}=b_{11}(ca)-(ab)c_{11}+[abc]_{11}$

$[abc]_{11}$						
$\vert 14,9,12\vert$	$\vert 8,14,13\vert$	$\vert 8,9,10\vert$	$\vert 8,12,15\vert$	$\vert 2,7,14\vert$	$\vert 7,5,9\vert$	$\vert 5,2,12\vert$
$\vert 13,12,10\vert$	$\vert 3,13,5\vert$	$\vert 3,10,2\vert$	$\vert 3,15,7\vert$	$\vert 1,14,4\vert$	$\vert 4,9,6\vert$	$\vert 6,12,1\vert$
$\vert 9,13,15\vert$	$-\vert 14,3,6\vert$	$-\vert 9,3,1\vert$	$-\vert 12,3,4\vert$	$-\vert 7,1,13\vert$	$-\vert 5,4,10\vert$	$-\vert 2,6,15\vert$
$\vert 15,10,14\vert$	$-\vert 6,5,8\vert$	$-\vert 1,2,8\vert$	$-\vert 4,7,8\vert$	$-\vert 13,4,2\vert$	$-\vert 10,6,7\vert$	$-\vert 15,1,5\vert$

$f_{12}=b_{12}(ca)-(ab)c_{12}+[abc]_{12}$

$[abc]_{12}$						
$\vert 13,15,14\vert$	$\vert 8,13,9\vert$	$\vert 8,15,11\vert$	$\vert 8,14,10\vert$	$\vert 3,2,13\vert$	$\vert 2,1,15\vert$	$\vert 1,3,14\vert$
$\vert 9,14,11\vert$	$\vert 4,9,1\vert$	$\vert 4,11,7\vert$	$\vert 4,10,6\vert$	$\vert 7,13,6\vert$	$\vert 6,15,5\vert$	$\vert 5,14,7\vert$
$\vert 15,9,10\vert$	$-\vert 13,4,5\vert$	$-\vert 15,4,3\vert$	$-\vert 14,4,2\vert$	$-\vert 2,7,9\vert$	$-\vert 1,6,11\vert$	$-\vert 3,5,10\vert$
$\vert 10,11,13\vert$	$-\vert 5,1,8\vert$	$-\vert 3,7,8\vert$	$-\vert 2,6,8\vert$	$-\vert 9,6,3\vert$	$-\vert 11,5,2\vert$	$-\vert 10,7,1\vert$

$f_{13}=b_{13}(ca)-(ab)c_{13}+[abc]_{13}$

$[abc]_{13}$						
$\vert 15,11,9\vert$	$\vert 8,15,10\vert$	$\vert 8,11,14\vert$	$\vert 8,9,12\vert$	$\vert 6,4,15\vert$	$\vert 4,2,11\vert$	$\vert 2,6,9\vert$
$\vert 10,9,14\vert$	$\vert 5,10,2\vert$	$\vert 5,14,3\vert$	$\vert 5,12,1\vert$	$\vert 3,15,1\vert$	$\vert 1,11,7\vert$	$\vert 7,9,3\vert$
$\vert 11,10,12\vert$	$-\vert 15,5,7\vert$	$-\vert 11,5,6\vert$	$-\vert 9,5,4\vert$	$-\vert 4,3,10\vert$	$-\vert 2,1,14\vert$	$-\vert 6,7,12\vert$
$\vert 12,14,15\vert$	$-\vert 7,2,8\vert$	$-\vert 6,3,8\vert$	$-\vert 4,1,8\vert$	$-\vert 10,1,6\vert$	$-\vert 14,7,4\vert$	$-\vert 12,3,2\vert$

$f_{14}=b_{14}(ca)-(ab)c_{14}+[abc]_{14}$

$[abc]_{14}$						
$\vert 9,10,13\vert$	$\vert 8,9,15\vert$	$\vert 8,10,12\vert$	$\vert 8,13,11\vert$	$\vert 4,3,9\vert$	$\vert 3,7,10\vert$	$\vert 7,4,13\vert$
$\vert 15,13,12\vert$	$\vert 6,15,7\vert$	$\vert 6,12,2\vert$	$\vert 6,11,5\vert$	$\vert 2,9,5\vert$	$\vert 5,10,1\vert$	$\vert 1,13,2\vert$
$\vert 10,15,11\vert$	$-\vert 9,6,1\vert$	$-\vert 10,6,4\vert$	$-\vert 13,6,3\vert$	$-\vert 3,2,15\vert$	$-\vert 7,5,12\vert$	$-\vert 4,1,11\vert$
$\vert 11,12,9\vert$	$-\vert 1,7,8\vert$	$-\vert 4,2,8\vert$	$-\vert 3,5,8\vert$	$-\vert 15,5,4\vert$	$-\vert 12,1,3\vert$	$-\vert 11,2,7\vert$

$f_{15}=b_{15}(ca)-(ab)c_{15}+[abc]_{15}$

$[abc]_{15}$						
$\vert 11,14,10\vert$	$\vert 8,11,12\vert$	$\vert 8,14,9\vert$	$\vert 8,10,13\vert$	$\vert 1,5,11\vert$	$\vert 5,4,14\vert$	$\vert 4,1,10\vert$
$\vert 12,10,9\vert$	$\vert 7,12,4\vert$	$\vert 7,9,6\vert$	$\vert 7,13,2\vert$	$\vert 6,11,2\vert$	$\vert 2,14,3\vert$	$\vert 3,10,6\vert$
$\vert 14,12,13\vert$	$-\vert 11,7,3\vert$	$-\vert 14,7,1\vert$	$-\vert 10,7,5\vert$	$-\vert 5,6,12\vert$	$-\vert 4,2,9\vert$	$-\vert 1,3,13\vert$
$\vert 13,9,11\vert$	$-\vert 3,4,8\vert$	$-\vert 1,6,8\vert$	$-\vert 5,2,8\vert$	$-\vert 12,2,1\vert$	$-\vert 9,3,5\vert$	$-\vert 13,6,4\vert$

Таким образом, окончательно напишем

$$[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc],$$

где каждая компонента пятнадцатимерного вектора векторного произведения трех векторов $[abc]_i$ определяется алгебраической суммой 28 определителей третьего порядка, так что этот вектор характеризуется (28·15=420) определителями третьего порядка, отличающимися друг от друга. С учетом 35 определителей, используемых для векторного произведения двух векторов, получаем 455 определителей третьего порядка, как полное число сочетаний

$$C_{15}^{3}=455.$$

Последняя таблица характеризуется высокой степенью симметрии. Достаточно сказать, что каждая i-тая координата входит в неё ровно 84 раза (по 6 раз в каждой координате f_i, $(j= 1,2,\ldots,15)$ кроме $i=j$, при этом очевидна симметрия в построении семи совокупностей из четырех определителей в каждой координате. Из этой таблицы следует также наличие четырех типов совокупностей определителей, составляющих векторное произведение трех векторов.

Сумма четырех определителей третьего порядка может образовывать определитель четвёртого порядка

$$|i,j,k,h|=\begin{vmatrix} e_i & e_j & e_k & e_h \\ a_i & a_j & a_k & a_h \\ b_i & b_j & b_k & b_h \\ c_i & c_j & c_k & c_h \end{vmatrix}$$

тогда $[abc]$ определяется суммой семи определителей четвертого порядка

Это сильно упрощает запись векторного произведения трех векторов. Так, сумма 28 определителей третьего порядка

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
$+\lvert 2,4,7\rvert$	$+\lvert 4,5,3\rvert$	$+\lvert 6,1,4\rvert$	$+\lvert 5,7,6\rvert$	$+\lvert 7,3,1\rvert$	$+\lvert 1,2,5\rvert$	$+\lvert 3,6,2\rvert$
$+\lvert 3,7,5\rvert$	$+\lvert 6,3,7\rvert$	$+\lvert 5,4,2\rvert$	$+\lvert 1,6,3\rvert$	$+\lvert 2,1,6\rvert$	$+\lvert 7,5,4\rvert$	$+\lvert 4,2,1\rvert$
$+\lvert 4,3,6\rvert$	$+\lvert 5,6,1\rvert$	$+\lvert 1,5,7\rvert$	$+\lvert 7,1,2\rvert$	$+\lvert 3,2,4\rvert$	$+\lvert 2,7,3\rvert$	$+\lvert 6,4,5\rvert$
$+\lvert 6,5,2\rvert$	$+\lvert 1,7,4\rvert$	$+\lvert 7,2,6\rvert$	$+\lvert 2,3,5\rvert$	$+\lvert 4,6,7\rvert$	$+\lvert 3,4,1\rvert$	$+\lvert 5,1,3\rvert$

образует сумму семи определителей четвертого порядка

$$[abc]=|1,2,4,7|+|2,4,5,3|+|3,6,1,4|+|4,5,7,6|+|5,7,3,1|+|6,1,2,5|+|7,3,6,2|.$$

Тогда векторное произведение трех векторов образует сумма 105-ти определителей четвертого порядка:

$\lvert 1,2,4,7\rvert$	$\lvert 1,8,11,2\rvert$	$\lvert 1,8,13,4\rvert$	$\lvert 1,8,14,7\rvert$	$\lvert 1,13,14,2\rvert$	$\lvert 1,14,11,4\rvert$	$\lvert 1,11,13,7\rvert$
$\lvert 2,4,5,3\rvert$	$\lvert 2,8,14,4\rvert$	$\lvert 2,8,15,5\rvert$	$\lvert 2,8,\ 9,3\rvert$	$\lvert 2,15,\ 9,4\rvert$	$\lvert 2,\ 9,14,5\rvert$	$\lvert 2,14,15,3\rvert$
$\lvert 3,\ ,1,4\rvert$	$\lvert 3,8,13,6\rvert$	$\lvert 3,8,10,1\rvert$	$\lvert 3,8\ ,15,4\rvert$	$\lvert 3,10,15,6\rvert$	$\lvert 3,15,13,1\rvert$	$\lvert 3,13,10,4\rvert$
$\lvert 4,5,7,6\rvert$	$\lvert 4,8,\ 9,5\rvert$	$\lvert 4,8,\ 11,7\rvert$	$\lvert 4,8,10,\ 6\rvert$	$\lvert 4,11,10,5\rvert$	$\lvert 4,10,\ 9,7\rvert$	$\lvert 4,\ 9,11,6\rvert$
$\lvert 5,7,3,1\rvert$	$\lvert 5,8,10,7\rvert$	$\lvert 5,8,\ 14,3\rvert$	$\lvert 5,8,12,\ 1\rvert$	$\lvert 5,14,12,7\rvert$	$\lvert 5,12,10,3\rvert$	$\lvert 5,10,14,1\rvert$
$\lvert 6,1,2,5\rvert$	$\lvert 6,8,\ 15,1\rvert$	$\lvert 6,8,12,\ 2\rvert$	$\lvert 6,8,11,\ 5\rvert$	$\lvert 6,12,11,1\rvert$	$\lvert 6,11,15,2\rvert$	$\lvert 6,15,12,5\rvert$
$\lvert 7,3,6,2\rvert$	$\lvert 7,8,\ 12,\ 3\rvert$	$\lvert 7,8,\ \ 9,6\rvert$	$\lvert 7,8,\ 13,\ 2\rvert$	$\lvert 7,\ 9,13,\ 3\rvert$	$\lvert 7,13,12,6\rvert$	$\lvert 7,12,\ \ 9,2\rvert$
$\lvert 8,11,13,14\rvert$	$\lvert 8,14,15,9\rvert$	$\lvert 8,13,10,15\rvert$	$\lvert 8,9,11,10\rvert$	$\lvert 8,10,14,12\rvert$	$\lvert 8,15,12,11\rvert$	$\lvert 8,12,9,13\rvert$
$\lvert 9,\ 10,12,15\rvert$	$\lvert 9,\ 10,2,1\rvert$	$\lvert 9,\ 12,4,1\rvert$	$\lvert 9\ ,15,7,1\rvert$	$\lvert 9,\ 5,6,10\rvert$	$\lvert 9,\ 6,3,12\rvert$	$\lvert 9,\ 3,5,15\rvert$
$\lvert 10,12,13,11\rvert$	$\lvert 10,12,4,2\rvert$	$\lvert 10,13,5,2\rvert$	$\lvert 10,11,3,2\rvert$	$\lvert 10,7,1,12\rvert$	$\lvert 10,1,6,13\rvert$	$\lvert 10,6,7,11\rvert$
$\lvert 11,14,\ 9,12\rvert$	$\lvert 11,14,6,3\rvert$	$\lvert 11,\ 9,1,3\rvert$	$\lvert 11,12,4,3\rvert$	$\lvert 11,2,7,14\rvert$	$\lvert 11,7,5,\ 9\rvert$	$\lvert 11,5,2,12\rvert$
$\lvert 12,13,15,14\rvert$	$\lvert 12,13,5,4\rvert$	$\lvert 12,15,7,4\rvert$	$\lvert 12,14,6,4\rvert$	$\lvert 12,3,2,13\rvert$	$\lvert 12,2,1,15\rvert$	$\lvert 12,1,3,14\rvert$
$\lvert 13,15,11,\ 9\rvert$	$\lvert 13,15,7,5\rvert$	$\lvert 13,11,3,5\rvert$	$\lvert 13,\ 9,1,5\rvert$	$\lvert 13,6,4,15\rvert$	$\lvert 13,4,2,11\rvert$	$\lvert 13,2,6,\ 9\rvert$
$\lvert 14,9,\ 10,13\rvert$	$\lvert 14,\ 9,1,6\rvert$	$\lvert 14,10,2,6\rvert$	$\lvert 14,13,5,6\rvert$	$\lvert 14,4,\ 3,\ 9\rvert$	$\lvert 14,3,7,10\rvert$	$\lvert 14,7,4,13\rvert$
$\lvert 15,11,14,10\rvert$	$\lvert 15,11,3,7\rvert$	$\lvert 15,\ 14,6,7\rvert$	$\lvert 15,10,2,7\rvert$	$\lvert 15,1,5,11\rvert$	$\lvert 15,5,4,14\rvert$	$\lvert 15,4,1,10\rvert$

строго фиксируемого состава. Очевидно, что векторное произведение образуют семь определителей верхнего левого угла. Очевидна также симметрия построения таблицы:

– во-первых, по всем 28-ми рядам четко соблюдаются найденные выше подстановки индексов:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	6	5	7	1	3	8	10	12	14	13	15	9	11
3	6	5	1	2	7	4	8	11	14	13	9	10	15	12
4	5	1	7	3	2	6	8	12	13	9	15	11	10	14
5	7	2	3	6	4	1	8	13	15	10	11	14	12	9
6	1	7	2	4	3	5	8	14	9	15	10	12	11	13
7	3	4	6	1	5	2	8	15	11	12	14	9	13	10

- во-вторых, все 28 столбиков включают по 15 определителей с двумя семиэлементными и одной одноэлементной структурами;

- в-третьих, все координаты входят в таблицу ровно 28 раз. В результате векторное произведение трёх векторов определяется суммой 105-ти не повторяющихся определителей 4-го порядка и может рассматриваться как совокупность 420=28·15 трехмерных пространств.

Равенства

$$[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc]$$

или $$[a[bc]]+[b[ca]]+[c[ab]]=3[abc]$$

указывают на то, что 15-ти мерная алгебра не является алгеброй Ли. Можно показать, что она удовлетворяет соотношению Мальцева.

Из свойств определителей следует, что

- векторное произведение трех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т. е.

$$[\alpha abc]=[\alpha abc];$$

- векторное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;

- векторное произведение трех векторов дистрибутивно т.е.

$$[ab(c+d)]=[abc]+[abd];$$

- если два вектора в векторном произведении трех векторов компланарны, то это произведение равно нулю, в частности, если два вектора в векторном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль.

Векторным произведением ***[abc]*** трех векторов ***a,b*** и ***c*** можно назвать вектор $\boldsymbol{[abc]}=[a_i\boldsymbol{e}_i b_j\boldsymbol{e}_j c_k\boldsymbol{e}_k]=a_i b_j c_k\boldsymbol{[e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{]}=\sigma_{ijk}{}^k a_i b_j c_k\boldsymbol{e}_k$,

определяемый совершенно анти симметричным единичным 15-тензором третьего ранга σ^{ijk} компоненты, которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из анти симметричности следует, что все компоненты 15-тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличные от нуля лишь те у которых все три индекса различны, так что вектор ***[abc]*** определяется суммой *420*-ти определителей третьего порядка.

Подчеркнем что подстановки на множестве индексов ***(1,2,…,15)*** дают взаимно однозначное отображение векторного произведения трех векторов на себя, например, при указанной подстановке индексов:

3	***6***	***5***	***1***	***2***	***7***	***4***	***8***	***11***	***14***	***13***	***9***	***10***	***15***	***12***
6	***1***	***7***	***2***	***4***	***3***	***5***	***8***	***14***	***9***	***15***	***10***	***12***	***11***	***13***

т. е. последовательности индексов преобразуются в иные последовательности индексов той же системы. Подчеркнем еще раз, что

- в ***трех мерном*** случае

[a[bc]]=b(ca)-(ab)c,

и ***[a[bc]]+ [b[ca]]+ [c[ab]]=0,***

- в ***семи мерном*** случае

[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc],

и ***[a[bc]]+ [b[ca]]+ [c[ab]]=3[abc],***

- в ***пятнадцатимерном*** случае

[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc],

и ***[a[bc]]+ [b[ca]]+ [c[ab]]=3[abc],***

причем вектор ***[abc]*** сохраняет соответствующие свойства у 3-х, 7-ми и 15-ти мерной алгебр, а, следовательно, сохраняется вид уравнений семи мерной и Пятнадцатимерной алгебр для совокупностей из (**2,3,..,7**) векторов, представленных в векторной форме записи. Координатная форма записи при этом кардинально видоизменяется, однако свойства алгебр от этого не зависят, т.е. векторные соотношения семи- и Пятнадцатимерной алгебр совпадают при рассмотрении произведений векторов от двух до семи. Вместе с тем, произведения векторов от восьми до пятнадцати имеют место лишь в Пятнадцатимерной алгебре, только 16-ый вектор в Пятнадцатимерной алгебре раскладывается по пятнадцати векторам.

Уже найдены векторные алгебры соответствующие 31-ой, 63-ём, 127-ми, 255-ти, 511-ти, 1023-м координатам. 2^n-1-мерные векторные алгебры расширяются вплоть до бесконечно мерных алгебр. Следовательно, стоит ребром вопрос о размерности физического пространства, поскольку трех мерная векторная алгебра определила в XIX веке название трех мерной теоретической физики**. << Физическое пространство не имеет размерности>>.** Оно лишь отражает ту или иную степень симметрии выражений, используемых для описания явлений.

Более симметричны алгебры высокой размерности, алгебры меньшей размерности могут рассматриваться, как та или иная степень нарушения симметрии и являются их частным случаем.

Приведём таблицу структуры многомерных алгебр, отметив высокую интенсивность увеличения числа составляющих их трехмерных пространств.

$x_{n+1}=2\cdot x_n+1$	$[ab]$, $z_{n+1}=4\cdot z_n+x_n$	$[abc]_i$, $y_{n+1}=4\cdot z_n$	$[abc]$, $x_n\cdot y_n$	$C_n^3=x_n\cdot y_n+z_n$
1	0	0	0	0
3	1	0	0	1
7	7	4	28	35
15	35	28	420	455
31	155	140	4340	4495
63	651	620	39060	39711
127	2667	2604	330708	333375
255	10795	10668	2720340	2731135
511	43435	43180	22064980	22108415
1023	174251	173740	177736020	177910271

Важным свойством векторных алгебр является то, что их размерность часто совпадает с рядом простых чисел Мерсенна, соответствующих совершенным числам, и, следовательно, по крайней мере, отдельные векторные алгебры имеют прямое отношение к совершенным числам. Так, например, сумма индексов систем подстановки индексов зачастую определяется совершенным числом:

-в трехмерной алгебре:

1	2	3	6
2	3	1	6
3	1	2	6
6	6	6	∑

-в семимерной алгебре:

1	2	3	4	5	6	7	28
2	4	6	5	7	1	3	28
3	6	5	1	2	7	4	28
4	5	1	7	3	2	6	28
5	7	2	3	6	4	1	28
6	1	7	2	4	3	5	28
7	3	4	6	1	5	2	28
28	28	28	28	28	28	28	∑

-в 15-мерной алгебре, однако, размерность – составное число; в результате:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	120
2	4	6	5	7	1	3	8	10	12	14	13	15	9	11	120
3	6	5	1	2	7	4	8	11	14	13	9	10	15	12	120
4	5	1	7	3	2	6	8	12	13	9	15	11	10	14	120
5	7	2	3	6	4	1	8	13	15	10	11	14	12	9	120
6	1	7	2	4	3	5	8	14	9	15	10	12	11	13	120
7	3	4	6	1	5	2	8	15	11	12	14	9	13	10	120
28	28	28	28	28	28	28	56	84	84	84	84	84	84	84	∑

причем таблица векторного произведения двух векторов:

1	2 3	4 5	7 6	8 9	11 10	13 12	14 15	120
2	4 6	5 7	3 1	8 10	14 12	15 13	9 11	120
3	6 5	1 2	4 7	8 11	13 14	10 9	15 12	120
4	5 1	7 3	6 2	8 12	9 13	11 15	10 14	120
5	7 2	3 6	1 4	8 13	10 15	14 11	12 9	120
6	1 7	2 4	5 3	8 14	15 9	12 10	11 13	120
7	3 4	6 1	2 5	8 15	12 11	9 14	13 10	120
8	9 1	10 2	11 3	12 4	13 5	14 6	15 7	120
9	3 10	5 12	6 15	1 8	11 2	13 4	14 7	120
10	6 12	7 13	1 11	2 8	14 4	15 5	9 3	120
11	5 14	2 9	7 12	3 8	13 6	10 1	15 4	120
12	1 13	3 15	2 14	4 8	9 5	11 7	10 6	120
13	2 15	6 11	4 9	5 8	10 7	14 3	12 1	120
14	7 9	4 10	3 13	6 8	15 1	12 2	11 5	120
15	4 11	1 14	5 10	7 8	12 3	9 6	13 2	120

Совершенные числа $s_n=2^{n-1}(2^n-1)$ можно определять по совпадению простых чисел натурального ряда чисел n и простых чисел ряда $m_n=2^n-1$, причем для упрощения вычислений этому ряду следует сопоставить рекуррентное соотношение $m_{n+1}=2m_n+1$. Оказывается, что совершенные числа также можно найти, используя укороченный ряд чисел $k_{n+1}=4k_n+3$. В этом случае $k_n=s_n+m_{n-1}$ и, следовательно,

$$s_n=k_n-m_{n-1},$$

что определяется таблицей:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
m	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191
s	1	6	28	120	496	2016	8128	32640	130816	523776	2096128	8386560	33550336
k	1	7	31	127	511	2047	8191	32767	131071	524287	2097151	8388607	33554431

Указанный порядок нахождения размерности векторных алгебр и совершенных чисел относительно прост, поскольку ряд k является чересстрочной разверткой ряда m, где последовательно используются операции умножения и сложения с целыми числами. Совершенные числа отвечают простым числам рядов чисел m и натуральных чисел в одном и том же столбце. Сдвигом влево на одну позицию рядов s и k получим эту таблицу в удобной форме записи.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
m	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191
s	6	28	120	496	2016	8128	32640	130816	523776	2096128	8386560	33550336	134209536
k	7	31	127	511	2047	8191	32767	131071	524287	2097151	8388607	33554431	134217727

Здесь простые числа Мерсенна сдвинуты на один шаг относительно совершенных чисел, так что совершенные числа определяются простым числом из двух соседних значений ряда чисел m:

$$s_n=k_n-m_n, \quad k_n=m_{n+1}\cdot(m_n+1)+m_n, \quad s_n=m_{n+1}\cdot(m_n+1).$$

Так:

$$6=3\cdot 2$$
$$28=7\cdot 4$$
$$496=31\cdot 16$$
$$8128=127\cdot 64$$
$$33550336=8191\cdot 4096$$
$$\ldots\ .$$

Достаточно знать простые числа Мерсенна чтобы найти совершенные числа. Тот же ряд чисел определяет размерность векторных алгебр. Она определяется тем же рекуррентным соотношением, так что

$$x_{n+1}=2\cdot x_n+1.$$

Литература

1. Коротков А. В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996. – 244с.
2. Коротков А. В. Пятнадцатимерная векторная алгебра., 2011.- 13с.
3. Коротков А. В. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. – Новочеркасск: Изд-во “НОК“, 2011. – 36с.

ВРАЩЕНИЯ В ПЯТНАДЦАТИМЕРНОЙ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ

©2012г., А.В. Коротков
Международный центр теоретической физики (2^n-1)-D мерные технологии,
г. Новочеркасск

$$\begin{Vmatrix} 3\text{-}D & 2^m\text{-}1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 7\text{-}D & 2^m\text{-}1 \\ 2^m\text{-}1 & 2n+1 & 15\text{-}D \end{Vmatrix}$$

Каждое ортогональное линейное преобразование

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \qquad (A'A = AA' = I)$$

в пятнадцатимерной векторной алгебре сохраняет модули векторов и углы между векторами. Такое преобразование является (собственным) вращением, если оно сохраняет также векторное произведение двух векторов и $\det\|A\|=1$. Преобразование с $\det\|A\|=-1$ является несобственным вращением или вращением с отражением.

Пусть $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_{15}}$ – любой ортогональный базис, и пусть

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + \ldots + x_{15}\mathbf{e_{15}}, \quad \mathbf{x}' = x_1'\mathbf{e_1} + x_2'\mathbf{e_2} + \ldots + x_{15}'\mathbf{e_{15}}.$$

Каждое преобразование (1) задается формулами

$$x_1' = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{15,1}x_{15}$$
$$x_2' = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{15,2}x_{15}$$
$$\ldots$$
$$x_1' = a_{15,1}x_1 + a_{15,2}x_2 + \ldots + a_{15,15}x_{15}$$

или в матричной форме

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

где для собственных вращений

$$\det(A) = \det\|a_{i,k}\| = 1.$$

Так как рассматриваемая система координат является ортогональной, действительная матрица $A=\|a_{i,k}\|$, описывающая каждое вращение, ортогональна $(A'A = AA' = I)$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{15} a_{ij}a_{kj} = \sum_{j=1}^{15} a_{ji}a_{jk} = \begin{cases} 0, i \neq k \\ 1, i = k, \end{cases} \qquad (i,k = 1,2,\ldots,15),$$

и каждый коэффициент a_{ik} равен алгебраическому дополнению элемента a_{ki} в определителе $\det\|a_{i,k}\|$. Любые 105 из коэффициентов a_{ik} матрицы ортогональных преобразований определяют все 225, коэффициент a_{ik} есть косинус угла между базисным вектором $\mathbf{e_i}$ и повернутым базисным вектором

$$\mathbf{e}_k' = A\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{15} a_{ij}\mathbf{e}_j;$$

$$a_{ik} = (\mathbf{e}_i\, \mathbf{e}_k') = (\mathbf{e_i}(A\mathbf{e}_k)).$$

Сохранение векторного произведения двух векторов при преобразовании вращения требует 90 дополнительных условий, так что лишь 15 из коэффициентов независимы и определяют все остальные.

Преобразование вращения поворачивает радиус-вектор x каждой точки 15-мерного евклидова пространства на угол δ вокруг направленной оси вращения, точки которой инварианты. Угол поворота δ и направляющие косинусы $c_1, c_2, \ldots, c_{15}$, положительной оси вращения определяются формулами:

$$\cos\delta=\frac{Tr(A)-1}{14}=\frac{a1,1+a2,2+\cdots+a15,15-1}{14},$$

$$c_1=-\frac{a2,3-a3,2+a4,5-a5,4+a7,6-a6,7+a8,9-a9,8+a11,10-a10,11+a13,12-a12,13+a14,15-a15,14}{14\,sin\delta},$$

$$c_2=-\frac{a4,6-a6,4+a5,7-a7,5+a3,1-a1,3+a8,10-a10,8+a14,12-a12,14+a15,13-a13,15+a11,9-a9,11}{14\,sin\delta},$$

$$c_3=-\frac{a6,5-a5,6+a1,2-a2,1+a4,7-a7,4+a8,11-a11,8+a13,14-a14,13+a10,9-a9,10+a12,15-a15,12}{14\,sin\delta},$$

$$c_4=-\frac{a5,1-a1,5+7,3-a3,7+a6,2-a2,6+a8,12-a12,8+a9,13-a13,9+a11,15-a15,11+a10,14-a14,10}{14\,sin\delta},$$

$$c_5=-\frac{a7,2-a2,7+a3,6-a6,3+a1,4-a4,1+a8,13-a13,8+a10,15-a15,10+a14,11-a11,14+a12,9-a9,12}{14\,sin\delta},$$

$$c_6=-\frac{a1,7-a7,1+a2,4-a4,2+a5,3-a3,5+a8,14-a14,8+a15,9-a9,15+a12,10-a10,12+a11,13-a13,11}{14\,sin\delta},$$

$$c_7=-\frac{a3,4-a4,3+a6,1-a1,6+a2,5-a5,2+a8,15-a15,8+a12,11-a11,12+a9,14-a14,9+a13,10-a10,13}{14\,sin\delta},$$

$$c_8=-\frac{a9,1-a1,9+a10,2-a2,10+a11,3-a3,11+a12,4-a4,12+a13,5-a5,13+a14,6-a6,14+a15,7-a7,15}{14\,sin\delta},$$

$$c_9=-\frac{a11,2-a2,11+a13,4-a4,13+a14,7-a7,14+a1,8-a8,1+a3,10-a10,3+a5,12-a12,5+a6,15-a15,6}{14\,sin\delta},$$

$$c_{10}=-\frac{a14,4-a4,14+a15,5-a515+a9,3-a3,9+a2,8-a8,2+a6,12-a12,6+a7,13-a13,7+a1,11-a11,1}{14\,sin\delta},$$

$$c_{11}=-\frac{a13,6-a6,13+a10,1-a1,10+a15,4-a4,15+a3,8-a8,3+a5,14-a14,5+a2,9-a9,2+a7,12-a12,7}{14\,sin\delta},$$

$$c_{12}=-\frac{a9,5-a5,9+a11,7-a7,11+a10,6-a6,10+a4,8-a8,4+a1,13-a13,1+a3,15-a15,3+a2,14-a14,2}{14\,sin\delta},$$

$$c_{13}=-\frac{a10,7-a7,10+a14,3-a3,14+a12,1-a1,12+a5,8-a8,5+a2,15-a15,2+a6,11-a11,6+a4,9-a9,4}{14\,sin\delta},$$

$$c_{14}=-\frac{a15,1-a1,15+a12,2-a2,12+a11,5-a5,11+a6,8-a8,6+a7,9-a9,7+a4,10-a10,4+a3,13-a13,3}{14\,sin\delta},$$

$$c_{15}=-\frac{a12,3-a3,12+a9,6-a6,9+a13,2-a2,13+a7,8-a8,7+a4,11-a11,4+a1,14-a14,1+a5,10-a10,5}{14\,sin\delta},$$

т.е. $$c_l=-\frac{\sum_{i,k=1}^{15}\sigma_{ik}^{\,l}\,a_{ik}}{6sin\delta},\ (i,k,l=1,2,\ldots,15),$$

где $\sigma_{ik}^{\,l}$ – тензор структурных констант пятнадцатимерной векторной алгебры, принимающий значения ±1 или 0.

Знак угла δ, либо направление оси вращения может выбираться произвольно. Направление положительной оси вращения совпадает с направлением собственного вектора **c=** $c_1\mathbf{e_1}+c_2\mathbf{e_2}+\ldots+c_{15}\mathbf{e_{15}}$,соответствующего собственному значению +1 оператора **A** и находимого путем приведения матрицы A к диагональному виду. Остальные собственные значения оператора **A** кратны; ими являются

$\cos\delta\pm i\sin\delta=e^{\pm i\delta}$ так что, $T_r(A)=1+14\cos\delta$ и $\det(A)=1$.

Матрица преобразования A, соответствующая данному вращению, описываемому числами δ, $c_1, c_2, \ldots, c_{15}$ есть

$$A=\cos\delta I+(1-\cos\delta)\cdot$$

$$\begin{Vmatrix}
c_1c_1 & c_1c_2 & c_1c_3 & c_1c_4 & c_1c_5 & c_1c_6 & c_1c_7 & c_1c_8 & c_1c_9 & c_1c_{10} & c_1c_{11} & c_1c_{12} & c_1c_{13} & c_1c_{14} & c_1c_{15} \\
c_2c_1 & c_2c_2 & c_2c_3 & c_2c_4 & c_2c_5 & c_2c_6 & c_2c_7 & c_2c_8 & c_2c_9 & c_2c_{10} & c_2c_{11} & c_2c_{12} & c_2c_{13} & c_2c_{14} & c_2c_{15} \\
c_3c_1 & c_3c_2 & c_3c_3 & c_3c_4 & c_3c_5 & c_3c_6 & c_3c_7 & c_3c_8 & c_3c_9 & c_3c_{10} & c_3c_{11} & c_3c_{12} & c_3c_{13} & c_3c_{14} & c_3c_{15} \\
c_4c_1 & c_4c_2 & c_4c_3 & c_4c_4 & c_4c_5 & c_4c_6 & c_4c_7 & c_4c_8 & c_4c_9 & c_4c_{10} & c_4c_{11} & c_4c_{12} & c_4c_{13} & c_4c_{14} & c_4c_{15} \\
c_5c_1 & c_5c_2 & c_5c_3 & c_5c_4 & c_5c_5 & c_5c_6 & c_5c_7 & c_5c_8 & c_5c_9 & c_5c_{10} & c_5c_{11} & c_5c_{12} & c_5c_{13} & c_5c_{14} & c_5c_{15} \\
c_6c_1 & c_6c_2 & c_6c_3 & c_6c_4 & c_6c_5 & c_6c_6 & c_6c_7 & c_6c_8 & c_6c_9 & c_6c_{10} & c_6c_{11} & c_6c_{12} & c_6c_{13} & c_6c_{14} & c_6c_{15} \\
c_7c_1 & c_7c_2 & c_7c_3 & c_7c_4 & c_7c_5 & c_7c_6 & c_7c_7 & c_7c_8 & c_7c_9 & c_7c_{10} & c_7c_{11} & c_7c_{122} & c_7c_{13} & c_7c_{14} & c_7c_{15} \\
c_8c_1 & c_8c_2 & c_8c_3 & c_8c_4 & c_8c_5 & c_8c_6 & c_8c_7 & c_8c_8 & c_8c_9 & c_8c_{10} & c_8c_{11} & c_8c_{12} & c_8c_{13} & c_8c_{14} & c_8c_{15} \\
c_9c_1 & c_9c_2 & c_9c_3 & c_9c_4 & c_9c_5 & c_9c_6 & c_9c_7 & c_9c_8 & c_9c_9 & c_9c_{10} & c_9c_{11} & c_9c_{12} & c_9c_{13} & c_9c_{14} & c_9c_{15} \\
c_{10}c_1 & c_{10}c_2 & c_{10}c_3 & c_{10}c_4 & c_{10}c_5 & c_{10}c_6 & c_{10}c_7 & c_{10}c_8 & c_{10}c_9 & c_{10}c_{10} & c_{10}c_{11} & c_{10}c_{12} & c_{10}c_{13} & c_{10}c_{14} & c_{10}c_{15} \\
c_{11}c_1 & c_{11}c_2 & c_{11}c_3 & c_{11}c_4 & c_{11}c_5 & c_{11}c_6 & c_{11}c_7 & c_{11}c_8 & c_{11}c_9 & c_{11}c_{10} & c_{11}c_{11} & c_{11}c_{12} & c_{11}c_{13} & c_{11}c_{14} & c_{11}c_{15} \\
c_{12}c_1 & c_{12}c_2 & c_{12}c_3 & c_{12}c_4 & c_{12}c_5 & c_{12}c_6 & c_{12}c_7 & c_{12}c_8 & c_{12}c_9 & c_{12}c_{10} & c_{12}c_{11} & c_{12}c_{12} & c_{12}c_{13} & c_{12}c_{14} & c_{12}c_{15} \\
c_{13}c_1 & c_{13}c_2 & c_{13}c_3 & c_{13}c_4 & c_{13}c_5 & c_{13}c_6 & c_{13}c_7 & c_{13}c_8 & c_{13}c_9 & c_{13}c_{10} & c_{13}c_{11} & c_{13}c_{12} & c_{13}c_{13} & c_{13}c_{14} & c_{13}c_{15} \\
c_{14}c_1 & c_{14}c_2 & c_{14}c_3 & c_{14}c_4 & c_{14}c_5 & c_{14}c_6 & c_{14}c_7 & c_{14}c_8 & c_{14}c_9 & c_{14}c_{10} & c_{14}c_{11} & c_{14}c_{12} & c_{14}c_{13} & c_{14}c_{14} & c_{14}c_{15} \\
c_{15}c_1 & c_{15}c_2 & c_{15}c_3 & c_{15}c_4 & c_{15}c_5 & c_{15}c_6 & c_{15}c_7 & c_{15}c_8 & c_{15}c_9 & c_{15}c_{10} & c_{15}c_{11} & c_{15}c_{12} & c_{15}c_{13} & c_{15}c_{14} & c_{15}c_{15}
\end{Vmatrix}$$

$$+\sin\delta \qquad (2)$$

$$\begin{Vmatrix}
0 & -c_3 & c_2 & -c_5 & c_4 & c_7 & -c_6 & -c_9 & c_8 & c_{11} & -c_{10} & c_{13} & -c_{12} & -c_{15} & c_{14} \\
c_3 & 0 & -c_1 & -c_6 & -c_7 & c_4 & c_5 & -c_{10} & -c_{11} & c_8 & c_9 & c_{14} & c_{15} & -c_{12} & -c_{13} \\
-c_2 & c_1 & 0 & -c_7 & c_6 & -c_5 & c_4 & -c_{11} & c_{10} & -c_9 & c_8 & c_{15} & -c_{14} & c_{13} & -c_{12} \\
c_5 & c_6 & c_7 & 0 & -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_{12} & -c_{13} & -c_{14} & -c_{15} & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} \\
-c_4 & c_7 & -c_6 & c_1 & 0 & c_3 & -c_2 & -c_{13} & c_{12} & -c_{15} & c_{14} & -c_9 & c_8 & -c_{11} & c_{10} \\
-c_7 & -c_4 & c_5 & c_2 & -c_3 & 0 & c_1 & -c_{14} & c_{15} & c_{12} & -c_{13} & -c_{10} & c_{11} & c_8 & -c_9 \\
c_6 & -c_5 & -c_4 & c_3 & c_2 & -c_1 & 0 & -c_{15} & -c_{14} & c_{13} & c_{12} & -c_{11} & -c_{10} & c_9 & c_8 \\
c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & 0 & -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 & -c_5 & -c_6 & -c_7 \\
-c_8 & c_{11} & -c_{10} & c_{13} & -c_{12} & -c_{15} & c_{14} & c_1 & 0 & c_3 & -c_2 & c_5 & -c_4 & -c_7 & c_6 \\
-c_{11} & -c_8 & c_9 & c_{14} & c_{15} & -c_{12} & -c_{13} & c_2 & -c_3 & 0 & c_1 & c_6 & c_7 & -c_4 & -c_5 \\
c_{10} & -c_9 & -c_8 & c_{15} & -c_{14} & c_{13} & -c_{12} & c_3 & c_2 & -c_1 & 0 & c_7 & -c_6 & c_5 & -c_4 \\
-c_{13} & -c_{14} & -c_{15} & -c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_4 & -c_5 & -c_6 & -c_7 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\
c_{12} & -c_{15} & c_{14} & -c_9 & -c_8 & -c_{11} & c_{10} & c_5 & c_4 & -c_7 & c_6 & -c_1 & 0 & -c_3 & c_2 \\
c_{15} & c_{12} & -c_{13} & -c_{10} & c_{11} & -c_8 & -c_9 & c_6 & c_7 & c_4 & -c_5 & -c_2 & c_3 & 0 & -c_1 \\
-c_{14} & c_{13} & c_{12} & -c_{11} & -c_{10} & c_9 & -c_8 & c_7 & -c_6 & c_5 & c_4 & -c_3 & -c_2 & c_1 & 0
\end{Vmatrix}$$

16-ть симметричных параметров (Эйлера) $\gamma_0 = \cos\frac{\delta}{2}$,

$\gamma_1 = c_1 \sin\frac{\delta}{2}$, $\gamma_2 = c_2 \sin\frac{\delta}{2}$, ..., $\gamma_{15} = c_{15} \sin\frac{\delta}{2}$, $(\gamma_0^2+\gamma_1^2, \ldots, \gamma_{15}^2=1)$

однозначно определяют вращение, так как из равенства следует

$$A=-I+2B,$$

где I – единичная матрица, а

$$B= b_ib_j\pm b_kb_0$$

также определен тензором структурных констант

Параметры $b_0, b_1 \ldots, b_{15}$ и $-b_0, -b_1 \ldots, -b_{15}$ представляют одно и то же вращение.

$B=b_ib_j \pm b_kb_0=$

1·1+0·0	*1·2-3·0*	*1·3+2·0*	*1·4-5·0*	*1·5+4·0*	*1·6+7·0*	*1·7-6·0*	*1·8-9·0*	*1·9+8·0*	*1·10+11·0*	*1·11-10·0*	*1·12+13·0*	*1·13-12·0*	*1·14-15·0*	*1·15+14·0*
2·1+3·0	*2·2+0·0*	*2·3-1·0*	*2·4-6·0*	*2·5-7·0*	*2·6+4·0*	*2·7+5·0*	*2·8-10·0*	*2·9-11·0*	*2·10+8·0*	*2·11+9·0*	*2·12+14·0*	*2·13+15·0*	*2·14-12·0*	*2·15-13·0*
3·1-2·0	*3·2+1·0*	*3·3+0·0*	*3·4-7·0*	*3·5+6·0*	*3·6-5·0*	*3·7+4·0*	*3·8-11·0*	*3·9+10·0*	*3·10-9·0*	*3·11+8·0*	*3·12+15·0*	*3·13-14·0*	*3·14+13·0*	*3·15-12·0*
4·1+5·0	*4·2+6·0*	*4·3+7·0*	*4·4+0·0*	*4·5-1·0*	*4·6-2·0*	*4·7-3·0*	*4·8-12·0*	*4·9-13·0*	*4·10-14·0*	*4·11-15·0*	*4·12+8·0*	*4·13+9·0*	*4·14+10·0*	*4·15+11·0*
5·1-4·0	*5·2+7·0*	*5·3-6·0*	*5·4+1·0*	*5·5+0·0*	*5·6+3·0*	*5·7-2·0*	*5·8-13·0*	*5·9+12·0*	*5·10-15·0*	*5·11+14·0*	*5·12-9·0*	*5·13+8·0*	*5·14-11·0*	*5·15+10·0*
6·1-7·0	*6·2-4·0*	*6·3+5·0*	*6·4+2·0*	*6·5-3·0*	*6·6+0·0*	*6·7+1·0*	*6·8-14·0*	*6·9+15·0*	*6·10+12·0*	*6·11-13·0*	*6·12-10·0*	*6·13+11·0*	*6·14+8·0*	*6·15-9·0*
7·1+6·0	*7·2-5·0*	*7·3-4·0*	*7·4+3·0*	*7·5+2·0*	*7·-1·0*	*7·7+0·0*	*7·8-15·0*	*7·9-14·0*	*7·10+13·0*	*7·11+12·0*	*7·12-11·0*	*7·13-10·0*	*7·14+9·0*	*7·15+8·0*
8·1+9·0	*8·2+10·0*	*8·3+11·0*	*8·4+12·0*	*8·5+13·0*	*8·6+14·0*	*8·7+15·0*	*8·8+0·0*	*8·9-1·0*	*8·10-2·0*	*8·11-3·0*	*8·12-4·0*	*8·13-5·0*	*8·14-6·0*	*8·15-7·0*
9·1-8·0	*9·2+11·0*	*9·3-10·0*	*9·4+13·0*	*9·5-12·0*	*9·6-15·0*	*9·7+14·0*	*9·8+1·0*	*9·9+0·0*	*9·10+3·0*	*9·11-2·0*	*9·12+5·0*	*9·13-4·0*	*9·14-7·0*	*9·15+6·0*
10·1-11·0	*10·2-8·0*	*10·3+9·0*	*10·4+14·0*	*10·5+15·0*	*10·6-12·0*	*10·7-13·0*	*10·8+2·0*	*10·9-3·0*	*10·10+0·0*	*10·11+1·0*	*10·12+6·0*	*10·13+7·0*	*10·14-4·0*	*10·15-5·0*
11·1+10·0	*11·2-9·0*	*11·3-8·0*	*11·4+15·0*	*11·5-14·0*	*11·6+13·0*	*11·7-12·0*	*11·8+3·0*	*11·9+2·0*	*11·10-1·0*	*11·11+0·0*	*11·12+7·0*	*11·13-6·0*	*11·14+5·0*	*11·15-4·0*
12·1-13·0	*12·2-14·0*	*12·3-15·0*	*12·4-8·0*	*12·5+9·0*	*12·6+10·0*	*12·7+11·0*	*12·8+4·0*	*12·9-5·0*	*12·10-6·0*	*12·11-7·0*	*12·12+0·0*	*12·13+1·0*	*12·14+2·0*	*12·15+3·0*
13·1+12·0	*13·2-15·0*	*13·3+14·0*	*13·4-9·0*	*13·5-8·0*	*13·6-11·0*	*13·7+10·0*	*13·8+5·0*	*13·9+4·0*	*13·10-7·0*	*13·11+6·0*	*13·12-1·0*	*13·13+0·0*	*13·14-3·0*	*13·15+2·0*
14·1+15·0	*14·2+12·0*	*14·3-13·0*	*14·4-10·0*	*14·5+11·0*	*14·6-8·0*	*14·7-9·0*	*14·8+6·0*	*14·9+7·0*	*14·10+4·0*	*14·11-5·0*	*14·12-2·0*	*14·13+3·0*	*14·14+0·0*	*14·15-1·0*
15·1-14·0	*15·2+13·0*	*15·3+12·0*	*15·4-11·0*	*15·5-10·0*	*15·6+9·0*	*15·7-8·0*	*15·8+7·0*	*15·9-6·0*	*15·10+5·0*	*15·11+4·0*	*15·12-3·0*	*15·13-2·0*	*15·14+1·0*	*15·15+0·0*

0	-c3	c2	-c5	c4	c7	-c6	-c9	c8	c11	-c10	c13	-c12	-c15	c14
c3	0	-c1	-c6	-c7	c4	c5	-c10	-c11	c8	c9	c14	c15	-c12	-c13
-c2	c1	0	-c7	c6	-c5	c4	-c11	c10	-c9	c8	c15	-c14	c13	-c12
c5	c6	c7	0	-c1	-c2	-c3	-c12	-c13	-c14	-c15	c8	c9	c10	c11
-c4	c7	-c6	c1	0	c3	-c2	-c13	c12	-c15	c14	-c9	c8	-c11	c10
-c7	-c4	c5	c2	-c3	0	c1	-c14	c15	c12	-c13	-c10	c11	c8	-c9
c6	-c5	-c4	c3	c2	-c1	0	-c15	-c14	c13	c12	-c11	-c10	c9	c8
c9	c10	c11	c12	c13	c14	c15	0	-c1	-c2	-c3	-c4	-c5	-c6	-c7
-c8	c11	-c10	c13	-c12	-c15	c14	c1	0	c3	-c2	c5	-c4	-c7	c6
-c11	-c8	c9	c14	c15	-c12	-c13	c2	-c3	0	c1	c6	c7	-c4	-c5
c10	-c9	-c8	c15	-c14	c13	-c12	c3	c2	-c1	0	c7	-c6	c5	-c4
-c13	-c14	-c15	-c8	c9	c10	c11	c4	-c5	-c6	-c7	0	c1	c2	c3
c12	-c15	c14	-c9	-c8	-c11	c10	c5	c4	-c7	c6	-c1	0	-c3	c2
c15	c12	-c13	-c10	c11	-c8	-c9	c6	c7	c4	-c5	-c2	c3	0	-c1
-c14	c13	c12	-c11	-c10	c9	-c8	c7	-c6	c5	c4	-c3	-c2	c1	0

Следующие 15-ть матриц преобразования описывают правые вращения на угол вокруг i-й координатной оси:

$A_1(\varphi) =$

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	cosφ	-sinφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	sinφ	cosφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	cosφ	-sinφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	sinφ	cosφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	cosφ	sinφ	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-sinφ	cosφ	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	cosφ	-sinφ	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	sinφ	cosφ	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	cosφ	sinφ	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-sinφ	cosφ	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	cosφ	sinφ	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-sinφ	cosφ	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	cosφ	-sinφ
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	sinφ	cosφ

$A_2(\varphi) =$

cosφ	0	sinφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-sinφ	0	cosφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	cosφ	0	-sinφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	cosφ	0	-sinφ	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	sinφ	0	cosφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	sinφ	0	cosφ	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	cosφ	0	-sinφ	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	cosφ	0	-sinφ	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	sinφ	0	cosφ	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	sinφ	0	cosφ	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	cosφ	0	sinφ	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	cosφ	0	sinφ
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-sinφ	0	cosφ	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-sinφ	0	cosφ

$$A_3(\varphi) = \left\| \begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & \sin\varphi \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array} \right\|$$

$$A_4(\varphi) = \left\| \begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi
\end{array} \right\|$$

$$A_5(\varphi) = \left\| \begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array} \right\|$$

$$A_6(\varphi) =$$

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array} \right\|$$

$$A_7(\varphi) =$$

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array} \right\|$$

$$A_8(\varphi) =$$

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array} \right\|$$

$$A_9(\varphi) =$$

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 \\
\hline
\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array}\right\|$$

$$A_{10}(\varphi) =$$

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 \\
\hline
0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array}\right\|$$

$$A_{11}(\varphi) =$$

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array}\right\|$$

$$A_{12}(\boldsymbol{\varphi}) =$$

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array}\right\|$$

$$A_{13}(\boldsymbol{\varphi}) =$$

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array}\right\|$$

$$A_{14}(\boldsymbol{\varphi}) =$$

$$\left\|\begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array}\right\|$$

$$A_{15}(\varphi) =$$

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array} \right\|$$

При этом $A_i^{-1}(\varphi)= A_i^{'}(\varphi)= A_i(-\varphi)$ $(i=1,2,\ldots,15)$.

Каждая матрица $A=\|a_{ik}\|$, описывающая собственное вращение в Пятнадцатимерном евклидовом пространстве, может быть различными способами представлена в виде произведения пятнадцати матриц

$$A=A_{i1}(\varphi_1)\ A_{i2}(\varphi_2)\ldots A_{i15}(\varphi_{15}),$$

где некоторые из индексов i_k и i_{16-k} могут совпадать.

Обратное вращение $A'=A^{-1}$ представляется матрицей

$$A'= A_{i15}(-\varphi_{15})\ A_{i14}(-\varphi_{14})\ldots A_{i1}(-\varphi_1),$$

так что

$$AA'= A'\ A=1.$$

Существует огромное число способов, которыми матрицу вращения можно выразить в виде произведения 15-ти матриц вращения вокруг отдельных осей.

Бесконечно малое 15-ти мерное вращение на бесконечно малый угол $d\delta$ вокруг оси вращения с направляющими косинусами $c_1,c_2,\ldots,c_{15}$, описывается соотношением

$$\mathbf{x}'= \mathbf{x}+ d\mathbf{x}'=(I+dA)\ \mathbf{x}.$$

$I+dA$ есть ортогональное бесконечно малое преобразование. В ортонормированном координатном базисе $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots\mathbf{e}_{15}$, преобразование описывается кососимметрической матрицей

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
0 & -c_3 & c_2 & -c_5 & c_4 & c_7 & -c_6 & -c_9 & c_8 & c_{11} & -c_{10} & c_{13} & -c_{12} & -c_{15} & c_{14} \\
c_3 & 0 & -c_1 & -c_6 & -c_7 & c_4 & c_5 & -c_{10} & -c_{11} & c_8 & c_9 & c_{14} & c_{15} & -c_{12} & -c_{13} \\
-c_2 & c_1 & 0 & -c_7 & c_6 & -c_5 & c_4 & -c_{11} & c_{10} & -c_9 & c_8 & c_{15} & -c_{14} & c_{13} & -c_{12} \\
c_5 & c_6 & c_7 & 0 & -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_{12} & -c_{13} & -c_{14} & -c_{15} & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} \\
-c_4 & c_7 & -c_6 & c_1 & 0 & c_3 & -c_2 & -c_{13} & c_{12} & -c_{15} & c_{14} & -c_9 & c_8 & -c_{11} & c_{10} \\
-c_7 & -c_4 & c_5 & c_2 & -c_3 & 0 & c_1 & -c_{14} & c_{15} & c_{12} & -c_{13} & -c_{10} & c_{11} & c_8 & -c_9 \\
c_6 & -c_5 & -c_4 & c_3 & c_2 & -c_1 & 0 & -c_{15} & -c_{14} & c_{13} & c_{12} & -c_{11} & -c_{10} & c_9 & c_8 \\
\hline
c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & 0 & -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 & -c_5 & -c_6 & -c_7 \\
\hline
-c_8 & c_{11} & -c_{10} & c_{13} & -c_{12} & -c_{15} & c_{14} & c_1 & 0 & c_3 & -c_2 & c_5 & -c_4 & -c_7 & c_6 \\
-c_{11} & -c_8 & c_9 & c_{14} & c_{15} & -c_{12} & -c_{13} & c_2 & -c_3 & 0 & c_1 & c_6 & c_7 & -c_4 & -c_5 \\
c_{10} & -c_9 & -c_8 & c_{15} & -c_{14} & c_{13} & -c_{12} & c_3 & c_2 & -c_1 & 0 & c_7 & -c_6 & c_5 & -c_4 \\
-c_{13} & -c_{14} & -c_{15} & -c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_4 & -c_5 & -c_6 & -c_7 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\
c_{12} & -c_{15} & c_{14} & -c_9 & -c_8 & -c_{11} & c_{10} & c_5 & c_4 & -c_7 & c_6 & -c_1 & 0 & -c_3 & c_2 \\
c_{15} & c_{12} & -c_{13} & -c_{10} & c_{11} & -c_8 & -c_9 & c_6 & c_7 & c_4 & -c_5 & -c_2 & c_3 & 0 & -c_1 \\
-c_{14} & c_{13} & c_{12} & -c_{11} & -c_{10} & c_9 & -c_8 & c_7 & -c_6 & c_5 & c_4 & -c_3 & -c_2 & c_1 & 0
\end{array} \right\|$$

так что $$dA= \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial \delta}\, ,_{\delta=0}\right) d\delta.$$

Она получается путем дифференцирования соотношения . При этом

$$d\mathbf{x}'=(dA)\mathbf{x}=[\mathbf{cx}]d\delta$$

где $\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{e}_1+ c_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+c_{15}\boldsymbol{e}_{15}$ – единичный вектор в направлении положительной оси вращения, а $[\boldsymbol{cx}]$ – векторное произведение векторов $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{x}$. Более того, если $\mathbf{w}$ – любой кососимметрический линейный оператор в 15-ти мерном евклидовом пространстве, представляемый в ортонормированном координатном базисе $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_{15}$ кососимметрической матрицей

0	$-w_3$	w_2	$-w_5$	w_4	w_7	$-w_6$	$-w_9$	w_8	w_{11}	$-w_{10}$	w_{13}	$-w_{12}$	$-w_{15}$	w_{14}
w_3	0	$-w_1$	$-w_6$	$-w_7$	w_4	w_5	$-w_{10}$	$-w_{11}$	w_8	w_9	w_{14}	w_{15}	$-w_{12}$	$-w_{13}$
$-w_2$	w_1	0	$-w_7$	w_6	$-w_5$	w_4	$-w_{11}$	w_{10}	$-w_9$	w_8	w_{15}	$-w_{14}$	w_{13}	$-w_{12}$
w_5	w_6	w_7	0	$-w_1$	$-w_2$	$-w$	$-w_{12}$	$-w_{13}$	$-w_{14}$	$-w_{15}$	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}
$-w_4$	w_7	$-w_6$	w_1	0	w_3	$-w_2$	$-w_{13}$	w_{12}	$-w_{15}$	w_{14}	$-w_9$	w_8	$-w_{11}$	w_{10}
$-w_7$	$-w_4$	w_5	w_2	$-w_3$	0	w_1	$-w_{14}$	w_{15}	w_{12}	$-w_{13}$	$-w_{10}$	w_{11}	w_8	$-w_9$
w_6	$-w_5$	$-w_4$	w_3	w_2	$-w_1$	0	$-w_{15}$	$-w_{14}$	w_{13}	w_{12}	$-w_{11}$	$-w_{10}$	w_9	w_8
w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	0	$-w_1$	$-w_2$	$-w_3$	$-w_4$	$-w_5$	$-w_6$	$-w_7$
$-w_8$	w_{11}	$-w_{10}$	w_{13}	$-w_{12}$	$-w_{15}$	w_{14}	w_1	0	w_3	$-w_2$	w_5	$-w_4$	$-w_7$	w_6
$-w_{11}$	$-w_8$	w_9	w_{14}	w_{15}	$-w_{12}$	$-w_{13}$	w_2	$-w_3$	0	w_1	w_6	w_7	$-w_4$	$-w_5$
w_{10}	$-w_9$	$-w_8$	w_{15}	$-w_{14}$	w_{13}	$-w_{12}$	w_3	w_2	$-w_1$	0	w_7	$-w_6$	w_5	$-w_4$
$-w_{13}$	$-w_{14}$	$-w_{15}$	$-w_8$	w_9	w_{10}	w_{11}	w_4	$-w_5$	$-w_6$	$-w_7$	0	w_1	w_2	w_3
w_{12}	$-w_{15}$	w_{14}	$-w_9$	$-w_8$	$-w_{11}$	w_{10}	w_5	w_4	$-w_7$	w_6	$-w_1$	0	$-w_3$	w_2
w_{15}	w_{12}	$-w_{13}$	$-w_{10}$	w_{11}	$-w_8$	$-w_9$	w_6	w_7	w_4	$-w_5$	$-w_2$	w_3	0	$-w_1$
$-w_{14}$	w_{13}	w_{12}	$-w_{11}$	$-w_{10}$	w_9	$-w_8$	w_7	$-w_6$	w_5	w_4	$-w_3$	$-w_2$	w_1	0

то для каждого вектора x

$$\mathbf{x}' = \mathrm{W}\mathbf{x} = [\mathbf{wx}]$$

$$\boldsymbol{w} = w_1\boldsymbol{e}_1+ w_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+w_{15}\boldsymbol{e}_{15}\ .$$

Рассмотренные матрицы характеризуют вращение пятнадцатимерного пространства на конечные углы. Чтобы получить вид матриц бесконечно малых вращений вокруг осей, разложим каждый элемент матрицы конечного вращения в ряд Тейлора по углам и удержим члены первого порядка малости. При этом

$$L_j = \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\ \mathrm{A}_{\mathrm{j}(\varphi)},\ \varphi = 0$$

и мы получим матрицы бесконечно малых преобразований координат (генераторов группы) в виде

L_1

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0

L_2

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i	0

$$L_3 = \left\| \begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0
\end{array} \right\|
\quad
L_4 = \left\| \begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right\|$$

$$L_5 = \left\| \begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right\|
\quad
L_6 = \left\| \begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & i & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right\|$$

$$L_7 = \left\| \begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right\|
\quad
L_8 = \left\| \begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right\|$$

$$L_9 = \left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0\\
\hline
i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right\|
\quad
L_{10} = \left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0\\
\hline
0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right\|$$

$$L_{11} = \left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0\\
\hline
0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right\|
\quad
L_{12} = \left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i\\
0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right\|$$

$$L_{13} = \left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right\|
\quad
L_{14} = \left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right\|$$

$$
L_{15}
$$

$$
\left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right\|
$$

Число генераторов группы равно числу независимых параметров. Непосредственными вычислениями можно убедиться, что генераторы группы пятнадцатимерном вращений удовлетворяют следующим (перестановочным) соотношениям:

$m([L_2 \cdot L_3]$	$+[L_4 \cdot L_5]$	$+[L_7 \cdot L_6]$	$+n[L_8 \cdot L_9]$	$+[L_{11} \cdot L_{10}]$	$+[L_{13} \cdot L_{12}]$	$+[L_{14} \cdot L_{15}])$	$= -iL_1,$
$m([L_4 \cdot L_6]$	$+[L_5 \cdot L_7]$	$+[L_3 \cdot L_1]$	$+ n [L_8 \cdot L_{10}]$	$+[L_{14} \cdot L_{12}]$	$+[L_{15} \cdot L_{13}]$	$+[L_9 \cdot L_{11}])$	$= -iL_2,$
$m([L_6 \cdot L_5]$	$+[L_1 \cdot L_2]$	$+[L_4 \cdot L_7]$	$+ n [L_8 \cdot L_{11}]$	$+[L_{13} \cdot L_{14}]$	$+[L_{10} \cdot L_9]$	$+[L_{15} \cdot L_{12}])$	$= -iL_3,$
$m([L_5 \cdot L_1]$	$+[L_7 \cdot L_3]$	$+[L_6 \cdot L_2]$	$+ n [L_8 \cdot L_{12}]$	$+[L_9 \cdot L_{13}]$	$+[L_{11} \cdot L_{15}]$	$+[L_{10} \cdot L_{14}])$	$= -iL_4,$
$m([L_7 \cdot L_2]$	$+[L_3 \cdot L_6]$	$+[L_1 \cdot L_4]$	$+ n [L_8 \cdot L_{13}]$	$+[L_{10} \cdot L_{15}]$	$+[L_{14} \cdot L_{11}]$	$+[L_{12} \cdot L_9])$	$= -iL_5,$
$m ([L_1 \cdot L_7]$	$+[L_2 \cdot L_4]$	$+[L_5 \cdot L_3]$	$+ n [L_8 \cdot L_{14}]$	$+[L_{15} \cdot L_9]$	$+[L_{12} \cdot L_{10}]$	$+[L_{11} \cdot L_{13}])$	$= -iL_6,$
$m([L_3 \cdot L_4]$	$+[L_6 \cdot L_1]$	$+[L_2 \cdot L_5]$	$+ n [L_8 \cdot L_{15}]$	$+[L_{12} \cdot L_{11}]$	$+[L_9 \cdot L_{14}]$	$+[L_{13} \cdot L_{10}])$	$= -iL_7,$
$k([L_9 \cdot L_1]$	$+[L_{10} \cdot L_2]$	$+[L_{11} \cdot L_3]$	$+[L_{12} \cdot L_4]$	$+[L_{13} \cdot L_5]$	$+[L_{14} \cdot L_6]$	$+[L_{15} \cdot L_7])$	$= -iL_8,$
$m([L_{11} \cdot L_2]$	$+[L_{13} \cdot L_4]$	$+[L_{14} \cdot L_7]$	$+ n [L_1 \cdot L_8]$	$+[L_3 \cdot L_{10}]$	$+[L_5 \cdot L_{12}]$	$+[L_6 \cdot L_{15}])$	$= -iL_9,$
$m([L_{14} \cdot L_4]$	$+[L_{15} \cdot L_5]$	$+[L_9 \cdot L_3]$	$+ n [L_2 \cdot L_8]$	$+[L_6 \cdot L_{12}]$	$+[L_7 \cdot L_{13}]$	$+[L_1 \cdot L_{11}])$	$= -iL_{10},$
$m([L_{13} \cdot L_6]$	$+[L_{10} \cdot L_1]$	$+[L_{15} \cdot L_4]$	$+ n [L_3 \cdot L_8]$	$+[L_5 \cdot L_{14}]$	$+[L_2 \cdot L_9]$	$+[L_7 \cdot L_{12}])$	$= -iL_{11},$
$m([L_9 \cdot L_5]$	$+[L_{11} \cdot L_7]$	$+[L_{10} \cdot L_6]$	$+ n [L_4 \cdot L_8]$	$+[L_1 \cdot L_{13}]$	$+[L_3 \cdot L_{15}]$	$+[L_2 \cdot L_{14}])$	$= -iL_{12},$
$m([L_{10} \cdot L_7]$	$+[L_{14} \cdot L_3]$	$+[L_{12} \cdot L_1]$	$+ n [L_5 \cdot L_8]$	$+[L_2 \cdot L_{15}]$	$+[L_6 \cdot L_{11}]$	$+[L_4 \cdot L_9])$	$= -iL_{13},$
$m([L_{15} \cdot L_1]$	$+[L_{12} \cdot L_2]$	$+[L_{11} \cdot L_5]$	$+ n [L_6 \cdot L_8]$	$+[L_7 \cdot L_9]$	$+[L_4 \cdot L_{10}]$	$+[L_3 \cdot L_{13}])$	$= -iL_{14},$
$m([L_{12} \cdot L_3]$	$+[L_9 \cdot L_6]$	$+[L_{13} \cdot L_2]$	$+ n [L_7 \cdot L_8]$	$+[L_4 \cdot L_{11}]$	$+[L_1 \cdot L_{14}]$	$+[L_5 \cdot L_{10}])$	$= -iL_{15},$

которые соответствуют соотношениям пятнадцатимерной векторной алгебры, причем $m = \frac{3}{25}$, $n = \frac{11}{3}$, $k = \frac{1}{11}$.

У группы пятнадцатимерных вращений коммутирующих между собой генераторов нет: ее ранг равен единице, и подалгебры Картана отсутствуют. Из генераторов группы пятнадцатимерных вращений, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми генераторами

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + \cdots L_{15}^2 = 14I,$$

так, что скалярный квадрат оператора момента импульса сохраняется.

В случае пятнадцатимерных вращений оператор Казимира сопоставляется квадрату момента 15-импульса. Совокупность всех вращений пятнадцатимерного пространства обладает следующими свойствами.

1; Два последовательных вращения (произведение вращений) есть снова вращение; произведению вращений соответствует произведение матриц, которое снова является матрицей того же типа.

2. Среди вращений имеется такое, при котором пространство переходит само в себя (единичное вращение); такому вращению соответствует единичная матрица.

3. Каждому вращению A_i можно сопоставить обратное вращение A_i^{-1}, которое задается углами $-\varphi_i$. Произведение исходного и обратного вращений эквивалентно единичному вращению $A_i \cdot A_i^{-1} = 1$. Обратному вращению соответствует матрица A_i^{-1}, обратная исходной.

Совокупность вращений, обладающих тремя перечисленными свойствами, образуют подгруппу Q_{15} ортогональной группы O_{15}. Матрицы пятнадцатимерных вращений образуют также группу.

Элементы группы 15-тимерных вращений могут принимать непрерывное число значений. Группа 15-тимерных вращений непрерывна.

Число независимых параметров $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{15}$, которые определяют группу 15-тимерных вращений, равно 15, так что группа 15-тимерных вращений 15-того порядка. Порядок матриц преобразования группы 15-тимерных вращений и размерность группы 15-тимерных вращений также равны 15-ти.

Литература

4. Коротков А. В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996. – 244 с.

5. Коротков А. В. Элементы трех- и семимерного изовекторного и спинорного исчислений. – Новочеркасск: Набла, 1999. – 100 с.

6. Коротков А. В. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. – Новочеркасск: Изд-во “НОК“, 2011. – 36с.

ЭЛЕМЕНТЫ 31-МЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

©2012 г., А.В. Коротков
Международный центр теоретической физики (2^n-1)-D технологии,
г. Новочеркасск

$$\begin{Vmatrix} \textit{3-D} & 2^m\textit{-1} & \textit{2n+1} \\ \textit{2n+1} & \textit{7-D} & 2^m\textit{-1} \\ 2^m\textit{-1} & \textit{2n+1} & \textit{15-D} \end{Vmatrix}$$

На практике широко используется трехмерное векторное исчисление во многих отраслях науки и техники. Менее известно, но хорошо изучено семимерное векторное исчисление. Оно разработано в начале девяностых годов прошлого столетия и рассмотрено в плане векторного семимерного анализа, спинорного и изовекторного исчисления [1,2].

В последнее время получены серьезные результаты в отношении пятнадцатимерной векторной алгебры [3], в частности, найдены векторное произведение двух векторов, смешанное и двойное векторное произведение трех векторов. Получено векторное произведение трех векторов. Оказывается, что пятнадцатимерная алгебра повторяет многие свойства трехмерной и семимерной алгебр в векторной форме записи при кардинальном отличии координатных форм записи. Это создает предпосылки для использования однотипных векторных соотношений. Так, например,

- в ***трехмерном*** случае

[a[bc]]=b(ca)-(ab)c,

и ***[a[bc]]+ [b[ca]]+ [c[ab]]=0,***

- в ***семимерном*** случае

[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc],

и ***[a[bc]]+ [b[ca]]+ [c[ab]]=3[abc],***

- в ***пятнадцатимерном*** случае

[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc],

и ***[a[bc]]+ [b[ca]]+ [c[ab]]=3[abc],***

т.е. вектор ***[abc]*** сохраняет соответствующие свойства у семимерной и пятнадцатимерной алгебр, а, следовательно, сохраняется вид уравнений семимерной и пятнадцатимерной алгебр, представленных в векторной форме записи.

Существенное отличие семимерной и пятнадцатимерной алгебр появляется лишь в случае рассмотрения произведений восьми или более векторов, когда произведения векторов семимерной алгебры обращаются в нуль. Вторым существенным отличием пятнадцатимерной алгебры от семимерной и трехмерной заключается в том, что восьмая координата получает привилегированное (не однородное) значение, так что таблицы подстановок индексов рассматриваются не как последовательности пятнадцати координат, а как совокупность двух последовательностей из семи координат и одной последовательности с восьмой координатой. В результате, например, векторное произведение двух векторов распадается на пять не однородных совокупностей из семи векторов. Это можно рассматривать как разложение пятнадцатимерного пространства на совокупность пяти семимерных или **тридцати пяти трехмерны**х не однородных пространств. Необходимо отметить, что векторные алгебры большей размерности включают алгебры меньшей размерности, как под алгебры. Это приводит к тому, что векторные алгебры с размерностью большей пятнадцати также раскладываются на совокупности трехмерных алгебр. Отметим, что векторное произведение двух векторов семимерной алгебры состоит, однако, из семи векторных произведений двух векторов однородных трех мерных алгебр. Однородность в Пятнадцатимерной алгебре отсутствует. Таким образом, все возможные 2^n-1-мерные векторные алгебры являются комбинацией не однородных трехмерных векторных алгебр. Из этого следует вывод, что 2^n-1-мерные ($n>3$) **алгебры являются совокупностями трехмерных не однородных алгебр.**

Векторное произведение двух векторов в трехмерной алгебре определяется с помощью одного определителя третьего порядка, в семимерной алгебре- с помощью семи определителей третьего порядка, в пятнадцатимерной алгебре – с помощью 35 определителей третьего порядка. Попытаемся отыскать векторное произведение двух векторов 31-одномерной алгебры в расчете на определение его как совокупности трехмерных векторных произведений двух векторов. Рассмотрим в связи с этим порядок получения 31-одномерной векторной алгебры, используя известную процедуру удвоения чисел. Эта процедура позволяет получить из алгебры одномерных чисел комплексные числа, кватернионы и октонионы, замыкающие цепочку гиперкомплексных чисел с делением. Векторным алгебрам, однако, в принципе не свойственно наличие операции деления и получения обратных величин, поэтому замечательный результат ограниченности числа гиперкомплексных чисел с делением четырьмя типами чисел не является ограничением для получения многомерных векторных алгебр. Так ранее была получена [3] пятнадцатимерная векторная алгебра, векторное произведение двух векторов в которой распадается на совокупность 35-ти определителей третьего порядка, что можно рассматривать как совокупность 35-ти трехмерных пространств. Одной из особенностей 7-ми, 15-ти , 31-но и вообще 2n-1- мерных векторных алгебр является, в частности, наличие операции векторного произведения трех векторов.

Применим в начале процедуру удвоения [1,3] к 8-ми мерным гиперкомплексным числам и запишем векторное произведение двух векторов. При этом произведением двух пар восьмимерных чисел $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1)$ и $\boldsymbol{b}=(b_0,b_1)$ назовем пару

$$\boldsymbol{ab}=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1,\ \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

т.е.

$$\boldsymbol{ab}=(a_0,\ a_1)(b_0,\ b_1)=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1,\ \bar{a}_0b_1+b_0a_1).$$

В координатной форме записи операции умножения двух пар 8-ми мерных чисел $\boldsymbol{ab}$ и далее двух 15ти-мерных векторов могут быть представлены таблицей, приведенной на альбомном листе. Здесь $\boldsymbol{ab}$- произведение двух шестнадцати мерных чисел, дающее в результате скалярное $(\boldsymbol{ab})$, а также векторное $[\boldsymbol{ab}]$ произведения двух векторных 15-ти мерных величин. При этом определяется произведение двух векторных величин с пятнадцатью значащими координатами.

В результате скалярное и векторное произведения двух векторов имеют вид, представленный на альбомном листе. Здесь $\boldsymbol{a_i}$- i-ая координата Пятнадцатимерного вектора, $\boldsymbol{b_j}$- j- ая координата Пятнадцатимерного вектора $\boldsymbol{b}$. Каждая из пятнадцати координат векторного произведения двух векторов состоит из пятнадцати попарных произведений величин $\boldsymbol{a_i}$ и $\boldsymbol{b_j}$ связанных между собой алгебраической суммой. Таким образом, векторное произведение двух векторов можно получить применением процедуры удвоения.

Эта процедура в применении к тридцати одномерной алгебре позволяет привести таблицу 1. В таблице 1, первый столбик выделен жирным шрифтом и соответствует немому индексу i при координате $\boldsymbol{a_i}$, второй столбик – соответствует немому индексу j при координате $\boldsymbol{b_j}$. Произведениям $a_i \cdot b_j$ соответствует пара соседних столбиков. Четверки столбиков формируют величины коммутаторов $\boldsymbol{a_i} \cdot \boldsymbol{b_j} - \boldsymbol{b_i} \cdot \boldsymbol{a_j}$. Пятнадцать коммутаторов, суммируемые построчно, представляют одну из координат векторного произведения двух тридцати одно мерных векторов. В результате, в этой таблице отражается как скалярное (верхняя строчка), так и векторное произведение двух тридцати одно мерных векторов (остальные тридцать одна строчка). Все пары значений $a_i{\cdot}b_j$ суммируются построчно, так что образуется 30 слагаемых составленных из произведений и последующих алгебраических сумм пар значений координат (билинейных уравнений) в каждой из 31 строки. Произведения величин с индексом нуль суммируются для получения скалярного произведения двух векторов, определяемого первой строкой таблицы 1. Отметим, что суммарное число отрицательных знаков в таблице 1 равно совершенному числу 496=16·31.

Векторное произведение двух векторов можно представить в виде:

$$[\boldsymbol{ab}]=[(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+a_{31}\boldsymbol{e}_{31})(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+b_{31}\boldsymbol{e}_{31})],$$

определяющем суммы 15 коммутаторов вида $[a_i{\cdot}b_j]=a_i{\cdot}b_j-a_j{\cdot}b_i$ в каждой из 31-ой координат, т.е. 31·15=465 величин $[a_i{\cdot}b_j]$ (таблица 2).

Та же таблица может быть представлена в виде суммы 155 определителей (таблица 3) третьего порядка.

$\boldsymbol{ab}=$

a_0b_0	$-a_1b_1$	$-a_2b_2$	$-a_3b_3$	$-a_4b_4$	$-a_5b_5$	$-a_6b_6$	$-a_7b_7$	$-a_8b_8$	$-a_9b_9$	$-a_{10}b_{10}$	$-a_{11}b_{11}$	$-a_{12}b_{12}$	$-a_{13}b_{13}$	$-a_{14}b_{14}$	$-a_{15}b_{15}$
a_0b_1	$+a_1b_0$	$-a_2b_3$	$+a_3b_2$	$-a_4b_5$	$+a_5b_4$	$-a_7b_6$	$+a_6b_7$	$-a_8b_9$	$+a_9b_8$	$-a_{11}b_{10}$	$+a_{10}b_{11}$	$-a_{13}b_{12}$	$+a_{12}b_{13}$	$-a_{14}b_{15}$	$+a_{15}b_{14}$
a_0b_2	$+a_2b_0$	$-a_4b_6$	$+a_6b_4$	$-a_5b_7$	$+a_7b_5$	$-a_3b_1$	$+a_1b_3$	$-a_8b_{10}$	$+a_{10}b_8$	$-a_{14}b_{12}$	$+a_{12}b_{14}$	$-a_{15}b_{13}$	$+a_{13}b_{15}$	$-a_9b_{11}$	$+a_{11}b_9$
a_0b_3	$+a_3b_0$	$-a_6b_5$	$+a_5b_6$	$-a_1b_2$	$+a_2b_1$	$-a_4b_7$	$+a_7b_4$	$-a_8b_{11}$	$+a_{11}b_8$	$-a_{13}b_{14}$	$+a_{14}b_{13}$	$-a_{10}b_9$	$+a_9b_{10}$	$-a_{15}b_{12}$	$+a_{12}b_{15}$
a_0b_4	$+a_4b_0$	$-a_5b_1$	$+a_1b_5$	$-a_7b_3$	$+a_3b_7$	$-a_6b_2$	$+a_2b_6$	$-a_8b_{12}$	$+a_{12}b_8$	$-a_9b_{13}$	$+a_{13}b_9$	$-a_{11}b_{15}$	$+a_{15}b_{11}$	$-a_{10}b_{14}$	$+a_{14}b_{10}$
a_0b_5	$+a_5b_0$	$-a_7b_2$	$+a_2b_7$	$-a_3b_6$	$+a_6b_3$	$-a_1b_4$	$+a_4b_1$	$-a_8b_{13}$	$+a_{13}b_8$	$-a_{10}b_{15}$	$+a_{15}b_{10}$	$-a_{14}b_{11}$	$+a_{11}b_{14}$	$-a_{12}b_9$	$+a_9b_{12}$
a_0b_6	$+a_6b_0$	$-a_1b_7$	$+a_7b_1$	$-a_2b_4$	$+a_4b_2$	$-a_5b_3$	$+a_3b_5$	$-a_8b_{14}$	$+a_{14}b_8$	$-a_{15}b_9$	$+a_9b_{15}$	$-a_{12}b_{10}$	$+a_{10}b_2$	$-a_{11}b_{13}$	$+a_{13}b_{11}$
a_0b_7	$+a_7b_0$	$-a_3b_4$	$+a_4b_3$	$-a_6b_1$	$+a_1b_6$	$-a_2b_5$	$+a_5b_2$	$-a_8b_{15}$	$+a_{15}b_8$	$-a_{12}b_{11}$	$+a_{11}b_{12}$	$-a_9b_{14}$	$+a_{14}b_9$	$-a_{13}b_{10}$	$+a_{10}b_{13}$
a_0b_8	$+a_8b_0$	$-a_9b_1$	$+a_1b_9$	$-a_{10}b_2$	$+a_2b_{10}$	$-a_{11}b_3$	$+a_3b_{11}$	$-a_{12}b_4$	$+a_4b_{12}$	$-a_{13}b_5$	$+a_5b_{13}$	$-a_{14}b_6$	$+a_6b_{14}$	$-a_{15}b_7$	$+a_7b_{15}$
a_0b_9	$+a_9b_0$	$-a_3b_{10}$	$+a_{10}b_3$	$-a_5b_{12}$	$+a_{12}b_5$	$-a_6b_{15}$	$+a_{15}b_6$	$-a_1b_8$	$+a_8b_1$	$-a_{11}b_2$	$+a_2b_{11}$	$-a_{13}b_4$	$+a_4b_{13}$	$-a_{14}b_7$	$+a_7b_{14}$
a_0b_{10}	$+a_{10}b_0$	$-a_6b_{12}$	$+a_{12}b_6$	$-a_7b_{13}$	$+a_{13}b_7$	$-a_1b_{11}$	$+a_{11}b_1$	$-a_2b_8$	$+a_8b_2$	$-a_{14}b_4$	$+a_4b_{14}$	$-a_{15}b_5$	$+a_5b_{15}$	$-a_9b_3$	$+a_3b_9$
a_0b_{11}	$+a_{11}b_0$	$-a_5b_{14}$	$+a_{14}b_5$	$-a_2b_9$	$+a_9b_2$	$-a_7b_{12}$	$+a_{12}b_7$	$-a_3b_8$	$+a_8b_3$	$-a_{13}b_6$	$+a_6b_{13}$	$-a_{10}b_1$	$+a_1b_{10}$	$-a_{15}b_4$	$+a_4b_{15}$
a_0b_{12}	$+a_{12}b_0$	$-a_1b_{13}$	$+a_{13}b_1$	$-a_3b_{15}$	$+a_{15}b_3$	$-a_2b_{14}$	$+a_{14}b_2$	$-a_4b_8$	$+a_8b_4$	$-a_9b_5$	$+a_5b_9$	$-a_{11}b_7$	$+a_7b_{11}$	$-a_{10}b_6$	$+a_6b_{10}$
a_0b_{13}	$+a_{13}b_0$	$-a_2b_{15}$	$+a_{15}b_2$	$-a_6b_{11}$	$+a_{11}b_6$	$-a_4b_9$	$+a_9b_4$	$-a_5b_8$	$+a_8b_5$	$-a_{10}b_7$	$+a_7b_{10}$	$-a_{14}b_3$	$+a_3b_{14}$	$-a_{12}b_1$	$+a_1b_{12}$
a_0b_{14}	$+a_{14}b_0$	$-a_7b_9$	$+a_9b_7$	$-a_4b_{10}$	$+a_{10}b_4$	$-a_3b_{13}$	$+a_{13}b_3$	$-a_6b_8$	$+a_8b_6$	$-a_{15}b_1$	$+a_1b_{15}$	$-a_{12}b_2$	$+a_2b_{12}$	$-a_{11}b_5$	$+a_5b_{11}$
a_0b_{15}	$+a_{15}b_0$	$-a_4b_{11}$	$+a_{11}b_4$	$-a_1b_{14}$	$+a_{14}b_1$	$-a_5b_{10}$	$+a_{10}b_5$	$-a_7b_8$	$+a_8b_7$	$-a_{12}b_3$	$+a_3b_{12}$	$-a_9b_6$	$+a_6b_9$	$-a_{13}b_2$	$+a_2b_{13}$

$(ab)=$

$-a_1b_1$ $-a_2b_2$ $-a_3b_3$ $-a_4b_4$ $-a_5b_5$ $-a_6b_6$ $-a_7b_7$ $-a_8b_8$ $-a_9b_9$ $-a_{10}b_{10}$ $-a_{11}b_{11}$ $-a_{12}b_{12}$ $-a_{13}b_{13}$ $-a_{14}b_{14}$ $-a_{15}b_{15}$

$[ab]=$

$-a_2b_3$	$+a_3b_2$	$-a_4b_5$	$+a_5b_4$	$-a_7b_6$	$+a_6b_7$	$-a_8b_9$	$+a_9b_8$	$-a_{11}b_{10}$	$+a_{10}b_{11}$	$-a_{13}b_{12}$	$+a_{12}b_{13}$	$-a_{14}b_{15}$	$+a_{15}b_{14}$
$-a_4b_6$	$+a_6b_4$	$-a_5b_7$	$+a_7b_5$	$-a_3b_1$	$+a_1b_3$	$-a_8b_{10}$	$+a_{10}b_8$	$-a_{14}b_{12}$	$+a_{12}b_{14}$	$-a_{15}b_{13}$	$+a_{13}b_{15}$	$-a_9b_{11}$	$+a_{11}b_9$
$-a_6b_5$	$+a_5b_6$	$-a_1b_2$	$+a_2b_1$	$-a_4b_7$	$+a_7b_4$	$-a_8b_{11}$	$+a_{11}b_8$	$-a_{13}b_{14}$	$+a_{14}b_{13}$	$-a_{10}b_9$	$+a_9b_{10}$	$-a_{15}b_{12}$	$+a_{12}b_{15}$
$-a_5b_1$	$+a_1b_5$	$-a_7b_3$	$+a_3b_7$	$-a_6b_2$	$+a_2b_6$	$-a_8b_{12}$	$+a_{12}b_8$	$-a_9b_{13}$	$+a_{13}b_9$	$-a_{11}b_{15}$	$+a_{15}b_{11}$	$-a_{10}b_{14}$	$+a_{14}b_{10}$
$-a_7b_2$	$+a_2b_7$	$-a_3b_6$	$+a_6b_3$	$-a_1b_4$	$+a_4b_1$	$-a_8b_{13}$	$+a_{13}b_8$	$-a_{10}b_{15}$	$+a_{15}b_{10}$	$-a_{14}b_{11}$	$+a_{11}b_{14}$	$-a_{12}b_9$	$+a_9b_{12}$
$-a_1b_7$	$+a_7b_1$	$-a_2b_4$	$+a_4b_2$	$-a_5b_3$	$+a_3b_5$	$-a_8b_{14}$	$+a_{14}b_8$	$-a_{15}b_9$	$+a_9b_{15}$	$-a_{12}b_{10}$	$+a_{10}b_2$	$-a_{11}b_{13}$	$+a_{13}b_{11}$
$-a_3b_4$	$+a_4b_3$	$-a_6b_1$	$+a_1b_6$	$-a_2b_5$	$+a_5b_2$	$-a_8b_{15}$	$+a_{15}b_8$	$-a_{12}b_{11}$	$+a_{11}b_{12}$	$-a_9b_{14}$	$+a_{14}b_9$	$-a_{13}b_{10}$	$+a_{10}b_{13}$
$-a_9b_1$	$+a_1b_9$	$-a_{10}b_2$	$+a_2b_{10}$	$-a_{11}b_3$	$+a_3b_{11}$	$-a_{12}b_4$	$+a_4b_{12}$	$-a_{13}b_5$	$+a_5b_{13}$	$-a_{14}b_6$	$+a_6b_{14}$	$-a_{15}b_7$	$+a_7b_{15}$
$-a_3b_{10}$	$+a_{10}b_3$	$-a_5b_{12}$	$+a_{12}b_5$	$-a_6b_{15}$	$+a_{15}b_6$	$-a_1b_8$	$+a_8b_1$	$-a_{11}b_2$	$+a_2b_{11}$	$-a_{13}b_4$	$+a_4b_{13}$	$-a_{14}b_7$	$+a_7b_{14}$
$-a_6b_{12}$	$+a_{12}b_6$	$-a_7b_{13}$	$+a_{13}b_7$	$-a_1b_{11}$	$+a_{11}b_1$	$-a_2b_8$	$+a_8b_2$	$-a_{14}b_4$	$+a_4b_{14}$	$-a_{15}b_5$	$+a_5b_{15}$	$-a_9b_3$	$+a_3b_9$
$-a_5b_{14}$	$+a_{14}b_5$	$-a_2b_9$	$+a_9b_2$	$-a_7b_{12}$	$+a_{12}b_7$	$-a_3b_8$	$+a_8b_3$	$-a_{13}b_6$	$+a_6b_{13}$	$-a_{10}b_1$	$+a_1b_{10}$	$-a_{15}b_4$	$+a_4b_{15}$
$-a_1b_{13}$	$+a_{13}b_1$	$-a_3b_{15}$	$+a_{15}b_3$	$-a_2b_{14}$	$+a_{14}b_2$	$-a_4b_8$	$+a_8b_4$	$-a_9b_5$	$+a_5b_9$	$-a_{11}b_7$	$+a_7b_{11}$	$-a_{10}b_6$	$+a_6b_{10}$
$-a_2b_{15}$	$+a_{15}b_2$	$-a_6b_{11}$	$+a_{11}b_6$	$-a_4b_9$	$+a_9b_4$	$-a_5b_8$	$+a_8b_5$	$-a_{10}b_7$	$+a_7b_{10}$	$-a_{14}b_3$	$+a_3b_{14}$	$-a_{12}b_1$	$+a_1b_{12}$
$-a_7b_9$	$+a_9b_7$	$-a_4b_{10}$	$+a_{10}b_4$	$-a_3b_{13}$	$+a_{13}b_3$	$-a_6b_8$	$+a_8b_6$	$-a_{15}b_1$	$+a_1b_{15}$	$-a_{12}b_2$	$+a_2b_{12}$	$-a_{11}b_5$	$+a_5b_{11}$
$-a_4b_{11}$	$+a_{11}b_4$	$-a_1b_{14}$	$+a_{14}b_1$	$-a_5b_{10}$	$+a_{10}b_5$	$-a_7b_8$	$+a_8b_7$	$-a_{12}b_3$	$+a_3b_{12}$	$-a_9b_6$	$+a_6b_9$	$-a_{13}b_2$	$+a_2b_{13}$

Таблица 1.

0	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5	-6	6	-7	7	-8	8	-9	9	-10	10	-11	11	-12	12	-13	13	-14	14	-15	15
0	1	1	0	3	2	-2	3	5	4	-4	5	6	7	-7	6	9	8	-8	9	10	11	-11	10	12	13	-13	12	15	14	-14	15
0	2	1	3	2	0	-3	1	6	4	7	5	-4	6	-5	7	10	8	11	9	-8	10	-9	11	12	14	13	15	-14	12	-15	13
0	3	-1	2	3	0	2	1	7	4	-6	5	-4	7	5	6	11	8	-10	9	-8	11	9	10	12	15	-13	14	-15	12	14	13
0	4	1	5	2	6	3	7	4	0	-5	1	-6	2	-7	3	12	8	13	9	14	10	15	11	-8	12	-9	13	-10	14	-11	15
0	5	-1	4	-3	6	2	7	5	0	4	1	6	3	-7	2	13	8	-12	9	-14	11	15	10	-8	13	9	12	11	14	-10	15
0	6	-1	7	-2	4	3	5	6	0	7	1	4	2	-5	3	14	8	-15	9	-12	10	13	11	-8	14	9	15	10	12	-11	13
0	7	1	6	-3	4	-2	5	7	0	-6	1	4	3	5	2	15	8	14	9	-12	11	-13	10	-8	15	-9	14	11	12	10	13
0	8	1	9	2	10	3	11	4	12	5	13	6	14	7	15	8	0	-9	1	-10	2	-11	3	-12	4	-13	5	-14	6	-15	7
0	9	-1	8	-3	10	2	11	-5	12	4	13	-6	15	7	14	9	0	8	1	10	3	-11	2	12	5	-13	4	15	6	-14	7
0	10	-1	11	-2	8	3	9	-6	12	-7	13	4	14	5	15	10	0	11	1	8	2	-9	3	12	6	13	7	-14	4	-15	5
0	11	1	10	-3	8	-2	9	-7	12	6	13	4	15	-5	14	11	0	-10	1	8	3	9	2	12	7	-13	6	-15	4	14	5
0	12	-1	13	-2	14	-3	15	-4	8	5	9	6	10	7	11	12	0	13	1	14	2	15	3	8	4	-9	5	-10	6	-11	7
0	13	1	12	3	14	-2	15	-5	8	-4	9	-6	11	7	10	13	0	-12	1	-14	3	15	2	8	5	9	4	11	6	-10	7
0	14	1	15	2	12	-3	13	-6	8	-7	9	-4	10	5	11	14	0	-15	1	-12	2	13	3	8	6	9	7	10	4	-11	5
0	15	-1	14	3	12	2	13	-7	8	6	9	-4	11	-5	10	15	0	14	1	-12	3	-13	2	8	7	-9	6	11	4	10	5
0	16	1	17	2	18	3	19	4	20	5	21	6	22	7	23	8	24	9	25	10	26	11	27	12	28	13	29	14	30	15	31
0	17	-1	16	-3	18	2	19	-5	20	4	21	-6	23	7	22	9	24	8	25	-10	27	11	26	-12	29	13	28	-15	30	14	31
0	18	-1	19	-2	16	3	17	-6	20	-7	21	4	22	5	23	10	24	-11	25	8	26	9	27	-12	30	-13	31	14	28	15	29
0	19	1	18	-3	16	-2	17	-7	20	6	21	4	23	-5	22	11	24	10	25	8	27	-9	26	-12	31	13	30	15	28	-14	29
0	20	-1	21	-2	22	-3	23	-4	16	5	17	6	18	7	19	12	24	-13	25	-14	26	-15	27	8	28	9	29	10	30	11	31
0	21	1	20	3	22	-2	23	-5	16	-4	17	-6	19	7	18	13	24	12	25	14	27	-15	26	8	29	-9	28	-11	30	10	31
0	22	1	23	2	20	-3	21	-6	16	-7	17	-4	18	5	19	14	24	15	25	12	26	-13	27	8	30	-9	31	-10	28	11	29
0	23	-1	22	3	20	2	21	-7	16	6	17	-4	19	-5	18	15	24	-14	25	12	27	13	26	8	31	9	30	-11	28	-10	29
0	24	-1	25	-2	26	-3	27	-4	28	-5	29	-6	30	-7	31	-8	16	9	17	10	18	11	19	12	20	13	21	14	22	15	23
0	25	1	24	3	26	-2	27	5	28	-4	29	6	31	-7	30	-9	16	-8	17	-10	19	11	18	-12	21	13	20	-15	22	14	23
0	26	1	27	2	24	-3	25	6	28	7	29	-4	30	-5	31	-10	16	-11	17	-8	18	9	19	-12	22	-13	23	14	20	15	21
0	27	-1	26	3	24	2	25	7	28	-6	29	-4	31	5	30	-11	16	10	17	-8	19	-9	18	-12	23	13	22	15	20	-14	21
0	28	1	29	2	30	3	31	4	24	-5	25	-6	26	-7	27	-12	16	-13	17	-14	18	-15	19	-8	20	9	21	10	22	11	23
0	29	-1	28	-3	30	2	31	5	24	4	25	6	27	-7	26	-13	16	12	17	14	19	-15	18	-8	21	-9	20	-11	22	10	23
0	30	-1	31	-2	28	3	29	6	24	7	25	4	26	-5	27	-14	16	15	17	12	18	-13	19	-8	22	-9	23	-10	20	11	21
0	31	1	30	-3	28	-2	29	7	24	-6	25	4	27	5	26	-15	16	-14	17	12	19	13	18	-8	23	9	22	-11	20	-10	21

Продолжение таблицы 1.

-16	16	-17	17	-18	18	-19	19	-20	20	-21	21	-22	22	-23	23	-24	24	-25	25	-26	26	-27	27	-28	28	-29	29	-30	30	-31	31
17	16	-16	17	18	19	-19	18	20	21	-21	20	23	22	-22	23	24	25	-25	24	27	26	-26	27	29	28	-28	29	30	31	-31	30
18	16	19	17	-16	18	-17	19	20	22	21	23	-22	20	-23	21	24	26	25	27	-26	24	-27	25	30	28	31	29	-28	30	-29	31
19	16	-18	17	-16	19	17	18	20	23	-21	22	-23	20	22	21	24	27	-25	26	-27	24	26	25	31	28	-30	29	-28	31	29	30
20	16	21	17	22	18	23	19	-16	20	-17	21	-18	22	-19	23	24	28	25	29	26	30	27	31	-28	24	-29	25	-30	26	-31	27
21	16	-20	17	-22	19	23	18	-16	21	17	20	19	22	-18	23	24	29	-25	28	-27	30	26	31	-29	24	28	25	30	27	-31	26
22	16	-23	17	-20	18	21	19	-16	22	17	23	18	20	-19	21	24	30	-25	31	-26	28	27	29	-30	24	31	25	28	26	-29	27
23	16	22	17	-20	19	-21	18	-16	23	-17	22	19	20	18	21	24	31	25	30	-27	28	-26	29	-31	24	-30	25	28	27	29	26
24	16	25	17	26	18	27	19	28	20	29	21	30	22	31	23	-16	24	-17	25	-18	26	-19	27	-20	28	-21	29	-22	30	-23	31
25	16	-24	17	-26	19	27	18	-28	21	29	20	-31	22	30	23	-16	25	17	24	19	26	-18	27	21	28	-20	29	22	31	-23	30
26	16	-27	17	-24	18	25	19	-28	22	-29	23	30	20	31	21	-16	26	17	27	18	24	-19	25	22	28	23	29	-20	30	-21	31
27	16	26	17	-24	19	-25	18	-28	23	29	22	31	20	-30	21	-16	27	-17	26	19	24	18	25	23	28	-22	29	-20	31	21	30
28	16	-29	17	-30	18	-31	19	-24	20	25	21	26	22	27	23	-16	28	17	29	18	30	19	31	20	24	-21	25	-22	26	-23	27
29	16	28	17	30	19	-31	18	-24	21	-25	20	-27	22	26	23	-16	29	-17	28	-19	30	18	31	21	24	20	25	22	27	-23	26
30	16	31	17	28	18	-29	19	-24	22	-25	23	-26	20	27	21	-16	30	-17	31	-18	28	19	29	22	24	23	25	20	26	-21	27
31	16	-30	17	28	19	29	18	-24	23	25	22	-27	20	-26	21	-16	31	17	30	-19	28	-18	29	23	24	-22	25	20	27	21	26
16	0	-17	1	-18	2	-19	3	-20	4	-21	5	-22	6	-23	7	-24	8	-25	9	-26	10	-27	11	-28	12	-29	13	-30	14	-31	15
17	0	16	1	18	3	-19	2	20	5	-21	4	23	6	-22	7	-24	9	-25	8	27	10	-26	11	29	12	-28	13	30	15	-31	14
18	0	19	1	16	2	-17	3	20	6	21	7	-22	4	-23	5	-24	10	25	11	-26	8	-27	9	30	12	31	13	-28	14	-29	15
19	0	-18	1	16	3	17	2	20	7	-21	6	-23	4	22	5	-24	11	-25	10	-27	8	26	9	31	12	-30	13	-28	15	29	14
20	0	21	1	22	2	23	3	16	4	-17	5	-18	6	-19	7	-24	12	25	13	26	14	27	15	-28	8	-29	9	-30	10	-31	11
21	0	-20	1	-22	3	23	2	16	5	17	4	19	6	-18	7	-24	13	-25	12	-27	14	26	15	-29	8	28	9	30	11	-31	10
22	0	-23	1	-20	2	21	3	16	6	17	7	18	4	-19	5	-24	14	-25	15	-26	12	27	13	-30	8	31	9	28	10	-29	11
23	0	22	1	-20	3	-21	2	16	7	-17	6	19	4	18	5	-24	15	25	14	-27	12	-26	13	-31	8	-30	9	28	11	29	10
24	0	25	1	26	2	27	3	28	4	29	5	30	6	31	7	16	8	-17	9	-18	10	-19	11	-20	12	-21	13	-22	14	-23	15
25	0	-24	1	-26	3	27	2	-28	5	29	4	-31	6	30	7	16	9	17	8	19	10	-18	11	21	12	-20	13	22	15	-23	14
26	0	-27	1	-24	2	25	3	-28	6	-29	7	30	4	31	5	16	10	17	11	18	8	-19	9	22	12	23	13	-20	14	-21	15
27	0	26	1	-24	3	-25	2	-28	7	29	6	31	4	-30	5	16	11	-17	10	19	8	18	9	23	12	-22	13	-20	15	21	14
28	0	-29	1	-30	2	-31	3	-24	4	25	5	26	6	27	7	16	12	17	13	18	14	19	15	20	8	-21	9	-22	10	-23	11
29	0	28	1	30	3	-31	2	-24	5	-25	4	-27	6	26	7	16	13	-17	12	-19	14	18	15	21	8	20	9	22	11	-23	10
30	0	31	1	28	2	-29	3	-24	6	-25	7	-26	4	27	5	16	14	-17	15	-18	12	19	13	22	8	23	9	20	10	-21	11
31	0	-30	1	28	3	29	2	-24	7	25	6	-27	4	-26	5	16	15	17	14	-19	12	-18	13	23	8	-22	9	20	11	21	10

Таблица 2.

1	*2 . 3*	*4 . 5*	*7 . 6*	*8 . 9*	*11.10*	*13.12*	*14.15*	*16.17*	*19.18*	*21.20*	*22.23*	*25.24*	*26.27*	*28.29*	*31.30*
2	*4 , 6*	*5 , 7*	*3 , 1*	*8 ,10*	*14,12*	*15,13*	*9 ,11*	*16,18*	*22,20*	*23,21*	*17,19*	*26,24*	*28,30*	*29,31*	*27,25*
3	*6 , 5*	*1 , 2*	*4 , 7*	*8 ,11*	*13,14*	*10, 9*	*15,12*	*16,19*	*21,22*	*18,17*	*23,20*	*27,24*	*30,29*	*25,26*	*28,31*
4	*5 , 1*	*7 , 3*	*6 , 2*	*8 ,12*	*9 ,13*	*11,15*	*10,14*	*16,20*	*17,21*	*19,23*	*18,22*	*28,24*	*29,25*	*31,27*	*30,26*
5	*7 , 2*	*3 , 6*	*1 , 4*	*8 ,13*	*10,15*	*14,11*	*12, 9*	*16,21*	*18,23*	*22,19*	*20,17*	*29,24*	*31,26*	*27,30*	*25,28*
6	*1 , 7*	*2 , 4*	*5 , 3*	*8 ,14*	*15, 9*	*12,10*	*11,13*	*16,22*	*23,17*	*20,18*	*19,21*	*30,24*	*25,31*	*26,28*	*29,27*
7	*3 , 4*	*6 , 1*	*2 , 5*	*8 ,15*	*12,11*	*9 ,14*	*13,10*	*16,23*	*20,19*	*17,22*	*21,18*	*31,24*	*27,28*	*30,25*	*26,29*
8	*9 . 1*	*10. 2*	*11. 3*	*12. 4*	*13. 5*	*14. 6*	*15. 7*	*16.24*	*17.25*	*18.26*	*19.27*	*20.28*	*21.29*	*22.30*	*23.31*
9	*11. 2*	*13. 4*	*14. 7*	*1 . 8*	*3 .10*	*5 .12*	*6 .15*	*16.25*	*18.27*	*20.29*	*23.30*	*24.17*	*26.19*	*28.21*	*31.22*
10	*14, 4*	*15, 5*	*9 , 3*	*2 , 8*	*6 ,12*	*7 ,13*	*1 ,11*	*16,26*	*20,30*	*21,31*	*19,25*	*24,18*	*28,22*	*29,23*	*27,17*
11	*13, 6*	*10, 1*	*15, 4*	*3 , 8*	*5 ,14*	*2 , 9*	*7 ,12*	*16,27*	*22,29*	*17,26*	*20,31*	*24,19*	*30,21*	*25,18*	*28,23*
12	*9 , 5*	*11, 7*	*10, 6*	*4 , 8*	*1 ,13*	*3 ,15*	*2 ,14*	*16,28*	*21,25*	*23,27*	*22,26*	*24,20*	*29,17*	*31,19*	*30,18*
13	*10, 7*	*14, 3*	*12, 1*	*5 , 8*	*2 ,15*	*6 ,11*	*4 , 9*	*16,29*	*23,26*	*19,30*	*17,28*	*24,21*	*31,18*	*27,22*	*25,20*
14	*15, 1*	*12, 2*	*11, 5*	*6 , 8*	*7 , 9*	*4 ,10*	*3 ,13*	*16,30*	*17,31*	*18,28*	*21,27*	*24,22*	*25,23*	*26,20*	*29,19*
15	*12, 3*	*9 , 6*	*13, 2*	*7 , 8*	*4 ,11*	*1 ,14*	*5 ,10*	*16,31*	*19,28*	*22,25*	*18,29*	*24,23*	*27,20*	*30,17*	*26,21*
16	*17. 1*	*18. 2*	*19. 3*	*20. 4*	*21. 5*	*22. 6*	*23. 7*	*24. 8*	*25. 9*	*26.10*	*27.11*	*28.12*	*29.13*	*30.14*	*31.15*
17	*19. 2*	*21. 4*	*22. 7*	*25. 8*	*10.27*	*12.29*	*15.30*	*1 .16*	*3 .18*	*5 .20*	*6 .23*	*9 .24*	*26.11*	*28.13*	*31.14*
18	*22, 4*	*23, 5*	*17, 3*	*26, 8*	*12,30*	*13,31*	*11,25*	*2 ,16*	*6 ,20*	*7 ,21*	*1 ,19*	*10,24*	*28,14*	*29,15*	*27 ,9*
19	*21, 6*	*18, 1*	*23, 4*	*27, 8*	*14,29*	*9 ,26*	*12,31*	*3 ,16*	*5 ,22*	*2 ,17*	*7 ,20*	*11,24*	*30,13*	*25,10*	*28,15*
20	*17, 5*	*19, 7*	*18, 6*	*28, 8*	*13,25*	*15,27*	*14,26*	*4 ,16*	*1 ,21*	*3 ,23*	*2 ,22*	*12,24*	*29 ,9*	*31,11*	*30,10*
21	*18, 7*	*22, 3*	*20, 1*	*29, 8*	*15,26*	*11,30*	*9 ,28*	*5 ,16*	*2 ,23*	*6 ,19*	*4 ,17*	*13,24*	*31,10*	*27,14*	*25,12*
22	*23, 1*	*20, 2*	*19, 5*	*30, 8*	*9 ,31*	*10,28*	*13,27*	*6 ,16*	*7 ,17*	*4 ,18*	*3 ,21*	*14,24*	*25,15*	*26,12*	*29,11*
23	*20, 3*	*17, 6*	*21, 2*	*31, 8*	*11,28*	*14,25*	*10,29*	*7 ,16*	*4 ,19*	*1 ,22*	*5 ,18*	*15,24*	*27,12*	*30, 9*	*26,13*
24	*1 .25*	*2 .26*	*3 .27*	*4 .28*	*5 .29*	*6 .30*	*7 .31*	*8 .16*	*17. 9*	*18.10*	*19.11*	*20.12*	*21.13*	*22.14*	*23.15*
25	*2 .27*	*4 .29*	*7 .30*	*8 .17*	*10.19*	*12.21*	*15.22*	*9 .16*	*18.11*	*20.13*	*23.14*	*24. 1*	*26. 3*	*28. 5*	*31. 6*
26	*4 ,30*	*5 ,31*	*3 ,25*	*8 ,18*	*12,22*	*13,23*	*11,17*	*10,16*	*20,14*	*21,15*	*19, 9*	*24, 2*	*28, 6*	*29, 7*	*27, 1*
27	*6 ,29*	*1 ,26*	*4 ,31*	*8 ,19*	*14,21*	*9 ,18*	*12,23*	*11,16*	*22,13*	*17,10*	*20,15*	*24, 3*	*30, 5*	*25, 2*	*28, 7*
28	*5 ,25*	*7 ,27*	*6 ,26*	*8 ,20*	*13,17*	*15,19*	*14,18*	*12,16*	*21, 9*	*23,11*	*22,10*	*24, 4*	*29, 1*	*31, 3*	*30, 2*
29	*7 ,26*	*3 ,30*	*1 ,28*	*8 ,21*	*15,18*	*11,22*	*9 ,20*	*13,16*	*23,10*	*19,14*	*17,12*	*24, 5*	*31, 2*	*27, 6*	*25, 4*
30	*1 ,31*	*2 ,28*	*5 ,27*	*8 ,22*	*9 ,23*	*10,20*	*13,19*	*14,16*	*17,15*	*18,12*	*21,11*	*24, 6*	*25, 7*	*26, 4*	*29, 3*
31	*3 ,28*	*6 ,25*	*2 ,29*	*8 ,23*	*11,20*	*14,17*	*10,21*	*15,16*	*19,12*	*22, 9*	*18,13*	*24, 7*	*27, 4*	*30, 1*	*26, 5*

Таблица 3.

1	***2,3***	…	…	***8, 9***	***11,10***	***13,12***	***14,15***	***16,17***	***19,18***	***21,20***	***22,23***	***24,25***	***27,26***	***29,28***	***30,31***
2	***4,6***			***8,10***	***14,12***	***15,13***	***9 ,11***	***16,18***	***22,20***	***23,21***	***17,19***	***24,26***	***30,28***	***31,29***	***25,27***
3	***6,5***	…	…	***8,11***	***13,14***	***10, 9***	***15,12***	***16,19***	***21,22***	***18,17***	***23,20***	***24,27***	***29,30***	***26,25***	***31,28***
4	***5,1***			***8,12***	***9 ,13***	***11,15***	***10,14***	***16,20***	***17,21***	***19,23***	***18,22***	***24,28***	***25,29***	***27,31***	***26,30***
5	***7,2***	…	…	***8,13***	***10,15***	***14,11***	***12, 9***	***16,21***	***18,23***	***22,19***	***20,17***	***24,29***	***26,31***	***30,27***	***28,25***
6	***1,7***			***8,14***	***15 ,9***	***12,10***	***11,13***	***16,22***	***23,17***	***20,18***	***19,21***	***24,30***	***31,25***	***28,26***	***27,29***
7	***3,4***	…	…	***8,15***	***12,11***	***9 ,14***	***13,10***	***16,23***	***20,19***	***17,22***	***21,18***	***24,31***	***28,27***	***25,30***	***29,26***
8	…	…	…	…	…	…	…	***16,24***	***17,25***	***18,26***	***19,27***	***20,28***	***21,29***	***22,30***	***23,31***
9								***16,25***	***18,27***	***20,29***	***23,30***	***17,24***	***26,19***	***28,21***	***31,22***
10	…	…	…	…	…	…	…	***16,26***	***20,30***	***21,31***	***19,25***	***18,24***	***28,22***	***29,23***	***27,17***
11								***16,27***	***22,29***	***17,26***	***20,31***	***19,24***	***30,21***	***25,18***	***28,23***
12	…	…	…	…	…	…	…	***16,28***	***21,25***	***23,27***	***22,26***	***20,24***	***29,17***	***31,19***	***30,18***
13								***16,29***	***23,26***	***19,30***	***17,28***	***21,24***	***31,18***	***27,22***	***25,20***
14	…	…	…	…	…	…	…	***16,30***	***17,31***	***18,28***	***21,27***	***22,24***	***25,23***	***26,20***	***29,19***
15								***16,31***	***19,28***	***22,25***	***18,29***	***23,24***	***27,20***	***30,17***	***26,21***

Таблица 4.

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*	*27*	*28*	*29*	*30*	*31*
2	*4*	*6*	*5*	*7*	*1*	*3*	*8*	*10*	*12*	*14*	*13*	*15*	*9*	*11*	*16*	*18*	*20*	*22*	*21*	*23*	*17*	*19*	*24*	*26*	*28*	*30*	*29*	*31*	*25*	*27*
3	*6*	*5*	*1*	*2*	*7*	*4*	*8*	*11*	*14*	*13*	*9*	*10*	*15*	*12*	*16*	*19*	*22*	*21*	*17*	*18*	*23*	*20*	*24*	*27*	*30*	*29*	*25*	*26*	*31*	*28*
4	*5*	*1*	*7*	*3*	*2*	*6*	*8*	*12*	*13*	*9*	*15*	*11*	*10*	*14*	*16*	*20*	*21*	*17*	*23*	*19*	*18*	*22*	*24*	*28*	*29*	*25*	*31*	*27*	*26*	*30*
5	*7*	*2*	*3*	*6*	*4*	*1*	*8*	*13*	*15*	*10*	*11*	*14*	*12*	*9*	*16*	*21*	*23*	*18*	*19*	*22*	*20*	*17*	*24*	*29*	*31*	*25*	*27*	*30*	*28*	*25*
6	*1*	*7*	*2*	*4*	*3*	*5*	*8*	*14*	*9*	*15*	*10*	*12*	*11*	*13*	*16*	*22*	*17*	*23*	*18*	*20*	*19*	*21*	*24*	*30*	*25*	*31*	*26*	*28*	*27*	*29*
7	*3*	*4*	*6*	*1*	*5*	*2*	*8*	*15*	*11*	*12*	*14*	*9*	*13*	*10*	*16*	*23*	*19*	*20*	*22*	*17*	*21*	*18*	*24*	*31*	*27*	*28*	*30*	*25*	*29*	*26*

Таблица 5.

Lr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	0	-3	2	-5	4	7	-6	-9	8	11	-10	13	-12	-15	14	-17	16	19	-18	21	-20	-23	22	25	-24	-27	26	-29	28	31	-30
2	3	0	-1	-6	-7	4	5	-10	-11	8	9	14	15	-12	-13	-18	-19	16	17	22	23	-20	-21	26	27	-24	-25	-30	-31	28	29
3	-2	1	0	-7	6	-5	4	-11	10	-9	8	15	-14	13	-12	-19	18	-17	16	23	-22	21	-20	27	-26	25	-24	-31	30	-29	28
4	5	6	7	0	-1	-2	-3	-12	-13	-14	-15	8	9	10	11	-20	-21	-22	-23	16	17	18	19	28	29	30	31	-24	-25	-26	-27
5	-4	7	-6	1	0	3	-2	-13	12	-15	14	-9	8	-11	10	-21	20	-23	22	-17	16	-19	18	29	-28	31	-30	25	-24	27	-26
6	-7	-4	5	2	-3	0	1	-14	15	12	-13	-10	11	8	-9	-22	23	20	-21	-18	19	16	-17	30	-31	-28	29	26	-27	-24	25
7	6	-5	-4	3	2	-1	0	-15	-14	13	12	-11	-10	9	8	-23	-22	21	20	-19	-18	17	16	31	30	-29	-28	27	26	-25	-24
8	9	10	11	12	13	14	15	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-24	-25	-26	-27	-28	-29	-30	-31	16	17	18	19	20	21	22	23
9	-8	11	-10	13	-12	-15	14	1	0	3	-2	5	-4	-7	6	-25	24	-27	26	-29	28	31	-30	-17	16	-19	18	-21	20	23	-22
10	-11	-8	9	14	15	-12	-13	2	-3	0	1	6	7	-4	-5	-26	27	24	-25	-30	-31	28	29	-18	19	16	-17	-22	-23	20	21
11	10	-9	-8	15	-14	13	-12	3	2	-1	0	7	-6	5	-4	-27	-26	25	24	-31	30	-29	28	-19	-18	17	16	-23	22	-21	20
12	-13	-14	-15	-8	9	10	11	4	-5	-6	-7	0	1	2	3	-28	29	30	31	24	-25	-26	-27	-20	21	22	23	16	-17	-18	-19
13	12	-15	14	-9	-8	-11	10	5	4	-7	6	-1	0	-3	2	-29	-28	31	-30	25	24	27	-26	-21	-20	23	-22	17	16	19	-18
14	15	12	-13	-10	11	-8	-9	6	7	4	-5	-2	3	0	-1	-30	-31	-28	29	26	-27	24	25	-22	-23	-20	21	18	-19	16	17
15	-14	13	12	-11	-10	9	-8	7	-6	5	4	-3	-2	1	0	-31	30	-29	-28	27	26	-25	24	-23	22	-21	-20	19	18	-17	16
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15
17	-16	19	-18	21	-20	-23	22	25	-24	-27	26	-29	28	31	-30	1	0	3	-2	5	-4	-7	6	9	-8	-11	10	-13	12	15	-14
18	-19	-16	17	22	23	-20	-21	26	27	-24	-25	-30	-31	28	29	2	-3	0	1	6	7	-4	-5	10	11	-8	-9	-14	-15	12	13
19	18	-17	-16	23	-22	21	-20	27	-26	25	-24	-31	30	-29	28	3	2	-1	0	7	-6	5	-4	11	-10	9	-8	-15	14	-13	12
20	-21	-22	-23	-16	17	18	19	28	29	30	31	-24	-25	-26	-27	4	-5	-6	-7	0	1	2	3	12	13	14	15	-8	-9	-10	-11
21	20	-23	22	-17	-16	-19	18	29	-28	31	-30	25	-24	27	-26	5	4	-7	6	-1	0	-3	2	13	-12	15	-14	9	-8	11	-10
22	23	20	-21	-18	19	-16	-17	30	-31	-28	29	26	-27	-24	25	6	7	4	-5	-2	3	0	-1	14	-15	-12	13	10	-11	-8	9
23	-22	21	20	-19	-18	17	-16	31	30	-29	-28	27	26	-25	-24	7	-6	5	4	-3	-2	1	0	15	14	-13	-12	11	10	-9	-8
24	-25	-26	-27	-28	-29	-30	-31	-16	17	18	19	20	21	22	23	8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	0	1	2	3	4	5	6	7
25	24	-27	26	-29	28	31	-30	-17	-16	-19	18	-21	20	23	-22	9	8	-11	10	-13	12	15	-14	-1	0	-3	2	-5	4	7	-6
26	27	24	-25	-30	-31	28	29	-18	19	-16	-17	-22	-23	20	21	10	11	8	-9	-14	-15	12	13	-2	3	0	-1	-6	-7	4	5
27	-26	25	24	-31	30	-29	28	-19	-18	17	-16	-23	22	-21	20	11	-10	9	8	-15	14	-13	12	-3	-2	1	0	-7	6	-5	4
28	29	30	31	24	-25	-26	-27	-20	21	22	23	-16	-17	-18	-19	12	13	14	15	8	-9	-10	-11	-4	5	6	7	0	-1	-2	-3
29	-28	31	-30	25	24	27	-26	-21	-20	23	-22	17	-16	19	-18	13	-12	15	-14	9	8	11	-10	-5	-4	7	-6	1	0	3	-2
30	-31	-28	29	26	-27	24	25	-22	-23	-20	21	18	-19	-16	17	14	-15	-12	13	10	-11	8	9	-6	-7	-4	5	2	-3	0	1
31	30	-29	-28	27	26	-25	24	-23	22	-21	-20	19	18	-17	-16	15	14	-13	-12	11	10	-9	8	-7	6	-5	-4	3	2	-1	0

Таблица 6.

-iL	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1
11	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1
13	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1
14	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1
15	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
17	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
18	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
19	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
20	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
21	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
22	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
23	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
24	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	1	1
25	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	0	-1	1	-1	1	1	-1
26	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	0	-1	-1	-1	1	1
27	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	1
28	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	0	-1	-1	-1
29	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	0	1	-1
30	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	0	1
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a

Таблица 3 явно определяет векторное произведение двух векторов трехмерной (верхний левый определитель), семимерной (верхний левый блок из семи определителей) и пятнадцатимерной (пять верхних левых блоков) алгебр. При этом 3-х мерная, 7-ми мерная и 15-ти мерная алгебры являются, очевидно, частным случаем 31-мерной алгебры, которая определяется всей таблицей 3 (все 22 блока).

Отметим, что для тридцати одномерной алгебры имеют место подстановки индексов, приведенные в таблице 4. Это существенно облегчает запись формул, представленных в форме немых индексов. Очевидно, что три последних блока таблицы подстановок индексов соответствуют сдвигу индексов на число, кратное числу восемь. При этом 8-ая, 16-ая и 24-ая координаты резко отличаются от всех остальных координат.

Таблица 3 определяет векторное произведение двух векторов как сумму 155-ти не повторяющихся определителей 3-го порядка. Тридцати одномерную алгебру определяет в полной мере C_{31}^{3}= 4495 определителей 3-го порядка. Таким образом, векторное произведение двух векторов является лишь незначительной частью фиксирующих алгебру определителей, дающих в совокупности 4495=4340+155 , так что 4340 определителей третьего порядка формируют векторное произведение трех векторов. В каждой координате векторного произведения трех векторов имеет место 4340/31=140 определителей 3-го порядка. Таким образом, задействованы все возможные комбинации трех координат в векторных произведениях двух и трех векторов. Необходимо отметить, что эти векторные произведения заданы суммой определителей третьего порядка а, следовательно, имеют свойства аналогичные свойствам определителей, то есть:

- векторные произведения двух и трех векторов не изменятся, если вынести за скобки скалярный множитель;
- векторные произведения двух и трех векторов изменяют знак при перестановке любой пары векторов;
- циклическая подстановка векторов меняет знак векторного произведения двух векторов и не меняет знака векторного произведения трех векторов;
- векторные произведения двух и трех векторов дистрибутивны;
- если два вектора в векторном произведении двух или трех векторов компланарны, то это произведение равно 0 и т.д.

Матрицы, определяющие структурные константы алгебры и операторы момента импульса L_i также антисимметричны. Тридцать один оператор L_i (i=1,2,…,31) составляют оператор скалярного квадрата момента импульса

$$L^2=L_1^2+L_2^2+\ldots+L_{31}^2=30I,$$

что характеризует закон сохранения момента импульса, при I – равной единичной матрице. Этот оператор коммутативен с каждым из операторов L_i

$$L^2 \cdot L_i^2 - L_i^2 \cdot L^2=0, \qquad (i=1,2,\ldots,31),$$

что также характеризует закон сохранения момента импульса.

Удивительны свойства суммы операторов момента импульса L (структурных констант алгебры):

- во-первых, сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце матрицы суммы операторов момента импульса L равна нулю;

- во-вторых, число разных знаков в каждой строке и в каждом столбце матрицы суммы операторов момента импульса L одинаково;

- матрицы нечётных степеней суммы операторов момента импульса антисимметричны, (и пропорциональны L), а четных – симметричны (пропорциональны L^2);

- размерность матрицы суммы операторов момента импульса L (как совершенного числа) определяется числом 2^n-1;

- целые степени матрицы суммы операторов момента импульса L определяются лишь двумя числами;

- матрицы суммы операторов момента импульса L определяют векторное произведение двух векторов;

- матрица суммы операторов момента импульса L и все её степени имеют определитель равный нулю.

Особо отметим, что любые степени матрицы суммы операторов момента импульса L^n, пропорциональны лишь двум матрицам – L и L^2, соответствующих четным (с вещественными элементами) и нечётным (с мнимыми элементами) степеням матрицы L. Размерность этих матриц совпадает с размерностью алгебр, причём матрицы меньшей размерности без каких либо изменений входят в состав матриц большей размерности. Это упрощает процесс расширения матриц.

Операторы момента импульса ***L*** (матриц Паули) удовлетворяют 31-ному соотношению таблицы формул, представленной на альбомном листе, где $[L_i L_j]=L_i L_j - L_j L_i$ -коммутатор, причем в данной алгебре m=1/19, n=9, k=1/27.

L_{1}=	m([2,3]	[4,5]	[7,6]	[8, 9]	[11,10]	[13,12]	[14,15]	n[16,17]	[19,18]	[21,20]	[22,23]	[25,24]	[26,27]	[28,29]	[31,30])
L_{2}=	m([4,6]	[5,7]	[3,1]	[8,10]	[14,12]	[15,13]	[9 ,11]	n[16,18]	[22,20]	[23,21]	[17,19]	[26,24]	[28,30]	[29,31]	[27,25])
L_{3}=	m([6,5]	[1,2]	[4,7]	[8,11]	[13,14]	[10, 9]	[15,12]	n[16,19]	[21,22]	[18,17]	[23,20]	[27,24]	[30,29]	[25,26]	[28,31])
L_{4}=	m([5,1]	[7,3]	[6,2]	[8,12]	[9 ,13]	[11,15]	[10,14]	n[16,20]	[17,21]	[19,23]	[18,22]	[28,24]	[29,25]	[31,27]	[30,26])
L_{5}=	m([7,2]	[3,6]	[1,4]	[8,13]	[10,15]	[14,11]	[12 ,9]	n[16,21]	[18,23]	[22,19]	[20,17]	[29,24]	[31,26]	[27,30]	[25,28])
L_{6}=	m([1,7]	[2,4]	[5,3]	[8,14]	[15, 9]	[12,10]	[11,13]	n[16,22]	[23,17]	[20,18]	[19,21]	[30,24]	[25,31]	[26,28]	[29,27])
L_{7}=	m([3,4]	[6,1]	[2,5]	[8,15]	[12,11]	[9,14]	[13,10]	n[16,23]	[22,19]	[17,22]	[21,18]	[31,24]	[27,28]	[30,25]	[26,29])
L_{8}=	m([9, 1]	[10,2]	[11,3]	[12,4]	[13,5]	[14,6]	[15,7]	n[16,24]	[17,25]	[18,26]	[19,27]	[20,28]	[21,29]	[22,30]	[23,31])
L_{9}=	m([11,2]	[13,4]	[14,7]	[1,8]	[3,10]	[5,12]	[6,15]	n[16,25]	[18,27]	[20,29]	[23,30]	[24,17]	[26,19]	[28,21]	[31,22])
L_{10}=	m([14,4]	[15,5]	[9 ,3]	[2,8]	[6,12]	[7,13]	[1,11]	n[16,26]	[20,30]	[21,31]	[19,25]	[24,18]	[28,22]	[29,23]	[27,17])
L_{11}=	m([13,6]	[10,1]	[15,4]	[3,8]	[5,14]	[2, 9]	[7,12]	n[16,27]	[22,29]	[17,26]	[20,31]	[24,19]	[30,21]	[25,18]	[28,23])
L_{12}=	m([9 ,5]	[11,7]	[10,6]	[4,8]	[1,13]	[3,15]	[2,14]	n[16,28]	[21,25]	[23,27]	[22,26]	[24,20]	[29,17]	[31,19]	[30,18])
L_{13}=	m([10,7]	[14,3]	[12,1]	[5,8]	[2,15]	[6,11]	[4, 9]	n[16,29]	[23,26]	[19,30]	[17,28]	[24,21]	[31,18]	[27,22]	[25,20])
L_{14}=	m([15,1]	[12,2]	[11,5]	[6,8]	[7, 9]	[4,10]	[3,13]	n[16,30]	[17,31]	[18,28]	[21,27]	[24,22]	[25,23]	[26,20]	[29,19])
L_{15}=	m([12,3]	[9,6]	[13,2]	[7,8]	[4,11]	[1,14]	[5,10]	n[16,31]	[19,28]	[22,25]	[18,29]	[24,23]	[27,20]	[30,17]	[26,21])
L_{16}=	k([17,1]	[18,2]	[19,3]	[20,4]	[21,5]	[22,6]	[2,37]	[24,8]	[25,9]	[26,10]	[27,11]	[28,12]	[29,13]	[30,14]	[31,15])
L_{17}=	m([19,2]	[21,4]	[22,7]	[25,8]	[10,27]	[12,29]	[15,30]	n[1,16]	[3,18]	[5,20]	[6,23]	[9 ,24]	[26,11]	[28,13]	[31,14])
L_{18}=	m([22,4]	[23,5]	[17,3]	[26,8]	[12,20]	[13,31]	[11,25]	n[2,16]	[6,20]	[7,21]	[1,19]	[10,24]	[28,14]	[29,15]	[27, 9])
L_{19}=	m([21,6]	[18,1]	[23,4]	[27,8]	[14,22]	[19,26]	[12,31]	n[3,16]	[5,22]	[2,17]	[7,20]	[11,24]	[30,13]	[25,10]	[28,15])
L_{20}=	m([17,5]	[19,7]	[18,6]	[28,8]	[13,21]	[15,27]	[14,26]	n[4,16]	[1,21]	[3,23]	[2,22]	[12,24]	[29, 9]	[31,11]	[30,10])
L_{21}=	m([18,7]	[22,3]	[20,1]	[29,8]	[15,23]	[11,30]	[19,28]	n[5,16]	[2,23]	[6,19]	[4,17]	[13,24]	[31,10]	[27,14]	[25,12])
L_{22}=	m([23,1]	[20,2]	[19,5]	[30,8]	[9 ,17]	[10,28]	[13,27]	n[6,16]	[7,17]	[4,18]	[3,21]	[14,24]	[25,15]	[26,12]	[29,11])
L_{23}=	m([20,3]	[17,6]	[21,2]	[31,8]	[11,19]	[14,25]	[10,29]	n[7,16]	[4,19]	[1,22]	[5,18]	[15,24]	[27,12]	[30, 9]	[26,13])
L_{24}=	m([1,25]	[2,26]	[3,27]	[4,28]	[5,29]	[6,30]	[7,31]	n[8,16]	[17,19]	[18,10]	[19,11]	[20,12]	[21,13]	[22,14]	[23,15])
L_{25}=	m([2,27]	[4,29]	[7,30]	[8,17]	[10,19]	[12,21]	[15,22]	n[9,16]	[18,11]	[20,13]	[23,14]	[24,1]	[26,3]	[28,5]	[31,6])
L_{26}=	m([4,30]	[5,31]	[3,25]	[8,18]	[12,22]	[13,23]	[11,17]	n[10,16]	[10,14]	[21,15]	[19, 9]	[24,2]	[28,6]	[29,7]	[27,1])
L_{27}=	m([6,29]	[1,26]	[4,31]	[8,19]	[14,21]	[9 ,18]	[12,23]	n[11,16]	[12,13]	[17,10]	[20,15]	[24,3]	[30,5]	[25,2]	[28,7])
L_{28}=	m([5,25]	[7,27]	[6,26]	[8,20]	[13,17]	[15,19]	[14,18]	n[12,16]	[11, 9]	[23,11]	[22,10]	[24,4]	[29,1]	[31,3]	[30,2])
L_{29}=	m([7,26]	[3,30]	[1,28]	[8,21]	[15,18]	[11,22]	[9 ,20]	n[13,16]	[13,10]	[19,14]	[17,12]	[24,5]	[31,2]	[27,6]	[25,4])
L_{30}=	m([1,31]	[2,28]	[5,27]	[8,22]	[9,23]	[10,20]	[13,19]	n[14,16]	[17,15]	[18,12]	[21,11]	[24,6]	[25,7]	[26,4]	[29,3])
L_{31}=	m([3,28]	[6,25]	[2,29]	[8,23]	[11,29]	[14,17]	[10,21]	n[15,16]	[19,12]	[22, 9]	[18,13]	[24,7]	[27,4]	[30,1]	[26,5])

Таблица 7.

$-iL^3/31^1=-iL$																															
-iL	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***	***16***	***17***	***18***	***19***	***20***	***21***	***22***	***23***	***24***	***25***	***26***	***27***	***28***	***29***	***30***	***31***
1	*0*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*
2	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*
3	*-1*	*1*	*0*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*
4	*1*	*1*	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*
5	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*0*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*
6	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*0*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*
7	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*0*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*
8	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
9	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*
10	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*
11	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*0*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*
12	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*
13	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*0*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*
14	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*1*
15	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*0*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*
16	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*
17	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*0*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*
18	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*
19	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*0*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*
20	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*
21	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*0*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*
22	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*0*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*
23	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*
24	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
25	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*0*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*
26	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*
27	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*0*	*-1*	*1*	*-1*	*1*
28	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*-1*
29	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*0*	*1*	*-1*
30	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*0*	*1*
31	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*0*

Таблица 8.

	$-L^2=a\cdot I+\lvert L\rvert,\ a=-30$																														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a

Таблица 9.

$L^4 = -31^1\cdot(a\cdot I+\vert L\vert),\ a=-30$																															
$\vert L\vert$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a

Таблица10.

$L^5/31^2=-iL$																															
-iL	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1
11	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1
13	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1
14	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1
15	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
17	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
18	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
19	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
20	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
21	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
22	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
23	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
24	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	1	1
25	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	0	-1	1	-1	1	1	-1
26	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	0	-1	-1	-1	1	1
27	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	1
28	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	0	-1	-1	-1
29	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	0	1	-1
30	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	0	1
31	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	0

Трехмерная, семимерная и пятнадцатимерная векторные алгебры являются частным случаем 31-но мерной. С целью уплотнения записи величин следует использовать сумму операторов момента импульса L. В противном случае приходится использовать запись 31-ой таблицы размером 31$\times$31, что соответствует объему одного печатного листа.

Очевидно, что чётные и нечетные степени матрицы суммы операторов момента импульса, образуют числовые величины, аналогичные единицам **комплексных чисел**, при этом числа приобретают 2^n-1 -мерный векторный характер, что можно рассматривать как расширение комплексных чисел. Среди них выделяется четыре класса вычетов, определяемых степенями мнимой единицы. Особо отметим, что любое нарушение суммы операторов момента импульса ведет к нарушению симметрии всей совокупности чисел. Каждая из *3,7,15,31,63,127,…, 2^n-1,…*-мерных векторных алгебр имеют сумму операторов момента импульса и её степеней совершенно аналогичного вида.

У 31-но мерной алгебры коммутирующих между собой операторов нет и подалгебры Картана отсутствуют. Её ранг равен единице и, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми операторами. Он соответствует скалярному квадрату оператора момента импульса. Скалярный квадрат оператора момента импульса, следовательно, сохраняется, что соответствует закону сохранения момента импульса.

Таким образом, удается построить анти симметричную векторную алгебру, определяемую векторами с 31-ой координатой в каждом из них.

Свойства этой алгебры следует изучить, но можно заранее сказать, что она соответствует линейному векторному пространству, анти коммутативна, не ассоциативна по умножению и не альтернативна. Она имеет нуль, единицу, противоположный элемент, коммутативна и ассоциативна по сложению. Выполняется свойство дистрибутивности. Эта алгебра следует из аналогичной 32 мерной не коммутативной по умножению и не ассоциативной алгебры, определяемой гиперкомплексными числами без деления и обратных элементов.

Нулевая координата 31-но мерной алгебры определяет скалярное произведение двух31-но мерных векторов. Скалярное произведение двух векторов соответствует единичному метрическому 31-тензору, так что векторная алгебра - евклидова. Таким образом, определено как векторное, так и скалярное произведение векторов одной из 31-но мерных алгебр. В [1] приведены таблицы подстановок индексов изоморфных семи мерных векторных алгебр. Рассмотренная выше алгебра расширяет эти алгебры до 31-но мерных. Следовательно, можно построить, по крайней мере, 480 изоморфных 15-ти и 31-но мерных алгебр и алгебр большей размерности (очевидно, значительно большее число). Приведём пример расширения одной из семимерных алгебр, ограничиваясь 15-ти мерным вариантом. Пусть этой алгебре соответствует таблица подстановки индексов, приведенная в левой части таблицы 11.

Соответствующие ей, расширенная таблица структурных констант и тензор структурных констант алгебры будут иметь вид:

Таблица 11.

iL_r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-3	2	-5	4	-7	6	-9	8	11	-10	13	-12	15	-14
2	3	0	-1	-7	-6	5	4	-10	-11	8	9	15	14	-13	-12
3	-2	1	0	-6	7	4	-5	-11	10	-9	8	14	-15	-12	13
4	5	7	6	0	-1	-3	-2	-12	-13	-15	-14	8	9	11	10
5	-4	6	-7	1	0	-2	3	-13	12	-14	15	-9	8	10	-11
6	7	-5	-4	3	2	0	-1	-14	-15	13	12	-11	-10	8	9
7	-6	-4	5	2	-3	1	0	-15	14	12	-13	-10	11	-9	8
8	9	10	11	12	13	14	15	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
9	-8	11	-10	13	12	15	-14	1	0	3	-2	5	-4	7	-6
10	-11	-8	9	15	14	-13	-12	2	-3	0	1	7	6	-5	-4
11	10	-9	-8	14	-15	-12	13	3	2	-1	0	6	-7	-4	5
12	-13	-15	-14	-8	9	11	10	4	-5	-7	-6	0	1	3	2
13	12	14	15	-9	-8	10	-11	5	4	-6	7	-1	0	2	-3
14	-15	13	12	-11	-10	-8	9	6	-7	5	4	-3	-2	0	1
15	14	12	-13	-10	11	-9	-8	7	6	4	-5	-2	3	-1	0

iL	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
2	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
4	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
6	-1	1	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
7	1	1	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1
8	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	1	-1	1	-1	1	0	1	-1	1	-1	1	-1
10	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	0	1	-1	-1	1
12	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	0	1	-1
14	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	0	1
15	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0

Таблица 12.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
m	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191	16383	32767	65535	131071
s	1	6	28	120	496	2016	8128	32640	130816	523776	2096128	8386560	33550336	134209536	536854528	2147450880	8589869056
k	1	7	31	127	511	2047	8191	32767	131071	524287	2097151	8388607	33554431	134217727	536870911	2147483647	8589934591

Таблица 13.

подстановки индексов								***iL_r***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***		***iL***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*		*1*	*0*	*-3*	*2*	*-5*	*4*	*-7*	*6*		*1*	*0*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*
2	*4*	*7*	*5*	*6*	*7*	*1*		*2*	*3*	*0*	*-1*	*-7*	*-6*	*5*	*4*		*2*	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*
3	*7*	*5*	*1*	*2*	*1*	*6*		*3*	*-2*	*1*	*0*	*-6*	*7*	*4*	*-5*		*3*	*-1*	*1*	*0*	*-1*	*1*	*1*	*-1*
4	*5*	*1*	*6*	*3*	*7*	*2*		*4*	*5*	*7*	*6*	*0*	*-1*	*-3*	*-2*		*4*	*1*	*1*	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*-1*
5	*6*	*2*	*3*	*7*	*1*	*4*		*5*	*-4*	*6*	*-7*	*1*	*0*	*-2*	*3*		*5*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*0*	*-1*	*1*
6	*7*	*1*	*7*	*1*	*2*	*5*		*6*	*7*	*-5*	*-4*	*3*	*2*	*0*	*-1*		*6*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*0*	*-1*
7	*1*	*6*	*2*	*4*	*5*	*3*		*7*	*-6*	*-4*	*5*	*2*	*-3*	*1*	*0*		*7*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*0*

и, следовательно, тензор структурных констант резко отличается в знаках от ранее рассмотренной алгебры. При этом расширение до 15-ти мерной алгебры дает:

iL	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***
1	*0*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*
2	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*
3	*-1*	*1*	*0*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*
4	*1*	*1*	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*
5	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*0*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*
6	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*
7	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*0*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*
8	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*
9	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*0*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*
10	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*
11	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*0*	*1*	*-1*	*-1*	*1*
12	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*0*	*1*	*1*	*1*
13	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*0*	*1*	*-1*
14	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*0*	*1*
15	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*	*1*	*-1*	*0*

и, следовательно, структурные константы алгебры определяются таблицей, существенно отличающейся в знаках компонент векторного произведения двух векторов от ранее рассмотренных алгебр. При этом:

$-L^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14

Очевидно, что структурные константы сравниваемых алгебр не совпадают. Вместе с тем квадрат вектора суммы оператора момента импульсов определяется той же величиной (т.е. $\boldsymbol{L}^2$ в изоморфных алгебрах не изменяется), а нечетные степени структурных констант повторяют вид суммы оператора моментов импульса (т.е. $\boldsymbol{L}$ в изоморфных алгебрах может иметь различный вид). Следовательно, изоморфизм алгебр можно определять по четной (второй) степени суммы операторов момента импульса. И

$-iL^3/15^1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-1	1	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
6	1	-1	-1	1	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
7	-1	-1	1	1	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	0	1	-1	1	-1	1	-1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	0	1	-1	-1	1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	0	1	-1
14	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	0	1
15	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0

$L^4/15^1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14

Чтобы говорить предметно о свойствах 31-но мерной алгебры можно проанализировать 31-но рядные квадратные матрицы L_i (Паули). С их помощью, как известно, записываются уравнения (Дирака) [1]. Трех мерные, семи мерные и 15-ти мерные матрицы (Паули) при этом характеризуют момент импульса в указанных алгебрах меньшей размерности.

Непосредственным умножением этих операторов можно получить приведенные выше 31-но соотношение для операторов момента импульса, которые определяют L_i. При этом m=9, n=1/19, k=1/27.

$iL^5/15^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-1	1	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
6	1	-1	-1	1	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
7	-1	-1	1	1	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	0	1	-1	1	-1	1	-1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	0	1	-1	-1	1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	0	1	-1
14	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	0	1
15	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0

Обратим внимание читателей на существование не только одно мерной и трех мерной векторной алгебры, но также семи мерной, а теперь - Пятнадцатимерной, 31-но мерной и более высокой размерности. Это в свою очередь ребром ставит вопрос о размерности физического пространства. Уже найдены векторные произведения двух векторов векторных алгебр размерностью (1,3),7,15,31,63,127,255,511,1023,2047,. Определены также векторные произведения двух векторов ряда векторных алгебр большей размерности, что требует для проверки соответствующих вычислительных и программных средств (в матрице 4095-D 16.769.025 элементов).

Я считаю, что "**Размерность физического пространства неопределённа.** Она характеризуется лишь свойствами алгебры (симметрии), используемой для описания процессов, и может быть как угодно большой"!

Более симметричны алгебры высокой размерности; алгебры меньшей размерности соответствуют той или иной степени нарушения (упрощения свойств) симметрии определяющих соотношений и являются под алгебрами алгебр большей размерности. Я надеюсь, что данная работа явится началом её широкого обсуждения и применения во многих естественных науках, в науках о природе окружающего мира, в технических приложениях. Наш мир удивительно симметричен и многообразен и в, то же время, мы удивительно инертны и пассивны. Ровесники семимерного исчисления уже окончили вузы, а воз и ныне там. В завершение работы приведём таблицу 12, характеризующую размерность векторных алгебр и их связь с совершенными и натуральными числами.

Литература

1. Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996. – 244 с.
2. Коротков А.В. Элементы трех- и семимерного изовекторного и спинорного исчислений. – Новочеркасск: Набла, 1999. – 100 с.
3.Коротков А. В. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. – Новочеркасск: Изд-во "НОК", 2011. – 36с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Пятнадцатимерная векторная алгебра………………………….…………. 3

Глава 2. Вращения в пятнадцатимерной векторной алгебре…..…………… 39

Глава 3. Элементы 31-мерного векторного исчисления……………..……... 54

Литература………..…………………..…………………..……………….. 75

Научное издание

Анатолий Васильевич Коротков

ЭЛЕМЕНТЫ МНОГОМЕРНОГО (15- И 31-МЕРНОГО) ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 30.11.2012 г.
Формат 60х90 1/16. Гарнитура "Таймс".
Усл. п.л. 4,75. Печать цифровая. Тираж 200 экз.
Издательство “Наука-Образование-Культура”
346630 г. Новочеркасск, ул. Дворцовая, 1.
Отпечатано ООО НПП «НОК»
346628 г. Новочеркасск, ул. Просвещения,155.