

А.В. Коротков

**СИММЕТРИЧНЫЕ ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ
СКАЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ И ФОРМЫ**

Изд-во "Набла"

Новочеркасск 2004

ББК 22.14
К 68
УДК 512.7

Рецензент – Логинов В.Т., докт. техн. наук, профессор,
академик Российской Инженерной Академии

Коротков А.В.

К 68 Симметричные полилинейные скалярные функции и формы.
Новочеркасск: Набла, 2004. – 67 с.
ISBN

В брошюре содержатся избранные труды по определению симметричных полилинейных скалярных функций и форм применительно к семимерному векторному исчислению. Изложение построено в традиционной символике с учетом потребности приложений, в которых используются векторное исчисление. Это делает ее доступной пониманию студентов, преподавателей и научных работников, специализирующихся во многих областях науки и техники. Рассмотрены также вопросы применения семимерной векторной алгебры к задачам классификации элементарных частиц с единичным и полуединичным спином. Брошюра окажется полезной прежде всего в области многомерной математической физики, в частности, в теории поля и в физике элементарных частиц.

_____ Без объявлен.

УДК 512.7

ISBN

© Коротков А.В., 2004

1. Симметрические скалярные и векторные функции в семимерной векторной алгебре

Наряду с антисимметрическими скалярными и векторными функциями n -векторов, в семимерной векторной алгебре [1] можно определить симметрические скалярные и векторные функции n -векторов ($n \leq 7$). Таковой является, в частности, билинейная скалярная функция – скалярное произведение двух векторов $(\mathbf{AB})$, определяющее норму $|\mathbf{A}|^2$ и $|\mathbf{B}|^2$ векторов, расстояние $d_{AB}^2 = |\mathbf{A}-\mathbf{B}|^2 = (\mathbf{A}-\mathbf{B}, \mathbf{A}-\mathbf{B})$ между двумя точками и угол между двумя векторами $\text{Cos}\varphi_{AB} = (\mathbf{AB}) / |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$.

Эта скалярная функция двух векторов полностью определяет метрические свойства пространства, условия ортогональности векторов, обладает свойствами линейности и дистрибутивности. Антисимметрическая векторная функция двух векторов – векторное произведение двух векторов $[\mathbf{AB}]$, завершает круг функций над двумя векторами, поскольку в них задействованы все $7+42 = 49$ комбинаций двух единичных векторов.

Для произведений трех векторов в семимерной векторной алгебре также определены антисимметрические скалярные и векторные функции трех векторов – смешанное $(\mathbf{ABC})$ и векторное $[\mathbf{ABC}]$ произведения трех векторов. Циклическая подстановка над простейшим произведением трех векторов $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ определяет также симметрическую по перестановке любой пары векторов векторную функцию трех векторов.

$$[\mathbf{ABC}] = 1/3 ((\mathbf{AB})\mathbf{C} + (\mathbf{BC})\mathbf{A} + (\mathbf{CA})\mathbf{B}).$$

В то же время определить симметрическую по перестановке любой пары векторов скалярную функцию трех векторов не удастся, поскольку в перечисленных функциях задействованы все $42+168+133=343$ комбинации трех единичных векторов. Однако, имеется возможность получения скалярной симметрической функции трех векторов, выражаемой через билинейные функции пар векторов и линейные функции отдельных векторов.

Для произведений четырех векторов в семимерной векторной алгебре определены антисимметрические скалярные и векторные функции четырех векторов – смешанное $(\mathbf{ABCD})$ и векторное $[\mathbf{ABCD}]$ произведения четырех

векторов. Вместе с тем в смешанном и векторном произведениях четырех векторов задействованы лишь $168+672=840$ комбинаций четырех единичных векторов, так что возможно построение симметрических функций. Таковой, в частности, является скалярная симметрическая функция четырех векторов

$$(\mathbf{ABCD}) = ([\mathbf{ABC}]\mathbf{D}) = 1/3 ((\mathbf{AB})(\mathbf{CD}) + (\mathbf{BC})(\mathbf{AD}) + (\mathbf{CA})(\mathbf{BD})),$$

определяемая произведениями скалярных билинейных функций, повторяющая их свойства в части линейности и дистрибутивности, определяющая норму каждого из четырех векторов, "расстояние" между четырьмя точками и "угол" между четырьмя векторами, обращающаяся в нуль, когда три из них ортогональны четвертому. В ней задействованы 133 комбинации единичных векторов, поэтому можно вести речь также об определении симметрической векторной функции четырех векторов. Таковой является функция

$$\begin{aligned} [\mathbf{ABCD}] &= 1/4([\mathbf{ABC}]\mathbf{D} + [\mathbf{BCD}]\mathbf{A} + [\mathbf{CDA}]\mathbf{B} + [\mathbf{DAB}]\mathbf{C}) = \\ &= 1/12 ((\mathbf{AB})[\mathbf{CD}] + (\mathbf{BC})[\mathbf{AD}] + (\mathbf{CA})[\mathbf{BD}] + \\ &\quad + (\mathbf{BC})[\mathbf{DA}] + (\mathbf{CD})[\mathbf{BA}] + (\mathbf{DB})[\mathbf{CA}] + \\ &\quad + (\mathbf{CD})[\mathbf{AB}] + (\mathbf{DA})[\mathbf{CB}] + (\mathbf{AC})[\mathbf{DB}] + \\ &\quad + (\mathbf{DA})[\mathbf{BC}] + (\mathbf{AB})[\mathbf{DC}] + (\mathbf{BD})[\mathbf{AC}]) = 0. \end{aligned}$$

В ней задействованы остальные 1428 комбинаций четырех единичных векторов ($168+672+133+1428=2401$), причем симметрическая векторная функция четырех векторов равна нулю.

Для произведений пяти векторов в семимерной векторной алгебре определены антисимметрические скалярные и векторные функции пяти векторов – смешанное $(\mathbf{ABCDE})$ и векторное $[\mathbf{ABCDE}]$ произведения пяти векторов, причем $(\mathbf{ABCDE}) = 0$. Вместе с тем в смешанном и векторном произведениях пяти векторов задействованы не все из 16807 комбинаций единичных векторов, так что возможно построение симметрических скалярных и векторных функций. Таковой, в частности, является симметрическая векторная функция пяти векторов

$$\begin{aligned} [\mathbf{ABCDE}] &= 1/5((\mathbf{ABCD})\mathbf{E} + (\mathbf{BCDE})\mathbf{A} + (\mathbf{CDEA})\mathbf{B} + (\mathbf{DEAB})\mathbf{C} + (\mathbf{EABC})\mathbf{D}) = \\ &= 1/15((\mathbf{AB})(\mathbf{CD})\mathbf{E} + (\mathbf{BC})(\mathbf{DE})\mathbf{A} + (\mathbf{CD})(\mathbf{EA})\mathbf{B} + (\mathbf{DE})(\mathbf{AB})\mathbf{C} + (\mathbf{EA})(\mathbf{BC})\mathbf{D} + \\ &\quad + (\mathbf{BC})(\mathbf{AD})\mathbf{E} + (\mathbf{CD})(\mathbf{BE})\mathbf{A} + (\mathbf{DE})(\mathbf{CA})\mathbf{B} + (\mathbf{EA})(\mathbf{DB})\mathbf{C} + (\mathbf{AB})(\mathbf{EC})\mathbf{D} + \\ &\quad + (\mathbf{CA})(\mathbf{BD})\mathbf{E} + (\mathbf{DB})(\mathbf{CE})\mathbf{A} + (\mathbf{EC})(\mathbf{DA})\mathbf{B} + (\mathbf{AD})(\mathbf{EB})\mathbf{C} + (\mathbf{BE})(\mathbf{AC})\mathbf{D}). \end{aligned}$$

В антисимметрической и симметрической векторных функциях пяти векторов задействованы $2520+637=3157$ единичных векторов. Остальные 13650 комбинаций единичных векторов задействованы в определении смешанного произведения пяти векторов. Однако, имеется возможность получения скалярной симметрической функции пяти векторов, выражаемой через произведения билинейных функций пар векторов и линейные функции отдельных векторов.

Для произведений шести векторов в семимерной векторной алгебре определены антисимметрические скалярные и векторные функции шести векторов – смешанное $(ABCDEF)$ и векторное $[ABCDEF]$ произведения шести векторов, причем $(ABCDEF)=0$. Вместе с тем в смешанном и векторном произведениях шести векторов задействованы не все из 117649 комбинаций шести единичных векторов, так что возможно построение скалярных и векторных симметрических функций шести векторов. Таковой, в частности, является скалярная симметрическая функция шести векторов

$$(ABCDEF) = ([ABCDE]F) =$$

$$= 1/15 ((AB)(CD)(EF)+(BC)(DE)(AF)+(CD)(EA)(BF)+(DE)(AB)(CF)+(EA)(BC)(DF)+ \\ + (BC)(AD)(EF)+(CD)(BE)(AF)+(DE)(CA)(BF)+(EA)(DB)(CF)+(AB)(EC)(DF)+ \\ + (CA)(BD)(EF)+(DB)(CE)(AF)+(EC)(DA)(BF)+(AD)(EB)(CF)+(BE)(AC)(DF)).$$

определяемая произведениями скалярных билинейных функций, повторяющая их свойства в части линейности и дистрибутивности, определяющая норму каждого из шести векторов, "расстояние" между шестью точками и "угол" между шестью векторами, обращающаяся в нуль, когда пять из них ортогональны шестому. Можно вести речь также об определении симметрической векторной функции шести векторов. Таковой является функция

$$[ABCDEF]=1/6[[ABCDE]F]+[[BCDEF]A]+[[CDEFA]B]+[[DEFAB]C]+[[EFABC]D]+[[FABCD]E] = \\ = 1/30((ABCD)[EF]+(BCDE)[FA]+(CDEF)[AB]+(DEFA)[BC]+(EFAB)[CD]+(FABC)[DE]+ \\ + (BCDE)[AF]+(CDEF)[BA]+(DEFA)[CB]+(EFAB)[DC]+(FABC)[ED]+(ABCD)[FE]+ \\ + (CDEA)[BF]+(DEFB)[CA]+(EFAC)[DB]+(FFBD)[EC]+(ABCE)[FD]+(BCDF)[AE]+ \\ + (DEAB)[CF]+(EFBC)[DA]+(FACD)[EB]+(ABDE)[FC]+(BCEF)[AD]+(CDFA)[BE]+ \\ + (EABC)[DF]+(FBCD)[EA]+(ACDE)[FB]+(BDEF)[AC]+(CEFA)[BD]+(DFAB)[CE])=0,$$

обращающаяся, однако, в нуль.

Для произведений семи векторов в семимерной векторной алгебре определены антисимметрические скалярные и векторные функции семи векторов – смешанное $(ABCDEFG)$ и векторное $[ABCDEFG]$ произведения семи векторов, причем $[ABCDEFG] = 0$. Вместе с тем в смешанном и векторном произведениях семи векторов задействованы не все из 823543 комбинаций единичных векторов, так что возможно построение симметрических скалярных и векторных функций. Таковой, в частности, является симметрическая векторная функция семи векторов

$$\begin{aligned}
 [ABCDEFG] = & 1/7((ABCDEF)G + (BCDEFG)A + (CDEFGA)B + (DEFGAB)C + (EFGABC)D + (FGABCD)E + (GABCDE)F) = \\
 = & 1/105 (((AB)(CD)(EF) + (BC)(DE)(AF) + (CD)(EA)(BF) + (DE)(AB)(CF) + (EA)(BC)(DF) + \\
 & + (BC)(AD)(EF) + (CD)(BE)(AF) + (DE)(CA)(BF) + (EA)(DB)(CF) + (AB)(EC)(DF) + \\
 & + (CA)(BD)(EF) + (DB)(CE)(AF) + (EC)(DA)(BF) + (AD)(EB)(CF) + (BE)(AC)(DF))G + \\
 & + (((BC)(DE)(FG) + (CD)(EF)(BG) + (DE)(FB)(CG) + (EF)(BC)(DG) + (FB)(CD)(EG) + \\
 & + (CD)(BE)(FG) + (DE)(CF)(BG) + (EF)(DB)(CG) + (FB)(EC)(DG) + (BC)(FD)(EG) + \\
 & + (DB)(CE)(FG) + (EC)(DF)(BG) + (FD)(EB)(CG) + (BE)(FC)(DG) + (CF)(BD)(EG))A + \\
 & + (((CD)(EF)(GA) + (DE)(FG)(CA) + (EF)(GC)(DA) + (FG)(CD)(EA) + (GC)(DE)(FA) + \\
 & + (DE)(CF)(GA) + (EF)(DG)(CA) + (FG)(EC)(DA) + (GC)(FD)(EA) + (CD)(GE)(FA) + \\
 & + (EC)(DF)(GA) + (FD)(EG)(CA) + (GE)(FC)(DA) + (CF)(GD)(EA) + (DG)(CE)(FA))B + \\
 & + (((DE)(FG)(AB) + (EF)(GA)(DB) + (FG)(AD)(EB) + (GA)(DE)(FB) + (AD)(EF)(GB) + \\
 & + (EF)(DG)(AB) + (FG)(EA)(DB) + (GA)(FD)(EB) + (AD)(GE)(FB) + (DE)(AF)(GB) + \\
 & + (FD)(EG)(AB) + (GE)(FA)(DB) + (AF)(GD)(EB) + (DG)(AE)(FB) + (EA)(DF)(GB))C + \\
 & + (((EF)(GA)(BC) + (FG)(AB)(EC) + (GA)(BE)(FC) + (AB)(EF)(GC) + (BE)(FG)(AC) + \\
 & + (FG)(EA)(BC) + (GA)(FB)(EC) + (AB)(GE)(FC) + (BE)(AF)(GC) + (EF)(BG)(AC) + \\
 & + (GE)(FA)(BC) + (AF)(GB)(EC) + (BG)(AE)(FC) + (EA)(BF)(GC) + (FB)(EG)(AC))D + \\
 & + (((FG)(AB)(CD) + (GA)(BC)(FD) + (AB)(CF)(GD) + (BC)(FG)(AD) + (CF)(GA)(BD) + \\
 & + (GA)(FB)(CD) + (AB)(GC)(FD) + (BC)(AF)(GD) + (CF)(BG)(AD) + (FG)(CA)(BD) + \\
 & + (AF)(GB)(CD) + (BG)(AC)(FD) + (CA)(BF)(GD) + (FB)(CG)(AD) + (GC)(FA)(BD))E + \\
 & + (((GA)(BC)(DE) + (AB)(CD)(GE) + (BC)(DG)(AE) + (CD)(GA)(BE) + (DG)(AB)(CE) + \\
 & + (AB)(GC)(DE) + (BC)(AD)(GE) + (CD)(BG)(AE) + (DG)(CA)(BE) + (GA)(DB)(CE) + \\
 & + (BG)(AC)(DE) + (CA)(BD)(GE) + (DB)(CG)(AE) + (GC)(DA)(BE) + (AD)(GB)(CE))F),
 \end{aligned}$$

определяемая скалярными произведениями пар векторов.

Построить скалярную симметрическую функцию семи векторов не удастся. Однако, имеется возможность получения скалярной симметрической функции семи векторов, выражаемой через произведения билинейных функций пар векторов и линейные функции отдельных векторов.

Таким образом, в семимерной векторной алгебре имеется следующая классификация произведений векторов (табл. 1).

Таблица 1

число векторов			2	3	4	5	6	7
функции	скал.	сим.	(AB)	-	(ABCD)	-	(ABCDEF)	-
		антисим.	-	(ABC)	(ABCD)	(ABCDE)=0	(ABCDEF)=0	(ABCDEFG)
	вект.	сим.	-	[ABC]	[ABCD]=0	[ABCDE]	[ABCDEF]=0	[ABCDEFG]
		антисим.	[AB]	[ABC]	[ABCD]	[ABCDE]	[ABCDEF]	[ABCDEFG]=0

Отметим, что полилинейные скалярные и векторные симметрические функции являются функциями билинейной симметрической функции – скалярного произведения двух векторов, полностью определяющей метрические свойства векторного пространства. По этой причине полилинейным скалярным и векторным функциям не следует отводить фундаментальную роль в определении метрики пространств. Более того, полилинейные скалярные симметрические функции определены лишь для четного числа векторов, а полилинейные скалярные симметрические функции для нечетного числа векторов определить не удастся. Однако, имеется возможность получения полилинейных скалярных симметрических функций нечетного числа векторов, выражаемых через произведения билинейных функций пар векторов и линейные функции отдельных векторов.

2. Полилинейные скалярные функции

В собственноевклидовой геометрии в трехмерном пространстве существеннейшую роль играют метрические понятия, связанные с измерением. К ним относятся: норма векторов, расстояние между двумя точками и угол между векторами. Норма вектора и расстояние между двумя точками не являются линейными функциями от векторов, а угол между векторами не является линейной функцией одного из векторов при фиксированном втором. Несмотря на это, из норм двух векторов и угла между ними при помощи действий далеких от линейности строят так называемое скалярное произведение двух векторов, являющееся билинейной функцией от векторов, т.е. линейной по каждому из векторов при фиксированном втором. Именно скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин и косинуса угла между ними. Все

сказанное дает основание при введении метрических понятий в теорию многомерных вещественных пространств исходить из понятия скалярного произведения двух векторов.

Скалярным произведением $(\mathbf{A}\mathbf{B})$ двух векторов вещественного n -мерного векторного пространства [2] называют функцию от векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ с вещественными значениями, удовлетворяющую требованиям:

1) линейности по одному из аргументов

$$(\mathbf{A}, \alpha\mathbf{B} + \beta\mathbf{C}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{B}) + \beta(\mathbf{A}\mathbf{C});$$

2) симметрии по паре векторов

$$(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\mathbf{A});$$

3) положительной определенности

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}) > 0 \text{ при } \mathbf{A} \neq 0.$$

Из линейности по одному из аргументов и симметрии следует линейность по другому аргументу:

$$(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}, \mathbf{C}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{C}) + \beta(\mathbf{B}\mathbf{C}).$$

Для скалярного произведения двух векторов выполняется неравенство Коши

$$(\mathbf{A}\mathbf{B}) = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\varphi_{\mathbf{A}\mathbf{B}},$$

т.е.
$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^2 \leq |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2.$$

Это неравенство делает осмысленным определение угла $\varphi_{\mathbf{A}\mathbf{B}}$, образованного двумя векторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, посредством формулы

$$\cos\varphi_{\mathbf{A}\mathbf{B}} = (\mathbf{A}\mathbf{B}) / |\mathbf{A}||\mathbf{B}|,$$

как тригонометрической функции угла между парой векторов. Условием перпендикулярности двустороннего угла является $\cos\varphi_{\mathbf{A}\mathbf{B}} = 0$, что имеет место при перпендикулярности одного из векторов другому вектору.

Определение 1. Скалярным произведением $(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D})$ четырех векторов вещественного n -мерного векторного пространства назовем функцию от четырех векторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ с вещественными значениями, удовлетворяющую требованиям:

1) линейности по одному из аргументов

$$(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}, \alpha\mathbf{D} + \beta\mathbf{E}) = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}) + \beta(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{E});$$

2) симметрии по любой паре векторов

$$(\mathbf{ABCD}) = (\mathbf{BACD}) = \dots = (\mathbf{ABDC});$$

3) положительной определенности

$$(\mathbf{AAAA}) > 0 \text{ при } \mathbf{A} \neq \mathbf{0}.$$

Из линейности по одному из аргументов и симметрии следует линейность по любому аргументу. Перечисленным условиям удовлетворяет скалярное произведение четырех векторов вида:

$$(\mathbf{ABCD}) = 1/3 ((\mathbf{AB})(\mathbf{CD}) + (\mathbf{BC})(\mathbf{AD}) + (\mathbf{CA})(\mathbf{BD})).$$

Действительно:

$$\begin{aligned} 1) (\mathbf{ABC}, \alpha\mathbf{D} + \beta\mathbf{E}) &= 1/3 ((\mathbf{AB})(\mathbf{C}, \alpha\mathbf{D} + \beta\mathbf{E}) + (\mathbf{CA})(\mathbf{B}, \alpha\mathbf{D} + \beta\mathbf{E}) + (\mathbf{AB})(\mathbf{C}, \alpha\mathbf{D} + \beta\mathbf{E})) = \\ &= \alpha/3 ((\mathbf{AB})(\mathbf{CD}) + (\mathbf{BC})(\mathbf{AD}) + (\mathbf{CA})(\mathbf{BD})) + \beta/3 ((\mathbf{AB})(\mathbf{CE}) + (\mathbf{BC})(\mathbf{AE}) + (\mathbf{CA})(\mathbf{BE})) = \\ &= \alpha(\mathbf{ABCD}) + \beta(\mathbf{ABCE}); \end{aligned}$$

2) $(\mathbf{ABCD})$ – не изменяется при перестановке любой пары векторов;

3) $(\mathbf{AAAA}) = (\mathbf{AA})(\mathbf{AA}) > 0$ при $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$.

Для скалярного произведения четырех векторов выполняется неравенство (Коши)

$$(\mathbf{ABCD}) = |\mathbf{A}||\mathbf{B}||\mathbf{C}||\mathbf{D}|(1/3)(\cos\varphi_{\mathbf{AB}}\cos\varphi_{\mathbf{CD}} + \cos\varphi_{\mathbf{BC}}\cos\varphi_{\mathbf{AD}} + \cos\varphi_{\mathbf{CA}}\cos\varphi_{\mathbf{BD}})$$

т.е.
$$(\mathbf{ABCD})^2 \leq |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2|\mathbf{C}|^2|\mathbf{D}|^2.$$

Это неравенство делает осмысленным определение угла $\varphi_{\mathbf{ABCD}}$, образованного четырьмя векторами $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ посредством формулы

$$\cos\varphi_{\mathbf{ABCD}} = (\mathbf{ABCD}) / |\mathbf{A}||\mathbf{B}||\mathbf{C}||\mathbf{D}| = (1/3)(\cos\varphi_{\mathbf{AB}}\cos\varphi_{\mathbf{CD}} + \cos\varphi_{\mathbf{BC}}\cos\varphi_{\mathbf{AD}} + \cos\varphi_{\mathbf{CA}}\cos\varphi_{\mathbf{BD}}),$$

как тригонометрической функции шести углов между парами векторов. Условием перпендикулярности четырехстороннего угла является $\cos\varphi_{\mathbf{ABCD}} = 0$, что имеет место, например, при перпендикулярности одного из векторов трем другим векторам.

Примерами ортогональности в семимерной алгебре, например, являются:

$$(\mathbf{ABC}[\mathbf{ABC}]) = 0 \text{ и } ([\mathbf{AB}][\mathbf{BC}][\mathbf{CA}][\mathbf{ABC}]) = 0.$$

Определение 2. Скалярным произведением $(\mathbf{ABCDEF})$ шести векторов вещественного n -мерного векторного пространства назовем функцию от шести векторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ с вещественными значениями, удовлетворяющую требованиям:

1) линейности по одному из аргументов

$$(ABCDE, \alpha F + \beta G) = \alpha(ABCDEF) + \beta(ABCDEG);$$

2) симметрии по любой паре векторов

$$(ABCDEF) = (BACDEF) = \dots = (ABCDFE);$$

3) положительной определенности

$$(AAAAAA) > 0 \text{ при } A \neq 0.$$

Из линейности по одному из аргументов и симметрии следует линейность по любому аргументу. Перечисленным условиям удовлетворяет скалярное произведение шести векторов вида:

$$\begin{aligned} (ABCDEF) = & \\ = 1/15 & ((AB)(CD)(EF) + (BC)(DE)(AF) + (CD)(EA)(BF) + (DE)(AB)(CF) + (EA)(BC)(DF) + \\ & + (BC)(AD)(EF) + (CD)(BE)(AF) + (DE)(CA)(BF) + (EA)(DB)(CF) + (AB)(EC)(DF) + \\ & + (CA)(BD)(EF) + (DB)(CE)(AF) + (EC)(DA)(BF) + (AD)(EB)(CF) + (BE)(AC)(DF)). \end{aligned}$$

Действительно:

$$\begin{aligned} 1) (ABCDE, \alpha F + \beta G) = 1/15 \cdot & \\ \cdot ((AB)(CD)(E, \alpha F + \beta G) + (BC)(DE)(A, \alpha F + \beta G) + (CD)(EA)(B, \alpha F + \beta G) + (DE)(AB)(C, \alpha F + \beta G) + (EA)(BC)(D, \alpha F + \beta G) + & \\ + (BC)(AD)(E, \alpha F + \beta G) + (CD)(BE)(A, \alpha F + \beta G) + (DE)(CA)(B, \alpha F + \beta G) + (EA)(DB)(C, \alpha F + \beta G) + (AB)(EC)(D, \alpha F + \beta G) + & \\ + (CA)(BD)(E, \alpha F + \beta G) + (DB)(CE)(A, \alpha F + \beta G) + (EC)(DA)(B, \alpha F + \beta G) + (AD)(EB)(C, \alpha F + \beta G) + (BE)(AC)(D, \alpha F + \beta G)) & \\ = \alpha/15 & ((AB)(CD)(EF) + (BC)(DE)(AF) + (CD)(EA)(BF) + (DE)(AB)(CF) + (EA)(BC)(DF) + \\ & + (BC)(AD)(EF) + (CD)(BE)(AF) + (DE)(CA)(BF) + (EA)(DB)(CF) + (AB)(EC)(DF) + \\ & + (CA)(BD)(EF) + (DB)(CE)(AF) + (EC)(DA)(BF) + (AD)(EB)(CF) + (BE)(AC)(DF)) + \\ + 1/15 & ((AB)(CD)(EG) + (BC)(DE)(AG) + (CD)(EA)(BG) + (DE)(AB)(CG) + (EA)(BC)(DG) + \\ & + (BC)(AD)(EG) + (CD)(BE)(AG) + (DE)(CA)(BG) + (EA)(DB)(CG) + (AB)(EC)(DG) + \\ & + (CA)(BD)(EG) + (DB)(CE)(AG) + (EC)(DA)(BG) + (AD)(EB)(CG) + (BE)(AC)(DG)) = \\ = \alpha(ABCDEF) + \beta(ABCDEG); & \end{aligned}$$

2) $(ABCDEF)$ – не изменяется при перестановке любой пары векторов;

3) $(AAAAAA) = (AA)(AA)(AA) > 0$ при $A \neq 0$.

Для скалярного произведения шести векторов выполняется неравенство (Коши)

$$(ABCDEF) = |A||B||C||D||E||F|(1/15) \cdot$$

$$\begin{aligned} \cdot (\cos \varphi_{AB} \cos \varphi_{CD} \cos \varphi_{EF} + \cos \varphi_{BC} \cos \varphi_{DE} \cos \varphi_{AF} + \cos \varphi_{CD} \cos \varphi_{EA} \cos \varphi_{BF} + \cos \varphi_{DE} \cos \varphi_{AB} \cos \varphi_{CF} + \cos \varphi_{EA} \cos \varphi_{BC} \cos \varphi_{DF} + \\ + \cos \varphi_{BC} \cos \varphi_{AD} \cos \varphi_{EF} + \cos \varphi_{CD} \cos \varphi_{BE} \cos \varphi_{AF} + \cos \varphi_{DE} \cos \varphi_{CA} \cos \varphi_{BF} + \cos \varphi_{EA} \cos \varphi_{DB} \cos \varphi_{CF} + \cos \varphi_{AB} \cos \varphi_{EC} \cos \varphi_{DF} + \\ + \cos \varphi_{CA} \cos \varphi_{BD} \cos \varphi_{EF} + \cos \varphi_{DB} \cos \varphi_{CE} \cos \varphi_{AF} + \cos \varphi_{EC} \cos \varphi_{DA} \cos \varphi_{BF} + \cos \varphi_{AD} \cos \varphi_{EB} \cos \varphi_{CF} + \cos \varphi_{BE} \cos \varphi_{AC} \cos \varphi_{DF}), \end{aligned}$$

$$\text{т.е.} \quad (ABCDEF)^2 \leq |A|^2 |B|^2 |C|^2 |D|^2 |E|^2 |F|^2.$$

Это неравенство делает осмысленным определение угла φ_{ABCDEF} , образованного шестью векторами **A, B, C, D, E** и **F** посредством формулы

$$\text{Cos}\varphi_{ABCDEF} = (\mathbf{ABCDEF}) / |\mathbf{A}||\mathbf{B}||\mathbf{C}||\mathbf{D}||\mathbf{E}||\mathbf{F}| = (1/15) \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot (\text{Cos}\varphi_{AB}\text{Cos}\varphi_{CD}\text{Cos}\varphi_{EF} + \text{Cos}\varphi_{BC}\text{Cos}\varphi_{DE}\text{Cos}\varphi_{AF} + \text{Cos}\varphi_{CD}\text{Cos}\varphi_{EA}\text{Cos}\varphi_{BF} + \text{Cos}\varphi_{DE}\text{Cos}\varphi_{AB}\text{Cos}\varphi_{CF} + \text{Cos}\varphi_{EA}\text{Cos}\varphi_{BC}\text{Cos}\varphi_{DF} + \\ & + \text{Cos}\varphi_{BC}\text{Cos}\varphi_{AD}\text{Cos}\varphi_{EF} + \text{Cos}\varphi_{CD}\text{Cos}\varphi_{BE}\text{Cos}\varphi_{AF} + \text{Cos}\varphi_{DE}\text{Cos}\varphi_{CA}\text{Cos}\varphi_{BF} + \text{Cos}\varphi_{EA}\text{Cos}\varphi_{DB}\text{Cos}\varphi_{CF} + \text{Cos}\varphi_{AB}\text{Cos}\varphi_{EC}\text{Cos}\varphi_{DF} + \\ & + \text{Cos}\varphi_{CA}\text{Cos}\varphi_{BD}\text{Cos}\varphi_{EF} + \text{Cos}\varphi_{DB}\text{Cos}\varphi_{CE}\text{Cos}\varphi_{AF} + \text{Cos}\varphi_{EC}\text{Cos}\varphi_{DA}\text{Cos}\varphi_{BF} + \text{Cos}\varphi_{AD}\text{Cos}\varphi_{EB}\text{Cos}\varphi_{CF} + \text{Cos}\varphi_{BE}\text{Cos}\varphi_{AC}\text{Cos}\varphi_{DF}), \end{aligned}$$

как тригонометрической функции пятнадцати углов между парами векторов. Условием перпендикулярности шестистороннего угла является $\text{Cos}\varphi_{ABCDEF} = 0$, что имеет место, например, при перпендикулярности одного из векторов пяти другим векторам.

С помощью билинейных скалярных функций в n -мерном линейном векторном пространстве можно задать скалярное произведение четного числа $2k$ -векторов ($2k \leq n$). Определить симметрические по перестановке любой пары векторов скалярные функции нечетного числа векторов без сопоставления векторам линейных скалярных функций не удастся.

3. Инварианты симметричных полилинейных скалярных функций

Действительное векторное пространство U называют нормированным векторным пространством, если для каждого вектора $\mathbf{A} \in U$ существует такое действительное число $|\mathbf{A}|$, что из $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ следует $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$ и что для всех $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ из U :

$$|\mathbf{A}| \geq 0, \text{ из } |\mathbf{A}| = 0 \text{ следует, что } \mathbf{A} = 0, |\alpha\mathbf{A}| = \alpha|\mathbf{A}|, |\mathbf{A} + \mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|.$$

Каждое действительное векторное пространство позволяет формулами

$$|\mathbf{A}|^2 = (\mathbf{A}\mathbf{A}),$$

$$d_{AB}^2 = |\mathbf{A} - \mathbf{B}|^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}, \mathbf{A} - \mathbf{B}),$$

$$\text{Cos}\varphi_{AB} = (\mathbf{AB}) / |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

ввести норму (абсолютную величину, модуль) $|\mathbf{A}|$ каждого вектора $\mathbf{A}$, расстояние d_{AB} между двумя точками $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ из U и угол φ_{AB} между любыми двумя векторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. В действительном векторном пространстве действует неравенство Коши–Шварца, так что $\text{Cos}\varphi_{AB}$ действительное число для всех $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Конечномерные действительные векторные пространства служат моделями для n -мерных евклидовых геометрий.

Линейный оператор L в пространстве U является ортогональным, если $L^T L = L L^T = 1$, т.е. $L^T = L^{-1}$.

Каждое ортогональное преобразование $A' = LA$, где L – ортогональный оператор, сохраняет скалярное произведение двух векторов

$(A'B') = (LA, LB) = (AB)$ для всех A и B из U и, следовательно, для всех A из U норма $|A'| = |LA| = |A|$,

расстояние между двумя точками

$$d_{AB}'^2 = |A' - B'|^2 = (A' - B', A' - B') = (A - B, A - B) = |A - B|^2 = d_{AB}^2$$

и углы $\cos \varphi_{AB}' = (A'B') / |A'| |B'| = (AB) / |A| |B| = \cos \varphi_{AB}$ сохраняются.

Ортогональные операторы сохраняют скалярное произведение двух векторов, а также сложение векторов и произведение векторов на скаляры. Таким образом, при ортогональных преобразованиях норма векторов, расстояния между двумя точками, углы между двумя векторами, ортогональность и ортонормированность инвариантны.

Сказанному выше о свойствах скалярного произведения двух векторов удовлетворяют свойства скалярного произведения четырех и шести векторов семимерной векторной алгебры. Действительно, скалярные произведения четырех векторов

$$(ABCD) = 1/3 ((AB)(CD) + (BC)(AD) + (CA)(BD))$$

и шести векторов

$$(ABCDEF) =$$

$$= 1/15 ((AB)(CD)(EF) + (BC)(DE)(AF) + (CD)(EA)(BF) + (DE)(AB)(CF) + (EA)(BC)(DF) + \\ + (BC)(AD)(EF) + (CD)(BE)(AF) + (DE)(CA)(BF) + (EA)(DB)(CF) + (AB)(EC)(DF) + \\ + (CA)(BD)(EF) + (DB)(CE)(AF) + (EC)(DA)(BF) + (AD)(EB)(CF) + (BE)(AC)(DF))$$

определяются произведениями скалярных произведений пар векторов. Т.е. ортогональные операторы сохраняют не только скалярное произведение двух векторов, а также сложение векторов и произведение векторов на скаляры, (а следовательно, норму векторов, расстояния между двумя точками, углы между двумя векторами, ортогональность и ортонормированность), но и скалярные произведения (а следовательно, норму векторов, расстояния между двумя

точками, углы между двумя векторами, ортогональность и ортонормированность) четырех, а также шести векторов. Следовательно,

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{C}'\mathbf{D}') &= 1/3 ((\mathbf{A}'\mathbf{B}')(\mathbf{C}'\mathbf{D}') + (\mathbf{B}'\mathbf{C}')(\mathbf{A}'\mathbf{D}') + (\mathbf{C}'\mathbf{A}')(\mathbf{B}'\mathbf{D}')) = \\ &= 1/3 ((\mathbf{AB})(\mathbf{CD}) + (\mathbf{BC})(\mathbf{AD}) + (\mathbf{CA})(\mathbf{BD})) = (\mathbf{ABCD}) \end{aligned}$$

и

$$(\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{C}'\mathbf{D}'\mathbf{E}'\mathbf{F}')=1/15 \cdot$$

$$\begin{aligned} &\cdot ((\mathbf{A}'\mathbf{B}')(\mathbf{C}'\mathbf{D}')(\mathbf{E}'\mathbf{F}') + (\mathbf{B}'\mathbf{C}')(\mathbf{D}'\mathbf{E}')(\mathbf{A}'\mathbf{F}') + (\mathbf{C}'\mathbf{D}')(\mathbf{E}'\mathbf{A}')(\mathbf{B}'\mathbf{F}') + (\mathbf{D}'\mathbf{E}')(\mathbf{A}'\mathbf{B}')(\mathbf{C}'\mathbf{F}') + (\mathbf{E}'\mathbf{A}')(\mathbf{B}'\mathbf{C}')(\mathbf{D}'\mathbf{F}') + \\ &+ (\mathbf{B}'\mathbf{C}')(\mathbf{A}'\mathbf{D}')(\mathbf{E}'\mathbf{F}') + (\mathbf{C}'\mathbf{D}')(\mathbf{B}'\mathbf{E}')(\mathbf{A}'\mathbf{F}') + (\mathbf{D}'\mathbf{E}')(\mathbf{C}'\mathbf{A}')(\mathbf{B}'\mathbf{F}') + (\mathbf{E}'\mathbf{A}')(\mathbf{D}'\mathbf{B}')(\mathbf{C}'\mathbf{F}') + (\mathbf{A}'\mathbf{B}')(\mathbf{E}'\mathbf{C}')(\mathbf{D}'\mathbf{F}') + \\ &+ (\mathbf{C}'\mathbf{A}')(\mathbf{B}'\mathbf{D}')(\mathbf{E}'\mathbf{F}') + (\mathbf{D}'\mathbf{B}')(\mathbf{C}'\mathbf{E}')(\mathbf{A}'\mathbf{F}') + (\mathbf{E}'\mathbf{C}')(\mathbf{D}'\mathbf{A}')(\mathbf{B}'\mathbf{F}') + (\mathbf{A}'\mathbf{D}')(\mathbf{E}'\mathbf{B}')(\mathbf{C}'\mathbf{F}') + (\mathbf{B}'\mathbf{E}')(\mathbf{A}'\mathbf{C}')(\mathbf{D}'\mathbf{F}')) = \\ &= 1/15 ((\mathbf{AB})(\mathbf{CD})(\mathbf{EF}) + (\mathbf{BC})(\mathbf{DE})(\mathbf{AF}) + (\mathbf{CD})(\mathbf{EA})(\mathbf{BF}) + (\mathbf{DE})(\mathbf{AB})(\mathbf{CF}) + (\mathbf{EA})(\mathbf{BC})(\mathbf{DF}) + \\ &+ (\mathbf{BC})(\mathbf{AD})(\mathbf{EF}) + (\mathbf{CD})(\mathbf{BE})(\mathbf{AF}) + (\mathbf{DE})(\mathbf{CA})(\mathbf{BF}) + (\mathbf{EA})(\mathbf{DB})(\mathbf{CF}) + (\mathbf{AB})(\mathbf{EC})(\mathbf{DF}) + \\ &+ (\mathbf{CA})(\mathbf{BD})(\mathbf{EF}) + (\mathbf{DB})(\mathbf{CE})(\mathbf{AF}) + (\mathbf{EC})(\mathbf{DA})(\mathbf{BF}) + (\mathbf{AD})(\mathbf{EB})(\mathbf{CF}) + (\mathbf{BE})(\mathbf{AC})(\mathbf{DF})) = (\mathbf{ABCDEF}). \end{aligned}$$

Более того,

$$|\mathbf{A}'|^4 = (\mathbf{A}'\mathbf{A}')(\mathbf{A}'\mathbf{A}') = (\mathbf{AA})(\mathbf{AA}) = |\mathbf{A}|^4$$

и

$$|\mathbf{A}'|^6 = (\mathbf{A}'\mathbf{A}')(\mathbf{A}'\mathbf{A}')(\mathbf{A}'\mathbf{A}') = (\mathbf{AA})(\mathbf{AA})(\mathbf{AA}) = |\mathbf{A}|^6,$$

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{C}'\mathbf{D}'}^4 &= 1/3 (|\mathbf{A}'-\mathbf{B}'|^2|\mathbf{C}'-\mathbf{D}'|^2 + |\mathbf{B}'-\mathbf{C}'|^2|\mathbf{A}'-\mathbf{D}'|^2 + |\mathbf{C}'-\mathbf{A}'|^2|\mathbf{B}'-\mathbf{D}'|^2) = \\ &= 1/3 (|\mathbf{A}-\mathbf{B}|^2|\mathbf{C}-\mathbf{D}|^2 + |\mathbf{B}-\mathbf{C}|^2|\mathbf{A}-\mathbf{D}|^2 + |\mathbf{C}-\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}-\mathbf{D}|^2) = d_{\mathbf{ABCD}}^4, \end{aligned}$$

$$d_{\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{C}'\mathbf{D}'\mathbf{E}'\mathbf{F}'}^6 = 1/15 \cdot$$

$$\begin{aligned} &\cdot (|\mathbf{A}'-\mathbf{B}'|^2|\mathbf{C}'-\mathbf{D}'|^2|\mathbf{E}'-\mathbf{F}'|^2 + |\mathbf{B}'-\mathbf{C}'|^2|\mathbf{D}'-\mathbf{E}'|^2|\mathbf{A}'-\mathbf{F}'|^2 + |\mathbf{C}'-\mathbf{D}'|^2|\mathbf{E}'-\mathbf{A}'|^2|\mathbf{B}'-\mathbf{F}'|^2 + |\mathbf{D}'-\mathbf{E}'|^2|\mathbf{A}'-\mathbf{B}'|^2|\mathbf{C}'-\mathbf{F}'|^2 + |\mathbf{E}'-\mathbf{A}'|^2|\mathbf{B}'-\mathbf{C}'|^2|\mathbf{D}'-\mathbf{F}'|^2 + \\ &+ |\mathbf{B}'-\mathbf{C}'|^2|\mathbf{A}'-\mathbf{D}'|^2|\mathbf{E}'-\mathbf{F}'|^2 + |\mathbf{C}'-\mathbf{D}'|^2|\mathbf{B}'-\mathbf{E}'|^2|\mathbf{A}'-\mathbf{F}'|^2 + |\mathbf{D}'-\mathbf{E}'|^2|\mathbf{C}'-\mathbf{A}'|^2|\mathbf{B}'-\mathbf{F}'|^2 + |\mathbf{E}'-\mathbf{A}'|^2|\mathbf{D}'-\mathbf{B}'|^2|\mathbf{C}'-\mathbf{F}'|^2 + |\mathbf{A}'-\mathbf{B}'|^2|\mathbf{E}'-\mathbf{C}'|^2|\mathbf{D}'-\mathbf{F}'|^2 + \\ &+ |\mathbf{C}'-\mathbf{A}'|^2|\mathbf{B}'-\mathbf{D}'|^2|\mathbf{E}'-\mathbf{F}'|^2 + |\mathbf{D}'-\mathbf{B}'|^2|\mathbf{C}'-\mathbf{E}'|^2|\mathbf{A}'-\mathbf{F}'|^2 + |\mathbf{E}'-\mathbf{C}'|^2|\mathbf{D}'-\mathbf{A}'|^2|\mathbf{B}'-\mathbf{F}'|^2 + |\mathbf{A}'-\mathbf{D}'|^2|\mathbf{E}'-\mathbf{B}'|^2|\mathbf{C}'-\mathbf{F}'|^2 + |\mathbf{B}'-\mathbf{E}'|^2|\mathbf{A}'-\mathbf{C}'|^2|\mathbf{D}'-\mathbf{F}'|^2) = \\ &= 1/15 (|\mathbf{A}-\mathbf{B}|^2|\mathbf{C}-\mathbf{D}|^2|\mathbf{E}-\mathbf{F}|^2 + |\mathbf{B}-\mathbf{C}|^2|\mathbf{D}-\mathbf{E}|^2|\mathbf{A}-\mathbf{F}|^2 + |\mathbf{C}-\mathbf{D}|^2|\mathbf{E}-\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}-\mathbf{F}|^2 + |\mathbf{D}-\mathbf{E}|^2|\mathbf{A}-\mathbf{B}|^2|\mathbf{C}-\mathbf{F}|^2 + |\mathbf{E}-\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}-\mathbf{C}|^2|\mathbf{D}-\mathbf{F}|^2 + \\ &+ |\mathbf{B}-\mathbf{C}|^2|\mathbf{A}-\mathbf{D}|^2|\mathbf{E}-\mathbf{F}|^2 + |\mathbf{C}-\mathbf{D}|^2|\mathbf{B}-\mathbf{E}|^2|\mathbf{A}-\mathbf{F}|^2 + |\mathbf{D}-\mathbf{E}|^2|\mathbf{C}-\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}-\mathbf{F}|^2 + |\mathbf{E}-\mathbf{A}|^2|\mathbf{D}-\mathbf{B}|^2|\mathbf{C}-\mathbf{F}|^2 + |\mathbf{A}-\mathbf{B}|^2|\mathbf{E}-\mathbf{C}|^2|\mathbf{D}-\mathbf{F}|^2 + \\ &+ |\mathbf{C}-\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}-\mathbf{D}|^2|\mathbf{E}-\mathbf{F}|^2 + |\mathbf{D}-\mathbf{B}|^2|\mathbf{C}-\mathbf{E}|^2|\mathbf{A}-\mathbf{F}|^2 + |\mathbf{E}-\mathbf{C}|^2|\mathbf{D}-\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}-\mathbf{F}|^2 + |\mathbf{A}-\mathbf{D}|^2|\mathbf{E}-\mathbf{B}|^2|\mathbf{C}-\mathbf{F}|^2 + |\mathbf{B}-\mathbf{E}|^2|\mathbf{A}-\mathbf{C}|^2|\mathbf{D}-\mathbf{F}|^2) = d_{\mathbf{ABCDEF}}^6, \end{aligned}$$

$$\text{Cos}\varphi_{\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{C}'\mathbf{D}'\mathbf{E}'\mathbf{F}'} = (\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{C}'\mathbf{D}'\mathbf{E}'\mathbf{F}')/|\mathbf{A}'||\mathbf{B}'||\mathbf{C}'||\mathbf{D}'||\mathbf{E}'||\mathbf{F}'| = (\mathbf{ABCDEF})/|\mathbf{A}||\mathbf{B}||\mathbf{C}||\mathbf{D}||\mathbf{E}||\mathbf{F}| = \text{Cos}\varphi_{\mathbf{ABCDEF}} = (1/15) \cdot$$

$$\begin{aligned} &\cdot (\text{Cos}\varphi_{\mathbf{AB}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{CD}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{EF}} + \text{Cos}\varphi_{\mathbf{BC}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{DE}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{AF}} + \text{Cos}\varphi_{\mathbf{CD}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{EA}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{BF}} + \text{Cos}\varphi_{\mathbf{DE}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{AB}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{CF}} + \text{Cos}\varphi_{\mathbf{EA}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{BC}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{DF}} + \\ &+ \text{Cos}\varphi_{\mathbf{BC}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{AD}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{EF}} + \text{Cos}\varphi_{\mathbf{CD}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{BE}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{AF}} + \text{Cos}\varphi_{\mathbf{DE}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{CA}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{BF}} + \text{Cos}\varphi_{\mathbf{EA}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{DB}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{CF}} + \text{Cos}\varphi_{\mathbf{AB}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{EC}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{DF}} + \\ &+ \text{Cos}\varphi_{\mathbf{CA}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{BD}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{EF}} + \text{Cos}\varphi_{\mathbf{DB}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{CE}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{AF}} + \text{Cos}\varphi_{\mathbf{EC}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{DA}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{BF}} + \text{Cos}\varphi_{\mathbf{AD}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{EB}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{CF}} + \text{Cos}\varphi_{\mathbf{BE}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{AC}}\text{Cos}\varphi_{\mathbf{DF}}). \end{aligned}$$

Другими словами, скалярные произведения четырех и шести векторов в семимерной векторной алгебре являются инвариантными величинами. При этом сохраняются значения не только $|\mathbf{A}|^2$, $d_{\mathbf{AB}}^2$ и $\text{Cos}\varphi_{\mathbf{AB}}$, но и $|\mathbf{A}|^4$, $d_{\mathbf{ABCD}}^4$ и $\text{Cos}\varphi_{\mathbf{ABCD}}$, а также $|\mathbf{A}|^6$, $d_{\mathbf{ABCDEF}}^6$ и $\text{Cos}\varphi_{\mathbf{ABCDEF}}$. То есть, сохраняются также "норма",

"расстояние" между четырьмя и шестью точками, а также "угол" между четырьмя и шестью векторами.

4. Поликватратичные формы

Предпосылкой и основанием для определения поликватратичных форм является наличие в семимерной векторной алгебре симметрических скалярных функций не только двух векторов – скалярного произведения двух векторов $(\mathbf{AB})$, но также четырех $(\mathbf{ABCD})$ и шести $(\mathbf{ABCDEF})$ векторов. При этом скалярные произведения четырех и шести векторов соответственно имеют вид:

$$(\mathbf{ABCD}) = 1/3 ((\mathbf{AB})(\mathbf{CD}) + (\mathbf{BC})(\mathbf{AD}) + (\mathbf{CA})(\mathbf{BD}))$$

и $(\mathbf{ABCDEF}) =$

$$= 1/15((\mathbf{AB})(\mathbf{CD})(\mathbf{EF})+(\mathbf{BC})(\mathbf{DE})(\mathbf{AF})+(\mathbf{CD})(\mathbf{EA})(\mathbf{BF})+(\mathbf{DE})(\mathbf{AB})(\mathbf{CF})+(\mathbf{EA})(\mathbf{BC})(\mathbf{DF}) +$$

$$+(\mathbf{BC})(\mathbf{AD})(\mathbf{EF})+(\mathbf{CD})(\mathbf{BE})(\mathbf{AF})+(\mathbf{DE})(\mathbf{CA})(\mathbf{BF})+(\mathbf{EA})(\mathbf{DB})(\mathbf{CF})+(\mathbf{AB})(\mathbf{EC})(\mathbf{DF}) +$$

$$+(\mathbf{CA})(\mathbf{BD})(\mathbf{EF})+(\mathbf{DB})(\mathbf{CE})(\mathbf{AF})+(\mathbf{EC})(\mathbf{DA})(\mathbf{BF})+(\mathbf{AD})(\mathbf{EB})(\mathbf{CF})+(\mathbf{BE})(\mathbf{AC})(\mathbf{DF})),$$

а скалярные четвертая и шестая степени векторов

$$(\mathbf{AAAA}) = (\mathbf{AA})(\mathbf{AA})$$

и $(\mathbf{AAAAAA}) = (\mathbf{AA})(\mathbf{AA})(\mathbf{AA})$

определяются второй и третьей степенями скалярных квадратов векторов, т.е. в конечном итоге степенями квадратичной формы.

В линейном векторном пространстве большей размерности могут быть получены симметрические скалярные функции большего числа векторов, также определяемые произведением скалярных произведений пар векторов. Аналогичным образом соответственно должны быть определены большие степени квадратичных форм.

Квадратичной формой называют [2] однородный многочлен второй степени от нескольких букв. Обозначим эти буквы через $x^1, x^2, \dots, x^n$. В общем виде квадратичная форма может быть записана так:

$$f(x^1, x^2, \dots, x^n) = a_{11}x^1x^1 + a_{12}x^1x^2 + \dots + a_{1n}x^1x^n +$$

$$+ a_{22}x^2x^2 + \dots + a_{2n}x^2x^n +$$

$$\dots \dots \dots$$

$$+ a_{nn}x^nx^n.$$

Коэффициенты в этой форме записи образуют треугольную матрицу, однако эта форма записи неудобна. Если в поле (или в кольце), из которого берутся коэффициенты формы выполнимо деление на два, то удобнее каждый недиагональный коэффициент разделить на два и записать два раза, при произведениях букв в обоих порядках. Запись примет вид:

$$f(x^1, x^2, \dots, x^n) = a_{11}x^1x^1 + a_{12}x^1x^2 + \dots + a_{1n}x^1x^n + \\ + a_{21}x^2x^1 + a_{22}x^2x^2 + \dots + a_{2n}x^2x^n + \\ \dots \dots \dots + a_{n1}x^nx^1 + a_{n2}x^nx^2 + \dots + a_{nn}x^nx^n$$

причем $a_{ij} = a_{ji}$. Такую запись квадратичной формы называют правильной.

Матрица

$$A = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{vmatrix}$$

является матрицей квадратичной формы. Она симметрична, т.е. $A^T=A$.

Квадратичная форма может быть записана более компактно, если использовать матричные обозначения. Вынося x^i из i -той строки, получим

$$f(x^1, x^2, \dots, x^n) = X^T A X,$$

где через X обозначена матрица-столбец $(x^1, x^2, \dots, x^n)^T$, а через $X^T A X$ – квадратичная форма $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$.

Пусть в квадратичной форме $f(x^1, x^2, \dots, x^n) = X^T A X$ делается линейное преобразование переменных с невырожденной матрицей: $X = B Y$. Тогда квадратичная форма от букв $x^1, x^2, \dots, x^n$ преобразуется в квадратичную форму от букв $y^1, y^2, \dots, y^n$ (компонент столбца Y), а именно в $f_1(Y) = Y^T (B^T A B) Y$.

Покажем, что форма $f_1(Y)$ автоматически получилась правильно записанной. Для этого достаточно убедиться в том, что матрица $B^T A B$ симметрична, что легко проверяется:

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}.$$

Отметим, что квадратичная форма $f(x^1, x^2, \dots, x^n) = X^T A X$ линейным преобразованием переменных $X = B Y$ приводится к каноническому виду:

$B^T A B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Если к тому же квадратичная форма положительно определена, т.е. коэффициенты b^i положительны, то преобразованием $Y=CZ$, где $C = \text{diag}(b_1^{-1/2}, b_2^{-1/2}, \dots, b_n^{-1/2})$, квадратичная форма приводится к сумме квадратов, т.е.

$$f(x^1, x^2, \dots, x^n) = X^T A X = Y^T (B^T A B) Y = Z^T C^T (B^T A B) C Z = (z^1)^2 + (z^2)^2 + \dots + (z^n)^2.$$

Биквадратичной формой назовем однородный многочлен четвертой степени от нескольких букв, образованный произведением двух однородных многочленов второй степени от тех же букв. Обозначим эти буквы через $x^1, x^2, \dots, x^n$. В общем виде биквадратичная форма может быть записана так:

$$f^2(x^1, x^2, \dots, x^n) = (a_{11}x^1x^1 + a_{12}x^1x^2 + \dots + a_{1n}x^1x^n + \\ + a_{21}x^2x^1 + a_{22}x^2x^2 + \dots + a_{2n}x^2x^n + \dots + a_{n1}x^nx^1 + a_{n2}x^nx^2 + \dots + a_{nn}x^nx^n) \cdot (a_{11}x^1x^1 + a_{12}x^1x^2 + \dots + a_{1n}x^1x^n + \\ + a_{21}x^2x^1 + a_{22}x^2x^2 + \dots + a_{2n}x^2x^n + \dots + a_{n1}x^nx^1 + a_{n2}x^nx^2 + \dots + a_{nn}x^nx^n),$$

причем $a_{ij} = a_{ji}$. Такую запись биквадратичной формы назовем правильной.

Матрица

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

является матрицей квадратичной формы. Она симметрична, т.е. $A^T = A$.

Биквадратичная форма может быть записана более компактно, если использовать матричные обозначения. Вынося x^i из i -той строки, получим

$$f^2(x^1, x^2, \dots, x^n) = (X^T A X) * (X^T A X),$$

где через X обозначена матрица-столбец $(x^1, x^2, \dots, x^n)^T$, а через $X^T A X$ – квадратичная форма $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$.

Пусть в биквадратичной форме $f^2(x^1, x^2, \dots, x^n) = (X^T A X) * (X^T A X)$ делается линейное преобразование переменных с невырожденной матрицей: $X = B Y$. Тогда биквадратичная форма от букв $x^1, x^2, \dots, x^n$ преобразуется в биквадратичную форму от букв $y^1, y^2, \dots, y^n$ (компонент столбца Y), а именно в $f_1^2(Y) = Y^T (B^T A B) Y * Y^T (B^T A B) Y$.

Покажем, что форма $f_1^2(Y)$ автоматически получилась правильно записанной. Для этого достаточно убедиться в том, что матрица $B^T A B$ симметрична, что легко проверяется:

$$(B^T A B)^T = B^T A B.$$

Отметим, что биквадратичная форма $f^2(x^1, x^2, \dots, x^n) = X^T A X$ линейным преобразованием переменных $X = B Y$ приводится к каноническому виду:

$$B^T A B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Если к тому же квадратичная форма положительно определена, т.е. коэффициенты b^i положительны, то преобразованием $Y = C Z$, где $C = \text{diag}(b_1^{-1/2}, b_2^{-1/2}, \dots, b_n^{-1/2})$, биквадратичная форма приводится к квадрату квадратичной формы, т.е.

$$\begin{aligned} f^2(x^1, x^2, \dots, x^n) &= (X^T A X) * (X^T A X) = Y^T (B^T A B) Y * Y^T (B^T A B) Y = \\ &= Z^T C^T (B^T A B) C Z * Z^T C^T (B^T A B) C Z = ((z^1)^2 + (z^2)^2 + \dots + (z^n)^2)^2 \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно построить триквадратичную форму:

$$f^3(x^1, x^2, \dots, x^n) = (f(x^1, x^2, \dots, x^n))^3 = ((z^1)^2 + (z^2)^2 + \dots + (z^n)^2)^3.$$

Вообще для поликвадратичной формы при тех же допущениях имеем:

$$f^k(x^1, x^2, \dots, x^n) = (f(x^1, x^2, \dots, x^n))^k = ((z^1)^2 + (z^2)^2 + \dots + (z^n)^2)^k,$$

при этом $2k \leq n$.

5. Инварианты полилинейных форм

Предпосылкой и основанием для определения полилинейных форм является наличие в семимерной векторной алгебре симметрических скалярных функций не только двух векторов – скалярного произведения двух векторов **(AB)**, но также четырех **(ABCD)** и шести **(ABCDEF)** векторов. При этом скалярные произведения четырех и шести векторов соответственно имеют вид:

$$(ABCD) = 1/3 ((AB)(CD) + (BC)(AD) + (CA)(BD))$$

и $(ABCDEF) =$

$$\begin{aligned} &= 1/15((AB)(CD)(EF) + (BC)(DE)(AF) + (CD)(EA)(BF) + (DE)(AB)(CF) + (EA)(BC)(DF) + \\ &+ (BC)(AD)(EF) + (CD)(BE)(AF) + (DE)(CA)(BF) + (EA)(DB)(CF) + (AB)(EC)(DF) + \\ &+ (CA)(BD)(EF) + (DB)(CE)(AF) + (EC)(DA)(BF) + (AD)(EB)(CF) + (BE)(AC)(DF)), \end{aligned}$$

т.е. в конечном итоге определяются суммой произведений скалярных произведений пар векторов.

Скалярные четвертая и шестая степени векторов

$$(AAAA) = (AA)(AA)$$

$$\text{и } (AAAAAA) = (AA)(AA)(AA)$$

определяются второй и третьей степенями скалярных квадратов векторов, т.е. в конечном итоге степенями квадратичной формы.

Определение 1. Билинейной (двулинейной) формой от $2n$ действительных переменных

$A^1, A^2, \dots, A^n$ и $B^1, B^2, \dots, B^n$ называют однородный многочлен второй степени

$$(AB) = A^T L B = (A^1, A^2, \dots, A^n)^T L (B^1, B^2, \dots, B^n),$$

где, A^T – матрица-строка, L – квадратная матрица, B – матрица-столбец.

Определение 2. Четырехлинейной формой от $4n$ действительных переменных $A^1, A^2, \dots, A^n, B^1, B^2, \dots, B^n, C^1, C^2, \dots, C^n$ и $D^1, D^2, \dots, D^n$ назовем однородный многочлен четвертой степени

$$\begin{aligned} (ABCD) &= 1/3((AB)(CD) + (BC)(AD) + (CA)(BD)) = \\ &= 1/3((A^T L B)(C^T L D) + (B^T L C)(A^T L D) + (C^T L A)(B^T L D)). \end{aligned}$$

Определение 3. Шестилинейной формой от $6n$ действительных переменных $A^1, A^2, \dots, A^n, B^1, B^2, \dots, B^n, C^1, C^2, \dots, C^n, D^1, D^2, \dots, D^n, E^1, E^2, \dots, E^n$ и $F^1, F^2, \dots, F^n$ однородный многочлен шестой степени

$$(ABCDEF) = 1/15 \cdot$$

$$\begin{aligned} &\cdot ((A^T L B)(C^T L D)(E^T L F) + (B^T L C)(A^T L D)(E^T L F) + (C^T L A)(B^T L D)(E^T L F) + \\ &+ (B^T L C)(D^T L E)(A^T L F) + (C^T L D)(B^T L E)(A^T L F) + (D^T L B)(C^T L E)(A^T L F) + \\ &+ (C^T L D)(E^T L A)(B^T L F) + (D^T L E)(C^T L A)(B^T L F) + (E^T L C)(D^T L A)(B^T L F) + \\ &+ (D^T L E)(A^T L B)(C^T L F) + (E^T L A)(D^T L B)(C^T L F) + (A^T L D)(E^T L B)(C^T L F) + \\ &+ (E^T L A)(B^T L C)(D^T L F) + (A^T L B)(E^T L C)(D^T L F) + (B^T L E)(A^T L C)(D^T L F)). \end{aligned}$$

Отметим, что, как указывалось в предыдущих работах, ортогональные операторы сохраняют не только скалярное произведение двух векторов, сложение векторов и произведение векторов на скаляры, (а, следовательно, норму векторов, расстояние между двумя точками, угол между двумя векторами, ортогональность и ортонормированность), но и скалярные произведения четырех и шести

векторов, а также "норму", "расстояние" между четырьмя и шестью точками и "угол" между четырьмя и шестью векторами. Другими словами, четырехлинейные и шестилинейные формы являются инвариантными величинами.

Полилинейные формы определены лишь для четного числа наборов действительных переменных. Определить их для нечетного числа наборов действительных переменных не удастся.

Поликвадратичные формы, очевидно, являются частным случаем полилинейных форм, когда наборы переменных совпадают.

6. Симметричные полилинейные скалярные функции и формы

Линейные функции и формы от одной переменной

Рассмотрим линейную функцию [3] одного переменного вектора $\mathbf{a}$ n -мерного линейного векторного пространства L^n , т.е. определим правило, ставящее в соответствие каждому вектору $\mathbf{a}$ пространства L^n некоторое число $l(\mathbf{a})$ из поля K . Будем считать, что эта функция является линейной, т.е. выполнено следующее условие:

$$l(\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2) = \alpha_1 l(\mathbf{a}_1) + \alpha_2 l(\mathbf{a}_2)$$

каковы бы ни были векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ и числа α_1, α_2 .

Если вектор $\mathbf{a}$ задан своими координатами относительно данного базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ пространства L^n , так что $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$, то значение линейной функции $l(\mathbf{a})$ через координаты $a^1, \dots, a^n$ вектора $\mathbf{a}$ выразится следующим образом:

$$l(\mathbf{a}) = l(a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n) = \sum a^i l(\mathbf{e}_i).$$

Положим $l(\mathbf{e}_i) = l_i$. Тогда имеем $l(\mathbf{a}) = \sum l_i a^i$ для вектора $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$. Многочлены вида $l(a^1, \dots, a^n) = \sum l_i a^i$ линейные по ряду переменных $a^1, \dots, a^n$ называют линейными формами от ряда переменных $a^1, \dots, a^n$.

Матрицу $L_1 = (l_1, \dots, l_n)$ называют матрицей линейной формы $l(a^1, \dots, a^n) = \sum l_i a^i$ или матрицей линейной функции $l(\mathbf{a})$ относительно базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$.

Итак, линейная функция записывается в любом базисе в виде линейной формы. Обратно, если линейная функция в каком-нибудь базисе записывается в виде линейной формы, то ее записью во всяком базисе будет линейная форма.

Линейную форму можно представить в виде

$$l(\mathbf{a}) = l_1 a^1 + l_2 a^2 + \dots + l_n a^n.$$

Обозначив столбец $(a^1, a^2, \dots, a^n)^T$ через $\mathbf{A}$, получим $l(\mathbf{a}) = L_1 \mathbf{A}$.

Линейные функции и формы от двух переменных

Рассмотрим билинейную функцию двух переменных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ n -мерного линейного векторного пространства L^n , т.е. определим правило, ставящее в соответствие каждому двум векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ пространства L^n некоторое число $l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ из поля K . Будем считать, что эта функция является линейной по второму аргументу и симметрична по перестановке векторов, т.е. выполнены следующие условия:

а) линейности по второму аргументу

$$l(\mathbf{a}, \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2) = \alpha_1 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1) + \alpha_2 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2);$$

б) симметрии по перестановке векторов

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = l(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

Из линейности по второму аргументу и симметрии следует линейность по первому аргументу:

$$l(\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = \alpha_1 l(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + \alpha_2 l(\mathbf{a}_2, \mathbf{b})$$

(каковы бы ни были векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и числа α_1 , α_2).

Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы своими координатами относительно данного базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ пространства L^n , так что $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$, то значение билинейной функции $l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ через координаты $a^1, \dots, a^n$ и $b^1, \dots, b^n$ векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ выразится следующим образом:

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = l(a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n, b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n) = \sum_i \sum_j a^i b^j l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Положим $l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = l_{ij}$. Тогда имеем $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_i \sum_j l_{ij} a^i b^j$ для векторов $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$. Многочлены вида $l(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n) = \sum_i \sum_j l_{ij} a^i b^j$ линейные по каждому из двух рядов переменных $a^1, \dots, a^n$ и $b^1, \dots, b^n$ называют билинейными формами от двух рядов переменных $a^1, \dots, a^n$ и $b^1, \dots, b^n$.

Матрицу

$$L_2 = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{vmatrix}$$

называют матрицей билинейной формы $l(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n) = \sum \sum l_{ij} a^i b^j$ или матрицей билинейной функции $l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ относительно базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$.

Билинейная форма $l(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n)$ симметрична, т.е. $l_{ij} = l_{ji}$. Билинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ также симметрична, т.е. $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = l(\mathbf{b}, \mathbf{a})$. Тогда $l_{ij} = l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = l_{ji}$ и матрица билинейной формы L_2 также оказывается симметричной. Обратно, если в каком-нибудь базисе данная билинейная функция записывается в виде билинейной формы с симметричной матрицей, то значение функции $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum \sum l_{ij} a^i b^j$ не меняется при замене в этом многочлене одного из двух рядов переменных $a^1, \dots, a^n$ и $b^1, \dots, b^n$ другим, что означает равенство $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = l(\mathbf{b}, \mathbf{a})$, т.е. симметричность функции $l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Итак, симметричная билинейная функция записывается в любом базисе в виде симметричной билинейной формы. Обратно, если билинейная функция в каком-нибудь базисе записывается в виде симметричной билинейной формы, то она симметрична и следовательно, ее записью во всяком базисе будет симметричная билинейная форма.

Симметричная билинейная форма может быть записана более компактно в матричной форме следующим образом:

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{A}^T L_2 \mathbf{B}.$$

Каждая функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ от двух переменных векторов определяет функцию от одного переменного, если положить $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, т.е. $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = l(\mathbf{a}, \mathbf{a})$. Функцию $l(\mathbf{a}, \mathbf{a})$, полученную по этому правилу из симметричной билинейной функции называют квадратичной функцией, порожденной данной билинейной функцией $l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Для каждой квадратичной функции $l(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ существует лишь одна, порождающая ее симметричная билинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Если в данном базисе симметричная билинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ записывается в виде $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum \sum l_{ij} a^i b^j$ для векторов $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$, где $l_{ij} = l_{ji}$, то очевидно, $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum l_{ij} a^i a^j$ для вектора

$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$. Многочлен вида $\sum \sum l_{ij} a^i a^j$, все члены которого суть одночлены $l_{ij} a^i a^j$ второй степени, есть не что иное, как однородный многочлен второй степени или квадратичная форма от ряда переменных $a^1, \dots, a^n$. При этом $l_{ij} = l_{ji}$, а симметричная матрица L_2 оказывается матрицей квадратичной формы $l(a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n) = \sum \sum l_{ij} a^i a^j$.

Мы получили следующий результат: квадратичная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{a})$, порожденная данной билинейной функцией $l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ во всяком базисе записывается в виде квадратичной формы $l(a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n)$, имеющей ту же матрицу, что и билинейная форма $l(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n)$. Другими словами квадратичная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ и билинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ во всяком базисе записываются в виде форм: квадратичной или билинейной, имеющих одну и ту же симметричную матрицу L_2 .

Квадратичную форму можно представить в виде

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = l_{11} a^1 a^1 + l_{12} a^1 a^2 + ... + l_{1n} a^1 a^n + \\ + l_{21} a^2 a^1 + l_{22} a^2 a^2 + ... + l_{2n} a^2 a^n + \\ \\ + l_{n1} a^n a^1 + l_{n2} a^n a^2 + ... + l_{nn} a^n a^n,$$

причем $l_{ij}=l_{ji}$. Такую запись квадратичной формы называют правильной.

Матрица L_2 симметрична, т.е. $L_2^T=L_2$.

Квадратичная форма может быть записана более компактно в матричной форме. Вынося a^i из i -той строки получим

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = a^1(l_{11}a^1 + l_{12}a^2 + \dots + l_{1n}a^n) +$$

$$+ a^2(l_{21}a^1 + l_{22}a^2 + \dots + l_{2n}a^n) +$$

$$\dots$$

$$+ a^n(l_{n1}a^1 + l_{n2}a^2 + \dots + l_{nn}a^n) =$$

$$= (a^1, a^2, \dots, a^n) \cdot \begin{pmatrix} l_{11}a^1 + l_{12}a^2 + \dots + l_{1n}a^n \\ l_{21}a^1 + l_{22}a^2 + \dots + l_{2n}a^n \\ \dots \\ l_{n1}a^1 + l_{n2}a^2 + \dots + l_{nn}a^n \end{pmatrix} = (a^1, a^2, \dots, a^n) \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \dots \\ a^n \end{pmatrix}.$$

Обозначив столбец $(a^1, a^2, \dots, a^n)^T$ через A , получим $l(a, a) = A^T L_2 A$.

Полилинейные функции и формы от трех переменных

Рассмотрим полилинейную функцию трех переменных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ n -мерного линейного векторного пространства L^n , т.е. определим правило,

ставляющее в соответствие каждому трем векторам $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ пространства L^n некоторое число $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ из поля K . Будем считать, что эта функция является линейной по третьему аргументу и симметрична по перестановке векторов, т.е. выполнены следующие условия:

а) линейности по третьему аргументу

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2) = \alpha_1 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1) + \alpha_2 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_2);$$

б) симметрии по перестановке векторов

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = l(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = \dots = l(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}).$$

Из линейности по третьему аргументу и симметрии следует линейность по остальным аргументам:

$$l(\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha_1 l(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \alpha_2 l(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

$$l(\mathbf{a}, \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = \alpha_1 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) + \alpha_2 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c})$$

(каковы бы ни были векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и числа α_1, α_2).

Перечисленным условиям удовлетворяет линейная функция трех векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ вида

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1/3(l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{a}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b})).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2) &= 1/3((l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2) + l(\mathbf{b}, \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2)l(\mathbf{a}) + l(\alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2, \mathbf{a})l(\mathbf{b})) = \\ &= \alpha_1/3(l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}_1) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c}_1)l(\mathbf{a}) + l(\mathbf{c}_1, \mathbf{a})l(\mathbf{b})) + \\ &+ \alpha_2/3(l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}_2) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c}_2)l(\mathbf{a}) + l(\mathbf{c}_2, \mathbf{a})l(\mathbf{b})) = \\ &= \alpha_1 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1) + \alpha_2 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_2). \end{aligned}$$

Если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ заданы своими координатами относительно данного базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ пространства L^n , так что $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{c} = c^1 \mathbf{e}_1 + \dots + c^n \mathbf{e}_n$ то значение полилинейной функции $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ через координаты $a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n$ и $c^1, \dots, c^n$ векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ выразится следующим образом:

$$\begin{aligned} l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= l(a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n, b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n, c^1 \mathbf{e}_1 + \dots + c^n \mathbf{e}_n) = \\ &= 1/3(l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{a}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b})) = \\ &= 1/3(\sum_i \sum_j a^i b^j l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \sum_k c^k l(\mathbf{e}_k) + \sum_j \sum_k b^j c^k l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) \sum_i a^i l(\mathbf{e}_i) + \sum_k \sum_i c^k a^i l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i) \sum_j b^j l(\mathbf{e}_j)) = \\ &= 1/3(\sum_{ij} l_{ij} a^i b^j \sum_k c^k + \sum_{jk} l_{jk} b^j c^k \sum_i a^i + \sum_{ki} l_{ki} c^k a^i \sum_j b^j) = \\ &= 1/3 \sum_{ijk} a^i b^j c^k (l_{ij} l_k + l_{jk} l_i + l_{ki} l_j). \end{aligned}$$

$$\text{Положим } 1/3(l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_i) + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j)) = 1/3(l_{ij} l_k + l_{jk} l_i + l_{ki} l_j) = l_{ijk}.$$

Тогда имеем $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum \sum \sum l_{ijk} a^i b^j c^k$ для векторов $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{c} = c^1 \mathbf{e}_1 + \dots + c^n \mathbf{e}_n$. Многочлены вида $l(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n) = \sum \sum \sum l_{ijk} a^i b^j c^k$, линейные по каждому из трех рядов переменных $a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n$ и $c^1, \dots, c^n$ назовем полилинейной формой от трех рядов переменных $a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n$ и $c^1, \dots, c^n$.

Полилинейная форма от трех переменных может быть представлена в виде

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1/3 \sum \sum \sum a^i b^j c^k (l_{ij} l_k + l_{jk} l_i + l_{ki} l_j) =$$

$$= 1/3 ((l_{11} l_1 a^1 b^1 c^1 + \dots + l_{1n} l_1 a^1 b^n c^1 + l_{11} l_2 a^1 b^1 c^2 + \dots + l_{1n} l_2 a^1 b^n c^2 + \dots + l_{1n} l_n a^1 b^n c^n + \dots + l_{21} l_1 a^2 b^1 c^1 + \dots + l_{2n} l_1 a^2 b^n c^1 + l_{21} l_2 a^2 b^1 c^2 + \dots + l_{2n} l_2 a^2 b^n c^2 + \dots + l_{21} l_n a^2 b^n c^n + \dots + l_{n1} l_1 a^n b^1 c^1 + \dots + l_{nn} l_1 a^n b^n c^1 + l_{n1} l_2 a^n b^1 c^2 + \dots + l_{nn} l_2 a^n b^n c^2 + \dots + l_{n1} l_n a^n b^n c^n + \dots + l_{nn} l_n a^n b^n c^n) + \dots).$$

Полилинейная форма $l(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n)$ симметрична, т.е. $l_{ijk} = 1/3 (l_{ij} l_k + l_{jk} l_i + l_{ki} l_j)$ не изменяется при перестановке любой пары индексов. Полилинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ также симметрична, т.е. $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = l(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = \dots = l(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$.

Тогда $1/3 (l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) l(\mathbf{e}_k) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) l(\mathbf{e}_i) + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i) l(\mathbf{e}_j)) = 1/3 (l_{ij} l_k + l_{jk} l_i + l_{ki} l_j) = l_{ijk}$ и тензор полилинейной формы L_3 также оказывается симметричным. Обратно, если в каком-нибудь базисе данная полилинейная функция трех переменных записывается в виде полилинейной формы с симметричным тензором, то значение функции $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum \sum \sum l_{ijk} a^i b^j c^k$ не меняется при замене в этом многочлене одного из трех рядов переменных $a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n$ и $c^1, \dots, c^n$ другим, что означает равенство $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = l(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = \dots = l(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$, т.е. симметричность функции $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Итак, симметричная полилинейная функция трех переменных записывается в любом базисе в виде симметричной полилинейной формы. Обратно, если полилинейная функция трех переменных в каком-нибудь базисе записывается в виде симметричной полилинейной формы, то она симметрична и следовательно, ее записью во всяком базисе будет симметричная полилинейная форма.

Симметричная полилинейная функция от трех переменных может быть записана более компактно в матричной форме следующим образом:

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1/3 ((\mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{B}) \bullet (\mathbf{L}_1 \mathbf{C}) + (\mathbf{B}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{C}) \bullet (\mathbf{L}_1 \mathbf{A}) + (\mathbf{C}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A}) \bullet (\mathbf{L}_1 \mathbf{B})).$$

Каждая функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ от трех переменных векторов определяет функцию от одного переменного, если положить $\mathbf{a}=\mathbf{b}=\mathbf{c}$, т.е. $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})=l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$. Функцию $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$, полученную по этому правилу из симметричной полилинейной функции назовем кубической функцией, порожденной данной полилинейной функцией $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Для каждой кубической функции $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$ существует лишь одна, порождающая ее симметричная полилинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Если в данном базисе симметричная полилинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ записывается в виде $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum \sum \sum l_{ijk} a^i b^j c^k$ для векторов $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{c} = c^1 \mathbf{e}_1 + \dots + c^n \mathbf{e}_n$ где l_{ijk} – симметричный тензор, то очевидно, $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum \sum l_{ijk} a^i a^j a^k$ для вектора $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$. Многочлен вида $\sum \sum \sum l_{ijk} a^i a^j a^k$, все члены которого суть одночлены $l_{ijk} a^i a^j a^k$ третьей степени, есть не что иное, как однородный многочлен третьей степени или кубическая форма от ряда переменных $a^1, \dots, a^n$. При этом симметричный тензор L_3 ($l_{ijk} = l_{jik} = \dots = l_{ikj}$) оказывается тензором кубической формы $l(a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n) = \sum \sum \sum l_{ijk} a^i a^j a^k$.

Мы получили следующий результат: кубическая функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$, порожденная данной полилинейной функцией $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ во всяком базисе записывается в виде кубической формы $l(a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n)$, имеющей тот же тензор, что и полилинейная форма $l(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n)$. Другими словами кубическая функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$ и полилинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ во всяком базисе записываются в виде форм: кубической или полилинейной, имеющих один и тот же симметричный тензор L_3 .

Кубическую форму можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) &= 1/3 \sum \sum \sum a^i a^j a^k (l_{ij} l_k + l_{jk} l_i + l_{ki} l_j) = \\
 &= l_{11} l_1 a^1 a^1 a^1 + \dots + l_{1n} l_1 a^1 a^n a^1 + l_{11} l_2 a^1 a^1 a^2 + \dots + l_{1n} l_2 a^1 a^n a^2 + \dots + l_{11} l_n a^1 a^1 a^n + \dots + l_{1n} l_n a^1 a^n a^n + \\
 &+ l_{21} l_1 a^2 a^1 a^1 + \dots + l_{2n} l_1 a^2 a^n a^1 + l_{21} l_2 a^2 a^1 a^2 + \dots + l_{2n} l_2 a^2 a^n a^2 + \dots + l_{21} l_n a^2 a^1 a^n + \dots + l_{2n} l_n a^2 a^n a^n + \\
 &\dots \dots \dots \\
 &+ l_{n1} l_1 a^n a^1 a^1 + \dots + l_{nn} l_1 a^n a^n a^1 + l_{n1} l_2 a^n a^1 a^2 + \dots + l_{nn} l_2 a^n a^n a^2 + \dots + l_{n1} l_n a^n a^1 a^n + \dots + l_{nn} l_n a^n a^n a^n,
 \end{aligned}$$

причем $l_{ijk} = l_{jik} = \dots = l_{ikj}$.

Кубическая форма может быть записана более компактно в матричной форме. Имеем $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = l(\mathbf{a}, \mathbf{a}) l(\mathbf{a})$, т.е.

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{a}) l(\mathbf{a}) = (\mathbf{A}^T L_2 \mathbf{A}) \cdot (L_1 \mathbf{A}).$$

Полилинейные функции и формы от четырех переменных

Рассмотрим полилинейную функцию четырех переменных векторов **a, b, c, d** n -мерного линейного векторного пространства L^n , т.е. определим правило, ставящее в соответствие каждому четверю векторов **a, b, c, d** пространства L^n некоторое число $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ из поля K . Будем считать, что эта функция является линейной по четвертому аргументу и симметрична по перестановке векторов, т.е. выполнены следующие условия:

а) линейности по четвертому аргументу

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \alpha_1 \mathbf{d}_1 + \alpha_2 \mathbf{d}_2) = \alpha_1 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}_1) + \alpha_2 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}_2);$$

б) симметрии по перестановке векторов

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = l(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \dots = l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{c}).$$

Из линейности по четвертому аргументу и симметрии следует линейность по остальным аргументам:

$$l(\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \alpha_1 l(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + \alpha_2 l(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$$

$$l(\mathbf{a}, \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \alpha_1 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + \alpha_2 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}, \mathbf{d})$$

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2, \mathbf{d}) = \alpha_1 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1, \mathbf{d}) + \alpha_2 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_2, \mathbf{d})$$

(каковы бы ни были векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ и числа α_1, α_2).

Перечисленным условиям удовлетворяет линейная функция четырех векторов **a, b, c** и **d** вида $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = 1/3(l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{d}) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{a}, \mathbf{d}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{d}))$.

Действительно,

$$\begin{aligned} l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \alpha_1 \mathbf{d}_1 + \alpha_2 \mathbf{d}_2) &= 1/3(l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \alpha_1 \mathbf{d}_1 + \alpha_2 \mathbf{d}_2) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{a}, \alpha_1 \mathbf{d}_1 + \alpha_2 \mathbf{d}_2) + l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \alpha_1 \mathbf{d}_1 + \alpha_2 \mathbf{d}_2)) = \\ &= \alpha_1/3(l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{d}_1) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{a}, \mathbf{d}_1) + l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{d}_1)) + \\ &+ \alpha_2/3(l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{d}_2) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{a}, \mathbf{d}_2) + l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{d}_2)) = \\ &= \alpha_1 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}_1) + \alpha_2 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}_2). \end{aligned}$$

Если векторы **a, b, c** и **d** заданы своими координатами относительно данного базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ пространства L^n , так что $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{c} = c^1 \mathbf{e}_1 + \dots + c^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{d} = d^1 \mathbf{e}_1 + \dots + d^n \mathbf{e}_n$, то значение полилинейной функции $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ через координаты $a^1, \dots, a^n$, $b^1, \dots, b^n$, $c^1, \dots, c^n$, $d^1, \dots, d^n$ векторов **a, b, c** и **d** выразится следующим образом:

$$\begin{aligned}
l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) &= l(a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n, b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n, c^1 \mathbf{e}_1 + \dots + c^n \mathbf{e}_n, d^1 \mathbf{e}_1 + \dots + d^n \mathbf{e}_n) = \\
&= 1/3(l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{d}) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{a}, \mathbf{d}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{d})) = \\
&= 1/3(\sum \sum a^i b^j l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \sum \sum c^k d^l l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) + \sum \sum l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) b^j c^k \sum \sum a^i d^l l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l) + \sum \sum c^k a^i l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i) \sum \sum b^j d^l l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l)) = \\
&= 1/3(\sum \sum l_{ij} a^i b^j \sum \sum l_{kl} c^k d^l + \sum \sum l_{jk} b^j c^k \sum \sum l_{il} a^i d^l + \sum \sum l_{ki} c^k a^i \sum \sum l_{jl} b^j d^l) = \\
&= 1/3 \sum \sum \sum \sum a^i b^j c^k d^l (l_{ij} l_{kl} + l_{jk} l_{il} + l_{ki} l_{jl}).
\end{aligned}$$

Положим

$$1/3(l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l) + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l)) = 1/3(l_{ij} l_{kl} + l_{jk} l_{il} + l_{ki} l_{jl}) = l_{ijkl}.$$

Тогда имеем $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \sum \sum \sum \sum l_{ijkl} a^i b^j c^k d^l$ для векторов $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{c} = c^1 \mathbf{e}_1 + \dots + c^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{d} = d^1 \mathbf{e}_1 + \dots + d^n \mathbf{e}_n$. Многочлены вида $l(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n) = \sum \sum \sum \sum l_{ijkl} a^i b^j c^k d^l$, линейные по каждому из четырех рядов переменных $a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n$ назовем полилинейной формой от четырех рядов переменных $a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n$.

Полилинейная форма от четырех переменных может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) &= 1/3 \sum \sum \sum \sum a^i b^j c^k d^l (l_{ij} l_{kl} + l_{jk} l_{il} + l_{ki} l_{jl}) = 1/3 \cdot \\
&\cdot ((l_{11} l_{11} a^1 b^1 c^1 d^1 + \dots + l_{1n} l_{11} a^1 b^n c^1 d^1 + l_{11} l_{21} a^1 b^1 c^2 d^1 + \dots + l_{1n} l_{21} a^1 b^n c^2 d^1 + \dots + l_{11} l_{nn} a^1 b^1 c^n d^n + \dots + l_{1n} l_{nn} a^1 b^n c^n d^n + \\
&+ l_{21} l_{11} a^2 b^1 c^1 d^1 + \dots + l_{2n} l_{11} a^2 b^n c^1 d^1 + l_{21} l_{21} a^2 b^1 c^2 d^1 + \dots + l_{2n} l_{21} a^2 b^n c^2 d^1 + \dots + l_{21} l_{nn} a^2 b^1 c^n d^n + \dots + l_{2n} l_{nn} a^2 b^n c^n d^n + \\
&\dots + l_{n1} l_{11} a^n b^1 c^1 d^1 + \dots + l_{nn} l_{11} a^n b^n c^1 d^1 + l_{n1} l_{21} a^n b^1 c^2 d^1 + \dots + l_{nn} l_{21} a^n b^n c^2 d^1 + \dots + l_{n1} l_{nn} a^n b^1 c^n d^n + \dots + l_{nn} l_{nn} a^n b^n c^n d^n) + \dots).
\end{aligned}$$

Полилинейная форма $l(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n)$ симметрична, т.е. $l_{ijkl} = 1/3(l_{ij} l_{kl} + l_{jk} l_{il} + l_{ki} l_{jl})$ не изменяется при перестановке любой пары индексов.

Полилинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ также симметрична, т.е. $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = l(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \dots = l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{c})$.

Тогда $1/3(l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l) + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l)) = 1/3(l_{ij} l_{kl} + l_{jk} l_{il} + l_{ki} l_{jl}) = l_{ijkl}$ и тензор полилинейной формы L_4 также оказывается симметричным. Обратно, если в каком-нибудь базисе данная полилинейная функция четырех переменных записывается в виде полилинейной формы с симметричным тензором, то значение функции $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \sum \sum \sum \sum l_{ijkl} a^i b^j c^k d^l$ не меняется при замене в этом многочлене одного из четырех рядов переменных $a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n$ другим, что означает равенство $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = l(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \dots = l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{c})$. т.е. симметричность функции $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$.

Итак, симметричная полилинейная функция четырех переменных записывается в любом базисе в виде симметричной полилинейной формы. Обратно, если полилинейная функция четырех переменных в каком-нибудь базисе записывается в виде симметричной полилинейной формы, то она симметрична и следовательно, ее записью во всяком базисе будет симметричная полилинейная форма.

Симметричная полилинейная функция от четырех переменных может быть записана более компактно в матричной форме следующим образом:

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = 1/3((\mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{D}) + (\mathbf{B}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{D}) + (\mathbf{C}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{D})).$$

Каждая функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ от четырех переменных векторов определяет функцию от одного переменного, если положить $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{d}$, т.е. $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$. Функцию $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$, полученную по этому правилу из симметричной полилинейной функции назовем линейной функцией от четвертой степени аргумента, порожденной данной полилинейной функцией $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$. Для каждой линейной функции от четвертой степени аргумента $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$ существует лишь одна, порождающая ее симметричная полилинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$. Если в данном базисе симметричная полилинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ записывается в виде $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \sum \sum \sum \sum l_{ijkl} a^i b^j c^k d^l$ для векторов $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{c} = c^1 \mathbf{e}_1 + \dots + c^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{d} = d^1 \mathbf{e}_1 + \dots + d^n \mathbf{e}_n$, где l_{ijkl} – симметричный тензор, то очевидно, $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum \sum \sum l_{ijkl} a^i a^j a^k a^l$ для вектора $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$. Многочлен вида $\sum \sum \sum \sum l_{ijkl} a^i a^j a^k a^l$, все члены которого суть одночлены $l_{ijkl} a^i a^j a^k a^l$ четвертой степени, есть не что иное, как однородный многочлен четвертой степени или линейная форма от четвертой степени ряда переменных $a^1, \dots, a^n$. При этом симметричный тензор L_4 ($l_{ijkl} = l_{jikl} = \dots = l_{ijlk}$) оказывается тензором линейной формы $l(a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n) = \sum \sum \sum \sum l_{ijkl} a^i a^j a^k a^l$.

Мы получили следующий результат: линейная функция четвертой степени аргумента $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$, порожденная данной полилинейной функцией $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ во всяком базисе записывается в виде линейной формы четвертой степени $l(a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n)$, имеющей тот же тензор, что и полилинейная форма $l(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n)$. Другими словами линейная функция четвертой степени аргумента $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$ и полилинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ во

всяком базисе записываются в виде форм: линейной четвертой степени аргумента или полилинейной, имеющих один и тот же симметричный тензор L_4 .

Линейную форму четвертой степени аргумента можно представить в виде

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum \sum \sum l_{ijkl} a^i a^j a^k a^l =$$

$$\begin{aligned} & l_{11}l_{11}a^1a^1a^1a^1 + \dots + l_{1n}l_{11}a^1a^n a^1a^1 + l_{11}l_{21}a^1a^1a^2a^1 + \dots + l_{1n}l_{21}a^1a^n a^2a^1 + \dots + l_{11}l_{nn}a^1a^1a^na^n + \dots + l_{1n}l_{nn}a^1a^n a^na^n + \\ & + l_{21}l_{11}a^2a^1a^1a^1 + \dots + l_{2n}l_{11}a^2a^n a^1a^1 + l_{21}l_{21}a^2a^1a^2a^1 + \dots + l_{2n}l_{21}a^2a^n a^2a^1 + \dots + l_{21}l_{nn}a^2a^1a^na^n + \dots + l_{2n}l_{nn}a^2a^n a^na^n + \\ & \dots \dots \dots + l_{n1}l_{11}a^na^1a^1a^1 + \dots + l_{nn}l_{11}a^na^n a^1a^1 + l_{n1}l_{21}a^na^1a^2a^1 + \dots + l_{nn}l_{21}a^na^n a^2a^1 + \dots + l_{n1}l_{nn}a^na^1a^na^n + \dots + l_{nn}l_{nn}a^na^n a^na^n, \end{aligned}$$

причем $l_{ijkl} = l_{jikl} = \dots = l_{ijlk}$.

Линейная форма четвертой степени аргумента может быть записана более компактно в матричной форме.

Имеем $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = l(\mathbf{a}, \mathbf{a})l(\mathbf{a}, \mathbf{a})$, т.е.

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = (\mathbf{A}^T L_2 \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{A}^T L_2 \mathbf{A}).$$

Полилинейные функции и формы от пяти переменных

Рассмотрим полилинейную функцию пяти переменных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ n -мерного линейного векторного пространства L^n , т.е. определим правило, ставящее в соответствие каждому пяти векторам $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ пространства L^n некоторое число $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$ из поля K . Будем считать, что эта функция является линейной по пятому аргументу и симметрична по перестановке векторов, т.е. выполнены следующие условия:

а) линейности по пятому аргументу

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2) = \alpha_1 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}_1) + \alpha_2 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}_2);$$

б) симметрии по перестановке векторов

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}) = l(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}) = \dots = l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}, \mathbf{d}).$$

Из линейности по пятому аргументу и симметрии следует линейность по остальным аргументам:

$$l(\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}) = \alpha_1 l(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}) + \alpha_2 l(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$$

$$l(\mathbf{a}, \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}) = \alpha_1 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}) + \alpha_2 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$$

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2, \mathbf{d}, \mathbf{e}) = \alpha_1 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1, \mathbf{d}, \mathbf{e}) + \alpha_2 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_2, \mathbf{d}, \mathbf{e})$$

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \alpha_1 \mathbf{d}_1 + \alpha_2 \mathbf{d}_2, \mathbf{e}) = \alpha_1 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}_1, \mathbf{e}) + \alpha_2 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}_2, \mathbf{e})$$

(каковы бы ни были векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ и числа α_1, α_2).

Перечисленным условиям удовлетворяет линейная функция пяти векторов **a, b, c, d** и **e** вида

$$l(a, b, c, d, e) = 1/15(l(a, b)l(c, d)l(e) + l(b, c)l(d, e)l(a) + l(c, d)l(e, a)l(b) + l(d, e)l(a, b)l(c) + l(e, a)l(b, c)l(d) + \\ + l(b, c)l(a, d)l(e) + l(c, d)l(b, e)l(a) + l(d, e)l(c, a)l(b) + l(e, a)l(d, b)l(c) + l(a, b)l(e, c)l(d) + \\ + l(c, a)l(b, d)l(e) + l(d, b)l(c, e)l(a) + l(e, c)l(d, a)l(b) + l(a, d)l(e, b)l(c) + l(b, e)l(a, c)l(d)).$$

Действительно, $l(a, b, c, d, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = 1/15 \cdot$

$$\bullet (l(a, b)l(c, d)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) + l(b, c)l(d, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)l(a) + l(c, d)l(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, a)l(b) + l(d, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)l(a, b)l(c) + l(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, a)l(b, c)l(d) + \\ + l(b, c)l(a, d)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) + l(c, d)l(b, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)l(a) + l(d, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)l(c, a)l(b) + l(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, a)l(d, b)l(c) + l(a, b)l(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, c)l(d) + \\ + l(c, a)l(b, d)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) + l(d, b)l(c, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)l(a) + l(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, c)l(d, a)l(b) + l(a, d)l(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, b)l(c) + l(b, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)l(a, c)l(d)) = \\ = \alpha_1/15(l(a, b)l(c, d)l(e_1) + l(b, c)l(d, e_1)l(a) + l(c, d)l(e_1, a)l(b) + l(d, e_1)l(a, b)l(c) + l(e_1, a)l(b, c)l(d) + \\ + l(b, c)l(a, d)l(e_1) + l(c, d)l(b, e_1)l(a) + l(d, e_1)l(c, a)l(b) + l(e_1, a)l(d, b)l(c) + l(a, b)l(e_1, c)l(d) + \\ + l(c, a)l(b, d)l(e_1) + l(d, b)l(c, e_1)l(a) + l(e_1, c)l(d, a)l(b) + l(a, d)l(e_1, b)l(c) + l(b, e_1)l(a, c)l(d)) + \\ + \alpha_2/15(l(a, b)l(c, d)l(e_2) + l(b, c)l(d, e_2)l(a) + l(c, d)l(e_2, a)l(b) + l(d, e_2)l(a, b)l(c) + l(e_2, a)l(b, c)l(d) + \\ + l(b, c)l(a, d)l(e_2) + l(c, d)l(b, e_2)l(a) + l(d, e_2)l(c, a)l(b) + l(e_2, a)l(d, b)l(c) + l(a, b)l(e_2, c)l(d) + \\ + l(c, a)l(b, d)l(e_2) + l(d, b)l(c, e_2)l(a) + l(e_2, c)l(d, a)l(b) + l(a, d)l(e_2, b)l(c) + l(b, e_2)l(a, c)l(d)) = \alpha_1 l(a, b, c, d, e_1) + \alpha_2 l(a, b, c, d, e_2).$$

Если векторы **a, b, c, d** и **e** заданы своими координатами относительно данного базиса $e_1, \dots, e_n$ пространства L^n , так что $a = a^1 e_1 + \dots + a^n e_n$, $b = b^1 e_1 + \dots + b^n e_n$, $c = c^1 e_1 + \dots + c^n e_n$, $d = d^1 e_1 + \dots + d^n e_n$, $e = e^1 e_1 + \dots + e^n e_n$, то значение полилинейной функции $l(a, b, c, d, e)$ через координаты $a^1, \dots, a^n$, $b^1, \dots, b^n$, $c^1, \dots, c^n$, $d^1, \dots, d^n$, $e^1, \dots, e^n$ векторов **a, b, c, d** и **e** выразится следующим образом:

$$l(a, b, c, d, e) = l(a^1 e_1 + \dots + a^n e_n, b^1 e_1 + \dots + b^n e_n, c^1 e_1 + \dots + c^n e_n, d^1 e_1 + \dots + d^n e_n, e^1 e_1 + \dots + e^n e_n) = \\ = 1/15(l(a, b)l(c, d)l(e) + l(b, c)l(d, e)l(a) + l(c, d)l(e, a)l(b) + l(d, e)l(a, b)l(c) + l(e, a)l(b, c)l(d) + \\ + l(b, c)l(a, d)l(e) + l(c, d)l(b, e)l(a) + l(d, e)l(c, a)l(b) + l(e, a)l(d, b)l(c) + l(a, b)l(e, c)l(d) + \\ + l(c, a)l(b, d)l(e) + l(d, b)l(c, e)l(a) + l(e, c)l(d, a)l(b) + l(a, d)l(e, b)l(c) + l(b, e)l(a, c)l(d)) = \\ = 1/15(\sum \sum l_{ij} a^i b^j \sum \sum l_{kl} c^k d^l \sum l_m e^m + \sum \sum l_{jk} b^j c^k \sum \sum l_{lm} d^l e^m \sum l_i a^i + \sum \sum l_{kl} c^k d^l \sum \sum l_{mi} e^m a^i \sum l_j b^j + \sum \sum l_{lm} d^l e^m \sum \sum l_{ij} a^i b^j \sum l_k c^k + \sum \sum l_{mi} e^m a^i \sum \sum l_{jk} b^j c^k \sum l_d d^l + \\ + \sum \sum l_{jk} b^j c^k \sum \sum l_{ij} a^i d^l \sum l_m e^m + \sum \sum l_{kl} c^k d^l \sum \sum l_{jm} b^j e^m \sum l_i a^i + \sum \sum l_{lm} d^l e^m \sum \sum l_{ki} c^k a^i \sum l_j b^j + \sum \sum l_{mi} e^m a^i \sum \sum l_{jd} d^l b^j \sum l_k c^k + \sum \sum l_{ij} a^i b^j \sum \sum l_{mk} c^k \sum l_d d^l + \\ + \sum \sum l_{kl} c^k a^i \sum \sum l_{ij} b^j d^l \sum l_m e^m + \sum \sum l_{jd} b^j e^m \sum \sum l_{km} c^k \sum l_i a^i + \sum \sum l_{mi} e^m c^k \sum \sum l_{ld} d^l a^i \sum l_j b^j + \sum \sum l_{ij} a^i d^l \sum \sum l_{mj} e^m b^j \sum l_k c^k + \sum \sum l_{jm} b^j e^m \sum \sum l_{lk} c^k \sum l_d d^l) = \\ = 1/15 \sum \sum \sum \sum \sum a^i b^j c^k d^l e^m (l_{ij} l_{kl} l_m + l_{jk} l_{lm} l_i + l_{kl} l_{mi} l_j + l_{lm} l_{ij} l_k + l_{mi} l_{jk} l_l + l_{jk} l_{li} l_m + l_{kl} l_{jm} l_i + l_{lm} l_{ki} l_j + l_{mi} l_{lj} l_k + l_{ij} l_{mk} l_l + l_{ki} l_{jl} l_m + l_{jl} l_{km} l_i + l_{mk} l_{li} l_j + l_{li} l_{mj} l_k + l_{jm} l_{ik} l_l).$$

Положим

$$1/15(l(e_i, e_j)l(e_k, e_l)l(e_m) + l(e_j, e_k)l(e_l, e_m)l(e_i) + l(e_k, e_l)l(e_m, e_i)l(e_j) + l(e_l, e_m)l(e_i, e_j)l(e_k) + l(e_m, e_i)l(e_j, e_k)l(e_l) + \\ + l(e_j, e_k)l(e_i, e_l)l(e_m) + l(e_k, e_l)l(e_j, e_m)l(e_i) + l(e_l, e_m)l(e_k, e_i)l(e_j) + l(e_m, e_i)l(e_l, e_j)l(e_k) + l(e_i, e_l)l(e_m, e_k)l(e_j) + \\ + l(e_k, e_i)l(e_j, e_l)l(e_m) + l(e_l, e_j)l(e_k, e_m)l(e_i) + l(e_m, e_k)l(e_l, e_i)l(e_j) + l(e_i, e_l)l(e_m, e_j)l(e_k) + l(e_j, e_m)l(e_i, e_k)l(e_l)) = \\ = 1/15(l_{ij} l_{kl} l_m + l_{jk} l_{lm} l_i + l_{kl} l_{mi} l_j + l_{lm} l_{ij} l_k + l_{mi} l_{jk} l_l + l_{jk} l_{li} l_m + l_{kl} l_{jm} l_i + l_{lm} l_{ki} l_j + l_{mi} l_{lj} l_k + l_{ij} l_{mk} l_l + l_{ki} l_{jl} l_m + l_{jl} l_{km} l_i + l_{mk} l_{li} l_j + l_{li} l_{mj} l_k + l_{jm} l_{ik} l_l) = \\ = l_{ijklm}.$$

Тогда имеем $l(a, b, c, d, e) = \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklm} a^i b^j c^k d^l e^m$ для векторов $a = a^1 e_1 + \dots + a^n e_n$, $b = b^1 e_1 + \dots + b^n e_n$, $c = c^1 e_1 + \dots + c^n e_n$, $d = d^1 e_1 + \dots + d^n e_n$ и $e = e^1 e_1 + \dots + e^n e_n$. Многочлены вида

$l(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n, e^1, \dots, e^n) = \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijk/m} a^i b^j c^k d^l e^m$, линейные по каждому из пяти рядов переменных $a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n$ и $e^1, \dots, e^n$ назовем полилинейной формой от пяти рядов переменных $a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n$ и $e^1, \dots, e^n$.

Полилинейная форма от пяти переменных может быть представлена в виде

$$l(a, b, c, d, e) = 1/15 \sum \sum \sum \sum \sum a^i b^j c^k d^l e^m \cdot$$

$$\bullet ((l_{ij} l_{kl} l_{lm} + l_{jk} l_{lm} l_{li} + l_{kl} l_{mi} l_{lj} + l_{lm} l_{ij} l_{lk} + l_{mi} l_{jk} l_{li} + l_{jk} l_{li} l_{lm} + l_{kl} l_{jm} l_{li} + l_{lm} l_{ki} l_{lj} + l_{mi} l_{ij} l_{lk} + l_{ij} l_{mk} l_{li} + l_{ki} l_{jl} l_{lm} + l_{jl} l_{km} l_{li} + l_{mk} l_{li} l_{lj} + l_{il} l_{mj} l_{lk} + l_{jm} l_{ik} l_{li}) = 1/15 \cdot$$

$$\bullet (l_{11} l_{11} l_{11} a^1 b^1 c^1 d^1 e^1 + \dots + l_{1n} l_{11} l_{11} a^1 b^n c^1 d^1 e^1 + l_{11} l_{21} l_{11} a^1 b^1 c^2 d^1 e^1 + \dots + l_{1n} l_{21} l_{11} a^1 b^n c^2 d^1 e^1 + \dots + l_{11} l_{nn} l_{11} a^1 b^1 c^n d^1 e^1 + \dots + l_{1n} l_{nn} l_{11} a^1 b^n c^n d^1 e^1 +$$

$$+ l_{21} l_{11} l_{11} a^2 b^1 c^1 d^1 e^1 + \dots + l_{2n} l_{11} l_{11} a^2 b^n c^1 d^1 e^1 + l_{21} l_{21} l_{11} a^2 b^1 c^2 d^1 e^1 + \dots + l_{2n} l_{21} l_{11} a^2 b^n c^2 d^1 e^1 + \dots + l_{21} l_{nn} l_{11} a^2 b^1 c^n d^1 e^1 + \dots + l_{2n} l_{nn} l_{11} a^2 b^n c^n d^1 e^1 +$$

$$\dots + l_{n1} l_{11} l_{11} a^n b^1 c^1 d^1 e^1 + \dots + l_{nn} l_{11} l_{11} a^n b^n c^1 d^1 e^1 + l_{n1} l_{21} l_{11} a^n b^1 c^2 d^1 e^1 + \dots + l_{nn} l_{21} l_{11} a^n b^n c^2 d^1 e^1 + \dots + l_{n1} l_{nn} l_{11} a^n b^1 c^n d^1 e^1 + \dots + l_{nn} l_{nn} l_{11} a^n b^n c^n d^1 e^1 + \dots).$$

Полилинейная форма $l(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n, e^1, \dots, e^n)$ симметрична, т.е.

$$l_{ijk/m} = 1/15 (l_{ij} l_{kl} l_{lm} + l_{jk} l_{lm} l_{li} + l_{kl} l_{mi} l_{lj} + l_{lm} l_{ij} l_{lk} + l_{mi} l_{jk} l_{li} + l_{jk} l_{li} l_{lm} + l_{kl} l_{jm} l_{li} + l_{lm} l_{ki} l_{lj} + l_{mi} l_{ij} l_{lk} + l_{ij} l_{mk} l_{li} + l_{ki} l_{jl} l_{lm} + l_{jl} l_{km} l_{li} + l_{mk} l_{li} l_{lj} + l_{il} l_{mj} l_{lk} + l_{jm} l_{ik} l_{li})$$

не изменяется при перестановке любой пары индексов. Полилинейная функция

$$l(a, b, c, d, e) \text{ также симметрична, т.е. } l(a, b, c, d, e) = l(b, a, c, d, e) = \dots = l(a, b, c, e, d).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & 1/15 (l(e_i, e_j) l(e_k, e_l) l(e_m) + l(e_j, e_k) l(e_l, e_m) l(e_i) + l(e_k, e_l) l(e_m, e_i) l(e_j) + l(e_l, e_m) l(e_i, e_j) l(e_k) + l(e_m, e_i) l(e_j, e_k) l(e_l) + \\ & + l(e_j, e_k) l(e_i, e_l) l(e_m) + l(e_k, e_l) l(e_j, e_m) l(e_i) + l(e_l, e_m) l(e_k, e_i) l(e_j) + l(e_m, e_i) l(e_l, e_j) l(e_k) + l(e_i, e_j) l(e_m, e_k) l(e_l) + \\ & + l(e_k, e_l) l(e_j, e_i) l(e_m) + l(e_l, e_j) l(e_k, e_m) l(e_i) + l(e_m, e_k) l(e_l, e_i) l(e_j) + l(e_i, e_l) l(e_m, e_j) l(e_k) + l(e_j, e_m) l(e_i, e_k) l(e_l)) = \\ & = 1/15 (l_{ij} l_{kl} l_{lm} + l_{jk} l_{lm} l_{li} + l_{kl} l_{mi} l_{lj} + l_{lm} l_{ij} l_{lk} + l_{mi} l_{jk} l_{li} + l_{jk} l_{li} l_{lm} + l_{kl} l_{jm} l_{li} + l_{lm} l_{ki} l_{lj} + l_{mi} l_{ij} l_{lk} + l_{ij} l_{mk} l_{li} + l_{ki} l_{jl} l_{lm} + l_{jl} l_{km} l_{li} + l_{mk} l_{li} l_{lj} + l_{il} l_{mj} l_{lk} + l_{jm} l_{ik} l_{li}) = \\ & = l_{ijk/m}. \end{aligned}$$

и тензор полилинейной формы L_5 также оказывается симметричным. Обратно, если в каком-нибудь базисе данная полилинейная функция пяти переменных записывается в виде полилинейной формы с симметричным тензором, то значение функции $l(a, b, c, d, e) = \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijk/m} a^i b^j c^k d^l e^m$ не меняется при замене в этом многочлене одного из пяти рядов переменных $a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n$ и $e^1, \dots, e^n$ другим, что означает равенство $l(a, b, c, d, e) = l(b, a, c, d, e) = \dots = l(a, b, c, e, d)$. т.е. симметричность функции $l(a, b, c, d, e)$.

Итак, симметричная полилинейная функция пяти переменных записывается в любом базисе в виде симметричной полилинейной формы. Обратно, если полилинейная функция пяти переменных в каком-нибудь базисе записывается в виде симметричной полилинейной формы, то она симметрична и следовательно, ее записью во всяком базисе будет симметричная полилинейная форма.

Симметричная полилинейная функция от пяти переменных может быть записана более компактно в матричной форме следующим образом:

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}) = 1/15 \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot (A^T L_2 B \cdot C^T L_2 D \cdot L_1 E + B^T L_2 C \cdot D^T L_2 E \cdot L_1 A + C^T L_2 D \cdot E^T L_2 A \cdot L_1 B + D^T L_2 E \cdot A^T L_2 B \cdot L_1 C + E^T L_2 A \cdot B^T L_2 C \cdot L_1 D + \\ & + B^T L_2 C \cdot A^T L_2 D \cdot L_1 E + C^T L_2 D \cdot B^T L_2 E \cdot L_1 A + D^T L_2 E \cdot C^T L_2 A \cdot L_1 B + E^T L_2 A \cdot D^T L_2 B \cdot L_1 C + A^T L_2 B \cdot E^T L_2 C \cdot L_1 D + \\ & + C^T L_2 A \cdot B^T L_2 D \cdot L_1 E + D^T L_2 B \cdot C^T L_2 E \cdot L_1 A + E^T L_2 C \cdot D^T L_2 A \cdot L_1 B + A^T L_2 D \cdot E^T L_2 B \cdot L_1 C + B^T L_2 E \cdot A^T L_2 C \cdot L_1 D). \end{aligned}$$

Каждая функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$ от пяти переменных векторов определяет функцию от одного переменного, если положить $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{d} = \mathbf{e}$, т.е. $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}) = l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$. Функцию $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$, полученную по этому правилу из симметричной полилинейной функции назовем линейной функцией от пятой степени аргумента, порожденной данной полилинейной функцией $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$. Для каждой линейной функции от пятой степени аргумента $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$ существует лишь одна, порождающая ее симметричная полилинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$. Если в данном базисе симметричная полилинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$ записывается в виде $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}) = \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklm} a^i b^j c^k d^l e^m$ для векторов $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{c} = c^1 \mathbf{e}_1 + \dots + c^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{d} = d^1 \mathbf{e}_1 + \dots + d^n \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e} = e^1 \mathbf{e}_1 + \dots + e^n \mathbf{e}_n$ где l_{ijklm} – симметричный тензор, то очевидно, $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklm} a^i a^j a^k a^l a^m$ для вектора $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$. Многочлен вида $\sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklm} a^i a^j a^k a^l a^m$, все члены которого суть одночлены $l_{ijklm} a^i a^j a^k a^l a^m$ пятой степени, есть не что иное, как однородный многочлен пятой степени или линейная форма от пятой степени ряда переменных $a^1, \dots, a^n$. При этом симметричный тензор L_5 ($l_{ijklm} = l_{jiklm} = \dots = l_{ijkml}$) оказывается тензором линейной формы $l(a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n) = \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklm} a^i a^j a^k a^l a^m$.

Мы получили следующий результат: линейная функция пятой степени аргумента $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$, порожденная данной полилинейной функцией $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$ во всяком базисе записывается в виде линейной формы пятой степени $l(a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n)$, имеющей тот же тензор, что и полилинейная форма $l(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n, e^1, \dots, e^n)$. Другими словами линейная функция пятой степени аргумента $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$ и полилинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$ во всяком базисе записываются в виде форм: линейной пятой степени аргумента или полилинейной, имеющих один и тот же симметричный тензор L_5 .

Линейную форму пятой степени аргумента можно представить в виде

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklm} a^i a^j a^k a^l a^m.$$

$$\begin{aligned} & \cdot (l_{ij} l_{kl} l_m + l_{jk} l_{lm} l_i + l_{kl} l_{mi} l_j + l_{lm} l_{ij} l_k + l_{mi} l_{jk} l_l + l_{jk} l_{il} l_m + l_{kl} l_{jm} l_i + l_{lm} l_{ki} l_j + l_{mi} l_{lj} l_k + l_{ij} l_{mk} l_l + l_{ki} l_{jl} l_m + l_{lj} l_{km} l_i + l_{mk} l_{li} l_j + l_{il} l_{mj} l_k + l_{jm} l_{ik} l_l) = \\ & = l_{11} l_{11} l_1 a^1 a^1 a^1 a^1 a^1 + \dots + l_{1n} l_{11} l_1 a^1 a^n a^1 a^1 a^1 + l_{11} l_{21} l_1 a^1 a^1 a^2 a^1 a^1 + \dots + l_{1n} l_{21} l_1 a^1 a^n a^2 a^1 a^1 + \dots + l_{11} l_{nn} l_n a^1 a^1 a^n a^n a^n + \dots + l_{1n} l_{nn} l_n a^1 a^n a^n a^n a^n + \\ & + l_{21} l_{11} l_1 a^2 a^1 a^1 a^1 a^1 + \dots + l_{2n} l_{11} l_1 a^2 a^n a^1 a^1 a^1 + l_{21} l_{21} l_1 a^2 a^1 a^2 a^1 a^1 + \dots + l_{2n} l_{21} l_1 a^2 a^n a^2 a^1 a^1 + \dots + l_{21} l_{nn} l_n a^2 a^1 a^n a^n a^n + \dots + l_{2n} l_{nn} l_n a^2 a^n a^n a^n a^n + \\ & \dots + l_{n1} l_{11} l_1 a^n a^1 a^1 a^1 a^1 + \dots + l_{nn} l_{11} l_1 a^n a^1 a^n a^1 a^1 + l_{n1} l_{21} l_1 a^n a^1 a^2 a^1 a^1 + \dots + l_{nn} l_{21} l_1 a^n a^1 a^2 a^n a^1 + \dots + l_{n1} l_{nn} l_n a^n a^1 a^n a^n a^n + \dots + l_{nn} l_{nn} l_n a^n a^n a^n a^n a^n, \\ & \text{причем } l_{ijklm} = l_{jiklm} = \dots = l_{ijkml}. \end{aligned}$$

Линейная форма пятой степени аргумента может быть записана более компактно в матричной форме.

Имеем $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = l(\mathbf{a}, \mathbf{a}) l(\mathbf{a}, \mathbf{a}) l(\mathbf{a})$, т.е.

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{L}_1 \mathbf{A}).$$

Полилинейные функции и формы от шести переменных

Рассмотрим полилинейную функцию шести переменных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}$ n -мерного линейного векторного пространства L^n , т.е. определим правило, ставящее в соответствие каждому шести векторам $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}$ пространства L^n некоторое число $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f})$ из поля K . Будем считать, что эта функция является линейной по шестому аргументу и симметрична по перестановке векторов, т.е. выполнены следующие условия:

а) линейности по шестому аргументу

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2) = \alpha_1 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}_1) + \alpha_2 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}_2);$$

б) симметрии по перестановке векторов

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = l(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = \dots = l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f}, \mathbf{e}).$$

Из линейности по шестому аргументу и симметрии следует линейность по остальным аргументам:

$$l(\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = \alpha_1 l(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) + \alpha_2 l(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f})$$

$$l(\mathbf{a}, \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = \alpha_1 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) + \alpha_2 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f})$$

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = \alpha_1 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) + \alpha_2 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_2, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f})$$

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \alpha_1 \mathbf{d}_1 + \alpha_2 \mathbf{d}_2, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = \alpha_1 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}_1, \mathbf{e}, \mathbf{f}) + \alpha_2 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}_2, \mathbf{e}, \mathbf{f})$$

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2, \mathbf{f}) = \alpha_1 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}_1, \mathbf{f}) + \alpha_2 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}_2, \mathbf{f})$$

(каковы бы ни были векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}$ и числа α_1, α_2).

Перечисленным условиям удовлетворяет линейная функция шести векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}$ вида $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = 1/15 \cdot$

$$\begin{aligned} & \bullet (l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{f}) + \\ & + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{a}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{b}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{d}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{e}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{f}) + \\ & + l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{d}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{e}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{a}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{b}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{f})). \end{aligned}$$

Действительно,

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2) = 1/15 \cdot$$

$$\begin{aligned} & \bullet (l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2) + \\ & + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{a}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{b}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{d}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{e}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2) + \\ & + l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{d}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{e}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{a}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{b}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2)) = \\ & = \alpha_1/15 (l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{f}_1) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{f}_1) + l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{f}_1) + l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{f}_1) + l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{f}_1) + \\ & + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{a}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{f}_1) + l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{b}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{f}_1) + l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{f}_1) + l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{d}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{f}_1) + l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{e}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{f}_1) + \\ & + l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{f}_1) + l(\mathbf{d}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{f}_1) + l(\mathbf{e}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{f}_1) + l(\mathbf{a}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{f}_1) + l(\mathbf{b}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{f}_1)) + \\ & + \alpha_2/15 (l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{f}_2) + \\ & + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{a}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{b}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{d}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{e}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{f}_2) + \\ & + l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{d}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{e}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{a}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{f}_2) + l(\mathbf{b}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{f}_2)) = \\ & = \alpha_1 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}_1) + \alpha_2 l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}_2). \end{aligned}$$

Если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}$ заданы своими координатами относительно данного базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ пространства L^n , так что $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{c} = c^1 \mathbf{e}_1 + \dots + c^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{d} = d^1 \mathbf{e}_1 + \dots + d^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e} = e^1 \mathbf{e}_1 + \dots + e^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{f} = f^1 \mathbf{e}_1 + \dots + f^n \mathbf{e}_n$, то значение полилинейной функции $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f})$ через координаты $a^1, \dots, a^n$, $b^1, \dots, b^n$, $c^1, \dots, c^n$, $d^1, \dots, d^n$, $e^1, \dots, e^n$, $f^1, \dots, f^n$ векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}$ выразится следующим образом:

$$\begin{aligned} l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) &= l(a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n, b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n, c^1 \mathbf{e}_1 + \dots + c^n \mathbf{e}_n, d^1 \mathbf{e}_1 + \dots + d^n \mathbf{e}_n, e^1 \mathbf{e}_1 + \dots + e^n \mathbf{e}_n, f^1 \mathbf{e}_1 + \dots + f^n \mathbf{e}_n) = \\ &= 1/15 (l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{f}) + \\ & + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{a}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{b}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{d}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{e}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{f}) + \\ & + l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{d}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{e}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{a}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{b}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{f})) = 1/15 \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet (\sum \sum l_{ij} a^i b^j \sum l_{kl} c^k d^l \sum l_{mn} e^m f^n + \sum \sum l_{jk} b^j c^k \sum l_{lm} d^l e^m \sum l_{in} a^i f^n + \sum \sum l_{kl} c^k d^l \sum l_{mi} e^m a^i \sum l_{jn} b^j f^n + \sum \sum l_{lm} d^l e^m \sum l_{ij} a^i b^j \sum l_{kn} c^k f^n + \sum \sum l_{mi} e^m a^i \sum l_{jk} b^j c^k \sum l_{ln} d^l f^n + \\ & + \sum \sum l_{jk} b^j c^k \sum l_{li} a^i d^l \sum l_{mn} e^m f^n + \sum \sum l_{kl} c^k d^l \sum l_{jm} b^j e^m \sum l_{in} a^i f^n + \sum \sum l_{lm} d^l e^m \sum l_{ki} c^k a^i \sum l_{jn} b^j f^n + \sum \sum l_{mi} e^m a^i \sum l_{lj} d^j b^j \sum l_{kn} c^k f^n + \sum \sum l_{ij} a^i b^j \sum l_{mk} e^m c^k \sum l_{ln} d^l f^n + \\ & + \sum \sum l_{ki} c^k a^i \sum l_{jl} b^j d^l \sum l_{mn} e^m f^n + \sum \sum l_{lj} d^j b^j \sum l_{km} c^k e^m \sum l_{in} a^i f^n + \sum \sum l_{mk} e^m c^k \sum l_{li} d^i a^i \sum l_{jn} b^j f^n + \sum \sum l_{li} a^i d^i \sum l_{mj} e^m b^j \sum l_{kn} c^k f^n + \sum \sum l_{jm} b^j e^j \sum l_{ik} a^i c^k \sum l_{ln} d^l f^n) = \\ & = 1/15 \sum \sum \sum \sum \sum \sum a^i b^j c^k d^l e^m f^n \bullet (l_{ij} l_{kl} l_{mn} + l_{jk} l_{lm} l_{in} + l_{kl} l_{mi} l_{jn} + l_{lm} l_{ij} l_{kn} + l_{mi} l_{jk} l_{ln} + l_{jk} l_{li} l_{mn} + l_{kl} l_{jm} l_{in} + l_{lm} l_{ki} l_{jn} + l_{mi} l_{lj} l_{kn} + l_{ij} l_{mk} l_{ln} + l_{ki} l_{jl} l_{mn} + l_{lj} l_{km} l_{in} + l_{mk} l_{li} l_{jn} + l_{il} l_{mj} l_{kn} + l_{jm} l_{ik} l_{ln}). \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} & 1/15 (l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_n) + \\ & + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l)l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_m)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_n) + \\ & + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l)l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l)l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_m)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_n)) = \\ & = 1/15 (l_{ij} l_{kl} l_{mn} + l_{jk} l_{lm} l_{in} + l_{kl} l_{mi} l_{jn} + l_{lm} l_{ij} l_{kn} + l_{mi} l_{jk} l_{ln} + l_{jk} l_{li} l_{mn} + l_{kl} l_{jm} l_{in} + l_{lm} l_{ki} l_{jn} + l_{mi} l_{lj} l_{kn} + l_{ij} l_{mk} l_{ln} + l_{ki} l_{jl} l_{mn} + l_{lj} l_{km} l_{in} + l_{mk} l_{li} l_{jn} + l_{il} l_{mj} l_{kn} + l_{jm} l_{ik} l_{ln}) = \\ & = l_{ijklmn}. \end{aligned}$$

Тогда имеем $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijk/mn} a^i b^j c^k d^l e^m f^n$ для векторов $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{c} = c^1 \mathbf{e}_1 + \dots + c^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{d} = d^1 \mathbf{e}_1 + \dots + d^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e} = e^1 \mathbf{e}_1 + \dots + e^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{f} = f^1 \mathbf{e}_1 + \dots + f^n \mathbf{e}_n$. Многочлены вида $(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n, e^1, \dots, e^n, f^1, \dots, f^n) = \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijk/mn} a^i b^j c^k d^l e^m f^n$, линейные по каждому из шести рядов переменных $a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n, e^1, \dots, e^n, f^1, \dots, f^n$ назовем полилинейной формой от шести рядов переменных $a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n, e^1, \dots, e^n, f^1, \dots, f^n$.

Полилинейная форма от шести переменных может быть представлена в виде

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = 1/15 \sum \sum \sum \sum \sum \sum a^i b^j c^k d^l e^m f^n \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot (l_{ij} l_{kl} l_{mn} + l_{jk} l_{lm} l_{in} + l_{kl} l_{mi} l_{jn} + l_{lm} l_{ij} l_{kn} + l_{mi} l_{jk} l_{ln} + l_{jk} l_{il} l_{mn} + l_{kl} l_{jm} l_{in} + l_{lm} l_{ki} l_{jn} + l_{mi} l_{lj} l_{kn} + l_{ij} l_{mk} l_{ln} + l_{kl} l_{jl} l_{mn} + l_{ij} l_{km} l_{in} + l_{mk} l_{il} l_{jn} + l_{il} l_{mj} l_{kn} + l_{jm} l_{ik} l_{ln}) = 1/15 \cdot \\ & \cdot (l_{11} l_{11} l_{11} a^1 b^1 c^1 d^1 e^1 f^1 + \dots + l_{1n} l_{11} l_{11} a^1 b^1 c^1 d^1 e^1 f^1 + l_{11} l_{21} l_{11} a^1 b^1 c^2 d^1 e^1 f^1 + \dots + l_{1n} l_{21} l_{11} a^1 b^1 c^2 d^1 e^1 f^1 + \dots + l_{11} l_{nn} l_{nn} a^1 b^1 c^n d^n e^n f^n + \dots + l_{1n} l_{nn} l_{nn} a^1 b^n c^n d^n e^n f^n + \\ & + l_{21} l_{11} l_{11} a^2 b^1 c^1 d^1 e^1 f^1 + \dots + l_{2n} l_{11} l_{11} a^2 b^1 c^1 d^1 e^1 f^1 + l_{21} l_{21} l_{11} a^2 b^1 c^2 d^1 e^1 f^1 + \dots + l_{2n} l_{21} l_{11} a^2 b^1 c^2 d^1 e^1 f^1 + \dots + l_{21} l_{nn} l_{nn} a^2 b^1 c^n d^n e^n f^n + \dots + l_{2n} l_{nn} l_{nn} a^2 b^n c^n d^n e^n f^n + \\ & \dots + l_{n1} l_{11} l_{11} a^n b^1 c^1 d^1 e^1 f^1 + \dots + l_{nn} l_{11} l_{11} a^n b^1 c^1 d^1 e^1 f^1 + l_{n1} l_{21} l_{11} a^n b^1 c^2 d^1 e^1 f^1 + \dots + l_{nn} l_{21} l_{11} a^n b^1 c^2 d^1 e^1 f^1 + \dots + l_{n1} l_{nn} l_{nn} a^n b^1 c^n d^n e^n f^n + \dots + l_{nn} l_{nn} l_{nn} a^n b^n c^n d^n e^n f^n + \dots). \end{aligned}$$

Полилинейная форма $l(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n, e^1, \dots, e^n, f^1, \dots, f^n)$

симметрична, т.е.

$$l_{ijk/mn} = 1/15 (l_{ij} l_{kl} l_{mn} + l_{jk} l_{lm} l_{in} + l_{kl} l_{mi} l_{jn} + l_{lm} l_{ij} l_{kn} + l_{mi} l_{jk} l_{ln} + l_{jk} l_{il} l_{mn} + l_{kl} l_{jm} l_{in} + l_{lm} l_{ki} l_{jn} + l_{mi} l_{lj} l_{kn} + l_{ij} l_{mk} l_{ln} + l_{kl} l_{jl} l_{mn} + l_{ij} l_{km} l_{in} + l_{mk} l_{il} l_{jn} + l_{il} l_{mj} l_{kn} + l_{jm} l_{ik} l_{ln})$$

не изменяется при перестановке любой пары индексов. Полилинейная функция

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \text{ также симметрична, т.е. } l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = l(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = \dots = l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f}, \mathbf{e}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & 1/15 (l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m) l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_i) l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m) l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_i) l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_n) + \\ & + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l) l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_m) l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m) l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i) l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_i) l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_j) l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_k) l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_n) + \\ & + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i) l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l) l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_j) l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m) l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_k) l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_i) l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l) l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_j) l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_m) l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_n)) = \\ & = 1/15 (l_{ij} l_{kl} l_{mn} + l_{jk} l_{lm} l_{in} + l_{kl} l_{mi} l_{jn} + l_{lm} l_{ij} l_{kn} + l_{mi} l_{jk} l_{ln} + l_{jk} l_{il} l_{mn} + l_{kl} l_{jm} l_{in} + l_{lm} l_{ki} l_{jn} + l_{mi} l_{lj} l_{kn} + l_{ij} l_{mk} l_{ln} + l_{kl} l_{jl} l_{mn} + l_{ij} l_{km} l_{in} + l_{mk} l_{il} l_{jn} + l_{il} l_{mj} l_{kn} + l_{jm} l_{ik} l_{ln}) = \\ & = l_{ijk/mn} \end{aligned}$$

и тензор полилинейной формы L_6 также оказывается симметричным. Обратно, если в каком-нибудь базисе данная полилинейная функция шести переменных записывается в виде полилинейной формы с симметричным тензором, то значение функции $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijk/mn} a^i b^j c^k d^l e^m f^n$ не меняется при замене в этом многочлене одного из шести рядов переменных $a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n, e^1, \dots, e^n, f^1, \dots, f^n$ другим, что означает равенство $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = l(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = \dots = l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f}, \mathbf{e})$, т.е. симметричность функции $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f})$.

Итак, симметричная полилинейная функция шести переменных записывается в любом базисе в виде симметричной полилинейной формы. Обратно, если полилинейная функция шести переменных в каком-нибудь базисе записывается в виде симметричной полилинейной формы, то она симметрична и следовательно, ее записью во всяком базисе будет симметричная полилинейная форма.

Симметричная полилинейная функция от шести переменных может быть записана более компактно в матричной форме следующим образом:

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = 1/15 \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot (A^T L_2 B \cdot C^T L_2 D \cdot E^T L_2 F + B^T L_2 C \cdot D^T L_2 E \cdot A^T L_2 F + C^T L_2 D \cdot E^T L_2 A \cdot B^T L_2 F + D^T L_2 E \cdot A^T L_2 B \cdot C^T L_2 F + E^T L_2 A \cdot B^T L_2 C \cdot D^T L_2 F + \\ & + B^T L_2 C \cdot A^T L_2 D \cdot E^T L_2 F + C^T L_2 D \cdot B^T L_2 E \cdot A^T L_2 F + D^T L_2 E \cdot C^T L_2 A \cdot B^T L_2 F + E^T L_2 A \cdot D^T L_2 B \cdot C^T L_2 F + A^T L_2 B \cdot E^T L_2 C \cdot D^T L_2 F + \\ & + C^T L_2 A \cdot B^T L_2 D \cdot E^T L_2 F + D^T L_2 B \cdot C^T L_2 E \cdot A^T L_2 F + E^T L_2 C \cdot D^T L_2 A \cdot B^T L_2 F + A^T L_2 D \cdot E^T L_2 B \cdot C^T L_2 F + B^T L_2 E \cdot A^T L_2 C \cdot D^T L_2 F). \end{aligned}$$

Каждая функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f})$ от шести переменных векторов определяет функцию от одного переменного, если положить $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{d} = \mathbf{e} = \mathbf{f}$, т.е. $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$. Функцию $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$, полученную по этому правилу из симметричной полилинейной функции назовем линейной функцией от шестой степени аргумента, порожденной данной полилинейной функцией $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f})$. Для каждой линейной функции от шестой степени аргумента $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$ существует лишь одна, порождающая ее симметричная полилинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f})$. Если в данном базисе симметричная полилинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f})$ записывается в виде $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklmn} a^i b^j c^k d^l e^m f^n$ для векторов $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{c} = c^1 \mathbf{e}_1 + \dots + c^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{d} = d^1 \mathbf{e}_1 + \dots + d^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e} = e^1 \mathbf{e}_1 + \dots + e^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{f} = f^1 \mathbf{e}_1 + \dots + f^n \mathbf{e}_n$, где l_{ijklmn} – симметричный тензор, то очевидно, $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklmn} a^i a^j a^k a^l a^m a^n$ для вектора $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$. Многочлен вида $\sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklmn} a^i a^j a^k a^l a^m a^n$, все члены которого суть одночлены $l_{ijklmn} a^i a^j a^k a^l a^m a^n$ шестой степени, есть не что иное, как однородный многочлен шестой степени или линейная форма от шестой степени ряда переменных $a^1, \dots, a^n$. При этом симметричный тензор L_6 ($l_{ijklmn} = l_{jiklmn} = \dots = l_{ijnklm}$) оказывается тензором линейной формы $l(a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n) = \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklmn} a^i a^j a^k a^l a^m a^n$.

Мы получили следующий результат: линейная функция шестой степени аргумента $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$, порожденная данной полилинейной функцией $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f})$ во всяком базисе записывается в виде линейной формы шестой

степени $l(a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n)$, имеющей тот же тензор, что и полилинейная форма $l(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n, e^1, \dots, e^n, f^1, \dots, f^n)$. Другими словами линейная функция шестой степени аргумента $l(a, a, a, a, a, a)$ и полилинейная функция $l(a, b, c, d, e, f)$ во всяком базисе записываются в виде форм: линейной шестой степени аргумента или полилинейной, имеющих один и тот же симметричный тензор L_6 .

Линейную форму шестой степени аргумента можно представить в виде

$$l(a, a, a, a, a, a) = \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklmn} a^i a^j a^k a^l a^m a^n.$$

$$\begin{aligned} & \cdot (l_{ij} l_{kl} l_{mn} + l_{jk} l_{lm} l_{in} + l_{kl} l_{mi} l_{jn} + l_{lm} l_{ij} l_{kn} + l_{mi} l_{jk} l_{ln} + l_{jk} l_{il} l_{mn} + l_{kl} l_{jm} l_{in} + l_{lm} l_{ki} l_{jn} + l_{mi} l_{lj} l_{kn} + l_{ij} l_{mk} l_{ln} + l_{kl} l_{jl} l_{mn} + l_{lj} l_{km} l_{in} + l_{mk} l_{li} l_{jn} + l_{il} l_{mj} l_{kn} + l_{jm} l_{ik} l_{ln}) = \\ & = l_{11} l_{11} l_{11} a^1 a^1 a^1 a^1 a^1 + \dots + l_{1n} l_{11} l_{11} a^1 a^1 a^1 a^1 a^n + l_{11} l_{21} l_{11} a^1 a^1 a^2 a^1 a^1 + \dots + l_{1n} l_{21} l_{11} a^1 a^1 a^2 a^1 a^n + \dots + l_{11} l_{nn} l_{nn} a^1 a^n a^n a^n a^n + \dots + l_{1n} l_{nn} l_{nn} a^1 a^n a^n a^n a^n + \\ & + l_{21} l_{11} l_{11} a^2 a^1 a^1 a^1 a^1 + \dots + l_{2n} l_{11} l_{11} a^2 a^1 a^1 a^1 a^n + l_{21} l_{21} l_{11} a^2 a^2 a^1 a^1 a^1 + \dots + l_{2n} l_{21} l_{11} a^2 a^2 a^1 a^1 a^n + \dots + l_{21} l_{nn} l_{nn} a^2 a^n a^n a^n a^n + \dots + l_{2n} l_{nn} l_{nn} a^2 a^n a^n a^n a^n + \\ & \dots \dots \dots \\ & + l_{n1} l_{11} l_{11} a^n a^1 a^1 a^1 a^1 + \dots + l_{nn} l_{11} l_{11} a^n a^1 a^1 a^1 a^n + l_{n1} l_{21} l_{11} a^n a^1 a^2 a^1 a^1 + \dots + l_{nn} l_{21} l_{11} a^n a^1 a^2 a^1 a^n + \dots + l_{n1} l_{nn} l_{nn} a^n a^n a^n a^n a^n + \dots + l_{nn} l_{nn} l_{nn} a^n a^n a^n a^n a^n, \end{aligned}$$

причем $l_{ijklmn} = l_{jiklmn} = \dots = l_{ijnkml}$.

Линейная форма шестой степени аргумента может быть записана более компактно в матричной форме.

Имеем $l(a, a, a, a, a, a) = l(a, a)l(a, a)l(a, a)$, т.е.

$$l(a, a, a, a, a, a) = (A^T L_2 A) \cdot (A^T L_2 A) \cdot (A^T L_2 A).$$

Полилинейные функции и формы от семи переменных

Рассмотрим полилинейную функцию семи переменных векторов a, b, c, d, e, f, g n -мерного линейного векторного пространства L^n , т.е. определим правило, ставящее в соответствие каждому семи векторам a, b, c, d, e, f, g пространства L^n некоторое число $l(a, b, c, d, e, f, g)$ из поля K . Будем считать, что эта функция является линейной по седьмому аргументу и симметрична по перестановке векторов, т.е. выполнены следующие условия:

а) линейности по седьмому аргументу

$$l(a, b, c, d, e, f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 l(a, b, c, d, e, f, g_1) + \alpha_2 l(a, b, c, d, e, f, g_2);$$

б) симметрии по перестановке векторов

$$l(a, b, c, d, e, f, g) = l(b, a, c, d, e, f, g) = \dots = l(a, b, c, d, e, g, f).$$

Из линейности по седьмому аргументу и симметрии следует линейность по остальным аргументам:

$$l(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b, c, d, e, f, g) = \alpha_1 l(a_1, b, c, d, e, f, g) + \alpha_2 l(a_2, b, c, d, e, f, g)$$

$$l(a, \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2, c, d, e, f, g) = \alpha_1 l(a, b_1, c, d, e, f, g) + \alpha_2 l(a, b_2, c, d, e, f, g)$$

$$l(a, b, \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2, d, e, f, g) = \alpha_1 l(a, b, c_1, d, e, f, g) + \alpha_2 l(a, b, c_2, d, e, f, g)$$

$$l(a, b, c, \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2, e, f, g) = \alpha_1 l(a, b, c, d_1, e, f, g) + \alpha_2 l(a, b, c, d_2, e, f, g)$$

$$l(a, b, c, d, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, f, g) = \alpha_1 l(a, b, c, d, e_1, f, g) + \alpha_2 l(a, b, c, d, e_2, f, g)$$

$$l(a, b, c, d, e, \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 l(a, b, c, d, e, f_1, g) + \alpha_2 l(a, b, c, d, e, f_2, g)$$

(каковы бы ни были векторы $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2, g_1, g_2, a, b, c, d, e, f, g$ и числа α_1, α_2).

Перечисленным условиям удовлетворяет линейная функция семи векторов a, b, c, d, e, f и g вида

$$l(a, b, c, d, e, f, g) = 1/105 \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot ((l(a, b)l(c, d)l(e, f) + l(b, c)l(d, e)l(a, f) + l(c, d)l(e, a)l(b, f) + l(d, e)l(a, b)l(c, f) + l(e, a)l(b, c)l(d, f) + \\ & + l(b, c)l(a, d)l(e, f) + l(c, d)l(b, e)l(a, f) + l(d, e)l(c, a)l(b, f) + l(e, a)l(d, b)l(c, f) + l(a, b)l(e, c)l(d, f) + \\ & + l(c, a)l(b, d)l(e, f) + l(d, b)l(c, e)l(a, f) + l(e, c)l(d, a)l(b, f) + l(a, d)l(e, b)l(c, f) + l(b, e)l(a, c)l(d, f))l(g) + \\ & + (l(b, c)l(d, e)l(f, g) + l(c, d)l(e, f)l(b, g) + l(d, e)l(f, b)l(c, g) + l(e, f)l(b, c)l(d, g) + l(f, b)l(c, d)l(e, g) + \\ & + l(c, d)l(b, e)l(f, g) + l(d, e)l(c, f)l(b, g) + l(e, f)l(d, b)l(c, g) + l(f, b)l(e, c)l(d, g) + l(b, c)l(f, d)l(e, g) + \\ & + l(d, b)l(c, e)l(f, g) + l(e, c)l(d, f)l(b, g) + l(f, d)l(e, b)l(c, g) + l(b, e)l(f, c)l(d, g) + l(c, f)l(b, d)l(e, g))l(a) + \\ & + (l(c, d)l(e, f)l(g, a) + l(d, e)l(f, g)l(c, a) + l(e, f)l(g, c)l(d, a) + l(f, g)l(c, d)l(e, a) + l(g, c)l(d, e)l(f, a) + \\ & + l(d, e)l(c, f)l(g, a) + l(e, f)l(d, g)l(c, a) + l(f, g)l(e, c)l(d, a) + l(g, c)l(f, d)l(e, a) + l(c, d)l(g, e)l(f, a) + \\ & + l(e, c)l(d, f)l(g, a) + l(f, d)l(e, g)l(c, a) + l(g, e)l(f, c)l(d, a) + l(c, f)l(g, d)l(e, a) + l(d, g)l(c, e)l(f, a))l(b) + \\ & + (l(d, e)l(f, g)l(a, b) + l(e, f)l(g, a)l(d, b) + l(f, g)l(a, d)l(e, b) + l(g, a)l(d, e)l(f, b) + l(a, d)l(e, f)l(g, b) + \\ & + l(e, f)l(d, g)l(a, b) + l(f, g)l(e, a)l(d, b) + l(g, a)l(f, d)l(e, b) + l(a, d)l(g, e)l(f, b) + l(d, e)l(a, f)l(g, b) + \\ & + l(f, d)l(e, g)l(a, b) + l(g, e)l(f, a)l(d, b) + l(a, f)l(g, d)l(e, b) + l(d, g)l(a, e)l(f, b) + l(e, a)l(d, f)l(g, b))l(c) + \\ & + (l(e, f)l(g, a)l(b, c) + l(f, g)l(a, b)l(e, c) + l(g, a)l(b, e)l(f, c) + l(a, b)l(e, f)l(g, c) + l(b, e)l(f, g)l(a, c) + \\ & + l(f, g)l(e, a)l(b, c) + l(g, a)l(f, b)l(e, c) + l(a, b)l(g, e)l(f, c) + l(b, e)l(a, f)l(g, c) + l(e, f)l(b, g)l(a, c) + \\ & + l(g, e)l(f, a)l(b, c) + l(a, f)l(g, b)l(e, c) + l(b, g)l(a, e)l(f, c) + l(e, a)l(b, f)l(g, c) + l(f, b)l(e, g)l(a, c))l(d) + \\ & + (l(f, g)l(a, b)l(c, d) + l(g, a)l(b, c)l(f, d) + l(a, b)l(c, f)l(g, d) + l(b, c)l(f, g)l(a, d) + l(c, f)l(g, a)l(b, d) + \\ & + l(g, a)l(f, b)l(c, d) + l(a, b)l(g, c)l(f, d) + l(b, c)l(a, f)l(g, d) + l(c, f)l(b, g)l(a, d) + l(f, g)l(c, a)l(b, d) + \\ & + l(a, f)l(g, b)l(c, d) + l(b, g)l(a, c)l(f, d) + l(c, a)l(b, f)l(g, d) + l(f, b)l(c, g)l(a, d) + l(g, c)l(f, a)l(b, d))l(e) + \\ & + (l(g, a)l(b, c)l(d, e) + l(a, b)l(c, d)l(g, e) + l(b, c)l(d, g)l(a, e) + l(c, d)l(g, a)l(b, e) + l(d, g)l(a, b)l(c, e) + \\ & + l(a, b)l(g, c)l(d, e) + l(b, c)l(a, d)l(g, e) + l(c, d)l(b, g)l(a, e) + l(d, g)l(c, a)l(b, e) + l(g, a)l(d, b)l(c, e) + \\ & + l(b, g)l(a, c)l(d, e) + l(c, a)l(b, d)l(g, e) + l(d, b)l(c, g)l(a, e) + l(g, c)l(d, a)l(b, e) + l(a, d)l(g, b)l(c, e))l(f). \end{aligned}$$

Действительно,

$$l(a, b, c, d, e, f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = 1/105 \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot ((l(a, b)l(c, d)l(e, f) + l(b, c)l(d, e)l(a, f) + l(c, d)l(e, a)l(b, f) + l(d, e)l(a, b)l(c, f) + l(e, a)l(b, c)l(d, f) + \\ & + l(b, c)l(a, d)l(e, f) + l(c, d)l(b, e)l(a, f) + l(d, e)l(c, a)l(b, f) + l(e, a)l(d, b)l(c, f) + l(a, b)l(e, c)l(d, f) + \\ & + l(c, a)l(b, d)l(e, f) + l(d, b)l(c, e)l(a, f) + l(e, c)l(d, a)l(b, f) + l(a, d)l(e, b)l(c, f) + l(b, e)l(a, c)l(d, f))l(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (l(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, a)l(b, c)l(d, e) + l(a, b)l(c, d)l(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, e) + l(b, c)l(d, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)l(a, e) + l(c, d)l(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, a)l(b, e) + l(d, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)l(a, b)l(c, e) + \\
& + l(a, b)l(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, c)l(d, e) + l(b, c)l(a, d)l(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, e) + l(c, d)l(b, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)l(a, e) + l(d, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)l(c, a)l(b, e) + l(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, a)l(d, b)l(c, e) + \\
& + l(b, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)l(a, c)l(d, e) + l(c, a)l(b, d)l(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, e) + l(d, b)l(c, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)l(a, e) + l(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, c)l(d, a)l(b, e) + l(a, d)l(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, b)l(c, e))l(f) = \\
& = \alpha_1 / 105 ((l(a, b)l(c, d)l(e, f) + l(b, c)l(d, e)l(a, f) + l(c, d)l(e, a)l(b, f) + l(d, e)l(a, b)l(c, f) + l(e, a)l(b, c)l(d, f) + \\
& + l(b, c)l(a, d)l(e, f) + l(c, d)l(b, e)l(a, f) + l(d, e)l(c, a)l(b, f) + l(e, a)l(d, b)l(c, f) + l(a, b)l(e, c)l(d, f) + \\
& + l(c, a)l(b, d)l(e, f) + l(d, b)l(c, e)l(a, f) + l(e, c)l(d, a)l(b, f) + l(a, d)l(e, b)l(c, f) + l(b, e)l(a, c)l(d, f))l(g_1) + \\
& + (l(g_1, a)l(b, c)l(d, e) + l(a, b)l(c, d)l(g_1, e) + l(b, c)l(d, g_1)l(a, e) + l(c, d)l(g_1, a)l(b, e) + l(d, g_1)l(a, b)l(c, e) + \\
& + l(a, b)l(g_1, c)l(d, e) + l(b, c)l(a, d)l(g_1, e) + l(c, d)l(b, g_1)l(a, e) + l(d, g_1)l(c, a)l(b, e) + l(g_1, a)l(d, b)l(c, e) + \\
& + l(b, g_1)l(a, c)l(d, e) + l(c, a)l(b, d)l(g_1, e) + l(d, b)l(c, g_1)l(a, e) + l(g_1, c)l(d, a)l(b, e) + l(a, d)l(g_1, b)l(c, e))l(f) + \\
& + \alpha_2 / 105 ((l(a, b)l(c, d)l(e, f) + l(b, c)l(d, e)l(a, f) + l(c, d)l(e, a)l(b, f) + l(d, e)l(a, b)l(c, f) + l(e, a)l(b, c)l(d, f) + \\
& + l(b, c)l(a, d)l(e, f) + l(c, d)l(b, e)l(a, f) + l(d, e)l(c, a)l(b, f) + l(e, a)l(d, b)l(c, f) + l(a, b)l(e, c)l(d, f) + \\
& + l(c, a)l(b, d)l(e, f) + l(d, b)l(c, e)l(a, f) + l(e, c)l(d, a)l(b, f) + l(a, d)l(e, b)l(c, f) + l(b, e)l(a, c)l(d, f))l(g_2) + \\
& + (l(g_2, a)l(b, c)l(d, e) + l(a, b)l(c, d)l(g_2, e) + l(b, c)l(d, g_2)l(a, e) + l(c, d)l(g_2, a)l(b, e) + l(d, g_2)l(a, b)l(c, e) + \\
& + l(a, b)l(g_2, c)l(d, e) + l(b, c)l(a, d)l(g_2, e) + l(c, d)l(b, g_2)l(a, e) + l(d, g_2)l(c, a)l(b, e) + l(g_2, a)l(d, b)l(c, e) + \\
& + l(b, g_2)l(a, c)l(d, e) + l(c, a)l(b, d)l(g_2, e) + l(d, b)l(c, g_2)l(a, e) + l(g_2, c)l(d, a)l(b, e) + l(a, d)l(g_2, b)l(c, e))l(f)).
\end{aligned}$$

Если векторы **a, b, c, d, e, f, g** заданы своими координатами относительно данного базиса $e_1, \dots, e_n$ пространства L^n , так что $a = a^1 e_1 + \dots + a^n e_n$, $b = b^1 e_1 + \dots + b^n e_n$, $c = c^1 e_1 + \dots + c^n e_n$, $d = d^1 e_1 + \dots + d^n e_n$, $e = e^1 e_1 + \dots + e^n e_n$, $f = f^1 e_1 + \dots + f^n e_n$, $g = g^1 e_1 + \dots + g^n e_n$, то значение полилинейной функции $l(a, b, c, d, e, f, g)$ через координаты $a^1, \dots, a^n$, $b^1, \dots, b^n$, $c^1, \dots, c^n$, $d^1, \dots, d^n$, $e^1, \dots, e^n$, $f^1, \dots, f^n$, $g^1, \dots, g^n$ векторов **a, b, c, d, e, f, g** выразится следующим образом:

$$\begin{aligned}
l(a, b, c, d, e, f, g) &= l(a^1 e_1 + \dots + a^n e_n, b^1 e_1 + \dots + b^n e_n, c^1 e_1 + \dots + c^n e_n, d^1 e_1 + \dots + d^n e_n, e^1 e_1 + \dots + e^n e_n, f^1 e_1 + \dots + f^n e_n, g^1 e_1 + \dots + g^n e_n) = 1/105 \cdot \\
& \cdot ((l(a, b)l(c, d)l(e, f) + l(b, c)l(d, e)l(a, f) + l(c, d)l(e, a)l(b, f) + l(d, e)l(a, b)l(c, f) + l(e, a)l(b, c)l(d, f) + \\
& + l(b, c)l(a, d)l(e, f) + l(c, d)l(b, e)l(a, f) + l(d, e)l(c, a)l(b, f) + l(e, a)l(d, b)l(c, f) + l(a, b)l(e, c)l(d, f) + \\
& + l(c, a)l(b, d)l(e, f) + l(d, b)l(c, e)l(a, f) + l(e, c)l(d, a)l(b, f) + l(a, d)l(e, b)l(c, f) + l(b, e)l(a, c)l(d, f))l(g) + \\
& + (l(g, a)l(b, c)l(d, e) + l(a, b)l(c, d)l(g, e) + l(b, c)l(d, g)l(a, e) + l(c, d)l(g, a)l(b, e) + l(d, g)l(a, b)l(c, e) + \\
& + l(a, b)l(g, c)l(d, e) + l(b, c)l(a, d)l(g, e) + l(c, d)l(b, g)l(a, e) + l(d, g)l(c, a)l(b, e) + l(g, a)l(d, b)l(c, e) + \\
& + l(b, g)l(a, c)l(d, e) + l(c, a)l(b, d)l(g, e) + l(d, b)l(c, g)l(a, e) + l(g, c)l(d, a)l(b, e) + l(a, d)l(g, b)l(c, e))l(f)) = 1/105 \cdot \\
& = \sum \sum l_{ij} a^i b^j \sum \sum l_{kl} c^k d^l \sum \sum l_{mn} e^m f^n \sum l_o g^o + \dots + \sum \sum l_{il} a^i d^l \sum \sum l_{oj} g^o b^j \sum \sum l_{km} c^k e^m \sum l_n f^n = 1/105 \sum \sum \sum \sum \sum \sum \sum a^i b^j c^k d^l e^m f^n g^o (l_{ij} l_{kl} l_{mn} l_o + \dots + l_{il} l_{og} l_{km} l_n).
\end{aligned}$$

Положим

$$1/105 (l(e_i, e_j)l(e_k, e_l)l(e_m, e_n)l(e_o) + \dots + l(e_i, e_l)l(e_o, e_g)l(e_k, e_m)l(e_n)) = 1/105 (l_{ij} l_{kl} l_{mn} l_o + \dots + l_{il} l_{og} l_{km} l_n) = l_{ijklmno}.$$

Тогда имеем $l(a, b, c, d, e, f, g) = \sum \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklmno} a^i b^j c^k d^l e^m f^n g^o$ для векторов $a = a^1 e_1 + \dots + a^n e_n$, $b = b^1 e_1 + \dots + b^n e_n$, $c = c^1 e_1 + \dots + c^n e_n$, $d = d^1 e_1 + \dots + d^n e_n$, $e = e^1 e_1 + \dots + e^n e_n$, $f = f^1 e_1 + \dots + f^n e_n$, $g = g^1 e_1 + \dots + g^n e_n$. Многочлены вида $(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n, e^1, \dots, e^n, f^1, \dots, f^n, g^1, \dots, g^n) = \sum \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklmno} a^i b^j c^k d^l e^m f^n g^o$, линейные по каждому из семи рядов переменных $a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n, e^1, \dots, e^n, f^1, \dots, f^n, g^1, \dots, g^n$ назовем

полилинейной формой от семи рядов переменных $a^1, ..., a^n, b^1, ..., b^n, c^1, ..., c^n, d^1, ..., d^n, e^1, ..., e^n, f^1, ..., f^n, g^1, ..., g^n$.

Полилинейная форма от семи переменных может быть представлена в виде $l(a, b, c, d, e, f, g) = 1/105 \sum \sum \sum \sum \sum \sum \sum a^i b^j c^k d^l e^m f^n g^o$.

$$\bullet (l_{ij} l_{kl} l_{mn} l_o + \dots + l_{il} l_{og} l_{km} l_n) = 1/105 \bullet$$

$$\bullet (l_{11} l_{11} l_{11} l_1 a^1 b^1 c^1 d^1 e^1 f^1 g^1 + \dots + l_{1n} l_{11} l_{11} l_1 a^1 b^n c^1 d^1 e^1 f^1 g^1 + l_{11} l_{21} l_{11} l_1 a^1 b^1 c^2 d^1 e^1 f^1 g^1 + \dots + l_{1n} l_{nn} l_{nn} l_n a^1 b^n c^n d^n e^n f^n g^n + \\ + l_{21} l_{11} l_{11} l_1 a^2 b^1 c^1 d^1 e^1 f^1 g^1 + \dots + l_{2n} l_{11} l_{11} l_1 a^2 b^n c^1 d^1 e^1 f^1 g^1 + l_{21} l_{21} l_{11} l_1 a^2 b^1 c^2 d^1 e^1 f^1 g^1 + \dots + l_{2n} l_{nn} l_{nn} l_n a^2 b^n c^n d^n e^n f^n g^n + \\ \dots \dots \dots + l_{n1} l_{11} l_{11} l_1 a^n b^1 c^1 d^1 e^1 f^1 g^1 + \dots + l_{nn} l_{11} l_{11} l_1 a^n b^n c^1 d^1 e^1 f^1 g^1 + l_{n1} l_{21} l_{11} l_1 a^n b^1 c^2 d^1 e^1 f^1 g^1 + \dots + l_{nn} l_{nn} l_{nn} l_n a^n b^n c^n d^n e^n f^n g^n + \dots).$$

Полилинейная форма $l(a^1, ..., a^n, b^1, ..., b^n, c^1, ..., c^n, d^1, ..., d^n, e^1, ..., e^n, f^1, ..., f^n, g^1, ..., g^n)$ симметрична, т.е. $l_{ijk/mno} = l_{ij} l_{kl} l_{mn} l_o + \dots + l_{il} l_{og} l_{km} l_n$ не изменяется при перестановке любой пары индексов. Полилинейная функция $l(a, b, c, d, e, f, g)$ также симметрична, т.е. $l(a, b, c, d, e, f, g) = l(b, a, c, d, e, f, g) = \dots = l(a, b, c, d, e, g, f)$.

Тогда

$$1/105 (l(e_i, e_j) l(e_k, e_l) l(e_m, e_n) l(e_o) + \dots + l(e_i, e_l) l(e_o, e_g) l(e_k, e_m) l(e_n)) = 1/105 (l_{ij} l_{kl} l_{mn} l_o + \dots + l_{il} l_{og} l_{km} l_n) = l_{ijk/mno}$$

и тензор полилинейной формы L_7 также оказывается симметричным. Обратно, если в каком-нибудь базисе данная полилинейная функция семи переменных записывается в виде полилинейной формы с симметричным тензором, то значение функции $l(a, b, c, d, e, f, g) = 1/105 \sum \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijk/mno} a^i b^j c^k d^l e^m f^n g^o$ не меняется при замене в этом многочлене одного из семи рядов переменных $a^1, ..., a^n, b^1, ..., b^n, c^1, ..., c^n, d^1, ..., d^n, e^1, ..., e^n, f^1, ..., f^n, g^1, ..., g^n$ другим, что означает равенство $l(a, b, c, d, e, f, g) = l(b, a, c, d, e, f, g) = \dots = l(a, b, c, d, e, g, f)$, т.е. симметричность функции $l(a, b, c, d, e, f, g)$.

Итак, симметричная полилинейная функция семи переменных записывается в любом базисе в виде симметричной полилинейной формы. Обратно, если полилинейная функция семи переменных в каком-нибудь базисе записывается в виде симметричной полилинейной формы, то она симметрична и следовательно, ее записью во всяком базисе будет симметричная полилинейная форма.

Симметричная полилинейная функция от шести переменных может быть записана более компактно в матричной форме следующим образом:

$$l(a, b, c, d, e, f, g) = 1/105 (A^T L_2 B \bullet C^T L_2 D \bullet E^T L_2 F \bullet L_1 G + B^T L_2 C \bullet D^T L_2 E \bullet A^T L_2 F \bullet L_1 G + \dots + A^T L_2 D \bullet G^T L_2 B \bullet C^T L_2 E \bullet L_1 F).$$

Каждая функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ от семи переменных векторов определяет функцию от одного переменного, если положить $\mathbf{a}=\mathbf{b}=\mathbf{c}=\mathbf{d}=\mathbf{e}=\mathbf{f}=\mathbf{g}$, т.е. $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})=l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$. Функцию $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$, полученную по этому правилу из симметричной полилинейной функции назовем линейной функцией от седьмой степени аргумента, порожденной данной полилинейной функцией $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$. Для каждой линейной функции от седьмой степени аргумента $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$ существует лишь одна, порождающая ее симметричная полилинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$. Если в данном базисе симметричная полилинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ записывается в виде $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sum \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklmno} a^i b^j c^k d^l e^m f^n g^o$ для векторов $\mathbf{a}=a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{b}=b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{c}=c^1 \mathbf{e}_1 + \dots + c^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{d}=d^1 \mathbf{e}_1 + \dots + d^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}=e^1 \mathbf{e}_1 + \dots + e^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{f}=f^1 \mathbf{e}_1 + \dots + f^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{g}=g^1 \mathbf{e}_1 + \dots + g^n \mathbf{e}_n$, где $l_{ijklmno}$ – симметричный тензор, то очевидно, $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklmno} a^i a^j a^k a^l a^m a^n a^o$ для вектора $\mathbf{a}=a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$. Многочлен вида $\sum \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklmno} a^i a^j a^k a^l a^m a^n a^o$, все члены которого суть одночлены $l_{ijklmno} a^i a^j a^k a^l a^m a^n a^o$ седьмой степени, есть не что иное, как однородный многочлен седьмой степени или линейная форма от седьмой степени ряда переменных $a^1, \dots, a^n$. При этом симметричный тензор L_7 ($l_{ijklmno} = l_{jiklmno} = \dots = l_{ijklmon}$) оказывается тензором линейной формы $l(a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n) = \sum \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklmno} a^i a^j a^k a^l a^m a^n a^o$.

Мы получили следующий результат: линейная функция шестой степени аргумента $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$, порожденная данной полилинейной функцией $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ во всяком базисе записывается в виде линейной формы седьмой степени $l(a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n, a^1, \dots, a^n)$, имеющей тот же тензор, что и полилинейная форма $l(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n, c^1, \dots, c^n, d^1, \dots, d^n, e^1, \dots, e^n, f^1, \dots, f^n, g^1, \dots, g^n)$. Другими словами линейная функция седьмой степени аргумента $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$ и полилинейная функция $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ во всяком базисе записываются в виде форм: линейной седьмой степени аргумента или полилинейной, имеющих один и тот же симметричный тензор L_7 .

Линейную форму седьмой степени аргумента можно представить в виде

$$l_{11}l_{11}l_{11}l_1a^1a^1a^1a^1a^1+...+l_{1n}l_{11}l_{11}l_1a^1a^n a^1a^1a^1+l_{11}l_{21}l_{11}l_1a^1a^1a^2a^1a^1a^1+...+l_{1n}l_{nn}l_{nn}l_na^1a^n a^n a^n a^n a^n +$$

 $+l_{21}l_{11}l_{11}l_1a^2a^1a^1a^1a^1+...+l_{2n}l_{11}l_{11}l_1a^2a^n a^1a^1a^1+l_{21}l_{21}l_{11}l_1a^2a^1a^2a^1aa^{11}a^1+...+l_{2n}l_{nn}l_{nn}l_na^2a^n a^n a^n a^n a^n +$
 $\dots\dots\dots$
 $+l_{n1}l_{11}l_{11}l_1a^na^1a^1a^1a^1+...+l_{nn}l_{11}l_{11}l_1a^na^n a^1a^1a^1+l_{n1}l_{21}l_{11}l_1a^na^1a^2a^1a^1a^1+...+l_{nn}l_{nn}l_{nn}l_na^na^n a^n a^n a^n a^n,$

причем $l_{ijk/mno}=l_{jik/mno}=...=l_{ijk/mon}$.

Имеем $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = l(\mathbf{a}, \mathbf{a})l(\mathbf{a}, \mathbf{a})l(\mathbf{a}, \mathbf{a})l(\mathbf{a})$, т.е.

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A} \bullet \mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A} \bullet \mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A} \bullet \mathbf{L}_1 \mathbf{A}.$$

7. Преобразование тензоров симметричных полилинейных скалярных функций и форм

Пусть в некоторой точке выбраны два векторных базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$. Любой из векторов первого базиса можно разложить по векторам второго базиса и наоборот. Обозначим через $e^1_i, e^2_i, \dots, e^n_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) коэффициенты разложения вектора $\mathbf{e}'_i$ по векторам базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ эти n^2 -величин называют коэффициентами прямого преобразования. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1' &= e_{11}^1 \mathbf{e}_1 + e_{12}^1 \mathbf{e}_2 + \dots + e_{1n}^1 \mathbf{e}_n = \sum e_{1k}^1 \mathbf{e}_k; \\ \mathbf{e}_2' &= e_{21}^1 \mathbf{e}_1 + e_{22}^2 \mathbf{e}_2 + \dots + e_{2n}^2 \mathbf{e}_n = \sum e_{2k}^2 \mathbf{e}_k; \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}_n' &= e_{n1}^n \mathbf{e}_1 + e_{n2}^n \mathbf{e}_2 + \dots + e_{nn}^n \mathbf{e}_n = \sum e_{nk}^k \mathbf{e}_k, \end{aligned}$$

44

$$\mathbf{e}_i' = \sum e_{i'}^k \mathbf{e}_k, \quad k=1,2,\dots,n.$$

Аналогично, коэффициенты разложения вектора $\mathbf{e}_i$ по векторам $\mathbf{e}_1', \dots, \mathbf{e}_n'$ обозначим через $e_{i'}^1, e_{i'}^2, \dots, e_{i'}^n$ ($i=1,2,\dots,n$). Эти n^2 -величин называют коэффициентами обратного преобразования:

$$\mathbf{e}_1 = e_{1'}^1 \mathbf{e}_1' + e_{1'}^2 \mathbf{e}_2' + \dots + e_{1'}^n \mathbf{e}_n' = \sum e_{1'}^k \mathbf{e}_k';$$

$$\mathbf{e}_2 = e_{2'}^1 \mathbf{e}_1' + e_{2'}^2 \mathbf{e}_2' + \dots + e_{2'}^n \mathbf{e}_n' = \sum e_{2'}^k \mathbf{e}_k';$$

.....

$$\mathbf{e}_n = e_{n'}^1 \mathbf{e}_1' + e_{n'}^2 \mathbf{e}_2' + \dots + e_{n'}^n \mathbf{e}_n' = \sum e_{n'}^k \mathbf{e}_k',$$

или в общем виде

$$\mathbf{e}_i = \sum e_{i'}^k \mathbf{e}_k', \quad k=1,2,\dots,n.$$

Между коэффициентами прямого и обратного преобразования существует связь. Подставив разложение каждого вектора $\mathbf{e}_k$ из второй группы формул в первую, найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i' &= e_{i'}^1 \mathbf{e}_1 + e_{i'}^2 \mathbf{e}_2 + \dots + e_{i'}^n \mathbf{e}_n = \\ &= e_{i'}^1 (e_{1'}^1 \mathbf{e}_1' + \dots + e_{1'}^n \mathbf{e}_n') + \dots + e_{i'}^n (e_{n'}^1 \mathbf{e}_1' + \dots + e_{n'}^n \mathbf{e}_n') = \\ &= (e_{i'}^1 e_{1'}^1 + \dots + e_{i'}^n e_{1'}^n) \mathbf{e}_1' + \dots + (e_{i'}^1 e_{n'}^1 + \dots + e_{i'}^n e_{n'}^n) \mathbf{e}_n' = \\ &= \mathbf{e}_1' \sum e_{i'}^m e_{m'}^1 + \dots + \mathbf{e}_n' \sum e_{i'}^m e_{m'}^n = \sum \mathbf{e}_k' \sum e_{i'}^m e_{m'}^k \quad k,m=1,2,\dots,n. \end{aligned}$$

Аналогичным путем получим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= e_{i'}^1 \mathbf{e}_1' + e_{i'}^2 \mathbf{e}_2' + \dots + e_{i'}^n \mathbf{e}_n' = \\ &= e_{i'}^1 (e_{1'}^1 \mathbf{e}_1 + \dots + e_{1'}^n \mathbf{e}_n) + \dots + e_{i'}^n (e_{n'}^1 \mathbf{e}_1 + \dots + e_{n'}^n \mathbf{e}_n) = \\ &= (e_{i'}^1 e_{1'}^1 + \dots + e_{i'}^n e_{1'}^n) \mathbf{e}_1 + \dots + (e_{i'}^1 e_{n'}^1 + \dots + e_{i'}^n e_{n'}^n) \mathbf{e}_n = \\ &= \mathbf{e}_1 \sum e_{i'}^m e_{m'}^1 + \dots + \mathbf{e}_n \sum e_{i'}^m e_{m'}^n = \sum \mathbf{e}_k \sum e_{i'}^m e_{m'}^k \quad k,m=1,2,\dots,n. \end{aligned}$$

Таким образом, для каждого значения индекса i ($i=1,2,\dots,n$) имеют место $2n^2$ соотношений:

$$\sum e_{i'}^m e_{m'}^k = \delta_{i'}^k \quad \text{и} \quad \sum e_{i'}^m e_{m'}^k = \delta_i^k, \quad \text{равных } 0 \text{ при } i \neq k \text{ и } 1 \text{ при } i=k.$$

Преобразование координат векторов при изменении базиса

Один и тот же вектор $\mathbf{a}$ можно представить разложенным по векторам исходного и преобразованного базисов, т.е.

$l(\mathbf{a}) = \sum l_i a^i = L_1 \mathbf{A}$ при $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$ с матрицей $L_1 = (l_1, l_2, \dots, l_n)$, а относительно базиса $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ в виде линейной формы от одного переменного $l(\mathbf{a}) = \sum l'_i a^i = L'_1 \mathbf{A}'$ при $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + a^n \mathbf{e}'_n$ с матрицей $L'_1 = (l'_1, l'_2, \dots, l'_n)$. При этом $\mathbf{e}'_i = \sum e^k_i \mathbf{e}_k$ и $a^i = \sum e^i_k a^{k'}$, $k=1, \dots, n$, что соответствует матрице преобразования координат векторов

$$H = \begin{vmatrix} e^1_{1'} & e^1_{2'} & \dots & e^1_{n'} \\ e^2_{1'} & e^2_{2'} & \dots & e^2_{n'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^n_{1'} & e^n_{2'} & \dots & e^n_{n'} \end{vmatrix},$$

т.е. преобразованию $\mathbf{A} = \mathbf{H} \mathbf{A}'$.

$$\text{Тогда имеем } l(\mathbf{a}) = L_1 \mathbf{A} = L_1 \mathbf{H} \mathbf{A}' = L'_1 \mathbf{A}',$$

$$\text{т.е. } L'_1 = L_1 H.$$

Линейные функции и формы от двух переменных

Чтобы задать линейную функцию от двух переменных $l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, достаточно задать набор ее коэффициентов $l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = l_{ij}$ ($i, j=1, 2, \dots, n$), т.е. ее матрицу

$$L_2 = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{vmatrix}.$$

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ преобразуется матрица L_2 линейной функции от двух переменных.

Пусть линейная функция от двух переменных $l(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от двух переменных $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum \sum l_{ij} a^i b^j = \mathbf{A}^T L_2 \mathbf{B}$ при $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$ с матрицей L_2 , а относительно базиса $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ в виде линейной формы от двух переменных $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum \sum l'_{ij} a^i b^j = \mathbf{A}'^T L'_2 \mathbf{B}'$ при $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + a^n \mathbf{e}'_n$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + b^n \mathbf{e}'_n$ с матрицей L'_2 . При этом $\mathbf{e}'_i = \sum e^k_i \mathbf{e}_k$ и $a^i = \sum e^i_k a^{k'}$, $k=1, \dots, n$, что соответствует матрице преобразования координат векторов

$$H = \begin{vmatrix} e^1_{1'} & e^1_{2'} & \dots & e^1_{n'} \\ e^2_{1'} & e^2_{2'} & \dots & e^2_{n'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^n_{1'} & e^n_{2'} & \dots & e^n_{n'} \end{vmatrix},$$

т.е. преобразованиям $\mathbf{A} = \mathbf{H} \mathbf{A}'$ и $\mathbf{B} = \mathbf{H} \mathbf{B}'$, т.е. $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}'^T \mathbf{E}^T$, $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}'^T \mathbf{E}^T$.

$$\text{Тогда имеем } l(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{A}^T L_2 \mathbf{B} = \mathbf{A}'^T \mathbf{E}^T L_2 \mathbf{H} \mathbf{B}' = \mathbf{A}'^T (\mathbf{E}^T L_2 \mathbf{H}) \mathbf{B}' = \mathbf{A}'^T L'_2 \mathbf{B}',$$

$$\text{т.е. } L'_2 = \mathbf{E}^T L_2 \mathbf{H}.$$

Линейная функция второй степени аргумента, определенная в L^n соответственно записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ формой $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum l_{ij} a^i a^j = \mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A}$, а относительно базиса $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ формой $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum l'_{ij} a'^i a'^j = \mathbf{A}'^T \mathbf{L}'_2 \mathbf{A}'$, где $\mathbf{L}'_2 = \mathbf{H}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{H}$.

Линейные функции и формы от трех переменных

Чтобы задать линейную функцию от трех переменных $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1/3(l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{a}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}))$, достаточно задать набор ее коэффициентов $1/3(l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_i) + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j)) = 1/3(l_{ij}l_k + l_{jk}l_i + l_{ki}l_j) = l_{ijk}$, т.е. тензор полилинейной формы от трех переменных $\mathbf{L}_3$.

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ преобразуется тензор $\mathbf{L}_3$ линейной функции от трех переменных.

Пусть линейная функция от трех переменных $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от трех переменных $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum \sum \sum l_{ijk} a^i b^j c^k = 1/3(\mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}_1 \mathbf{C} + \mathbf{B}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{C} \cdot \mathbf{L}_1 \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1 \mathbf{B})$ при $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{c} = c^1 \mathbf{e}_1 + \dots + c^n \mathbf{e}_n$ с тензором $\mathbf{L}_3$, определяемым тензорами $\mathbf{L}_2$ и $\mathbf{L}_1$ а относительно базиса $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ в виде линейной формы от трех переменных $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum \sum \sum l'_{ijk} a'^i b'^j c'^k = 1/3(\mathbf{A}'^T \mathbf{L}'_2 \mathbf{B}' \cdot \mathbf{L}'_1 \mathbf{C}' + \mathbf{B}'^T \mathbf{L}'_2 \mathbf{C}' \cdot \mathbf{L}'_1 \mathbf{A}' + \mathbf{C}'^T \mathbf{L}'_2 \mathbf{A}' \cdot \mathbf{L}'_1 \mathbf{B}')$ при $\mathbf{a} = a'^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + a'^n \mathbf{e}'_n$, $\mathbf{b} = b'^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + b'^n \mathbf{e}'_n$, $\mathbf{c} = c'^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + c'^n \mathbf{e}'_n$ с тензором $\mathbf{L}'_3$, определяемым тензорами $\mathbf{L}'_2$ и $\mathbf{L}'_1$.

При этом $\mathbf{e}'_i = \sum e^k_{i'} \mathbf{e}_k$ и $a^i = \sum e^i_{k'} a'^{k'}$, $k=1, \dots, n$, что соответствует матрице преобразования векторов

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} e^1_{1'} & e^1_{2'} & \dots & e^1_{n'} \\ e^2_{1'} & e^2_{2'} & \dots & e^2_{n'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^n_{1'} & e^n_{2'} & \dots & e^n_{n'} \end{vmatrix},$$

т.е. преобразованиям $\mathbf{A} = \mathbf{H} \mathbf{A}'$, $\mathbf{B} = \mathbf{H} \mathbf{B}'$, $\mathbf{C} = \mathbf{H} \mathbf{C}'$, т.е. $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}'^T \mathbf{E}^T$, $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}'^T \mathbf{E}^T$, $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}'^T \mathbf{E}^T$.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= 1/3(\mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}_1 \mathbf{C} + \mathbf{B}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{C} \cdot \mathbf{L}_1 \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1 \mathbf{B}) = \\ &= 1/3(\mathbf{A}'^T \mathbf{E}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{H} \mathbf{B}' \cdot \mathbf{L}_1 \mathbf{H} \mathbf{C}' + \mathbf{B}'^T \mathbf{E}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{H} \mathbf{C}' \cdot \mathbf{L}_1 \mathbf{H} \mathbf{A}' + \mathbf{C}'^T \mathbf{E}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{H} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{L}_1 \mathbf{H} \mathbf{B}') = \\ &= 1/3(\mathbf{A}'^T \mathbf{L}'_2 \mathbf{B}' \cdot \mathbf{L}'_1 \mathbf{C}' + \mathbf{B}'^T \mathbf{L}'_2 \mathbf{C}' \cdot \mathbf{L}'_1 \mathbf{A}' + \mathbf{C}'^T \mathbf{L}'_2 \mathbf{A}' \cdot \mathbf{L}'_1 \mathbf{B}'), \end{aligned}$$

т.е. $\mathbf{L}'_2 = \mathbf{E}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{H}$ и $\mathbf{L}'_1 = \mathbf{L}_1 \mathbf{H}$.

Линейная функция третьей степени аргумента, определенная в L^n соответственно записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ формой $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum \sum l_{ijk} a^i a^j a^k = \mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}_1 \mathbf{A}$, определяемой тензорами $\mathbf{L}_2$ и $\mathbf{L}_1$, а относительно базиса $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ формой $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum \sum l'_{ijk} a'^i a'^j a'^k = \mathbf{A}^T \mathbf{H}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{H} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{L}_1 \mathbf{H} \mathbf{A}'$, определяемой тензорами $\mathbf{L}'_2$ и $\mathbf{L}'_1$, причем $\mathbf{L}'_2 = \mathbf{H}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{H}$, а $\mathbf{L}'_1 = \mathbf{L}_1 \mathbf{H}$.

Линейные функции и формы от четырех переменных

Чтобы задать линейную функцию от четырех переменных $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = 1/3(l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{d}) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{a}, \mathbf{d}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{d}))$, достаточно задать набор ее коэффициентов $1/3(l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l) + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l)) = 1/3(l_{ij}l_{kl} + l_{jk}l_{il} + l_{ki}l_{jl}) = l_{ijkl}$, т.е. тензор полилинейной формы от четырех переменных $\mathbf{L}_4$.

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ преобразуется тензор $\mathbf{L}_4$ линейной функции от четырех переменных.

Пусть линейная функция от четырех переменных $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от четырех переменных $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \sum \sum \sum \sum l_{ijkl} a^i b^j c^k d^l = 1/3(\mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{D} + \mathbf{B}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{D} + \mathbf{C}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{D})$ при $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{c} = c^1 \mathbf{e}_1 + \dots + c^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{d} = d^1 \mathbf{e}_1 + \dots + d^n \mathbf{e}_n$ с тензором $\mathbf{L}_4$, определяемым тензором $\mathbf{L}_2$, а относительно базиса $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ в виде линейной формы от четырех переменных

$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \sum \sum \sum \sum l'_{ijkl} a'^i b'^j c'^k d'^l = 1/3(\mathbf{A}'^T \mathbf{L}'_2 \mathbf{B}' \cdot \mathbf{C}'^T \mathbf{L}'_2 \mathbf{D}' + \mathbf{B}'^T \mathbf{L}'_2 \mathbf{C}' \cdot \mathbf{A}'^T \mathbf{L}'_2 \mathbf{D}' + \mathbf{C}'^T \mathbf{L}'_2 \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}'^T \mathbf{L}'_2 \mathbf{D}')$ при $\mathbf{a} = a'^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + a'^n \mathbf{e}'_n$, $\mathbf{b} = b'^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + b'^n \mathbf{e}'_n$, $\mathbf{c} = c'^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + c'^n \mathbf{e}'_n$, $\mathbf{d} = d'^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + d'^n \mathbf{e}'_n$ с тензором $\mathbf{L}'_4$, определяемым тензором $\mathbf{L}'_2$.

При этом $\mathbf{e}'_i = \sum e^k_i \mathbf{e}_k$ и $a^i = \sum e^i_k a'^k$, $k=1, \dots, n$, что соответствует матрице преобразования векторов

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} e^1_{1'} & e^1_{2'} & \dots & e^1_{n'} \\ e^2_{1'} & e^2_{2'} & \dots & e^2_{n'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^n_{1'} & e^n_{2'} & \dots & e^n_{n'} \end{pmatrix},$$

т.е. преобразованиям $\mathbf{A} = \mathbf{H} \mathbf{A}'$, $\mathbf{B} = \mathbf{H} \mathbf{B}'$, $\mathbf{C} = \mathbf{H} \mathbf{C}'$, $\mathbf{D} = \mathbf{H} \mathbf{D}'$ т.е. $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}'^T \mathbf{H}^T$, $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}'^T \mathbf{H}^T$, $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}'^T \mathbf{H}^T$, $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}'^T \mathbf{H}^T$.

Тогда имеем

$$\begin{aligned}
l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) &= 1/3(\mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{D} + \mathbf{B}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{D} + \mathbf{C}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{D}) = \\
&= 1/3(\mathbf{A}^T \mathbf{H}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{E} \mathbf{B}' \cdot \mathbf{C}^T \mathbf{H}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{E} \mathbf{D}' + \mathbf{B}^T \mathbf{H}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{E} \mathbf{C}' \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{H}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{E} \mathbf{D}' + \mathbf{C}^T \mathbf{H}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{E} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{H}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{E} \mathbf{D}') = \\
&= 1/3(\mathbf{A}^T \mathbf{L}_2' \mathbf{B}' \cdot \mathbf{C}^T \mathbf{L}_2' \mathbf{D}' + \mathbf{B}^T \mathbf{L}_2' \mathbf{C}' \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{L}_2' \mathbf{D}' + \mathbf{C}^T \mathbf{L}_2' \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{L}_2' \mathbf{D}'), \\
\text{т.е. } \mathbf{L}_2' &= \mathbf{H}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{H}.
\end{aligned}$$

Линейная функция четвертой степени аргумента, определенная в L^n соответственно записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ формой $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum \sum \sum l_{ijkl} a^i a^j a^k a^l = \mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A}$, определяемой тензором $\mathbf{L}_2$, а относительно базиса $\mathbf{e}_1', \dots, \mathbf{e}_n'$ формой $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum \sum \sum l_{ijkl}' a'^i a'^j a'^k a'^l = \mathbf{A}'^T \mathbf{L}_2' \mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}'^T \mathbf{L}_2' \mathbf{A}'$, определяемой тензором $\mathbf{L}_2'$, причем $\mathbf{L}_2' = \mathbf{H}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{H}$.

Линейные функции и формы от пяти переменных

Чтобы задать линейную функцию от пяти переменных

$$\begin{aligned}
l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}) &= 1/15((l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{d}) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{a}, \mathbf{d}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{d}))l(\mathbf{e}) + \\
&\quad + (l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{e}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{b}, \mathbf{e}) + l(\mathbf{d}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{e}))l(\mathbf{a}) + \\
&\quad + (l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{a}) + l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{c}, \mathbf{a}) + l(\mathbf{e}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{a}))l(\mathbf{b}) + \\
&\quad + (l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{d}, \mathbf{b}) + l(\mathbf{a}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{b}))l(\mathbf{c}) + \\
&\quad + (l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{e}, \mathbf{c}) + l(\mathbf{b}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{c}))l(\mathbf{d}))
\end{aligned}$$

достаточно задать набор ее коэффициентов

$$\begin{aligned}
&1/15((l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l) + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l))l(\mathbf{e}_m) + \\
&\quad + (l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m) + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_m) + l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m))l(\mathbf{e}_i) + \\
&\quad + (l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_i) + l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i) + l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_i))l(\mathbf{e}_j) + \\
&\quad + (l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) + l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_j) + l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l)l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_j))l(\mathbf{e}_k) + \\
&\quad + (l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) + l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_k) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_m)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k))l(\mathbf{e}_l)) = \\
&= 1/15((l_{ij}l_{kl} + l_{jk}l_{il} + l_{ki}l_{jl})l_m + (l_{jk}l_{lm} + l_{kl}l_{jm} + l_{lj}l_{km})l_i + (l_{kl}l_{mi} + l_{lm}l_{ki} + l_{mk}l_{li})l_j + (l_{lm}l_{ij} + l_{mi}l_{lj} + l_{il}l_{mj})l_k + (l_{mi}l_{jk} + l_{ij}l_{mk} + l_{jm}l_{ik})l_l) = \\
&= 1/5(l_{ijkl}l_m + l_{jklm}l_i + l_{klmi}l_j + l_{lmij}l_k + l_{mijk}l_l) = l_{ijklm},
\end{aligned}$$

т.е. тензор полилинейной формы от пяти переменных $\mathbf{L}_5$.

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}_1', \dots, \mathbf{e}_n'$ преобразуется тензор $\mathbf{L}_5$ линейной функции от пяти переменных.

Пусть линейная функция от пяти переменных $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от пяти переменных

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}) = \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklm} a^i b^j c^k d^l e^m = 1/15 \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot (A^T L_2 B \cdot C^T L_2 D + B^T L_2 C \cdot A^T L_2 D + C^T L_2 A \cdot B^T L_2 D) \cdot L_1 E + \\ & + (B^T L_2 C \cdot D^T L_2 E + C^T L_2 D \cdot B^T L_2 E + D^T L_2 B \cdot C^T L_2 E) \cdot L_1 A + \\ & + (C^T L_2 D \cdot E^T L_2 A + D^T L_2 E \cdot C^T L_2 A + E^T L_2 C \cdot D^T L_2 A) \cdot L_1 B + \\ & + (D^T L_2 E \cdot A^T L_2 B + E^T L_2 A \cdot D^T L_2 B + A^T L_2 D \cdot E^T L_2 B) \cdot L_1 C + \\ & + (E^T L_2 A \cdot B^T L_2 C + A^T L_2 B \cdot E^T L_2 C + B^T L_2 E \cdot A^T L_2 C) \cdot L_1 D) \end{aligned}$$

при $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{c} = c^1 \mathbf{e}_1 + \dots + c^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{d} = d^1 \mathbf{e}_1 + \dots + d^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e} = e^1 \mathbf{e}_1 + \dots + e^n \mathbf{e}_n$ с

тензором L_5 , определяемым тензорами L_2 и L_1 , а относительно базиса $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ в

виде линейной формы от пяти переменных

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}) = \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklm} a^i b^j c^k d^l e^m = 1/15 \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot (A'^T L_2' B' \cdot C'^T L_2' D' + B'^T L_2' C' \cdot A'^T L_2' D' + C'^T L_2' A' \cdot B'^T L_2' D') \cdot L_1' E' + \\ & + (B'^T L_2' C' \cdot D'^T L_2' E' + C'^T L_2' D' \cdot B'^T L_2' E' + D'^T L_2' B' \cdot C'^T L_2' E') \cdot L_1' A' + \\ & + (C'^T L_2' D' \cdot E'^T L_2' A' + D'^T L_2' E' \cdot C'^T L_2' A' + E'^T L_2' C' \cdot D'^T L_2' A') \cdot L_1' B' + \\ & + (D'^T L_2' E' \cdot A'^T L_2' B' + E'^T L_2' A' \cdot D'^T L_2' B' + A'^T L_2' D' \cdot E'^T L_2' B') \cdot L_1' C' + \\ & + (E'^T L_2' A' \cdot B'^T L_2' C' + A'^T L_2' B' \cdot E'^T L_2' C' + B'^T L_2' E' \cdot A'^T L_2' C') \cdot L_1' D') \end{aligned}$$

при $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + a^n \mathbf{e}'_n$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + b^n \mathbf{e}'_n$, $\mathbf{c} = c^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + c^n \mathbf{e}'_n$, $\mathbf{d} = d^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + d^n \mathbf{e}'_n$,

$\mathbf{e} = e^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + e^n \mathbf{e}'_n$ с тензором L_5' , определяемым тензорами L_2' и L_1' .

При этом $\mathbf{e}'_i = \sum e^k_{i'} \mathbf{e}_k$ и $a^i = \sum e^i_{k'} a^{k'}$, $k=1, \dots, n$, что соответствует матрице преобразования векторов

$$H = \begin{vmatrix} e^1_{1'} & e^1_{2'} & \dots & e^1_{n'} \\ e^2_{1'} & e^2_{2'} & \dots & e^2_{n'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^n_{1'} & e^n_{2'} & \dots & e^n_{n'} \end{vmatrix},$$

т.е. преобразованиям $A = H A'$, $B = H B'$, $C = H C'$, $D = H D'$, $E = H E'$, т.е. $A^T = A'^T H^T$, $B^T = B'^T H^T$, $C^T = C'^T H^T$, $D^T = D'^T H^T$, $E^T = E'^T H^T$

Тогда имеем

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}) =$$

$$\begin{aligned} & = 1/15 (A^T L_2 B \cdot C^T L_2 D + B^T L_2 C \cdot A^T L_2 D + C^T L_2 A \cdot B^T L_2 D) \cdot L_1 E + \\ & + (B^T L_2 C \cdot D^T L_2 E + C^T L_2 D \cdot B^T L_2 E + D^T L_2 B \cdot C^T L_2 E) \cdot L_1 A + \\ & + (C^T L_2 D \cdot E^T L_2 A + D^T L_2 E \cdot C^T L_2 A + E^T L_2 C \cdot D^T L_2 A) \cdot L_1 B + \\ & + (D^T L_2 E \cdot A^T L_2 B + E^T L_2 A \cdot D^T L_2 B + A^T L_2 D \cdot E^T L_2 B) \cdot L_1 C + \\ & + (E^T L_2 A \cdot B^T L_2 C + A^T L_2 B \cdot E^T L_2 C + B^T L_2 E \cdot A^T L_2 C) \cdot L_1 D) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=1/15((A^T H^T L_2 H B' \cdot C^T H^T L_2 H D' + B^T H^T L_2 H C' \cdot A^T H^T L_2 H D' + C^T H^T L_2 H A' \cdot B^T H^T L_2 H D') \cdot L_1 H E' + \\
&\quad + (B^T H^T L_2 H C' \cdot D^T H^T L_2 H E' + C^T H^T L_2 H D' \cdot B^T H^T L_2 H E' + D^T H^T L_2 H B' \cdot C^T H^T L_2 H E') \cdot L_1 H A' + \\
&\quad + (C^T H^T L_2 H D' \cdot E^T H^T L_2 H A' + D^T H^T L_2 H E' \cdot C^T H^T L_2 H A' + E^T H^T L_2 H C' \cdot D^T H^T L_2 H A') \cdot L_1 H B' + \\
&\quad + (D^T H^T L_2 H E' \cdot A^T H^T L_2 H B' + E^T H^T L_2 H A' \cdot D^T H^T L_2 H B' + A^T H^T L_2 H D' \cdot E^T H^T L_2 H B') \cdot L_1 H C' + \\
&\quad + (E^T H^T L_2 H A' \cdot B^T H^T L_2 H C' + A^T H^T L_2 H B' \cdot E^T H^T L_2 H C' + B^T H^T L_2 H E' \cdot A^T H^T L_2 H C') \cdot L_1 H D')) = \\
&=1/15 \cdot (A^T L_2' B' \cdot C^T L_2' D' + B^T L_2' C' \cdot A^T L_2' D' + C^T L_2' A' \cdot B^T L_2' D') \cdot L_1' E' + \\
&\quad + (B^T L_2' C' \cdot D^T L_2' E' + C^T L_2' D' \cdot B^T L_2' E' + D^T L_2' B' \cdot C^T L_2' E') \cdot L_1' A' + \\
&\quad + (C^T L_2' D' \cdot E^T L_2' A' + D^T L_2' E' \cdot C^T L_2' A' + E^T L_2' C' \cdot D^T L_2' A') \cdot L_1' B' + \\
&\quad + (D^T L_2' E' \cdot A^T L_2' B' + E^T L_2' A' \cdot D^T L_2' B' + A^T L_2' D' \cdot E^T L_2' B') \cdot L_1' C' + \\
&\quad + (E^T L_2' A' \cdot B^T L_2' C' + A^T L_2' B' \cdot E^T L_2' C' + B^T L_2' E' \cdot A^T L_2' C') \cdot L_1' D'), \\
&\text{т.е. } L_2' = H^T L_2 H \text{ и } L_1' = L_1 H.
\end{aligned}$$

Линейная функция пятой степени аргумента, определенная в L^n соответственно записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ формой $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklm} a^i a^j a^k a^l a^m = A^T L_2 A \cdot A^T L_2 A \cdot L_1 A$, определяемой тензорами L_2 и L_1 а относительно базиса $\mathbf{e}_1', \dots, \mathbf{e}_n'$ формой $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklm}' a'^i a'^j a'^k a'^l a'^m = A'^T L_2' A' \cdot A'^T L_2' A' \cdot L_1' A'$, определяемой тензорами L_2' и L_1' , причем $L_2' = H^T L_2 H$ и $L_1' = L_1 H$.

Линейные функции и формы от шести переменных

Чтобы задать линейную функцию от шести переменных

$$\begin{aligned}
l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = & 1/15((l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{d}) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{a}, \mathbf{d}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{d}))l(\mathbf{e}, \mathbf{f}) + \\
& + (l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{e}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{b}, \mathbf{e}) + l(\mathbf{d}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{e}))l(\mathbf{a}, \mathbf{f}) + \\
& + (l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{a}) + l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{c}, \mathbf{a}) + l(\mathbf{e}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{a}))l(\mathbf{b}, \mathbf{f}) + \\
& + (l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{d}, \mathbf{b}) + l(\mathbf{a}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{b}))l(\mathbf{c}, \mathbf{f}) + \\
& + (l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{e}, \mathbf{c}) + l(\mathbf{b}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{c}))l(\mathbf{d}, \mathbf{f}))
\end{aligned}$$

достаточно задать набор ее коэффициентов

$$\begin{aligned}
&1/15((l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l) + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l))l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n) + \\
&\quad + (l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m) + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_m) + l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m))l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_n) + \\
&\quad + (l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_i) + l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i) + l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_i))l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_n) + \\
&\quad + (l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) + l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_j) + l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l)l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_j))l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n) + \\
&\quad + (l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) + l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_k) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_m)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k))l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_n)) = \\
&=1/15((l_{ij}l_{kl} + l_{jk}l_{il} + l_{ki}l_{jl})l_{mn} + (l_{jk}l_{lm} + l_{kl}l_{jm} + l_{lj}l_{km})l_{in} + (l_{kl}l_{mi} + l_{lm}l_{ki} + l_{mk}l_{li})l_{jn} + (l_{lm}l_{ij} + l_{mi}l_{lj} + l_{li}l_{mj})l_{kn} + (l_{mi}l_{jk} + l_{ij}l_{mk} + l_{jm}l_{ik})l_{ln}) = \\
&=1/5(l_{ijk}l_{lmn} + l_{jkl}l_{imn} + l_{klm}l_{ijn} + l_{lmi}l_{jkn} + l_{mij}l_{lkn}) = l_{ijklmn},
\end{aligned}$$

т.е. тензор полилинейной формы от шести переменных L_6 .

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ преобразуется тензор L_6 линейной функции от шести переменных.

Пусть линейная функция от шести переменных $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от шести переменных

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklmn} a^i b^j c^k d^l e^m f^n = 1/15 \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot (A^T L_2 B \cdot C^T L_2 D + B^T L_2 C \cdot A^T L_2 D + C^T L_2 A \cdot B^T L_2 D) \cdot E^T L_2 F + \\ & + (B^T L_2 C \cdot D^T L_2 E + C^T L_2 D \cdot B^T L_2 E + D^T L_2 B \cdot C^T L_2 E) \cdot A^T L_2 F + \\ & + (C^T L_2 D \cdot E^T L_2 A + D^T L_2 E \cdot C^T L_2 A + E^T L_2 C \cdot D^T L_2 A) \cdot B^T L_2 F + \\ & + (D^T L_2 E \cdot A^T L_2 B + E^T L_2 A \cdot D^T L_2 B + A^T L_2 D \cdot E^T L_2 B) \cdot C^T L_2 F + \\ & + (E^T L_2 A \cdot B^T L_2 C + A^T L_2 B \cdot E^T L_2 C + B^T L_2 E \cdot A^T L_2 C) \cdot D^T L_2 F \end{aligned}$$

при $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{c} = c^1 \mathbf{e}_1 + \dots + c^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{d} = d^1 \mathbf{e}_1 + \dots + d^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e} = e^1 \mathbf{e}_1 + \dots + e^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{f} = f^1 \mathbf{e}_1 + \dots + f^n \mathbf{e}_n$ с тензором L_6 , определяемым тензором L_2 , а относительно базиса $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ в виде линейной формы от шести переменных

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklmn} a'^i b'^j c'^k d'^l e'^m f'^n = 1/15 \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot (A'^T L'_2 B' \cdot C'^T L'_2 D' + B'^T L'_2 C' \cdot A'^T L'_2 D' + C'^T L'_2 A' \cdot B'^T L'_2 D') \cdot E'^T L'_2 F' + \\ & + (B'^T L'_2 C' \cdot D'^T L'_2 E' + C'^T L'_2 D' \cdot B'^T L'_2 E' + D'^T L'_2 B' \cdot C'^T L'_2 E') \cdot A'^T L'_2 F' + \\ & + (C'^T L'_2 D' \cdot E'^T L'_2 A' + D'^T L'_2 E' \cdot C'^T L'_2 A' + E'^T L'_2 C' \cdot D'^T L'_2 A') \cdot B'^T L'_2 F' + \\ & + (D'^T L'_2 E' \cdot A'^T L'_2 B' + E'^T L'_2 A' \cdot D'^T L'_2 B' + A'^T L'_2 D' \cdot E'^T L'_2 B') \cdot C'^T L'_2 F' + \\ & + (E'^T L'_2 A' \cdot B'^T L'_2 C' + A'^T L'_2 B' \cdot E'^T L'_2 C' + B'^T L'_2 E' \cdot A'^T L'_2 C') \cdot D'^T L'_2 F' \end{aligned}$$

при $\mathbf{a} = a'^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + a'^n \mathbf{e}'_n$, $\mathbf{b} = b'^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + b'^n \mathbf{e}'_n$, $\mathbf{c} = c'^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + c'^n \mathbf{e}'_n$, $\mathbf{d} = d'^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + d'^n \mathbf{e}'_n$, $\mathbf{e} = e'^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + e'^n \mathbf{e}'_n$, $\mathbf{f} = f'^1 \mathbf{e}'_1 + \dots + f'^n \mathbf{e}'_n$ с тензором L'_6 , определяемым тензором L'_2 .

При этом $\mathbf{e}'_i = \sum e^k_{i'} \mathbf{e}_k$ и $a^i = \sum e^i_{k'} a^{k'}$, $k=1, \dots, n$, что соответствует матрице преобразования векторов

$$H = \begin{vmatrix} e^1_{1'} & e^1_{2'} & \dots & e^1_{n'} \\ e^2_{1'} & e^2_{2'} & \dots & e^2_{n'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^n_{1'} & e^n_{2'} & \dots & e^n_{n'} \end{vmatrix},$$

т.е. преобразованиям $A = H A'$, $B = H B'$, $C = H C'$, $D = H D'$, $E = H E'$, $F = H F'$ т.е. $A^T = A'^T H^T$, $B^T = B'^T H^T$, $C^T = C'^T H^T$, $D^T = D'^T H^T$, $E^T = E'^T H^T$, $F^T = F'^T H^T$.

Тогда имеем

$$\begin{aligned}
l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) = & \\
= 1/15 & (A^T L_2 B \cdot C^T L_2 D + B^T L_2 C \cdot A^T L_2 D + C^T L_2 A \cdot B^T L_2 D) \cdot E^T L_2 F + \\
& + (B^T L_2 C \cdot D^T L_2 E + C^T L_2 D \cdot B^T L_2 E + D^T L_2 B \cdot C^T L_2 E) \cdot A^T L_2 F + \\
& + (C^T L_2 D \cdot E^T L_2 A + D^T L_2 E \cdot C^T L_2 A + E^T L_2 C \cdot D^T L_2 A) \cdot B^T L_2 F + \\
& + (D^T L_2 E \cdot A^T L_2 B + E^T L_2 A \cdot D^T L_2 B + A^T L_2 D \cdot E^T L_2 B) \cdot C^T L_2 F + \\
& + (E^T L_2 A \cdot B^T L_2 C + A^T L_2 B \cdot E^T L_2 C + B^T L_2 E \cdot A^T L_2 C) \cdot D^T L_2 F) = \\
= 1/15 & ((A^T H^T L_2 H B' \cdot C^T H^T L_2 H D' + B^T H^T L_2 H C' \cdot A^T H^T L_2 H D' + C^T H^T L_2 H A' \cdot B^T H^T L_2 H D') \cdot E^T H^T L_2 H F' + \\
& + (B^T H^T L_2 H C' \cdot D^T H^T L_2 H E' + C^T H^T L_2 H D' \cdot B^T H^T L_2 H E' + D^T H^T L_2 H B' \cdot C^T H^T L_2 H E') \cdot A^T H^T L_2 H F' + \\
& + (C^T H^T L_2 H D' \cdot E^T H^T L_2 H A' + D^T H^T L_2 H E' \cdot C^T H^T L_2 H A' + E^T H^T L_2 H C' \cdot D^T H^T L_2 H A') \cdot B^T H^T L_2 H F' + \\
& + (D^T H^T L_2 H E' \cdot A^T H^T L_2 H B' + E^T H^T L_2 H A' \cdot D^T H^T L_2 H B' + A^T H^T L_2 H D' \cdot E^T H^T L_2 H B') \cdot C^T H^T L_2 H F' + \\
& + (E^T H^T L_2 H A' \cdot B^T H^T L_2 H C' + A^T H^T L_2 H B' \cdot E^T H^T L_2 H C' + B^T H^T L_2 H E' \cdot A^T H^T L_2 H C') \cdot E^T H^T L_2 H F')) = \\
= 1/15 & \cdot (A^T L_2' B' \cdot C^T L_2' D' + B^T L_2' C' \cdot A^T L_2' D' + C^T L_2' A' \cdot B^T L_2' D') \cdot E^T L_2' F' + \\
& + (B^T L_2' C' \cdot D^T L_2' E' + C^T L_2' D' \cdot B^T L_2' E' + D^T L_2' B' \cdot C^T L_2' E') \cdot A^T L_2' F' + \\
& + (C^T L_2' D' \cdot E^T L_2' A' + D^T L_2' E' \cdot C^T L_2' A' + E^T L_2' C' \cdot D^T L_2' A') \cdot B^T L_2' F' + \\
& + (D^T L_2' E' \cdot A^T L_2' B' + E^T L_2' A' \cdot D^T L_2' B' + A^T L_2' D' \cdot E^T L_2' B') \cdot C^T L_2' F' + \\
& + (E^T L_2' A' \cdot B^T L_2' C' + A^T L_2' B' \cdot E^T L_2' C' + B^T L_2' E' \cdot A^T L_2' C') \cdot D^T L_2' F'), \\
\text{т.е. } L_2' = & H^T L_2 H.
\end{aligned}$$

Линейная функция шестой степени аргумента, определенная в L^n соответственно записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ формой $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijk/mn} a^i a^j a^k a^m a^n = A^T L_2 A \cdot A^T L_2 A \cdot A^T L_2 A$, определяемой тензором L_2 , а относительно базиса $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ формой $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijk/mn}' a'^i a'^j a'^k a'^m a'^n = A'^T L_2' A' \cdot A'^T L_2' A' \cdot A'^T L_2' A'$, определяемой тензором L_2' , причем $L_2' = H^T L_2 H$.

Линейные функции и формы от семи переменных

Чтобы задать линейную функцию от семи переменных

$$\begin{aligned}
l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}) = & 1/105 \cdot \\
\bullet & ((l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{f}) + \\
& + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{a}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{b}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{e}, \mathbf{a})l(\mathbf{d}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{a}, \mathbf{b})l(\mathbf{e}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{f}) + \\
& + l(\mathbf{c}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{d}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{e}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{a})l(\mathbf{b}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{a}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{f}) + l(\mathbf{b}, \mathbf{e})l(\mathbf{a}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{f}))l(\mathbf{g}) + \\
& + (l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{f})l(\mathbf{b}, \mathbf{g}) + l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{f}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{g}) + l(\mathbf{e}, \mathbf{f})l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{g}) + l(\mathbf{f}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{g}) + \\
& + l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{b}, \mathbf{e})l(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{c}, \mathbf{f})l(\mathbf{b}, \mathbf{g}) + l(\mathbf{e}, \mathbf{f})l(\mathbf{d}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{g}) + l(\mathbf{f}, \mathbf{b})l(\mathbf{e}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{g}) + l(\mathbf{b}, \mathbf{c})l(\mathbf{f}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{g}) + \\
& + l(\mathbf{d}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{e})l(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + l(\mathbf{e}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{f})l(\mathbf{b}, \mathbf{g}) + l(\mathbf{f}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{b})l(\mathbf{c}, \mathbf{g}) + l(\mathbf{b}, \mathbf{e})l(\mathbf{f}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{g}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{f})l(\mathbf{b}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{g}))l(\mathbf{a}) + \\
& + (l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{f})l(\mathbf{g}, \mathbf{a}) + l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{f}, \mathbf{g})l(\mathbf{c}, \mathbf{a}) + l(\mathbf{e}, \mathbf{f})l(\mathbf{g}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{a}) + l(\mathbf{f}, \mathbf{g})l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{a}) + l(\mathbf{g}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{f}, \mathbf{a}) + \\
& + l(\mathbf{d}, \mathbf{e})l(\mathbf{c}, \mathbf{f})l(\mathbf{g}, \mathbf{a}) + l(\mathbf{e}, \mathbf{f})l(\mathbf{d}, \mathbf{g})l(\mathbf{c}, \mathbf{a}) + l(\mathbf{f}, \mathbf{g})l(\mathbf{e}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{a}) + l(\mathbf{g}, \mathbf{c})l(\mathbf{f}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{a}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{d})l(\mathbf{g}, \mathbf{e})l(\mathbf{f}, \mathbf{a}) + \\
& + l(\mathbf{e}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{f})l(\mathbf{g}, \mathbf{a}) + l(\mathbf{f}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{g})l(\mathbf{c}, \mathbf{a}) + l(\mathbf{g}, \mathbf{e})l(\mathbf{f}, \mathbf{c})l(\mathbf{d}, \mathbf{a}) + l(\mathbf{c}, \mathbf{f})l(\mathbf{g}, \mathbf{d})l(\mathbf{e}, \mathbf{a}) + l(\mathbf{d}, \mathbf{g})l(\mathbf{c}, \mathbf{e})l(\mathbf{f}, \mathbf{a}))l(\mathbf{b}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (l(d,e)l(f,g)l(a,b)+l(e,f)l(g,a)l(d,b)+l(f,g)l(a,d)l(e,b)+l(g,a)l(d,e)l(f,b)+l(a,d)l(e,f)l(g,b)+ \\
& + l(e,f)l(d,g)l(a,b)+l(f,g)l(e,a)l(d,b)+l(g,a)l(f,d)l(e,b)+l(a,d)l(g,e)l(f,b)+l(d,e)l(a,f)l(g,b)+ \\
& + l(f,d)l(e,g)l(a,b)+l(g,e)l(f,a)l(d,b)+l(a,f)l(g,d)l(e,b)+l(d,g)l(a,e)l(f,b)+l(e,a)l(d,f)l(g,b))l(c)+ \\
& + (l(e,f)l(g,a)l(b,c)+l(f,g)l(a,b)l(e,c)+l(g,a)l(b,e)l(f,c)+l(a,b)l(e,f)l(g,c)+l(b,e)l(f,g)l(a,c)+ \\
& + l(f,g)l(e,a)l(b,c)+l(g,a)l(f,b)l(e,c)+l(a,b)l(g,e)l(f,c)+l(b,e)l(a,f)l(g,c)+l(e,f)l(b,g)l(a,c)+ \\
& + l(g,e)l(f,a)l(b,c)+l(a,f)l(g,b)l(e,c)+l(b,g)l(a,e)l(f,c)+l(e,a)l(b,f)l(g,c)+l(f,b)l(e,g)l(a,c))l(d)+ \\
& + (l(f,g)l(a,b)l(c,d)+l(g,a)l(b,c)l(f,d)+l(a,b)l(c,f)l(g,d)+l(b,c)l(f,g)l(a,d)+l(c,f)l(g,a)l(b,d)+ \\
& + l(g,a)l(f,b)l(c,d)+l(a,b)l(g,c)l(f,d)+l(b,c)l(a,f)l(g,d)+l(c,f)l(b,g)l(a,d)+l(f,g)l(c,a)l(b,d)+ \\
& + l(a,f)l(g,b)l(c,d)+l(b,g)l(a,c)l(f,d)+l(c,a)l(b,f)l(g,d)+l(f,b)l(c,g)l(a,d)+l(g,c)l(f,a)l(b,d))l(e)+ \\
& + (l(g,a)l(b,c)l(d,e)+l(a,b)l(c,d)l(g,e)+l(b,c)l(d,g)l(a,e)+l(c,d)l(g,a)l(b,e)+l(d,g)l(a,b)l(c,e)+ \\
& + l(a,b)l(g,c)l(d,e)+l(b,c)l(a,d)l(g,e)+l(c,d)l(b,g)l(a,e)+l(d,g)l(c,a)l(b,e)+l(g,a)l(d,b)l(c,e)+ \\
& + l(b,g)l(a,c)l(d,e)+l(c,a)l(b,d)l(g,e)+l(d,b)l(c,g)l(a,e)+l(g,c)l(d,a)l(b,e)+l(a,d)l(g,b)l(c,e))l(f)
\end{aligned}$$

достаточно задать набор ее коэффициентов

$$\begin{aligned}
& 1/105(((l(e_i, e_j)l(e_k, e_l)+l(e_j, e_k)l(e_i, e_l) +l(e_k, e_i) l(e_j, e_l)) l(e_m, e_n)+ \\
& + (l(e_j, e_k)l(e_l, e_m)+l(e_k, e_l)l(e_j, e_m)+l(e_l, e_j) l(e_k, e_m))l(e_i, e_n) + \\
& + (l(e_k, e_l)l(e_m, e_i)+l(e_l, e_m)l(e_k, e_i)+l(e_m, e_k)l(e_l, e_i)) l(e_j, e_n) + \\
& + (l(e_l, e_m)l(e_i, e_j)+l(e_m, e_i)l(e_l, e_j) +l(e_i, e_l) l(e_m, e_j)) l(e_k, e_n)+ \\
& + (l(e_m, e_i)l(e_j, e_k)+l(e_i, e_j)l(e_m, e_k)+l(e_j, e_m)l(e_i, e_k)) l(e_l, e_n))l(e_o)+ \\
& + ((l(e_j, e_k)l(e_l, e_m)+l(e_k, e_l) l(e_j, e_m)+l(e_l, e_j) l(e_k, e_m))l(e_n, e_o)+ \\
& + (l(e_k, e_l)l(e_m, e_n)+l(e_l, e_m) l(e_k, e_n)+l(e_m, e_k)l(e_l, e_m))l(e_j, e_o) + \\
& + (l(e_l, e_m)l(e_n, e_j) +l(e_m, e_n)l(e_l, e_j) +l(e_n, e_l) l(e_m, e_j)) l(e_k, e_o)+ \\
& + (l(e_m, e_n)l(e_j, e_k)+l(e_m, e_j) l(e_n, e_k)+l(e_j, e_m)l(e_n, e_k)) l(e_l, e_o) + \\
& + (l(e_n, e_j) l(e_k, e_l)+l(e_j, e_k) l(e_n, e_l) +l(e_k, e_n)l(e_j, e_l)) l(e_m, e_o))l(e_i)+ \\
& + ((l(e_k, e_l) l(e_m, e_n)+l(e_l, e_m)l(e_k, e_n) +l(e_m, e_k)l(e_l, e_n)) l(e_o, e_i)+ \\
& + (l(e_l, e_m)l(e_n, e_o) +l(e_m, e_n)l(e_l, e_o) +l(e_n, e_l) l(e_m, e_o))l(e_k, e_i)+ \\
& + (l(e_m, e_n)l(e_o, e_k)+l(e_n, e_o) l(e_m, e_k)+l(e_o, e_m)l(e_n, e_k))l(e_l, e_i) + \\
& + (l(e_n, e_o)l(e_k, e_l) +l(e_o, e_k) l(e_n, e_l) +l(e_k, e_n)l(e_o, e_l)) l(e_m, e_i)+ \\
& + (l(e_o, e_k)l(e_l, e_m)+l(e_k, e_l) l(e_o, e_m)+l(e_l, e_o) l(e_k, e_m))l(e_n, e_i))l(e_j)+ \\
& + ((l(e_l, e_m) l(e_n, e_o)+l(e_m, e_n)l(e_l, e_o) +l(e_n, e_l)l(e_m, e_o))l(e_i, e_j)+ \\
& + (l(e_m, e_n)l(e_o, e_i) +l(e_n, e_o)l(e_m, e_i)+l(e_o, e_m)l(e_n, e_i))l(e_l, e_j) + \\
& + (l(e_n, e_o) l(e_i, e_l) +l(e_o, e_i) l(e_n, e_l) +l(e_i, e_n) l(e_o, e_l))l(e_m, e_j)+ \\
& + (l(e_o, e_i) l(e_l, e_m)+l(e_i, e_l) l(e_o, e_m)+l(e_l, e_o) l(e_i, e_m))l(e_n, e_j)+ \\
& + (l(e_i, e_l) l(e_m, e_n)+l(e_l, e_m)l(e_i, e_n) +l(e_m, e_i)l(e_l, e_n))l(e_o, e_j))l(e_k)+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +((l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n)l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_i) + l(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_o)l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_i) + l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_m)l(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_i))l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) + \\
& + (l(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_o)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) + l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_j) + l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_n)l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_j))l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_k) + \\
& + (l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_m) + l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_m) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_o)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_m))l(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_k) + \\
& + (l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_m)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_n))l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_k) + \\
& + (l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_m)l(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_o) + l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_o) + l(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_o))l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) + \\
& + ((l(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_o)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) + l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_j) + l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_n)l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_j))l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) + \\
& + (l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) + l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_k) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_o)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k))l(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_l) + \\
& + (l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_n) + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_n))l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_l) + \\
& + (l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_o) + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_o) + l(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_o))l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l) + \\
& + (l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n)l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_i) + l(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_o)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i) + l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_i))l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l) + \\
& + ((l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) + l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_k) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_o)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k))l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m) + \\
& + (l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) + l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l) + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l))l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_m) + \\
& + (l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_o) + l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_o) + l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_o))l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_m) + \\
& + (l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_i) + l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_o)l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i) + l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_i))l(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_m) + \\
& + (l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_o)l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) + l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_j) + l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l)l(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_j))l(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m))l(\mathbf{e}_n) = 1/105 \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet (((l_{ij}l_{kl} + l_{jk}l_{il} + l_{ki}l_{jl})l_{mn} + (l_{jk}l_{lm} + l_{kl}l_{jm} + l_{ij}l_{km})l_{in} + (l_{kl}l_{mi} + l_{lm}l_{ki} + l_{mk}l_{li})l_{jn} + (l_{lm}l_{ij} + l_{mi}l_{lj} + l_{il}l_{mj})l_{kn} + (l_{mi}l_{jk} + l_{ij}l_{mk} + l_{jm}l_{ik})l_{ln})l_o + \\
& + ((l_{jk}l_{lm} + l_{kl}l_{jm} + l_{ij}l_{km})l_{no} + (l_{kl}l_{mn} + l_{lm}l_{kn} + l_{mk}l_{ln})l_{jo} + (l_{lm}l_{nj} + l_{mn}l_{lj} + l_{nl}l_{mj})l_{ko} + (l_{mn}l_{jk} + l_{nj}l_{mk} + l_{jm}l_{nk})l_{lo} + (l_{nj}l_{kl} + l_{jk}l_{nl} + l_{kn}l_{jl})l_{mo})l_i + \\
& + ((l_{kl}l_{mn} + l_{lm}l_{kn} + l_{mk}l_{ln})l_{oi} + (l_{lm}l_{no} + l_{mn}l_{lo} + l_{nl}l_{mo})l_{ki} + (l_{mn}l_{ok} + l_{no}l_{mk} + l_{om}l_{nk})l_{li} + (l_{no}l_{kl} + l_{ok}l_{nl} + l_{kn}l_{oi})l_{mi} + (l_{ok}l_{lm} + l_{kl}l_{om} + l_{lo}l_{km})l_{ni})l_j + \\
& + ((l_{lm}l_{no} + l_{mn}l_{lo} + l_{nl}l_{mo})l_{ij} + (l_{mn}l_{oi} + l_{no}l_{mi} + l_{om}l_{ni})l_{lj} + (l_{no}l_{il} + l_{oi}l_{nl} + l_{in}l_{oi})l_{mj} + (l_{oi}l_{lm} + l_{il}l_{om} + l_{lo}l_{im})l_{nj} + (l_{il}l_{mn} + l_{lm}l_{in} + l_{mi}l_{ln})l_{oj})l_k + \\
& + ((l_{mn}l_{oi} + l_{no}l_{mi} + l_{om}l_{ni})l_{jk} + (l_{no}l_{ij} + l_{oi}l_{nj} + l_{in}l_{oj})l_{mk} + (l_{oi}l_{jm} + l_{ij}l_{om} + l_{jo}l_{im})l_{nk} + (l_{ij}l_{mn} + l_{jm}l_{in} + l_{mi}l_{jn})l_{ok} + (l_{jm}l_{no} + l_{mn}l_{jo} + l_{nj}l_{mo})l_{ik})l_l + \\
& + ((l_{no}l_{ij} + l_{oi}l_{nj} + l_{in}l_{oj})l_{kl} + (l_{oi}l_{jk} + l_{ij}l_{ok} + l_{jo}l_{ik})l_{nl} + (l_{ij}l_{kn} + l_{jk}l_{in} + l_{ki}l_{jn})l_{ol} + (l_{jk}l_{no} + l_{kn}l_{jo} + l_{nj}l_{ko})l_{il} + (l_{kn}l_{oi} + l_{no}l_{ki} + l_{ok}l_{ni})l_{jl})l_m + \\
& + ((l_{oi}l_{jk} + l_{ij}l_{ok} + l_{jo}l_{ik})l_{lm} + (l_{ij}l_{kl} + l_{jk}l_{il} + l_{ki}l_{jl})l_{om} + (l_{jk}l_{lo} + l_{kl}l_{jo} + l_{jl}l_{ko})l_{im} + (l_{kl}l_{oi} + l_{lo}l_{ki} + l_{ok}l_{li})l_{jm} + (l_{lo}l_{ij} + l_{oi}l_{lj} + l_{il}l_{oj})l_{km})l_n) = \\
& = 1/15((l_{ijkl}l_{mn} + l_{jklm}l_{in} + l_{klmi}l_{jn} + l_{lmij}l_{kn} + l_{mijk}l_{ln})l_o + \\
& + (l_{jklm}l_{no} + l_{klmn}l_{jo} + l_{lmnj}l_{ko} + l_{mnjk}l_{lo} + l_{njkl}l_{mo})l_i + \\
& + (l_{klmn}l_{oi} + l_{lmno}l_{ki} + l_{mnok}l_{li} + l_{nokl}l_{mi} + l_{oklm}l_{ni})l_j + \\
& + (l_{lmno}l_{ij} + l_{mnoi}l_{lj} + l_{noil}l_{mj} + l_{oilm}l_{nj} + l_{ilmn}l_{oj})l_k + \\
& + (l_{mnoi}l_{jk} + l_{noij}l_{mk} + l_{oijm}l_{nk} + l_{ijmn}l_{ok} + l_{jmno}l_{ik})l_l + \\
& + (l_{noij}l_{kl} + l_{oijk}l_{nl} + l_{ijkn}l_{ol} + l_{jkno}l_{il} + l_{kn oi}l_{jl})l_m + \\
& + (l_{oijk}l_{lm} + l_{ijkl}l_{om} + l_{jklo}l_{im} + l_{kloi}l_{jm} + l_{loij}l_{km})l_n) = \\
& = 1/15(l_{ijk/mn}l_o + l_{jkl/mno}l_i + l_{klmno}l_j + l_{lmnoij}l_k + l_{mnoijk}l_l + l_{noijkl}l_m + l_{oijk/mn}l_n) = l_{oijk/mn},
\end{aligned}$$

т.е. тензор полилинейной формы от семи переменных L_7 .

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ преобразуется тензор L_7 линейной функции от семи переменных.

Пусть линейная функция от семи переменных $l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от семи переменных

$$l(a,b,c,d,e,f,g)=\sum\sum\sum\sum\sum\sum\sum l_{ijklmno}a^ib^jc^kd^le^mf^ng^o=1/105.$$

$$\begin{aligned} & \cdot ((A^T L_2 B \cdot C^T L_2 D + B^T L_2 C \cdot A^T L_2 D + C^T L_2 A \cdot B^T L_2 D) \cdot E^T L_2 F + \\ & + (B^T L_2 C \cdot D^T L_2 E + C^T L_2 D \cdot B^T L_2 E + D^T L_2 B \cdot C^T L_2 E) \cdot A^T L_2 F + \\ & + (C^T L_2 D \cdot E^T L_2 A + D^T L_2 E \cdot C^T L_2 A + E^T L_2 C \cdot D^T L_2 A) \cdot B^T L_2 F + \\ & + (D^T L_2 E \cdot A^T L_2 B + E^T L_2 A \cdot D^T L_2 B + A^T L_2 D \cdot E^T L_2 B) \cdot C^T L_2 F + \\ & + (E^T L_2 A \cdot B^T L_2 C + A^T L_2 B \cdot E^T L_2 C + B^T L_2 E \cdot A^T L_2 C) \cdot D^T L_2 F) \cdot L_1 G + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\mathbf{G}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{C} + \mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{G}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{C} + \mathbf{B}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{E} + \\
& +(\mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{D} + \mathbf{B}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{D} + \mathbf{C}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{D}) \cdot \mathbf{G}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{E} + \\
& +(\mathbf{B}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{G} + \mathbf{C}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{G} + \mathbf{D}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{G}) \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{E} + \\
& +(\mathbf{C}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{G}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A} + \mathbf{D}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{G} \cdot \mathbf{C}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A} + \mathbf{G}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{E} + \\
& +(\mathbf{D}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{B} + \mathbf{G}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{D}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{B} + \mathbf{A}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{G}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}^T \mathbf{L}_2 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{L}_1 \mathbf{F})
\end{aligned}$$

при $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + \dots + a^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + \dots + b^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{c} = c^1 \mathbf{e}_1 + \dots + c^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{d} = d^1 \mathbf{e}_1 + \dots + d^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e} = e^1 \mathbf{e}_1 + \dots + e^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{f} = f^1 \mathbf{e}_1 + \dots + f^n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{g} = g^1 \mathbf{e}_1 + \dots + g^n \mathbf{e}_n$ с тензором L_7 , определяемым тензорами L_2 и L_1 , а относительно базиса $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ в виде линейной формы от семи переменных

$$l(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sum \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijk/mno} a^i b^j c^k d^l e^m f^n g^o = 1/105.$$

$$\begin{aligned} & \cdot (((A'^T L_2' B' \cdot C'^T L_2' D' + B'^T L_2' C' \cdot A'^T L_2' D' + C'^T L_2' A' \cdot B'^T L_2' D') \cdot E'^T L_2' F' + \\ & + (B'^T L_2' C' \cdot D'^T L_2' E' + C'^T L_2' D' \cdot B'^T L_2' E' + D'^T L_2' B' \cdot C'^T L_2' E') \cdot A'^T L_2' F' + \\ & + (C'^T L_2' D' \cdot E'^T L_2' A' + D'^T L_2' E' \cdot C'^T L_2' A' + E'^T L_2' C' \cdot D'^T L_2' A') \cdot B'^T L_2' F' + \\ & + (D'^T L_2' E' \cdot A'^T L_2' B' + E'^T L_2' A' \cdot D'^T L_2' B' + A'^T L_2' D' \cdot E'^T L_2' B') \cdot C'^T L_2' F' + \\ & + (E'^T L_2' A' \cdot B'^T L_2' C' + A'^T L_2' B' \cdot E'^T L_2' C' + B'^T L_2' E' \cdot A'^T L_2' C') \cdot D'^T L_2' F') \cdot L_1' G' + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\mathbf{G}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{A}'\cdot\mathbf{B}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{C}'+\mathbf{A}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{B}'\cdot\mathbf{G}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{C}'+\mathbf{B}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{G}'\cdot\mathbf{A}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{C}')\cdot\mathbf{D}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{E}'+ \\
& +(\mathbf{A}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{B}'\cdot\mathbf{C}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{D}'+\mathbf{B}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{C}'\cdot\mathbf{A}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{D}'+\mathbf{C}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{A}'\cdot\mathbf{B}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{D}')\cdot\mathbf{G}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{E}'+ \\
& +(\mathbf{B}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{C}'\cdot\mathbf{D}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{G}'+\mathbf{C}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{D}'\cdot\mathbf{B}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{G}'+\mathbf{D}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{B}'\cdot\mathbf{C}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{G}')\cdot\mathbf{A}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{E}'+ \\
& +(\mathbf{C}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{D}'\cdot\mathbf{G}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{A}'+\mathbf{D}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{G}'\cdot\mathbf{C}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{A}'+\mathbf{G}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{C}'\cdot\mathbf{D}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{A}')\cdot\mathbf{B}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{E}'+ \\
& +(\mathbf{D}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{G}'\cdot\mathbf{A}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{B}'+\mathbf{G}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{A}'\cdot\mathbf{D}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{B}'+\mathbf{A}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{D}'\cdot\mathbf{G}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{B}')\cdot\mathbf{C}^T\mathbf{L}_2'\mathbf{E}')\cdot\mathbf{L}_1'\mathbf{F}')
\end{aligned}$$

при $\mathbf{a} = a^{1'} \mathbf{e}_1' + \dots + a^{n'} \mathbf{e}_{n'}'$, $\mathbf{b} = b^{1'} \mathbf{e}_1' + \dots + b^{n'} \mathbf{e}_{n'}'$, $\mathbf{c} = c^{1'} \mathbf{e}_1' + \dots + c^{n'} \mathbf{e}_{n'}'$, $\mathbf{d} = d^{1'} \mathbf{e}_1' + \dots + d^{n'} \mathbf{e}_{n'}'$,
 $\mathbf{e} = e^{1'} \mathbf{e}_1' + \dots + e^{n'} \mathbf{e}_{n'}'$, $\mathbf{f} = f^{1'} \mathbf{e}_1' + \dots + f^{n'} \mathbf{e}_{n'}'$, $\mathbf{g} = g^{1'} \mathbf{e}_1' + \dots + g^{n'} \mathbf{e}_{n'}'$ с тензором L_7 , определяемым тензорами L_2' и L_1' .

При этом $\mathbf{e}_i' = \sum e_{ik}^i \mathbf{e}_k$ и $\mathbf{a}^i = \sum e_{ik}^i \mathbf{a}^{k'}$, $k=1, \dots, n$, что соответствует матрице преобразования векторов

$$H = \begin{vmatrix} e_{1'}^1 & e_{2'}^1 & \dots & e_{n'}^1 \\ e_{1'}^2 & e_{2'}^2 & \dots & e_{n'}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{1'}^n & e_{2'}^n & \dots & e_{n'}^n \end{vmatrix},$$

т.е. преобразованиям $A=HA'$, $B=HB'$, $C=HC'$, $D=HD'$, $E=HE'$, $F=HF'$, $G=HG'$ т.е. $A^T=A'^TH^T$, $B^T=B'^TH^T$, $C^T=C'^TH^T$, $D^T=D'^TH^T$, $E^T=E'^TH^T$, $F^T=F'^TH^T$, $G^T=G'^TH^T$.

Тогда имеем

$$l(a,b,c,d,e,f,g) = 1/105 \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot ((A^T L_2 B \cdot C^T L_2 D + B^T L_2 C \cdot A^T L_2 D + C^T L_2 A \cdot B^T L_2 D) \cdot E^T L_2 F + \\ & + (B^T L_2 C \cdot D^T L_2 E + C^T L_2 D \cdot B^T L_2 E + D^T L_2 B \cdot C^T L_2 E) \cdot A^T L_2 F + \\ & + (C^T L_2 D \cdot E^T L_2 A + D^T L_2 E \cdot C^T L_2 A + E^T L_2 C \cdot D^T L_2 A) \cdot B^T L_2 F + \\ & + (D^T L_2 E \cdot A^T L_2 B + E^T L_2 A \cdot D^T L_2 B + A^T L_2 D \cdot E^T L_2 B) \cdot C^T L_2 F + \\ & + (E^T L_2 A \cdot B^T L_2 C + A^T L_2 B \cdot E^T L_2 C + B^T L_2 E \cdot A^T L_2 C) \cdot D^T L_2 F) \cdot L_1 G + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ & + (G^T L_2 A \cdot B^T L_2 C + A^T L_2 B \cdot G^T L_2 C + B^T L_2 G \cdot A^T L_2 C) \cdot D^T L_2 E + \\ & + (A^T L_2 B \cdot C^T L_2 D + B^T L_2 C \cdot A^T L_2 D + C^T L_2 A \cdot B^T L_2 D) \cdot G^T L_2 E + \\ & + (B^T L_2 C \cdot D^T L_2 G + C^T L_2 D \cdot B^T L_2 G + D^T L_2 B \cdot C^T L_2 G) \cdot A^T L_2 E + \\ & + (C^T L_2 D \cdot G^T L_2 A + D^T L_2 G \cdot C^T L_2 A + G^T L_2 C \cdot D^T L_2 A) \cdot B^T L_2 E + \\ & + (D^T L_2 G \cdot A^T L_2 B + G^T L_2 A \cdot D^T L_2 B + A^T L_2 D \cdot G^T L_2 B) \cdot C^T L_2 E) \cdot L_1 F) = 1/105 \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot (((A^T H^T L_2 H B' \cdot C^T H^T L_2 H D' + B^T H^T L_2 H C' \cdot A^T H^T L_2 H D' + C^T H^T L_2 H A' \cdot B^T H^T L_2 H D') \cdot E^T H^T L_2 H F' + \\ & + (B^T H^T L_2 H C' \cdot D^T H^T L_2 H E' + C^T H^T L_2 H D' \cdot B^T H^T L_2 H E' + D^T H^T L_2 H B' \cdot C^T H^T L_2 H E') \cdot A^T H^T L_2 H F' + \\ & + (C^T H^T L_2 H D' \cdot E^T H^T L_2 H A' + D^T H^T L_2 H E' \cdot C^T H^T L_2 H A' + E^T H^T L_2 H C' \cdot D^T H^T L_2 H A') \cdot B^T H^T L_2 H F' + \\ & + (D^T H^T L_2 H E' \cdot A^T H^T L_2 H B' + E^T H^T L_2 H A' \cdot D^T H^T L_2 H B' + A^T H^T L_2 H D' \cdot E^T H^T L_2 H B') \cdot C^T H^T L_2 H F' + \\ & + (E^T H^T L_2 H A' \cdot B^T H^T L_2 H C' + A^T H^T L_2 H B' \cdot E^T H^T L_2 H C' + B^T H^T L_2 H E' \cdot A^T H^T L_2 H C') \cdot D^T H^T L_2 H F') \cdot L_1 H G' + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ & + (G^T H^T L_2 H A' \cdot B^T H^T L_2 H C' + A^T H^T L_2 H B' \cdot G^T H^T L_2 H C' + B^T H^T L_2 H G' \cdot A^T H^T L_2 H C') \cdot D^T H^T L_2 H E' + \\ & + (A^T H^T L_2 H B' \cdot C^T H^T L_2 H D' + B^T H^T L_2 H C' \cdot A^T H^T L_2 H D' + C^T H^T L_2 H A' \cdot B^T H^T L_2 H D') \cdot G^T H^T L_2 H E' + \\ & + (B^T H^T L_2 H C' \cdot D^T H^T L_2 H G' + C^T H^T L_2 H D' \cdot B^T H^T L_2 H G' + D^T H^T L_2 H B' \cdot C^T H^T L_2 H G') \cdot A^T H^T L_2 H E' + \\ & + (C^T H^T L_2 H D' \cdot G^T H^T L_2 H A' + D^T H^T L_2 H G' \cdot C^T H^T L_2 H A' + G^T H^T L_2 H C' \cdot D^T H^T L_2 H A') \cdot B^T H^T L_2 H E' + \\ & + (D^T H^T L_2 H G' \cdot A^T H^T L_2 H B' + G^T H^T L_2 H A' \cdot D^T H^T L_2 H B' + A^T H^T L_2 H D' \cdot G^T H^T L_2 H B') \cdot C^T H^T L_2 H E') \cdot L_1 H F') = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = 1/105 \cdot (((A^T L_2' B' \cdot C^T L_2' D' + B^T L_2' C' \cdot A^T L_2' D' + C^T L_2' A' \cdot B^T L_2' D') \cdot E^T L_2' F' + \\ & + (B^T L_2' C' \cdot D^T L_2' E' + C^T L_2' D' \cdot B^T L_2' E' + D^T L_2' B' \cdot C^T L_2' E') \cdot A^T L_2' F' + \\ & + (C^T L_2' D' \cdot E^T L_2' A' + D^T L_2' E' \cdot C^T L_2' A' + E^T L_2' C' \cdot D^T L_2' A') \cdot B^T L_2' F' + \\ & + (D^T L_2' E' \cdot A^T L_2' B' + E^T L_2' A' \cdot D^T L_2' B' + A^T L_2' D' \cdot E^T L_2' B') \cdot C^T L_2' F' + \\ & + (E^T L_2' A' \cdot B^T L_2' C' + A^T L_2' B' \cdot E^T L_2' C' + B^T L_2' E' \cdot A^T L_2' C') \cdot D^T L_2' F') \cdot L_1 G' + \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned}
&+(G'^T L_2' A' \cdot B'^T L_2' C' + A'^T L_2' B' \cdot G'^T L_2' C' + B'^T L_2' G' \cdot A'^T L_2' C') \cdot D'^T L_2' E' + \\
&+(A'^T L_2' B' \cdot C'^T L_2' D' + B'^T L_2' C' \cdot A'^T L_2' D' + C'^T L_2' A' \cdot B'^T L_2' D') \cdot G'^T L_2' E' + \\
&+(B'^T L_2' C' \cdot D'^T L_2' G' + C'^T L_2' D' \cdot B'^T L_2' G' + D'^T L_2' B' \cdot C'^T L_2' G') \cdot A'^T L_2' E' + \\
&+(C'^T L_2' D' \cdot G'^T L_2' A' + D'^T L_2' G' \cdot C'^T L_2' A' + G'^T L_2' C' \cdot D'^T L_2' A') \cdot B'^T L_2' E' + \\
&+(D'^T L_2' G' \cdot A'^T L_2' B' + G'^T L_2' A' \cdot D'^T L_2' B' + A'^T L_2' D' \cdot G'^T L_2' B') \cdot C'^T L_2' E') \cdot L_1' F'),
\end{aligned}$$

т.е. $L_2' = H^T L_2 H$ и $L_1' = L_1 H$.

Линейная функция седьмой степени аргумента, определенная в L^n соответственно записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ формой $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum \sum \sum \sum \sum \sum l_{ijklmno} a^i a^j a^k a^l a^m a^n a^o = A^T L_2 A \cdot A^T L_2 A \cdot A^T L_2 A \cdot L_1 A$, определяемой тензорами L_2 и L_1 , а относительно базиса $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ формой $l(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum \sum \sum \sum \sum \sum \sum l'_{ijklmno} a'^i a'^j a'^k a'^l a'^m a'^n a'^o = A'^T L_2' A' \cdot A'^T L_2' A' \cdot A'^T L_2' A' \cdot L_1' A'$, определяемой тензорами L_2' и L_1' , причем $L_2' = H^T L_2 H$ и $L_1' = L_1 H$.

Отметим, что тензоры симметрических полилинейных скалярных функций являются функциями тензоров билинейных и линейных симметрических функций, в полной мере определяющих метрические свойства векторного пространства. В работе рассмотрены тензоры симметрических скалярных функций одного, двух, ..., семи векторов, определенных в рамках семимерной векторной алгебры. В случае $n > 7$ в линейных векторных пространствах L^n возможно определение тензоров симметрических скалярных функций большего числа векторов.

8. К вопросу классификации барионов со спином $\frac{1}{2}$ в семимерной физике

Семипараметровые шестимерные унитарные SV_6 преобразования вращения [4] прогнозируют наличие частиц с пространственным спином $J=1/2$, определяемых совокупностями мультиплетов по шесть частиц. Известные частицы со спином $J=1/2$ сосредоточены в мультиплетах из шести лептонов и шести кварков, а также в группе из тридцати барионов [5]. Прогнозируется наличие еще шести барионов со спином $J=1/2$. Их свойства можно пытаться оценить, если проанализировать свойства известных частиц как комбинацию шестикомпонентного мультиплета лептонов и шестикомпонентного мультиплета

барионов со спином $J=1/2$. Вместе с тем квантовые числа лептонов не зафиксированы, чего нельзя сказать, например, в отношении кварков (табл. 1).

Таблица 1.

Кварки						Лептоны					
назв.	I	P	S	C	B	назв.	I	P	S	C	B
u	$\frac{1}{2}$	+	0	0	0	ν_e					
d	$\frac{1}{2}$	+	0	0	0	e					
s	0	+	-1	0	0	μ					
c	0	+	0	1	0	ν_μ					
b	0	+	0	0	-1	τ					
t	0	+	0	0	0	ν_τ					

В табл. 1 приведены общепринятые обозначения частиц и квантовых чисел. Не заполненные клетки таблицы соответствуют неизвестным или подлежащих уточнению значениям величин. Квантовые числа лептонов, очевидно, образуют "чистое поле". Основание для анализа свойств составных частиц могут дать лишь кварки. Для них имеем следующее распределение частиц по квантовым числам (табл. 2).

Таблица 2.

Квантовые числа	Распределение кварков
I	$4_0 + 2_{1/2}$
P	6_+
S	$5_0 + 1_{-1}$
C	$5_0 + 1_1$
B	$5_0 + 1_{-1}$

Семимерное спинорное исчисление [4] дает основание полагать, что то же самое распределение квантовых чисел имеет место для лептонов. Принимая это во внимание, рассмотрим квантовые числа известных барионов со спином $J=1/2$ (табл. 3).

Таблица 3.

I=0					I=1/2					I=1					I=3/2								
наим.	P	S	C	B	наим.	P	S	C	B	наим.	P	S	C	B	наим.	P	S	C	B				
Λ_{1115}	+	-1	0	0	p_{938}^{+}	+	0	0	0	Σ_{1189}^{+}	+	-1	0	0	Δ_{1620}	-	0	0	0				
Λ_{1405}	-	-1	0	0	n_{939}^{0}	+	0	0	0	Σ_{1192}^{0}	+	-1	0	0	Δ_{1910}	+	0	0	0				
Λ_{1600}	+	-1	0	0	Ξ_{1314}^{0}	+	-2	0	0	Σ_{1197}^{-}	+	-1	0	0									
Λ_{1670}	-	-1	0	0	Ξ_{1321}^{-}	+	-2	0	0	Σ_{1660}	+	-1	0	0									
Λ_{1800}	-	-1	0	0	N_{1440}	+	0	0	0	Σ_{1750}	-	-1	0	0									
Λ_{1810}	+	-1	0	0	N_{1535}	-	0	0	0	Σ_{c2455}^{0}	+	0	1	0									
Λ_{c2284}^{+}	+	0	1	0	N_{1650}	-	0	0	0	Σ_{c2455}^{+}	+	0	1	0									
Λ_{c2593}^{+}	-	0	1	0	N_{1710}	+	0	0	0	Σ_{c2455}^{++}	+	0	1	0									
Ω_{c2704}^{0}	+	-2	1	0	Ξ_{c2465}^{+}	+	-1	1	0														
Λ_{b5624}^{0}	+	0	0	-1	Ξ_{c2470}^{0}	+	-1	1	0														

Имеем следующее распределение известных барионов с $J=1/2$ по квантовым числам (табл. 4).

Таблица 4.

Квантовые числа	Распределение известных барионов
I	$10_0 + 10_{1/2} + 8_1 + 2_{3/2}$
P	$22_+ + 8_-$
S	$14_0 + 13_{-1} + 3_{-2}$
C	$22_0 + 8_1$
B	$29_0 + 1_{-1}$

Составим прогноз распределения барионов с $J=1/2$ по квантовым числам, исходя из условия взаимодействия шестикомпонентного мультиплета лептонов и шестикомпонентного мультиплета барионов с $J=1/2$ с пока не установленным распределением частиц по квантовым числам.

Для прогноза распределения барионов с $J=1/2$ по изотопическому спину отметим, что четыре группы таких частиц может образовать лишь взаимодействие двух по изотопическому спину групп лептонов $I \rightarrow (4_0 + 2_{1/2})$ и трех по изотопическому спину групп барионов вида $I \rightarrow (m_0 + n_{1/2} + k_1)$. Распределение известных барионов по изотопическому спину допускает лишь $m=3$, $n=2$, $k=1$. При этом имеем

$$I \rightarrow (4_0 + 2_{1/2})(3_0 + 2_{1/2} + 1_1) = 12_0 + 14_{1/2} + 8_1 + 2_{3/2}.$$

Следовательно, следует считать завершенными мультиплеты барионов с $J=1/2$, имеющие $I=1$ и $I=3/2$, а в мультиплеты с $I=0$ и $I=1/2$ необходимо ввести соответственно 2 и 4 неизвестные частицы.

Для прогноза распределения барионов с $J=1/2$ по четности отметим, что две группы таких частиц может образовать лишь взаимодействие одной по четности группы лептонов $P \rightarrow 6_+$ и двух по четности групп барионов вида $P \rightarrow (m_+ + n_-)$. Распределение известных барионов с $J=1/2$ по четности допускает лишь $m=4$, $n=2$. При этом имеем

$$P \rightarrow 6_+ (4_+ + 2_-) = 24_+ + 12_-.$$

Следовательно, нет завершенных мультиплетов известных барионов с $J=1/2$, а в мультиплеты с P_+ и P_- необходимо ввести соответственно 2 и 4 неизвестные частицы.

Для прогноза распределения барионов с $J=1/2$ по странности отметим, что три группы таких частиц может образовать лишь взаимодействие двух по странности групп лептонов вида $S \rightarrow (5_0 + 1_{-1})$ и двух по странности групп барионов вида $S \rightarrow (m_0 + n_{-1})$. Распределение известных барионов по странности допускает лишь $m=3, n=3$. При этом имеем

$$S \rightarrow (5_0 + 1_{-1})(3_0 + 3_{-1}) = 15_0 + 18_{-1} + 3_{-2}.$$

Следовательно, следует считать завершенным мультиплет известных барионов с $J=1/2$, имеющий $S=-2$, а в мультиплеты с $S=0$ и $S=-1$ необходимо ввести соответственно 1 и 5 неизвестных частиц.

Для прогноза распределения барионов с $J=1/2$ по очарованию отметим, что три по очарованию группы частиц может образовать лишь взаимодействие двух по очарованию групп лептонов $C \rightarrow (5_0 + 1_1)$ и двух по очарованию групп барионов вида $C \rightarrow (m_0 + n_1)$. Распределение известных барионов по очарованию допускает лишь $m=5, n=1$. При этом имеем

$$C \rightarrow (5_0 + 1_1)(5_0 + 1_1) = 25_0 + 10_1 + 1_2.$$

Следовательно, нет завершенных по очарованию мультиплетов известных барионов с $J=1/2$, а в мультиплеты с $C=0, C=1$ и $C=2$ необходимо ввести соответственно 3, 2 и 1 неизвестные частицы.

Для прогноза распределения барионов с $J=1/2$ по боттому отметим, что две группы таких частиц может образовать лишь взаимодействие двух по боттому групп лептонов $B \rightarrow (5_0 + 1_{-1})$ и одной по боттому группы барионов вида $B \rightarrow 6_0$. При этом имеем

$$B \rightarrow (5_0 + 1_{-1}) 6_0 = 30_0 + 6_{-1}.$$

Следовательно, нет завершенных мультиплетов известных барионов с $J=1/2$, а в мультиплеты с $B=0$ и $B=-1$ необходимо ввести соответственно 1 и 5 неизвестных частиц.

Распределение барионов со спином $J=1/2$ по квантовым числам приведено в табл. 5.

Таблица 5.

Квантовые числа	Распределение известных барионов	Распределение неизвестных барионов	Распределение группы барионов
I	$10_0 + 10_{1/2} + 8_1 + 2_{3/2}$	$2_0 + 4_{1/2}$	$12_0 + 14_{1/2} + 8_1 + 2_{3/2}$
P	$22_+ + 8_-$	$2_+ + 4_-$	$24_+ + 12_-$
S	$14_0 + 13_{-1} + 3_{-2}$	$1_0 + 5_{-1}$	$15_0 + 18_{-1} + 3_{-2}$
C	$22_0 + 8_1$	$3_0 + 2_1 + 1_2$	$25_0 + 10_1 + 1_2$
B	$29_0 + 1_{-1}$	$1_0 + 5_{-1}$	$30_0 + 6_{-1}$

Распределим прогнозируемую совокупность квантовых чисел по неизвестным частицам. Для этого отметим, что частицы с $I=1/2$ образует нечетная совокупность кварков u и d , а с $I=0$ – четная. Это фиксирует значение квантовых чисел неизвестных частиц (табл.6).

Таблица 6.

I=0				I=1/2				I=1	I=3/2
наим.	S	C	B	наим.	S	C	B		
Λ^0_{scb}	-1	1	-1	$N^{(++,+)}(u,d)cc$	0	2	0		
Λ^0_{scb}	-1	1	-1	$N^{(-,0)}(d,u)s\bar{b}$	-1	0	-1		
				Ξ^0_{usb}	-1	0	-1		
				Ξ^0_{dsb}	-1	0	-1		

В табл. 4 символом (i, j) обозначены значения величин, которые могут соответствовать лишь одному из столбцов в парах частиц, причем первые значения предпочтительнее. Остается уточнить их распределение по двум N неизвестным частицам.

Возможно построение двух типов мультиплетов из шести известных барионов с $J=1/2$ с найденным распределением квантовых чисел:

1. С очарованной Σ_c частицей ($S=0, C=1, B=0$), тремя Λ ($S=-1, C=0, B=0$) и двумя N ($S=0, C=0, B=0$) частицами;
2. С очарованной Λ_c^+ частицей ($S=0, C=1, B=0$), двумя Λ частицами ($S=-1, C=0, B=0$), двумя N частицами ($S=0, C=0, B=0$) и не очарованной Σ частицей ($S=-1, C=0, B=0$).

Таким образом, SV_6 преобразования прогнозируют наличие в природе шести неизвестных частиц со спином $J=1/2$ с конкретными значениями основных квантовых чисел. Они не традиционны по совокупности значений квантовых

чисел, пяти из них соответствуют значения боттома $B=-1$, три частицы с очарованием, одна из них с двойным, пять частиц – странных.

Остается надеяться, что эксперимент подтвердит эти прогнозы. Это зафиксировало бы также распределение квантовых чисел шестерки взаимодействующих бозонов. Отметим, что некоторые известные, но малоизученные частицы, например, Λ_b , Ξ_b^0 , Ξ_b^- , Ω_b , могли бы являться претендентами на включение в табл. 6 для шести неизвестных частиц. Квантовые числа C и B могут обусловить значительные массы неизвестных частиц ($\approx 3-7$ ГэВ).

Тот же подход к классификации барионов со спином $J=3/2$, где имеет место распределение 16-ти известных частиц по изотопическому спину вида

$$I \rightarrow 4_0 + 5_{1/2} + 3_1 + 4_{3/2}$$

дает двузначное решение:

$$1. I \rightarrow (4_0 + 2_{1/2})(2_0 + 2_{1/2} + 2_1) = 8_0 + 12_{1/2} + 12_1 + 4_{3/2};$$

$$2. I \rightarrow (4_0 + 2_{1/2})(3_0 + 1_{1/2} + 2_1) = 12_0 + 10_{1/2} + 10_1 + 4_{3/2},$$

так что заполнена лишь группа частиц с $I=3/2$ и преждевременно предвидеть результат до заполнения хотя бы одной из первых трех групп частиц. То же самое относится к барионам с большим спином.

9. К вопросу классификации мезонов со спином 1 в семимерной физике

Семипараметровые семимерные ортогональные Q_7 преобразования вращения [4] прогнозируют наличие 63 частиц с пространственным спином $J=1$, определяемых совокупностями мультиплетов по 7 частиц. Известные частицы со спином $J=1$ сосредоточены в мультиплете из 14-ти GAUGE и HIGGS бозонов, а также в группе из 42-х мезонов [5]. Прогнозируется наличие еще 7 мезонов со спином $J=1$. Их свойства можно пытаться оценить, если проанализировать свойства известных частиц как комбинации семикомпонентного мультиплета из GAUGE и HIGGS бозонов и семикомпонентного мультиплета мезонов со спином $J=1$. Вместе с тем квантовые числа GAUGE и HIGGS бозонов не зафиксированы и

они не распределены по двум семикомпонентным мультиплетам с одинаковыми квантовыми числами (табл. 1).

Таблица 1.

назв.	I	P	S	C	B	назв.	I	P	S	C	B
γ	(0,1)	-				g_7	0	-			
g_1	0	-				g_8	0	-			
g_2	0	-				W					
g_3	0	-				Z					
g_4	0	-				H^0					
g_5	0	-				H^+					
g_6	0	-				H^-					

В табл. 1 приведены общепринятые обозначения частицы квантовых чисел. Не заполненные клетки таблицы соответствуют неизвестным или подлежащим уточнению значениям величин. Квантовые числа GAUGE и HIGGS бозонов, очевидно, образуют чистое поле и основание для анализа свойств составных частиц дать не могут. Отметим, однако, что в каждом из двух семикомпонентных мультиплетов GAUGE и HIGGS бозонов присутствуют по крайней мере по четыре частицы с $I=0$ и по пять частиц с отрицательной четностью.

Принимая во внимание это обстоятельство, рассмотрим квантовые числа известных мезонов со спином $J=1$ (табл. 2).

Таблица 2.

I=0					I=1/2					I=1					I=3/2				
наим.	P	S	C	B	наим.	P	S	C	B	наим.	P	S	C	B	наим.	P	S	C	B
ω_{782}	-	0	0	0	K_{892}^{*+}	-	± 1	0	0	ρ_{770}	-	0	0	0					
ϕ_{1020}	-	0	0	0	K_{892}^{*-}	-	± 1	0	0	b_{11235}	+	0	0	0					
h_{11170}	+	0	0	0	K_{892}^{*0}	-	± 1	0	0	a_{11260}	+	0	0	0					
f_{11285}	+	0	0	0	K_{1270}	+	± 1	0	0	ρ_{1450}	-	0	0	0					
f_{11420}	+	0	0	0	K_{1400}	+	± 1	0	0	ρ_{1700}	-	0	0	0					
ω_{1420}	-	0	0	0	K_{1410}^{*-}	-	± 1	0	0										
ω_{1650}	-	0	0	0	K_{1680}^{*-}	-	± 1	0	0										
ϕ_{1680}	-	0	0	0	D_{2007}^{*0}	-	0	± 1	0										
$D_{S1\ 2536}^{+}$	+	± 1	± 1	0	D_{2010}^{*+}	-	0	± 1	0										
$D_{S1\ 2536}^{-}$	+	± 1	± 1	0	D_{2010}^{*-}	-	0	± 1	0										
j/ψ_{3096}	-	0	± 1	0	D_{2420}^{10}	+	0	± 1	0										
$\chi_{C1\ 3910}$	+	0	± 1	0	B_{5325}^{*-}	-	0	0	± 1										
$\psi_{2s\ 3685}$	-	0	± 1	0															
ψ_{3770}	-	0	± 1	0															
ψ_{4040}	-	0	± 1	0															
ψ_{4160}	-	0	± 1	0															
ψ_{4415}	-	0	± 1	0															
$\gamma_{1s\ 9460}$	+	0	0	± 1															
$\chi_{b1\ 9892}$	-	0	0	± 1															
$\gamma_{2s\ 10023}$	+	0	0	± 1															
$\chi_{b1\ 10255}$	-	0	0	± 1															
$\gamma_{3s\ 10355}$	-	0	0	± 1															
$\gamma_{4s\ 10580}$	-	0	0	± 1															
γ_{10860}	-	0	0	± 1															
γ_{11020}	-	0	0	± 1															

Имеем следующее распределение известных мезонов с $J=1$ по квантовым числам (табл. 3).

Таблица 3.

Квантовые числа	Распределение известных мезонов
I	$25_0 + 12_{1/2} + 5_1$
P	$29_- + 13_+$
S	$33_0 + 9_{\pm 1}$
C	$29_0 + 13_{\pm 1}$
B	$33_0 + 9_{\pm 1}$

Составим прогноз распределения мезонов с $J=1$ по квантовым числам, исходя из условия взаимодействия семикомпонентного мультиплета GAUGE и HIGGS бозонов и семикомпонентного мультиплета мезонов с $J=1$ с пока не установленным распределением частиц по квантовым числам.

Для прогноза распределения мезонов с $J=1$ по изотопическому спину отметим, что распределению известных мезонов с $J=1$ по изотопическому спину может соответствовать лишь взаимодействие двух по изотопическому спину групп бозонов вида $I \rightarrow (5_0 + 2_{1/2})$ и трех по изотопическому спину групп мезонов вида $I \rightarrow (m_0 + n_{1/2} + k_1)$. Распределение известных мезонов по изотопическому спину допускает лишь $m=5, n=1, k=1$. При этом имеем

$$I \rightarrow (5_0 + 2_{1/2})(5_0 + 1_{1/2} + 1_1) = 25_0 + 15_{1/2} + 7_1 + 2_{3/2}.$$

Следовательно, следует считать завершенным мультиплет известных мезонов с $J=1$, имеющий $I=0$, а в мультиплеты с $I=1/2, I=1$ и $I=3/2$ необходимо ввести соответственно три, две и две неизвестные частицы. Из 14-ти GAUGE и HIGGS бозонов 10 частиц должны иметь $I=0$, а четыре частицы $I=1/2$ или две частицы $I=1/2$ и две частицы $I=1$.

Для прогноза распределения мезонов с $J=1$ по четности отметим, что распределению известных мезонов с $J=1$ по четности может соответствовать лишь взаимодействие двух по четности групп частиц вида $P \rightarrow (5_- + 2_+)$ и одной по четности группы вида $P \rightarrow 7_+$. При этом имеем

$$P \rightarrow 7_+ (5_- + 2_+) = 35_- + 14_+.$$

Следовательно, нет завершенных мультиплетов известных мезонов с $J=1$ по четности, а в мультиплеты с P_- и P_+ необходимо ввести соответственно 6 и 1 неизвестные частицы. Вероятно, все четырнадцать GAUGE и HIGGS бозонов имеют отрицательную четность или десять частиц имеют отрицательную, а четыре частицы – положительную четность.

Для прогноза распределения мезонов с $J=1$ по странности отметим, что распределению известных мезонов с $J=1$ по странности могут соответствовать взаимодействия двух типов:

1. $S \rightarrow (6_0 + 1_{\pm 1})(6_0 + 1_{\pm 1}) = 36_0 + 12_{\pm 1} + 1_{\pm 2};$
2. $S \rightarrow (5_0 + 2_{\pm 1})7_0 = 35_0 + 14_{\pm 1}.$

Следовательно, преждевременно предвидеть результат до заполнения хотя бы одной из трех групп частиц. Во всяком случае нет завершенных мультиплетов известных мезонов с $J=1$ по странности, а в мультиплеты с $S=0$ и $S=\pm 1$ необходимо ввести не менее двух и трех неизвестных частиц соответственно. Вероятно две или четыре частицы из числа GAUGE и HIGGS бозонов имеют значение $S=\pm 1$, хотя не исключен вариант отсутствия в их составе странных частиц.

Для прогноза распределения мезонов с $J=1$ по очарованию отметим, что распределению известных мезонов с $J=1$ по очарованию может соответствовать лишь взаимодействие:

$$C \rightarrow (5_0 + 2_{\pm 1})7_0 = 35_0 + 14_{\pm 1}.$$

Следовательно, нет завершенных мультиплетов известных мезонов с $J=1$ по очарованию, а в мультиплеты с $C=0$ и $C=\pm 1$ необходимо ввести соответственно 6 и 1 неизвестные частицы. Вероятно, четыре частицы из числа GAUGE и HIGGS бозонов имеют значение $C=\pm 1$, хотя не исключен вариант отсутствия в их составе очарованных частиц.

Для прогноза распределения мезонов с $J=1$ по боттому отметим, что распределение известных мезонов с $J=1$ по боттому могут соответствовать взаимодействия двух типов:

1. $B \rightarrow (6_0 + 1_{\pm 1})(6_0 + 1_{\pm 1}) = 36_0 + 12_{\pm 1} + 1_{\pm 2};$
2. $B \rightarrow (5_0 + 2_{\pm 1})7_0 = 35_0 + 14_{\pm 1}.$

Следовательно, преждевременно предвидеть результат до заполнения хотя бы одной из трех групп частиц. Во всяком случае, нет завершенных мультиплетов известных мезонов с $J=1$ по боттому, а в мультиплеты с $B=0$ и $B=\pm 1$ необходимо ввести не менее двух и трех неизвестных частиц соответственно. Вероятно, две или четыре частицы из числа GAUGE и HIGGS бозонов, имеют значение $B=\pm 1$, хотя не исключен вариант отсутствия в их составе боттомных частиц.

Распределение мезонов со спином $J=1$ по квантовым числам приведено в табл. 4.

Таблица 4.

Квантовые числа	Распределение известных мезонов	Распределение неизвестных мезонов	Распределение группы мезонов
I	$25_0 + 12_{1/2} + 5_1$	$3_{1/2} + 2_1 + 2_{3/2}$	$25_0 + 15_{1/2} + 7_1 + 2_{3/2}$
P	$29_- + 13_+$	$6_- + 1_+$	$35_- + 14_+$
S	$33_0 + 9_{\pm 1}$	$2_0 + 5_{\pm 1} (3_0 + 3_{\pm 1} + 1_{\pm 2})$	$35_0 + 14_{\pm 1} (36_0 + 12_{\pm 1} + 1_{\pm 2})$
C	$29_0 + 13_{\pm 1}$	$6_0 + 1_{\pm 1}$	$35_0 + 14_{\pm 1}$
B	$33_0 + 9_{\pm 1}$	$2_0 + 5_{\pm 1} (3_0 + 3_{\pm 1} + 1_{\pm 2})$	$35_0 + 14_{\pm 1} (36_0 + 12_{\pm 1} + 1_{\pm 2})$

Отметим, что построение мультиплетов из семи взаимодействующих известных мезонов с $J=1$ преждевременно до уточнения распределения мезонов по квантовым числам.

Литература

1. Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996. – 244с.
2. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. – М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.-416с.
3. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979, 512с.
4. Korotkov A.V. Elements of hepto-dimensional vector and spinor calculus. – Novocherkassk: "Nok", 2000. – 321 p.
5. Review of Particle Physics: C.Caso et al. (Particle Data Group), European Physical Journal C3, 1 (1998) .

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Симметрические скалярные и векторные функции в семимерной векторной алгебре	3
2. Полилинейные скалярные функции	7
3. Инварианты симметричных полилинейных скалярных функций	11
4. Поликвадратичные формы	14
5. Инварианты полилинейных форм	17
6. Симметричные полилинейные скалярные функции и формы	19
7. Преобразование тензоров симметричных полилинейных скалярных функций и форм	42
8. К вопросу классификации барионов со спином $\frac{1}{2}$ в семимерной физике	57
9. К вопросу классификации мезонов со спином 1 в семимерной физике ...	62
Литература	66

Об авторе

Коротков Анатолий Васильевич, научный руководитель Международного Центра теоретической физики, г. Новочеркасск, доктор физико-математических наук, академик Международной Академии системных исследований (МАСИ).

Длительное время работал в ОКТБ "Старт" и "Орбита" в г. Новочеркасске. Область научных интересов – обоснование семимерного векторного исчисления (семимерной векторной алгебры, семимерной дифференциальной геометрии и семимерной теории поля) как математической базы многомерной физической теории.

346421, Ростовская обл., г. Новочеркасск, пр. Баклановский, 180-13.
Тел. (86352) 6-52-29. Факс (86352) 2-78-85.

Коротков Анатолий Васильевич

**Симметричные полилинейные скалярные
функции и формы**

Подписано в печать 20.12.2004 г.
Формат 60х90 1/16. Гарнитура "Таймс".
Усл. п. л. 4.25. Тираж 200 экз. Зак. _____.

Учебно-производственный центр "НАБЛА"
при Новочеркасском государственном техническом университете.
Изд. лицензия ЛР № 020765 от 30.03.1993г.
Типография Новочеркасского государственного технического университета
Адрес издательства и типографии:
346400 г. Новочеркасск, ГСП-1, ул. Просвещения, 132.